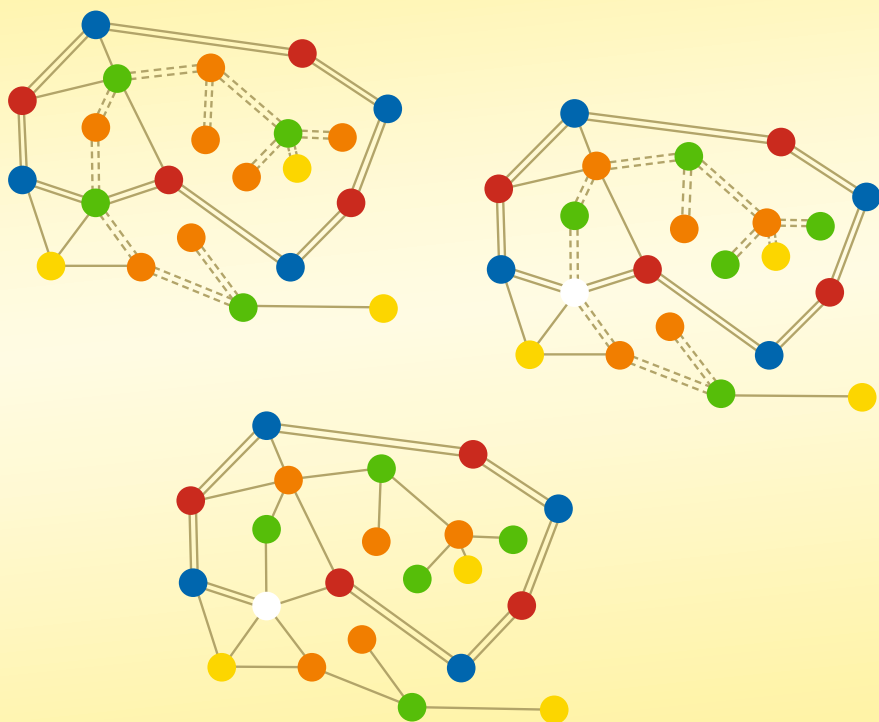


Mordechai Ben-Ari

Mathematische Überraschungen



OPEN ACCESS

 Springer

Mathematische Überraschungen

Mordechai Ben-Ari

Mathematische Überraschungen

 Springer

Mordechai Ben-Ari
Department of Science Teaching
Weizmann Institute of Science
Rehovot, Israel



ISBN 978-3-031-76040-2

ISBN 978-3-031-76041-9 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-031-76041-9>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification: 00-01, 51Nxx, 05-01, 00A07

Übersetzung der englischen Ausgabe: „Mathematical Surprises“ von Mordechai Ben-Ari, © Springer 2022. Veröffentlicht durch Springer. Alle Rechte vorbehalten.

Dieses Werk wurde gefördert durch Weizmann Institute of Science.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en) 2025. Dieses Buch ist eine Open-Access-Publikation.

Open Access Dieses Buch wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor*in(nen) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden.

Die in diesem Buch enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des/der betreffenden Rechteinhaber*in einzuholen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jede Person benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des/der jeweiligen Zeicheninhaber*in sind zu beachten.

Der Verlag, die Autor*innen und die Herausgeber*innen gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autor*innen oder die Herausgeber*innen übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Nature Switzerland AG und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Wenn Sie dieses Produkt entsorgen, geben Sie das Papier bitte zum Recycling.

Vorwort

Wenn jeder die Mathematik in ihrem natürlichen Zustand kennen lernen würde, mit all den Herausforderungen, dem Spaß und den Überraschungen, die das mit sich bringt, würden wir meiner Meinung nach eine dramatische Veränderung sowohl in der Einstellung der Schüler zur Mathematik als auch in unserer Vorstellung davon, was es bedeutet, „gut in Mathe zu sein“, erleben.

Paul Lockhart

Ich bin wirklich hungrig nach Überraschungen, denn jede macht uns ein klein wenig, aber wesentlich schlauer.

Tadashi Tokieda

Die Mathematik kann uns, wenn wir sie richtig angehen, viele angenehme Überraschungen bescheren. Dies wird durch eine Google-Suche nach „mathematischen Überraschungen“ bestätigt, die überraschenderweise fast eine halbe Milliarde Einträge liefert. Was ist eine Überraschung? Die Ursprünge des Wortes gehen auf das Altfranzösische zurück und haben ihre Wurzeln im Lateinischen: „sur“ (über) und „prendre“ (ergreifen). „Überraschen“ bedeutet wörtlich „überholen“. Als Substantiv bezeichnet Überraschung sowohl ein unerwartetes oder verwirrendes Ereignis oder einen Umstand als auch das Gefühl, das dadurch ausgelöst wird.

Betrachten wir zum Beispiel einen Auszug aus einer Vorlesung von Maxim Bruckheimer¹ über den Feuerbach-Kreis: „Zwei Punkte liegen auf einer und nur einer Geraden, das ist keine Überraschung. Drei Punkte liegen jedoch nicht notwendigerweise auf einer Geraden, und wenn bei einer geometrischen Untersuchung drei Punkte in eine Gerade ‚hineinfallen‘, ist das eine Überraschung, und häufig müssen wir diese Tatsache als ein zu beweisenden Satzes bezeichnen. Alle drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, liegen auf einem Kreis. Wenn jedoch vier Punkte auf demselben Kreis liegen, ist dies eine Überraschung, die als Satz formuliert werden sollte. . . . Insofern die Anzahl der Punkte auf einer Geraden größer als 3 ist, ist der Satz umso überraschender. Ebenso ist der Satz umso überraschender, je

¹ Maxim Bruckheimer war ein Mathematiker, der zu den Gründern der Open University UK gehörte und Dekan ihrer Fakultät für Mathematik war. Er war Leiter der Abteilung für naturwissenschaftliche Lehre am Weizmann Institute of Science.

mehr die Anzahl der Punkte, die auf einem Kreis liegen, größer als 4 ist. So ist die Aussage, dass es für jedes Dreieck neun zusammenhängende Punkte auf demselben Kreis gibt . . . sehr überraschend. Und trotz des Ausmaßes der Überraschung ist der Beweis elegant und einfach.“

In diesem Buch bietet Mordechai Ben-Ari eine reichhaltige Sammlung mathematischer Überraschungen, von denen die meisten weniger bekannt sind als der Feuerbach-Kreis und für die es gute Gründe gibt, sie aufzunehmen. Erstens sind die mathematischen Perlen dieses Buches, obwohl sie nicht in Lehrbüchern zu finden sind, bereits mit einem High-School-Hintergrund zugänglich (und mit Geduld, Papier und Bleistift, denn Spaß gibt es nicht umsonst). Zweitens: Wenn ein mathematisches Ergebnis das infrage stellt, was wir für selbstverständlich halten, sind wir tatsächlich überrascht (Kap. 1, 13). In ähnlicher Weise überraschen uns: die Cleverness eines Arguments (Kap. 2, 3), die Rechtfertigung der Möglichkeit einer geometrischen Konstruktion mit algebraischen Mitteln (Kap. 16), ein Beweis, der sich auf ein scheinbar nichtverwandtes Thema gründet (Kap. 4, 5), ein seltsamer Beweis durch Induktion (Kap. 6), neue Sichtweisen auf ein bekanntes Ergebnis (Kap. 7), ein scheinbar unbedeutender Satz, der zur Grundlage eines ganzen Bereichs der Mathematik wird (Kap. 8), unerwartete Inspirationsquellen (Kap. 9), reichhaltige Formalisierungen, die aus reinen Freizeitaktivitäten wie Origami entstehen (Kap. 10–12). Dies alles sind verschiedene Gründe für die Aufnahme der angenehmen, schönen und denkwürdigen mathematischen Überraschungen in dieses schöne Buch.

Bisher habe ich mich damit befasst, wie sich das Buch auf den ersten Teil der Definition von Überraschung, die kognitiv-rationalen Gründe für das Unerwartete, bezieht. Was den zweiten, den emotionalen Aspekt betrifft, so ist dieses Buch eine lebendige Umsetzung dessen, was viele Mathematiker als den Hauptgrund für die Beschäftigung mit der Mathematik ansehen: Sie ist faszinierend! Außerdem behaupten sie, dass die Mathematik sowohl unsere intellektuelle Neugier als auch unser ästhetisches Empfinden anregt und dass das Lösen eines Problems oder das Verstehen eines Konzepts eine geistige Belohnung darstellt, die uns dazu verleitet, weiter an weiteren Problemen und Konzepten zu arbeiten.

Es wurde gesagt, dass die Funktion eines Vorworts darin besteht, dem Leser zu sagen, warum er das Buch lesen sollte. Ich habe versucht, dies zu tun, aber ich glaube, dass die umfassendere Antwort von Ihnen, dem Leser, kommen wird, nachdem Sie es gelesen und erlebt haben, was die Etymologie des Wortes Überraschung nahelegt: von ihr überholt zu werden!

Abraham Arcavi

Einleitung

Godfried Toussaints Artikel über den „kollabierenden Zirkel“ hat einen tiefen Eindruck auf mich gemacht. Es wäre mir nie in den Sinn gekommen, dass der moderne Zirkel mit einem Reibungsgelenk nicht derjenige ist, der zu Euklids Zeiten verwendet wurde. In diesem Buch präsentiere ich eine Auswahl von mathematischen Ergebnissen, die nicht nur interessant sind, sondern mich auch überrascht haben, als ich ihnen zum ersten Mal begegnete.

Die Mathematik, die für die Lektüre des Buches erforderlich ist, ist Mathematik für die Sekundarstufe, aber das bedeutet nicht, dass das Material einfach ist. Einige der Beweise sind recht lang und erfordern die Bereitschaft des Lesers, sich mit der Materie zu beschäftigen. Die Belohnung ist das Verständnis einiger der schönsten Ergebnisse der Mathematik. Das Buch ist kein Lehrbuch, denn das breite Spektrum der behandelten Themen lässt sich nicht in einen Lehrplan einordnen. Es eignet sich zur Vertiefung für Schüler der Sekundarstufe, für Seminare auf Hochschulniveau und für Mathematiklehrer.

Die Kapitel können unabhängig voneinander gelesen werden. (Eine Ausnahme ist, dass das Kap. 10 über die Axiome des Origami eine Voraussetzung für die Kap. 11, 12, die anderen Kapitel über Origami, ist). Hinweise, die für alle Kapitel relevant sind, finden Sie unten in der Liste mit dem Titel Stil.

Was ist eine Überraschung?

Es gab drei Kriterien für die Aufnahme eines Themas in das Buch:

- Der Satz hat mich überrascht. Besonders überraschend waren die Sätze zur Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal. Die äußerst reichhaltige Mathematik des Origami war fast schockierend: Als eine Mathematiklehrerin ein Projekt über Origami vorschlug, lehnte ich zunächst ab, weil ich bezweifelte, dass mit dieser Kunstform ernsthafte Mathematik verbunden sein könnte. Andere Themen wurden aufgenommen, weil ich zwar die Ergebnisse kannte, ihre Beweise aber

durch ihre Eleganz und Zugänglichkeit überraschten, insbesondere der rein algebraische Beweis von Gauß, dass ein regelmäßiges Heptadekagon (Siebzehneck) konstruiert werden kann.

- Das Material kommt in Lehrbüchern für die Sekundarstufe und die Hochschule nicht vor, und ich habe diese Sätze und Beweise nur in Lehrbüchern für Fortgeschrittene und in der Forschungsliteratur gefunden. Zu den meisten Themen gibt es Wikipedia-Artikel, aber man muss wissen, wo man suchen muss, und die Artikel sind oft sehr knapp gehalten.
- Die Sätze und Beweise sind mit guten Kenntnissen der Sekundarschulmathematik zugänglich.

Jedes Kapitel schließt mit einem Absatz *Was ist die Überraschung?*, der meine Wahl des Themas erklärt.

Ein Überblick über den Inhalt

Kap. 1 präsentiert Euklids Beweis, dass jede Konstruktion, die mit einem festen Zirkel möglich ist, auch mit einem kollabierenden Zirkel möglich ist. Es gibt viele Beweise, aber wie Toussaint zeigt, sind die meisten falsch, weil sie von Diagrammen abhängen, die die Geometrie nicht immer korrekt darstellen. Um zu verdeutlichen, dass man Diagrammen nicht trauen darf, stelle ich den berühmten angeblichen Beweis vor, dass jedes Dreieck gleichschenkelig ist.

Im Laufe der Jahrhunderte versuchten Mathematiker erfolglos, einen beliebigen Winkel nur mithilfe eines Lineals und eines Zirkels dreizuteilen (in drei gleiche Teile zu zerlegen). Underwood Dudley hat eine umfassende Studie über die Dreiteilung durchgeführt und dabei fehlerhafte Konstruktionen gefunden; die meisten Konstruktionen sind Annäherungen, die als genau bezeichnet werden. In Kap. 2 werden zunächst zwei dieser Konstruktionen vorgestellt und die trigonometrischen Formeln hergeleitet, die zeigen, dass es sich nur um Näherungen handelt. Um zu zeigen, dass eine Dreiteilung nur mit Zirkel und Lineal keine praktische Bedeutung hat, werden Dreiteilungen mit komplexeren Hilfsmitteln vorgestellt: Archimedes' *Neusis* und Hippias' *Quadratrix*. Das Kapitel endet mit dem Beweis, dass es unmöglich ist, einen beliebigen Winkel mit einem Lineal und einem Zirkel dreizuteilen.

Die Quadratur eines Kreises (wenn ein Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt bildet) kann nicht mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden, weil der Wert von π nicht konstruiert werden kann. In Kap. 3 werden drei elegante Konstruktionen von Näherungen an π vorgestellt, eine von Kochański und zwei von Ramanujan. Das Kapitel schließt mit dem Nachweis, dass eine Quadratrix zur Quadratur eines Kreises verwendet werden kann.

Das Vier-Farben-Satz besagt, dass es möglich ist, jede ebene Karte mit vier Farben zu färben, sodass keine Länder mit einer gemeinsamen Grenze mit der gleichen Farbe gefärbt werden. Der Beweis dieses Satzes ist äußerst kompliziert, aber der Beweis des Fünf-Farben-Satzes ist einfach und elegant, wie in Kap. 4 gezeigt wird.

In diesem Kapitel wird auch Percy Heawoods Beweis vorgestellt, dass Alfred Kempes „Beweis“ des Vier-Farben-Satzes falsch ist.

Wie viele Wächter muss ein Kunstmuseum beschäftigen, damit alle Wände ständig von mindestens einem Wächter beobachtet werden? Der Beweis in Kap. 5 ist ziemlich raffiniert, denn er verwendet Graphenfärbung, um ein auf den ersten Blick rein geometrisches Problem zu lösen.

Kap. 6 stellt einige weniger bekannte Ergebnisse und ihre Beweise durch Induktion vor: Sätze über Fibonacci- und Fermat-Zahlen, McCarthys 91-Funktion und das Josephus-Problem.

Kap. 7 behandelt Po-Shen Lohs Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen. Die Methode ist ein entscheidendes Element von Gauß' algebraischem Beweis, dass ein Heptadekagon konstruiert werden kann (Kap. 16). Das Kapitel enthält al-Khwarizmis geometrische Konstruktion für die Suche nach Wurzeln (Lösungen) von quadratischen Gleichungen und eine geometrische Konstruktion, die von Cardano bei der Entwicklung der Formel für die Suche nach Wurzeln von kubischen Gleichungen verwendet wurde.

Die Ramsey-Theorie ist ein aktives Forschungsgebiet der Kombinatorik. Sie sucht nach Mustern in Teilmengen großer Mengen. In Kap. 8 werden einfache Beispiele für Schur-Tripel, pythagoreische Tripel, Ramsey-Zahlen und das Van-der-Waerden-Problem vorgestellt. Der Beweis des Satzes über pythagoreische Tripel wurde kürzlich mithilfe eines Computerprogramms auf der Grundlage der mathematischen Logik erbracht. Das Kapitel schließt mit einem Exkurs über das Wissen der alten Babylonier über die pythagoreischen Tripel.

C. Dudley Langford beobachtete seinen Sohn beim Spielen mit farbigen Blöcken und bemerkte, dass er sie in einer interessanten Reihenfolge angeordnet hatte. Kap. 9 stellt seinen Satz über die Bedingungen vor, unter denen eine solche Folge möglich ist.

Kap. 10 enthält die sieben Axiome des Origami, zusammen mit den detaillierten Berechnungen der analytischen Geometrie der Axiome und Charakterisierungen der Faltungen als geometrische Orte.

Kap. 11 stellt die Methode von Eduard Lill und die von Margarita P. Beloch vorgeschlagene Origami-Faltung vor. Ich führe die Lill-Methode als Zaubertrick ein, daher möchte ich sie hier nicht im Detail vorstellen.

Kap. 12 zeigt, dass mit Origami Konstruktionen ausgeführt werden können, die mit Zirkel und Lineal nicht möglich sind: Dreiteilung eines Winkels, Verdopplung eines Würfels und Konstruktion eines Nonagons (ein regelmäßiges Vieleck mit neun Seiten).

Kap. 13 stellt den Satz von Georg Mohr und Lorenzo Mascheroni vor, dass jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal auch mit einem Zirkel allein durchgeführt werden kann.

Die entsprechende Behauptung, dass nur ein Lineal ausreicht, ist falsch, weil ein Lineal keine Längen berechnen kann, die Quadratwurzeln sind. Jean-Victor Poncelet vermutete und Jakob Steiner bewies, dass ein Lineal ausreicht, wenn es irgendwo in der Ebene einen einzigen festen Kreis gibt (Kap. 14).

Wenn zwei Dreiecke denselben Umfang und dieselbe Fläche haben, sind sie dann zwingend kongruent? Das scheint einleuchtend zu sein, aber es stellt sich heraus, dass das nicht stimmt, auch wenn man eine ganze Menge Algebra und Geometrie braucht, um ein nichtkongruentes Paar zu finden, wie in Kap. 15 gezeigt wird.

Kap. 16 präsentiert Gauß' Meisterstück: den Beweis, dass ein Heptadekagon (ein regelmäßiges Polygon mit siebzehn Seiten) mithilfe eines Lineals und eines Zirkels konstruiert werden kann. Durch geschickte Argumentation zur Symmetrie der Wurzeln (Nullstellen) von Polynomen erhielt er eine Formel, die nur die vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln verwendet. Gauß hat keine explizite Konstruktion eines Heptadekagons angegeben, daher wird die elegante Konstruktion von James Callagy vorgestellt. Das Kapitel schließt mit Konstruktionen eines regelmäßigen Fünfecks, die auf Gauß' Methode zur Konstruktion eines Heptadekagons basieren.

Um das Buch in sich so geschlossen wie möglich zu halten, werden im Anhang Beweise für Sätze der Geometrie und Trigonometrie gesammelt, die dem Leser vielleicht nicht geläufig sind.

Stil

- Es wird vorausgesetzt, dass der Leser über gute Kenntnisse der Sekundarschulmathematik verfügt, einschließlich:
 - Algebra: Polynome und Division von Polynomen, *monische* Polynome (solche, bei denen der Koeffizient der höchsten Potenz 1 ist), quadratische Gleichungen, Multiplikation von Ausdrücken mit Exponenten $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
 - Euklidische Geometrie: kongruente Dreiecke $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ und die Kriterien für Kongruenz, ähnliche Dreiecke $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ und die Verhältnisse ihrer Seiten, Kreise und ihrer Inkreis- und Mittelpunktswinkel.
 - Analytische Geometrie: die kartesische Ebene, Berechnung von Längen und Steigungen von Strecken, die Formel für einen Kreis.
 - Trigonometrie: die Funktionen sin, cos, tan und die Umrechnungen zwischen ihnen, Winkel im Einheitskreis, die trigonometrischen Funktionen von an einer Achse gespiegelten Winkeln, z. B. $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$.
- Zu beweisende Aussagen werden als *Sätze* bezeichnet, ohne dass versucht wird, zwischen Sätzen, Lemmata und Korollaren zu unterscheiden.
- Wenn ein Satz auf eine Konstruktion folgt, beziehen sich die Variablen, die im Satz erscheinen, auf beschriftete Punkte, Geraden und Winkel in der Abbildung, die die Konstruktion begleitet.
- Die vollständigen Namen von Mathematikern wurden ohne biografische Informationen angegeben, die leicht in Wikipedia gefunden werden können.
- Das Buch ist so geschrieben, dass es so weit wie möglich in sich geschlossen ist, aber gelegentlich hängt die Darstellung von fortgeschrittenen mathematischen Konzepten und Sätzen ab, die ohne Beweise gegeben werden. In solchen Fällen

wird eine Zusammenfassung des Materials in Kästen präsentiert, die übersprungen werden können.

- Es gibt keine Übungen, aber der ambitionierte Leser wird aufgefordert, jeden Satz zu beweisen, bevor er den Beweis liest.
- Geometrische Konstruktionen können mit Software wie GeoGebra untersucht werden.
- \overline{AB} wird sowohl für den Namen einer Strecke als auch für die Länge der Strecke verwendet.
- $\triangle ABC$ wird sowohl für den Namen eines Dreiecks als auch für den Flächeninhalt des Dreiecks verwendet.

Danksagungen

Dieses Buch wäre nie ohne die Ermutigung von Abraham Arcavi geschrieben worden, der mich willkommen hieß, sein Terrain der mathematischen Bildung zu betreten. Er hat auch freundlicherweise das Vorwort geschrieben. Avital Elbaum Cohen und Ronit Ben-Bassat Levy waren immer bereit, mir beim (Wieder-)Erlernen der Mathematik der Sekundarstufe zu helfen. Oriah Ben-Lulu führte mich in die Mathematik des Origami ein und arbeitete an den Beweisen mit. Ich bin Michael Woltermann dankbar für die Erlaubnis, mehrere Abschnitte seiner Neubearbeitung von Heinrich Dörries Buch zu verwenden. Jason Cooper, Richard Kruel, Abraham Arcavi und die anonymen Gutachter gaben hilfreiche Kommentare ab.

Ich möchte dem Team bei Springer für seine Unterstützung und Professionalität danken, insbesondere dem Herausgeber Richard Kruel.

Das Buch wird im Rahmen des Open-Access-Programms veröffentlicht, und ich möchte dem Weizmann Institute of Science für die Finanzierung der Veröffentlichung danken.

Die \LaTeX -Quelldateien für das Buch (einschließlich der TikZ-Quelle für die Diagramme) sind verfügbar unter <https://github.com/motib/surprises>.

Mordechai Ben-Ari

Inhaltsverzeichnis

1	Der kollabierende Zirkel	1
1.1	Konstruktion mit Zirkel und Lineal	2
1.2	Feste Zirkel und kollabierende Zirkel	2
1.3	Euklids Konstruktion zum Kopieren einer Strecke	3
1.4	Eine fehlerhafte Konstruktion	5
1.5	Trauen Sie keinem Diagramm	7
	Was ist die Überraschung?	8
	Quellen	8
2	Dreiteilung eines Winkels	11
2.1	Näherungsweise Dreiteilungen	11
2.2	Dreiteilung mit einer Neusis	15
2.3	Verdoppelung des Würfels mit einer Neusis	17
2.4	Dreiteilung mithilfe einer Quadratrix	18
2.5	Konstruierbare Zahlen	20
2.6	Konstruierbare Zahlen als Wurzeln von Polynomen	22
2.7	Die Unmöglichkeit der klassischen Konstruktionen	25
	Was ist die Überraschung?	26
	Quellen	27
3	Die Quadratur des Kreises	29
3.1	Kochańskis Konstruktion	30
3.2	Ramanujans erste Konstruktion	31
3.3	Ramanujans zweite Konstruktion	35
3.4	Quadratur des Kreises mithilfe einer Quadratrix	37
	Was ist die Überraschung?	38
	Quellen	39
4	Der Fünf-Farben-Satz	41
4.1	Planare Karten und Graphen	41
4.2	Euler-Charakteristik	44

4.3	Nichtplanare Graphen	45
4.4	Die Gradzahlen der Eckpunkte	47
4.5	Der Sechs-Farben-Satz	48
4.6	Der Fünf-Farben-Satz	49
4.7	Kempes falscher Beweis des Vier-Farben-Satzes	51
	Was ist die Überraschung?	52
	Quellen	52
5	Wie man ein Museum bewacht	55
5.1	Triangulierte Polygone färben	56
5.2	Vom Färben von Polygonen zum Bewachen eines Museums	58
5.3	Jedes Polygon kann trianguliert werden	59
	Was ist die Überraschung?	61
	Quellen	61
6	Induktion	63
6.1	Das Prinzip der mathematischen Induktion	63
6.2	Fibonacci-Zahlen	65
6.3	Fermat-Zahlen	68
6.4	McCarthys 91-Funktion	69
6.5	Das Josephus-Problem	71
	Was ist die Überraschung?	75
	Quellen	75
7	Lösen quadratischer Gleichungen	77
7.1	Traditionelle Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen	77
7.2	Die Beziehung zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten	78
7.3	Beispiele für die Loh-Methode	80
7.4	Ableitung der traditionellen Formel	82
7.5	Al-Khwarizmis geometrische Lösung quadratischer Gleichungen	82
7.6	Cardanos Konstruktion zur Lösung kubischer Gleichungen	84
7.7	Sie ließen sich von imaginären Zahlen nicht einschüchtern	85
7.8	Die Lill-Methode und der Carlyle-Kreis	87
7.9	Numerische Berechnung der Wurzeln	89
	Was ist die Überraschung?	91
	Quellen	91
8	Die Ramsey-Theorie	93
8.1	Schur-Tripel	93
8.2	Pythagoreische Tripel	95
8.3	Das Van-der-Waerden-Problem	96
8.4	Satz von Ramsey	97
8.5	Die probabilistische Methode	98
8.6	SAT-Solving	100
8.7	Pythagoreische Tripel in der babylonischen Mathematik	104

Was ist die Überraschung?	107
Quellen	107
9 Das Langford-Problem	109
9.1 Das Langford-Problem als Überdeckungsproblem	110
9.2 Für welche Werte von n ist das Langford-Problem lösbar?	111
9.3 Lösung für $L(4)$	114
Was ist die Überraschung?	115
Quellen	116
10 Die Axiome des Origami	117
10.1 Axiom 1	118
10.2 Axiom 2	118
10.3 Axiom 3	119
10.4 Axiom 4	122
10.5 Axiom 5	123
10.6 Axiom 6	125
10.7 Axiom 7	133
Was ist die Überraschung?	135
Quellen	135
11 Die Lill-Methode und die Beloch-Falte	137
11.1 Ein Zaubertrick	137
11.2 Spezifikation der Lill-Methode	139
11.3 Nachweis der Lill-Methode	143
11.4 Die Beloch-Falte	144
Was ist die Überraschung?	146
Quellen	146
12 Geometrische Konstruktionen mit Origami	147
12.1 Abes Dreiteilung eines Winkels	147
12.2 Martins Dreiteilung eines Winkels	149
12.3 Messers Verdoppelung eines Würfels	150
12.4 Belochs Verdoppelung eines Würfels	153
12.5 Konstruktion eines regelmäßigen Nonagons	154
Was ist die Überraschung?	156
Quellen	156
13 Ein Zirkel ist ausreichend	157
13.1 Was ist eine Konstruktion nur mit einem Zirkel?	157
13.2 Spiegelung eines Punktes	158
13.3 Konstruktion eines Kreises mit einem vorgegebenen Radius	159
13.4 Addition und Subtraktion von Strecken	160
13.5 Konstruktion einer Strecke als Streckenverhältnis	163
13.6 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Geraden	165
13.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Gerade und eines Kreises	167

Was ist die Überraschung?	168
Quellen	168
14 Ein Lineal und ein Kreis sind ausreichend	169
14.1 Was ist eine Konstruktion mit nur einem Lineal?	169
14.2 Konstruktion einer Gerade parallel zu einer gegebenen Gerade . .	170
14.3 Konstruktion einer Senkrechten zu einer gegebenen Gerade	173
14.4 Kopieren einer Strecke in eine bestimmte Richtung	174
14.5 Konstruktion einer Strecke als Streckenverhältnis	175
14.6 Konstruktion einer Quadratwurzel	175
14.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Gerade und eines Kreises . .	177
14.8 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Kreisen	178
Was ist die Überraschung?	179
Quellen	179
15 Sind Dreiecke mit gleichen Flächen und Umfängen kongruent? . . .	181
15.1 Von einem Dreieck zu einer elliptischen Kurve	181
15.2 Lösen der Gleichung für die elliptische Kurve	184
15.3 Herleitung eines Dreiecks aus der elliptischen Kurve	186
Was ist die Überraschung?	187
Quellen	187
16 Konstruktion eines regelmäßigen Heptadekagons	189
16.1 Konstruktion von regelmäßigen Polygonen	190
16.2 Der Fundamentalsatz der Algebra	191
16.3 Die Einheitswurzeln	191
16.4 Gauß' Beweis der Konstruierbarkeit eines Heptadekagons	193
16.5 Herleitung der Gauß-Formel	197
16.6 Konstruktion eines Heptadekagons	198
16.7 Konstruktion eines regelmäßigen Pentagons	202
Was ist die Überraschung?	204
Quellen	204
Anhang: Sätze der Geometrie und der Trigonometrie	205
A.1 Sätze über den Flächeninhalt eines Dreiecks	205
A.2 Trigonometrische Identitäten	208
A.3 Der Satz von der Winkelhalbierenden	216
A.4 Der Satz des Ptolemäus	218
A.5 Satz von Ceva	221
A.6 Der Satz des Menelaos	222
Literatur	225
Stichwortverzeichnis	229

Kapitel 1

Der kollabierende Zirkel



Ein moderner Zirkel ist ein *fester Zirkel*: Der Abstand zwischen den beiden Schenkeln kann festgelegt werden, sodass es möglich ist, eine Strecke oder einen Kreis von einer Position zu einer anderen zu kopieren (Abb. 1.1a). Euklid verwendete einen *kollabierenden Zirkel*, bei dem ein fester Abstand nicht eingehalten werden kann (Abb. 1.1b). Lehrer verwenden häufig einen Zirkel, der aus einem an einer Schnur befestigten Marker besteht, mit dem man einen Kreis auf einer Tafel konstruiert. Es ist unmöglich, eine feste Länge beizubehalten, wenn der Zirkel von der Tafel entfernt wird.

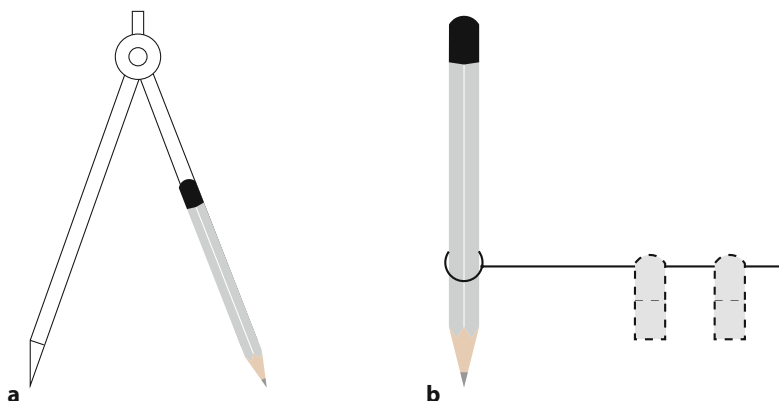


Abb. 1.1 **a** Ein fester Zirkel. Ein Schenkel hat eine Nadel, die im Mittelpunkt des Kreises platziert wird. Am anderen Schenkel ist ein Bleistift befestigt, mit dem der Kreis gezeichnet wird. Die Schenkel sind durch ein festes Scharnier verbunden, sodass der Abstand zwischen den Schenkeln (der Radius des Kreises) auch dann beibehalten wird, wenn der Zirkel vom Papier abgehoben wird. **b** Ein kollabierender Zirkel. Der Benutzer hält ein Stück Schnur in der Mitte des Kreises. Das andere Ende der Schnur ist an einen Bleistift gebunden und wird zum Zeichnen des Kreises verwendet. Wenn der Zirkel vom Papier abgehoben wird, können die Finger (gestrichelt) leicht in eine neue Position rutschen

Dieses Kapitel beginnt mit einer Diskussion über die Bedeutung des Studiums von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Abschn. 1.1). Abschn. 1.2 vergleicht die beiden Arten von Zirkeln bei der elementarsten Konstruktion: einer Mittelsenkrechten. Abschn. 1.3 stellt Euklids Methode zum Kopieren einer Strecke mithilfe eines kollabierenden Zirkels vor. Damit wird gezeigt, dass jede Konstruktion, die mit einem festen Zirkel durchgeführt werden kann, auch mit einem kollabierenden Zirkel durchgeführt werden kann. Abschn. 1.4 zeigt einen Beweis für diesen Satz, der korrekt zu sein scheint, aber nicht für alle Konfigurationen von Geraden und Punkten funktioniert. Um zu verdeutlichen, dass man Diagrammen nicht trauen darf, wird in Abschn. 1.5 der berühmte angebliche Beweis vorgestellt, dass alle Dreiecke gleichschenkelig sind; der Beweis scheint korrekt zu sein, ist es aber nicht, weil er auf einem falschen Diagramm beruht.

1.1 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Die Konstruktion mit Zirkel und Lineal war früher das grundlegende Konzept, das in der euklidischen Geometrie gelehrt wurde. In letzter Zeit ist es in den Lehrplänen der Schulen in Ungnade gefallen. Es ist sicherlich richtig, dass das Thema, wenn überhaupt, nur wenig praktischen Nutzen hat. Wie wir in Abschn. 2.2, 2.3, 2.4, 3.4 zeigen, wussten die Griechen, wie man Konstruktionen, die mit Zirkel und Lineal unmöglich sind, mit nur geringfügig fortschrittlicheren Werkzeugen durchführen kann. Heute können Computer mithilfe numerischer Methoden Konstruktionen mit beliebiger Genauigkeit durchführen.

Dennoch glaube ich, dass es vorteilhaft ist, Konstruktionen zu studieren:

- Es macht mehr Spaß und ist eine größere Herausforderung, Geometrie durch Konstruktionen zu lernen, als einfach nur Sätze und Beweise zu lesen.
- Bedeutende Durchbrüche in der Mathematik wurden durch Versuche erzielt, Konstruktionen zu finden. In Kap. 16 wird eine Konstruktion von Gauß vorgestellt, die zur modernen abstrakten Algebra geführt hat, insbesondere zu der von Évariste Galois entwickelten Theorie.
- Es ist etwas kontraintuitiv und daher sehr interessant, dass die Unmöglichkeit der Konstruktion einiger geometrischer Objekte bewiesen werden kann.
- Leider gibt es viele Menschen, die Jahre ihres Lebens mit dem Versuch verschwenden, unmögliche Konstruktionen durchzuführen. Schülerinnen und Schüler sollten sich der Vergeblichkeit solcher Bemühungen durchaus bewusst sein.

1.2 Feste Zirkel und kollabierende Zirkel

In einigen Geometrie-Lehrbüchern wird die Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke dargestellt, indem zwei Kreise konstruiert werden, die jeweils in den Endpunkten der Strecke zentriert sind, sodass die Radien gleich und *größer als die*

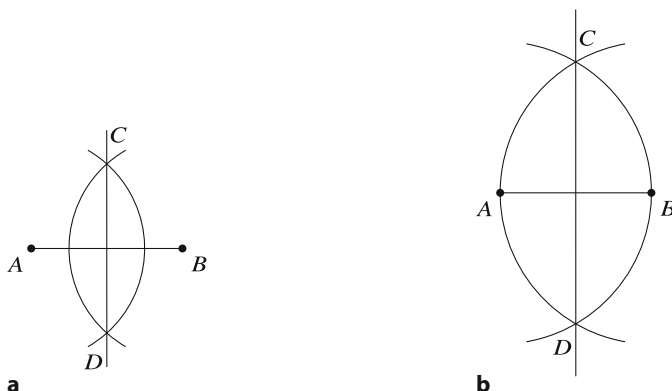


Abb. 1.2 **a** Konstruktion der Mittelsenkrechten mit einem festen Zirkel. **b** Konstruktion der Mittelsenkrechten mit einem festen oder einem kollabierenden Zirkel

halbe Länge des Abschnitts sind (Abb. 1.2a). Dies ist nur mit einem festen Zirkel möglich, da nach dem Zeichnen des Kreises mit Mittelpunkt A der Abstand zwischen den Schenkeln des Zirkels fest bleiben muss, um den Kreis mit Mittelpunkt B zu zeichnen.

Abb. 1.2b zeigt die Konstruktion der Mittelsenkrechten entweder mit einem festen oder einem kollabierenden Zirkel. Es werden zwei Kreise konstruiert: einer mit Mittelpunkt A und Radius \overline{AB} und einer mit Mittelpunkt B und Radius \overline{BA} . Dies kann mit einem kollabierenden Zirkel geschehen, weil (offensichtlich) $\overline{AB} = \overline{BA}$ ist, sodass der Zirkel sich nicht die Länge von \overline{AB} merken muss, um einen Kreis mit dem Mittelpunkt B und demselben Radius zu konstruieren. Der Beweis, dass die in Abb. 1.2a konstruierte Gerade eine Mittelsenkrechte ist, ist keineswegs elementar, da relativ fortgeschrittene Konzepte wie kongruente Dreiecke verwendet werden müssen. Der Beweis, dass die in Abb. 1.2b gezeigte Konstruktion der Mittelsenkrechten korrekt ist, ist jedoch einfach und basiert auf der Tatsache, dass $\triangle ABC$ ein gleichseitiges Dreieck ist. In der Tat ist dies der erste Satz in Euklids *Elemente*. $\overline{AC} = \overline{AB}$, da es sich um Radien desselben Kreises handelt, und in ähnlicher Weise $\overline{BC} = \overline{BA}$. Wir haben: $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BA} = \overline{BC}$.

Abb. 1.3a zeigt, dass das Dreieck bei der Konstruktion mit festem Zirkel ein gleichschenkliges, aber nicht unbedingt ein gleichseitiges Dreieck ist (Abb. 1.3b).

1.3 Euklids Konstruktion zum Kopieren einer Strecke

Der zweite Satz von Euklids *Elemente* beschreibt, wie man eine gegebene Strecke \overline{AB} in eine Strecke gleicher Länge kopiert, deren einer Endpunkt ein gegebener Punkt C ist. Somit bringt ein fester Zirkel keine zusätzlichen Fähigkeiten mit sich

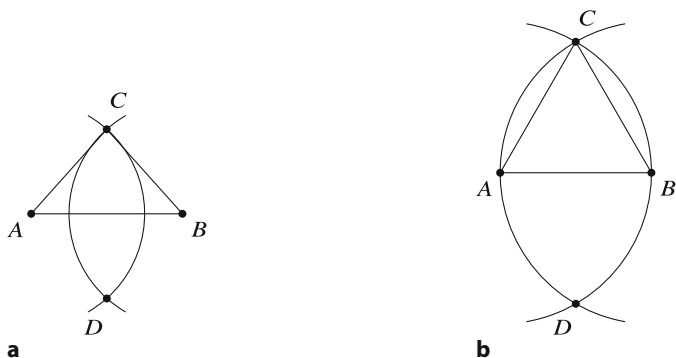


Abb. 1.3 **a** Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit einem festen Zirkel. **b** Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit einem kollabierenden Zirkel

und ein kollabierender Zirkel ist ausreichend; die Konstruktionen mit einem festen Zirkel sind gleichwohl einfacher.

Satz 1.1 Gegeben seien eine Strecke \overline{AB} und ein Punkt C . Dann kann eine Strecke $\overline{CC'}$, deren einer Endpunkt C ist, mithilfe eines kollabierenden Zirkels konstruiert werden, sodass $\overline{AB} = \overline{CC'}$ (Abb. 1.4a).

Beweis Man konstruiere den Streckenabschnitt \overline{AC} . Man konstruiere das gleichseitige Dreieck $\triangle ACD$, dessen Basis \overline{AC} ist (Abb. 1.4b). Nach dem ersten Satz von Euklid lässt sich das Dreieck mithilfe eines kollabierenden Zirkels konstruieren. Man konstruiere den Strahl, der eine Verlängerung der Strecke von D nach A ist, und den Strahl, der eine Verlängerung der Strecke von D nach C darstellt (Abb. 1.5a). Man konstruiere den Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius \overline{AB} und bezeichne den Schnittpunkt des Kreises mit dem Strahl, der \overline{DA} verlängert, als E (Abb. 1.5b). Man konstruiere den Kreis mit dem Mittelpunkt D und dem Radius \overline{DE} und bezeichne den Schnittpunkt des Kreises und des Strahls, der \overline{DC} verlängert, als F (Abb. 1.6).

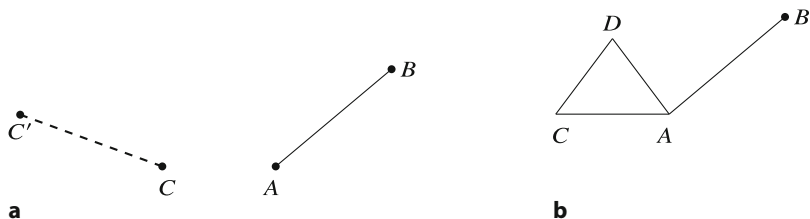


Abb. 1.4 **a** Kopieren der Strecke \overline{AB} . Die Ausrichtung von $\overline{CC'}$ ist nicht von Bedeutung. **b** Kopieren einer Strecke mit einem kollabierenden Zirkel

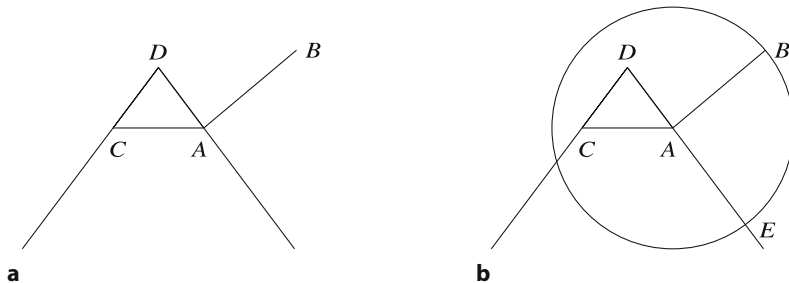
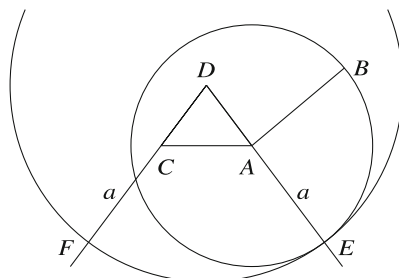


Abb. 1.5 a Konstruktion von Strahlen aus D . b Konstruktion eines Kreises mit Radius \overline{AB}

Abb. 1.6 Konstruktion von $\overline{CF} = \overline{AB}$



$\overline{DC} = \overline{DA}$, da $\triangle ACD$ gleichseitig ist. $\overline{AE} = \overline{AB}$ sind Radien desselben Kreises, ebenso $\overline{DF} = \overline{DE}$. Daher gilt:

$$\overline{CF} = \overline{DF} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DC} = \overline{DE} - \overline{DA} = \overline{AE} = \overline{AB}. \quad \square$$

Die Angabe der Richtungen der Strahlen ist wesentlich. Der Beweis funktioniert hier für jede Strecke \overline{AB} und jeden Punkt C , unabhängig von seiner Lage relativ zu \overline{AB} . Durch die Angabe der Richtungen schneidet der von den beiden Strahlen eingeschlossene „Kegel“ die Kreise auch dann, wenn $\overline{AC} > \overline{AB}$ (Abb. 1.7).

1.4 Eine fehlerhafte Konstruktion zum Kopieren einer Strecke

Beweis Man konstruiere drei Kreise: einen mit Mittelpunkt A und Radius \overline{AB} , einen mit Mittelpunkt A und Radius \overline{AC} und einen mit Mittelpunkt C und Radius $\overline{AC} = \overline{CA}$. Man bezeichne die Schnittpunkte der Kreise mit den Mittelpunkten A bzw. C als E bzw. F und bezeichne einen Schnittpunkt des Kreises mit dem Mittelpunkt C und des Kreises mit dem Mittelpunkt A und dem Radius \overline{AB} als D . Ist $\overline{AC} > \overline{AB}$, so ist die Konstruktion wie in Abb. 1.8 dargestellt.

Man konstruiere einen Kreis mit Mittelpunkt E und Radius \overline{ED} . Den Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreis mit Mittelpunkt A und Radius \overline{AC} bezeichne man mit G . Es gibt zwei Schnittpunkte; gewählt wird derjenige, der näher an C liegt

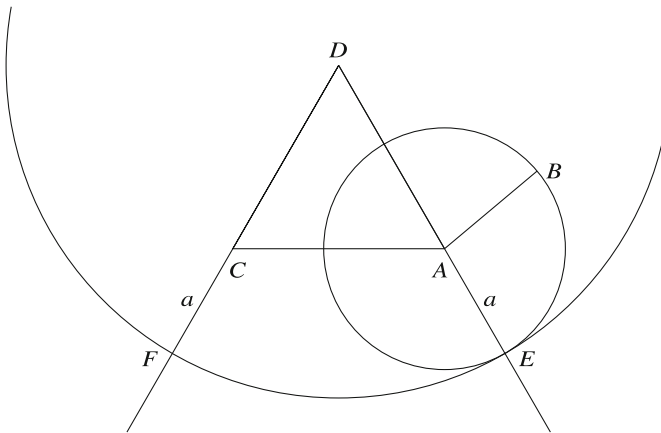


Abb. 1.7 Konstruktion für $\overline{AC} > \overline{AB}$

Abb. 1.8 Konstruktion zum Kopieren einer Strecke (1)

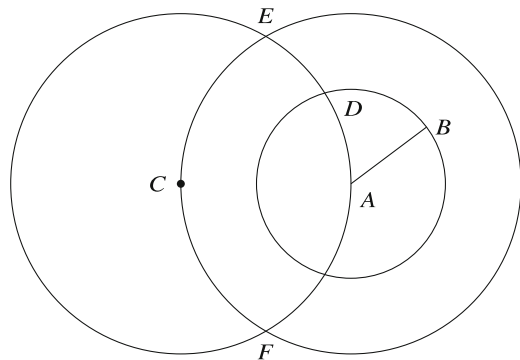
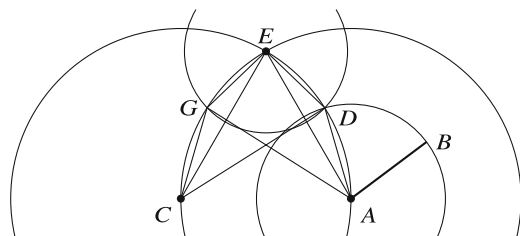


Abb. 1.9 Konstruktion zum Kopieren einer Strecke (2)

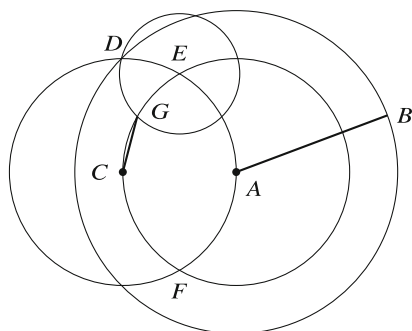


(Abb. 1.9). $\overline{CD} = \overline{CE}$ sind Radien desselben Kreises, ebenso $\overline{AE} = \overline{AG}$. Durch die Konstruktion sind die Radien \overline{CE} und \overline{AE} gleich. Folglich:

$$\overline{CD} = \overline{CE} = \overline{AE} = \overline{AG}.$$

$\overline{EG} = \overline{ED}$ sind Radien desselben Kreises, sodass $\triangle EAG \cong \triangle DCE$ (Seite-Seite-Seite) und $\angle GEA = \angle DEC$.

Abb. 1.10 Diagramm, für welches der Beweis nicht funktioniert



Wegen

$$\angle GEC = \angle GEA - \angle CEA = \angle DEC - \angle CEA = \angle DEA$$

folgt, dass $\triangle ADE \cong \triangle CGE$ (Seite-Winkel-Seite). $\overline{AB} = \overline{AD}$ sind Radien des kleineren Kreises mit dem Mittelpunkt A, also $\overline{GC} = \overline{AD} = \overline{AB}$. \square

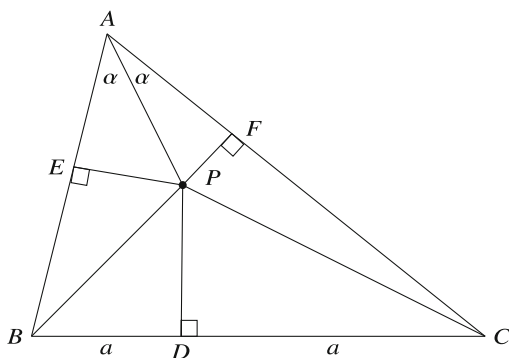
Dieser Beweis ist nur korrekt, wenn $\overline{AC} > \overline{AB}$. Abb. 1.10 zeigt ein Diagramm, in dem $\overline{AC} < \overline{AB}$ ist, und man kann sehen, dass $\overline{AB} \neq \overline{GC}$.

1.5 Trauen Sie keinem Diagramm

Satz 1.2 (Natürlich falsch) *Alle Dreiecke sind gleichschenkelig.*

Beweis (Falsch) Für ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ und der Mittelsenkrechten von \overline{BC} . Die Schnittpunkte der Höhen von P mit den Seiten $\overline{AB}, \overline{AC}$ werden mit E bzw. F bezeichnet (Abb. 1.11). $\triangle APE \cong \triangle APF$, da es sich um rechtwinklige Dreiecke mit glei-

Abb. 1.11 Ein falscher Beweis dafür, dass alle Dreiecke gleichschenkelig sind

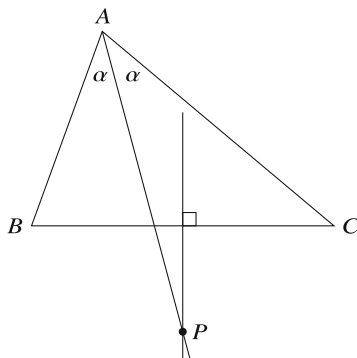


chen Winkeln α und gemeinsamer Seite \overline{AP} handelt. $\triangle DPB \cong \triangle DPC$, weil sie rechtwinklige Dreiecke sind, \overline{PD} eine gemeinsame Seite ist und $\overline{BD} = \overline{CD} = a$. $\triangle EPB \cong \triangle FPC$, weil sie rechtwinklige Dreiecke sind, $\overline{EP} = \overline{FP}$ durch die erste Kongruenz und $\overline{PB} = \overline{PC}$ durch die zweite Kongruenz. Durch Kombination der Gleichungen ergibt sich, dass $\triangle ABC$ gleichschenkelig ist:

$$\overline{AB} = \overline{AE} + \overline{EB} = \overline{AF} + \overline{FC} = \overline{AC}. \quad \square$$

Die *Logik* des Beweises ist korrekt, aber das Diagramm, auf dem der Beweis beruht, ist nicht korrekt, weil der Punkt P *außerhalb* des Dreiecks liegt (Abb. 1.12).

Abb. 1.12 Warum die Konstruktion nicht funktioniert



Was ist die Überraschung?

Als Schüler hielt ich es für selbstverständlich, dass ein Zirkel ein Reibungsgelenk hat, das den Abstand zwischen der Spitze und dem Bleistift beibehält, wenn er vom Papier abgehoben wird. Als der Lehrer einen Zirkel benutzte, der aus einem Stück Schnur und einem Stück Kreide bestand, konnte ich mir nicht vorstellen, dass er sich von meinem Zirkel unterscheidet. Der Artikel von Godfried Toussaint war eine echte Überraschung, ebenso wie sein Nachweis, dass die Beweise nach Euklid falsch waren, weil sie auf Diagrammen mit unrichtigen Annahmen beruhten. Ich empfehle den Artikel allen Lesern, die ihr Verständnis von Beweisen in der Mathematik vertiefen wollen.

Quellen

Dieses Kapitel stützt sich auf [50]. Die fehlerhafte Konstruktion der Gleichwertigkeit der beiden Zirkel in Abschn. 1.4 stammt von [37]. Eine umfassende englische

Übersetzung von Euklids *Elemente* zusammen mit einem umfangreichen Kommentar [22] wurde von Thomas L. Heath, einem der führenden Experten für griechische Mathematik, verfasst.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 2

Dreiteilung eines Winkels



Es ist unmöglich, einen beliebigen Winkel nur mit Zirkel und Lineal dreizuteilen (den Winkel in drei gleiche Teile zu zerlegen). Die Dreiteilung erfordert die Konstruktion von Kubikwurzeln, aber ein Lineal und ein Zirkel können nur Längen konstruieren, die aus ganzen Zahlen, den vier Grundrechenarten und Quadratwurzeln gebildet sind. Dies wurde von Pierre Wantzel im Jahr 1837 bewiesen. Dennoch versuchen unzählige Amateure weiterhin, einen Winkel dreizuteilen. Ihre Konstruktionen sind Annäherungen, auch wenn sie davon überzeugt sind, dass die Konstruktionen korrekt sind. Abschn. 2.1 stellt zwei dieser Konstruktionen vor, entwickelt Formeln für die Winkel und zeigt die Fehler in den Näherungen.

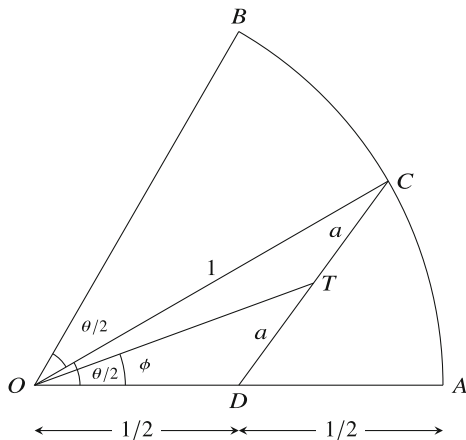
Griechische Mathematiker entdeckten, dass man Winkel dreiteilen kann, wenn man andere Instrumente zulässt. Abschn. 2.2 erklärt eine Konstruktion von Archimedes, die ein einfaches Instrument namens *Neusis* verwendet, und Abschn. 2.3 zeigt, wie man einen Würfel mithilfe der *Neusis* verdoppelt. Abschn. 2.4 stellt eine Konstruktion von Hippias für die Dreiteilung unter Verwendung eines Instruments namens *Quadratrix* vor. Den Rest des Kapitels bildet ein Beweis für die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines Winkels. Abschn. 2.5 charakterisiert konstruierbare Zahlen, Abschn. 2.6 setzt konstruierbare Zahlen mit Wurzeln von Polynomen in Beziehung und Abschn. 2.7 verwendet diese Theorie, um zu zeigen, dass die Dreiteilung eines Winkels und die Verdoppelung eines Würfels unmöglich sind.

2.1 Näherungsweise Dreiteilungen

2.1.1 Erste näherungsweise Dreiteilung

Konstruktion Sei $\theta = \angle AOB$ ein beliebiger Winkel; man nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass A, B auf einem Einheitskreis liegen, dessen Mittelpunkt O ist. Man halbiere $\angle AOB$, und sei C der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.

Abb. 2.1 Erste näherungsweise (approximative) Dreiteilung (1)



bierenden mit dem Einheitskreis. Sei D der Mittelpunkt von \overline{OA} , und sei T der Mittelpunkt von \overline{DC} . Der Winkel $\angle DOT$ wird mit ϕ bezeichnet (Abb. 2.1).

Satz 2.1

$$\tan \phi = \frac{2 \sin(\theta/2)}{1 + 2 \cos(\theta/2)}.$$

Beweis Abb. 2.2 ist ein Ausschnitt aus Abb. 2.1 und enthält zusätzliche Anmerkungen.

Sei \overline{CF} die Senkrechte zu \overline{OA} , die \overline{OA} in F schneidet. Da $\overline{OC} = 1$ ist, ist $\overline{CF} = \sin(\theta/2)$ und $\overline{OF} = \cos(\theta/2)$. Sei \overline{TE} die Senkrechte zu \overline{OA} , die \overline{OA} in E schneidet.

T ist der Mittelpunkt von \overline{DC} , also $\overline{DT} = \overline{TC} = a$. Aber \overline{FT} ist die Seitenhalbierende der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks; also ist $\overline{FT} = a$, und somit ist das $\triangle DTF$ gleichschenkelig. Daraus folgt, dass \overline{TE} sowohl Seitenhalbierende als auch Höhe von \overline{DF} ist. Aus dem Diagramm ist das leicht zu erkennen:

$$\overline{OE} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right).$$

Die Berechnung der Länge $2a = \overline{CD}$ mithilfe des Satzes von Pythagoras in $\triangle DCF$ liefert:

$$(2a)^2 = \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

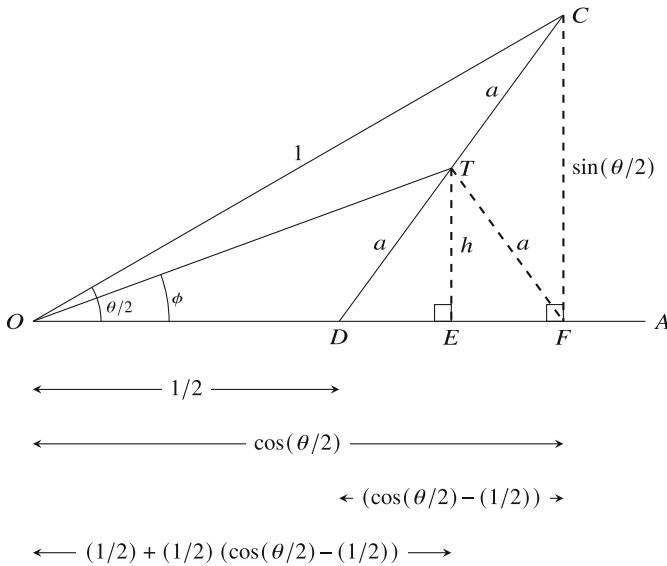


Abb. 2.2 Erste näherungsweise Dreiteilung (2)

Die Länge $h = \overline{TE}$ kann aus dem Satz des Pythagoras berechnet werden in $\triangle DTE$:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= h^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 \\
 h^2 &= \frac{1}{4} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) \right]^2 = \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
 h &= \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\
 \tan \phi &= \frac{h}{\overline{OE}} = \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Dies ist eine Annäherung an eine Dreiteilung $\phi = \theta/3$. Für $\theta = 60^\circ$:

$$\tan^{-1} \left(\frac{2 \sin 30^\circ}{1 + 2 \cos 30^\circ} \right) = \tan^{-1} 0,366 \approx 20,1^\circ \approx 20^\circ.$$

Tab. 2.1 zeigt die Fehler für eine Reihe von spitzen Winkeln. Der Fehler ist bei kleinen Winkeln relativ gering und steigt bei 85° auf 1 % an.

Tab. 2.1 Fehler bei der ersten approximativen Dreiteilung

θ (°)	$\theta/3$ (°)	$\tan^{-1} \phi$ (°)	Fehler (°)	Fehler (%)
5	1,667	1,667	0,000	0,004
10	3,333	3,334	0,000	0,014
15	5,000	5,002	0,002	0,032
20	6,667	6,670	0,004	0,057
25	8,333	8,341	0,007	0,088
30	10,000	10,013	0,013	0,128
35	11,667	11,687	0,020	0,174
40	13,333	13,364	0,030	0,228
45	15,000	15,043	0,043	0,289
50	16,667	16,726	0,060	0,358
55	18,333	18,413	0,080	0,435
60	20,000	20,104	0,104	0,520
65	21,667	21,799	0,133	0,612
70	23,333	23,500	0,166	0,713
75	25,000	25,206	0,206	0,823
80	26,667	26,918	0,251	0,941
85	28,333	28,636	0,303	1,068

2.1.2 Zweite näherungsweise Dreiteilung

Konstruktion Sei $\theta = \angle AOB$ ein beliebiger Winkel; man nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass A, B auf einem Einheitskreis liegen, dessen Mittelpunkt O ist. Man konstruiere einen Kreis mit dem Radius $1/3$ und dem Mittelpunkt O und lasse D seinen Schnittpunkt mit \overline{OA} sein. Man halbiere $\angle AOB$; C sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit dem Kreis mit Radius $1/3$. Man konstruiere die Sehne \overline{CD} und die Sehnen $\overline{AE} = \overline{ET} = \overline{CD}$. Da gleiche Sehnen gleiche Zentriwinkel gegenüberliegen, gilt $\angle TOE = \angle EOA = \phi$ (Abb. 2.3).

Satz 2.2

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)) = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4).$$

Beweis Mit dem Kosinussatz gilt in $\triangle DOC$:

$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \cos(\theta/2) = \frac{2}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

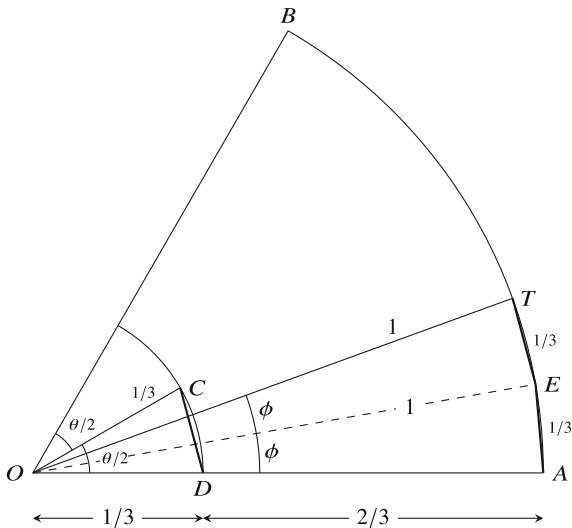
Mit dem Kosinussatz gilt in $\triangle EOA$:

$$\overline{AE}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \phi = 2(1 - \cos \phi).$$

Wenn man die beiden Ausdrücke für $\overline{CD} = \overline{AE}$ gleichsetzt und vereinfacht, erhält man:

$$\cos \phi = 1 - \frac{1}{9}(1 - \cos(\theta/2)).$$

Abb. 2.3 Zweite näherungsweise Dreiteilung



Da $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, und somit $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$, haben wir die alternative Formel:

$$\cos \phi = 1 - \frac{2}{9} \sin^2(\theta/4). \quad \square$$

Dies ist eine Annäherung an eine Dreiteilung $2\phi = \theta/3$. Für $\theta = 60^\circ$:

$$2 \cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{9} (1 - \cos 30^\circ) \right) \approx 19,8^\circ \approx 20^\circ.$$

Tab. 2.2 zeigt die Fehler für eine Reihe von spitzen Winkeln. Diese Konstruktion ist wesentlich ungenauer als die in Abschn. 2.1.1.

2.2 Dreiteilung mit einer Neusis

Ein Lineal hat keine Markierungen und kann nur verwendet werden, um eine gerade Linie zwischen zwei gegebenen Punkten zu konstruieren. Archimedes zeigte, dass eine *Neusis*, ein Lineal mit zwei Markierungen, die einen festen Abstand voneinander haben, zur Dreiteilung eines Winkels verwendet werden kann (Abb. 2.4). Wir definieren den Abstand zwischen den Markierungen als 1.

