Inversion

L'harmonie des cercles

Jean-Pierre Boudine

edp sciences

Du même auteur

La géométrie de la chambre à air – Sciences & Vie Junior et Vuibert – 1998
Homo Mathematicus – Vuibert – 2000
Le Paradoxe de Fermi – Gallimard Poche – 2017
L'Appel des maths 1 Nombres – Cassini – 2019
L'Appel des Maths 2 Géométrie – Cassini – 2020

Illustration de couverture : Chaîne de cercles inscrits entre deux cercles, lieu des centres, lieu des points de contacts – © *Malgame.*

Imprimé en France

ISBN (papier) : 978-2-7598-3338-2 – ISBN (ebook) : 978-2-7598-3339-9

Le Diable a fait un miroir.
Déformant bien entendu.
Pire que cela, inversant.
Tout ce qui s'y reflète de beau devient hideux.
Tout ce qui y paraît de mauvais semble irrésistiblement séduisant.

Michel Tournier, *Le vent Paraclet*
à propos de « La Reine des Neiges » d’Andersen.

Table des matières

Introduction

Ce livre est destiné aux collégiens et lycéens qui participent à des clubs de mathématiques, aux enseignants qui les animent, et aux collègues curieux, en particulier ceux investis dans les « laboratoires de mathématiques » qui, à l'initiative du ministère, se créent aujourd'hui dans nombre d'établissements [1]. Il pourra aussi, j'espère, aider les enseignants qui préparent le CAPES et intéresser des adultes aimant les mathématiques pour elles-mêmes.

Par conséquent les questions y sont abordées sous l'angle de la curiosité, de la découverte, du plaisir d'une activité de recherche libre, qui ne cesse pourtant pas d'être à proprement parler une *discipline* exigeante.

Un club de maths n'est ni une structure de soutien pour des élèves « en difficulté » ni une écurie d'entraînement aux concours généraux ou aux olympiades internationales. C'est un moment de la semaine (une heure trente, par exemple) où des volontaires de « niveaux » variés se réunissent avec un animateur enseignant pour faire des mathématiques.

Je connais des clubs où viennent des filles et des garçons de classe de seconde, de première et de terminale, mêlées. La classe

1. https ://eduscol.education.fr/1469/laboratoires-de-mathematiques.

de troisième, également, est particulièrement propice à cette activité parce que c'est sans doute vers quinze ans que les jeunes sont les plus disponibles aux activités mathématiques.

Dans ce livre, il s'agit de partir à la découverte d'une transformation particulièrement intéressante, l'Inversion. Relativement aux autres questions de géométrie abordées en collège et en lycée, c'est un sujet moderne. Elle apparaît et prend forme au dix-neuvième siècle.

Elle ne doit donc rien à Euclide ni aux grands géomètres de l'Antiquité, contrairement à toute la géométrie des figures planes, ou des solides de l'espace, aux coniques, etc. On peut le comprendre car c'est une théorie *non linéaire*. Les images de trois points alignés ne sont pas, en général, trois points alignés. L'image d'un milieu n'est pas le milieu des images. Les images de deux droites parallèles ne sont pas des droites (ni des cercles) parallèles, etc.

Mais contrairement à la géométrie des figures planes, la géométrie de l'inversion ouvre sur quantité de questions que l'on peut rencontrer à l'université : géométrie projective, groupe circulaire, géométrie hyperbolique, etc.

Dans ce livre, l'inversion est traitée comme elle l'était au lycée jusqu'en 1972, date à laquelle elle a disparu des radars, éliminée par la réforme dite « des maths modernes ». Les connaissances requises sont accessibles en classe de troisième (à l'exception du dernier chapitre, sur l'écart inversif). Certaines sont rappelées (évoquées) dans le chapitre RÉSU. La lectrice et le lecteur constateront qu'il n'y a pas de « cours » : tout commence et tout finit par des questions, tout au plus introduites par des définitions. Plus loin, il y a les réponses, en général assez complètes, mais qui contiennent souvent d'autres questions destinées à soutenir la vigilance du lecteur. Le mot « Scholie » signifie « commentaire », en plus snob.

Ces réponses sont des démonstrations et le style même des démonstrations mathématiques est difficile à appréhender pour le débutant. J'imagine que l'élève aura participé à la recherche de la réponse en club, avec l'aide de l'animateur enseignant, et que, s'il y a quelque chose qui le tracasse, ou qui, au contraire, lui plaît, il revisite le sujet chez lui. Dans ce cas, elle ou il aura intérêt à refaire la figure, mais pas à l'identique. J'utilise Geogebra, qui offre un grand nombre d'outils de constructions : médiatrice, perpendiculaire, bissectrices, mener les tangentes, faire une symétrie... permettant d'aller plus vite à l'essentiel (même si, ces constructions élémentaires, il FAUT savoir les faire avec une règle et un compas). Dans le livre, les figures ne sont pas en couleur mais dans l'idéal, la couleur est très utile (et agréable).

Celle ou celui qui étudiera tout le livre sera devenu, je l'espère, un *expert*... et continuera sa route.

En mathématiques (comme en musique), rien n'est vraiment facile. On ne comprend tout de suite... que ce que l'on savait déjà. Et on ne comprend finalement, que ce qu'on a démontré soi-même, à sa manière (ne serait-ce qu'en changeant le nom des points). Le bonheur, c'est quand une réponse entraîne une autre question, à laquelle on ne sait pas répondre... et l'enseignant non plus.

En maints endroits le lecteur pourra trouver le texte insuffisamment clair, voire maladroit ou erroné.

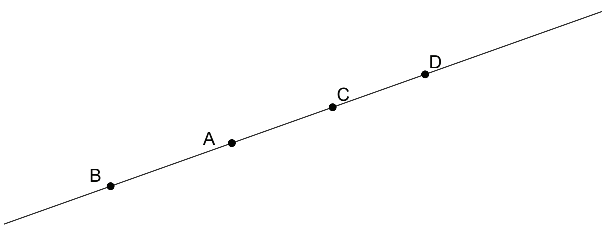
J'accueillerai volontiers les observations à l'adresse suivante : « appeldesmaths@gmail.com ».

Chapitre 1

Birapport

1.1 Définitions, propriétés

Soient quatre points distincts A, B, C, D d'une droite.



On appelle **birapport** de ces quatre points, ou parfois birapport de C et D par rapport à A et B, et on note $[A,B,C,D]$, le nombre réel :

$r = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$, que l'on peut aussi écrire : $r = \dfrac{\overline{CA} \cdot \overline{DB}}{\overline{CB} \cdot \overline{DA}}$.

Comme il s'agit de mesures algébriques, la droite est supposée porter un repère. Mais comme le birapport ne fait intervenir que des quotients de mesures algébriques, il ne dépend ni de l'orientation choisie, ni de l'unité de longueur (ni de l'origine, pourquoi ?).

Il faut bien comprendre comment est écrite la formule. Les points C et D sont les origines des segments, dont A et B sont les extrémités. L'ordre des points compte évidemment, par exemple $[A, B, C, D] \neq [A,C,B,D]$. Le second, qui est le birapport de B et D par rapport à A et C, vaut $r = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$ et ce n'est pas, en général, la même quantité.

Comme il y a 24 manières [1] de ranger quatre objets (ici, quatre lettres), on pourrait s'attendre à former, avec ces quatre points, 24 birapports différents. Mais, comme nous le verrons, certaines permutations de lettres ne changent pas le birapport.

1.1.1 Questions

Question 1

Montrez que r est différent de 0 et de 1.

Question 2

Montrez que le birapport de A, B par rapport à C, D est le même que celui de C, D par rapport à A, B, c'est-à-dire : $[C,D,A,B] = [A,B,C,D]$.

1. Il y a deux manières de ranger deux lettres : A,B et B,A, six manières d'en ranger trois : A, B, C; A, C, B; B, A, C; B, C, A; C, A, B; C, B, A et pour quatre lettres...

Question 3

Montrez que les 24 manières de ranger les quatre points ne donnent au plus que 6 valeurs correspondantes du birapport, liées entre elles par des formules simples.

N.B. Cet exercice nécessite une assez longue exploration qui relève plus de l'analyse combinatoire et de l'algèbre que de la géométrie. On peut trouver cela amusant, comme on peut le trouver ennuyeux. Il est permis de se contenter de regarder le résultat (les 6 valeurs).

Question 4

Montrez que pour certaines valeurs de r, ces six valeurs ne sont pas toutes distinctes.

Expression analytique

Si dans un repère les points A, B, C, D ont des abscisses a, b, c, d, le birapport $[A,B,C,D]$ de (C, D) par rapport à (A,B) s'écrit... (faites la transcription).

Projection

Si l'on projette orthogonalement, ou parallèlement à une direction quelconque les points A, B, C, D sur une droite (γ), en A', B', C', D', le birapport est conservé, puisque la formule ne fait intervenir que des quotients de segments et que les nouveaux segments sont proportionnels aux anciens (Thalès) : $[A,B,C,D] = [A',B',C',D']$.

Question 5

Soient trois points A, B, C, supposés distincts, et r, un réel. Peut-on toujours trouver un point D tel que $[A, B, C, D] = r$? Ce point est-il unique ?

Question 6

Soient quatre points tels que, en prenant l'origine en A, les abscisses de C, B, D soient en progression géométrique de raison $k \neq 0$. Combien vaut le birapport $[A, B, C, D]$?

Du birapport de quatre points au birapport de quatre droites

C'est avec la propriété suivante que l'on commence à voir l'importance de la notion de birapport.

Appelons **faisceau de droites** la donnée de quatre droites distinctes et concourantes.

Question 7

Soient quatre points alignés, A, B, C, D, et un cinquième point, O, non situé sur cette droite, exprimez le birapport $[A,B,C,D]$ en fonction des angles des droites $(OA), (OB), (OC)$ et (OD).

Ce résultat permet de parler du birapport d'un faisceau de droites. On note $[(OA),(OB),(OC),(OD)] = r$

Division harmonique

Lorsque $[A,B,C,D] = r = -1$, on dit que les quatre points forment une **division harmonique**. Les points C et D sont alors **conjugués harmoniques** par rapport à A et B.

Dans ce cas on a $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$, c'est-à-dire que C et D sont les deux points qui divisent le segment $[AB]$ dans un rapport de longueurs (donc positif) donné.

On a aussi $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ c'est-à-dire $[C,D,A,B] = -1$, donc A et B sont également conjugués par rapport à C et D.

> Étant donné un point O en dehors de la droite (AB), les quatre droites (OA),(OB),(OC),(OD) constituent un **faisceau harmonique**, chacune étant appelée un **rayon** du faisceau.

Question 8

Prouvez que si $[A,B,C,D] = -1$, AB est la moyenne harmonique des longueurs AC et AD (relation de Descartes) et que, I étant le milieu de $[AB]$, la longueur IA est la moyenne géométrique des longueurs IC et ID (relation de Newton). Dans les deux cas, formulez et démontrez la réciproque.

Question 9

Montrez que, si $[A,B,C,D] = -1$ (division harmonique), on a des informations sur l'ordre dans lequel sont disposés ces points.

Question 10

D'un point A on mène les tangentes à un cercle de centre O, en E et F. On note P et Q les intersections de (AO) avec le cercle, et B l'intersection de $[EF]$ avec (AO). Montrez que $[P,Q,B,A] = -1$.

Question 11

Dans un triangle ABC, on note D le pied de la bissectrice intérieure de A et E le pied de la bissectrice extérieure. Montrez que $[B, C, D, E] = -1$.

Question 12

Dans un triangle ABC on note D le pied de la bissectrice intérieure de A, I le centre du cercle inscrit et I_a le centre du cercle exinscrit tangent à $[BC]$. Montrez que $[A,D,I,I_a] = -1$.

Question 13

Sachant que $[A,B,C,D] = -1$ et que C est le milieu de $[AB]$, déterminez la position du point D. Montrez comment ce résultat permet de construire le conjugué harmonique d'un point.

Question 14

Montrez que si (OA),(OB),(OC),(OD) est un faisceau harmonique et si les rayons conjugués (OC) et (OD) sont perpendiculaires, ils sont les bissectrices des droites (OA) et (OB).

Question 15

Sur le côté $[BC]$ d'un triangle ABC on a un point D et un point E tels que $BD = 2, DE = 3, EC = 6$. Les angles $\widehat{BAD}$, $\widehat{DAE}$ et $\widehat{EAC}$ sont égaux. Combien vaut cet angle ?

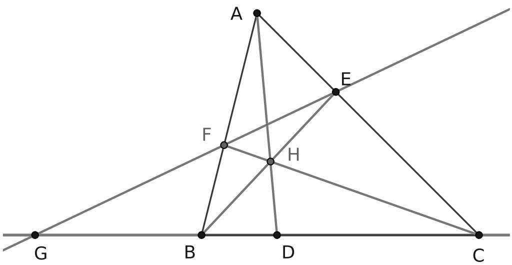
Peut-on choisir la position des points D et E sur $[BC]$ pour que cet angle mesure $\pi/6$?

Indication (pour éviter de chercher sur Internet) :

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Question 16

Soient un triangle ABC et trois céviennes[2] (AD), (BE), (CF), concourantes en H. La droite (EF) coupe (BC) en un point G. Montrez que $[G,D,B,C] = -1$.



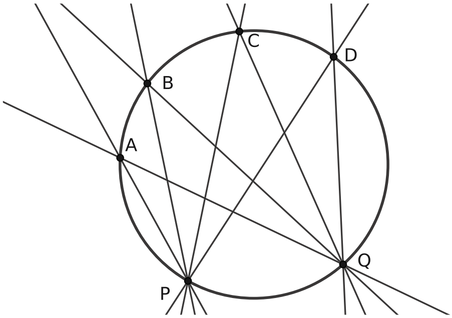
Question 17

On sait (voir RÉSU 4) que dans un triangle, le centre du cercle circonscrit O, le centre de gravité, point de concours des médianes, G, l'orthocentre H et ω le centre du cercle d'Euler (ou cercle des neuf points), sont alignés. C'est la « droite d'Euler ». Montrez que $[H, G, O, \omega] = -1$.

Question 18

Montrez que, quatre points A,B,C, D étant donnés sur un cercle, le birapport du faisceau $[(PA), (PB),(PC), (PD)]$ ne dépend pas du choix du point P sur le cercle.

2. On appelle cévienne une droite qui passe par un sommet d'un triangle.



Question 19

Montrez que si deux faisceaux de droites ont le même birapport et une droite commune, les autres droites homologues se coupent suivant trois points alignés. Autrement dit : sachant que $[(A\alpha),(A\beta),(A\gamma),(A\delta)] = [(B\alpha'),(B\beta'),(B\gamma'),(B\delta')]$, que $(A\alpha) = (B\alpha')$, que $(A\beta)$ et $(B\beta')$ se coupent en X, $(A\gamma)$ et $(B\gamma')$ en Y, $(A\delta)$ et $(B\delta')$ en Z, alors les points X, Y, Z sont alignés.

1.1.2 Réponses

Réponse 1

Pour que $r = 0$ il faut que $C = A$ ou $D = B$, mais les points sont distincts, donc $r \neq 0$.

Si $r = 1$, $\overline{CA}/\overline{CB} = \overline{DA}/\overline{DB}$. Cela signifierait que C et D sont deux points distincts divisant le segment $[AB]$ dans le même rapport de mesures algébriques. Mais il n'y a qu'un seul tel point (tandis qu'il y en a deux s'il s'agit de longueurs), donc $r \neq 1$.

Réponse 2

Il s'agit, dans la formule de définition, d'échanger C et A, ainsi que D et B. Donc de comparer $\dfrac{\overline{CA}\cdot\overline{DB}}{\overline{CB}\cdot\overline{DA}}$ et $\dfrac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{\overline{AD}\cdot\overline{BC}}$. Ces quantités sont clairement égales.

Réponse 3

Il s'agit de développer les constatations de la question 2.

Nous notons $t_{i,i+1}$ la permutation de deux positions consécutives des quatre lettres (avec la convention que la position qui suit la quatrième, est la première).

On observe sur la formule que $t_{1,2}$ comme $t_{3,4}$ produisent un passage à l'inverse. Si on les applique successivement, rien ne change, c'est ce qui est vu dans la réponse 2 : si $[A,B,C,D] = r$, $t_{1,2}(r) = t_{3,4}(r) = 1/r$ et $[B,A,D,C] = t_{1,2}\circ t_{3,4}(r) = r$. De même, la valeur de $[C,B,D,A]$ est l'inverse de la valeur de $[B,C,D,A]$.

Que se passe-t-il si on permute les lettres en position 2 et 3 avec $t_{2,3}$? Le calcul est un peu moins évident. Nous allons montrer que $t_{2,3}(r) = 1 - r$.

$$\frac{\overline{CA}\cdot\overline{DB}}{\overline{CB}\cdot\overline{DA}} + \frac{\overline{AB}\cdot\overline{DC}}{\overline{CB}\cdot\overline{DA}} = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{DB}+\overline{AB}.\overline{DA}+\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{CB}\cdot\overline{DA}}.$$

$$= \frac{\overline{CA}\cdot\overline{DA}+\overline{AB}\cdot\overline{DA}}{\overline{CB}\cdot\overline{DA}} = \frac{\overline{DA}\cdot\overline{CB}}{\overline{CB}\cdot\overline{DA}} = 1.$$

Nous avons donc deux permutations remarquables, outre l'identité. L'une passe à l'inverse, l'autre à la différence avec 1.

$t_{3,4}(r) = 1/r$ et $t_{2,3}(r) = 1 - r$.

Ici les permutations de quatre lettres sont rangées, par ligne, de manière à appliquer successivement $t_{3,4}$ (en permutant les deux dernières lettres) et $t_{2,3}$ (en permutant les deux et trois).

$[A,B,C,D]$, $[A,B,D,C]$, $[A,D,B,C]$, $[A,D,C,B]$, $[A,C,D,B]$, $[A,C,B,D]$
$[B,C,D,A]$, $[B,C,A,D]$, $[B,A,C,D]$, $[B,A,D,C]$, $[B,D,A,C]$, $[B,D,C,A]$
$[C,D,A,B]$, $[C,D,B,A]$, $[C,B,D,A]$, $[C,B,A,D]$, $[C,A,B,D]$, $[C,A,D,B]$
$[D,A,B,C]$, $[D,A,C,B]$, $[D,C,A,B]$, $[D,C,B,A]$, $[D,B,C,A]$, $[D,B,A,C]$

On passe d'une ligne à l'autre en permutant circulairement, ce qui transforme le birapport r en $r/(r-1)$. On peut alors faire le tableau des valeurs obtenues.

r	$1/r$	$1-1/r$	$r/(r-1)$	1/(1−r)	$1-r$
$r/(r-1)$	$1-1/r$	$1/r$	r	$1-r$	$1/(1-r)$
r	$1/r$	$1-1/r$	$r/(r-1)$	$1/(1-r)$	$1-r$
$r/(r-1)$	$1-1/r$	$1/r$	r	$1-r$	$1/(1-r)$

On retrouve bien au maximum six valeurs distinctes du birapport, sur les 24 permutations.

Réponse 4

En effet, on peut avoir $r = 1/r$ soit $r^2 = 1$. La valeur 1 est impossible, mais $r = -1$ ne donne que trois valeurs distinctes : $-1, 2, 1/2$. Pour $r = 2$ on a les mêmes trois valeurs, et aussi pour $r = 1/2$. Y a-t-il d'autres cas ?

Réponse 5

Nous savons que si $r = 0$, ou si $r = 1$, il ne peut y avoir de solution. Autrement, prenons l'origine en A et posons b et c $(b \neq c)$ abscisses de B et de C, puis x l'abscisse du point inconnu. L'équation en x est

$$\frac{c \cdot (b-x)}{x \cdot (b-c)} = r\cdot$$

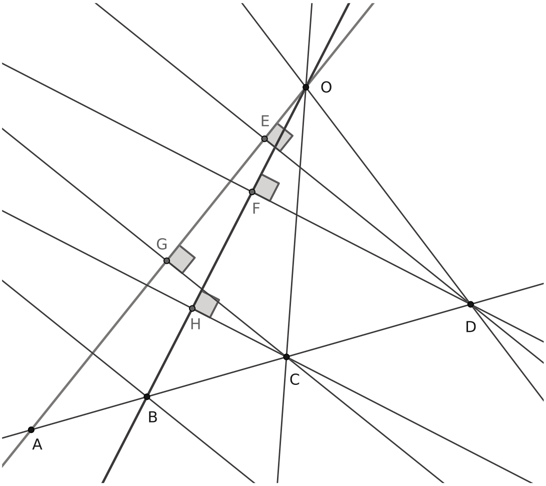
Elle conduit à $x(rb-rc+c) = cb$. Cette équation est sans solution si $r = c/(c-b)$. Pour toute autre valeur de r, il existe une solution unique $x = bc/(rb - rc + c)$. Par exemple, pour $c = 5$,$b = 6$, il n'existe pas de quatrième point, D, tel que $[A,B,C,D] = -5$. Nous verrons plus loin un cas plus significatif.

Réponse 6

On trouve $r = -1/k$. On peut faire une figure pour $k = -1/2$.

Réponse 7

Montrons que $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DA}} = \dfrac{\sin\widehat{AOC}}{\sin\widehat{BOC}}\dfrac{\sin\widehat{BOD}}{\sin\widehat{AOD}}$. Comme le sinus d'un angle de sens positif et inférieur à π est positif, nous pouvons écrire des rapports de longueur.



On a $\sin\widehat{AOC} = GC/OC$ et $\sin\widehat{BOC} = HC/OC$, donc $\sin\widehat{AOC}/\sin\widehat{BOC} = GC/HC$. De même, $\sin\widehat{BOD} = FD/OD$, $\sin\widehat{AOD} = ED/OD$: donc $\sin\widehat{BOD}/\sin\widehat{AOD} = FD/ED$.

D'autre part les triangles AED et AGC sont semblables, de même que les triangles BFD et BHC, donc (voir RÉSU 1) $DE/DA = CG/CA$ de même que $FD/DB = HC/CB$, ce qui entraîne la relation annoncée.

Scholie

Ce résultat a des conséquences remarquables, qu'il convient de méditer ! Premièrement, il permet de parler, en partant du birapport des points $[A,B,C,D]$ d'une droite (d), du birapport de ce qu'on appellera le faisceau des droites $[(OA),(OB),(OC),(OD)]$. Ce sera le même nombre quel que soit le point O non situé sur la droite (d) du plan !

Ensuite, dès lors qu'un faisceau de droites d'origine P ayant un certain birapport r est donné, quelle que soit la transversale qui coupera ces droites en X,Y,Z,T, le birapport de ces quatre points sera le même réel r.

Réponse 8

On a : $\overline{CA}.\overline{DB}/\overline{CB}.\overline{DA} = -1$, donc, en prenant l'origine en A : $-c(b-d) = -(b-c)(-d)$ soit $dc - bc = db - dc$ ou $2dc = db + bc$, et en divisant par bcd, $2/b = 1/c + 1/d$ ce qui est la moyenne harmonique, soit encore

$$2/\overline{AB} = 1/\overline{AC} + 1/\overline{AD}.$$

C'est Descartes qui a fait cette observation.

Si l'on prend l'origine au milieu de $[AB]$, l'abscisse de B sera x, celle de A, $-x$, celle de C, y et celle de D, z. On trouve alors, après simplifications, $y.z = x^2$ c'est-à-dire

$$IA^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$$

ce qui prouve en particulier que C et D sont sur la même demi-droite d'origine I. Cette dernière relation est attribuée à Newton. On vérifie que l'on a des équivalences :

$$[A, B, C, D] = -1 \iff \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}.$$

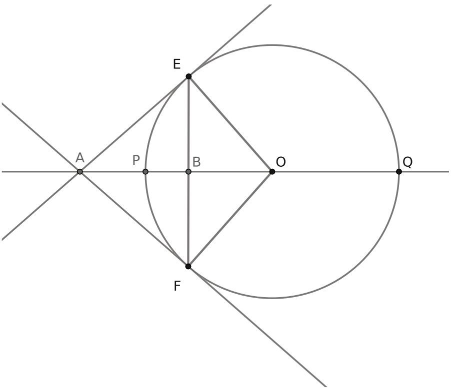
$$[A, B, C, D] = -1 \iff IA^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}.$$

Réponse 9

Si $[A,B,C,D]$ est une division harmonique, le fait que $\overline{CA}/\overline{CB}$ et $\overline{DA}/\overline{DB}$ soient opposés signifie que C et D sont les deux points qui divisent le segment $[AB]$ dans le même rapport de longueur. Les segments $[AB]$ et $[CD]$ s'intersectent. De plus, le segment $[CD]$ est tout entier sur l'une des demi-droites définies par le milieu de $[AB]$. En effet, si $CA > CB$ (longueurs), on doit avoir $DA > DB$. Et si C est au milieu du segment ?

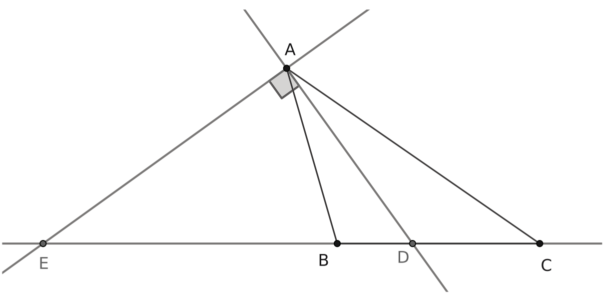
Réponse 10

Les triangles rectangles OEA et OBE sont semblables, donc $OB/OE = OE/OA$, soit $OB \cdot OA = OE^2 = R^2 = OP^2$ ce qui, par la relation de Newton (voir page 23), signifie que $[A,B,P,Q]$ est une division harmonique.



Réponse 11

On sait (voir RÉSU 1) que $DB/DC = AB/AC = EB/EC$, en longueurs. Comme D est nécessairement sur le segment $[BC]$, en mesure algébrique, $\overline{DB}/\overline{DC} = -\overline{EB}/\overline{EC}$, donc $\overline{DB}/\overline{DC}$: $\overline{EB}/\overline{EC} = -1$, CQFD.



Réponse 12

Il suffit d'appliquer le résultat de la question précédente au triangle ABD dont (BI) et (BI_a) sont les bissectrices.

Réponse 13

Il n'y a pas de point D, puisque $\overline{CA} = -\overline{CB}$, il faudrait que D vérifie $\overline{DA} = \overline{DB}$, mais $\overline{DB} = \overline{DA} + \overline{AB}$ donc il faudrait que $\overline{AB} = 0$, ce qui n'est pas vrai, puisque les points sont distincts (c'est la situation de la question 5 avec $r = -1$).

On peut en rester là, mais si le point C est *très proche* du milieu, on voit que le point D est *très loin* sur la droite (AB). On peut donc se laisser aller à dire que lorsque C est le milieu de $[AB]$, le point D est « à l'infini ». Mais de quel côté ? Le résultat de la question 9 c'est que $[CD]$ est tout entier dans la demi-droite définie par le milieu de $[AB]$. Par conséquent, si C est *très proche* du milieu, à droite ($CA > CB$)), son conjugué sera très loin, à droite. Et s'il est très proche du milieu à gauche, D sera très loin à gauche. Y a-t-il deux points à l'infini ? Nous retrouverons cette question plus loin [3].

Un autre aspect de cette question c'est que l'on peut avoir, de part et d'autre du milieu de $[AB]$, deux points très proches, dont les conjugués harmoniques sont très éloignés, ce qui n'est jamais le cas pour deux points situés dans la même demi-droite définie par ce milieu.

3. Mais le vrai cadre où formuler la bonne réponse n'est pas celui de ce livre. C'est celui des espaces *projectifs*.

Mais !

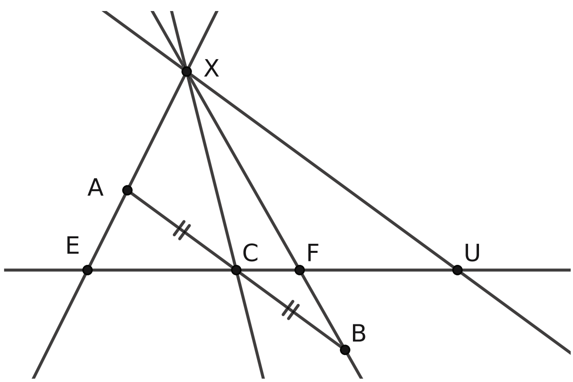
Soit un point X non situé sur (AB), considérons les droites $(XA),(XB),(XC)$. S'il n'existe pas de point D sur la droite (AB) qui soit le conjugué harmonique du milieu de $[AB]$, existe-t-il une droite (XU) qui fasse avec les trois autres droites passant par X un faisceau harmonique ?

Traçons par le point C une droite quelconque coupant (XA) en E, (XB) en F et la parallèle à (AB) menée par X en U.

Nous allons démontrer que :

C est le milieu de $[AB] \iff [E,F,C,U]=-1$.

En effet, les triangles FCB et FUX sont semblables, donc $\overline{FC}/\overline{FU}=-CB/UX$. Les triangles EAC et EXU sont également semblables donc $\overline{EC}/\overline{EU}=CA/UX$.

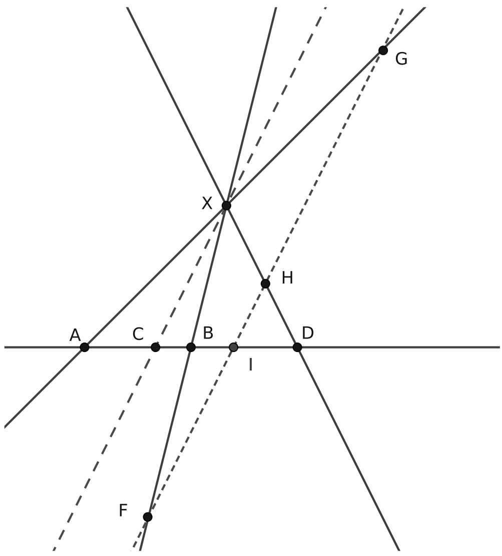


Par suite :

$$CA=CB \iff \overline{FC}/\overline{FU}=-\overline{EC}/\overline{EU} \iff [E,F,C,U]=-1.$$

Cette figure précise l'idée intuitive que le conjugué harmonique de C par rapport à A et B, s'il existait, serait « à l'infini » puisqu'il serait là où la parallèle à (AB) menée par X « coupe » (AB) (mais de quel côté ?)...

Il résulte de la réponse 9 que si un faisceau de droite est harmonique, toute transversale qui le coupe en quatre points y détermine une division harmonique. Que se passe-t-il si une transversale est parallèle à l'un des rayons du faisceau, et donc, ne le coupe qu'en trois points ? Le résultat à démontrer c'est que l'un des trois points est le milieu des deux autres.



Ici, on a mené une parallèle au rayon (XC) par un point I de la droite (AB). Cette transversale coupe les autres rayons en G,

F et H. Il faut démontrer que H est le milieu de $[FG]$. Le lecteur ou la lectrice y parviendra par exemple avec le plan suivant. L'objectif est de démontrer que $\overline{FH} + \overline{GH} = 0$. Premièrement, détecter trois couples de triangles semblables (et même homothétiques) de centres A, B, D déterminés par les deux parallèles. Écrire des rapports permettant de calculer $\overline{HI}; \overline{GI}; \overline{FI}$ en faisant à chaque fois intervenir XC qui est une longueur dont on peut décider sans problème qu'elle vaut 1. Passer en abscisses sur la droite (AB) en prenant l'origine en A donc b est l'abscisse de B, c celle de C, d celle de D et α celle du point I. $[A,B,C,D] = -1$ va s'écrire $b(d+c) = 2cd$. On conclut en calculant...

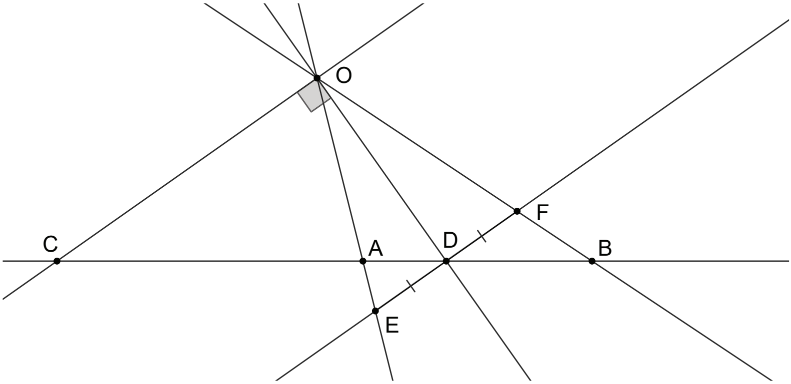
Une construction du conjugué

Il existe de nombreuses manières de construire le conjugué harmonique d'un point par rapport à deux autres points. On peut déduire un procédé de ce qui précède. Soient trois points A, C, B sur une droite, nous désirons construire le conjugué harmonique de C par rapport à A et B. Nous devons trouver un point E sur (XB) et un point E' sur (XA) tels que C soit au milieu de $[EE']$.

On « pense parallélogramme ». Soit A' le symétrique de A par rapport à C. La parallèle à (XA) menée par A' coupe (XB) en E. Soit E' le symétrique de E par rapport à C. $E'A'EA$ est un parallélogramme donc $(AE')//(EA')//(AX)$ et comme il n'y a qu'une parallèle à (EA') passant par A, $E' \in (XA)$. La parallèle à (EE') menée par X coupe (AB) en un point D qui est le conjugué de C par rapport à A et B.

Réponse 14

Soit un faisceau harmonique (OA),(OB),(OC),(OD) dans lequel les rayons (OC) et (OD) sont perpendiculaires.



Menons par D une parallèle à (OC). Cette droite coupe (OA) en un point E et (OB) en un point F. Le point D est alors au milieu de $[EF]$. La droite (OD) est alors médiane et médiatrice du triangle EOF. Celui-ci est donc isocèle et la droite (OD) est également bissectrice, de même que la droite (OC), de l'angle de ce triangle au sommet O.

Réponse 15

Notons a cet angle de sommet A. Le birapport de $[B,D,E,C]$ vaut (en prenant l'origine en B) :

$$\frac{\overline{EB} \cdot \overline{CD}}{\overline{ED} \cdot \overline{CB}} = (-5)(-9)/(-3)(-11) = 45/33 = 15/11$$

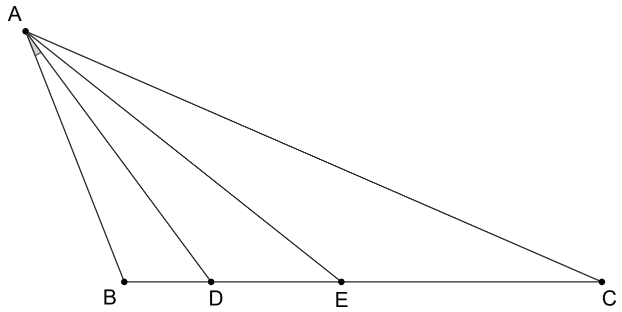
et donc, d'après la question 7 :

$$\frac{\sin \widehat{BAE}}{\sin \widehat{DAE}} \cdot \frac{\sin \widehat{DAC}}{\sin \widehat{BAC}} = 15/11 = \frac{\sin 2a}{\sin a} \cdot \frac{\sin 2a}{\sin 3a}$$

soit, après quelques transformations trigonométriques :

$$\frac{4 - 4\sin^2 a}{3 - 4\sin^2 a} = \frac{15}{11}$$

ce qui conduit immédiatement à la valeur très simple $\sin a = 1/4$ d'où une valeur approchée de l'angle a qui vaut 14°,48.



On n'est pas obligé de partir du calcul du birapport $[B,D,E,C]$. Le calcul d'un autre birapport avec les mêmes quatre points et les mêmes longueurs de segments conduit au même résultat, bien sûr.

Pour généraliser, orientons (BC) de C vers B (pour éviter une quantité de signes moins) et posons $DB = a, ED = b, CE = c$ quantités positives, et au sommet, répété trois fois, l'angle α. On a donc

$$r = \frac{(a+b)(b+c)}{b(a+b+c)} = \frac{4 - 4\sin^2\alpha}{3 - 4\sin^2\alpha}.$$

On voit que, pour $\alpha = \pi/6$, $\sin\alpha = 1/2$, $r = 3/2$, ce qui donne une équation $ab + b^2 + bc - 2ac = 0$ qui a une infinité de solutions en (a,b,c). Par exemple $a = 2, b = c = 1$.

Avec ces valeurs, on peut faire la figure, c'est-à-dire situer le point A, mais attention ! Le fait que les sinus des angles en A vérifieront, pour n'importe quelle position de A le même birapport $[B,D,E,C]$ (question 7) ne signifie pas que les angles auront les bonnes valeurs. On peut commencer par constater que $3\alpha = \pi/2$ donc A est sur le cercle de diamètre $[BC]$. La suite est laissée au lecteur.

Prolongements

On peut, en posant $X = 4\sin^2\alpha$, étudier la fonction homographique $f(X) = \frac{X-4}{X-3}$, et ainsi explorer toutes sortes de cas. Les angles d'un triangle sont inférieurs à π donc $\alpha < \pi/3$. La fonction homographique est croissante sur les intervalles (sa dérivée est positive) où elle est définie, etc.

Réponse 16

Comme les céviennes sont concourantes, on a (voir RÉSU 3 théorème de Céva)

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -1$$

et comme les points E, F, G sont alignés, on a aussi (théorème de Ménélaus) :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{GB}}{\overline{GC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = 1.$$

En multipliant ces deux identités, on a : $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{GC}}{\overline{GB}}$, CQFD.

L'énoncé dit que (EF) rencontre (BC). Quelle est la situation si $(EF)//(BC)$?

Cette manière de conjuguer les théorèmes de Céva et Ménélaus offre également une manière rapide et pratique de construire le conjugué harmonique. Soient trois points alignés B, D, C. Pour déterminer le conjugué harmonique de D par rapport à B et C, on place un point A dans le plan (mais pas sur (BC)) et un point H sur (AD). Puis on trace (BH) et (CH), qui déterminent E et F respectivement sur $[CA]$ et $[BA]$, enfin on trace (EF) qui coupe (BC) au point G recherché... sauf évidemment si D est au milieu de $[BC]$.

Réponse 17

On sait (RÉSU 4) que l'homothétie de centre G et de rapport -2 envoie O en H et que l'homothétie de centre ω et de rapport -2 envoie G en H.

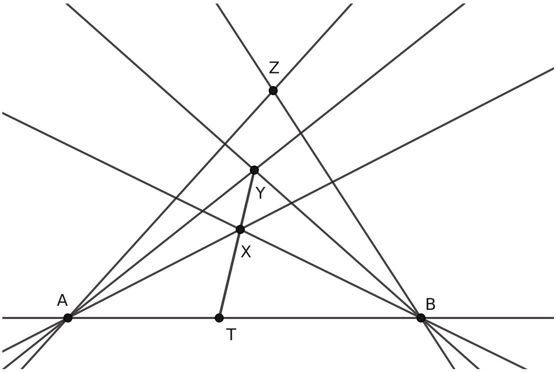
On en déduit : $\overline{OH}/\overline{OG} : \overline{\omega H}/\overline{\omega G} = 3/(-3) = -1$, CQFD.

Réponse 18

C'est une conséquence immédiate de la question 7 : le birapport du faisceau peut être exprimé avec les sinus des angles des droites, et de la propriété des angles inscrits dans un cercle (RÉSU 5). La propriété est vraie même si le point P est situé entre deux des points A, B, C, D puisqu'on a alors affaire à des angles supplémentaires, mais $\sin a = \sin(\pi - a)$. Ceci permet de parler du birapport de quatre points d'un cercle.

Réponse 19

On considère le faisceau (AX),(AB), (AY), (AZ) et le faisceau (BX), (BA),(BY), (BZ). La droite commune est donc (AB). On trace la droite (XY) et on la prolonge jusqu'à (AB) qu'elle coupe au point T. Nous voulons montrer que cette droite passe également par Z. Si elle ne passe pas par Z, elle coupe (AZ) en Z' et (BZ) en Z''. Mais les birapports $[X, T, Y, Z']$ et $[X, T, Y, Z'']$ sont égaux, donc $Z' = Z'' = Z$ (vérifiez avec la formule du birapport).


Z
Y
X
A
B
T

Chapitre 2

Puissance

2.1 Définitions, propriétés

2.1.1 Questions

Question 1

Soit un point P et un cercle $\mathscr{C}$, puis une droite passant par P, rencontrant ce cercle en deux points, A et B. Montrez que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = PO^2 - OA^2$, soit, en posant $d = PO$ et $R = OA$, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - R^2$.

Par conséquent, pour une autre droite passant par P coupant le cercle en C et D, on aura $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD} = d^2 - R^2$ et ainsi pour toute sécante au cercle passant par P.

Prouvez que, réciproquement, si quatre points A,B, C, D sont tels que, pour un cinquième point P on ait : $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$, ces quatre points sont sur un même cercle.

La quantité $d^2 - R^2$ est la **puissance** du point P par rapport à ce cercle. On la note $\mathscr{P}(P,\mathscr{C})$.

Que se passe-t-il si, au lieu d'être sécante, une droite passant par P est tangente au cercle ?

Question 2

Un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R étant donné, quelles sont, et pour quels points P, les valeurs maximales et minimales de $\mathscr{P}(P,\mathscr{C})$?

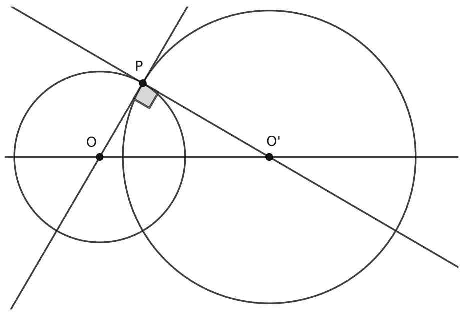
Question 3

Un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R, et un réel k étant donnés, quel est l'ensemble des points P du plan tels que $\mathscr{P}(P,\mathscr{C}) = k$?

Cercles et droites orthogonaux

On dit que deux courbes qui se coupent en un point P sont orthogonales en P si et seulement si elles ont en P des tangentes perpendiculaires.
Comme par ailleurs nous savons que la tangente à un cercle de centre O en un point P est perpendiculaire au rayon $[OP]$, quand deux cercles ont deux points communs, leur orthogonalité signifie qu'en chaque point commun, la tangente à l'un passe par le centre de l'autre.
Le théorème de Pythagore donne alors la relation : $OO'^2 = r^2 + R^2$, dont on voit : $OO'^2 - r^2 = R^2$ qu'elle signifie que la puissance du centre de chacun des deux cercles, par rapport à l'autre cercle, est égale au carré de son propre rayon.

Étant donné l'importance de cette notion pour la suite, il sera indispensable de bien comprendre et retenir ces différentes définitions équivalentes de l'orthogonalité de deux cercles.



Question 4

Deux cercles peuvent-ils être tangents, et orthogonaux ? Est-il possible qu'un point soit orthogonal à un cercle ?

Question 5

Étant donnés un cercle $\mathscr{C}$ et un point quelconque P, comment construire un cercle de centre P orthogonal à $\mathscr{C}$?

Droite orthogonale à un cercle

Comme une droite est en chacun de ses points sa propre tangente, une droite est orthogonale à un cercle si elle passe par le centre de ce cercle.
En effet, cette droite coupe alors le cercle en deux points où la tangente au cercle lui est orthogonale. Cette remarque est très souvent utilisée dans la suite.

Axe radical

Quel est l'ensemble des points du plan qui ont même puissance par rapport à deux cercles distincts ? C'est leur axe radical, objet de la question qui suit. Notez que cette question ressemble à : « Quel est l'ensemble des points du plan à égale distance de deux points distincts ? », (quelle est la réponse à cette question ?).

Question 6

Soient deux cercles de centres O et O' et de rayons R et R'. On note d la distance OO'.

Pour $d > 0$, on oriente (OO') de telle manière que l'abscisse de O soit 0 et que l'abscisse de O' soit d.

Montrez qu'il existe un unique point H de la droite OO' ayant la même puissance par rapport aux deux cercles. Calculez cette puissance.

Montrez que tout point de la droite perpendiculaire à (OO') en H a même puissance par rapport aux deux cercles.

Question 7

Montrez que la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles est égale au double produit de la distance des centres par la distance de ce point à l'axe radical.

Question 8

Quel est l'axe radical de deux cercles de rayon nul (cercles points). De deux cercles de même rayon ?

De deux cercles qui se coupent en deux points ? Ou encore tangents en un point ? De deux cercles concentriques ?

Question 9

Étant donnés deux cercles non sécants, de centres A et B, montrez comment on peut construire leur axe radical, en utilisant un troisième cercle.

