

Walter Deffaa

Anonymisierte Befragungen mit zufallsverschlüsselten Antworten

Die Randomized-Response-Technik (RRT):
Methodische Grundlagen, Modelle und
Anwendungen



Walter Deffaa

Anonymisierte Befragungen mit zufallsverschlüsselten Antworten

Die Randomized-Response-Technik (RRT) ist ein neuartiges Befragungsverfahren für sensitive Merkmale. Bei ihrer Anwendung werden die Antworten irreversibel stochastisch verschlüsselt und somit geschützt. Aus den verschlüsselten Antworten lassen sich die Verteilungsparameter der untersuchten Kollektive schätzen. Die vorliegende – stichprobentheoretisch orientierte – Arbeit gibt eine umfassende Darstellung der methodischen Grundlagen, Modelle und Anwendungen der RRT.

Walter Deffaa, geboren 1951 in Ludwigshafen/Rh. Studium der Volkswirtschaftslehre an der Universität Tübingen und der Techn. Universität Berlin von 1970 bis 1975. Seit 1975 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität Hohenheim.

Anonymisierte Befragungen mit zufallsverschlüsselten Antworten

Hohenheimer Volkswirtschaftliche Schriften

Herausgegeben von
Prof. Dr. Cay Folkers
Prof. Dr. Klaus Herdzina
Prof. Dr. Franz Mehler
Prof. Dr. Walter Piesch
Prof. Dr. Ingo Schmidt
Prof. Dr. Helmut Walter
Prof. Dr. Josua Werner

Band 1



Verlag Peter Lang
FRANKFURT AM MAIN · BERN

Walter Deffaa

**Anonymisierte
Befragungen mit
zufallsverschlüsselten
Antworten**

Die Randomized-Response-Technik (RRT):
Methodische Grundlagen,
Modelle und Anwendungen



Verlag Peter Lang
FRANKFURT AM MAIN · BERN

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Deffaa, Walter:

Anonymisierte Befragungen mit zufallsverschlüs=
selten Antworten : d. Randomized-Response-Technik
(RRT) : method. Grundlagen, Modelle u. Anwendungen
/ Walter Deffaa. - Frankfurt am Main ; Bern :
Lang, 1982.

(Hohenheimer volkswirtschaftliche Schriften ;
Bd. 1)

ISBN 3-8204-5747-X

NE: GT

Open Access: The online version of this publication is published on www.peterlang.com and www.econstor.eu under the international Creative Commons License CC-BY 4.0. Learn more on how you can use and share this work: <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>.



This book is available Open Access thanks to the kind support of ZBW – Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft.

ISSN 0721-3085

ISBN 3-8204-5747-X

ISBN 978-3-631-75393-4 (eBook)

© Verlag Peter Lang GmbH, Frankfurt am Main 1982

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck oder Vervielfältigung, auch auszugsweise, in allen Formen wie Mikrofilm, Xerographie, Mikrofiche, Mikrocassette, Offset verboten.

Druck und Bindung: fotokop wilhelm weihert KG, darmstadt

VORWORT

Bei der Betrachtung der Verlässlichkeit von Stichprobenergebnissen stand in der Stichprobentheorie lange Zeit der Stichprobenfehler im Vordergrund. Später wandte man sich auch Methoden zu, durch die der Nicht-Stichprobenfehler zu erfassen und quantitativ zu bestimmen ist. Neben der Entwicklung von Verfahren mit möglichst geringem Stichprobenfehler erscheint es naheliegend, Befragungsmethoden zu konzipieren, die auf eine Reduktion des Nicht-Stichprobenfehlers hinzielen.

Vor allem für die Erhebung sensitiver Merkmale wurde in diesem Zusammenhang 1965 von WARNER die Randomized-Response-Technik (RRT) vorgeschlagen.

Ziel der vorliegenden statistisch-methodisch orientierten Arbeit ist eine umfassende Darstellung der vielen verschiedenen RRT-Verfahren aufgrund eines allgemeinen RRT-Modells. Hierbei sollen auch die bestehenden Lücken beim Vergleich der Modelle und bei der Behandlung multivariater Fragestellungen geschlossen werden.

Nach einer allgemeinen Einordnung der RRT in Kapitel 1 werden in Kapitel 2 die methodischen Grundlagen der RRT entwickelt. In den Kapiteln 3 bis 5 werden RRT-Modelle für alternative, mehrklassige und quantitative Merkmale dargestellt. Diese Modelle werden anhand verschiedener Kriterien untereinander und mit der direkten Befragung verglichen. Die Grundlagen der Behandlung multivariater Probleme, durch welche die Analyse von Abhängigkeiten mehrerer Variabler mit Hilfe der RRT möglich wird, werden in Kapitel 6 entwickelt. Den Abschluß der Arbeit (Kapitel 7) bildet eine Bestandsaufnahme der in der Literatur dokumentierten empirischen Studien, in denen die RRT untersucht oder angewandt wurde.

Herrn Professor Dr. Walter Piesch, der diese Arbeit angeregt und betreut hat, gilt mein herzlicher Dank für seine tatkräftige Unterstützung und die großzügige wissenschaftliche Förderung. Danken möchte ich auch Frau M. Langer, die die mühsamen Schreibarbeiten mit großer Gewissenhaftigkeit hervorragend erledigt hat.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

<u>1. Einleitung</u>	1
1.1 Statistik und Datenschutz	1
1.2 Die Genauigkeit statistischer Erhebungen	10
1.3 Die Erhebung sensitiver Merkmale mit Hilfe der RRT	15
<u>2. Statistische Inferenz im allgemeinen RRT-Modell</u>	23
2.1 Das allgemeine RRT-Modell	23
2.2 Schätzen im allgemeinen RRT-Modell	27
2.2.1 Die Momentenmethode	28
2.2.2 Die Maximum-Likelihood-Methode	29
2.2.3 Das Kleinst-Quadrate-Prinzip	30
2.3 Stichprobentheoretische Betrachtung	31
2.3.1 Modifikation des allgemeinen RRT-Modells	31
2.3.2 Schätzen im allgemeinen modifizierten RRT-Modell	32
2.4 Grundlagen des Vergleichs von RRT-Modellen	43
<u>3. Modelle zur Schätzung des Anteils eines alternativen Merkmals</u>	47
3.1 Das WARNER-Modell	47
3.2 Multiple-Trial-Versionen des WARNER-Modells	57
3.3 Das Contamination-Modell	65
3.4 Unrelated-Question-Modelle	71
(Modelle mit unabhängiger Zusatzfrage)	
3.4.1 Ein-Stichproben-Modelle	72
3.4.1.1 Das SIMMONS-I-Modell	72
3.4.1.2 Das Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten	79
3.4.1.3 Das BOURKE-Modell	84
3.4.2 Zwei-Stichproben-Modelle	92
3.4.2.1 Das SIMMONS-II-Modell	92
3.4.2.2 Das FOLSOM-Modell	99

3.5	Vergleich der Modelle	103
3.5.1	Modellvergleich aufgrund gleicher Auswahlwahrscheinlichkeit der sensitiven Frage	104
3.5.2	Modellvergleich aufgrund gleicher bedingter Verteilung der Untersuchungsvariablen bez. der Antwortvariablen	111
3.5.3	Modellvergleich aufgrund gleichen Protektionsgrads	116
3.5.4	Modellvergleich mit expliziter Berücksichtigung der Antwortbereitschaft	124
<u>4.</u>	<u>Modelle zur Schätzung der Verteilung mehrklassiger Merkmale</u>	<u>132</u>
4.1	Modelle vom WARNER-Typ	132
4.1.1	Das BOURKE-DALENIUS-Modell	133
4.1.2	Das HOPKINS-III-Modell	145
4.2	Unrelated-Question-Modelle	148
4.2.1	Ein-Stichproben-Modelle	149
4.2.2	Zwei-Stichproben-Modelle	153
4.3	Vergleich der Modelle	154
<u>5.</u>	<u>Modelle zur Schätzung des Mittelwerts quantitativer Merkmale</u>	<u>164</u>
5.1	Unrelated-Question-Modelle	164
5.1.1	Ein-Stichproben-Modelle	165
5.1.2	Zwei-Stichproben-Modelle	173
5.2	Das additive und das multiplikative Modell	179
5.3	Das DALENIUS-VITALE-Modell	183
5.4	Vergleich der Modelle	186

<u>6. Multivariate Modelle</u>	189
6.1 Schätzung mehrdimensionaler Häufigkeitsverteilungen diskreter Merkmale mit der RRT	189
6.2 Schätzung mehrdimensionaler Häufigkeitsverteilungen mit unabhängigen Mehrfach-Modellen	190
6.3 Der χ^2 - Unabhängigkeitstest mit RRT-Daten	197
6.4 Multivariate Analyse quantitativer Merkmale mit RRT-Daten	204
<u>7. Anwendungen der RRT</u>	208
7.1 Vergleichsstudien	213
7.1.1 Vergleichsstudien mit Schwerpunkt im Bereich Fertilität, Schwangerschaftsabbruch, uneheliche Geburten etc.	213
7.1.2 Vergleichsstudien mit Schwerpunkt im Bereich Alkohol- und Drogenkonsum	219
7.1.3 Vergleichsstudien in anderen Merkmalsbereichen	223
7.2 Anwendungen (i.e.S.) der RRT	234
7.2.1 Anwendungen mit Schwerpunkt im Bereich Fertilität, Schwangerschaftsabbruch etc.	234
7.2.2 Anwendungen in anderen Merkmalsbereichen	239
7.3 Auswertung der Anwendungsstudien	243
L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S	246

1. E I N L E I T U N G

1.1 STATISTIK UND DATENSCHUTZ

Die aktuelle Diskussion über den Datenschutz in der Bundesrepublik Deutschland und in vielen westlichen Industriestaaten und die wachsende Relevanz, die diesem Problemkreis zugemessen wird, ist auch für die Statistik von Bedeutung. Betroffen sind die Möglichkeiten und Modalitäten statistischer Erhebungen sowie die Qualität statistischer Analysen. ¹⁾

In der Bundesrepublik erfolgte die Auseinandersetzung in diesem Bereich insbesondere bei den Diskussionen zum Gesetzgebungsverfahren des Bundesdatenschutzgesetzes ^{2) 3)} und zur Novellierung des Bundesstatistikgesetzes. ^{4) 5)} Hierbei ist der zentrale Punkt mit dem Begriff 'Datenschutz' nur unzureichend beschrieben. ⁶⁾ Die infragestehenden Schutzobjekte sind vielmehr die Privatsphäre der Bürger und die Vertraulichkeit

-
- 1) Vgl. DALENIUS/KLEVMARKEN (1976); die Beiträge dieses Sammelbandes befassen sich schwerpunktmäßig mit der Situation in Schweden.
 - 2) Gesetz zum Schutz vor Mißbrauch personenbezogener Daten bei der Datenverarbeitung (Bundesdatenschutzgesetz-BDSG) vom 27. Januar 1977.
 - 3) Vgl. hierzu etwa SIMITIS in SIMITIS et al. (1978, S.47-74).
 - 4) Gesetz über die Statistik für Bundeszwecke (Bundesstatistikgesetz - BStatG) vom 14. März 1980.
 - 5) Vgl. hierzu KRUPP (1977) und GROHMANN (1980).
 - 6) Vgl. SIMITIS in SIMITIS et al. (1978, S.53f.).

personenbezogener Daten. ¹⁾ Ohne die beiden Begriffe ausführlich analysieren zu wollen, seien einige Definitionsversuche vorgestellt, um so die Bedeutungen - wenn auch vage - einzugrenzen. Stärker auf den statistischen Kontext zugeschnitten sind die folgenden Definitionen von 'privacy' als dem Recht 'to determine what information about ourselves we will share with others'. ²⁾ bzw. als 'the quality or state of being apart from the company or observation of others'. ³⁾ Weiter gefaßt ist dagegen die Umschreibung der Privatsphäre aufgrund einer Interpretation der Rechtsprechung des Bundesverfassungsgerichts: "Gemeint ist damit zunächst (...) der zu den Existenzvoraussetzungen einer freiheitlichen und demokratischen Gesellschaft zählende Anspruch des einzelnen auf einen Freiraum, in dem er ungestört und unbeeinflußt von staatlichen oder privaten Instanzen über sich selbst und damit auch über die spezifischen Bedingungen, unter denen sich seine Entwicklung in seiner gesellschaftlichen Umwelt vollzieht, nachdenken kann". ⁴⁾

-
- 1) Im angelsächsischen Sprachbereich entspricht dem die Verbindung 'privacy' und 'confidentiality'.
 - 2) Zitat von Prof. WESTON, Columbia University, zitiert nach FELLEGI (1972, S.7).
 - 3) Webster's Third New International Dictionary, zitiert nach DUNCAN (1976, S.55).
 - 4) SIMITIS in SIMITIS et al. (1978, S.55).

Die Vertraulichkeit dagegen bezieht sich auf die Anzahl der fremden Personen, denen die personenbezogenen Daten bekannt sind:

"In contrast, confidentiality is defined as 'known only to a limited few: not publicly disseminated' ". 1)

Das Gebot der Vertraulichkeit von Daten konkretisiert sich beispielsweise in den gesetzlichen Vorschriften zum Datengeheimnis (§ 5 BDSG) und zum statistischen Geheimhaltungsprinzip (§11 BStatG). Trotz der hier vorgenommenen Unterscheidung zwischen 'privacy' und 'confidentiality' stehen die beiden Begriffe in engem Zusammenhang; so wird die Privatsphäre durch Gewährleistung der Vertraulichkeit personenbezogener Daten zumindest weitgehend geschützt, während das Gebot der Vertraulichkeit seinerseits erst durch den angestrebten Schutz der Privatsphäre einen Sinn erhält.

Aus der Sicht des Ablaufs einer statistischen Erhebung und Analyse kann der Schutz der Privatsphäre und der Vertraulichkeit auf drei Ebenen von Bedeutung sein:

- bei der Datenerfassung
- bei der Datenaufbewahrung sowie
- bei der Datenweitergabe und -veröffentlichung. 2)

Bei den Maßnahmen, die dem Schutz der Privatsphäre und der Sicherung der Vertraulichkeit dienen, sind auf der einen Seite die konventionellen Verfahren zu erwähnen, die sich auf Umfang und Art von Erhebungen beziehen und Vorschriften zur Behandlung von personenbezogenen Daten beinhalten.

1) DUNCAN (1976, S.55).

2) Vgl. DALENIUS (1975, S.4).

Diesen Verfahren stehen neuartige Methoden gegenüber, die die Zuordnung der Daten zu einer Person irreversibel - bspw. durch spezielle Kodierungs- oder Anonymisierungsverfahren ¹⁾ - aufheben. Die Randomized-Response-Technik (RRT) gehört zu dieser Gruppe von Verfahren; sie gewährleistet bereits bei der Datenerhebung den Schutz der Privatsphäre und die Vertraulichkeit der Daten. Sie kann jedoch auch bei der Datenaufbewahrung und Datenweitergabe eingesetzt werden. Ganz allgemein erübrigen sich Vorsichtsmaßnahmen auf einer nachfolgenden der oben genannten Ebenen, wenn zuvor eines dieser Verfahren eingesetzt wurde.

Wir werden nun für die amtliche Statistik, die sich weitgehend auf die Auskunftspflicht stützt, und für die nicht-amtliche Statistik in der Bundesrepublik Deutschland die wichtigsten den Datenschutz betreffenden Punkte darstellen.

Die gesetzlichen Sonderregelungen für den Datenschutz in der amtlichen Statistik in der BRD sind im Bundesstatistikgesetz enthalten. ²⁾

Grundlage für fast alle Erhebungen der amtlichen Statistik ist die Auskunftspflicht (§ 10 BStatG). Das bedeutet jedoch nicht, daß es bei der Datenerfassung möglich ist, über jedes Merkmal eine Auskunft zu verlangen. Die Bundesgesetze, die die Grundlage für die Erhebungen der amtlichen Statistik bilden, müssen den Normen des Grundgesetzes genügen, sie müssen verfassungskonform sein. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Vereinbarkeit mit Art.1 und Art.2 GG (Schutz der Menschenwürde, Freiheitsrechte) bedeutsam. So hat das Bundesverfassungsgericht in einer Entscheidung zur Verfassungsmäßigkeit des Mikrozensus ausgeführt:

"Mit der Menschenwürde wäre es nicht zu vereinbaren, wenn der Staat das Recht für sich in Anspruch nehmen könnte, den Menschen

- 1) Vgl. zu diesen Methoden den Überblick in DALENIUS (1977a).
- 2) Vgl. den Überblick über das novellierte Bundesstatistikgesetz in BÜRGIN (1980).

zwangsweise in seiner ganzen Persönlichkeit zu registrieren und zu katalogisieren, sei es auch in der Anonymität einer statistischen Erhebung, und ihn damit wie eine Sache zu behandeln, die einer Bestandsaufnahme in jeder Hinsicht zugänglich ist".¹⁾ Angesichts der Notwendigkeit statistischer Erhebungen als Vorbedingung für planvolles staatliches Handeln und der strengen Geheimhaltungsvorschriften für Einzelangaben verletze jedoch nicht jede statistische Erhebung über Persönlichkeits- und Lebensdaten die menschliche Würde oder berühre das Selbstbestimmungsrecht im innersten Lebensbereich.²⁾

Aufgrund dieser Grundsatzentscheidung sind also nur solche Fragen, die den zu schützenden innersten (Intim-) Bereich betreffen, in Befragungen der amtlichen Statistik mit Auskunftszwang ausgeschlossen.

Auf der zweiten Ebene, bei der Datenaufbewahrung sind sowohl besondere Sicherungsvorkehrungen als auch Löschungen von Identifikationsmerkmalen vorgesehen (§ 11 Abs.7 BStatG). So sollen insbesondere Namen und Adressen dann gelöscht werden, wenn ihre Kenntnis für die Aufgabenerfüllung der amtlichen Statistik nicht mehr notwendig ist. Generell sollen Namen und Adressen der Auskunftspflichtigen von den anderen Daten getrennt aufbewahrt werden; hiermit wird auch eine mißbräuchliche Identifizierung der Daten erschwert.

Was die Weitergabe bzw. Veröffentlichung von Daten anbetrifft, sind grundsätzlich alle Einzelangaben in der amtlichen Statistik geheimzuhalten, es sei denn der Betroffene verzichtet im Einzelfall auf die Geheimhaltung (§ 11 Abs.1 BStatG). Der Verstoß gegen die Geheimhaltungsbestimmungen wird strafrechtlich sanktioniert (§§ 203 ff. StGB). In § 11 Abs.3 BStatG sind als Ausnahmeregelung diejenigen staatlichen Stellen bezeichnet, an die bei Vorliegen

1) BUNDESVERFASSUNGSGERICHT (1970, S.6).

2) Vgl. BUNDESVERFASSUNGSGERICHT (1970, S.7).

bestimmter sehr restriktiver Voraussetzungen Einzeldaten übermittelt werden können; die Erkenntnisse aus diesen Einzeldaten dürfen jedoch nicht zu Maßnahmen gegen den Betroffenen verwendet werden.

Die Veröffentlichung der statistischen Auswertungen ist so zu gestalten, daß ein Rückschluß auf Einzelfälle unmöglich ist; d.h. es werden nur absolute Häufigkeiten, die größer als zwei sind, ausgewiesen. Neu aufgenommen wurde in das Bundesstatistikgesetz eine Vorschrift, die die anonymisierte Veröffentlichung von Einzeldaten zuläßt. Diese müssen "so anonymisiert werden, daß sie Auskunftspflichtigen oder Betroffenen nicht mehr zuzuordnen sind".¹⁾ Diese heftig umstrittene Vorschrift²⁾, die an die in den USA schon lange bestehenden Public-Use-Files anknüpft, soll insbesondere der Forschung Zugang zu Einzeldaten verschaffen. Solche Individualdaten haben im Rahmen mikroanalytischer Studien stark an Bedeutung gewonnen. Die Praxis wird erweisen, durch welche Verfahren die Anonymisierungskriterien des § 11 Abs.5 BStatG sichergestellt werden können. Ohne hier auf Einzelheiten eingehen zu können, sei angemerkt, daß i.a. durch Weglassen von Namen und Anschriften keine ausreichende Anonymisierung erreicht wird, wenn eine bestimmte Kombination von Merkmalsausprägungen nur auf eine Person zutrifft oder durch nicht im fraglichen Datensatz enthaltene Zusatzinformation eine Re-Identifikation möglich ist. Der Wirtschaftsausschuß des Deutschen Bundestags hat beispielsweise bei den Gesetzesberatungen zum Bundesstatistikgesetz festgestellt, daß er für wirtschaftsstatistische Daten keine hinreichende Anonymisierungsmöglichkeiten sieht.³⁾

Neben den hier angesprochenen Anonymisierungsverfahren, die im Unterdrücken der Angabe spezieller Merkmalswerte bestehen, sind auch Verfahren anwendbar, mittels derer die Einzelangaben stochastisch - irreversibel - verschlüsselt werden.⁴⁾ Der damit

1) § 11 Abs.5 BStatG.

2) Vgl. GROHMANN (1980).

3) Vgl. BÜRGIN (1980, S.508).

4) Vgl. DALENIUS (1977a).

einhergehende Informationsverlust läßt sich quantitativ erfassen. Die Anonymisierungsverfahren, die auf der Ebene der Datenerfassung anwendbar sind, können generell auch bei der Datenweitergabe oder -veröffentlichung verwendet werden. Dies gilt auch für die RRT, die in der vorliegenden Arbeit als Befragungsmethode analysiert wird. Diese Ergebnisse lassen sich aber leicht auf die Anonymisierung von Daten und die statistische Auswertung anonymisierter Daten übertragen.

Die nicht-amtliche Statistik (öffentliche und nicht-öffentliche Forschungsinstitute, wissenschaftliche Hochschulen, Markt- und Meinungsforschungsinstitute etc.) unterliegt nicht solch umfassenden und detaillierten gesetzlichen Regelungen wie die amtliche Statistik. Bis zum Inkrafttreten des Bundesdatenschutzgesetzes im Jahr 1977 fehlten derartige gesetzliche Regelungen fast völlig.

Ogleich sich noch keine allgemeinen Normen durchgesetzt haben ¹⁾, lassen sich jedoch einige weitgehend akzeptierte Grundsätze zur Sicherung der Privatsphäre und der Vertraulichkeit personenbezogener Daten angeben:

- " 1. The individual must be informed when asked to supply personal data for the system whether he is legally required, or may refuse, to supply the data requested, and also of any specific consequences for him, which are known to the organization, of providing or not providing such data.
2. The agency should assure that no use of individually identifiable data is made that is not within the stated purpose of the system as reasonably understood by the individual, unless the informed consent of the individual has been explicitly obtained.
3. The agency should further assure that no data about an individual are made available from the system in response to a demand for data made by means of compulsory legal

1) Einen Katalog solcher Normen enthalten bspw. die sogenannten BELLAGIO-PRINZIPIEN (1978) über den Datenschutz und den Gebrauch von öffentlichen Mikrodaten für Zwecke der Forschung und Statistik.

process, unless the individual to whom the data pertain (a) has been notified of the demand and (b) has been afforded full access of the data before they are made available in response to the demand". 1)

Im Zusammenhang mit dem zweiten Grundsatz sollte der Hinweis der Verwendung nur für statistische Zwecke besagen, daß die Individualdaten nur instrumentellen Charakter hinsichtlich der statistischen Analyse haben. 2)

Die beiden ersten Grundsätze werden auch zusammenfassend als "informed consent" bezeichnet.³⁾ Dem informed consent entspricht weitgehend § 3 BDSG,⁴⁾ der eine Verarbeitung personenbezogener Daten, die vom Bundesdatenschutzgesetz geschützt werden, nur bei Einwilligung des Betroffenen zuläßt; diese Einwilligung ist im Regelfall schriftlich zu erteilen.⁵⁾ Dies gilt nicht für schon bei der Erhebung nicht identifizierbare Daten, da der Personenbezug hier nicht gegeben ist.⁶⁾ Bezüglich des dritten Grundsatzes ist anzumerken, daß in der nicht-amtlichen Statistik nicht ausgeschlossen werden kann, daß etwa Strafverfolgungsbehörden versuchen, auf relevante personenbezogene Daten aus Umfragen etc. zurückzugreifen, da wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Forschern kein Zeugnisverweigerungsrecht zusteht.

Da die Datenverarbeitung auch die Speicherung der Daten umfaßt, gilt die Einwilligung nach § 3 BDSG auch hierfür. Die gespeicherten Daten sind durch das Datengeheimnis des § 5 BDSG geschützt. Für die geschäftsmäßige Datenverarbeitung nicht-öffentlicher Stellen für fremde Zwecke, die personenbezogene Daten zum Zwecke der Übermittlung in anonymisierter Form verarbeiten, in unserem Zusammenhang insbesondere die Institute der Markt- und Meinungsforschung, schreibt § 36 Abs.1 BDSG eine anonymisierte Speicherung

- 1) DUNCAN (1976, S.56).
- 2) Vgl. AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION (1977, S.72f.).
- 3) Vgl. BORUCH (1971a, S.413 f.).
- 4) Vgl. auch § 9 Abs.2 BDSG für Behörden und sonstige öffentliche Stellen.
- 5) Bez. der Auswirkungen einer schriftlichen Einwilligung vgl. BRADBURN et al. (1979, S.107-133).
- 6) Vgl. SIMITIS in SIMITIS et al. (1978, S.205).

vor. Diese Vorschrift ist als Äquivalent zum Verzicht auf Kontrollrechte der Betroffenen zu sehen. 1) 2)

Nach diesem kurzen - und damit notwendigerweise unvollständigen - Überblick über den Datenschutz in der amtlichen und nicht-amtlichen Statistik ist darauf hinzuweisen, daß dem Bedürfnis des Individuums nach möglichst weitgehendem Datenschutz ein steigender gesellschaftlicher Bedarf an verlässlichen statistischen Informationen gegenübersteht.

Die wachsende Komplexität des wirtschaftlichen und sozialen Lebens erfordert darüberhinaus immer detailliertere Daten, die sich sowohl auf immer kleinere Grundgesamtheiten beziehen als auch auf eine größere Anzahl von Merkmalen. 3)

Diese Daten bilden in vielen Fällen die Grundlage für Entscheidungen, die ihrerseits wiederum den Einzelnen betreffen. Damit ergibt sich ein Konflikt zwischen individuellem Datenschutzbedürfnis und gesellschaftlichem Informationsbedürfnis, der auch eine instrumentelle Dimension hat. Das zunehmende Datenschutzbedürfnis hat seit Beginn der 70iger Jahre negative Auswirkungen auf die Antwortbereitschaft der Bürger bei statistischen Umfragen. Es stellt damit die Verlässlichkeit oder Genauigkeit der erstellten Statistiken in Frage. 4) Eine Studie des Bureau of the Census (USA) 5) 6) zu dieser Problematik, die zur

1) Vgl. MALLMANN in SIMITIS et al. (1978, S.869).