Konstruktion Sei $\alpha = \angle ABE$ ein beliebiger Winkel in einem Einheitskreis mit Mittelpunkt B , wobei der Radius des Kreises gleich dem Abstand zwischen den Markierungen auf der Neusis ist. Man erweitere den Radius \overline{EB} über den Kreis

Tab. 2.2 Fehler bei der zweiten approximativen Dreiteilung

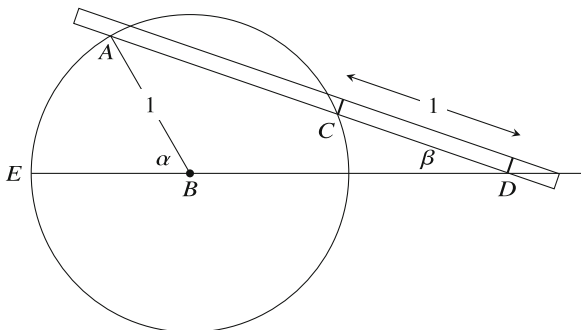
θ (°)	$\theta/3$ (°)	$\cos^{-1} 2\phi$ (°)	Fehler (°)	Fehler (%)
5	1,667	1,667	0,000	0,007
10	3,333	3,332	0,001	0,028
15	5,000	4,997	0,003	0,063
20	6,667	6,659	0,008	0,113
25	8,333	8,319	0,015	0,176
30	10,000	9,975	0,025	0,254
35	11,667	11,626	0,040	0,346
40	13,333	13,273	0,060	0,451
45	15,000	14,914	0,086	0,571
50	16,667	16,549	0,118	0,705
55	18,333	18,177	0,156	0,853
60	20,000	19,797	0,203	1,015
65	21,667	21,408	0,258	1,192
70	23,333	23,011	0,322	1,382
75	25,000	24,603	0,397	1,586
80	26,667	26,185	0,481	1,805
85	28,333	27,756	0,577	2,038

hinaus. Nun legt man eine Kante der Neusis auf A und verschiebt sie, bis sie die Verlängerung von \overline{EB} bei D und den Kreis bei C schneidet, wobei die Markierungen so verwendet werden, dass die Länge der Strecke \overline{CD} 1 beträgt.¹ Man konstruiere die Gerade \overline{AD} . Bezeichne $\angle CDB = \beta$ (Abb. 2.5).



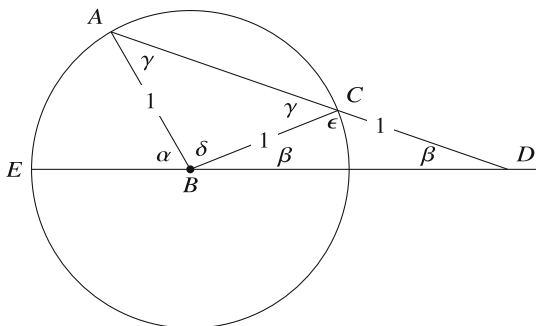
Abb. 2.4 Eine Neusis

Abb. 2.5 Die Neusis-Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels (1)



¹ Diese Operation wird *Einschiebung* genannt.

Abb. 2.6 Die Neusis-Konstruktion zur Dreiteilung eines Winkels (2)



Satz 2.3 $\beta = \alpha/3$.

Beweis Man konstruiere \overline{BC} und bezeichne die Winkel und Strecken wie in Abb. 2.6 gezeigt. $\triangle ABC$ und $\triangle BCD$ sind gleichschenklige Dreiecke: $\overline{AB} = \overline{BC}$ sind Radien desselben Kreises und $\overline{BC} = \overline{CD}$ aufgrund der Konstruktion mit der Neusis. Da die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich 180° ist und die Summe von Nebenwinkeln ebenfalls gleich 180° ist, haben wir:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 180^\circ - 2\beta \\ \gamma &= 180^\circ - \epsilon = 2\beta \\ \delta &= 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - 4\beta \\ \alpha &= 180^\circ - \delta - \beta = 3\beta. \quad \square\end{aligned}$$

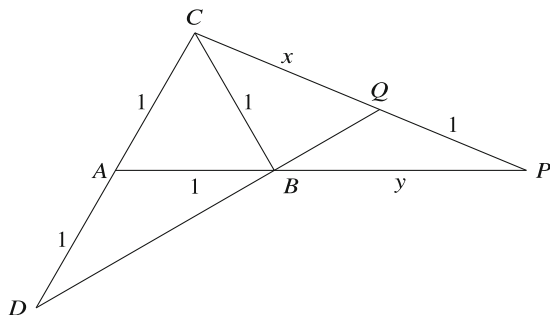
2.3 Verdoppelung des Würfels mit einer Neusis

Zu einem Würfel C soll ein anderer Würfel mit dem doppelten Volumen konstruiert werden. Ist das Volumen von C gleich V , so haben seine Seiten die Länge $\sqrt[3]{V}$. Die Seiten eines Würfels mit dem doppelten Volumen sind $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{V}$; wenn wir also $\sqrt[3]{2}$ konstruieren können, können wir den Würfel verdoppeln.

Konstruktion Man konstruiere das gleichseitige Einheitsdreieck $\triangle ABC$ und verlängere \overline{CA} um eine weitere Strecke der Länge 1 nach D . Man konstruiere Strahlen, die \overline{AB} und \overline{DB} verlängern. Die Neusis wird auf den Punkt C gelegt und verschoben, bis eine Markierung der Neusis auf dem Strahl \overline{AB} bei P und die andere Markierung auf dem Strahl \overline{DB} bei Q liegt. Bezeichne $\overline{CQ} = x$ und $\overline{BP} = y$ (Abb. 2.7).

Satz 2.4 $x = \sqrt[3]{2}$.

Abb. 2.7 Verdoppelung des Würfels mit einer Neusis



Beweis Da $\triangle ABC$ gleichseitig ist, ist $\cos \angle CAP = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und nach dem Kosinussatz gilt in $\triangle APC$:

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AP} \cos 60^\circ \quad (2.1a)$$

$$(x + 1)^2 = 1^2 + (y + 1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (y + 1) \cdot \frac{1}{2} \quad (2.1b)$$

$$x^2 + 2x = y^2 + y. \quad (2.1c)$$

Nach dem Lehrsatz des Menelaos (Satz A.20):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} = 1.$$

Deshalb:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{1} = 1 \quad (2.2a)$$

$$xy = 2. \quad (2.2b)$$

Setzt man (2.2b) in (2.1c) ein, erhält man:

$$x^2 + 2x = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$x^4 + 2x^3 = 4 + 2x$$

$$x^3(x + 2) = 2(x + 2)$$

$$x = \sqrt[3]{2}. \quad \square$$

2.4 Dreiteilung mithilfe einer Quadratrix

Sei \overline{ABCD} ein Quadrat. Sei l_1 eine Strecke, die anfangs auf \overline{DC} liegt, und sei l_2 eine Strecke, die anfangs auf \overline{AD} liegt. Wir bewegen l_1 mit einer konstanten

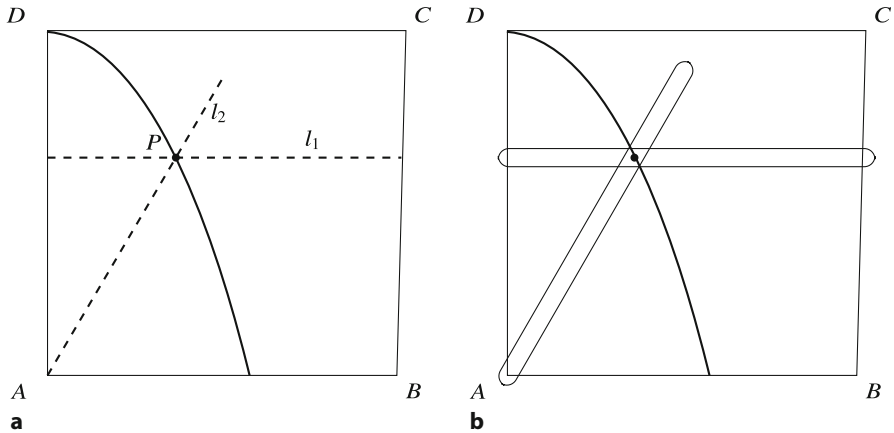


Abb. 2.8 a Eine Quadratrixkurve. b Ein Quadratrixzirkel

linearen Geschwindigkeit, bis sie \overline{AB} erreicht, und drehen l_2 mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit im Uhrzeigersinn um A , bis sie ebenfalls \overline{AB} erreicht. Nehmen wir an, dass die Strecken \overline{AB} gemeinsam erreichen. Wenn l_2 beispielsweise mit $1^\circ/\text{Sekunde}$ rotiert und die Seite des Quadrats 9 Zentimeter lang ist, muss sich l_1 mit $0,1 \text{ cm}/\text{Sekunde}$ bewegen. Die Spur ihres Schnittpunkts P nennt man eine *Quadratrixkurve* oder einfach eine *Quadratrix* (Abb. 2.8a). Ihre Definition wird auf den Mathematiker Hippias zurückgeführt.

Eine Quadratrix kann mithilfe eines Quadratrixzirkels konstruiert werden, wie in Abb. 2.8b gezeigt. Er besteht aus zwei (unmarkierten) geraden Linien, die sich wie oben beschrieben bewegen. Ein Gelenk zwingt sie dazu, sich gemeinsam zu bewegen und zeichnet die Kurve nach.

Eine Quadratrix kann zur Dreiteilung eines Winkels verwendet werden.

Konstruktion Sei $\angle CDP_1 = \alpha$ ein beliebiger Winkel, wobei P_1 der Schnittpunkt der Gerade, die den Winkel α relativ zu \overline{DC} definiert, mit der Quadratrix ist. Man konstruiere eine Gerade durch P_1 parallel zu \overline{DC} und bezeichne ihren Schnittpunkt mit \overline{AD} als E . Man bezeichne die Strecke \overline{DE} mit t und dreiteile sie (Abschn. 2.5), um den Punkt F zu erhalten, der $t/3$ von \overline{DC} entfernt ist. Sei P_2 der Schnittpunkt einer zu \overline{DC} parallelen Gerade von F mit der Quadratrix, und bezeichne θ den Winkel zwischen \overline{DC} und $\overline{DP_2}$ (Abb. 2.9).

Satz 2.5 $\theta = \alpha/3$.

Beweis E hat die y -Koordinate $1 - t$, also hat F konstruktionsbedingt die y -Koordinate $1 - (t/3)$. Da die konstante lineare Geschwindigkeit der horizontalen Gerade proportional zur konstanten Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Gerade ist, gilt $\theta/\alpha = (t/3)/t$ und $\theta = \alpha/3$. \square

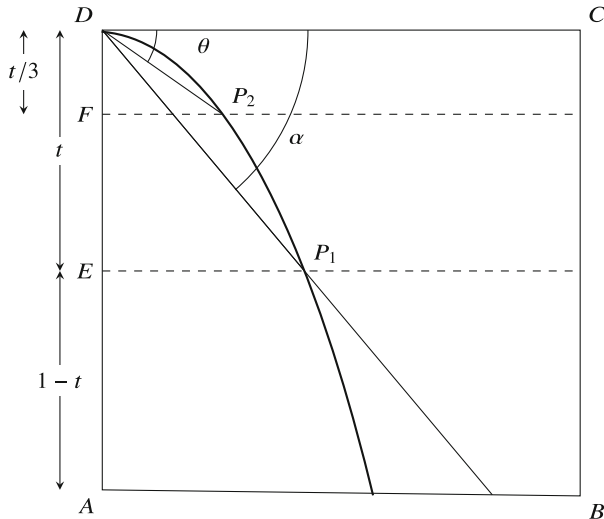


Abb. 2.9 Dreiteilung eines Winkels mithilfe einer Quadratrix

2.5 Konstruierbare Zahlen

Sei l eine Strecke der Länge 1.

Definition 2.1 Eine Zahl a ist dann und nur dann konstruierbar, wenn eine Strecke der Länge a mit Zirkel und Lineal ausgehend von l konstruiert werden kann.

Man konstruiere für den Streckenabschnitt $l = \overline{AB}$ eine Gerade, die \overline{AB} enthält, und suche mit dem Zirkel einen Punkt C auf der Gerade, der 1 von B entfernt ist. Dann hat \overline{AC} die Länge 2, sodass die Zahl 2 konstruierbar ist. Eine Strecke \overline{BD} der Länge 1 kann senkrecht zu \overline{AB} bei B konstruiert werden. Die Hypotenuse des Dreiecks $\triangle ABD$ hat die Länge $\sqrt{2}$, also ist die Zahl $\sqrt{2}$ konstruierbar.

Satz 2.6 Eine Zahl ist dann und nur dann konstruierbar, wenn sie der Wert eines Ausdrucks ist, der aus den ganzen Zahlen, den vier Grundrechenarten $\{+, -, \times, / \}$ und der Operation der Quadratwurzel gebildet wird \surd .

Beweis Zunächst zeigen wir, dass die Werte dieser Ausdrücke konstruierbar sind.

Addition und Subtraktion Man konstruiere aus den Strecken $\overline{PQ} = a$ und $\overline{RS} = b$ einen Kreis mit dem Mittelpunkt Q und dem Radius b (Abb. 2.10). Man verlängere die Gerade \overline{PQ} , bis sie den Kreis in U schneidet. Dann ist \overline{PTQU} eine Strecke, wobei $\overline{PT} = a - b$ und $\overline{PU} = a + b$.

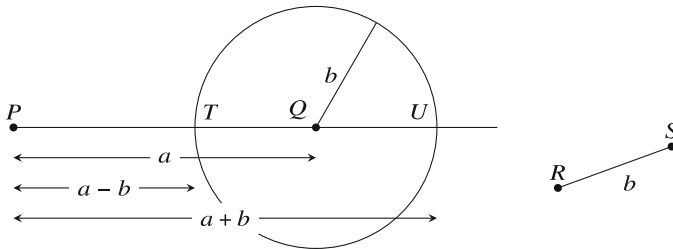


Abb. 2.10 Konstruktion von Addition und Subtraktion

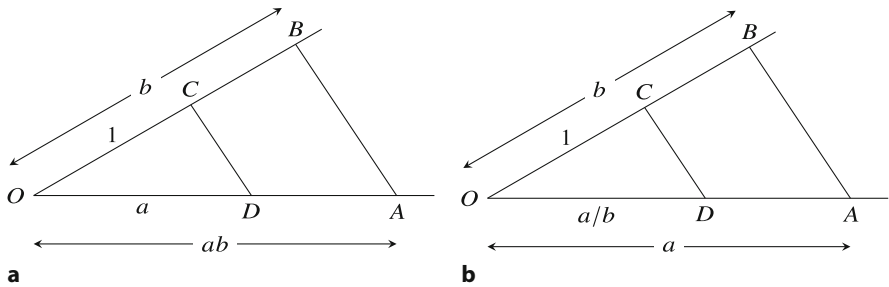


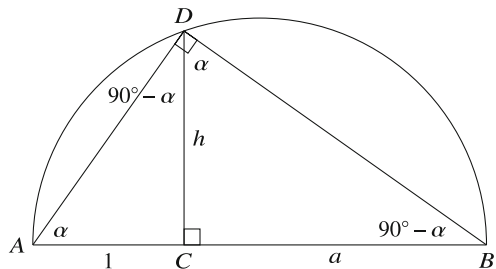
Abb. 2.11 a Konstruktion der Multiplikation. b Konstruktion der Division

Multiplikation Durch ähnliche Dreiecke in Abb. 2.11a erhalten wir $(1/b) = (a/\overline{OA})$, also $\overline{OA} = ab$.

Division Durch ähnliche Dreiecke in Abb. 2.11b erhalten wir $(1/b) = (\overline{OD}/a)$, also $\overline{OD} = a/b$.

Quadratwurzeln Man konstruiere für eine Strecke $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = 1 + a$ und einen Halbkreis mit \overline{AB} als Durchmesser. Weiter konstruiere man eine Senkrechte bei C , und D sei der Schnittpunkt der Senkrechten mit dem Kreis (Abb. 2.12). $\angle ADB$ ist ein rechter Winkel, weil er dem Kreisdurchmesser gegenüberliegt. Da es sich um ähnliche Dreiecke handelt, ist $(h/1) = (a/h)$, also $h^2 = a$ und $h = \sqrt{a}$.

Abb. 2.12 Konstruktion einer Quadratwurzel



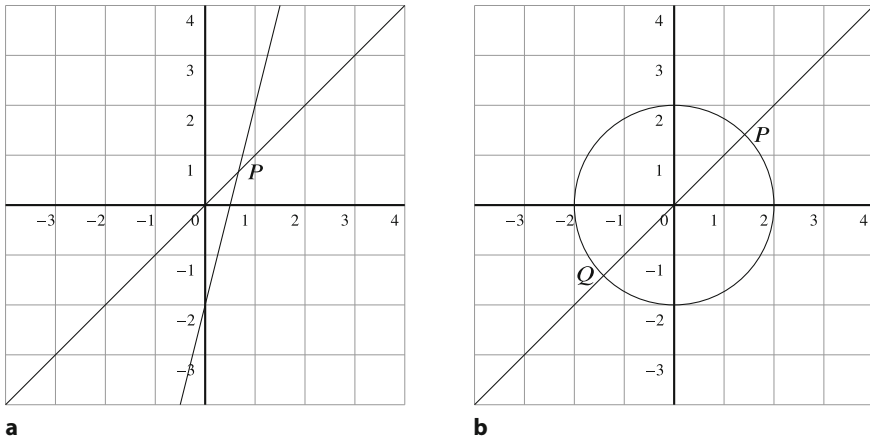


Abb. 2.13 **a** Der Schnittpunkt von zwei Geraden. **b** Die Schnittpunkte einer Gerade und eines Kreises

Um die Umkehrung des Satzes zu beweisen, müssen wir bestimmen, welche Ausdrücke mit Zirkel und Lineal konstruiert werden können. Es gibt drei Konstruktionen:²

1. Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt (Abb. 2.13a). Die Koordinaten des Schnittpunkts lassen sich aus den Gleichungen der beiden Geraden ableiten $y = x$ und $y = 4x - 2$. Der Schnittpunkt ist $P = (2/3, 2/3)$.
2. Eine Gerade schneidet einen Kreis in null, einem oder zwei Punkten (Abb. 2.13b). Die Koordinaten der Schnittpunkte lassen sich aus den Gleichungen der Geraden $y = x$ und des Kreises $x^2 + y^2 = 4$ ableiten. Die Schnittpunkte sind $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ und $Q = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
3. Zwei Kreise schneiden sich in null, einem oder zwei Punkten (Abb. 2.14). Die Koordinaten der Schnittpunkte lassen sich aus den Gleichungen der beiden Kreise $(x - 1)^2 + y^2 = 4$, $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ ableiten. Die Schnittpunkte sind $P = (0, \sqrt{2})$, $Q = (0, -\sqrt{2})$. \square

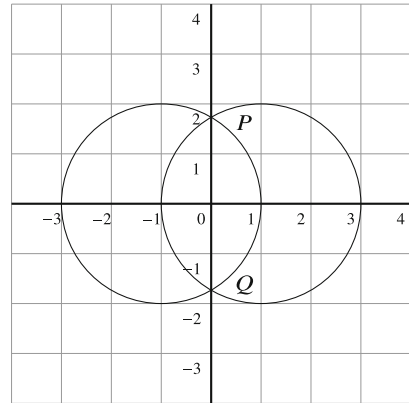
2.6 Konstruierbare Zahlen als Wurzeln von Polynomen

Um zu zeigen, dass eine Zahl nicht konstruierbar ist, müssen wir beweisen, dass sie nicht nur mit ganzen Zahlen und den Operationen $\{+, -, \times, /, \sqrt{\cdot}\}$ ausgedrückt werden kann.

Wir werden zeigen, dass konstruierbare Zahlen die Wurzeln einer bestimmten Klasse von Polynomen sind, und dann beweisen, dass die Dreiteilung eines Winkels

² Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden diese für bestimmte Werte und nicht für die allgemeinsten Gleichungen dargestellt.

Abb. 2.14 Die Schnittpunkte von zwei Kreisen



und die Verdoppelung eines Würfels die Konstruktion von Wurzeln von Polynomen erfordern, die nicht zu dieser Klasse gehören. Heute werden diese Ergebnisse mithilfe der Feldtheorie der abstrakten Algebra bewiesen, aber hier gebe ich einen Beweis, der elementare Mathematik verwendet. Der Beweis basiert auf der folgenden Definition.

Definition 2.2 Die *Tiefe* eines Ausdrucks, der aus den ganzen Zahlen und den Operatoren $\{+, -, \times, /, \sqrt{\quad}\}$ aufgebaut ist, ist die maximale Verschachtelungsebene von Quadratwurzeln.

Beispiel 2.1 Betrachte den folgenden Ausdruck:

$$\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Die Tiefe beträgt 3, weil rechts im Ausdruck $\sqrt{17}$ steht, das in $\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$ verschachtelt ist, das wiederum in $\sqrt{17 + \dots - \dots - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}$ verschachtelt ist.

Satz 2.7 Ein Ausdruck der Tiefe n kann ausgedrückt werden als $a + b\sqrt{c}$, wobei a, b, c Ausdrücke der Tiefe von höchstens $n - 1$ sind.

Beweis Einfache Berechnungen zeigen, dass die Ausdrücke $(a_1 + b_1\sqrt{c}) \text{ op } (a_2 + b_2\sqrt{c})$ für die Operatoren $\text{op} = \{+, -, \times\}$ zu Ausdrücken $a + b\sqrt{c}$ der Tiefe $n - 1$ führen. Bei der Division ist die Berechnung etwas komplizierter:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + b_1\sqrt{c}}{a_2 + b_2\sqrt{c}} &= \frac{(a_1 + b_1\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})}{(a_2 + b_2\sqrt{c})(a_2 - b_2\sqrt{c})} \\ &= \frac{a_1a_2 - b_1b_2c}{a_2^2 - b_2^2c} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 - b_2^2c} \sqrt{c}, \end{aligned}$$

die die Form $a + b\sqrt{c}$ hat, wobei a, b, c die Tiefe $n - 1$ haben. Schließlich ist die Quadratwurzel aus einem Ausdruck der Tiefe $n - 1$ ein Ausdruck der Tiefe n . \square

Satz 2.8 Sei $p(x)$ ein monisches kubisches Polynom mit rationalen Koeffizienten:

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

und sei $r = a + b\sqrt{c}$ eine Wurzel von $p(x)$ von minimaler Tiefe n , wobei a, b, c (höchstens) $n - 1$ tief sind. Dann ist $r' = a - b\sqrt{c}$ eine Wurzel von $p(x)$ und $r \neq r'$.

Beweis Berechnen wir $p(r)$, das gleich 0 ist, da r eine Wurzel ist:

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{c})^3 + a_2(a + b\sqrt{c})^2 + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\ (a^3 + 3a^2b\sqrt{c} + 3ab^2c + b^3c\sqrt{c}) &= \\ + a_2(a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2c) + a_1(a + b\sqrt{c}) + a_0 &= \\ (a^3 + 3ab^2c + a_2a^2 + a_2b^2c + a_1a + a_0) &= \\ + (3a^2b + b^3c + 2a_2ab + a_1b)\sqrt{c} &= \\ d + e\sqrt{c} &= 0, \end{aligned}$$

wobei d, e Ausdrücke der Tiefe $n - 1$ sind, die aus den rationalen Koeffizienten und a, b, c gebildet werden. Dann ist $\sqrt{c} = -d/e$, sodass $a + b\sqrt{c}$ als Ausdruck der Tiefe $n - 1$ ausgedrückt werden kann, wobei die Annahme gilt, dass $a + b\sqrt{c}$ von minimaler Tiefe n ist. Da $\sqrt{c} \neq 0$ ist und die Tiefe n hat, muss $d + e\sqrt{c}$ Null sein, damit $d = e = 0$.

Betrachten wir nun $r' = a - b\sqrt{c}$. Aus der obigen Berechnung ergibt sich, dass $p(r') = d - e\sqrt{c} = 0 + 0 \cdot \sqrt{c} = 0$, also ist auch r' eine Wurzel aus p .

Wenn $r = r'$ ist, dann ist $0 = r - r' = 2b\sqrt{c}$, was nur gilt, wenn $b = 0$ ist, sodass r, r' die Tiefe $n - 1$ hätten, was wiederum der Annahme widerspricht. \square

Satz 2.9 Wenn ein monisches kubisches Polynom mit rationalen Koeffizienten

$$p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

keine rationalen Wurzeln hat, ist keine seiner Wurzeln konstruierbar.

Beweis Mit dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 16.1) hat $p(x)$ drei Wurzeln r_1, r_2, r_3 . Sei $r_1 = a + b\sqrt{c}$ eine Wurzel der minimalen Tiefe n . Unter der Annahme, dass es keine rationalen Wurzeln gibt, sei $n \geq 1$, und daher $b \neq 0$ und $c \neq 0$. Nach Satz 2.8 ist $r_2 = a - b\sqrt{c}$ ebenfalls eine Wurzel. Wir führen die folgende Multiplikation durch:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 \tag{2.3a}$$

$$+ (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x + r_1r_2r_3 \tag{2.3b}$$

$$a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) \tag{2.3c}$$

$$r_3 = -(a_2 + r_1 + r_2). \tag{2.3d}$$

Da a_2 rational ist, ist dies auch

$$r_3 = -a_2 - (r_1 + r_2) = -a_2 - 2a,$$

was der Annahme widerspricht. \square

2.7 Die Unmöglichkeit der klassischen Konstruktionen

Satz 2.10 $\sqrt[3]{2}$ ist irrational.

Beweis Nehmen wir an, dass $\sqrt[3]{2}$ rational und gleich p/q ist, wobei p, q ganze Zahlen sind, die keine anderen gemeinsamen Teiler als ± 1 haben. Dann:

$$\begin{aligned}(p/q)^3 &= (\sqrt[3]{2})^3 \\ p^3 &= 2q^3,\end{aligned}$$

also muss p durch 2 teilbar sein, also $p = 2r$. Jetzt:

$$\begin{aligned}8r^3 &= 2q^3 \\ q^3 &= 4r^3,\end{aligned}$$

q ist also durch 2 teilbar, was der Annahme widerspricht, dass p, q keinen gemeinsamen Teiler haben. \square

Satz 2.11 $x^3 - 2$ hat keine rationalen Wurzeln, sodass es unmöglich ist, einen Würfel mit Zirkel und Lineal zu verdoppeln.

Beweis Eine seiner Wurzeln ist $\sqrt[3]{2}$, die nach Satz 2.10 irrational ist. Die anderen Wurzeln sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + \sqrt[3]{2}x + (\sqrt[3]{2})^2$, die man durch Division von $x^3 - 2$ durch $x - \sqrt[3]{2}$ erhält. Es ist leicht zu überprüfen, dass die Wurzeln nicht rational sind (tatsächlich nicht einmal reell). \square

Satz 2.12 Es ist unmöglich, einen beliebigen Winkel mit einem Lineal und einem Zirkel dreizuteilen.

Beweis Es genügt, die Unmöglichkeit für einen Winkel zu zeigen. Versuchen wir, 60° zu dreiteilen, um 20° zu erhalten.

Nach Satz A.6:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \\ \cos 60^\circ &= 4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 20^\circ.\end{aligned}$$

Bezeichne $x = \cos 20^\circ$ und $2x$ durch y . Da $\cos 60^\circ = 1/2$ ist, haben wir:

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$$

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

$$y^3 - 3y - 1 = 0.$$

Um zu beweisen, dass das Polynom $y^3 - 3y - 1$ keine rationalen Wurzeln hat, nehme man an, dass $y = a/b$ eine rationale Wurzel ist, wobei a, b keinen anderen gemeinsamen Teiler als ± 1 haben. Dann:

$$(a/b)^3 - 3(a/b) - 1 = 0 \tag{2.4a}$$

$$a^3 - 3ab^2 = b^3 \tag{2.4b}$$

$$a(a^2 - 3b^2) = b^3 \tag{2.4c}$$

$$a^3 = b(b^2 + 3ab). \tag{2.4d}$$

Nach (2.4c) muss b durch a teilbar sein, und nach (2.4d) muss a durch b teilbar sein, was nur möglich ist, wenn $a = b = \pm 1$ und $a/b = \pm 1$. Einfache Berechnung zeigt, dass $y = a/b = 1$ und $y = a/b = -1$ keine Wurzeln des Polynoms sind. \square

Ein alternativer Weg, die Unmöglichkeit der Konstruktionen zu beweisen, ist die Verwendung des folgenden Satzes, den wir ohne Beweis präsentieren.

Satz 2.13 *Wenn ein monisches Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten rationale Wurzeln hat, dann hat es ganzzahlige Wurzeln.*

Um zu zeigen, dass es nicht möglich ist, einen Würfel zu duplizieren, müssen wir zeigen, dass

$$x^3 - 2 = (x - r_2)(x - r_1)(x - r_0)$$

keine ganzzahligen Wurzeln hat. Da $(-r_2)(-r_1)(-r_0) = -2$ ist, müssen alle Wurzeln durch 2 teilbar sein, also sind die einzigen möglichen ganzzahligen Wurzeln $\pm 1, \pm 2$. Eine schnelle Berechnung zeigt, dass keine von ihnen Wurzeln sind.

Um die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines Winkels zu zeigen, müssen wir zeigen, dass $y^3 - 3y - 1$ keine ganzzahligen Wurzeln hat. Eine ganzzahlige Wurzel muss -1 teilen, aber weder 1 noch -1 sind Wurzeln.

Was ist die Überraschung?

Underwood Dudley hat eine umfangreiche Studie über die „Cranks“, wie er sie nennt, durchgeführt, die Jahre ihres Lebens mit dem Versuch verschwenden, Winkel mit Zirkel und Lineal dreizuteilen. Sie machen sich nicht nur vor, dass dies

möglich ist, sondern, was noch schlimmer ist, sie glauben, dass eine Lösung wichtig wäre. Natürlich hätte eine Lösung keinen praktischen Nutzen, da Werkzeuge wie die Neusis und die Quadratrix das Problem exakt lösen können. Die schiere Anzahl solcher Konstruktionen ist erstaunlich, zumal viele von ihnen clever sind und gute Näherungen erzielen. Das Berechnen der mit den Konstruktionen verbundenen Formeln ist eine hervorragende Übung in Trigonometrie.

Erstaunlich ist auch, dass die Beweise für die Unmöglichkeit dieser geometrischen Konstruktionen rein algebraisch sind, indem man die Eigenschaften der Wurzeln von Polynomen verwendet.

Quellen

Wikipedia [51, 58, 61] ist eine gute Quelle für die Konstruktionen in diesem Kapitel. Die beiden angenäherten Dreiteilungen stammen aus [15, S. 67–68, 95–96]. Das zweite Beispiel wird dem berühmten Philosophen Thomas Hobbes zugeschrieben. Sowohl [31, S. 48–49] als auch [15, S. 6–7] behandeln die Dreiteilung mithilfe der Quadratrix. Die Verdoppelung des Würfels mithilfe einer Neusis wird von [14] übernommen.

Eine rigorose Behandlung der Konstruierbarkeit findet sich in Lehrbüchern über abstrakte Algebra wie [17], das einen allgemeinen Beweis der Umkehrung von Satz 2.6 in Abschn. 32 enthält. Satz 2.13 ist Satz 23.11 von [17]. Eine relativ zugängliche Darstellung von Wantzels Beweis findet sich in [48]. Meine Darstellung der Konstruierbarkeit stützt sich auf die Darstellungen in [11, Kap. III] und [27].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 3

Die Quadratur des Kreises



Die Quadratur des Kreises, d. h. die Konstruktion eines Quadrats mit der gleichen Fläche wie ein gegebener Kreis, ist eines der drei Konstruktionsprobleme, die sich die Griechen stellten, aber nicht lösen konnten. Anders als bei der Dreiteilung des Winkels und der Verdoppelung des Würfels, wo die Unmöglichkeit aus den Eigenschaften der Wurzeln von Polynomen folgt, ergibt sich die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises aus der Transzendentalität der Zahl π : Sie ist keine Wurzel eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten. Dies ist ein schwieriger Satz, der 1882 von Carl von Lindemann bewiesen wurde.

Annäherungen an $\pi \approx 3,14159265359$ sind seit dem Altertum bekannt. Einige einfache, aber einigermaßen genaue Näherungen sind:

$$\frac{22}{7} \approx 3,142857, \quad \frac{333}{106} \approx 3,141509, \quad \frac{355}{113} \approx 3,141593.$$

Wir stellen drei Konstruktionen von Näherungswerten von π mithilfe von Zirkel und Lineal vor. Eine stammt von Adam Kochański (Abschn. 3.1) und zwei von Ramanujan (Abschn. 3.2, 3.3). In Abschn. 3.4 zeigen wir, wie man den Kreis mithilfe der Quadratrix quadriert.

Die folgende Tabelle zeigt die Formeln für die konstruierten Längen, ihre Näherungswerte, die Differenz zwischen diesen Werten und dem Wert von π und den Fehler in Metern, der sich ergibt, wenn die Näherung zur Berechnung des Erdumfangs verwendet wird, wobei ein Radius 6378 km unterstellt wird.

Konstruktion	Formel	Wert	Differenz	Fehler (m)
π	–	3,14159265359	–	–
Kochański	$\sqrt{\frac{40}{3}} - 2\sqrt{3}$	3,14153333871	$5,93 \times 10^{-5}$	757
Ramanujan 1	$\frac{355}{113}$	3,14159292035	$2,67 \times 10^{-7}$	3,4
Ramanujan 2	$\left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4}$	3,14159265258	$1,01 \times 10^{-9}$	0,013

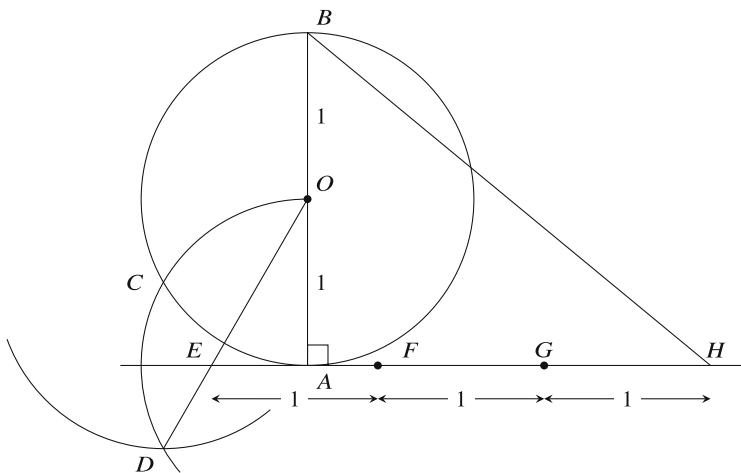


Abb. 3.1 Kochański's Näherungswert von π

3.1 Kochański's Konstruktion

Konstruktion (Abb. 3.1)

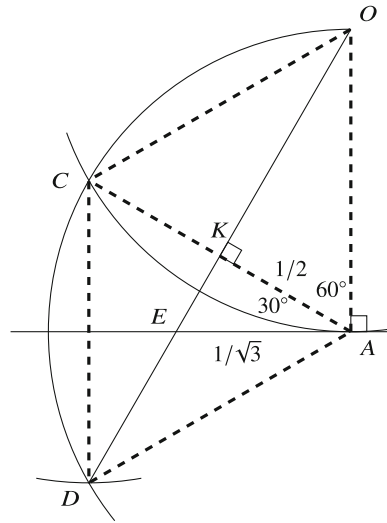
1. Man konstruiere einen Einheitskreis mit dem Mittelpunkt O , \overline{AB} sei ein Durchmesser. Man konstruiere eine Tangente an den Kreis bei A .
2. Man konstruiere einen Einheitskreis mit dem Mittelpunkt A und bezeichne seinen Schnittpunkt mit dem ersten Kreis als C . Man konstruiere einen Einheitskreis, dessen Mittelpunkt C ist, und bezeichne seinen Schnittpunkt mit dem zweiten Kreis als D .
3. Man konstruiere \overline{OD} und bezeichne deren Schnittpunkt mit der Tangente als E .
4. Man konstruiere von E aus F, G, H , jeweils im Abstand 1 zum vorherigen Punkt.
5. Man konstruiere \overline{BH} .

Satz 3.1 $\overline{BH} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx \pi.$

Beweis Abb. 3.2 ist ein vergrößerter Ausschnitt aus Abb. 3.1, dem gestrichelte Strecken hinzugefügt wurden. Da es sich bei allen Kreisen um Einheitskreise handelt, sind die Längen der gestrichelten Strecken 1. Daraus folgt, dass \overline{AOCD} eine Raute ist, sodass ihre Diagonalen senkrecht zueinander stehen und sich an dem mit K bezeichneten Punkt halbieren. $\overline{AK} = 1/2$.

Die Diagonale \overline{AC} bildet zwei gleichseitige Dreiecke $\triangle OAC, \triangle DAC$, also $\triangle OAC = 60^\circ$. Da die Tangente einen rechten Winkel mit dem Radius \overline{OA} bildet,

Abb. 3.2 Detail aus Koch-añskis Konstruktion



ist $\angle KAE = 30^\circ$. Jetzt:

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{\overline{EA}} &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \overline{EA} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \overline{AH} &= 3 - \overline{EA} = \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$\triangle ABH$ ist ein rechtwinkliges Dreieck und $\overline{AH} = 3 - \overline{EA}$, also nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} \overline{BH}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= 4 + \frac{27 - 6\sqrt{3} + 1}{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3} \\ \overline{BH} &= \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} \approx 3,141533387 \approx \pi. \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Ramanujans erste Konstruktion

Konstruktion (Abb. 3.3)

1. Man konstruiere einen Einheitskreis mit dem Mittelpunkt O , und \overline{PR} sei ein Durchmesser.

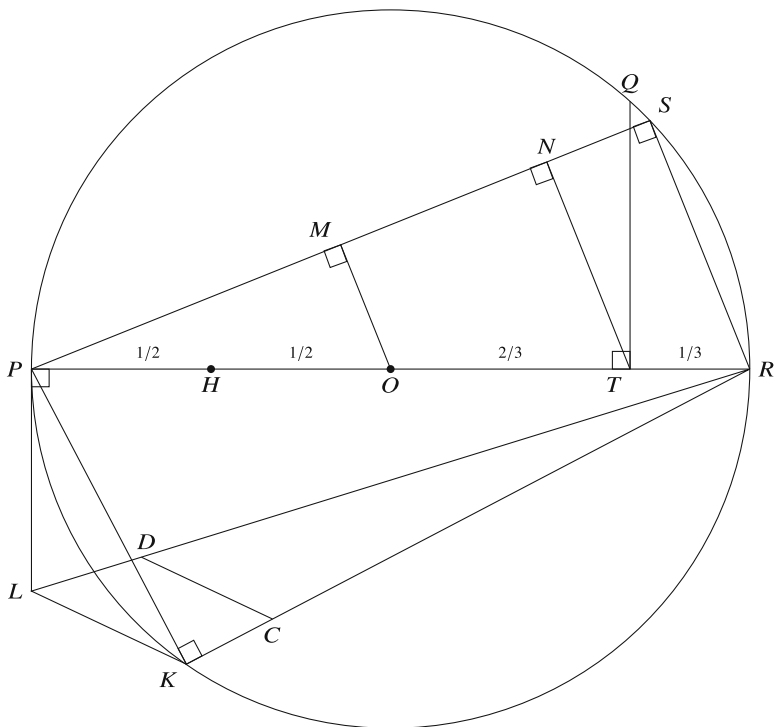


Abb. 3.3 Ramanujans erste Konstruktion

2. Man konstruiere den Punkt H , der \overline{PO} halbiert und den Punkt T , der \overline{RO} dreiteilt (Satz 2.6).
3. Man konstruiere die Senkrechte in T , die den Kreis in Q schneidet.
4. Man konstruiere die Sehnen $\overline{RS} = \overline{QT}$ und \overline{PS} .
5. Man konstruiere eine zu \overline{RS} parallele Gerade von T , die \overline{PS} in N schneidet.
6. Man konstruiere eine Parallele zu \overline{RS} von O aus, die \overline{PS} in M schneidet.
7. Man konstruiere die Sehne $\overline{PK} = \overline{PM}$.
8. Man konstruiere die Tangente an P der Länge $\overline{PL} = \overline{MN}$.
9. Man verbinde die Punkte K, L, R .
10. Man finde den Punkt C so, dass \overline{RC} gleich \overline{RH} ist.
11. Man konstruiere \overline{CD} parallel zu \overline{KL} , wobei D den Schnittpunkt mit \overline{LR} bezeichnet.

Satz 3.2 $\overline{RD}^2 = \frac{355}{113} \approx \pi.$

Beweis $\overline{RS} = \overline{QT}$ durch Konstruktion und mit dem Satz des Pythagoras für $\triangle QOT$:

$$\overline{RS} = \overline{QT} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$\angle PSR$ wird durch einen Durchmesser begrenzt, also ist $\triangle PSR$ ein rechtwinkliges Dreieck. Mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{PS} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{31}}{3}.$$

Gemäß Konstruktion ist $\overline{MO} \parallel \overline{RS}$, also $\triangle MPO \sim \triangle SPR$ und:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PM}}{\overline{PO}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \frac{\overline{PM}}{1} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\ \overline{PM} &= \frac{\sqrt{31}}{6}. \end{aligned}$$

Gemäß Konstruktion gilt $\overline{NT} \parallel \overline{RS}$. Folglich ist $\triangle NPT \sim \triangle SPR$ und:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{PN}}{\overline{PT}} &= \frac{\overline{PS}}{\overline{PR}} \\ \frac{\overline{PN}}{5/3} &= \frac{\sqrt{31}/3}{2} \\ \overline{PN} &= \frac{5\sqrt{31}}{18} \\ \overline{MN} = \overline{PN} - \overline{PM} &= \sqrt{31} \left(\frac{5}{18} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\sqrt{31}}{9}. \end{aligned}$$

$\triangle PKR$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, weil $\angle PKR$ durch einen Durchmesser begrenzt ist. Gemäß Konstruktion ist $\overline{PK} = \overline{PM}$, und mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir:

$$\overline{RK} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{31}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{113}}{6}.$$

$\triangle LPR$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, weil \overline{PL} eine Tangente ist, also ist $\angle LPR$ ein rechter Winkel. $\overline{PL} = \overline{MN}$ gemäß Konstruktion, und mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$\overline{RL} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{31}}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{355}}{9}.$$

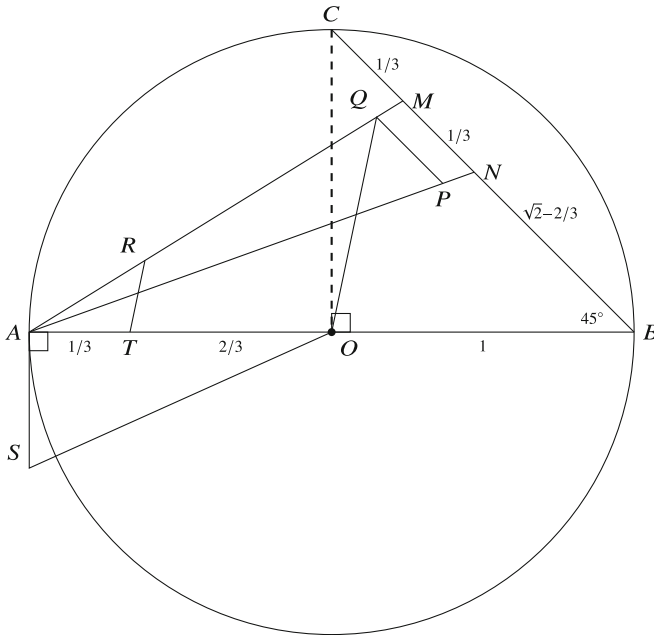


Abb. 3.5 Ramanujans zweite Konstruktion

3.3 Ramanujans zweite Konstruktion

Konstruktion (Abb. 3.5)

1. Man konstruiere einen Einheitskreis mit Mittelpunkt O und Durchmesser \overline{AB} ; C sei der Schnittpunkt der Senkrechten auf \overline{AB} in O mit dem Kreis.
2. Man dreiteile den Streckenabschnitt \overline{AO} so, dass $\overline{AT} = 1/3$ und $\overline{TO} = 2/3$ (Satz 2.6).
3. Man konstruiere \overline{BC} und finde die Punkte M, N , sodass $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{AT} = 1/3$.
4. Man konstruiere $\overline{AM}, \overline{AN}$ und lasse P denjenigen Punkt auf \overline{AN} sein, für den $\overline{AP} = \overline{AM}$.
5. Man konstruiere von P aus eine zu \overline{MN} parallele Gerade, die \overline{AM} in Q schneidet.
6. Man konstruiere \overline{OQ} und dann von T aus eine Gerade parallel zu \overline{OQ} , die \overline{AM} in R schneidet.
7. Man konstruiere \overline{AS} tangential an A , sodass $\overline{AS} = \overline{AR}$.
8. Man konstruiere \overline{SO} .

Satz 3.3 $3\sqrt{\overline{SO}} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx \pi.$

Beweis $\triangle COB$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, also nach dem Satz des Pythagoras $\overline{CB} = \sqrt{2}$ und:

$$\overline{NB} = \sqrt{2} - 2/3.$$

$\triangle COB$ ist gleichschenkelig, also $\angle NBA = \angle MBA = 45^\circ$. Nach dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned}\overline{AN}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BN}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BN} \cdot \cos \angle NBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{22}{9} \\ \overline{AN} &= \sqrt{\frac{22}{9}}.\end{aligned}$$

Wiederum nach dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned}\overline{AM}^2 &= \overline{BA}^2 + \overline{BM}^2 - 2 \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BM} \cdot \cos \angle MBA \\ &= 2^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{19}{9} \\ \overline{AM} &= \sqrt{\frac{19}{9}}.\end{aligned}$$

Gemäß Konstruktion $\overline{QP} \parallel \overline{MN}$, also $\triangle MAN \sim \triangle QAP$, und laut Konstruktion $\overline{AP} = \overline{AM}$:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AM}} &= \frac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \\ \overline{AQ} &= \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}} = \frac{19/9}{\sqrt{22/9}} = \frac{19}{3\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

Gemäß Konstruktion $\overline{TR} \parallel \overline{OQ}$, also $\triangle RAT \sim \triangle QAO$ und:

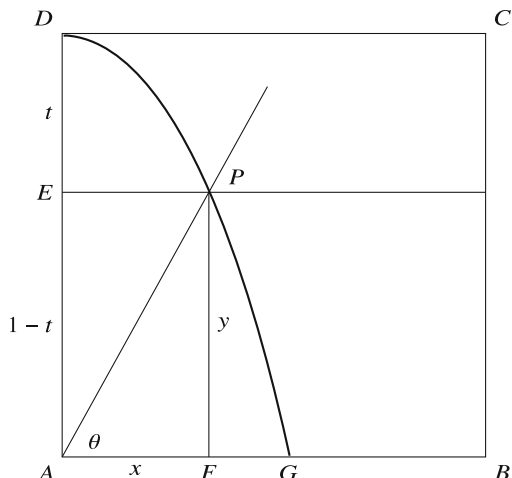
$$\begin{aligned}\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} &= \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} \\ \overline{AR} &= \overline{AQ} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{AO}} = \frac{19}{3\sqrt{22}} \cdot \frac{1/3}{1} = \frac{19}{9\sqrt{22}}.\end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist $\overline{AS} = \overline{AR}$, und $\triangle OAS$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, weil \overline{AS} eine Tangente ist. Mit dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned}\overline{SO} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{19}{9\sqrt{22}}\right)^2} \\ 3\sqrt{\overline{SO}} &= 3\left(1^2 + \frac{19^2}{9^2 \cdot 22}\right)^{1/4} = \left(9^2 + \frac{19^2}{22}\right)^{1/4} \approx 3,14159265258 \approx \pi.\end{aligned}$$

In Abb. 3.6 sind die Strecken mit ihren Längen bezeichnet. \square

Abb. 3.7 Quadratur des Kreises mit einer Quadratrix



Sei $x = \overline{AF} = \overline{EP}$. Dann $\tan \theta = y/x$, also:

$$x = \frac{y}{\tan \theta} = y \cot \theta = y \cot \frac{\pi}{2}(1-t) = y \cot \frac{\pi}{2}y. \quad (3.1)$$

Normalerweise drücken wir eine Funktion als $y = f(x)$ aus, aber sie kann auch als $x = f(y)$ ausgedrückt werden.

Um $x = \overline{AG}$ zu erhalten, können wir nicht einfach $y = 0$ in (3.1) einsetzen, da $\cot 0$ nicht definiert ist, also wollen wir den Grenzwert von x berechnen, wenn y gegen 0 geht. Wir führen zunächst die Substitution $z = (\pi/2)y$ durch und erhalten:

$$x = y \cot \frac{\pi}{2}y = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2}y \cot \frac{\pi}{2}y \right) = \frac{2}{\pi} (z \cot z),$$

und führen dann den Grenzübergang durch:

$$\lim_{z \rightarrow 0} x = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} (z \cot z) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z \cos z}{\sin z} \right) = \frac{2}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\cos z}{(\sin z)/z} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos 0}{1} = \frac{2}{\pi},$$

wobei wir $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin z/z) = 1$ (Satz A.12) verwendet haben. \square

Was ist die Überraschung?

Es ist überraschend, dass so genaue Näherungen an π konstruiert werden können. Natürlich kann man nicht umhin, über Ramanujans clevere Konstruktionen zu staunen.

Quellen

Kochańskis Konstruktion erscheint in [7]. Ramanujans Konstruktionen stammen aus [38, 39]. Die Quadratur des Kreises mithilfe der Quadratrix stammt aus [31, S. 48–49] und [61].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 4

Der Fünf-Farben-Satz



In Landkarten werden Farben verwendet, um eine Region von einer anderen zu unterscheiden, indem dafür gesorgt wird, dass benachbarte Regionen mit unterschiedlichen Farben eingefärbt werden. Im Jahr 1852 stellte Francis Guthrie fest, dass eine Karte der Grafschaften Englands mit nur vier Farben eingefärbt werden konnte. Die Behauptung, dass vier Farben ausreichen, um eine beliebige Landkarte einzufärben, wird als *Vier-Farben-Satz* bezeichnet und wurde erst 1976 von Kenneth Appel und Wolfgang Haken bewiesen. Sie wendeten ausgeklügelte mathematische Argumente an, um zu zeigen, dass, wenn es ein Gegenbeispiel gibt (eine Karte, die mehr als vier Farben benötigt), diese mit einer von 1834 Konfigurationen verbunden sein muss. Anschließend überprüften sie diese Konfigurationen mit einem Computer.

Während der Vier-Farben-Satz extrem schwierig zu beweisen ist, sind die Beweise für der Fünf- und Sechs-Farben-Satz relativ einfach (Abschn. 4.5, 4.6). Auf dem Weg zum Beweis dieser Sätze definieren wir planare Karten und Graphen (Abschn. 4.1), beweisen die Euler-Charakteristik (Abschn. 4.2) und zeigen, dass ein planarer Graph Eckpunkte haben muss, deren Grad kleiner oder gleich fünf ist. In Abschn. 4.3 wird die Euler-Charakteristik verwendet, um zu zeigen, dass zwei Graphen nichtplanar sind.

Im Jahr 1879 veröffentlichte Alfred B. Kempe einen Beweis des Vier-Farben-Satzes, aber 1890 zeigte Percy J. Heawood, dass der Beweis falsch ist. In Abschn. 4.7 präsentieren wir Kempes fehlerhaften Beweis und Heawoods Beweis, dass er nicht korrekt ist.

4.1 Planare Karten und Graphen

Definition 4.1 Eine *planare Karte* ist eine Menge von Regionen in der Ebene, die durch Grenzen getrennt sind. Eine *Färbung* einer Karte ist eine Zuweisung einer Farbe zu jeder Region, sodass Regionen, die eine gemeinsame Grenze besitzen, unterschiedliche Farben zugewiesen werden.

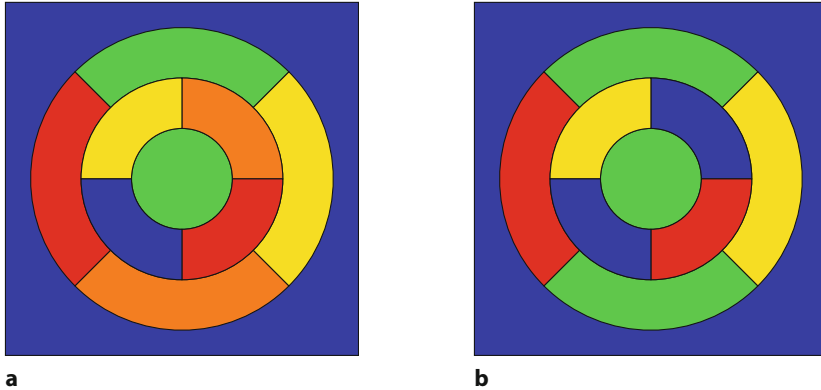


Abb. 4.1 **a** Färbung einer planaren Karte mit fünf Farben. **b** Färbung einer planaren Karte mit vier Farben

Abb. 4.1a zeigt eine fünffarbige Darstellung einer planaren Karte mit zehn Regionen. Abb. 4.1b zeigt eine vierfarbige Darstellung der gleichen Karte.

Definition 4.2 Ein *Graph* ist eine Menge von *Eckpunkten* V und eine Menge von *Kanten* E , sodass jede Kante mit genau zwei Eckpunkten verbunden ist.

Ein *planarer Graph* ist ein Graph, bei dem sich keine Kanten kreuzen. In einem planaren Graphen werden die von einer Menge von Kanten eingeschlossenen Bereiche *Flächen* genannt.

Eine *Färbung* eines planaren Graphen ist eine Zuordnung von Farben zu Eckpunkten, sodass keine zwei Eckpunkte der gleichen Farbe durch eine Kante verbunden sind.

Planare Karten und planare Graphen sind dual, und es bietet sich an, Färbungsprobleme in Graphen statt in Karten zu untersuchen.

Satz 4.1 Bei einer planaren Karte kann ein planarer Graph so konstruiert werden, dass es für jede Färbung der Regionen der Karte eine Färbung der Eckpunkte des Graphen gibt, und umgekehrt.

Beweis Man konstruiere einen Eckpunkt für jede Region sowie eine Kante zwischen zwei Eckpunkten genau dann, wenn die entsprechenden Regionen eine gemeinsame Grenze haben. \square

Beispiel 4.1 Abb. 4.2a zeigt die planare Karte aus Abb. 4.1b und die mit den Regionen verbundenen Eckpunkte. Abb. 4.2b zeigt den planaren Graphen, der der Karte entspricht.

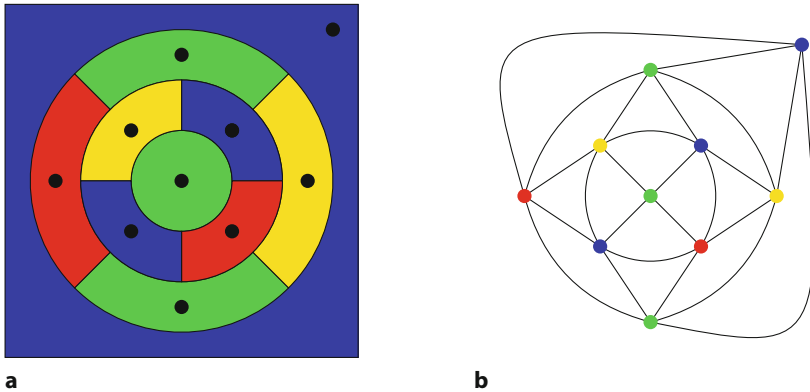


Abb. 4.2 a Zuordnung von Eckpunkten zu den Regionen einer planaren Karte. b Der planare Graph, der der planaren Karte entspricht

Des Weiteren können wir unsere Graphen auf diejenigen beschränken, deren Flächen dreieckig sind.

Definition 4.3 Ein Graph ist *dreieckig*, wenn alle seine Flächen durch drei Kanten begrenzt sind. Ein Graph kann *trianguliert* werden, wenn Kanten hinzugefügt werden können, sodass der Graph dreieckig ist. Wir sagen auch, dass es eine *Triangulation* des Graphen gibt.

Beispiel 4.2 Die Flächen des planaren Graphen in Abb. 4.2b sind dreieckig, da jede Fläche von drei Kanten begrenzt wird. Da die Kanten gekrümmt sind, handelt es sich bei den Flächen nicht um Dreiecke (Polygone, deren drei Kanten gerade Strecken sind).

Der **Satz von Fáry** besagt, dass jeder dreieckige planare Graph in einen äquivalenten planaren Graph umgewandelt werden kann, dessen Kanten gerade Linien sind. Daher können die Beweise ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf planare Graphen beschränkt werden, deren Flächen Dreiecke sind.

Beispiel 4.3 Abb. 4.3 (links) zeigt, dass ein Quadrat zweifarbig sein kann, aber wenn es trianguliert ist (Mitte), sind vier Farben notwendig. Unser Ziel ist es zu beweisen, dass *alle* Graphen n -farbig sein können für ein gewisses n . Wenn der triangulierte Graph n -farbig ist, dann ist es auch der ursprüngliche Graph, weil das Löschen der zusätzlichen Kanten die Färbung nicht ungültig macht (rechts).

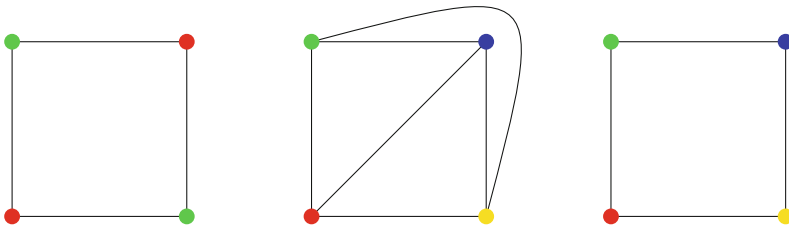


Abb. 4.3 Färben eines triangulierten Graphen

4.2 Euler-Charakteristik

Satz 4.2 Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit V Eckpunkten, E Kanten und F Flächen. Dann gilt $V - E + F = 2$.

Beweis Durch Induktion über die Anzahl der Kanten. Ist die Anzahl der Kanten im Graphen null, so gibt es nur einen einzigen Eckpunkt und eine einzige Fläche, also $1 - 0 + 1 = 2$. Andernfalls gibt es mindestens eine Kante e , und sie verbindet zwei Eckpunkte v_1, v_2 . Wir löschen die Kante e .

Fall 1: Der Graph wird unzusammenhängend (Abb. 4.4a). Man verschmelze v_1 mit v_2 (Abb. 4.4b). Der resultierende Graph G' ist ein planarer zusammenhängender Graph und hat weniger Kanten als G , sodass nach der Induktionshypothese $(V - 1) - (E - 1) + F = 2$, da auch die Anzahl der Eckpunkte um eins reduziert ist. Vereinfachend erhalten wir $V - E + F = 2$ für G .

Fall 2: Der Graph bleibt verbunden (Abb. 4.5a). G' hat weniger Kanten als G (Abb. 4.5b), sodass nach der Induktionshypothese $V - (E - 1) + (F - 1) = 2$, da

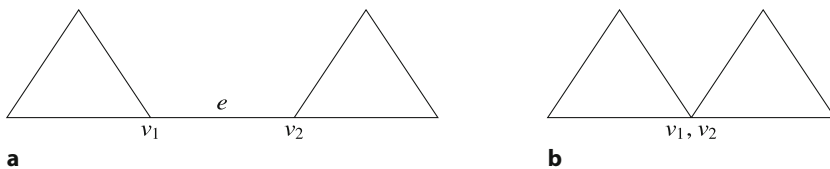


Abb. 4.4 a Das Entfernen einer Kante unterbricht die Verbindung des Graphen. b Verschmelzen von zwei Eckpunkten

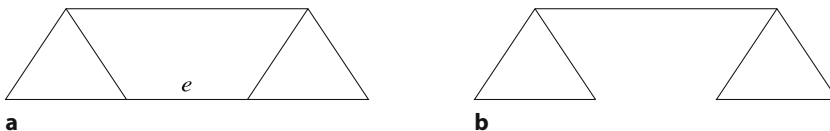


Abb. 4.5 a Durch das Entfernen einer Kante wird die Verbindung des Graphen nicht unterbrochen. b Der Graph bleibt zusammenhängend und hat weniger Kanten

das Entfernen der Kante zwei Flächen zu einer verbindet. Vereinfachend erhalten wir $V - E + F = 2$ für G . \square

Satz 4.3 Sei G ein zusammenhängender, triangulierter, planarer Graph mit E Kanten und V Eckpunkten. Dann gilt $E = 3V - 6$.

Beweis Jede Fläche wird von drei Kanten begrenzt, also $E = 3F/2$, wobei wir durch 2 teilen, weil jede Kante zweimal gezählt wurde: je einmal für jede Fläche, die sie begrenzt. Mit der Euler-Charakteristik:

$$\begin{aligned} E &= V + F - 2 \\ &= V + 2E/3 - 2 \\ &= 3V - 6. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 4.4 Der planare Graph in Abb. 4.2b hat 10 Eckpunkte und $3 \cdot 10 - 6 = 24$ Kanten.

Satz 4.4 Sei G ein zusammenhängender planarer Graph. Dann gilt $E \leq 3V - 6$.

Beweis Man trianguliere G , um G' zu erhalten. $E' = 3V' - 6$ nach Satz 4.3. Man entferne nun Kanten aus G' , um G zu erhalten. Die Anzahl der Eckpunkte ändert sich nicht, sodass $E' \leq 3V - 6$ ist. \square

Beispiel 4.5 Der Graph in Abb. 4.6a hat 8 Kanten und 6 Eckpunkte, und es ist $8 < 3 \cdot 6 - 6 = 12$. Abb. 4.6b zeigt einen triangulierten Graphen mit 6 Eckpunkten und $3 \cdot 6 - 6 = 12$ Kanten.

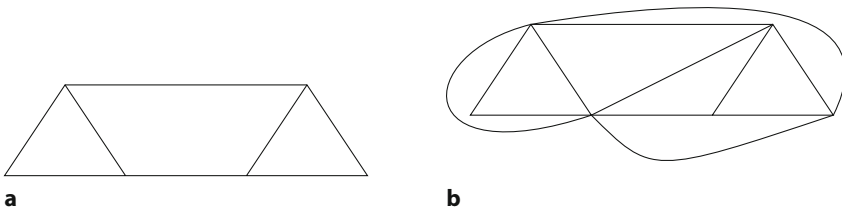


Abb. 4.6 a Weniger Kanten als die Obergrenze. b In einem triangulierten Graphen ist die Anzahl der Kanten maximal

4.3 Nichtplanare Graphen

Lassen Sie uns einen kurzen Exkurs machen, um zu zeigen, wie Satz 4.2 und 4.4 verwendet werden können, um zu beweisen, dass bestimmte Graphen nichtplanar sind.

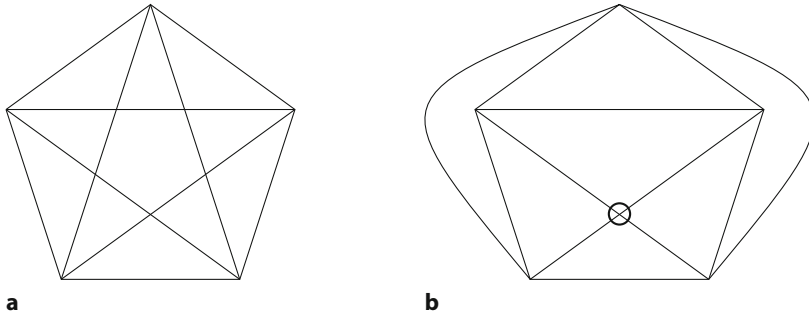


Abb. 4.7 **a** K_5 ist nichtplanar. **b** Ein gescheiterter Versuch, K_5 als planar zu zeichnen

Satz 4.5 K_5 , der vollständige Graph mit fünf Eckpunkten, ist nichtplanar (Abb. 4.7).

Beweis Für K_5 , $V = 5$ und $E = 10$. Nach Satz 4.4 muss die Anzahl der Kanten kleiner oder gleich $3 \cdot 5 - 6 = 9$ sein, also ist der Graph nichtplanar. \square

Satz 4.6 $K_{3,3}$, der bipartite (paare) Graph mit drei Eckpunkten auf jeder Seite, ist nichtplanar (Abb. 4.8a).