Même question en utilisant une tangente commune aux deux cercles.

Question 10

Construire un cercle orthogonal à deux cercles donnés.

Centre radical

Question 11

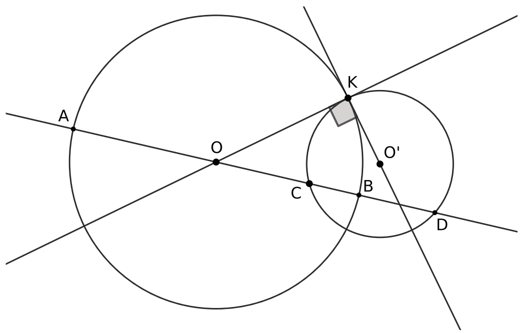
Quel est l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport à trois cercles ?

Question 12

Comment construire un cercle orthogonal à trois cercles ?

Question 13

Démontrez ce beau théorème : deux cercles sont orthogonaux si, et seulement si toute droite passant par le centre de l'un d'eux, y déterminant donc un diamètre $[AB]$, coupe l'autre en deux points C et D tels $[C,D,A,B] = -1$, c'est-à-dire détermine une division harmonique.



Question 14

Soient deux points A et B. Soit α un angle inférieur à π et Γ le cercle qui contient tous les points M tels que $\widehat{AMB} = \alpha$. Soit λ un nombre positif. Montrez que l'ensemble des points du plan tels que $MA/MB = \lambda$ est un cercle Σ. Montrez que Γ et Σ sont orthogonaux.

Question 15

Petit problème : soient un cercle γ de centre O, et deux points A et B dans le disque γ. Construire un cercle passant par A et B et par les extrémités d'un diamètre de γ.

Question 16

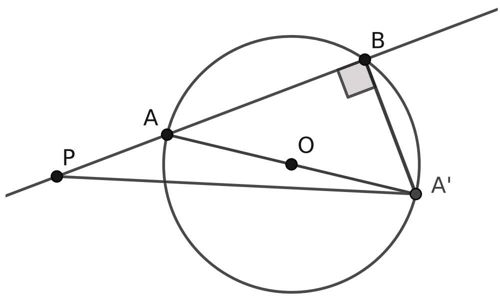
Soient les trois cercles ayant pour diamètres respectifs les côtés $[AB], [BC], [CA]$. Quel est leur centre radical ?

Quel est le centre radical des trois cercles exinscrits d'un triangle ABC ?

2.1.2 Réponses

Réponse 1

Soit A' l'opposé diamétral de A. Écrivons $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{A'B}$. Alors, en faisant le produit scalaire (voir RÉSU 10) par $\overrightarrow{PA}$, on a $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ est égal à $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'}$, puisque $[AA']$ étant un diamètre, $\overrightarrow{A'B}$ est orthogonal à $\overrightarrow{PA}$.



Écrivons maintenant $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA'}$. On trouve que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'}$. Comme les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OA'}$ sont opposés et comme les carrés scalaires sont des carrés de longueurs, on trouve

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - OA^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$$

puisque P, A et B sont alignés. En notant $OA = R$ et $PO = d$, pour toute sécante issue de P, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - R^2$.

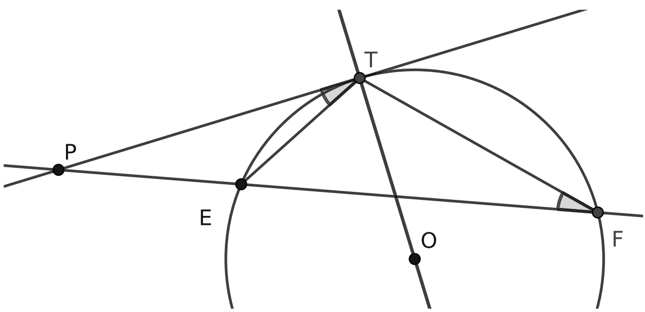
Ainsi, $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ ne dépend que de la distance d entre le point P et le centre du cercle, et du rayon R du cercle.

Clairement, $\mathscr{P}(P,\mathscr{C})$ est positive si P est extérieur au cercle, négative si P est intérieur et nulle si P appartient au cercle.

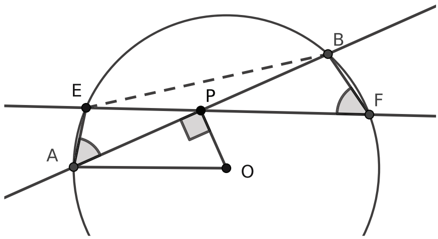
Si une droite (PT) est tangente au cercle (points A et B confondus), on a encore $\mathscr{P}(P,\mathscr{C}) = PT^2 = d^2 - R^2$ suivant le théorème de Pythagore.

Sans le produit scalaire

Si vous n'aimez pas les vecteurs et le produit scalaire, on peut s'en passer pour établir cette propriété, une des clefs de ce livre. Voici (brièvement) comment :



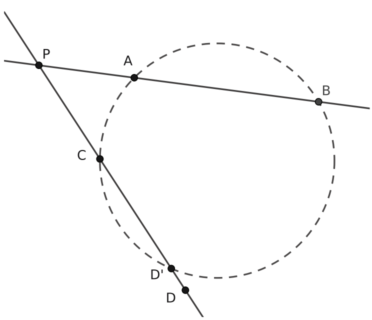
Les triangles PTF et PET sont semblables (voir RÉSU 5). Donc $PE/PT = PT/PF$ et $PE \cdot PF = PT^2$. Mais $PT^2 = PO^2 - OT^2$ donc $PE \cdot PF = d^2 - R^2$. Comme je n'utilise que des longueurs, il faut aussi examiner le cas de figure où P est intérieur au cercle.



On crée la perpendiculaire à (OP) et P, qui coupe le cercle en A et en B. Les triangles PAE et PFB sont semblables, on en déduit que $PE \cdot PF = PA^2 = d^2 - R^2$.

Réciproque

Une réciproque est très utile : soient quatre points A, B, C, D tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés, et que les droites (A,B) et (C,D), distinctes, se coupent en un point P. Alors, si $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, les points A, B, C et D sont sur un même cercle.



En effet, il y a un cercle passant par A, B et C puisqu'ils ne sont pas alignés. Si D n'appartient pas à ce cercle, soit D' le point où la droite PC le recoupe. On a alors nécessairement $\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PC} \cdot \overline{PD'}$ et ceci implique $D = D'$.

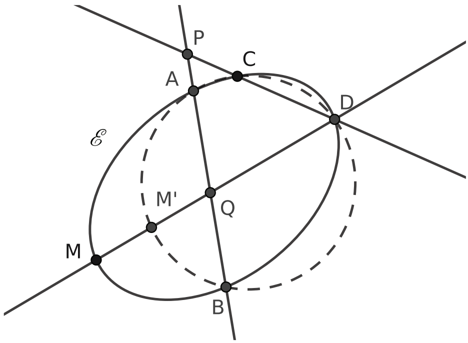
Scholie

Cette propriété mérite qu'on s'y arrête. Elle est remarquable ! Ainsi, étant donné un point P, quelconque, pour toutes les droites passant par P qui couperont le cercle en X et X' le produit des longueurs algébriques $\overline{PX}$ et $\overline{PX'}$ est constant, puisqu'il ne dépend que du rayon du cercle et de la distance entre le point P et le centre de ce cercle. Le point P peut être intérieur au cercle, ou être un point du cercle.

Si l'on regarde la figure, c'est « vraisemblable ». PA est plus grand que PC, mais PD est plus petit que PB donc il est bien possible que les produits soient égaux. Mais nous avons prouvé qu'ils le sont exactement, pour toutes les sécantes passant par P.

Cette propriété nous dit quelque chose de profond à propos du cercle. Elle peut même définir le cercle. Si une courbe fermée $\mathscr{E}$ est telle que toute droite passant par un point P quelconque du plan la coupe en 0, 1 ou 2 points, et lorsqu'elle la coupe en deux points X et X', alors le produit $\overline{PX}\overline{PX'}$ est constant, cette courbe est un cercle !

Pouvez-vous le démontrer ? La figure suivante suggère une méthode. M étant un point quelconque de $\mathscr{E}$, on montre que $M = M'$ où M' est un point de $ABCD$, qui est un cercle, selon la réciproque ci-dessus.



Attention, si cette propriété n'est donnée comme vraie que pour **un point** P particulier, nous verrons dans le chapitre sur l'inversion que la courbe n'est pas nécessairement un cercle.

Réponse 2

Comme $\mathscr{P}(P,\mathscr{C}) = d^2 - R^2$, il n'y a pas de valeur maximale car la distance $d = PO$ peut être aussi grande que l'on veut. La valeur minimale est $-R^2$, elle est atteinte si $d = 0$ c'est-à-dire si P est le centre du cercle.

Réponse 3

Si $k < -R^2$, il n'existe pas de tels points. Sinon, c'est le cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt{k + R^2}$.

Réponse 4

Avec les notations usuelles, deux cercles tangents sont tels que $OO' = d = R + r$ et si ces deux cercles sont orthogonaux, $d^2 = R^2 + r^2$. En élevant au carré la première égalité et en soustrayant on trouve que $2rR = 0$, ce qui signifie que l'un (au moins) des rayons est nul. Un cercle peut-il avoir un rayon nul ? Oui, on dit alors que c'est un cercle-point.

Il résulte de ces considérations qu'un point (en fait un cercle-point) est orthogonal à un cercle si, et seulement si c'est un point de ce cercle.

Réponse 5

Si P est intérieur à $\mathscr{C}$, c'est impossible car dans ce cas la distance des deux centres serait inférieure au plus grand des rayons, ce qui rend impossible la relation qui définit l'orthogonalité des cercles. Lorsque P est extérieur à $\mathscr{C}$, on mène par P une tangente à C. Si T est le point de tangence, le cercle de centre P passant par T est une solution. Cette solution est d'ailleurs unique (prouvez-le).

Réponse 6

Si $d = 0$, les deux cercles sont concentriques et si $R \neq R'$, il n'y a pas de points répondant à la question (pourquoi ?). Si de plus $R = R'$, il n'y a qu'un seul cercle et la question n'a pas de sens.

La condition de l'énoncé : « le point H a même puissance par rapport aux deux cercles » s'écrit, en notant h l'abscisse inconnue de H dans le repère indiqué : $h^2 - R^2 = (d-h)^2 - R'^2$ c'est-à-dire $2dh = d^2 + R^2 - R'^2$ donc

$$h = (d^2 + R^2 - R'^2)/2d$$

ce qui définit un unique point H (les lecteurs qui affectionnent le langage des barycentres, verront que dans le repère $(O; O')$ H est le point de coordonnées barycentriques $(d^2 + R'^2 - R^2; d^2 + R^2 - R'^2)$).

La puissance de H par rapport aux deux cercles est alors $h^2 - R^2$ ce qui, en remplaçant h par cette valeur et en factorisant, donne pour cette puissance :

$$p = \frac{(d+R-R')(d+R+R')(d-R-R')(d-R+R')}{4d^2}.$$

On note Δ la droite perpendiculaire à (OO') en H. Soit M un point de Δ. $MO^2 = MH^2 + HO^2$, par le théorème de Pythagore. La puissance de M par rapport à O vaut $MO^2 - R^2$ soit $MH^2 + HO^2 - R^2$ et celle de M par rapport avec O' vaut $MO'^2 - R'^2 = MH^2 + HO'^2 - R'^2$, mais $MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$ d'où la conclusion.

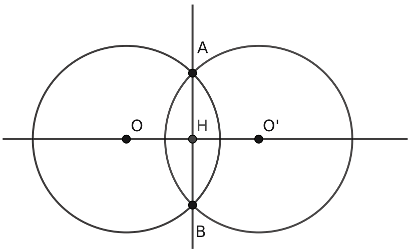
Inversement, si un point N a même puissance par rapport aux deux cercles, le point G, projection orthogonale de N sur (OO'), a la même propriété (Pythagore). Comme le calcul de l'abscisse h montre que H est le seul point de (OO') ayant cette propriété, $H = G$ et l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport aux deux cercles est la droite Δ perpendiculaire en H à la droite des centres.

Cette droite est l'**axe radical** des deux cercles.

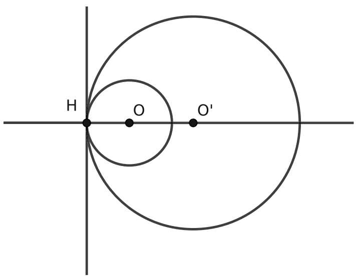
Ci-après les figures correspondant à quatre cas.

1) Cercles sécants.

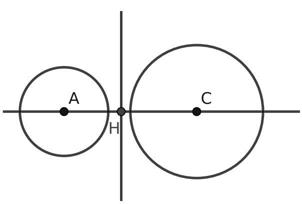
$R = 3, R' = 3, d = 1$. $(h = 1/2)$



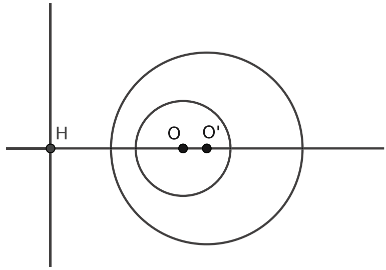
2) Cercles tangents.
$R = 2$, $R' = 5$, $d = 3$. ($h = -2$)



3) Cercles disjoints extérieurs.
$R = 2$, $R' = 3$, $d = 6$. ($h = 31/12$)

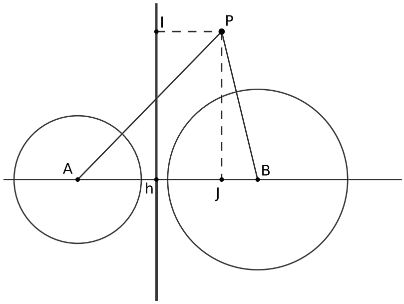


4) Cercles disjoints intérieurs.
$R = 2$, $R' = 4$, $d = 1$. ($h = -11/2$)



Réponse 7

Les cercles étant respectivement de centre A, de rayon r, et de centre B, de rayon R, on nous demande d'exprimer $\Delta = PA^2 - r^2 - PB^2 + R^2$. En notant J la projection orthogonale de P sur (AB), puis avec le théorème de Pythagore, PJ^2 se soustrait et nous avons $\Delta = JA^2 - r^2 - JB^2 + R^2$.



En notant H le pied de l'axe radical,

$$\Delta = JH^2 + HA^2 + 2\overline{JH} \cdot \overline{HA} - r^2 - JH^2 - HB^2 - 2\overline{JH} \cdot \overline{HB} + R^2,$$

mais la puissance de H par rapport aux deux cercles est la même donc $\Delta = 2\overline{JH}(\overline{HA} - \overline{HB}) = 2\overline{JH}(\overline{HB} + \overline{BA} - \overline{HB})$.

Comme $\overline{JH}$ et $\overline{BA}$ sont de même sens, et $\overline{JH} = \overline{PI}$, le résultat est démontré.

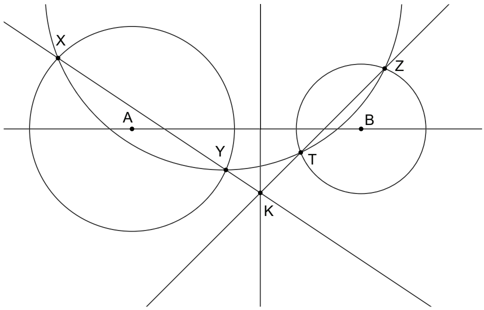
Réponse 8

C'est la médiatrice de ces deux points. En effet, pour tout point de l'axe, $d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2$. Si $R = R' = 0$, $d = d'$. Pour la même raison, l'axe radical de deux cercles de même rayon est également la médiatrice de leurs centres.

Pour deux cercles qui se coupent en X et en Y, l'axe radical est la droite (XY) puisque la puissance de X est la même par rapport aux deux cercles (et vaut 0), de même pour Y. De même pour deux cercles tangents, l'axe radical est la tangente commune (précisez pourquoi). Deux cercles concentriques n'ont pas d'axe radical (dites pourquoi) !

Réponse 9

Soit un troisième cercle, de centre C qui coupe le cercle de centre A en X et en Y, le cercle de centre B en Z et T. Les points de la droite (XY) ont même puissance par rapport aux cercles de centre A et C. Les points de (ZT) ont même puissance par rapport aux cercles de centre C et B. Ces droites se coupent (pourraient-elles être parallèles ?) en K. Le point K a la même puissance par rapport aux trois cercles, il fait donc partie de l'axe radical des cercles de centre A et B. Cet axe est alors la perpendiculaire à (AB) passant par K.



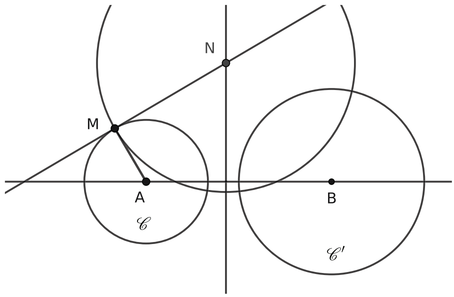
Si une droite est tangente commune aux deux cercles, respectivement en T et en U, le milieu V du segment $[TU]$ a même puissance $VT^2 = VU^2$ par rapport aux deux cercles. C'est donc un point de l'axe radical et on conclut comme ci-dessus.

Lorsqu'un point a la même puissance par rapport à trois cercles, on dit qu'il est leur **centre radical**.

Réponse 10

Notons $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les deux cercles, et N le centre inconnu de celui qui est à construire. Si R est le rayon de ce cercle, la puissance de N par rapport à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$ doit valoir R^2 par définition de l'orthogonalité. Le point N doit donc être sur l'axe radical de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Un cercle orthogonal à $\mathscr{C}$, s'il a son centre sur l'axe radical, sera également orthogonal à $\mathscr{C}'$, et vice-versa. Il suffit donc de choisir un point M de $\mathscr{C}$ tel que la tangente en M rencontre l'axe radical.



On a ainsi le centre N et NM est le rayon. On voit qu'il y a une infinité de solutions.

Réponse 11

Soient trois cercles $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{F}$. On note δ l'axe radical de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, γ l'axe radical de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$. Si un point du plan a la même puissance par rapport aux trois cercles, il appartient à $\delta \cap \gamma$. Par conséquent, si δ et γ sont parallèles, aucun point ne convient. Dans ce cas les trois centres de ces cercles sont alignés. Dans les autres cas, ces axes sont concourants en un point P, et par transitivité de l'égalité, P appartient aussi à l'axe radical de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{F}$. C'est le **centre radical** des trois cercles.

Réponse 12

Le centre d'un tel cercle sera nécessairement le centre radical K des trois cercles donnés puisqu'il aura la même puissance : son propre rayon, par rapport aux trois cercles. Si ce point K est intérieur à l'un des cercles, il sera intérieur aux trois (pourquoi ?) et il ne sera pas possible qu'un cercle de centre K soit orthogonal aux trois cercles (ni à aucun des trois). Si K est extérieur aux trois cercles, on mène par K une tangente à l'un des cercles de l'énoncé et le point T de tangence fournit le rayon KT de l'unique cercle solution. En effet, si un cercle de centre K est orthogonal à l'un des cercles de l'énoncé, il est aussi orthogonal aux deux autres. Pourquoi ?

Réponse 13

Les deux cercles, de centre O et de centre O', sont orthogonaux si, et seulement si la puissance du centre de l'un par rapport à l'autre est égale au carré de son propre rayon. Cela signifie ici : $OK^2 = \overline{OC}.\overline{OD}$. Mais comme O est le milieu de $[AB]$, par la relation de Newton (voir page 23) cela signifie $[C,D,A,B] = -1$. Formulez et démontrez la réciproque.

Réponse 14

Le cercle Γ se construit, pour un angle α, par la méthode dite de l'arc capable (voir RÉSU 5). Que l'ensemble des points du plan tels que $MA/MB = \lambda$ soit un cercle peut se démontrer algébriquement : on pose un repère dans lequel les coordonnées de A sont (0,0), celles de B, $(b,0)$, celles de M, (x,y). Comme la condition posée équivaut à $MA^2/MB^2 = \lambda^2$, on peut écrire l'équation du quotient des carrés des distances.

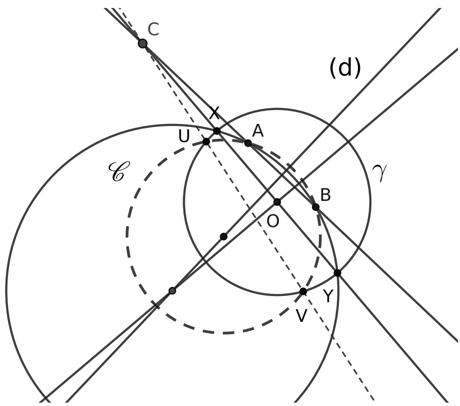
C'est l'équation d'un cercle. On constate que l'ordonnée du centre de ce cercle est nulle. Par ailleurs, ce cercle contient deux points de la droite $[AB]$, E et F, qui divisent le segment $[AB]$ dans le rapport λ.

Le cercle d'Apollonius est donc le cercle de diamètre $[EF]$, et comme $[E,F,A,B] = -1$, on peut conclure avec la question précédente.

Notez que si $\lambda = 1$, Σ n'est pas un cercle, c'est la médiatrice de $[AB]$. Cette droite est, de même, orthogonale à Γ puisqu'elle passe par son centre (voir ci-dessus, question 5).

Réponse 15

Tous les cercles qui passent par A et B ont la droite (AB) comme axe radical et leur centre appartient à (d) la médiatrice de $[AB]$. Soit un de ces cercles, $\mathscr{C}$, coupant γ en U et V. Si les droites (AB) et (UV) sont parallèles, $O \in (d)$ (dites pourquoi*) et dans ce cas, X et Y étant les extrémités du diamètre de γ parallèle à (AB), $(XABY)$ est un trapèze isocèle inscrit dans un cercle qui donne la solution.



Sinon, les droites (AB) et (UV) se coupent en un point C qui est centre radical de γ et tous les cercles passant par A et B. Soient alors X et Y les extrémités du diamètre déterminé par la droite (CO). Le point C étant centre radical, on a $\overline{CA} \cdot \overline{CB} =$

$\overline{CX} \cdot \overline{CY}$ et par la réciproque de la propriété de puissance d'un point par rapport à un cercle (voir page 43), $(XABY)$ est un cercle qui donne la solution.

* Cas des cordes parallèles. $[UV]$ étant la corde commune aux deux cercles γ et $\mathscr{C}$, sa médiatrice contient les deux centres. Mais le centre de $\mathscr{C}$ est également sur la médiatrice de $[AB]$. Les cordes étant parallèles, ces deux médiatrices aussi, et ayant un point commun, elles sont confondues, donc $O \in (d)$. CQFD.

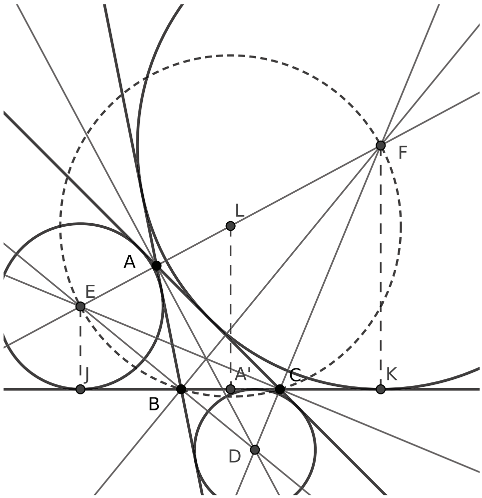
Réponse 16

On vérifie facilement que les hauteurs du triangle sont les axes radicaux des cercles de diamètres respectifs $[AB]$, $[BC]$,$[CA]$ pris deux à deux. Donc l'orthocentre est centre radical.

Pour les cercles exinscrits, la question est moins facile. Le centre radical est à l'intersection des trois axes radicaux. Montrons que ces axes passent par les milieux A', B', C' des côtés de ABC.

Plus spécialement, montrons que l'axe radical des cercles exinscrits dans les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, de centres respectifs E et F, passe par A'. La droite (BC) est tangente à ces deux cercles, en J et en K. Utilisons le résultat de la question 9 : le milieu de $[JK]$ est un point de leur axe radical. Or les angles des bissectrices intérieure et extérieure d'un même angle sont des angles droits et c'est le cas des angles $\widehat{FBE}$ et $\widehat{FCE}$, il y a donc un cercle passant par B, C, F, et E.

Soit L le milieu de $[EF]$, centre de ce cercle. E se projette orthogonalement en J, L en A' puisque $LB = LC$, et F en K, donc A' est le milieu de $[JK]$ (Thalès). L'axe radical des cercles exinscrits dans les angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ est donc la perpendiculaire à (EF) passant par A'.



Les autres axes radicaux passent par B' et par C'.

Le triangle $A'B'C'$ a ses côtés parallèles aux côtés du triangle ABC et les axes radicaux, étant perpendiculaires à des bissectrices extérieures, sont parallèles à des bissectrices intérieures. Ces axes radicaux sont donc les bissectrices intérieures du triangle $A'B'C'$ et le centre radical recherché est le centre du cercle inscrit dans $A'B'C'$.

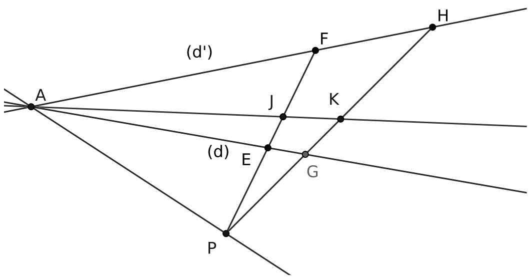
Il y a également des choses intéressantes à découvrir concernant les trois axes radicaux des couples formés d'un cercle exinscrit avec le cercle inscrit.

Chapitre 3

Polaire

3.1 Définitions, propriétés

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en un point A, et un point P non situé sur ces deux droites.



Soit une droite passant par P qui coupe (d) en un point E et (d') en un point F.

Il existe un unique point J tel que $\overline{PE}/\overline{PF} = -\overline{JE}/\overline{JF}$, c'est-à-dire tel que $[E,F,P,J] = -1$. J est le conjugué harmonique de P par rapport à E et F.

Le faisceau des droites $[(AE),(AF),(AP),(AJ)]$ est donc harmonique.

Si l'on considère maintenant une autre sécante issue de P coupant les mêmes droites en G et H, en notant K le point d'intersection de (AJ) avec (PG), on aura $[G,H,P,K] = -1$, c'est une propriété du birapport d'un faisceau. K est le conjugué de P par rapport à G et H.

3.1.1 Définition

L'ensemble des conjugués de P par rapport aux intersections des sécantes issues de P avec les droites (d) et (d') sécantes en A est une droite passant par A. On dira que cette droite est **la polaire** de P par rapport à (d) et (d').
Notons que la polaire contient le point A, qui est un cas limite, puisqu'une sécante (PA) ne permet pas de définir une division harmonique.

3.1.2 Questions

Question 1

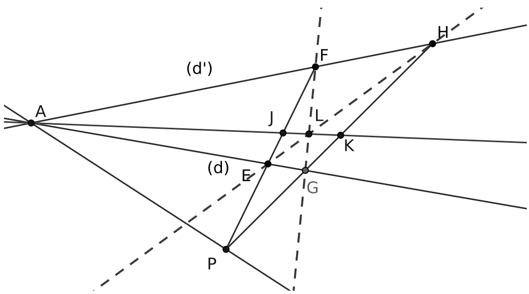
Soit Q un autre point de la droite (AP), différent de A et de P. Quelle est la polaire de Q par rapport aux droites (d) et (d') ?

Question 2

Quelle est la polaire du point F par rapport aux droites (AJ) et (AP) ?

Un moyen rapide de construire la polaire

Considérons maintenant les droites (FG) et (EH), notons L leur point d'intersection. Les deux sécantes issues de P que nous avons considérées coupent ces droites aux mêmes points, E et F, puis G et H. Par conséquent les conjugués de P, par rapport aux droites (FG) et (EH), sont toujours J et K.



Donc la polaire de P par rapport à (FG) et (EH) est la même droite (AJ). Mais cette polaire passe par L, point commun de ces droites, et L se construit immédiatement.

Cette remarque donne un moyen très simple de construire la polaire d'un point par rapport à deux droites.

Réciprocité polaire

Question 3

Soient deux droites (d) et (d') sécantes en un point A. Montrez que si Y appartient à la polaire de X par rapport à (d) et (d'), X appartient à la polaire de Y par rapport aux mêmes droites.

Conjugués par rapport à un cercle

Soit un cercle γ de centre O et une sécante issue d'un point M, qui coupe ce cercle en A et B. On dit que M et M' sont **conjugués** par rapport à γ si $[M,M',A,B] = -1$.

Question 4

Montrez que si M et M' sont conjugués par rapport à un cercle Γ, le cercle de diamètre $[MM']$ est orthogonal au cercle γ.

La définition de la conjugaison de deux points par rapport à un cercle est ainsi étendue à des points tous deux extérieurs au disque : P et P' sont conjugués par rapport à Γ si, et seulement si le cercle de diamètre $[PP']$ est orthogonal au cercle Γ.

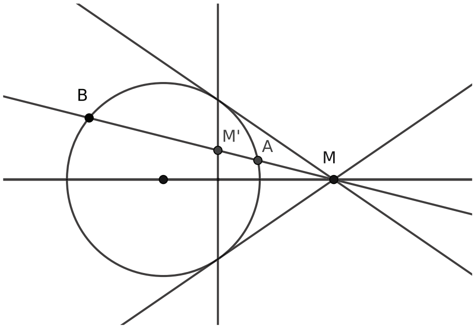
Question 5

Si M' est conjugué de M par rapport à Γ, le point H, projection orthogonale de M' sur la droite (OM), est également conjugué de M par rapport à Γ. En déduire que tous les conjugués de M sont sur la droite orthogonale à (OM) passant par H.

Polaire d'un point par rapport à un cercle

Soient un cercle, un point M, et une sécante passant par M qui coupe le cercle en deux points (sauf si M appartient au cercle) A et B. Il existe alors un unique point M' tel que $[A,B,M,M'] = -1$. M' est par définition conjugué de M par rapport à ce cercle.

L'ensemble des conjugués d'un point M par rapport à un cercle est la **polaire** de ce point par rapport à ce cercle.



Conséquence de la définition des conjugués : un point K appartient à la polaire d'un point J par rapport à un cercle Λ si et seulement si le cercle de diamètre $[KJ]$ est orthogonal à Λ.

Il est clair qu'alors, J appartient à la polaire de K par rapport à Λ.

Question 6

1) Montrez que la polaire d'un point par rapport à un cercle, quand ce point est extérieur à ce cercle, est la droite qui joint les points de contact des tangentes au cercle menées depuis ce point.

2) Montrez qu'on peut construire la polaire d'un point par rapport à un cercle par la méthode de la construction de la polaire par rapport à deux droites.

3) Comment construire la polaire quand le point est intérieur ?

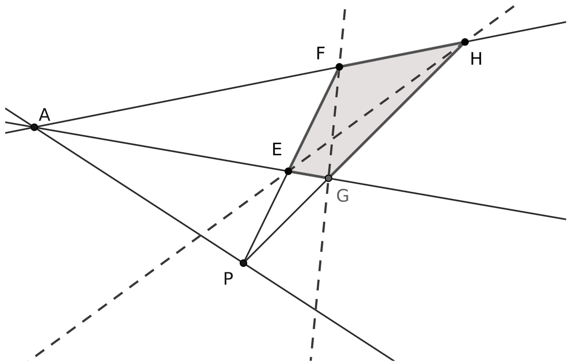
4) Quelle est la polaire si le point est sur le cercle ?

5) Y a-t-il un point pour lequel la polaire n'est pas définie ?

6) Quelle est la polaire d'un point par rapport à un cercle point ?

Quadrilatère complet

Considérons un quadrilatère $EFHG$ convexe [a].
On lui ajoute les points d'intersection de ses côtés opposés, c'est-à-dire $A = (HF) \cap (GE)$ et $P = (FE) \cap (HG)$.
Ces six points constituent les sommets du **quadrilatère complet**. Les droites $(HF), (EG), (FE)$ et (HG) en sont les côtés.



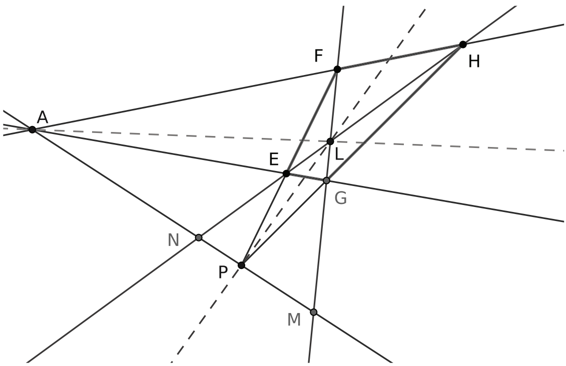
Les sommets qui ne sont pas reliés par un côté définissent trois autres droites, les diagonales (FG), (HE), (AP).

a. Une figure est *convexe* si, quand elle contient deux points, elle contient tout le segment qui les joint. Un quadrilatère non convexe est un quadrilatère *croisé*.

Théorème fondamental

Les intersections des diagonales entre elles définissent, avec les sommets du quadrilatère, une division harmonique sur chaque diagonale.

La démonstration va résulter des réponses aux trois questions suivantes.



Question 7

Montrez que $[G,F,M,L] = -1 = [E,H,N,L]$.

Question 8

Montrez que le faisceau $[(LA),(LP),(LF),(LE)]$ est harmonique.

Question 9

En déduire $[A,P,M,N] = -1$.

3.1.3 Réponses

Réponse 1

C'est la même droite (AJ). En effet, le faisceau des droites $[(AE),(AF),(AP),(AJ)]$ étant harmonique, toute droite passant par Q qui le coupe définit quatre points en division harmonique. Le conjugué de Q appartiendra donc à la droite (AJ).

Réponse 2

On a vu (ou bien on le vérifie par un calcul simple) que si $[E,F,P,J] = -1$, alors $[J,P,F,E] = -1$. Donc la polaire de F, ou d'un autre point de la droite (AF), par rapport aux droites (AJ) et (AP), est la droite (AE).

Réponse 3

Si Y appartient à la polaire de X par rapport à (d) et (d'), la droite (XY) coupant (d) en U et (d') en V, Y est conjugué de X par rapport à U et V. Mais aussi bien X est conjugué de Y par rapport à ces points (parce que -1 est l'inverse de -1), donc X appartient à la polaire de Y par rapport à (d) et (d').

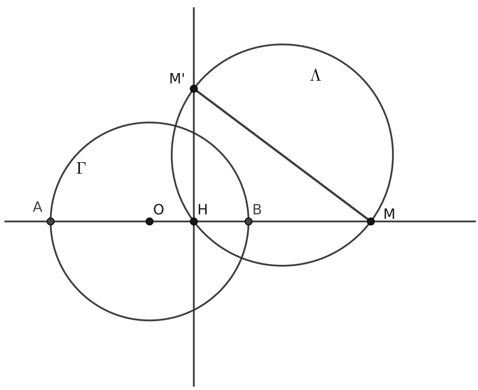
Réponse 4

Si $[M,M',A,B] = -1$, en notant ω le milieu de $[MM']$, centre du cercle de diamètre $[MM']$, on a par la relation de Newton (voir page 23) : $\overline{\omega A}.\overline{\omega B} = \omega M^2$, mais cette relation (voir page 36) exprime l'orthogonalité des deux cercles.

Réponse 5

Comme l'angle en H est droit, le point H est le point où Λ coupe le diamètre $[AB]$.

Lorsque deux cercles sont orthogonaux, une droite passant par le centre de l'un d'eux, ici, le centre de Γ, détermine en coupant l'autre une division harmonique (voir question 13 du chapitre précédent). Donc $[A, B, H, M] = -1$. Donc H est conjugué de M par rapport à Γ et (relation de Newton) on a $\overline{OH} \cdot \overline{OM} = R^2$ (R est le rayon de Γ).



Ainsi, tout conjugué de M par rapport à Γ va se projeter orthogonalement en un point de (AB) qui sera conjugué de M. Mais il n'y a qu'un seul tel point, c'est H, donc l'ensemble des conjugués de M par rapport à Γ est la perpendiculaire à $[AB]$ en H.

Réponse 6

1) Soit J l'un de ces points de contact. J est conjugué de M parce que le cercle de diamètre $[MJ]$ est orthogonal (par

construction) au cercle Γ. Même argument pour K, l'autre point de contact, d'où la conclusion.

2) On prend deux sécantes à Γ issues de M. L'une coupe le cercle en A et B, l'autre en C et D. La polaire de M par rapport aux droites (AC) et (BD) répond à la question pourvu que ces droites soient sécantes en un point S, ce qui est toujours possible. Les droites (AD) et (CB) se coupent alors en un point T et la droite (ST) est la polaire de M.

3) La polaire est perpendiculaire à (OM) si O est le centre du cercle. La perpendiculaire à (OM) en M coupe le cercle en T et T'. Les tangentes au cercle en ces points se coupent en M', conjugué de M et la polaire est alors la droite perpendiculaire à (OM) en M'.

4) Si M appartient à Γ, le cercle point M est orthogonal à Γ donc $M = H$. La polaire étant perpendiculaire à $(OM) = (OH)$, c'est la tangente au cercle en M. On a encore : $\overline{OH} \cdot \overline{OM} = \overline{OM} \cdot \overline{OM} = R^2$.

5) Le centre du cercle étant au milieu de tous les diamètres, son conjugué est « à l'infini ». Il n'a pas de polaire.

6) La polaire étant perpendiculaire à (OM), si le cercle est réduit à son centre (c'est un cercle-point), la polaire est la perpendiculaire à (OM) en O.

$\overline{OH} \cdot \overline{OM} = R^2 = 0$ donc $O = H$.

Réponse 7

C'est une conséquence du fait que le faisceau $[(AE), (AF), (AP), (AL)]$ est harmonique.

Réponse 8

En notant J, comme plus haut, l'intersection des droites (LA) et (PF), on a vu que $[J,P,F,E] = -1$, donc le faisceau $[(LA),(LP),(LF),(LE)]$ est harmonique.

Réponse 9

L'intersection du faisceau $[(AE),(AF),(AP),(AL)]$ avec la droite (AM), diagonale du quadrilatère complet, y détermine une division harmonique.

Ceci achève la démonstration du théorème fondamental.

Scholie

Cette propriété du quadrilatère complet a mérité l'attention des géomètres depuis presque vingt siècles. Elle apparaît comme une sorte de miracle, pour différentes raisons. Tout d'abord pour le contraste entre une figure très générale et banale : un quadrilatère convexe quelconque, et une propriété qui semble très particulière : la division harmonique.

D'autre part, la démonstration de la propriété : un délicieux jeu de billard à trois bandes, où l'on n'utilise que les propriétés, à dire vrai mirifiques, du birapport (dans le cas particulier dit harmonique).

Ensuite il est intéressant d'envisager en club ce qui se passe lorsque le quadrilatère a deux côtés parallèles (trapèze) ou même ses côtés parallèles deux à deux (parallélogramme).

Chapitre 4

Pinceaux de cercles

4.1 Définitions, propriétés

4.1.1 Définition

Soient un cercle $\mathscr{C}$ et une droite Δ. Un pinceau[a] de cercles est l'ensemble des cercles $\mathscr{X}$ du plan tels que l'axe radical de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{X}$ soit Δ.
Par définition, la droite Δ appartient au pinceau.

a. On disait autrefois « faisceau ».

4.1.2 Questions

Question 1

Montrez que quels que soient deux cercles du pinceau, ils ont le même axe radical.

Scholie

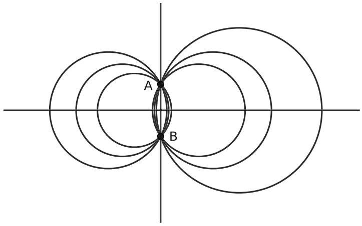
On dit que le pinceau est **engendré** par tel cercle et telle droite, ou bien par tel couple de cercles.

L'ensemble des cercles d'un centre donné peut aussi être considéré comme un pinceau, nous verrons pourquoi. C'est un cas particulier : il n'y a pas d'axe radical.

Quatre sortes de pinceaux

Pinceau à points de base

Soient deux cercles sécants en A et B, le pinceau qu'ils engendrent est constitué des cercles du plan passant par A et par B puisque l'axe radical de tous ces cercles est la droite (AB). Tous leurs centres sont sur la médiatrice de $[AB]$.
On dit qu'on a alors un **pinceau à points de base**.



Question 2

Quelle est la plus petite valeur possible pour le rayon d'un cercle d'un pinceau à points de base A et B ? Et la plus grande ?

Question 3

Quelle est la plus petite distance entre les centres de deux cercles distincts d'un tel pinceau ? Pour chaque point du plan, combien passe-t-il de cercles d'un pinceau à points de base donné ?

Pinceau de cercles tangents

Soient deux cercles tangents en T, intérieurement ou extérieurement, leur axe radical est la perpendiculaire en T à leur droite des centres. Le pinceau est alors constitué de tous les cercles du plan tangents en T à l'un de ces cercles (et donc à l'axe radical). On dit qu'on a un **pinceau tangent**. Le point T lui-même appartient au pinceau (c'est un cercle-point).

Pinceau à points limites

Le pinceau engendré par deux cercles non sécants est dénommé (nous verrons pourquoi) **pinceau à points limites**.

Pinceau de cercles concentriques

C'est un cas particulier puisque l'axe radical n'existe pas. Il joue cependant un rôle dans certaines questions importantes.

Question 4

Montrez que l'on peut définir un pinceau par la donnée d'une droite, d'un point H de cette droite et d'un nombre réel p. Précisez la nature du pinceau selon le signe de p. En prenant H comme origine et en orientant la droite des centres, montrez que pour tout cercle du faisceau il y a une relation entre p, l'abscisse de son centre, et son rayon.

Question 5

Dans la situation précédente, montrez que si $p > 0$, donc dans un pinceau à points limites, il existe des cercles de rayon nul dans le pinceau. Ce sont les « points limites ». Donnez leur position, en orientant la droite des centres et en prenant H comme origine.

Dans le cas $p < 0$, donnez la position des points de base sur l'axe radical.

Question 6

Montrez que, sauf dans le cas d'un pinceau de cercles concentriques, il n'y a jamais deux cercles concentriques dans un pinceau.

Question 7

Montrez qu'un cercle orthogonal à deux cercles d'un pinceau à points limites coupe la droite de leurs centres en deux points qui sont les points limites.

Question 8

En notant u et v les points limites d'un pinceau à points limites, a et a' les extrémités d'un diamètre déterminé par la droite des centres sur un cercle quelconque du pinceau, montrez que $[a,a',u,v] = -1$ (division harmonique).

Question 9

Quelle est la plus petite distance entre H et le centre d'un cercle d'un pinceau à points limites ?

Question 10

Quelle est la plus petite distance entre un point d'un cercle d'un pinceau à points limites et H ?

Question 11

Peut-on trouver, dans un pinceau à points limites, deux cercles homothétiques dans une homothétie de centre H ?

Pinceaux orthogonaux

Question 12

Soit un pinceau $\mathscr{P}$. Montrez que tout cercle γ dont le centre est sur l'axe radical Δ et qui est orthogonal à un cercle de $\mathscr{P}$ est orthogonal à tous les cercles de $\mathscr{P}$. Montrez que tout cercle γ qui est orthogonal à deux cercles de $\mathscr{P}$ a son centre sur l'axe radical et est orthogonal à tous les cercles de $\mathscr{P}$.

Question 13

Soit $\mathscr{P}$ un pinceau à points limites et γ un cercle. Montrez que : (γ passe par les points limites) $\Leftrightarrow$ (γ est orthogonal à tous les cercles de $\mathscr{P}$).

> L'ensemble des cercles passant par les points limites de $\mathscr{P}$ est un pinceau à points de base dont chaque cercle est orthogonal à chaque cercle de $\mathscr{P}$.
> Les points limites du premier pinceau sont les points de base du second. On dit que ces deux pinceaux sont orthogonaux et on les note $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}^{\perp}$.
> Les cercles orthogonaux aux cercles d'un pinceau tangent constituent également un pinceau tangent (dites pourquoi).

On peut noter que l'orthogonal de l'orthogonal de $\mathscr{P}$ est $\mathscr{P}$.

Question 14

Soit un pinceau $\mathscr{P}$ à points limites et I un point du plan. Y a-t-il des cercles de $\mathscr{P}$ qui passent par I et combien ?

Même question pour un pinceau tangent et pour un pinceau de cercles concentriques.