2) Für die Datenverarbeitung der Behörden und sonstigen öffentlichen Stellen bzw. nicht öffentlicher Stellen für eigene Zwecke gelten die Auskunfts- und Berichtigungsvorschriften der §§ 11,12 bzw. 26,27 BDSG.

3) Vgl. DALENIUS (1974, S.214).

4) Vgl. bspw. FRANKEL (1976, S.11), DALENIUS (1978, S.26f.), GOLDFIELD et al. (1977, S.219f.).

5) Vgl. GOLDFIELD et al. (1977).

6) Vgl. auch den Bericht zu einer Studie über 'Consequences of Informed Consent' in BRADBURN et al. (1979, S.107-133).

Vorbereitung der 1980er Zensen durchgeführt wurde, bestärkte die Vermutung, daß die Antwortraten bei erhöhter zugesicherter Vertraulichkeit - wenn auch gering - ansteigen. ¹⁾

Wir wollen diese wichtige Beziehung zwischen Schutz der Privatsphäre bzw. der Vertraulichkeit statistischer Angaben und der Genauigkeit statistischer Ergebnisse genauer untersuchen und zuerst eine Einordnung innerhalb des Problemkreises der Genauigkeit statistischer Daten vornehmen.

1.2 DIE GENAUIGKEIT STATISTISCHER ERHEBUNGEN

Die Genauigkeit einer statistischen Erhebung wird durch die auftretenden Fehler bestimmt. Hierbei sind die individuellen Fehler und der - letztlich interessierende - Gesamtfehler zu unterscheiden. Im statistischen Sinn liegt ein individueller Fehler vor, wenn der in die Statistik einbezogene Merkmals - Ist - Wert y_i vom Soll-Wert, dem 'wahren' Wert x_i , abweicht. ²⁾ Ausgehend von einem bestimmten Erhebungssystem, das durch den Gegenstand und die Art der Erhebung, die Definition der Massen, Einheiten und Merkmale, die Organisation der Feld- und Aufbereitungsarbeit und evtl. den Stichprobenplan gekennzeichnet ist, kann man als wahre individuelle Werte diejenigen bezeichnen, die bei einer genauen

1) Vgl. hierzu auch die Studie von SINGER (1978).

2) Vgl. SCHÄFFER (1977, S.233).

Einhaltung aller Vorschriften bei der Durchführung des Erhebungssystems gewonnen werden. 1) 2)

Aufgabe statistischer Erhebungen ist die Ermittlung von Globalwerten. Wir werden uns hier - wie allgemein üblich - auf Merkmalssummen (X, Y) und Durchschnittswerte (\bar{x}, \bar{y}) beschränken. Es seien die Y -Werte die (Schätz-)Werte für die Merkmalssumme bzw. den Durchschnitt, die mittels der durchgeführten Erhebung gewonnen werden; diese Werte werden - nicht nur bei Stichprobenerhebungen, wie wir im Folgenden sehen werden - als Zufallsvariable betrachtet.

Die wahren Werte X und \bar{x} sind die Merkmalssummen und der Durchschnitt der individuellen wahren Werte in der vom Erhebungssystem - fehlerfrei - bestimmten Grundgesamtheit.

Von Interesse ist nun der Gesamtfehler als die Differenz zwischen Y -Wert und X -Wert.

Dieser Gesamtfehler wird bekanntlich durch den mean square error (mittlerer quadratischer Fehler) MSE erfaßt. Für das arithmetische Mittel ergibt sich

$$(1.1) \quad \text{MSE}(\bar{y}) : = E(\bar{y} - \bar{x})^2 = E(\bar{y} - E\bar{y})^2 + (E\bar{y} - \bar{x})^2 = \\ = \text{Var } \bar{y} + \text{Bias}^2(\bar{y})$$

-
- 1) Vgl. STRECKER (1978, S.86) und STRECKER (1980, S.386f.). STRECKER unterscheidet darüberhinaus den wahren Wert, der unabhängig vom Erhebungssystem existiere, vom 'wahren' Wert, der wie hier vom Erhebungssystem abhängig definiert wird. In der Meinungsforschung bspw. existieren i.a. keine wahren Werte, sondern nur 'wahre' Werte. Vgl. hierzu auch HANSEN et al. (1953b, S.282ff.), KISH (1965, S.514f.) und COCHRAN (1968, S.637f.).
 - 2) Hierbei ist von einer Erhebung auszugehen, bei der die Merkmalswerte den statistischen Einheiten eindeutig zugeordnet werden können und nicht bspw. - im Erhebungssystem vorgesehen - stochastisch verschlüsselt werden.

Der mean square error als Maßzahl der Genauigkeit (accuracy) läßt sich also in zwei additive Bestandteile zerlegen, die Varianz von \bar{y} , als der Maßzahl für die Präzision (precision) der Schätzung, und die quadrierte Verzerrung (Bias), als der Differenz zwischen dem Erwartungswert des Schätzwertes und dem wahren (zu schätzenden) Wert. ¹⁾ Ein optimales Erhebungssystem minimiert - bei gegebenen Kosten der Erhebung und sonstigen vorgegebenen Nebenbedingungen - den mean square error, hat also die Summe der beiden Komponenten Varianz und quadriertem Bias möglichst gering zu halten. Wie wir noch sehen werden, ist diese Zerlegung des mean square error nicht nur für Stichprobenerhebungen sondern auch für Totalerhebungen relevant.

Bei der Betrachtung unterschiedlicher Fehlerkategorien unterscheidet man allgemein den Stichprobenfehler (sampling error) vom Nichtstichprobenfehler (non sampling error). Der Stichprobenfehler kommt dadurch zustande, daß bei einer Stichprobe nicht alle Einheiten der Grundgesamtheit erhoben werden; handelt es sich um eine Zufallsauswahl, läßt sich der Stichprobenfehlerbereich theoretisch bestimmen. Alle anderen Fehlermöglichkeiten bei der Durchführung einer Erhebung werden unter dem Nicht-Stichprobenfehler subsumiert. ²⁾

Der Einteilung der Fehler in Stichproben- und Nicht-Stichprobenfehler entspricht die Aufteilung (1.1) des mean square error in Varianz und quadrierten Bias i.a. nicht. Beide Fehlerarten

-
- 1) Zu der Unterscheidung von 'accuracy' und 'precision' sowie dem Zusammenhang mit 'validity' und 'reliability' vgl. z.B. KISH (1965, S.510) und JESSEN (1978, S.15f.).
 - 2) Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, auf Methoden zur Abschätzung der einzelnen Komponenten des Stichprobenfehlers einzugehen; vgl. hierzu die Bibliographie von DALENIUS (1977b).

können sowohl Varianz- als auch Bias-Komponenten enthalten.

Die Fehlerarten lassen sich noch weiter aufgliedern, die Einzelheiten sind einem Schema von HURWITZ und PRITZKER vom U.S. Bureau of the Census in Übersicht 1.1 zu entnehmen. ¹⁾

Die Nicht-Stichprobenfehler können also danach unterschieden werden, ob sie durch fehlerhafte Erfassung der Einheiten (coverage errors) entstehen oder bei der Datenerhebung bzw. -verarbeitung (content errors) auftreten.

Im Zusammenhang des Problemkreises Beeinträchtigung der Privatsphäre bzw. Vertraulichkeit von Daten sind vor allem die Nichtbeantwortung (non-response) und der Angabefehler (respondent error) bedeutsam.

Das Fehlen von Merkmalswerten in einer Erhebung aufgrund von non-response, in unserem Kontext insbesondere hervorgerufen durch die Weigerung, Angaben zu machen, führt zu verzerrten Schätzergebnissen, wobei das Ausmaß der Verzerrung von der Höhe des Non-Response-Anteils als auch des Unterschieds der Mittelwerte in der 'Response-Schicht' und der 'Non-Response-Schicht' abhängt. ²⁾

Das Ausmaß der Nichtbeantwortung kann beträchtlich sein: JESSEN gibt folgende Anhaltspunkte: Bei persönlichem Interview: 5-50 %, bei telefonischer Befragung: 20-40 %, bei postalischer Befragung: 5-95 %, bei unmittelbaren, objektiven Erhebungen (Messungen): 0-10 %. ³⁾

Bei den Angabefehlern sind - analog der Aufteilung des mean square error - die beiden Komponenten Antwortvariabilität und Antwortverzerrung zu unterscheiden. ⁴⁾ Die Antwortvariabili-

1) Vgl. STRECKER (1978, S.86f., S.113).

2) Vgl. COCHRAN (1977, S.361).

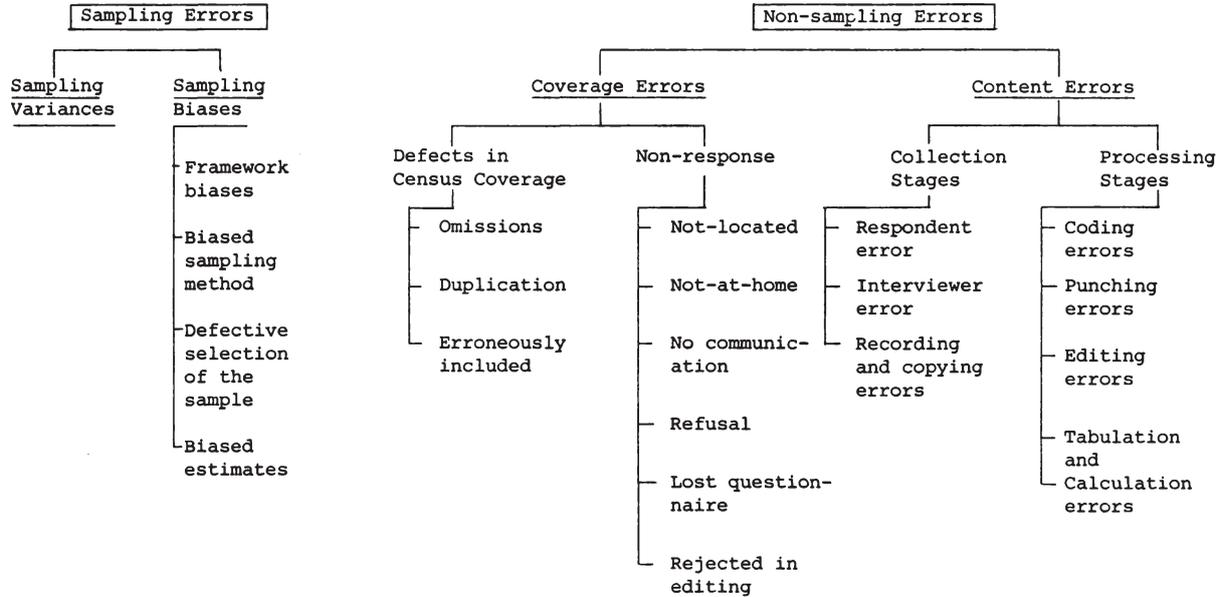
3) Vgl. JESSEN (1978, S.456).

4) Vgl. FRANKEL (1969).

Übersicht 1.1:

Fehlerarten - Components of the Error

nach HURWITZ und PRITZKER (U.S. Bureau of the Census)



Quelle: STRECKER (1978, S.113).

tät bezeichnet ein Phänomen, das auch bei Totalerhebungen auftritt: Wiederholt man Befragungen, so kann man bei demselben Befragten unterschiedliche Antworten auf dieselbe Frage erhalten; die Befragten sind also antwortvariabel. Diese Antwortvariabilität wird aus der zufällig vorliegenden konkreten Antwortsituation erklärt, so daß die Antwort bei gegebenem wahren Merkmalswert und Merkmalsträger als eine Zufallsvariable aufzufassen ist. ¹⁾ Unter der Antwortverzerrung sind dagegen systematische Fehler zu subsumieren, die durch Übererfassung (overreporting) oder Untererfassung (underreporting) hervorgerufen werden.

Das Ausmaß des Nicht-Stichprobenfehlers, das insbesondere durch Antwortverweigerung und Antwortverzerrung bedingt ist, hängt selbstverständlich entscheidend von den zu erhebenden Merkmalen ab. Eine besondere 'Problemgruppe' sind hierbei die sogenannten sensitiven Merkmale.

1.3 DIE ERHEBUNG SENSITIVER MERKMALE MIT HILFE DER RRT

Fragen nach sensitiven Merkmalen, kurz sensitive Fragen, zeichnen sich dadurch aus, daß viele Befragte nur sehr widerstrebend bereit sind, Auskunft zu geben, daß ihnen diese Fragen unangenehm sind oder daß sie gar in ihren Gefühlen verletzt werden.

Zu diesen sensitiven Fragen gehören solche nach sozial auffälligen, tabuisierten oder kriminellen Verhaltensweisen bzw. Tatbeständen und nach Merkmalen, über die im allgemeinen nicht offen gesprochen wird oder bei denen bestimmte Ausprägungen in hohem Maß sozial erwünscht bzw. unerwünscht sind.

Als Beispiele seien angegeben aus dem ökonomischen Bereich:

1) Vgl. STENGER (1977, S.391f.).

Einkommen, Vermögen etc.; ¹⁾ aus dem Gebiet der Familiensoziologie: ²⁾ Fragen nach Familienverhältnissen, Kindererziehung, Mißhandlung von Kindern und Ehepartner, Anwendung von Gewalt; jegliche Fragen nach Sexualverhalten, ³⁾ ⁴⁾ Geburt unehelicher Kinder und Abtreibung; Fragen nach Alkohol- und Drogenkonsum; ⁴⁾ Fragen nach bestimmten strafbaren Handlungen. ⁵⁾

In diesen Bereichen ist das Datenschutzbedürfnis besonders ausgeprägt, die Probleme des Schutzes der Privatsphäre und der Vertraulichkeit von Daten bei statistischen Erhebungen deshalb von besonderer Bedeutung für die Antwortbereitschaft.

Der Grad der empfundenen Sensitivität ist selbstverständlich bei den einzelnen Merkmalen unterschiedlich und wird von den historischen und gesellschaftlichen Bedingungen entscheidend geprägt.

BRADBURN et al. haben in einer Studie für die USA ⁶⁾ 1.172 Erwachsene zu verschiedenen sensitiven Fragen interviewt und nach dem Interview befragt, ob sie glaubten, daß die jeweiligen Fragen die meisten Leute "very uneasy", "moderately uneasy", "slightly uneasy" oder "not at all uneasy" mache. In der Übersicht 1.2 sind diese Ergebnisse wiedergegeben, wobei zusätzlich die Einschätzung der Interviewer und das Ausmaß der Antwortverweigerung angegeben sind.

Der Grad der Sensitivität wird insbesondere bei Fragen nach dem Einkommen, Alkohol- sowie Drogenkonsum und Sexualverhalten als sehr hoch empfunden. Hierbei stimmen die Einschätzungen von Befragten und Befragern weitgehend überein (Rangkorrelationskoeffizient von SPEARMAN $\rho=0.89$). ⁷⁾ Bemerkenswert sind die

1) Vgl. z.B. EULER (1977, S.577).

2) Vgl. FELLES (1978).

3) Vgl. z.B. COCHRAN et al. (1953) und JOHNSON/DELAMATER (1976).

4) Vgl. z.B. BLAIR et al. (1977).

5) Vgl. z.B. BELSON (1968).

6) Vgl. BRADBURN et al. (1979, S.64-84).

7) Vgl. BRADBURN et al. (1979, S.69).

Übersicht 1.2: Einschätzung der Sensitivität verschiedener Merkmalsbereiche.
 Ergebnisse einer Studie von BRADBURN et al. (1979)
 Relative Häufigkeiten (in %) der Angaben.

Question Topics	Make Most People uneasy (Respondent's Rating)	Caused Difficulty in Interview (Interviewer's Rating)	No Answer on Actual Question
Sports Activities	1	0	0.1
Leisure Time and General Leisure Activities	2	0	0.2
Social Activities	2	4	0.8
Occupation	3	3	0.1
Education	3	2	0.3
Happiness and Well-Being	4	6	0.3
Drinking Beer, Wine or Liquor	10	10	0.1
Gambling with Friends	10	3	0.2
Income	12	9	4.8
Petting or Kissing	20	19	0.3
Getting Drunk	29	9	2.3
Using Stimulants or Depressants	31	12	0.1
Using Marijuana or Hashish	42	10	0.4
Sexual Intercourse	42	27	6.0
Masturbation	56	29	6.7

Quelle: BRADBURN et al. (1979, S.68).

relativ geringen Antwortverweigerungs-raten, die jedoch erwartungsgemäß mit steigender Sensitivität im Durchschnitt auch zunehmen. Aus einer eingehenden Analyse der Studie ergibt sich, daß die Befragten bei zunehmender Sensitivität eher zunehmend zu under-reporting - also Angabefehlern - neigen. ¹⁾

Bei Fragen nach sensitiven Merkmalen sind also die Probleme der Antwortverweigerung bzw. der Falschbeantwortung besonder groß. Um in diesen Fällen diese Komponenten des Nicht-Stichprobenfehlers zu reduzieren, wird eine Vielzahl spezieller Methoden vorgeschlagen und in der Praxis angewandt.

¹⁾ Vgl. BRADBURN et al. (1979, S.71-75).

Wir wollen in der hier gebotenen Kürze nur auf solche Verfahren eingehen, die die Anlage und Organisation einer Befragung und die Gestaltung des Fragebogens betreffen, und Probleme des Interviewer-Einflusses oder der Motivation der Befragten nicht explizit behandeln. ¹⁾

Bei den Verfahren, die eine Verringerung des Angabefehlers und der Nichtbeantwortung bezwecken, lassen sich zwei Gruppen unterscheiden. Bei den direkten Verfahren werden - bei bedeutenden Differenzen der Modalitäten - die Fragen direkt nach dem zu erhebenden Merkmal gestellt; aus der gegebenen Antwort läßt sich - bei wahrheitsgemäßer Beantwortung - eindeutig auf den Merkmalswert des Befragten zurückschließen.

Diesen Verfahren stehen die indirekten Verfahren gegenüber, bei denen die Antwortwerte irreversibel verschlüsselte Beobachtungswerte darstellen; die individuellen Merkmalswerte lassen sich durch die Verschlüsselung nicht mit Sicherheit rekonstruieren.

Bei den direkten Methoden kommen der Fragebogengestaltung und der Fragenformulierung ²⁾ ein besonders bedeutender Einfluß auf die Reduktion des Angabefehlers zu. Aufgrund der Analyse empirischer Studien und Erfahrungen zieht SUDMAN (1980) folgendes Resumé für die Fragebogengestaltung und die Fragenformulierung bei sensitiven Fragen: ³⁾

- "Open questions are better than closed questions for obtaining information on frequencies of socially undesirable behavior".
- "Long questions are better than short questions for obtaining information on frequencies of socially undesirable behavior".

1) Vgl. hierzu SUDMAN/BRADBURN (1974, S.93-139).

2) Vgl. die von BARTON (1958) angegebenen Möglichkeiten für die Frage, ob der Befragte seine Ehefrau getötet habe.

3) SUDMAN (1980, S.270 f.).

- "The use of familiar words may increase the reporting of frequencies of socially undesirable behavior".
- "Consider deliberate loading of the question to both reduce overstatements of socially desirable behavior and understatements of socially undesirable behavior".
- "For socially undesirable behavior it is better to start with a question that asks if the respondent has ever engaged in the behavior before asking about current behavior. For socially desirable behavior, ask about last time rather than usual behavior".
- "If possible, embed the threatening topic into a list of more threatening topics to reduce the perceived importance of the topic to the respondents".
- "Avoid the use of reliability checks on the same questionnaire since this will annoy respondent".
- "Ask questions at the end of the interview to determine how threatening the topics were perceived to be by the respondent".

Neben diesen Möglichkeiten der Fragebogengestaltung können Verfahren angewandt werden, die (mehr oder minder weitgehend) anonym durchgeführt werden; z.B. anonyme selbst auszufüllende Fragebögen, die mit der Post verschickt werden, oder telefonische Befragungen. 1) Bei diesen anonymen Befragungen sind jedoch oft nachträgliche Identifizierungen aufgrund der Auswahlunterlagen oder aufgrund von Zusatzinformationen möglich. Dies gilt jedoch nur eingeschränkt für verschiedene Verfahren, die mit Urnen arbeiten; z.B. das 'Secret Ballot'-Verfahren, bei dem die Befragten einen verschlossenen Umschlag mit der Angabe ihres Merkmalswerts in eine Urne werfen. 2) 3)

- 1) Eine interessante Variante ist die von CARIFIO/BIRON (1978) entwickelte Context-Determined, Rule-Generated, Pseudonym (CDRGP-) Technique, die mit einem aus dem Namen des Befragten abgeleiteten irreversiblen Identifizierungscode arbeitet und damit im Gegensatz zu anderen anonymen Verfahren Verlaufsanalysen zulässt.
- 2) Vgl. FRANKEL/FRANKEL (1977, S.291).
- 3) Vgl. auch ein ähnliches Verfahren, das von BELSON (1968, S.172) angewandt wurde.

Diesen direkten Verfahren, die schon seit Jahrzehnten bei Befragungen nach sensitiven Merkmalen angewandt werden, stehen die - in den letzten fünfzehn Jahren entwickelten - indirekten Verfahren gegenüber, bei denen die individuellen Merkmalswerte irreversibel verschlüsselt werden.

Unter diesen Verfahren dominiert die sogenannte Randomized-Response-Technik (RRT), die auch als einzige in der Praxis häufiger angewandt und untersucht wurde. 1) 2)

Die RRT wurde von WARNER (1965) mit seinem Aufsatz "Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias" begründet. Dieses WARNER-Modell, das in der Folgezeit - wie den nächsten Kapiteln dieser Arbeit zu entnehmen ist - entscheidend

- 1) Die RRT wird in mehreren neueren Statistikbüchern und Monographien zur Stichprobentheorie behandelt; vgl. COCHRAN (1977, S.392-395, 398f.), JESSEN (1978, S.435-438, 446f.), JOHNSON/KOTZ (1977, S.290 ff.), MENDENHALL et al. (1971, S.210-212), MOSER/KALTON (1971, S.328-331), NOETHER (1976, S.70-72,75), ORKIN/DROGIN (1975, S.325-330), RAJ (1968, S.255f.), WILLIAMS (1978, S.72-74). Reviews zur RRT enthalten ALEXANDER (1978), CAMPBELL/JOINER (1973), DEVORE (1979), HORVITZ et al. (1976), KIM/FLUECK (1976), MARBACH (1975), POHL/POHL (1975), VERDOOREN (1976). Die relevante Literatur zur RRT bis 1977 ist fast vollständig in der Bibliographie von DANIEL (1979) aufgeführt.
- 2) Einen ähnlichen Ansatzpunkt wie die RRT hat die Methode der 'Combined Questions', die von SWENSSON entwickelt wurde - vgl. SWENSSON (1974, 1975, 1976a, 1976c) -, die Block Total Response Procedure - vgl. RAGHAVARAO/FEDERER (1979) und SMITH et al. (1974) - und die sogenannten Value Indifferent Observation Schemes - vgl. THEDEEN (1975) -. Die Grundidee aller dieser Methoden ist, daß der Befragte seine Merkmalswerte bez. mehrerer Fragen nach bestimmten Regeln zu einer Antwort zusammenfaßt, aus der sich die einzelnen Merkmalswerte i.a. nicht zurückschließen lassen. Aufgrund mehrerer Stichproben mit unterschiedlichen Anordnungen der Fragen lassen sich die Parameter der Grundgesamtheit schätzen. Diese Methoden haben jedoch in der Praxis bisher keine Bedeutung erlangt.

erweitert und modifiziert wurde, sei hier kurz exemplarisch dargestellt:

Um festzustellen, wie groß bspw. der Anteil (π) der Personen einer bestimmten Grundgesamtheit ist, die bereits einmal die Droge Marihuana konsumiert haben, werden die für die Befragung Ausgewählten folgender Befragungsprozedur unterworfen:

Eine Urne mit 70 roten und 30 weißen Kugeln wird geschüttelt, erscheint in einem Ausgang der Urne, der für den Interviewer nicht zu sehen ist, eine rote Kugel, so hat der Befragte die Frage "Haben Sie schon einmal in Ihrem Leben Marihuana genommen?" zu beantworten. Bei einer weißen Kugel dagegen die Frage "Haben Sie in Ihrem Leben noch nie Marihuana genommen?" Der Befragte antwortet mit "Ja" oder "Nein"; aus seiner Antwort läßt sich nicht schließen, ob er Marihuana konsumiert hat oder nicht. Damit ist die Vertraulichkeit seiner Angabe gewährleistet, dem Befragten wird so eine (wahrheitsgemäße) Antwort erleichtert und damit möglicherweise eine Ursache für Antwortverweigerung oder Angabefehler behoben. Obgleich die individuellen Merkmalswerte unbekannt sind, läßt sich der Anteil π aus dem Anteil der Ja-Antworten ($\hat{\lambda}$) in der Stichprobe und der Zusammensetzung der verwendeten Randomisierungsurne (Anteil der roten Kugeln $P = 0.7$) schätzen.

Für die Wahrscheinlichkeit λ einer Ja-Antwort gilt nämlich:

$$\lambda = P\pi + (1-P)(1-\pi)$$

in unserem Beispiel also:

$$\lambda = 0.4\pi + 0.3$$

Hieraus erhalten wir eine erwartungstreue Schätzung $\hat{\pi}$ für den Anteil der Marihuana-Konsumenten aus der Stichprobe:

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{2P-1}$$

bzw. im Beispiel

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - 0.3}{0.4}$$

Die Varianz des Schätzers läßt sich ebenfalls erwartungstreu aus der Stichprobe schätzen:

$$\text{Vâr } \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(2P-1)^2}$$

in unserem Beispiel:

$$\text{Vâr } \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)0.16}$$

Die Anwendung der RRT ist nicht nur auf alternative Merkmale beschränkt, sondern kann auch bei mehrklassigen nominal-skalierten und bei quantitativen Merkmalen angewandt werden. Wie im 6.Kapitel der Arbeit gezeigt wird, lassen sich auch multivariate Fragestellungen anhand von RRT-Daten analysieren.

Die RRT ermöglicht also allgemein die Schätzung von Parametern einer Grundgesamtheit aus Antworten, die sich durch eine irreversible stochastische Verschlüsselung der individuellen Merkmalswerte ergeben. Durch eine künstlich generierte Antwortvariabilität, die die Vertraulichkeit der Daten sichert, soll damit die bei sensitiven Merkmalen besonders bedeutende Antwortverzerrung verringert werden.

Vor der ausführlichen Darstellung der einzelnen RRT-Modelle und vor einem Vergleich der Methoden stellen wir die allgemeinen methodischen Grundlagen der RRT dar, die dann in den Einzelfällen spezialisiert anzuwenden sind.