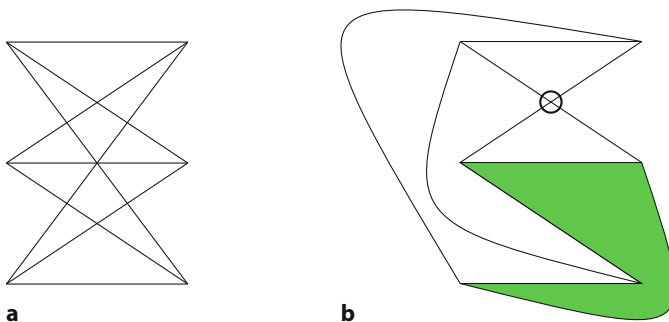


Abb. 4.8 **a** $K_{3,3}$ ist nichtplanar. **b** Ein gescheiterter Versuch, $K_{3,3}$ als planar zu zeichnen

Beweis $V = 6$ und $E = 9$. Nach Satz 4.2 ist, wenn $K_{3,3}$ planar ist, $F = E - V + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. Aber jede Fläche wird durch vier Kanten begrenzt (Abb. 4.8b), also $E = 4F/2 = 10 \neq 9$. \square

Im Jahr 1930 bewies Kazimierz Kuratowski eine Umkehrung dieser Sätze: Wenn ein Graph nichtplanar ist, enthält er (in einem bestimmten Sinne) K_5 oder $K_{3,3}$.

4.4 Die Gradzahlen der Eckpunkte

Definition 4.4 $d(v)$, der *Grad* des Eckpunkts v , ist die Anzahl der Kanten, die mit v verbunden sind.

Beispiel 4.6 Der Graph in Abb. 4.2b enthält 8 Eckpunkte, die den beiden Ringen entsprechen, und jeder Eckpunkt hat den Grad 5. Der Eckpunkt, der der äußeren Fläche entspricht, hat den Grad 4, ebenso der Eckpunkt, der der inneren Fläche entspricht. Daher

$$\sum_{v \in V} d(v) = 5 \cdot 8 + 4 \cdot 2 = 48.$$

Um die Gesamtzahl der Kanten zu erhalten, muss man 48 durch 2 teilen, da jede Kante zweimal gezählt wurde: je einmal für jeden der Eckpunkte, mit denen sie verbunden ist.

Wenn wir das Argument verallgemeinern, erhalten wir:

Satz 4.7 Sei d_i für i in $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ die Anzahl der Eckpunkte vom Grad i in einem zusammenhängenden planaren Graphen G mit V Eckpunkten und E Kanten, wobei k der höchste Grad eines Eckpunkts in V ist. Dann:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E.$$

Satz 4.8 Sei G ein zusammenhängender planarer Graph mit E Kanten und V Eckpunkten, und sei d_i für i in $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ die Anzahl der Eckpunkte vom Grad i , wobei k der höchste Grad eines Eckpunkts in V ist. Dann muss es einen Eckpunkt v in V geben, sodass $d(v) \leq 5$ ist.

Beweis (I) Wenn es d_1 Eckpunkte vom Grad 1, d_2 Eckpunkte vom Grad 2, \dots , d_k Eckpunkte vom Grad k gibt, dann $V = \sum_{i=1}^k d_i$. Aus Satz 4.4 und 4.7:

$$\sum_{i=1}^k i \cdot d_i = 2E \leq 2(3V - 6) = 6V - 12 = 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12.$$

Deshalb:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k i \cdot d_i &\leq 6 \sum_{i=1}^k d_i - 12 \\ \sum_{i=1}^k (6 - i) d_i &\geq 12. \end{aligned}$$

Da $12 > 0$ und alle d_i positiv sind, gibt es mindestens ein i mit $6 - i > 0$ bzw. $i < 6$.
□

Beweis (2) Berechnen wir den *durchschnittlichen* Grad der Eckpunkte, also die Summe der Grade geteilt durch die Anzahl der Eckpunkte:

$$d_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^k i \cdot d_i}{V}.$$

Die Summe der Grade ist das Doppelte der Anzahl der Kanten, was nach Satz 4.4 ergibt:

$$d_{avg} = \frac{2E}{V} \leq \frac{6V - 12}{V} = 6 - \frac{6}{V} < 6.$$

Wenn der Durchschnitt kleiner als sechs ist, muss es einen Eckpunkt vom Grad kleiner als sechs geben. □

Beispiel 4.7 In Abb. 4.2b ist die Summe der Grade $8 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 48$. Es gibt 10 Eckpunkte, also ist der durchschnittliche Grad $48/10 = 4,8$ und es muss einen Eckpunkt mit dem Grad 4 oder kleiner geben.

4.5 Der Sechs-Farben-Satz

Satz 4.9 Jeder planare Graph G kann sechsfarbig sein.

Beweis Durch Induktion über die Anzahl der Eckpunkte. Wenn G sechs Eckpunkte oder weniger hat, genügen sechs Farben. Für den Induktionsschritt hat G nach Satz 4.8 einen Eckpunkt v mit Grad 5 oder weniger. Man lösche den Eckpunkt v , um den Graphen G' zu erhalten. Nach der Induktionshypothese kann G' sechsfarbig sein, aber v hat höchstens 5 Nachbarn und es werden höchstens 5 Farben verwendet, um sie zu färben (Abb. 4.9a), also kann v mit der sechsten Farbe gefärbt werden (Abb. 4.9b). □

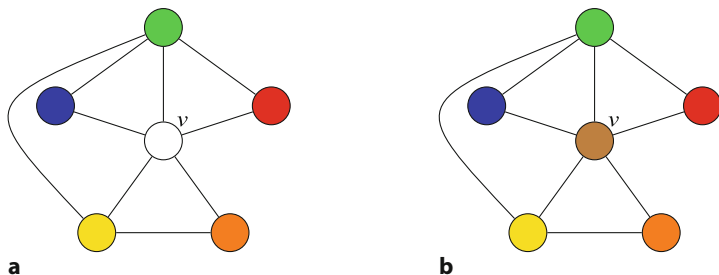


Abb. 4.9 a Fünf Farben reichen aus, um die Nachbarn von v einzufärben. b Färbung von v mit der sechsten Farbe

4.6 Der Fünf-Farben-Satz

Definition 4.5 Sei G ein farbiger planarer Graph. Eine (*Kempe*)-Kette G' ist ein maximaler, zweifarbiger, zusammenhängender Untergraph von G .

Satz 4.10 Jeder planare Graph G kann fünffarbig sein.

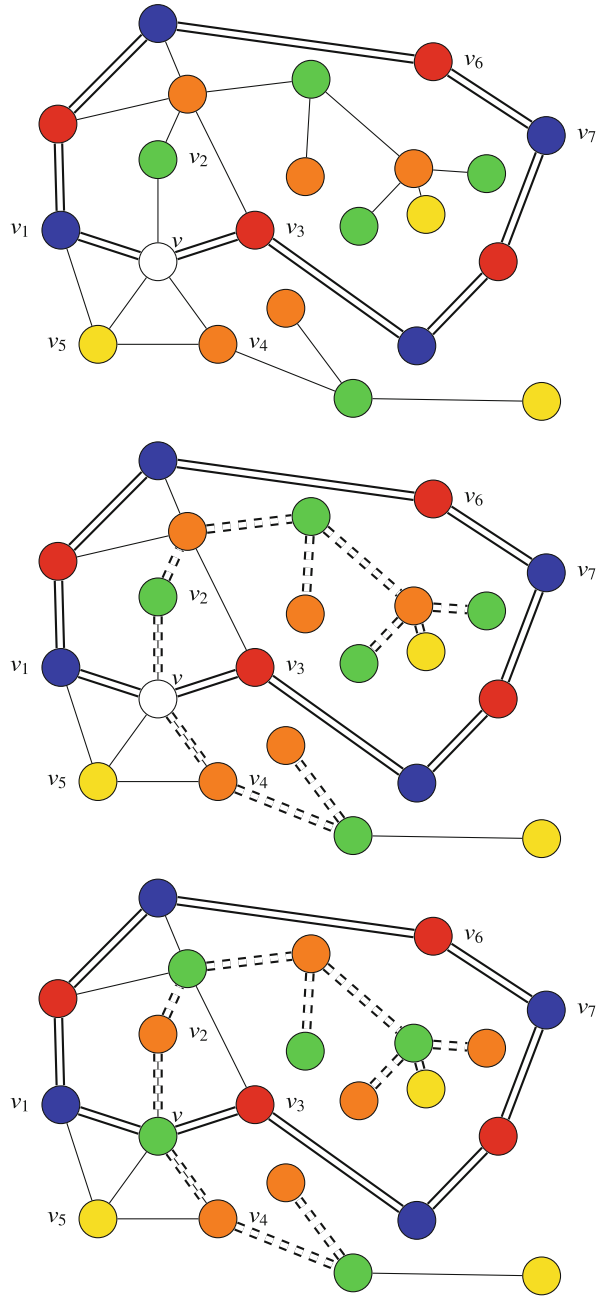
Beweis Durch Induktion über die Anzahl der Eckpunkte. Wenn G fünf Eckpunkte oder weniger hat, genügen fünf Farben. Für den Induktionsschritt hat G nach Satz 4.8 einen Eckpunkt v mit Grad 5 oder weniger. Man lösche v , um G' zu erhalten. Nach der Induktionshypothese kann G' fünffarbig sein. In G kann v mit der fünften Farbe gefärbt werden, wenn der Grad von v kleiner als 5 ist, oder wenn v_1, \dots, v_5 , die Nachbarn von v , mit vier oder weniger Farben gefärbt sind. Andernfalls werden v_1, \dots, v_5 in G' mit verschiedenen Farben gefärbt (Abb. 4.10, oben).

Betrachten wir den blau gefärbten Eckpunkt v_1 und den rot gefärbten Eckpunkt v_3 . Wenn v_1, v_3 nicht durch einen blau-roten Pfad verbunden sind (z. B. wenn die Kante $\overline{v_6 v_7}$ nicht existiert), können wir die Farben entlang des Pfades von v_1 nach v_6 vertauschen und v blau färben. Andernfalls betrachten wir die blau-rote Kette, die v_1, v_3 enthält. Durch Hinzufügen von v und den Kanten $\overline{v v_1}, \overline{v v_3}$ erhalten wir einen geschlossenen Pfad P (Doppellinie), der die Ebene in einen „inneren“ Bereich und einen „äußeren“ Bereich teilt (Abb. 4.10, Mitte).

Betrachten wir v_2 , der grün gefärbt ist, und v_4 , der orange gefärbt ist. Diese Eckpunkte können nicht in einer einzigen grün-orangen Kette enthalten sein, weil v_2 innerhalb von P und v_4 außerhalb von P liegt, sodass jeder Pfad, der sie verbindet, P durchqueren muss, was der Annahme widerspricht, dass der Graph planar ist. Daher müssen sie in zwei *unverbundenen* grün-orangen Ketten enthalten sein (doppelt gestrichelte Linie, in Abb. 4.10, Mitte). Vertauscht man die Farben der Kette, die v_2 enthält, so kann v grün gefärbt werden und man erhält eine Einfärbung von G mit fünf Farben (Abb. 4.10, unten). \square

Die Aussage, dass ein kontinuierlicher Pfad von *innerhalb* einer geschlossenen stetigen Kurve P nach *außerhalb* von P die Kurve P schneiden muss, ist Inhalt des **Kurvensatzes von Jordan**. Der Satz ist intuitiv offensichtlich, aber schwer zu beweisen.

Abb. 4.10 Beweis des Fünf-Farben-Satzes



4.7 Kempes falscher Beweis des Vier-Farben-Satzes

Satz 4.11 *Jeder planare Graph G kann vierfarbig sein.*

Beweis (Falsch) Der Induktionsanfang und der größte Teil sind genauso wie beim Fünf-Farben-Satz. Der neue Fall, der betrachtet werden muss, ist ein Eckpunkt v mit fünf Nachbarn, der nach der Induktionshypothese mit vier Farben gefärbt werden kann, nachdem v entfernt wurde.

In Abb. 4.11a gibt es zwei blau gefärbte Eckpunkte v_2, v_5 . Betrachten wir die blau-grüne Kette mit v_2 und die blau-gelbe Kette mit v_5 . Die blau-grüne Kette ist in dem geschlossenen Pfad enthalten, der durch die rot-gelbe Kette, die v_1, v_3 enthält, definiert ist (doppelte Linie), und die blau-gelbe Kette ist in dem geschlossenen Pfad enthalten, der durch die rot-grüne Kette, die v_1, v_4 enthält, definiert ist (doppelt gestrichelte Linie).

Wir vertauschen die Farben der blau-grünen Kette und der blau-gelben Kette (Abb. 4.11b). Das Ergebnis ist, dass die Nachbarn von v mit den drei Farben Rot, Grün und Gelb eingefärbt werden, sodass Blau als Farbe für v frei bleibt. \square

Heawood stellte fest, dass die geschlossenen Pfade, die durch die rot-gelbe Kette und die rot-grüne Kette definiert sind, rote Eckpunkte teilen können (v_1, v_8 in Abb. 4.12a). Wenn die Farben in den blau-grünen und blau-gelben Ketten ausgetauscht werden, ist es möglich, dass die blauen Eckpunkte v_6, v_7 verbunden sind (Abb. 4.12b) und die Färbung nicht mehr korrekt ist.

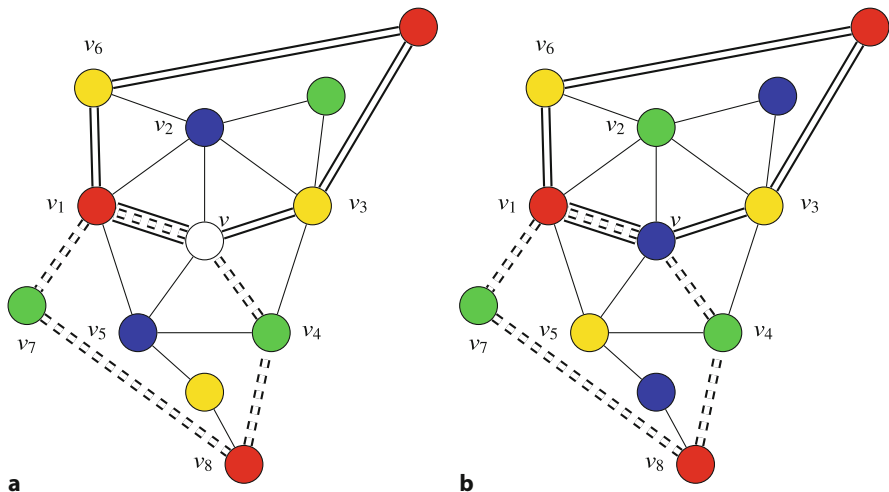


Abb. 4.11 **a** Blau-grüne und blau-gelbe Kempe-Ketten. **b** Vertauschung der Farben der beiden Kempe-Ketten

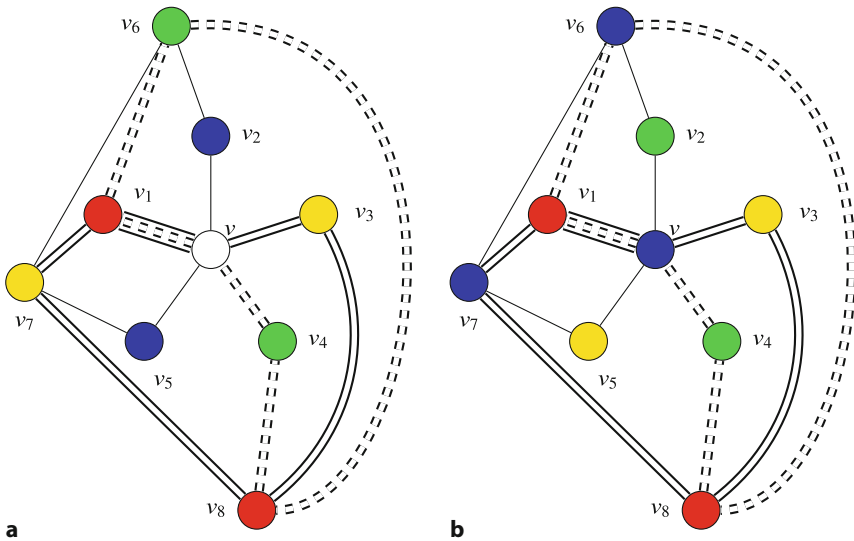


Abb. 4.12 **a** Rot-gelbe und rot-grüne Ketten teilen sich rote Eckpunkte. **b** Durch den Austausch der Farben werden die blauen Eckpunkte miteinander verbunden

Was ist die Überraschung?

Der Vier-Farben-Satz ist berühmt-berüchtigt, weil er so einfach zu formulieren, aber extrem schwierig zu beweisen ist. Daher ist es überraschend, dass der Beweis des Fünf-Farben-Satzes elementar ist. Der clevere Teil des Beweises ist Satz 4.8 (ein planarer Graph muss einen Eckpunkt von höchstens Grad 5 haben), ein Satz, der nichts mit Färbung zu tun hat. Stattdessen ergibt er sich einfach aus dem Zählen von Eckpunkten und Kanten.

Quellen

Für den Vier-Farben-Satz siehe [49, 54]. Der Beweis des Fünf-Farben-Satzes basiert auf [1, 53]. [16] enthält zahlreiche Beweise für die Euler-Charakteristik. Kempes fehlerhafter Beweis des Vier-Farben-Satzes ist in [46] beschrieben.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



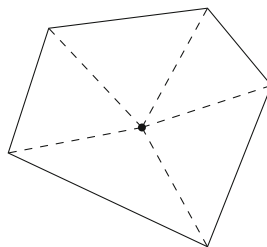
Kapitel 5

Wie man ein Museum bewacht



Victor Klee stellte 1973 die Frage, wie viele Wächter nötig sind, um alle Wände eines Museums zu überwachen. Wenn die Wände ein regelmäßiges Polygon oder sogar ein konvexes Polygon bilden, ist ein Wächter ausreichend (Abb. 5.1).

Abb. 5.1 Ein Museum, dessen Wände ein konvexes Vieleck bilden



Betrachten wir nun ein Museum mit sägezahnförmigen Wänden (Abb. 5.2). Wir überprüfen durch Zählen, dass das Museum 15 Wände hat. Jeder „Zahn“ definiert ein Dreieck, das in Abb. 5.3 grau schattiert ist. Ein Wächter, der sich an einer beliebigen Stelle innerhalb eines der Dreiecke befindet, kann alle Wände beobachten, die dieses Dreieck begrenzen (rote Pfeile).

Wenn mindestens einer der Wächter in der Nähe der obersten Wand platziert ist, die das gesamte Museum überspannt, kann er alle horizontalen Wände beobachten (blaue Pfeile in Abb. 5.4). Es genügen also $5 = 15/3$ Wächter, um alle Wände des Museums zu beobachten. Da sich die Dreiecke nicht überschneiden, kann ein

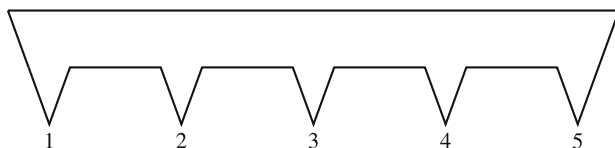


Abb. 5.2 Ein Museum, dessen Wände kein konvexes Vieleck bilden

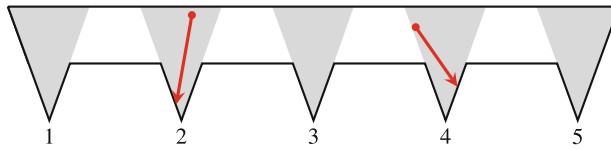


Abb. 5.3 Sichtbarkeit innerhalb jedes „Zahns“

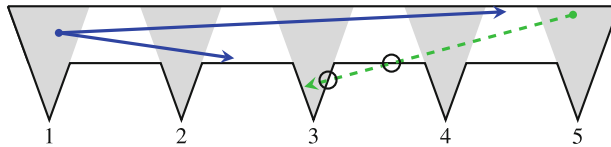


Abb. 5.4 Sichtbarkeit der Wände des Museums

Wächter in einem Dreieck nicht alle Wände eines anderen Dreiecks beobachten (grüner Pfeil), sodass 5 Wachen notwendig sind.

Das Beispiel in Abb. 5.2 kann auf $n/3$ Zähne mit n Wänden verallgemeinert werden, sodass wir schließen, dass *mindestens* $n/3$ Wächter notwendig sind. Wir wollen beweisen, dass $n/3$ Wächter ausreichen, um ein beliebiges Museum zu bewachen.

Abschn. 5.1 beweist, dass jedes triangulierte Polygon dreifarbig sein kann. Dies wird in Abschn. 5.2 verwendet, um den Satz zu beweisen, dass $n/3$ Wächter ausreichend sind. Abschn. 5.3 vervollständigt den Beweis, indem er zeigt, dass jedes Polygon trianguliert werden kann.

5.1 Triangulierte Polygone färben

Definition 5.1 Eine *Diagonale* des Polygons ist eine Kante, die zwei Eckpunkte verbindet und nicht zu den (äußeren) Kanten des Polygons gehört.

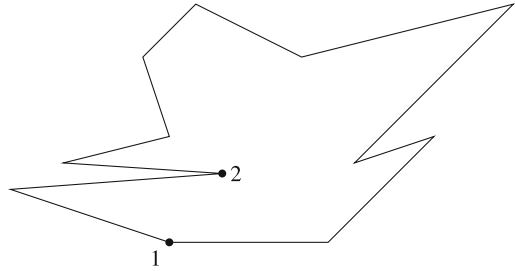
Definition 5.2 Ein Polygon ist trianguliert, wenn nichtschneidende Diagonalen so konstruiert werden können, dass das Innere des Polygons von Dreiecken bedeckt ist.

Satz 5.1 Jedes beliebige Polygon kann trianguliert werden.

Wir stellen den Beweis von Satz 5.1 zurück.

Definition 5.3 Ein Eckpunkt eines Polygons ist *konvex*, wenn sein Innenwinkel kleiner als 180° ist; ein Eckpunkt ist *konkav*, wenn sein Innenwinkel größer als 180° ist.

Abb. 5.5 Ein Polygon mit einem konvexen Eckpunkt (1) und einem konkaven Eckpunkt (2)



In Abb. 5.5 ist der Eckpunkt 1 konvex und der Eckpunkt 2 ist konkav.

Definition 5.4 Ein Polygon mit Eckpunkten V kann *dreifarbig* sein, wenn es eine Karte gibt:

$$c: V \mapsto \{red, blue, green\},$$

sodass keine Kante zwei Eckpunkte hat, denen die gleiche Farbe zugewiesen ist.

Satz 5.2 Ein trianguliertes Polygon kann dreifarbig sein.

Beweis Durch Induktion über die Anzahl der Eckpunkte. Ein Dreieck kann dreifarbig sein. Ein trianguliertes Polygon mit $n > 3$ Eckpunkten muss eine Diagonale haben. Wähle eine beliebige Diagonale \overline{AB} (Abb. 5.6a) und teile das Polygon entlang dieser Diagonale in zwei kleinere Polygone (Abb. 5.6b). Durch Induktion kann jedes dieser kleineren Polygone dreifarbig sein (Abb. 5.7a).

Da die zugewiesenen Farben willkürlich sind, können wir, wenn A, B in den beiden Polygonen unterschiedliche Farben zugewiesen werden, die Farben in einem der beiden Polygone umbenennen, sodass die Farben von A, B in beiden Polygonen gleich sind. In Abb. 5.7b tausche man zum Beispiel *rot* und *grün* im unteren Polygon aus. Wir fügen nun die beiden Polygone zusammen, um das ursprüng-

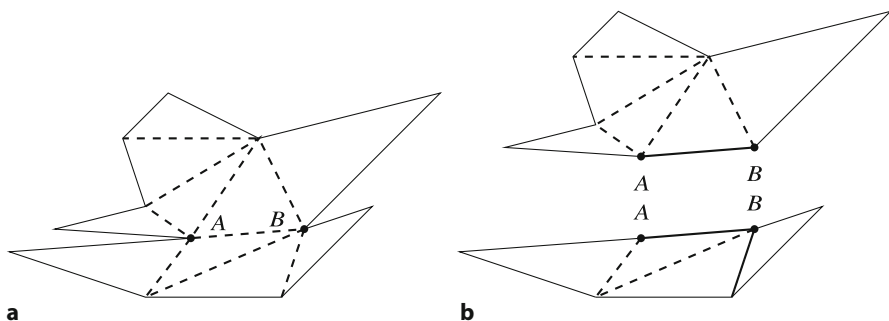


Abb. 5.6 a Eine beliebige Diagonale in einem Polygon. b Teilung des Polygons

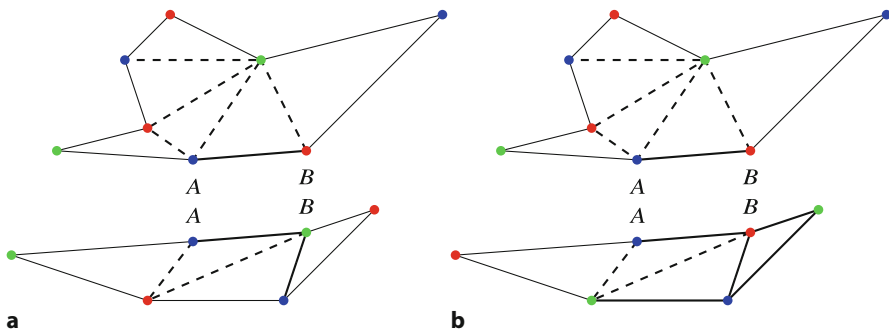
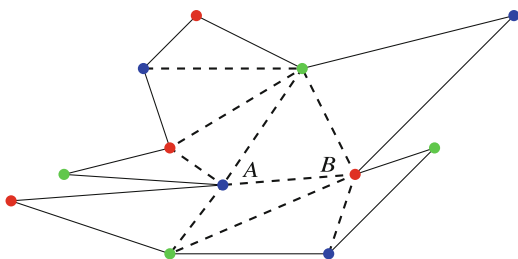


Abb. 5.7 **a** Dreifarbige Darstellung der beiden kleineren Polygone. **b** Vertauschung der Farben eines Polygons, um sie an das andere anzupassen

Abb. 5.8 Zusammenfügen der beiden kleineren Polygone



liche Polygon mit n Eckpunkten zu erhalten. Dieses ist dann ebenfalls dreifarbig (Abb. 5.8).

□

5.2 Vom Färben von Polygonen zum Bewachen eines Museums

Satz 5.3 Ein Museum mit n Wänden kann von $n/3$ Wächtern bewacht werden.

Beweis Wegen Satz 5.1 kann das Polygon trianguliert werden und gemäß Satz 5.2 kann das Polygon dreifarbig sein. Alle drei Eckpunkte jedes Dreiecks in der Triangulation müssen mit *unterschiedlichen* Farben gefärbt sein, um die Bedingung der Dreifarbigkeit zu erfüllen. Da das Polygon dreifarbig ist, kann mindestens eine Farbe, z. B. Rot, höchstens $n/3$ mal vorkommen, und jedes Dreieck muss einen rot gefärbten Eckpunkt haben. Stationiere einen Wächter an jedem roten Eckpunkt; er kann alle Wände des Dreiecks beobachten, zu dem der Eckpunkt gehört. Da die Dreiecke der Triangulation alle Kanten des Polygons umfassen, reichen $n/3$ Wächter aus, um alle Wände des Museums zu beobachten. □

Wenn n nicht durch 3 teilbar ist, ist die Anzahl der benötigten Wächter $\lfloor n/3 \rfloor$, die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $n/3$. Für Museen mit 12, 13, 14 Wänden reichen beispielsweise 4 Wächter aus, da $\lfloor 12/3 \rfloor = \lfloor 13/3 \rfloor = \lfloor 14/3 \rfloor = 4$. Der Einfachheit halber ignorieren wir diese Komplikation.

5.3 Jedes Polygon kann trianguliert werden

Satz 5.4 Die Summe der Innenwinkel eines Polygons mit n Eckpunkten ist:

$$180^\circ(n - 2).$$

Beweis Man betrachte ein konvexes Polygon und bezeichne seine Außenwinkel mit θ_i (Abb. 5.9). Wenn man sich von einer gestrichelten Linie zur nächsten bewegt, vollzieht man eine Drehung um einen Kreis, folglich:

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 360^\circ.$$

Für jeden Außenwinkel θ_i bezeichne man den entsprechenden Innenwinkel mit ϕ_i . Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \theta_i &= \sum_{i=1}^n (180^\circ - \phi_i) = 360^\circ \\ \sum_{i=1}^n \phi_i &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ = 180^\circ(n - 2). \end{aligned}$$

Wenn es einen konkaven Eckpunkt gibt (B in Abb. 5.10), gibt es ein Dreieck, das von den beiden Kanten, die auf den konkaven Eckpunkt treffen, und der Linie \overline{AC} ,

Abb. 5.9 Die Außenwinkel eines konvexen Polygons

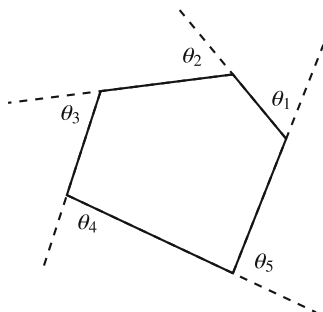
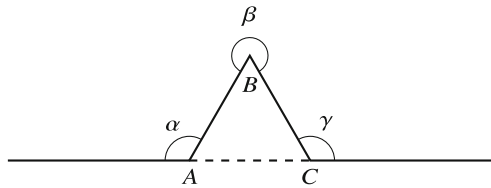


Abb. 5.10 Ein konkaver Eckpunkt



die die beiden anderen Eckpunkte verbindet, gebildet wird. Summiert man die Winkel des Dreiecks, so erhält man:

$$\begin{aligned}(180^\circ - \alpha) + (360^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) &= 180^\circ \\ \alpha + \beta + \gamma &= 3 \cdot 180^\circ.\end{aligned}$$

Die Summe der Innenwinkel nimmt um $\alpha + \beta + \gamma$ zu, während die Anzahl der Eckpunkte um drei zunimmt, sodass die Gleichung im Satz erhalten bleibt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \phi_i + (\alpha + \beta + \gamma) &= 180^\circ(n - 2) + 3 \cdot 180^\circ \\ &= 180^\circ((n + 3) - 2). \quad \square\end{aligned}$$

Satz 5.5 Ein Polygon muss mindestens drei konvexe Eckpunkte haben.

Beweis Sei k die Anzahl der konkaven Eckpunkte, deren Innenwinkel $180^\circ + \epsilon_i$ ist, $\epsilon_i > 0$. Die Summe der Innenwinkel der *konkaven* Eckpunkte ist sicher kleiner oder gleich der Summe der Innenwinkel von *allen* Eckpunkten:

$$\begin{aligned}k \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq 180^\circ(n - 2) \\ (k + 2) \cdot 180^\circ + \sum_{i=1}^k \epsilon_i &\leq n \cdot 180^\circ \\ (k + 2) \cdot 180^\circ &< n \cdot 180^\circ \\ k &< n - 2.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass es mindestens drei Eckpunkte geben muss, die konvex und nicht konkav sind. \square

Beweis (Satz 5.1) Durch Induktion über die Anzahl der Eckpunkte. Für $n = 3$ gibt es nichts zu beweisen. Wenn $n > 3$, muss es nach Satz 5.5 einen konvexen Eckpunkt C geben. Man beschrifte seine benachbarten Eckpunkte mit B, D . Wenn \overline{BD} im Polygon enthalten ist (Abb. 5.11a), ist sie eine Diagonale und das Polygon kann

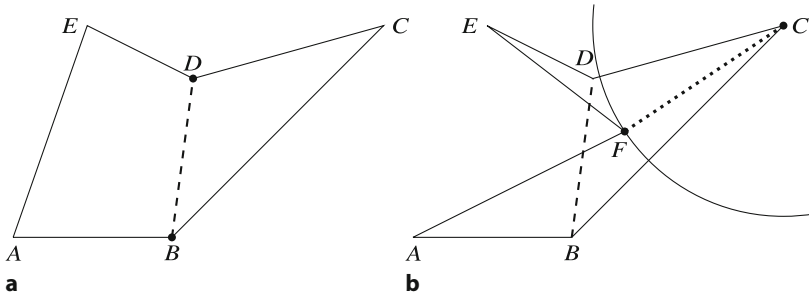


Abb. 5.11 **a** Triangulation, bei der eine Diagonale im Polygon enthalten ist. **b** Triangulation, bei der eine Diagonale nicht im Polygon enthalten ist

in ein $\triangle BCD$ und ein weiteres Polygon \overline{ABDE} mit \overline{BD} als Kante zerlegt werden, das kleiner als das ursprüngliche Polygon ist (Abb. 5.11a). Mit der Induktionshypothese kann das Polygon trianguliert und dann wieder in das $\triangle BCD$ eingefügt werden, wodurch das ursprüngliche Polygon trianguliert wird.

Wenn \overline{BD} nicht im Polygon enthalten ist, muss es einen konkaven Eckpunkt F geben, der C am nächsten liegt (Abb. 5.11b). Dann ist \overline{CF} eine Diagonale und zerlegt das Polygon in zwei kleinere Polygone \overline{CFED} und \overline{CFAB} . Gemäß Induktionshypothese können diese trianguliert und zusammengesetzt werden. \square

Was ist die Überraschung?

Der Museumssatz ist überraschend, denn was wie ein Satz in der Geometrie aussieht, wird recht elegant durch einen Rückgriff auf die Färbung eines Graphen bewiesen.

Quellen

Dieses Kapitel basiert auf [1, Kap. 39].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 6

Induktion



Das Prinzip der mathematischen Induktion wird in der Mathematik häufig als Beweismethode verwendet. In diesem Kapitel werden induktive Beweise von Ergebnissen vorgestellt, die dem Leser vielleicht nicht bekannt sind. Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über die mathematische Induktion (Abschn. 6.1). Abschn. 6.2 beweist Ergebnisse über die bekannten Fibonacci-Zahlen, während Abschn. 6.3 Ergebnisse über Fermat-Zahlen beweist. Abschn. 6.4 stellt die von John McCarthy entdeckte 91-Funktion vor; der Beweis erfolgt durch Induktion auf eine ungewöhnliche Folge: ganze Zahlen in einer umgekehrten Reihenfolge. Der Beweis der Formel für das Josephus-Problem (Abschn. 6.5) ist wegen der doppelten Induktion auf zwei verschiedene Teile eines Ausdrucks ebenfalls ungewöhnlich.

6.1 Das Prinzip der mathematischen Induktion

Die mathematische Induktion ist die wichtigste Methode, um zu beweisen, dass Aussagen für eine unbeschränkte Menge von Zahlen wahr sind. Man betrachte:

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Wir könnten feststellen, dass:

$$1 = (1 \cdot 2)/2, \quad 3 = (2 \cdot 3)/2, \quad 6 = (3 \cdot 4)/2, \quad 10 = (4 \cdot 5)/2,$$

und vermuten dann, dass für *all* ganze Zahlen $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wenn man genug Geduld hat, ist es einfach, diese Formel für einen bestimmten Wert von n zu überprüfen, aber wie kann man sie für *alle* der unendlichen Anzahl von positiven ganzen Zahlen beweisen? An dieser Stelle kommt die mathematische Induktion ins Spiel.

Axiom 6.1 Sei $P(n)$ eine Eigenschaft (etwa eine Gleichung, eine Formel oder ein Satz), wobei n eine positive ganze Zahl ist. Angenommen, das Folgende ist möglich:

- *Basisfall*: Beweis, dass $P(1)$ wahr ist.
- *Induktionsschritt*: Beweis für beliebige m , dass $P(m + 1)$ wahr ist, unter der Annahme, dass $P(m)$ wahr ist.

Dann ist $P(n)$ wahr für alle $n \geq 1$. Die Annahme, dass $P(m)$ für beliebige m wahr ist, nennt man die *Induktionshypothese*.

Hier ist ein einfaches Beispiel für einen Beweis durch mathematische Induktion.

Satz 6.1 Für $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis Der Basisfall ist trivial:

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Die Induktionshypothese lautet, dass die folgende Gleichung für m wahr ist:

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Der Induktionsschritt besteht darin, die Gleichung für $m + 1$ zu beweisen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} i &= \sum_{i=1}^m i + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}. \end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der mathematischen Induktion gilt daher für jedes $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \square$$

Die Induktionshypothese kann verwirrend sein, weil es scheint, dass wir das, was wir zu beweisen versuchen, annehmen. Die Argumentation ist nicht zirkulär, weil wir die Wahrheit einer Eigenschaft für etwas Kleines annehmen und dann die Annahme verwenden, um die Eigenschaft für etwas Größeres zu beweisen.

Da die mathematische Induktion ein Axiom ist, kann es nicht darum gehen, die Induktion zu beweisen. Man muss die Induktion einfach akzeptieren, wie man auch andere Axiome der Mathematik akzeptiert, z. B. $x + 0 = x$. Es ist natürlich möglich, die mathematische Induktion abzulehnen, aber dann müsste man auch einen Großteil der modernen Mathematik ablehnen.

Die mathematische Induktion ist eine Schlussregel, die zu den *Peano-Axiomen* zur Formalisierung der natürlichen Zahlen gehört. Das *Wohlordnungsaxiom* kann verwendet werden, um das Induktionsaxiom zu beweisen, und umgekehrt kann das Induktionsaxiom verwendet werden, um das Wohlordnungsaxiom zu beweisen. Das Induktionsaxiom kann jedoch nicht aus den anderen, elementarerem Peano-Axiomen bewiesen werden.

6.2 Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen sind das klassische Beispiel für eine rekursive Definition:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \geq 3. \end{aligned}$$

Die ersten zwölf Fibonacci-Zahlen sind:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.$$

Satz 6.2 *Jede vierte Fibonacci-Zahl ist durch 3 teilbar.*

Beispiel 6.1 $f_4 = 3 = 3 \cdot 1$, $f_8 = 21 = 3 \cdot 7$, $f_{12} = 144 = 3 \cdot 48$.

Beweis Basisfall: $f_4 = 3$ ist durch 3 teilbar. Die induktive Hypothese ist, dass f_{4n} durch 3 teilbar ist. Der Induktionsschritt lautet:

$$\begin{aligned} f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\ &= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\ &= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + f_{4n+2} \\ &= ((f_{4n+1} + f_{4n}) + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\ &= 3f_{4n+1} + 2f_{4n}. \end{aligned}$$

$3f_{4n+1}$ ist durch 3 teilbar und nach der Induktionshypothese ist f_{4n} durch 3 teilbar. Daher ist $f_{4(n+1)}$ durch 3 teilbar. \square

Satz 6.3 $f_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Beweis Basisfälle: $f_1 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^1$ und $f_2 = 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$.

Der Induktionsschritt lautet:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^n + \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\ &< \left(\frac{7}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{7}{4}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

denn:

$$\left(\frac{7}{4} + 1\right) = \frac{11}{4} = \frac{44}{16} < \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2. \quad \square$$

Satz 6.4 (Binet-Formel)

$$f_n = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{wobei } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \bar{\phi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Beweis Wir zeigen zunächst, dass $\phi^2 = \phi + 1$:

$$\begin{aligned} \phi^2 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + 1 \\ &= \phi + 1. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können wir zeigen, dass $\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$.

Der Basisfall für die Binet-Formel ist:

$$\frac{\phi^1 - \bar{\phi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = f_1.$$

Wir nehmen die Induktionshypothese für alle $k \leq n$ an. Der Induktionsschritt lautet:

$$\begin{aligned}
 \phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1} &= \phi^2 \phi^{n-1} - \bar{\phi}^2 \bar{\phi}^{n-1} \\
 &= (\phi + 1)\phi^{n-1} - (\bar{\phi} + 1)\bar{\phi}^{n-1} \\
 &= (\phi^n - \bar{\phi}^n) + (\phi^{n-1} - \bar{\phi}^{n-1}) \\
 &= \sqrt{5}f_n + \sqrt{5}f_{n-1} \\
 \frac{\phi^{n+1} - \bar{\phi}^{n+1}}{\sqrt{5}} &= f_n + f_{n-1} = f_{n+1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 6.5

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

Beweis Wir wollen zunächst die Pascalsche Regel beweisen:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
 &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
 &= \binom{n+1}{k+1}.
 \end{aligned}$$

Wir werden auch die Gleichheit $\binom{k}{0} = \frac{k!}{0!(k-0)!} = 1$ für jedes $k \geq 1$ verwenden.

Wir können nun den Satz beweisen. Der Basisfall ist:

$$f_1 = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!(1-0)!} = 1.$$

Der Induktionsschritt ist:

$$\begin{aligned} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \dots \\ &\quad \binom{n-2}{0} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-4}{2} + \dots \\ &= \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \dots \quad \square \end{aligned}$$

6.3 Fermat-Zahlen

Definition 6.1 Die ganzen Zahlen $F_n = 2^{2^n} + 1$ für $n \geq 0$ werden *Fermat-Zahlen* genannt.

Die ersten fünf Fermat-Zahlen sind Primzahlen:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65.537.$$

Im 17. Jahrhundert behauptete der Mathematiker Pierre de Fermat, dass alle Fermat-Zahlen Primzahlen sind, aber fast hundert Jahre später zeigte Leonhard Euler, dass:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4.294.967.297 = 641 \times 6.700.417.$$

Die Fermat-Zahlen werden extrem groß, wenn n zunimmt. Es ist bekannt, dass die Fermat-Zahlen für $5 \leq n \leq 32$ nicht prim sind, aber die Faktorisierung einiger dieser Zahlen ist noch nicht bekannt.

Satz 6.6 Für $n \geq 2$ ist die letzte Ziffer von F_n eine 7.

Beweis Der Basisfall ist $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$. Die Induktionshypothese lautet $F_n = 10k_n + 7$ für ein $k_n \geq 1$. Der Induktionsschritt ist:

$$\begin{aligned}
 F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 = 2^{2^n \cdot 2^1} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 \\
 &= ((2^{2^n} + 1) - 1)^2 + 1 = (F_n - 1)^2 + 1 \\
 &= (10k_n + 7 - 1)^2 + 1 = (10k_n + 6)^2 + 1 \\
 &= 100k_n^2 + 120k_n + 36 + 1 \\
 &= 10(10k_n^2 + 12k_n + 3) + 6 + 1 \\
 &= 10k_{n+1} + 7, \quad \text{für ein gewisses } k_{n+1} \geq 1. \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 6.7 Für $n \geq 1$ gilt $F_n = \prod_{k=0}^{n-1} F_k + 2$.

Beweis Der Basisfall ist:

$$F_1 = \prod_{k=0}^0 F_k + 2 = F_0 + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Der Induktionsschritt ist:

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=0}^n F_k &= \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k \right) F_n \\
 &= (F_n - 2) F_n \\
 &= (2^{2^n} + 1 - 2)(2^{2^n} + 1) \\
 &= (2^{2^n})^2 - 1 = (2^{2^{n+1}} + 1) - 2 \\
 &= F_{n+1} - 2 \\
 F_{n+1} &= \prod_{k=0}^n F_k + 2. \quad \square
 \end{aligned}$$

6.4 McCarthys 91-Funktion

Normalerweise assoziieren wir Induktion mit Beweisen von Eigenschaften, die auf der Menge der positiven ganzen Zahlen definiert sind. Hier bringen wir einen induktiven Beweis, der auf einer merkwürdigen Ordnung basiert, bei der größere Zahlen

kleiner sind als kleinere Zahlen. Die Induktion funktioniert, weil die einzige Eigenschaft, die die Menge haben muss, darin besteht, dass sie unter einem relationalen Operator geordnet ist.

Wir betrachten die folgende rekursive Funktion, die auf den ganzen Zahlen definiert ist:

$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{falls } x > 100 \\ f(f(x + 11)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für Zahlen größer als 100 ist das Ergebnis der Anwendung der Funktion trivial:

$$f(101) = 91, \quad f(102) = 92, \quad f(103) = 93, \quad f(104) = 94, \quad \dots$$

Was ist mit Zahlen, die kleiner oder gleich 100 sind? Berechnen wir $f(x)$ für einige Zahlen, wobei die Berechnung in jeder Zeile die Ergebnisse der vorherigen Zeilen verwendet:

$$\begin{aligned} f(100) &= f(f(100 + 11)) = f(f(111)) = f(101) = 91 \\ f(99) &= f(f(99 + 11)) = f(f(110)) = f(100) = 91 \\ f(98) &= f(f(98 + 11)) = f(f(109)) = f(99) = 91 \\ &\dots \\ f(91) &= f(f(91 + 11)) = f(f(102)) = f(92) \\ &= f(f(103)) = f(93) = \dots = f(98) = 91 \\ f(90) &= f(f(90 + 11)) = f(f(101)) = f(91) = 91 \\ f(89) &= f(f(89 + 11)) = f(f(100)) = f(91) = 91. \end{aligned}$$

Wir definieren die Funktion g als:

$$g(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{falls } x > 100 \\ 91 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 6.8 Für alle x , $f(x) = g(x)$.

Beweis Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Menge der ganzen Zahlen $S = \{x \mid x \leq 101\}$ unter Verwendung des relationalen Operators $<$, der folgendermaßen definiert ist:

$$y < x \text{ genau dann, wenn } x < y,$$

wobei auf der rechten Seite $<$ der übliche relationale Operator auf den ganzen Zahlen ist. Aus dieser Definition ergibt sich die folgende Reihenfolge:

$$101 < 100 < 99 < 98 < 97 < \dots$$

Es gibt drei Fälle für den Beweis. Wir verwenden die Ergebnisse der obigen Berechnungen.

Fall 1: $x > 100$. Dies ist trivial aufgrund der Definitionen von f und g .

Fall 2: $90 \leq x \leq 100$. Der Basisfall der Induktion ist:

$$f(100) = 91 = g(100),$$

da wir gezeigt haben, dass $f(100) = 91$ und per Definition $g(100) = 91$.

Die Induktionsannahme ist $f(y) = g(y)$ für $y < x$, und der Induktionsschritt lautet:

$$f(x) = f(f(x + 11)) \tag{6.1a}$$

$$= f(x + 11 - 10) = f(x + 1) \tag{6.1b}$$

$$= g(x + 1) \tag{6.1c}$$

$$= 91 \tag{6.1d}$$

$$= g(x). \tag{6.1e}$$

(6.1a) gilt aufgrund der Definition von f , da $x \leq 100$. Die Gleichheit von (6.1a) und (6.1b) gilt wegen der Definition von f , weil $x \geq 90$, also $x + 11 > 100$. Die Gleichheit von (6.1b) und (6.1c) folgt durch die Induktionshypothese $x \leq 100$, also $x + 1 \leq 101$, was impliziert, dass $x + 1 \in S$ und $x + 1 < x$ ist. Die Gleichheit von (6.1c), (6.1d) und (6.1e) folgt aus der Definition von g und $x + 1 \leq 101$, also $x \leq 100$.

Fall 3: $x < 90$. Der Basisfall ist: $f(89) = f(f(100)) = f(91) = 91 = g(89)$ gemäß Definition von g , da $89 < 100$.

Die Induktionsannahme ist $f(y) = g(y)$ für $y < x$, und der Induktionsschritt lautet:

$$f(x) = f(f(x + 11)) \tag{6.2a}$$

$$= f(g(x + 11)) \tag{6.2b}$$

$$= f(91) \tag{6.2c}$$

$$= 91 \tag{6.2d}$$

$$= g(x). \tag{6.2e}$$

(6.2a) gilt wegen der Definition von f und $x < 90 \leq 100$. Die Gleichheit von (6.2a) und (6.2b) folgt aus der Induktionshypothese $x < 90$, also $x + 11 < 101$, was impliziert, dass $x + 11 \in S$ und $x + 11 < x$ ist. Die Gleichheit von (6.2b) und (6.2c) folgt aus der Definition von g und $x + 11 < 101$. Schließlich haben wir bereits gezeigt, dass $f(91) = 91$ und $g(x) = 91$ für $x < 90$ per Definition gelten. \square

6.5 Das Josephus-Problem

Josephus war der Kommandant der Stadt Jodfat während des jüdischen Aufstands gegen die Römer. Die überwältigende Stärke der römischen Armee brach schließlich den Widerstand der Stadt und Josephus flüchtete sich mit einigen seiner Männer

in eine Höhle. Sie zogen es vor, Selbstmord zu begehen statt von den Römern getötet oder gefangengenommen zu werden. Nach dem Bericht von Josephus arrangierte er seine Rettung, wurde Beobachter bei den Römern und schrieb später eine Geschichte des Aufstands. Wir stellen das Problem als ein abstraktes mathematisches Problem dar.

Definition 6.2 (Josephus-Problem) Man betrachte die Zahlen $1, \dots, n + 1$, die in einem Kreis angeordnet sind. Beim Abgehen des Kreises soll jede q -te Zahl ($q, 2q, 3q, \dots$) gelöscht werden (wobei die Berechnung modulo $n + 1$ durchgeführt wird), bis nur noch eine Zahl m übrig bleibt. $J(n + 1, q) = m$ ist die *Josephus-Zahl* für $n + 1$ und q .

Beispiel 6.2 Sei $n + 1 = 41$ und sei $q = 3$. Wir ordnen die Zahlen in einem Kreis an:

→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	↑													15
	41													16
	40													17
	39													18
	38													19
	37													20
	36													21
	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22

Die erste Runde von Streichungen führt zu:

→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	↑													15
	41													16
	40													17
	39													18
	38													19
	37													20
	36													21
	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22

Nach Entfernen der gestrichenen Zahlen kann dies wie folgt geschrieben werden:

1	2	4	5	7	8	10	11	13	14	16	17	19	20
41	40	38	37	35	34	32	31	29	28	26	25	23	22

Die zweite Runde von Streichungen (beginnend mit der letzten Streichung von 39) führt zu:

~~1~~ 2 4 ~~5~~ 7 8 ~~10~~ 11 13 ~~14~~ 16 17 ~~19~~ 20
 41 40 38 ~~37~~ 35 34 ~~32~~ 31 29 ~~28~~ 26 25 23 ~~22~~

Wir fahren fort, jede dritte Zahl zu löschen, bis nur noch eine übrig bleibt:

2 4 ~~7~~ 8 11 ~~13~~ 16 17 ~~20~~ 22 25 ~~26~~ 29 31 ~~34~~ 35 38 40
 2 4 ~~8~~ 11 16 ~~17~~ 22 25 ~~29~~ 31 35 ~~38~~
 2 4 ~~11~~ 16 22 ~~25~~ 31 35
~~2~~ 4 16 ~~22~~ 31 35
~~4~~ 16 31 ~~35~~
~~16~~ 31
 31

Daraus folgt, dass $J(41, 3) = 31$.

Der Leser wird aufgefordert, die Berechnung für das Löschen jeder siebten Zahl aus einem Kreis von 40 Zahlen durchzuführen, um zu überprüfen, dass die letzte Zahl 30 ist.

Satz 6.9 $J(n + 1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n + 1}$.

Beweis Die erste Zahl, die in der ersten Runde gelöscht wird, ist die Zahl q , und die Zahlen, die nach der Löschung übrig bleiben, sind die n Zahlen:

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad q - 1 \quad q + 1 \quad \dots \quad n \quad n + 1 \pmod{n + 1}.$$

Die Zählung, um die nächste Löschung zu finden, beginnt mit $q + 1$. Wenn wir $1, \dots, n$ in diese Folge einfügen, erhalten wir:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 1 & 2 & \dots & n - q & n + 1 - q & n + 2 - q & \dots & n - 1 & n & \pmod{n + 1} \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
 q + 1 & q + 2 & \dots & n & n + 1 & 1 & \dots & q - 2 & q - 1 & \pmod{n + 1}.
 \end{array}$$

Man beachte, dass die Berechnungen modulo $n + 1$ sind:

$$\begin{aligned}
 (n + 2 - q) + q &= (n + 1) + 1 &= 1 &\pmod{n + 1} \\
 (n) + q &= (n + 1) - 1 + q &= q - 1 &\pmod{n + 1}.
 \end{aligned}$$

Es handelt sich um das Josephus-Problem für n Zahlen, nur dass die Zahlen um q versetzt sind. Daraus folgt, dass:

$$J(n + 1, q) = (J(n, q) + q) \pmod{n + 1}. \quad \square$$

Satz 6.10 Für $n \geq 1$ gibt es Zahlen $a \geq 0, 0 \leq t < 2^a$, sodass $n = 2^a + t$.

Beweis Dies kann durch wiederholte Anwendung des Divisionsalgorithmus mit den Teilern $2^0, 2^1, 2^2, 2^4, \dots$ bewiesen werden, aber es ist auch leicht aus der binären Darstellung von n zu erkennen. Für gewisse a und $b_{a-1}, b_{a-2}, \dots, b_1, b_0$, wobei für alle $i, b_i = 0$ oder $b_i = 1$, kann n ausgedrückt werden als:

$$\begin{aligned} n &= 2^a + b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0 \\ n &= 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0) \\ n &= 2^a + t, \quad \text{wobei } t \leq 2^a - 1. \quad \square \end{aligned}$$

Wir beweisen nun, dass es eine einfache geschlossene Formel für $J(n, 2)$ gibt.

Satz 6.11 Für $n = 2^a + t, a \geq 0, 0 \leq t < 2^a, J(n, 2) = 2t + 1$.

Beweis Nach Satz 6.10 kann n wie im Satz angegeben ausgedrückt werden. Der Beweis, dass $J(n, 2) = 2t + 1$ ist, erfolgt durch eine doppelte Induktion, zuerst über a und dann über t .

Erste Induktion:

Basisfall. Nehmen wir an, dass $t = 0$ ist, sodass $n = 2^a$. Es sei $a = 1$, sodass es zwei Zahlen im Kreis 1, 2 gibt. Da $q = 2$, wird die zweite Zahl gestrichen, sodass die verbleibende Zahl 1 ist und $J(2^1, 2) = 1$.

Die Induktionshypothese lautet, dass $J(2^a, 2) = 1$. Wie lautet $J(2^{a+1}, 2)$? In der ersten Runde werden alle geraden Zahlen gestrichen:

$$1 \quad \cancel{2} \quad 3 \quad \cancel{4} \quad \dots \quad 2^{a+1}-1 \quad \cancel{2^{a+1}}.$$

Es sind nun 2^a Zahlen übrig:

$$1 \quad 3 \quad \dots \quad 2^{a+1}-1.$$

Wegen der Induktionshypothese gilt $J(2^{a+1}, 2) = J(2^a, 2) = 1$, also durch Induktion $J(n, 2) = 1$, sobald $n = 2^a + 0$.

Zweite Induktion:

Wir haben $J(2^a + 0, 2) = 2 \cdot 0 + 1$ bewiesen, den Basisfall der zweiten Induktion.

Die Induktionshypothese ist $J(2^a + t, 2) = 2t + 1$. Nach Satz 6.9:

$$J(2^a + (t + 1), 2) = J(2^a + t, 2) + 2 = 2t + 1 + 2 = 2(t + 1) + 1. \quad \square$$

Die Sätze 6.10 und 6.11 geben einen einfachen Algorithmus zur Berechnung von $J(n, 2)$. Aus dem Beweis von Satz 6.10:

$$n = 2^a + t = 2^a + (b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0),$$

somit $t = b_{a-1}2^{a-1} + \dots + b_02^0$. Wir multiplizieren einfach mit 2 (Verschiebung nach links um eine Stelle) und addieren 1. Da zum Beispiel $n = 41 = 2^5 + 2^3 + 2^0 = 101001$, folgt daraus, dass $J(41, 2) = 2t + 1$, und in binärer Schreibweise:

$$\begin{aligned} 41 &= 101001 \\ 9 &= 01001 \\ 2t + 1 &= 10011 = 16 + 2 + 1 = 19. \end{aligned}$$

Der Leser kann das Ergebnis überprüfen, indem er jede zweite Zahl in einem Kreis $1, \dots, 41$ löscht.

Es gibt eine geschlossene Formel für $J(n, 3)$, aber sie ist recht kompliziert.

Was ist die Überraschung?

Die Induktion ist vielleicht die wichtigste Beweistechnik in der modernen Mathematik. Während die Fibonacci-Zahlen sehr bekannt sind und auch die Fermat-Zahlen leicht zu verstehen sind, war ich überrascht, so viele Formeln zu finden, die ich nicht kannte (wie Satz 6.2 und 6.3) und die durch Induktion bewiesen werden können. Die 91-Funktion von McCarthy wurde im Kontext der Informatik entdeckt, obwohl sie ein rein mathematisches Ergebnis ist. Das Überraschende ist nicht die Funktion selbst, sondern die merkwürdige Induktion, mit der sie bewiesen wird, nämlich $98 < 97$. Das Überraschende am Josephus-Problem ist der bidirektionale induktive Beweis.

Quellen

Für eine umfassende Darstellung der Induktion siehe [21]. Der Beweis von McCarthy's 91-Funktion stammt aus [30], wo er Rod M. Burstall zugeschrieben wird. Die Darstellung des Josephus-Problems stützt sich auf [21, Chapter 17], in dem auch der historische Hintergrund erörtert wird. Dieses Kapitel enthält weitere interessante Probleme mit induktiven Beweisen, wie z. B. die schlammigen Kinder, die gefälschte Münze und die Pfennige in einer Schachtel. Zusätzliches Material zum Josephus-Problem findet sich in [44, 57].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 7

Lösen quadratischer Gleichungen



Poh-Shen Loh schlug eine Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen vor, die auf einer Beziehung zwischen den Koeffizienten des quadratischen Polynoms und seinen Wurzeln beruht. Abschn. 7.1 gibt einen Überblick über die traditionellen Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen. Abschn. 7.2 versucht, den Leser davon zu überzeugen, dass die Loh-Methode sinnvoll ist, und erklärt dann, wie man die Wurzeln berechnet. In Abschn. 7.3 wird die Berechnung für zwei quadratische Polynome und eine ähnliche Berechnung für ein quartisches Polynom durchgeführt. In Abschn. 7.4 wird die traditionelle Formel für die Wurzeln aus den Loh-Formeln abgeleitet.

Die Einführung der Algebra und der modernen algebraischen Notation ist relativ neu. Zuvor benutzten die Mathematiker fast ausschließlich die Geometrie, sodass es interessant ist, al-Khwarizmis geometrische Konstruktion der Formel für die Wurzeln quadratischer Gleichungen zu betrachten (Abschn. 7.5). Abschn. 7.6 zeigt eine geschickte geometrische Konstruktion, die Cardano bei der Entwicklung der Formel für die Wurzeln kubischer Gleichungen verwendet hat.

Abschn. 7.8 stellt andere geometrische Methoden zum Auffinden der Wurzeln quadratischer Gleichungen vor.¹ Das Kapitel schließt mit dem Abschn. 7.9 ab, der die numerische Berechnung der Wurzeln quadratischer Gleichungen behandelt.

7.1 Traditionelle Methoden zum Lösen quadratischer Gleichungen

Jeder Mathematikstudent kennt die Formel für die Ermittlung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ auswendig:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

¹ Kap. 11 ist eine Voraussetzung für das vollständige Verständnis dieser Methoden.

Für den Moment arbeiten wir mit monischen Polynomen, $x^2 + bx + c = 0$, mit den Wurzeln:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \quad (7.1)$$

Eine andere Methode, quadratische Gleichungen zu lösen, besteht darin, die Polynome mehr oder weniger durch Versuch und Irrtum zu faktorisieren. Manchmal ist es einfach, die Wurzeln durch Faktorisierung zu erhalten:

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3). \quad (7.2)$$

Es ist viel schwieriger, $x^2 - 2x - 24$ zu faktorisieren, weil es viele mögliche Wurzelfaare gibt, die berücksichtigt werden müssen:

$$(\pm 1, \mp 24), (\pm 2, \mp 12), (\pm 3, \mp 8), (\pm 4, \mp 6).$$

7.2 Die Beziehung zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten

Satz 7.1 Wenn r_1, r_2 die Wurzeln von $x^2 + bx + c$ sind, dann:

$$(x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = x^2 + bx + c.$$

Auch wenn wir die Werte der Wurzeln nicht kennen, so wissen wir doch, dass:

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1r_2 = c. \quad (7.3)$$

Es gibt eigentlich nichts zu beweisen, denn das Ergebnis ergibt sich aus der Berechnung.

Wir betrachten einige Werte von $-b, r_1, r_2$, und es sei m_{12} der Durchschnitt von r_1, r_2 :

$-b$	r_1	r_2	m_{12}
33	12	21	$16\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$
$-b$	r_1	r_2	m_{12}
-4	-16	12	-2
-4	-4	0	-2
-4	-3	-1	-2

Bei jeder quadratischen Gleichung ist der Durchschnitt der beiden Wurzeln konstant:

$$m_{1,2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{(-b - r_2) + r_2}{2} = -\frac{b}{2}.$$

Sei s eine beliebige Zahl. Dann:

$$-b = -b + s + (-s) = \left(\frac{-b}{2} + s\right) + \left(\frac{-b}{2} - s\right) = r_1 + r_2.$$

Wenn eine Wurzel im Abstand s vom Durchschnitt liegt, liegt die andere Wurzel im Abstand $-s$ vom Durchschnitt. Abb. 7.1 veranschaulicht diese Beziehung für $r_1 = 2, r_2 = 6, m_{12} = 4, s = 2$. Wenn wir andere Werte $r_1, r_2 = 3, 5$ mit $r_1 + r_2 = 8$ verwenden, dann bleibt $m_{12} = 4$ gleich, während s zu 1 wird (Abb. 7.2). Die folgende Tabelle enthält zusätzliche Beispiele für $b = 4, b = -33$.

$-b$	r_1	r_2	m_{12}	$m_{12} - r_1$	$m_{12} - r_2$
33	12	21	$16\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$
33	8	25	$16\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$-8\frac{1}{2}$
33	1	32	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$-15\frac{1}{2}$
-4	-16	12	-2	14	-14
-4	-4	0	-2	2	-2
-4	-3	-1	-2	1	-1

Abb. 7.1 Beziehung zwischen den Wurzeln $r_1, r_2 = 2, 6$ und ihrem Durchschnitt $m_{12} = 4$

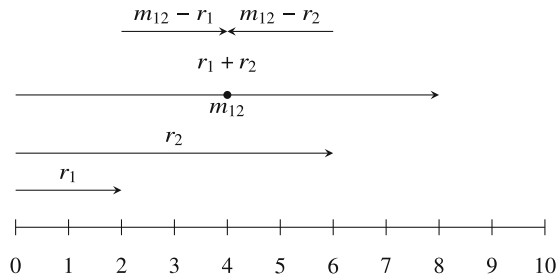
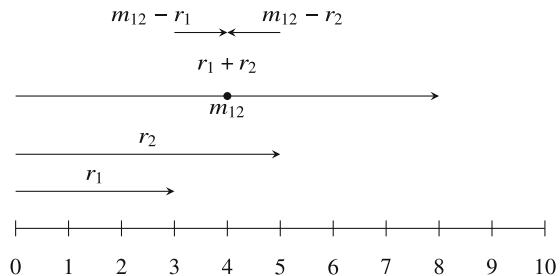


Abb. 7.2 Beziehung zwischen den Wurzeln $r_1, r_2 = 3, 5$ und ihrem Durchschnitt $m_{12} = 4$



Der Versatz s scheint willkürlich zu sein:

$$r_1 = \left(\frac{-b}{2} + s \right), \quad r_2 = \left(\frac{-b}{2} - s \right),$$

aber es gibt eine zusätzliche Bedingung $r_1 r_2 = c$, wobei c der konstante Term des Polynoms ist. Durch Multiplikation der beiden Ausdrücke, die wir für r_1, r_2 abgeleitet haben, können wir s und dann r_1, r_2 bestimmen:

$$c = \left(\frac{-b}{2} + s \right) \left(\frac{-b}{2} - s \right) = \frac{b^2}{4} - s^2$$

$$s = \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

7.3 Beispiele für die Loh-Methode

Beispiel 7.1 Wir betrachten das Polynom $x^2 - 2x - 24$ mit $b = -2, c = -24$:

$$c = \left(-\frac{(-2)}{2} + s \right) \left(-\frac{(-2)}{2} - s \right)$$

$$-24 = (1 + s)(1 - s)$$

$$s = 5$$

$$r_1 = 1 + 5 = 6$$

$$r_2 = 1 - 5 = -4.$$

Probe: $(x - 6)(x - (-4)) = x^2 - 2x - 24$.