Question 15

Soit un cercle γ de centre A dans un pinceau à points limites u et v. Montrez que la quantité $\overline{uA}.\overline{uv}$ est la puissance de u par rapport au cercle γ.

Question 16

Étant donné un point I, et un pinceau $\mathscr{P}$, montrez que les polaires de I par rapport à tous les cercles de $\mathscr{P}$ sont concourantes en un point I'.

On distinguera les arguments selon la nature du pinceau et on traitera, pour la position de I, les cas particuliers.

4.1.3 Réponses

Réponse 1

Le pinceau est défini par un cercle γ_0 et une droite (d). Soient γ_1 et γ_2 deux cercles de ce pinceau, (d) est l'axe radical de γ_0 et γ_1, et aussi de γ_0 et γ_2. Étant donné un point m quelconque de (d), la puissance de m par rapport à γ_0 vaut une certaine valeur x, égale à la puissance de m par rapport à γ_1 et à la puissance de m par rapport à γ_2. Par suite m est un point de l'axe radical de γ_1 et γ_2, qui est donc (d).

Réponse 2

C'est le rayon du seul cercle dont le centre appartient à l'axe radical : $R = AB/2$. Il y a dans un tel pinceau des cercles de rayon arbitrairement grand.

Réponse 3

Il n'y en a pas. Il existe des cercles dont la distance des centres est aussi petite que l'on veut. Tout point de la médiatrice de $[AB]$, droite des centres, est centre d'un unique cercle passant par A et par B donc un cercle du pinceau.

Par trois points non alignés passe un cercle et un seul. Comme les cercles passent par A et par B, par tout autre point du plan passe un cercle et un seul de ce pinceau, sauf pour les points de la droite (AB) (zéro cercle) excepté les points A et B (une infinité de cercles).

Réponse 4

Cette droite sera la droite des centres et H le pied de l'axe radical sur cette droite. Le pinceau est alors l'ensemble, symétrique par rapport à l'axe radical, des cercles $\mathscr{X}$ centrés sur cette droite tels que la puissance du point H par rapport à $\mathscr{X}$ soit égale à p, c'est-à-dire, si x est l'abscisse du centre de $\mathscr{X}$,

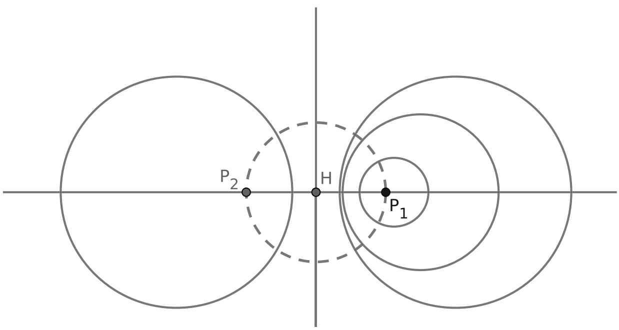
$$p = x^2 - R^2.$$

Si $p > 0$, H est à l'extérieur des cercles, on a un pinceau de cercles non sécants, pinceau à points limites.

Si $p = 0$, c'est un pinceau tangent, si $p < 0$ le point H est à l'intérieur des cercles, c'est un pinceau de cercles sécants, à points de base.

Réponse 5

Orientons la droite des centres et prenons pour origine le point H, intersection de cette droite avec l'axe radical. La puissance de H par rapport à tout cercle du pinceau est la même, $p > 0$.



Pour tout cercle du pinceau, de centre O et de rayon R, en notant x l'abscisse de O, on a $p = x^2 - R^2$, soit

$$R^2 = x^2 - p.$$

Cette formule qui relie l'abscisse du centre et le rayon du cercle est fondamentale et vaut pour toutes les sortes de pinceaux.

Comme $R^2 \geq 0$, on a : $x^2 \geq p$. Les valeurs $x = \pm\sqrt{p}$ et $R = 0$ sont les abscisses des centres de deux cercles du pinceau, qui sont des points. Ces points « limites » P_1 et P_2 sont également appelés *points de Poncelet*, du nom d'un géomètre français du dix-neuvième siècle.

Ce calcul montre également que pour toute valeur $x \geq \sqrt{p}$ il existe un cercle du pinceau, dont l'abscisse du centre est x et le rayon $R = \sqrt{x^2 - p}$. Et d'ailleurs un autre cercle de même rayon, symétrique par rapport à l'axe radical (dont l'abscisse dans ce repère vaut $-x$). Mais sur le segment ouvert $]P_1P_2[$ il n'y a aucun centre de cercle du pinceau.

Pour déterminer les abscisses des points de Poncelet, il suffit de calculer p. Pour calculer p, un cercle du pinceau (c'est-à-dire l'abscisse x de son centre, et son rayon R) suffit : $p = x^2 - R^2$. Par exemple, soit un cercle de rayon 3 d'un pinceau tel que, l'origine étant prise à l'intersection de l'axe radical avec la droite des centres, l'abscisse de son centre soit égale à 5. Dans ce cas, $p = 25 - 9 = 16$ et les abscisses des points de Poncelet sont ± 4.

Quel sera le rayon d'un cercle de ce pinceau dont le centre a pour abscisse 6 ? On trouve $R = 2\sqrt{5}$.

Dans le cas d'un pinceau à points de base, $p < 0$. Il existe alors un cercle dont le centre est d'abscisse 0 (en prenant l'origine en H et de rayon minimal $R = \sqrt{-p}$. Dans le repère d'origine H formé par la droite des centres et l'axe radical, les points de base sont d'abscisse nulle et d'ordonnée $\pm\sqrt{-p}$.

Réponse 6

La formule $R^2 = x^2 - p$ est vraie pour tous les pinceaux pour lesquels elle a un sens. Elle n'en a pas pour le pinceau des cercles concentriques puisqu'il n'y a pas alors d'axe radical. Cette formule prouve que pour toute valeur de x il y a au plus une valeur de R. Il n'y a donc pas, dans un pinceau, deux cercles concentriques, sauf dans le cas du pinceau de cercles concentriques.

Dans le cas d'un pinceau à points de base, pour tout point de la droite des centres (pour toute valeur de x) il y a un cercle et un seul, de rayon $R = \sqrt{x^2 - p}$ toujours défini puisque $p < 0$. De même pour un pinceau tangent ($p = 0$).

Pour un pinceau à points limites, les points du segment ouvert joignant les points limites ne sont centre d'aucun cercle.

Réponse 7

Si un cercle est orthogonal à deux cercles du pinceau, son centre a la même puissance (égale à son rayon) par rapport aux deux cercles. Il est donc sur l'axe radical du pinceau, et a la même puissance (égale à son rayon) par rapport à tous les cercles du pinceau. Il est alors orthogonal à tous les cercles du pinceau, y compris aux cercles-points quand il y en a.

D'autre part, on sait (voir page 37) qu'un cercle est orthogonal à un cercle-point si et seulement si ce point appartient au cercle. Son intersection avec la droite des centres est donc constituée par les deux points limites.

Pour déterminer les points limites d'un pinceau à points limites, il suffit de tracer un cercle orthogonal à deux cercles du pinceau, ou bien, ce qui revient au même, à un cercle du pinceau et centré sur Δ. Il sera orthogonal à tous les cercles du pinceau et son intersection avec la droite des centres donne les points limites.

Réponse 8

Notons H le pied de l'axe radical. C'est le milieu de $[u,v]$. Ce point a la même puissance p par rapport à tous les cercles du pinceau, donc $Hu^2 = \overline{Ha} \cdot \overline{Ha'}$, ce qui prouve, par la relation de Newton (voir page 23), que $[a,a',u,v] = -1$.

Réponse 9

Le calcul de la réponse à la question 4 prouve que la plus petite distance est $\sqrt{p}$ où p est la puissance de H par rapport à tout cercle du pinceau. Les deux cercles qui réalisent ce minimum sont les cercles-points de Poncelet.

Réponse 10

Si on note X et Y les extrémités du diamètre d'un cercle (de centre d'abscisse $x > 0$ et de rayon R) du pinceau porté par la droite des centres, avec $0 < HX < HY$, on a

$$HX = x - R = \sqrt{p + R^2} - R = \frac{p}{\sqrt{p + R^2} + R}$$

(astuce basée sur une identité remarquable bien connue). Cette quantité est arbitrairement petite, mais non nulle, puisque R est arbitrairement grand. Il n'y a donc pas de plus petite distance entre un point d'un cercle du pinceau à points limites et H.

Scholie

Le centre de chaque cercle d'un pinceau à points limites est situé à l'extérieur du segment ouvert que définissent les points limites. L'une des extrémités du diamètre de ce cercle défini par la droite des centres est toujours, au contraire, sur ce segment ouvert.

Réponse 11

Si $C(O, R)$ et $C'(O', R')$ sont homothétiques de centre H et de rapport k, $R' = kR$ et $HO' = d' = kHO = kd$. Mais par ailleurs, la puissance de H par rapport aux deux cercles est la même, donc $d^2 - R^2 = d'^2 - R'^2$ et $d^2 - R^2 = k^2(d^2 - R^2)$ soit $k = 1$, $k = -1$, ou $d^2 = R^2$. Mais $d^2 = R^2$ est impossible, aucun cercle d'un tel pinceau ne passe par H. La situation est différente dans un pinceau tangent !

Si $k = 1$, $C = C'$, si $k = -1$, il s'agit d'une symétrie. Le pinceau est effectivement symétrique par rapport à H. C'est le seul cas d'homothétie de centre H entre cercles du pinceau.

Une autre manière d'exprimer ce fait c'est dire qu'étant donnés deux cercles d'un même pinceau, de rayons différents, leur centre d'homothétie n'est jamais situé sur l'axe radical.

Réponse 12

Si un cercle centré sur l'axe radical est orthogonal à un cercle du pinceau, c'est que la puissance de son centre par rapport à ce cercle vaut son propre rayon. Or la puissance d'un point de l'axe radical a la même valeur pour tous les cercles du pinceau, donc ce cercle est orthogonal à tous les cercles du pinceau.

Si un cercle est orthogonal à deux cercles du pinceau, son centre a la même puissance pour les deux cercles (égale à son propre rayon) et il est donc centré sur l'axe radical, ce qui nous ramène au paragraphe ci-dessus.

Réponse 13

Les points limites sont des cercles du pinceau considéré, des cercles de rayon nul. Il faut se souvenir qu'un cercle est orthogonal à un point si et seulement si ce point appartient à ce cercle (si ce cercle « passe » par ce point). Donc si γ passe par les deux points limites, la réponse 12 s'applique et il est orthogonal à tous les cercles du pinceau.

Réciproquement, s'il est orthogonal à tous les cercles du pinceau, il passe par les points limites puisque ce sont des cercles du pinceau.

Pour les pinceaux tangents il suffit d'observer que $\mathscr{C}$ étant un cercle d'un pinceau tangent en H à une droite Δ qui est l'axe radical du pinceau, si un cercle Γ orthogonal à $\mathscr{C}$ a son centre ω sur Δ, alors il passe par H et est tangent à (OH) car $\omega H = \omega P$ (faites une figure).

Réponse 14

Si I appartient à l'axe radical de $\mathscr{P}$, aucun cercle de $\mathscr{P}$ ne passe par I.

Au contraire, par tout autre point que H de la droite des centres, il passe un cercle et un seul (voir réponse 10).

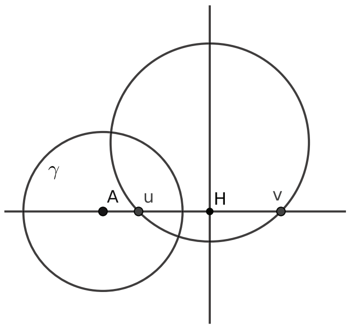
Pour un point non situé sur ces deux droites, il faut penser au faisceau à points de base orthogonal à $\mathscr{P}$. On a vu (question et réponse 3) qu'il passe par I un unique cercle Λ d'un pinceau à points de base. La tangente à Λ en I coupe la droite des centres de $\mathscr{P}$ en un point ω (elle ne peut pas lui être parallèle, pourquoi ?) et le cercle Ω de centre ω passant par I répond à la question. De plus, les cercles Λ et Ω sont orthogonaux.

Précisez pourquoi on est certain que Ω est un cercle de $\mathscr{P}$. Ce cercle est le seul cercle de $\mathscr{P}$ passant par I car deux cercles d'un pinceau à points limites n'ont pas de points communs.

Le lecteur trouvera facilement les réponses à la même question pour un pinceau tangent et pour un pinceau de cercles concentriques.

Réponse 15

On a : $\overline{uA} \cdot \overline{uv} = \overline{uA} \cdot (\overline{uA} + \overline{Av}) = uA^2 + \overline{uA} \cdot \overline{Av}$. Comme γ est orthogonal à tout cercle passant par u et v, $\overline{Au} \cdot \overline{Av} = R^2$, donc $\overline{uA} \cdot \overline{uv} = uA^2 - R^2$.

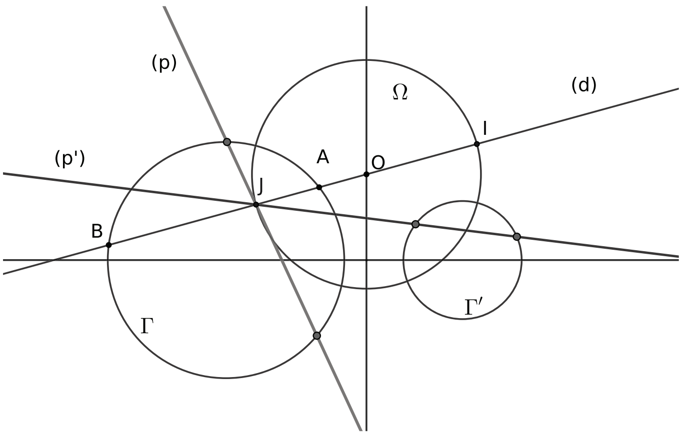


Réponse 16

Soit Γ un cercle d'un pinceau $\mathscr{P}$ et un point I non situé sur la droite des centres ni l'axe radical. Après les questions et réponses 3 et 14 nous savons que quelle que soit la nature du pinceau $\mathscr{P}$, il existe un unique cercle Ω passant par I, centré sur l'axe radical, orthogonal à Γ, et de ce fait, orthogonal à tous les cercles du pinceau.

Soit O le centre de Ω, traçons la droite $(d) = (IO)$, elle coupe Γ en A et B. Soit $J \in (d)$ l'opposé diamétral de I. La polaire (p) de I par rapport à Ω passe par J, parce que le cercle Ω, de diamètre $[IJ]$ est orthogonal au cercle Γ (voir page 61). Soit Γ' un autre cercle du pinceau $\mathscr{P}$, Ω lui est également orthogonal et donc pour la même raison le point J appartient à la polaire (p')

de I par rapport à Γ'. Ainsi toutes les polaires de I relatives à tous les cercles du pinceau passent par J.



L'examen des cas particuliers est laissé aux lecteurs.

4.1.4 Scholie et petite synthèse

Ce qui suit est en grande partie redondant avec ce qui précède.

Sur les cercles-points

On peut s'étonner que les géomètres appellent cercles des cercles de rayon nul. Mais c'est le cas. Un point de coordonnées (a,b) dans un repère orthonormé du plan est un cercle, d'équation $(x-a)^2+(y-b)^2=0$. On parle alors d'un « cercle-point ». Dans la définition d'un cercle, il y a un point, qui sera le centre, et un réel $R \geq 0$. Ce réel peut être nul.

Les cercles-points sont des objets assez particuliers ! En général, le centre d'un cercle, n'est pas un point du cercle (relire la définition d'un cercle), mais naturellement, dans le cas d'un cercle-point, le cercle et son centre ne font qu'un.

Toute droite qui passe par ce point est une tangente à ce cercle. Pour le comprendre, il faut remarquer qu'il existe souvent plusieurs définitions d'une notion, posées comme, presque toujours, équivalentes. Par exemple, la tangente à un cercle au point M est la droite dont l'intersection avec le cercle est réduite à ce point M. Mais aussi : la tangente à un cercle de centre O au point M est la droite perpendiculaire en M à (OM) (le rayon). Dans les deux cas, la tangente en M est unique si le rayon est strictement positif.

Dans le cas d'un cercle-point P, il n'y a pas de droite (OM) puisque $O = M = P$, mais la première définition subsiste ! Une droite qui coupe le cercle-point P... en P, son intersection avec ce cercle est réduite à un point, c'est donc une tangente. Dans ce cas, il n'y a plus unicité, mais au contraire une infinité de tangentes au cercle-point P, en P.

Sur les cercles orthogonaux

Note : les questions précédées d'un astérisque * sont très faciles, la démonstration est laissée aux lecteurs.

Rappel : Un cercle Γ de centre a et de rayon R est orthogonal à un cercle Ψ de centre b et de rayon r si et seulement si la puissance de a par rapport à Ψ, soit $(ab)^2 - r^2$, vaut R^2.

*Si X est un point de Γ, est-ce que Γ est orthogonal au cercle-point X ?

1. Prouvez que l'orthogonalité des cercles est une relation symétrique : si Γ est orthogonal à Ψ ; alors Ψ est orthogonal à Γ.

Preuve

Si Γ est orthogonal à Ψ, $(ab)^2 - r^2 = R^2$. Dans ce cas, $(ab)^2 - R^2 = r^2$ et Ψ est orthogonal à Γ.

*Si Γ est orthogonal à Ψ et Ψ orthogonal à Λ, est-ce que Γ est orthogonal à Λ (transitivité) ?

Un cercle peut-il être orthogonal à deux cercles concentriques ?

2. Prouvez que si un cercle Γ de centre a et de rayon R est orthogonal à deux cercles, Ψ et Λ, son centre est sur l'axe radical de Ψ et Λ.

Preuve

Par hypothèse, la puissance de a par rapport à Ψ est égale à la puissance de a par rapport à Λ et vaut R^2, donc a est sur l'axe radical de Ψ et Λ, lieu des points qui ont la même puissance par rapport aux deux cercles.

3. Prouvez que si un cercle Γ de centre a et de rayon R est orthogonal à deux cercles, Ψ et Λ, il est orthogonal à tout cercle du pinceau engendré par Ψ et Λ.

Preuve

Soit Θ un autre cercle du pinceau. Le point a appartient à l'axe radical du pinceau, donc il a la même puissance par rapport à Ψ et à Θ, c'est à dire R^2, donc Γ est orthogonal à Θ.

4. Soit un pinceau $\mathscr{I}$ et un cercle Γ de centre a et de rayon R du pinceau orthogonal. Prouvez qu'un cercle Φ centré sur la droite des centres de $\mathscr{I}$, orthogonal à Γ appartient à $\mathscr{I}$.

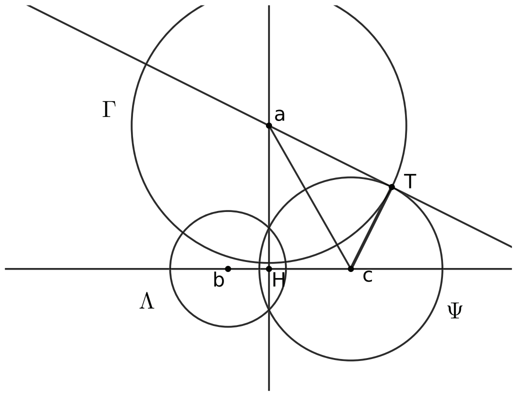
Preuve

Le point a a la même puissance par rapport à Φ et à un cercle Λ quelconque de $\mathscr{I}$, il appartient donc à l'axe radical de Φ et Λ. Comme ce nouvel axe radical est perpendiculaire à la droite des centres du pinceau, et passe par a, c'est l'axe radical de $\mathscr{I}$ et Φ est un cercle de $\mathscr{I}$. * Notez qu'il y a une infinité de cercles orthogonaux à Γ qui ne font pas partie du pinceau $\mathscr{I}$.

5. Prouvez qu'un cercle Γ orthogonal à deux cercles Λ et Ψ coupe la droite des centres de Λ et Ψ si et seulement si Λ et Ψ sont sans points communs.

Preuve

Notons H le pied de l'axe radical de Λ et Ψ et T le point de Ψ tel que (aT) soit une tangente. On considère les triangles rectangles acT et acH, qui ont la même hypoténuse ac. Le point H est à l'intérieur des cercles Ψ et Λ, quand ils sont sécants, et $cH < cT$, donc $aH > AT$, à cause du théorème de Pythagore, et le cercle de rayon aT ne coupe pas (bc). Si les cercles sont non sécants, H est à l'extérieur, $cH > cT$ et le cercle de rayon aT coupe (bc).



6. Soient deux cercles Λ de centre b et Ψ de centre c, sans points communs. Prouvez que tous les cercles orthogonaux à la fois à Λ et à Ψ coupent la droite des centres (bc) aux mêmes points u et v.

Preuve

Soit Γ un cercle orthogonal à Λ et à Ψ, il coupe (bc) en u et en v. Ces deux points sont des cercles-points et comme ils sont des points de Γ, ils lui sont, chacun, orthogonal. Donc (voir 4.) ce sont des cercles du pinceau engendré par Λ et Ψ. Or, il ne peut pas y avoir plus de deux cercles points dans un pinceau car l'axe radical de deux cercles points est leur médiatrice (objection ? imaginez qu'il y ait trois cercles points, donc en les prenant deux à deux, trois médiatrices... mais un seul axe radical). Ces points u et v sont appelés les points limites du faisceau.

7. Tout cercle passant par u et v est orthogonal à tout cercle du faisceau dont u et v sont les points limites.

Preuve

Un tel cercle est centré sur l'axe radical de ces deux cercles-points, leur médiatrice, qui est l'axe radical du pinceau, et il est orthogonal à ces deux cercles (cercles-points), donc (voir 3.) à tout cercle du pinceau. On a ainsi deux pinceaux, l'un à points limites, l'autre à points de base, et tout cercle de l'un est orthogonal à tous les cercles de l'autre. On peut ainsi parler de l'orthogonalité de deux pinceaux.

*Peut-on avoir deux pinceaux à points limites, ou deux faisceaux à points de base, orthogonaux ?

4.1.5 Addendum d'algèbre

Je préfère, « à la Steiner » de la géométrie sans algèbre. Mais il est parfois utile, pratique, d'ouvrir l'œil algébrique.

Voici donc un rapide tour d'horizon des thèmes évoqués jusqu'ici, du point de vue de l'algèbre.

Cercles

Simple rappel. L'équation d'un cercle de centre un point (a,b) et de rayon un réel positif ou nul R, est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

ce qui correspond exactement à sa définition moyennant la distance euclidienne.

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Conformément à sa définition la puissance de $P : (u,v)$ par rapport au cercle de centre (a,b) et de rayon R vaut $d^2 - R^2$ soit

$$\mathscr{P} = (u-a)^2 + (v-b)^2 - R^2.$$

On retrouve ici le fait que si P est un point du cercle, la puissance est nulle.

Axe radical

On se donne deux cercles : $(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0$ et $(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2 = 0$.

On écrit que la puissance du point $Q : (X, Y)$ a la même valeur pour les deux cercles.

$$(X-a)^2 + (Y-b)^2 - R^2 = (X-c)^2 + (Y-d)^2 - r^2.$$

On développe, on simplifie et on trouve

$$(c-a)X + (d-b)Y + K$$

avec $K = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + R^2 - r^2)/2$ ce qui est l'équation d'une droite, l'axe radical des deux cercles.

On peut vérifier que cette droite est orthogonale à la droite des centres.

Pinceau de cercles

Voici quelque chose de nouveau : une définition algébrique des pinceaux. Étant données les équations de deux cercles :

$\mathscr{C}_1 : (x-a)^2+(y-b)^2-R^2 = 0$ et $\mathscr{C}_2 : (x-c)^2+(y-d)^2-r^2 = 0$, soient deux nombres réels α et β non tous les deux nuls, alors, l'équation

$$\alpha[(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2] + \beta[(x-c)^2 + (y-d)^2 - r^2] = 0$$

est en général celle d'un cercle. En développant et regroupant on a :

$$(\alpha+\beta)(x^2+y^2) - 2x(\alpha a + \beta c) - 2y(\alpha b + \beta d) + K = 0$$

avec $K = \alpha(a^2 + b^2 - R^2) + \beta(c^2 + d^2 - r^2)$.

Si $\beta = 0$, c'est $\mathscr{C}_1$ et si $\alpha = 0$, $\mathscr{C}_2$. Par contre si $\alpha + \beta = 0$, on a une droite.

Vérifier que cette droite est l'axe radical de tous ces cercles est un exercice calculatoire, mais facile. Telle est l'équation du pinceau engendré par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On a un cercle du pinceau pour chaque choix du couple (α,β) quand $\alpha + \beta \neq 0$.

Cette équation est définie à un multiple près du scalaire $\alpha+\beta$. On peut poser $t = (\alpha/(\alpha+\beta))$ et $u = (\beta/(\alpha+\beta))$ quand $\alpha+\beta \neq 0$. On a alors l'équation dite « normalisée » :

$$(x^2+y^2) - 2x(ta + uc) - 2y(tb + ud) + K' = 0$$

avec $K' = t(a^2 + b^2 - R^2) + u(c^2 + d^2 - r^2)$.

On peut examiner ce qui permet de distinguer les pinceaux à points de base, à points limites, tangents, concentriques, les pinceaux orthogonaux, etc.

Chapitre 5

L'inversion

Étant donné un point O du plan et un nombre réel $k \neq 0$, à chaque point M du plan, différent de O, on associe **son inverse, l'unique point M' de la droite (OM) tel que $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$.**

Il s'agit dans ce livre de l'inversion dans un plan. On peut considérer l'inversion sur une droite ! Étant donné un point O de cette droite, l'inversion agit sur la mesure algébrique d'un point de la droite comme la fonction $f(x) = k/x$.

Et on peut considérer l'inversion dans l'espace à trois dimensions. Revenons au plan.

Le point O est le **pôle** de l'inversion et le réel k est la **puissance**[1] de l'inversion. On note $I_{O,k}(M) = M'$.

M' est l'image de M par l'inversion de pôle O et de puissance k.

1. Pour d'autres auteurs, O est le **centre** et k est le **rapport** de l'inversion. J'ai gardé les mots traditionnels, réservant **centre** et **rapport** à l'homothétie. Hélas, le mot **puissance** est également utilisé pour la *puissance d'un point par rapport à un cercle*. Tant pis !

Le réel k peut être positif ou négatif, mais non nul.

Le point O est le seul point qui n'a pas d'image. Cela se comprend algébriquement, puisque k n'étant pas nul, aucun O' ne peut vérifier $\overline{OO} \cdot \overline{OO'} = k$. Géométriquement, on constate que si M est très proche de O, M' en est très loin. Quelque chose rôde, qui relève de l'infini... mais je n'en dirai pas davantage...

Lorsque la puissance k est positive, l'objet M et son image M' appartiennent à la même demi-droite définie par le pôle. Au contraire lorsque la puissance est négative, le pôle est situé entre M et M'.

5.1 Propriétés générales

Image = antécédent

$I_{O,k}(M) = M'$ signifie par définition : $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$, c'est-à-dire également $I_{O,k}(M') = M$, parce que la multiplication est commutative ! Si M' est l'image de M, l'image de M' est M.

Surjectivité

L'image d'un point est donc en même temps son antécédent. Puisque le pôle n'a pas d'image, il n'a pas non plus d'antécédent. Il n'existe pas de point M dont l'image soit O. Tous les autres points du plan ont un antécédent, et un seul.

Injectivité

Deux points différents ne peuvent avoir la même image : $\overline{OM_1} \cdot \overline{OM'} = k = \overline{OM_2} \cdot \overline{OM'}$ entraîne $\overline{OM_1} = \overline{OM_2}$ (car $\overline{OM'} \neq 0$) en mesure algébrique et donc $M_1 = M_2$. En particulier l'antécédent d'un point (différent du pôle) est unique.

Involution

Une inversion est une **involution** c'est-à-dire qu'elle est sa propre réciproque. Si l'on compose une involution avec elle-même, on obtient l'identité (sur $\mathscr{P} \setminus O$). Une symétrie est également une involution, mais sur $\mathscr{P}$ tout entier.

Symétrie

Si M' est l'image de M par une inversion de puissance k, et M'' l'image de M par une inversion de même pôle et de puissance $-k$, on a $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ et $\overline{OM} \cdot \overline{OM''} = -k$, M' et M'' sont deux points de la droite (OM) et $\overline{OM''} = -\overline{OM'}$, donc M' et M'' sont symétriques par rapport au pôle.

Question 1

Que se passe-t-il si dans la définition de l'inversion on oublie la barre de mesure algébrique ?

Question 2

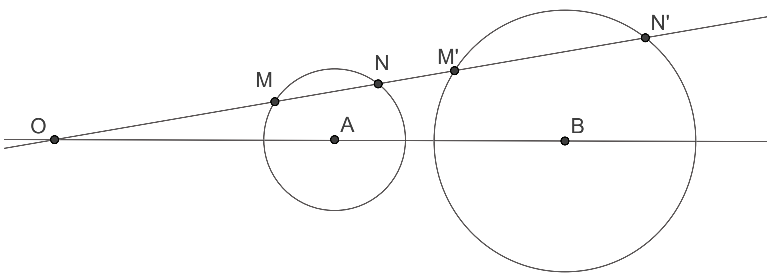
Y a-t-il une valeur de k pour laquelle une inversion de puissance k est l'identité ?

5.1.1 Inversion et homothétie

Une homothétie de centre O et de rapport p est définie par la relation $\overrightarrow{OM'} = p \cdot \overrightarrow{OM}$ où M' est l'image de M. On peut aussi (c'est équivalent) définir l'homothétie en posant que l'image M' de M appartient à la droite (OM) et qu'on a $\overline{OM'} = p \cdot \overline{OM}$.

Selon certains géomètres, l'inversion apparaît historiquement avec la figure suivante, dans une étude de Jacob Steiner (1796-1863).

Soit O le centre d'une homothétie (il y en a deux) qui transforme le cercle de centre A en le cercle de centre B (comment fait-on pour déterminer O ?). Une droite issue de O coupe ces cercles en M, N, M' et N'.



Si p est le rapport de cette homothétie, $\overline{OM'} = p \cdot \overline{OM}$ et $\overline{ON'} = p \cdot \overline{ON}$. Notons q la puissance de O par rapport au cercle de centre A. Ainsi, $\overline{OM} \cdot \overline{ON} = q$.

Dans ce cas, $\overline{ON} \cdot \overline{OM'} = p \cdot \overline{OM} \cdot \overline{ON} = p \cdot q$ et $\overline{OM} \cdot \overline{ON'} = \overline{OM} \cdot p \cdot \overline{ON} = pq$.

Donc O est également le pôle de l'inversion de puissance $k = p \cdot q$ qui transforme M en N' et N en M', et comme ces relations sont indépendantes du choix de la sécante (OM), cette inversion transforme tout le cercle de centre A en tout le cercle de centre B, comme l'homothétie, mais pas de la même manière.

Scholie

On observe ici un « trio » : homothétie, inversion, puissance d'un point par rapport à un cercle, dont il faut savoir utiliser la coopération. Voici un autre lien entre inversion et homothétie.

Composée de deux inversions de même pôle

On considère deux inversions $I_{O,m}$ et $I_{O,n}$ et un point quelconque M différent de O auquel on applique successivement les deux inversions.
Ce procédé, la composition des fonctions, s'applique à toutes les applications pourvu que les ensembles de départ et d'arrivée le permettent, il est noté par le petit rond : $\circ$. Ce n'est pas en général commutatif.

On aura $I_{O,m}(M) = M'$ donc $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = m$ et $I_{O,n}(M') = M''$ donc $\overline{OM'} \cdot \overline{OM''} = n$.
Finalement, $\overline{OM''} = n/\overline{OM'}$, mais $\overline{OM'} = m/\overline{OM}$, donc

$$I_{O,n} \circ I_{O,m} = \overline{OM''} = (n/m)\overline{OM}.$$

La composée de deux inversions de même pôle est donc une homothétie.

Question 3

Peut-on définir l'inversion avec des vecteurs, par $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = k$?

Question 4

Existe-t-il des points M du cercle de centre A, tels que

$$h_{O,p}(M) = M' = I_{O,k}(M)$$

c'est-à-dire des points ayant la même image par l'homothétie et par l'inversion ?

Ainsi, M'' est l'image de M par une homothétie de centre O et de rapport n/m. La composée de deux inversions de même pôle et de rapports m et n est une homothétie de rapport n/m.

Si $n = m$, on a une homothétie de rapport 1, c'est-à-dire l'identité. On retrouve ainsi le fait qu'en composant une inversion avec elle-même, on a l'identité.

$$I_{O,n} \circ I_{O,m} = h_{O,(n/m)}.$$

On voit que cette opération (la composition des applications) n'est pas commutative.

Question 5

Que se passe-t-il si l'on compose une homothétie de centre O et de rapport p avec une inversion de pôle O et de puissance n ?

5.2 Images des figures

Nous allons regarder comment l'inversion transforme les objets les plus simples en géométrie, les points, les droites et les cercles.

5.2.1 Images des points

Tous les points, à l'exception du pôle, ont une image et, puisque l'inversion est involutive, cette image est aussi leur antécédent (unique). C'est pourquoi on dira parfois que, tandis qu'une homothétie **envoie** un point M dans son image M', une inversion **échange** un point et son image. Cela vaut aussi pour les figures.

Question 6

Démontrez que dans le cas d'une inversion de puissance positive, il existe des points qui sont leur propre image. Ces points constituent un cercle de centre le pôle de l'inversion. On l'appelle « le cercle de l'inversion ».

Scholie

Ce cercle joue un rôle très important. Sa donnée, à elle seule, équivaut à la donnée d'une inversion (de puissance positive) puisque son centre est le pôle et le carré de son rayon est la puissance de l'inversion. Pour certains géomètres, une inversion est définie par la donnée d'un cercle.

Une inversion de puissance négative n'a pas de point invariant car $OM^2 = k < 0$ est impossible. Par suite, **quand nous parlons d'une inversion « de cercle $\mathscr{I}$ », il est sous-entendu qu'il s'agit d'une inversion de puissance positive !**

Notez qu'une homothétie n'a pas d'autre point invariant que son centre (sauf si son rapport k vaut 1. Dans ce cas elle est l'identité).

Question 7

Soient deux points distincts A et B, l'un étant l'image de l'autre par une certaine inversion de puissance positive. Montrez que l'un de ces deux points est à l'intérieur du cercle de l'inversion, et l'autre à l'extérieur.

Question 8

Prouvez que si un cercle contient deux points M et M' dont l'un est l'image de l'autre pour une certaine inversion, il est globalement invariant par cette inversion.

Question 9

Que peut-on dire d'un cercle qui est orthogonal au cercle d'inversion ?

Question 10

Soient deux points M et N, et leurs images M' et N' dans une inversion de pôle et de puissance quelconque. Montrez que ces quatre points sont cocycliques ou alignés.

Question 11

On donne trois points O, M et M', tels que M' est l'image de M dans une inversion de pôle O. Comment construire le cercle de cette inversion ?

Question 12

Si au contraire on dispose du cercle d'inversion Ω, comment construire le transformé d'un point M ?

Question 13

Soient A et B deux points, A' et B' leurs images dans l'inversion de pôle O et de puissance k. Exprimez la longueur $A'B'$ en fonction de la longueur AB, et du réel k.

5.2.2 Images des droites

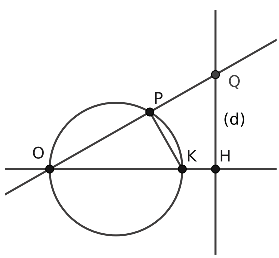
Image d'une droite passant par le pôle

Par définition, l'image de tout point $M \neq O$ est un point M' tel que O, M et M' sont alignés, donc l'inversion échange les points d'une droite passant par le pôle, à l'exception du pôle qui n'a pas d'image. Une telle droite est globalement invariante par cette inversion.

Image d'une droite ne passant pas par le pôle

Question 14

Soient un cercle de diamètre $[OK]$, une droite (d) perpendiculaire à (OK) en H, et un point P différent de O sur ce cercle. La droite (OP) coupe (d) en Q. Prouvez que le produit $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ ne dépend pas du choix du point P.



Question 15

Utilisez la propriété décrite dans la question 14 pour prouver que l'image d'une droite (d) ne passant pas par le pôle est un cercle $\mathscr{C}$ passant par le pôle.

Comment construire ce cercle, si on donne la droite ? La réponse dépend de la manière dont est déterminée l'inversion, par son cercle Ω, par le pôle, un point et son image, ou par le pôle et le réel k.

5.2.3 Images des cercles

Image d'un cercle passant par le pôle

Comme l'inversion est une involution, si elle transforme une figure F en une figure G, elle transforme la figure G en la figure F. Donc, la réponse à la question 15 dit aussi que l'image d'un cercle passant par le pôle est une droite ne passant pas par le pôle, perpendiculaire à la droite qui joint le pôle au centre de ce cercle.

Question 16

Soient deux cercles tangents en O, pôle de l'inversion. Que peut-on dire de leurs images ?

Question 17

Soit une inversion définie par son cercle Ω et un cercle $\mathscr{C}$ passant par le centre de Ω (qui est le pôle de l'inversion). Comment construire la droite image de $\mathscr{C}$?

Question 18

Dans le cas d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre o, passant par le pôle O d'inversion, quel est le point image du centre o de $\mathscr{C}$?

Image d'un cercle ne passant pas par le pôle

Question 19

Quelle est l'image, par une inversion de pôle O et de puissance k, d'un cercle ne passant pas par O ? Et quelle est l'image de son centre ?

Question 20

Voici un énoncé qui se présente comme une réciproque de la propriété énoncée dans la question 10.

« Soit une application $\mathscr{X}$ telle que pour tout couple de points (A,B) et leurs images (A',B'), les points A, A', B, B', s'ils ne sont pas alignés, sont sur un même cercle. Alors $\mathscr{X}$ est une inversion ou une symétrie axiale. »

1) En considérant qu'il existe une droite (AA') et une droite (BB'), démontrez l'énoncé.

2) Il est assez clair que, s'agissant d'une inversion, il n'existe pas toujours une droite (AA'), ni (BB') (pourquoi ?).

Donnez des exemples de fonctions qui vérifient cet énoncé mais ne sont ni des inversions, ni des symétries, et démontrez ainsi que cet énoncé est faux [2].

Question 21

L'inversion conserve-t-elle, ou peut-elle conserver dans certains cas le milieu ? Plus précisément : soient deux points A et B, m leur milieu, A', B' et m' les images de ces trois points dans une certaine inversion, m' est-il en général le milieu de $[A'B']$? Est-ce possible dans un cas particulier ? Que peut-on dire de plus si le pôle de l'inversion est un point de la droite (AB) ?

Question 22

Soit R le rayon de $\mathscr{C}$, un cercle qui ne passe pas par le pôle, et R' le rayon de $\mathscr{C}'$ son image par l'inversion de pôle O et de

2. Cet énoncé, quand je l'ai lu dans mon vieux livre de classe de terminale Lespinard et Pernet, ne m'a pas choqué. C'est en lisant un papier du géomètre Daniel Perrin que j'ai compris qu'il était très critiquable.

puissance k. Déterminez R' en fonction de R.

Peut-on avoir $R = R'$?

Question 23

Étant donnés deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, y a-t-il des inversions transformant l'un en l'autre ?

Même question pour un cercle et une droite.

5.2.4 Contacts et angles

Question 24

Montrez que si deux cercles, ou un cercle et une droite, sont tangents, leurs images le sont aussi.

Question 25

Soient deux droites parallèles, ne passant pas par le centre de l'inversion. Que peut-on dire de leurs images ?

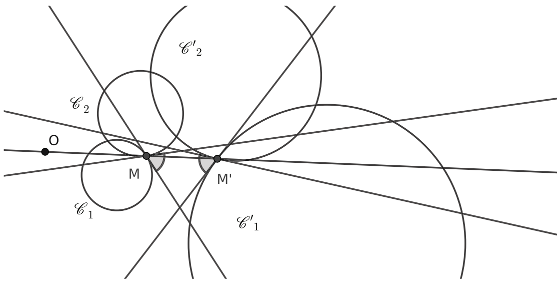
Question 26

Une inversion transforme le cercle $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et un point M de $\mathscr{C}$ en un point M' de $\mathscr{C}'$. Montrez que la tangente en M à $\mathscr{C}$ et la tangente en M' à $\mathscr{C}'$ sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[MM']$.

Indication : considérez le cercle Γ passant par M, par M' et tangent à $\mathscr{C}$ en M.

Question 27

Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui se coupent en un point M, et leurs images par une inversion, $\mathscr{C}'_1$ et $\mathscr{C}'_2$ qui se coupent en M', image de M. Montrez que les angles (orientés) des tangentes aux cercles en M et en M' sont opposés.



Question 28

Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$ de centre A et $\mathscr{C}_2$ de centre B qui se coupent en C et D. Montrez que les bissectrices de $\widehat{ACB}$ coupent la droite (AB) en deux points qui sont les pôles des inversions échangeant ces deux cercles.

5.2.5 Réponses

Réponse 1

Étant donné un point M, et un réel $k > 0$, il y a une infinité de points M' tels que $OM \cdot OM' = k$, à savoir les points du cercle de centre O et de rayon k/OM. Ainsi, on ne définit pas une transformation, car chaque point doit avoir une image unique. Et si k est négatif, $OM \cdot OM' = k$ n'est pas possible (pourquoi ?).

Mais bien sûr, $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k \Rightarrow OM \cdot OM' = |k|$, et O,M,M' alignés.

Réponse 2

On peut être tenté de penser à $k = 1$ mais c'est une confusion avec l'homothétie. L'inversion n'est jamais une identité : $M = M'$ signifie $\overline{OM} \cdot \overline{OM} = OM^2 = k$ est possible, si $k > 0$, mais seulement pour certains points (voir plus loin). Pour la transformation identité, tous les points le sont.

Réponse 3

Non, parce que dans ce cas, le produit serait le produit scalaire, et M étant donné, il y a une infinité de points M' tels que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = k$, donc nous n'aurions pas défini une transformation. À ce propos, comment sont situés ces points M' ?

Saisissons cette occasion de bien souligner la distinction entre OM, une distance, nombre toujours positif ou nul, $\overline{OM}$, une abscisse, nombre positif, négatif ou nul, et $\overrightarrow{OM}$ un vecteur c'est-à-dire un objet tout à fait différent d'un nombre.

Réponse 4

Par l'homothétie : $\overline{OM'} = p \cdot \overline{OM}$ et par l'inversion,

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = p \cdot \overline{OM} \cdot \overline{OM} = k = pq.$$

Donc, si M est un tel point, $OM^2 = q$, ce qui est possible si (et seulement si) $q > 0$ c'est-à-dire si O est extérieur au cercle de centre A. Alors, $OM = \sqrt{q}$. Il y a donc deux tels points, qui sont les points de contact des tangentes au cercle de centre A et leurs images sont les points de contact des tangentes au cercle de centre B.

Réponse 5

On peut partir de cette égalité : $I_{O,n} \circ I_{O,m} = h_{O,n/m}$ et composer « à gauche », des deux côtés du signe =, par $I_{O,n}$ comme ceci :

$$I_{O,n} \circ I_{O,n} \circ I_{O,m} = I_{O,n} \circ h_{O,n/m}.$$

Comme l'inversion est involutive, cela se simplifie : $I_{O,n} \circ I_{O,n} = Id$ et il reste[3] : $I_{O,m} = I_{O,n} \circ h_{O,n/m}$. Maintenant pour satisfaire à l'énoncé il faut poser $n/m = p$ donc $m = n/p$.

$$I_{O,(n/p)} = I_{O,n} \circ h_{O,p}.$$

En composant une homothétie de centre O et de puissance p avec une inversion de centre O et de puissance n, on obtient une inversion de centre O et de puissance n/p.

On a composé « à gauche ». Faites l'opération en composant « à droite ».

Réponse 6

Si $M' = M$, on a $\overline{OM} \cdot \overline{OM} = k = OM^2$ donc si k est négatif, c'est impossible. Une inversion de puissance négative n'a pas de points invariants. Si $k > 0$, les points M tels que $OM^2 = k$ sont les points du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$. Une inversion de puissance positive possède tout un cercle de points invariants qui est appelé le cercle de cette inversion.

3. L'identité, Id, est élément neutre pour la composition des fonctions.

Réponse 7

Dans cette question, on a supposé $k > 0$. Puisque $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = k > 0$, $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ sont de même signe, donc $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = OA \cdot OB$. Alors, soit OA soit OB est plus grand que $\sqrt{k}$ donc à l'extérieur du cercle de l'inversion, et l'autre est plus petit que $\sqrt{k}$, donc à l'intérieur. C'est une remarque très simple mais utile pour se représenter le fonctionnement géométrique de cette transformation.