2. STATISTISCHE INFERENCE IM ALLGEMEINEN RRT-MODELL

2.1 DAS ALLGEMEINE RRT-MODELL

Im Folgenden soll ein allgemeines Modell der Randomized-Response-Technik entwickelt werden, das alle möglichen Modellvarianten und Merkmalsarten umfaßt und den umfassenden Rahmen für die Behandlung von Schätz- und Testproblemen bietet ¹⁾. Nach einer allgemeinen maßtheoretischen Formulierung wird das Modell für diskrete und stetige Zufallsvariable konkretisiert.

Das allgemeine RRT-Modell, das in Abbildung 2.1 dargestellt ist, besteht aus vier Bestandteilen: ²⁾

- der Untersuchungs-/Erhebungsvariablen X

$X: (\Omega, \alpha, P) \rightarrow (\Omega_x, \alpha_x)$ mit der (unbekannten) Verteilung P_x

- der Randomisierungs-/Antwortsteuerungsvariablen Z

$Z: (\Omega', \alpha', P') \rightarrow (\Omega_z, \alpha_z)$ mit der (bekannten) Verteilung P_z , die von X stochastisch unabhängig ist und die Randomisierung bzw. Antwortsteuerung widerspiegelt, ³⁾

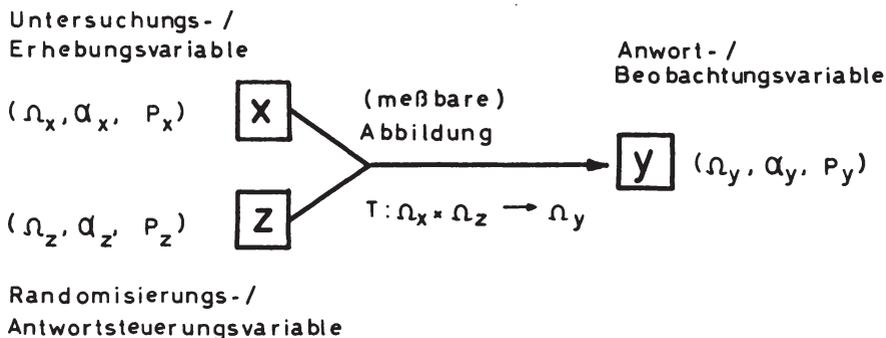
- der Antwort-/Beobachtungsvariablen Y mit dem Bildraum (Ω_y, α_y) und der Verteilung P_y , die die Antwort des Befragten darstellt, und einer

- 1) Die von WARNER (1971) und ANDERSON (1975b, 1977) dargestellten allgemeinen RRT-Modelle sind Spezialfälle des hier vorgeschlagenen Modells.
- 2) Die verwendeten Bezeichnungen sind in der maßtheoretisch fundierten Wahrscheinlichkeitsrechnung üblich; vgl. etwa HINDERER (1975, S.244).
- 3) SUZUKI et al. (1977) und TAKAHASI/SAKASEGAWA (1977) schlagen eine Version des WARNER-Modells vor, in der die Verteilung der Randomisierungsvariablen unbekannt ist und von X abhängt. Um in diesem Fall zu einer Schätzfunktion für π zu gelangen, müssen sie aber zusätzliche, nicht überprüfbare, Annahmen bez. des Verhaltens der Befragten machen. Zu den Schwierigkeiten der Schätzung in diesem Modell vgl. SINGH (1978).

- (meßbaren) Abbildung T

$T: \Omega_x \times \Omega_z \rightarrow \Omega_y$, die die Verknüpfung der Untersuchungsvariablen mit der Antwortvariablen wiedergibt. Es entspricht der Logik der RRT, daß die Abbildung T nicht eineindeutig sein sollte.

Abb. 2.1: Das allgemeine RRT-Modell



Die einzelnen Realisierungen der Untersuchungsvariablen X und der Randomisierungsvariablen Z sind nicht beobachtbar, lediglich die Werte der Antwortvariablen Y. Aufgrund des gewählten RRT-Modells und der speziellen Parameterkonstellation sind jedoch die Verteilung von Z und die Abbildung T bekannt. Die Verteilung der Untersuchungsvariablen X dagegen ist unbekannt; aus den Stichproben-daten will man Informationen über sie gewinnen. Die gemeinsame Verteilung von X und Z ergibt sich aufgrund der Unabhängigkeit als Produktmaß der beiden (Rand-)Verteilungen:

$$(2.1) \quad P_{(x,z)} = P_x \otimes P_z .$$

Die Verteilung von Y ist dann das Bildmaß von $P_{(x,z)}$ bei T:

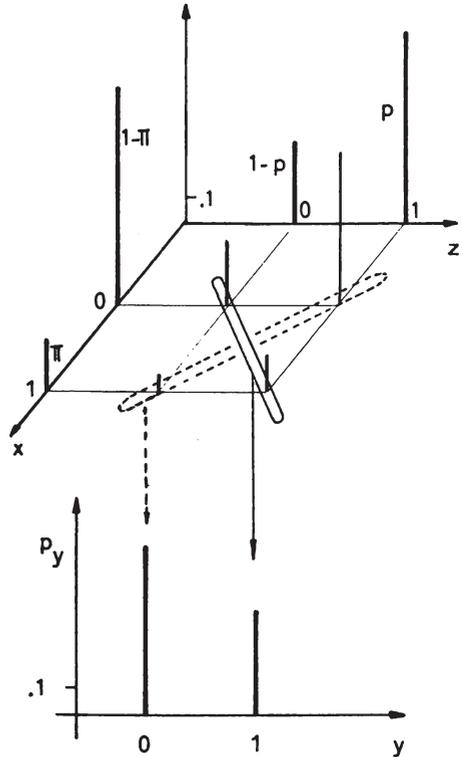
$$(2.2) \quad P_y = T(P_{(x,z)}) = T(P_x \otimes P_z) .$$

Abb. 2.2: Untersuchungs-, Randomisierungs- und Antwortvariable im WARNER-Modell

Abbildung $T(x,z) = y$

		Frage nach		$p_x(x)$
		\bar{A} $z=0$	A $z=1$	
X	\bar{A}	1 $(1-p)(1-\pi)$	0 $p(1-\pi)$	$1-\pi$
	A	0 $(1-p)\pi$	1 $p\pi$	π
$p_z(z)$		$1-p$	p	1

y	$p_y(y)$
0	$(1-p)\pi + p(1-\pi)$
1	$p + (1-p)(1-\pi)$
	1



In der Abbildung 2.2 ist dieser Zusammenhang exemplarisch für das WARNER-Modell dargestellt. In praktischen Anwendungen liegen ausschließlich sogenannte diskrete bzw. stetige Zufallsvariablen X , Y , Z vor, so daß sich der allgemeine Zusammenhang (2.2) für deren

Übersicht 2.1: Modellkonstellationen im allgemeinen RRT-Modell:

Dichte- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion der Antwortvariablen

Untersuchungs- variable X	<u>diskret</u> Wahrscheinlichkeitsfunktion p_x		<u>stetig</u> Dichtefunktion f_x	
Randomisierungs- variable Z	<u>diskret</u> Wkt.-Fkt. p_z	<u>stetig</u> Dichtefkt. f_z	<u>diskret</u> Wkt.-Fkt. p_z	<u>stetig</u> Dichtefkt. f_z
Antwort- variable Y				
<u>diskret</u> Wahrscheinlichkeits- funktion $p_y(y)$	(2.3) $\sum p_x(x) \cdot p_z(z)$ $T(x,z)=y$ (vgl. z.B. 3 und 4)	(2.4) $\sum_{x \in \Omega_x} [p_x(x) \int_{B_x} f_z(z) dz]$ mit $B_x := \{z T(x,z)=y\}$ (vgl. z.B. 5.3)	(2.5) $\sum_{z \in \Omega_z} [p_z(z) \int_{B_z} f_x(x) dx]$ mit $B_z := \{x T(x,z)=y\}$ (vgl. z.B. 5.3)	(2.6) $\iint f_x(x) f_z(z) dx dz$ $T(x,z)=y$ (vgl. z.B. 5.3)
<u>stetig</u> Dichtefunktion $f_y(y)$	unmöglich	(2.7) $\sum_{x \in \Omega_x} p_x(x) g_x(y)$ mit $g_x(y) = P(Y=y X=x)$ (vgl. z.B. 5.2)	(2.8) $\sum_{z \in \Omega_z} p_z(z) g_z(y)$ mit $g_z(y) = f(Y=y Z=z)$ (vgl. z.B. 5.1, 5.2)	(2.9) $\iint f_x(x) f_z(z) dx dz$ $T(x,z)=y$ (vgl. z.B. 5.2)

Dichten/Wahrscheinlichkeitsfunktionen konkretisieren läßt.

Im allgemeinen Modell können somit sieben mögliche Fälle mit diskreten bzw. stetigen Zufallsvariablen X, Y, Z unterschieden werden ¹⁾.

In der Übersicht 2.1 ist in den Formeln (2.3) bis (2.9) angegeben, wie sich die Dichte bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion der Antwortvariablen aus den entsprechenden Funktionen der Untersuchungs- und Randomisierungsvariablen ermitteln läßt; hierbei wird für den Wert der Dichte-/Wahrscheinlichkeitsfunktion der Antwortvariablen an der Stelle y die gemeinsame Verteilung von X und Z über alle Wertepaare (x,z) summiert (integriert), für die die Abbildung T den Wert y ergibt.

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs der Dichten/Wahrscheinlichkeitsfunktionen von X, Y und Z lassen sich - bei parametrischen Verteilungen - die Parameter der Verteilung von Y mit denen von X und Z in Beziehungen bringen. Dies stellt die Grundlage für die Parameterschätzung dar.

2.2 SCHÄTZEN IM ALLGEMEINEN RRT-MODELL ²⁾

Die 'klassischen' Methoden zur Gewinnung von Schätzfunktionen - die Momenten-Methode, die Maximum-Likelihood-Methode und das Kleinst-Quadrate-Prinzip ³⁾ - lassen sich, teils modifiziert, auch im allgemeinen RRT-Modell anwenden. Die Verteilung der Antwortvariable X - n unabhängige Kopien bilden die Stichprobe (Y_1, \dots, Y_n) - hängt über (2.2) von der Verteilung der Untersuchungsvariablen $X, p_x(\cdot, \theta)$ ab, wobei θ einen Parameter (vektor) bezeichnet, der aus den Stichprobendaten zu schätzen ist.

- 1) Der Fall X, Z diskret und Y stetig scheidet aus, da nach dem Satz von Radon-Nikodym das Bildmaß eines diskreten Wahrscheinlichkeitsmaßes keine (Lebesgue-)Dichte haben kann.
- 2) In dieser Arbeit stehen - wie in der Stichprobentheorie üblich - Schätzprobleme im Vordergrund. Eine Ausnahme bildet Kap.6.3. Testprobleme behandeln im Zusammenhang mit der RRT FERRARI (1978) und LEVY (1976a, 1976b, 1977a, 1977b, 1978). Zur Anwendung Bayesscher Methoden in der RRT vgl. SPURRIER/PADGETT (1980) und WINKLER/FRANKLIN (1979).
- 3) Diese Schätzmethoden werden in Standardlehrbüchern der mathematischen Statistik ausführlich dargestellt, vgl. etwa BICKEL/DOKSUM (1977, S.89-115).

2.2.1 Die Momentenmethode

Die Momentenmethode kann im Falle einer direkten Befragung angewandt werden, wenn sich θ darstellen läßt als

$$(2.10) \quad \theta = g(m_1^x(\theta), \dots, m_r^x(\theta)) \quad (r \in \mathbb{N}) \quad ,$$

wobei

$$(2.11) \quad m_j^x(\theta) = EX^j$$

das j-te Moment von X (um den Nullpunkt) ist.

Das j-te Stichprobenmoment \hat{m}_j^x ist

$$(2.12) \quad \hat{m}_j^x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j \quad ;$$

hierbei ist (X_1, \dots, X_n) eine Stichprobe unabhängiger Kopien von X. Der Momentenmethodenschätzer bei direkter Befragung $\hat{\theta}^d$ wird dann gebildet als

$$(2.13) \quad \hat{\theta}^d = T^d(X_1, \dots, X_n) := g(\hat{m}_1^x, \dots, \hat{m}_r^x) \quad 1)$$

Wendet man die RRT an, so sind die Realisationen von X nicht beobachtbar. Läßt sich jedoch zwischen den Momenten von X und den Momenten von Y ein (vektorieller) Zusammenhang ϕ derart finden, daß gilt:

$$(2.14) \quad [m_1^x(\theta), \dots, m_r^x(\theta)] = \phi [m_1^y(\theta), \dots, m_{r'}^y(\theta)] \quad (r, r' \in \mathbb{N}) \quad ,$$

so kann aufgrund der Stichprobenmomente \hat{m}_j^y ein RRT-Schätzer $\hat{\theta}^x$ für θ nach der Momentenmethode ermittelt werden,

$$(2.15) \quad \hat{\theta}^x := T^x(Y_1, \dots, Y_n) := g[\phi(\hat{m}_1^y, \dots, \hat{m}_{r'}^y)] \quad ,$$

indem man den Zusammenhang (2.14) in (2.13) einsetzt.

Aufgrund der Konsistenz der Stichprobenmomente als Schätzfunktionen für die Momente der Zufallsvariablen sind die Momentenmethodenschätzer $\hat{\theta}^d$ bzw. $\hat{\theta}^x$ (Formel (2.13) bzw. (2.15)) konsistent, wenn g

1) Vgl. BICKEL/DOKSUM (1977, S.92).

bzw. $g[\phi]$ stetig ist ¹⁾).

2.2.2 Die Maximum-Likelihood-Methode

Ausgehend von den Formeln (2.3) bis (2.9) für die Dichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) von Y sieht man, daß auch diese nur von dem unbekanntem Parameter θ der Verteilung von X abhängt, da die Verteilung von Z und die Abbildung T bekannt sind:

$$f_Y(\cdot; \theta) .$$

Die logarithmierte Likelihood-Funktion $L(\theta; y_1, \dots, y_n)$ ist dann im Fall einer Stichprobe mit unabhängigen, identisch verteilten Stichprobenzügen

$$(2.16) \quad L(\theta; y_1, \dots, y_n) = \sum_i \log f_Y(y_i; \theta) .$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_{ML}$ wird als das Maximum von (2.16) - bei gegebenen Stichprobendaten y_1, \dots, y_n - wie üblich bestimmt, wobei evtl. Restriktionen bez. θ zu beachten sind.

In vielen Fällen gehören die Dichten f_Y einer Verteilungsfamilie an, für deren charakteristische Parameter λ ML-Schätzer $\hat{\lambda}_{ML}$ bekannt sind. Besteht nun zwischen λ und θ eine eindeutige Beziehung ψ ,

$$(2.17) \quad \lambda = \psi(\theta) ,$$

so gilt nach dem Invarianzprinzip der Maximum-Likelihood-Methode ²⁾

$$(2.18) \quad \hat{\theta}_{ML} = \psi^{-1}(\hat{\lambda}_{ML}) ,$$

so daß sich in diesen Fällen die ML-Schätzer besonders einfach ermitteln lassen. Hierbei ist allerdings zu beachten, daß Restriktionen bezüglich θ nicht verletzt werden. Bekanntlich sind ML-Schätzer unter recht allgemeinen Regularitätsbedingungen konsistent sowie asymptotisch erwartungstreu, effizient und normalverteilt. ³⁾

1) Vgl. BICKEL/DOKSUM (1977, S.133).

2) Vgl. MOOD et al. (1974, S.284).

3) Vgl. NORDEN (1972).

2.2.3 Das Kleinst-Quadrate-Prinzip

WARNER (1971) entwickelte ein allgemeines lineares Modell der RRT, in dem zur Schätzung der Parameter unterschiedliche Varianzen der Methode der kleinsten Quadrate verwendet werden ¹⁾. Im hier vorgestellten allgemeinen Modell der RRT lassen sich nämlich in vielen Fällen die Elemente von Ω_X und Ω_Z als Vektoren bzw. Matrizen so wählen, daß

$$(2.19) \quad \underline{Y} = T(\underline{X}, \underline{Z}) = \underline{Z} \underline{X} \quad (\Omega_X = \mathbb{R}^m ; \Omega_Z = \mathbb{R}^{(n,m)} , \Omega_Y = \mathbb{R}^n)$$

ist.

Ist der zu schätzende Parametervektor $\underline{\theta}$ der Erwartungswert von \underline{X} ,

$$(2.20) \quad \underline{\theta} = E\underline{X} \quad ,$$

bietet sich mit

$$(2.21) \quad E\underline{Y} = E\underline{Z} \quad E\underline{X} = \underline{P} \underline{\theta} \quad (\text{mit } \underline{P} := E\underline{Z})$$

folgendes lineares Modell an:

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \underline{Y}_i &= \underline{P} \underline{\theta} + \underline{U}_i \\ E\underline{U}_i &= \underline{0} \quad . \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Die Varianz-/Kovarianzmatrix der Störglieder ist von der speziellen Modellsituation abhängig.

Bei der Schätzung von $\underline{\theta}$ ist evtl. zu berücksichtigen, daß die Regressorenmatrix nicht den vollen Rang hat oder daß Nebenbedingungen bez. $\underline{\theta}$ zu beachten sind. Aufgrund der Gestalt der Varianz-Kovarianzmatrix der Störglieder ist entweder die klassische oder die verallgemeinerte Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden, evtl. unter Berücksichtigung der o.a. Besonderheiten.

In vielen Fällen stimmen die so ermittelten Schätzfunktionen $\hat{\theta}_{KQ}$ mit auf andere Weise abgeleiteten überein; diese Ableitung hat

1) Vgl. WARNER (1971).

jedoch den Vorteil, daß aufgrund der Theoreme von GAUSS-MARKOFF-(AITKEN) (auch nicht asymptotische) Eigenschaften der Schätzfunktionen angegeben werden können.

2.3 STICHPROBENTHEORETISCHE BETRACHTUNG

2.3.1 Modifikation des allgemeinen RRT - Modells

Die in 2.2 dargestellten Methoden gehen von der Annahme aus, die einzelnen Stichprobenzüge Y_i , $i = 1, \dots, n$ (n : Stichprobenumfang), seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit der Verteilung $p_y(\cdot; \theta)$. Diese Annahme trifft jedoch für fast alle in der Praxis angewandten Stichprobenverfahren nicht zu. Somit erscheint eine Einordnung der RRT-Modelle in die Stichprobentheorie angebracht, bei der darüber hinaus möglichst eine analytische Trennung der beiden stochastischen Elemente, Stichprobenauswahl und Randomisierung, zu erreichen ist, um so leichter auf die Ergebnisse der Stichprobentheorie zurückgreifen zu können.

Hierzu ist eine Modifikation des Modells aus 2.1 vorzunehmen. An die Stelle der Zufallsvariablen X (die die identisch verteilten Züge repräsentiert) tritt eine (verallgemeinerte) Zufallsvariable S , Stichprobenauswahl, deren Realisationen n -elementige Mengen von Merkmalsträgern der Grundgesamtheit sind ¹⁾. Die Verteilung von S ergibt sich aus dem jeweiligen Stichprobenplan. Die Abbil- 2.3 faßt diese Zusammenhänge mit dem in 2.1 Ausgeführten zusammen.

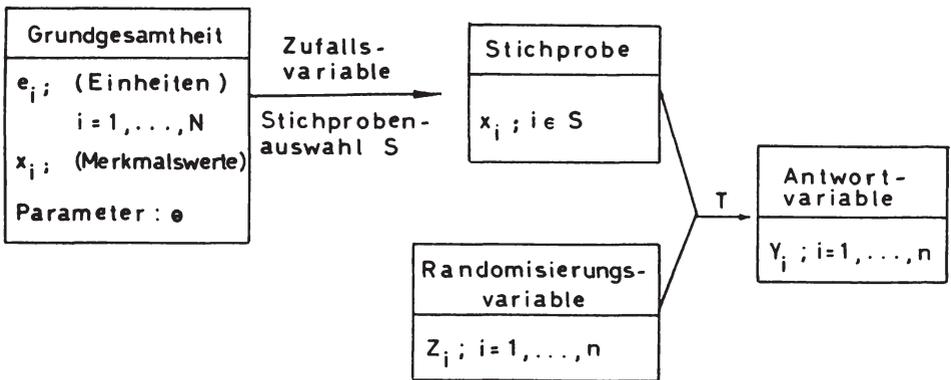
Die Randomisierungsvariable kann - ebenso wie die Untersuchungsvariable - eine mehrdimensionale Zufallsvariable sein. Wird die Randomisierungsvariable durch k -fache Kopie einer Zufallsvariablen generiert und bei jedem der k Versuche eine Antwort beobachtet, spricht man von einem sogenannten Multiple-Trial-Modell. Es ist naheliegend, daß zu jedem RRT-Modell Multiple-Trial-Versionen

1) Vgl. etwa CASSEL et al. (1977, S.3-12).

konstruiert werden können.

Eine Schätzfunktion $\hat{\theta}^x(Y_1, \dots, Y_n)$ hängt somit von der Stichprobenauswahl S und den als unabhängig angenommenen Kopien der Randomisierungsvariablen Z ab.

Abb. 2.3: Das modifizierte allgemeine RRT-Modell-
stichprobentheoretische Betrachtung



2.3.2 Schätzen im allgemeinen modifizierten RRT-Modell

Für die Untersuchung der Eigenschaften eines RRT-Schätzers $\hat{\theta}^x$ ist eine bedingte Betrachtung sinnvoll, um die Einflüsse der Stichprobenauswahl und der Randomisierung voneinander zu trennen.

Bezeichnet man die Erwartungswert- bzw. Varianzbildung bez. der Stichprobenauswahl mit Index 1, bez. der Randomisierung mit Index 2, so ergeben sich folgende Formeln für den Erwartungswert und die Varianz von $\hat{\theta}^x$:

$$(2.23) \quad E\hat{\theta}^x = E_1 E_2(\hat{\theta}^x | S)$$

$$(2.24) \quad \text{Var } \hat{\theta}^x = \text{Var}_1 E_2(\hat{\theta}^x | S) + E_1 \text{Var}_2(\hat{\theta}^x | S)$$

Von besonderem Interesse ist die Varianzzerlegung (2.24). Der erste Bestandteil - die 'externe Varianz' - ist auf die Stichprobenauswahl zurückzuführen, wir bezeichnen ihn deshalb als Stichprobenvarianz. Der zweite Bestandteil - die 'interne Varianz' - ist auf die Randomisierung zurückzuführen, die zu einer Streuung der Antwortvariablen bei einer festen Stichprobeneinheit führt; diese Varianzkomponente wird deshalb als Antwortvarianz oder Zusatzvarianz bezeichnet ¹⁾.

In der Stichprobentheorie steht die Schätzung von Merkmalssummen und Mittelwerten und die Ermittlung der Varianzen der Schätzer i.a. im Vordergrund ²⁾.

Für die gebräuchlichsten - ungebundenen - Stichprobenverfahren lassen sich die Schätzer für die Merkmalssumme X ³⁾ (und damit auch für Durchschnitte) als homogene - lineare Schätzer darstellen ⁴⁾.

-
- 1) ERIKSSON (1976a, S.4), verwendet - in einem etwas speziellen Fall - die Bezeichnungen 'sampling variance' und 'response variance'.
 - 2) Betrachtungen der Optimalität von Schätzern bei der RRT werden hier nicht vorgenommen, vielmehr wird auf die üblichen Stichprobenverfahren zurückgegriffen. Vgl. zur optimalen Schätzung im WARNER-Modell GODAMBE (1980), dessen Ansatz jedoch von geringer praktischer Relevanz zu sein scheint. Vgl. auch LOYNES (1976a, 1976b) und BELLHOUSE (1980).
 - 3) Wir verwenden hier die in der Stichprobenliteratur übliche Bezeichnung; Verwechslungen mit - den ansonsten in Großbuchstaben geschriebenen - Zufallsvariablen sind im Kontext kaum möglich.
 - 4) Die folgenden Betrachtungen gelten - unmodifiziert - nur dann, wenn eine Einheit höchstens einmal in die Stichprobe gelangen kann.

$$(2.25) \quad \hat{X}^d = \sum_{i=1}^N w_i x_i \quad \text{mit den Zufallsvariablen}$$

$$(2.26) \quad w_i = \begin{cases} w_{iS} & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases} \quad i=1, \dots, N$$

Dieser Schätzer wird hier als direkter Schätzer bezeichnet. Die Grundgesamtheit umfasse N Elemente mit den Merkmalswerten x_i ; $i=1, \dots, N$; gelangt eine Einheit i in die Stichprobe, so wird ihr Merkmalswert mit w_{iS} gewichtet, wobei das Gewicht sowohl von der Einheit als auch den anderen in die Stichprobe gelangten Einheiten abhängen kann.¹⁾

Bei der Ermittlung eines RRT-Schätzers kann man die Formel (2.25) für den direkten Schätzer auf zwei Arten verwenden. Nach dem Ansatz von ERIKSSON (1976) ermittelt man aufgrund der Antwort Y_i einen Schätzwert \hat{x}_i für x_i ($i \in S$) und ersetzt die x_i in (2.25) durch \hat{x}_i . Auf dem anderen Weg ermittelt man aufgrund von (2.25) mit den Antwortwerten Y_i ($i \in S$) einen Schätzer für den Erwartungswert von Y und wendet dann die in 2.2.1 erläuterte Momentenmethode an. Voraussetzung des ERIKSSON-Ansatzes ist, daß man - wie in den meisten Fällen - Schätzfunktionen $\hat{x}_i(Y_i)$ für x_i finden kann, die bezüglich der Randomisierungsvariablen erwartungstreu sind:

$$(2.27) \quad E_2 \hat{x}_i = x_i \quad ; \quad i \in S$$

Der RRT-Schätzer \hat{x}_E^r ergibt sich aus (2.25) durch Ersetzen von x_i durch \hat{x}_i ,

$$(2.28) \quad \hat{x}_E^r = \sum_{i=1}^N w_i \hat{x}_i = \sum_{i \in S} w_{iS} \hat{x}_i$$

1) Vgl. etwa das Beispiel in CASSEL et al. (1977, S.5).

und hat folgende Eigenschaften, falls \hat{X}^d erwartungstreu ist:

$$(2.29) \quad \hat{E}X_E^r = E_1 E_2 (\hat{X}_E^r | S) = E_1 \hat{X}^d = X \quad ,$$

d.h. \hat{X}_E^r ist ebenfalls erwartungstreu und hat nach (2.24) die Varianz

$$(2.30) \quad \begin{aligned} \text{Var } \hat{X}_E^r &= \text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N W_i x_i \right) + \sum_{i=1}^N E_1 (W_i^2) \text{Var}_2 \hat{x}_i \\ &= \text{Var}_1 \hat{X}^d + \sum_{i=1}^N E_1 (W_i^2) \text{Var}_2 \hat{x}_i \end{aligned}$$

Aus (2.30) sieht man, daß die Varianz des RRT-Schätzers immer um die Antwortvarianz größer als die Varianz des Schätzers bei direkter Befragung ist.