Beispiel 7.2 Finden wir die Wurzeln von $x^2 - 83x - 2310$:

$$-2310 = \left(\frac{83}{2} + s \right) \left(\frac{83}{2} - s \right)$$

$$s^2 = \frac{6889}{4} + 2310 = \frac{16.129}{4}$$

$$s = \frac{127}{2}$$

$$r_1 = \frac{83}{2} - \frac{127}{2} = -22$$

$$r_2 = \frac{83}{2} + \frac{127}{2} = 105.$$

Probe: $(x + 22)(x - 105) = x^2 - 83x - 2310$.

Man vergleiche diese Berechnung mit der Berechnung nach der traditionellen Formel:

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} &= \frac{-(-83) \pm \sqrt{(-83)^2 - 4 \cdot (-2310)}}{2} \\ &= \frac{83 \pm \sqrt{16.129}}{2} = \frac{83 \pm 127}{2} \\ r_1 &= \frac{83 - 127}{2} = -22 \\ r_2 &= \frac{83 + 127}{2} = 105. \end{aligned}$$

Beispiel 7.3 Satz 7.1 kann auf Polynome höheren Grades verallgemeinert werden. Hier ist ein interessantes Beispiel für eine *quartische Gleichung* $x^4 - 10x^2 - x + 20 = 0$. Wie für quadratische Gleichungen gibt es auch für kubische und quartische Gleichungen (allerdings nicht für Gleichungen höherer Potenzen) Formeln zum Lösen, aber die Formeln sind recht kompliziert.

Kann dieses Polynom vierten Grades in zwei quadratische Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten zerlegt werden? Wenn dies der Fall ist, müssen die Koeffizienten der x -Terme in den quadratischen Faktoren *gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen* sein, da der Koeffizient des x^3 -Terms im quartischen Polynom null ist. Daher lautet die Form der quadratischen Faktoren:

$$f(x) = (x^2 - nx + k_1)(x^2 + nx + k_2).$$

Die Durchführung der Multiplikation ergibt:

$$\begin{array}{rccccccc} f(x) = & x^4 & +nx^3 & +k_2x^2 & & & \\ & & -nx^3 & -n^2x^2 & -nk_2x & & \\ & & & +k_1x^2 & +nk_1x & +k_1k_2. & \end{array}$$

Die Gleichsetzung der Koeffizienten ergibt drei Gleichungen in den drei Unbekannten n, k_1, k_2 :

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2) - n^2 &= -10 \\ n(k_1 - k_2) &= -1 \\ k_1k_2 &= 20. \end{aligned}$$

Da wir nach Faktoren mit ganzzahligen Koeffizienten suchen, ergibt sich aus den letzten beiden Gleichungen, dass:

$$n = 1, k_1 = 4, k_2 = 5 \quad \text{oder} \quad n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4.$$

Nur $n = 1, k_1 = -5, k_2 = -4$ erfüllen die erste Gleichung für den Koeffizienten von x^2 :

$$f(x) = (x^2 - x - 5)(x^2 + x - 4).$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichungen ergibt vier Lösungen der quartischen Gleichung:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

7.4 Ableitung der traditionellen Formel

Für ein beliebiges monisches Polynom $x^2 + bx + c$ lauten die Loh-Formeln:

$$\begin{aligned} c &= r_1 r_2 = \left(\frac{-b}{2} + s \right) \left(\frac{-b}{2} - s \right) = \left(\frac{b^2}{4} - s^2 \right) \\ s &= \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} \right) - c} \\ r_1, r_2 &= \frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} \right) - c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \end{aligned}$$

die traditionelle Formel zur Ermittlung der Wurzeln eines monischen Polynoms eines quadratischen Polynoms. Wenn das Polynom nicht monisch ist, teilt man es durch a , substituiert in der Gleichung und vereinfacht:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ r_1, r_2 &= \frac{-(b/a) \pm \sqrt{(b/a)^2 - 4(c/a)}}{2} \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

7.5 Al-Khwarizmi's geometrische Lösung quadratischer Gleichungen

Schreiben wir ein monisches quadratisches Polynom als $x^2 + bx - c$. Die Wurzeln können durch Vervollständigung des Quadrats gefunden werden:

$$\begin{aligned} x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 &= c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}. \end{aligned}$$

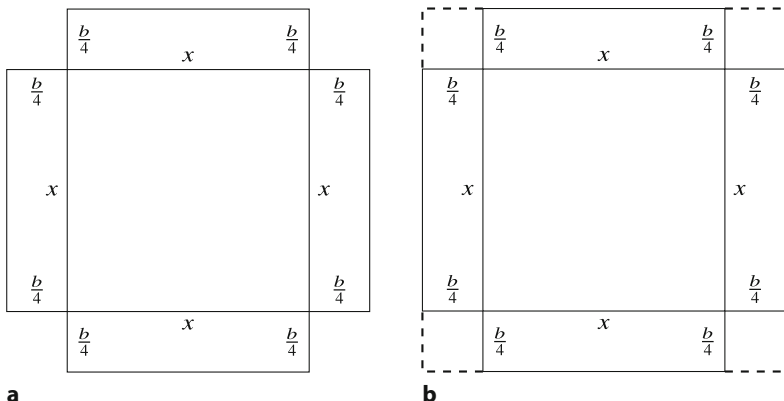


Abb. 7.3 **a** Die Fläche ist $x^2 + 4(b/4)x = x^2 + bx$. **b** Die Fläche ist $x^2 + 4(b/4)x + 4(b/4)^2 = x^2 + bx + (b^2/4)$

Dies ist die bekannte Formel für die Suche nach den Wurzeln einer quadratischen Gleichung, mit dem Unterschied, dass $4c$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat, da der Koeffizient des konstanten Terms $-c$ war.

Die Vervollständigung des Quadrats wurde im 8. Jahrhundert von Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi in einem geometrischen Kontext entwickelt. Bei der Gleichung $x^2 + bx = c$ wird angenommen, dass es ein Quadrat gibt, das die Seitenlänge x besitzt, sodass sein Flächeninhalt x^2 ist. Zum Flächeninhalt x^2 addiert man bx , indem man vier Rechtecke mit dem Flächeninhalt $bx/4$ anfügt, deren Seiten $b/4$ und x sind (Abb. 7.3a). Man vervollständige nun das Diagramm zu einem Quadrat, indem man die vier kleinen Quadrate mit der Fläche $(b/4)^2$ hinzufügt (Abb. 7.3b).

Wir können das Diagramm in Abb. 7.3a nicht konstruieren, weil wir nicht wissen, was x ist, aber die Fläche des größeren Quadrats in Abb. 7.3b ist:

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4},$$

was wir wissen, da uns die Koeffizienten b, c gegeben sind. Durch die Konstruktion des Diagramms und das Entfernen der kleinen Quadrate, deren Seiten $(b/4)$ sind – eine weitere bekannte Größe –, erhalten wir die Strecke der Länge x .

Beispiel 7.4 Es sei $x^2 + 12x = 64$. Dann sei $c + (b^2/4) = 64 + 36 = 100$. Es ist leicht, ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 100 zu konstruieren, denn jede Seite hat die Länge 10. Nun subtrahiert man $(b/4) + (b/4) = 6$, die Seiten der kleineren Quadrate, und erhält $x = 10 - 6 = 4$.

7.6 Cardanos Konstruktion zur Lösung kubischer Gleichungen

Die Formel für die Wurzeln von kubischen Gleichungen wurde erstmals im 16. Jahrhundert von Gerolamo Cardano veröffentlicht. Wir werden die Formel hier nicht herleiten, aber es ist interessant, dass die zentrale Idee auf einer geometrischen Konstruktion beruht, die der von al-Khwarizmi ähnelt. Die Konstruktion ergibt sich sehr einfach mithilfe der Algebra. Durch Multiplikation:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a + b). \tag{7.4}$$

Geometrisch gehen wir von einem Würfel aus, dessen Seitenlänge $a + b$ beträgt, sodass sein Volumen $(a + b)^3$ ist. Der Würfel wird in fünf Teile zerlegt. Die ersten beiden sind Würfel mit den Seitenflächen a und b und den Volumina a^3 (blau) bzw. b^3 (rot) (Abb. 7.4).

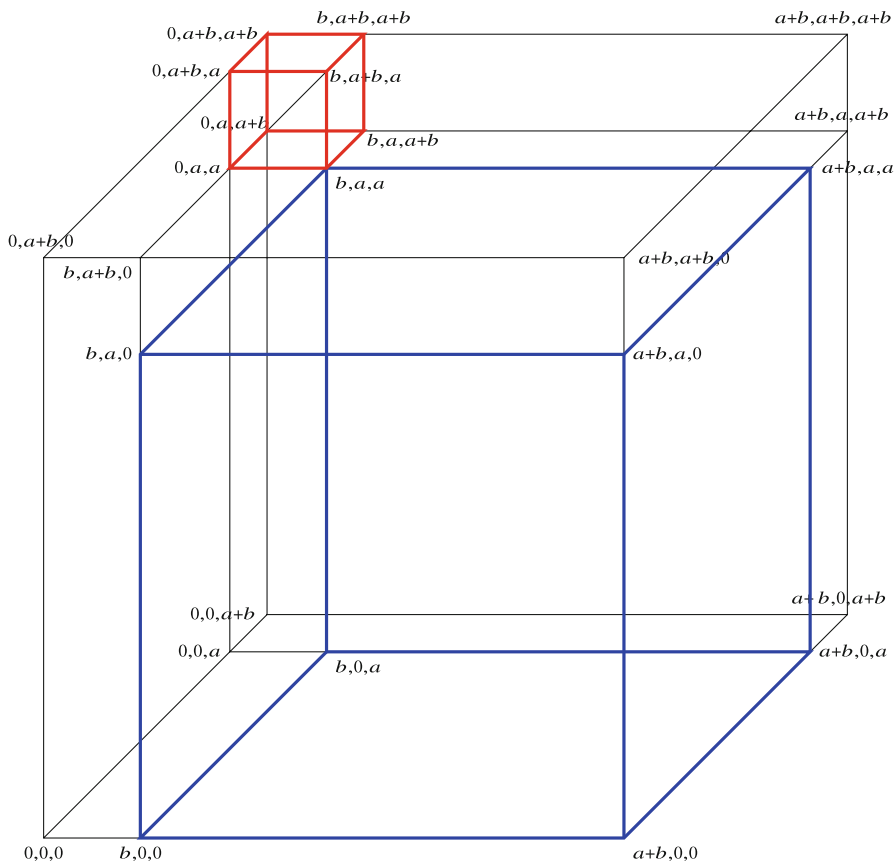


Abb. 7.4 $(a + b)^3 = (a^3 + b^3) + \dots$

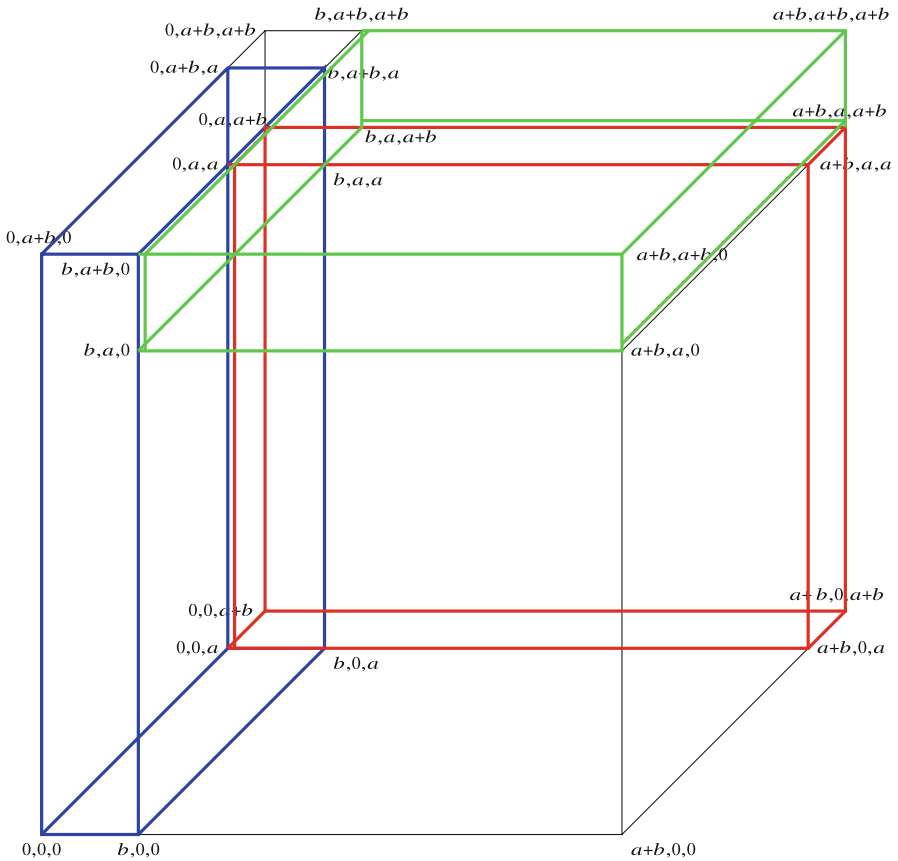


Abb. 7.5 $(a + b)^3 = \dots + 3ab(a + b)$

Die anderen drei Teile sind Kästchen (der Fachbegriff lautet *Quader*), von denen jedes eine Seite der Länge $a + b$ hat, die mit einer Seite des Würfels zusammenfällt, eine Seite der Länge a und eine Seite der Länge b , sodass das Volumen jedes der drei Kästchen $ab(a + b)$ beträgt. In Abb. 7.5 befindet sich ein Kasten an der linken Seite des Würfels (blau), einer an der Rückseite des Würfels (rot) und einer an der Oberseite des Würfels (grün). Kombiniert man die fünf Körper in Abb. 7.4 und Abb. 7.5, erhält man (7.4).

7.7 Sie ließen sich von imaginären Zahlen nicht einschüchtern

Die Geschichte der Mathematik weist eine Reihe von Konzepten auf, die zunächst als bedeutungslos galten, aber schließlich verstanden und akzeptiert wurden und sich als nützlich erwiesen. Da Zahlen Dinge zählen, ist -1 , eine negative Zahl, of-

fensichtlich bedeutungslos. Da Zahlen Verhältnisse von ganzen Zahlen (rationalen Zahlen) sind, ist $\sqrt{2}$, das sich leicht als irrational nachweisen lässt, offensichtlich bedeutungslos. Offensichtlich ist $\sqrt{-1}$, die Quadratwurzel einer negativen Zahl, bedeutungslos, da es keine Zahl – weder eine ganze noch eine rationale oder reelle – gibt, deren Quadrat -1 ist.

Ein vollständiges Verständnis der Quadratwurzeln negativer Zahlen, die bis heute als imaginäre Zahlen bezeichnet werden, obwohl sie nicht weniger real sind als reelle Zahlen, wurde erst im neunzehnten Jahrhundert erreicht. Daher ist es erstaunlich, dass sich Gerolamo Cardano und Rafael Bombelli bereits im 16. Jahrhundert nicht von dem Konzept einschüchtern ließen und die ersten kleinen Schritte zum Verständnis dieser Zahlen unternahmen.

Betrachten wir die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 10x + 40 = 0. \quad (7.5)$$

Nach der bekannten Formel ((7.1)):

$$r_1, r_2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 160}}{2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Nun, wir wissen nichts über die Quadratwurzeln negativer Zahlen und wir wissen nicht, was diese Werte sind, aber wie Cardano wissen wir durch Satz 7.1, dass:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= (5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10 = -b \\ r_1 r_2 &= (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} - (-15) = 40 = c. \end{aligned}$$

was mit den Koeffizienten der quadratischen Gleichung (7.5) übereinstimmt. Es ist ziemlich intuitiv, dass $\sqrt{-15} + (-\sqrt{-15}) = 0$, auch wenn wir nichts über $\sqrt{-15}$ wissen, und ebenso ist es ziemlich intuitiv, dass $\sqrt{-15} \cdot -(\sqrt{-15}) = -(-15) = 15$, auch wenn wir nicht wissen, was $\sqrt{-15}$ ist.

Betrachten wir nun die kubische Gleichung:

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (7.6)$$

Es ist nicht schwer zu erkennen, dass 4 eine Wurzel ist, aber wie kann man sie berechnen? Mit der Cardano-Formel erhält man die Wurzel:

$$r = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}, \quad (7.7)$$

eine recht komplizierte Formel, die keinen offensichtlichen Bezug zu 4 hat.

Bombelli hat mutig die folgende Berechnung durchgeführt (siehe (7.4)):

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 8 + 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) + (-1\sqrt{-1}) = 2 + 11\sqrt{-1} \\ (2 - \sqrt{-1})^3 &= 8 - 3 \cdot 4\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(-1) - (-1\sqrt{-1}) = 2 - 11\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

und mit (7.7) erhält man:

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\
 &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\
 &= (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4.
 \end{aligned}$$

7.8 Die Lill-Methode und der Carlyle-Kreis

Die Lill-Methode kann zur Lösung quadratischer Gleichungen verwendet werden.² Als Beispiel dient Gl. (7.2), die die Wurzeln einer quadratischen Gleichung durch Faktorisierung angibt:

$$x^2 + bx + c = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3).$$

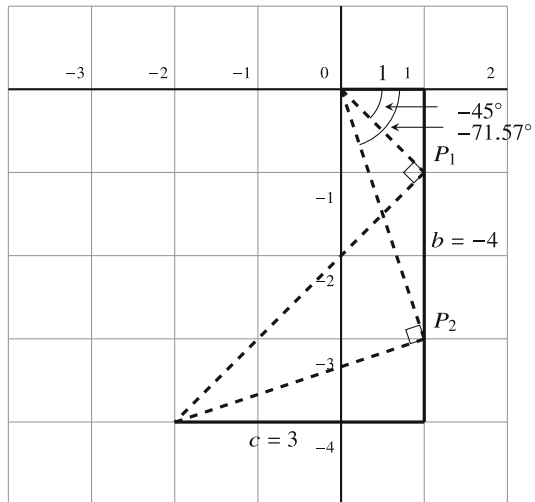
Die Anwendung der Lill-Methode führt zu den in Abb. 7.6 dargestellten Pfaden.

Wir prüfen, ob die Winkel korrekt sind:

$$-\tan(-45^\circ) = -1, \quad -\tan(-71,57^\circ) \approx -3.$$

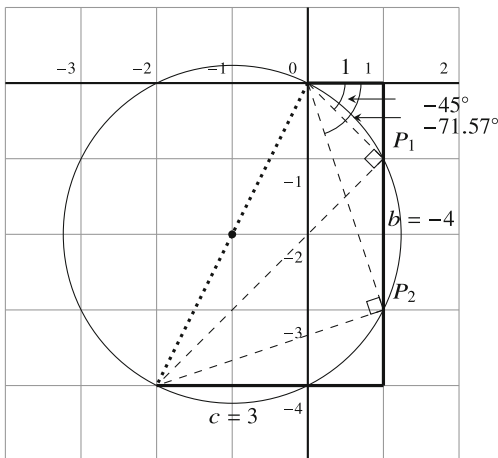
Für quadratische Gleichungen können wir die Punkte P_1, P_2 als Schnittpunkte der Gerade, die den Koeffizienten b darstellt, und des Kreises finden, dessen Durchmesser die Verbindungslinie zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der Wege ist

Abb. 7.6 Lill-Methode für $x^2 - 4x + 3$



² Dieser Abschnitt setzt voraus, dass Sie die Lill-Methode in Kap. 11 studiert haben.

Abb. 7.7 Konstruktion eines Kreises zur Ermittlung der Wurzeln



(Abb. 7.7). Damit ein Punkt auf der Geraden b eine Wurzel ist, muss die Geraden mit einem Winkel von 90° reflektiert werden, und daher liegt der eingeschriebene Winkel einem Durchmesser gegenüber.

Dies kann auch rechnerisch überprüft werden. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Mittelpunkt des Durchmessers $(-1, -2)$. Die Länge des Durchmessers ist:

$$\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20},$$

Das Quadrat der Länge des Radius ist also $(\sqrt{20}/2)^2 = 5$. Wir benötigen den Schnittpunkt dieses Kreises mit der Gerade $x = 1$:

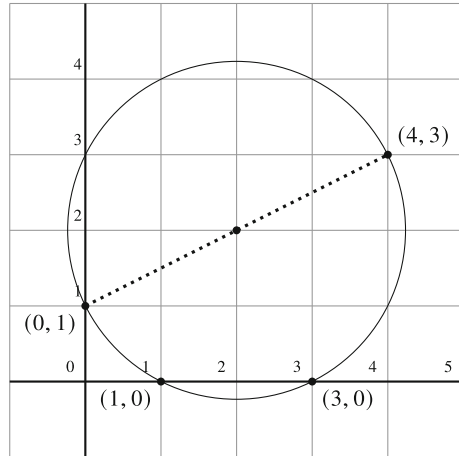
$$\begin{aligned} (x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 &= r^2 \\ (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= 5 \\ y^2 + 4y + 3 &= 0 \\ y &= -1, -3. \end{aligned}$$

Eine ähnliche Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen ist der Carlyle-Kreis, der eher als die Lill-Methode entwickelt wurde. Bei einer quadratischen Gleichung $x^2 - bx + c$ (man beachte das Minuszeichen des linearen Terms) konstruiere man die Punkte $(0, 1)$ und (b, c) . Man konstruiert nun einen Kreis, dessen Durchmesser die Verbindungslinie zwischen den beiden Punkten ist (Abb. 7.8). Seine Schnittpunkte (falls vorhanden) mit der x -Achse sind die Wurzeln der Gleichung.

Im allgemeinen Fall ist der Mittelpunkt des Kreises $(b/2, (c - (-1))/2)$ und die Länge des Durchmessers $\sqrt{b^2 + (c - 1)^2}$, sodass die Gleichung des Kreises lautet:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c + 1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c - 1)^2}{4}.$$

Abb. 7.8 Carlyle-Kreis für $x^2 - 4x + 3$



Wenn man im Beispiel $b = 4$, $c = 3$ und $y = 0$ einsetzt, sieht man, dass $x = 1$ und $x = 3$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind.

7.9 Numerische Berechnung der Wurzeln

Die Schüler lernen die symbolische Berechnung von Wurzeln, Ableitungen und so weiter. Heutzutage werden die meisten Berechnungen von Computern durchgeführt, sodass symbolische Berechnungen weniger wichtig sind. Die *numerische Analyse* ist der Zweig der Mathematik und Informatik, der genaue und effiziente Berechnungsmethoden entwickelt. Die größte Herausforderung besteht darin, mit der Endlichkeit der im Speicher des Computers gespeicherten Werte umzugehen. Die Berechnung:

$$0,12 \times 0,14 = 0,0168$$

ist leicht zu machen, aber:

$$0,123456789 \times 0,123456789$$

braucht achtzehn Ziffern, um genau dargestellt zu werden, und das kann nicht in einem Speicherwort geschehen, das sechzehn Ziffern speichert. Dieser Fehler wird als *Rundungsfehler* bezeichnet.

Ein noch schwerwiegenderes Problem tritt auf, wenn eine Fließkommaarithmetik durchgeführt wird. Es ist klar, dass

$$(0,12 \times 10^{-10}) \times (0,14 \times 10^{-8})$$

nicht durch Hinschreiben aller Nullen berechnet werden würde. Stattdessen werden die Mantissen multipliziert und die Exponenten addiert, was $0,0168 \times 10^{-18}$ ergibt,

das auf $0,168 \times 10^{-19}$ normiert wird, sodass die höchstwertige Ziffer nach dem Dezimalpunkt erscheint, was angesichts der festen Größe der Mantisse eine maximale Genauigkeit gewährleistet. Wenn der maximal darstellbare Exponent -16 beträgt, kann das Ergebnis gar nicht gespeichert werden. Dieser Fehler wird als *arithmetischer Unterlauf* bezeichnet.

Die Formel für die Suche nach den Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + bx + c$ lautet:

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}. \tag{7.8}$$

Man überlege, was passiert, wenn $b = 1000$ und $c = 4$. Die Wurzeln sind:

$$r_1, r_2 = \frac{-1000 \pm \sqrt{1.000.000 - 16}}{2}.$$

Je nach Rechengenauigkeit ist es möglich, dass eine der Wurzeln so nahe an null liegt, dass der gespeicherte Wert null ist. Die Auswertung der quadratischen Gleichung ergibt das überraschende Ergebnis $0^2 + b \cdot 0 + 4 = 4 = 0$.

Können wir es besser machen? Mit (7.3):

$$r_1 + r_2 = -b, \quad r_1 r_2 = c.$$

Wenn r_2 viel kleiner ist als r_1 , also $r_2 \ll r_1$, dann ist $r_1 \approx -b$ und $r_2 \approx -c/b$. Die von einem Computerprogramm berechnete Tab. 7.1 vergleicht die Werte der mit diesen Formeln berechneten Wurzeln mit den Werten, die sich aus der traditionellen Formel (7.8) ergeben. Der Wert von c ist auf 4 festgelegt und die Wurzeln für steigende Werte von b werden gezeigt.

Zunächst sind die wahren Werte, die mit der traditionellen Formel für r_2 berechnet werden, genauer ($r_2 - r_{2v}$ ist negativ), aber ab $b = 100.000$ ist die Berechnung auf der Grundlage von (7.3) genauer. Das sind die Überraschungen der numerischen Analyse.

Tab. 7.1 Zwei Berechnungen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung. r_1, r_2 sind die mit (7.8) berechneten Wurzeln. r_{1v}, r_{2v} sind die mit (7.3) berechneten Wurzeln. Die Fehler sind $r_i - r_{iv}$. Die Werte werden auf vier Dezimalstellen abgeschnitten. Fließkommazahlen werden mit $-4e - 5$ anstelle von 4×10^{-5} geschrieben, weil Computerprogramme normalerweise als lineare Folgen von Zeichen geschrieben werden.

b	r_1	r_{1v}	Fehler ₁	r_2	r_{2v}	Fehler ₂
100	-99,9599	-100	0,0400	-0,04001	-0,04	-1.6012e-05
1000	-999,9959	-1000	0,0040	-0,0040	-0,004	-1.6000e-08
10.000	-9999,9996	-10.000	0,0004	-0,0004	-0,0004	-1.6270e-11
100.000	-99.999,9999	-100.000	3.9999e-5	-3.9999e-5	-4e-5	1.0104e-12
1.000.000	-999.999,9999	-1.000.000	4.0000e-6	-3.9999e-6	-4e-6	2.7749e-11
10.000.000	-10.000.000,0	-10.000.000	3.9860e-7	-3.9953e-7	-4e-7	4.6261e-10

Was ist die Überraschung?

Der Ansatz von Poh-Shen Loh bietet eine neue Sichtweise auf die Beziehung zwischen den Koeffizienten und den Wurzeln, die man nicht sieht, wenn man sich nur die traditionelle Formel merkt. Überraschend ist, dass diese Beziehung in Gauß' algebraischem Beweis für die Konstruierbarkeit eines regelmäßigen Heptadekagons (Kap. 16) von grundlegender Bedeutung ist.

Angesichts der modernen Dominanz algebraischer Methoden in der Geometrie ist es wichtig, sich daran zu erinnern, dass einst das Gegenteil galt. Wie die Konstruktionen von al-Khwarizmi und Cardano zeigen, wurden geometrische Methoden verwendet, um Ergebnisse in der Algebra zu erhalten. Lill und Carlyle entwickelten beide geometrische Methoden zur Lösung quadratischer Gleichungen. Die Überlegungen zur numerischen Berechnung auf Computern werden die Schüler überraschen, die noch keine Erfahrung damit haben.

Quellen

Die Methode von Poh-Shen Loh stammt aus [28, 29]. Al-Khwarizmis Konstruktion stammt aus [6, Chapter 1] und [32]. Cardanos Konstruktion ist in [6, Kap. 1] zu finden. Für die reichhaltige Geschichte der Entwicklung der Cardano-Formel siehe [52]. Die frühen Versuche, mit imaginären Zahlen zu rechnen, finden sich in [6, Chapter 2]. Lills Methode und Carlyles Kreis sind in [61] zusammen mit einer Diskussion der numerischen Berechnung der Wurzeln zu finden.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 8

Die Ramsey-Theorie



Die Ramsey-Theorie ist ein Teilgebiet der Kombinatorik, das Fragen der folgenden Art stellt: Wie groß muss eine Menge sein, damit, wenn sie in Teilmengen unterteilt wird, mindestens eine Teilmenge eine bestimmte Eigenschaft hat? Die Ergebnisse der Ramsey-Theorie sind schwer zu beweisen, und es bleiben viele Probleme offen. In diesem Kapitel stellen wir einfache Fälle von vier Problemen vor, um einen Eindruck von diesem faszinierenden Thema zu vermitteln: Schur-Tripel (Abschn. 8.1) – Tripel von ganzen Zahlen, sodass $a + b = c$ –, pythagoreische Tripel (Abschn. 8.2) – Tripel von ganzen Zahlen, sodass $a^2 + b^2 = c^2$ –, van der Waerdens Problem (Abschn. 8.3), das Zahlenfolgen betrifft, und der Satz von Ramsey (Abschn. 8.4) über die Färbung von Graphen. Abschn. 8.5 zeigt, wie die probabilistische Methode in der Kombinatorik verwendet werden kann, um eine untere Schranke für Ramsey-Zahlen zu entwickeln.

Das Problem der pythagoreischen Tripel wurde kürzlich mithilfe von Computern gelöst, und zwar mit einer relativ neuen Methode, dem sogenannten SAT-Solving. Für Leser, die mit der Aussagenlogik vertraut sind, gibt Abschn. 8.6 einen Überblick darüber, wie dies geschieht.

Abschn. 8.7 beschreibt die pythagoreischen Tripel, wie sie den Babyloniern vor viertausend Jahren bekannt waren.

Terminologie: *monochromatisch* bedeutet *mit der gleichen Farbe*.

8.1 Schur-Tripel

Definition 8.1 Gegeben ist eine beliebige Zerlegung der Menge der positiven ganzen Zahlen:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

in zwei disjunkte Teilmengen S_1, S_2 . Gibt es $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ oder $\{a, b, c\} \subseteq S_2$, sodass $a < b < c$ und $a + b = c$? Wenn ja, heißt die Menge $\{a, b, c\}$ ein *Schur-Tripel*.

Beispiel 8.1 Für $n = 8$ enthält in der Zerlegung:

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}, S_2 = \{5, 6, 7, 8\}, \tag{8.1}$$

die Menge S_1 das Schur-Tripel $\{1, 2, 3\}$. Allerdings enthält die Zerlegung:

$$S'_1 = \{1, 2, 4, 8\}, S'_2 = \{3, 5, 6, 7\}, \tag{8.2}$$

kein Schur-Tripel, wie man durch Aufzählung aller Tripel in jeder Teilmenge überprüfen kann.

Satz 8.1 *In alle Zerlegungen von $S(9) = \{1, \dots, 9\}$ in zwei disjunkte Teilmengen enthält mindestens eine Teilmenge ein Schur-Tripel.*

Natürlich könnten wir die $2^9 = 512$ Zerlegungen von $S(9)$ in zwei disjunkte Teilmengen überprüfen, aber wir wollen versuchen, einen prägnanteren Beweis zu finden.

Beweis Wir versuchen, eine Zerlegung zu konstruieren, die kein Schur-Tripel enthält, und zeigen, dass dies aufgrund der Nebenbedingungen des Problems unmöglich ist. Wir beginnen damit, 1 und 3 in die Teilmenge S_1 zu legen. 2 muss in S_2 liegen, weil $1 + 2 = 3$ und wir versuchen, eine Zerlegung zu konstruieren, die kein Schur-Tripel enthält. Analog muss 4 in S_2 liegen, weil $1 + 3 = 4$. Weiter kommt 6 in S_1 , weil $2 + 4 = 6$, und 7 kommt in S_2 , weil $1 + 6 = 7$. Aber $3 + 6 = 9$ und $2 + 7 = 9$, also muss 9 sowohl in S_1 als auch in S_2 vorkommen, ein Widerspruch. Die Reihenfolge der Schlussfolgerungen ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

S_1	S_2
1, 3	
1, 3	2
1, 3	2, 4
1, 3, 6	2, 4
1, 3, 6	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7
1, 3, 6, 9	2, 4, 7, 9

Nun gehen wir zurück zum Start und suchen nach einer Zerlegung, bei der 1, 3 in verschiedenen Teilmengen liegen. Wenn wir 5 in S_2 unterbringen, führt eine Folge von Schlussfolgerungen wieder zu einem Widerspruch, weil 9 in beiden Teilmengen vorkommen muss. Der Leser soll jede der in der folgenden Tabelle aufgeführten Schlüsse begründen:

S_1	S_2
1	3
1	3,5
1,2	3,5
1,2,8	3,5
1,2,8	3,5,7
1,2,8	3,5,7,9
1,2,8	3,5,6,7,9
1,2,8,9	3,5,6,7,9

Wir gehen wieder zurück und versuchen, 5 in S_1 zu platzieren, aber auch das führt zu einem Widerspruch, wie die folgende Tabelle zeigt:

S_1	S_2
1	3
1,5	3
1,5	3,4
1,5	3,4,6
1,2,5	3,4,6
1,2,5	3,4,6,7
1,2,5,7	3,4,6,7

Daraus folgt, dass es keine Zerlegung gibt, die nicht ein Schur-Tripel enthält. \square

Issai Schur bewies den folgenden Satz:

Satz 8.2 (Schur) Für jedes $k \geq 2$ gibt es ein kleinstes n , sodass in jeder disjunkten Zerlegung von $S(n)$ in k Teilmengen mindestens eine der Teilmengen ein Schur-Tripel enthalten muss.

8.2 Pythagoreische Tripel

Definition 8.2 Gegebene beliebige Zerlegung der Menge der positiven ganzen Zahlen:

$$S(n) = \{1, \dots, n\}$$

in zwei disjunkte Teilmengen S_1, S_2 , gibt es $\{a, b, c\} \subseteq S_1$ oder $\{a, b, c\} \subseteq S_2$, sodass $a < b < c$ und $a^2 + b^2 = c^2$? Wenn ja, wird $\{a, b, c\}$ ein *pythagoreisches Tripel* genannt.

Beispiel 8.2 Für $n = 10$ gibt es bei der Zerlegung in gerade und ungerade Zahlen:

$$S_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}, S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$

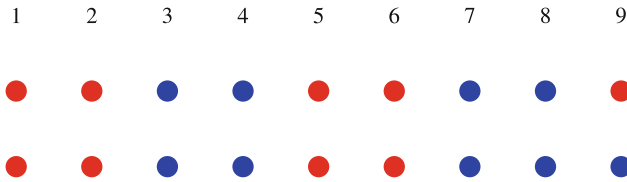


Abb. 8.2 Van der Waerdens Problem für neun farbige Punkte

finde man die kleinste Zahl n , sodass *jede* Folge von n farbigen Punkten eine Folge von k monochromatischen Punkten enthält, die eine arithmetische Folge bilden? Für $k = 3$ ist $n = 9$, wie oben für eine Zerlegung angegeben. Das nächste Ergebnis ist schwieriger zu zeigen: Für $k = 4$ ist $n = 35$.

8.4 Satz von Ramsey

Man färbe die Kanten von K_5 , dem vollständigen Graphen mit 5 Eckpunkten, mit zwei Farben, wie in Abb. 8.3a gezeigt. Es gibt keine einfarbigen Untergraphen K_3 (Dreiecke) in dem Graphen. Abb. 8.3b zeigt eine Färbung von K_6 und es ist leicht zu sehen, dass es monochromatische Dreiecke $\triangle ACE$ und $\triangle BDF$ gibt. In diesem Abschnitt beweisen wir einen einfachen Fall eines Satzes von Frank P. Ramsey über die Existenz von Teilmengen mit einer bestimmten Eigenschaft.

Definition 8.3 $R(k)$, die *Ramsey-Zahl* für k , ist die kleinste Zahl n , sodass in *jeder* Färbung des vollständigen Graphen mit n Eckpunkten, K_n , mit zwei Farben ein monochromatischer vollständiger Teilgraph K_k existiert.

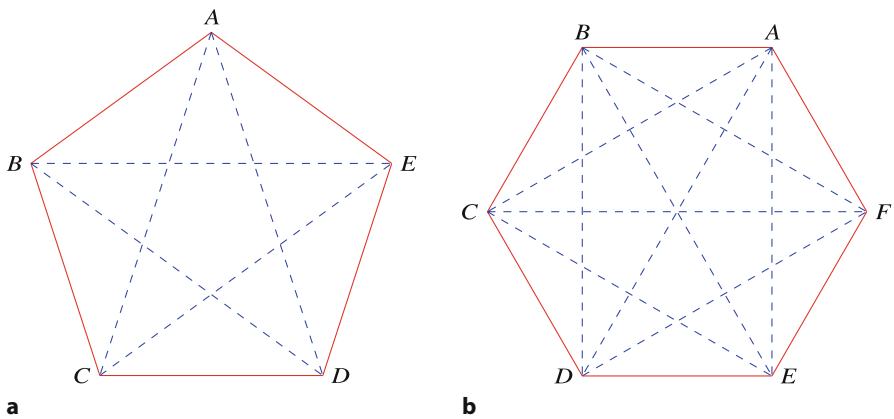


Abb. 8.3 **a** Eine Färbung von K_5 mit zwei Farben. **b** Eine Färbung von K_6 mit zwei Farben

Satz 8.5 (Ramsey) $R(3) = 6$.

Beweis Abb. 8.3a zeigt, dass $R(3) > 5$. Um zu zeigen, dass $R(3) \leq 6$ ist, betrachtet man einen beliebigen Knoten v in K_6 . v ist mit fünf anderen Knoten verbunden, und wenn die Kanten mit zwei Farben gefärbt sind, muss es mindestens drei einfarbige Kanten geben, die mit v verbunden sind.

In Abb. 8.4a sind $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}$ rot gefärbt. Da der Graph vollständig ist, sind alle Eckpunkte miteinander verbunden. Wenn also eine der Kanten $\overline{BC}, \overline{BE}, \overline{CE}$ rot gefärbt ist, sagen wir \overline{BE} , wird ein rotes Dreieck $\triangle ABE$ gebildet. Andernfalls sind alle drei Kanten dieser Kanten blau gefärbt und sie bilden ein blaues Dreieck (Abb. 8.4b). \square

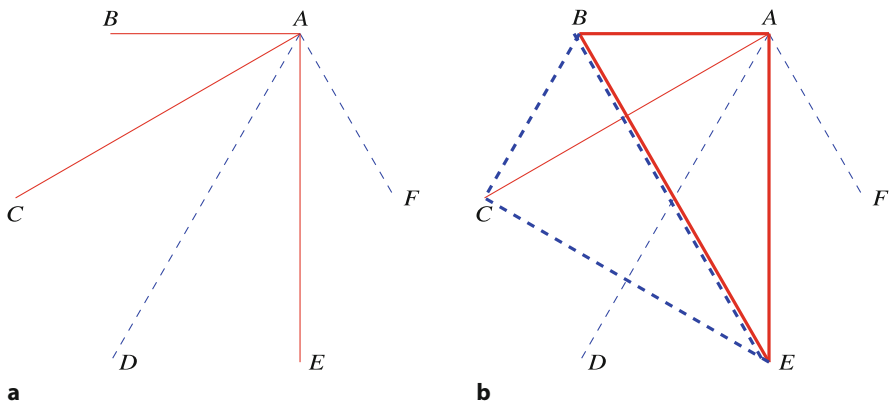


Abb. 8.4 a Ein Eckpunkt von K_6 . b Monochromatische Dreiecke in K_6

Der Satz kann auf eine beliebige Anzahl von Farben verallgemeinert werden sowie auf Färbungen, bei denen die Größen der Untergraphen nicht gleich sind. $R(r, b, g)$ ist der kleinste vollständige Graph, der so beschaffen ist, dass in jeder Färbung mit drei Farben vollständige Teilgraphen mit r roten Kanten, b blauen Kanten und g grünen Kanten existieren müssen.

8.5 Die probabilistische Methode

Die einzigen bekannten nichttrivialen Ramsey-Zahlen sind $R(3) = 6$ und $R(4) = 18$. Im Jahr 1947 entwickelte Paul Erdős die *probabilistische Methode* und verwendete sie, um untere und obere Schranken für $R(k)$ zu zeigen. Spätere Forschungen haben beide Schranken verbessert, aber dies ist immer noch ein wichtiges Forschungsgebiet, da die Schranken nicht eng sind. Es wurde zum Beispiel bewiesen, dass $43 \leq R(5) \leq 48$ und $798 \leq R(10) \leq 23.556$. In diesem Abschnitt wird die Elementarwahrscheinlichkeit verwendet, um eine untere Schranke für $R(k)$ zu erhalten.

Um zu zeigen, dass es ein Element einer Menge S gibt, das die Eigenschaft A besitzt, muss man beweisen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein *zufälliges* Element von S die Eigenschaft A besitzt, größer als null ist. Es ist wichtig zu verstehen, dass die Methode *nichtkonstruktiv* ist: Sie beweist nur, dass ein solches Element existiert, konstruiert es aber nicht. Obwohl wir aus Satz 8.5 wissen, dass $R(3) = 6$ ist, wollen wir die probabilistische Methode verwenden, um eine untere Schranke für $R(3)$ zu erhalten.

Satz 8.6 (Erdős) $R(3) > 4$.

Beweis Betrachten wir bei einer *zufälligen* Färbung von K_n durch die beiden Farben Rot und Blau einen beliebigen Untergraphen K_3 , d. h. ein beliebiges Dreieck mit $\binom{3}{2} = 3$ Seiten. Die Wahrscheinlichkeit, dass alle Seiten rot gefärbt sind, ist 2^{-3} , ebenso die Wahrscheinlichkeit, dass alle Seiten blau gefärbt sind, also ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Dreieck einfarbig ist, $2^{-3} + 2^{-3} = 2^{-2} = 1/4$. Die Anzahl der Dreiecke in K_n ist $\binom{n}{3}$, also ist $P(n, 3)$, die Wahrscheinlichkeit, dass *irgendein* Dreieck, das in einer zufälligen Färbung von K_n enthalten ist, einfarbig ist, gleich:

$$P(n, 3) = \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{4}.$$

Wenn $P(n, 3) < 1$, dann ist sein Komplement $\overline{P}(n, 3) = 1 - P > 0$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällige Färbung von K_n kein monochromatisches Dreieck enthält, ist größer als null, also muss mindestens eines existieren.

Die folgende Tabelle zeigt $\overline{P}(n, 3)$ für verschiedene Werte von n und, ob der Wert von $\overline{P}(n, 3)$ beweist, dass es eine Färbung ohne einfarbiges Dreieck gibt:

n	$\overline{P}(n, 3)$	Existenz
3	3/4	Ja
4	5/6	Ja
5	-3/7	-

□

Auf den ersten Blick ist das Ergebnis seltsam, denn Abb. 8.3a zeigt, dass es eine Färbung von K_5 ohne monochromatische Färbung gibt. Jedoch ist das probabilistische Kriterium zwar hinreichend, aber nicht notwendig; es ist eine untere Schranke, was bedeutet, dass $R(n) > 4$ ist, was wahr ist, weil Satz 8.5 gezeigt hat, dass $R(n) = 6$.

Der gleiche Beweis funktioniert für beliebige k , sodass für die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Färbung von K_n ohne monochromatischen vollständigen Graphen K_k gilt:

$$P(n, k) = \binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}}.$$

Für $k = 4$:

$$\overline{P}(n, 4) = 1 - \binom{n}{4} \cdot 2^{-5} = \left(32 - \binom{n}{4}\right) / 32$$

$$\overline{P}(6, 4) = (32 - 15) / 32 = 17 / 32$$

$$\overline{P}(7, 4) = (32 - 35) / 32 = -3 / 32.$$

Daraus folgt, dass $R(4) > 6$ ist, was viel weniger ist als der bekannte Wert $R(4) = 18$.

8.6 SAT-Solving

SAT-Solving ist eine Methode zur Lösung von Problemen, bei der ein Problem als Formel in der Aussagenlogik kodiert und dann mit einem Computerprogramm auf den Wahrheitswert der Formel überprüft wird. Fortschritte bei den Algorithmen und Implementierungen haben das SAT-Solving zu einem praktikablen Ansatz für die das Problemlösen gemacht. Wir geben einen Überblick über das SAT-Solving und erklären, wie es zur Lösung der in diesem Kapitel beschriebenen mathematischen Probleme verwendet werden kann. Es wird vorausgesetzt, dass der Leser über elementare Kenntnisse der Aussagenlogik verfügt, wie sie in Def. 8.4. zusammengefasst sind.

8.6.1 Aussagenlogik und das SAT-Problem

Definition 8.4

- Eine *Formel* besteht aus *atomaren Formeln* oder *Atomen*, die durch die Aussageoperatoren \vee (Disjunktion, „oder“), \wedge (Konjunktion, „und“), \neg (Negation, „nicht“) verbunden sind.
- Eine Formel erhält eine *Interpretation* durch eine Zuordnung von T oder F zu jedem Atom. Die Auswertung einer Formel in einer Interpretation ergibt ihren *Wahrheitswert* T oder F .
- Eine Formel ist *erfüllbar* genau dann, wenn es eine Interpretation gibt, die ihren Wahrheitswert T ergibt. Andernfalls ist die Formel *unerfüllbar*.
- Eine Formel ist dann und nur dann in *konjunktiver Normalform (KNF)*, wenn sie aus einer Konjunktion von Teilformeln besteht, von denen jede eine Disjunktion von *Literalen* (Atomen oder Negationen von Atomen) ist.

Die folgende Formel ist in KNF:

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r).$$

Das *SAT-Problem* besteht darin zu entscheiden, ob eine gegebene Formel in KNF erfüllbar ist oder nicht. Ein *SAT-Solver* ist ein Computerprogramm, welches das SAT-Problem lösen kann. Die meisten SAT-Solver basieren auf dem DPLL-Algorithmus, der auf die 1960er-Jahre zurückgeht; durch neuere Entwicklungen wurde der Algorithmus erheblich verbessert. Hochgradig optimierte Implementierungen dieser Algorithmen haben SAT-Solver zu einem wichtigen Werkzeug für die Lösung von Problemen in vielen Bereichen einschließlich der Mathematik gemacht.

8.6.2 Schur-Tripel

Wir kodieren das Schur-Tripel-Problem $S(8)$ als Formel in KNF. Die Formel ist dann und nur dann erfüllbar, wenn es eine Zerlegung der Menge S in disjunkte Teilmengen S_1, S_2 gibt, sodass weder S_1 noch S_2 ein Schur-Tripel enthält. Für jede der Zahlen $1 \leq i \leq 8$ gibt es ein Atom p_i . Die beabsichtigte Bedeutung einer Interpretation für die Formel ist, dass sie p_i T zuordnet, wenn i in der ersten Teilmenge S_1 liegt, und sie ordnet p_i F zu, wenn i in der zweiten Teilmenge S_2 liegt. Um zu zeigen, dass in allen Zerlegungen keine Teilmenge ein Schur-Tripel enthält, muss die Interpretation sicherstellen, dass für jedes mögliche Schur-Tripel mindestens ein Atom mit T und ein Atom mit F belegt ist.

Zum Beispiel ist $\{2, 4, 6\}$ ein Schur-Tripel, sodass mindestens eine der drei ganzen Zahlen in S_1 und mindestens eine von ihnen in S_2 liegen muss. Daher muss $p_2 \vee p_4 \vee p_6$ wahr sein und auch $\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6$ muss wahr sein. Es gibt 12 mögliche Schur-Tripel, also lautet die KNF-Formel:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_4 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_5 \vee p_6) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_5 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_6 \vee p_7) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_6 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_7 \vee p_8) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_7 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_3 \vee p_5) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_3 \vee \neg p_5) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_4 \vee p_6) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee \neg p_6) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_5 \vee p_7) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_5 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_6 \vee p_8) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_6 \vee \neg p_8) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8) .
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Wenn ein SAT-Solver diese Formel erhält, antwortet er, dass die Formel unter jeder der folgenden Interpretationen erfüllbar ist:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
F	F	T	F	T	T	T	F
T	T	F	T	F	F	F	T

Eine Interpretation entspricht der Zerlegung in (8.2): $S_1 = \{1, 2, 4, 8\}$, $S_2 = \{3, 5, 6, 7\}$, während die andere der symmetrischen Zerlegung $S_1 = \{3, 5, 6, 7\}$, $S_2 = \{1, 2, 4, 8\}$ entspricht.

Für $S(9)$ werden vier Paare von Teilformeln für die zusätzlichen möglichen Dreiergruppen hinzugefügt:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_8 \vee p_9) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_8 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_2 \vee p_7 \vee p_9) \wedge (\neg p_2 \vee \neg p_7 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_6 \vee p_9) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_6 \vee \neg p_9) \wedge \\
 & (p_4 \vee p_5 \vee p_9) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee \neg p_9) .
 \end{aligned}$$

Wenn der SAT-Solver diese Formel erhält, antwortet er, dass die Formel nicht erfüllbar ist, womit gemeint ist, dass die es *keine* Zerlegung ein *ohne* Schur-Tripel gibt. Entfernt man die doppelte Verneinung, bedeutet die Aussage, dass in *jeder* Zerlegung von $S(9)$ ein Schur-Tripel existiert.

8.6.3 Pythagoreische Tripel

Heule und Kullmann lösten das Problem der pythagoreischen Tripel mithilfe eines hochoptimierten SAT-Solvers. Es gab einen signifikanten Unterschied in der Effizienz zwischen dem Auffinden einer Zerlegung, die keine pythagoreischen Tripel hat (man braucht nur eine Zerlegung), und dem Nachweis, dass alle Zerlegungen ein pythagoreisches Tripel haben (man muss sie alle überprüfen). Um zu zeigen, dass es für alle $S(n)$, $1 \leq n \leq 7824$, eine Zerlegung ohne Tripel gibt, brauchte man nur eine Minute Rechenzeit, während der Nachweis, dass jede Zerlegung von $S(7825)$ ein Tripel hat, etwa zwei Tage Rechenzeit für einen Computer mit 800 parallel arbeitenden *Kernen* (Prozessoren), also insgesamt 40.000 Stunden Rechenzeit, erforderte.

Der Einsatz von Computern in der Mathematik wirft natürlich die Frage auf: Können wir einem von einem Computer erzeugten Beweis vertrauen? Natürlich können auch „gewöhnliche“ mathematische Beweise fehlerhaft sein (Abschn. 4.7), aber unsere Erfahrung mit häufigen Computerfehlern sowie die Undurchsichtigkeit großer Computerprogramme machen uns empfindlicher für mögliche Fehler in computergenerierten Beweisen.

Eine Möglichkeit, das Vertrauen in die Korrektheit eines computergenerierten Beweises zu erhöhen, besteht darin, zwei oder mehr Programme zu verwenden, die

unabhängig voneinander von zwei oder mehr Forschern geschrieben wurden. Wenn die verschiedenen Programme in unterschiedlichen Programmiersprachen und für unterschiedliche Computer und Betriebssysteme geschrieben sind, verringert dies die Möglichkeit eines Fehlers in der Computerhardware und -software.

Der SAT-Solver von Heule und Kullmann schrieb ein Protokoll der Beweisschritte, sodass diese auf ihre Korrektheit hin überprüft werden konnten. Das Protokoll war so umfangreich, 200 Terabyte, dass es unmöglich war, es direkt zu untersuchen. Zum Vergleich: 200 Terabyte sind 200.000 Gigabyte, während Ihr Computer vielleicht einen internen Speicher von 16 Gigabyte und eine Festplatte von 128 Gigabyte hat. Stattdessen haben sie ein kleines Programm geschrieben, um die Korrektheit der Daten im Protokoll zu überprüfen. Um sicherzustellen, dass dieses Programm korrekt war, schrieben sie einen formalen Beweis unter Verwendung des Coq-Beweisassistenten, der die Arbeit von Mathematikern unterstützt und überprüft, ohne den Beweisprozess vollständig zu automatisieren.

8.6.4 Ein Überblick über den DPLL-Algorithmus

Der erste Algorithmus, den man zum Lösen von SAT lernt, sind die *Wahrheitstabellen*. Bei einer Formel A in Aussagenlogik mit n verschiedenen Atomen gibt es 2^n Interpretationen, da jedem Atom unabhängig T oder F zugeordnet werden kann. Für jede Interpretation ist es einfach, den Wahrheitswert von A mithilfe der Definition der Aussagenoperatoren zu berechnen. Die Überprüfung von 2^n Interpretationen ist jedoch selbst für mäßig große n sehr ineffizient.

Der DPLL-Algorithmus ordnet schrittweise T oder F einem Atom zu und versucht dann, die Formel auszuwerten. Wenn zum Beispiel $A = p \wedge q \wedge \neg r$ gegeben ist und p F zugewiesen wird, dann wird A zu F ausgewertet, unabhängig von den Zuweisungen zu q und r , und es besteht keine Notwendigkeit, weitere Auswertungen durchzuführen. Analog dazu wird $A = p \vee q \vee \neg r$ zu T ausgewertet, wenn p T zugewiesen wird, unabhängig von den Zuweisungen an q und r .

Die Effizienz der DPLL ergibt sich aus der *Einheitsresolution*. Betrachten wir einen Teil der Formel für Schur-Tripel:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3) \wedge \\
 & (p_1 \vee p_3 \vee p_4) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee \neg p_4) \wedge \\
 & \dots \\
 & (p_3 \vee p_4 \vee p_7) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge \\
 & (p_3 \vee p_5 \vee p_8) \wedge (\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8).
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Nehmen wir an, wir haben F den Atomen p_1, p_2 zugeordnet. Die erste Teilformel reduziert sich auf die Einheitsklausel, die aus dem einzelnen Atom p_3 besteht. Wenn die Formel erfüllt werden soll, müssen wir T p_3 und allen Teilformeln zuordnen:

$$(p_1 \vee p_2 \vee p_3), (p_1 \vee p_3 \vee p_4), (p_3 \vee p_4 \vee p_7), (p_3 \vee p_5 \vee p_8),$$

werden sofort zu T ausgewertet.

Da $\neg p_3$ zu F ausgewertet wird, kann jede Teilformel, die $\neg p_3$ enthält, nur erfüllt werden, wenn einem anderen Literal in der Teilformel T zugewiesen wird. In $\neg p_3 \vee \neg p_5 \vee \neg p_8$ muss entweder p_5 oder p_8 F zugewiesen werden, damit entweder $\neg p_5$ oder $\neg p_8$ zu T ausgewertet wird.

Diese Analyse zeigt, dass, sobald p_1, p_2 F zugewiesen wurde, die Formel in (8.4) nur dann erfüllbar ist, wenn $(\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8)$ erfüllbar ist. Wendet man die Resolution von p_3 auf alle Teilformeln von (8.3) an, so reduziert sich die Formel auf:

$$\begin{aligned} & (p_4 \vee p_5) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_7) \wedge \\ & (p_6 \vee p_7) \wedge (p_6 \vee p_8) \wedge (p_7 \vee p_8) \wedge \\ & (\neg p_4 \vee \neg p_7) \wedge (\neg p_5 \vee \neg p_8). \end{aligned}$$

Eine weitere Zuordnung von F zu p_4 führt zur Interpretation als erfüllbar, was wir nach nur drei willkürlichen Zuordnungen gefunden haben.

8.7 Pythagoreische Tripel in der babylonischen Mathematik

Dieser Abschnitt ist eine Abschweifung von der Ramsey-Theorie; er wurde aufgenommen, um einen Vorgeschmack auf die reichhaltige Theorie der pythagoreischen Tripel zu geben und um die Tiefe des mathematischen Wissens in der antiken Welt zu demonstrieren. Pythagoreische Tripel waren in der babylonischen Mathematik seit mindestens 1800 v. Chr. bekannt.

Definition 8.5 Ein *primitives pythagoreisches Tripel* ist eine Menge von drei positiven ganzen Zahlen $\{a, b, c\}$, sodass $a^2 + b^2 = c^2$ und a, b, c keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben.

Beispiel 8.3 $\{3, 4, 5\}$ ist ein primitives pythagoreisches Tripel, aber $\{6, 8, 10\}$ ist ein pythagoreisches Tripel, das nicht primitiv ist, da 2 ein gemeinsamer Teiler ist.

Eine Keilschrifttafel namens *Plimpton 322* ist eines der frühesten Beispiele für babylonische Mathematik. Sie listet fünfzehn primitive pythagoreische Tripel unter Angabe von a und c auf. Tab. 8.1 zeigt vier dieser Tripel, zusammen mit den berechneten Werten von b und anderen Werten, die weiter unten diskutiert werden.

Tab. 8.1 Babylonische Tripel aus der Plimpton-322-Tafel

a	a_{Faktoren}	b	b_{Faktoren}	c	u	u_{Faktoren}	v	v_{Faktoren}
119	$7 \cdot 17$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	169	12	$2^2 \cdot 3$	5	5
4601	$43 \cdot 107$	4800	$2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$	6649	75	$3 \cdot 5^2$	32	2^5
12.709	$71 \cdot 179$	13.500	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$	18.541	125	5^3	54	$2 \cdot 3^3$
65	$5 \cdot 13$	72	$2^3 \cdot 3^2$	97	9	3^2	4	2^2

Mathemathikhistoriker haben mehrere Erklärungen dafür vorgeschlagen, wie diese Tripel gefunden wurden. Eine Erklärung lautet, dass *Euklids Formel* verwendet wurde, um die Tripel aus einem Paar von erzeugenden Zahlen zu erhalten.

Satz 8.7 (Euclid) $\{a, b, c\}$ ist nur dann ein primitives pythagoreisches Tripel, wenn es zwei positive ganze Zahlen u, v gibt, die erzeugende Zahlen genannt werden, und zwar so, dass

1. $u > v$,
2. nicht beide ungerade sind,
3. sie keinen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben,
4. die folgenden Beziehungen zwischen $\{a, b, c\}$ und u, v gelten:

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2.$$

Beweis Aus der Berechnung folgt unmittelbar, dass $\{a, b, c\}$ ein pythagoreisches Tripel bildet, wenn es wie in Punkt 4 gefordert ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 \\ &= u^4 - 2(uv)^2 + v^4 + 4(uv)^2 \\ &= u^4 + 2(uv)^2 + v^4 \\ &= (u^2 + v^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Der Beweis für die andere Richtung ist komplizierter und wird daher weggelassen. \square

Wenn es stimmt, dass die Babylonier die Formel von Euklid verwendeten, bleibt die Frage: Wie haben sie die erzeugenden Zahlen u, v entdeckt?

Jede Zeile der Tab. 8.1 zeigt a_{Faktoren} und b_{Faktoren} , die Faktorisierungen von a und b , die zeigen, dass sie keine gemeinsamen Teiler haben. Der Leser ist eingeladen zu prüfen, dass c keinen gemeinsamen Teiler mit a, b hat, sodass die Tripel primitiv sind. Die erzeugenden Zahlen u, v und $u_{\text{Faktoren}}, v_{\text{Faktoren}}$ sind ebenfalls dargestellt. Sie haben nicht nur keine gemeinsamen Teiler, wie in Satz 8.7 gefordert, sondern die einzigen Teiler größer als 1 in u und v sind Potenzen von 2, 3, 5.

Definition 8.6 Ein *babylonisches Tripel* ist ein primitives pythagoreisches Tripel, bei dem die Primfaktoren von u, v ausschließlich 2, 3, 5 sind.

Der Grund, warum sich die Babylonier auf diese Teiler beschränkten, ist, dass sie das *sexagesimale* Zahlensystem, d. h. das Zahlensystem zur Basis $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, verwendeten, dessen Primfaktoren 2, 3 und 5 sind.

Für Leser, die mit nichtdezimalen Zahlensystemen nicht vertraut sind, hier ein kurzer Überblick über das Konzept. Die „Zahl“ 12.345 ist eine Kurzform für die

Zahl:

$$(1 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10^1) + (5 \times 10^0).$$

Dieses Zahlensystem wird als *dezimal* oder Basis-10-Zahlensystem bezeichnet. Es gibt zehn Ziffern 0, 1, 2, ..., 8, 9 für die Koeffizienten der Potenzen, und die Potenzen werden durch die Stellen der Koeffizienten mit von rechts nach links zunehmenden Potenzen dargestellt.

Die Zahl kann auch im Binärsystem (Zahlensystem zur Basis 2) dargestellt werden:

$$\begin{aligned} 12.345 &= 8192 + 4096 + 32 + 16 + 8 + 1 = 2^{13} + 2^{12} + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 \\ &= 11000000111001. \end{aligned}$$

Die binäre Notation verwendet zwei Ziffern 0, 1 für die Koeffizienten, und die Zweierpotenzen werden durch die Stellen der Koeffizienten angegeben.

Ein weiteres beliebtes Zahlensystem ist das *hexadezimale* oder Basis-16-Zahlensystem, das bei der Rechentechnik verwendet wird. Für dieses Zahlensystem benötigen wir 16 „Ziffern“; die Konvention ist, 0, 1, 2, ..., 8, 9, A, B, C, D, E, F zu verwenden.

Das Zahlensystem zur Basis 60 ist nicht so fremd, wie es scheinen mag, denn wir stellen Zeit, geografische Koordinaten und Winkel in diesem System dar. Wir sind es gewohnt, Berechnungen wie (1 Stunde 40 Minuten) plus (1 Stunde 30 Minuten) gleich (3 Stunden 10 Minuten) auszuführen.

Tab. 8.2 zeigt die Werte von a, c , die in der Tafel in der Basis-60-Notation erscheinen, wobei $\langle d \rangle$ die d -te „Ziffer“ für $0 \leq d < 60$ darstellt. Der Leser kann nachprüfen, dass diese Werte mit den Dezimalwerten in Tab. 8.1 übereinstimmen, z. B.:

$$\begin{aligned} (3 \times 60^2) + (31 \times 60^1) + (49 \times 60^0) &= 12.709 \\ (5 \times 60^2) + (9 \times 60^1) + (1 \times 60^0) &= 18.541 \end{aligned}$$

Die Babylonier hatten nicht 60 verschiedene Symbole für die Ziffern. Stattdessen verwendeten sie ein hybrides System, bei dem die Koeffizienten mit zwei Symbolen dargestellt wurden: eines für den Zehnerkoeffizienten und das andere für den Einerkoeffizienten, und die Stellen der Koeffizienten gaben die Potenzen von 60 an. Mit \heartsuit für den Zehnerkoeffizienten und \diamondsuit für den Einerkoeffizienten würde die Dezimalzahl $(38 \times 60) + (16 \times 60^0) = 2296$ wie folgt dargestellt werden:

$$\heartsuit\heartsuit\heartsuit \quad \begin{matrix} \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit \\ \diamondsuit\diamondsuit\diamondsuit \end{matrix} \quad \heartsuit \quad \begin{matrix} \diamondsuit \\ \diamondsuit \\ \diamondsuit \\ \diamondsuit \end{matrix} .$$

Tab. 8.2 Babylonische Tripel im Basis-60-System

a	c
$\langle 1 \rangle \langle 59 \rangle$	$\langle 2 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 16 \rangle \langle 41 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 50 \rangle \langle 49 \rangle$
$\langle 3 \rangle \langle 31 \rangle \langle 49 \rangle$	$\langle 5 \rangle \langle 09 \rangle \langle 01 \rangle$
$\langle 1 \rangle \langle 05 \rangle$	$\langle 1 \rangle \langle 37 \rangle$

Was ist die Überraschung?