En étant plus précis algébriquement on peut montrer que le point à l'extérieur est plus loin du cercle que le point à l'intérieur. Soit U le point où (OA) coupe le cercle, $OA = a, OB = b$ et $OU = \sqrt{k}$.

On a $b = k/a$. Posons par exemple que A est à l'intérieur.

Il s'agit de comparer $AU = \sqrt{k} - a$ et $UB = k/a - \sqrt{k} = (\sqrt{k} - a)(\sqrt{k}/a)$. Comme $(\sqrt{k}/a) > 1$, $UB > AU$.

Réponse 8

Soit O le pôle de cette inversion, et k sa puissance. Puisque $\overline{OM} \cdot \overline{OM}' = k$, la puissance de O par rapport à ce cercle vaut k et pour toute autre sécante issue de O coupant le cercle en deux points N et N', on a encore $\overline{ON} \cdot \overline{ON'} = k$, et N' est l'image de N par l'inversion de centre O et de puissance k. Donc l'image de ce cercle est ce même cercle. Il est **globalement invariant**. La figure ne bouge pas, mais les points bougent (sauf peut-être un ou deux. Pourquoi ?). Attention, ce n'est pas le même cas que celui du cercle Ω, cercle de l'inversion, dont chaque point est invariant.

Notez qu'une inversion de puissance négative n'a pas de cercle dont tous les points sont invariants. Elle n'a même pas un seul point invariant. Mais elle a des cercles globalement invariants ! Comment est situé le pôle relativement à un tel cercle ?

Réponse 9

Un tel cercle $\mathscr{C}$ coupe Ω en deux points P_1 et P_2, et la tangente à $\mathscr{C}$ en ces points passe par O, centre de l'inversion, car c'est l'une des définitions de l'orthogonalité des cercles. La puissance de O par rapport à $\mathscr{C}$ vaut $OP_1^2 = k$, où k est la puissance de l'inversion. Pour toute sécante à $\mathscr{C}$ issue de O qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points M et M' on aura $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k$ donc M' est l'image de M. Le cercle $\mathscr{C}$ est globalement invariant pour cette inversion.

Réciproquement, tout cercle globalement invariant par une inversion est orthogonal au cercle Ω, cercle de l'inversion. Soit $\mathscr{D}$ un cercle globalement invariant. Dans ce cas, un point T de contact d'une tangente menée depuis le pôle à $\mathscr{D}$ est sa propre image, donc $OT^2 = k$, et T est un point de Ω, ce qui prouve que Ω et $\mathscr{D}$ sont orthogonaux.

Scholie

En résumé, étant donné une inversion de cercle Ω, de pôle O et de puissance k, pour un cercle $\mathscr{C}$ les conditions :
(i) $\mathscr{C}$ est orthogonal à Ω,
(ii) La puissance de O par rapport à $\mathscr{C}$ vaut k,
(iii) Cette inversion échange deux points de $\mathscr{C}$,
(iv) $\mathscr{C}$ est globalement invariant par $I_{O,k}$,
sont équivalentes.

Réponse 10

Tout d'abord, si les points O,M,N sont alignés, il est clair que les points M,M',N,N' sont également alignés (avec O) et réciproquement.

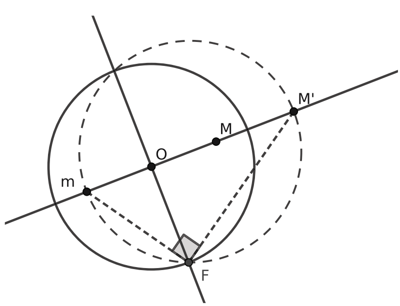
S'il ne sont pas alignés, il y a un cercle passant par M, M', N qui est globalement invariant puisqu'il contient un point et son image. Donc l'image de N est un point du même cercle, CQFD.

Notez que les points M et N sont supposés distincts, mais si $M = M'$, ou si $N = N'$ la propriété reste vraie puisque par trois points, ou par deux points, il passe un cercle, ou une droite.

Réponse 11

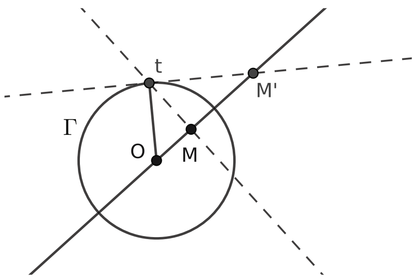
Si on note $a = \overline{OM}$ et $b = \overline{OM'}$, la puissance de l'inversion, k, est égal à ab et si k est positif, le cercle d'inversion a pour rayon $\sqrt{ab}$ c'est-à-dire la moyenne géométrique des réels positifs a et b. Si k est négatif, il n'y a pas de cercle d'inversion.

Nous savons (voir RÉSU 6) que la hauteur issue du sommet de l'angle droit dans un triangle rectangle divise l'hypoténuse en deux segments de longueur a et b et que la longueur de ce segment hauteur vaut justement $\sqrt{ab}$. D'où cette construction : le point m est défini comme symétrique de M par rapport à O. Donc $mO = OM = a$, $OM' = b$, $mM' = a + b$. La perpendiculaire à (mM') en O coupe en F le cercle de diamètre mM', donc $OF = \sqrt{ab}$, et le cercle de centre O passant par F est le cercle de l'inversion qui transforme M en M'.



Réponse 12

Il y a plusieurs manières de faire. On peut tracer la droite (OM) et élever, en M, une perpendiculaire à cette droite, qui coupe Γ, le cercle d'inversion en deux points.

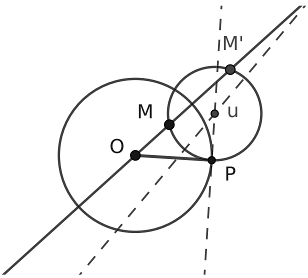


Soit t l'un de ces points, traçons le rayon (Ot) et une perpendiculaire en t, qui sera la tangente à Γ en t. Elle coupe (OM) en un point qui est M', l'image de M. En effet, les triangles rectangles MOt et MtM' sont semblables (angles égaux parce qu'à côtés perpendiculaires) et donc $\frac{Ot}{OM'} = \frac{OM}{Ot}$ soit $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = Ot^2 = k$.

Si le point M est à l'extérieur du cercle, on fait le chemin inverse : on mène par M une tangente à Γ en un point t et M' est le pied de la perpendiculaire abaissée de t sur (OM).

Remarque : la droite (tM) est la **polaire** de M' par rapport à Γ.

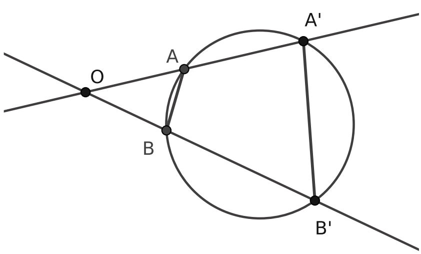
Autre méthode. Tout cercle contenant M et M' sera globalement invariant et orthogonal à Γ. Il suffit donc de construire un cercle orthogonal à Γ passant par M. Il en existe une infinité. Soit P un point quelconque de Γ, non situé sur (OM), on trace en P la tangente à Γ, elle va contenir le centre du cercle recherché que l'on notera u. Ce centre est aussi sur la médiatrice de $[MP]$, ce qui permet de déterminer u, de tracer le cercle et de déterminer M'.



On pourra voir dans les exercices une troisième méthode.

Réponse 13

Comme $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, les points A, A',B, B' sont sur un même cercle. Il en résulte que les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables, du fait des propriétés angulaires dans ce cercle.



Ainsi, $\widehat{OA'B'} = \widehat{OBA}$ puisqu'ils sont tous les deux supplémentaires de $\widehat{ABB'}$.

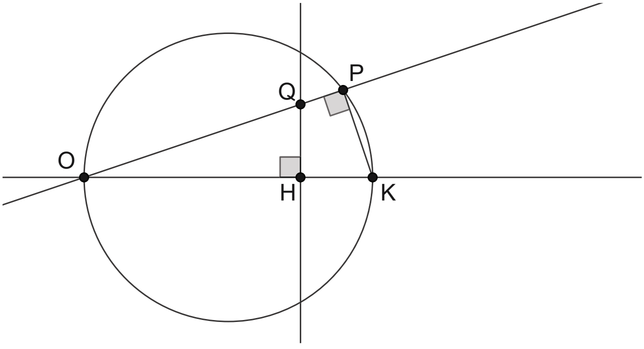
Donc $OA/OB' = AB/A'B'$, soit $A'B' \cdot OA = AB.OB'$ (on exprime ici des rapports de longueurs). Par ailleurs, $k = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ donc $|k| = OB \cdot OB'$, donc $OB' = |k|/OB$.

Finalement :

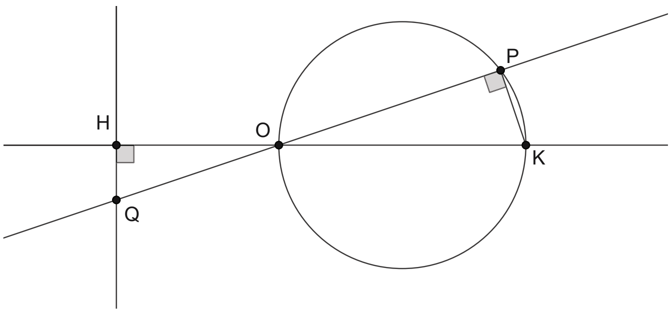
$$A'B' = \frac{|k|AB}{OA \cdot OB}.$$

Réponse 14

Comme les angles $\widehat{OPK}$ et $\widehat{OHQ}$ sont droits, et puisque leur angle en O est commun, les triangles OPK et OHQ sont semblables. Par conséquent, $\overline{OP}/\overline{OK} = \overline{OH}/\overline{OQ}$, donc $\overline{OP}.\overline{OQ} = \overline{OH} \cdot \overline{OK}$, et ce dernier produit ne dépend pas du choix de P, ni de la position de la droite (HQ) perpendiculaire au diamètre OK, qui peut être sécante au cercle, ou non.



Le produit $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ est-il toujours positif ?



Réponse 15

La propriété qui fait l'objet de la question 14, jointe à la définition de l'inversion, prouve que l'image d'un cercle passant par l'origine est une droite perpendiculaire à la droite qui joint le pôle O et le centre de ce cercle. Comme l'inversion est une involution, la même propriété prouve que l'image d'une droite (d) ne passant pas par l'origine est un cercle passant par l'origine, cercle dont le centre est situé sur une droite perpendiculaire à (d) passant par O.

Si l'inversion est donnée par son pôle O et sa puissance k, la droite (d) étant donnée, on obtient le point H en projetant orthogonalement O sur (d). Il existe un et un seul point K tel que $\overline{OK} \cdot \overline{OH} = k$. On a alors le diamètre du cercle, et donc le cercle. Si c'est le cercle qui est donné, on a tout de suite K ; on en déduit H et la droite (d). Les autres cas sont laissés à la lectrice (et au lecteur).

Réponse 16

Ce sont deux droites ne passant pas par le pôle O. Comme les deux cercles sont tangents, si leurs centres sont ω et ω', les points O, ω et ω' sont alignés et les droites transformées des deux cercles, perpendiculaires à cet alignement, sont parallèles. D'ailleurs comme les deux cercles ont O en commun et que O n'a pas d'image... les deux droites n'ont pas de point commun.

Réciproquement, les images de deux droites parallèles ne passant pas par le pôle sont deux cercles passant par le pôle et tangents en ce point.

Réponse 17

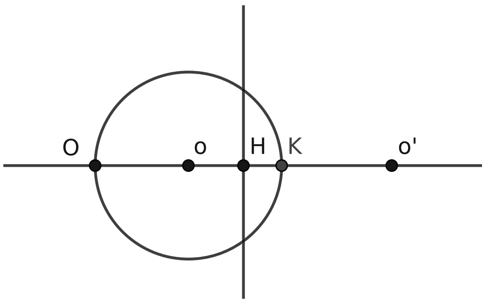
Si le cercle $\mathscr{C}$ est assez grand pour couper Ω en deux points, A et B, comme ces deux points sont invariants, c'est facile : l'image de $\mathscr{C}$ est la droite (AB).

Si le cercle $\mathscr{C}$ est tangent intérieurement au cercle Ω, la tangente commune est la droite recherchée (pourquoi ?).

Dans la cas d'un cercle $\mathscr{C}$ passant par O et ne recoupant pas Ω, on prend un point M de ce cercle, on détermine M' comme dans la question 11 et on trace par M' la perpendiculaire à la droite qui joint O au centre de $\mathscr{C}$. C'est l'image de $\mathscr{C}$.

Réponse 18

Dans un repère d'origine O, pôle de l'inversion, porté par la droite (Oo), soit u l'abscisse de o, $2u$ l'abscisse de K, opposé diamétral de O, h l'abscisse de H, pied de la droite image de $\mathscr{C}$ et x l'abscisse de o', image de o.



H est l'image de K, donc on a $\overline{Oo}\cdot\overline{Oo'} = \overline{OK}\cdot\overline{OH}$, c'est-à-dire $u \cdot x = 2u \cdot h$, donc $x = 2h$. Ainsi, l'image de o est le symétrique du pôle O par rapport à la droite image de $\mathscr{C}$.

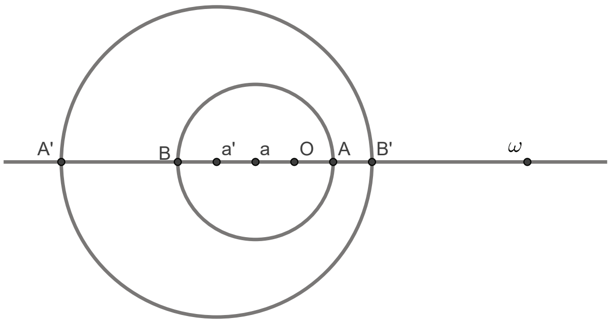
Réponse 19

L'étude **Inversion et homothétie** (voir page 94) suggère que la réponse est un cercle. Prouvons-le et précisons le résultat.

Le cercle $\mathscr{C}$ et le pôle O de l'inversion étant donnés, soit q la puissance de O par rapport à $\mathscr{C}$. Comme ce cercle ne passe pas par O, $q \neq 0$. L'homothétie de centre O et de rapport p transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et l'inversion de centre O et de puissance $pq = k$ *échange* ces deux cercles.

On note que l'image du centre de $\mathscr{C}$ par l'inversion n'est pas le centre de $\mathscr{C}'$, qui, lui, est l'image du premier par l'homothétie. Notons en effet a le centre de $\mathscr{C}$, a' le centre de $\mathscr{C}'$ et ω l'image de a par l'inversion. Ces points sont sur la droite (Oa).

On a $\overline{Oa'} = p \cdot \overline{Oa}$ et $\overline{Oa} \cdot \overline{O\omega} = k = pq$, donc $\overline{O\omega} = k/\overline{Oa}$.



Peut-on avoir $a' = \omega$? On aurait donc $\overline{Oa} \cdot \overline{Oa'} = p \cdot Oa^2 = pq$ soit $Oa^2 = q$. Mais q est la puissance de O par rapport au cercle de centre a, donc $q = d^2 - R^2$, où d est justement Oa. Il faudrait donc que le rayon de ce cercle soit nul. Ce serait un point [4]. Dans les autres cas, l'image du centre (par l'inversion) n'est pas le centre de l'image.

Sur cette figure, $p = 2, q = -3, k = -6$.

Cercle bissecteur

Lorsqu'une inversion de puissance positive transforme un cercle $\mathscr{C}$ en cercle $\mathscr{C}'$, on dit que le cercle de cette inversion est le cercle **bissecteur** de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. C'est une notion importante et la justification de ce nom apparaîtra dans les exercices.

Réponse 20

1) Comme le suggère la conclusion, il y a deux cas. Soit les droites (AA') et (BB') se coupent, soit elles sont parallèles.

4. En effet, un cercle de rayon nul est un cercle-point, son centre, c'est ce même point et dans ce cas, l'image du centre est bien le centre de l'image !

Si elles se coupent en un point O, comme les points A, A', B, B' sont cocycliques (voir page 98), on peut noter p la puissance de O par rapport à ce cercle, et $p = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, donc l'inversion σ de pôle O et de puissance p envoie A en A' et B en B'.

Soit maintenant un point Z différent de A et de B. Posons $\mathscr{X}(Z) = Z'$. Comme les points A,A', Z, Z' sont cocycliques, $p = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OZ} \cdot \overline{OZ'}$, donc l'image de Z par l'inversion σ est Z' et $\mathscr{X}$ coïncide l'inversion σ. Le cas $Z = Z'$ signifie que la droite (OZ) est tangente en Z au cercle (A, A', Z) et on a $p = OZ^2$.

Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles, $AA'B'B$ est un trapèze, inscriptible par hypothèse. Or un trapèze inscriptible est un trapèze isocèle (démontrez-le). Dans ce cas la médiatrice de $[AA']$ est axe de symétrie. En prenant encore un point quelconque Z, $AA'Z'Z$ est aussi un trapèze isocèle et la médiatrice de $[AA']$ est encore axe de symétrie. Si $Z = Z'$, il appartient à cet axe. $\mathscr{X}$ est une symétrie.

2) Si $B' = A'$, les quatre points A, A', B, B' ne sont plus que trois. Si alors ils ne sont pas alignés, ils sont cocycliques. Une application constante, qui envoie tout point P du plan sur un point fixe O, vérifie le critère. De même l'identité : $A = A', B = B'$, il n'y a plus que deux points : ils sont cocycliques (et alignés). On peut construire des chimères, qui sont par exemple une inversion sur une droite et l'identité sur son complémentaire.

Réponse 21

Les points A,B,m sont alignés sur une droite (d). Si le pôle de l'inversion considérée appartient aussi à cette droite, A', B', m' y seront également situés. Dans les autres cas, les points A', B', m' sont sur l'image de (d) qui est un cercle (passant par le pôle). Or jamais trois points d'un cercle ne sont alignés, donc $m' \notin [A'B']$ et la réponse est négative. Du moins les formules donnant les distances des images montrent que si $OA = OB$, m' appartient à la médiatrice de $[AB]$:

$$(A'm' = \frac{|k|Am}{OA \cdot Om} = \frac{|k|mB}{Om \cdot OB} = m'B') \Leftrightarrow (OA = OB).$$

Maintenant si les trois points sont alignés avec le pôle, dans la même demi-droite, on a une situation intéressante quand $k = 1$. On a $Om = (OA + OB)/2$ et, en notant c' le milieu de $[A'B']$, $Oc' = (OA' + OB')/2$. Mais $OA' = 1/OA$, $OB' = 1/OB$. Donc $2Oc' = 1/OA + 1/OB$ et si c est l'inverse de c',

$$\frac{2}{Oc} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}.$$

Cela peut vous rappeler quelque chose : la moyenne harmonique. Tandis que Om est la moyenne arithmétique de OA et OB, Oc, où c est l'inverse du milieu des images, est la moyenne harmonique des mêmes longueurs (voir RÉSU 7). Un calcul simple (faites-le) prouve que ces deux moyennes sont le même nombre si et seulement si $OA = OB$. Ce qui n'est possible que si $A = B$ ou si A et B sont symétriques par rapport au pôle (donc pas dans la même demi-droite définie par O). Dans ce dernier cas, quelle est l'image de leur milieu ?

Réponse 22

Si q est la puissance de O par rapport à $\mathscr{C}$, l'homothétie de centre O qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ a pour rapport k/q, donc $R' = R.|(k/q)|$. Notez que k et q peuvent être de signes contraires. En particulier, on peut avoir $k > 0$ et $q < 0$ et les rayons sont des longueurs, d'où la valeur absolue. En notant a le centre de $\mathscr{C}$, on a : $q = d^2 - R^2 = Oa^2 - R^2$ d'où la formule :

$$R' = \frac{|k|R}{|Oa^2 - R^2|}.$$

Scholie

On suppose que le dénominateur n'est pas nul. Quand il est très petit, R' est très grand ! Mais si $Oa = R$, cela signifie que $\mathscr{C}$ passe par l'origine, donc que son image est une droite. Or une droite peut être vue comme un cercle de rayon infiniment grand. . .

Les rayons R et R' peuvent-ils être égaux ?

La formule $R' = R.|(k/q)|$ entraîne dans ce cas (en supposant ces rayons non nuls) $k = \pm q$. Si $k = q$, nous avons vu qu'il s'agit d'un cercle globalement invariant (voir page 107). Il a donc le même rayon... que lui-même. Si $k = -q$, l'homothétie a un rapport égal à -1, c'est une symétrie centrale. Deux cercles symétriques ont bien le même rayon. Nous avons prouvé que ce sont les seuls cas.

Réponse 23

Cette question est extrêmement importante. Elle est utilisée presque constamment.

Nous partons du lien entre inversion et homothétie déjà observé (voir page 94). Étant donnés deux cercles, $\mathscr{C}$ de rayon R et $\mathscr{C}'$ de rayon R', avec $R \neq R'$, il y a deux homothéties transformant $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ (voir RÉSU 4) de centres distincts o_1 et o_2, l'une, positive, de rapport $p = R'/R$, l'autre, négative, de rapport $p' = -R'/R$ (o_1 et o_2 sont aussi les centres de deux autres homothéties transformant $\mathscr{C}'$ en $\mathscr{C}$, de rapports $q = 1/p$ et $q' = 1/p'$).

Les mêmes points o_1 et o_2 sont également les centres d'inversions **échangeant** $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, puisque l'inversion est involutive. c'est-à-dire que chacune de ces deux inversions transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}'$ en $\mathscr{C}$.

Pour avoir la puissance de ces inversions, il faut tenir compte de la puissance du point o_1 (ou o_2) par rapport $\mathscr{C}$ (ou a $\mathscr{C}'$). On a toujours

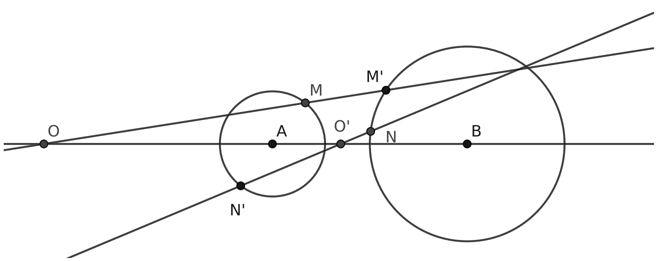
$$k = pq.$$

Si p est le rapport de l'homothétie qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$, q est la puissance de o_1 (ou o_2) par rapport à $\mathscr{C}$.

Et si p est le rapport de l'homothétie qui transforme $\mathscr{C}'$ en $\mathscr{C}$, q est la puissance de o_1 (ou o_2) par rapport à $\mathscr{C}'$.

Il est important (on verra pourquoi par la suite) de déterminer le signe de la puissance d'inversion. Et ici, la situation dépend de la position des deux cercles, qui peuvent être sécants, tangents ou sans contact, *intérieurement* ou *extérieurement*.

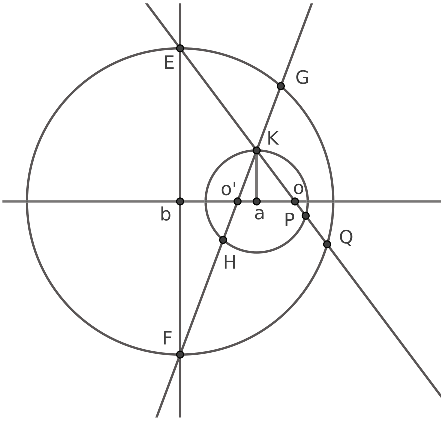
Cercles non sécants



Dans le cas de la figure, les cercles sont non sécants et extérieurs l'un à l'autre. Le point O est le centre des homothéties de rapports positifs et O' le centre des homothéties de rapports négatifs. Les puissances de O comme de O' par rapport aux cercles sont positives (ces points sont extérieurs aux cercles) donc l'inversion de pôle O est de puissance positive et celle de pôle O', de puissance négative (par la règle des signes). Seule l'inversion de puissance positive possède un cercle de points invariants.

L'analyse se fait toujours ainsi : le signe du rapport de l'homothétie, le signe de la puissance du centre (qui est aussi le pôle) par rapport au cercle que l'homothétie prend comme objet.

Lorsqu'un cercle est intérieur à l'autre, il y a toujours deux homothéties transformant le cercle de centre a en le cercle de centre b. L'une est de rapport positif, de centre o sur la figure, elle envoie K en E et P en Q. L'autre, de rapport négatif, de centre o' envoie K en F et H en G. Les puissances de o, tout comme celles de o', par rapport à chacun des deux cercles, sont négatives (ces pôles sont intérieurs aux deux cercles).



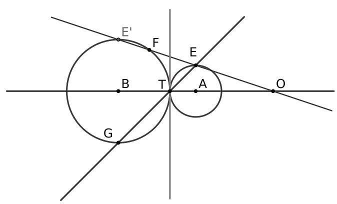
De ce fait, il y a une inversion de pôle o et de puissance négative, qui échange K et Q, P et E et une inversion de pôle o' et de puissance positive qui échange K et G, H et F.

Cercles sécants

Lorsque les cercles sont sécants, vous pouvez démontrer de la même manière qu'il y a deux inversions de puissances positives qui échangent les deux cercles.

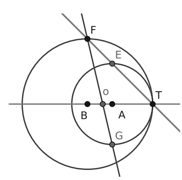
Cercles tangents

Deux cercles tangents peuvent l'être intérieurement, c'est-à-dire tous les deux du même côté de leur tangente commune, ou extérieurement. Dans le second cas, il y a deux centres d'homothétie, l'un extérieur, O, pôle de l'inversion positive qui, sur la figure, échange E et F (tandis que l'homothétie envoie E en E'), l'autre est le point de contact, T.



Curieusement, le point T n'est pas le pôle d'une inversion. On le constate : la quantité $\overline{TE}\cdot\overline{TG}$ n'est pas constante quand la sécante (EG) tourne autour de T.

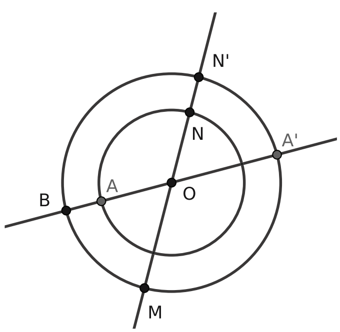
Une homothétie de centre T a bien un rapport $-R/r$ (ou $-r/R$) mais la puissance de T par rapport aux deux cercles étant nulle, on ne peut pas définir la puissance de ce qui serait une inversion de pôle T.



Quand ils sont tangents intérieurement, pour la même raison, il n'y a pas d'inversion de pôle T. L'autre centre d'homothétie est intérieur aux deux cercles et c'est le centre d'une homothétie négative. Comme la puissance de ce centre o par rapport aux cercles est négative, il y a une inversion de puissance positive de pôle o.

Cercles concentriques

Si les deux cercles, de rayons respectifs r et R, sont concentriques, il n'y a qu'un centre d'homothétie, qui est le centre commun des deux cercles,



mais deux homothéties envoyant le plus petit cercle sur le plus grand (et deux autres envoyant le plus grand sur le plus petit !). L'une de rapport (R/r) l'autre de rapport $(-R/r)$ (resp r/R et $-r/R$). Et aussi deux inversions échangeant ces deux cercles de puissances $R.r$ et $-R.r$ car la puissance du pôle par rapport au plus petit cercle vaut $(-r^2)$.

L'homothétie de rapport positif envoie N en N' et l'inversion de puissance négative $(-Rr)$ échange N et M. L'homothétie de rapport négatif envoie A en A' et l'inversion de puissance positive (Rr) échange A et B.

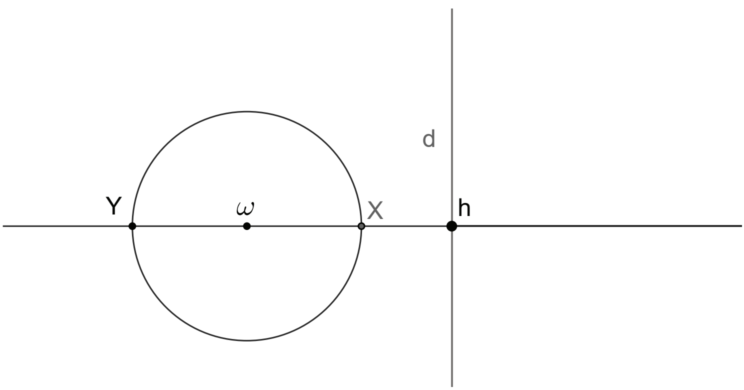
Cercles de même rayon

Si les deux cercles ont le même rayon, il n'y a qu'une homothétie, de rapport -1, qui est une symétrie centrale dont le centre est le milieu des centres des deux cercles. On en déduit une inversion, de puissance positive si les cercles sont sécants, négative sinon.

Cas particuliers : si l'un des deux cercles est un cercle-point... aucune inversion ne les échange. Si l'on parle de deux cercles-points, une infinité d'inversions les échangent (expliquez).

Cercle et droite

S'agissant d'un cercle de centre ω et d'une droite (d), impossible de passer par une homothétie. Mais on sait que le pôle d'une inversion convenable doit appartenir au cercle. Il faut tracer la droite orthogonale à (d) passant par ω. Cette droite coupe (d) en un point h et le cercle suivant un diamètre $[XY]$. L'inversion de pôle X qui envoie Y en h et celle, de pôle Y, qui envoie X en h sont les deux solutions, une de puissance positive (de pôle Y) et l'autre de puissance négative.



Mais si la droite est tangente au cercle ? Le point de contact ne convient pas comme pôle, car il transforme la droite en elle-même. Dans ce cas, il n'y a qu'une solution, l'autre extrémité du diamètre.

Réponse 24

Soient F et G deux objets, qui peuvent être chacun un cercle ou une droite, ayant un unique point commun P. Cela correspond au cas de deux cercles tangents, ou d'une droite tangente à un cercle, ou de deux droites sécantes. Donc $P \in F$ et $P \in G$. Par conséquent, pour toute application $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}(P) \in \mathscr{F}(F) \cap \mathscr{F}(G)$ donc les images ont un point commun. Peuvent-elles en avoir plusieurs ? Non parce qu'ici, l'application est une inversion, qui est involutive, donc un second point commun aurait un antécédent commun à F et G, distinct de P. Donc les images de F et G sont également tangentes (ou sécantes s'il s'agit de deux droites).

Réponse 25

Elles sont transformées en deux cercles passant par le pôle de l'inversion. En outre, les centres de ces cercles sont alignés avec le pôle, sur une droite perpendiculaire aux deux parallèles. Ces cercles sont donc tangents au pôle, intérieurement ou extérieurement.

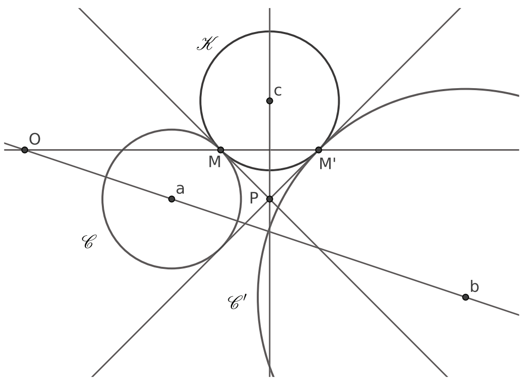
Réponse 26

Le troisième cercle est bien défini. En effet par construction, son centre c est l'intersection de la médiatrice de $[MM']$ et de la droite (aM) puisque quand deux cercles sont tangents le point de tangence et les deux centres sont alignés. Notons ce cercle

$\mathscr{K}$. La réponse à la question 8 prouve que $\mathscr{K}$ est globalement invariant. Il est nécessairement tangent à $\mathscr{C}'$ en M', sinon, il couperait ce cercle en deux points et le second point devrait avoir un antécédent différent de M, qui appartiendrait à la fois à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{K}$, puisqu'il est globalement invariant. $\mathscr{K}$ ne serait alors pas tangent à $\mathscr{C}$.

Notons P le point commun des tangentes à $\mathscr{C}$ en M et à $\mathscr{C}'$ en M'. Ces droites sont également les tangentes à $\mathscr{K}$ en ces points, donc $PM = PM'$, mais de même $cM = cM'$. La droite (Pc) est donc la médiatrice de $[MM']$ et les tangentes PM et PM' sont symétriques par rapport à (Pc) (de plus, P est un point de l'axe radical de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, voyez-vous pourquoi ?).

Il faut admirer l'intervention du cercle $\mathscr{K}$, qui, par lui-même, est étranger à la question posée, mais donne la solution !



Si $\mathscr{C}$ passe par le pôle de l'inversion, son image est une droite (d). Soient alors un point M de $\mathscr{C}$ et son image M' sur (d). On peut construire de la même manière un cercle $\mathscr{K}$ tangent en M à

$\mathscr{C}$, passant par M', qui sera encore (par le même raisonnement) tangent en M' à (d). La démonstration continue identiquement et la conclusion est que la tangente à $\mathscr{C}$ en M est symétrique de la droite (d) par rapport à la médiatrice de $[MM']$.

L'inversion a tendance à considérer les droites comme des cercles particuliers et la tangente à une droite... c'est elle-même (en tout point).

Réponse 27

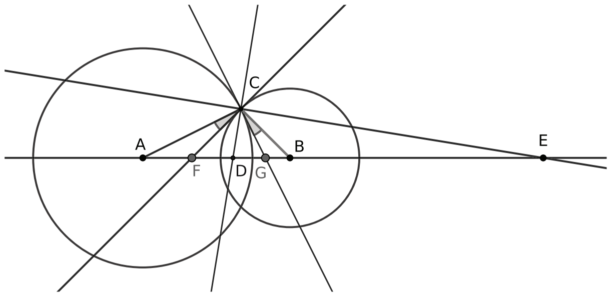
Les tangentes en M au cercle $\mathscr{C}_1$ et en M' au cercle $\mathscr{C}'_1$ sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[MM']$ d'après la réponse 26, et de même les tangentes en M et en M' au cercle $\mathscr{C}_2$ et au cercle $\mathscr{C}'_2$. Comme la symétrie conserve les angles et change leur orientation, le résultat est démontré.

Scholie

Ce résultat est fondamental. Lorsque deux courbes se coupent en un point, on dit qu'elles se coupent suivant l'angle que font leurs tangentes en ce point. On peut généraliser le résultat de la question 27 en disant que « **l'inversion conserve les angles (mais pas leur orientation)** ». C'est en particulier le cas de l'orthogonalité. Si deux cercles sont orthogonaux, leurs images (cercle ou droite) sont orthogonales. Rappel : une droite est orthogonale à un cercle si et seulement si elle passe par son centre. Ces résultats sont souvent utilisés.

Réponse 28

On sait (voir RÉSU 2) que les pieds des bissectrices d'un angle d'un triangle découpent le côté opposé dans le rapport des côtés adjacents.



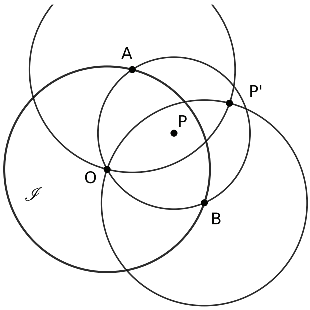
C'est-à-dire que, si l'on note D et E les intersections des bissectrices de l'angle $\widehat{ACB}$ avec la droite (AB), on a $\overline{EB}/\overline{EA} = -\overline{DB}/\overline{DA} = CB/CA$. Ici il faut se souvenir que les pôles des inversions échangeant ces deux cercles sont également centre des homothéties qui transforment l'un de ces cercles en l'autre. Ces homothéties ont comme rapport le quotient des rayons des cercles, c'est-à-dire (pour deux des quatre homothéties) CB/CA. Les points D et E sont donc les centres d'homothéties et du même coup les pôles des inversions, O_1 et O_2. Les droites (CO_1) et (CO_2) sont aussi les bissectrices des angles que font les tangentes en C. Voyez-vous pourquoi ?

5.3 Exercices.1

5.3.1 Questions.1

Question 1. Une construction

Soit un cercle $\mathscr{I}$ de centre O et de rayon $R = \sqrt{k}$, définissant une inversion, et un point P tel que $OP > \sqrt{k}/2$. Le cercle de centre P passant par O coupe $\mathscr{I}$ en A et en B. Les cercles de centre A et de centre B, passant par O se coupent en un second point, P'. Montrez que P' est l'inverse de P.



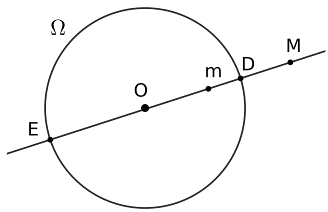
Question 2. Sur l'axe radical

Soient un cercle de centre A et un cercle de centre B, non concentriques. Deux points, J et G sur le premier et leurs images J' et G' dans une inversion de pôle O qui échange les deux cercles. Les points O, J et G ne sont pas alignés. Montrez que les droites (JG) et $(J'G')$ se coupent sur l'axe radical.

Question 3. L'image du centre

Une inversion de pôle O transforme un cercle $\mathscr{C}$ de centre A en un cercle $\mathscr{C}'$ de centre B. Soient deux points M et N de $\mathscr{C}$ diamétralement opposés. Quelle est l'image de la droite (MN) ? En déduire une construction de A', image du centre A.

Question 4. Division harmonique



Soit une inversion de pôle O et de cercle Ω. Soit m un point et M son image. Soit E et D les extrémités du diamètre intersection de Ω avec la droite (mM). Montrez que les points E, m, D, M forment une division harmonique.

Question 5. Théorème de Prolémée

Soient quatre points A,B,C,D dans un plan, constituant un quadrilatère convexe.

Montrez que $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$, et que l'égalité a lieu si et seulement si ce quadrilatère est inscriptible.

Indication : faire une inversion de pôle A et de puissance 1.

Question 6. Birapport plan

Soient quatre points A, B, C, D, pas nécessairement alignés, et leurs images A', B', C', D' par une inversion de pôle (non situé en l'un des quatre points) O et de rapport k. Montrez que

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'}.$$

Il s'agit ici de longueurs.

Question 7. Antiparallèles

Soit une inversion de pôle O, m et n deux points non alignés avec O, M et N leurs images. Montrez que les couples de droites $(OM), (ON)$ et (nm),(NM) sont antiparallèles (voir RÉSU 8). Dans le cas où les droites (nm),(NM) sont sécantes en un point P, montrez qu'il y a une inversion de pôle P dans laquelle m est l'image de n, et M l'image de N. Ces droites peuvent-elles être parallèles ?

Question 8. Distances

Trois points O, A et B sont tels que $OA \leq OB$. Que peut-on dire de leurs images A' et B' dans une inversion de centre O et de puissance k ?

Question 9. Image d'un segment

Soient quatre points alignés O, A, B, C, tels que $B \in [AC]$. Que peut-on dire de la position des images dans une inversion de centre O ?

Plus généralement, que peut-on dire de l'image d'un segment d'une droite passant par le pôle ?

Question 10. Entourages

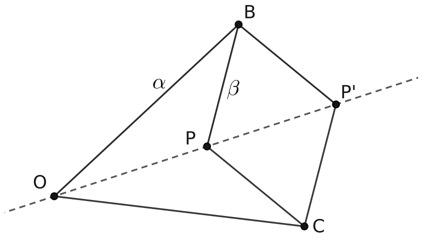
Est-il possible qu'un cercle $\mathscr{C}$ contienne un cercle $\mathscr{D}$ et que les images $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}'$ de ces cercles par une inversion soient sécants ? Est-il possible que $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}'$ soient extérieurs l'un à l'autre ?

Question 11. Le troisième cercle

Soient deux cercles $\mathscr{A}$ de centre a et $\mathscr{B}$ de centre b qui se coupent en O et P. La droite (Oa) coupe $\mathscr{B}$ en Q et la droite (Ob) coupe $\mathscr{A}$ en R. Montrez que le cercle qui passe par les points O, R, et Q a son centre sur la droite (OP).

Indication : on peut certainement résoudre cet exercice de diverses façons. Ici, on recommande de faire une inversion de centre O et de puissance quelconque.

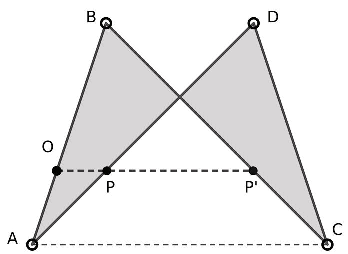
Question 12. Inverseur de Peaucellier



La figure représente un dispositif composé de six tiges rigides. Deux sont de longueur α $(OB = OC)$ et quatre de longueur β $(BP = BP' = CP = CP')$. Le point O est fixe, les points P, P', B, C sont des articulations. Montrez que les points O, P et P' sont toujours alignés, dans cet ordre, et que le produit $OP{\cdot}OP'$ a une valeur fixe.

Question 13. Inverseur de Hart

Voici un autre dispositif utilisable pour transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne. AB et CD sont deux tiges de même longueur de même que AD et BC, avec $AD > AB$. Ces quatre sommets sont articulés. O est un point fixe, appartenant à $[AB]$, autour duquel l'ensemble est mobile dans un plan.



O, P et P' sont alignés sur une droite parallèle à (AC). Montrez que $OP \cdot OP'$ est constant. Indication : il faut utiliser le théorème de Ptolémée.

Question 14. les sommets d'un Q-rhombe

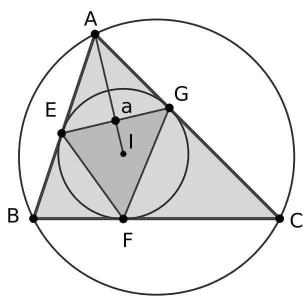
J'appelle Q-rhombe un quadrilatère plan, soit quatre points a,u,b,v tels que u et v sont sur la médiatrice de $[ab]$. Y a-t-il des inversions transformant ces quatre points en les sommets d'un autre Q-rhombe[5] ?

Question 15. Euclide, le retour

On sait que, par un point pris hors d'une droite, on peut mener une et une seule parallèle à cette droite. En déduire que par un point E pris hors d'un cercle $\mathscr{C}$, on peut mener (sauf exception) un et un seul cercle $\mathscr{C}'$ tangent à $\mathscr{C}$ en un point O donné et passant par E. Quelle est l'exception ?

Question 16. Cercle d'Euler par l'inversion

On trouvera des informations sur le cercle d'Euler (ou de Feuerbach) ou cercle « des neuf points » dans RÉSU 9.



5. La lectrice aura remarqué qu'un Q-rhombe partage avec le losange la propriété d'avoir des diagonales perpendiculaires. Or un losange, dans beaucoup de langues, est appelé « rhombe », d'un mot grec. Et « Q » est pour « quasi ».

Soit un triangle ABC, Γ son cercle circonscrit et Λ son cercle inscrit, de centre I. On note E, F, G les points où Λ est tangent aux côtés du triangle. Montrez que dans l'inversion de pôle I et de cercle Λ, l'inverse d'un sommet de ABC est le milieu d'un côté de EFG. Quelle est l'image de Γ dans cette inversion ?

Question 17. Formule d'Euler par l'inversion

Déduisez du résultat de la question précédente la formule d'Euler : $d^2 = R(R - 2r)$. Rappel : le rayon du cercle des neufs points d'un triangle est la moitié du rayon de son cercle circonscrit.

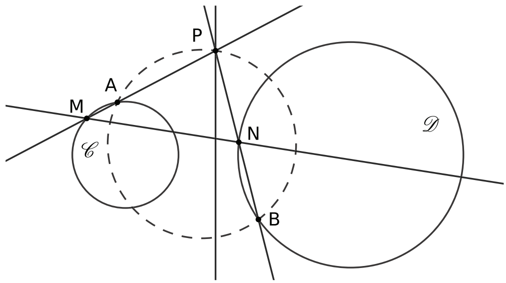
Question 18. Quatre cercles tangents

Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, l'un intérieur à l'autre, et deux autres cercles Γ_1 et Γ_2, chacun tangent aux deux précédents. On note a et b les points où $\mathscr{C}_1$ est tangent à Γ_1 et Γ_2, puis a' et b' les points où $\mathscr{C}_2$ est tangent à ces mêmes cercles. Montrez que les droites (ab) et $(a'b')$ se coupent sur Δ, axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Indication : on note o le point où (ab) coupe Δ et on considère une inversion de centre o échangeant a et b.

Question 19. Construire la perpendiculaire

Soient deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, non concentriques, un point A sur $\mathscr{C}$, un point B sur $\mathscr{D}$, un point P sur leur axe radical Δ. La droite (PA) recoupe $\mathscr{C}$ en M et la droite (PB) recoupe $\mathscr{D}$ en N. Comment choisir P pour que (MN) soit perpendiculaire à Δ ?