Bei Anwendungen sind in der Varianz-Formel (2.30) im allgemeinen weder $\text{Var}_1 \hat{X}^d$ noch $\text{Var}_2 \hat{x}_i$ bekannt, so daß man $\text{Var } \hat{X}^r$ schätzen muß. Hier kann man analog dem Vorgehen bei der Schätzung der Varianz in mehrstufigen Stichprobenmodellen verfahren.¹⁾ Hierbei entspricht der Auswahl auf der ersten Stufe die Stichprobenauswahl, der Auswahl auf der zweiten Stufe die Randomisierung.

Ausgangspunkt ist eine erwartungstreue Schätzfunktion \hat{X}^d für die Merkmalssumme und eine erwartungstreue Schätzfunktion $\hat{V}ar \hat{X}^d$ für deren Varianz bei der direkten Befragung.

Bedingung für die Erwartungstreue von \hat{X}^d (unabhängig von den x_i - Werten) ist:

$$(2.31) \quad E_1 W_i = 1 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad .$$

Den entsprechenden RRT-Schätzer erhält man durch Ersetzen von x_i durch \hat{x}_i :

1) Vgl. etwa RAJ (1966).

$$(2.32) \quad \hat{X}^r = \sum_{i \in S} w_i \hat{x}_i \neq \sum_{i=1}^N W_i \hat{x}_i$$

Ausgangspunkt der Überlegungen zur Varianzschätzung ist eine erwartungstreue Schätzfunktion $V\hat{a}r \hat{X}^d$ für $Var(\sum_{i=1}^N W_i x_i)$ [= $Var \hat{X}^d$], die sich als quadratische Form darstellen läßt:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} V\hat{a}r X^d &= \sum_{\substack{i,j \\ \in S}} a_{ijS} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^N A_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} A_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

mit
$$A_{ij} = \begin{cases} a_{ijS} & ; i, j \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad a_{ijS} \in \mathbb{R} .$$

Das Produkt der Merkmalswerte der Einheiten i und j wird in der Summe also mit a_{ijS} gewichtet, falls i und j in die Stichprobe S gelangen.

Wegen der Erwartungstreue von $V\hat{a}r \hat{X}^d$ muß (2.34) gelten:

$$(2.34) \quad \begin{aligned} E_1 A_{ii} &= Var_1 W_i \\ E_1 A_{ij} &= Cov_1(W_i, W_j) \end{aligned} \quad i, j = 1, \dots, N$$

Dieses Ergebnis ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten der quadratischen Form in (2.33) - nach Erwartungswertbildung - mit denen von $Var(\sum_{i=1}^N W_i x_i)$.

Kennt man des weiteren eine erwartungstreue Schätzfunktion \hat{s}_i^2 für $Var_2 \hat{x}_i$ ($E_2 s_i^2 = Var_2 \hat{x}_i$), so läßt sich die Varianz von \hat{X}^r folgendermaßen erwartungstreu schätzen:

$$\begin{aligned}
 (2.35) \quad \text{Vâr } \hat{x}^r &= \sum_{i,j \in S} a_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j + \sum_{i \in S} w_i \hat{s}_i^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j + \sum_{i=1}^N W_i \hat{s}_i^2 \\
 &= \text{Vâr } \hat{x}^d(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) + \sum_{i=1}^N W_i \hat{s}_i^2
 \end{aligned}$$

$$\text{EVâr } \hat{x}^r = \text{Var } \hat{x}^r \quad .$$

Beweis: 1)

$$\begin{aligned}
 E \left[\sum_{i,j} A_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j + \sum_i W_i \hat{s}_i^2 \right] &= \\
 &= E_1 E_2 \left[\sum_i A_{ij} \hat{x}_i^2 + \sum_{i \neq j} A_{ij} \hat{x}_i \hat{x}_j + \sum_i W_i \hat{s}_i^2 \right] = \\
 &= E_1 \left[\sum_i A_{ii} (\text{Var}_2 \hat{x}_i \hat{x}_i^2) + \sum_{i \neq j} A_{ij} x_i x_j + \sum_i W_i \text{Var}_2 \hat{x}_i \right] = \\
 &= \sum_i E_1 A_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} E_1 A_{ij} x_i x_j + \sum_i (E_1 A_{ii} + E_1 W_i) \text{Var}_2 \hat{x}_i = \\
 &\quad (2.31), (2.34) \text{ und } E_1 W_i = 1 = E_1^2 W_i \\
 &= \sum_i \text{Var}_1 W_i x_i^2 + \sum_{i \neq j} \text{Cov}_1(W_i, W_j) x_i x_j + \sum_i E_1 W_i^2 \text{Var}_2 \hat{x}_i = \\
 &= \text{Var}_1 \left(\sum_i W_i x_i \right) + \sum_i E_1 W_i^2 \text{Var}_2 \hat{x}_i = \text{Var } \hat{x}^r \quad (2.29) \quad \Delta
 \end{aligned}$$

Zur Schätzung der Varianz von \hat{x}^r setzt man also die \hat{x}_i -Werte in einen Schätzer für $\text{Var } \hat{x}^d$ - als quadratische Form geschrieben - ein und addiert $\sum_{i=1}^N W_i \hat{s}_i^2$; hierbei ist aus dem Nachweis der Erwartungstreue ersichtlich, daß die beiden Bestandteile der Varianzschätzung keine erwartungstreuen Schätzfunktionen der Stichproben-/Antwortvarianz sind.

1) Vgl. die ähnliche Herleitung in ERIKSSON (1976a, S.3-11).

Für den Mittelwert erhalten wir den Formeln (2.28), (2.30) und (2.35) entsprechend:

$$(2.36) \quad \hat{\mu}_x^r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \hat{x}_i \quad ,$$

$$(2.37) \quad \text{Var} \hat{\mu}_x^r = \text{Var}_1 \hat{\mu}_x^d + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2 \text{Var}_2 \hat{x}_i$$

$$(2.38) \quad \hat{\text{Var}} \hat{\mu}_x^r = \hat{\text{Var}} \hat{\mu}_x^d(\hat{x}_i) + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N W_i \hat{s}_i^2$$

Kann man keine erwartungstreuen Schätzfunktionen \hat{x}_i ermitteln, läßt sich aber zwischen den Erwartungswerten μ_x und μ_y eine lineare Beziehung

$$(2.39) \quad \mu_y = a + b\mu_x$$

aufstellen, so bietet sich ein Antwortvariablenansatz an:

Man schätzt mit Hilfe von (2.36) auf die y-Werte angewandt μ_y und ermittelt dann - analog dem Vorgehen bei der Momentenmethode - $\hat{\mu}_x$ aus (2.39):

$$(2.40) \quad \hat{\mu}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i Y_i = \frac{\hat{Y}}{N}$$

$$(2.41) \quad \hat{\mu}_x = \frac{\hat{\mu}_y - a}{b} \quad .$$

Da die Y_i Zufallsvariable sind, erhalten wir folgende Varianz von $\hat{\mu}_y$:

$$(2.42) \quad \text{Var} \hat{\mu}_y = \frac{1}{N^2} \text{Var} \hat{Y} = \frac{1}{N^2} \text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N W_i \mu_i \right) + \sum_{i=1}^N E W_i^2 \sigma_i^2$$

mit $\mu_i := E_2 Y_i$ und $\sigma_i^2 := \text{Var}_2 Y_i$

Der erste Bestandteil ist die Stichprobenvarianz, der zweite Bestandteil die Antwortvarianz.

Für die Varianz von $\hat{\mu}_x$ gilt entsprechend:

$$(2.43) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\text{Var } \hat{\mu}_y}{b^2}$$

Da die Größen, die in (2.42) auftreten, bei Anwendungen im allgemeinen nicht bekannt sind, sind Schätzungen vorzunehmen. (2.43) legt nahe, im gegebenen Stichprobenmodell (2.33) zur Schätzung der Varianz von $N \hat{\mu}_y$ anzuwenden - wir bezeichnen diese Schätzfunktion mit $\hat{\text{Var}} \hat{\mu}_y = \frac{1}{N^2} \hat{\text{Var}}^d \hat{Y}$ - und in (2.43) einzusetzen.

Diese Schätzfunktion ist jedoch nur bei nicht-stochastischen Merkmalswerten erwartungstreu; verwendet man sie bei RRT dennoch, so unterschätzt man die Varianz von $\hat{\mu}_y$ systematisch:

$$\begin{aligned} (2.44) \quad E \hat{\text{Var}}^d \hat{\mu}_y &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N E_1 A_{ij} E_2 Y_i Y_j &= \\ &= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N E_1 A_{ii} E_2 Y_i^2 + \sum_{i \neq j} E_1 A_{ij} \mu_i \mu_j \right] &= \\ &= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N \text{Var}_1 W_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(W_i, W_j) \mu_i \mu_j \right] &= \\ &= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N \text{Var}_1 W_i \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i,j \neq 1}^N \text{Cov}(W_i, W_j) \mu_i \mu_j \right] &= \\ &= \frac{1}{N^2} \left[\sum_{i=1}^N \text{Var}_1 W_i \cdot \sigma_i^2 + \text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N W_i \mu_i \right) \right] &= \\ &= \text{Var } \hat{\mu}_y - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 &, \quad \text{d.h.} \end{aligned}$$

$$(2.45) \text{Bias}(\hat{\text{Var}}^d \hat{\mu}_y) = - \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

Dieser Bias geht - bei beschränktem σ_i^2 - für $N \rightarrow \infty$ gegen Null. Falls σ_i^2 unbekannt ist, kann der Bias - zumindest im Multiple-Trial-Modell - erwartungstreu geschätzt werden:

$$(2.46) \quad \text{Bias} (\text{Var}^d \hat{\mu}_Y) = - \frac{1}{N^2} \sum_{i \in S} w_i \hat{\sigma}_i^2$$

Im Antwortvariablen-Ansatz kann man auch die Auswirkungen eines Multiple-Trial-Modells gut untersuchen. Wir nehmen an, jeder Befragte in der Stichprobe gäbe k-Antworten Y_{ij} , $i \in S$, $j=1, \dots, k$.

Zur Schätzung verwendet man anstelle von Y_i $\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^k Y_{ij} / k$ ($i \in S$).

Die Varianz des Multiple-Trial-Schätzers $\hat{\mu}_Y$ hat dann folgendes Aussehen:

$$(2.47) \quad \text{Var} \hat{\mu}_Y = \frac{1}{N^2} \left[\text{Var} \sum_{i=1}^N w_i \bar{Y}_i \right] = \\ = \frac{1}{N^2} \left[\text{Var}_1 \sum_{i=1}^N w_i \mu_i + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^N E w_i^2 \sigma_i^2 \right]$$

d.h., durch ein k-Trial-Modell verringert sich die Antwortvarianz um den Faktor $1/k$, während die Stichprobenvarianz gleich bleibt.

Um den ERIKSSON-Ansatz und den Antwortvariablen-Ansatz zu vergleichen, muß man von einem Modell ausgehen, in dem $E_2 Y_i = a + b x_i$, $i=1, \dots, N$, gilt.

Es sind dann:

$$(2.48) \quad \hat{X}_E^r = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^N w_i (Y_i - a)$$

und

$$(2.49) \quad \hat{X}_A^r = \left[\frac{1}{b} \sum_{i=1}^N w_i Y_i - N a \right]$$

Die beiden Schätzer stimmen nur dann überein, wenn $\sum_{i=1}^N w_i = N$, was beispielsweise für die einfache Stichprobe ohne Zurücklegen, geschichtete Stichproben, nicht aber für die Auswahl mit ungleichen Auswahlwahrscheinlichkeiten gilt.

Bei der Behandlung der einzelnen RRT-Modelle werden - als

Spezialfall eines theoretisch etwas komplizierteren Modells - für das einfache Stichprobenmodell ohne Zurücklegen die Formeln für die Schätzer und ihrer Varianzen angegeben. In diesem Fall gilt für die W_i :

$$(2.50) \quad W_i = \begin{cases} N/n & i \in S \\ 0 & i \notin S \end{cases} \quad P(i \in S) = \frac{n}{N} \quad ,$$

darüber hinaus

$$(2.51) \quad \begin{cases} EW_i^2 = \frac{N}{n} \\ \text{Var } W_i = \frac{N-n}{n} \quad \text{Cov}(W_i, W_j) = -\frac{N-n}{n(N-1)} \quad i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, N$$

Schätzt man die Varianz von $\hat{\mu}_Y$, so hat die Schätzfunktion $S_1^2 = \text{Var}^d \hat{\mu}_Y$ einen negativen Bias:

$$(2.52) \quad S_1^2 = \text{Var}^d \hat{\mu}_Y = \frac{1}{(n-1)n} \sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2 \cdot \frac{N-n}{N}$$

$$(2.53) \quad \text{Bias } S_1^2 = -\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}_2 Y_i \quad .$$

Vernachlässigt man dagegen den Korrekturfaktor, so überschätzt diese Schätzfunktion S_2^2 die Varianz von $\hat{\mu}_Y$ systematisch:

$$(2.54) \quad S_2^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$(2.55) \quad \text{Bias } S_2^2 = \frac{\sigma_\mu^2}{N-1}$$

mit

$$\sigma_\mu^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E_2 Y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_2 Y_i)^2$$

Eine Vernachlässigung des Korrekturfaktors führt also auch bei der RRT zu einer 'konservativen' Schätzung der Varianz.

Abschließend sei eine mehrdimensionale Erweiterung der grundlegenden Varianzzerlegungen (2.24) und (2.30) und der Schätzungen

(2.35) und (2.44) angegeben, die z.B. bei der Schätzung von Anteilen eines mehrklassigen Merkmals benötigt werden.

Wendet man (2.23) komponentenweise auf einen Schätzvektor $\hat{\underline{\theta}}^R$ an, so erhalten wir:

$$(2.56) \quad E \hat{\underline{\theta}}^R = E_1 E_2 (\hat{\underline{\theta}}^R | S)$$

Bei der Betrachtung der Varianz-Kovarianzmatrix $\underline{D}(\hat{\underline{\theta}}^R)$ benötigt man zusätzlich zu (2.24) eine Zerlegung für die Kovarianzen:

$$(2.57) \quad \text{Cov}(\hat{\theta}_i^R, \hat{\theta}_j^R) = \text{Cov}_1(E_2 \hat{\theta}_i^R, E_2 \hat{\theta}_j^R) + E_1(\text{Cov}_2(\hat{\theta}_i^R, \hat{\theta}_j^R)) \quad .$$

Also gilt für die Varianz-Kovarianz-Matrix von $\hat{\underline{\theta}}^R$:

$$(2.58) \quad \underline{D}(\hat{\underline{\theta}}^R) = \underline{D}_1(E_2 \hat{\underline{\theta}} | S) + E_1 \underline{D}_2(\hat{\underline{\theta}}^R | S) \quad .$$

Entsprechend gilt für einen - aus einem direkten Schätzer \hat{X}^d abgeleiteten - RRT-Schätzer

$$(2.59) \quad \hat{X}^R = \sum_{i=1}^N w_i \hat{x}_i \quad \text{mit} \quad E_2 \hat{x}_i = x_i, \quad i=1, \dots, N,$$

die Zerlegung

$$(2.60) \quad \underline{D}(\hat{X}^R) = \underline{D}_1(\hat{X}^d) + \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2 \underline{D}_2(\hat{x}_i | S) \quad .$$

Hat man eine erwartungstreue Schätzung \hat{D}_i für $\underline{D}_2(\hat{x}_i)$ zur Verfügung, so läßt sich (2.60) durch (2.61) erwartungstreu schätzen:

$$(2.61) \quad \hat{\underline{D}}(\hat{X}^R) = \hat{\underline{D}}^d(\hat{X}) + \sum_{i \in S} w_{iS} \hat{D}_i$$

Verwendet man den Antwortvariablen-Ansatz, so erhalten wir, wie im ERIKSSON-Ansatz, völlig analoge Formeln zu (2.42) und (2.45).

Aufgrund der für diesen Ansatz notwendigen linearen Beziehung zwischen $\underline{\mu}_X$ und $\underline{\mu}_Y$,

$$(2.62) \quad \underline{\mu}_Y = \underline{A} \underline{\mu}_X + \underline{b} \quad \underline{\mu}_X, \underline{\mu}_Y, \underline{b} \in \mathbb{R}^n, \underline{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)} \text{ regulär,}$$

erhalten wir

$$(2.63) \quad \hat{\underline{\mu}}_x = \underline{A}^{-1} \left(\hat{\underline{\mu}}_y - \underline{b} \right) \quad \text{und}$$

$$(2.64) \quad \underline{D}(\hat{\underline{\mu}}_x) = \underline{A}^{-1} \underline{D}(\hat{\underline{\mu}}_y) \underline{A}^{-1}$$

2.4 GRUNDLAGEN DES VERGLEICHS VON RRT-MODELLEN

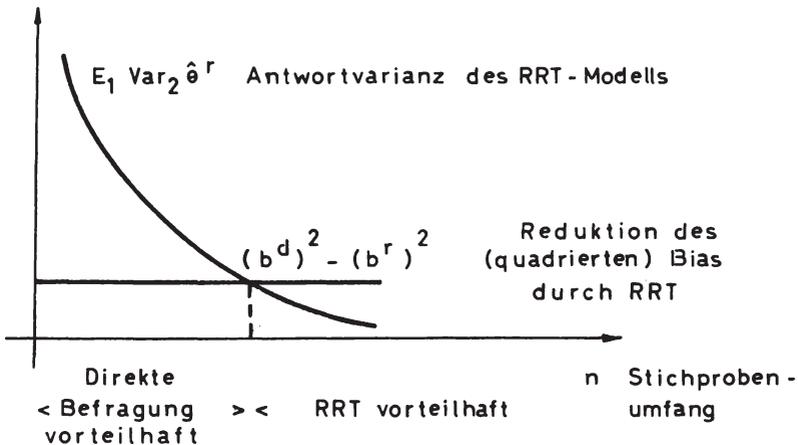
Eine Betrachtung der Modelle in den Kapiteln 3 bis 6 zeigt, daß für eine bestimmte Merkmalskonstellation oft mehrere RRT-Modelle zur Verfügung stehen, die zudem mit den Verfahren der direkten Befragung konkurrieren.

Für den Anwender ist es nun wichtig zu wissen, wann er überhaupt ein Verfahren der RRT sinnvoll anwenden soll, und wenn ja, welches. Als Vergleichs- bzw. Entscheidungskriterium ist - wie wir in Kapitel 1 gesehen haben - die Genauigkeit (accuracy) zu verwenden, die mittels des mean square error erfaßt wird. Für den Vergleich bedeutet dies, daß die Varianz als Vergleichskriterium sinnvoll nur dann zu verwenden ist, wenn man davon ausgehen kann, daß der Bias der zu vergleichenden Modelle gleich groß ist. Vergleicht man Verfahren der RRT mit denen der direkten Befragung, so ist - nach dem in Kap.2.3 Gesagten - festzustellen, daß die Varianz (als Gegenmaß der Präzision) eines RRT-Verfahrens größer ist als bei direkter Befragung. Ein RRT-Modell ist also nur dann sinnvoll anzuwenden, wenn die Erhöhung der Varianz durch eine mindestens ebenso große Verringerung des (quadrierten) Bias kompensiert wird. Die Vorteilhaftigkeit eines RRT-Verfahrens gegenüber einem direkten Befragungsverfahren hängt damit auch vom Stichprobenumfang ab, da die Antwortvarianz mit dem Faktor $1/n$ fällt, während dies für den Bias nicht zutrifft ¹⁾. Für ein RRT-Verfahren, bei dem sich

1) Vom Bias kann sogar angenommen werden, daß er bei wachsendem Stichprobenumfang steigt, da bei kleineren Stichprobenumfängen sorgfältigere Erhebungsmethoden eingesetzt werden können; vgl. hierzu STRECKER (1978, S.91 f.).

die Varianz gemäß (2.21) zerlegen läßt, sind die Zusammenhänge schematisch in Abbildung 2.4 dargestellt.

Abb. 2.4: Vorteilhaftigkeit eines RRT - Modells



Um empirisch gehaltvolle Vergleichsaussagen treffen zu können, ist die Kenntnis der Verringerung der Verzerrung durch die RRT notwendig. Im Abschnitt 3.5 werden hierzu einige Modellrechnungen durchgeführt.

Stellt man nun Vergleiche zwischen RRT-Modellen untereinander an und verwendet die Varianz als Vergleichskriterium, da man über die Verzerrung keine Aussagen machen kann, so ist sicherzustellen, daß die verglichenen Modelle zumindest einen gleich großen, wenn auch unbekanntem, Bias haben. Da die RRT darauf abzielt, durch die Vertraulichkeit der Antwort die Antwortbereitschaft der Befragten zu erhöhen und damit den Nicht-Stichproben-Fehler zu verringern, erscheint es sinnvoll, die Vertraulichkeit mittels einer Maßzahl 'Vertraulichkeits' - bzw. 'Protektionsgrad' zu quantifizieren und Vergleiche dann aufgrund eines konstanten Protektionsgrads vorzu-

nehmen. Die Vertraulichkeit eines RRT-Modells hängt entscheidend davon ab, inwieweit man aus der Antwort y auf den Wert der Untersuchungsvariablen x schließen kann. Aus statistischer Sicht kommt es also auf die bedingten Verteilungen $p(x|y)$ an, die die Wahrscheinlichkeit (Dichte) für den Zustand x angeben - unter der Bedingung, daß man die Antwort y erhalten hat -; sie werden von ANDERSON als 'revealing densities' bezeichnet ¹⁾. Bei direkter Befragung sind diese Verteilungen für eine Antwort $y \in \Omega_y$ Ein-Punkt-Verteilungen, korrekte Beantwortung vorausgesetzt. Die Ansätze zur Messung des Vertraulichkeits- Protektionsgrads gehen also von diesen 'revealing densities' aus; in der Literatur werden verschiedenartige Varianten vorgeschlagen, die meist auf bestimmte Modell-Typen zugeschnitten sind und auch hier im Zusammenhang mit diesen behandelt werden sollen.

Eine Möglichkeit besteht darin, die maximale bedingte Wahrscheinlichkeit über alle möglichen Antworten für alle oder die sensitiven Werte von $x(\bar{\Omega}_x)$ als Gegenmaß des Protektionsgrads zu betrachten: ²⁾

$$(2.65) \quad P: = \max_{\substack{y \in \Omega_y \\ x \in \bar{\Omega}_x}} P(x|y) \quad , \quad \bar{\Omega}_x \subseteq \Omega_x \quad .$$

Geht man davon aus, daß die Vertraulichkeit einer Antwort umso geringer ist, je stärker die Wahrscheinlichkeitsmasse der bedingten Verteilung um einen Punkt konzentriert ist, so erscheint es naheliegend, die Varianz der bedingten Verteilungen als Maß für den Protektionsgrad zu wählen.

1) ANDERSON (1975b, S.4).

2) Vgl. diesen Ansatz für alternative Untersuchungsmerkmale bei LANKE (1975, 1976).

ANDERSON schlägt zwei Versionen vor: 1)

$$(2.66) \quad P_{A1} := \min_{y \in \Omega_y} \text{Var}(X|Y=y) \quad \text{und}$$

$$(2.67) \quad P_{A2} := E[\text{Var}(X|Y)] \quad ,$$

wobei die durchschnittliche Varianz den Nachteil haben kann, daß trotz eines ausgewiesenen positiven Protektionsgrads einzelne Antworten exakte Rückschlüsse auf den Wert der Untersuchungsvariablen zulassen können ²⁾.

Mit der Betrachtung der Vergleichsmöglichkeiten von RRT-Modellen mit der direkten Befragung bzw. untereinander, wobei insbesondere das Konzept des Vertraulichkeits- bzw. Protektionsgrads bedeutsam ist, sind die allgemeinen Ausführungen zur RRT abgeschlossen. Hierauf kann eine detaillierte Behandlung einzelner RRT-Modelle erfolgen, in der die allgemeinen Ergebnisse spezialisiert angewandt werden.

1) Vgl. ANDERSON (1975b, S.12), und ANDERSON (1977, S.16f).

2) Verwendet man etwa das Maß (2.67) für den Protektionsgrad, so sieht man - anhand der schon in anderem Zusammenhang benutzten Varianzzerlegung - auch, daß ein Multiple-Trial-Modell eine kleinere (höchstens genauso große) Protektion wie das einfache Modell bietet:

Betrachten wir ein 2-Trial-Modell mit den Antworten y_1 und y_2 , so gilt:

$$E_1 \text{Var}(X|y_1) = E_{1,2} \text{Var}(X|y_1, y_2) + E_1 \text{Var}_2 E(X|y_1, y_2) \quad ,$$

hierbei ist die linke Seite der Protektionsgrad bei nur einer Antwort, der erste Term der rechten Seite der Protektionsgrad (i.S. von (2.67)) bei zwei Antworten. Da der zweite Term auf der rechten Seite nicht negativ ist, ergibt sich die Behauptung.

3. MODELLE ZUR SCHÄTZUNG DES ANTEILS EINES ALTERNATIVEN MERKMALS

Die Schätzung des Anteils eines alternativen Merkmals steht seit der Begründung der RRT durch WARNER (1965) im Vordergrund des Interesses. Das 'klassische' Modell von WARNER (1965) wurde in der Folgezeit vielfach modifiziert (Angabe der korrekten ML-Schätzer, Entwicklung von Multiple-Trial-Versionen), und es wurden verwandte Modelle, wie das Contamination-Modell, entwickelt. Gegenüber diesen Modellen, deren Grundlage jeweils die Frage nach dem sensitiven Merkmal ist, unterscheiden sich die sogenannten Unrelated-Question-Modelle, die mit einer zusätzlichen - nicht sensitiven - Frage arbeiten. ¹⁾

3.1 DAS WARNER-MODELL ²⁾

Im WARNER-Modell wird dem Befragten mittels eines Zufallsmechanismus (Randomisierungsvorrichtung) mit einer bekannten Wahrscheinlichkeit $P (\neq 1/2)$ die Frage "Besitzen Sie die Eigenschaft A?" ³⁾ ($Z=1$) und mit der entsprechenden Gegenwahrscheinlichkeit die Frage "Besitzen Sie die Eigenschaft Nicht-A (\bar{A})?" ($Z=0$) gestellt.

Als Randomisierungsvorrichtung kann beispielsweise ein Kartenspiel (das in entsprechenden Anteilen Karten mit der Frage nach A bzw. \bar{A} enthält) oder eine Urne (mit Kugeln in zwei verschiedenen Farben, die jeweils eine der beiden Fragen symbolisieren), verwendet

- 1) Die verschiedenen Modelle (einschließlich des 'Grenzfalls' der direkten Befragung) lassen sich auch kombiniert anwenden; vgl. hierzu SWENSSON (1972, 1976d).
- 2) Vgl. WARNER (1965).
- 3) Die Fragestellung wird hier bewußt einfach formuliert, um eine klare Darstellung zu ermöglichen. Bei Anwendungen ist die Formulierung der Frage und ihre Position im Fragebogen bzw. Interview nach den Methoden der empirischen Sozialforschung sorgfältig und der Untersuchung adäquat zu wählen.

werden.