Der Satz von Frank P. Ramsey schien ein unbedeutendes Ergebnis in der Kombinatorik zu sein. Überraschenderweise war der Satz die Grundlage für ein völlig neues und anspruchsvolles Gebiet der Mathematik mit vielen offenen Problemen. Auch die Natur der Ramsey-Theorie ist überraschend: Wenn eine Menge groß genug ist, gibt es Regelmäßigkeiten in ihren Teilmengen.

In die Ramsey-Theorie wurde ich durch den Artikel von Marijn J.H. Heule und Oliver Kullmann über die pythagoreischen Tripel eingeführt, deren Beweis eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Beweis des Vier-Farben-Satzes aufweist: der Einsatz massiver Rechenressourcen, der erst nach theoretischen Fortschritten erfolgreich ist. Daher lautet auch der Titel ihres Artikels: *The Science of Brute Force*.

Probleme in der Kombinatorik verlangen nach bestimmten Zahlenwerten, zum Beispiel muss $R(n)$ eine bestimmte positive ganze Zahl sein. Es ist überraschend, dass probabilistische Methoden sich als so fruchtbar erwiesen haben, um Ergebnisse in diesem Bereich zu erzielen.

Wir neigen zu der Annahme, dass die Menschen heute schlauer sind als vor Tausenden von Jahren. Es kann überraschen, wenn man erfährt, dass die babylonische Mathematik vor viertausend Jahren so weit fortgeschritten war, dass sie entdeckte, dass $\{12.709, 13.500, 18.541\}$ ein pythagoreisches Tripel ist.

Quellen

Einen Überblick über die Ramsey-Theorie findet man unter [9], während eine fortgeschrittene Darstellung in [20] zu finden ist. Der Abschnitt über die probabilistische Methode basiert auf [43, Example 4o] und [9, Chapter 4]. Eine Datenbank mit Ramsey-Zahlen ist in [34] zu finden.

Die Methode zum Beweis des Satzes über die pythagoreischen Tripel wird in [23] ausführlich erläutert. Siehe [4] für eine Einführung in die Logik und in das SAT-Solving. Das Archiv meines SAT-Solvers für die Ausbildung [5] enthält Formeln für Schur-Tripel, Ramsey-Graphen und das Van-der-Waerden-Problem.

Abschn. 8.7 basiert auf [42, 60]. Das sexagesimale Zahlensystem wird in [62] beschrieben.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 9

Das Langford-Problem



C. Dudley Langford bemerkte, dass sein Sohn farbige Blöcke wie in Abb. 9.1 dargestellt angeordnet hatte. Zwischen den roten Blöcken befindet sich ein Block, zwischen den blauen Blöcken zwei und zwischen den grünen Blöcken drei.



Abb. 9.1 Anordnung der Blöcke für das Langford-Problem

Definition 9.1 (Langford-Problem $L(n)$) Gegeben sei die Multimenge¹ von positiven ganzen Zahlen:

$$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, n, n\},$$

Lassen die Elemente sich so anordnen, dass für $1 \leq i \leq n$ gilt, dass i Zahlen zwischen den beiden Vorkommen von i liegen?

Abb. 9.1 zeigt, dass 312132 eine Lösung für $L(3)$ ist.

Abschn. 9.1 formuliert das Langford-Problem neu und verwendet dabei einen mathematischen Formalismus, der die Lösung des Problems erleichtert. Abschn. 9.2 charakterisiert Werte von n , für die $L(n)$ lösbar ist, und präsentiert zwei Beweise des Satzes. Der erste Beweis, der relativ einfach ist, verwendet die Technik der Doppelzählung: man zählt denselben Wert auf zwei verschiedene Arten und setzt die resultierenden Formeln gleich. Der zweite Beweis ist eine geschickte Induktion, aber die damit verbundene „Buchführung“ erfordert eine sorgfältige Beachtung der Details. Abschn. 9.3 arbeitet die Lösung für $L(4)$ aus.

¹ Eine Multimenge (engl. *multiset* oder *bag*) ist wie eine Menge, mit der Ausnahme, dass es mehr als ein Vorkommen eines Elements geben kann.

9.1 Das Langford-Problem als Überdeckungsproblem

Das Langford-Problem kann mithilfe einer Matrix gelöst werden. Für $L(3)$ gibt es sechs Spalten, eine für jede Position, an der die sechs Zahlen platziert werden können. Es gibt eine Zeile für jede mögliche Platzierung einer der Zahlen, d. h. die beiden Vorkommen von k müssen k Zahlen zwischen sich haben. Es gibt vier mögliche Platzierungen der Einsen, drei der Zweien und zwei der Dreien:

	1	2	3	4	5	6
1	1		1			
2		1		1		
3			1		1	
4				1		1
5	2			2		
6		2			2	
7			2			2
8	3				3	
9		3				3

Um das Problem zu lösen, müssen wir eine Zeile für die Einsen in der Folge, eine Zeile für die Zweien und eine Zeile für die Dreien so auswählen, dass keine Spalte mehr als eine Zahl enthält, wenn wir diese Zeilen übereinander stapeln.

Die Zeile 9 braucht wegen der Symmetrie nicht berücksichtigt zu werden: Wenn man mit Zeile 9 beginnt, erhält man die Umkehrung der Folge, die man erhält, wenn man mit Zeile 8 beginnt.

Zeile 8 ist die einzige, die 3 enthält, also muss sie gewählt werden, und die Folge ist $3_ _ _ 3_ _$. Jede Zeile mit Zahlen in den Spalten 1 und 5 kann nun nicht mehr verwendet werden, da an jeder Stelle nur eine Zahl stehen kann. Bezeichnen wir die zulässigen und verbotenen Zeilen mit:

$$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8.$$

Zeile 7 ist die einzige verbleibende Zeile, die Zweien enthält, also muss sie ausgewählt werden und die Reihenfolge ist $3_ 2_ 32$. Das Löschen von Zeilen, die nicht mehr verwendet werden können, ergibt:

$$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8.$$

Wählt man die einzige verbleibende Zeile, Zeile 2, ergibt sich die Lösung 312132:

	1	2	3	4	5	6
2		1		1		
7			2			2
8	3				3	

Die Analyse hat gezeigt, dass dies die einzige Lösung ist, mit Ausnahme der symmetrischen Lösung, die man erhält, wenn man mit Zeile 9 beginnt.

9.2 Für welche Werte von n ist das Langford-Problem lösbar?

Satz 9.1 $L(n)$ hat dann und nur dann eine Lösung, wenn $n = 4k$ oder $n = 4k + 3$.

Wir beweisen die Vorwärtsrichtung des Satzes. Beweis 1 zeigt: Wenn $L(n)$ eine Lösung hat, dann gilt $n = 4k$ oder $n = 4k + 3$. Beweis 2 zeigt den Kehrsatz: Wenn $n = 4k + 1$ oder $n = 4k + 2$, dann hat $L(n)$ keine Lösung.

Beweis (1) Wenn das erste Vorkommen der Zahl k an der Stelle i_k ist, ist das zweite Vorkommen an der Stelle $i_k + k + 1$. Zum Beispiel in 312132, der Lösung für $L(3)$, ergibt die Wahl von $k = 2$ $i_k = 3$ und $i_k + k + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$.

S_n , die Summe der Positionen aller Zahlen, ist:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (i_k + k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \sum_{k=1}^n (k + 1) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2}. \end{aligned}$$

Andererseits ist S_n einfach $1 + 2 + 3 + \dots + 2n$, also:

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}.$$

Die Gleichsetzung der beiden Formeln für S_n ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n i_k + \frac{n(n+3)}{2} &= \frac{2n(2n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n i_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+3)}{2} \right) \\ &= \frac{3n^2 - n}{4}. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist eine ganze Zahl, da sie die Summe von ganzen Zahlen (die Positionen) ist, also muss die rechte Seite auch eine ganze Zahl sein. Wann ist $3n^3 - n$ durch 4 teilbar? Die Faktorisierung von $3n^2 - n$ ergibt $n(3n - 1)$.

Wenn n ein Vielfaches von 4 ist, ist das Produkt durch 4 teilbar.

Wann ist $3n - 1$ durch 4 teilbar? Jede ganze Zahl n lässt sich als $n = 4i + j$ mit $j = 0, 1, 2, 3$ darstellen. Wenn $3n - 1$ durch 4 teilbar ist, dann ist auch $3(4i + j) - 1 = 12i + 3j - 1$ teilbar. $12i$ ist durch 4 teilbar. Für $j = \{0, 1, 2, 3\}$ ist $3j - 1 = \{-1, 2, 5, 8\}$ dann und nur dann durch 4 teilbar, wenn $j = 3$, also $n = 4i + 3$. \square

Um die Idee des zweiten Beweises vorzustellen, betrachten wir, wie eine Lösung für $n = 4$ aussehen könnte. In den folgenden Tabellen sind die Stellen, an denen 4 vorkommt, 1 und 6, und die Stellen, an denen 2 vorkommt, sind 5 und 8. In beiden Fällen ist eine Position ungerade und die andere gerade.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
*					*		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				*			*

Sei $k = 2m$ eine *gerade* Zahl. Wenn i die Position des ersten Vorkommens von k ist, dann ist die Position des zweiten Vorkommens $i + k + 1$. Die Summe der Positionen ist:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 = 2(i + m) + 1,$$

was eine ungerade Zahl ist. Damit die Summe von zwei Zahlen ungerade ist, muss eine ungerade und die andere gerade sein.

Überprüfen wir nun die Positionen des Auftretens der ungeraden Zahlen. Die Positionen der Vorkommen von 1 sind 2 und 4, beides gerade Zahlen, und die Positionen der Vorkommen von 3 sind 3 und 7, beides ungerade Zahlen.

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	*		*				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		*				*	

Sei $k = 2m + 1$ eine *ungerade* Zahl. Die Summe der Positionen ist:

$$i + (i + k + 1) = 2i + 2m + 1 + 1 = 2(i + m + 1),$$

was eine gerade Zahl ist. Damit die Summe von zwei Zahlen gerade ist, müssen beide ungerade oder beide gerade sein.

Die Positionen $1, 2, \dots, 2n - 1, 2n$ enthalten eine gleiche Anzahl von geraden und ungeraden Positionen. Die beiden Vorkommen einer Zahl in einer Zeile „bedecken“ zwei Stellen. Wenn die Menge der Zeilen alle Positionen abdeckt, müssen sie eine gleiche Anzahl von geraden und ungeraden Positionen abdecken. Man definiert die Parität einer Reihe von Zeilen als die Differenz zwischen der Anzahl der geraden und ungeraden Positionen, die abgedeckt werden. Zu Beginn ist die Parität gleich null, und wenn das Problem eine Lösung hat, hat die Menge der Zeilen in der Lösung ebenfalls die Parität null.

Wenn zwei Vorkommen einer geraden Zahl platziert werden, decken sie eine gerade und eine ungerade Position ab, sodass die Parität gleich bleibt:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
-1					+1		

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
				-1			+1

Wenn zwei Vorkommen einer ungeraden Zahl platziert werden, wird die Parität $+2$ oder -2 , also müssen wir in der Lage sein, dieses Paar mit einem Paar von Vorkommen einer anderen ungeraden Zahl zu verbinden, die an Positionen platziert sind, welche die Parität ausgleichen:

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
	+1		+1				

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	3	1	2	4	3	2
		-1				-1	

Wir haben gezeigt, dass es eine Lösung des Langford-Problems nur dann geben kann, wenn es eine gerade Anzahl ungerader Zahlen in $\{1, \dots, n\}$ gibt! Der Satz besagt, dass, wenn dies wahr ist, entweder $n = 4k$ oder $n = 4k - 1$, und wenn nicht, dann entweder $n = 4k - 2$ oder $4k - 3$.

Beweis (2) Der Beweis erfolgt durch Induktion. Es gibt vier Grundfälle:

- $n = 4k - 3 = 1$. In $\{1\}$ gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- $n = 4k - 2 = 2$. In $\{1, 2\}$ gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- $n = 4k - 1 = 3$. In $\{1, 2, 3\}$ gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und wir haben gesehen, dass es eine Lösung gibt.
- $n = 4k - 0$. In $\{1, 2, 3, 4\}$ gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und Abschn. 9.3 gibt eine Lösung.

Die Induktionshypothese lautet, dass der Satz für $\{1, \dots, 4k - j\}$, $k \geq 1$, $0 \leq j \leq 3$ wahr ist, und wir werden beweisen, dass er für $n = 4(k + 1) - j$ wahr ist.

- Füge $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$ zu $\{1, \dots, 4k\}$ hinzu. Nach der Induktionshypothese für $4k = 4k - 0$ gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen. $4(k + 1) - 3$ ist ungerade, also gibt es jetzt eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- Füge $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$ zu $\{1, \dots, 4k + 1\}$ hinzu. Nach der Induktionshypothese für $4k + 1 = 4(k + 1) - 3$ gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen. $4(k + 1) - 2$ ist gerade, also gibt es immer noch eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt keine Lösung.
- Füge $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$ zu $\{1, \dots, 4k + 2\}$ hinzu. Nach der Induktionshypothese für $4k + 2 = 4(k + 1) - 2$ gibt es eine ungerade Anzahl von ungeraden Zahlen. $4(k + 1) - 1$ ist ungerade, also gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und es gibt wahrscheinlich eine Lösung.

- Füge $4k + 4 = 4(k + 1) - 0$ zu $\{1, 2, \dots, 4k + 3\}$ hinzu. Nach der Induktionshypothese für $4k + 3 = 4(k + 1) - 1$ gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen. $4(k + 1) - 0$ ist gerade, also gibt es eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen und eine Lösung ist wahrscheinlich. \square

9.3 Lösung für $L(4)$

Hier ist das Feld für $L(4)$. Versuchen Sie, die Lösung selbst zu finden.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7	2			2				
8		2			2			
9			2			2		
10				2			2	
11					2			2
12	3				3			
13		3				3		
14			3				3	
15				3				3
16	4					4		
17		4					4	
18			4					4

Aus Gründen der Symmetrie kann die Zeile 18 entfallen.

Man wähle Zeile 16, und die Reihenfolge ist $4_ _ _ _ 4 _ _$. Jede Zeile mit einem Element an Position 1 oder Position 6 kann nicht mehr Teil der Lösung sein.

$$\cancel{1}, 2, 3, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, 8, \cancel{9}, 10, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, 15, 16, \cancel{17}$$

Man wähle Zeile 14, und die Reihenfolge ist $4_ 3 _ _ 4 3 _$.

$$\cancel{1}, 2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$$

Man wähle Zeile 8. Die Reihenfolge ist $423_ 243_$.

$$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8, \cancel{9}, \cancel{10}, \cancel{11}, \cancel{12}, \cancel{13}, 14, \cancel{15}, 16, \cancel{17}$$

Alle Auswahlmöglichkeiten für die 1 wurden eliminiert, also müssen wir zurückgehen.

Anstelle von Zeile 8 wählen wir Zeile 11, und die Reihenfolge ist 4_3_2432.

1, 2, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7, ~~8~~, ~~9~~, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Man wähle Zeile 2 und wir haben eine Lösung 41312432.

Gehen wir weiter zurück, um zu sehen, ob es eine andere Lösung gibt.

Anstelle von Zeile 14 wählen wir Zeile 15, und die Reihenfolge ist 4_3_3_4_3.

1, 2, 3, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7, 8, ~~9~~, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Reihe 8 muss gewählt werden, und die Reihenfolge ist 42_324_3.

1, 2, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7, 8, ~~9~~, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Alle Möglichkeiten für die 1 wurden gestrichen, also gehen wir wieder zurück.

Anstelle von Zeile 16 wählen wir Zeile 17, und die Reihenfolge ist 4_4_4_4_4_.

1, 2, 3, 4, ~~5~~, 6, 7, ~~8~~, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Man wähle Zeile 15, und die Reihenfolge ist 4_4_3_4_3.

1, 2, 3, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Reihe 9 muss gewählt werden, und die Reihenfolge ist 4_423_243.

1, 2, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Alle Auswahlmöglichkeiten für die 1 wurden eliminiert. Wir können ein letztes Mal zurückgehen.

Anstelle von Reihe 15 wählen wir Reihe 12, und die Folge ist 34_3_3_4.

1, 2, ~~3~~, ~~4~~, ~~5~~, ~~6~~, 7, ~~8~~, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17

Auch hier wurden alle Möglichkeiten für die 1 gestrichen.

Daher ist 41312432 die einzige Lösung.

Was ist die Überraschung?

Die Quelle der Inspiration für einen mathematischen Satz kann überraschend sein. Langford bemerkte ein Muster in den farbigen Blöcken seines Sohnes, das zu dem interessanten Satz 9.1 führte. Die Schüler sollten auch erfahren, dass ein Satz viele verschiedene Beweise haben kann.

Quellen

Dieses Kapitel stützt sich auf [35]. [12] zeigt, wie man eine Lösung für $n = 4k$ und $n = 4k + 3$ findet.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 10

Die Axiome des Origami



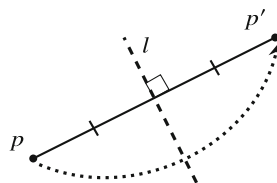
Origami, die Kunst des Papierfaltens, wurde vor mehreren Jahrhunderten in Japan entwickelt und hat heute eine weltweite Anhängerschaft. Im späten zwanzigsten Jahrhundert wurde die mathematische Theorie des Origami entwickelt. Ihre Grundlage ist ein Satz von sieben Axiomen, die *Huzita-Hatori-Axiome*, benannt nach Humiaki Huzita, der die ersten sechs Axiome formalisierte, und Koshiro Hatori, der das siebte fand. Jacques Justin veröffentlichte alle sieben Axiome einige Jahre vor Huzita und Hatori, und Margherita P. Beloch formulierte das sechste Axiom im Jahr 1936. Dennoch sind die Axiome als die Huzita-Hatori-Axiome bekannt.

In einer Folge von drei Kapiteln werden wir die Mathematik des Origami erkunden. Dieses Kapitel stellt die Axiome vor, Kap. 11 verbindet Origami mit den Wurzeln von Polynomen und Kap. 12 zeigt, dass Konstruktionen mit Origami Probleme lösen können, die mit Zirkel und Lineal unmöglich sind.

Dieses Kapitel enthält einen Abschnitt für jedes der sieben Axiome. Im Anschluss an die Erklärung eines Axioms und ein Diagramm der von ihm spezifizierten *Falte* werden die Gleichungen der Falte und der Schnittpunkte mithilfe der analytischen Geometrie entwickelt. Eine Falte kann auch als *geometrischer Ort* definiert werden, die Menge aller Punkte, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen. Der Begriff „Falten“ stammt von der Origami-Operation, bei der ein Stück Papier gefaltet wird, aber hier wird er verwendet, um die geometrische Linie zu bezeichnen, die durch das Falten des Papiers entstehen würde.

Falten führen zu *Spiegelungen*. Bei einem Punkt p ergibt seine Spiegelung an einer Falte l einen solchen Punkt p' , dass l die Mittelsenkrechte der Strecke pp' ist (Abb. 10.1).

Abb. 10.1 Die Falte ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke zwischen einem Punkt und seiner Spiegelung



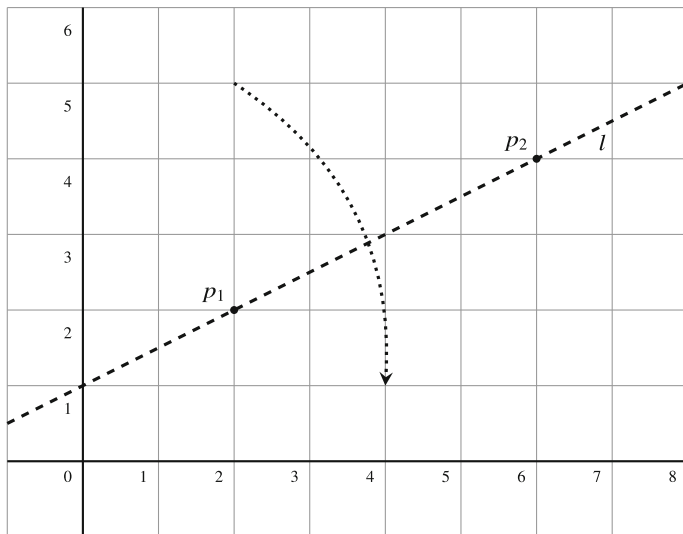


Abb. 10.2 Axiom 1

10.1 Axiom 1

Axiom 10.1 Zu zwei verschiedenen Punkten $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ gibt es eine eindeutige Falte l , die durch beide Punkte verläuft (Abb. 10.2).

Herleitung der Gleichung der Falte Die Gleichung der Falte l ergibt sich aus den Koordinaten von p_1 und p_2 . Die Steigung ist der Quotient aus den Differenzen der Koordinaten und der Achsenabschnitt ergibt sich aus p_1 :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{10.1}$$

Beispiel 10.1 Es sei $p_1 = (2, 2)$, $p_2 = (6, 4)$. Die Gleichung von l ist dann:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{4 - 2}{6 - 2}(x - 2) \\ y &= \frac{1}{2}x + 1. \end{aligned}$$

10.2 Axiom 2

Axiom 10.2 Zu zwei verschiedenen Punkten $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ gibt es eine eindeutige Falte l , die p_1 auf p_2 legt (Abb. 10.3).

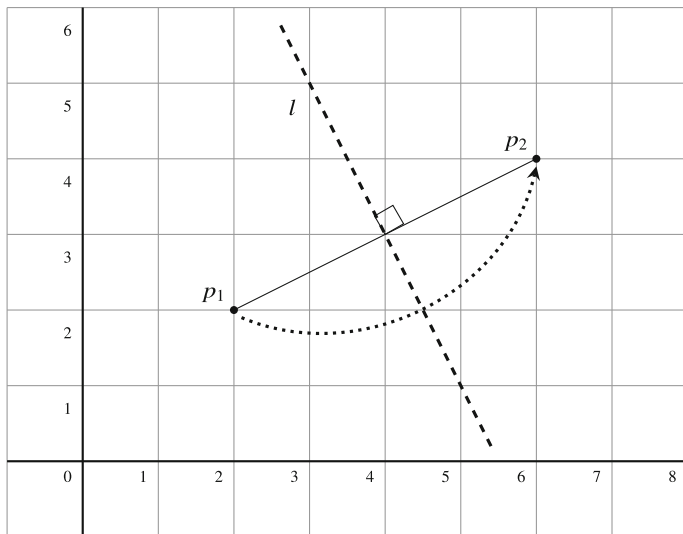


Abb. 10.3 Axiom 2

Die Falte ist der geometrische Ort aller Punkte, die äquidistant von p_1 und p_2 sind.

Herleitung der Gleichung der Falte Die Falte l ist die Mittelsenkrechte von $\overline{p_1 p_2}$. Ihre Steigung ist der negative Kehrwert der Steigung der Verbindungsstrecke zwischen p_1 und p_2 . l geht durch den Mittelpunkt zwischen den beiden Punkten:

$$y - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right). \tag{10.2}$$

Beispiel 10.2 Es sei $p_1 = (2, 2)$, $p_2 = (6, 4)$. Die Gleichung von l ist:

$$y - \left(\frac{2 + 4}{2} \right) = -\frac{6 - 2}{4 - 2} \left(x - \left(\frac{2 + 6}{2} \right) \right)$$

$$y = -2x + 11.$$

10.3 Axiom 3

Axiom 10.3 Zu zwei Geraden l_1, l_2 gibt es eine Falte l , die l_1 auf l_2 legt (Abb. 10.4).

Die Falte ist der geometrische Ort der Punkte, die von l_1 und l_2 gleich weit entfernt sind, wobei der Abstand eines Punktes zu einer Geraden die Länge der Strecke ist,

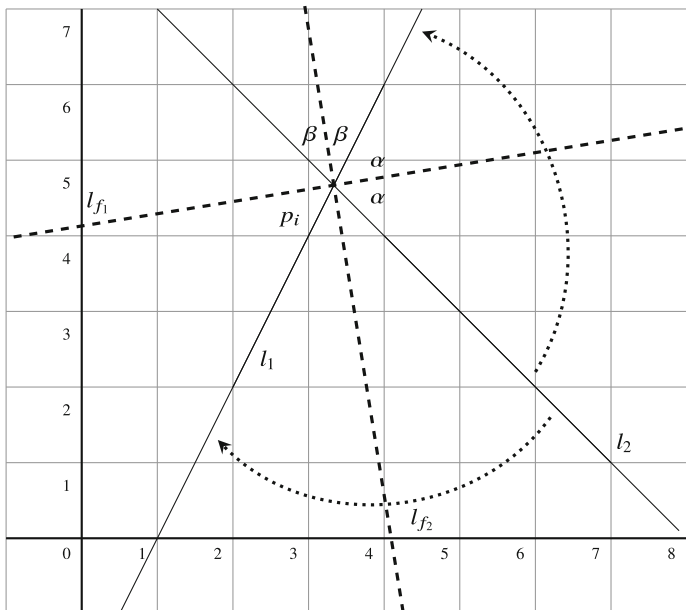


Abb. 10.4 Axiom 3

die durch den Punkt geht und senkrecht auf der Geraden steht. Mithilfe kongruenter Dreiecke lässt sich leicht zeigen, dass die Falte eine Winkelhalbierende des von l_1 und l_2 gebildeten Winkels ist.

Herleitung der Gleichung der Falte

l_1, l_2 sind parallel: Sei l_1 gleich $y = mx + b_1$ und l_2 gleich $y = mx + b_2$. Die Falte ist die zu l_1 und l_2 parallele Gerade, die in der Mitte zwischen ihnen liegt:

$$y = mx + \frac{b_1 + b_2}{2} .$$

l_1, l_2 schneiden sich: Sei l_1 gleich $y = m_1x + b_1$ und l_2 gleich $y = m_2x + b_2$. $p_i = (x_i, y_i)$, der Schnittpunkt der beiden Geraden, ist:

$$\begin{aligned} m_1x_i + b_1 &= m_2x_i + b_2 \\ x_i &= \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y_i &= m_1x_i + b_1 . \end{aligned}$$

Beispiel 10.3 Sei l_1 gleich $y = 2x - 2$ und l_2 gleich $y = -x + 8$. Dann ist $p_i = (x_i, y_i)$:

$$x_i = \frac{8 - (-2)}{2 - (-1)} = \frac{10}{3} \approx 3,33$$

$$y_i = 2 \cdot \frac{10}{3} - 2 = \frac{14}{3} \approx 4,67.$$

Die Falte ist die Winkelhalbierende des Winkels, den l_1 und l_2 in ihrem Schnittpunkt bilden. Es gibt zwei mögliche Falten, da es zwei Paare von Scheitelwinkeln gibt. Wir müssen die Steigungen der Winkelhalbierenden bestimmen. Ist der Winkel der Geraden l_1 zur x -Achse θ_1 und der Winkel der Geraden l_2 zur x -Achse θ_2 , so ist die Falte diejenige Gerade, die zur x -Achse einen Winkel von $\theta_b = (\theta_1 + \theta_2)/2$ bildet.

Es sei $m_1 = \tan \theta_1$, $m_2 = \tan \theta_2$. Nach Satz A.9 ist m_s , die Steigung der Geraden, die einen Winkel von $\theta_1 + \theta_2$ relativ zur x -Achse bildet, gleich:

$$m_s = \tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}.$$

Nach Satz A.10 ist m_b , die Steigung der Winkelhalbierenden, gleich:

$$m_b = \tan \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2(\theta_1 + \theta_2)}}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + m_s^2}}{m_s}.$$

Beispiel 10.4 Für $y = 2x - 2$ und $y = -x + 8$ ist die Steigung der Winkelhalbierenden:

$$m_s = \frac{2 + (-1)}{1 - (2 \cdot -1)} = \frac{1}{3}$$

$$m_b = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (1/3)^2}}{1/3} = -3 \pm \sqrt{10} \approx -6,16, 0,162.$$

Leiten wir die Gleichung der Falte l_{f_1} mit der positiven Steigung her. Aus Bsp. 10.3 sind die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Geraden $(10/3, 14/3)$. Daraus folgt:

$$\frac{14}{3} = (-3 + \sqrt{10}) \cdot \frac{10}{3} + b_i$$

$$b_i = \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3}$$

$$y = (-3 + \sqrt{10})x + \frac{44 - 10\sqrt{10}}{3} \approx 0,162x + 4,13.$$

10.4 Axiom 4

Axiom 10.4 Zu einem Punkt p_1 und einer Gerade l_1 gibt es eine eindeutige Falte l senkrecht zu l_1 , die durch den Punkt p_1 geht (Abb. 10.5).

Die Falte ist der geometrische Ort aller Punkte auf der Senkrechten zu l_1 , die durch p_1 geht.

Herleitung der Gleichung der Falte l_1 sei $y = m_1x + b_1$ und $p_1 = (x_1, y_1)$. l steht senkrecht auf l_1 , ihre Steigung ist also $-(1/m_1)$. Da sie durch p_1 geht, können wir den Achsenabschnitt b berechnen und seine Gleichung aufschreiben:

$$y_1 = -\frac{1}{m}x_1 + b$$

$$b = \frac{(my_1 + x_1)}{m}$$

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{(my_1 + x_1)}{m}.$$

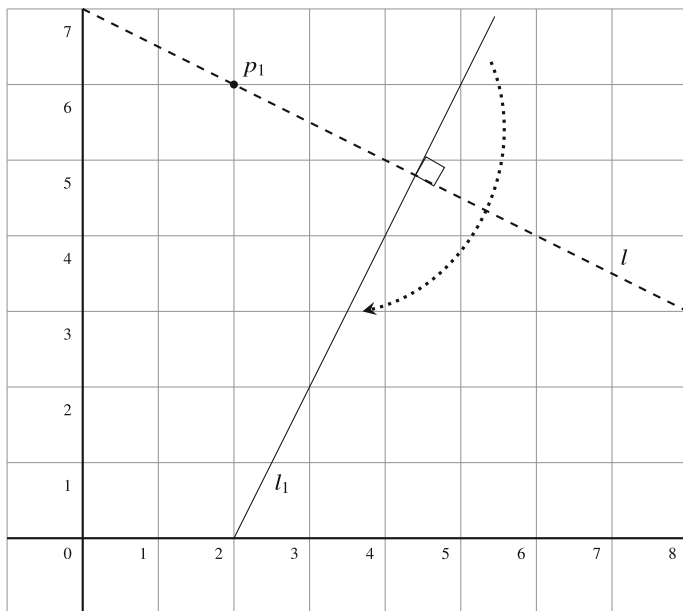


Abb. 10.5 Axiom 4

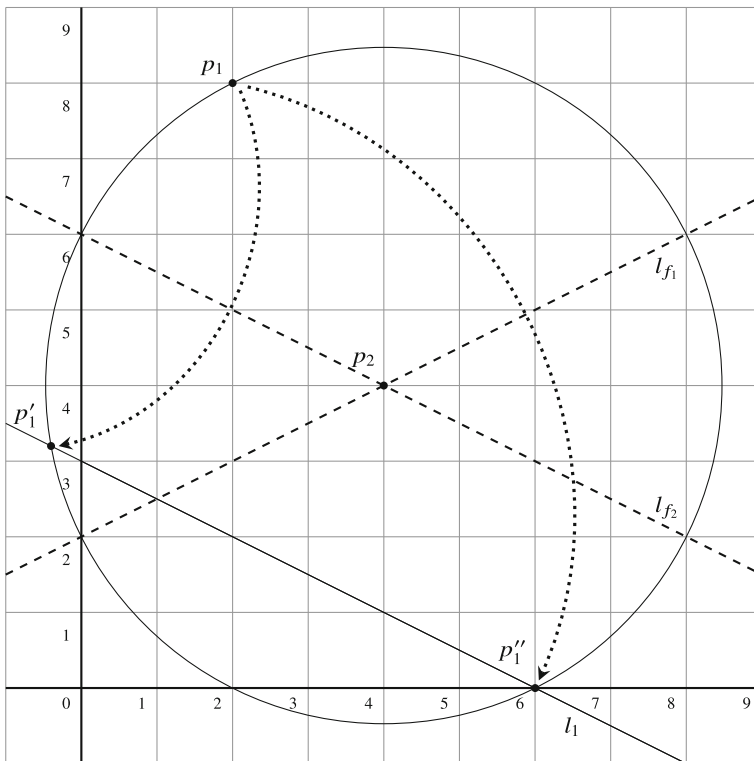


Abb. 10.6 Axiom 5

Beispiel 10.5 Sei $p_1 = (2, 6)$ und l_1 durch $y = 2x - 4$ gegeben. Die Gleichung für die Falte lautet:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{2 \cdot 6 + 2}{2} = -\frac{1}{2}x + 7.$$

10.5 Axiom 5

Axiom 10.5 Zu zwei Punkten p_1, p_2 und einer Gerade l_1 gibt es eine Falte l , die p_1 auf l_1 legt und durch p_2 geht (Abb. 10.6).

Da die Falte durch p_2 geht und p_2 auf der Mittelsenkrechten von $\overline{p_1 p'_1}$ liegt, ist die geometrische Ortskurve der Spiegelung von p_1 der durch p_2 zentrierte Kreis mit dem Radius $\overline{p_1 p_2}$. Die Falte ist so beschaffen, dass die Spiegelung p'_1 auf der gegebenen Gerade l_1 liegt.

Herleitung der Gleichungen der Falten Sei l_1 gleich $y = m_1x + b_1$, und seien $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$. Die Gleichung des in p_2 zentrierten Kreises mit dem Radius $\overline{p_1 p_2}$ lautet:

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r^2, \quad \text{wobei} \\ r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Setzt man die Gleichung von l_1 in die Gleichung für den Kreis ein, so erhält man:

$$(x - x_2)^2 + ((m_1x + b_1) - y_2)^2 = r^2 \\ (x - x_2)^2 + (m_1x + (b_1 - y_2))^2 = r^2,$$

und wir erhalten eine quadratische Gleichung für die x -Koordinaten der möglichen Schnittpunkte:

$$x^2(1 + m_1^2) + 2(-x_2 + m_1(b_1 - y_2))x + (x_2^2 + (b_1^2 - 2b_1y_2 + y_2^2) - r^2) = 0. \quad (10.3)$$

Da eine quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen hat, kann es für ein gegebenes Paar von Punkten und eine Gerade null, eine oder zwei Falten geben. Aus den Lösungen x'_1, x''_1 können wir y'_1, y''_1 aus $y = m_1x + b_1$ berechnen. Die reflektierten Punkte sind $p'_1 = (x'_1, y'_1)$, $p''_1 = (x''_1, y''_1)$.

Beispiel 10.6 Es sei $p_1 = (2, 8)$, $p_2 = (4, 4)$, und l_1 sei $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Die Gleichung des Kreises ist $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = (4 - 2)^2 + (4 - 8)^2 = 20$. Setzt man die Geradengleichung in die Kreisgleichung ein, so erhält man eine quadratische Gleichung für die x -Koordinaten der Schnittpunkte (oder man verwendet (10.3)):

$$(x - 4)^2 + \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3 \right) - 4 \right)^2 = 20 \\ (x - 4)^2 + (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 - 20 = 0 \\ 5x^2 - 28x - 12 = 0 \\ (5x + 2)(x - 6) = 0.$$

Die beiden Kreuzungspunkte sind:

$$p'_1 = (-2/5, 16/5) = (-0,4, 3,2), \quad p''_1 = (6, 0).$$

Die Falten sind die Winkelhalbierenden von $\overline{p_1 p'_1}$ und $\overline{p_1 p''_1}$.

Beispiel 10.7 Für $p_1 = (2, 8)$ und $p'_1 = (-2/5, 16/5)$ lautet die Gleichung von l_{f_1} :

$$y - \frac{8 + (16/5)}{2} = -\frac{(-2/5) - 2}{(16/5) - 8} \left(x - \frac{2 + (-2/5)}{2} \right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

Beispiel 10.8 Für $p_1 = (2, 8)$ und $p'_1 = (6, 0)$ lautet die Gleichung von l_{f_2} :

$$y - \frac{8 + 0}{2} = -\frac{6 - 2}{0 - 8} \left(x - \frac{2 + 6}{2} \right)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2.$$

10.6 Axiom 6

Axiom 10.6 Zu zwei Punkten p_1, p_2 und zwei Geraden l_1, l_2 gibt es eine Falte l , die p_1 auf l_1 und p_2 auf l_2 legt (Abb. 10.7).

Eine Falte, die p_i auf l_i legt, ist eine solche Gerade l_f , dass der Abstand von p_i zu l_f gleich dem Abstand ihrer Spiegelung p'_i von l_f ist. Die geometrische Ortskurve der Punkte, die von einem Punkt p_i und einer Geraden l_i gleich weit entfernt sind, ist eine *Parabel*. p_i heißt der *Brennpunkt* und l_i heißt die *Leitlinie*. Eine Falte ist eine beliebige Gerade, die die Parabel tangiert (Abschn. 10.6.3).

Damit eine Falte gleichzeitig p_1 auf l_1 und p_2 auf l_2 legen kann, muss sie eine gemeinsame Tangente an die beiden Parabeln sein. Es kann null, eine, zwei oder drei gemeinsame Tangenten geben (Abb. 10.8a, 10.8b, 10.9a, 10.9b).

Die Formel für eine beliebige Parabel ist recht komplex, sodass wir uns bei der Darstellung auf Parabeln beschränken, deren Symmetrieachse die x - oder die y -Achse ist.

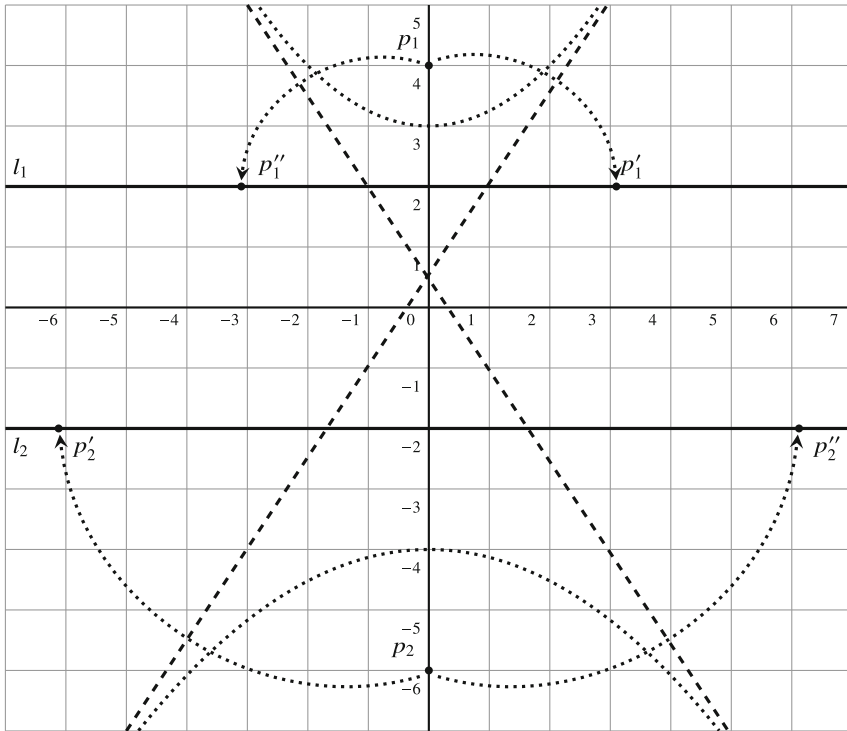


Abb. 10.7 Axiom 6

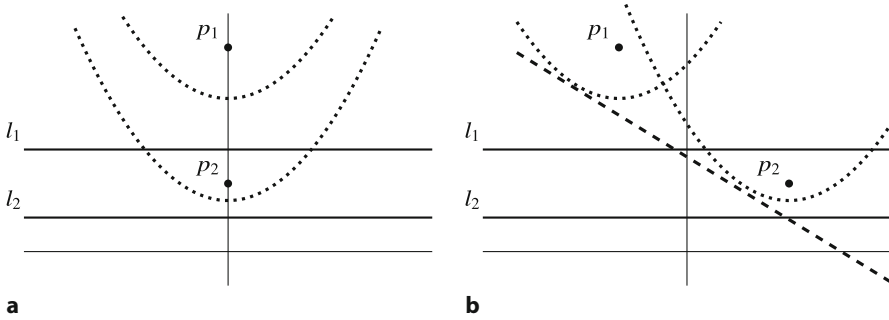


Abb. 10.8 a Keine gemeinsame Tangente. b Eine gemeinsame Tangente

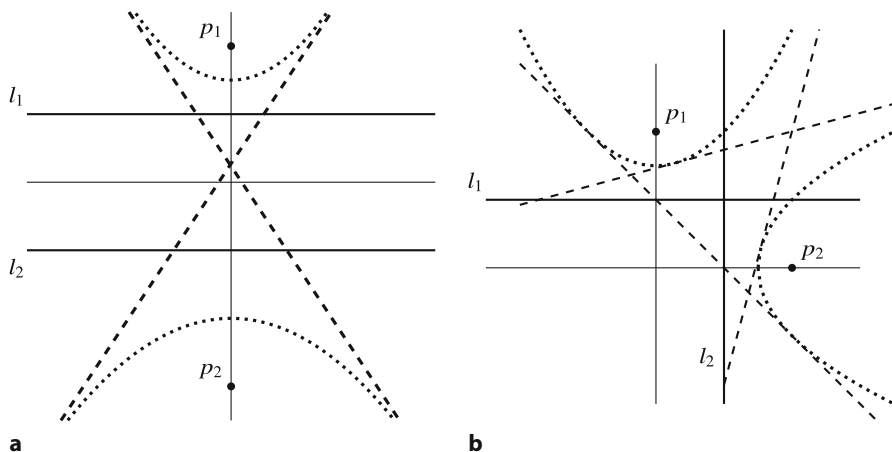


Abb. 10.9 a Zwei gemeinsame Tangenten. b Drei gemeinsame Tangenten

10.6.1 Herleitung der Gleichung einer Falte

Sei $(0, f)$ der Brennpunkt einer Parabel mit der Leitlinie $y = d$. Wir definieren $p = f - d$, die vorzeichenbehaftete Länge der Strecke zwischen dem Brennpunkt und der Leitlinie.¹ Wenn der Scheitelpunkt der Parabel auf der x -Achse liegt, lautet die Gleichung der Parabel $y = x^2/2p$. Um die Parabel auf der y -Achse nach oben oder unten zu verschieben, sodass ihr Scheitelpunkt bei $(0, h)$ liegt, addiert man h zur Gleichung der Parabel (Abb. 10.10):

$$y = \frac{x^2}{2p} + h.$$

Wir definieren $a = 2ph$ so, dass die Gleichung der Parabel lautet:

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{a}{2p} \tag{10.4a}$$

$$x^2 - 2py + a = 0. \tag{10.4b}$$

Die Gleichung der Parabel in Abb. 10.10 ist $x^2 - 12y + 12 = 0$.

Setzt man die Gleichung einer beliebigen Geraden $y = mx + b$ in (10.4b) ein, erhält man eine Gleichung für die Schnittpunkte der Geraden und der Parabel:

$$\begin{aligned} x^2 - 2p(mx + b) + a &= 0 \\ x^2 + (-2mp)x + (-2pb + a) &= 0. \end{aligned}$$

¹ Wir haben die Notation p_i für Punkte verwendet; die Verwendung von p an dieser Stelle könnte verwirrend sein, es ist aber die Standardnotation. Der formale Name für p ist die Hälfte des *latus rectum*.

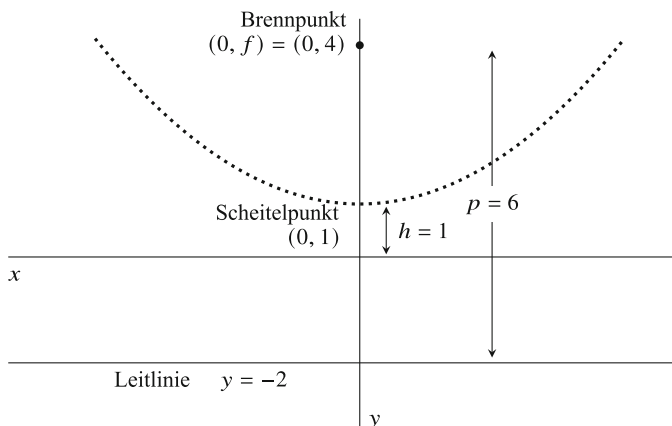


Abb. 10.10 Die Elemente der Definition einer Parabel

Die Gerade tangiert die Parabel nur dann, wenn diese quadratische Gleichung genau eine Lösung hat und ihre Diskriminante null ist:

$$(-2mp)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2pb + a) = 0 \quad (10.5a)$$

$$m^2 p^2 + 2pb - a = 0. \quad (10.5b)$$

Dies ist eine Gleichung mit den Variablen m, b für die Tangenten an der Parabel. Um die gemeinsamen Tangenten an die beiden Parabeln zu erhalten, müssen wir die Gleichungen für die beiden Parabeln gleichzeitig lösen.

Beispiel 10.9

Parabel 1: Brennpunkt $(0, 4)$, Leitlinie $y = 2$, Scheitelpunkt $(0, 3)$.

$p = 2, a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Die Gleichung der Parabel lautet:

$$x^2 - 4y + 12 = 0.$$

Setzt man p und a in (10.5b) ein und vereinfacht, so erhält man:

$$m^2 + b - 3 = 0.$$

Parabel 2: Brennpunkt $(0, -4)$, Leitlinie $y = -2$, Scheitelpunkt $(0, -3)$.

$p = -2, a = 2 \cdot -2 \cdot -3 = 12$. Die Gleichung der Parabel lautet:

$$x^2 + 4y + 12 = 0.$$

Setzt man p und a in (10.5b) ein und vereinfacht, so erhält man:

$$m^2 - b - 3 = 0.$$

Die Lösungen der beiden Gleichungen:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$m^2 - b - 3 = 0$$

sind $m = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,73$ und $b = 0$. Es gibt zwei gemeinsame Tangenten:

$$y = \sqrt{3}x, \quad y = -\sqrt{3}x.$$

Beispiel 10.10

Parabel 1: Unverändert.

Parabel 2: Brennpunkt $(0, -6)$, Leitlinie $y = -2$, Scheitelpunkt $(0, -4)$.

$p = -4$, $a = 2 \cdot -4 \cdot -4 = 32$. Die Gleichung der Parabel lautet:

$$x^2 + 8y + 32 = 0.$$

Setzt man p und a in (10.5b) ein und vereinfacht, so erhält man:

$$2m^2 - b - 4 = 0.$$

Die Lösungen der beiden Gleichungen:

$$m^2 + b - 3 = 0$$

$$2m^2 - b - 4 = 0$$

sind $m = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \approx \pm 1,53$ und $b = \frac{2}{3}$. Es gibt zwei gemeinsame Tangenten:

$$y = \sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}, \quad y = -\sqrt{\frac{7}{3}}x + \frac{2}{3}.$$

Beispiel 10.11 Definieren wir nun eine Parabel, deren Symmetrieachse die x -Achse ist.

Parabel 1: Unverändert.

Parabel 2: Brennpunkt $(4, 0)$, Leitlinie $x = 2$, Scheitelpunkt $(3, 0)$.

$p = 2$, $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Die Gleichung der Parabel lautet:

$$y^2 - 4x + 12 = 0. \tag{10.6}$$

Dies ist eine Gleichung mit x und y^2 anstelle von x^2 und y , sodass (10.5b) nicht verwendet werden kann und wir die Ableitung erneut durchführen müssen.

Setzen wir die Geradengleichung in (10.6) ein:

$$\begin{aligned}(mx + b)^2 - 4x + 12 &= 0 \\ m^2x^2 + (2mb - 4)x + (b^2 + 12) &= 0.\end{aligned}$$

Wir setzen die Diskriminante gleich null und vereinfachen:

$$\begin{aligned}(2mb - 4)^2 - 4m^2(b^2 + 12) &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Wenn wir versuchen, die beiden Gleichungen zu lösen:

$$\begin{aligned}m^2 + b - 3 &= 0 \\ -3m^2 - mb + 1 &= 0,\end{aligned}$$

erhalten wir eine *kubische* Gleichung mit der Variable m :

$$m^3 - 3m^2 - 3m + 1 = 0. \quad (10.7)$$

Da eine kubische Gleichung mindestens eine und höchstens drei reelle Lösungen hat, kann es eine, zwei oder drei gemeinsame Tangenten geben.

Die Formel für die Lösung allgemeiner kubischer Gleichungen ist ziemlich kompliziert, also habe ich einen Rechner im Internet benutzt und die drei Lösungen ermittelt:

$$m = 3,73, m = -1, m = 0,27.$$

Aus der Form von (10.7) konnte man bereits schließen, dass $m = 1$ oder $m = -1$ eine Lösung ist:

$$\begin{aligned}1^3 - 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 &= -4 \\ (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Dividiert man (10.7) durch $m - (-1) = m + 1$, so erhält man die quadratische Gleichung $m^2 - 4m + 1$, deren Wurzeln die beiden anderen Lösungen der kubischen Gleichung sind $m = 2 \pm \sqrt{3} \approx 3,73, 0,27$.

10.6.2 Ableitung der Gleichungen der Spiegelungen

Wir leiten die Lage der Spiegelung $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ von $p_1 = (x_1, y_1)$ an einer Tangente l_t ab, deren Gleichung $y = m_t x + b_t$ ist. Zunächst bestimmen wir die Gerade l_p

mit der Gleichung $y = m_p x + b_p$, die senkrecht auf l_t steht und durch p_1 geht:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{m_t}x + b_p \\ y_1 &= -\frac{1}{m_t}x_1 + b_p \\ y &= \frac{-x}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right). \end{aligned}$$

Dann ermitteln wir den Schnittpunkt $p_t = (x_t, y_t)$ von l_t und l_p :

$$\begin{aligned} m_t x_t + b_t &= \frac{-x_t}{m_t} + \left(y_1 + \frac{x_1}{m_t}\right) \\ x_t &= \frac{\left(y_1 + \frac{x_1}{m_t} - b_t\right)}{\left(m_t + \frac{1}{m_t}\right)} \\ y_t &= m_t x_t + b_t. \end{aligned}$$

p_t ist der Mittelpunkt zwischen p_1 und p'_1 :

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{x_1 + x'_1}{2}, & x'_1 &= 2x_t - x_1, \\ y_t &= \frac{y_1 + y'_1}{2}, & y'_1 &= 2y_t - y_1. \end{aligned}$$

Beispiel 10.12 Sei l_t $y = \sqrt{3}x + 0$, und sei $p_1 = (0, 4)$:

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{\left(4 + \frac{0}{\sqrt{3}} - 0\right)}{\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \sqrt{3} \\ y_t &= \sqrt{3}\sqrt{3} + 0 = 3 \\ x'_1 &= 2x_t - x_1 = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \\ y'_1 &= 2y_t - y_1 = 2. \end{aligned}$$

10.6.3 Tangenten an eine Parabel

Wir wollen beweisen, dass die Falten von Axiom 6 Tangenten an die Parabeln sind. Abb. 10.11 zeigt fünf Punkte p_i , $i = 1, \dots, 5$, wobei jeder Punkt p_i sowohl vom

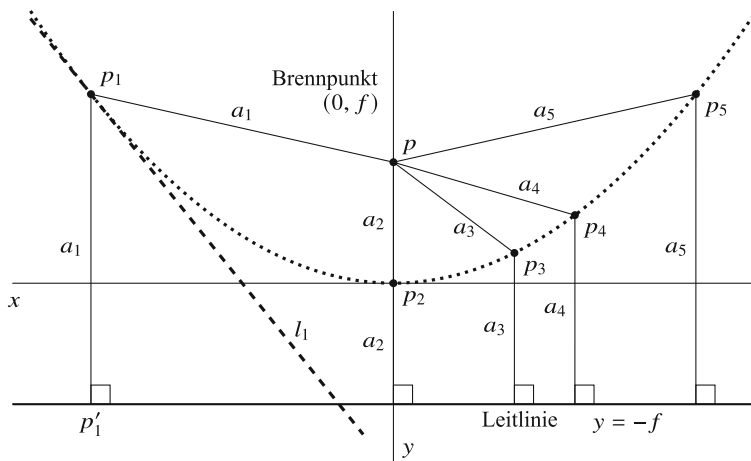


Abb. 10.11 Die Tangente als geometrische Ortskurve

Brennpunkt als auch von der Leitlinie einen Abstand a_i hat. Wir fällen die Lote von den p_i zur Leitlinie und bezeichnen die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Leitlinie als p'_i . Nach Axiom 2 gibt es Falten l_i durch p_i , die p auf die Leitlinie legen. Die Punkte p'_i sind die Spiegelungen von p an den Falten. Die Abbildung zeigt die Falte l_1 durch p_1 und die Spiegelung p'_1 .

Satz 10.1 Die Falten des Axioms 6 sind die Tangenten an die Parabeln, welche die Orte der Punkte sind, die zu den Punkten p_1, p_2 bzw. l_1, l_2 äquidistant sind.

Beweis In Abb. 10.12 ist der Brennpunkt p und die Leitlinie d . p' ist ein Punkt auf der Leitlinie und l ist die Falte, die p auf p' spiegelt. Sei s der Schnittpunkt von

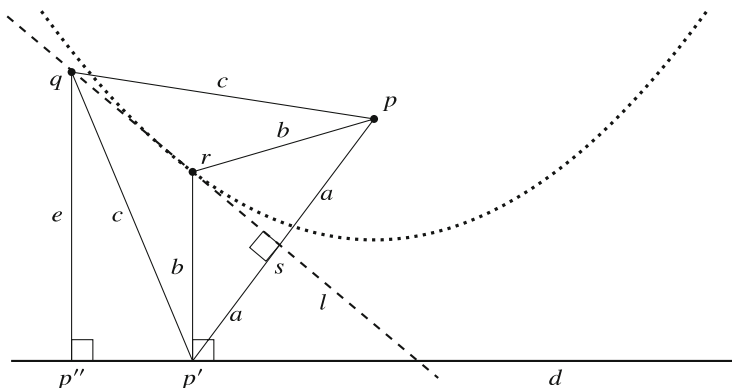


Abb. 10.12 Der Beweis, dass die Falte eine Tangente ist

$\overline{pp'}$ und l . Dann ist $\overline{ps} = \overline{p's} = a$ und $l \perp \overline{pp'}$, da l die Mittelsenkrechte von $\overline{pp'}$ ist.

Sei r der Schnittpunkt der Senkrechten d durch p' und die Falte l . Dann ist $\triangle psr \cong \triangle p'sr$ gemäß Seite-Winkel-Seite. Daraus folgt, dass $\overline{pr} = \overline{p'r} = b$, also ist r ein Punkt auf der Parabel. Wir wählen einen Punkt p'' auf der Leitlinie, der sich von p' unterscheidet, und nehmen an, dass die Falte l auch p auf p'' spiegelt. q sei der Schnittpunkt der Senkrechten zu d durch p'' und die Falte l . $\triangle psq \cong \triangle p'sq$, somit $\overline{pq} = \overline{p'q} = c$. Bezeichne $\overline{qp''} = e$. Wenn q ein Punkt auf der Parabel ist, dann ist $e = \overline{qp''} = \overline{qp} = c$, aber c ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle qp''p'$ und es ist nicht möglich, dass die Hypotenuse gleich einer der anderen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks ist. Daher hat die Falte l nur einen Schnittpunkt mit der Parabel und muss eine Tangente sein. \square

10.7 Axiom 7

Axiom 10.7 Zu einem Punkt p_1 und zwei Geraden l_1 und l_2 gibt es eine Falte l , die p_1 auf l_1 legt und senkrecht auf l_2 steht (Abb. 10.13).

Die Falte ist der geometrische Ort aller Punkte auf der Geraden, die senkrecht zu l_2 und äquidistant zu p_1 und p'_1 , der Spiegelung von p_1 an l_1 , ist.

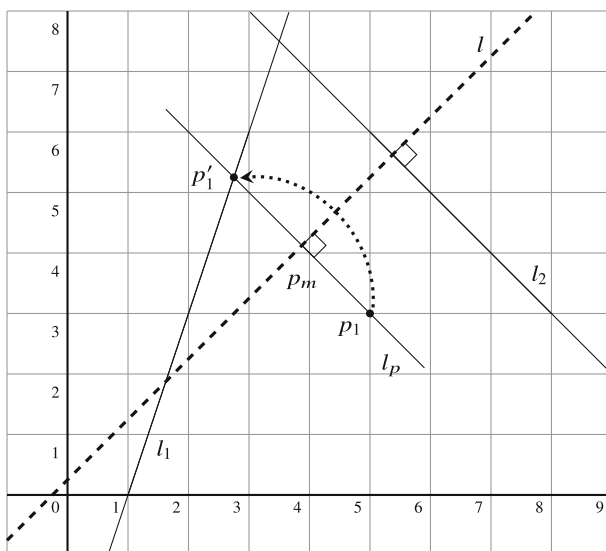


Abb. 10.13 Axiom 7

Herleitung der Gleichung der Falte Es sei $p_1 = (x_1, y_1)$, l_1 sei $y = m_1x + b_1$, und l_2 sei $y = m_2x + b_2$. Sei l_p die Gerade, die $\overline{p_1 p'_1}$ enthält. Da $l \perp l_2$, $l_p \perp l_1$, folgt, dass $l_p \parallel l_2$, und die Gleichung von l_p lautet $y = m_2x + b_p$.

Die Gerade l_p geht durch p_1 , also ist $y_1 = m_2x_1 + b_p$, und ihre Gleichung lautet $y = m_2x + (y_1 - m_2x_1)$. Die Spiegelung $p'_1 = (x'_1, y'_1)$ ist der Schnittpunkt von l_1 und l_p :

$$\begin{aligned} m_1x'_1 + b_1 &= m_2x'_1 + (y_1 - m_2x_1) \\ x'_1 &= \frac{y_1 - m_2x_1 - b_1}{m_1 - m_2} \\ y'_1 &= m_1x'_1 + b_1. \end{aligned}$$

Die Gleichung des Mittelpunkts $p_m = (x_m, y_m)$ von l_p ist:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{x_1 + x'_1}{2}, \frac{y_1 + y'_1}{2} \right).$$

$l \perp l_2$ und sie geht durch p_m , sodass ihre Gleichung lautet:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + b_m,$$

wobei b_m aus $y = -\frac{1}{m_2}x + b_m$ berechnet werden kann:

$$b_m = y_m + \frac{x_m}{m_2}.$$

Die Gleichung der Falte l lautet also:

$$y = -\frac{1}{m_2}x + \left(y_m + \frac{x_m}{m_2} \right).$$

Beispiel 10.13 Sei $p_1 = (5, 3)$, sei l_1 gleich $y = 3x - 3$, und sei l_2 gleich $y = -x + 11$. Dann:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{3 - (-1) \cdot 5 - (-3)}{3 - (-1)} = \frac{11}{4} \\ y'_1 &= 3 \cdot \frac{11}{4} + (-3) = \frac{21}{4} \\ p_m &= \left(\frac{5 + \frac{11}{4}}{2}, \frac{3 + \frac{21}{4}}{2} \right) = \left(\frac{31}{8}, \frac{33}{8} \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung der Falte l lautet:

$$y = -\frac{1}{-1} \cdot x + \left(\frac{33}{8} + \frac{\frac{31}{8}}{-1} \right) = x + \frac{1}{4}.$$

Was ist die Überraschung?

Origami, die Kunst des Papierfaltens, wird seit Hunderten von Jahren praktiziert. Es ist daher überraschend, dass die mathematische Formalisierung erst im zwanzigsten Jahrhundert erfolgte. Noch erstaunlicher ist es, dass es eine Axiomatisierung des Papierfaltens gibt. Die Origami-Mathematik eignet sich hervorragend zum Erlernen der analytischen Geometrie, der Eigenschaften von Parabeln und des Konzepts der geometrischen Ortskurve.

Quellen

Die Axiome des Origami werden in [56] vorgestellt. Lang [26] gibt Beschreibungen von Origamikonstruktionen. [31, Kap. 10] enthält die detaillierte Theorie der Origami-Mathematik, einschließlich des Beweises, dass zwei Parabeln null, eine, zwei oder drei gemeinsame Tangenten haben können. Der Beweis von Satz 10.1 wurde mir von Oriah Ben-Lulu gezeigt. Ich habe festgestellt, dass geometrische Software wie GeoGebra nützlich ist, um die Beziehung zwischen der Geometrie und der Algebra der Axiome zu verstehen.

Eine übersichtliche Darstellung der kubischen Gleichungen findet sich in [6, Kap. 1, 2].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 11

Die Lill-Methode und die Beloch-Falte



11.1 Ein Zaubertrick

Man konstruiere eine Bahn, die aus vier Strecken $\{a_3 = 1, a_2 = 6, a_1 = 11, a_0 = 6\}$ besteht, ausgehend vom Ursprung entlang der positiven Richtung der x -Achse, und drehe sich dabei 90° zwischen den Segmenten gegen den Uhrzeigersinn. Man konstruiere eine zweite Bahn wie folgt: Man konstruiere eine Gerade vom Ursprung unter dem Winkel $63,4^\circ$ und markiere ihren Schnittpunkt mit a_2 durch P . Man wende sich 90° nach links, konstruiere eine Gerade und markieren deren Schnittpunkt mit a_1 durch Q . Man wende sich erneut 90° nach links, konstruiere eine Gerade und stellt fest, dass diese das Ende des ersten Pfades bei $(-10, 0)$ schneidet (Abb. 11.1).

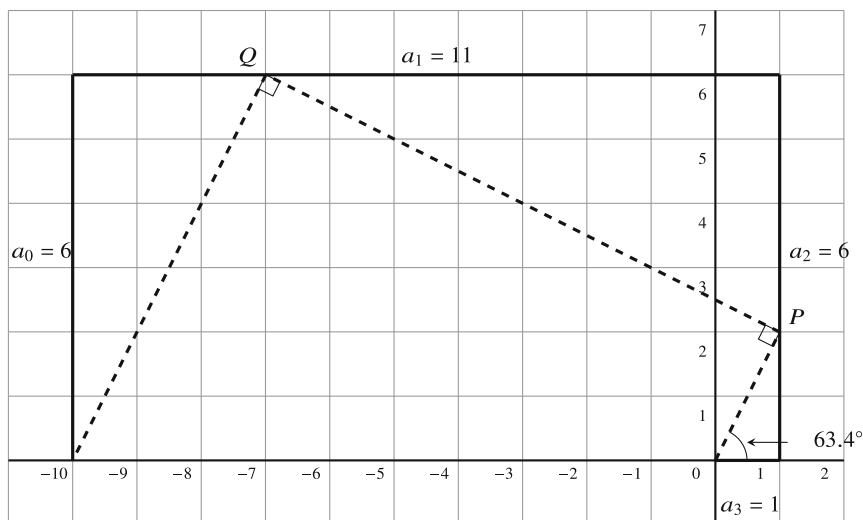


Abb. 11.1 Ein Zaubertrick

Wir berechnen die Negation des Tangens des Winkels am Anfang der zweiten Strecke: $-\tan 63,4^\circ = -2$. Setzen wir diesen Wert in das Polynom ein, dessen Koeffizienten die Längen der Segmente des ersten Pfades sind:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \\ p(-\tan 63,4^\circ) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 + 11(-2) + 6 = 0. \end{aligned}$$

Wir haben eine Wurzel aus dem kubischen Polynom $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ gefunden!