Question 20. Inversion des sommets d'un triangle

Trois points A,B,C étant donnés, ainsi qu'un point O dans l'intérieur de ABC, que peut-on dire des angles du triangle $A'B'C'$ dont les sommets sont les inverses de A, B, C dans une inversion de pôle O et de puissance quelconque ?

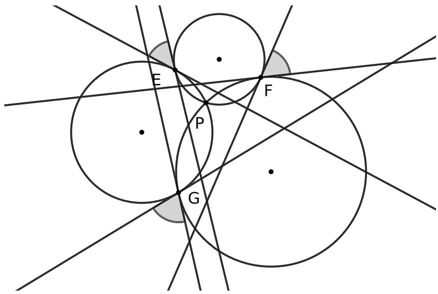
Montrez que $\widehat{BOC} = \widehat{BAC} + \widehat{B'A'C'}$ et que l'on a des relations analogues aux deux autres sommets du triangle.

En déduire qu'il est possible de choisir un point O tel que $A'B'C'$ soit équilatéral.

Que se passe-t-il si on choisit comme point O le centre du cercle circonscrit ?

Question 21. Somme des angles

Soient trois cercles ayant en commun un point P et qui se coupent deux par deux en E,F,G.



Montrez que la somme des angles des tangentes à ces cercles en ces trois points vaut π.

Question 22. L'image est l'axe

Soit un cercle $\mathscr{A}$ de centre A et un cercle $\mathscr{B}$ de centre B passant par A. Montrez que l'image de $\mathscr{B}$ par l'inversion de cercle $\mathscr{A}$ est l'axe radical de ces deux cercles.

5.3.2 Réponses.1

Réponse 1. Une construction

Les points O,P,P' sont alignés car ils appartiennent tous les trois à la médiatrice de $[AB]$: $OA = OB, PA = PB, P'A = P'B$, car les cercles de centre A, B, O ont le même rayon, par construction.

Le triangle OPB est isocèle de sommet P et le triangle OBP' est isocèle de sommet B. L'un des angles à la base, $\widehat{POB}$ est commun, donc ces triangles ont leurs trois angles respectivement égaux, ils sont semblables.

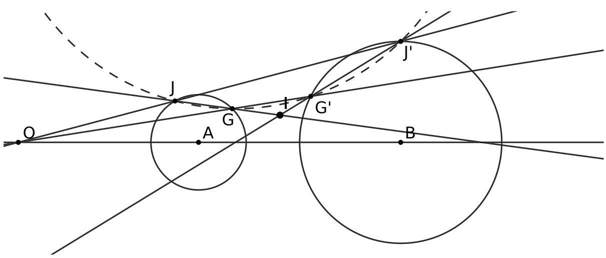
Donc $OP/BO = BO/OP'$ soit $OP \cdot OP' = BO^2 = k$.

Cette construction est pratique, élégante et rapide, mais elle n'est réalisable que si le cercle centré sur P et de rayon OP recoupe Γ, cercle de l'inversion (P peut être extérieur à Γ). Lorsque P est trop près du pôle, nous avons vu d'autres méthodes. Vous pouvez aussi adapter cette méthode en créant un point Q tel que $OQ = \alpha \cdot OP$ pour un réel α convenable, construire Q' et en déduire P'.

Réponse 2. Sur l'axe radical

Traitons le cas où les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre et l'inversion, positive.

Les points G, J, G', J', n'étant pas alignés, appartiennent à un même cercle (voir question 10 du chapitre précédent).



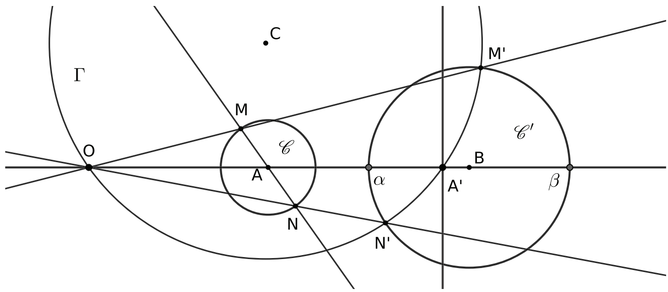
Les produits $\overline{IG} \cdot \overline{IJ} = \overline{IG'} \cdot \overline{IJ'}$ expriment la puissance de I par rapport à ce cercle, et prouvent aussi que la puissance de I par rapport au cercle de centre A est la même que celle par rapport au cercle de centre B.

I est donc un point de l'axe radical des cercles de centre A et de centre B.

Ce raisonnement s'applique sans changement aux autres cas.

Réponse 3. L'image du centre

L'image de la droite (MN) sera un cercle Γ passant par le pôle O et par les images M', N', ce qui suffit à le construire. L'image du centre A est donc le point A' où ce cercle rencontre la droite (OA).



Une autre méthode de construction qui présente également de l'intérêt : comme la droite (MN) passe par A, elle est orthogonale à $\mathscr{C}$, par conséquent le cercle Γ est orthogonal au cercle $\mathscr{C}'$. La puissance de B par rapport à Γ vaut donc $\overline{BA'} \cdot \overline{BO} = R^2$, où R est le rayon de $\mathscr{C}'$.

Mais cette relation, si l'on note α et β les extrémités du diamètre de $\mathscr{C}'$ créé par la droite (OB), exprime le fait que les points α, β, A',O sont en division harmonique (c'est la relation de Newton puisque B est le milieu de $[\alpha\beta]$), donc que la droite perpendiculaire à (OB) en A' est la polaire de O par rapport à $\mathscr{C}'$.

En somme : dans une inversion de pôle ω qui échange un cercle γ_1 et un cercle γ_2, l'image du centre de γ_1 est le pied de la polaire de ω par rapport à γ_2.

Réponse 4. Division harmonique

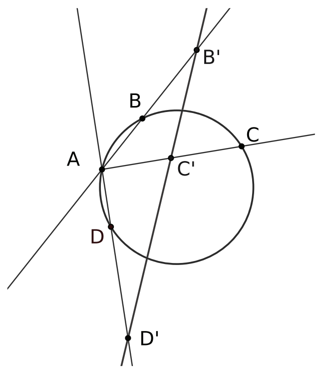
Les points E et D sont invariants. On a donc $OE^2 = OD^2 = \overline{Om} \cdot \overline{OM}$ et c'est la relation de Newton (voir page 23) qui exprime la division harmonique $[E, m, D, M]$, c'est-à-dire :

$$\overline{Em}/\overline{EM} = -\overline{Dm}/\overline{DM}.$$

Réponse 5. Théorème de Ptolémée

On note B', C', D', les images de B, C, D. Le pôle A n'a pas d'image dans le plan. L'inégalité triangulaire de trois points dans le plan dit que l'on a toujours $B'D' \leq B'C' + C'D'$. Compte tenu de la formule qui donne la distance des points inverses (voir page 111), cette égalité s'écrit : $\dfrac{BD}{AB \cdot AD} \leq \dfrac{BC}{AB \cdot AC} + \dfrac{CD}{AC \cdot AD}$, soit, en multipliant par $AB \cdot AC \cdot AD$:

$$AC \cdot BD \leq BC \cdot AD + AB \cdot CD.$$



Supposons les quatre points disposés sur un cercle, A et C de part et d'autre de la corde $[BD]$. Comme ce cercle passe par le pôle, son image est une droite, donc B', C', D' sont alignés et C' est entre B' et D'. On a donc $B'D' = B'C' + C'D'$. On en déduit $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$.

Réciproquement, si cette dernière égalité est vérifiée, le même calcul prouve que B', C' et D', images de B, C et D dans l'inversion de pôle A, sont alignés, et l'image de cette droite est un cercle passant par A, donc A, B, C, D appartiennent à un même cercle.

Quelle est la portée de la précision : « *A et C de part et d'autre de la corde [BD]* » ? Et si ce n'est pas le cas ?

Scholie

Ce théorème apparaît donc comme une extension et une conséquence de l'inégalité triangulaire.

Ptolémée est un grand astronome d'origine gréco-égyptienne du deuxième siècle. Son traité d'astronomie (*l'Almageste*) a exercé une influence dominante sur les conceptions scientifiques européennes jusqu'à Copernic et Galilée qui ont ouvert (non sans mal) un nouveau chapitre de cette discipline.

On peut également démontrer ce théorème par les triangles semblables, et aussi en utilisant les nombres complexes.

Réponse 6. Birapport plan

Il suffit d'appliquer à chaque longueur la formule

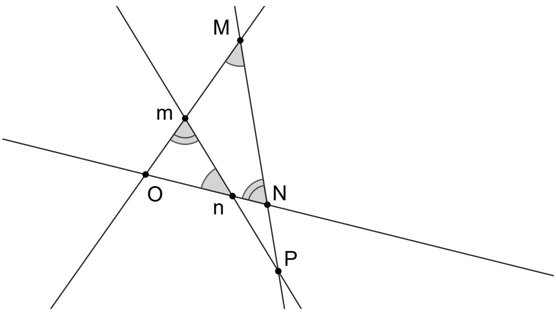
$$A'B' = \frac{|k|AB}{OA \cdot OB}$$

(voir page 111) et tout se simplifie. Nous verrons une application de cette propriété dans la question 1 de la première annexe.

Réponse 7. Antiparallèles

On a par définition $Om \cdot OM = On \cdot ON$ donc $Om/ON = On/OM$, les triangles Omn et ONM sont semblables (un angle égal entre deux côtés proportionnels). C'est une des caractérisations de l'antiparallélisme. Les égalités angulaires qui en résultent font que les triangles PnN et PMm sont également semblables, donc $Pn \cdot Pm = PN \cdot PM$. Mais comme m,M, n, N ne sont pas alignés, ils appartiennent à un même cercle donc cette égalité ne fait qu'exprimer la puissance de P par rapport à ce cercle.

Les droites (nm) et (NM) peuvent être parallèles, si et seulement si $On = Om$.



Réponse 8. Distances

On se méfie parce qu'on peut avoir $OA < OB$ et cependant, $\overline{OA} > \overline{OB}$ si par exemple $\overline{OA} = 1$ et $\overline{OB} = -2$. En outre, ne faut-il pas considérer le signe de k ?

La solution consiste, comme Alexandre tranchant le nœud gordien, à tout passer sous la valeur absolue. Des nombres égaux ne peuvent avoir des valeurs absolues différentes, même si des nombres différents peuvent avoir la même valeur absolue.

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \Rightarrow OA \cdot OA' = |k| = OB \cdot OB'.$$

Or, $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ et $OA < OB$ entraînent $OA' > OB'$ et le signe de k ne joue aucun rôle. Enfin, $OA = OB \Rightarrow OA' = OB'$.

Réponse 9. Image d'un segment

Est-ce que, si $B \in [AC]$, on a $B' \in [C'A']$? En général, non, B' n'appartient même pas à la droite (AC).

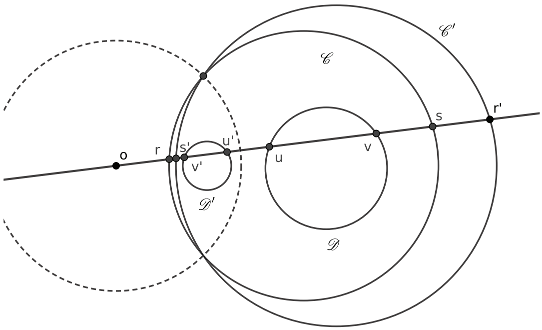
Quelle est l'image d'un segment $[AC]$ quand la droite (AC) passe par le pôle O ? La définition de l'inversion et les questions précédentes permettent de répondre. Le point O détermine deux demi-droites. Si les points A et C sont dans la même demi-droite, l'image du segment $[AC]$ est le segment $[C'A']$. Si l'on parle d'un segment comme $]OA]$, son image est la demi-droite $[A',\infty[$ et s'il s'agit d'un segment $[A,O[$, son image est la demi-droite $]-\infty,A']$. Enfin, si $O \in [AB]$, l'image est en deux morceaux ! Elle consiste en deux demi-droites : $]-\infty,A'] \cup [B',\infty[$.

C'est étonnant ? Mais la fonction « inverse » $x \to 1/x$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ fait des choses du même genre.

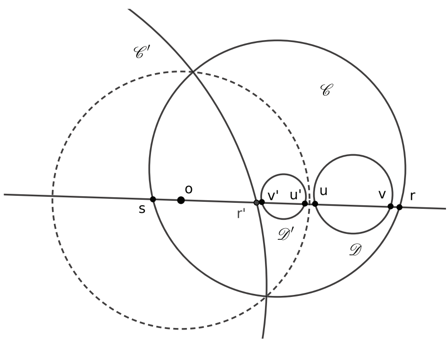
Réponse 10. Entourages

Il n'est pas possible que les images de deux cercles sans points communs aient un point X en commun. Le fait que l'inversion soit involutive s'y oppose : l'image de X appartiendrait aux deux cercles initiaux, contrairement à l'hypothèse. Voyons s'ils peuvent être extérieurs l'un à l'autre.

Dans un premier cas, nous prenons le pôle o extérieur à $\mathscr{C}$ et donc à $\mathscr{D}$. Une sécante issue de o coupe $\mathscr{D}$ en u et v, $\mathscr{C}$ en r et s. Puisque $\mathscr{D}$ est intérieur à $\mathscr{C}$, les quatre points sont rangés ainsi : o,r,u,v,s. Mais $or < ou \Rightarrow or' > ou'$ et $ov < os \Rightarrow ov' > os'$. Les images sont donc rangées ainsi : o,s',v',u',r', ce qui prouve que $\mathscr{C}'$ entoure $\mathscr{D}'$.



Autre cas, le pôle o est à l'intérieur de $\mathscr{C}$, mais à l'extérieur de $\mathscr{D}$. Une sécante issue de o coupe $\mathscr{D}$ en u et v, $\mathscr{C}$ en s et en r.



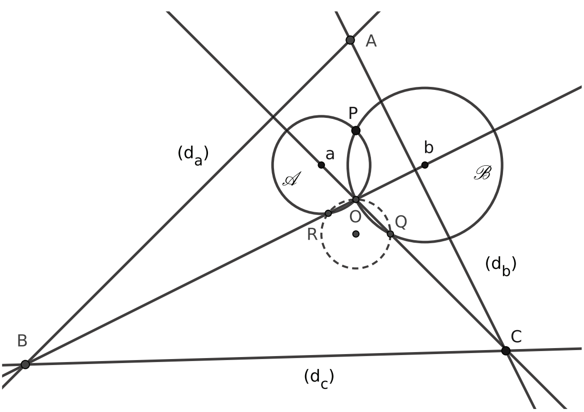
L'ordre des points sera s,o,u,v,r et la même propriété des distances fera que les images seront rangées ainsi : s',o,r',v',u' (le point s' n'est pas visible, à gauche sur la figure), ce qui prouve que $\mathscr{C}'$ est extérieur à $\mathscr{D}'$.

Scholie

On peut se poser d'autres questions ! Un cercle $\mathscr{C}$ entoure un cercle $\mathscr{D}$. Est-il possible que $\mathscr{D}'$ entoure $\mathscr{C}'$? Que se passe-t-il si $\mathscr{C}$ entoure $\mathscr{D}$ et que le pôle soit à l'intérieur des deux cercles ?

Réponse 11. Le troisième cercle

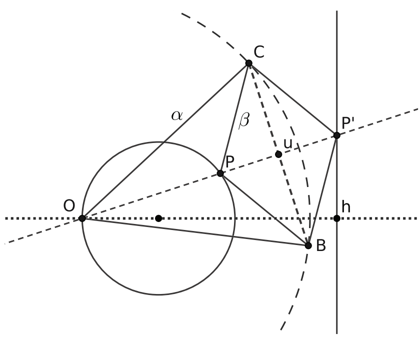
Par l'inversion de pôle O, la droite (Oa) est invariante et cette droite est orthogonale au cercle $\mathscr{A}$ (elle passe par son centre). Comme ce cercle passe par le pôle, son image est une droite d_a et comme l'inversion conserve l'orthogonalité, d_a est orthogonale à (Oa). On la positionne librement, puisqu'on n'a pas défini le rapport de l'inversion. On trace alors d_b, image de $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ se coupent aussi en P, d_a et d_b se coupent en l'image de P, qui est sur la droite (OP), ceci définit un point A, image de P.



Le troisième cercle passant par R, O et Q aura pour image une droite, passant par l'image de R et par l'image de Q. Comme R est un point de $\mathscr{A}$, son image est sur la droite d_a et aussi, bien sûr, sur la droite (OR). On note B ce point. On définit le point C, image de Q de la même façon. Maintenant nous avons un triangle ABC dans lequel les droites (BO) et (CO) sont des hauteurs, donc O est son orthocentre, si bien que AO, qui passe par P, est la troisième hauteur. Cette droite, invariante, étant perpendiculaire à l'image du troisième cercle, cela prouve qu'elle est orthogonale à ce cercle, et donc passe par son centre. CQFD.

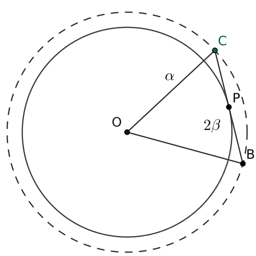
Réponse 12. Inverseur de Peaucellier

Quelles que soient les positions des articulations, les points O, P et P' sont sur la médiatrice de $[BC]$ puisque $OC = OB$ et que $PB = PC = P'B = P'C$, donc ils sont alignés. $PBCP'$ est un losange, donc ses diagonales sont perpendiculaires. Soit u son centre. $uB = uC$ donc lui aussi est sur la médiatrice de $[BC]$, aligné avec O, P, P'.



En considérant les différents triangles rectangles et en appliquant le valeureux théorème de Pythagore, on trouve des choses comme : $Pu^2 + Bu^2 = \beta^2$, $Ou^2 + Bu^2 = \alpha^2$. Comme par hypothèse, $\alpha > \beta$, ceci prouve que $Ou > Pu$ et donc que P est situé entre O et P'. D'autre part on a : $OP \cdot OP' = (Ou - Pu) \cdot (Ou + Pu) = Ou^2 - Pu^2$. En soustrayant les deux premières égalités, on trouve $OP \cdot OP' = \alpha^2 - \beta^2$.

On peut donc considérer que dans une inversion de centre O et de rapport $k = \alpha^2 - \beta^2$, le point P' est l'image du point P dans toutes les positions que permettent les dimensions des tiges et les articulations. Par exemple, si P décrit un arc d'un cercle passant par O, P' décrira un segment de droite. Dans la figure suivante, on a réduit le losange à un segment et on obtient donc $P = P'$, un point invariant et, de ce fait, le cercle de l'inversion.



On peut procéder, en club, à beaucoup d'explorations à l'aide de cet instrument qui n'est après tout qu'un genre de... compas ! Le point P est-il nécessairement dans le secteur angulaire BOC ? Peut-on confondre B et C ?

Réponse 13. Inverseur de Hart

Comme les triangles ABC et ADC sont égaux, leurs hauteurs issues de B et de D sont respectivement égales et donc quelle que soit la position permise par les déplacements et les articulations, $ABDC$ est toujours un trapèze isocèle, donc $(BD)//(AC)$, si bien qu'on a des triangles homothétiques AOP et ABD puis, également, OBP' et ABC. Donc on a $OP/BD = AO/AB$ et $OP'/AC = OB/AB$.

On en tire : $OP \cdot OP' = (AO.BD) \cdot (OB.AC)/AB^2$. Posons $AB = a, AC = b, AO = u$.

D'autre part, un trapèze isocèle est un quadrilatère inscriptible ($\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$), on peut donc appliquer la relation de Ptolémée : $BD \cdot AC + AB \cdot DC = BC \cdot AD$ soit, ici $BD \cdot b + a^2 = b^2$, qui donne BD. Finalement, $OP \cdot OP' = u \cdot (a - u)(b^2 - a^2)/a^2$ qui est une quantité fixe.

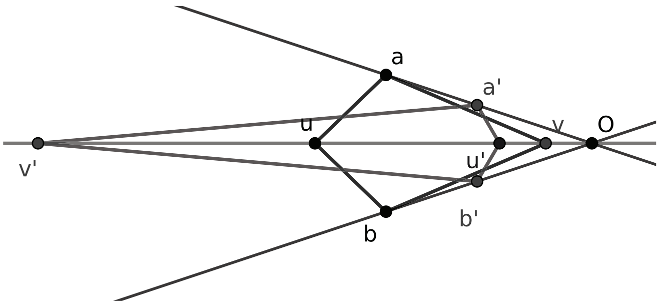
Ces deux dispositifs ont été utilisés au XIXe siècle, dans l'industrie, pour transformer des mouvements circulaires et mouvements rectilignes. En effet, si l'on astreint P à parcourir un cercle passant par O (ou un arc d'un tel cercle), P' décrira un segment de droite, conformément à cette propriété de l'inversion.

Réponse 14. Les sommets d'un Q-rhombe

Par hypothèse, $ua = ub$ et $va = vb$. On utilise la formule (voir page 111) qui donne la distance des images. Il s'agit de savoir si on peut avoir, o étant le pôle d'une inversion de puissance k,

$$u'a' = \frac{kua}{ou \cdot oa} = u'b' = \frac{kub}{ou \cdot ob}; \quad v'a' = \frac{kva}{ov \cdot oa} = v'b' = \frac{kvb}{ov \cdot ob}.$$

En utilisant les hypothèses on trouve tout de suite $oa = ob$, c'est-à-dire que le pôle doit être situé sur la médiatrice de $[ab]$, autrement dit la droite (uv). Mais est-ce suffisant ?



Oui, car dans ce cas, u' et v' seront également situés sur cette droite, les droites (oa) et (ob) sont invariantes et symétriques par rapport à (ou), enfin, $oa = ob \Longrightarrow oa' = ob'$ donc $v'a'u'b'$ est un Q-rhombe. Cette figure est-elle toujours convexe ?

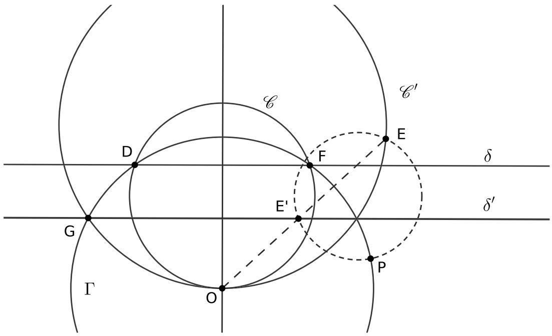
Réponse 15. Euclide, le retour

Soit un cercle $\mathscr{C}$, un point O sur $\mathscr{C}$ et un point E ne lui appartenant pas.

Il est très facile de construire un cercle tangent en O à $\mathscr{C}$ passant par E. Le centre de ce cercle est à l'intersection de la médiatrice de $[OE]$ et de la droite passant par O et par le centre de ce cercle. Construction classique, où l'unicité est évidente. Mais ce n'est pas la question posée, puisqu'on nous demande d'obtenir l'existence et l'unicité d'un tel cercle en la déduisant du fameux axiome d'Euclide !

Voici donc la réponse à cette petite énigme. Une inversion de centre O et de puissance quelconque transforme $\mathscr{C}$ en une droite δ

et E en E'. Par E' (et par Euclide)[6] on mène **l'unique** parallèle à δ, notée δ'. Maintenant, l'image de δ' est le cercle recherché.



La figure réalise la construction (ce qui n'est pas indispensable, mais constitue un bon exercice de révision). Le cercle Γ est le cercle de l'inversion. Notez que, comme souvent, le résultat ne dépend pas du rapport de l'inversion. Sur la figure, la puissance est fixée dès que l'on a placé δ, image de $\mathscr{C}$. Tout le reste en découle. Comme j'ai placé δ de telle manière qu'elle coupe $\mathscr{C}$, cela fournit deux points invariants, D et F, donc le cercle Γ, qui ensuite permet de définir E', puis la parallèle et son image, qui est le cercle recherché. Comment se fait-il que le résultat ne dépende pas du rapport de l'inversion ?

Pour répondre à cette question, faisons quelques calculs en posant que le rapport de l'inversion vaut k. Un axe des ordonnées (vertical) passant par O et par le centre de $\mathscr{C}$, un axe des abscisses (horizontal) passant par O. Soit R le rayon de $\mathscr{C}$ et nous cherchons R', rayon de $\mathscr{C}'$. Soit d l'ordonnée de la droite

6. C'est un zeugma.

(DE) image de $\mathscr{C}$. En considérant le point de plus grande ordonnée (le « pôle nord ») de $\mathscr{C}$, on voit que $d = k/2R$. Soit h l'ordonnée de E et h' celle de E'. Nous avons $\overline{OE'} \cdot \overline{OE} = k$ donc $h'/h = \overline{OE'}/\overline{OE} = k/OE^2$ (Thalès). Donc $h' = kh/OE^2$ qui est l'ordonnée de la droite δ'. Maintenant si nous notons X l'ordonnée du pôle nord de $\mathscr{C}'$, nous avons $h'X = Xkh/OE^2 = k$. Le rapport de l'inversion, k, se simplifie, ce qui explique le résultat : $2R' = X = OE^2/h$.

Exception ! La construction ne fonctionne plus si le point E est sur la tangente en O au cercle $\mathscr{C}$. En effet, dans ce cas, E' et δ' sont encore sur cette tangente, dont l'image n'est pas un cercle, mais elle-même.

Notez que dans ce cas la construction « évidente » qui ne fait pas appel à l'inversion ne permet pas non plus la construction puisque la médiatrice de $[OE]$ est alors parallèle à la droite passant par O et par le centre de $\mathscr{C}$. Mais la réponse est évidente : le « cercle » qui répond à la question est la droite tangente à $\mathscr{C}$ en O.

Réponse 16. Le cercle d'Euler par l'inversion

Il y a un cercle $AEIG$ puisque les angles $\widehat{IGA}$ et $\widehat{IEA}$ sont droits. Ce cercle passe par le pôle I, son inverse est donc une droite. Comme les points E et G sont invariants, c'est la droite (EG). L'inverse de A est donc le point a où (IA) rencontre (EG). Comme le triangle AEG est isocèle, (AI), qui est bissectrice de l'angle en A, est également médiane et a est le milieu de $[EG]$.

Une conséquence amusante c'est que l'image de Γ, cercle circonscrit de ABC, dans cette inversion, de cercle Λ, le cercle inscrit de ABC, est donc le cercle des neuf points (ou cercle d'Euler) du triangle EFG[7].

Réponse 17. Formule d'Euler par l'inversion

Soit le triangle ABC, Γ son cercle circonscrit, de centre o et de rayon R, Λ son cercle inscrit, de centre I et de rayon r, π le cercle des 9 points du triangle EFG, de rayon R'. Attention, Λ est le cercle inscrit dans ABC mais c'est le cercle circonscrit de EFG. C'est pourquoi $R' = r/2$. On utilise la formule (voir page 118) qui donne le rayon d'un cercle image en fonction du rayon du cercle objet, de la puissance de l'inversion qui ici vaut r^2, et de la distance $d = OI$ entre le pôle et le centre du cercle objet. On a :

$$R' = \frac{r}{2} = \frac{r^2 R}{R^2 - d^2}$$

ce qui donne immédiatement la formule d'Euler.

Réponse 18. Quatre cercles tangents

Notons $\mathscr{C}_1$ le cercle intérieur à $\mathscr{C}_2$. On construit Δ, leur axe radical (par exemple avec un troisième cercle intersectant les deux premiers).

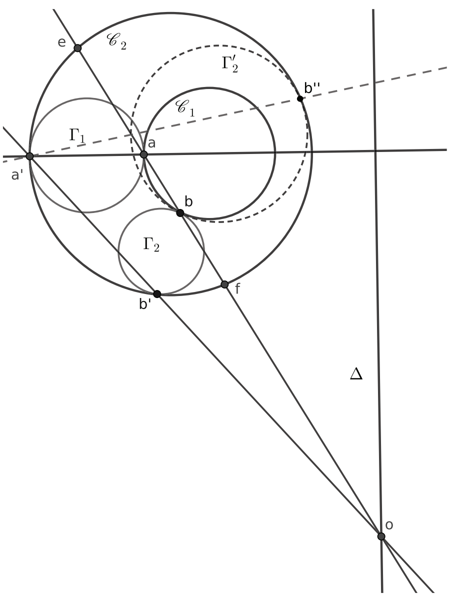
L'énoncé permet quatre cas de figure selon que Γ_1, ou Γ_2 entoure $\mathscr{C}_1$, ou qu'ils l'entourent tous les deux, ou au contraire qu'ils soient, comme dans la figure de gauche, tous deux extérieurs à $\mathscr{C}_1$.

Dans ce dernier cas, notons e et f les intersections de la droite (ab) avec $\mathscr{C}_2$. Comme o est sur leur axe radical, la puissance de o par rapport à $\mathscr{C}_1$ est la même que par rapport à $\mathscr{C}_2$. Donc

7. Ce triangle EFG des points de contact du cercle inscrit avec le triangle ABC peut être appelé triangle de Gergonne, tout comme le point de concours des droites (AF),(BG),(CE) est dit « point de Gergonne ».

l'inversion qui échange a et b échange aussi e et f. Autrement dit, les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont invariants dans cette inversion. La question posée c'est : est-ce que cette inversion échange aussi a' et b' ?

Comme l'inversion conserve les contacts, l'image de Γ_1 par cette inversion sera un cercle tangent à $\mathscr{C}_1$ en l'image de a, qui est b et tangent à $\mathscr{C}_2$. Est-ce que c'est nécessairement Γ_2 ? Non ! Il y a un autre cercle tangent à $\mathscr{C}_1$ en b et à $\mathscr{C}_2$ (ici en b''). Seulement, la question 10, et sa réponse, nous disent que le pôle de l'inversion étant (pourquoi ?) extérieur à $\mathscr{C}_1$ et à Γ_1, il n'est pas possible, Γ_1 étant extérieur à $\mathscr{C}_1$, que son image entoure $\mathscr{C}_1$, qui est, rappelons-le, sa propre image.



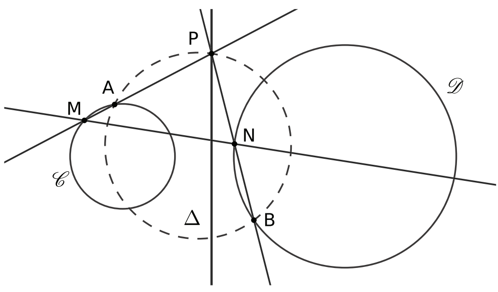
Donc l'inversion considérée échange a' et b', si bien que les droites (ab) et $(a'b')$ se coupent en o. CQFD. Seulement, il y a un genre de réciproque : si nous considérons un autre cas de figure, celui où Γ_2 (ici noté Γ'_2), mais pas Γ_1, entoure $\mathscr{C}_1$, l'image de Γ_1 n'est pas Γ'_2 et l'inversion qui échange a et b n'échange pas a' et b''. En ce cas, l'énoncé est faux.

Enfin, le lecteur et la lectrice vérifieront que la démonstration fonctionne si les deux cercles Γ_1 et Γ_2 entourent $\mathscr{C}_1$.

Réponse 19. Construction d'une perpendiculaire

Une inversion de pôle P pour laquelle l'image de A est M échange aussi B et N puisque, P étant sur l'axe radical Δ, $\overline{PA} \cdot \overline{PM} = \overline{PB} \cdot \overline{PN}$ et ces deux cercles sont invariants pour cette inversion.

D'autre part, l'image de la droite (MN) est le cercle PAB.



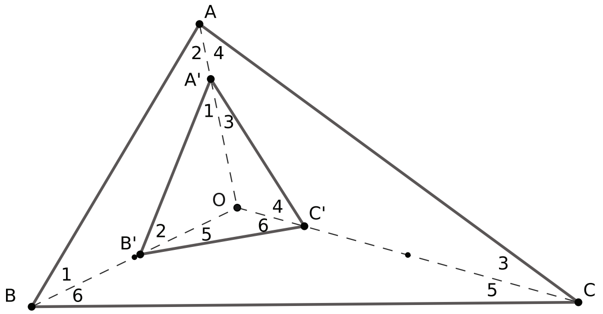
Comme l'inversion conserve l'orthogonalité, il faut construire un point P tel que le cercle PAB soit orthogonal à Δ, c'est-à-dire centré sur Δ.

Le centre d'un tel cercle est à l'intersection de Δ avec la médiatrice de $[AB]$.

Le point P est l'un des deux points d'intersection de ce cercle avec Δ. Il y a deux solutions.

Réponse 20. Inversion des sommets d'un triangle

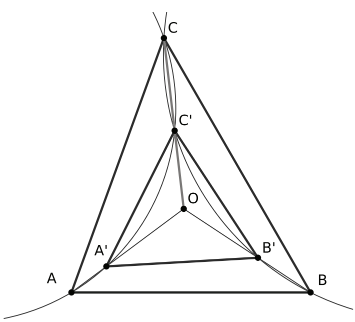
Le point O étant choisi, nous pouvons prendre sur le segment $[OA]$ un point A' quelconque puisque le résultat ne dépend pas de la puissance de l'inversion. Ensuite, le cercle qui passe par A,A' et B étant globalement invariant, recoupe le segment $[OB]$ en l'image de B, B'. On détermine C' de la même façon. Comme $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$, les triangles AOB et $A'OB'$ sont semblables : ils ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. Notez qu'ils ne sont pas homothétiques. On a $\widehat{OBA} = \widehat{B'A'O}$, et d'autres égalités d'angles qui résultent des autres triangles semblables.



On a noté ces angles dans les deux triangles ABC et $A'B'C'$, comme 1,2,3,4,5,6. Il est alors clair que $1+2+3+4+5+6=\pi$

et que $\widehat{BOC} = \pi - (5+6) = 1+2+3+4$, CQFD. Soit alors un triangle dont les angles valent, par exemple, $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{C} = 50°$. Puisque l'on veut que $\widehat{A'} = 60°$, il faut que $\widehat{BOC} = 130°$. Le point O appartiendra donc à un arc de cercle d'où l'on « voit » le segment $[BC]$ sous un angle de 130°. La méthode pour construire un tel arc est rappelée dans RÉSU 5. Le centre ω du cercle dont fait partie cet arc vérifie $\widehat{B\omega C} = 100°$ donc on l'obtient en construisant une demi-droite qui fait avec (BC) un angle de 40°, au point C. Le point ω sera à l'intersection de cette demi-droite avec la médiatrice de (BC). De même il faut que $\widehat{COA} = 120°$, d'où la construction d'un second arc, et la détermination de O.

Naturellement, le triangle $A'B'C'$, en tant que polygone à trois côtés, n'est pas l'inverse du triangle ABC. Ce sont seulement ses sommets A', B', C' qui sont les inverses des sommets A, B, C. Comme les inverses de droites sont des cercles passant par O, l'inverse du triangle ABC sera une figure constituée de trois arcs de cercle, des cercles passant par O. Il n'est pas difficile de construire ces arcs, la figure ressemble un peu à un trèfle. Pour avoir un trèfle à quatre feuilles, il faudrait partir d'un quadrilatère !



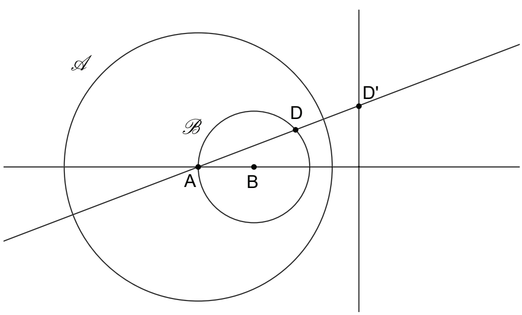
Si l'on prend le point O au centre du cercle circonscrit, comme dans ce cas $\widehat{BOC} = 2.\widehat{A}$, on aura $\widehat{A'} = \widehat{A}$. Le triangle $A'B'C'$ sera semblable au triangle ABC. Il lui sera même homothétique, de centre O. Voyez-vous pourquoi ? Il peut également être intéressant de prendre O en d'autres points remarquables du triangle.

Réponse 21. Somme des angles

Une inversion de pôle P et de puissance quelconque transforme ces trois cercles en trois droites qui se coupent en les points E', F', G' images de E, F, G. La somme des angles du triangle $E'F'G'$ vaut π comme on sait, et comme l'inversion conserve les angles, la somme des angles des tangentes à ces trois cercles en E, F, G aussi.

Réponse 22. L'image est l'axe

Soit un point D de $\mathscr{B}$ et son image D'. Comme l'image de $\mathscr{B}$ est une droite perpendiculaire à la droite (AB), le point D' suffit à la tracer.



Comparons la puissance de D' par rapport aux deux cercles. En notant R le rayon de $\mathscr{A}$, qui vaut $\sqrt{k}$ où k est la puissance de l'inversion, on a $\overline{AD} \cdot \overline{AD'} = R^2$ et donc la puissance de D' par rapport à $\mathscr{A}$ vaut $D'A^2 - R^2 = D'A^2 - \overline{D'A} \cdot \overline{DA} = \overline{D'A} \cdot (\overline{D'A} - \overline{DA}) = \overline{D'A} \cdot \overline{D'D}$ qui est la puissance de D' par rapport à $\mathscr{B}$. Donc la droite perpendiculaire à (AB) passant par D' est l'axe radical des deux cercles.

5.4 Exercices.2

5.4.1 Questions

Question 1. Le centre de l'image

Soit une inversion de pôle o, un cercle $\mathscr{C}$ de centre a, ne passant pas par o, un cercle Γ orthogonal à $\mathscr{C}$, passant par o et son image (d). Faites une figure en traçant librement le cercle de l'inversion et dites comment situer directement le centre c de l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$.

Question 2. Trois cercles du même pinceau

Soit Γ le cercle d'une inversion $\mathscr{I}$ de pôle o, $\mathscr{C}$ un cercle ne passant pas par o, et $\mathscr{C}'$ son image par $\mathscr{I}$. Montrez que $\Gamma, \mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ font partie du même pinceau.

Question 3. Stabilité

Soient deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, $\mathscr{P}$ le pinceau qu'ils engendrent, $\mathscr{P}^{\perp}$ le pinceau orthogonal, $\mathscr{S}$ l'une des inversions, de pôle s, qui échangent $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. Montrez que $\mathscr{S}$ laisse « invariants » ces deux pinceaux, c'est-à-dire que l'image par $\mathscr{S}$ d'un cercle de $\mathscr{P}$ est un cercle de $\mathscr{P}$, et de même pour $\mathscr{P}^{\perp}$.

Question 4. Inversion des points limites

Montrez que tout cercle d'un pinceau à points limites u et v, considéré comme le cercle d'une inversion, échange u et v.

Question 5. Inversion et points symétriques

Soit $\mathscr{I}$ une inversion définie par son cercle Ω, de centre O. Soit un point $m \notin \Omega$ et son image M pour cette inversion.

Soit P un point quelconque de Ω et $\mathscr{J}$ une inversion de pôle P, de puissance quelconque, de cercle Γ. Montrez que les images m' et M' par $\mathscr{J}$ des points m et M sont symétriques par rapport à la droite Δ, image de Ω par $\mathscr{J}$.

Question 6. Inversion et cercles de même rayon

Etant donnés deux cercles, déterminez, si c'est possible, une inversion qui les transforme en deux cercles de même rayon.

Question 7. Inversion d'un couple cercle-droite

Soit un cercle Γ de centre ω et de rayon R et une droite Δ. La distance entre ω et Δ vaut d. Soit un point P de Γ. Une inversion de pôle P et de puissance quelconque transforme Δ en un cercle Γ' de rayon R' et de centre ω' et Γ en une droite Δ', la distance entre ω' et Δ' vaut d'. Prouvez que $d'/R' = d/R$.

Suggestion : faire des calculs en coordonnées. Prendre l'origine en ω, centre de Γ, et Δ parallèle à l'axe des ordonnées, donc d'équation $x = d$. Le point P aura alors pour coordonnées : $(R\cos t, R\sin t)$.

Question 8. Des images concentriques

Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sans points communs, u et v les points limites du pinceau qu'ils engendrent. Montrez qu'une inversion de centre u ou v transforme tous les cercles de ce pinceau en un pinceau de cercles concentriques. Pourquoi est-il impossible de transformer deux cercles sécants ou tangents en deux cercles concentriques ?

Question 9. Modus

Soient deux cercles non sécants. Décrivez en détail la réalisation de leurs images concentriques par une inversion convenable.

Question 10. Paradoxe

Sachant qu'un cercle $\mathscr{C}$, son image $\mathscr{C}'$ par une inversion et γ le cercle de cette inversion, font toujours partie du même pinceau (question 2), comment expliquer la situation décrite dans la question 8, car dans un pinceau à point de base, ou à points limites, il ne peut pas exister deux cercles concentriques (pourquoi ?).

Question 11. Cercles bissecteurs

On appelle cercle **bissecteur** de deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ le cercle d'une inversion qui les échange. Dans le cas de deux cercles sécants, montrez qu'il existe deux cercles bissecteurs, orthogonaux, mais un seul si les cercles sont sans points communs. Y a-t-il des cas particuliers ? Justifiez le nom « bissecteur ».

Question 12. Cas des cercles concentriques

Deux cercles concentriques n'ont qu'un seul cercle bissecteur. Si r et R sont leurs rayons, quel est le rayon du cercle bissecteur ?

Question 13. Cas de cercles tangents

Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ tangents du même côté de leur tangente commune. Si r et R sont leurs rayons, quel est le rayon du cercle bissecteur ?

Question 14. Construire le cercle bissecteur

Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ extérieurs l'un à l'autre. On note A, B, C, D dans cet ordre l'intersection de ces cercles avec leur droite des centres. Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les cercles de diamètres respectifs $[AD]$ et $[BC]$. Soit u et v les points limites du pinceau engendré par $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Montrez que le cercle de diamètre $[uv]$ est le cercle bissecteur de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

Cette construction permet d'obtenir le cercle bissecteur de deux cercles extérieurs l'un à l'autre. Comment peut-on faire pour construire le cercle bissecteur de deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre ?

Dans le cas où les cercles sont sécants, il est plus facile de construire leurs deux cercles bissecteurs. Comment fait-on ?

Question 15. Un point du bissecteur

Soient deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ non sécants, et l'inversion $\mathscr{I}$ de puissance positive qui les échange.

Soient deux autres cercles, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{E}$ tangents chacun à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$ extérieurement (aucun des quatre cercles n'en entoure un autre) et tangents entre eux en un point P. Montrez que P est un point du cercle de $\mathscr{I}$, le cercle bissecteur de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

Question 16. Inversion de pinceaux

On transforme par une inversion quelconque tous les cercles d'un pinceau. Qu'en résulte-t-il ?

Question 17. Inversion de deux cercles concentriques

Les inverses de deux cercles concentriques peuvent-ils être des cercles concentriques ?

Question 18. Inversion de trois cercles dont les centres sont alignés

Soient trois cercles dont les centres sont alignés. Les centres de leurs inverses peuvent-ils être également alignés ?

Question 19. Inverse du pied de l'axe radical

Soient deux cercles sécants, leur axe radical, le point h intersection de l'axe radical avec la droite des centres et une inversion échangeant ces deux cercles.

L'inverse de h est un point intéressant, lequel ? La même question est abordée en annexe pour le cas de deux cercles non sécants.

Question 20. Invariant anallagmatique

L'invariant anallagmatique est une quantité qui concerne deux cercles, ou deux droites, ou un cercle et une droite, et qui reste inchangée si on transforme ces deux objets par inversion [a]. Pour deux cercles, de rayons R et r, d étant la distance de leurs centres, c'est la quantité

$$\mathscr{I} = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}.$$

Pour deux droites sécantes faisant un angle $\theta \in]O, \pi/2]$,

$$\mathscr{I} = \cos(\theta).$$

Pour une droite (D) et un cercle $\mathscr{C}$ sécants, le cercle étant de centre o et de rayon R, d étant la distance entre o et (D),

$$\mathscr{I} = \frac{d}{R}.$$

Ce cas est traité dans la question et la réponse 7 de Exercices.2.

a. Le mot *anallagmatique* signifie en grec « sans changement ».

Montrez, dans le cas de deux cercles sécants, en deux points A et B, que si l'on effectue une inversion quelconque sur ces deux cercles, la quantité $\mathscr{I}$ ne change pas.

Indication : il faut trouver la signification géométrique de $\mathscr{I}$ dans le triangle o_1Ao_2, o_1 et o_2 étant les deux centres de ces cercles.

Ce théorème est également vrai dans le cas de deux cercles non sécants (voir annexe 1).

Question 21. Quelques exemples

Combien vaut l'invariant anallagmatique dans le cas de deux cercles orthogonaux ? Dans le cas de deux cercles tangents intérieurement ? Extérieurement ? Dans le cas de deux cercles concentriques ?