Der Befragte zieht - unbeobachtet vom Interviewer - z.B. eine Karte (Kugel), beantwortet die gestellte Frage mit 'Ja' oder 'Nein' ($Y=1$ bzw. $Y=0$) und legt die Karte (Kugel) im Regelfall in das Kartenspiel (Urne) zurück. Ohne Zurücklegen wäre andernfalls aus dem Zustand des Kartenspiels (der Urne) vor und nach der Befragung die gestellte Frage zu rekonstruieren ¹⁾.

Aus der Anzahl n_1 der Ja-Antworten bei n zufällig ausgewählten befragten Personen läßt sich ein Schätzwert $\hat{\pi}$ für den Anteil π der Eigenschaft A und für die Varianz der Schätzung angeben. Betrachtet man das WARNER-Modell in den Kategorien des allgemeinen RRT-Modells, so sind die Untersuchungsvariable X, die Randomisierungsvariable Z und die Antwortvariable Y Bernoulli-Variable, deren Verteilungsparameter mit π , P und λ bezeichnet werden sollen. X, Z und Y sind über folgende Abbildung T miteinander verbunden:

$$T : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

$$(3.1) \quad (x,z) \mapsto y = z \cdot x + (1-z) \cdot (1-x)$$

Aus (3.1) läßt sich der Zusammenhang zwischen π , P und λ ermitteln - etwa durch Erwartungswertbildung, den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit oder über Formel (2.3):

$$(3.2) \quad \lambda = P \pi + (1-P) (1-\pi) \quad .$$

Zieht man (3.2) zur Ableitung der Schätzfunktion für π heran, so erhält man nach der Momentenmethode den Schätzer $\hat{\pi}_M$,

$$(3.3) \quad \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{2P-1} \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda} = \frac{n_1}{n} \quad (P \neq \frac{1}{2}) \quad ,$$

1) Diese Einschränkung gilt nicht für den - seltenen - Fall, daß die n Befragten an einem Ort versammelt sind und n Fragen-Karten an die Befragten verteilt werden. Vgl. hierzu DEVORE (1977, S.1528) 'Das Modell 'Ziehen der Fragen ohne Zurücklegen' behandeln KIM/FLUECK (1978b).

aus dem Anteil der Ja-Antworten in der Stichprobe und dem Modellparameter P . $\hat{\pi}_M$ ist wegen der Erwartungstreu von $\hat{\lambda}$ erwartungstreu.

Die Methode der kleinsten Quadrate liefert - nach entsprechender Umformulierung des Modells - die gleiche Schätzfunktion wie die Momentenmethode ¹⁾.

$\hat{\pi}_M = \hat{\pi}_{KQ}$ ist somit nicht nur erwartungstreu, sondern auch konsistent und - unter den in der Antwortvariablen linearen Schätzfunktionen - effizient ²⁾.

Für die Maximum-Likelihood-Schätzfunktion ergeben sich jedoch einige Modifikationen.

Zwar behaupten WARNER ³⁾ und andere Autoren mit ihm, $\hat{\pi}_M$ sei auch der ML-Schätzer für π . Dies liegt auch nach dem Invarianzprinzip der ML-Methode nahe, ist jedoch nicht richtig, da folgende Restriktionen bezüglich λ und π zu beachten sind ⁴⁾:

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in [\min(P, 1-P), \max(P, 1-P)]; \quad P \neq \frac{1}{2} \\ \pi \in [0, 1] \end{array} \right. .$$

Während bei der Momentenschätzung unzulässige negative Schätzwerte und Werte größer als eins auftreten können, ist die ML-Schätzung $\hat{\pi}_{ML}$ auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt:

$$(3.5) \quad \hat{\pi}_{ML} = \begin{cases} 0 & ; \hat{\pi}_M < 0 \\ \hat{\pi}_M & ; 0 \leq \hat{\pi}_M \leq 1 \\ 1 & ; \hat{\pi}_M > 1 \end{cases}$$

1) Vgl. WARNER (1971, S.885f.).

2) RAGHAVARAO (1979) schlägt einen nicht linearen Schätzer für π vor, dessen Werte zwar auf $[0, 1]$ beschränkt sind, der jedoch nicht gleichmäßig effizienter als der vergleichbare - lineare - Schätzer ist.

3) Vgl. WARNER (1965, S.67).

4) Vgl. SINGH (1976, S.772); DEVORE (1977, S.1527); FLIGNER et al. (1977, S.1515).

$\hat{\pi}_{ML}$ ist im Gegensatz zu $\hat{\pi}_M$ nicht erwartungstreu, besitzt jedoch einen kleineren mean square error als $\hat{\pi}_M$:¹⁾

$$(3.6) \quad E \hat{\pi}_{ML} \neq \pi$$

$$(3.7) \quad \text{MSE}(\hat{\pi}_{ML}) \leq \text{MSE}(\hat{\pi}_M)$$

Die Varianz des Momentenschätzers $\hat{\pi}_M$ ergibt sich aus der Varianz von $\hat{\lambda}$ und läßt sich folgendermaßen in Stichproben- und Antwortvarianz zerlegen:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \text{Var } \hat{\pi}_M &= \frac{\lambda(1-\lambda)}{n(2P-1)^2} = \\ &= \frac{1}{n} \left[\pi(1-\pi) + \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[\pi(1-\pi) + \left(\frac{1}{16(P-0.5)^2} - \frac{1}{4} \right) \right] \quad 2) \end{aligned}$$

Die Zusatzvarianz wird umso größer, je näher P bei 0,5 liegt, und kann sehr große Werte annehmen, wenn man bedenkt, daß die Stichprobenvarianz (n=1) höchstens 0,25 ist (siehe Abbildung 3.1).

Eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz ist³⁾:

$$(3.9) \quad \text{Vâr } \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(2P-1)^2} = \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1} + \frac{P(1-P)}{(n-1)(2P-1)^2}$$

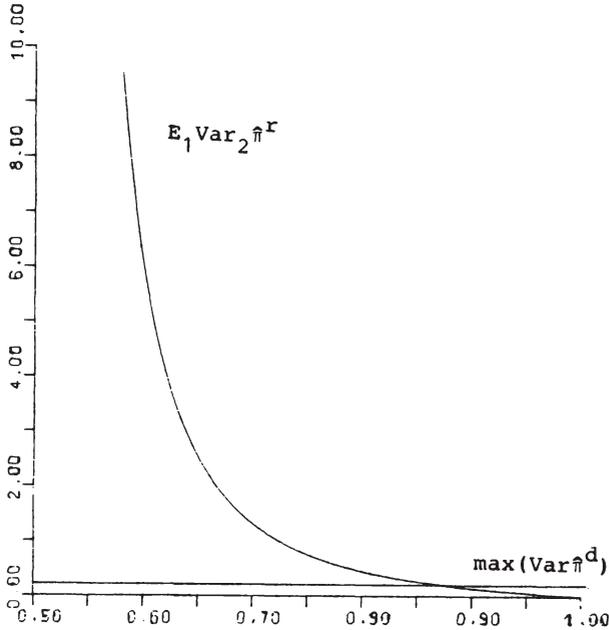
Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf das Modell unabhängiger, identisch verteilter Stichprobenzüge (Stichprobe mit Zurücklegen). In allgemeinen Stichprobenmodellen, wie sie in der Praxis

1) Vgl. SINGH (1976, S.772); DEVORE (1977, S.1527); FLIGNER et al. (1977, S.1515f.).

2) Vgl. WARNER (1965, S.67).

3) Dieses Ergebnis folgt aus (3.19) mit $N \rightarrow \infty$. Vgl. hierzu im Gegensatz ERIKSSON (1973, S.101).

Abb.3.1: Die Antwortvarianz im WARNER-Modell (n=1)



angewandt werden, lassen sich Schätzfunktionen für π und die Varianz des Schätzers aufgrund der theoretischen Ergebnisse für die direkte Befragung nach dem in Kapitel 2.3.2 Dargelegten bestimmen.

Im ERIKSSON-Ansatz wählt man als Schätzfunktion \hat{x}_i für x_i ¹⁾

$$(3.10) \quad \hat{x}_i = \frac{y_i - (1-p)}{2p-1} \quad , \quad E_2 \hat{x}_i = x_i \quad ; \quad i \in S \quad .$$

Für die meisten gängigen Stichprobenmodelle liefert die Stichprobentheorie erwartungstreue Schätzfunktionen $\hat{\pi}^d$ und $\hat{V}ar \hat{\pi}^d$ für die direkte Befragung, wobei $\hat{\pi}^d$ eine Linear-Kombination der x_i ($i \in S$) und $\hat{V}ar \hat{\pi}^d$ eine quadratische Form ist.

Aus der Formel für $\hat{\pi}^d$ läßt sich durch Ersetzen von x_i durch \hat{x}_i ein erwartungstreuer RRT-Schätzer $\hat{\pi}^x$ gewinnen,

1) Vgl. ERIKSSON (1976a, S.11).

$$(3.11) \hat{\pi}^r = \hat{\pi}^d(\hat{x}_i; i \in S) = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i S \hat{x}_i = \left[\frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i S Y_i - (1-P) \right] / (2P-1),$$

dessen Varianz sich nach (2.37) berechnen läßt ¹⁾ als

$$(3.12) \text{Var } \hat{\pi}^r = \frac{1}{N^2} \left(\text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N w_i x_i \right) + \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2 \right) = \\ = \text{Var } \hat{\pi}^d + \frac{1}{N^2} \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2$$

und die nach (2.38) erwartungstreu geschätzt wird durch ²⁾

$$(3.13) \hat{\text{V}}\text{ar } \hat{\pi}^r = \hat{\text{V}}\text{ar } \hat{\pi}^d(\hat{x}_i; i \in S) + \frac{1}{N^2} \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \sum_{i \in S} w_i S$$

Rechentchnisch einfacher ist der Weg über die Antwortvariable Y, die - fälschlich - als dichotomes Merkmal behandelt wird (Antwortvariablenansatz). Für diesen Fall existieren wiederum für die meisten Stichprobenmodelle erwartungstreue Schätzfunktionen $\hat{\lambda}$ für den Anteil der Ja-Antworten und $\hat{S}^2(\hat{\lambda})$ für die Varianz des Schätzers ³⁾. Die entsprechenden Werte für die Untersuchungsvariable ergeben sich aus dem linearen Zusammenhang (3.2) zwischen λ und π . Als Schätzung für den Anteil π erhalten wir - wie bei der Momentenmethode:

$$(3.14) \quad \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{2P-1} \quad ; \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i S Y_i$$

1)
$$\text{Var}_2 \hat{x}_i = \frac{\text{Var}_2 Y_i}{(2P-1)^2} = \frac{(2x_i - 1)^2 \text{var}_2 Z_i}{(2P-1)^2} = \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \quad ; \quad i \in S$$

2) Bei der Berechnung von $\hat{\text{V}}\text{ar } \hat{\pi}^d(\hat{x}_i)$ ist von der quadratischen Form (2.33) auszugehen; die Benutzung von Umformungen, die oft möglich sind, da die x_i 0-1-Variable sind, ist nicht statthaft, da die \hat{x}_i keine 0-1-Variable sind. Aus diesem Grund ist der Antwortvariablen-Ansatz hier einfacher.

3)
$$\hat{S}^2(\hat{\lambda}) = \left(\sum_{i,j=1}^N A_{ij} Y_i Y_j \right) / N^2 \quad ; \quad \text{vgl. (2.33)}$$

mit der Varianz

$$(3.15) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \frac{\text{Var } \hat{\lambda}}{(2P-1)^2} \quad ,$$

die nach (2.43) und (2.45) erwartungstreu geschätzt wird durch

$$(3.16) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{(2P-1)^2} + \frac{P(1-P)}{N(2P-1)^2} \quad 1) \quad ,$$

wobei der zweite Summand auf der rechten Seite mit steigendem Umfang der Grundgesamtheit zu vernachlässigen ist.

Zusammengefaßt bedeutet dies, daß man beim WARNER-Modell die Antwortvariable als dichotomes Merkmal auffassen kann und entsprechend dem gewählten Stichprobenverfahren wie üblich den Anteil $\hat{\lambda}$ und die Schätzervarianz bestimmt. Aus dem linearen Zusammenhang (3.2) von λ und π ermittelt man dann $\hat{\pi}$ und die Schätzung der Varianz von $\hat{\pi}$, die allerdings um das Korrekturglied in (3.16) zu vergrößern ist.

Für das einfache Stichprobenmodell ohne Zurücklegen ²⁾ ergeben sich folgende Formeln:

$$(3.17) \quad \hat{\pi} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i - (1-P) \right] / (2P-1) \quad ,$$

$$(3.18) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{P(1-P)}{n(2P-1)^2} \quad 3)$$

-
- 1) Da auch die Y_i 0-1-Variable sind, lassen sich für $\hat{S}^2(\hat{\lambda})$ im Gegensatz zu (3.13) alle Umformungen der quadratischen Form (2.33) verwenden.
 - 2) MARASINI (1978) behandelt das WARNER-Modell in einer geschichteten Stichprobe.
 - 3) Vgl. KIM/FLUECK (1978b, S.347).

$$\begin{aligned} (3.19) \quad \text{Vâr } \hat{\pi} &= \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2(n-1)} \cdot \frac{N-1}{N} = \\ &= \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(2P-1)^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{N(2P-1)^2} \end{aligned}$$

Übersicht 3.1:

Das WARNER-Modell

1. Fragen- <u>struktur</u>	Frage	Auswahlwahrscheinlichkeit
	Haben Sie die Eigen- schaft A ? (Z = 1)	P
	Haben Sie die Eigen- schaft \bar{A} ? (Z = 0)	1-P
<p>2. Modell</p> <p>Untersuchungs- variable X</p> <p>Randomisie- rungs- variable Z</p> <p>Antwort- variable Y</p> <p>Abbildung T</p> <p>Verteilung von Y</p>	<p>alternatives Merkmal $\Omega_X = \{0,1\}$, $P_X = B(1,\pi)$ ¹⁾</p> <p>$\Omega_Z = \{0,1\}$, $P_Z = B(1,P)$</p> <p>$\Omega_Y = \{0,1\}$</p> <p>T: $\{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$: $y = T(x,z) = xz + (1-x)(1-z)$</p> <p>$P_Y = B(1,\lambda)$</p>	<p>$\lambda = P\pi + (1-P)(1-\pi)$</p>
<p>3. Schätzung</p> <p>Momenten- methode</p>	$\hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{2P-1} ; \quad \hat{\lambda} = \frac{n_1}{n}$	$\text{Var } \hat{\pi}_n = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n(2P-1)^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{P(1-P)}{n(2P-1)^2} =$ $= \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{16(P-0.5)^2} - \frac{1}{4} \right]$
<p>Maximum- Likelihood- Methode</p>	$\hat{\pi}_{ML} = \begin{cases} 0 & ; \hat{\pi}_M < 0 \\ \hat{\pi}_M & ; 0 \leq \hat{\pi}_M \leq 1 \\ 1 & \hat{\pi}_M > 1 \end{cases}$	

1) $B(n,P)$ bezeichnet die Binomialverteilung mit

$$p(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x}$$

<p>Erwartungstreue Schätzung der Varianz</p>	$\text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(2P-1)^2} = \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1} + \frac{P(1-P)}{(n-1)(2P-1)^2}$
<p><u>4. Stichproben- theoretischer Ansatz</u></p> <p>ERIKSSON- Ansatz</p>	$\hat{x}_i = \frac{Y_i - (1-P)}{2P-1}, \quad E_2 \hat{x}_i = x_i, \quad i \in S$ $\hat{\pi}^r = \hat{\pi}^d(\hat{x}_i; i S) = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} \hat{x}_i$ $\text{Var } \hat{\pi}^r = \text{Var } \hat{\pi}^d + \frac{1}{N^2} \cdot \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \widehat{\text{Var}} \hat{\pi}^d(\hat{x}_i; i S) + \frac{1}{N^2} \cdot \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \sum_{i \in S} w_{iS}$
<p>Antwort- variablen- Ansatz</p>	$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{2P-1} (= \hat{\pi}_M); \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} Y_i$ $\text{Var } \hat{\pi} = \frac{\text{Var } \hat{\lambda}}{(2P-1)^2}$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{(2P-1)^2} + \frac{P(1-P)}{N(2P-1)^2}$
<p>Spezialfall: Stichprobe ohne Zurück- legen</p>	$\hat{\pi} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i - (1-P)}{2P-1}$ $\text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{P(1-P)}{n(2P-1)^2}$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2} \cdot \frac{N-1}{N} =$ $= \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(2P-1)^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{N(2P-1)^2}$

3.2 MULTIPLE-TRIAL-VERSIONEN DES WARNER-MODELLS

In den meisten realistischen Anwendungsfällen (etwa $P=0.7$) ist die Varianz des Schätzers im WARNER-Modell um mehr als das Fünffache größer als bei direkter Befragung. Ausgehend von der Varianzzerlegung (3.8) zielen daher die Multiple-Trial-Versionen des WARNER-Modells auf eine Reduktion der Antwortvarianz ab, indem der Befragte mehrmals die Fragenprozedur durchführt.

In diesem Zusammenhang wurden zwei Randomisierungsanordnungen vorgeschlagen, die in der Literatur als Hopkins-I- und Hopkins-II-Urnen bezeichnet werden ¹⁾.

Die Hopkins-I-Urne besteht aus einem kugelförmigen Behältnis (mit Kugeln in zwei Farben, die jeweils die Fragen nach A bzw. \bar{A} symbolisieren,) mit einem Ausgang, der nach dem Schütteln genau eine Kugel aufnehmen kann (Abbildung 3.2). Der Befragte schüttelt die Urne m-mal und beantwortet jeweils die durch die gezogene Kugel symbolisierte Frage. Als Beobachtungsergebnis wird die Anzahl der Ja-Antworten festgehalten.

Bei der Hopkins-II-Urne, die M Kugeln - K mit Farbe 'A', M-K mit Farbe \bar{A} - enthält, besteht der Ausgang aus einem Röhrchen mit m Plätzen (Abbildung 3.2). Der Befragte schüttelt die Urne einmal und beantwortet dann die Frage, wieviele Kugeln im Röhrchen seine Eigenschaft repräsentieren ²⁾.

Technisch betrachtet unterscheiden sich die beiden Anordnungen - bei der gleichen Untersuchungsvariablen wie im WARNER-Modell - darin, daß die Randomisierungsvariable Z (Anzahl der Kugeln A bei (auf) den m Versuchen (Plätzen) im Fall I binominal verteilt ist: $B(m, P)$, im Fall II dagegen hypergeometrisch: $H(m, M, K)$).

Aus den Werten der Untersuchungsvariablen X und der Randomisierungsvariablen Z ergibt sich die Antwort Y:

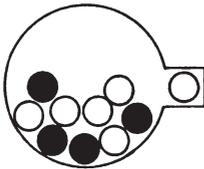
1) Vgl. LIU/CHOW (1976a, S.614) und LIU et al. (1976, S.563).

2) Bei der Auslegung dieser Urne ist darauf zu achten, daß von beiden Kugelarten mehr als m Kugeln vorhanden sind, um auszuschließen, daß in einigen Konstellationen eindeutige Rückschlüsse auf den Merkmalswert des Befragten möglich sind.

(3.20) $Y = T(X, Z) := XZ + (1-X)(m-Z)$.

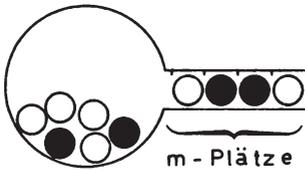
Abb. 3.2 : HOPKINS -I - und HOPKINS -II -Urne

HOPKINS -I -Urne



Anteil der Kugeln
mit " A " : P

HOPKINS -II -Urne



M Kugeln davon
K mit " A "
 $P = \frac{K}{M}$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Y ermittelt man über (2.3) :

$$I : p_Y(i) = \binom{m}{i} \left[\pi P^i (1-P)^{m-i} + (1-\pi) P^{m-i} (1-P)^i \right] = : W_i^I(\pi)$$

(3.21)

$$II : p_Y(i) = \frac{1}{\binom{M}{m}} \left[\pi \binom{K}{i} \binom{M-K}{m-i} + (1-\pi) \binom{M-K}{i} \binom{K}{m-i} \right] = : W_i^{II}(\pi)$$

Für Erwartungswert und Varianz gelten:

$$(3.22) \quad EY = m(P\pi + (1-P)(1-\pi))$$

$$(3.23) \quad \text{Var } Y = \begin{cases} \text{I} : m^2(2P-1)^2\pi(1-\pi) + mP(1-P) \\ \text{II} : m^2(2P-1)^2\pi(1-\pi) + mP(1-P) \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$$

Bei der Varianz unterscheiden sich die Fälle I und II lediglich durch den Korrekturfaktor $(M-m)/(M-1)$ im zweiten Summanden. Ausgehend von einer Stichprobe mit den Befragungsergebnissen Y_1, \dots, Y_n erhält man aus (3.23) den Momentenschätzer $\hat{\pi}_M$:

$$(3.24) \quad \hat{\pi}_M = \frac{1}{m \cdot n} \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - (1-P)}{2P-1}$$

$\hat{\pi}_M$ ist erwartungstreu, die Varianz läßt sich nach (2.37) zerlegen:

$$(3.25) \quad \text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\text{Var } Y}{nm^2(2P-1)^2} = \begin{cases} \text{I} : \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \\ \text{II} : \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$$

Die Antwortvarianz reduziert sich also - vom Korrekturfaktor im Fall II abgesehen - um den Faktor $1/m$ bei m Versuchen (Plätzen), so daß gegenüber dem WARNER-Modell eine erheblich verringerte Schätzvarianz zu erreichen ist.

Wie beim WARNER-Modell liefert die Methode der kleinsten Quadrate - nach entsprechender Umformulierung des Modells - die gleiche Schätzfunktion wie die Momentenmethode.

Die Ermittlung der ML-Schätzer stößt jedoch auf Schwierigkeiten; hier sind numerische Verfahren - wie beispielsweise ein modifiziertes Newton-Verfahren: die 'method of scoring' ¹⁾ - anzuwenden, um die Nullstellen der Ableitung der logarithmierten Likelihood-Funktion zu bestimmen:

$$(3.26) \quad L(\pi; n_0, n_1, \dots, n_m) = \sum_{i=0}^m n_i \log W_i(\pi) \quad (n_i: \text{absolute Häufigkeit der Ausprägung } i \text{ in der Stichprobe})$$

$$(3.27) \quad \left. \frac{dL}{d\pi} \right|_{\hat{\pi}_{ML}} = \sum_{i=0}^m n_i \frac{W'_i(\hat{\pi}_{ML})}{W_i(\hat{\pi}_{ML})} = 0 \quad .$$

Neben der recht aufwendigen numerischen Ermittlung der ML-Schätzer erweist sich als nachteilig, daß die Varianz des Schätzers nur asymptotisch anzugeben ist.

Die Varianz von $\hat{\pi}_M$ wird durch (3.28) erwartungstreu geschätzt,

$$(3.28) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\pi}_M = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)m^2(2P-1)^2} \quad .$$

Für allgemeine Stichprobenmodelle lassen sich nach dem ERIKSSON-Ansatz die Schätzungen für π und die Schätzervarianzen über Schätzungen \hat{x}_i für x_i aus (2.36), (2.37) ableiten:

$$(3.29) \quad \hat{x}_i = \frac{Y_i - m(1-P)}{m(2P-1)} \quad , \quad E_2 \hat{x}_i = x_i \quad ; \quad i \in S$$

$$(3.30) \quad \hat{\pi}^r = \hat{\pi}^d(\hat{x}_i; i \in S) : = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} \hat{x}_i$$

1) Vgl. LIU/CHOW (1976a, S.609) und RAO (1973, S.366ff.).

$$(3.31) \quad \text{Var } \hat{\pi}^{\text{r}} = \begin{cases} \text{I : Var } \hat{\pi}^{\text{d}} + \frac{P(1-P)}{N^2 m(2P-1)^2} \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2 \\ \text{II : Var } \hat{\pi}^{\text{d}} + \frac{P(1-P)}{N^2 m(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2 \end{cases}$$

Die Zerlegung der Varianz in (3.41) entspricht (3.25).

Die Varianzen in (3.31) werden nach (2.38) erwartungstreu geschätzt durch ¹⁾:

$$(3.32) \quad \text{Vâr } \hat{\pi}^{\text{r}} = \begin{cases} \text{I : Vâr } \hat{\pi}^{\text{d}}(\hat{x}_i) + \frac{P(1-P)}{N^2 m(2P-1)^2} \sum_{i \in S} w_{iS} \\ \text{II : Vâr } \hat{\pi}^{\text{d}}(\hat{x}_i) + \frac{P(1-P)}{N^2 m(2P-1)^2} \frac{M-m}{M-1} \sum_{i \in S} w_{iS} \end{cases}$$

Im Antwortvariablenansatz bestimmt man einen Schätzwert $\hat{\mu}_y$ für die durchschnittliche Zahl der genannten Kugeln und schätzt dessen Varianz $\hat{S}^2(\hat{\mu}_y)$ wie bei der direkten Erhebung eines quantitativen Merkmals. Aus (2.41) und (2.43) mit (2.45) erhalten wir die entsprechenden Formeln, wobei wir (3.23) verwenden:

$$(3.33) \quad \hat{\pi} = \frac{\hat{\mu}_y - m(1-P)}{m(2P-1)}$$

$$(3.34) \quad \text{Vâr } \hat{\pi} = \frac{\hat{S}^2(\hat{\mu}_y)}{m^2 \cdot (2P-1)^2} + \begin{cases} \text{I : } \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2 Nm} \\ \text{II : } \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2 Nm} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$$

1) Vgl. Fußnote 2) auf Seite 52.