Lassen Sie uns das Beispiel fortsetzen. Das Polynom $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ hat drei Wurzeln -1 , -2 , -3 . Wir berechnen den Arcustangens der Negation der Wurzeln:

$$\alpha = -\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad \beta = -\tan^{-1}(-2) \approx 63,4^\circ, \quad \gamma = -\tan^{-1}(-3) \approx 71,6^\circ.$$

Für jeden Winkel schneidet die zweite Bahn das Ende der ersten Bahn (Abb. 11.2).

Der Wert $-\tan 56,3 \approx -1,5$ ist keine Wurzel aus der Gleichung. Abb. 11.3 zeigt das Ergebnis der Anwendung der Methode für diesen Winkel. Der zweite Pfad schneidet die Strecke für den Koeffizienten a_0 nicht bei $(-10, 0)$.

Dieses Beispiel veranschaulicht eine von Eduard Lill 1867 entdeckte Methode zur grafischen Ermittlung der reellen Wurzeln eines beliebigen Polynoms. Es geht nicht darum, die Wurzeln zu finden, sondern zu überprüfen, ob ein bestimmter Wert eine Wurzel ist.

Abschn. 11.2 stellt eine formale Spezifikation der Lill-Methode vor (beschränkt auf kubische Polynome) und gibt Beispiele dafür, wie sie in speziellen Fällen funktioniert. Ein Beweis für die Korrektheit der Lill-Methode wird in Abschn. 11.3

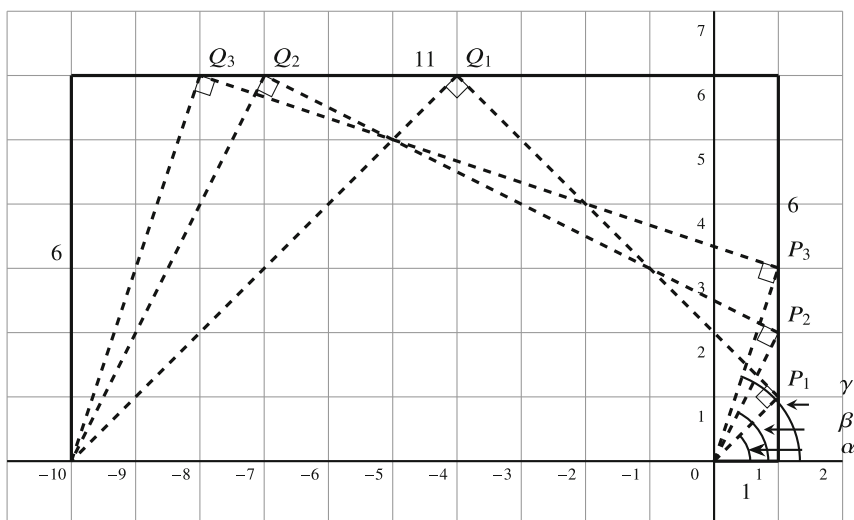


Abb. 11.2 Lill-Methode für die drei Wurzeln des Polynoms

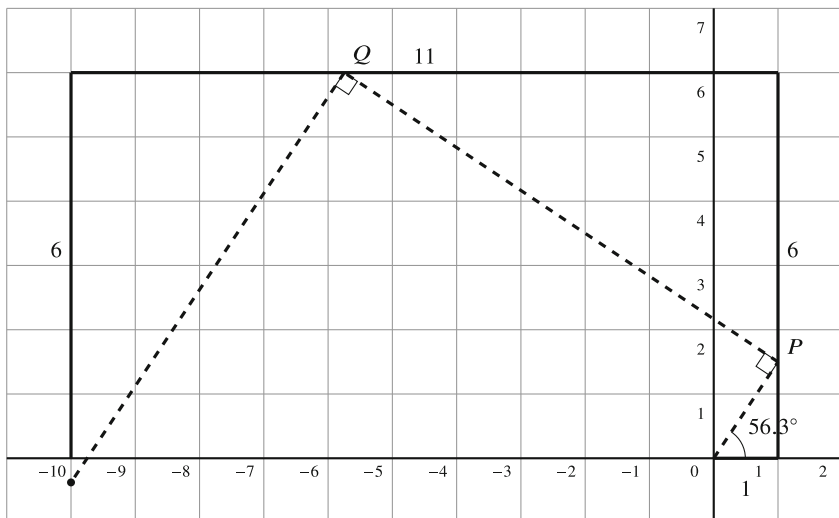


Abb. 11.3 Ein Pfad, der nicht zu einer Wurzel führt

gegeben. Abschn. 11.4 zeigt, wie die Methode unter Verwendung des Origami-Axioms 6 implementiert werden kann. Dies wird als Beloch-Falte bezeichnet und ging der Formalisierung der Origami-Axiome um viele Jahre voraus.

11.2 Spezifikation der Lill-Methode

11.2.1 Die Lill-Methode als Algorithmus

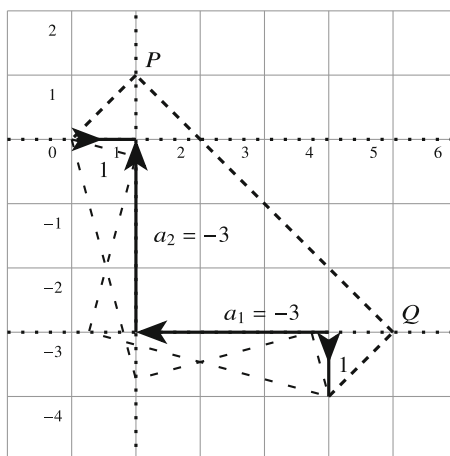
- Starte mit einem beliebigen kubischen Polynom $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- Konstruiere den ersten Pfad:
 - Konstruiere für jeden Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0 (in dieser Reihenfolge) eine Strecke dieser Länge, die am Ursprung $O = (0, 0)$ in positiver Richtung der x -Achse beginnt. Drehe 90° zwischen den einzelnen Segmenten gegen den Uhrzeigersinn.
- Konstruiere den zweiten Pfad:
 - Konstruiere eine Gerade von O unter einem Winkel von θ mit der positiven x -Achse, die a_2 im Punkt P schneidet.
 - Drehe $\pm 90^\circ$ und konstruiere von P eine Gerade, die a_1 im Punkt Q schneidet.
 - Drehe $\pm 90^\circ$ und konstruiere eine Gerade von Q aus, die a_0 in R schneidet.
 - Wenn R der Endpunkt des ersten Pfades ist, dann ist $-\tan \theta$ eine Wurzel von $p(x)$.

- Sonderfälle:
 - Wenn bei der Konstruktion der Strecken des ersten Pfades ein Koeffizient negativ ist, konstruiere die Strecke *rückwärts*.
 - Wenn bei der Konstruktion der Strecken des ersten Pfades ein Koeffizient null ist, konstruiere keine Strecke, sondern fahre mit der nächsten $\pm 90^\circ$ -Drehung fort.
- Beachte:
 - Der Ausdruck *schneidet a_i* bedeutet *schneidet die Strecke a_i oder eine Verlängerung von a_i* .
 - Bei der Konstruktion des zweiten Pfades kann man wählen, ob man um 90° nach links oder rechts abbiegt, sodass ein Schnittpunkt mit dem nächsten Segment des ersten Pfades oder dessen Verlängerung entsteht.

11.2.2 Negative Koeffizienten

Wir wollen die Lill-Methode für das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ mit negativen Koeffizienten demonstrieren (Abschn. 10.6). Man beginnt mit der Konstruktion eines Segments der Länge 1 nach rechts. Als Nächstes dreht man 90° nach oben, aber da der Koeffizient negativ ist, konstruiert man ein Segment der Länge 3 nach unten, d. h. in die dem Pfeil entgegengesetzte Richtung. Nachdem man 90° nach links gedreht hat, ist der Koeffizient wieder negativ, also konstruiert man ein Segment der Länge 3 nach rechts. Schließlich wendet man sich nach unten und konstruiert ein Segment der Länge 1 (Abb. 11.4, die grob gestrichelten Linien werden in Abschn. 11.2.4 besprochen).

Abb. 11.4 Lill-Methode mit negativen Wurzeln



Der zweite Pfad beginnt mit einer Gerade bei 45° mit der positiven x -Achse. Sie schneidet die Verlängerung der Strecke für a_2 bei $(1, 1)$. Dreht man -90° (nach rechts), so schneidet die Gerade die Verlängerung der Strecke für a_1 in $(5, -3)$. Dreht man -90° erneut, so schneidet die Gerade das Ende der ersten Strecke bei $(4, -4)$. Da $-\tan 45^\circ = -1$ ist, haben wir eine Wurzel des Polynoms gefunden:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 3(-1) + 6 = 0.$$

11.2.3 Null-Koeffizienten

Im Polynom $x^3 - 7x - 6 = 0$ ist a_2 , der Koeffizient des Terms x^2 , null. Man konstruiert eine Strecke der Länge 0, d. h. man konstruiert keine Gerade, sondern vollführt trotzdem die $\pm 90^\circ$ -Drehung, die durch den nach oben weisenden Pfeil bei $(1, 0)$ in Abb. 11.5 angezeigt wird. Nach erneuter Drehung konstruiert man eine Strecke der Länge -7 , also der Länge 7 rückwärts, bis $(8, 0)$. Man dreht sich schließlich noch einmal und konstruiert eine Strecke der Länge -6 nach $(8, 6)$.

Die zweiten Bahnen mit den folgenden Winkeln schneiden das Ende der ersten Bahn:

$$-\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad -\tan^{-1}(-2) \approx 63,4^\circ, \quad -\tan^{-1} 3 \approx -71,6^\circ.$$

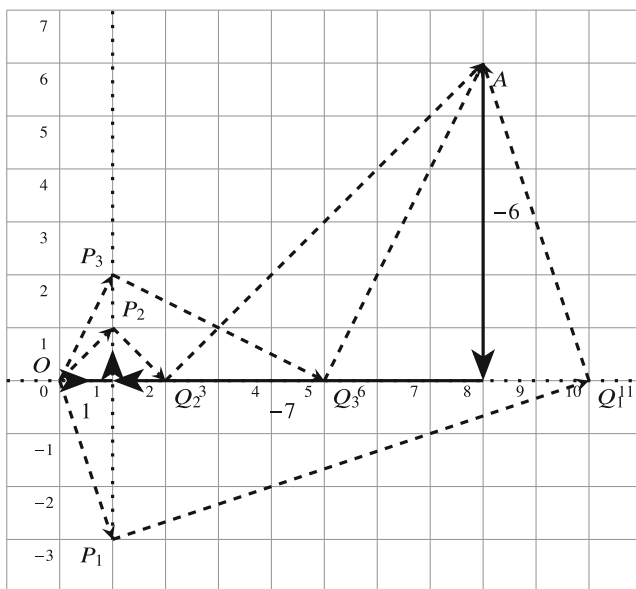


Abb. 11.5 Lill-Methode mit Polynomen mit Null-Koeffizienten

Wir schließen daraus, dass es drei reelle Wurzeln $\{-1, -2, 3\}$ gibt. Probe:

$$(x + 1)(x + 2)(x - 3) = (x^2 + 3x + 2)(x - 3) = x^3 - 7x - 6.$$

11.2.4 Nichtganzzahlige Wurzeln

Abb. 11.6 zeigt die Lill-Methode für $p(x) = x^3 - 2x + 1$. Der erste Pfad geht von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ und dreht dann nach oben. Der Koeffizient von x^2 ist null, sodass keine Strecke konstruiert wird und der Pfad nach links abbiegt. Die nächste Strecke hat die Länge -2 und führt rückwärts von $(1, 0)$ nach $(3, 0)$. Schließlich biegt der Weg nach unten ab, und es wird eine Strecke der Länge 1 von $(3, 0)$ nach $(3, -1)$ konstruiert.

Es ist leicht zu erkennen, dass die zweite Bahn, wenn sie in einem Winkel von -45° beginnt, die erste Bahn in $(3, -1)$ schneidet. Daher ist $-\tan^{-1}(-45)^\circ = 1$ eine Wurzel. Dividiert man $p(x)$ durch $x - 1$, so erhält man das quadratische Polynom $x^2 + x - 1$, dessen Wurzeln lauten:

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 0,62, -1,62.$$

Es gibt zwei zusätzliche zweite Pfade: einer beginnt bei $-\tan^{-1} 0,62 \approx -31,8^\circ$, der andere bei $-\tan^{-1}(-1,62) \approx 58,3^\circ$.

Das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (Abschn. 11.2.2) hat Wurzeln $2 \pm \sqrt{3} \approx 3,73, 0,27$. Die entsprechenden Winkel sind $-\tan^{-1} 3,73 \approx -75^\circ$ und $-\tan^{-1} 0,27 \approx -15^\circ$, wie die grob gestrichelten Linien in Abb. 11.4 zeigen.

Abb. 11.6 Lill-Methode mit nichtganzzahligen Wurzeln

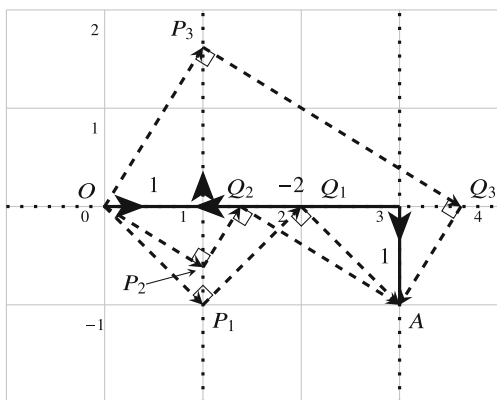
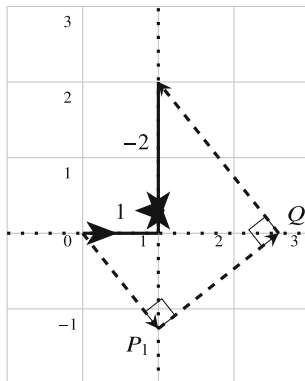


Abb. 11.7 Die Kubikwurzel aus 2



11.2.5 Die Kubikwurzel von 2

Um einen Würfel zu verdoppeln, berechnet man $\sqrt[3]{2}$, eine Wurzel aus dem kubischen Polynom $x^3 - 2$. Bei der Konstruktion des ersten Weges biegt man zweimal nach links ab, ohne Strecken zu konstruieren, da a_2 und a_1 beide null sind. Dann wendet man sich wieder nach links (nach unten) und konstruiert rückwärts (nach oben), weil $a_0 = -2$ negativ ist. Das erste Segment des zweiten Pfades wird in einem Winkel von $-\tan^{-1} \sqrt[3]{2} \approx -51,6^\circ$ konstruiert (Abb. 11.7).

11.3 Nachweis der Lill-Methode

Der Beweis gilt für monische kubische Polynome $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Wenn das Polynom nicht monisch ist, teilt man es durch a_3 und das resultierende Polynom hat die gleichen Wurzeln. In Abb. 11.8 sind die Strecken des ersten Pfades mit den Koeffizienten und mit $b_2, b_1, a_2 - b_2, a_1 - b_1$ beschriftet. Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ein spitzer Winkel θ ist, ist der andere Winkel $90^\circ - \theta$. Daher sind der Winkel über P und der Winkel links von Q gleich θ . Hier sind die Formeln für $\tan \theta$, wie sie aus den drei Dreiecken berechnet wurden:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{b_2}{1} = b_2 \\ \tan \theta &= \frac{b_1}{a_2 - b_2} = \frac{b_1}{a_2 - \tan \theta} \\ \tan \theta &= \frac{a_0}{a_1 - b_1} = \frac{a_0}{a_1 - \tan \theta(a_2 - \tan \theta)}. \end{aligned}$$

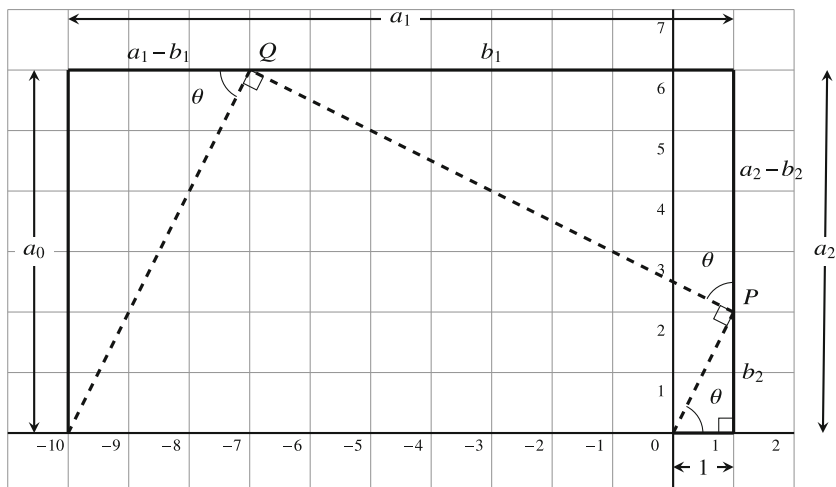


Abb. 11.8 Nachweis der Lill-Methode

Wir vereinfachen die letzte Gleichung, multiplizieren mit -1 und setzen -1 in die Potenzen ein:

$$\begin{aligned} (\tan \theta)^3 - a_2(\tan \theta)^2 + a_1(\tan \theta) - a_0 &= 0 \\ (-\tan \theta)^3 + a_2(-\tan \theta)^2 + a_1(-\tan \theta) + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $-\tan \theta$ eine reelle Wurzel von $p(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ist.

11.4 Die Beloch-Falte

Margherita P. Beloch entdeckte eine bemerkenswerte Verbindung zwischen dem Falten und der Lill-Methode: Eine Anwendung der Operation, die später als Origami-Axiom 6 bekannt wurde, erzeugt eine reelle Wurzel eines kubischen Polynoms. Die Operation wird oft als *Beloch-Falte* bezeichnet.

Betrachten wir das Polynom $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ (Abschn. 11.1). Erinnern wir uns, dass eine Falte die Mittelsenkrechte der Strecke zwischen einem beliebigen Punkt und seiner Spiegelung an der Falte ist. Wir wollen, dass \overline{RS} in Abb. 11.9 die senkrechte Winkelhalbierende sowohl von $\overline{QQ'}$ als auch von $\overline{PP'}$ ist, wobei Q' , P' die Spiegelungen von Q , P an \overline{RS} sind.

Man konstruiere eine zu a_2 parallele Gerade a'_2 im gleichen Abstand von a_2 , wie a_2 von P entfernt ist, und konstruiere eine zu a_1 parallele Gerade a'_1 im gleichen Abstand von a_1 , wie a_1 von Q entfernt ist. Man wende Axiom 6 an, um gleichzeitig P bei P' auf a'_2 und Q bei Q' auf a'_1 zu legen. Die Falte \overline{RS} ist die Mittelsenkrechte der Geraden $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$, sodass die Winkel an R und S beide rechte Winkel sind, wie es die Lill-Methode verlangt.

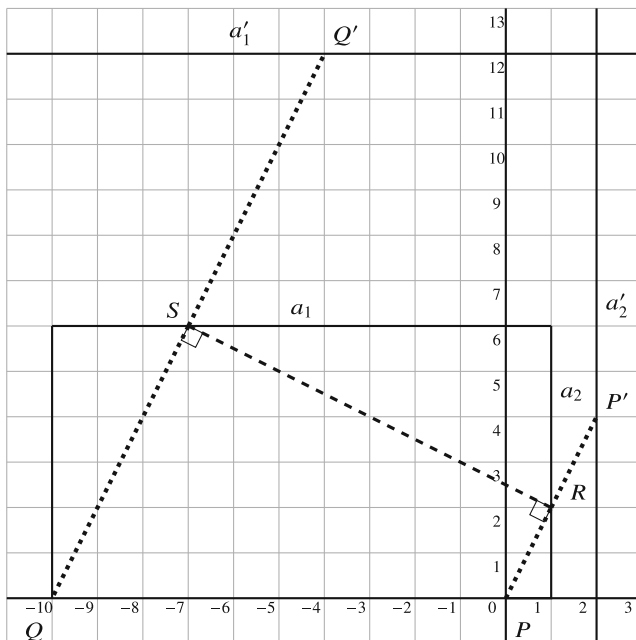
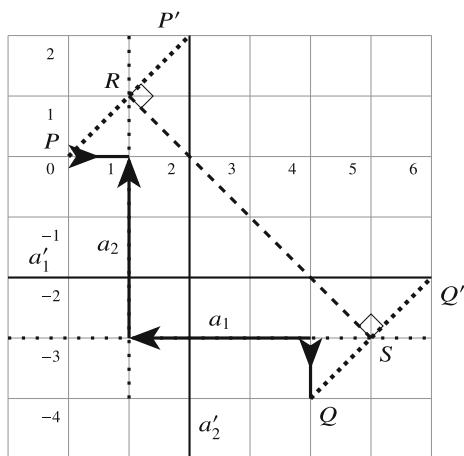


Abb. 11.9 Die Beloch-Falte zum Auffinden einer Wurzel aus $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Abb. 11.10 zeigt die Beloch-Falte für das Polynom $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ (Abschn. 11.2.2). a_2 ist die senkrechte Strecke der Länge 3, deren Gleichung $x = 1$ ist, und ihre Parallele ist a'_2 , deren Gleichung $x = 2$ ist, weil P im Abstand von 1 von a_2 liegt. a_1 ist die waagerechte Strecke der Länge 3, deren Gleichung $y = -3$ ist, und ihre Parallele ist a'_1 , deren Gleichung $y = -2$ ist, weil Q von a_1 einen Abstand von

Abb. 11.10 Die Beloch-Falte zum Auffinden einer Wurzel aus $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$



1 hat. Die Falte \overline{RS} ist die Mittelsenkrechte sowohl von $\overline{PP'}$ als auch von $\overline{QQ'}$, und die Gerade \overline{PRSQ} ist die gleiche wie der zweite Pfad in Abb. 11.4.

Was ist die Überraschung?

Die Aufführung der Lill-Methode als Zaubertrick sorgt immer wieder für Überraschungen. Sie kann während einer Vorlesung mit einer Grafiksoftware wie GeoGebra durchgeführt werden. Überraschend ist auch, dass die Lill-Methode, 1867 veröffentlicht, und die Beloch-Falte, 1936 veröffentlicht, der Axiomatisierung des Origami um viele Jahre vorausgingen.

Quellen

Dieses Kapitel basiert auf [8, 24, 40].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 12

Geometrische Konstruktionen mit Origami



Dieses Kapitel zeigt, dass Konstruktionen mit Origami leistungsfähiger sind als Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Wir präsentieren zwei Konstruktionen für die Dreiteilung eines Winkels, eine von Hisashi Abe (Abschn. 12.1) und die andere von George E. Martin (Abschn. 12.2), zwei Konstruktionen zur Verdoppelung eines Würfels, eine von Peter Messer (Abschn. 12.3) und die andere von Margherita P. Beloch (Abschn. 12.4), sowie die Konstruktion eines Nonagons, eines regelmäßigen Polygons mit neun Seiten (Abschn. 12.5).

12.1 Abes Dreiteilung eines Winkels

Konstruktion Bei gegebenem spitzen Winkel $\angle PQR$ konstruiere man p , die Senkrechte zu \overline{QR} in Q . Man konstruiere q , die Senkrechte zu p , die \overline{PQ} im Punkt A schneidet, und konstruiere r , die Senkrechte zu p in B , die auf halbem Weg zwischen Q und A liegt. Man konstruiere unter Verwendung von Axiom 6 die Faltung l , die A bei A' auf \overline{PQ} und Q bei Q' auf r legt. Sei B' die Spiegelung von B an l . Man konstruiere Geraden durch $\overline{QB'}$ und $Q'Q'$ (Abb. 12.1).

Satz 12.1 $\angle PQB' = \angle B'Q'Q' = \angle Q'QR = \angle PQR/3$.

Beweis (1) A', B', Q' sind Spiegelungen an der Geraden l der Punkte A, B, Q auf der Gerade \overline{DQ} , liegen also auf der Spiegelungsgerade $\overline{DQ'}$. Gemäß Konstruktion gilt $\overline{AB} = \overline{BQ}$, $\angle ABQ' = \angle QBQ' = 90^\circ$, und $\overline{BQ'}$ ist eine gemeinsame Seite, somit $\triangle ABQ' \cong \triangle QBQ'$ (Seite-Winkel-Seite). Daher ist $\angle AQQ' = \angle QAQ' = \alpha$, und $\triangle AQQ'$ ist gleichschenkelig (Abb. 12.2).

Wegen der Spiegelung ist $\triangle AQQ' \cong \triangle A'QQ'$, also ist $\triangle A'QQ'$ auch ein gleichschenkliges Dreieck. $\overline{QB'}$, die Spiegelung von \overline{QB} , ist die Mittelsenkrechte eines gleichschenkligen Dreiecks, sodass $\angle A'QB' = \angle Q'QB' = \angle QQ'B = \alpha$. Gemäß dem Wechselwinkelsatz ergibt sich $\angle Q'QR = \angle QQ'B = \alpha$. Zusammen

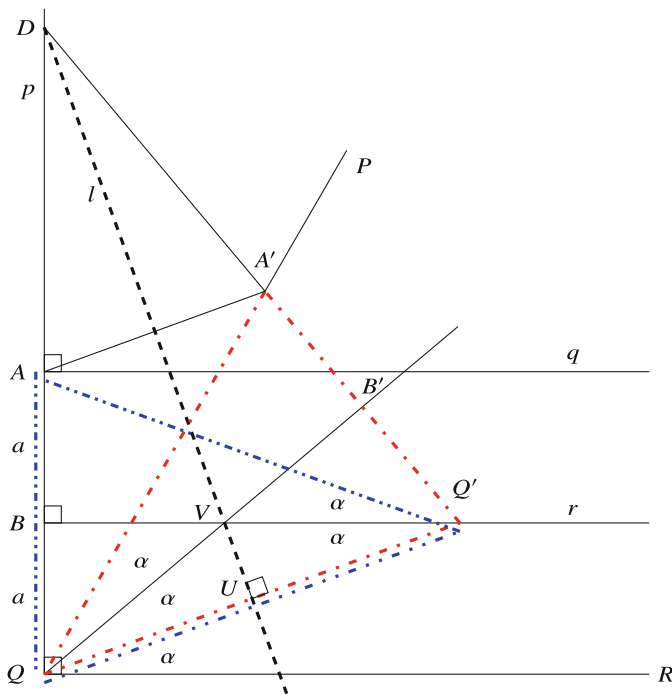


Abb. 12.2 Beweis für Abes Dreiteilung (U, V werden in Beweis 2 verwendet)

12.2 Martins Dreiteilung eines Winkels

Konstruktion Sei ein spitzer Winkel $\angle PQR$ gegeben, und sei M der Mittelpunkt von \overline{PQ} . Konstruiere p senkrecht zu \overline{QR} durch M und konstruiere q die Senkrechte zu p durch M , sodass $q \parallel \overline{QR}$. Konstruiere unter Verwendung von Axiom 6 die Falte l , die P bei P' auf p und Q bei Q' auf q platziert. Falls mehrere Falten möglich sind, wähle diejenige, die \overline{PM} schneidet. Konstruiere $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ (Abb. 12.3).

Satz 12.2 $\angle Q'QR = \angle PQR/3$.

Beweis Bezeichne den Schnittpunkt von $\overline{QQ'}$ mit p als U und seinen Schnittpunkt mit l als V . Bezeichne den Schnittpunkt von \overline{PQ} und $\overline{P'Q'}$ mit l als W . Es ist nicht unmittelbar klar, dass \overline{PQ} und $\overline{P'Q'}$ l in demselben Punkt schneiden. Aber $\triangle PWP' \sim \triangle QWQ'$, sodass die Höhen die beiden vertikalen Winkel $\angle PWP', \angle QWQ'$ halbieren und auf derselben Gerade liegen müssen.

$\triangle QMU \cong \triangle PMP'$ (Winkel-Seite-Winkel), da $\angle P'PM = \angle UQM = \beta$ gemäß Wechselwinkelsatz, $\overline{QM} = \overline{MP} = a$, weil M der Mittelpunkt von \overline{PQ} ist und $\angle QMU = \angle PMP' = \gamma$ Scheitelwinkel sind. Daher ist $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$.

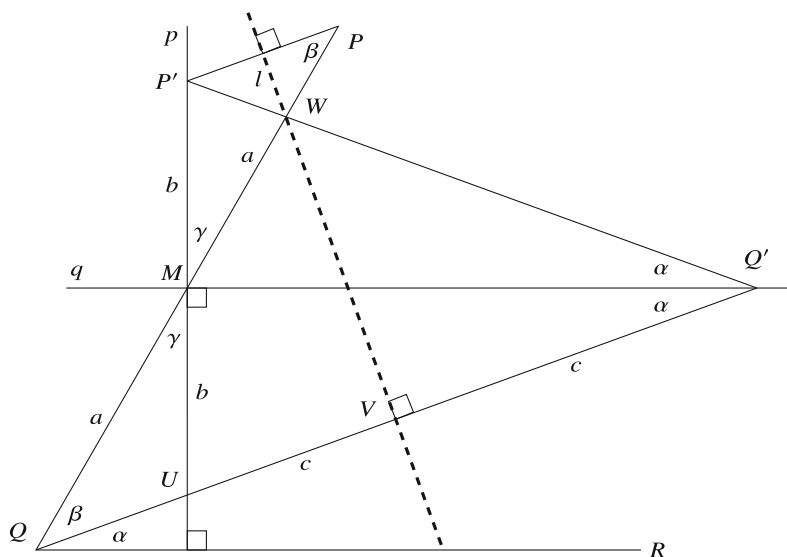


Abb. 12.3 Martins Dreiteilung eines Winkels

$\triangle P'MQ' \cong \triangle UMQ'$ (Seite-Winkel-Seite), da $\overline{P'M} = \overline{MU} = b$, die Winkel bei M rechte Winkel sind und $\overline{MQ'}$ eine gemeinsame Seite ist. Da die Höhe des gleichschenkligen Dreiecks $\triangle P'Q'U$ die Winkelhalbierende von $\angle P'Q'U$ ist, folgt daraus, dass $\angle P'Q'M = \angle UQ'M = \alpha$. Außerdem ist $\angle UQ'M = \angle Q'QR = \alpha$ gemäß Wechselwinkelsatz. $\triangle QWV \cong \triangle Q'WV$ (Seite-Winkel-Seite), da $\overline{QV} = \overline{Q'V} = c$, die Winkel bei V rechte Winkel sind und \overline{VW} eine gemeinsame Seite ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\angle WQV &= \beta = \angle WQ'V = 2\alpha \\ \angle PQR &= \beta + \alpha = 3\alpha. \quad \square\end{aligned}$$

12.3 Messers Verdoppelung eines Würfels

Ein Würfel mit dem Volumen V hat Seiten der Länge $\sqrt[3]{V}$. Ein Würfel mit dem doppelten Volumen hat Seiten der Länge $\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{V}$. Wenn wir also $\sqrt[3]{2}$ konstruieren können, können wir mit der gegebenen Länge $\sqrt[3]{V}$ multiplizieren, um den Würfel zu verdoppeln.

Konstruktion Man teile die Seite eines Einheitsquadrats wie folgt in drei Teile: Falte das Quadrat in der Hälfte und lege die Punkte $I = (0, 1/2)$ und $J = (1, 1/2)$ fest. Konstruiere dann die Geraden \overline{AC} und \overline{BJ} (Abb. 12.4). Den Schnittpunkt

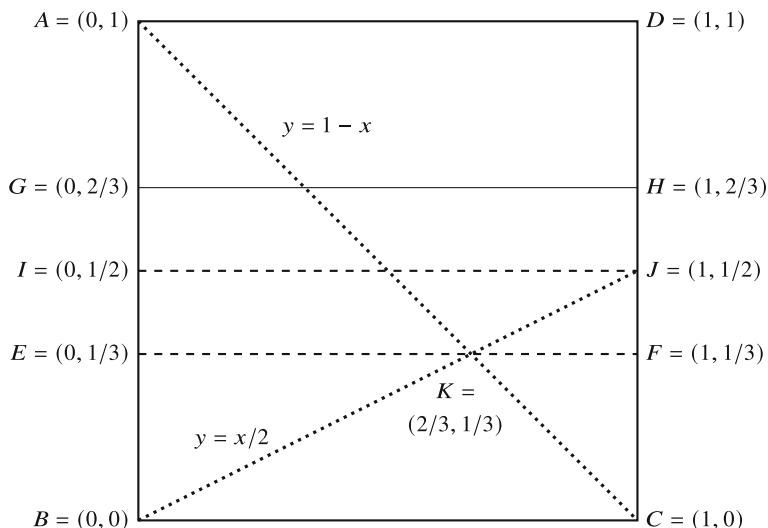


Abb. 12.4 Unterteilung einer Länge in Drittel

$K = (2/3, 1/3)$ erhält man durch Lösen der beiden Gleichungen $y = 1 - x$ und $y = x/2$.

Konstruiere \overline{EF} , die Senkrechte zu \overline{AB} durch K , und konstruiere die Spiegelung \overline{GH} von \overline{BC} an \overline{EF} . Die Seite des Quadrats ist nun gedrittelt.

Unter Verwendung von Axiom 6 setze C bei C' auf \overline{AB} und F bei F' auf \overline{GH} . Bezeichne mit L den Schnittpunkt der Falte mit \overline{BC} und bezeichne mit b die Länge von \overline{BL} . Bezeichne die Länge der Seite des Quadrats mit $a + 1$, wobei $a = \overline{AC'}$. Die Länge von \overline{LC} ist $(a + 1) - b$ (Abb. 12.5).

Satz 12.3 $\overline{AC'} = \sqrt[3]{2}$.

Beweis Bei der Faltung wird die Strecke \overline{LC} auf die Strecke $\overline{LC'}$ gespiegelt und \overline{CF} wird auf die Strecke $\overline{C'F'}$ gefaltet. Deshalb:

$$\overline{GC'} = a - \frac{a + 1}{3} = \frac{2a - 1}{3}. \tag{12.1}$$

Da $\angle FCL$ ein rechter Winkel ist, ist es auch $\angle F'C'L$.

$\triangle C'BL$ ist ein rechtwinkliges Dreieck, also nach dem Satz des Pythagoras:

$$1^2 + b^2 = ((a + 1) - b)^2 \tag{12.2a}$$

$$b = \frac{a^2 + 2a}{2(a + 1)}. \tag{12.2b}$$

12.4 Belochs Verdoppelung eines Würfels

Da die Beloch-Faltung (Axiom 6) kubische Gleichungen lösen kann, liegt die Vermutung nahe, dass sie auch zur Verdoppelung eines Würfels verwendet werden kann. Hier geben wir eine direkte Konstruktion an, die diese Faltung verwendet.

Konstruktion Es sei $A = (-1, 0)$, $B = (0, -2)$. p sei die Gerade $x = 1$ und q sei die Gerade $y = 2$. Konstruiere mithilfe der Beloch-Faltung die Falte l , die A bei A' auf p und B bei B' auf q platziert. Bezeichne den Schnittpunkt der Falte mit der y -Achse als Y und den Schnittpunkt der Falte mit der x -Achse als X (Abb. 12.6).

Satz 12.4 $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$.

Beweis Die Falte ist die Mittelsenkrechte von sowohl $\overline{AA'}$ als auch $\overline{BB'}$, also $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$. Gemäß Wechselwinkelsatz gilt $\angle YAO = \angle BXO = \alpha$. Die Bezeichnung der anderen Winkel in der Abbildung ergibt sich aus den Eigenschaften von rechtwinkligen Dreiecken.

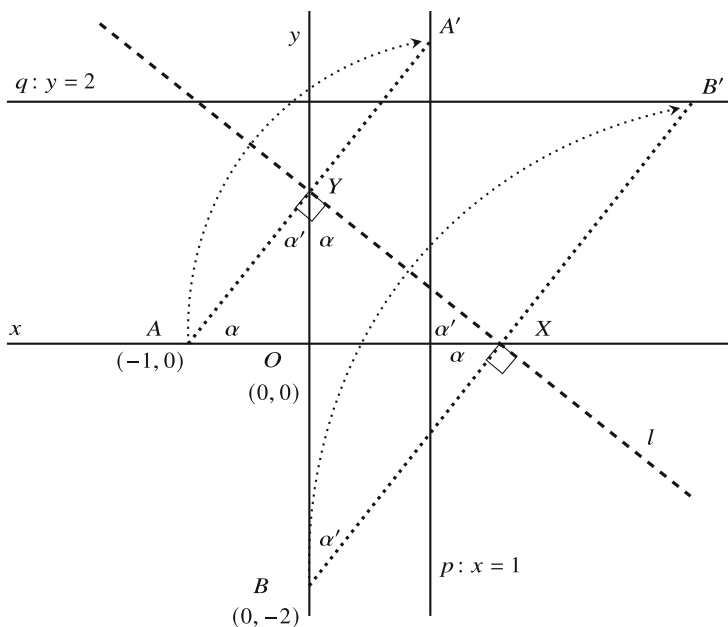


Abb. 12.6 Belochs Verdoppelung des Würfels

$\triangle AOY \sim \triangle YOX \sim \triangle XOB$ und $\overline{OA} = 1, \overline{OB} = 2$ sind gegeben, folglich:

$$\frac{\overline{OY}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OX}}$$

$$\frac{\overline{OY}}{1} = \frac{\overline{OX}}{\overline{OY}} = \frac{2}{\overline{OX}}.$$

Aus dem ersten und zweiten Verhältnis ergibt sich $\overline{OX} = \overline{OY}^2$ und aus dem ersten und dritten Verhältnis ergibt sich $\overline{OY} \overline{OX} = 2$. Die Substitution für \overline{OX} ergibt $\overline{OY}^3 = 2$ und $\overline{OY} = \sqrt[3]{2}$. \square

12.5 Konstruktion eines regelmäßigen Nonagons

Ein Nonagon (ein regelmäßiges Polygon mit neun Seiten) wird konstruiert, indem man die kubische Gleichung für seinen zentralen Winkel herleitet und dann die Gleichung mithilfe der Lill-Methode und der Beloch-Falte löst. Der zentrale Winkel ist $\theta = 360^\circ/9 = 40^\circ$. Nach Satz A.6:

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Es sei $x = \cos 40^\circ$. Dann lautet die Gleichung für das Nonagon $4x^3 - 3x + (1/2) = 0$, da $\cos 3 \cdot 40^\circ = \cos 120^\circ = -(1/2)$. Abb. 12.7 zeigt die Pfade für die nach der Lill-Methode konstruierte Gleichung.

Die zweite Bahn startet von P unter einem Winkel von etwa $-37,45^\circ$. Drehungen von 90° bei R und dann -90° bei S bewirken, dass sich der Pfad mit dem ersten Pfad an seinem Endpunkt Q schneidet. Daher ist $x = -\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$ eine Wurzel aus $4x^3 - 3x + (1/2)$.

Die Wurzel kann mithilfe der Beloch-Falte gewonnen werden. Konstruiere die Gerade a'_2 parallel zu a_2 im gleichen Abstand von a_2 wie a_2 von P . Obwohl die

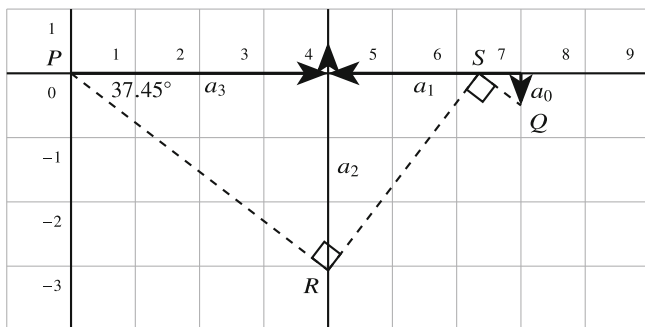


Abb. 12.7 Lill-Methode für ein Nonagon

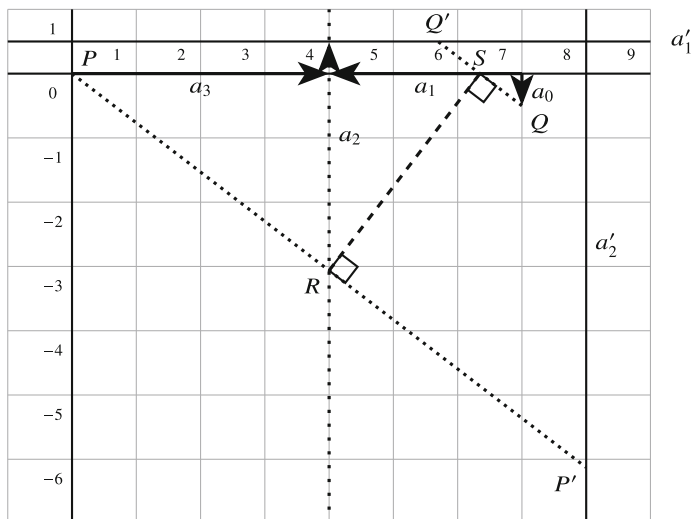


Abb. 12.8 Die Beloch-Falte zur Lösung der Gleichung des Nonagons

Länge von a_2 gleich null ist, hat sie dennoch eine Richtung (nach oben), sodass die parallele Gerade konstruiert werden kann. In ähnlicher Weise konstruiert man die Gerade a'_1 parallel zu a_1 im gleichen Abstand von a_1 wie a_1 von Q . Die Beloch-Falte \overline{RS} legt gleichzeitig P bei P' auf a'_2 und Q bei Q' auf a'_1 . Dadurch wird der Winkel $\angle SPR = -37,45^\circ$ konstruiert (Abb. 12.8).

Nach der Lill-Methode ist $-\tan(-37,45^\circ) \approx 0,766$ und somit $\cos \theta \approx 0,766$ eine Wurzel aus der Gleichung für den zentralen Winkel θ . Wir schließen die Konstruktion des Nonagons ab, indem wir $\cos^{-1} 0,766 \approx 40^\circ$ konstruieren.

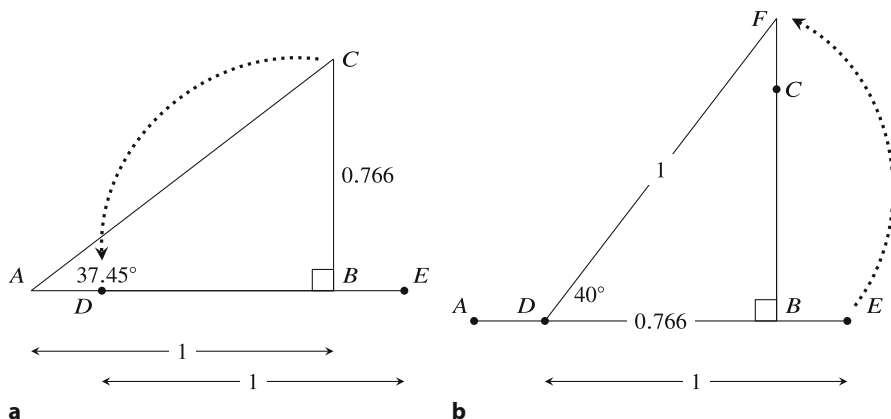


Abb. 12.9 **a** Die Tangente, die die Lösung der Gleichung für das Nonagon ist. **b** Der Kosinus des zentralen Winkels des Nonagons

Das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ mit $\angle CAB \approx 37,45^\circ$ und $\overline{AB} = 1$ hat die gegenüberliegende Seite $\overline{BC} \approx 0,766$ durch die Definition des Tangens (Abb. 12.9a). Falte \overline{CB} auf \overline{AB} , sodass die Spiegelung von C D ist und $\overline{DB} = 0,766$. Erweitere \overline{DB} und konstruiere E so, dass $\overline{DE} = 1$ ist. Falte \overline{DE} , um E an F in der Verlängerung von \overline{BC} zu spiegeln (Abb. 12.9b). Dann:

$$\angle BDF = \cos^{-1} \frac{0,766}{1} \approx 40^\circ.$$

Was ist die Überraschung?

Wir haben in Kap. 2 und 3 gesehen, dass Werkzeuge wie die Neusis Konstruktionen ermöglichen, die mit Zirkel und Lineal nicht möglich sind. Es ist erstaunlich, dass die Dreiteilung eines Winkels und die Verdopplung eines Würfels nur mit Papierfalten konstruiert werden können. Roger C. Alperin hat eine Hierarchie von vier Konstruktionsmethoden entwickelt, die jeweils leistungsfähiger sind als die vorherige.

Quellen

Dieses Kapitel basiert auf [2, 26, 31, 36].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 13

Ein Zirkel ist ausreichend



Lorenzo Mascheroni bewies 1797, dass jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal ausgeführt wird, auch nur mit einem Zirkel ausgeführt werden kann. Später stellte sich heraus, dass diese Aussage bereits 1672 von Georg Mohr bewiesen worden war (Satz von Mohr-Mascheroni). Nachdem in Abschn. 13.1 erklärt wurde, was mit der Durchführung einer Konstruktion nur mit einem Zirkel gemeint ist, wird der Beweis in Etappen präsentiert, beginnend mit vier Hilfskonstruktionen: Spiegelung eines Punktes (Abschn. 13.2), Konstruktion eines Kreises mit gegebenem Radius (Abschn. 13.3), Addition und Subtraktion von Strecken (Abschn. 13.4) und Konstruktion einer Strecke als Streckenverhältnis (Abschn. 13.5). Abschn. 13.6 zeigt, wie man den Schnittpunkt zweier Geraden findet und Abschn. 13.7 zeigt, wie man den Schnittpunkt einer Gerade und eines Kreises findet.

13.1 Was ist eine Konstruktion nur mit einem Zirkel?

Abb. 13.1a zeigt die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit einem Zirkel und einem Lineal. Wie kann man ein Dreieck ohne die Strecken \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{BC} konstruieren? Ein Streckenabschnitt wird durch zwei Punkte definiert, sodass es ausreicht, diese Punkte zu konstruieren, um eine Konstruktion zu erhalten, die derjenigen mit einem Lineal entspricht (Abb. 13.1b). Es ist nicht notwendig, die Strecken tatsächlich zu sehen. In den Abbildungen dieses Kapitels wird es Geraden geben, aber sie dienen nur dazu, die Konstruktion und den Beweis ihrer Korrektheit zu verstehen. Es ist wichtig, sich davon zu überzeugen, dass die Konstruktion selbst nur einen Zirkel verwendet.

Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist eine Abfolge von drei Vorgängen:

- Finde den Schnittpunkt von zwei Geraden.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) zwischen einer Gerade und einem Kreis.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) von zwei Kreisen.

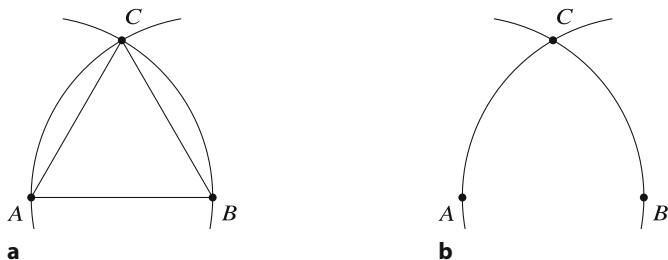


Abb. 13.1 **a** Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks mit einem Zirkel und einem Lineal. **b** Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks nur mit einem Zirkel

Die dritte Operation kann mit einem Zirkel allein durchgeführt werden. Wir müssen zeigen, dass die ersten beiden Operationen mit einem Zirkel allein durchgeführt werden können.

Notation

- $c(O, A)$: der Kreis mit dem Mittelpunkt O durch den Punkt A .
- $c(O, r)$: der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r .
- $c(O, \overline{AB})$: der Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius der Länge der Strecke \overline{AB} .

13.2 Spiegelung eines Punktes

Definition 13.1 Ein Punkt C' ist eine Spiegelung des Punktes C an einer Strecke \overline{AB} genau dann, wenn \overline{AB} (oder die Gerade, die \overline{AB} enthält) die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{CC'}$ ist.

Satz 13.1 Sind eine Gerade \overline{AB} und ein Punkt C , der nicht auf \overline{AB} liegt, gegeben, so kann man C' , die Spiegelung von C an \overline{AB} bilden.

Beweis Konstruiere einen Kreis mit dem Mittelpunkt A , der durch C geht, und einen Kreis mit dem Mittelpunkt B , der durch C geht. Der andere Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt C' , der die Spiegelung von C ist (Abb. 13.2). $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ (Seite-Seite-Seite), da $\overline{AC}, \overline{AC'}$ Radien desselben Kreises sind, ebenso $\overline{BC}, \overline{BC'}$ und \overline{AB} eine gemeinsame Seite ist. Daher ist $\angle CAB = \angle C'AB$, also ist \overline{AB} die Winkelhalbierende von $\angle CAC'$. Aber $\triangle CAC'$ ist ein gleichschenkliges Dreieck und die Winkelhalbierende \overline{AB} ist auch die Mittelsenkrechte von $\overline{CC'}$, der Basis von $\triangle CAC'$. Per Definition ist C' die Spiegelung von C an \overline{AB} .

□

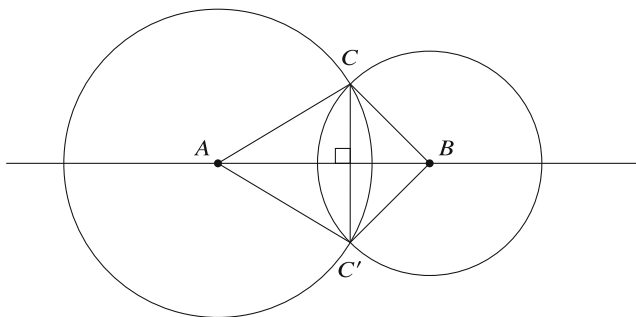


Abb. 13.2 Konstruktion einer Spiegelung

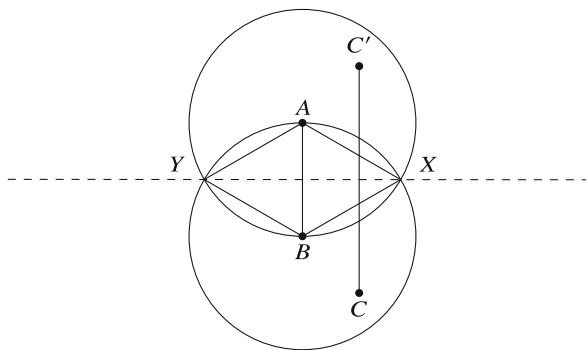
13.3 Konstruktion eines Kreises mit einem vorgegebenen Radius

Satz 13.2 Aus den Punkten A, B, C lässt sich $c(A, \overline{BC})$ konstruieren, der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius \overline{BC} .

Beweis Konstruiere $c(A, B)$ und $c(B, A)$; ihre Schnittpunkte seien X, Y (Abb. 13.3). A ist die Spiegelung von B an \overline{XY} , da $\triangle YAX \cong \triangle YBX$ (Seite-Seite-Seite). Nach Satz 13.1 konstruiere C' , die Spiegelung von C an \overline{XY} und konstruiere dann $c(A, \overline{AC'})$ (Abb. 13.4).

\overline{XY} ist die Mittelsenkrechte von $\overline{CC'}$ und \overline{AB} . Bezeichne den Schnittpunkt von \overline{XY} und \overline{AB} mit D und den Schnittpunkt von \overline{XY} und $\overline{CC'}$ mit E . Dann ist $\overline{C'E} = \overline{EC}$, $\overline{AD} = \overline{DB}$, und $\angle DEC = \angle DEC'$ ist ein rechter Winkel, also $\triangle DEC \cong \triangle DEC'$ (Seite-Winkel-Seite). Daher sind $\overline{DC} = \overline{DC'}$ und $\angle ADC' = \angle BDC$ (sie sind komplementär zu $\angle EDC' = \angle EDC$). Daraus folgt, dass $\triangle ADC' \cong \triangle BDC$ (Seite-Winkel-Seite) und somit $\overline{AC'} = \overline{BC}$. \square

Abb. 13.3 Konstruktion eines Kreises mit einem bestimmten Radius (1)



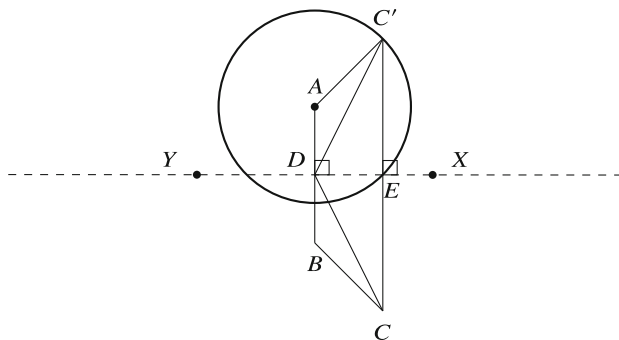


Abb. 13.4 Konstruktion eines Kreises mit einem bestimmten Radius (2)

13.4 Addition und Subtraktion von Strecken

Satz 13.3 Ausgehend von einer Strecke \overline{PQ} der Länge a und einer Strecke \overline{RS} der Länge b lassen sich Strecken \overline{QT} , \overline{QU} so konstruieren, dass \overline{PTQU} eine Strecke ist und die Länge von \overline{PT} $a - b$ sowie die Länge von \overline{PU} $a + b$ beträgt (Abb. 13.5).

Der Beweis ist recht lang und wird als eine Folge von Konstruktionen dargestellt.

Satz 13.4 Es kann ein gleichschenkliges Trapez konstruiert werden.

Beweis Sei H ein beliebiger Punkt auf $c(Q, b)$. Konstruiere H' , seine Spiegelung an \overline{PQ} . Bezeichne die Länge von $\overline{HH'}$ mit h (Abb. 13.6).

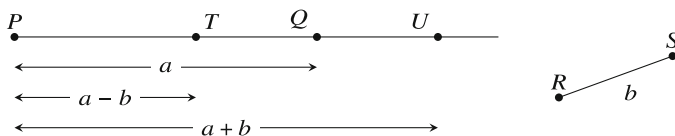


Abb. 13.5 Addition und Subtraktion von Strecken

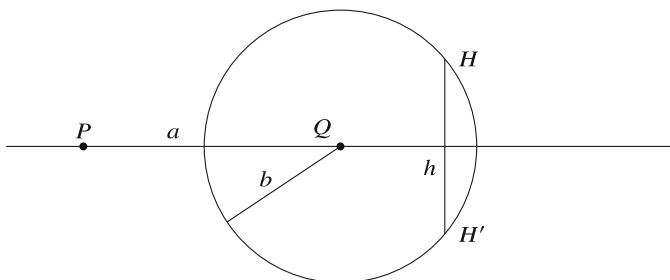


Abb. 13.6 Konstruktion eines gleichschenkligen Trapezes (1)

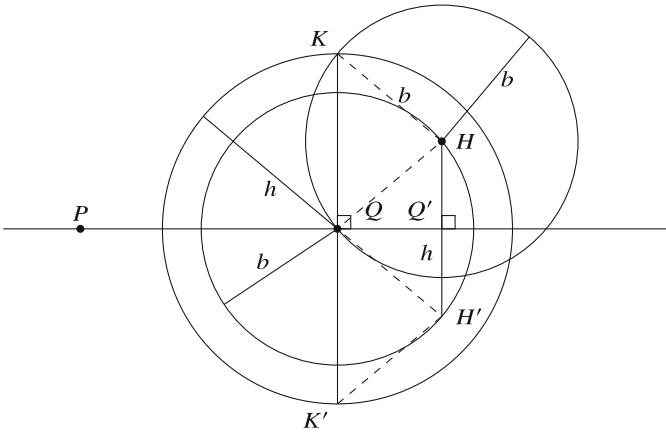


Abb. 13.7 Konstruktion eines gleichschenkligen Trapezes (2)

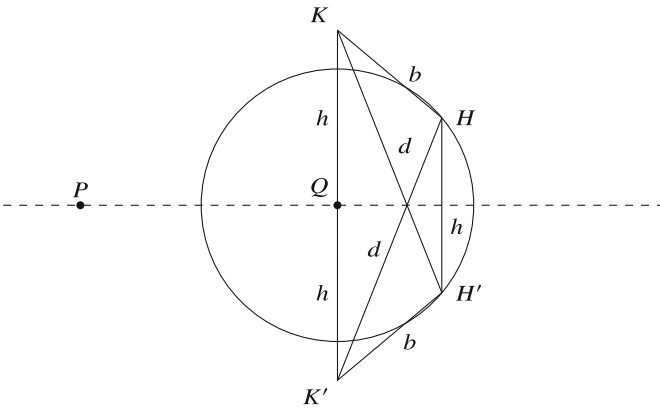


Abb. 13.8 Konstruktion eines gleichschenkligen Trapezes (3)

Konstruiere die Kreise $c(H, b)$, $c(Q, h)$. Sei K ein Schnittpunkt der Kreise; konstruiere K' die Spiegelung von K an \overline{PQ} (Abb. 13.7).

Die Gerade, die \overline{PQ} enthält, ist die Mittelsenkrechte von $\overline{HH'}$ und $\overline{KK'}$, also $\overline{HH'} \parallel \overline{KK'}$. $\overline{KH} = b$, da dies der Radius des Kreises mit Mittelpunkt H ist, und K', H' sind Spiegelungen von K, H . $\triangle QQH \cong \triangle QQH'$ (Seite-Seite-Seite) und $\triangle KQH \cong \triangle KQH'$ (Seite-Winkel-Seite), daher $\overline{K'H'} = \overline{KH} = b$. Daraus folgt, dass $\overline{KHH'K'}$ ein gleichschenkliges Trapez ist, dessen Grundseiten $\overline{HH'} = h$, $\overline{KK'} = 2h$ sind (Abb. 13.8). Bezeichne die Länge der Diagonalen $\overline{K'H} = \overline{KH'}$ mit d . \square

Satz 13.5 Ein gleichschenkliges Trapez kann von einem Kreis umschrieben werden.

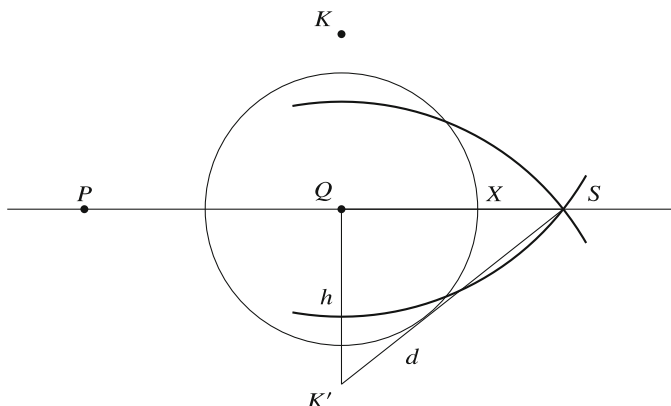


Abb. 13.10 Konstruktion des Punktes für Addition und Subtraktion (1)

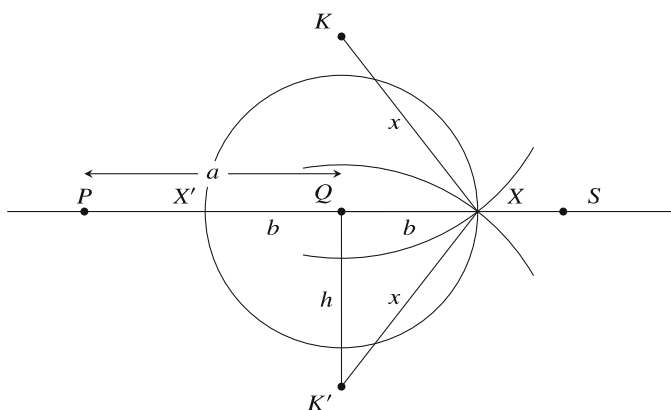


Abb. 13.11 Konstruktion des Punktes für Addition und Subtraktion (2)

13.5 Konstruktion einer Strecke als Streckenverhältnis

Satz 13.7 Zu Strecken der Länge n, m, s ist es möglich, eine Strecke der folgenden Länge zu konstruieren:

$$x = \frac{n}{m} s .$$

Beweis Konstruiere zwei konzentrische Kreise $c_1 = c(Z, m)$ und $c_2 = c(Z, n)$,¹ und wähle einen beliebigen Punkt A auf c_1 . Nach Satz 13.2 konstruiere eine Sehne \overline{AB} der Länge s auf c_1 (Abb. 13.12a). Wenn \overline{AB} den Kreis c_2 schneidet, multipliziert man nach Satz 13.3 m, n mit einer Zahl k , damit die Sehne den Kreis nicht

¹ Wir nehmen an, dass $m > n$; falls nicht, vertausche man die Schreibweise.

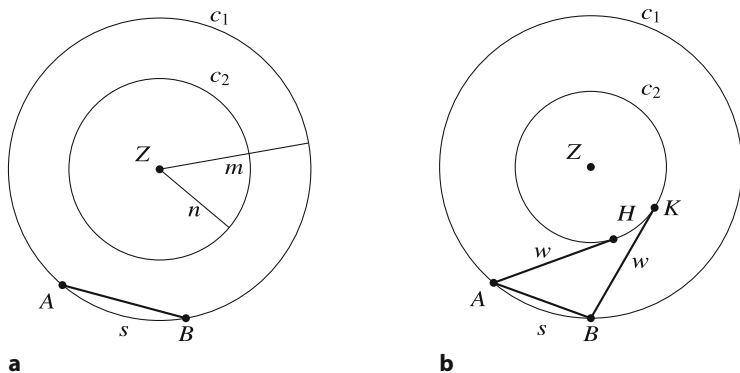


Abb. 13.12 **a** Konstruktion von $x = \frac{n}{m}s$, Schritt 1. **b** Konstruktion von $x = \frac{n}{m}s$, Schritt 2

schneidet. Beachten Sie, dass dies den Wert, den wir zu konstruieren versuchen, nicht ändert, da $x = \frac{kn}{km}s = \frac{n}{m}s$.

Wähle einen Punkt H auf c_2 und bezeichne die Länge von \overline{AH} mit w . Konstruiere K auf c_2 so, dass die Länge von \overline{BK} w ist (Abb. 13.12b). $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ (Seite-Seite-Seite), da $\overline{ZA} = \overline{ZB} = m$ die Radien desselben Kreises sind, ebenso $\overline{ZH} = \overline{ZK} = n$, und $\overline{AH} = \overline{BK} = w$ gemäß Konstruktion (Abb. 13.13a). Aus $\triangle AHZ \cong \triangle BZK$ folgt $\angle AZH = \angle BZK$ und somit $\angle AZB = \angle HZK$. Es ist schwierig, diese Gleichheit aus dem Diagramm zu erkennen, aber Abb. 13.13b soll die Beziehung zwischen den Winkeln verdeutlichen.

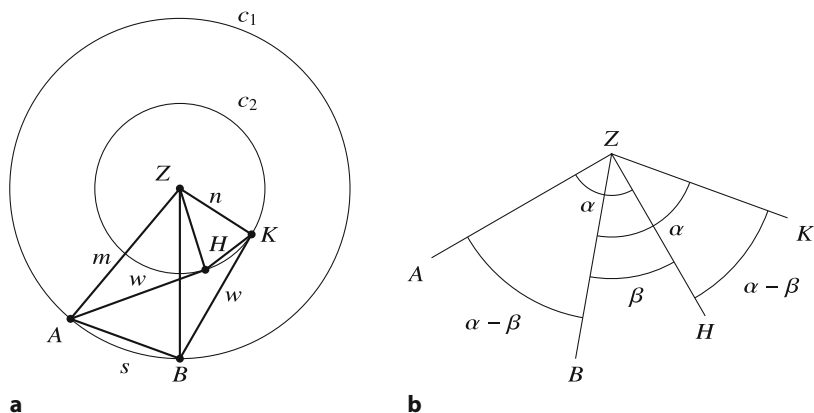


Abb. 13.13 **a** Konstruktion von $x = \frac{n}{m}s$, Schritt 3. **b** $\angle AZB = \angle HZK$

$\triangle ZAB \sim \triangle ZHK$, da beide gleichschenklige Dreiecke sind und wir gezeigt haben, dass sie denselben Scheitelwinkel haben. Bezeichne \overline{HK} mit x . Dann:

$$\frac{m}{s} = \frac{n}{x}$$

$$x = \frac{n}{m} s. \quad \square$$

13.6 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Geraden

Satz 13.8 Bei zwei Geraden, welche die Strecken $\overline{AB}, \overline{CD}$ enthalten, ist es möglich, ihren Schnittpunkt S zu konstruieren.