Question 22. Composées

Soient deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ non sécants, o_+ le centre d'homothétie positive et o_- le centre d'homothétie négative. On note $\mathscr{I}_+$ et $\mathscr{I}_-$ les inversions de pôles respectifs o_+ et o_-, échangeant les deux cercles.

Soit $m \notin [o_+o_-]$ un point de $\mathscr{C}$, M son image par $\mathscr{I}_+$, n l'image de M par $\mathscr{I}_-$, N l'image de n par $\mathscr{I}_+$. Montrez que m est l'image de N par $\mathscr{I}_-$.

Question 23. Transmuée

Soient f une inversion de pôle A de cercle $\mathscr{F}$, de puissance k, et une inversion g de pôle B et de cercle $\mathscr{G}$, de puissance l. Montrez que $f \circ g \circ f$ est une inversion ou une symétrie. Lorsque c'est une inversion, quelle est sa puissance ? On dit que cette transformation est la **transmuée** de f par g.

Question 24. Bissecteur des images

Montrez qu'étant donné un cercle Γ bissecteur de deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$, si l'on note Γ', $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}'$ les images de ces trois cercles par une inversion, Γ' est un cercle bissecteur de $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}'$.

Question 25.

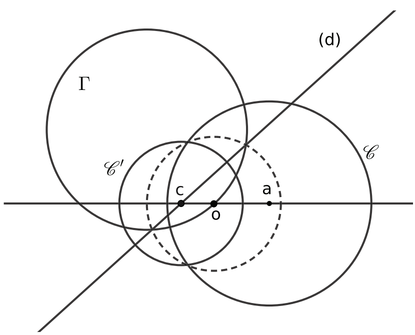
1) Soient deux points A,B d'une droite (d), A',B' leurs images par une inversion de pôle O non situé sur (d), et le cercle $\mathscr{C}$ image de (d), passant donc par O. Les tangentes à ce cercle en A' et en B' se coupent en un point I et la droite (OI) coupe (d) en ω. Montrez que ω est le milieu de $[AB]$.

2) Sur la droite (d), les points D et C sont tels que $[D,C,A,B]$ est une division harmonique. La même inversion de pôle O envoie D et D' et C en C'. Montrez que tout cercle passant par D' et C' est orthogonal au cercle de centre I passant par A' et B'. En déduire que D', C' et I sont alignés.

5.4.2 Réponses

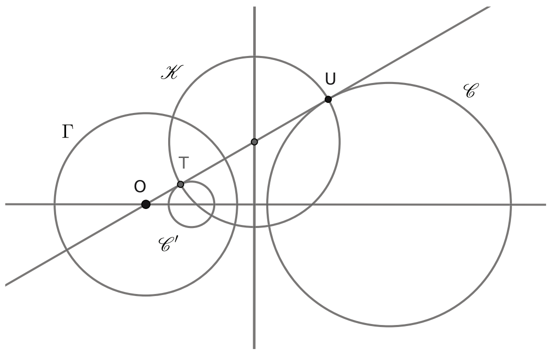
Réponse 1. Le centre de l'image

Comme Γ est orthogonal à $\mathscr{C}$, son image (d) doit être orthogonale à $\mathscr{C}'$, c'est-à-dire passer par son centre. Et ce centre est nécessairement sur la droite (oa), c'est donc $(d) \cap (oa)$.



Réponse 2. Trois cercles du même pinceau

Si les cercles Γ et $\mathscr{C}$ sont sécants en A et B ou tangents en T, comme Γ est invariant point par point, $\mathscr{C}'$ passera également par A et B, ou sera tangent aux autres cercles en T. Il fera donc partie du même pinceau que Γ et $\mathscr{C}$.



Si Γ, le cercle de l'inversion $\mathscr{I}$, de centre o et le cercle $\mathscr{C}$, sont sans points communs, on sait construire un cercle $\mathscr{K}$ orthogonal à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$, centré sur leur axe radical, par exemple en menant de O une tangente commune, le milieu des points de contact T et U fournissant le centre de $\mathscr{K}$. U étant l'image de T, $\mathscr{K}$ est globalement invariant par $\mathscr{I}$, donc orthogonal à Γ. Les trois cercles orthogonaux à $\mathscr{K}$ et centrés sur la même droite font donc partie du même pinceau (voir page 86), ce qui peut se dire aussi : un cercle bissecteur de deux cercles appartient au même pinceau que ces deux cercles.

Réponse 3. Stabilité

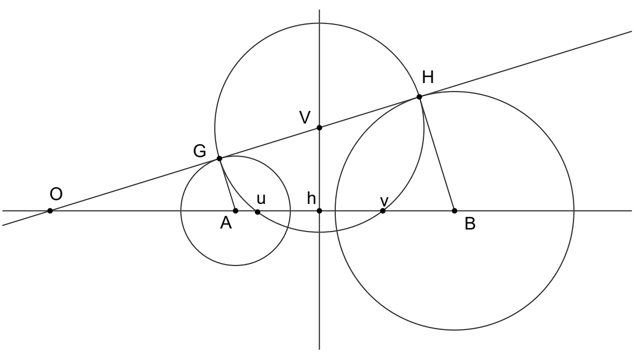
Soit un cercle Γ de $\mathscr{P}^{\perp}$, de centre γ. Γ est par définition orthogonal aux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$. Son image par $\mathscr{S}$, Γ', doit être également orthogonale à ces deux cercles (car l'inversion conserve l'orthogonalité), donc centrée sur l'axe radical. Mais son centre γ' doit être aligné avec γ et avec s, qui n'appartient pas à l'axe radical (pourquoi ?). Donc $\gamma' = \gamma$. Γ est globalement invariant et de même tout cercle du pinceau $\mathscr{P}^{\perp}$.

Soit maintenant un cercle $\mathscr{K}$ de $\mathscr{P}$. Il est orthogonal à Γ, qui est globalement invariant par s. Le cercle $\mathscr{K}'$, image de $\mathscr{K}$ par $\mathscr{S}$, sera également orthogonal à Γ, et son centre sera sur la droite des centres de $\mathscr{P}$, c'est donc un élément de $\mathscr{P}$, ce qui démontre la stabilité.

Réponse 4. Inversion des points limites

Soient γ un cercle du pinceau de centre A, de rayon $\sqrt{k}$, h le pied de l' axe radical et p la puissance de h par rapport aux cercles du pinceau. On oriente la droite des centres de telle sorte que $\overline{hu} > 0$.

On a $\overline{hu} = \sqrt{p} = \overline{vh}$. On a aussi $\overline{Au} \cdot \overline{Av} = (\overline{Ah} - \overline{uh}) \cdot (\overline{Ah} + \overline{hv}) = Ah^2 - p = k$. Donc (voir formule page 76) l'inversion de cercle γ échange u et v.

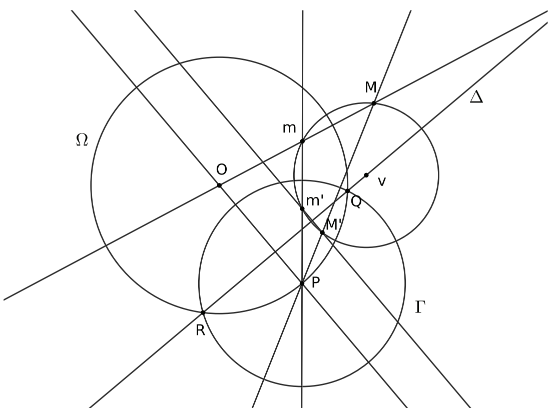


Plus de géométrie ? Soit γ' un second cercle du pinceau, de centre B. Traçons une tangente commune aux cercles γ et γ', soient G et H les points de contact et V leur milieu.

Le cercle Γ de centre V passant par G est orthogonal à γ et γ' et coupe la droite (AB) en u et v. La puissance de A par rapport à Γ vaut $AG^2 = k = \overline{Au} \cdot \overline{Av}$, donc l'inversion de pôle A et de cercle γ échange u et v.

Réponse 5. Inversion et points symétriques

On choisit la puissance de $\mathscr{I}$ de sorte que les cercles Γ et Ω se coupent en deux points Q et R (peut-il en être autrement ?). La droite $(\Delta) = (QR)$ est alors l'axe radical des deux cercles, et c'est aussi l'image de Ω dans l'inversion de pôle P puisque Q et R sont deux points invariants.



D'autre part, puisque $\overline{Pm}\cdot\overline{Pm'} = \overline{PM}\cdot\overline{PM'}$ les quatre points m, m', M, M' appartiennent à un même cercle. Comme ce cercle passe par m et M, il est orthogonal au cercle Ω et comme il passe par m et m', il est aussi orthogonal au cercle Γ. Son centre v est donc sur (Δ), axe radical de Γ et Ω.

Il faut montrer que la médiatrice de $[m'M']$ est (Δ). On sait que cette médiatrice passe par v. La droite (Δ) étant orthogonale à (OP), pour conclure il suffit de prouver que $(m'M')//(OP)$.

Pour cela considérons le cercle mMP. Il est tangent à (OP) car $OP^2 = \overline{Om}\cdot\overline{OM}$ et son image par $\mathscr{J}$ est donc une droite parallèle à (OP), or c'est la droite $(m'M')$. CQFD.

Réponse 6. Inversion et cercles de même rayon

Étant donnés deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, il existe une homothétie de rapport positif (ou une symétrie mais alors le problème ne se pose pas...) transformant le premier en le second. Il existe aussi une inversion de rapport positif effectuant cette transformation. Soit Ω le cercle de cette inversion.

Nous avons vu dans la question précédente qu'une inversion dont le pôle P appartient au cercle Ω transforme les points de $\mathscr{C}$ et leurs images de $\mathscr{C}'$ en des points symétriques par rapport à Δ, image de Ω par l'inversion de pôle P. Les cercles images sont symétriques, donc ils ont le même rayon.

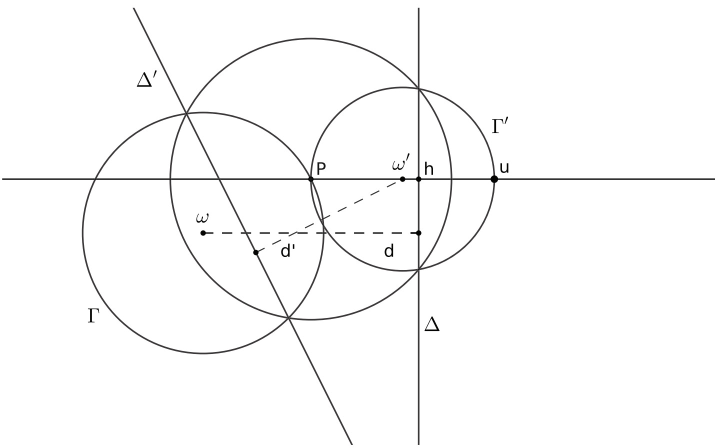
Réponse 7. Inversion d'un couple cercle-droite

L'équation de Γ est : $x^2 + y^2 = R^2$. L'équation du cercle γ de l'inversion est : $(x - R\cos t)^2 + (y - R\sin t)^2 = p$, où p est la puissance de l'inversion et $0 < t < \pi/2$. On sait que la droite Δ' transformée de Γ passe par les points d'intersection de Γ et de γ (on prend pour p une valeur telle qu'il y a des points d'intersection), c'est leur axe radical, donc d'équation

$$x^2 + y^2 - R^2 = (x - R\cos t)^2 + (y - R\sin t)^2 - p$$

ou : $2Rx\cos t + 2Ry\sin t - 2R^2 + p = 0$, soit encore

$$\Delta' : x\cos t + y\sin t - R + p/2R = 0 \qquad (1).$$



Les coordonnées de ω' sont : $(R\cos t + R', R\sin t)$.

La distance d' entre ω' et Δ' s'obtient par la formule qui donne la distance d'un point à une droite,

$$d' = |(R\cos t + R')\cos t + R\sin^2 t - R + p/2R| \quad (2)$$

soit, puisque $\cos t > 0$: $d' = R'\cos t + p/2R \qquad (3).$

D'autre part, l'inversion échange h, pied de la perpendiculaire menée par P sur Δ et u, opposé diamétral de P sur Γ' donc $p = 2R'(d - R\cos t)$ donc $p/2R = R'(d/R - \cos t) = R'd/R - R'\cos t$.

D'où : $d' = R'd/R$, soit $d'/R' = d/R$, CQFD [8].

Réponse 8. Des images concentriques

Considérons le cas d'une inversion de pôle u, l'un des deux points limites du pinceau. Tout cercle Γ dont le centre appartient à l'axe radical du pinceau, mais pas à la droite (uv), qui passe par u, passe par v, et est orthogonal à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$.

Un tel cercle Γ est transformé, dans une inversion de centre u en une droite (d) qui sera orthogonale aux images $\mathscr{C}'_1$ et $\mathscr{C}'_2$ de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ car l'inversion conserve l'orthogonalité. Or une droite orthogonale à un cercle passe par son centre.

Donc (d) passe par le centre de $\mathscr{C}'_1$ et par le centre de $\mathscr{C}'_2$. De plus elle est orthogonale à la droite qui joint u au centre de Γ. Elle est donc distincte de la droite des centres et ne peut contenir deux points distincts de celle-ci. Les cercles $\mathscr{C}'_1$ et à $\mathscr{C}'_2$ sont donc concentriques, et aussi toutes les images des cercles du pinceau considéré. La position de ce centre commun est l'objet de la question 1 de ce chapitre. Tout ceci vaut évidemment aussi pour une inversion de centre v.

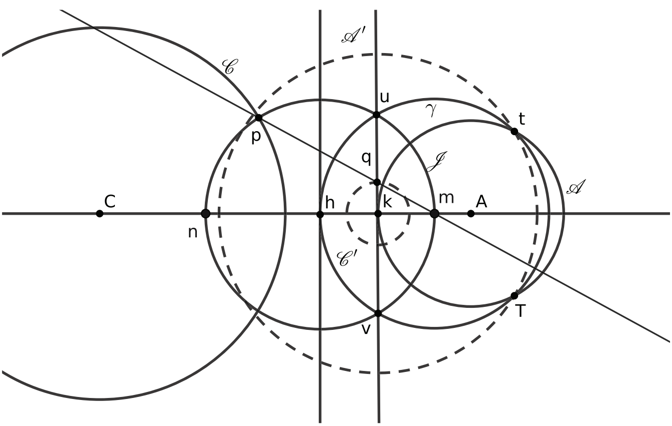
Il n'est pas possible de transformer des cercles sécants ou tangents en cercles concentriques parce que si un point est commun à deux cercles, il appartient nécessairement à leurs deux images et les cercles concentriques (distincts) n'ont aucun point en commun.

8. Ce bel exercice, et l'indication, sont tirés d'un écrit de Daniel Perrin.

Réponse 9. Modus

Soient deux deux cercles non sécants, $\mathscr{A}$ de centre A et $\mathscr{C}$ de centre C.

1) Nous avons besoin de l'axe radical, δ. Pour le construire, nous traçons une tangente commune (à l'aide d'un centre d'homothétie) et projetons sur la droite des centres le milieu des points de contact.



2) Nous avons besoin des points de Poncelet. Pour cela, d'un point t de $\mathscr{A}$, nous menons une tangente qui coupe δ en x. Un cercle de centre x passant par t sera orthogonal à $\mathscr{A}$ et à $\mathscr{C}$, et coupera la droite des centres, (AC), en n et en m, points de

Poncelet. Le cercle de diamètre $[nm]$ fait partie du pinceau à points de base orthogonal au pinceau que définissent $\mathscr{A}$ et $\mathscr{C}$. Je le note $\mathscr{J}$.

3) Nous ferons une inversion de pôle m. Comme le rapport de l'inversion n'importe pas, je prends comme cercle d'inversion un cercle, noté γ, qui passe par le pied h de l'axe radical. Ce cercle coupe $\mathscr{J}$ en deux points u et v. La droite (uv) est l'image de $\mathscr{J}$. Cette droite coupe la droite (AC) en un point k qui sera le centre de $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{C}'$.

4) Les cercles $\mathscr{A}$ et γ se coupent en un point t invariant, ce qui nous donne $\mathscr{A}'$, de centre k, passant par t.

5) Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{J}$ se coupent en un point p dont l'image q est le point d'intersection de (mp) et (uv), image de $\mathscr{J}$, ce qui permet de tracer $\mathscr{C}'$.

Réponse 10. Paradoxe

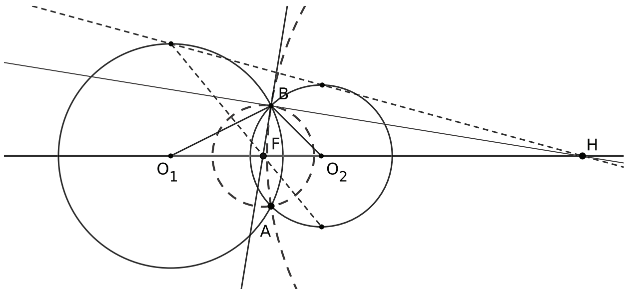
L'explication c'est que le cercle γ de l'inversion ayant pour pôle un point de Poncelet ne fait pas partie du pinceau engendré par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, puisque les points de Poncelet sont eux-mêmes des cercles du pinceau, de rayon nul ! Or ce cercle est de rayon $\sqrt{k} > 0$. Et il ne peut pas y avoir, dans un même pinceau, deux cercles différents de même centre (pourquoi ? voir page 76).

Il y a donc dans cette histoire quatre pinceaux distincts. $\mathscr{P}_1$, engendré par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{P}_2$ engendré par $\mathscr{C}_1, \gamma$ et $\mathscr{C}'_1$, $\mathscr{P}_3$ engendré par $\mathscr{C}_2, \gamma$ et $\mathscr{C}'_2$ (dites pourquoi $\mathscr{P}_2 \neq \mathscr{P}_3$) et enfin $\mathscr{P}_4$, pinceau de cercles concentriques engendré par $\mathscr{C}'_1$ et $\mathscr{C}'_2$. Dans l'exemple figuré par la figure de modus, deux de ces pinceaux sont à points limites, un autre est à points de base et le dernier est un pinceau de cercles concentriques.

Réponse 11. Cercles bissecteurs

Cette question a été en fait traitée dans le chapitre de base sur l'inversion. Ce n'est ici qu'une question de vocabulaire. Deux cercles sécants sont échangés par deux inversions positives, il y a donc deux cercles bissecteurs. Si les cercles sont non sécants (y compris s'ils sont concentriques) ou tangents, ils sont échangés par deux inversions, l'une positive, l'autre négative. Mais une inversion de puissance négative n'a pas de cercle invariant point par point, il y a donc un seul cercle bissecteur.

Le cas des cercles égaux (de même rayon) est spécial. Ils sont symétriques. Il y aurait bien un centre d'homothétie, et d'inversion, positive, mais comme les tangentes communes qui ne se coupent pas au centre de symétrie, sont parallèles... Il serait à l'infini... Un cercle de rayon infini ressemble beaucoup à une droite, et par une convention bien motivée le cercle bissecteur de deux cercles égaux est la médiatrice de leurs centres, qui est aussi leur axe radical. Et ceci, que ces cercles se coupent ou non. Notez que ceci ne contredit pas le résultat de la question 2 de ce chapitre, car l'axe radical d'un pinceau est un élément du pinceau.



Revenons sur le cas le plus « beau », quand les cercles se coupent (en A et en B), il y a deux centres d'homothétie H et F, qui sont aussi des centres d'inversion (positive) et deux cercles bissecteurs Γ_1 et Γ_2 qui passent par A et par B puisque ce sont des points invariants des inversions.

Notons k le rapport de l'homothétie positive, de centre H, qui envoie le cercle de centre O_1 sur le cercle de centre O_2. On a $k = R_1/R_2$, $k = \overline{HO_1}/\overline{HO_2} = -\overline{FO_1}/\overline{FO_2} = BO_1/BO_2$, ce qui signifie (voir RÉSU 2) que F et H sont les pieds des bissectrices de l'angle $\widehat{O_1BO_2}$, ce qui justifie le mot « cercles bissecteurs » et prouve (en plus) que les cercles Γ_1 et Γ_2 sont orthogonaux (détaillez la justification de ce point).

Réponse 12. Cas des cercles concentriques

Le pôle de l'inversion est nécessairement le centre unique d'homothétie c'est-à-dire le centre commun des deux cercles. Pour la même raison, le rapport de l'inversion est rR, donc le rayon du cercle de l'inversion est $\sqrt{rR}$, moyenne géométrique des rayons des deux cercles.

Réponse 13. Cas des cercles tangents

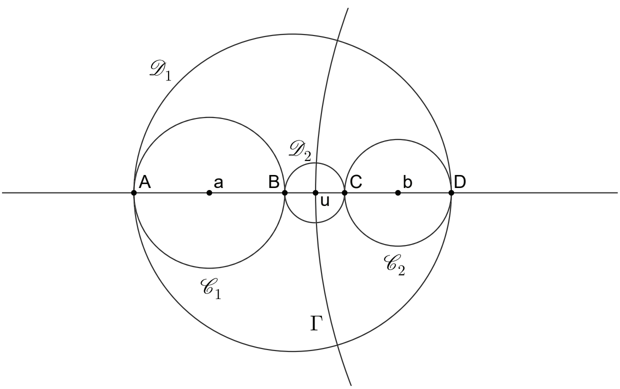
Le pôle d'inversion de puissance positive, O, est le centre d'homothétie négative et le cercle Γ de cette inversion passe par T, point de contact des trois cercles avec la tangente commune. Le reste est un petit calcul. Soit ρ le rayon du cercle bissecteur Γ :

$$\rho = r + OO_2 = r + \frac{r}{R} OO_1 = r + \frac{r}{R}(R - \rho)$$

soit $\rho = \dfrac{2rR}{r+R}$ que l'on peut mettre sous la forme classique de la moyenne harmonique : $\dfrac{2}{\rho} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R}$, CQFD.

Réponse 14. Construire le cercle bissecteur

Le cercle Γ de diamètre $[uv]$ fait partie du pinceau des cercles orthogonaux aux cercles du pinceau engendré par $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Ces deux cercles sont donc invariants par l'inversion définie par Γ (voir Scholie page 107). D'autre part $\mathscr{C}_2$ étant tangent à $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, son image devra également être tangente à ces deux cercles et comme $\mathscr{C}_2$ est intérieur à Γ son image devra lui être extérieure, et avoir son centre sur (uv). C'est donc $\mathscr{C}_1$. Γ est donc le cercle bissecteur de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.



N.B. La figure donne l'impression que u est le centre de $\mathscr{D}_2$, ce qui n'est pas possible. Elle est pourtant correcte : en grossissant on constate que ce centre (milieu de $[BC]$) est un peu à gauche de u. Cette curiosité vient du fait qu'ici la décroissance des rayons en fonction de l'abscisse est très rapide parce que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ ont des centres proches et des rayons très différents. Ceci explique aussi que le point h (pied de l'axe radical de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$) et le point v soient très éloignés à droite, et que le rayon de Γ soit très grand.

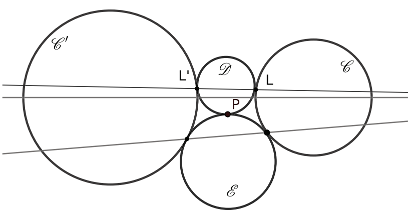
Scholie

Notons $\mathscr{P}_1$ le pinceau engendré par $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, et $\mathscr{P}_2$ le pinceau engendré par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Ils sont distincts mais ont la même droite des centres. Le cercle Γ, centré sur la même droite, fait partie de $\mathscr{P}_2$ (voir la question 2), et il fait aussi partie du pinceau orthogonal à $\mathscr{P}_1$, pinceau à points de base u et v, dont il est le plus petit cercle.

Pour construire le cercle bissecteur de deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre, cas de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Il suffira de considérer les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ semblablement, et les points w, z de Poncelet du pinceau défini par ces deux cercles. Le cercle de diamètre $[wz]$ sera le bissecteur de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

Réponse 15. Un point du bissecteur

Le cercle $\mathscr{D}$ est tangent à $\mathscr{C}$ en L. Soit L' l'image de L par $\mathscr{I}$. Le cercle passant par L et par L' est globalement invariant. Étant tangent à $\mathscr{C}$ en L, il sera tangent à $\mathscr{C}'$ en L'.



C'est le cercle $\mathscr{D}$. Il y a un autre cercle tangent à $\mathscr{C}$ en L et tangent à $\mathscr{C}'$, mais il entoure $\mathscr{C}'$, ce qui est exclu par l'énoncé et la réponse 18 de la section « Exercices 1 », car le pôle de $\mathscr{I}$ est extérieur aux deux cercles. Donc $\mathscr{D}$ est globalement invariant. Il en est de même de $\mathscr{E}$. Le point P, commun aux deux cercles, est invariant et fait donc partie de Γ.

Réponse 16. Inversion de pinceaux

Dans le cas d'un pinceau à points de base, l'image sera un pinceau du même type. En effet, comme tous les cercles passent par deux points, A et B, toutes les images seront des cercles passant par les images A' et B' de ces deux points.

Voir les cas particuliers : si on choisit le pôle sur l'un des cercles du pinceau, ou sur A ou B.

Pour un pinceau tangent, l'argument est identique.

Le cas d'un pinceau $\mathscr{L}$ à points limites (de Poncelet) peut sembler moins évident. Mais si ces points limites sont notés u et v, l'ensemble des cercles du plan passant par u et v sera un pinceau $\mathscr{B}$ à points de base et chacun de ses cercles sera orthogonal à tous les cercles du pinceau $\mathscr{L}$ à points limites. Maintenant, l'image de $\mathscr{B}$ est un pinceau $\mathscr{B}'$ du même type, ensemble des cercles passant par u' et v' images de u et v. Comme l'inversion conserve l'orthogonalité, toutes les images des cercles de $\mathscr{L}$ sont le pinceau $\mathscr{L}'$ orthogonal à $\mathscr{B}'$ et un tel pinceau est un pinceau à points limites.

Autrement dit, l'image d'un pinceau, dans ces trois cas, est encore un pinceau du même type. Le cas de l'image d'un pinceau de cercles concentriques est laissée aux lecteurs.

La stabilité des cercles d'un pinceau dans une inversion a été abordée dans la question 3.

Il sera très intéressant en club de réaliser avec Geogebra la figure d'un pinceau à points limites $\mathscr{P}$ et de son image $\mathscr{P}'$ par une inversion quelconque (dont on peut choisir le pôle et la puissance). Les images des points limites sont les nouveaux points limites (pourquoi ?). L'image de l'ancienne droite des centres est un cercle passant par le pôle. L'image de l'axe radical de $\mathscr{P}$ est un cercle. Etc.

Réponse 17. Inversion de deux cercles concentriques

C'est un peu une réciproque de la question 8 qui est envisagée ici. Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centre commun ω et soit O le pôle d'une inversion, supposé naturellement différent de ω.

La droite $(O\omega)$ coupe $\mathscr{C}_1$ en α et β extrémités d'un diamètre, et $\mathscr{C}_2$ en γ et δ. Nous repérons le centre des cercles comme milieux des extrémités d'un diamètre. Nous avons

$$\overline{O\omega} = (1/2)[\overline{O\alpha} + \overline{O\beta}] = (1/2)[\overline{O\gamma} + \overline{O\delta}].$$

En notant comme toujours les images, le centre de $\mathscr{C}'_1$ sera $(1/2)[\overline{O\alpha'}+\overline{O\beta'}]$ et celui de $\mathscr{C}'_2$ sera $(1/2)[\overline{O\gamma'}+\overline{O\delta'}]$. Mais $\overline{O\alpha'} = k/\overline{O\alpha}$, etc. Peut-on avoir :

$$k/\overline{O\alpha} + k/\overline{O\beta} = k/\overline{O\gamma} + k/\overline{O\delta} \quad ?$$

La formule évidente : $1/x + 1/y = (x + y)/xy$ prouve que ce n'est pas possible puisqu'on a déjà $\overline{O\alpha} + \overline{O\beta} = \overline{O\gamma} + \overline{O\delta}$, cela signifierait $\overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta} = \overline{O\gamma} \cdot \overline{O\delta}$, mais deux couples de nombres qui ont la même somme et le même produit sont respectivement égaux et donc $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_2$.

Donc, à moins de prendre le pôle de l'inversion au centre commun, les inverses de deux cercles concentriques ne sont pas concentriques.

On peut rechercher un argument plus expéditif.

Réponse 18. Inversion de trois cercles dont les centres sont alignés

Si ces trois cercles font partie d'un même pinceau, leurs images aussi, selon la question 16, leurs centres sont donc alignés. De même, si le pôle de l'inversion est pris sur la droite des centres, les centres des cercles images seront alignés.

Dans la suite nous supposons que l'un des trois cercles ne fait pas partie du pinceau engendré par les deux autres. Et, d'autre part, que le pôle de l'inversion n'appartient pas à la droite des centres.

Les cercles du pinceau sont notés $\mathscr{C}_1$, de centre A, et $\mathscr{C}_2$, de centre B. Le cercle qui n'appartient pas au pinceau est noté $\mathscr{E}$.

Il y a forcément un cercle de ce pinceau qui recoupe $\mathscr{E}$ en deux points, disons a et b.

Dans ce cas, A et B sont sur la médiatrice de $[ab]$. Nous avons vu (question 14 dans énoncés 1) que A' et B' ne sont pas sur la médiatrice de $[a'b']$ si le pôle de l'inversion n'appartient pas à la droite des centres du pinceau à points limites. Donc les pinceaux image du pinceau engendré par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et du pinceau à points de base engendré par $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{E}$ n'ont pas la même droite des centres.

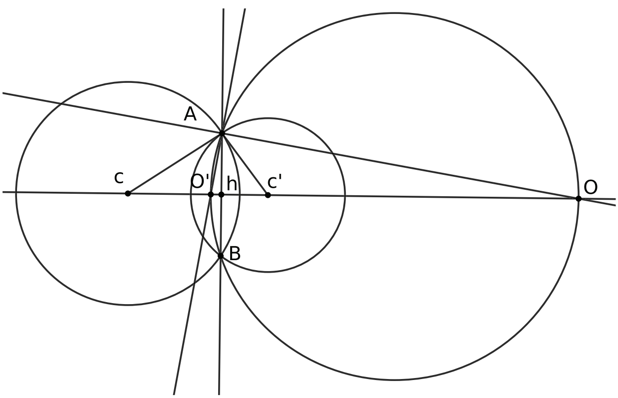
Les centres des images des cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$ ne sont pas alignés.

Conclusion : les images de trois cercles dont les centres sont alignés sur une droite (d) ne peuvent être trois cercles dont les centres sont alignés que dans deux cas : soit les trois cercles font partie d'un même pinceau, soit le pôle a été pris sur la droite (d).

La lectrice (resp. le lecteur) qui aura réalisé la figure suggérée avec la réponse 16 pourra insérer dans le pinceau $\mathscr{P}$ un cercle qui ne lui appartient pas et constater que l'image de ce cercle n'a pas son centre aligné avec les centres des cercles images des cercles du pinceau $\mathscr{P}$.

Réponse 19. Inverse du pied de l'axe radical

Si O et O' sont les centres d'homothétie et les pôles des inversions qui sont en cause, et si A est un point commun aux deux cercles, on sait (voir page 127) que (AO) et (AO') sont les bissectrices de l'angle formé en A par les tangentes aux deux cercles (et aussi de l'angle $\widehat{cAc'}$) l'angle $\widehat{OAO'}$ est donc droit et le cercle de diamètre $[OO']$ passe par A.



Donc l'image de ce cercle par l'inversion de pôle O, est la droite passant par A orthogonale à (OO'), qui est l'axe radical. Cette inversion échange donc les points h et O'. De même, l'inversion de pôle O' échange h et O.

Réponse 20. Invariant anallagmatique

Soient deux cercles sécants, de centres o et o', R,r,d leurs rayons respectifs et la distance de leurs centres, A l'un de leurs points communs. Exprimons $d^2 = oo'^2$ par le théorème d'Al Kashi

(Voir RÉSU 10) dans le triangle oAo'. L'angle $\widehat{oAo'}$ est noté α. On a

$$d^2 = R^2 + r^2 - 2rR\cos\alpha.$$

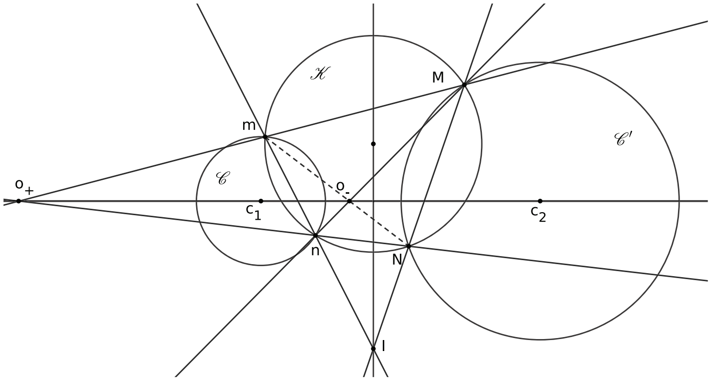
On en déduit directement que l'invariant anallagmatique vaut $\cos\alpha$. L'inversion conserve les angles, et pas leur orientation. Mais la fonction cosinus est paire, donc...

Réponse 21. Quelques exemples

Si les deux cercles sont orthogonaux, l'invariant est nul car $R^2 + r^2 = d^2$. Si deux cercles sont tangents intérieurement, $d = R - r$ donc $d^2 = R^2 + r^2 - 2rR$ si bien que l'invariant vaut 1. S'ils sont tangents extérieurement, $d = R + r$ et l'invariant vaut -1. Si les cercles sont concentriques, $d = 0$ donc l'invariant vaut $(R^2 + r^2)/2rR$.

Réponse 22. Composée

Dans l'inversion de pôle o_+, m et n sont deux points de $\mathscr{C}$ et M et N leurs images sur $\mathscr{C}'$. Ces quatre points sont cocycliques (voir page 108), notons $\mathscr{K}$ ce cercle. $\mathscr{K}$ est invariant pour $\mathscr{I}_+$ puisqu'il contient m et son image M, et aussi pour $\mathscr{I}_-$ puisqu'il contient M et son image n. L'image par $\mathscr{I}_-$ de N doit être un point de $\mathscr{K}$ et de $\mathscr{C}_1$, c'est donc m (ce ne peut pas être n, pourquoi ?).



Que s'est-il passé ? Nous avons prouvé que, pour $m \in \mathscr{C}$

$$\mathscr{I}_- \circ \mathscr{I}_+ \circ \mathscr{I}_- \circ \mathscr{I}_+(m) = m.$$

En composant à gauche par $\mathscr{I}_-$ puis par $\mathscr{I}_+$ on trouve :

$$\mathscr{I}_- \circ \mathscr{I}_+ = \mathscr{I}_+ \circ \mathscr{I}_-.$$

On dit que les inversions $\mathscr{I}_+$ et $\mathscr{I}_-$ **commutent**. On peut constater que la composée de ces deux inversions de pôles différents n'est pas une inversion. $\mathscr{I}_- \circ \mathscr{I}_+$ (de m à n) pas plus que $\mathscr{I}_+ \circ \mathscr{I}_-$ (de M à N), n'ont les propriétés d'une inversion (vous pouvez le mettre en évidence). La question suivante concerne la composition de trois inversions.

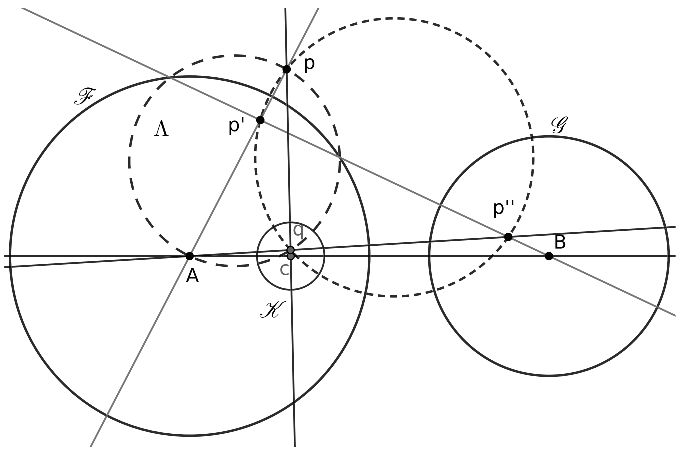
Réponse 23. Transmuée

On distingue deux cas.

1) $A \notin \mathscr{G}$. $f(\mathscr{G})$ est un cercle $\mathscr{K}$ de centre c. Nous allons montrer que $f \circ g \circ f$ est l'inversion de cercle $\mathscr{K}$.

Soit un point p, $p' = f(p), p'' = g(p'), q = f(p'') = f \circ g \circ f(p)$. Soit le cercle Γ défini par les trois points p, p', p'' (ces trois points peuvent-ils être alignés ? Que faut-il alors préciser pour le choix du point p ?). Ce cercle est invariant pour f puisqu'il contient p et p', et pour g puisqu'il contient p' et p'', donc orthogonal à $\mathscr{F}$ et à $\mathscr{G}$, donc centré sur leur axe radical et de ce fait, orthogonal à tous les cercles du pinceau engendré par $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, donc à $\mathscr{K}$. Comme $f(p'') = q$, Γ contient aussi q.

La droite $(p'p'')$ passe par le centre B de $\mathscr{G}$, elle lui est donc orthogonale. L'image de cette droite par f sera un cercle, noté Λ, passant par p, par q et par A, orthogonal au cercle $\mathscr{K}$, image du cercle $\mathscr{G}$.



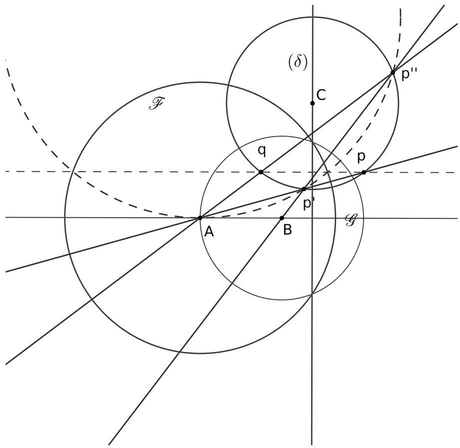
$\mathscr{K}$ est donc orthogonal à la fois à Γ et à Λ donc centré (au point c) sur l'axe radical de ces deux cercles, qui est la droite

(pq). Ceci prouve que les points c, p, q sont alignés.

Γ étant orthogonal à $\mathscr{K}$, ce cercle est invariant pour l'inversion de pôle c. Ceci prouve que l'inversion de centre c et de cercle $\mathscr{K}$ échange p et q, et donc que la transmuée $f \circ g \circ f$ est l'inversion de pôle c et de cercle $\mathscr{K}$.

2) $A \in \mathscr{G}$. L'image de $\mathscr{G}$ par f est alors une droite δ.

La droite δ est aussi l'axe radical de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ (c'est évident si les deux cercles sont sécants ; dans le cas de cercles non sécants, voir Réponse 22 ci-dessus).



Comme précédemment, le cercle qui passe par p, p' et p'' passe aussi par q. Il est orthogonal à $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ donc son centre c appartient à δ, si bien que $cp = cq$. D'autre part, l'image par f du cercle $Ap'p''$ sera la droite (pq) et comme ce cercle est orthogonal à $\mathscr{G}$, la droite (pq) est orthogonale à l'image par f de $\mathscr{G}$, qui est δ. Ce fait, joint à l'égalité $cp = cq$, prouve que δ est la médiatrice de $[pq]$ et donc $f \circ g \circ f$ est la symétrie d'axe $\delta = f(\mathscr{G})$.

Dans le cas où la transmuée est une inversion, sa puissance est le carré du rayon du cercle $\mathscr{K}$. On obtient la valeur de ce rayon par la formule (page 118) qui donne le rayon de l'image d'un cercle. On a

$$R' = \frac{|k|R}{Oa^2 - R^2} = \frac{k\sqrt{l}}{AB^2 - l}.$$

La puissance de la conjuguée est le carré de cette valeur. On voit que le dénominateur s'annule pour $AB = \sqrt{l}$. Que signifie cette cette catastrophe ?

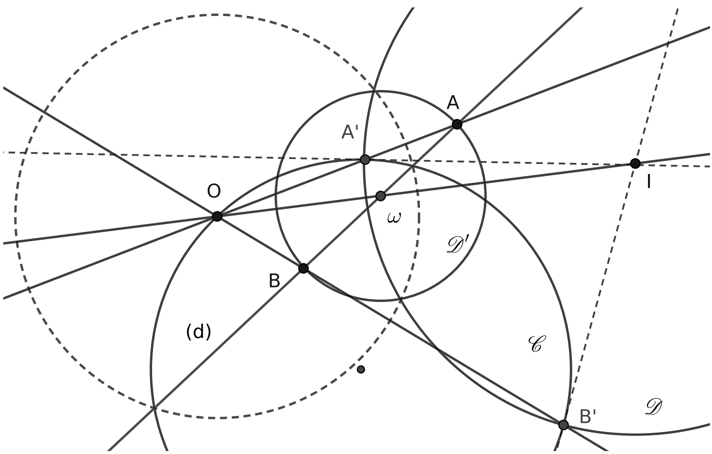
Réponse 24. Bissecteur des images

C'est une conséquence immédiate de la question précédente. Notons $\mathscr{J}$ l'inversion qui transforme Γ, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en Γ', $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}'$. On passe de $\mathscr{C}'$ à $\mathscr{D}'$ par la transmuée de $\mathscr{J}$ par Γ : $\mathscr{J} \circ \Gamma \circ \mathscr{J}$. Nous savons que c'est une inversion. Son cercle est l'ensemble de ses points invariants. Si P est un de ces points, $\mathscr{J} \circ \Gamma \circ \mathscr{J}(P) = P$ entraîne $\Gamma \circ \mathscr{J}(P) = \mathscr{J}(P)$ donc cet ensemble est l'image par $\mathscr{J}$ des points de Γ, soit Γ' qui est donc un cercle bissecteur de $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}'$.

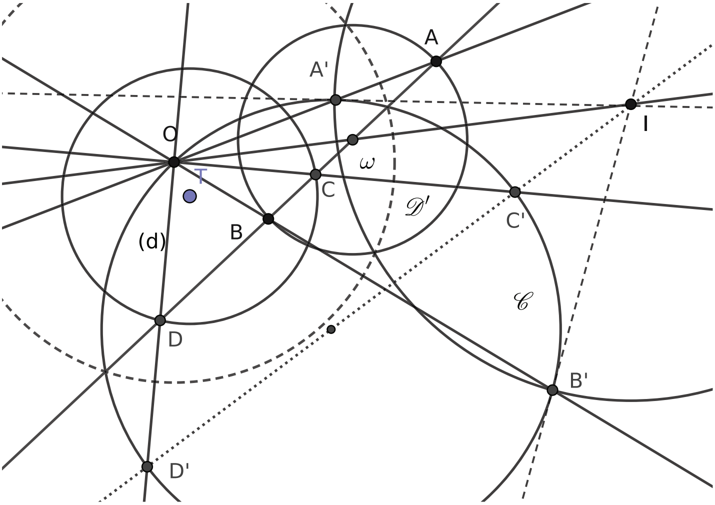
Réponse 25

1) Le cercle $\mathscr{D}$ de centre I passant par A' et B' est, par construction, orthogonal au cercle $\mathscr{C}$. Son image $\mathscr{D}'$ est donc un cercle orthogonal à (d), image de $\mathscr{C}$, c'est-à-dire centré sur (d). Ce centre n'est pas l'image de I, mais appartient cependant à la droite (OI), c'est donc ω. $\mathscr{D}'$ passe également par les images B de B' et A de A', qui sont sur (d). $[BA]$ est donc une corde passant par le centre, c'est-à-dire un diamètre et ω en est le milieu, CQFD.

2) On sait (voir page 40) que, $[D,C,A,B]$ étant une division harmonique, tout cercle passant par C et D est orthogonal au cercle $\mathscr{D}'$ de diamètre $[AB]$. L'image de $\mathscr{D}'$ est le cercle $\mathscr{D}$ de centre I. Donc un cercle passant par C' et D' est orthogonal au cercle $\mathscr{D}$.



Par ailleurs, les cercles passant par C' et D' constituent un pinceau à points de base. Un cercle orthogonal à tous les cercles de ce pinceau est centré sur l'axe radical, qui est la droite $(C'D')$, donc C', D', I sont alignés.



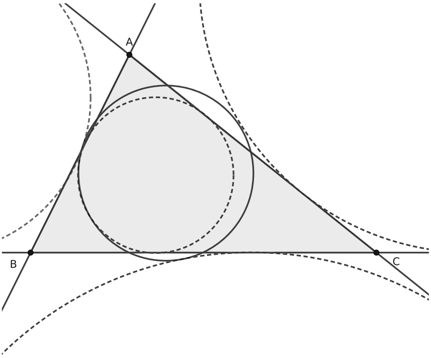
CQFD !