Für das einfache Stichprobenmodell ohne Zurücklegen ergeben sich folgende Formeln:

$$(3.35) \quad \hat{\pi} = \left[\frac{1}{mn} \sum_{i \in S} Y_i - (1-P) \right] / (2P-1)$$

$$(3.36) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \begin{cases} \text{I} : \frac{\pi(1-\pi)}{n} \frac{N-n}{N-1} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \\ \text{II} : \frac{\pi(1-\pi)}{n} \frac{N-n}{N-1} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$$

$$(3.37) \quad \text{Vâr } \hat{\pi} = \begin{cases} \text{I} : \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)m(2P-1)^2} \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{Nm(2P-1)^2} \\ \text{II} : \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)m(2P-1)^2} \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{Nm(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$$

Übersicht 3.2: Multiple-Trial-Versionen des WARNER-Modells

<p>1. <u>Fragenstruktur</u></p>	<p>I : Hopkins - I - Urne : m-malige Ausführung; jeweils Frage nach A bzw. \bar{A} (mit Wahrscheinlichkeit P bzw. $1-P$)</p> <p>II : Hopkins - II - Urne : (K Kugeln mit 'A', M-K Kugeln mit '\bar{A}') Frage: Wieviele der m gezogenen Kugeln symbolisieren Ihre Eigenschaft?</p>
<p>2. <u>Modell</u></p> <p>Untersuchungsvariable X</p> <p>Randomisierungsvariable Z</p> <p>Antwortvariable Y</p> <p>Abbildung T</p> <p>Verteilung von Y</p>	<p>alternatives Merkmal $\Omega_x = \{0,1\}$ $P_x = B(1,\pi)$</p> <p>$\Omega_z = \mathbb{N}_m^0$ I : $P_z = B(m,P)$, II : $P_z = H(m,M,K)$</p> <p>I : Anzahl der Ja-Antworten, II : Genannte Zahl ; $\Omega_y = \mathbb{N}_m^0$</p> <p>$T : \{0,1\} \times \mathbb{N}_m^0 \rightarrow \mathbb{N}_m^0$</p> <p>$(x,z) \rightarrow xz + (1-x)(m-z)$</p> <p>I : $P_Y(i) = \binom{m}{i} [\pi P^i (1-P)^{m-i} + (1-\pi) P^{m-i} (1-P)^i]$</p> <p>II : $P_Y(i) = [\pi \binom{K}{i} \binom{M-K}{m-i} + (1-\pi) \binom{M-K}{i} \binom{K}{m-i}] / \binom{M}{m}$</p>
<p>3. <u>Schätzung</u></p> <p>Momentenmethode</p> <p>Erwartungstreue Schätzung der Varianz</p>	<p>$\hat{\pi}_M = \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i \in S} Y_i - (1-P)$, $E\hat{\pi}_M = \pi$</p> <p>$\text{Var } \hat{\pi}_M = \begin{cases} \text{I : } \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \\ \text{II : } \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$</p> <p>$\hat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)m^2 (2P-1)^2}$</p>

<p>4. <u>Stichproben-</u> <u>theoretischer</u> <u>Ansatz</u> ERIKSSON- Ansatz</p>	$\hat{\pi} = \hat{\pi}^d(\hat{x}_i; i \in S) = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i s \hat{x}_i \text{ mit } \hat{x}_i = \frac{Y_i - m(1-P)}{m(2P-1)}$
<p>Antwort- variablen- ansatz</p>	$\text{Var } \hat{\pi} = \begin{cases} \text{I : Var } \hat{\pi}^d + \frac{P(1-P)}{N^2 m(2P-1)^2} \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2 \\ \text{II : Var } \hat{\pi}^d + \frac{P(1-P)}{N^2 m(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2 \end{cases}$
<p>Spezialfall Stichprobe ohne Zurück- legen</p>	$\hat{\pi} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i s Y_i - m(1-P)}{m(2P-1)} = \frac{\hat{\mu}_Y - m(1-P)}{m(2P-1)}$
	$\text{V\ddot{a}r } \hat{\pi} = \begin{cases} \text{I : } \frac{\hat{S}^2(\hat{\mu}_Y)}{m^2 (2P-1)^2} + \frac{P(1-P)}{Nm(2P-1)^2} \\ \text{II : } \frac{\hat{S}^2(\hat{\mu}_Y)}{m^2 (2P-1)^2} + \frac{P(1-P)}{Nm(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$
	$\hat{\pi} = \frac{\frac{1}{mn} \sum_{i \in S} Y_i - (1-P)}{2P-1}$
	$\text{Var } \hat{\pi} = \begin{cases} \text{I : } \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \\ \text{II : } \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{P(1-P)}{nm(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$
	$\text{V\ddot{a}r } \hat{\pi} = \begin{cases} \text{I : } \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)m^2 (2P-1)^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{Nm(2P-1)^2} \\ \text{II : } \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)m^2 (2P-1)^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{P(1-P)}{Nm(2P-1)^2} \cdot \frac{M-m}{M-1} \end{cases}$

3.3 DAS CONTAMINATION-MODELL

BORUCH ¹⁾ schlägt ein Modell vor, das nicht - wie das WARNER-Modell - den Merkmalswert des Befragten durch zufällige Zuordnung der Fragen nach A bzw. \bar{A} stochastisch verschlüsselt, sondern in dem das Antwortverhalten (wahrheitsgemäße bzw. bewußt falsche Antwort) zufällig gesteuert wird. Es treten so mit den Wahrscheinlichkeiten ϕ_p (ϕ_n) ²⁾ falsche positive (negative) Antworten auf. Dieses sogenannte Contamination-Modell ³⁾ wird als vorteilhaft angesehen, weil es die Verwendung bekannter Misclassification-Ansätze bei der Schätzung bzw. beim Testen zuläßt ⁴⁾ und die Entwicklung neuer Techniken weitgehend überflüssig macht.

Die von BORUCH ⁵⁾ genannten Beispiele zum Contamination-Modell gehen von Randomisierungsvorrichtungen aus, wie sie beim WARNER-Modell zu verwenden sind; die beiden Ausprägungen der Randomisierungsvariablen symbolisieren jedoch die Aufforderungen wahrheitsgemäß zu antworten bzw. zu lügen. Bei diesem Vorgehen lassen sich jedoch nur identische Werte für ϕ_p und ϕ_n erreichen. Verschiedene Werte können nur mit einer zweidimensionalen Zufallsvariablen $Z = (Z_1, Z_2)$ erzeugt werden (Z_1 und Z_2 sind 0-1 Variable); $Z_1 = 1$ bedeutet: Wahrheitsgemäße Antwort, falls Eigenschaft A vorliegt, $Z_2 = 0$: Wahrheitsgemäße Antwort, falls \bar{A}

1) Vgl. BORUCH (1971b, 1972).

2) Wir nehmen o.B.d.A. an $\phi_n + \phi_p < 1$; für $\phi_n + \phi_p = 1$ ist π nicht schätzbar, ein Modell für $\phi_n + \phi_p > 1$ läßt sich durch Verwendung der Antwortvariablen (Nein $\hat{=} 1$, Ja $\hat{=} 0$) in ein solches mit $\phi_n + \phi_p < 1$ überführen.

3) BORUCH/ENDRUWEIT (1973, S.233), übersetzen 'Contamination method' mit 'Infektionstechnik'.

4) Vgl. BORUCH (1972, S.410) und BORUCH/ENDRUWEIT (1973, S.233).

5) Vgl. BORUCH (1971b, S.63) und BORUCH (1971, S.404 f.).

vorliegt 1).

Z_1 und Z_2 sind also Bernoulli-Variablen mit den Verteilungsparametern $1-\phi_n$ und ϕ_p , als deren Produkt sich im einfachsten Fall die (gemeinsame) Verteilung von Z ergibt:

$$(3.38) \quad P_Z = B(1, 1-\phi_n) \otimes B(1, \phi_p) \quad 2)$$

Der Zusammenhang T zwischen der Untersuchungsvariablen X und der Randomisierungsvariablen $Z = (Z_1, Z_2)$ mit der Antwortvariablen Y wird in (3.39) angegeben:

$$(3.39) \quad T : \Omega_x \times \Omega_z \rightarrow \Omega_y$$

$$\left(x, \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto xz_1 + (1-x)z_2 \quad .$$

Die Antwortvariable Y ist bernoulliverteilt mit dem Parameter λ ,

$$(3.40) \quad \lambda = (1-\phi_n)\pi + \phi_p(1-\pi) \quad ;$$

dies ergibt sich aus (2.3) oder z.B. durch Erwartungswertbildung aus (3.39).

(3.40) ist die Ausgangsgleichung zur Gewinnung des erwartungstreuen Momentenschätzers $\hat{\pi}_M$:

$$(3.41) \quad \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda} - \phi_p}{1 - \phi_n - \phi_p} \quad , \quad (\phi_n + \phi_p < 1) \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i \in S} Y_i}{n} \quad .$$

Die Varianz des Schätzers ist

- 1) Ein Kartenspiel, das die Randomisierungsvariable Z realisiert, besteht beispielsweise aus vier Kartenarten mit den jeweils zwei Aufforderungen (Z_1, Z_2) , also $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$, die mit den relativen Häufigkeiten $\phi_n(1-\phi_p)$, $\phi_n\phi_p$, $(1-\phi_n)(1-\phi_p)$ und $(1-\phi_n)\phi_p$ auftreten.
- 2) Selbstverständlich sind auch andere gemeinsame Verteilungen mit den Randverteilungen $B(1, 1-\phi_n)$ und $B(1, \phi_p)$ denkbar. So kann etwa die relative Häufigkeit für ein P Feld der zweidimensionalen Verteilung von Z gleich Null gewählt werden; vgl. HORVITZ et al. (1976, S.186).

$$(3.42) \quad \text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n(1-\phi_n-\phi_p)^2}$$

Diese Varianz läßt sich nach (3.43) in die Stichproben- und Antwortvarianz zerlegen:

$$(3.43) \quad \text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{\pi\phi_n(1-\phi_n) + (1-\pi)\phi_p(1-\phi_p)}{n(1-\phi_n-\phi_p)^2}$$

Sie wird erwartungstreu aus der Stichprobe geschätzt durch:

$$(3.44) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(1-\phi_n-\phi_p)^2} = \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1} + \frac{\hat{\pi}\phi_n(1-\phi_n) + (1-\hat{\pi})\phi_p(1-\phi_p)}{(n-1)(1-\phi_n-\phi_p)^2}$$

Bei entsprechender Umformulierung der Modellsituation als lineares Modell kann man leicht zeigen, daß wie beim WARNER-Modell und seinen Varianten der KQ-Schätzer mit dem Momentenschätzer übereinstimmt.

Der ML-Schätzer ist wie in 3.1 und 3.2, der auf das Intervall [0,1] "gestutzte" Momentenschätzer; er ist nicht erwartungstreu und hat einen kleineren mean square error als $\hat{\pi}_M$.

Für die allgemeine stichprobentheoretische Betrachtung im ERIKSSON-Ansatz ist ein Schätzwert \hat{x}_i für x_i abzuleiten:

$$(3.45) \quad \hat{x}_i = \frac{Y_i - \phi_p}{1 - \phi_p - \phi_n}, \quad E_2 \hat{x}_i = x_i \quad ; \quad i \in S$$

Im allgemeinen Fall gilt dann - bei entsprechendem Vorgehen wie in 3.1 und 3.2:

$$(3.46) \quad \hat{\pi}^r = \hat{\pi}^d(\hat{x}_i ; i \in S) = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} w_{iS} \hat{x}_i$$

mit der Varianz:

$$(3.47) \quad \text{Var } \hat{\pi}^x = \text{Var } \hat{\pi}^d + \frac{((\phi_n(1-\phi_n) - \phi_p(1-\phi_p)) \sum_{i=1}^N x_i E_1 W_i^2 + \phi_n(1-\phi_n) \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2)}{N^2(1-\phi_n-\phi_p)^2} \quad 1)$$

Da die Varianz von $\hat{\pi}$ zu schätzen ist und der Antwortvariablen-
ansatz hierbei vorteilhafter ist ²⁾, werden für diesen die
Schätzfunktionen für π und die Schätzung von $\text{Var } \hat{\pi}$ angegeben:

$$(3.48) \quad \hat{\pi} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i S Y_i - \phi_p}{1 - \phi_n - \phi_p}$$

$$(3.49) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{(1 - \phi_n - \phi_p)^2} + \frac{\hat{\pi} \phi_n (1 - \phi_n) + (1 - \hat{\pi}) \phi_p (1 - \phi_p)}{N(1 - \phi_n - \phi_p)^2} \quad 3)$$

Für die einfache Stichprobe ohne Zurücklegen erhalten wir folgen-
de Ergebnisse:

$$(3.50) \quad \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - \phi_p}{1 - \phi_n - \phi_p} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i$$

$$(3.51) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{\pi \phi_n (1 - \phi_n) + (1 - \pi) \phi_p (1 - \phi_p)}{n(1 - \phi_n - \phi_p)^2}$$

$$(3.52) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(1-\phi_n-\phi_p)^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{\hat{\pi} \phi_n (1 - \phi_n) + (1 - \hat{\pi}) \phi_p (1 - \phi_p)}{N(1 - \phi_n - \phi_p)^2}$$

1) Aus (2.34) mit $\text{Var}_2 \hat{x}_i = \text{Var}_2 Y_i / (1 - \phi_n - \phi_p)^2 =$
 $= (x_i \phi_n (1 - \phi_n) + (1 - x_i) \phi_p (1 - \phi_p)) / (1 - \phi_n - \phi_p)^2.$

2) Vgl. Fußnote 2) auf Seite 52.

3) $\hat{S}^2(\lambda) := (\sum_{i,j=1}^N A_{ij} Y_i Y_j) / N^2$; vgl. (2.33).

Übersicht 3.3 : Contamination - Modell

<p>1. <u>Fragen- struktur</u></p>	<p>Neben der Frage nach der Eigenschaft A : mit Wahrscheinlichkeit ϕ_n Anweisung Lügen Sie, falls Sie zu A gehören ($z_1 = 0$) ϕ_p Lügen Sie, falls Sie zu \bar{A} gehören ($z_2 = 1$)</p>
<p>2. <u>Modell</u></p> <p>Untersuchungs- variable X</p> <p>Randomisie- rungs- variable Z</p> <p>Untersu- chungs- variable Y</p> <p>Abbildung T</p> <p>Verteilung von Y</p>	<p>alternatives Merkmal $\Omega_x = \{0,1\}$ $P_x = B(1,\pi)$</p> <p>$\Omega_z = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $P_z = B(1,\phi_p) \otimes B(1,1-\phi_n)$</p> <p>$\Omega_y = \{0,1\}$</p> <p>$T : \Omega_x \times \Omega_z \rightarrow \Omega_y$</p> <p>$(x,z) \mapsto xz_1 + (1-x)z_2$</p> <p>$P_y = B(1,\lambda)$; $\lambda = (1-\phi_n)\pi + \phi_p(1-\pi)$</p>
<p>3. <u>Schätzung</u></p> <p>Momenten- methode</p>	<p>$\hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda} - \phi_p}{1 - \phi_n - \phi_p}$ $\hat{\lambda} = \frac{\sum y_i}{n}$</p> <p>$\text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n(1-\phi_n-\phi_p)^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{\pi\phi_n(1-\phi_n) + (1-\pi)\phi_p(1-\phi_p)}{n(1-\phi_n-\phi_p)^2}$</p>

<p>Erwartungstreue Schätzung der Varianz</p>	$\widehat{\text{Var}} \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(1-\phi_n-\phi_p)^2} = \frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n-1} + \frac{\hat{\pi}\phi_n(1-\phi_n)+(1-\hat{\pi})\phi_p(1-\phi_p)}{(n-1)(1-\phi_n-\phi_p)^2}$
<p>4. <u>Stichproben-</u> <u>theoretischer</u> <u>Ansatz</u></p> <p>ERIKSSON- Ansatz</p>	$\hat{x}_i = \frac{y_i - \phi_p}{1 - \phi_n - \phi_p} \quad , \quad E_2 \hat{x}_i = x_i \quad , \quad i \in S$ $\hat{\pi}^x = \hat{\pi}^d(\hat{x}_i ; i \in S) = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} \hat{x}_i$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi}^x = \widehat{\text{Var}} \hat{\pi}^d + \frac{((\phi_n(1-\phi_n) - \phi_p(1-\phi_p)) \sum_{i=1}^N x_i E_1 W_i^2 + \phi_n(1-\phi_n) \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2)}{N^2(1-\phi_n-\phi_p)^2}$
<p>Antwort- variablen- ansatz</p>	$\hat{\pi} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} y_i - \phi_p}{1 - \phi_n - \phi_p}$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{(1-\phi_n-\phi_p)^2} + \frac{\hat{\pi}\phi_n(1-\phi_n) + (1-\hat{\pi})\phi_p(1-\phi_p)}{N(1-\phi_n-\phi_p)^2}$
<p>Spezialfall Stichprobe ohne Zurücklegen</p>	$\hat{\pi} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i \in S} y_i - \phi_p}{1 - \phi_n - \phi_p}$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{\pi\phi_n(1-\phi_n) + (1-\pi)\phi_p(1-\phi_p)}{n(1-\phi_n-\phi_p)^2}$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)(1-\phi_n-\phi_p)^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{\hat{\pi}\phi_n(1-\phi_n) + (1-\hat{\pi})\phi_p(1-\phi_p)}{N(1-\phi_n-\phi_p)^2}$

3.4 UNRELATED-QUESTION-MODELLE (MODELLE MIT UNABHÄNGIGER ZUSATZFRAGE)

Eine große Klasse der RRT-Modelle bilden die sogenannten Unrelated-Question-Modelle, die in Anwendungen fast ausschließlich verwandt werden. Im Gegensatz zum WARNER-Modell (und seinen Versionen) und dem Contamination-Modell beziehen sich die zufällig ausgewählten Fragen nicht auf dasselbe Merkmal, nämlich das Untersuchungsmerkmal. Neben der Frage nach dem sensitiven Untersuchungsmerkmal gibt es eine (oder mehrere) Frage(n) nach einem (oder mehreren) anderen nicht sensitivem(n) Merkmalen.¹⁾ Der Interviewer weiß also nicht, ob der Befragte eine Frage nach dem sensitiven oder dem nicht-sensitiven Merkmal beantwortet. Deshalb rechnet man beim Unrelated-Question-Modell mit einer gegenüber anderen RRT-Modellen noch erhöhten Antwortbereitschaft. "Simmons [auf den die Entwicklung dieses Modells zurückgeht. (Der Verf.)] felt that by providing the respondent the opportunity of replying to one of two questions in which one question is completely innocuous and unrelated to the stigmatizing attribute, the respondent might be more truthful." ²⁾.

Wenn die Verteilung des nicht-sensitiven Merkmals U unbekannt ist, sind zwei Antworten je Befragten oder zwei Stichproben notwendig, um den Anteil π des Untersuchungsmerkmals X zu schätzen, da zu dessen Schätzung Schätzwerte der Parameter der Verteilung von U benötigt werden. Diese Modelle werden in 3.4.1.3 und 3.4.2 behandelt. Ist die Verteilung von U a-priori bekannt, wird nur eine Antwort je Befragten und nur eine Stichprobe zur Schätzung benötigt (3.4.1.1). Diese Situation läßt sich durch ein

1) Da dieses Merkmal nicht mit dem Untersuchungsmerkmal zusammenhängen soll, wurde die Bezeichnung 'Unrelated-Question-Modell' gewählt.

2) GREENBERG et al. (1969a, S.522).

Pseudo-Merkmal erreichen, wobei dem Befragten mit gewissen Wahrscheinlichkeiten die Aufforderungen, 'Ja' bzw. 'Nein' zu antworten, gegeben werden (3.4.1.2)¹⁾.

3.4.1 Ein-Stichproben-Modelle

3.4.1.1 Das SIMMONS-I-Modell

In dem von SIMMONS entwickelten Modell²⁾ wird dem Befragten mit Wahrscheinlichkeit P die Frage nach dem sensitiven alternativen Merkmal X und mit Wahrscheinlichkeit 1-P die Frage nach dem nicht sensitiven alternativen Merkmal U gestellt. Die Verteilung dieses Zusatzmerkmals ist bekannt³⁾.

Definiert und realisiert man die Randomisierungsvariable Z wie im WARNER-Modell, so ergibt sich zwischen dem alternativen Untersuchungsmerkmal X, dem alternativen (nicht sensitiven) Zusatzmerkmal U sowie der Randomisierungsvariablen Z und der Antwortvariablen Y folgender Zusammenhang T:

$$(3.53) \quad T : \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$
$$(x,u,z) \mapsto zx + (1-z)u$$

Man sieht leicht, daß dieses Modell nicht symmetrisch ist. Denn aus einer negativen Antwort kann man schließen, daß der Befragte eine etwaige Frage nach dem sensitiven Merkmal nicht positiv beantwortet hat; somit kann vom Befragten aus die Neigung zu einer negativen Antwort bestehen⁴⁾.

-
- 1) Im Folgenden wird die Schätzung des Anteils P(A) (=π) einer sensitiven Eigenschaft A behandelt. DELACY (1975) zeigt die Verwendung des Unrelated-Question-Modells zur Schätzung eines bedingten Anteils P(A|B), wobei sowohl A als auch B sensitive Eigenschaften sind.
 - 2) Dieses Modell wurde erstmals in HORVITZ et al. (1967) vorgestellt und wird in GREENBERG et al. (1969a) ausführlich behandelt.
 - 3) Multiple-Trial-Versionen dieses Modells behandeln HORVITZ et al. (1967, S.67) und GOULD et al. (1969).
 - 4) Vgl. GREENBERG et al. (1969a, S.530).

Eine symmetrische Version des Unrelated-Question-Modells wurde von BOURKE vorgeschlagen ¹⁾. Das als Randomisierung verwendete Kartenspiel enthält drei Kartentypen:

1	2	3
Haben Sie die (sensitive) Eigenschaft A?	Haben Sie die (nicht sensi- tive) Eigen- schaft U?	Haben Sie die (sensitive) \bar{A} ? Eigenschaft \bar{A} ?

Anteil P_1 P_2 P_3
 Für $P_2 = 0$ entspricht dieses Modell dem WARNER-Modell; $P_3 = 0$ ergibt das SIMMONS-I-Modell. Die Schätzformeln werden analog denen für das SIMMONS-I-Modell abgeleitet.

Im SIMMONS-I-Modell sind X und Z bernoulliverteilt: $X: B(1, \pi)$, $Z: B(1, P)$. U besitze die (hier als bekannt angenommene) Verteilung: $U: B(1, \psi)$. Y ist ebenfalls bernoulliverteilt $B(1, \lambda)$ mit

$$(3.54) \quad \lambda = P\pi + (1-P)\psi$$

Aus (3.54) erhält man den Momentenschätzer $\hat{\pi}_M$:

$$(3.55) \quad \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)\psi}{P} \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

$\hat{\pi}_M$ ist erwartungstreu; von der Varianz läßt sich $\text{Var } \hat{\pi}_d$ abspalten:

$$(3.56) \quad \text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n P^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{1-P}{n P} \left[\frac{\psi(1-\psi)}{P} + (\pi-\psi)^2 + \pi(1-\pi) \right].$$

Die Varianz von $\hat{\pi}$ wird durch (3.57) erwartungstreu geschätzt:

$$(3.57) \quad \hat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)P^2}$$

Bei entsprechender Formulierung von $\Omega_{x,u}$, Ω_z und Ω_y läßt sich das Modell als lineares Modell darstellen

- 1) Vgl. BOURKE (1974a, S.9ff.) und BOURKE/DALENIUS (1975, S.5f.).
- 2) WARNER (1971, S.886), formuliert das lineare Modell ähnlich, jedoch umständlicher.

$$\Omega_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \Omega_{\mathbf{z}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \Omega_{\mathbf{y}} = \{0, 1\}$$

Die Erwartungswerte sind:

$$E(\mathbf{X} \quad \mathbf{U}) = (\pi \quad \psi) \quad E \underline{\mathbf{z}}' = (P \quad 1-P) \quad .$$

Das lineare Modell

$$(3.58) \quad Y_i = (P \quad 1-P) \begin{pmatrix} \pi \\ \psi \end{pmatrix} + U_i \quad i = 1, \dots, n$$

läßt sich überführen in

$$Y_i^* = x_i^* \beta^* + U_i^* \quad i = 1, \dots, n$$

$$(3.59) \quad \text{mit} \quad Y_i^* = Y_i - (1-P)\psi, \quad x_i^* = P, \quad \beta^* = \pi, \quad U_i^* = U_i \quad .$$

Wie man leicht sieht, stimmt der KQ-Schätzer für π mit dem Momentenschätzer überein.

Der ML-Schätzer ergibt sich, wie in den schon behandelten Modellen, indem man $\hat{\pi}_M$ auf das Intervall $[0, 1]$ stützt.

Im allgemeinen Stichprobenmodell ist der ERIKSSON-Ansatz für das SIMMONS-I-Modell nicht anwendbar, da sich keine erwartungstreuen Schätzwerte \hat{x}_i für x_i ($i \in s$) angeben lassen¹⁾. Somit ist der Antwortvariablenansatz anzuwenden.

Als Schätzwert für π ergibt sich:

$$(3.60) \quad \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)\psi}{P} \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i Y_i$$

Die Varianz von $\hat{\lambda}$, aus der die Varianz von $\hat{\pi}$ abzuleiten ist, ermittelt man aus (2.42)²⁾:

1) Vgl. ERIKSSON (1976a, S.13).