Beweis Seien C', D' die Spiegelungen von C, D an \overline{AB} . Es gibt zwei Fälle, je nachdem, ob C, D auf der gleichen Seite von \overline{AB} oder auf verschiedenen Seiten liegen. Bezeichne $x = \overline{CS}, c = \overline{CC'}, d = \overline{DD'}, e = \overline{CD}$ wie in Abb. 13.14, 13.15 gezeigt. Wir berechnen den Wert von x für jeden Fall.

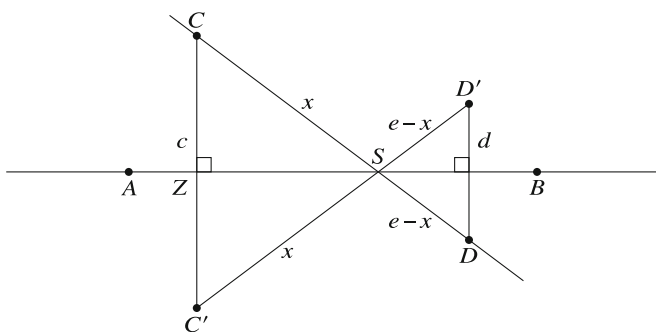


Abb. 13.14 Konstruktion des Schnittpunkts zweier Geraden (1)

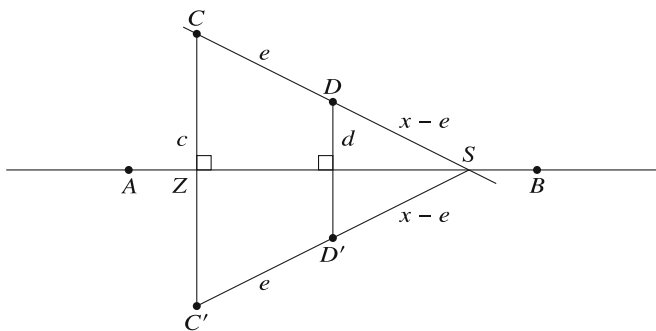


Abb. 13.15 Konstruktion des Schnittpunkts zweier Geraden (2)

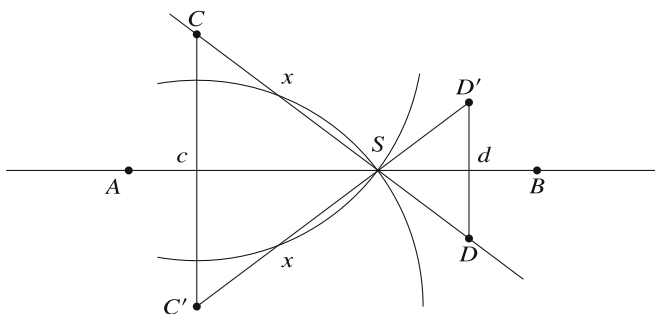


Abb. 13.17 Konstruktion des Schnittpunkts zweier Geraden (4)

13.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Gerade und eines Kreises

Satz 13.9 Zu einem Kreis $k = C(M, r)$ und einer Gerade l kann man die Schnittpunkte von k und l konstruieren.

Beweis Konstruiere M' , die Spiegelung von M an l , und den Kreis $k' = c(M', r)$. Da $\triangle MYM' \cong \triangle MXM'$ ist, sind X, Y , die Schnittpunkte von k, k' , die Schnittpunkte von l und k (Abb. 13.18).

Diese Konstruktion kann nicht durchgeführt werden, wenn M auf der Gerade l liegt. In diesem Fall ist ein beliebiger Punkt A auf l zu wählen, der mehr als r von M entfernt ist. Mit Satz 13.3 verkürzt und verlängert man \overline{AM} um r . X, Y , die Endpunkte dieser Segmente, sind die Schnittpunkte von k und l (Abb. 13.19). \square

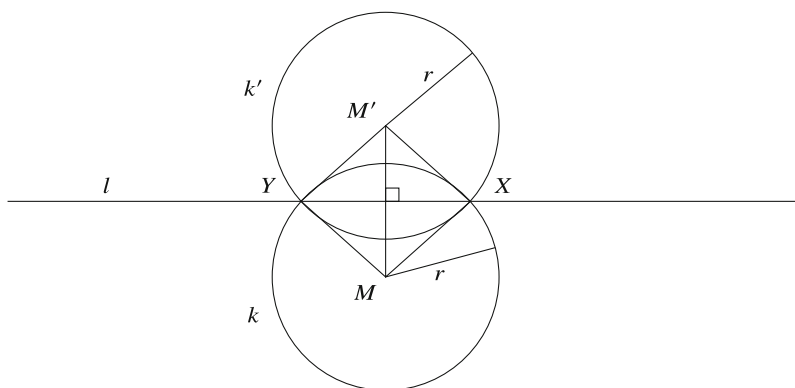


Abb. 13.18 Konstruktion des Schnittpunkts zwischen einer Gerade und einem Kreis (1)

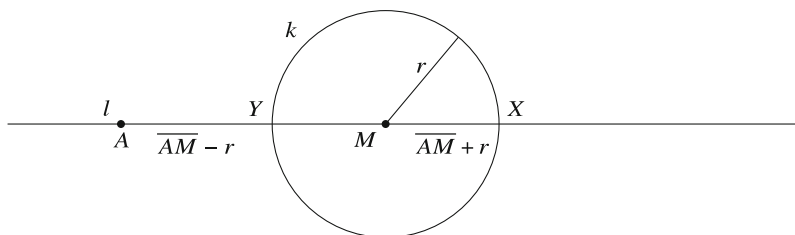


Abb. 13.19 Konstruktion des Schnittpunkts zwischen einer Gerade und einem Kreis (2)

Was ist die Überraschung?

Wenn man etwas über Konstruktionen mit einem Zirkel und einem Lineal lernt, ist es offensichtlich, dass beide Werkzeuge notwendig sind. Daher war es eine ziemliche Überraschung, herauszufinden, dass ein Zirkel ausreicht. Der Beweis ist ziemlich lang, also werden wir das Lineal nicht zu Hause lassen. Aber der Satz zeigt, dass wir nicht davon ausgehen sollten, dass es keine Alternativen zu bekannten mathematischen Konzepten gibt.

Quellen

Dieses Kapitel basiert auf dem Problem 33 aus [13], das von Michael Woltermann [14] überarbeitet wurde. Ein zusätzlicher Beweis ist in [25] zu finden.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 14

Ein Lineal und ein Kreis sind ausreichend



Kann jede Konstruktion mit Zirkel und Lineal auch nur mit einem Lineal durchgeführt werden? Die Antwort lautet nein, denn Geraden sind durch lineare Gleichungen definiert und können keine Kreise darstellen, die durch quadratische Gleichungen definiert sind. Im Jahr 1822 stellte Jean-Victor Poncelet die Vermutung auf, dass ein Lineal ausreicht, wenn es in der Ebene wenigstens einen Kreis gibt. Dies wurde 1833 von Jakob Steiner bewiesen.

Nachdem in Abschn. 14.1 erklärt wurde, was unter einer Konstruktion mit nur einem Lineal und einem Kreis zu verstehen ist, wird der Beweis schrittweise anhand von fünf Hilfskonstruktionen präsentiert: Konstruktion einer Gerade parallel zu einer gegebenen Gerade (Abschn. 14.2), Konstruktion einer Senkrechten zu einer gegebenen Gerade (Abschn. 14.3), Kopieren einer Strecke in einer gegebenen Richtung (Abschn. 14.4), Konstruktion einer Strecke als Streckenverhältnis (Abschn. 14.5) und Konstruktion einer Quadratwurzel (Abschn. 14.6). Abschn. 14.7 zeigt, wie man den/die Schnittpunkt(e) einer Gerade mit einem Kreis findet und Abschn. 14.8 zeigt, wie man den/die Schnittpunkt(e) von zwei Kreisen findet.

14.1 Was ist eine Konstruktion mit nur einem Lineal?

Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist eine Folge von drei Vorgängen:

- Finde den Schnittpunkt von zwei Geraden.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) einer Gerade und eines Kreises.
- Finde den/die Schnittpunkt(e) von zwei Kreisen.

Die erste Operation kann mit einem Lineal allein durchgeführt werden.

Ein Kreis ist definiert durch einen Punkt O , seinen *Mittelpunkt*, und durch einen *Radius* r , eine Strecke der Länge r , deren einer Endpunkt das Zentrum ist. Wenn wir die mit X und Y bezeichneten Punkte in Abb. 14.1a konstruieren können, können wir behaupten, die Schnittpunkte eines bestimmten Kreises mit einer bestimmten Gerade erfolgreich konstruiert zu haben. In ähnlicher Weise ist die Konstruktion

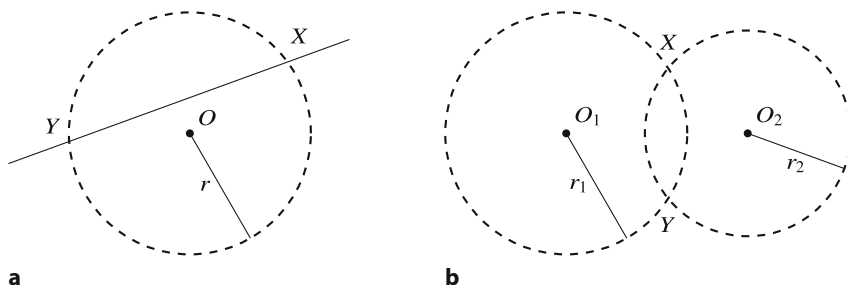


Abb. 14.1 a X, Y sind die Schnittpunkte einer Gerade und eines Kreises. b X, Y sind die Schnittpunkte von zwei Kreisen

von X, Y in Abb. 14.1b die Konstruktion der Schnittpunkte von zwei gegebenen Kreisen. Die in einem Diagramm gestrichelt gezeichneten Kreise kommen in einer Konstruktion nicht wirklich vor; sie werden nur verwendet, um die Konstruktion besser zu verstehen.

Der einzige gegebene Kreis, der in den Konstruktionen verwendet wird, der sogenannte *feste Kreis*, kann irgendwo in der Ebene liegen und einen beliebigen Radius haben.

14.2 Konstruktion einer Gerade parallel zu einer gegebenen Gerade

Satz 14.1 Zu einer Gerade l , die durch zwei Punkte A, B definiert ist, und einem nicht auf der Gerade liegenden Punkt P kann man eine Gerade durch P konstruieren, die parallel zu \overline{AB} ist.

Beweis Der Beweis ist in zwei Fällen zu erbringen.

Fall 1: \overline{AB} ist eine *gerichtete Strecke*, wenn der Mittelpunkt M von \overline{AB} gegeben ist. Konstruiere einen Strahl, der \overline{AP} verlängert, und wähle einen beliebigen Punkt S auf dem Strahl jenseits von P . Konstruiere die Geraden $\overline{BP}, \overline{SM}, \overline{SB}$. Der Schnittpunkt von \overline{BP} und \overline{SM} wird mit O bezeichnet. Konstruiere einen Strahl, der \overline{AO} verlängert und bezeichne den Schnittpunkt des Strahls \overline{AO} mit \overline{SB} als Q (Abb. 14.2).

Wir behaupten, dass $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ ist.

Der Beweis erfolgt mithilfe des Satzes von Ceva.

Satz von Ceva (Satz A.19): Wenn sich die Strecken von den Scheitelpunkten eines Dreiecks zu den gegenüberliegenden Kanten in einem Punkt O schneiden (wie in Abb. 14.2), gilt für die Streckenlängen:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

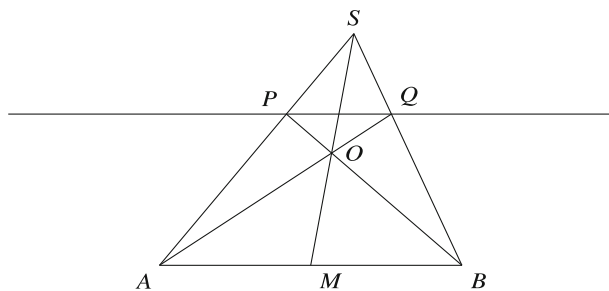


Abb. 14.2 Konstruktion einer parallelen Gerade im Falle einer gerichteten Gerade

In Abb. 14.2 ist M der Mittelpunkt von \overline{AB} , sodass $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = 1$, und die Gleichung wird zu:

$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}}, \quad (14.1)$$

da die Reihenfolge der Endpunkte einer Strecke nicht wichtig ist.

Wir behaupten, dass $\triangle ABS \sim \triangle PQS$:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + \frac{\overline{QS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1$$

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1.$$

Unter Verwendung von (14.1):

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + 1 = \frac{\overline{AP}}{\overline{PS}} + \frac{\overline{PS}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{PS}},$$

und es folgt, dass $\triangle ABS \sim \triangle PQS$ und somit $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

Fall 2: \overline{AB} ist nicht notwendigerweise eine gerichtete Strecke. Der feste Kreis c hat den Mittelpunkt O und den Radius r . P ist der Punkt, der nicht auf der Gerade liegt, durch die eine zu l parallele Gerade konstruiert werden muss (Abb. 14.3a).

Wir wählen M , einen beliebigen Punkt auf l , und konstruieren einen Strahl, der \overline{MO} verlängert und den Kreis in U, V schneidet. \overline{UV} ist eine gerichtete Strecke, weil O , der Mittelpunkt des Kreises, den Durchmesser \overline{UV} halbiert. Wir wählen einen Punkt A auf l und konstruieren mithilfe der Konstruktion für eine gerichtete Strecke (Fall 1) eine Gerade durch A parallel zu \overline{UV} , die den Kreis in X, Y schneidet (Abb. 14.3b).

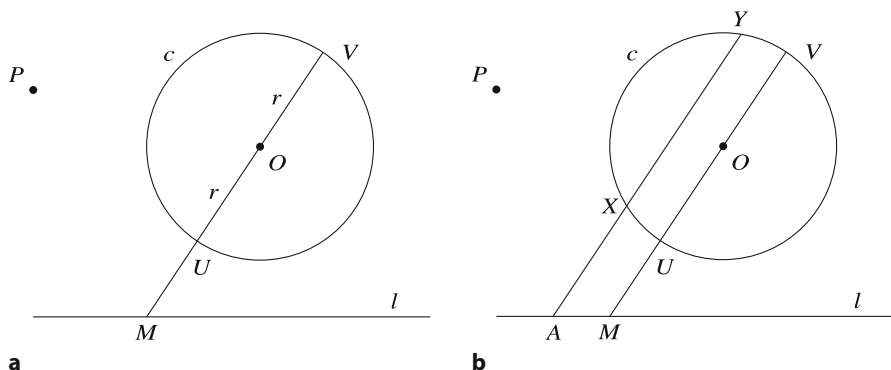
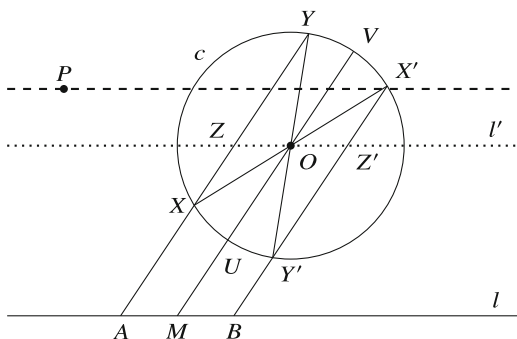


Abb. 14.3 **a** Konstruktion einer gerichteten Gerade. **b** Konstruktion einer Gerade parallel zur gerichteten Gerade

Wir konstruieren einen Durchmesser von X durch O , der die andere Seite des Kreises in X' schneidet, und in gleicher Weise den Durchmesser $\overline{YY'}$. Wir konstruieren den Strahl von X' durch Y' und bezeichnen seinen Schnittpunkt mit l als B . Wir behaupten, dass M die Winkelhalbierende von \overline{AB} ist, sodass \overline{AB} eine gerichtete Strecke ist und daher eine Gerade durch P parallel zu l konstruiert werden kann (Abb. 14.4).

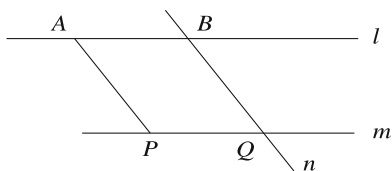
$\overline{OX}, \overline{OX'}, \overline{OY}, \overline{OY'}$ sind alle Radien des Kreises und $\angle XOY = \angle X'OY'$, da sie Scheitelwinkel sind, also $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ (Seite-Winkel-Seite). Wir definieren¹ l' als eine Gerade durch O parallel zu l , die \overline{XY} in Z und $\overline{X'Y'}$ in Z' schneidet. $\angle XOZ = \angle X'OZ'$ sind Scheitelwinkel, $\angle ZXO = \angle Z'X'O$ sind Wechselwinkel und $\overline{XO} = \overline{X'O}$ sind Radien, sodass $\triangle XOZ \cong \triangle X'OZ'$ (Winkel-Seite-Winkel) und $\overline{ZO} = \overline{OZ'}$. Daher sind \overline{AMOZ} und $\overline{BMOZ'}$ Parallelogramme und $\overline{AM} = \overline{ZO} = \overline{OZ'} = \overline{MB}$. \square

Abb. 14.4 Der Beweis, dass l' parallel zu l ist



¹ Definieren, nicht konstruieren, denn wir befinden uns mitten im Beweis, dass eine solche Gerade konstruiert werden kann.

Abb. 14.5 Konstruktion einer Gerade parallel zu einer gegebenen Gerade



Satz 14.2 Zu einer gegebener Strecke \overline{AB} und einem Punkt P , der nicht auf der Gerade liegt, ist es möglich, eine Strecke \overline{PQ} zu konstruieren, die parallel zu \overline{AB} ist und deren Länge gleich der Länge von \overline{AB} ist, d. h., es ist möglich, \overline{AB} parallel zu sich selbst zu kopieren mit P als einem seiner Endpunkte.

Beweis Wir haben bewiesen, dass es möglich ist, eine Gerade m durch P parallel zu \overline{AB} und eine Gerade n durch B parallel zu \overline{AP} zu konstruieren. Das Viereck \overline{ABQP} ist ein Parallelogramm, sodass die gegenüberliegenden Seiten gleich sind: $\overline{AB} = \overline{PQ}$ (Abb. 14.5). \square

14.3 Konstruktion einer Senkrechten zu einer gegebenen Gerade

Satz 14.3 Zu einer Gerade l und einem Punkt P , der nicht auf l liegt, kann man eine Senkrechte zu l durch P konstruieren.

Beweis Konstruiere nach Satz 14.1 eine zu l parallele Gerade l' , die den festen Kreis in U, V schneidet. Konstruiere den Durchmesser $\overline{UOU'}$ und die Sehne $\overline{VU'}$ (Abb. 14.6). $\angle UVU'$ ist ein rechter Winkel, weil er einem Durchmesser gegenüberliegt. Daher steht $\overline{VU'}$ senkrecht auf \overline{UV} und l . Wiederum nach Satz 14.1 konstruiert man die Parallele zu $\overline{VU'}$ durch P . \square

Abb. 14.6 Konstruktion einer senkrechten Gerade

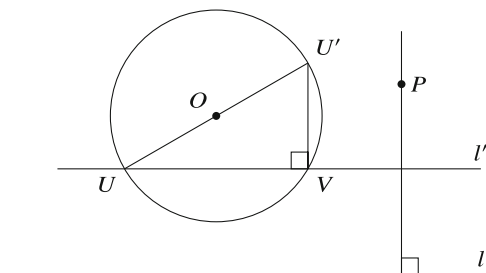
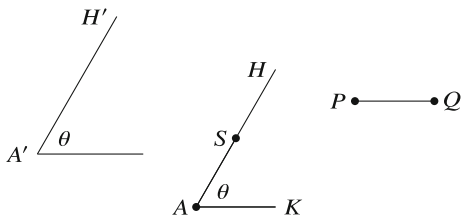


Abb. 14.7 Kopieren einer Strecke in eine bestimmte Richtung



14.4 Kopieren einer Strecke in eine bestimmte Richtung

Satz 14.4 *Es ist möglich, eine Kopie einer bestimmten Strecke in Richtung einer anderen Gerade zu konstruieren.*

Die Bedeutung von „Richtung“ ist, dass die durch zwei Punkte A', H' definierte Gerade einen Winkel θ relativ zu einer Achse einnimmt, und das Ziel ist, $\overline{AS} = \overline{PQ}$ so zu konstruieren, dass \overline{AS} denselben Winkel θ relativ zu dieser Achse einnimmt (Abb. 14.7).

Beweis Gemäß Satz 14.2 ist es möglich, einen Streckenabschnitt \overline{AH} so zu konstruieren, dass $\overline{AH} \parallel \overline{A'H'}$, und einen Streckenabschnitt \overline{AK} so zu konstruieren, dass $\overline{AK} \parallel \overline{PQ}$ und $\overline{AK} = \overline{PQ}$. $\angle HAK = \theta$, sodass es bleibt, einen Punkt S auf \overline{AH} zu finden, sodass $\overline{AS} = \overline{PQ}$.

Konstruiere zwei zu $\overline{AH}, \overline{AK}$ parallele Radien $\overline{OU}, \overline{OV}$ des festen Kreises und konstruiere einen Strahl durch K parallel zu \overline{UV} . Bezeichne seinen Schnittpunkt mit \overline{AH} als S (Abb. 14.8). Gemäß Konstruktion sind $\overline{AH} \parallel \overline{OU}$ und $\overline{AK} \parallel \overline{OV}$, also $\angle SAK = \angle HAK = \angle UOV = \theta$. $\overline{SK} \parallel \overline{UV}$ und $\triangle SAK \sim \triangle UOV$ (Winkel-Winkel-Winkel), $\triangle UOV$ ist gleichschenkelig, weil $\overline{OU}, \overline{OV}$ Radien des gleichen Kreises sind. Daher ist $\triangle SAK$ gleichschenkelig und $\overline{AS} = \overline{AK} = \overline{PQ}$. \square

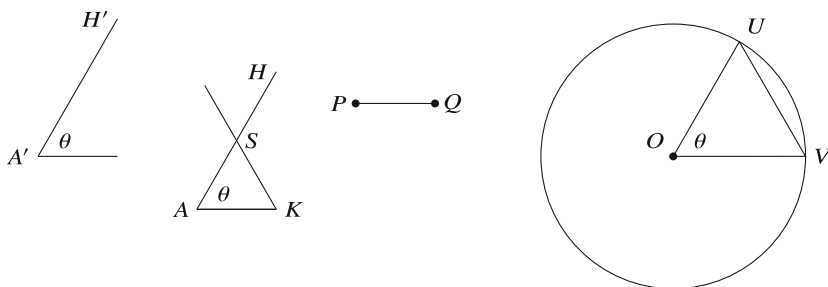


Abb. 14.8 Verwenden des festen Kreises zum Kopieren der Strecke

14.5 Konstruktion einer Strecke als Streckenverhältnis

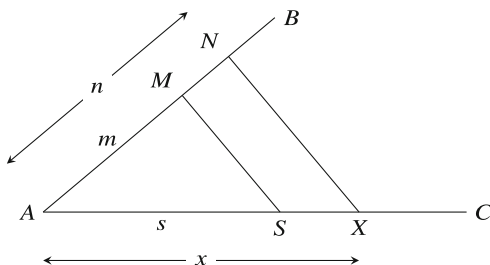
Satz 14.5 Zu Strecken der Länge n, m, s kann man eine Strecke der folgenden Länge konstruieren:

$$x = \frac{n}{m}s.$$

Beweis Man wähle Punkte A, B, C , die nicht auf derselben Geraden liegen, und konstruiere Strahlen $\overline{AB}, \overline{AC}$. Mit Satz 14.4 ist es möglich, Punkte M, N, S so zu konstruieren, dass $\overline{AM} = m, \overline{AN} = n, \overline{AS} = s$. Nach Satz 14.1 konstruiere eine Gerade durch N parallel zu \overline{MS} , die \overline{AC} in X schneidet und bezeichne \overline{AX} mit x (Abb. 14.9). $\triangle MAS \sim \triangle NAX$ (Winkel-Winkel-Winkel), also $\frac{m}{n} = \frac{s}{x}$ und $x = \frac{n}{m}s$.

□

Abb. 14.9 Ähnliche Dreiecke zur Konstruktion des Längenverhältnisses



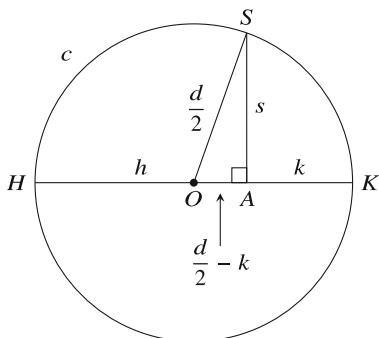
14.6 Konstruktion einer Quadratwurzel

Satz 14.6 Zu Strecken der Länge a, b lässt sich eine Strecke der Länge \sqrt{ab} konstruieren.

Beweis Wir wollen $x = \sqrt{ab}$ als $x = \frac{n}{m}s$ ausdrücken, um Satz 14.5 zu verwenden.

- Für n verwenden wir d , den Durchmesser des festen Kreises.
- Für m verwenden wir $t = a + b$, was gemäß Satz 14.4 aus a, b konstruiert werden kann.
- Wir definieren $s = \sqrt{hk}$, wobei h, k als Ausdrücke der Längen a, b, t, d definiert sind.

Abb. 14.10 Konstruktion einer Quadratwurzel



Definiere $h = \frac{d}{t}a$ und $k = \frac{d}{t}b$ und berechne dann:

$$x = \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{th}{d} \frac{tk}{d}} = \sqrt{\left(\frac{t}{d}\right)^2 hk} = \frac{t}{d} \sqrt{hk} = \frac{t}{d} s$$

$$h + k = \frac{d}{t}a + \frac{d}{t}b = \frac{d(a+b)}{t} = \frac{dt}{t} = d.$$

Nach Satz 14.4 konstruiere $\overline{HA} = h$ auf einem Durchmesser \overline{HK} des Festkreises. Aus $h + k = d$ ergibt sich $\overline{AK} = k$ (Abb. 14.10). Nach Satz 14.3 konstruieren wir eine Senkrechte zu \overline{HK} bei A und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Gerade mit dem Kreis als S . $\overline{OS} = \overline{OK} = d/2$ und $\overline{OA} = (d/2) - k$.

Mit dem Satz des Pythagoras:

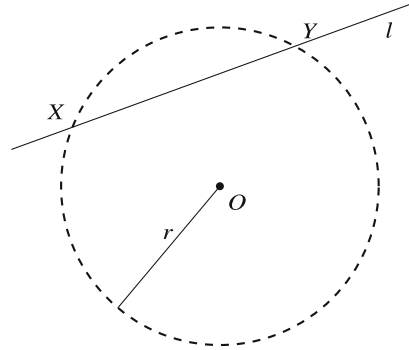
$$\begin{aligned} s^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2} - k\right)^2 \\ &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2\frac{dk}{2} - k^2 \\ &= k(d - k) = kh \\ s &= \sqrt{hk}. \end{aligned}$$

Nun kann $x = \frac{t}{d}s$ gemäß Satz 14.5 konstruiert werden. \square

14.7 Konstruktion des Schnittpunkts einer Gerade und eines Kreises

Satz 14.7 Zu einer Gerade l und einem Kreis $c(O, r)$ kann man ihre Schnittpunkte konstruieren (Abb. 14.11).

Abb. 14.11 Konstruktion der Schnittpunkte einer Gerade und eines Kreises (1)

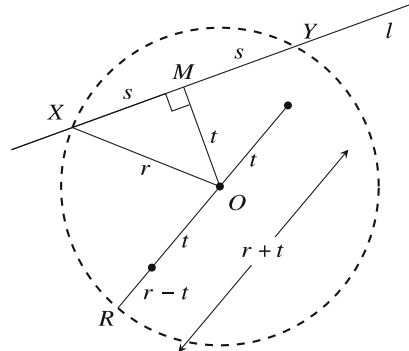


Beweis Nach Satz 14.3 ist es möglich, eine Senkrechte vom Mittelpunkt des Kreises O zur Gerade l zu konstruieren. Der Schnittpunkt von l mit der Senkrechten wird mit M bezeichnet. \overline{OM} halbiert die Sehne \overline{XY} , wobei X, Y die Schnittpunkte der Gerade mit dem Kreis sind (Abb. 14.12). Wir definieren $\overline{XY} = 2s$ und $\overline{OM} = t$. Man beachte, dass s, X, Y nur Definitionen sind und nicht konstruiert wurden.

Nach dem Satz des Pythagoras $s^2 = r^2 - t^2 = (r + t)(r - t)$. Nach Satz 14.4 ist es möglich, aus O in den beiden Richtungen \overline{OR} und \overline{RO} Strecken der Länge t zu konstruieren. Das Ergebnis sind zwei Strecken mit den Längen $r + t, r - t$.

Mit Satz 14.6 lässt sich eine Strecke der Länge $s = \sqrt{(r + t)(r - t)}$ konstruieren, und mit Satz 14.4 lassen sich Strecken der Länge s von M entlang l in

Abb. 14.12 Konstruktion der Schnittpunkte einer Gerade und eines Kreises (2)



beide Richtungen konstruieren. Ihre anderen Endpunkte sind die Schnittpunkte von l und c . \square

14.8 Konstruktion des Schnittpunkts von zwei Kreisen

Satz 14.8 Zu zwei Kreisen $c(O_1, r_1), c(O_2, r_2)$ ist es möglich, deren Schnittpunkte zu konstruieren.

Beweis Konstruiere $\overline{O_1O_2}$ und bezeichne ihre Länge mit t (Abb. 14.13). Bezeichne mit A den Schnittpunkt von $\overline{O_1O_2}$ und \overline{XY} , und bezeichne $q = \overline{O_1A}$, $x = \overline{XA}$ (Abb. 14.14). A ist noch nicht konstruiert, aber wenn q, x konstruiert sind, dann kann gemäß Satz 14.4 der Punkt A der Länge q von O_1 in der Richtung $\overline{O_1O_2}$ konstruiert werden.

Ist A konstruiert, so lässt sich gemäß Satz 14.3 eine Senkrechte auf $\overline{O_1O_2}$ in A konstruieren, und mit Satz 14.4 kann man von A aus in beiden Richtungen entlang der Senkrechten Strecken der Länge x konstruieren. Ihre anderen Endpunkte sind die Schnittpunkte der Kreise.

Konstruktion der Länge q Definiere $d = \sqrt{r_1^2 + t^2}$, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das aus den bekannten Längen r_1, t konstruiert werden kann. Man beachte, dass $\triangle O_1XO_2$ nicht notwendigerweise ein rechtwinkliges Dreieck ist; das rechtwinklige Dreieck kann überall in der Ebene konstruiert werden. Im

Abb. 14.13 Konstruktion des Schnittpunkts zweier Kreise (1)

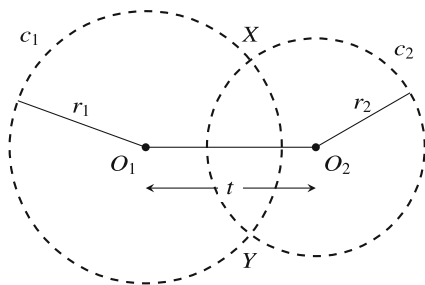
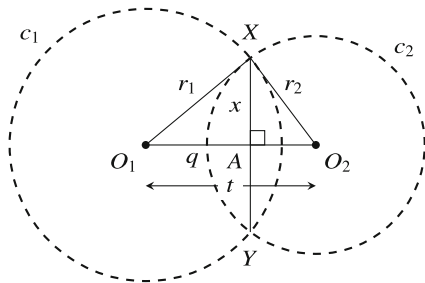


Abb. 14.14 Konstruktion des Schnittpunkts zweier Kreise (2)



rechtwinkligen Dreieck $\triangle XAO_1$ ist $\cos \angle XO_1A = q/r_1$. Nach dem Kosinussatz für $\triangle XO_1O_2$:

$$\begin{aligned} r_2^2 &= t^2 + r_1^2 - 2r_1t \cos \angle XO_1O_2 \\ &= t^2 + r_1^2 - 2tq \\ 2tq &= (t^2 + r_1^2) - r_2^2 = d^2 - r_2^2 \\ q &= \frac{(d + r_2)(d - r_2)}{2t}. \end{aligned}$$

Mit Satz 14.4 können diese Längen konstruiert werden, und mit Satz 14.5 kann q aus $d + r_2, d - r_2, 2t$ konstruiert werden.

Konstruktion der Länge x Mit dem Satz des Pythagoras:

$$x = \sqrt{r_1^2 - q^2} = \sqrt{(r_1 + q)(r_1 - q)}.$$

Gemäß Satz 14.4 können $h = r_1 + q, k = r_1 - q$ konstruiert werden, ebenso $x = \sqrt{hk}$ mit Satz 14.6. \square

Was ist die Überraschung?

Ein Zirkel ist notwendig, weil ein Lineal nur die Wurzeln von linearen Gleichungen berechnen kann, nicht aber Werte wie $\sqrt{2}$, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Seitenlänge 1. Es ist jedoch erstaunlich, dass das Vorhandensein eines einzigen Kreises, unabhängig von der Lage seines Mittelpunkts und der Länge seines Radius, ausreicht, um jede Konstruktion durchzuführen, die mit Zirkel und Lineal möglich ist.

Quellen

Dieses Kapitel basiert auf dem Problem 34 von [13], das von Michael Woltermann überarbeitet wurde. [14].

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Kapitel 15

Sind Dreiecke mit gleichen Flächen und Umfängen kongruent?



Sind zwei Dreiecke mit der gleichen Fläche und dem gleichen Umfang kongruent? Nicht unbedingt: Die Dreiecke mit den Seiten $(17, 25, 28)$ und $(20, 21, 29)$ haben beide einen Umfang von 70 und einen Flächeninhalt von 210, sind aber nicht kongruent (Abb. 15.1).¹ In diesem Kapitel wird gezeigt, dass es bei einem Dreieck mit rationalen Seiten möglich ist, ein nichtkongruentes Dreieck mit ebenfalls rationalen Seiten zu konstruieren, das denselben Flächeninhalt und Umfang hat. Wir führen die Herleitung anhand eines Beispiels durch und zeigen, dass das Dreieck mit den Seiten $(3, 4, 5)$ und das Dreieck mit den Seiten $(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15})$ beide einen Umfang 12 und einen Flächeninhalt 6 haben.

15.1 Von einem Dreieck zu einer elliptischen Kurve

Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, der als *Inkreismittelpunkt* des Dreiecks bezeichnet wird. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt eines in das Dreieck einbeschriebenen Kreises, des Inkreises (Abb. 15.2).

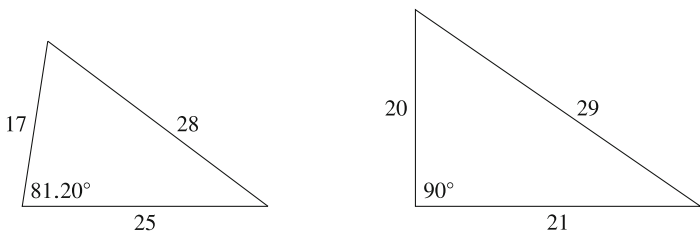


Abb. 15.1 Nichtkongruente Dreiecke mit gleicher Fläche und gleichem Umfang

¹ Die Flächen wurden mithilfe der Heron-Formel (Satz A.3) und die Winkel mithilfe des Kosinussatzes (Satz A.8) berechnet.

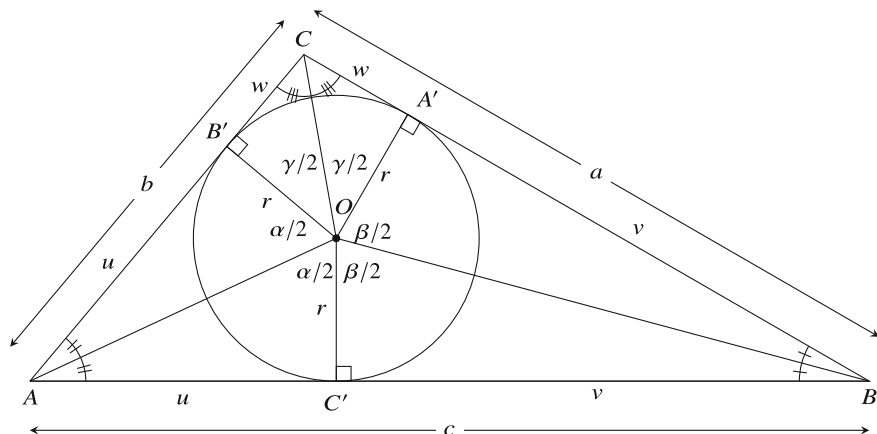


Abb. 15.2 Inkreis eines Dreiecks

Ziehe vom Mittelpunkt O aus Höhenlinien zu den Seiten. Die Höhen haben die Länge r , den Radius des Inkreises. Die Höhen und Winkelhalbierenden bilden drei Paare von kongruenten rechtwinkligen Dreiecken:

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

Die Höhen unterteilen die Seiten a, b, c in die Segmente u, v, w . Der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist die Summe der Flächeninhalte von $\triangle BOC, \triangle AOB, \triangle AOC$:

$$A = \frac{1}{2}(w + v)r + \frac{1}{2}(v + u)r + \frac{1}{2}(u + w)r \quad (15.1a)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2(u + v + w)r \quad (15.1b)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)r \quad (15.1c)$$

$$= sr, \quad (15.1d)$$

Dabei ist s der *Halbumfang*, die Hälfte des Umfangs des Dreiecks $\triangle ABC$. Die Längen von u, v, w können durch den Radius des Kreises und die zentralen Winkel $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$ ausgedrückt werden:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}. \quad (15.2)$$

Der Halbumfang kann nun durch die Tangenten ausgedrückt werden:

$$s = u + v + w = r \tan \frac{\alpha}{2} + r \tan \frac{\beta}{2} + r \tan \frac{\gamma}{2} = r \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right),$$

und nach (15.1d) ist die Fläche:

$$A = sr = r^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right). \quad (15.3)$$

Mit $r = A/s$ lässt sich (15.3) wie folgt schreiben:

$$\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{A}{r^2} = \frac{A}{(A/s)^2} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.4)$$

Da die Summe der Winkel α, β, γ 360° beträgt, gilt:

$$\gamma/2 = 360^\circ/2 - (\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5a)$$

$$\tan \gamma/2 = \tan(180^\circ - (\alpha/2 + \beta/2)) \quad (15.5b)$$

$$= -\tan(\alpha/2 + \beta/2) \quad (15.5c)$$

$$= \frac{\tan \alpha/2 + \tan \beta/2}{\tan \alpha/2 \tan \beta/2 - 1}, \quad (15.5d)$$

mithilfe der Formel für den Tangens der Summe von zwei Winkeln (Satz A.9).

Wir vereinfachen die Notation, indem wir Variablen für die Tangens definieren:

$$x = \tan \frac{\alpha}{2}, \quad y = \tan \frac{\beta}{2}, \quad z = \tan \frac{\gamma}{2}. \quad (15.6)$$

Mit (15.5d) können wir $z = \tan \gamma/2$ in Form von x, y ausdrücken:

$$z = \frac{x + y}{xy - 1}. \quad (15.7)$$

Mit dieser Schreibweise wird aus (15.4):

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = \frac{s^2}{A}. \quad (15.8)$$

Gibt es bei festen Werten von A und s mehrere Lösungen von (15.8)?

Für das rechtwinklige Dreieck (3, 4, 5):

$$\frac{s^2}{A} = \frac{(\frac{1}{2}(3 + 4 + 5))^2}{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4} = \frac{6^2}{6} = 6. \quad (15.9)$$

Gibt es eine weitere Lösung (15.8) mit $s^2/A = 6$, so kann sie wie folgt geschrieben werden:

$$x + y + \frac{x + y}{xy - 1} = 6 \quad (15.10a)$$

$$x^2y + xy^2 - 6xy + 6 = 0. \quad (15.10b)$$

Dies ist eine Gleichung für eine *elliptische Kurve*.

15.2 Lösen der Gleichung für die elliptische Kurve

Ein Teil des Graphen von (15.10b) ist in Abb. 15.3 dargestellt. Jeder Punkt auf der geschlossenen Kurve im ersten Quadranten ist eine Lösung der Gleichung, da die Längen der Seiten des Dreiecks positiv sein müssen. A , B , D entsprechen dem Dreieck $(3, 4, 5)$ wie unten gezeigt. Um weitere rationale Lösungen zu finden, wird die Methode der zwei Sekanten verwendet.

Konstruiere eine Sekante durch die Punkte $A = (2, 3)$, $B = (1, 2)$. Sie schneidet die Kurve bei $C = (-1,5, -0,5)$, was aber keine Lösung ergibt, da die Werte negativ sind. Konstruieren Sie eine zweite Sekante von C nach $D = (3, 2)$. Der Schnittpunkt mit der Kurve bei $E \approx (1,5, 1,2)$ ergibt eine neue Lösung, deren Koordinaten im Folgenden berechnet werden.

Die Gleichung der (roten) Gerade durch A , B ist $y = x + 1$. Aus (15.10b):

$$\begin{aligned}x^2(x+1) + x(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6 &= 0 \\2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 &= 0.\end{aligned}$$

Aus A , B kennen wir zwei Wurzeln $x = 2$, $x = 1$, sodass wir das kubische Polynom faktorisieren können:

$$(x-2)(x-1)(ax+b) = 0,$$

wobei die dritte Wurzel unbekannt ist. Wir multiplizieren die Faktoren und schlussfolgern, dass $a = 2$, $b = 3$, da $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = ax^3 + \dots + 2b$. Der dritte

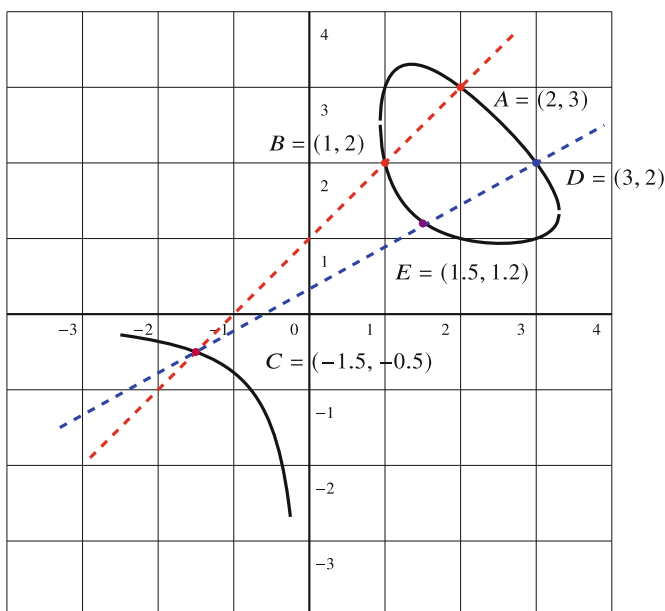


Abb. 15.3 Die Methode der zwei Sekanten

Faktor ist $2x + 3$, was die dritte Wurzel $x = -\frac{3}{2}$ und $y = x + 1 = -\frac{1}{2}$ ergibt. Dies ist der Punkt $C = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ im Diagramm.

Die Gleichung der (blauen) Gerade durch C, D lautet:

$$y = \frac{5}{9}x + \frac{1}{3}. \quad (15.11)$$

Wir ersetzen y in (15.10b):

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + x \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right)^2 - 6x \left(\frac{5}{9}x + \frac{1}{3} \right) + 6 &= 0 \\ \frac{70}{81}x^3 - \frac{71}{27}x^2 - \frac{17}{9}x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Aus C, D kennen wir zwei Wurzeln $x = 3, x = -\frac{3}{2}$, sodass wir das kubische Polynom faktorisieren können:

$$(x - 3) \left(x + \frac{3}{2} \right) (ax + b) = 0.$$

Die Gleichsetzung der Koeffizienten des kubischen Terms und der konstanten Terme ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{70}{81}x - \frac{4}{3} &= 0 \\ x &= \frac{54}{35} \approx 1,543, \end{aligned}$$

und y kann aus (15.11) berechnet werden:

$$y = \frac{25}{21} \approx 1,190.$$

Die Koordinaten von E sind:

$$\left(\frac{54}{35}, \frac{25}{21} \right) = (1,543, 1,190),$$

die nahe an den aus dem Graphen gewonnenen Näherungen $(1,5, 1,2)$ liegen.

Wir berechnen schließlich z aus (15.7):

$$z = \frac{x + y}{xy - 1} = \left(\frac{54}{35} + \frac{25}{21} \right) / \left(\frac{54}{35} \frac{25}{21} - 1 \right) = \frac{2009}{615} = \frac{49}{15}.$$

15.3 Herleitung eines Dreiecks aus der elliptischen Kurve

Mit Gl. (15.2), (15.6) können die Seiten a, b, c des Dreiecks $\triangle ABC$ aus x, y, z und $r = A/s = 6/6 = 1$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} a &= w + v = r(z + y) = (z + y) \\ b &= u + w = r(x + z) = (x + z) \\ c &= u + v = r(x + y) = (x + y). \end{aligned}$$

Für die Lösung A der elliptischen Kurve sind die Seiten des Dreiecks:

$$\begin{aligned} a &= z + y = 1 + 3 = 4 \\ b &= x + z = 2 + 1 = 3 \\ c &= x + y = 2 + 3 = 5. \end{aligned}$$

Für die Lösung E der elliptischen Kurve sind die Seiten des Dreiecks:

$$\begin{aligned} a &= z + y = \frac{49}{15} + \frac{25}{21} = \frac{156}{35} \\ b &= x + z = \frac{54}{35} + \frac{49}{15} = \frac{101}{21} \\ c &= x + y = \frac{54}{35} + \frac{25}{21} = \frac{41}{15}. \end{aligned}$$

Wir wollen dieses Ergebnis überprüfen. Der Halbumfang ist:

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{156}{35} + \frac{101}{21} + \frac{41}{15} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{468 + 505 + 287}{105} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1260}{105} \right) = 6,$$

und der Flächeninhalt kann mithilfe der Heron-Formel berechnet werden (Satz A.3):

$$A = \sqrt{6 \left(6 - \frac{156}{35} \right) \left(6 - \frac{101}{21} \right) \left(6 - \frac{41}{15} \right)} = \sqrt{36} = 6.$$

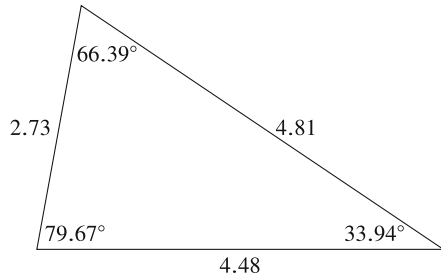
Ist $\left(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15} \right) \cong (3, 4, 5)$? Um die Berechnung zu vereinfachen, verwenden wir die dezimalen Näherungswerte (4,48, 4,81, 2,73). Dann:

$$\sqrt{4,48^2 + 2,73^2} = 5,25 \neq 4,81,$$

Dies ist also kein rechtwinkliges Dreieck und nicht kongruent zu (3, 4, 5).

Mithilfe des Kosinussatzes lassen sich die Winkel des Dreiecks berechnen, wie in Abb. 15.4 dargestellt.

Abb. 15.4 Das Dreieck mit demselben Umfang und derselben Fläche wie (3, 4, 5)



Was ist die Überraschung?

Sind Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt und Umfang kongruent? Mein erster Eindruck war, „Ja“ zu sagen, denn es ist nicht leicht, Gegenbeispiele zu finden. Überraschend ist, dass es zu einem beliebigen Dreieck mit rationalen Seiten möglich ist, ein nichtkongruentes Dreieck mit rationalen Seiten zu konstruieren, das denselben Flächeninhalt und Umfang hat, obwohl das Ergebnis seltsam sein kann, wie bei den Dreiecken (3, 4, 5) und $(\frac{156}{35}, \frac{101}{21}, \frac{41}{15})$.

Quellen

Dieses Kapitel stützt sich auf [33]. In [3] wird gezeigt, dass es zu einem gleichschenkligen Dreieck nichtkongruente Dreiecke mit demselben Flächeninhalt und Umfang gibt, aber der Beweis enthält keine explizite Konstruktion.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



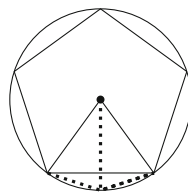
Kapitel 16

Konstruktion eines regelmäßigen Heptadekagons



Die einzigen regelmäßigen Polygone, die die Griechen mit Zirkel und Lineal konstruieren konnten, waren das Dreieck, das Quadrat, das Fünfeck und das regelmäßige Polygon mit 15 Seiten. Bei einem regelmäßigen Vieleck mit n Seiten kann ein Vieleck mit $2n$ Seiten konstruiert werden, indem das Vieleck mit einem Kreis umschrieben und der Zentriwinkel halbiert wird (Abb. 16.1). Weitere Fortschritte wurden erst 1796 erzielt, als Carl Friedrich Gauß eines Morgens, kurz vor seinem 19. Geburtstag, erwachte und durch „konzentriertes Denken“ herausfand, wie man ein regelmäßiges *Heptadekagon*, ein regelmäßiges Polygon mit 17 Seiten, konstruieren kann. Diese Leistung inspirierte ihn dazu, Mathematiker zu werden.

Abb. 16.1 Konstruktion eines regelmäßigen Polygons mit 10 Seiten aus einem regelmäßigen Fünfeck



In Abschn. 16.1 wird die Beziehung zwischen der Seite eines in einen Kreis eingeschriebenen Polygons und dem Zentriwinkel, den es einschließt, erörtert. Abschn. 16.2 gibt ohne Beweis den Fundamentalsatz der Algebra an. Abschn. 16.3 stellt die *Einheitswurzeln* vor, die Wurzeln des Polynoms $x^n - 1$, die im Mittelpunkt des Gaußschen Beweises stehen. Die Abschn. 16.4 und 16.5 stellen den Beweis von Gauß vor, der auf Symmetrien der Wurzeln von Polynomen beruht. Gauß leitete eine Formel ab, die beweist, dass das Heptadekagon konstruierbar ist, aber eine geometrische Konstruktion wurde fast ein Jahrhundert lang nicht gegeben. Abschn. 16.6 enthält eine elegante Konstruktion von James J. Callagy. Abschn. 16.7 zeigt, wie Konstruktionen eines regelmäßigen Fünfecks sowohl aus der Geometrie als auch aus der Trigonometrie abgeleitet werden können.

Ein Teil des Materials ist einfacher, wenn es mit komplexen Zahlen dargestellt wird. Dieses Material ist in Kästen untergebracht, die übersprungen werden können.

16.1 Konstruktion von regelmäßigen Polygonen

Die Konstruktion des regelmäßigen Heptadekagons führte zum Satz von Gauß-Wantzel, der besagt, dass ein regelmäßiges Polygon mit n Seiten nur dann mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, wenn n das Produkt aus einer Potenz von 2 und null oder mehr *verschiedenen* Fermat-Zahlen $2^{2^k} + 1$, die Primzahlen sind, ist. Die bekannten Fermat-Primzahlen sind:

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65.537.$$

Ein regelmäßiges Polygon mit 257 Seiten wurde von Magnus Georg Paucker 1822 und von Friedrich Julius Richelot 1832 konstruiert. Im Jahr 1894 behauptete Johann Gustav Hermes, ein regelmäßiges Polygon mit 65.537 Seiten konstruiert zu haben.

Um ein regelmäßiges Polygon zu konstruieren, reicht es aus, eine Strecke der Länge $\cos \theta$ zu konstruieren, wobei θ der Zentriwinkel ist, der von einer Sehne eingeschlossen wird, die eine in einen Einheitskreis eingeschriebene Seite des Polygons ist. Konstruiere für die Strecke $\overline{OB} = \cos \theta$ eine Senkrechte bei B und bezeichne ihren Schnittpunkt mit dem Einheitskreis als C . Dann:

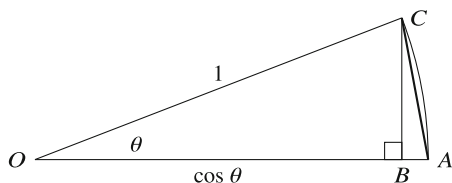
$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \overline{OB} \\ \theta &= \cos^{-1}(\overline{OB}). \end{aligned}$$

Die Sehne \overline{AC} ist eine Seite des regelmäßigen Vielecks (Abb. 16.2).

Ausgehend von einer Strecke der Länge 1 sind die Längen konstruierbar, die sich aus Strecken bekannter Länge mithilfe der Operationen $\{+, -, \times, /, \sqrt{\quad}\}$ gewinnen lassen (Abschn. 2.5). Gauß zeigte, dass $\cos(360^\circ/17)$, der Kosinus des Zentriwinkels eines Heptadekagons, konstruierbar ist, da er nur durch diese Operationen ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

Abb. 16.2 Kosinus des Zentriwinkels eines regelmäßigen Polygons



16.2 Der Fundamentalsatz der Algebra

Der folgende Satz wird ohne Beweis verwendet.

Satz 16.1 *Jedes Polynom vom Grad n hat genau n Wurzeln.*

Die Aussage des Satzes wurde vereinfacht, da wir nur wissen müssen, dass n Wurzeln existieren.

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jedes nichtkonstante Polynom vom Grad n in einer einzigen Variable mit *komplexen* Koeffizienten genau n *komplexe* Wurzeln hat. Wenn es mehrere Wurzeln mit demselben Wert gibt, werden sie alle gezählt: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x - 2)$ hat zwei Wurzeln, die beide gleich 2 sind. Das Polynom $x^2 + 1$ mit ganzzahligen Koeffizienten hat zwei komplexe Wurzeln $\pm\sqrt{-1}$. Obwohl es sich um endliche algebraische Gebilde handelt – Polynome vom Grad n mit n Wurzeln –, braucht man zum Beweis des Satzes Methoden der Analysis, meist der komplexen Analysis.

16.3 Die Einheitswurzeln

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 16.1) hat das Polynom $x^n - 1$ n Wurzeln für jede ganze Zahl $n > 1$. Eine Wurzel ist $x = 1$, also gibt es $n - 1$ weitere Wurzeln. Bezeichne eine dieser Wurzeln mit r . Da $r^n = 1$ ist, heißt sie *n -te Einheitswurzel*. Was ist mit r^2 ?

$$(r^2)^n = (r^n)^2 = 1^2 = 1.$$

Daraus folgt, dass die n Zahlen:

$$1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}$$

n -te Einheitswurzeln sind.

Sei $r = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Nach der Formel von de Moivre:

$$\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right]^n = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) = 1.$$

Satz 16.2 Sei n eine Primzahl und r eine n -te Einheitswurzel. Dann sind:

$$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-2}, r^{n-1}\}$$

verschieden, also stellen sie alle n -ten Einheitswurzeln dar.

Beweis Angenommen, die Potenzen sind nicht verschieden, sodass $r^i = r^j$ für gewisse $0 \leq i < j \leq n-1$. Dann ist $r^j/r^i = r^{j-i} = 1$, sodass es mindestens eine positive ganze Zahl i' kleiner als n gibt, für die $r^{i'} = 1$ gilt. Sei m die kleinste solche positive ganze Zahl. Mit dem Divisionsalgorithmus für ganze Zahlen gilt $n = ml + k$ für gewisse $0 < l < n$ und $0 \leq k < m$. Aus:

$$1 = r^n = r^{ml+k} = (r^m)^l \cdot r^k = 1^l \cdot r^k = r^k,$$

haben wir $0 \leq k < m$ und $r^k = 1$. Da m als die kleinste solche positive ganze Zahl definiert wurde, ist $k = 0$ und $n = ml$ nicht prim. \square

Satz 16.3 Seien $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ die Wurzeln eines Polynoms n -ten Grades $f(x)$. Dann:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1})(x - a_n). \quad (16.1)$$

Beweis Ist a_i eine Wurzel von $f(x)$, so ist per Definition $f(a_i) = 0$:

$$\begin{aligned} f(a_i) &= (a_i - a_1)(a_i - a_2) \cdots (a_i - a_{n-1})(a_i - a_n) \\ &= \cdots (a_i - a_i) \cdots = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $f(x) = (x - a_i)g_i(x)$ für ein gewisses $g_i(x)$, und durch Induktion gilt dies für alle Wurzeln. \square

Aus (16.1) ist leicht zu erkennen, dass der Koeffizient von x^{n-1} ist:

$$-(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n).$$

Da der Koeffizient von x^{n-1} in $x^n - 1$ für $n \geq 2$ null ist, haben wir:

$$\begin{aligned} -(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1}) &= 0 \\ r + r^2 + \cdots + r^{n-2} + r^{n-1} &= -1. \end{aligned}$$

Für das Heptadekagon ist dies:

$$\begin{aligned} r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + \\ r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} = -1. \end{aligned} \quad (16.2)$$

16.4 Gauß' Beweis der Konstruierbarkeit eines Heptadekagons

Gauß hatte verstanden, dass man nicht mit den Wurzeln in ihrer natürlichen Reihenfolge r, r^2, \dots, r^{16} arbeiten muss. Die Potenzen $3^0, 3^1, 3^2, \dots$ von r ergeben alle Wurzeln, aber in einer anderen Reihenfolge:

$$\begin{aligned} r^1, r^{1 \cdot 3=3}, r^{3 \cdot 3=9}, r^{9 \cdot 3=27=10}, r^{10 \cdot 3=30=13}, r^{13 \cdot 3=39=5}, r^{5 \cdot 3=15}, \\ r^{15 \cdot 3=45=11}, r^{11 \cdot 3=33=16}, r^{16 \cdot 3=48=14}, r^{14 \cdot 3=42=8}, r^{8 \cdot 3=24=7}, r^{7 \cdot 3=21=4}, \\ r^{4 \cdot 3=12}, r^{12 \cdot 3=36=2}, r^{2 \cdot 3=6}, \end{aligned}$$

wobei die Wurzeln modulo 17 reduziert wurden:

$$r^{17m+k} = (r^{17})^m \cdot r^k = 1^m \cdot r^k = r^k.$$

Wir vergewissern uns, dass die Liste alle Wurzeln (außer 1) genau einmal enthält:

$$r^1, r^3, r^9, r^{10}, r^{13}, r^5, r^{15}, r^{11}, r^{16}, r^{14}, r^8, r^7, r^4, r^{12}, r^2, r^6. \quad (16.3)$$

Gegeben sei ein monisches quadratisches Polynom, dessen Wurzeln a, b sind:

$$y^2 + py + q = (y - a)(y - b) = 0.$$

Dann können wir die Koeffizienten p, q aus den Wurzeln berechnen (Kap. 7):

$$p = -(a + b), \quad q = ab.$$

Daher können wir bei gegebenen $a + b$ und ab die quadratische Gleichung aufschreiben, deren Wurzeln a, b sind.

Sei a_0 die Summe der Wurzeln an den ungeraden Stellen in (16.3):

$$a_0 = r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2,$$

und sei a_1 die Summe der Wurzeln an den geraden Stellen in (16.3):

$$a_1 = r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6.$$

Um a_0, a_1 als Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu erhalten, berechnet man zunächst ihre Summe und verwendet (16.2):

$$a_0 + a_1 = r + r^2 + \dots + r^{16} = -1.$$

Jetzt müssen wir uns sehr anstrengen, um ihr Produkt zu berechnen. Abb. 16.3 zeigt die Berechnung, bei der die Werte von $r^i r^j = r^{i+j}$ nach Reduzierung der Exponenten modulo 17 geschrieben werden. Wir stellen fest, dass jede Wurzel genau

Abb. 16.3 Berechnung von a_0a_1 ; unter jeder Wurzel steht die Anzahl der bisherigen Vorkommen der Wurzel

$$\begin{aligned}
 a_0a_1 &= (r + r^9 + r^{13} + r^{15} + r^{16} + r^8 + r^4 + r^2) \times \\
 &\quad (r^3 + r^{10} + r^5 + r^{11} + r^{14} + r^7 + r^{12} + r^6) \\
 &= \underset{1}{r^4} + \underset{1}{r^{11}} + \underset{1}{r^6} + \underset{1}{r^{12}} + \underset{1}{r^{15}} + \underset{1}{r^8} + \underset{1}{r^{13}} + \underset{1}{r^7} + \\
 &\quad \underset{2}{r^{12}} + \underset{1}{r^2} + \underset{1}{r^{14}} + \underset{1}{r^3} + \underset{2}{r^6} + \underset{1}{r^{16}} + \underset{2}{r^4} + \underset{2}{r^{15}} + \\
 &\quad \underset{2}{r^{16}} + \underset{3}{r^6} + \underset{1}{r^1} + \underset{2}{r^7} + \underset{1}{r^{10}} + \underset{2}{r^3} + \underset{2}{r^8} + \underset{2}{r^2} + \\
 &\quad \underset{2}{r^1} + \underset{3}{r^8} + \underset{3}{r^3} + \underset{1}{r^9} + \underset{3}{r^{12}} + \underset{1}{r^5} + \underset{2}{r^{10}} + \underset{3}{r^4} + \\
 &\quad \underset{3}{r^2} + \underset{2}{r^9} + \underset{4}{r^4} + \underset{3}{r^{10}} + \underset{2}{r^{13}} + \underset{4}{r^6} + \underset{2}{r^{11}} + \underset{2}{r^5} + \\
 &\quad \underset{3}{r^{11}} + \underset{3}{r^1} + \underset{3}{r^{13}} + \underset{4}{r^2} + \underset{3}{r^5} + \underset{3}{r^{15}} + \underset{4}{r^3} + \underset{2}{r^{14}} + \\
 &\quad \underset{3}{r^7} + \underset{3}{r^{14}} + \underset{3}{r^9} + \underset{4}{r^{15}} + \underset{4}{r^1} + \underset{4}{r^{11}} + \underset{3}{r^{16}} + \underset{4}{r^{10}} + \\
 &\quad \underset{4}{r^5} + \underset{4}{r^{12}} + \underset{4}{r^7} + \underset{4}{r^{13}} + \underset{4}{r^{16}} + \underset{4}{r^9} + \underset{4}{r^{14}} + \underset{4}{r^8} \\
 &= -4.
 \end{aligned}$$

viermal vorkommt, sodass – wiederum unter Verwendung von (16.2) – der Wert des Produkts -4 ist.