Chapitre 6

Pages

6.1 Théorème de Feuerbach

Dans tout triangle, le cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles exinscrits.



Karl Wilhelm Feuerbach (1800 - 1834) était un mathématicien allemand. Il a démontré ce très beau théorème en 1822. D'ailleurs le cercle des neufs points, souvent appelé « cercle d'Euler », ne figure pas dans les travaux d'Euler, et certains attribuent plutôt sa découverte à Feuerbach.

6.1.1 Préliminaires

6.1.2 Questions

Question 1

Détaillez la réalisation de la figure.

La figure ci-dessus a été dépouillée de tous les éléments permettant sa construction. En effet, le cercle d'Euler *semble* être tangent aux quatre cercles inscrit et exinscrits... mais les contacts, même avec une figure très soigneusement faite, pourraient ne pas être simples, il pourrait y avoir deux points d'intersection. Il a certainement fallu que Karl Whilhelm réalise la figure plusieurs fois avant de se lancer dans la tentative de démonstration qu'il a su mener au succès !

Remarque

Comment montre-t-on que deux cercles sont tangents ? En établissant, par exemple, qu'ils ont un point en commun et qu'en ce point, leurs tangentes sont confondues.

Question 2

Démontrez que, si ABC est isocèle de sommet A, le cercle d'Euler et le cercle inscrit sont tangents. C'est une version *soft* du théorème de Feuerbach !

Question 3

Revenons à un triangle ABC quelconque, soit A' le milieu de $[BC]$. Calculez l'angle que fait la tangente en A' au cercle d'Euler avec (BC), en fonction des angles du triangle ABC.

Question 4

Notons I le centre du cercle inscrit, I_a le centre du cercle exinscrit tangent à $[BC]$, D le point où (AI) rencontre $[BC]$. A' est encore le milieu de $[BC]$.

Montrez que la tangente en A' au cercle d'Euler est parallèle à la tangente au cercle inscrit menée par le point D. On utilisera la réponse 3 et la symétrie par rapport à la bissectrice (AI_a) qui contient les points A, I, D et I_a.

Question 5

Prouvez que les points A, I, D et I_a sont en division harmonique ainsi que les points h_a, P, D, T si h_a et T sont les projections orthogonales de A et I_a sur (BC), T étant donc le point où le cercle de centre I_a est tangent à (BC).

Question 6

Prouvez que A', milieu de $[BC]$, est également le milieu de $[PT]$. Déduisez-en que $A'P^2 = A'D \cdot A'h_a$.

Intervention expéditive de l'inversion

Question 7

Faire une inversion de pôle A' et de puissance $A'P^2$ et conclure.

6.1.3 Réponses

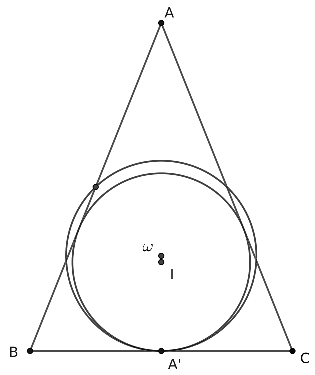
Réponse 1

Le cercle d'Euler passe par les milieux des côtés, A', B', C', il suffit donc de tracer les médiatrices de $[A'B']$ puis de $[B'C']$ pour avoir son centre et le construire.

Il faut ensuite tracer les six bissectrices du triangle. Elles se coupent trois par trois en quatre points qui sont les centres des cercles inscrit et exinscrits. Pour avoir un point de tangence qui nous permette de tracer ces cercles, on projette orthogonalement chacun de ces centres sur un côté du triangle (ou le prolongement d'un côté).

Réponse 2

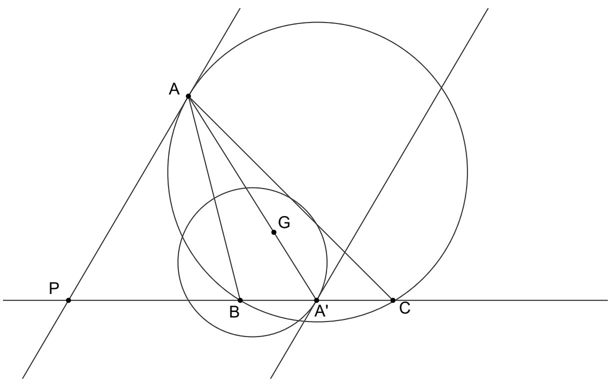
Détails laissés au lecteur. Cercle inscrit et cercle des neuf points ont le point A' en commun, et la même tangente (BC) en ce point, ainsi d'ailleurs que le cercle exinscrit opposé au point A.



Mais pour les deux autres cercles exinscrits, on doit se reporter à la démonstration générale...

Réponse 3

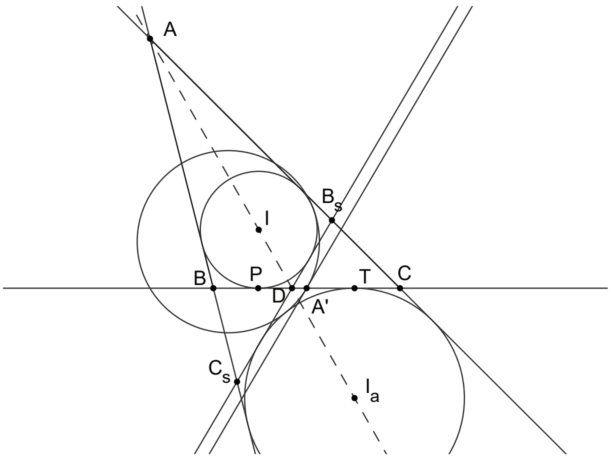
Il est presque impossible de démontrer quoi que ce soit à propos du cercle d'Euler sans utiliser le fait qu'il est l'image du cercle circonscrit dans une homothétie de centre G (le point de concours des médianes)et de rapport $(-1/2)$.



Dans cette homothétie, A' est l'image de A. L'image réciproque de la tangente de A' au cercle d'Euler est une droite parallèle passant par A et c'est la tangente en A au cercle circonscrit (pourquoi ?). Notons P le point où cette tangente coupe (BC). Ces deux tangentes font donc le même angle avec (BC). Or $\widehat{BAP} = \widehat{C}$ car l'angle que fait une tangente avec une corde est égal à un angle qui intercepte cette corde, ici la corde $[AB]$. Par ailleurs $\widehat{ABP} = \pi - \widehat{B}$ donc $\widehat{APB} = \pi - (\pi - \widehat{B}) - \widehat{C} = \widehat{B} - \widehat{C}$.

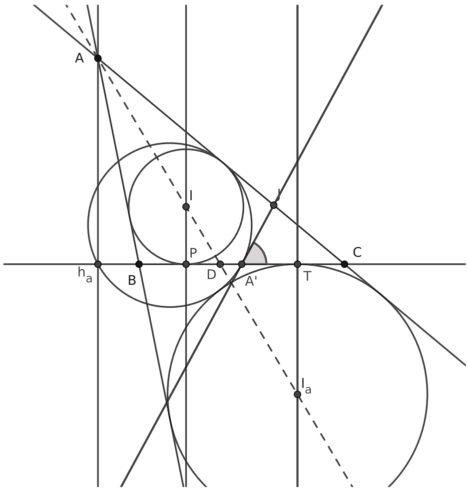
L'angle que fait avec (BC) la tangente en A' au cercle d'Euler est $\widehat{B} - \widehat{C}$.

Réponse 4



On note B_s et C_s les symétriques respectifs de B et de C par rapport à (AI_a), P le point où le cercle inscrit est tangent à (BC). Comme ce cercle est invariant dans la symétrie par rapport à (AI_a), la droite (B_sC_s) est tangente au cercle inscrit en Q, symétrique de P. Quelle est la valeur de $\widehat{CDB_s}$? Comme les triangles CDB_s et BDC_s sont symétriques, $\widehat{DB_sC} = \widehat{DBC_s} = \pi - \widehat{B}$ donc l'angle de la tangente au cercle inscrit en Q avec (BC), $\widehat{CDB_s} = \pi - \widehat{C} - (\pi - \widehat{B})$ soit $\widehat{B} - \widehat{C}$ dont on a vu (question 3) que c'est l'angle de la tangente au cercle d'Euler en A'. Ces deux droites sont donc parallèles.

Réponse 5

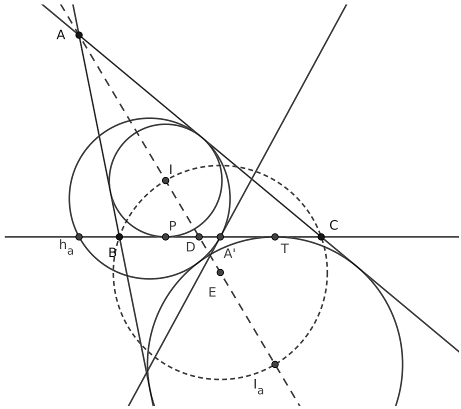


Nous savons que dans un triangle, les pieds des bissectrices intérieure et extérieure issues d'un sommet forment avec les extrémités du côté opposé une division harmonique (voir page 16). Il suffit de considérer ce résultat à partir du sommet B du triangle BDA puisque les points I et I_a sont bien les pieds des bissectrices intérieures et extérieures de l'angle en B.

Les projections orthogonales sur une même droite de quatre points en division harmonique ont la même propriété, donc h_a, P, D, T sont en division harmonique (voir page 13).

Réponse 6

Comme les bissectrices d'un même angle sont perpendiculaires, les triangles IBI_a et ICI_a sont rectangles, donc le cercle de diamètre $[II_a]$ passe par B et par C et son centre est sur la médiatrice de $[BC]$, qui passe par A'.



Comme E est le milieu de $[II_a]$, sa projection orthogonale sur $[BC]$, A', est le milieu des projections orthogonales des points I et I_a sur la même droite. Donc A' est le milieu de $[PT]$.

Puisque h_a, P, D, T sont en division harmonique, la relation de Newton (voir page 23) s'écrit : $A'P^2 = A'D \cdot A'h_a$.

Réponse 7

La puissance de A' par rapport au cercle inscrit vaut $A'P^2$ et la puissance de A' par rapport au cercle exinscrit de centre I_a vaut $A'T^2 = A'P^2$ donc ces deux cercles sont invariants dans cette inversion.

Le cercle d'Euler, lui, passe par A' donc son image sera une droite. Cette droite passera par D puisque le cercle d'Euler passe par h_a et que la relation $A'P^2 = A'D \cdot A'h_a$ prouve que D est l'inverse de h_a.

Comme l'inversion conserve les angles, cette droite fera avec la direction de (BC) un angle égal à celui que fait avec la même droite (BC) (qui est invariante), la tangente au cercle d'Euler en A'. Il s'agit donc de la seconde tangente commune des cercles inscrit, et exinscrit de centre I_a, la droite (C_sB_s) de la question 4. Ceci prouve que l'inverse de cette droite, qui est le cercle d'Euler, est tangent à ces deux autres cercles.

Scholie

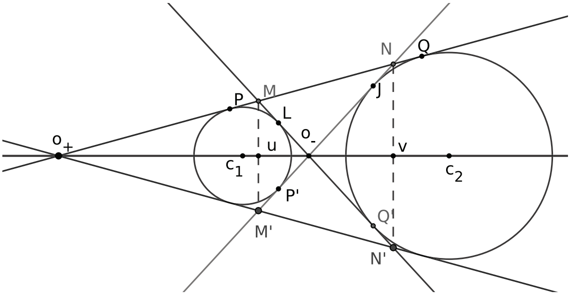
Les démonstrations de tangence avec le cercle d'Euler pour les deux autres cercles exinscrits sont naturellement identiques.

On a là un théorème qui constitue presque une *révision générale* de tout un cours de géométrie. Aucune étape n'est particulièrement difficile à comprendre, mais pour le lecteur, se donner l'objectif de présenter la démonstration complète sans notes constitue un beau projet !

6.2 L'affaire des tangentes

Étant donnés deux cercles γ_1 et γ_2, non sécants, de centres respectifs c_1 et c_2, de rayons respectifs R_1 et R_2, avec $R_1 \neq R_2$, ils ont quatre tangentes communes. P et Q sont les points de contact d'une tangente extérieure, L, Q', J, P' sont les points de contact des tangentes extérieures (voir la figure).

Ces tangentes se coupent deux à deux en six points.



Les deux points qui sont sur la droite des centres sont les centres d'homothétie, o_+ et o_-, et en même temps les pôles d'inversion échangeant ces deux cercles. Les quatre autres points M,M',N,N' peuvent être joints deux à deux, et coupent la droite des centres en u et en v. Le théorème à démontrer dit que u et v sont les points limites, ou points de Poncelet, du pinceau engendré par γ_1 et γ_2.

6.2.1 Questions

Question 1

Démontrez que $\widehat{c_1 N c_2} = \widehat{c_1 M c_2} = \pi/2$.

Question 2

Démontrez que les droites (PP') et (QJ) sont perpendiculaires.

Question 3

Montrez que les droites (PP') et (QJ) se coupent en un point de Poncelet.

Question 4

Montrez que les points P,c_1,P',v sont sur un même cercle, que $[c_1N]$ en est un diamètre, et conclure.

6.2.2 Réponses

Réponse 1

$NJ = NQ$ donc N appartient à la médiatrice de $[JQ]$ et c_2 aussi, donc (Nc_2) est bissectrice intérieure de $\widehat{JNQ}$. Et (Nc_1) est la bissectrice extérieure du même angle, parce que $NP = NP'$, donc (Nc_1) est la médiatrice de $[PP']$. Or les deux bissectrices d'un angle sont perpendiculaires.

Réponse 2

(PP') est perpendiculaire à (Nc_1) et (QJ) est perpendiculaire à (Nc_2). Étant respectivement perpendiculaires à des droites perpendiculaires, les droites (PP') et (QJ) sont également perpendiculaires.

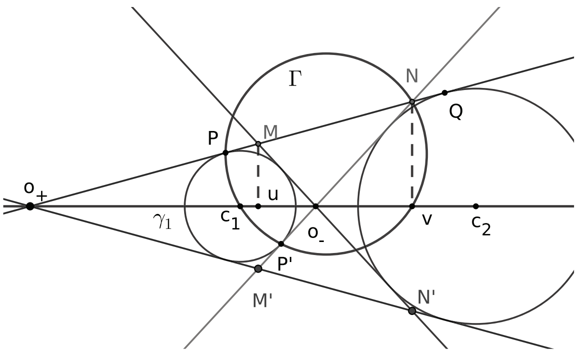
Réponse 3

(PP') et (QJ) se coupent en un point X tel que $\widehat{PXQ} = \pi/2 = \widehat{P'XJ}$ donc ce point X appartient au cercle de diamètre $[PQ]$ et au cercle de diamètre $[P'J]$.

Par construction, puisque ces diamètres joignent des points de contact de tangentes (on pourra démontrer ce lemme [1]), ces deux cercles sont orthogonaux à γ_1 et à γ_2. Ils sont donc centrés sur l'axe radical et leurs points communs sont les points de Poncelet. Donc X est un point de Poncelet. Nous posons $X = u$.

Réponse 4

Il y a un cercle P, c_1, N, dont $[c_1N]$ est un diamètre, puisque $\widehat{c_1PN}$ est droit (PN) étant une tangente. P' appartient à ce cercle parce que, pour la même raison, $\widehat{c_1P'N}$ est également droit. Notons Γ le cercle de diamètre $[c_1N]$ qui passe par P et par P'. Il faut établir que v appartient à Γ.



$\overline{uP} \cdot \overline{uP'}$ est la puissance de u par rapport à Γ, mais aussi par rapport à γ_1.

1. un *lemme* est, dans une démonstration, un résultat préparatoire, ou auxilliaire.

Or, nous savons (voir page 74) que la puissance de u par rapport à γ_1 peut s'écrire $\overline{uc_1} \cdot \overline{uv}$. Par transitivité, $\overline{uc_1} \cdot \overline{uv}$ est donc la puissance de u par rapport à Γ et ceci prouve que $v \in \Gamma$. Donc v appartient au cercle dont $[c_1N]$ est un diamètre. Dans ce cas, $\widehat{c_1vN} = \pi/2$, ce qui prouve le résultat demandé. Une démonstration identique, au nom des points près, prouve que la droite (Mu) est également orthogonale à la droite des centres.

Autre démonstration

On peut également démontrer le théorème en utilisant un résultat qui concerne les polaires d'un point : toutes les polaires d'un point par rapport aux cercles d'un faisceau sont concourantes (voir page 74). On démontre que les polaires de N par rapport à γ_1, c'est-à-dire (PP') et γ_2, (QJ) passent par X qui s'avère être u. La polaire de N par rapport à v, cercle-point, doit nécessairement passer aussi par u, c'est donc la droite des centres. Or, la polaire de N par rapport au cercle-point v est une droite perpendiculaire à (Nv) en v, et ceci prouve que (Nv) est perpendiculaire à la droite des centres.

Une conséquence de ce résultat est que $MuvN$ est un trapèze et que, h étant le milieu de $[uv]$, le milieu de $[PQ]$ est aussi le milieu de $[MN]$ et donc $MP = ML = NJ = NQ$.

Chapitre 7

Études

7.1 Écart inversif

Deux cercles sécants $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}'_2$ ont deux cercles bissecteurs. Les quatre cercles passent par chacun des points communs et les tangentes des cercles bissecteurs, en ces points, sont les bissectrices, intérieure et extérieure, de l'angle des tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ (voir Exercices 2, Question 11).

On peut se demander s'il existe quelque chose de comparable à cette propriété pour le cas des cercles non sécants, c'est-à-dire le partage en deux moitiés, par le cercle bissecteur, d'une certaine valeur numérique venant se substituer à la mesure de l'angle.

Définition et notation

L'**écart inversif** de deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}'_2$ non sécants est la valeur absolue du logarithme népérien du quotient des rayons des images de ces deux cercles par une inversion qui les transforme en cercles concentriques. OUF !
On note $\delta(\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2)$ l'écart inversif des deux cercles.

L'écart inversif est donc une quantité positive. Cela consiste en fait à dire que l'on prend toujours le quotient du plus grand des rayons des cercles images, concentriques, par le plus petit.

Question 1

Pour que cette définition ait un sens, il faut qu'étant donnés les deux cercles non sécants, leur écart inversif soit toujours défini, sans ambiguïté. De quoi faut-il s'assurer pour que ce soit le cas ?

Réponse 1

La définition parle d'une inversion, sans préciser ni son pôle, ni sa puissance. Nous devons trouver quels sont les pôles envisageables, et prouver que la valeur de l'écart inversif ne dépend ni des pôles possibles, ni des puissances d'inversion.

Les points limites conviennent

On note $\mathscr{P}$ le pinceau à points limites engendré par les deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, avec u et v ses points limites. Nous savons déjà qu'une inversion de pôle u, ou v, convient (voir Exercices 2, question 8).

Question 2

Soit w le pôle d'une inversion qui transforme $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en deux cercles concentriques. Prouvez que $w = u$ ou $w = v$.

Réponse 2

Soit o le centre commun des deux cercles images. Toute droite passant par o est orthogonale à $\mathscr{C}'_1$ et $\mathscr{C}'_2$. Comme une inversion est sa propre inverse, les transformées de ces droites par l'inversion de pôle w sont des cercles passant tous par w, orthogonaux à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, donc centrés sur leur axe radical, et faisant partie du pinceau à points de base u et v. Mais ces deux points sont les seuls points communs de ces cercles. Ceci prouve que $w = u$ ou bien $w = v$.

Reste à prouver...

Reste à prouver qu'on obtient le même écart inversif par une inversion de centre u ou de centre v. Pour cela nous allons détailler les calculs.

Calcul des rayons des cercles images

Question 3

Soit, dans un pinceau à points limites de paramètre p, un cercle $\mathscr{C}_1$ de centre o et de rayon R. L'origine étant prise en h, pied de l'axe radical, l'abscisse du point limite u est $-\sqrt{p}$, celle de v est $\sqrt{p}$, celle de o est notée x. Calculez R', rayon du cercle image $\mathscr{C}'_1$, dans une inversion de centre u, puis de centre v.

Réponse 3

On se base sur la formule (voir page 118)

$$R' = \frac{|k|R}{|uo^2 - R^2|} = \frac{|k|R}{|(x \pm \sqrt{p})^2 - R^2|}$$

signe plus ou signe moins dans la parenthèse au dénominateur selon qu'il s'agit d'une inversion de pôle u ou de pôle v.

D'autre part, dans un pinceau il y a un lien entre l'abscisse du centre et le rayon (voir page 76). On a : $x^2 = R^2 + p$, soit $x = \pm\sqrt{p + R^2}$.

La quantité $(x \pm \sqrt{p})^2$ s'écrit donc : $(\pm\sqrt{p + R^2} \pm \sqrt{p})^2$. Cela fait quatre cas, à première vue, mais seulement deux du fait que la quantité est élevée au carré.

Ces deux cas correspondent à celui où o et le pôle sont dans le même demi-plan limité par l'axe radical, et le cas où ils sont dans des demi-plans différents.

Dans le premier cas : $R' = |\dfrac{kR}{2(p + \sqrt{p^2 + pR^2})}|$ et dans le second : $R' = |\dfrac{kR}{2(p - \sqrt{p^2 + pR^2})}|$.

Question 4

Étant donnés deux cercles non sécants, de rayons R et r, dans un pinceau de paramètre p, calculez leur écart inversif δ.

Réponse 4

Nous ferons le quotient de R' et r'. Là encore on a plusieurs cas. Les deux cercles peuvent être dans le même demi-plan (donc l'un intérieur à l'autre), celui de leur pôle. Dans le même demi-plan opposé à celui de leur pôle, ou bien dans des demi-plans différents, de deux manières. On constate immédiatement que k se simplifie dans le quotient, donc la puissance de l'inversion n'intervient pas dans le calcul de l'écart inversif. Soit les quatre formules :

$$\lambda_1 = \frac{R'}{r'} = |\frac{R(p + \sqrt{p^2 + pr^2})}{r(p + \sqrt{p^2 + pR^2})}|, \lambda_2 = \frac{R'}{r'} = |\frac{R(p - \sqrt{p^2 + pr^2})}{r(p - \sqrt{p^2 + pR^2})}|$$

avec un cercle intérieur à l'autre, un pôle puis l'autre, et :

$$\lambda_3 = \frac{R'}{r'} = |\frac{R(p+\sqrt{p^2+pr^2})}{r(p-\sqrt{p^2+pR^2})}|, \lambda_4 = \frac{R'}{r'} = |\frac{R(p-\sqrt{p^2+pr^2})}{r(p+\sqrt{p^2+pR^2})}|$$

pour deux cercles extérieurs, un pôle puis l'autre.

Un calcul élémentaire permet de vérifier que $\lambda_1.\lambda_2 = 1 = \lambda_3.\lambda_4$. Quand on passe d'un pôle à l'autre, les valeurs des quotients des rayons s'inversent, donc leurs logarithmes sont opposés, et comme l'écart inversif est la valeur absolue du logarithme, on a bien prouvé que l'écart inversif ne dépend pas du choix de l'un des points limites comme pôle de l'inversion.

En conclusion, l'écart inversif de deux cercles de rayons R et r dans un pinceau de paramètre $p > 0$ est $\delta = \ln \lambda_1 = \ln \lambda_2$ si l'un des cercles est intérieur à l'autre, $\delta = \ln \lambda_3 = \ln \lambda_4$ si ces cercles sont extérieurs.

Définition et limites

Comme il y a des radicaux dans les expressions des λ_i, on doit se soucier des domaines de définition. Les expressions $\sqrt{p^2+pR^2}$ et $\sqrt{p^2+pr^2}$ sont toujours définies puisque nous sommes dans un pinceau à points limites, si bien que $p > 0$. Il n'est pas non plus possible qu'un dénominateur ou un numérateur s'annule car $\sqrt{p^2+pR^2} > p$.

Pour évaluer les limites en o^+, on divise numérateurs et dénominateurs par $\sqrt{p}$.

Les expressions des λ_i sont alors $|\dfrac{R(\sqrt{p} \pm \sqrt{p+r^2})}{r(\sqrt{p} \pm \sqrt{p+R^2})}|$ et elles tendent vers 1 quand p tend vers o^+.

Pour évaluer les limites en $+\infty$, on divise les numérateurs et dénominateurs par p, ce qui donne $|\dfrac{R(1 \pm \sqrt{1+r^2/p})}{r(1 \pm \sqrt{1+R^2/p})}|$ et on utilise l'approximation $\sqrt{1+u} \sim 1 + u/2$, au voisinage de zéro.

On trouve $\lim_{p\to\infty} \lambda_1 = R/r$, $\lim_{p\to\infty} \lambda_2 = r/R$, $\lim_{p\to\infty} \lambda_3 = \infty$ et $\lim_{p\to\infty} \lambda_4 = 0$.

Il serait intéressant pour des lycéens de déterminer par une étude du signe de la dérivée si ces quatre fonctions de p sont monotones ou non.

Lien entre distance des centres et paramètre

Nous avons effectué les calculs en fonction des rayons des cercles et du paramètre du pinceau. Quand on se donne deux cercles, c'est ordinairement avec leurs rayons et la distance de leurs centres. Ces informations ne sont pas tout à fait équivalentes. Si les deux cercles sont définis par le trio (R, r, d), on a (voir page 47)

$$p = \frac{(d+R-r)(d+R+r)(d-R-r)(d-R+r)}{4d^2}.$$

Si p est fixé, ainsi que R et r, la détermination convenable de d consiste à résoudre une équation de degré 4 bicarrée, ce qui est le plus souvent... réalisable.

En outre, si $d > R+r$, les cercles sont non sécants extérieurs. Si celui de rayon R contient l'autre, on a $d < R-r$. Dans les autres cas, les cercles sont sécants.

Question 5

Calculez l'écart inversif dans les deux cas suivants : $R = 4$, $r = 2$, $d = 1$, puis $R = 4$, $r = 2$, $d = 7$.

Réponse 5

Dans le premier cas, $d < R - r$, donc il s'agit de deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre. Nous calculerons donc λ_1 ou λ_2. On trouve $p = 105/4$, puis pour l'écart inversif : $\delta = |\ln(\lambda_1)| = |\ln(\lambda_2)| \simeq 0{,}603$.

Dans le deuxième cas, $d > R + r$, les cercles sont non sécants extérieurs, nous calculons donc λ_3 ou λ_4. On trouve $p = 585/196$. L'écart inversif vaut cette fois $\delta = |\ln(\lambda_3)| = |\ln(\lambda_4)| \simeq 1{,}20$.

Ce sont des calculs très compliqués pour lesquels on peut utiliser un petit programme, Python, Maple ou autre. Nous verrons un peu plus loin un moyen beaucoup plus simple de calculer δ !

Où est situé le centre des cercles concentriques ?

Nous avons vu (page 159) qu'une inversion de pôle u, l'un des points limites d'un pinceau à points limites, transforme tout les cercles de ce pinceau en un pinceau de cercles concentriques. Mais où est situé le centre de ce pinceau (voir page 164) ?

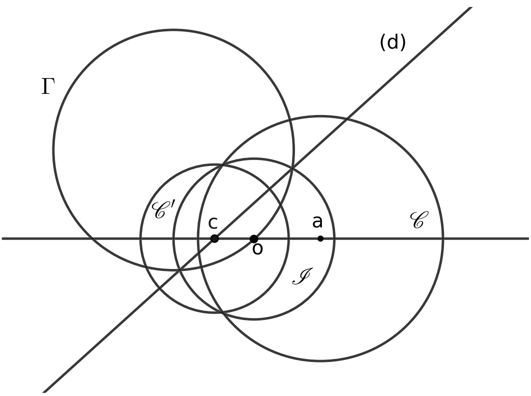
Question 6

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre a, qu'une inversion de pôle o transforme en un cercle $\mathscr{C}'$, de centre b. Soit un cercle Γ orthogonal à $\mathscr{C}$ et passant par o, que la même inversion transforme en une droite (d). Montrez que la droite (d) rencontre la droite (oa) au point b.

Réponse 6

Comme Γ est orthogonal à $\mathscr{C}$, son image (d) doit être orthogonale à $\mathscr{C}'$, donc passer par son centre. Et d'autre part, le centre de $\mathscr{C}'$ appartient nécessairement à la droite joignant le pôle au centre de $\mathscr{C}$ (en dépit du fait que b n'est pas l'image de a...). D'où le résultat.

Le cercle $\mathscr{I}$ est le cercle de l'inversion.

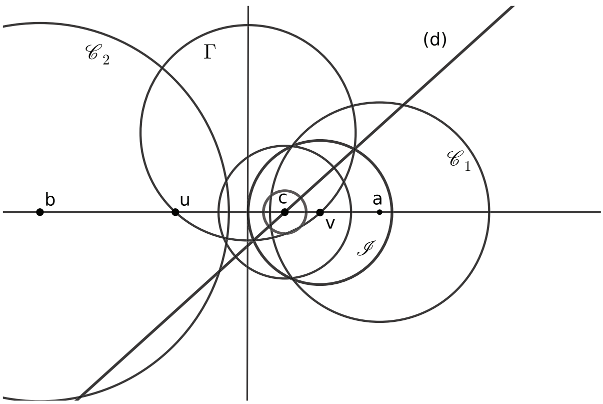


Question 7

Soient maintenant deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, non sécants, leur axe radical, un cercle Γ centré sur l'axe radical, et donc orthogonal à tous les cercles du pinceau, $\mathscr{I}$ une inversion de pôle v, l'un des points limites. Cette inversion transforme tous les cercles du pinceau à points limites en un pinceau de cercles tous centrés au point c. Mais quel est ce point c ?

Réponse 7

La question 6 et sa réponse montre que c est simplement l'image de l'autre point limite, u, par $\mathscr{I}$. En effet, tous les cercles centrés sur l'axe radical et orthogonaux à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ (donc à tous les cercles du pinceau) passent tous par u et par v. Les images de tous ces cercles, dans l'inversion de pôle v, sont des droites qui coupent la droite (va) au seul point commun à tous ces cercles en dehors de v, et c'est u.



La position de c ne dépend donc que de la puissance choisie pour cette inversion. Ici, le cercle de l'inversion a été pris tangent à l'axe radical. Cela n'a pas d'importance particulière, j'ai simplement apprécié cette position. Quelle est donc la puissance de cette inversion ? C'est le carré du rayon de ce cercle, et ce rayon c'est l'abscisse de v c'est-à-dire $\sqrt{p}$. C'est donc p. Dès lors $\overline{vc}.\overline{vu} = \overline{vc}.(-2\sqrt{p}) = p$ d'où $\overline{vc} = -\sqrt{p}/2$, donc c est au milieu du segment $[hv]$, h étant le pied de l'axe radical.

7.1.1 Propriétés de l'écart inversif

Additivité

Dans un pinceau à points limites, on dit qu'un cercle $\mathscr{B}$ est situé *entre* un cercle $\mathscr{A}$ et un cercle $\mathscr{C}$ si tout segment $[JK]$ avec

$J \in \mathscr{A}$ et $K \in \mathscr{C}$ contient un point de $\mathscr{B}$.

Question 8

Soient trois cercles d'un même pinceau à points limites, donc non sécants deux à deux, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, le second étant situé « entre » les deux autres.

Montrez que $\delta(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2) + \delta(\mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3) = \delta(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_3)$

Réponse 8

La réponse à la question 9 page 142 (« Image d'un segment ») montre que l'image d'un cercle situé entre deux cercles, est elle-même située entre les images de ces deux cercles. Les rayons des cercles concentriques images de ces trois cercles vérifient donc $R'_1 < R'_2 < R'_3$, ou bien $R'_3 < R'_2 < R'_1$.

On a toujours : $\dfrac{R'_1}{R'_2} \times \dfrac{R'_2}{R'_3} = \dfrac{R'_1}{R'_3}$. En prenant la valeur absolue du logarithme des deux membres de cette égalité, on a le résultat demandé.

Bissection

On sait que deux cercles non sécants $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont un unique cercle bissecteur $\mathscr{B}$ (page 173).

Nous allons démontrer que $\delta(\mathscr{C}_1, \mathscr{B}) = \delta(\mathscr{B}, \mathscr{C}_2)$. Ainsi, dans le cas de deux cercles sécants, les deux cercles bissecteurs partagent en deux moitiés un certain angle. Dans le cas des cercles non sécants, l'unique cercle bissecteur partage en deux moitiés l'écart inversif.

Question 9

En partant du cas des cercles concentriques, montrer que dans tous les cas, le cercle bissecteur de deux cercles non sécants partage l'écart inversif.

Réponse 9

L'écart inversif de deux cercles concentriques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, de rayons R_1 et R_2 , avec $R_1 > R_2$, vaut $\delta(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2) = \ln \dfrac{R_1}{R_2}$.

Par ailleurs, le cercle bissecteur de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ est le cercle $\mathscr{C}_b$ de même centre et de rayon $R_b = \sqrt{R_1.R_2}$ (voir page 174). Par suite,

$$\delta(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_b) = \delta(\mathscr{C}_b, \mathscr{C}_2) = \ln \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}} = (1/2)\delta(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2).$$

Venons-en au cas général de deux cercles non sécants. Leur écart inversif est celui de leurs images concentriques. Ce qu'il faut donc prouver c'est que dans cette inversion, l'image de leur cercle bissecteur est le cercle bissecteur de leurs images. Mais nous savons (voir page 163) que ceci est vrai dans toute inversion, CQFD.

Birapport, écart inversif et l'étrange cosinus

Lorsque deux cercles de rayons R,r et dont la distance des centres vaut d, se coupent, on a vu que l'on a

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$$

où α est l'angle de leurs tangentes aux points communs, quantité qui peut être négative quand $\alpha > \pi/2$.

Nous verrons que cette quantité : $\gamma = \dfrac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$, quand les cercles ne se coupent pas, est reliée à la valeur de l'écart inversif.

Question 10

Soient deux cercles concentriques de rayons R' et r', avec $R' > r'$. Soit $\delta = \ln(R'/r')$ leur écart inversif. Les points A,B,C,D sont les intersections d'une droite passant par le centre avec ces cercles, dans cet ordre.

Exprimez le birapport $[B,C,A,D]$ en fonction de δ.

Réponse 10

$$[B,C,A,D] = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = \frac{R' - r'}{R' + r'} : \frac{r' + R'}{R' - r'} = \frac{(R' - r')^2}{(R' + r')^2}.$$

En divisant numérateur et dénominateur par r'^2 et en observant que $\dfrac{R'}{r'} = e^\delta$, on trouve :

$$[B,C,A,D] = (\frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1})^2 = \frac{e^{2\delta} + 1 - 2e^\delta}{e^{2\delta} + 1 + 2e^\delta} = \frac{e^\delta + e^{-\delta} - 2}{e^\delta + e^{-\delta} + 2}.$$

Posons : $\cosh(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})}{2}$ [1]. Alors, $[B,C,A,D] = \dfrac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta + 1}$.

On suppose que ces cercles concentriques sont les images par inversion de deux cercles non sécants de rayons R et r, dont la distance des centres vaut d.

1. C'est la fonction « cosinus hyperbolique », paire, prenant toutes les valeurs supérieures ou égales à 1.

La ligne des centres coupe comme précédemment ces cercles en quatre points qui sont les images A',B',C',D'.

Le birapport est conservé par l'inversion et donc

$$[B',C',A',D'] = \frac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta + 1}$$

.

Question 11

Exprimez cette valeur en fonction de $\gamma = \dfrac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr}$.

Réponse 11

Si un cercle est intérieur à l'autre, $d < R - r$ et le calcul donne : $[B',C',A',D'] = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} : \dfrac{\overline{D'B'}}{\overline{D'C'}}$, soit

$$= \frac{R + d - r}{R + r + d} : \frac{R - d + r}{R - r - d} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{(R' + r')^2 - d^2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta + 1}$$

donc $\gamma = \cosh\delta$.

Si les cercles sont extérieurs, $d > R + r$ et $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} : \dfrac{\overline{D'B'}}{\overline{D'C'}} =$

$$= \frac{d - r - R}{d + r - R} \times \frac{d + R + r}{d + R - r} = \frac{d^2 - (R+r)^2}{d^2 - (R-r)^2} = \frac{-\gamma - 1}{-\gamma + 1} = \frac{\cosh\delta - 1}{\cosh\delta + 1}$$

donc $\gamma = -\cosh\delta$.

Dans tous les cas :

$$\cosh\delta = |\frac{R^2 + r^2 - d^2}{2rR}|.$$

Voilà le moyen simple et rapide de calculer l'écart inversif (la fonction $\cosh(x)$ et sa fonction inverse sont disponibles sur tous les logiciels de calcul).

La lectrice, et le lecteur, vérifieront que cette formule donne les mêmes valeurs de δ que celles calculées assez péniblement plus haut ($R = 4, r = 2, d = 7$ et $d = 1$).

Scholie

Le grand mathématicien suisse Leonhard Euler s'émerveillait de la formule qu'il avait découverte :

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

au point d'y voir la preuve de l'existence d'un Dieu mathématicien [2]. On peut, sans nécessairement aller si loin sur le plan philosophique, apprécier la beauté de la relation qui termine cette promenade géométrique. En effet, la même quantité, qui dit tout de deux cercles (R,r,d) exprime, dans le cas de cercles sécants le cosinus d'un angle mais aussi, dans le cas de deux cercles non sécants quelque chose de bien plus mystérieux : le cosinus « hyperbolique » de cette étrange distance (?) que constitue l'écart inversif.

L'élève de terminale curieux sait que pour passer du cosinus ordinaire au cosinus hyperbolique il faut passer la frontière... des nombres imaginaires puisque $\cos(x) = \cosh(ix)$.

Question 12

Soient deux cercles de rayon 1 dont la distance des centres vaut $2(\sqrt{3} + 1)$. Soit un troisième cercle de même rayon 1, cen-

2. Selon la légende, il aurait donné cet argument contre le sceptique Diderot, lors d'une controverse devant l'impératrice Catherine de Russie.

tré au milieu des deux centres précédents. Comparez les écarts inversifs et déduisez-en que la propriété énoncée dans la question 9 ci-dessus n'a pas de réciproque.

Réponse 12

Pour l'écart inversif des deux premiers cercles on trouve

$$\cosh\delta = |\frac{R^2+r^2-d^2}{2rR}| = |\frac{2-4(4+2\sqrt{3})}{2}| = 7+4\sqrt{3}.$$

L'écart inversif du troisième cercle avec l'un des deux premiers (la formule montre que ce sera le même pour chacun) est

$$\cosh\delta' = |\frac{2-4-2\sqrt{3}}{2}| = 1+\sqrt{3}.$$

L'énoncé suggère que $\delta = 2\delta'$.

Pour savoir si c'est vrai, il nous faut la formule donnant $\cosh 2x$. On la trouve sur internet, c'est $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$ (exactement comme $\cos 2x$).

Est-il exact que $2(1+\sqrt{3})^2 - 1 = 7+4\sqrt{3}$?

Oui. Or ce troisième cercle n'est pas le bissecteur des deux premiers. D'ailleurs, quel est le cercle bissecteur de deux cercles de même rayon ?

Ceci montre que le cercle bissecteur partage en deux parties égales l'écart inversif, mais que si un cercle partage en deux parties égales l'écart inversif de deux cercles, ce n'est pas nécessairement leur cercle bissecteur.

Nous constatons aussi que si l'additivité est toujours vérifiée dans le cas de deux cercles du même pinceau, elle peut être vérifiée dans d'autres cas.

Prolongements

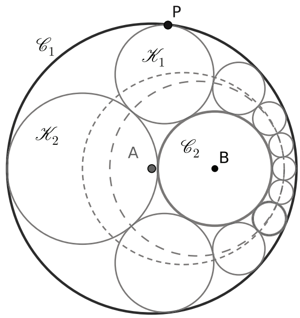
L'exemple de la question 12 est dans le Coxeter (page 153). Mais vous pouvez chercher d'autres exemples.

Il y a d'autres aspects de l'écart inversif sur lesquels je ne me suis pas penché. Par exemple, l'écart inversif est-il une distance ? En particulier est-il toujours vrai, étant donnés trois cercles $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, qu'on ait :

$$\delta(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_3) \leq \delta(\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2) + \delta(\mathscr{C}_2,\mathscr{C}_3) \quad ?$$

7.2 Porisme de Steiner

Un « porisme » est une vérité qui se déduit d'autres vérités. En ce sens, le mot s'oppose à « truisme ». La vérité d'un truisme découle directement de son énoncé alors que celle d'un porisme exige l'établissement de vérités intermédiaires. Voici la question traitée par le grand géomètre suisse Jakob Steiner.

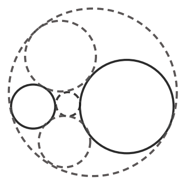


Soient deux cercles $\mathscr{C}_1$, de centre A et de rayon R, et $\mathscr{C}_2$, de centre B et de rayon r sans points communs. Soit un point P de

$\mathscr{C}_1$. On construit un cercle $\mathscr{K}_1$ tangent en P à $\mathscr{C}_1$ et tangent également à $\mathscr{C}_2$. Ensuite on construit un cercle $\mathscr{K}_2$ tangent à $\mathscr{C}_2$, à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{K}_1$. En itérant la construction on construit une « chaîne » de cercles tangents extérieurement au plus petit, intérieurement au plus grand, chacun étant encore tangent à ses deux voisins. Cette chaîne se ferme si le « dernier » cercle est tangent au premier. Sur cette figure, la chaîne se ferme : le dernier cercle est tangent au premier. Intuitivement, c'est le cas le moins fréquent.

On représente souvent les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ tels que l'un des deux est intérieur à l'autre.

Mais avec les mêmes contraintes de contact, on peut concevoir une « chaîne » reliant deux cercles extérieurs, pourvu qu'ils ne s'intersectent pas.



Peut-on déterminer, selon les valeurs de $R, r, d = AB$, s'il est possible qu'une chaîne se ferme, ou bien si c'est impossible, et le point de départ, celui qui sert à construire le premier cercle de la chaîne, a-t-il une importance ? Tel est **le porisme de Steiner**.

Le géomètre a montré que la réponse à la première question est positive, et celle à la seconde, négative : **le choix du point de départ est indifférent**.

Notez que ce genre de questions peut avoir des applications en mécanique, par exemple pour la détermination de « roulements à billes »[3].

3. J'ignore s'il existe des roulements à billes entre deux cercles non concen-

Steiner fut un des premiers géomètres à utiliser l'inversion. Pour résoudre le porisme, il a utilisé le fait qu'on peut toujours transformer deux cercles non sécants en deux cercles concentriques (Exercices.2, question 8, page 159)

Question 1

Dans le cas où $\mathscr{C}_1$ contient $\mathscr{C}_2$, montrez que la somme des distances entre un centre des cercles de la chaîne, et les centres des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ est constante. Sur quelle courbe sont situés les centres des cercles de la chaîne ?

Réponse 1

En notant Q le centre d'un cercle de la chaîne, la droite (AQ) coupe $\mathscr{C}_1$ en un point W où ce cercle est tangent à $\mathscr{C}_1$ car le point de contact entre deux cercles tangents est sur leur droite des centres. Pour la même raison, la droite (BQ) coupe $\mathscr{C}_2$ au point où le même cercle est tangent à $\mathscr{C}_2$. Notons ρ le rayon du cercle de centre Q. On a $AQ = R - \rho$ et $BQ = r + \rho$ donc $AQ + BQ = R + r$, cette valeur est la même pour tous les cercles de la chaîne. Les centres des cercles sont donc les points d'une ellipse de foyers A et B [4]. Comme les foyers sont proches, l'ellipse est presque un cercle.

---

triques, et si, dans ce cas, les ingénieurs utilisent le résultat dont nous traitons !

4. C'est la définition d'une ellipse : ensemble des points du plan dont la somme des distances à deux points fixes est constante. Remplacez « deux » par « un », vous avez la définition d'un cercle

Question 2

Sur quelle courbe sont situés les points de contacts entre eux des cercles de la chaîne ?

Réponse 2

On a vu (Exercice.2 Question 15, page 161) que de tels points sont situés sur le cercle bissecteur de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. C'est donc un cercle.

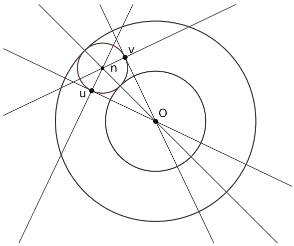
Question 3

Dans le cas de cercles concentriques, quelle condition doivent vérifier les rayons pour qu'une chaîne se ferme ?