2) Vgl. das ähnliche Vorgehen in ERIKSSON (1976a, S.14f.).

$$\begin{aligned}
 \text{Var } \hat{\lambda} &= \frac{1}{N^2} \left[\text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N W_i (Px_i + (1-P)u_i) \right) + \sum_{i=1}^N EW_i^2 P(1-P) (x_i - u_i)^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{N^2} \left[P^2 \text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N W_i x_i \right) + (1-P)^2 \text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N W_i u_i \right) + \right. \\
 (3.61) \quad &+ 2P(1-P) \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^N W_i x_i, \sum_{i=1}^N W_i u_i \right) + \\
 &\left. + P(1-P) \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 EW_i^2 \right] .
 \end{aligned}$$

Somit erhält man die Varianz von $\hat{\pi}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Var } \hat{\pi} &= \text{Var } \hat{\pi}^d + \frac{(1-P)^2}{P^2} \text{Var } \hat{\psi}^d + \frac{2(1-P)}{P} \text{Cov}(\hat{\pi}_d, \hat{\psi}_d) + \\
 (3.62) \quad &+ \frac{(1-P)}{N^2 P} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 EW_i^2 .
 \end{aligned}$$

Die Varianz in (3.62) wird erwartungstreu geschätzt durch:

$$(3.63) \quad \text{Vâr } \hat{\pi} = \frac{1}{P^2} \left[\hat{S}^2(\hat{\lambda}) + \frac{1}{N^2} \sum_{i \in S} W_i \hat{\sigma}_i^2 \right] .$$

Da bei nur einer Frage je Befragten keine Schätzwerte $\hat{\sigma}_i^2$ ($i \in S$) zur Verfügung stehen ¹⁾, entfällt das Zusatzglied, der Bias der Schätzung kann dann wie folgt abgeschätzt werden: ²⁾

$$(3.64) \quad \frac{P-1}{NP} \leq \text{Bias } \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{P^2} \leq 0$$

Für die einfache Stichprobe ohne Zurücklegen erhalten wir folgende Ergebnisse:

-
- 1) Bei mehreren - unabhängigen - Antworten je Befragten sind die Varianzen σ_i^2 durch die Stichprobenvarianzen der Antworten der einzelnen Befragten zu schätzen.
 - 2) N.B.: $0 \leq \sigma_i^2 \leq P(1-P)$, $i=1, \dots, N$; daraus Abschätzung des Bias in (2.45).

$$(3.65) \quad \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)\psi}{P} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i$$

$$(3.66) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{(1-P)^2}{P^2} \cdot \frac{\psi(1-\psi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \\ + \frac{2(1-P)(1-n)}{nP(N-1)} \text{Cov}(x, u) + \frac{(1-P)}{nP} (\pi - 2\pi\psi + \psi)$$

Für die Schätzung der Varianz können nur verzerrte Schätzfunktionen angegeben werden, wobei $(\hat{\text{Vâr}} \hat{\pi})_1$ die Varianz $\text{Var } \hat{\pi}$ unterschätzt, $(\hat{\text{Vâr}} \hat{\pi})_2$ dagegen überschätzt:

$$(3.67) \quad (\hat{\text{Vâr}} \hat{\pi})_1 = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{P^2(n-1)} \cdot \frac{N-n}{N} \quad \text{Bias}(\hat{\text{Vâr}} \hat{\pi})_1 = - \frac{(1-P) \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2}{N^2 P}$$

$$(3.68) \quad (\hat{\text{Vâr}} \hat{\pi})_2 = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{P^2(n-1)} \quad \text{Bias}(\hat{\text{Vâr}} \hat{\pi})_2 = \frac{\text{Var}(PX + (1-P)U)}{(N-1)P^2}$$

Übersicht 3.4 : Das SIMMONS - I - Modell
(Verteilung des Zusatzmerkmals bekannt)

	Frage	Auswahlwahrscheinlichkeit
<p>1. <u>Fragenstruktur</u></p>	<p>Haben Sie die (sensitive) Eigenschaft A ?</p> <p>Haben Sie die (nicht sensitive) Eigenschaft U ? (Z=0)</p>	<p>P</p> <p>1-P</p>
<p>2. <u>Modell</u></p> <p>Untersuchungsvariable X</p> <p>Randomisierungsvariable Z</p> <p>Antwortvariable Y</p> <p>Abbildung T</p> <p>Verteilung von Y</p>	<p>alternatives Merkmal $\Omega_x = \{0,1\}$</p> <p>alternatives Merkmal $\Omega_u = \{0,1\}$</p> <p>optimierte Version (geringste Varianz bei vorgegebenem Protektionsgrad vgl. 3.5.3): $\psi = 1$</p> <p>$\Omega_z = \{0,1\}$</p> <p>$\Omega_y = \{0,1\}$</p> <p>$T : \Omega_x \times \Omega_u \times \Omega_y \rightarrow \Omega_y$</p> <p>$P_y = B(1,\lambda)$</p>	<p>$P_x = B(1,\pi)$</p> <p>$P_u = B(1,\psi)$ ψ bekannt</p> <p>$P_z = B(1,P)$</p> <p>$\lambda = P\pi + (1-P)\psi$</p> <p>$Y = T(x,u,z) = xz + u(1-z)$</p>
<p>3. <u>Schätzung</u></p> <p>Momentenmethode</p> <p>Erwartungstreue Schätzung der Varianz</p>	<p>$\hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)\psi}{P}$;</p> <p>$\hat{\lambda} = \frac{\sum Y_i}{n}$</p> <p>$\text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n P^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{1-P}{n P} \left[\frac{\psi(1-\psi)}{P} + (\pi-\psi)^2 + \pi(1-\pi) \right]$</p> <p>$\widehat{\text{var}} \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)P^2}$</p>	

4. Stichproben-
theoretischer
Ansatz

Antwort-
variablen-
Ansatz

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)}{P} \quad ; \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i Y_i$$

$$\text{Var } \hat{\pi} = \text{Var } \hat{\pi}^d + \frac{(1-P)^2}{P^2} \text{Var } \hat{\psi}^d + \frac{2(1-P)}{P} \text{Cov}(\hat{\pi}^d, \hat{\psi}^d)$$

$$+ \frac{1-P}{N P^2} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 \text{EW}_i^2$$

$$\text{Vâr } \hat{\pi} = \frac{1}{P^2} [S^2(\hat{\lambda}) + \frac{1}{N^2} \sum_{i \in S} w_i \hat{\sigma}_i^2]$$

$$\frac{P-1}{N P} \leq \text{Bias} \left(\frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{P^2} \right) \leq 0$$

Spezialfall:
Stichprobe
ohne
Zurücklegen

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P)\psi}{P}$$

$$\text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{(1-P)^2}{P^2} \frac{\psi(1-\psi)}{n} \frac{N-n}{N-1} +$$

$$+ \frac{2(1-P)(1-n)}{n P (N-1)} \text{Cov}(x, u) + \frac{1-P}{n P} (\pi - 2\pi\psi + \psi)$$

$$(\text{Vâr } \hat{\pi})_1 = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{P^2(n-1)} \cdot \frac{N-n}{N} \quad , \quad \text{Bias}(\text{Vâr } \hat{\pi})_1 = \frac{(1-P) \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2}{N^2 P}$$

$$(\text{Vâr } \hat{\pi})_2 = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{P^2(n-1)} \quad , \quad \text{Bias}(\text{Vâr } \hat{\pi})_2 = \frac{\text{Var}(Px + (1-P)U)}{(N-1) P^2}$$

3.4.1.2 Das Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen
Antworten

Wie schon in den einleitenden Bemerkungen zum Unrelated-Question-Modell angedeutet, läßt sich durch die Aufforderungen, 'Ja' bzw. 'Nein' zu antworten, die neben der Frage nach dem Untersuchungsmerkmal mit den Wahrscheinlichkeiten P_2 und P_3 gegeben werden, ein zusätzliches Pseudomerkmals U erzeugen, das $B(1, \psi = P_2 / (P_2 + P_3))$ verteilt ist ¹⁾. Obgleich so wie im SIMMONS-I-Modell ein Zusatzmerkmal mit bekannter Verteilung gegeben ist, sind die in 3.4.1.1 angegebenen Formeln nur für den Fall einer unabhängigen Stichprobe (mit Zurücklegen) übertragbar, da das Pseudomerkmals nicht bei den Stichprobeneinheiten angesiedelt ist. Dies wird in der Beschreibung des Modells deutlich. Dem alternativen Untersuchungsmerkmal steht eine zweidimensionale Randomisierungsvariable gegenüber; beide sind folgendermaßen mit der Antwortvariablen verbunden:

Auswahlwahrscheinlichkeit	Aufforderung	x		Antwortsvariable Y
		(z_1, z_2)	0 1	
P_1	Frage nach A	(1, 0) (1, 1)	0 1	
P_2	Antwort 'Ja'	(0, 1)	1 1	
P_3	Antwort 'Nein'	(0, 0)	0 0	

Y ist also über die folgende Abbildung T mit X und (z_1, z_2) verknüpft:

$$(3.69) \quad Y = T(X, z_1, z_2) = z_1 X + (1 - z_1) z_2 \quad .$$

Y ist bernoulliverteilt : $B(1, \lambda)$ mit

1) Dieses Modell geht auf R. MORTON zurück; vgl. HORVITZ et al. (1976, S.184). Es wird von ERIKSSON (1973, 1976a) ausführlich dargestellt.

$$(3.70) \quad \lambda = P_1 \pi + (1-P_1) \psi \quad ,$$

wobei $P(z_1, z_2) = B(1, \pi) \otimes B(1, \psi)$ verteilt ist.¹⁾ ($\psi = P_2/(1-P_1)$).

Gleichung (3.70) entspricht (3.54). Mutatis mutandibus ergeben sich für die Schätzungen aufgrund einer unabhängigen Zufallsstichprobe die gleichen Ergebnisse wie für das SIMMONS-I-Modell; die Einzelheiten sind der Übersicht 3.5 zu entnehmen.

Die Unterschiede kommen jedoch bei der Betrachtung im allgemeinen Stichprobenmodell zum Tragen.

Es läßt sich nämlich nach dem ERIKSSON-Ansatz ein erwartungstreuer Schätzer \hat{x}_i für x_i angeben:

$$(3.71) \quad \hat{x}_i = \frac{Y_i - (1-P_1)\psi}{P_1} \quad i \in S$$

Für die Varianz des Schätzers $\hat{\pi}^R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \hat{x}_i$

erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$(3.72) \quad \text{Var } \hat{\pi}^R = \text{Var } \hat{\pi}^d + \frac{1-P_1}{P_1 N^2} \sum_{i=1}^N [\psi^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + (1-2\psi)x_i] E_1 W_i^2 \quad .$$

Bei der Schätzung der Varianz geht man im allgemeinen von den Antwortvariablenwerten aus. Im Antwortvariablenansatz erhalten wir also mit

$$\hat{\pi} = (\hat{\lambda} - (1-P_1)\psi) / P_1 \quad (\hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i Y_i)$$

$$(3.73) \quad \text{Var } \hat{\pi}^R = \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{P_1^2} + \frac{1-P_1}{P_1 N^2} \sum_{i \in S} (\psi^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + (1-2\psi)\hat{x}_i) W_i$$

Im Gegensatz zum SIMMONS-I-Modell kann also im Modell mit vorgegebenen Antworten die Varianz des Schätzers $\hat{\pi}^R$ erwartungstreu geschätzt werden.

Verwendet man für die Schätzung der Varianz von $\hat{\pi}^R$ lediglich

1) Selbstverständlich lassen sich auch andere Verteilungen von (Z_1, Z_2) angeben, die mit dem Aufbau des Modells verträglich sind² und nicht Unabhängigkeit von Z_1 und Z_2 implizieren.

die Schätzfunktion für die Varianz der Antwortvariablen, so läßt sich die negative Verzerrung, die mit $N \rightarrow \infty$ gegen Null geht, folgendermaßen betragsmäßig nach oben abschätzen:

$$(3.74) \quad \left| \text{Bias } \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{P_1^2} \right| \leq \begin{cases} \frac{1-P_1}{NP_1} \left[(1-\psi)^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} \right]; & \psi \leq 1/2 \\ \frac{1-P_1}{NP_1} \left[\psi^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} \right]; & \psi > 1/2 \end{cases}$$

Für die einfache Stichprobe ohne Zurücklegen erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$(3.75) \quad \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P_1)\psi}{P_1} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i$$

$$(3.76) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{1-P_1}{nP_1} \left[\frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + \pi(1-\pi) + (\pi-\psi)^2 \right]$$

$$(3.77) \quad \text{V\hat{a}r } \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)P_1^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{1-P_1}{P_1N} \left[\frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + \hat{\pi}(1-\hat{\pi}) + (\hat{\pi}-\psi)^2 \right]$$

Übersicht 3.5: Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten

<u>1. Fragenstruktur</u>	Aufforderung	Auswahlwahrscheinlichkeit
	Beantworten Sie die Frage: Haben Sie die Eigenschaft A ? (z = (1, 0) bzw. (1, 1))	P_1
	Antworten Sie 'Ja' ! z = (0, 1)	P_2
	Antworten Sie 'Nein' ! z = (0, 0)	P_3
	Pseudomerkmal U mit $\psi := \frac{P_2}{1-P_1}$	
<u>2. Modell</u>		
Untersuchungsvariable X	alternatives Merkmal $\Omega_x = \{0,1\}$	$P_x = B(1, \pi)$
Randomisierungsvariable Z	$\Omega_{(z_1, z_2)} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ $P_{(z_1, z_2)} = B(1, P_1) \otimes B(1, \psi)$	$P_{z_1} = B(1, P_1)$ $P_{z_2} = B(1, \psi)$
Antwortvariable Y	$\Omega_y = \{0,1\}$	
Abbildung T	$T : \Omega_x \times \Omega_z \rightarrow \Omega_y$	$(x, z_1, z_2) \rightarrow z_1 x + (1-z_1) z_2$
Verteilung von Y	$Y : B(1, \lambda)$	$\lambda = P_1 \pi + (1-P_1) \psi$
<u>3. Schätzung</u>		
Momentenmethode	$\hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda} - (1-P_1)\psi}{P_1} ; \quad \hat{\lambda} := \frac{\sum_{i \in S} Y_i}{n}$ $\text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n P_1^2} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} + \frac{1-P_1}{n P_1} \left[\frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + (\pi-\psi)^2 + \pi(1-\pi) \right]$	

<p>Erwartungstreue Schätzung der Varianz</p>	$\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)P_1^2}$
<p><u>4. Stichproben- theoretischer Ansatz</u></p> <p>ERIKSSON- Ansatz</p>	$\hat{x}_i = \frac{Y_i - (1-P_1)\psi}{P_1}$ $\hat{\pi}^r = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i s \hat{x}_i$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi}^r = \widehat{\text{Var}} \hat{\pi}^d + \frac{1-P_1}{P_1 N^2} \sum_{i=1}^N \left[\psi^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + (1-2\psi)x_i \right] E_1 w_i^2$
<p>Antwort- variablen- ansatz</p>	$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P_1)\psi}{P_1} \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i s Y_i$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi}^r = \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{P_1^2} + \frac{1-P_1}{P_1 N^2} \cdot \sum_{i \in S} \left(\hat{\psi}^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + (1-2\psi)\hat{x}_i \right) w_i s$
<p>Abschätzung des Bias</p>	$\text{Bias} \frac{\hat{S}^2(\hat{\lambda})}{P_1^2} \leq \begin{cases} -\frac{1-P_1}{P_1 N} \left((1-\psi)^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} \right) & ; \psi \leq 1/2 \\ \frac{1-P_1}{P_1 N} \left(\psi^2 + \frac{\psi(1-\psi)}{P_1} \right) & ; \psi > 1/2 \end{cases}$
<p>Spezial- fall Stichprobe ohne Zurück- legen</p>	$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - (1-P_1)\psi}{P_1} \quad ; \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{1-P_1}{n P_1} \left[\frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + \pi(1-\pi) + (\pi-\psi)^2 \right]$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}(1-\hat{\lambda})}{(n-1)P_1^2} \cdot \frac{N-n}{N} + \frac{1-P_1}{P_1 \cdot N} \left[\frac{\psi(1-\psi)}{P_1} + \hat{\pi}(1-\hat{\pi}) + (\hat{\pi}-\psi)^2 \right]$

3.4.1.3 Das BOURKE-Modell

Bei unbekannter Verteilung des Zusatzmerkmals und Verwendung nur einer Stichprobe sind zur Schätzung des Anteils der sensitiven Eigenschaft im Unrelated-Question-Modell zwei Fragen je Befragten notwendig; zumindest ein Teil der Befragten muß sowohl die Frage nach A/\bar{A} und nach U/\bar{U} beantworten. Die Reihenfolge der Fragen und ihre positive oder negative Formulierung werden durch den Randomisierungsmechanismus festgelegt, so daß die Vertraulichkeit gewahrt ist. BOURKE ¹⁾ schlägt ein Modell vor, das aus folgender Kartenmischung besteht:

	Kartentyp 1	Kartentyp 2	Kartentyp 3	Kartentyp 4
1. Frage nach	A	U	\bar{A}	U
2. Frage nach	U	A	U	\bar{A}
Anteile	P_1	P_2	P_3	P_4
Randomisierungsvariable	(1,0,0,0)	(0,1,0,0)	(0,0,1,0)	(0,0,0,1)
	(z_1, z_2, z_3, z_4)			

Die zweidimensionale Antwortvariable $\underline{Y} = (Y_1, Y_2)$ - Y_1 : Antwort auf die erste Frage, Y_2 : Antwort auf die zweite Frage - ist durch die folgende Zuordnung T mit den alternativen Merkmalen (X,U) verknüpft:

$$T : \Omega_{(x,u)} \times \Omega_Z \rightarrow \Omega_Y \quad \Omega_{(x,u)} = \{0,1\} \times \{0,1\}$$

$$\Omega_Z = \{e_i^4 \mid i = 1, \dots, 4\} \quad \Omega_Y = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$T(x,u,z_1,z_2,z_3,z_4) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

1) Vgl. BOURKE (1974b, S.17-19).

$$(3.78) \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} U \\ X \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} 1-X \\ U \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} U \\ 1-X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 - z_3 & z_2 + z_4 \\ z_2 - z_4 & z_1 + z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Die Randverteilungen von Y_1 und Y_2 sind Bernoulliverteilungen mit den Parametern λ_1 und λ_2 :

$$(3.79) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 - P_3 & P_2 + P_4 \\ P_2 - P_4 & P_1 + P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$$

Aus (3.79) lassen sich die Momentenschätzer $\hat{\pi}_M$ und $\hat{\psi}_M$ aufgrund der Anteile $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_2$ der Ja-Antworten auf die 1. und 2. Frage in der Stichprobe angeben:

$$(3.80) \quad \begin{pmatrix} \hat{\pi}_M \\ \hat{\psi}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 - P_3 & P_2 + P_4 \\ P_2 - P_4 & P_1 + P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 - P_3 \\ \hat{\lambda}_2 - P_4 \end{pmatrix}$$

Bezeichnet man die in (3.80) zu invertierende Koeffizientenmatrix mit \underline{P} , so erhält man die Varianz-Kovarianz-Matrix \underline{D} der Schätzer folgendermaßen:

$$(3.81) \quad \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_M \\ \hat{\psi}_M \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} \underline{P}^{-1}$$

Nach Ausführung der Matrizenoperationen ergeben sich dann die Formeln für $\hat{\pi}_M$ und die Varianz von $\hat{\pi}_M$:

$$(3.82) \quad \hat{\pi}_M = \frac{1}{D} [(P_1 + P_3)(\hat{\lambda}_1 - P_3) - (P_2 + P_4)(\hat{\lambda}_2 - P_4)]$$

$$\text{mit } D := P_1^2 + P_4^2 - P_2^2 - P_3^2$$

$$(3.83) \text{ Var } \hat{\pi}_M = \frac{1}{nD^2} [(P_1+P_3)^2 \lambda_1 (1-\lambda_1) - 2(P_1+P_3)(P_2+P_4)(\lambda_{11}-\lambda_1\lambda_2) + (P_2+P_4)^2 \lambda_2 (1-\lambda_2)]$$

Eine Zerlegung in Stichprobenvarianz und Antwortvarianz ist nach (2.58) ebenfalls möglich:

$$(3.84) \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_M \\ \hat{\psi}_M \end{pmatrix} = \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}^d \\ \hat{\psi}^d \end{pmatrix} + \underline{P}^{-1} E_1 \underline{D}_2(\hat{\lambda}) \underline{P}^{-1}$$

Dabei sind $\hat{\pi}^d$ und $\hat{\psi}^d$ die Schätzfunktionen bei direkter Befragung, $E_1 \underline{D}_2(\hat{\lambda})$ ist der Erwartungswert der bedingten Varianz-Kovarianzmatrix der geschätzten Anteile der Antwortvariablen Y_1 und Y_2 :

$$(3.85) E_1 \underline{D}_2(\hat{\lambda}) = E_1 E_2 \left[\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 - E_2 \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 - E_2 \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} (\hat{\lambda}_1 - E_2 \hat{\lambda}_1 \quad \hat{\lambda}_2 - E_2 \hat{\lambda}_2) | S \right]$$

Bezeichnet man die gemeinsame Verteilung von X und U mit π_{ij} , $i, j = 0, 1$, so gelten für die Elemente d_{ij} von $E_1 \underline{D}_2(\hat{\lambda})$ folgende Beziehungen:

$$(3.86) \begin{aligned} n d_{11} &= P_3(1-P_3)(\pi_{00} + \pi_{11}) + P_1(1-P_1)(\pi_{01} + \pi_{10}) \\ n d_{12} = n d_{21} &= \pi_{11}(P_1+P_2 - (1-P_3)(1-P_4)) - \pi_{10}P_1P_2 + \\ &\quad + \pi_{01}(P_3 + P_4 - (1-P_1)(1-P_2)) - \pi_{00}P_3P_4 \\ n d_{22} &= P_4(1-P_4)(\pi_{00} + \pi_{11}) + P_2(1-P_2)(\pi_{01} + \pi_{10}) \end{aligned}$$

Die Antwortvarianz hängt also recht kompliziert von den Modellparametern und der Verteilung der Untersuchungsvariablen ab.

Die Maximum-Likelihood-Schätzer sind - wie auch in anderen Modellen - die auf das Intervall $[0,1]$ 'gestutzten' Momentenschätzer.

Die Formulierung des vorliegenden Modells als lineares Modell ist bei Verwendung der folgenden Bezeichnungen möglich:

$$\underline{y}_i^* : = \begin{pmatrix} Y_{1i} - P_3 \\ Y_{2i} - P_4 \end{pmatrix} \quad \underline{\beta} : = \begin{pmatrix} \pi \\ \psi \end{pmatrix}$$

Für den i-ten Befragten gilt also folgendes lineare Modell:

$$\underline{y}_i^* = \underline{P} \underline{\beta} + \underline{U}_i \quad D(\underline{U}_i) = : \Sigma_0, \quad i=1, \dots, n$$

Diese Relationen lassen sich mit Verwendung des Kronecker-Produkts (\otimes) von Matrizen ¹⁾ für die gesamte Stichprobe zusammenfassen:

$$\underline{Y}^* = (\underline{y}_1^*, \dots, \underline{y}_n^*)'$$

$$\underline{U}^* = (\underline{U}_1', \dots, \underline{U}_n')$$

$$\underline{I}_n = (1, \dots, 1)'$$

$$(3.87) \quad \underline{Y}^* = (\underline{P} \otimes \underline{I}_n) \underline{\beta} + \underline{U}$$

Für die Störterme in (3.87) gilt:

$$E(\underline{U}) = \underline{0}$$

$$E(\underline{U}\underline{U}') = \Sigma_0 \otimes \underline{I}_n \quad ;$$

Es liegt also ein verallgemeinertes lineares Modell vor, für dessen Parameter nach dem GAUSS-MARKOFF-AITKEN-Theorem die besten linearen unverzerrten Schätzer in (3.88) angegeben werden:

1) Für das Kronecker-Produkt gelten folgende - hier verwandte - Rechenregeln:

$$(\underline{A}_1 \underline{A}_2) \otimes (\underline{B}_1 \underline{B}_2) = (\underline{A}_1 \otimes \underline{B}_1) (\underline{A}_2 \otimes \underline{B}_2)$$

$$(\underline{A} \otimes \underline{B})' = \underline{A}' \otimes \underline{B}'$$

$$(\underline{A} \otimes \underline{B})^{-1} = \underline{A}^{-1} \otimes \underline{B}^{-1} \quad .$$

Vgl. RAO (1973, S.29f.).

(3.88)

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_{KQ} &= [(\underline{P} \otimes \underline{I}_n)' (\underline{\Sigma}_0^{-1} \otimes \underline{I}_n) (\underline{P} \otimes \underline{I}_n)]^{-1} [(\underline{P} \otimes \underline{I}_n)' (\underline{\Sigma}_0^{-1} \otimes \underline{I}_n) \underline{Y}^*] \\ &= [n \underline{P}' \underline{\Sigma}_0^{-1} \underline{P}]^{-1} [(\underline{P}' \underline{\Sigma}_0^{-1}) \otimes \underline{I}'_n \underline{Y}^*] = \\ &= \frac{1}{n} \underline{P}^{-1} \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i^* = \begin{pmatrix} \hat{\pi}_M \\ \hat{\psi}_M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die KQ-Schätzer sind also mit den Momenten-Schätzern auch in diesem Modell identisch.

Im allgemeinen Stichprobenmodell lassen sich nach dem ERIKSSON-Ansatz folgende Schätzwerte für die Merkmalsausprägungen

(x_i, u_i) des i -ten Befragten angeben:

$$(3.89) \quad \hat{x}_i = \begin{pmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{u}_i \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \underline{Y}_i^* \quad E_2 \hat{x}_i = \hat{x}_i \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Für die erwartungstreuen Schätzfunktionen $(\hat{\pi}^R, \hat{\psi}^R)$ gilt dann

$$(3.90) \quad \begin{pmatrix} \hat{\pi}^R \\ \hat{\psi}^R \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i \hat{x}_i$$

mit der Varianz-Kovarianzmatrix

$$(3.91) \quad \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}^R \\ \hat{\psi}^R \end{pmatrix} = \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}^d \\ \hat{\psi}^d \end{pmatrix} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2 \underline{D}_2 \begin{pmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{u}_i \end{pmatrix}$$

Im Antwortvariablenansatz, der sich insbesondere wegen der relativ einfachen Varianz-Kovarianz-Schätzung anbietet, ergeben sich folgende Formeln:

$$(3.92) \quad \begin{pmatrix} \hat{\pi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 - P_3 \\ \hat{\lambda}_2 - P_4 \end{pmatrix}$$

$$(3.93) \quad \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \underline{D}(\hat{\lambda}) \underline{P}^{-1}$$

Diese Varianz-Kovarianz-Matrix wird erwartungstreu geschätzt durch:

$$(3.94) \quad \hat{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \hat{D}^d(\hat{\lambda}) \underline{P}^{-1'} + \frac{1}{N^2} \underline{P}^{-1} \left(\sum_{i \in S} w_i \hat{D}_2(\underline{Y}_i) \right) \underline{P}^{-1'} ;$$

hierbei sind $\hat{D}^d(\hat{\lambda})$ und $\hat{D}_2(\underline{Y}_i)$ jeweils erwartungstreue Schätzfunktionen für $D^d(\lambda^d)$ und $D_2(\underline{Y}_i)$.

Die Anwendung der oben dargestellten Formeln auf eine einfache Stichprobe ohne Zurücklegen führt zu den folgenden Formeln für die Schätzung des Anteils der sensitiven Eigenschaft A:

π wird durch (3.82) erwartungstreu geschätzt. Die Varianz von $\hat{\pi}$ kann nach (3.31) in die Stichproben- und die Antwortvarianz zerlegt werden:

$$(3.95) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{1}{n D^2} [(P_1+P_3)^2 [P_3(1-P_3)(\pi_{00}+\pi_{11}) + \\ + P_1(1-P_1)(\pi_{01}+\pi_{10})] + (P_2+P_4)^2 [P_4(1-P_4)(\pi_{00}+\pi_{11}) + \\ + P_2(1-P_2)(\pi_{01}+\pi_{10})] - 2(P_1+P_3)(P_2+P_4)[\pi_{11}(P_1+P_2) - \\ - (1-P_3)(1-P_4)] - \pi_{10}P_1P_2 + \pi_{01}(P_3+P_4 - (1-P_1)(1-P_2)) - \\ - \pi_{00}P_3P_4]$$

Ersetzt man bei der Schätzung von $\text{Var } \hat{\pi}$ in der Formel (3.86) die Lambdas durch die Schätzwerte aus der Stichprobe und berücksichtigt man den Korrekturfaktor $(N-n)/N$, so erhält man eine verzerrte Schätzung. Die Verzerrung strebt für $N \rightarrow \infty$ gegen Null.