Da $a_0 + a_1 = -1$ und $a_0a_1 = -4$, sind a_1, a_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $y^2 + y - 4 = 0$ und können mit der einfachen Formel für die Wurzeln einer quadratischen Gleichung berechnet werden:

$$a_{0,1} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Nun seien b_0, b_1, b_2, b_3 die Summen jeder vierten Wurzel, beginnend bei r^1, r^3, r^9 bzw. r^{10} :

$$\begin{aligned}
 b_0 &= r^1 + r^{13} + r^{16} + r^4 \\
 b_1 &= r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12} \\
 b_2 &= r^9 + r^{15} + r^8 + r^2 \\
 b_3 &= r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6.
 \end{aligned}$$

Wir rechnen nach, dass $b_0 + b_2 = a_0$, $b_1 + b_3 = a_1$ und berechnen die entsprechenden Produkte:

$$\begin{aligned}
 b_0b_2 &= (r + r^{13} + r^{16} + r^4) \times (r^9 + r^{15} + r^8 + r^2) \\
 &= (r^{10} + r^{16} + r^9 + r^3) + (r^5 + r^{11} + r^4 + r^{15}) + \\
 &\quad (r^8 + r^{14} + r^7 + r^1) + (r^{13} + r^2 + r^{12} + r^6) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 b_3 &= (r^3 + r^5 + r^{14} + r^{12}) \times (r^{10} + r^{11} + r^7 + r^6) \\
 &= (r^{13} + r^{14} + r^{10} + r^9) + (r^{15} + r^{16} + r^{12} + r^{11}) + \\
 &\quad (r^7 + r^8 + r^4 + r^3) + (r^5 + r^6 + r^2 + r^1) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich:

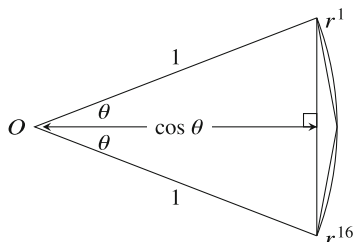
$$\begin{aligned}
 b_0 + b_2 &= a_0 \\
 b_0 b_2 &= -1 \\
 b_1 + b_3 &= a_1 \\
 b_1 b_3 &= -1,
 \end{aligned}$$

b_0, b_2 sind also die Lösungen von $y^2 - a_0 y - 1 = 0$, und b_1, b_3 sind die Lösungen von $y^2 - a_1 y - 1 = 0$. Mit den zuvor berechneten Werten für a_0, a_1 können wir die Wurzeln b_0, b_1 berechnen (Abb. 16.4). Schließlich seien c_0, c_4 die Summen jeder

Abb. 16.4 Berechnung von b_0 und b_1

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{a_0 + \sqrt{a_0^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{(-1 + \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
 &= \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \\
 b_1 &= \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4}}{2} \\
 &= \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{(-1 - \sqrt{17})^2 + 16}}{4} \\
 &= \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}.
 \end{aligned}$$

Abb. 16.5 Der Kosinus des Zentriwinkels, berechnet aus r_1, r_{16}



achten Wurzel, beginnend bei r^1 bzw. r^{13} :

$$\begin{aligned} c_0 &= r^1 + r^{16} \\ c_4 &= r^{13} + r^4 \\ c_0 + c_4 &= r^1 + r^{16} + r^{13} + r^4 = b_0 \\ c_0 c_4 &= (r^1 + r^{16}) \cdot (r^{13} + r^4) \\ &= r^{14} + r^5 + r^{12} + r^3 = b_1, \end{aligned}$$

c_0, c_4 sind also die Wurzeln von $y^2 - b_0 y + b_1 = 0$. Da $\cos(360^\circ/17) = c_0/2$ (Abb. 16.5) reicht es aus, die Wurzel $c_0 = r^1 + r^{16}$ (Abb. 16.6) zu berechnen.

Der Kosinus des Zentriwinkels eines Heptadekagons ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar, da er nur aus rationalen Zahlen und den Operationen $\{+, -, \times, /, \sqrt{\}$ zusammengesetzt ist:

$$\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) = \frac{c_0}{2} \quad (16.4)$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \quad (16.5)$$

$$\frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \quad (16.6)$$

$$\begin{aligned} r_1 + r_{16} &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2 \cdot 16\pi}{17}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{17}\right) + \cos\left(\frac{-2\pi}{17}\right) + i \sin\left(\frac{-2\pi}{17}\right) \\ &= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{17}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4b_1}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} + \\
&\quad \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 - 4 \left(\frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{\left(\frac{(-1 + \sqrt{17}) + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}\right)^2 - 16 \left(\frac{(-1 - \sqrt{17}) + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4}\right)} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{\frac{(-1 + \sqrt{17})^2 + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + (34 - 2\sqrt{17}) -}{\left((-16 - 16\sqrt{17}) + 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}\right)}} \\
&= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \\
&\quad \frac{1}{8} \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}
\end{aligned}$$

Abb. 16.6 Berechnung von c_0

16.5 Herleitung der Gauß-Formel

Die obige Formel für $\cos(360^\circ/17)$ ist nicht die von Gauß angegebene. Hier ist eine Herleitung der Gauß-Formel:

Vereinfachen wir $2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$:

$$\begin{aligned}
2(-1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= -2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad + 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&\quad - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\
&= 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.
\end{aligned}$$

Wir merken uns den Term $-4\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ und vereinfachen den ersten Term, indem wir ihn quadrieren und dann die Quadratwurzel ziehen:

$$\begin{aligned} 2(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} &= 2\sqrt{\left[(1 + \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right]^2} \\ &= 2\sqrt{(18 + 2\sqrt{17})(34 - 2\sqrt{17})} \\ &= 2\sqrt{(18 \cdot 34 - 4 \cdot 17) + \sqrt{17}(2 \cdot 34 - 2 \cdot 18)} \\ &= 2 \cdot 4\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Terme ergibt die Gauß-Formel:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{360^\circ}{17}\right) \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{16}\sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 8\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 4\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &\quad + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}. \end{aligned}$$

16.6 Konstruktion eines Heptadekagons

Konstruiere einen Einheitskreis mit Mittelpunkt O und zueinander senkrechten Durchmessern \overline{QP} und \overline{SR} (Abb. 16.7). Konstruiere A so, dass $\overline{OA} = (1/4)\overline{OR}$. Mit dem Satz des Pythagoras:

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{(1/4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}/4.$$

Sei B der Schnittpunkt der inneren Winkelhalbierenden von $\angle OAP$ und der Strecke \overline{OP} , und sei C der Schnittpunkt der äußeren Winkelhalbierenden von $\angle OAP$ und

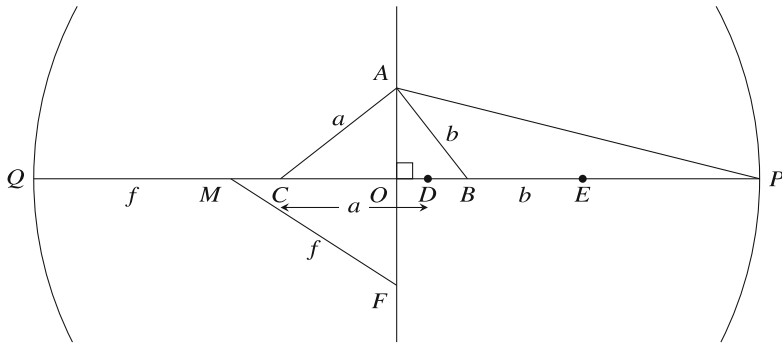


Abb. 16.8 Konstruktion eines Heptadekagons (2)

Konstruiere D auf \overline{OP} so, dass $\overline{CD} = \overline{CA} = a$ (Abb. 16.8). Mit dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} \overline{CD} = \overline{CA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 + 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Konstruiere E auf \overline{OP} so, dass $\overline{BE} = \overline{BA} = b$; wiederum mit dem Satz des Pythagoras ist:

$$\begin{aligned} \overline{BE} = \overline{BA} &= \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{16}\right)^2} = \frac{1}{16} \sqrt{16 + 1 + 17 - 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}. \end{aligned}$$

Konstruiere M als Mittelpunkt von \overline{QD} und konstruiere F auf \overline{OS} so, dass $\overline{MF} = \overline{MQ} = f$:

$$\begin{aligned} \overline{MF} = \overline{MQ} &= \frac{1}{2} \overline{QD} = \frac{1}{2} (\overline{QC} + \overline{CD}) = \frac{1}{2} ((1 - \overline{OC}) + \overline{CD}) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{16}\right) + \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{16} \right] \\ &= \frac{1}{32} \left(15 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \right). \end{aligned}$$

Beachte, dass $\overline{MO} = 1 - \overline{MQ} = 1 - \overline{MF}$.

Berechne \overline{OE} :

$$\begin{aligned}\overline{OE} &= \overline{OB} + \overline{BE} = \frac{-1 + \sqrt{17}}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \right).\end{aligned}$$

Schließlich ist $\overline{OH} = \overline{OE} + \overline{EH}$ – die Gauß-Formel für $\cos(360^\circ/17)$.

16.7 Konstruktion eines regelmäßigen Pentagons

Die komplexen fünften Einheitswurzeln sind:

$$1 + i \cdot 0, \quad \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \frac{-\sqrt{5} - 1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

16.7.1 Trigonometrie

Der Zentriwinkel eines regelmäßigen Fünfecks ist $360^\circ/5 = 72^\circ$. Berechnen wir $\cos 36^\circ$ mithilfe der trigonometrischen Identitäten für 2θ und $\theta/2$ (Satz A.4, A.7):

$$\begin{aligned}0 &= \cos 90^\circ = \cos(72^\circ + 18^\circ) = \cos 2 \cdot 36^\circ \cos 36^\circ/2 - \sin 2 \cdot 36^\circ \sin 36^\circ/2 \\ &= (2 \cos^2 36^\circ - 1) \sqrt{\frac{1 + \cos 36^\circ}{2}} - 2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ \sqrt{\frac{1 - \cos 36^\circ}{2}}.\end{aligned}$$

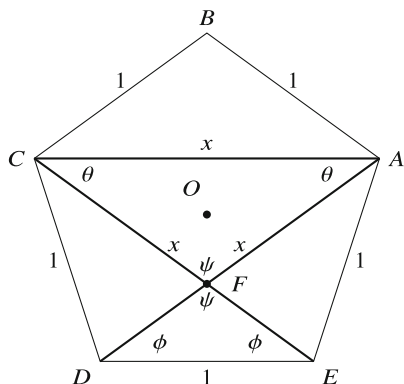
Es gibt jetzt nur noch einen Winkel in der Formel; es sei $x = \cos 36^\circ$. Dann:

$$\begin{aligned}(2x^2 - 1) \sqrt{\frac{1+x}{2}} &= 2\sqrt{1-x^2} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{2}} \\ (2x^2 - 1) \sqrt{1+x} &= 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot x \cdot \sqrt{1-x} \\ 2x^2 - 1 &= 2x(1-x) \\ 4x^2 - 2x - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt einen konstruierbaren Wert:

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Abb. 16.10 Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks (1)



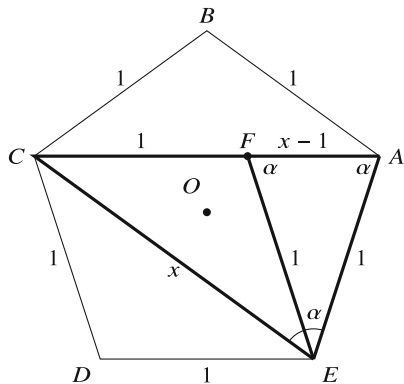
16.7.2 Geometrie

Sei \overline{ABCDE} ein regelmäßiges Fünfeck (Abb. 16.10). Per Definition sind alle Seiten und alle Innenwinkel gleich. Durch kongruente Dreiecke lässt sich leicht zeigen, dass alle Diagonalen gleich sind. Die Länge der Seiten sei 1 und die Länge der Diagonalen sei x .

$\triangle ACE \cong \triangle CAD$ (Seite-Seite-Seite), folglich $\angle ACE = \angle CAD = \theta$. $\triangle AED \cong \triangle CDE$ (Seite-Seite-Seite), also $\angle ADE = \angle CED = \phi$. $\angle AFC = \angle EFD = \psi$ sind Scheitelwinkel. In beiden Dreiecken ist die Summe der Winkel 180° , sodass $\psi + 2\theta = \psi + 2\phi$ und $\theta = \phi$. Aufgrund der gleichgroßen Wechselwinkel schließen wir, dass $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ ist.

Konstruiere eine Gerade durch E parallel zu \overline{DC} , ihr Schnittpunkt mit \overline{AC} sei F (Abb. 16.11). $CDEF$ ist ein Rhombus, also $\overline{EF} = \overline{CD} = \overline{AE} = 1$. $\triangle ACE$ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Basiswinkel α . $\triangle AEF$ ist ebenfalls gleichschenklilig und $\angle AFE = \angle FAE = \alpha$, also $\triangle ACE \sim \triangle AEF$. Wenn man das Verhältnis der

Abb. 16.11 Konstruktion eines regelmäßigen Fünfecks (2)



Seiten nimmt, erhält man:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}.$$

Das Ergebnis ist eine quadratische Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ deren positive Wurzel konstruierbar ist:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Was ist die Überraschung?

Es ist erstaunlich, dass von der Arbeit der Griechen an der Konstruktion bis zur Entdeckung der Konstruierbarkeit des regelmäßigen Heptadekagons durch Gauß zwei Jahrtausende vergangen sind. Erstaunlich ist auch, dass das Problem nicht mithilfe der Geometrie, sondern durch die Erfindung neuer algebraischer Methoden gelöst wurde, die einen weitreichenden Einfluss auf die Mathematik hatten.

Quellen

Dieses Kapitel basiert auf [6]. Das Originalwerk von Gauß ist in einer englischen Übersetzung [18] verfügbar. Die Gl. (16.5)–(16.6) erscheint in [41]; der Autor gibt eine Übung, um sie in die Gauß-Formel umzuwandeln, wie sie in [18, S. 458] und [6, S. 68] erscheint.

Die Konstruktion des Heptadekagons ist aus [10] entnommen, während andere Konstruktionen in [55] zu finden sind. Die trigonometrische Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks stammt aus [59]. Die geometrische Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks wurde durch Lösen der Aufgaben 2.3.3 und 2.3.4 in [47] gewonnen.

Open Access Dieses Kapitel wird unter der Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.de>) veröffentlicht, welche die Nutzung, Vervielfältigung, Bearbeitung, Verbreitung und Wiedergabe in jeglichem Medium und Format erlaubt, sofern Sie den/die ursprünglichen Autor(en) und die Quelle ordnungsgemäß nennen, einen Link zur Creative Commons Lizenz beifügen und angeben, ob Änderungen vorgenommen wurden. Die in diesem Kapitel enthaltenen Bilder und sonstiges Drittmaterial unterliegen ebenfalls der genannten Creative Commons Lizenz, sofern sich aus der Abbildungslegende nichts anderes ergibt. Sofern das betreffende Material nicht unter der genannten Creative Commons Lizenz steht und die betreffende Handlung nicht nach gesetzlichen Vorschriften erlaubt ist, ist für die oben aufgeführten Weiterverwendungen des Materials die Einwilligung des jeweiligen Rechteinhabers einzuholen.



Anhang: Sätze der Geometrie und der Trigonometrie

In diesem Anhang werden Sätze der Geometrie und Trigonometrie vorgestellt, die dem Leser möglicherweise nicht vertraut sind, sowie Sätze, die zwar bekannt sind, deren Beweise jedoch nicht. Abschn. A.1 stellt drei Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks vor. Abschn. A.2 beweist trigonometrische Identitäten. Obwohl die Formeln und Identitäten meist bekannt sind, lernen die Schüler diese Identitäten häufig auswendig oder schlagen sie nach, ohne jemals einen Beweis zu sehen. Die folgenden Abschnitte enthalten Beweise für fortgeschrittene Sätze in der Geometrie: Abschn. A.3 – die Winkelhalbierungssätze; Abschn. A.4 – Ptolemäus’ Satz, der die Seiten und Diagonalen in einem Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird, in Beziehung setzt; Abschn. A.5 – Cevas Lehrsatz über die drei Strecken eines Dreiecks und Abschn. A.6 – Menelaos’ Lehrsatz über die Segmente einer Transversale in einem Dreieck.

A.1 Sätze über den Flächeninhalt eines Dreiecks

Die Standardformel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus der Basis und der Höhe ist bekannt. Sie kann mit verschiedenen geometrischen Methoden bewiesen werden.

Satz A.1 *Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ ist gegeben durch:*

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bh, \quad (\text{A.1})$$

wobei b , die Basis, eine der Seiten des Dreiecks ist, und h , die Höhe, die Länge der Höhe zu b vom gegenüberliegenden Eckpunkt (Abb. A.1a).

Beweis Abb. A.1b zeigt, dass man die schraffierten Dreiecke so verschieben kann, dass sie ein Rechteck mit der gleichen Fläche wie das Dreieck bilden, wenn man

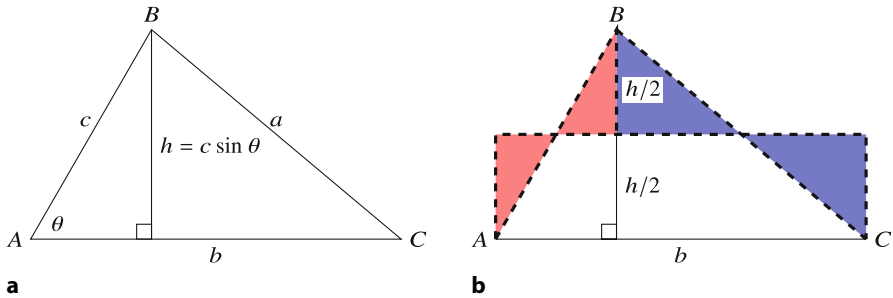


Abb. A.1 **a** Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus der Basis und der Höhe. **b** Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks aus der Basis und der Höhe

das Dreieck in der Hälfte der Höhe „schneidet“. Die Basis des Rechtecks ist b und seine Höhe ist $h/2$. \square

Satz A.2 Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ ist gegeben durch:

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin \theta. \quad (\text{A.2})$$

Beweis Aus Satz A.1 unter Verwendung von $h = c \sin \theta$. \square

Satz A.3 (Heron) Der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$ ist gegeben durch:

$$\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ der Halbumfang des Dreiecks ist.

Beweis Der Radius eines Kreises und eine Tangente, die den Radius schneidet, stehen senkrecht zueinander. Außerdem sind die Längen der Strecken zweier Tangenten vom gleichen Punkt zum Kreis gleich, daher (Abb. A.2):¹

$$\triangle AOB' \cong \triangle AOC', \quad \triangle BOA' \cong \triangle BOC', \quad \triangle COA' \cong \triangle COB'.$$

Die Fläche $\triangle ABC$ ist die Summe der sechs oben aufgeführten Dreiecke. Da die Höhe der sechs Dreiecke jeweils r , dem Radius des Inkreises, entspricht, erhalten

¹ Dies zeigt, dass der Mittelpunkt des Dreiecks, der Mittelpunkt des Inkreises, der gemeinsame Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden ist.

wir:

$$\triangle ABC = \triangle AOB' + \triangle AOC' + \triangle BOA' + \triangle BOC' + \triangle COA' + \triangle COB' \quad (\text{A.3a})$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(u + u + v + v + w + w) \quad (\text{A.3b})$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}r(a + b + c) \quad (\text{A.3c})$$

$$\triangle ABC = rs. \quad (\text{A.3d})$$

Definieren wir nun die Seiten in Bezug auf die Tangenten der Zentriwinkel:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{u}{r}, \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{v}{r}, \quad \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{w}{r}.$$

Aus diesen Definitionen und $s = \frac{1}{2}(2u + 2u + 2w)$ erhalten wir:

$$s = u + v + w = r \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right).$$

Wegen $\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 360^\circ$ und somit $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$ folgt mit Satz [A.11](#):

$$\begin{aligned} s &= r \left(\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= r \left(\frac{u}{r} \frac{v}{r} \frac{w}{r} \right) = \frac{1}{r^2} (u v w) \\ r &= \sqrt{\frac{u v w}{s}}. \end{aligned}$$

Mit [\(A.3d\)](#):

$$\triangle ABC = rs = s \sqrt{\frac{u v w}{s}} = \sqrt{s u v w}.$$

Die Formel von Heron ergibt sich aus $u = s - a, v = s - b, w = s - c$. \square

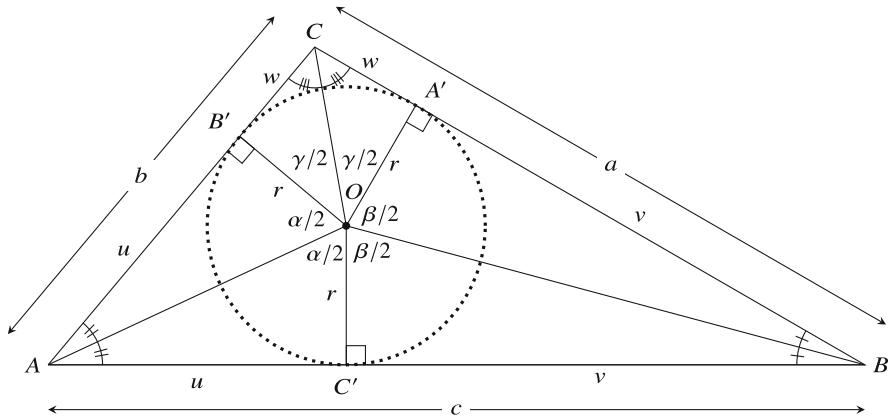


Abb. A.2 Dreieck mit Inkreis

A.2 Trigonometrische Identitäten

A.2.1 Sinus und Kosinus der Summe und Differenz zweier Winkel

Satz A.4

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Wir werden die erste Formel beweisen; die anderen Formeln können mithilfe der Werte von Sinus und Kosinus für $-\alpha$ und $90^\circ - \alpha$ erhalten werden.

Ausgehend von einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit spitzem Winkel α und einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ACD$ mit spitzem Winkel β können wir sie zu geometrischen Figuren mit einem Winkel $\alpha + \beta$ verbinden (Abb. A.3). Das linke Diagramm wird am häufigsten in den Beweisen der Identitäten verwendet. Hier geben wir zwei Beweise, die auf dem mittleren und dem rechten Diagramm basieren.

Beweis (1) Berechnen wir den Flächeninhalt von $\triangle ABD$ auf zwei verschiedene Arten: (1) mithilfe von (A.2) für $\triangle ABD$, und (2) mithilfe der Gleichung getrennt für $\triangle ABC$ und $\triangle ADC$ (Abb. A.4). Auch h wird zweimal mithilfe der Definition

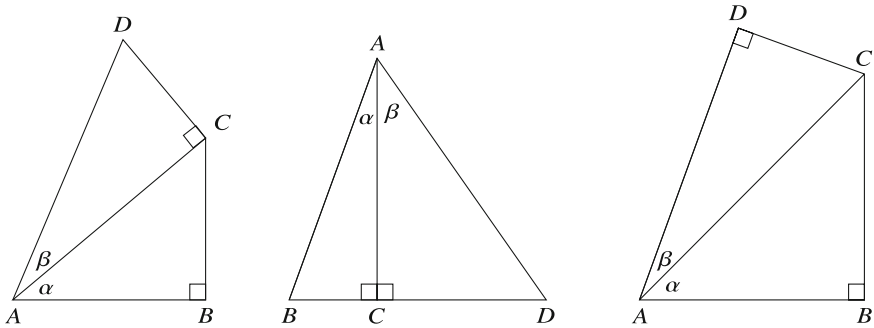
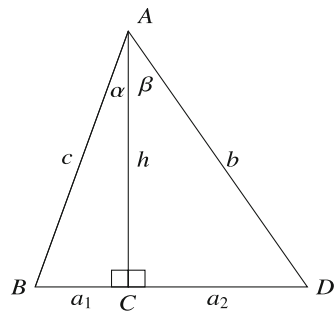


Abb. A.3 Diagramme zum Nachweis der Identität für den Sinus von Winkelsummen

Abb. A.4 Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks auf zwei Arten



der trigonometrischen Funktionen berechnet:

$$\begin{aligned} \Delta ABD &= \frac{1}{2}bc \sin(\alpha + \beta) \\ \Delta ABD &= \Delta ABC + \Delta ADC \\ &= \frac{1}{2}ch \sin \alpha + \frac{1}{2}bh \sin \beta \\ &= \frac{1}{2}c(b \cos \beta) \sin \alpha + \frac{1}{2}b(c \cos \alpha) \sin \beta . \end{aligned}$$

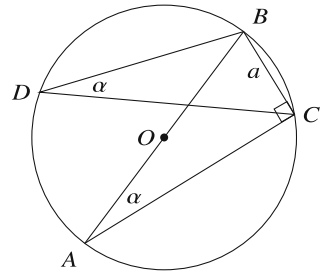
Wenn man die beiden Formeln für ΔABD gleichsetzt und $\frac{1}{2}bc$ herauskürzt, erhält man:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta . \quad \square$$

Der zweite Beweis beruht auf folgendem Satz:

Satz A.5 *In einem Kreis mit einem Durchmesser von 1 ist die Länge einer Sehne, die einem eingeschriebenen Winkel gegenüberliegt, gleich dem Sinus des Winkels (Abb. A.5).*

Abb. A.5 Alle einer Sehne gegenüberliegenden Winkel sind gleich



Beweis Sei \overline{AB} ein Durchmesser, und sei $\angle BAC = \alpha$. Sei D ein beliebiger anderer Punkt auf dem Kreis, der ein Dreieck $\triangle BDC$ bildet, dessen eine Seite die Sehne \overline{BC} ist. Da gleiche Sehnen gleichen Inkreiswinkeln gegenüberliegen, ist $\angle BDC = \alpha$. Im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ gilt:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}. \quad \square$$

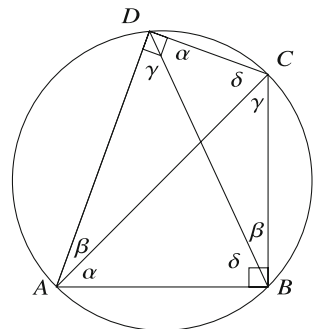
Beweis (2) Dieser Beweis basiert auf dem rechten Diagramm in Abb. A.3, das in Abb. A.6 wiedergegeben ist, wo das Viereck \overline{ABCD} in einen Kreis eingeschrieben wurde. Nach Satz A.15 kann ein Viereck dann und nur dann von einem Kreis (dem Umkreis) umschrieben werden, wenn die Summe jedes Paares gegenüberliegender Winkel 180° ist. $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$, da beide Winkel rechtwinklig sind. Aus Satz 5.4 ist die Summe der Innenwinkel eines Vierecks 360° , also $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$. Der Durchmesser des Kreises sei 1 (ansonsten alles mit der Länge des Durchmessers multiplizieren). Dann sind die Seiten des Vierecks:

$$\overline{BC} = \sin \alpha, \quad \overline{CD} = \sin \beta, \quad \overline{AB} = \sin \gamma, \quad \overline{DA} = \sin \delta,$$

und seine Diagonalen sind:

$$\overline{BD} = \sin(\alpha + \beta), \quad \overline{CA} = \sin(\alpha + \gamma).$$

Abb. A.6 Ein Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird



Nach dem Satz des Ptolemäus (Satz A.18) ist das Produkt der Diagonalen eines Vierecks, das von einem Kreis umschrieben wird, gleich der Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks. Da $\angle ADC$ und $\angle ABC$ rechte Winkel sind, haben wir:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \gamma) &= \sin \alpha \sin \delta + \sin \beta \sin \gamma \\ \sin(\alpha + \beta) \sin(90^\circ) &= \sin \alpha \sin(90^\circ - \beta) + \sin \beta \sin(90^\circ - \alpha) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad \square\end{aligned}$$

A.2.2 Der Kosinus eines Dreifachwinkels

Satz A.6

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Beweis Der Beweis verwendet die Formeln in Satz A.4 und die Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cos \alpha - (2 \sin \alpha \cos \alpha) \sin \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos^3 \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \quad \square\end{aligned}$$

A.2.3 Sinus und Kosinus eines Halbwinkels

Satz A.7 Wenn α ein Winkel in einem Dreieck ist, dann:²

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.\end{aligned}$$

² Die allgemeine Formel ist komplexer, weil die Quadratwurzeln entweder positiv oder negativ sein können, je nachdem, in welchem Quadranten $\alpha/2$ liegt. Für ein Dreieck gilt $0 < \alpha < 180^\circ$, also liegt $0 < \alpha/2 < 90^\circ$ im ersten Quadranten, und sowohl der Sinus als auch der Kosinus sind positiv.

Beweis Der Beweis verwendet die Formeln aus Satz A.4 und die Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \frac{1 + \cos \alpha}{2} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad \square\end{aligned}$$

A.2.4 Der Kosinussatz

Satz A.8 (Kosinussatz) In einem Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c (Abb. A.7): gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB.$$

Beweis (I) Ziehe eine Höhe von C nach \overline{AB} und verwende die Definition des Kosinus und den Satz des Pythagoras:

$$c = x + (c - x) = a \cos \beta + b \cos \alpha \quad (\text{A.4a})$$

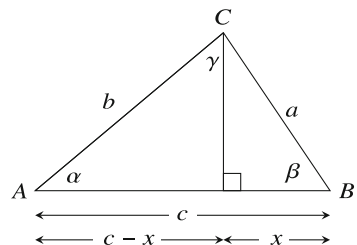
$$c^2 = ac \cos \beta + bc \cos \alpha. \quad (\text{A.4b})$$

In ähnlicher Weise fallen die Höhen von A auf \overline{BC} und von B auf \overline{AC} , und man erhält:

$$a^2 = ca \cos \beta + ba \cos \gamma \quad (\text{A.5a})$$

$$b^2 = cb \cos \alpha + ab \cos \gamma. \quad (\text{A.5b})$$

Abb. A.7 Beweis 1 für den Kosinussatz



Die Addition von Gl. (A.5a) und (A.5b) und die Subtraktion von (A.4b) ergibt:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 - c^2 &= ca \cos \beta + ba \cos \gamma \\
 &\quad + cb \cos \alpha + ab \cos \gamma \\
 &\quad - ac \cos \beta - bc \cos \alpha \\
 &= 2ab \cos \gamma \\
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma . \quad \square
 \end{aligned}$$

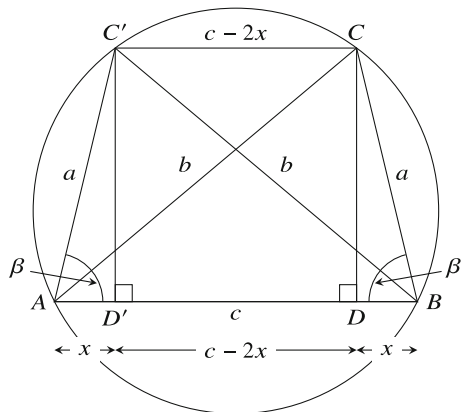
Beweis (2) Der zweite Beweis verwendet den Satz des Ptolemäus (Satz A.18).³

Das Dreieck $\triangle ABC$ kann von einem Kreis umschrieben werden. Konstruiere ein weiteres Dreieck $\triangle ABC'$, das kongruent zu $\triangle ABC$ ist und in denselben Kreis eingeschrieben ist (Abb. A.8). Dazu konstruiert man einen Winkel von \overline{AB} gleich $\angle CAB$, der den Kreis in C' schneidet, und konstruiert dann die Gerade $C'A$. Da Winkel, die durch dieselbe Sehne aufgespannt werden, gleich sind, gilt $\angle AC'B = \angle BCA$ sowie auch $\angle CBA = \angle C'AB$ und damit $\triangle ABC' \cong \triangle BAC$ (Winkel-Seiten-Winkel) mit der gemeinsamen Seite \overline{AB} .

Fälle die Lote von C nach D und von C' nach D' auf \overline{AB} , sodass $x = a \cos \beta$. Nach dem Satz des Ptolemäus gilt für das Viereck $\overline{ABCC'}$:

$$\begin{aligned}
 b^2 &= a^2 + c(c - 2x) \\
 &= a^2 + c(c - 2a \cos \beta) \\
 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta . \quad \square
 \end{aligned}$$

Abb. A.8 Beweis 2 für den Kosinussatz



³ Abschn. A.4 verwendet den Kosinussatz zum Beweis des Satzes des Ptolemäus! Der erste Beweis des Kosinussatzes vermeidet diesen Zirkelschluss. Außerdem gibt es Beweise für den Satz des Ptolemäus, die den Kosinussatz nicht verwenden.

A.2.5 Der Tangens der Summe von zwei Winkeln

Satz A.9

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

Beweis

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha \tan \beta}{\cos \alpha - \sin \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}. \quad \square \end{aligned}$$

A.2.6 Der Tangens eines Halbwinkels

Satz A.10

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}.$$

Beweis Wir leiten eine quadratische Gleichung in $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ her und lösen sie:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \tan \alpha \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan \alpha &= 0 \\ \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}. \quad \square \end{aligned}$$

A.2.7 Das Produkt aus drei Tangens

Satz A.11 Wenn $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ dann:

$$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma.$$

Beweis

$$\begin{aligned} \tan \gamma &= \tan(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= -\tan(\alpha + \beta) \\ &= -\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma &= \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma . \quad \square \end{aligned}$$

A.2.8 Der Grenzwert von $\sin \alpha / \alpha$

Satz A.12

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

Beweis Betrachtet man regelmäßige Polygone, die in einen Kreis eingeschrieben sind (Abb. A.9), so stellt man fest, dass der Umfang eines Polygons umso näher am Kreisumfang liegt, je mehr Seiten es hat. Der Umfang des Kreises geteilt durch die Anzahl der Seiten ist die Länge eines Bogens mit denselben Endpunkten wie die entsprechende Seite, da in einem regelmäßigen Polygon alle Seiten gleich lang sind. Da sich das Verhältnis zwischen dem Kreisumfang und dem Umfang eines eingeschriebenen Polygons mit zunehmender Seitenzahl 1 annähert, gilt dies auch für das Verhältnis zwischen der Länge eines Bogens und der entsprechenden Sehne. Dies wird an den folgenden Zahlenbeispielen deutlich:

Winkel	Bogenlänge	Länge der Sehne	Verhältnis
80	1,396	1,286	1,090
60	1,047	1,000	1,047
40	0,698	0,684	1,006
5	0,087	0,087	1,000

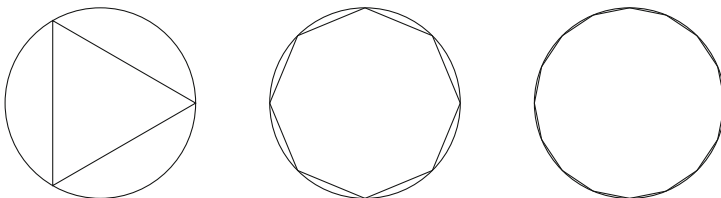


Abb. A.9 Regelmäßige Polygone mit 3, 8 und 16 Seiten, die in einen Kreis eingeschrieben sind

Abb. A.10 Die Länge einer Sehne, die mit einem Bogen der Größe α korrespondiert

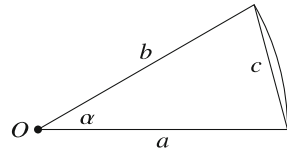
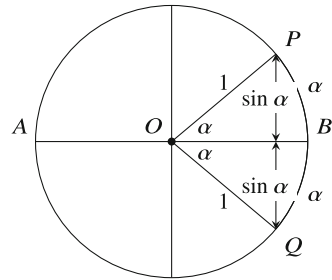


Abb. A.11 Verhältnis von $\sin x$ zu x



Da $a = b = 1$ ist, kann die Länge der Sehne c , die α gegenüberliegt, mit dem Kosinussatz (Abb. A.10) berechnet werden:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha \\ c &= \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} c &= \sqrt{2 - 2 \cdot 1} = 0. \end{aligned}$$

Mit Bezug auf Abb. A.11 gilt:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 \sin \alpha}{2\alpha}.$$

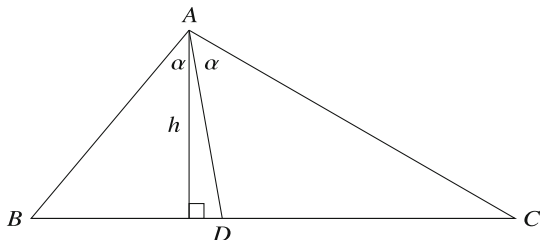
Dies ist das Verhältnis zwischen der Länge der Sehne \overline{PQ} und der Länge des Bogens \widehat{PQ} . Wir haben aber gesehen, dass dieses Verhältnis gegen 1 konvergiert, wenn der gegenüberliegende Winkel 2α gegen 0 tendiert, also:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1. \quad \square$$

A.3 Der Satz von der Winkelhalbierenden

Satz A.13 Im $\triangle ABC$ schneide die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ die Strecke \overline{BC} in D (Abb. A.12). Dann:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

Abb. A.12 Der Satz von der inneren Winkelhalbierenden

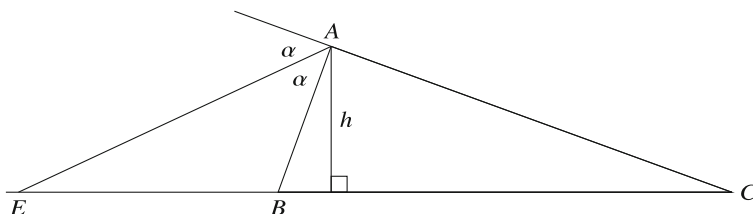
Beweis Wir beweisen den Satz, indem wir die Flächen zweier Dreiecke berechnen, wobei wir sowohl die Basis und die Höhe (A.1) als auch die Basis, den Winkel und die Seite (A.2) verwenden:

$$\begin{aligned} \triangle ABD &= \frac{1}{2} \overline{BD} h = \frac{1}{2} \overline{AB} \overline{AD} \sin \alpha \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\ \triangle ACD &= \frac{1}{2} \overline{CD} h = \frac{1}{2} \overline{AC} \overline{AD} \sin \alpha \\ \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha}{h} \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad \square \end{aligned}$$

Es gibt auch einen Winkelhalbierungssatz für die *äußere Winkelhalbierende*:

Satz A.14 Im $\triangle ABC$ sei \overline{AE} die Winkelhalbierende des Nebenwinkels von $\angle BAC$ (Abb. A.13), und die Winkelhalbierende schneide \overline{BC} in E (Abb. A.12). Dann:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

**Abb. A.13** Der Satz von der äußeren Winkelhalbierenden

Beweis Da \overline{AC} eine gerade Linie ist $\angle EAC = 180^\circ - \alpha$.

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \overline{BE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AB} \sin \alpha$$

$$\triangle ACE = \frac{1}{2} \overline{CE} h = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \overline{AE} \overline{AC} \sin \alpha$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE} \sin \alpha}{h} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \quad \square$$

A.4 Der Satz des Ptolemäus

A.4.1 Ein von einem Kreis umschriebenes Trapez

Vor dem Beweis des Satzes von Ptolemäus werden Sätze über Vierecke und Trapeze bewiesen.

Satz A.15 Ein Viereck kann nur dann von einem Kreis umschrieben werden, wenn die gegenüberliegenden Winkel ergänzend sind (Summe 180°).

In den Geometrie-Lehrbüchern findet man den einfachen Beweis für die Vorwärtsrichtung, aber es ist schwierig, einen Beweis für die Umkehrung zu finden, sodass hier beide Beweise gegeben werden.

Beweis (Vorwärtsrichtung) Ein eingeschriebener Winkel ist gleich der Hälfte des Bogens, der ihm gegenüberliegt, sodass $\angle DAB$ die Hälfte des Bogens \widehat{DCB} ist und $\angle DCB$ die Hälfte des Bogens \widehat{DAB} (Abb. A.14a). Die beiden Bögen bilden den gesamten Umfang des Kreises, sodass ihre Summe 360° beträgt. Daher ist $\angle DAB + \angle DCB = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$, und in ähnlicher Weise $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. \square

Beweis (Umgekehrte Richtung) Jedes Dreieck kann von einem Kreis umschrieben werden. Umschreibe das $\triangle DAB$ durch einen Kreis und nimm an, dass C' ein Punkt derart ist, dass $\angle DAB + \angle DC'B = 180^\circ$, aber C' nicht auf dem Kreisumfang liegt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei C' innerhalb des Kreises (Abb. A.14b).

Konstruiere einen Strahl, der $\overline{DC'}$ verlängert; C sei sein Schnittpunkt mit dem Kreis. $ABCD$ wird also von einem Kreis umschrieben:

$$\begin{aligned} \angle DAB + \angle DCB &= 180^\circ = \angle DAB + \angle DC'B \\ \angle DCB &= \angle DC'B, \end{aligned}$$

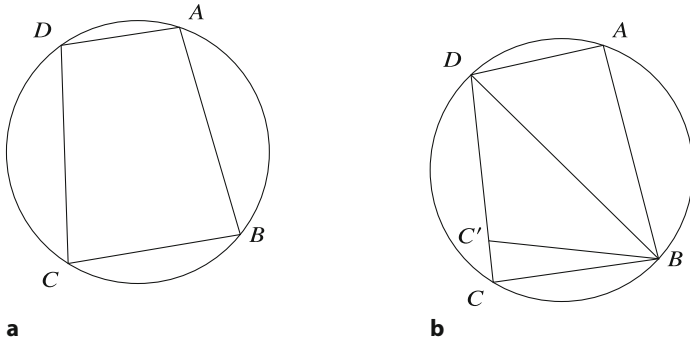


Abb. A.14 **a** Ein Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird. **b** Der vierte Eckpunkt muss auf dem Kreisumfang liegen

was nicht möglich ist, wenn C auf dem Kreis liegt und C' innerhalb des Kreises liegt. \square

Satz A.16 Die gegenüberliegenden Winkel eines gleichschenkligen Trapezes sind ergänzend.

Beweis Konstruiere die Gerade $\overline{AB'}$ parallel zu \overline{CD} (Abb. A.15). $\overline{AB'CD}$ ist ein Parallelogramm und $\triangle ABB'$ ist ein gleichschenkliges Dreieck, also $\angle C = \angle ABB' = \angle AB'B = \angle B$. Ähnlich verhält es sich mit $\angle A = \angle D$. Da die Summe der Innenwinkel eines beliebigen Vierecks gleich 360° ist:

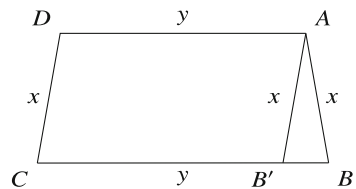
$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C + \angle D &= 360^\circ \\ 2\angle A + 2\angle C &= 360^\circ \\ \angle A + \angle C &= 180^\circ, \end{aligned}$$

und in ähnlicher Weise $\angle B + \angle D = 180^\circ$. \square

Satz A.17 Ein gleichschenkliges Trapez kann von einem Kreis umschrieben werden.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz A.15, A.16.

Abb. A.15 Ein gleichschenkliges Trapez



A.4.2 Beweis des Satzes von Ptolemäus

Satz A.18 (Ptolemäus) Bei einem Viereck, das von einem Kreis umschrieben wird, setzt die folgende Formel die Längen der Diagonalen und der Seiten in Beziehung (Abb. A.16).

$$ef = ac + bd .$$

Beweis Nach dem Kosinussatz gilt für die vier Dreiecke $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle DAB$, $\triangle DCB$:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle B$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \angle D$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \angle A$$

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle C .$$

$\angle C = 180^\circ - \angle A$ und $\angle D = 180^\circ - \angle B$, weil sie entgegengesetzte Winkel eines von einem Kreis umschriebenen Vierecks sind, also $\cos \angle D = -\cos \angle B$ und $\cos \angle C = -\cos \angle A$. Eliminiert man den Kosinusterm aus den obigen Gleichungen, erhält man:

$$e^2(cd + ab) = abc^2 + abd^2 + a^2cd + b^2cd$$

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)}$$

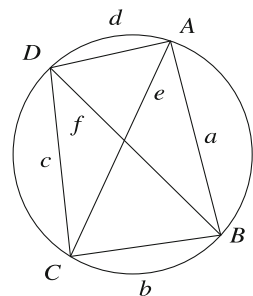
$$f^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{(ad + bc)} .$$

Multiplikation der beiden Gleichungen und Vereinfachung ergibt den Satz des Ptolemäus:

$$e^2 \cdot f^2 = (ac + bd)^2$$

$$ef = (ac + bd) . \quad \square$$

Abb. A.16 Satz des Ptolemäus



A.5 Satz von Ceva

Satz A.19 (Ceva) Bei Strecken von den Eckpunkten eines Dreiecks zu den gegenüberliegenden Kanten (Ecktransversalen), die sich in einem Punkt schneiden, erfüllen die Streckenlängen (Abb. A.17):

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \cdot \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = 1.$$

Beweis Wenn die Höhen von zwei Dreiecken gleich sind, sind ihre Flächen proportional zu den Grundseiten. In beiden Diagrammen in Abb. A.18 sind die Höhen der grauen Dreiecke gleich, also:

$$\frac{\Delta BQO}{\Delta SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}, \quad \frac{\Delta BQA}{\Delta SQA} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

Durch Subtraktion der Flächen der angegebenen Dreiecke erhält man das Verhältnis zwischen den grauen Dreiecken in Abb. A.19:

$$\frac{\Delta BOA}{\Delta SOA} = \frac{\Delta BQA - \Delta BQO}{\Delta SQA - \Delta SQO} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}}.$$

Abb. A.17 Satz von Ceva

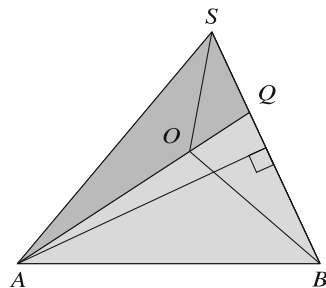
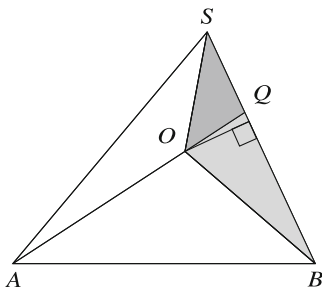
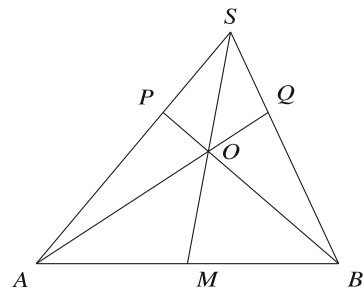
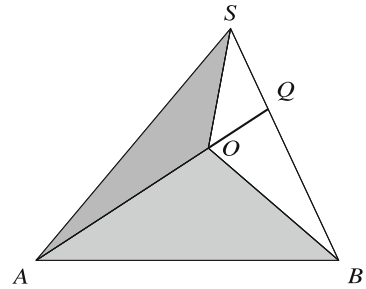


Abb. A.18 Dreiecke im Satz von Ceva

Abb. A.19 Subtraktion von Flächen im Satz von Ceva



Das mag auf den ersten Blick seltsam erscheinen, deshalb erklären wir es mit einer einfacheren Notation:

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{a}{b} \\ \frac{e}{f} &= \frac{a}{b} \\ c - e &= \frac{ad}{b} - \frac{af}{b} = \frac{a}{b}(d - f) \\ \frac{c - e}{d - f} &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise können wir beweisen:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} &= \frac{\Delta AOS}{\Delta BOS} \\ \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} &= \frac{\Delta SOB}{\Delta AOB}, \end{aligned}$$

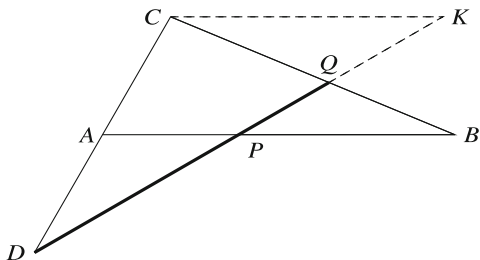
somit:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{QS}} \frac{\overline{SP}}{\overline{PA}} = \frac{\Delta AOS}{\Delta BOS} \frac{\Delta BOA}{\Delta SOA} \frac{\Delta SOB}{\Delta AOB} = 1,$$

da die Reihenfolge der Eckpunkte in einem Dreieck keinen Unterschied macht. \square

A.6 Der Satz des Menelaos

Satz A.20 (Menelaos) Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und \overline{DBQ} eine Transversallinie, die alle drei Kanten des Dreiecks oder deren Erweiterungen schneidet (Abb. A.20).

Abb. A.20 Satz des Menelaos

Dann gilt:⁴

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = 1. \quad (\text{A.6})$$

Beweis Ziehe eine Gerade durch C parallel zu \overline{AB} und verlängere \overline{DQ} , bis sie diese Parallele in K schneidet. Aus $\triangle ADB \sim \triangle CDK$ ergibt sich, dass:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{AB}}.$$

Aus $\triangle BQP \sim \triangle KQC$ ergibt sich, dass:

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BP}}.$$

Die Eliminierung von \overline{CK} ergibt $\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{PQ} = \overline{QC} \cdot \overline{BP} \cdot \overline{AD}$, das umgeordnet werden kann, um (A.6) zu erhalten. \square

Quellen

Der Anhang basiert in erster Linie auf [19]. Der Satz von Ceva und der Satz des Menelaos können jeweils mit dem anderen bewiesen werden [45].

⁴ Abhängig von der Konfiguration des Dreiecks und der Transversallinie kann das Ergebnis der Multiplikation entweder plus oder minus eins sein.

Literatur

1. Aigner, M., Ziegler, G.M.: Proofs from THE BOOK (Fifth Edition). Springer (2014)
2. Alperin, R.C.: A mathematical theory of origami constructions and numbers. *New York Journal of Mathematics* **6**, 119–133 (2000)
3. Barabash, M.: A non-visual counterexample in elementary geometry. *The College Mathematics Journal* **36**(5) 397–400 (2005)
4. Ben-Ari, M.: *Mathematical Logic for Computer Science* (Third Edition). Springer (2012)
5. Ben-Ari, M.: LearnSAT: A SAT solver for education. *Journal of Open Source Software* **3**(24), 639 (2018). <https://doi.org/10.21105/joss.00639>
6. Bewersdorff, J.: *Galois Theory for Beginners: A Historical Perspective*. American Mathematical Society (2006)
7. Bold, B.: *Famous Problems of Mathematics: A History of Constructions with Straight Edge and Compass*. Van Nostrand (1969)
8. Bradford, P.V.: Visualizing solutions to n-th degree algebraic equations using right-angle geometric paths. Archived May 2, 2010 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20100502013959/http://www.concentric.net/~pvh/ALG/rightpaths.html> (2010)
9. Butler IV, L.: Ramsey theory. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf> (2016)
10. Callagy, J.J.: The central angle of the regular 17-gon. *The Mathematical Gazette* **67**(442), 290–292 (1983). <https://www.jstor.org/stable/3617271>
11. Courant, R., Robbins, H.: *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods* (Second Edition). Oxford University Press (1996). Revised by Ian Stewart
12. Davies, R.: On Langford's problem (II). *The Mathematical Gazette* **43**, 253–5 (1959)
13. Dörrie, H.: *100 Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. Dover (1965)
14. Dörrie, H.: *100 problems of elementary mathematics: Their history and solution*. Reworked by Michael Woltermann. Archived 21 February 2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20191223032114/http://www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/DorrieContents.htm> (2010)
15. Dudley, U.: *A Budget of Trisections*. Springer (1987)
16. Eppstein, D.: Twenty proofs of Euler's formula: $V-E+F=2$. <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/> (n.d.)
17. Fraleigh, J.B.: *A First Course in Abstract Algebra* (Seventh Edition). Addison-Wesley (2003)
18. Gauss, K.F.: *Disquisitiones Arithmeticae*. Yale University Press (2006). Editors: Todd W. Bressi and Paul Groth
19. Gelfand, I., Saul, M.: *Trigonometry*. Springer (2001)
20. Graham, R., Butler, S.: *Rudiments of Ramsey Theory* (Second Edition). American Mathematical Society (2015)

21. Gunderson, D.S.: Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications. Mathematical Association of America (2010)
22. Heath, T.L.: The Thirteen Books of Euclid's *Elements*. Dover (1956)
23. Heule, M.J.H., Kullmann, O.: The science of brute force. *Communications of the ACM* **60**(8), 70–79 (2017)
24. Hull, T.C.: Solving cubics with creases: The work of Beloch and Lill. *American Mathematical Monthly* **118**(4), 307–315 (2011)
25. Hungerbühler, N.: A short elementary proof of the Mohr–Mascheroni theorem. *American Mathematical Monthly* **101**(8), 784–787 (1994)
26. Lang, R.J.: Origami and geometric constructions. http://langorigami.com/wp-content/uploads/2015/09/origami_constructions.pdf (1996–2015)
27. Laugwitz, D.: Eine elementare Methode für Unmöglichkeitbeweise bei Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. *Elemente der Mathematik* **17**, 54–58 (1962)
28. Loh, P.S.: A different way to solve quadratic equations. <https://www.poshenloh.com/quadratic/> (2019)
29. Loh, P.S.: A simple proof of the quadratic formula. <https://arxiv.org/abs/1910.06709> (2019)
30. Manna, Z.: *Mathematical Theory of Computing*. McGraw-Hill (1974)
31. Martin, G.E.: *Geometric Constructions*. Springer (1998)
32. Mastin, L.: Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi: Muslim Mathematician. https://www.storyofmathematics.com/islamic_alkhwarizmi.html (2020)
33. McCallum, W.: A tale of two triangles: Heron triangles and elliptic curves. <http://blog.kleinproject.org/?p=4> (2012)
34. McKay, B.D.: Ramsey theory. <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html> (n. d.)
35. Miller, J.: Langford's problem, remixed. <http://dialectrix.com/langford.html> (2014)
36. Newton, L.: The power of origami. <https://plus.maths.org/content/power-origami> (2009)
37. Peil, T.: The rusty compass theorem. Archived 20/07/2020 at the Wayback Machine. <https://web.archive.org/web/20200720195718/http://web.mnstate.edu/peil/geometry/C2EuclidNonEuclid/1Compass.htm> (2006)
38. Ramanujan: Squaring the circle. *Journal of the Indian Mathematical Society* **V**, 138 (1913). <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram05.pdf>
39. Ramanujan: Modular equations and approximations to π . *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* **XLV**, 350–372 (1914). <http://ramanujan.sirinudi.org/Volumes/published/ram06.pdf>
40. Riaz, M.: Geometric solutions of algebraic equations. *American Mathematical Monthly* **69**(7), 654–658 (1962)
41. Rike, T.: Fermat numbers and the heptadecagon. <https://mathcircle.berkeley.edu/sites/default/files/BMC6/ps0506/Heptadecagon.pdf> (2005)
42. Robson, E.: Words and pictures: New light on Plimpton 322. *American Mathematical Monthly* **109**(2), 105–120 (2002)
43. Ross, S.: *A First Course in Probability* (Tenth Edition). Pearson (2019)
44. Schumer, P.: The Josephus problem: Once more around. *Mathematics Magazine* **75**(1), 12–17 (2002)
45. Silvester, J.R.: Ceva = (Menelaus)². *The Mathematical Gazette* **84**(500), 268–271 (2000)
46. Sipka, T.: Alfred Bray Kempe's "Proof" of the four-color theorem. *Math Horizons* **10**(2), 21–26 (2002). <http://www.jstor.org/stable/25678395>
47. Stillwell, J.: *Mathematics and Its History* (Third Edition). Springer (2010)
48. Suzuki, J.: A brief history of impossibility. *Mathematics Magazine* **81**(1), 27–38 (2008)
49. Thomas, R.: An update on the four-color theorem. *Notices of the AMS* **45**(7), 848–859 (1998). <http://www.ams.org/notices/199807/thomas.pdf>
50. Toussaint, G.: A new look at Euclid's second proposition. *The Mathematical Intelligencer* **15**(3), 12–23 (1993)
51. Wikipedia: Angle trisection
52. Wikipedia: Cubic equation

53. Wikipedia: Five color theorem
54. Wikipedia: Four color theorem
55. Wikipedia: Heptadecagon
56. Wikipedia: Huzita–Hatori axioms
57. Wikipedia: Josephus problem
58. Wikipedia: Neusis construction
59. Wikipedia: Pentagon
60. Wikipedia: Plimpton 322
61. Wikipedia: Quadratrix of Hippias
62. Wikipedia: Sexagesimal

Stichwortverzeichnis

A

Abe, Hisashi, [147](#)
Alperin, Roger C., [156](#)
Appel, Kenneth, [41](#)
Archimedes, [11](#), [15](#)
Arithmetischer Unterlauf, [90](#)
Aussagenlogik, [100](#)

B

Babylonische Mathematik, [104](#)
Beloch, Margherita P., [117](#), [144](#), [147](#)
Beloch-Falte, [144](#)
Binet-Formel, [66](#)
Brennpunkt einer Parabel, [125](#)
Burstall, Rod M., [75](#)

C

Callagy, James J., [189](#)
Cardano, Gerolamo, [84](#)
Carlyle-Kreis, [88](#)

D

Dreieck
alle sind gleichschenkelig, [7](#)
Berechnung des Flächeninhalts, [205–207](#)
gleiche Fläche und gleicher Umfang, [181](#)
Heron-Formel, [181](#), [206](#)
Inkreis, [206](#)
Inkreismittelpunkt, [181](#), [206](#)
Satz von der Winkelhalbierenden, [216](#)
Dreiteilung eines Winkels
Annäherung, [11](#), [14](#)
mittels Neusis, [15](#)

mittels Origami, [147](#), [149](#)
mittels Quadratrix, [18](#)
Unmöglichkeit, [25](#)

E

Elliptische Kurve, [184](#)
Erdős, Paul, [98](#)
Euklids *Elemente*, [3](#)
Euklids Formel, [105](#)
Euler, Leonhard, [68](#)

F

Färbung
einer planaren Karte, [41](#)
eines planaren Graphen, [42](#)
eines Polygons, [57](#)
Fermat, Pierre de, [68](#)
Fermat-Zahlen, [68](#), [190](#)
Fibonacci-Zahlen, [65](#)
Formel von de Moivre, [191](#)
Fundamentalsatz der Algebra, [24](#), [191](#)
Fünf-Farben-Satz, [49](#)

G

Galois, Évariste, [2](#)
Gauß, Carl Friedrich, [189](#)
Geometrischer Ort, [117](#)
Grad eines Eckpunkts, [47](#)
Guthrie, Francis, [41](#)

H

Haken, Wolfgang, 41
 Hatori, Koshiro, 117
 Heath, Thomas L., 9
 Heawood, Percy J., 41
 Heptadekagon, 189
 Konstruktion, 198
 Kosinus des Zentriwinkels, 190
 Hermes, Johann Gustav, 190
 Heron-Formel, *siehe* Dreieck, Heron-Formel
 Heule, Marijn J.H., 96, 102, 107
 Hippias, 11, 19
 Huzita, Humiaki, 117

I

Inkreis, 181

J

Josephus-Problem, 71

K

$K_{3,3}$ ist nichtplanar, 46
 K_5 ist nichtplanar, 46
 Kempe, Alfred B., 41
 Kempe-Kette, 49
 Klee, Victor, 55
 Kochański, Adam, 30
 Kollabierender Zirkel, 1
 Konstruktion einer Mittelsenkrechten, 2
 Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks,
 3
 Konstruierbare Zahl, 20
 Grundrechenart, 20
 Quadratwurzel, 20
 Tiefe von Quadratwurzeln, 23
 Konstruktion
 eines regelmäßigen Heptadekagons, 198
 eines regelmäßigen Pentagons, 202
 nur mit Zirkel, 157–167
 Kosinussatz, 18, 36, 179, 181, 212, 216, 220
 Kubische Gleichung, 84
 Kullmann, Oliver, 96, 102, 107
 Kuratowski, Kazimierz, 46

L

Langford, C. Dudley, 109
 Langford-Problem, 109
 als Überdeckungsproblem, 110

Lösbarkeitsbedingungen, 111
 Lösung für $L(4)$, 114
 Leitlinie einer Parabel, 125
 Lill-Methode, 137
 Algorithmus, 139
 Kubikwurzel von 2, 143
 mehrere Wurzeln, 138
 Nachweis, 143
 negative Koeffizienten, 140
 nichtganzzahlige Wurzeln, 142
 Null-Koeffizienten, 141
 Pfade, die nicht zu Lösungen führen, 138
 quadratische Gleichungen, 87
 Lindemann, Carl von, 29
 Loh, Poh-Shen, 77

M

Martin, George E., 147
 Mascheroni, Lorenzo, 157
 Mathematische Induktion, 63
 McCarthy, John, 69
 McCarthys 91-Funktion, 69
 Messer, Peter, 147
 Methode der zwei Sekanten, 184
 Mohr, Georg, 157
 Monisches Polynom, 24, 26, 78, 82, 143, 193
 Museum
 ~ und triangulierte Polygone, 58
 Bewachung, 55

N

Neusis
 Dreiteilung eines Winkels, 15
 Verdoppelung eines Würfels, 17
 Nonagon, *siehe* Origami, Konstruktion eines
 Nonagons

O

Origami
 Axiom 1, 118
 Axiom 2, 118
 Axiom 3, 119
 Axiom 4, 122
 Axiom 5, 123
 Axiom 6, 125
 Axiom 7, 133
 Dreiteilung eines Winkels, 147, 149
 Geometrische Konstruktionen, 147
 Konstruktion eines Nonagons, 154
 Mittelsenkrechte, 119

- Spiegelung, 117
 Verdoppelung eines Würfels, 150, 153
 Winkelhalbierende, 120
- P**
- Parabel
 als Ortskurve der Falte, 125
 Falten von Axiom 6 sind Tangenten, 131
 gemeinsame Tangenten an zwei Parabeln, 125
 kubische Gleichung für die gemeinsamen Tangenten, 130
- Pascalsche Regel, 67
- Paucker, Magnus Georg, 190
- Peano-Axiome, 65
- Planar
 Graph, 42
 Karte, 41
- Plimpton 322, 104
- Polygon
 konvexe und konkave Eckpunkte, 56
 trianguliertes, 56, 59
- Poncelet, Jean-Victor, 169
- Probabilistische Methode, 98
- Pythagoreisches Tripel, 95, 102, 104
 primitives, 104
- Q**
- Quadratische Gleichung, 77
 Numerische Berechnung der Wurzeln, 89
 traditionelle Formel, 82
 Vervollständigung des Quadrats, 82
 Wurzeln, 77
- Quadratrix, 19
 Quadratur des Kreises, 37
 Zirkel, 19
- Quadratur des Kreises
 mittels Quadratrix, 37
 Näherung, 30, 32, 35
- Quartische Gleichung, 81
- R**
- Ramanujan, 31, 35
- Ramsey, Frank P., 97, 107
- Regelmäßiges Polygon
 Kosinus des Zentriwinkels, 190
- Richelot, Friedrich Julius, 190
- Rundungsfehler, 89
- S**
- SAT-Solver, 101
 DPLL-Algorithmus, 103
 Einheitsresolution, 103
- Satz des Menelaos, 222
- Satz des Ptolemäus, 211, 218
- Satz von Ceva, 170, 221
- Satz von Fáry, 43
- Satz von Gauß-Wantzel, 190
- Satz von Mohr-Mascheroni, 157
- Satz von Ramsey, 97
 Beweis, dass $R(3) = 6, 98$
 untere Schranke für $R(k)$, 98
- Schur-Tripel, 93, 101
- Sechs-Farben-Satz, 48
- Sexagesimales Zahlensystem, 105
- Steiner, Jakob, 169
- T**
- Trapez, gleichschenkliges, 160, 219
- Triangulierter Graph, 43
- Trigonometrische Identitäten, 208–216
 $\sin \alpha / \alpha$, 215
 Kosinus eines Dreifachwinkels, 211
 Produkt aus drei Tangenten, 214
 Sinus und Kosinus der Summe und Differenz zweier Winkel, 208
 Sinus und Kosinus eines Halbwinkels, 211
 Tangens der Summe von zwei Winkeln, 214
 Tangens eines Halbwinkels, 214
- U**
- Umkreis, 210, 218–220
 eines Trapezes, 219
- V**
- Van der Waerden, Bartel L., 96
- Van-der-Waerden-Problem, 96
- Verdoppelung eines Würfels
 mittels Neusis, 17
 mittels Origami, 150, 153
 Unmöglichkeit, 25
- Viereck
 einbeschrieben in einen Kreis, 210
- Vier-Farben-Satz, 51

W

Wantzel, Pierre, [11](#)

Wurzeln

Einheits~, [191](#)

von kubischen Polynomen, [24](#), [25](#)