Réponse 3

Dans ce cas, tous les cercles de la chaîne sont égaux, de rayons $\rho = \frac{(R-r)}{2}$. En notant n le centre de l'un d'eux, et u, v les points de contact des tangentes menées à partir de O, centre des deux cercles initiaux, il est clair, si $\alpha = \widehat{nOu}$, qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une chaîne se ferme est **que** π/α **soit un entier**, soit $\alpha = \pi/n$.

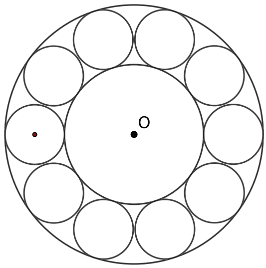
Par exemple si $\alpha = \pi/10 = 18°$, on aura une chaîne avec dix cercles en couronne. Il est clair que le point de départ de la chaîne (le premier cercle de la couronne) n'importe pas.



Un peu de trigonométrie nous donne $(r + \rho)\sin(\pi/n) = \rho$, avec $\rho = \frac{(R-r)}{2}$ c'est-à-dire

$$\sin(\pi/n) = \frac{R-r}{R+r}.$$

Pour chaque valeur de $\sin\alpha$ il y a une infinité de couples R,r satisfaisants. Par exemple, pour avoir dix cercles en chaîne, on peut prendre $R = 13$ et $r = 7$ (voyez pourquoi).



Chaque cercle de la chaîne se déduit du précédent par une rotation de centre O d'angle $36°$.

C'est un calcul approché car $\sin(18) \simeq 0{,}3090$. On aurait une meilleure précision avec $R = 13$ et $r = 6{,}862$.

Question 4

Quelle condition doit vérifier l'écart inversif de deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre, pour qu'une chaîne se ferme ?

Réponse 4

On doit avoir, pour un entier n : $\sin(\pi/n) = \frac{R-r}{R+r} = \frac{(R/r)-1}{(R/r)+1}$.

Comme, en notant δ l'écart inversif des deux cercles, $\delta = \ln(R'/r')$ (où R' et r' sont les rayons des cercles concentriques images des cercles originels, en posant $R' > r'$), il vient $e^\delta = R'/r'$ et

$$\sin(\pi/n) = \frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1}$$

ou encore, en résolvant par rapport à e^δ,

$$e^\delta = \frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}$$

soit

$$\delta = \ln(\frac{1 + \sin(\pi/n)}{1 - \sin(\pi/n)}).$$

Question 5

Combien doit valoir l'écart inversif de deux cercles de rayons $R = 10$ et $r = 4$, le second inclus dans le premier, pour qu'on puisse y insérer une chaîne de dix cercles ? Donnez une valeur approchée de d qui convienne.

Réponse 5

Pour $n = 10$ on trouve $\delta \simeq 0{,}639$, et en utilisant la formule en cosinus hyperbolique, $d \simeq 4{,}37$.

Le point de départ de la chaîne ne joue aucun rôle. Ceci résulte du fait que nous avons transformé, par une application bijective[5], la situation des deux cercles concentriques, dans laquelle ce point de départ est clairement indifférent.

Prolongements

Dans le cas où l'écart inversif permet la réalisation d'une chaîne de Steiner, il serait intéressant de détailler la réalisation de la figure, et même le calcul de la suite des rayons des cercles qui constituent cette chaîne.

5. C'est à dire à la fois injective et surjective, cas de l'inversion.

Annexe A

L'invariant analagmatique

Le but de cette section est de montrer qu'étant donné deux cercles de rayons R et r, la distance de leurs centres étant notée Δ, la quantité

$$\frac{R^2 + r^2 - \Delta^2}{2Rr}$$

est inchangée pour toute inversion.

Une démonstration simple et rapide est donnée (Exercices.2, Question 20) dans le cas où les cercles sont sécants, car cette quantité est le cosinus de l'angle des tangentes à ces deux cercles aux points d'intersection, et l'inversion conserve les angles. Elle ne conserve pas l'orientation, mais la fonction cosinus est paire.

A.0.1 Par le calcul

Ici nous cherchons une démonstration par le calcul, pour le cas où les cercles ne se coupent pas.

Il s'agit donc de vérifier que R', r' et Δ' étant les mêmes paramètres pour les images de ces deux cercles par une inversion quelconque,

$$\frac{R^2 + r^2 - \Delta^2}{2Rr} = \frac{R'^2 + r'^2 - \Delta'^2}{2R'r'} \quad (1).$$

Nous pouvons nous limiter à une inversion de rapport $k = 1$ parce que la valeur de k est indifférente. Il faut se souvenir que modifier k revient à faire une homothétie, donc R', r', Δ' changeront proportionnellement et comme l'expression est homogène (le coefficient sera au carré au numérateur et au dénominateur) le quotient ne sera pas modifié.

Par inversion « quelconque » nous entendons éviter les cas particuliers, comme lorsque son pôle O est situé sur l'un des deux cercles, par exemple. Nous supposerons même que O est situé à l'extérieur des deux cercles (de manière à avoir affaire à des longueurs, plutôt qu'à des mesures algébriques). L'examen des autres cas est laissé aux lecteurs.

Nous avons des formules pratiques pour R' et r'. La difficulté viendra de Δ' car il faut se souvenir que le centre de l'image d'un cercle n'est pas l'image du centre de ce cercle...

Le centre de l'image

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre u et de rayon R, soit un point O et l'inversion de centre O et de rapport 1. Soit ω le centre de l'image $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ dans cette inversion. Calculez $O\omega$.

Réponse

On note α le premier point d'intersection de (Ou) avec $\mathscr{C}$ et β le second, puis $a = O\alpha$ et $b = O\beta$. On a $b > a$.

$$Ou = \frac{a+b}{2}.$$

Soient β' et α' leurs images respectives, $a' = O\alpha'$ et $b' = O\beta'$. ω est le milieu de α' et β' donc $a' = 1/a$ et $b' = 1/b$ et

$$O\omega = \frac{a+b}{2ab} = \frac{Ou}{ab}.$$

Distance des centres des images

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre u et de rayon R, et un cercle $\mathscr{D}$ de centre v et de rayon r, non sécants. Soit $\Delta = uv$.

Soit un point O et l'inversion de centre O (extérieur aux deux cercles) et de rapport 1. On demande de calculer la distance des centres des images $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{D}'$.

Réponse

On utilise le théorème de Al Kashi pour écrire

$$\Delta^2 = Ou^2 + Ov^2 - 2Ou \cdot Ov \cdot \cos(\widehat{uOv}).$$

On exprime Ou et Ov comme dans la question précédente.

En notant γ et δ les extrémités du diamètre créé par la droite (Ov) sur le second cercle image, puis $c = O\gamma$ et $d = O\delta$. On a $d > c$.

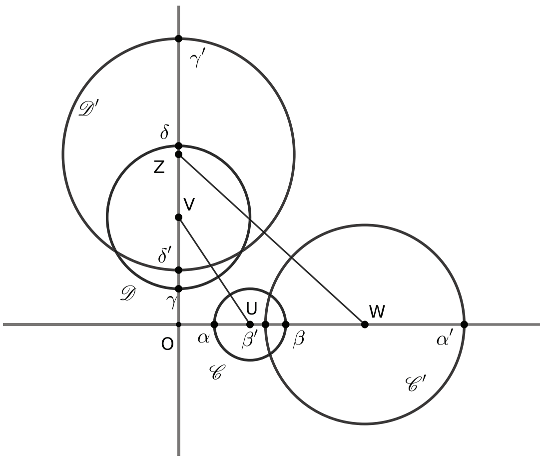
$$4\Delta^2 = (a+b)^2 + (c+d)^2 - 2(a+b)(c+d) \cdot \cos(\widehat{uOv}).$$

De même, en notant w le centre de l'image de $\mathscr{C}$ et z le centre de l'image de $\mathscr{D}$, on aura :

$$\Delta'^2 = (zw)^2 = Oz^2 + Ow^2 - 2Oz \cdot Ow \cdot \cos(\widehat{uOv})$$

car l'angle est le même (le centre d'un cercle et celui de son image sont alignés avec le pôle). Soit avec les notations allégées :

$$4\Delta'^2 = (\frac{a+b}{ab})^2 + (\frac{c+d}{cd})^2 - 2(\frac{a+b}{ab}) \cdot (\frac{c+d}{cd}) \cdot \cos(\widehat{uOv}).$$



Remarque : pour la figure j'ai pris un angle $\widehat{uOv}$ égal à $\pi/2$ mais dans les calculs l'angle est quelconque. Les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ne sont pas sécants.

Les rayons des images

Nous pouvons également exprimer les rayons et leurs images à l'aide des lettres a,b,c,d.

En effet, $R = (b-a)/2, r = (d-c)/2$. Nous savons que, en notant R' et r' les rayons des images, on a

$$R' = \frac{R}{|Ou^2 - R^2|}; r' = \frac{r}{|Ov^2 - r^2|}.$$

Mais $(Ou^2 - R^2) = (1/4)[(a+b)^2 - (b-a)^2] = ab$, donc $R' = \dfrac{b-a}{2ab}$ et de même, $r' = \dfrac{d-c}{2cd}$.

Le premier membre de l'égalité (1) (page 226) va s'écrire, avec nos quatre lettres (et en pré-multipliant haut et bas par 4) :

$$\frac{(b-a)^2 + (d-c)^2 - [(a+b)^2 + (c+d)^2 - 2(a+b)(c+d)\cdot\cos(\widehat{uOv})}{2(b-a)(d-c)},$$

soit après simplifications

$$I = \frac{-2(ab+dc) + (a+b)(c+d)\cdot\cos(\widehat{uOv})}{(b-a)(d-c)}.$$

Pour le second membre, écrivons le numérateur N :

$$\frac{1}{4}[\frac{(b-a)^2}{a^2b^2} + \frac{(d-c)^2}{c^2d^2} - \frac{(b+a)^2}{a^2b^2} + \frac{(d+c)^2}{c^2d^2} + 2\frac{(a+b)}{ab}\frac{(c+d)}{cd}\cdot\cos(\widehat{uOv})],$$

soit

$$N = \frac{1}{4}[\frac{-4}{ab} + \frac{-4}{cd} + 2\frac{(a+b)}{ab}\frac{(c+d)}{cd}\cdot\cos(\widehat{uOv})]$$

ou encore

$$N = \frac{1}{2abcd}[-2(ab+cd) + (a+b)(c+d)\cdot\cos(\widehat{uOv})].$$

Passons au dénominateur D :

$$D = 2R'r' = \frac{(b-a)(d-c)}{2abcd}$$

par conséquent, en multipliant N et D par $2abcd$, on obtient

$$I' = \frac{-2(ab+cd) + (a+b)(c+d)\cdot\cos(\widehat{uOv})}{(b-a)(d-c)}$$

donc $I = I'$, ce qui démontre l'invariance de cette quantité.

A.0.2 Géométriquement

Question 1

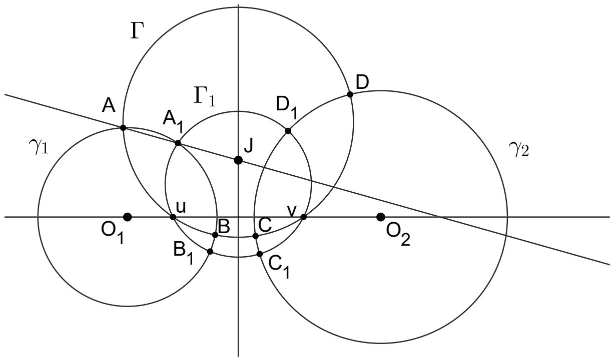
Soient deux cercles γ_1, γ_2, un cercle Γ orthogonal aux deux, qui les rencontre en quatre points A, B, C, D et un cercle, Γ_1, également orthogonal à γ_1 et γ_2, qui les rencontre en A_1, B_1, C_1, D_1. Montrez :

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C_1A_1}{C_1B_1} : \frac{D_1A_1}{D_1B_1}.$$

Réponse 1

En utilisant la question 6 de Exercices 1 (voir page 129), il suffit de prouver qu'il existe une inversion dans laquelle les images respectives de A, B, C, D sont A_1, B_1, C_1, D_1.

On sait que les cercles orthogonaux à deux cercles sont centrés sur l'axe radical de ces deux cercles. S'il existe une inversion qui transforme A, B, C, D en A_1, B_1, C_1, D_1, elle transforme Γ en Γ_1, donc son pôle est aussi sur l'axe radical (pourquoi ?). Soit J le point commun de la droite (AA_1) et de l'axe radical.



Considérons l'inversion de pôle J qui transforme A en A_1. Contenant un point et son image, le cercle γ_1 est invariant pour cette inversion. Le cercle γ_2 aussi, car J étant sur l'axe radical, a la même puissance pour tous les cercles du pinceau et ici, cette puissance est celle de l'inversion de centre J.

L'inversion considérée transforme Γ en un cercle centré sur l'axe radical, passant par A_1 et orthogonal à γ_1 en A_1. Ceci détermine son centre et il s'agit donc de Γ_1. L'image du point B, qui appartient à Γ et à γ_1 appartient à Γ_1 et à γ_1, c'est donc B_1. Même raisonnement pour les images des points C et D.

Question 2

Observez que si on note A,B,C,D les points d'intersection de la droite des centres avec les cercles γ_1 et γ_2, on a :

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1R_2}{d^2 - R_1^2 - R_2^2 - 2R_1R_2}.$$

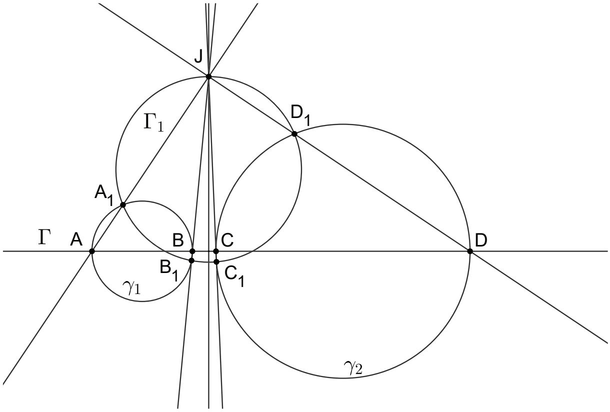
Déduisez-en que l'expression en d,R_1, R_2 fournie par la fraction est un invariant métrique des deux cercles γ_1 et γ_2, c'est-à-dire que si on transforme par une inversion ces deux cercles, la même expression, cette fois en d', R_2', R_2', aura la même valeur.

Réponse 2

En effet : $\overline{AD} = R_1 + d + R_2, \overline{AC} = R_1 + d - R_2, \overline{BC} = -R_1 + d - R_2, \overline{BD} = -R_1 + d + R_2$, donc

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{R_1 + d - R_2}{-R_1 + d - R_2} : \frac{R_1 + d + R_2}{-R_1 + d + R_2} = \frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1R_2}{d^2 - R_1^2 - R_2^2 - 2R_1R_2}.$$

Prenons maintenant comme cas particulier de la question 1, la droite des centres $(O_1O_2) = \Gamma$, puisque cette droite est orthogonale à γ_1 et à γ_2. Rappelons que la droite des centres du pinceau engendré par γ_1 et γ_2 est l'axe radical du pinceau à points de base qui lui est orthogonal. Et l'axe radical fait partie du pinceau. La démonstration de la question 1 fonctionne de la même manière en prenant $(O_1O_2) = \Gamma$, avec le fait supplémentaire que le pôle J est un point de Γ_1 puisque l'inversion de pôle J échange cette fois un cercle et une droite.



Transformons toute cette figure par une inversion quelconque, notée $\mathscr{I}$.

Les images de γ_1, γ_2 par $\mathscr{I}$ seront (en général, on laisse aux lecteurs l'examen des cas particuliers) deux cercles γ'_1, γ'_2. Soit Δ leur droite des centres, qui n'est pas l'image par $\mathscr{I}$ de (O_1O_2) (pourquoi ?). Notons $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ les points d'intersection de Δ avec γ'_1 et γ'_2 (ces quatre points ne sont pas les images par $\mathscr{I}$ de A,B,C,D (pourquoi ?)).

Nous voulons montrer que

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{\lambda\alpha}{\lambda\beta} : \frac{\mu\alpha}{\mu\beta}$$

ce qui prouvera que :

$$\frac{d^2 - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1.R_2}{d^2 - R_1^2 - R_2^2 - 2R_1.R_2} = \frac{d'^2 - R_1'^2 - R_2'^2 + 2R'_1.R'_2}{d'^2 - R_1'^2 - R_2'^2 - 2R'_1.R'_2}$$

(en notant avec des « prime » les éléments, rayon et distance des centres, des images γ'_1 et γ'_2) et donc établira l'invariance de cette expression par inversion.

L'image par $\mathscr{I}$ de Γ_1 est Γ'_1, l'orthogonalité est conservée et l'image de J, J', appartient à l'axe radical de γ'_1 et γ'_2, et à Γ'_1. Les images par $\mathscr{I}$ des points A_1, B_1, C_1, D_1 sont les points d'intersection de Γ'_1 avec γ'_1 et γ'_2, A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 et l'inversion de pôle J' qui échange A'_1 et α échange également et respectivement B'_1 et β, C'_1 et λ, D'_1 et μ.

Ainsi, l'inversion de pôle J échange respectivement (A,B,C,D) et (A_1, B_1, C_1, D_1), puis l'inversion $\mathscr{I}$ échange (A_1, B_1, C_1, D_1) et (A'_1, B'_1, C'_1, D'_1), et l'inversion de pôle J' échange (A'_1, B'_1, C'_1, D'_1) et $\alpha, \beta, \lambda, \mu$. Comme les inversions conservent le birapport, la propriété est démontrée.

Question 3

On note $a = \dfrac{d^2 - R_1^2 - R_2^2 + 2R_1R_2}{d^2 - R_1^2 - R_2^2 - 2R_1R_2}$ et $b = \dfrac{R_1^2 + R_2^2 - d^2}{2R_1R_2}$.

Dites par quelle transformation algébrique simple on peut aller de a à b et déduisez-en que b est également un invariant métrique de deux cercles dans une inversion.

Réponse 3

$$\frac{a-1}{2} = \frac{-2R_1R_2}{d^2 - R_1^2 - R_2^2 - 2R_1R_2}$$

$$\frac{2}{a-1} = -b - 1,$$

donc

$$\frac{1+a}{1-a} = b.$$

Cette formule prouve que, a restant inchangé dans une inversion, b également.

Annexe B

Le cercle de similitude

Soient deux cercles γ_1 et γ_2 non sécants et les inversions de pôle o_+ et de pôle o_- qui les échangent. Ces cercles engendrent un pinceau $\mathscr{P}$ à points limites, qui lui-même, suscite, pourrait-on dire, le pinceau orthogonal $\mathscr{P}^\perp$.

On appelle « cercle de similitude » le cercle de diamètre $[o_+o_-]$. Ce terme provient du dix-neuvième siècle, quand on appelait similitudes les homothéties.

Nous nous intéressons ici au résultat suivant : l'inversion de pôle o_+ échange o_- et h, pied de l'axe radical, et l'inversion de pôle o_- échange h et o_+. Ce résultat est démontré dans les exercices dans le cas de deux cercles sécants.

Nous le démontrons ici dans le cas des cercles non sécants, d'abord par le calcul, ensuite géométriquement.

B.0.1 Par le calcul

Question 1

Soient deux cercles, définis par leurs centres c_2 et c_1, leurs rayons R et r, $R > r$, et $d = c_2c_1$. Les deux centres d'homothétie, et d'inversion, sont o_+ et o_-. Calculez la distance o_+o_-.

Réponse 1

On a :

$$\overline{o_+c_2} = (R/r)\overline{o_+c_1} = \overline{o_+c_1} + \overline{c_1c_2}$$

donc $\overline{o_+c_1} = rd/(R-r)$.

Puis,

$$\overline{o_-c_2} = (-R/r)\overline{o_-c_1} = \overline{o_-c_1} + \overline{c_1c_2}$$

donc $\overline{o_-c_1} = -rd/(R+r)$, sachant que $\overline{c_1c_2} = d$.

Finalement,

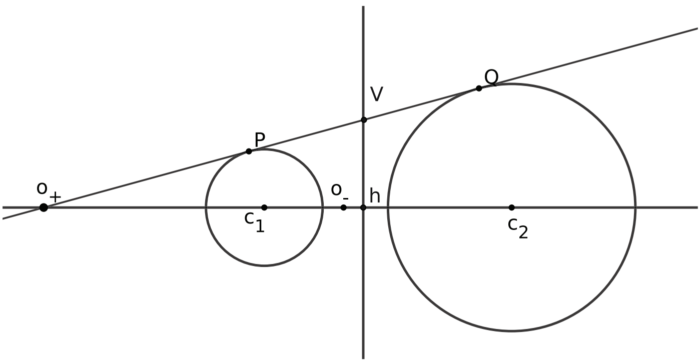
$$\overline{o_+o_-} = \overline{o_+c_2} + \overline{c_2o_-} = \frac{2rRd}{R^2 - r^2}.$$

Question 2

h étant le pied de l'axe radical, calculez $\overline{o_+h}$.

Réponse 2

Une manière simple, parmi d'autres, pour obtenir l'axe radical de deux cercles non sécants (c'est immédiat s'ils sont sécants !), consiste à projeter sur la ligne des centres le milieu du point de contact d'une tangente avec les deux cercles (pourquoi ?).



On mène par o_+ une tangente aux deux cercles, on note P et Q les points de contact et V leur milieu. Alors, par Pythagore, dans les triangles rectangles o_+c_1P et o_+c_2Q, avec : $o_+c_2 = \frac{Rd}{R-r}$; $\quad o_+c_1 = \frac{rd}{R-r}$, en posant : $u^2 = \frac{d^2}{(R-r)^2} - 1$, on a :

$$o_+P = ru \quad ; \quad o_+Q = Ru \quad ; \quad o_+V = u(r+R)/2.$$

De plus les triangles o_+c_1P et o_+Vh sont semblables, si bien que $(o_+c_1).(o_+h) = (o_+P).(o_+V)$, ce qui donne finalement :

$$o_+h = \frac{u^2(R^2 - r^2)}{2d}.$$

Question 3

Déduire de ce qui précède que l'inversion de pôle o_+ échange les points o_- et h.

Réponse 3

La puissance de l'inversion de pôle o_+ vaut

$$k = o_+P \cdot o_+Q = u^2 Rr = o_+h \cdot o_+o_-$$

donc l'inverse de h est o_- pour l'inversion de centre o_+.

Pour démontrer que l'inverse de h est o_+ pour l'inversion de centre o_-, on calcule de la même manière en traçant une tangente interne (qui passe entre les deux cercles).

Question 4

Est-il possible que $o_- = h$?

Réponse 4

Dans ce cas, o_- aura la même puissance par rapport aux deux cercles, c'est-à-dire $o_-c_2^2 - r^2 = o_-c_1^2 - R^2$. Par ailleurs, $o_-c_2^2 = (r/R)o_-c_1$, ce qui donne

$$R^2 - r^2 = o_-c_1^2(1 - \frac{r^2}{R^2}) = o_-c_1^2(\frac{R^2 - r^2}{R^2}).$$

Ceci est possible si $R = r$. Dans ce cas, les deux cercles sont symétriques par rapport à o_- et $o_- = h$.

Si $R \neq r$ on peut simplifier par $(R^2 - r^2)$ et on a : $o_-c_1 = R$ puis $o_-c_2 = r$, c'est-à-dire que les deux cercles sont tangents en o_-.

Dans ce qui suit on suppose $o_- \neq h$.

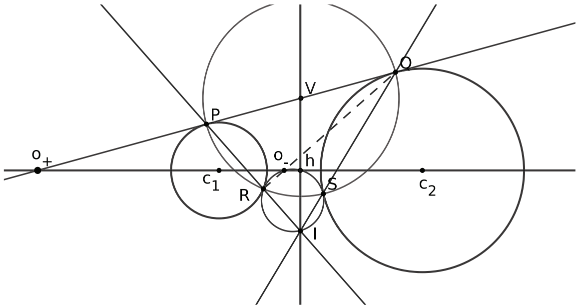
B.0.2 Géométriquement

Question 5

Soient P et Q les points de contact avec les deux cercles d'une tangente commune menée depuis o_+. Soit V le milieu de $[PQ]$. Depuis V on mène la seconde tangente à $\mathscr{C}_1$, en R, et la seconde tangente à $\mathscr{C}_2$, en S. Montrez que P et S, ainsi que Q et R, sont inverses dans l'inversion de pôle o_-.

Réponse 5

Le cercle Γ de centre V qui passe par P,R,S,Q est orthogonal à $\mathscr{C}_1$ par construction, et de ce fait aussi à $\mathscr{C}_2$ puisque centré sur l'axe radical. Il est invariant dans les deux inversions qui échangent ces deux cercles. En effet, il l'est dans l'inversion de pôle o_+ puisqu'il contient P et son image Q.



Il l'est aussi dans l'inversion de pôle o_- car son image doit être orthogonale à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$, donc centrée sur Δ mais aussi centrée sur la droite (o_-V) ce qui impose le centre V (parce que

$o_- \neq h$). Et il n'existe qu'un seul cercle de centre V orthogonal à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

L'image de P est donc S, puisqu'elle doit appartenir à Γ et à $\mathscr{C}_2$ et de même l'image de Q est R.

Le même argument, mot pour mot, démontre la même propriété pour les points de contact J et K d'une tangente aux deux cercles menée à partir de o_-.

Question 6

Montrez que (PR) et (QS) se coupent sur l'axe radical.

Réponse 6

Soit I leur point commun. (IP) et (IQ) sont deux sécantes au cercle de centre V, donc $\overline{IR} \cdot \overline{IP} = \overline{IS} \cdot \overline{IQ}$ donc la puissance de I par rapport aux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ est la même, et I est un point de l'axe radical.

Le même argument montre, dans le second cas de la question 4, que (LJ) et KM se coupent sur l'axe radical.

Question 7

Montrez que h est l'image de o_+ par l'inversion de pôle o_-. Quelle est alors l'inverse du cercle de diamètre $[o_+o_-]$?

Réponse 7

L'image de la droite (PQ) par l'inversion de pôle o_- est un cercle passant par o_-, par S et par R. Ce cercle passe également par I. En effet, l'angle $\widehat{PRQ}$ est droit (il intercepte le diamètre $[PQ]$), et R,o_-,Q sont alignés (question 5), donc l'angle $\widehat{o_-RI}$

l'est aussi, et $[o_-I]$ est ainsi un diamètre. Or l'angle $\widehat{Iho_-}$ est droit, donc h appartient à ce cercle. Il est l'image d'un point de (PQ) qui est aligné avec o_-, c'est donc l'image de o_+.

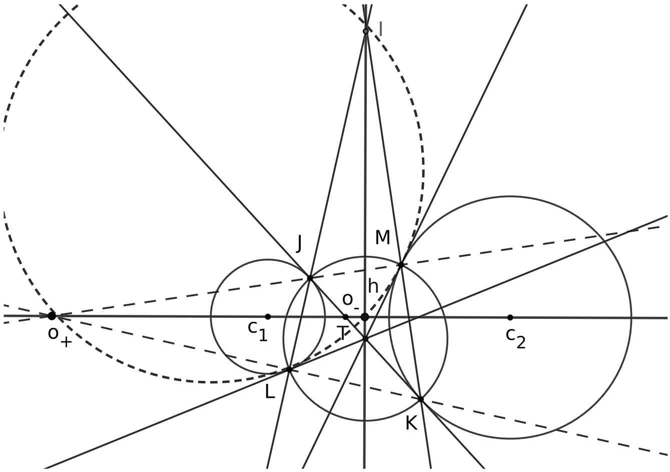
L'image du cercle de diamètre $[o_+o_-]$ dans l'inversion de pôle o_- sera une droite perpendiculaire à (o_+o_-) passant par l'image de o_+, qui est h, c'est donc l'axe radical.

Question 8

Montrez que h est l'image de o_- par l'inversion de pôle o_+.

Réponse 8

On se doute bien que cela doit être « pareil ». C'est donc un bon exercice que de le démontrer.



Nous transformons la tangente (JK) par l'inversion de pôle o_+. Son image est un cercle passant par o_+,M et L. Comme $[JK]$ est un diamètre du cercle de centre T, l'angle $\widehat{KLJ}$ est droit et donc, si I est le point d'intersection de (LJ) et (KM), situé sur l'axe radical, l'angle $\widehat{o_+LI}$ est également droit. Ainsi, $[o_+I]$ est un diamètre et comme l'angle $\widehat{o_+hI}$ est droit, h appartient à ce cercle. Il est alors l'image de o_-, CQFD.

Prolongements

Pour résoudre des questions de ce type il peut être bon de disposer d'une formule explicite donnant les puissances des inversions de pôle o_+ et o_-.

Question 9

Calculez la puissance de o_+ par rapport à γ_1, puis par rapport à γ_2, et celle de o_- par rapport à ces deux cercles.

Déduisez-en la puissance des inversions de centre o_+ et o_- échangeant ces deux cercles.

Réponse 9

Notons $p_1(\gamma_1)$ la puissance de o_+ par rapport à γ_1 et de la même façon les autres puissances.

On a $p_1(\gamma_1) = O_1A^2 - R^2 = \dfrac{R^2(d^2 - (R-r)^2)}{(R-r)^2}$

$$p_1(\gamma_2) = O_1B^2 - r^2 = \frac{r^2(d^2 - (R-r)^2)}{(R-r)^2}$$

$$p_2(\gamma_1) = O_2A^2 - R^2 = \frac{R^2(d^2 - (R+r)^2)}{(R+r)^2}$$

$$p_2(\gamma_2) = O_2B^2 - R^2 = \frac{r^2(d^2 - (R+r)^2)}{(R+r)^2}$$

La puissance k_1 de l'inversion de pôle o_+ échangeant ces deux cercles est $(r/R)p_1 = (R/r)p_2 = \dfrac{rR(d^2 - (R-r)^2)}{(R-r)^2}$.

La puissance k_2 de l'inversion de pôle o_- échangeant ces deux cercles est $(-r/R)p_1 = (-R/r)p_2 = \dfrac{-rR(d^2 - (R+r)^2)}{(R+r)^2}$.

Ce qui suit montre que la relation démontrée entre les puissances des deux inversions échangeant deux cercles conserve son sens dans un contexte général.

Question 10

Démontrez que les points X, Y, Z étant alignés dans cet ordre, si l'inversion de pôle X de puissance s échange Y et Z et que l'inversion de pôle Y de puissance t échange X et Z, alors $s+t = XY^2$.

Réciproquement, si $s + t = XY^2$ et si l'inversion de pôle X de puissance s échange Y et Z, alors l'inversion de pôle Y de puissance t échange X et Z.

Réponse 10

L'hypothèse signifie : $\overline{XY} \cdot \overline{XZ} = s$ et $\overline{YX} \cdot \overline{YZ} = t$. Donc $\overline{XY} \cdot (\overline{XY} + \overline{YZ}) = s$ soit $XY^2 + \overline{XY} \cdot \overline{YZ} = s$, c'est-à-dire $XY^2 - t = s$. La réciproque suit le même chemin.

On vérifie en effet que la somme $k_1 + k_2$ des puissances des inversions qui échangent $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ vaut $O_1O_2^2$.

Annexe C

RÉSU

Notations

Étant donnés deux points A et B on distingue la droite (AB), le segment $[AB]$, la longueur AB toujours positive ou nulle, la mesure algébrique $\overline{AB}$ qui peut être positive, négative ou nulle, et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est un objet mathématique particulier (d'ailleurs « non local »).

1 Triangles égaux et triangles semblables

Deux triangles sont dits « égaux » s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux (premier cas), ou un côté égal compris entre deux angles respectivement égaux (deuxième cas) ou encore, trois côtés respectivement égaux (troisième cas).

Deux figures sont dites « semblables » si elles ont la même forme, et pas nécessairement la même taille. Deux triangles sont semblables si leurs côtés sont respectivement proportionnels, ou bien s'ils ont les mêmes angles. Par exemple, un triangle dont les longueurs des côtés sont $4, 5, 6$ et un triangle dont les longueurs des côtés sont $20, 25, 30$ sont semblables. Si deux triangles ont, chacun, un angle de 100 degrés et un autre de 40 degrés, ils sont semblables (car la somme des trois angles fait toujours 180 degrés). On prouve que les triangles concernés ont les mêmes angles et on exploite le fait que leurs côtés sont proportionnels, ou le contraire. Pour écrire les quotients il faut repérer les côtés *homologues* : ce sont ceux qui sont opposés aux angles respectivement égaux.

2 Les « pieds des bissectrices »

Soit un triangle ABC dont la bissectrice intérieure issue de A coupe $[BC]$ en D. Alors $DB/DC = AB/AC$. Pour le prouver, on écrit le quotient des aires de ADB et de ADC de deux façons différentes. Dans un cas, en utilisant leur hauteur commune issue de A, dans l'autre, leurs hauteurs égales (pourquoi ?) issues de D.

Si E est le point où la bissectrice extérieure issue de A rencontre $[BC]$, on a, par la même méthode, la même relation. Si, au lieu de distances, on écrit les mesures algébriques sur (BC), on a : $\overline{EB}/\overline{EC} = -\overline{DB}/\overline{DC} = AB/AC$, et donc une division harmonique.

3 Les théorèmes de Ceva et de Ménélaüs

Étant donnés trois points P,Q,R chacun sur un côté (au sens de droite) d'un triangle, voici deux situations intéressantes. Ils peuvent être **alignés**, ou bien les droites $(AP), (BQ), (CR)$ qu'on appelle des *céviennes*, peuvent être **concourantes**. On forme le produit des trois quotients (regardez bien, c'est facile à retenir).

$$(\overline{PA}/\overline{PB}) \cdot (\overline{QB}/\overline{QC}) \cdot (\overline{RC}/\overline{RA}) = \pm 1.$$

Ce produit vaut 1, si, et seulement si les points sont alignés. Il vaut -1, si, et seulement si, les céviennes sont concourantes.

Ces théorèmes se démontrent, avec un peu de travail, en utilisant des projections et le théorème de Thalès.

4 Homothéties

On définit une homothétie avec un point P et un nombre $k \neq 0$. Alors, à tout point M cette homothétie fait correspondre M' par : $\overrightarrow{PM'} = k\overrightarrow{PM}$. L'homothétie de centre P et de rapport $1/k$ est sa réciproque. Cette transformation a toutes sortes de propriétés agréables, en particulier elle transforme chaque droite (d) en une droite (d') parallèle à (d) et les cercles en cercles.

Dans un triangle ABC l'homothétie de centre G (« centre de gravité », point de rencontre des médianes) et de rapport $k = -1/2$ envoie chaque sommet au milieu du côté opposé et donc le cercle ABC devient le cercle $A'B'C'$ que l'on appelle le cercle d'Euler.

En menant par chaque sommet de ABC une parallèle au côté opposé, on obtient un triangle DEF (appelé « anti-médial ») dont les médiatrices sont les hauteurs de ABC. Ces deux triangles ont le même centre de gravité G. En effectuant la même homothétie on envoie le centre du cercle DEF, qui est donc H, l'orthocentre de ABC dans le centre du cercle ABC, noté O. Donc $\overrightarrow{GO} = -(1/2)\overrightarrow{GH}$, si bien qu'en particulier les points O,G,H sont alignés. On appelle cette droite la droite d'Euler.

5 Angles inscrits dans un cercle

5.1 Les angles

Les angles sont un sujet un peu délicat. Nous considérons souvent, dans ce livre, des égalités d'angles sans nous soucier d'orientation. Mais au fond, un angle « ça tourne » et il y a deux façons de tourner, par exemple en parcourant un cercle. Les mathématiciens ont décidé qu'il y a un sens **positif** et un sens **négatif**. Le négatif, c'est le sens dans lequel tournent les aiguilles d'une montre, ou d'une horloge, quand le temps passe. Mais de plus en plus, l'affichage de l'heure est digital, sans aiguilles ! Heureusement on a aussi une autre définition. Si le nord est dans votre dos, le sud devant vous, l'est à votre gauche, le soleil *semble* monter, tourner, de gauche à droite, parce que la Terre tourne de droite à gauche : **la Terre tourne dans le sens positif** (mais seulement si le nord est dans votre dos).

Il est naturel (et dans certains cas, indispensable) de considérer des angles orientés. C'est d'ailleurs ce que fait, par défaut, Geogebra. Si, pour noter ou mesurer un angle d'un triangle, vous « tournez » sans vous soucier du sens, le logiciel peut vous surprendre...

Dans les considérations qui suivent, on peut négliger l'orientation des angles, mais pour les réciproques, elle est nécessaire.

5.2 Dans un cercle

Étant donnés deux points A et B d'un cercle, le segment $[AB]$ est appelé une *corde*. Une corde détermine deux arcs, dont l'un est plus grand que l'autre... sauf s'ils sont égaux et que cette corde est un diamètre. Si M est un autre point de ce cercle, on dit que l'angle $\widehat{BMA}$ *intercepte* la corde $[AB]$. Si O est le centre du cercle, l'angle $\widehat{BOA}$ est *l'angle au centre* qui intercepte la corde $[AB]$.

*Premier résultat : si M appartient au grand arc, $\widehat{BOA} = 2\widehat{BMA}$, et si N appartient au petit arc, $\widehat{BMA} + \widehat{BNA} = \pi$.

Il s'ensuit que M_1 et M_2 étant deux points d'un même cercle sommets de deux angles interceptant la même corde, ils sont égaux ou supplémentaires.

*Second résultat : l'angle que fait la tangente en A, ou en B, avec la corde $[AB]$ vaut, lui aussi, la moitié de l'angle au centre.

Ces résultats se démontrent en utilisant le fait que la somme des angles d'un triangle vaut π et que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux.

Une conséquence : les angles opposés d'un quadrilatère convexe inscriptible sont supplémentaires.

Ces théorèmes ont des réciproques qui doivent être formulées en orientant les angles (considérez le cas de deux cercles égaux ayant les points A et B en commun).

5.3 Arc capable

Étant donnés un segment $[AB]$ et un angle $0 < \alpha \leq \pi/2$, quels sont les points M du plan tels que $\widehat{AMB} = \alpha$?

C'est un arc de cercle. Pour le construire, on commence par trouver un point O tel que le triangle AOM soit isocèle de sommet O et que $\widehat{AOB} = 2\alpha$. Le grand arc du cercle de centre O passant par A ou par B est la solution. Justifiez cette construction et adaptez-la si $\alpha > \pi/2$.

6 Construire la moyenne géométrique

Soit un triangle ABC, rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A. On note $u = BH$, $v = HC$, $h = AH$.

Les triangles HBA et HCA sont rectangles et semblables, donc $u/h = h/v$ soit $h^2 = uv$, autrement dit, h est la moyenne géométrique des u et v.

Mais ces deux triangles sont également semblables à ABC donc, en notant $BC = a = u+v$, $b = AC$, $c = AB$ on a $v/b = b/a$ et $u/c = c/a$ d'où l'on tire $va = b^2$, $ua = c^2$, $b^2 + c^2 = a(u+v) = a^2$ c'est-à-dire le théorème de Pythagore.

7 Les moyennes

Étant donnés deux réels positifs $0 < a \leq b$ on a plusieurs sortes de moyennes.

La moyenne *harmonique* $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ c'est-à-dire $h = \frac{2ab}{a+b}$,

la moyenne *géométrique* $g = \sqrt{ab}$ et

la moyenne *arithmétique* $m = \frac{a+b}{2}$.

On démontre (avec des identités remarquables) que

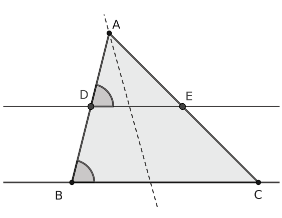
$$a \leq h \leq g \leq m \leq b$$

les égalités n'ont lieu que si $a = b$.

Il existe d'autres sortes de moyennes.

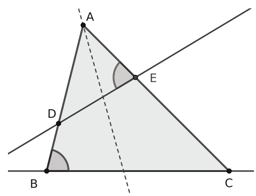
8 Antiparallèles

Soit un triangle ABC et une parallèle (DE) à (BC).



On a $\widehat{EDA} = \widehat{B}$.

Faisons une symétrie de la droite (DE) par rapport à la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$.



Cette fois $\widehat{B} = \widehat{DEA}$. On dit que le couple des droites (AB),(AC) est antiparallèle au couple (DE),(BC). Démontrez que ces deux couples de droites ont des bissectrices respectivement parallèles. C'est la définition.

On ne dira pas que la droite (DE) est « antiparallèle » à la droite (BC)... cela ne veut rien dire (expliquez pourquoi).

9 Cercle des neuf points

Dans un triangle ABC les milieux des côtés A', B', C' sont sur le même cercle que les pieds des hauteurs h_A, h_B, h_C et ce cercle passe aussi par les milieux des segments $[AH]$,$[BH]$,$[CH]$, où H est l'orthocentre, point de concours des hauteurs. Ces cocyclicités se démontrent en exploitant le fait que l'hypoténuse (le côté le plus long) d'un triangle rectangle est un diamètre de son cercle circonscrit. On appelle souvent ce cercle « cercle d'Euler » en dépit du fait qu'il n'est pas prouvé que Euler s'en soit occupé ! On voit qu'il y a une autre homothétie, de centre H et de rapport $1/2$ envoyant le cercle ABC sur le cercle d'Euler. Le lecteur observera que le centre ω du cercle d'Euler est lui-même un centre d'homothétie éventuellement intéressant.

10 Notions de vecteurs et produit scalaire

10.1 Vecteurs

Les vecteurs sont des objets dont on sait faire la somme et que l'on sait multiplier par un nombre.

1) Dans un plan, $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

2) Pour tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ et tout point P, il existe un unique point Q tel que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$

3) On a toujours

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

(relation de Chasles)

4) Les points A, B, C sont alignés si, et seulement s'il existe un nombre λ tel que que $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$.

10.2 Produit scalaire

5) Il existe un produit des vecteurs, le **produit scalaire** et le résultat n'est pas un vecteur, c'est un nombre.

Étant donnés trois points A, B,C, le produit scalaire est donné par la formule

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAB}.$$

On en déduit a) que le carré scalaire d'un vecteur est le carré de sa longueur, et b) que le produit scalaire de deux vecteurs est nul si et seulement si ces vecteurs sont perpendiculaires.

10.3 Théorème d'Al Kashi, ou « loi des cosinus »

Dans un triangle ABC, on a

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB}.$$

C'est le théorème d'Al Kashi, qui généralise celui de Pythagore.

Bibliographie

[1] Boudine Jean-Pierre *L'Appel des maths.2.Géométrie* Cassini, 2020. On trouvera dans ce livre beaucoup de géométrie élémentaire, en particulier, développées et détaillées, les questions évoquées dans le chapitre RÉSU.

[2] Rouche Eugène et Comberousse Charles *Traité de Géométrie* Gauthier-Villard, Paris, 1891. Ce très ancien ouvrage, accessible car réédité par l'université du Michigan, est très riche. On le trouve dans les bibliothèques des universités.

[3] Foulon Georges *Géométrie, classe de mathématiques* Éditions Magnard, Paris, 1941. Livre de classe datant de la seconde guerre mondiale !

[4] Lespinard V. et Pernet R. *Géométrie* André Desvigne, Paris, 1962. Livre de classe datant... de ma classe de terminale ! Je m'y suis replongé avec profit.

[5] Stanley Ogilvy C. *Excursions in geometry* Dover Publications, Inc, New York, 1969. On sait que les Américains publient d'excellents livres agréables à lire, destinés à la formation des enseignants et aux « amateurs ». Celui-ci parle de l'inversion et du porisme de Steiner.

[6] Coxeter H.S.M et Greitzer S.L. *Redécouvrons la Géométrie* Dunod, Paris, 1971. Certainement le livre le plus

adapté aux clubs de maths (à part le mien). Comme toujours, Coxeter est passionnant et original.

[7] Coxeter H.S.M. *Introduction to geometry* John Wiley and sons, Inc, 1980. Le grand classique. Il parle un peu de l'inversion.

[8] Audin Michèle *Géométrie* EDP Sciences, Paris, 2006. Ce livre excellent est destiné aux étudiants de licence et parle donc du « groupe circulaire », mais il y a une introduction élémentaire.

[9] Perrin Daniel *Géométrie anallagmatique.* www.imo.universite-paris-saclay.fr/perrin/Livregéométrie/DPPartie6.pdf

Il s'agit d'un livre « en train de se faire », destiné aux enseignants préparant l'agrégation ou le CAPES, qui comporte une introduction élémentaire dans laquelle j'ai beaucoup appris.

Index