Übersicht 3.6: Das BOURKE-Modell

(Verteilung des Zusatzmerkmals unbekannt)

1. Fragenstruktur	1. Frage	2. Frage	Auswahlwahrscheinlichkeit
	Haben Sie Eigenschaft A ? $z_1 = 1$	Haben Sie Eigenschaft U ?	P_1
	Haben Sie Eigenschaft U ? $z_2 = 1$	Haben Sie Eigenschaft A ?	P_2
	Haben Sie Eigenschaft \bar{A} ? $z_3 = 1$	Haben Sie Eigenschaft U ?	P_3
	Haben Sie Eigenschaft U ? $z_4 = 1$	Haben Sie Eigenschaft \bar{A} ?	P_4
<p><u>2. Modell</u></p> <p>Untersuchungsvariable X</p> <p>Zusatzvariable U</p> <p>Randomisierungsvariable Z</p> <p>Antwortvariable Y</p> <p>Abbildung T</p> <p>Verteilung von Y</p>	<p>alternatives Merkmal $\Omega_x = \{0,1\} \quad X:B(1,\pi)$</p> <p>alternatives Merkmal $\Omega_u = \{0,1\} \quad U:B(1,\psi)$</p> <p>$\Omega_{(x,u)} = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \right\}$</p> <p>$\Omega_z = \{e_i^4 \mid i = 1, \dots, 4\} \quad E(Z_i) = P_i \quad E(Z_i Z_j) = 0 \quad i \neq j$</p> <p>$\Omega_y = \left\{ \binom{0}{0}, \binom{0}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \right\}$</p> <p>$T : \Omega_{(x,u)} \times \Omega_z \rightarrow \Omega_y$</p> <p>$((x,u), (z_1, \dots, z_4)) \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - z_3 & z_2 + z_4 \\ z_2 - z_4 & z_1 + z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$</p> <p>Randverteilungen</p> <p>$Y_1 : B(1, \lambda_1) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 - P_3 & P_2 + P_4 \\ P_2 - P_4 & P_1 + P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \psi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_3 \\ P_4 \end{pmatrix}$</p>		

<p>3. <u>Schätzung</u></p> <p>Momenten- methode</p>	$\begin{pmatrix} \hat{\pi}_M \\ \hat{\psi}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 - P_3 & P_2 + P_4 \\ P_2 - P_4 & P_1 + P_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 - P_3 \\ \hat{\lambda}_2 - P_4 \end{pmatrix} \text{ mit } \hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{1i}}{n_1}, \hat{\lambda}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{2i}}{n_2}$ $\underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}_M \\ \hat{\psi}_M \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} = \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}^d \\ \hat{\psi}^d \end{pmatrix} + \underline{P}^{-1} E_1 D_2 \underline{P}^{-1}$
<p>4. <u>Stichpro- bentheoreti- scher Ansatz</u></p> <p>ERIKSSON- Ansatz</p>	$\hat{x}_i = \begin{pmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{u}_i \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \underline{y}_i^* \quad \underline{y}_i^* = \begin{pmatrix} Y_{1i} - P_3 \\ Y_{2i} - P_4 \end{pmatrix} \quad i=1, \dots, n$ $\begin{pmatrix} \hat{\pi}^r \\ \hat{\psi}^r \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i \hat{x}_i$ $\underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}^r \\ \hat{\psi}^r \end{pmatrix} = \underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi}^d \\ \hat{\psi}^d \end{pmatrix} + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2 \underline{D}_2 \begin{pmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{u}_i \end{pmatrix}$
<p>Antwort- variablen- Ansatz</p>	$\begin{pmatrix} \hat{\pi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \hat{\lambda} \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1 \quad \hat{\lambda}_2)'$ $\underline{D} \begin{pmatrix} \hat{\pi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = \underline{P}^{-1} \underline{D}^d (\hat{\lambda}) \underline{P}^{-1} + \frac{1}{N^2} \underline{P}^{-1} \left(\sum_{i \in S} w_i \underline{D}_2 (Y_i) \right) \underline{P}^{-1}$
<p>Spezialfall: Stichprobe ohne Zurücklegen</p>	$\hat{\pi} = \frac{1}{D} [(P_1 + P_3)(\hat{\lambda}_1 - P_3) - (P_2 + P_4)(\hat{\lambda}_2 - P_4)]$ <p style="text-align: right;">mit $D := P_1^2 + P_4^2 - P_2^2 - P_3^2$</p> $\text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi(1-\pi)}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{1}{n D^2} [(P_1 + P_3)^2 [P_3(1-P_3)(\pi_{00} + \pi_{11}) +$ $+ P_1(1-P_1)(\pi_{01} + \pi_{10})] + (P_2 + P_4)^2 [P_4(1-P_4)(\pi_{00} + \pi_{11}) +$ $+ P_2(1-P_2)(\pi_{01} + \pi_{10})] - 2(P_1 + P_3)(P_2 + P_4) [\pi_{11}(P_1 + P_2)$ $- (1-P_3)(1-P_4)] - \pi_{10} P_1 P_2 + \pi_{01} (P_3 + P_4 - (1-P_1)(1-P_2)) - \pi_{00} P_3 P_4]$

3.4.2 Zwei - Stichproben - Modelle

3.4.2.1 Das SIMMONS-II-Modell

Wählt man die Fragenkonstellation wie im einfachen SIMMONS-I-Modell, so sind bei unbekannter Verteilung des Zusatzmerkmals zwei Stichproben mit den Umfängen n_1 und n_2 mit unterschiedlichen Auswahlwahrscheinlichkeiten (P_1, P_2) der beiden Fragen zu ziehen ¹⁾. Für jede der beiden Stichproben gelten für die Antwortvariablen die gleichen Formeln wie im SIMMONS-I-Modell.

Aus den Gleichungen (3.96) lassen sich die Momentenschätzer für π und ψ (3.97) ermitteln.

$$(3.96) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= P_1 \pi + (1-P_1) \psi \\ \lambda_2 &= P_2 \pi + (1-P_2) \psi \end{aligned} \quad P_1 \neq P_2$$

$$(3.97) \quad \hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda}_1 (1-P_2) - \hat{\lambda}_2 (1-P_1)}{P_1 - P_2}$$

$$\hat{\psi}_M = \frac{\hat{\lambda}_2 P_1 - \hat{\lambda}_1 P_2}{P_1 - P_2}$$

Die Schätzer $\hat{\pi}_M$ und $\hat{\psi}_M$ sind also Linearkombinationen von $\hat{\lambda}_1$ und $\hat{\lambda}_2$, den Anteilen der Ja-Antworten in den beiden Stichproben. Da die beiden Stichproben unabhängig voneinander gezogen werden, gilt für die Varianzen:

$$(3.98) \quad \begin{aligned} \text{Var } \hat{\pi}_M &= \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left[(1-P_2)^2 \frac{\lambda_1 (1-\lambda_1)}{n_1} + (1-P_1)^2 \frac{\lambda_2 (1-\lambda_2)}{n_2} \right] \\ \text{Var } \hat{\psi}_M &= \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left[P_2^2 \frac{\lambda_1 (1-\lambda_1)}{n_1} + P_1^2 \frac{\lambda_2 (1-\lambda_2)}{n_2} \right] \end{aligned}$$

1) Vgl. HORVITZ et al. (1967, S.67ff.) u. GREENBERG et al. (1969a). SKARABIS (1976, S.267ff.) entwickelt dasselbe Modell.

Die ML-Schätzer sind wiederum die auf [0,1] 'gestutzten' Momentenschätzer.

Faßt man die linearen Modelle - wie für das SIMMONS-I-Modell formuliert - der beiden Stichproben zusammen, so ergeben sich nach einigen Umformungen die Momentenschätzer aus (3.97). Hiermit sind auch wesentliche Optimalitätseigenschaften dieser Schätzer gezeigt.

Im allgemeinen Stichprobenmodell (Antwortvariablenansatz) wird zur Schätzung und Varianzermittlung ebenfalls von (3.97) ausgegangen.

Die Stichprobenvarianz von $\hat{\pi}$ erhalten wir dann in (3.99), wobei wir (3.61) teilweise verwenden.

$$(3.99) \quad \text{Var}_1 E_2 \hat{\pi} = \frac{(1-P_2)^2}{(P_1-P_2)^2} [P_1^2 \text{Var} \hat{\pi}_1^d + (1-P_1)^2 \text{Var} \hat{\psi}_1^d + \\ + 2P_1(1-P_1) \text{Cov}(\hat{\pi}_1^d, \hat{\psi}_1^d)] \\ + \frac{(1-P_1)^2}{(P_1-P_2)^2} [P_2^2 \text{Var}_1 \hat{\pi}_2^d + (1-P_2)^2 \text{Var} \hat{\psi}_2^d + 2P_2(1-P_2) \text{Cov}(\hat{\pi}_2^d, \hat{\psi}_2^d)]$$

Die Antwortvarianz ist

$$E_1 \text{Var}_2 \hat{\pi} = \frac{(1-P_2)^2}{(P_1-P_2)^2} \frac{P_1(1-P_1)}{N^2} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 EW_{1i}^2 + \\ (3.100) \quad + \frac{(1-P_1)^2}{(P_1-P_2)^2} \frac{P_2(1-P_2)}{N^2} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 EW_{2i}^2$$

Die Varianz von $\hat{\pi}$ ergibt sich durch Addition von (3.99) und (3.100).

Bei der erwartungstreuen Schätzung der Varianz ist folgendermaßen vorzugehen:

$$(3.101) \quad \text{vâr} \hat{\pi} = \frac{1}{(P_1-P_2)^2} ((1-P_2)^2 \text{vâr} \hat{\lambda}_1 + (1-P_1)^2 \text{vâr} \hat{\lambda}_2)$$

mit

$$(3.102) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\lambda}_i = \frac{\hat{S}_i^2(\hat{\lambda}_i)}{n_i} + \frac{1}{N^2} \sum_{j \in S_i} w_{ij} \hat{\sigma}_{ij}^2 \quad i = 1, 2 \quad .$$

Da bei nur einem (Fragen-)Versuch je Befragten kein Schätzwert für σ_{ij}^2 verfügbar ist, wird der zweite Ausdruck in (3.102) bei der Varianzschätzung vernachlässigt; hieraus ergibt sich eine systematische Unterschätzung, die sich nach (3.103) abschätzen läßt:

$$(3.103) \quad E(\widehat{\text{Var}} \hat{\lambda}_i - \frac{\hat{S}_i^2(\hat{\lambda}_i)}{n_i}) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^2 \leq \frac{P_i(1-P_i)}{N} \quad i = 1, 2 \quad .$$

In einfachen Stichproben ohne Zurücklegen sind die Schätzer für π und ψ die gleichen; es ergeben sich folgende Formeln für die Varianzausdrücke: 1)

$$(3.104) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\pi} = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left\{ \pi(1-\pi) \left[\frac{P_1^2(1-P_2)^2}{n_1} \cdot \frac{N-n_1}{N-1} + \frac{P_2^2(1-P_1)^2}{n_2} \cdot \frac{N-n_2}{N-1} + \frac{P_1(1-P_1)(1-P_2)^2}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)(1-P_1)^2}{n_2} \right] + \psi(1-\psi) \left[\frac{(1-P_2)^2(1-P_1)^2}{n_1} \cdot \frac{N-n_1}{N-1} + \frac{(1-P_1)^2(1-P_2)^2}{n_2} \cdot \frac{N-n_2}{N-1} + \frac{P_1(1-P_1)(1-P_2)^2}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)(1-P_1)^2}{n_2} \right] + (\pi-\psi)^2 \left[\frac{P_1(1-P_1)(1-P_2)^2}{n_1} + \frac{P_2(1-P_2)(1-P_1)^2}{n_2} \right] + 2 \text{Cov}(x, u) \left[\frac{(1-P_2)^2 P_1(1-P_1)}{n_1} \cdot \frac{1-n_1}{N-1} + \frac{P_2(1-P_2)(1-P_1)^2}{n_2} \cdot \frac{1-n_2}{N-1} \right] \right\}$$

1) Vgl. auch die entsprechende Formel bei KIM/FLUECK(1978b, S.349), die allerdings Unkorreliertheit von X und U voraussetzen.

Zur Schätzung der Varianz stehen zwei verzerrte Schätzfunktionen ($\widehat{\text{Var}} \hat{\pi}_1$ und $(\widehat{\text{Var}} \hat{\pi})_2$ zur Verfügung ¹⁾:

$$(3.105) \quad (\widehat{\text{Var}} \hat{\pi})_1 = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left[(1 - P_2)^2 \frac{\hat{\lambda}_1 (1 - \hat{\lambda}_1)}{n_1 - 1} \frac{N - n_1}{N} + (1 - P_1)^2 \frac{\hat{\lambda}_2 (1 - \hat{\lambda}_2)}{n_2 - 1} \cdot \frac{N - n_2}{N} \right]$$

mit

$$\text{Bias } (\widehat{\text{Var}} \hat{\pi})_1 = - \frac{(P_1 - 2P_1P_2 + P_2)(1 - P_1)(1 - P_2)}{N^2 (P_1 - P_2)^2} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 \quad ,$$

$$(3.106) \quad (\widehat{\text{Var}} \hat{\pi})_2 = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left[(1 - P_2)^2 \frac{\hat{\lambda}_1 (1 - \hat{\lambda}_1)}{n_1 - 1} + (1 - P_1)^2 \frac{\hat{\lambda}_2 (1 - \hat{\lambda}_2)}{n_2 - 1} \right]$$

mit

$$\text{Bias } (\widehat{\text{Var}} \hat{\pi})_2 = \frac{1}{(N-1)(P_1 - P_2)^2} \left[(1 - P_1) \text{Var}(P_1 X + (1 - P_1)U) + \text{Var}(P_2 X + (1 - P_2)U) \right]$$

Die Formeln für den Fall mit Zurücklegen ergeben sich aus (3.104), (3.105) und (3.106) durch den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$.

Bei der Varianzzerlegung entfallen die Kovarianzglieder, außerdem läßt sich die Schätzervarianz erwartungstreu schätzen:

$$(3.107) \quad \text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left\{ \pi(1 - \pi) \left[\frac{P_1(1 - P_2)^2}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_1)^2}{n_2} \right] + (1 - P_1)(1 - P_2) \psi(1 - \psi) \left[\frac{1 - P_2}{n_1} + \frac{1 - P_1}{n_2} \right] + (1 - P_1)(1 - P_2) (\pi - \psi)^2 \left[\frac{P_1(1 - P_2)^2}{n_1} + \frac{P_2(1 - P_1)^2}{n_2} \right] \right\} 2$$

1) Vgl. Formeln (2.49) und (2.51).

2) Vgl. ERIKSSON (1973, S.104).

$$(3.108) \quad \text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left[(1 - P_2)^2 \frac{\hat{\lambda}_1 (1 - \hat{\lambda}_1)}{n_1 - 1} + (1 - P_1)^2 \frac{\hat{\lambda}_2 (1 - \hat{\lambda}_2)}{n_2 - 1} \right]$$

Gegenüber dem einfachen SIMMONS-I-Modell sind beim Zwei-Stichproben-Modell zusätzlich die Aufteilung des Gesamtstichprobenumfangs n und der Wert von P_2 zu bestimmen. Soweit es sich bei P_2 um die Entscheidung handelt, ob ein positiver Wert zu wählen ist oder ob die zweite Stichprobe nur zur direkten Erhebung des Zusatzmerkmals verwendet werden soll, kann man davon ausgehen, daß die Bestimmung von P_2 und n_1/n_2 keinerlei Einfluß auf das Antwortverhalten der Befragten hat.

Zur Bestimmung der optimalen Aufteilung der Stichprobenumfänge geht man von (3.98) aus und bestimmt das Minimum bzgl. n_1 und n_2 bei Beachtung der Nebenbedingung $n_1 + n_2 = n$. Die optimale Aufteilung ist in (3.109) angegeben ¹⁾, wobei zu berücksichtigen ist, daß λ_1 und λ_2 in Anwendungsfällen zu schätzen sind:

$$(3.109) \quad \left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 (1 - \lambda_1) (1 - P_2)^2}{\lambda_2 (1 - \lambda_2) (1 - P_1)^2}}$$

Bei optimaler Aufteilung vereinfacht sich die Formel für die Varianz des Schätzers: ²⁾

$$(3.110) \quad (\text{Var } \hat{\pi})_{n_1, n_2 \text{opt.}} = \frac{[(1 - P_1) \sqrt{\lambda_2 (1 - \lambda_2)} + (1 - P_2) \sqrt{\lambda_1 (1 - \lambda_1)}]^2}{n (P_1 - P_2)^2}$$

Bei der Bestimmung der optimalen Wahl von P_2 ³⁾ ist von der partiellen Ableitung der Formel (3.98) auszugehen:

$$(3.111) \quad \frac{\partial \text{Var } \hat{\pi}}{\partial P_2} = \frac{1 - P_1}{(P_1 - P_2)^3} \left(\frac{2\lambda_1 (1 - \lambda_1) (1 - P_2)}{n_1} + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_1 \lambda_2) (1 - P_1)}{n_2} \right)$$

1) Vgl. GREENBERG et al. (1969a, S.528).

2) Vgl. MOORS (1971, S.628).

3) Vgl. GREENBERG et al. (1969a, S.526).

Übersicht 3.7: Das SIMMONS-II-Modell (optimierte Version)
 (Verteilung des Zusatzmerkmals unbekannt)

1. Fragen- struktur	Frage	Auswahlwahrscheinlichkeit
Stichprobe 1	Haben Sie die (sensitive) Eigenschaft A ?	P_1
Stichprobe 2	Haben Sie die (nicht-sensitive) Eigenschaft U ?	$(1-P_1)$
2. Modell Antwortvariable Y optimale Aufteilung	Für Stichprobe 1 wie im SIMMONS-I Modell Stichprobe 1 : $Y : B(1, \lambda_1)$ Stichprobe 2 : $Y : B(1, \lambda_2)$ $\lambda_1 = P_1 \pi + (1-P_1) \psi$ $\lambda_2 = \psi$ $\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{opt} = \sqrt{\frac{\lambda_1 (1-\lambda_1)}{\lambda_2 (1-\lambda_2) (1-P_1)^2}}$	
3. Schätzung Momentenmethode erwartungstreue Schätzung der Varianz	$\hat{\pi}_M = \frac{\hat{\lambda}_1 - (1-P_1)\hat{\psi}}{P_1}$ $\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i \in S_1} y_i$ $\hat{\psi} = \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i \in S_2} y_i$ $\text{Var } \hat{\pi}_M = \frac{1}{P_1^2} \left[\frac{\lambda_1 (1-\lambda_1)}{n_1} + (1-P_1)^2 \frac{\lambda_2 (1-\lambda_2)}{n_2} \right]$ $\widehat{\text{Var}} \hat{\pi}_M = \frac{1}{P_1^2} \left[\frac{\hat{\lambda}_1 (1-\hat{\lambda}_1)}{n_1-1} + (1-P_1)^2 \frac{\hat{\lambda}_2 (1-\hat{\lambda}_2)}{n_2-1} \right]$	

<p>4. <u>Stichproben-</u> <u>theoretischer</u> <u>Ansatz</u></p>	$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}_1 - (1-P_1)\hat{\psi}}{P_1} \quad \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{N} \sum_i w_{1i} Y_i$ $\hat{\psi} = \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{N} \sum_i w_{2i} Y_i$
<p>Antwortvariablen- Ansatz</p>	$\text{Var } \hat{\pi} = \frac{1}{P_1^2} [P_1^2 \text{Var } \hat{\pi}_1^d + (1-P_1)^2 \text{Var } \hat{\psi}_1^d + 2P_1(1-P_1) (\text{Cov}(\hat{\pi}_1^d, \hat{\psi}_1^d))]$ $+ \frac{(1-P_1)^2}{P_1^2} \text{Var } \hat{\psi}_2^d + \frac{1-P_1}{P_1 N^2} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 E W_{1i}^2$ $\text{V\ddot{a}r } \hat{\pi} = \frac{1}{P_1^2} (\text{V\ddot{a}r } \hat{\lambda}_1 + (1-P_1)^2 \text{V\ddot{a}r } \hat{\lambda}_2)$ <p>mit</p> $\text{V\ddot{a}r } \hat{\lambda}_1 = \frac{\hat{S}_1(\hat{\lambda}_1)}{n_2} + \frac{1}{N^2} \sum_{i \in S_1} w_{1i} \hat{\sigma}_{1i}^2$
<p>Spezialfall: Stichprobe ohne Zurücklegen</p>	$\hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda}_1 - (1-P_1)\hat{\psi}}{P_1} \quad ; \quad \hat{\psi} = \hat{\lambda}_2$ $\text{Var } \hat{\pi} = \frac{1}{P_1^2} \left[\frac{\lambda_1(1-\lambda_1)}{n_1} \cdot \frac{N-n_1}{N-1} + (1-P_1)^2 \frac{\lambda_2(1-\lambda_2)}{n_2} \frac{N-n_2}{N-1} \right]$ $(\text{V\ddot{a}r } \hat{\pi})_1 = \frac{1}{P_1^2} \left[\frac{\hat{\lambda}_1(1-\hat{\lambda}_1)}{n_1-1} \cdot \frac{N-n_1}{N} + (1-P_1)^2 \frac{\hat{\lambda}_2(1-\hat{\lambda}_2)}{n_2-1} \cdot \frac{N-n_2}{N} \right]$ $(\text{V\ddot{a}r } \hat{\pi})_2 = \frac{1}{P_1^2} \frac{\hat{\lambda}_1(1-\hat{\lambda}_1)}{n_1-1} + (1-P_1)^2 \frac{\hat{\lambda}_2(1-\hat{\lambda}_2)}{n_2-1} \cdot \frac{N-n_2}{N}$ $\text{Bias}(\text{V\ddot{a}r } \hat{\pi})_1 = - \frac{(1-P_1) \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2}{N^2 P_1}$ $\text{Bias}(\text{V\ddot{a}r } \hat{\pi})_2 = \frac{\text{Var}(P_1 X + (1-P_1) U)}{(N-1) P_1^2}$

GREENBERG et al. (1969a) kommen zur Empfehlung, $P_2 = 1 - P_1$ zu wählen. Bei der Auswertung von (3.114) beachten sie jedoch nicht, daß man o.B.d.A. $P_1 > P_2$ annehmen kann.

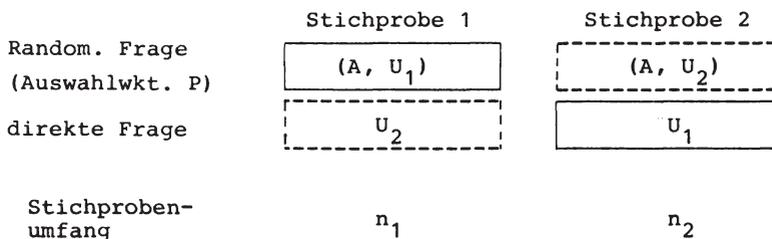
Im gegengesetzten Fall bringt eine Vertauschung der Stichproben die angegebene Voraussetzung. Demnach ist $\partial \text{Var } \hat{\pi} / \partial P_2$ für $P_2 < P_1 < 1$ immer positiv; somit wird für $P_2 = 0$ das Minimum angenommen, da P_2 nicht negativ ist.

In der zweiten Stichprobe ist also eine direkte Befragung nach dem Zusatzmerkmal durchzuführen. Dieses Ergebnis geht auf MOORS zurück ¹⁾.

In der Übersicht 3.7 sind die Formeln nur für das optimale Modell mit $P_2 = 0$ aufgeführt.

3.4.2.2 Das FOLSOM-Modell

Wie im vorangegangenen Abschnitt dargestellt wurde, ist es im SIMMONS-II-Modell optimal, in einer Stichprobe das Unrelated-Question-Modell wie im SIMMONS-I-Modell anzuwenden, in der anderen das Zusatzmerkmal, dessen Verteilung unbekannt ist, direkt zu erfragen. FOLSOM et al. schlagen nun eine 'verschränkte' Kombination zweier optimierter SIMMONS-II-Modelle vor:²⁾



1) MOORS (1971, S.629) geht bei seiner Ableitung jedoch von optimal aufgeteilten Stichproben aus.

2) Vgl. FOLSOM et al. (1973).

Wie aus der Abbildung ersichtlich, werden zwei Zusatzmerkmale U_1 und U_2 verwandt. Die jeweils eingerahmten Fragekombinationen konstituieren ein - bzgl. P_2 optimiertes - SIMMONS-II-Modell

Für jedes dieser Modelle läßt sich - aus (3.97) mit $P_2 = 0$ - ein Schätzwert für π ermitteln.¹⁾

$$(3.112) \quad \begin{aligned} \hat{\pi}(1) &= \frac{\hat{\lambda}_{1.}(1) - (1-P)\hat{\lambda}_{.1}(2)}{P} \\ \hat{\pi}(2) &= \frac{\hat{\lambda}_{1.}(2) - (1-P)\hat{\lambda}_{.1}(1)}{P} \end{aligned}$$

In den Klammern sind jeweils die Stichproben, als Indices die beiden Fragen angegeben; man beachte: $\hat{\lambda}_{.1}(1) = \hat{\psi}_2(1)$ und $\hat{\lambda}_{.2}(2) = \hat{\psi}_1(2)$. Durch eine varianzminimale Linearkombination der beiden Schätzer $\hat{\pi}(1)$ und $\hat{\pi}(2)$ läßt sich ein Schätzer $\hat{\pi}$ angeben, dessen Varianz höchstens genauso groß ist wie die von $\hat{\pi}(1)$ bzw. $\hat{\pi}(2)$:

$$(3.113) \quad \hat{\pi} = w \hat{\pi}(1) + (1-w) \hat{\pi}(2)$$

Gesucht ist also das Gewicht \bar{w} , das die Varianz von $\hat{\pi}$ minimiert. Ausgehend von (3.114) erhält man die Formel für \bar{w} ²⁾:

$$(3.114) \quad \text{Var } \hat{\pi} = w^2 \text{Var } \hat{\pi}(1) + (1-w)^2 \text{Var } \hat{\pi}(2) + 2w(1-w) \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))$$

$$(3.115) \quad \bar{w} = \frac{\text{Var } \hat{\pi}(2) - \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))}{\text{Var } \hat{\pi}(1) + \text{Var } \hat{\pi}(2) - 2 \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))}$$

Die Formeln für $\text{Var } \hat{\pi}(1)$ und $\text{Var } \hat{\pi}(2)$ sind durch (3.98) mit $P_2 = 0$ gegeben, für die Kovarianz gilt:

$$(3.116) \quad \begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2)) &= \frac{-(1-P)}{P^2} [\text{Cov}(\hat{\lambda}_{1.}(1), \hat{\lambda}_{.1}(1)) + \\ &\quad + \text{Cov}(\hat{\lambda}_{1.}(2), \hat{\lambda}_{.1}(2))] \\ &= \frac{-(1-P)}{P^2} \left[\frac{\lambda_{11}(1) - \lambda_{1.}(1)\lambda_{.1}(1)}{n_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{11}(2) - \lambda_{1.}(2)\lambda_{.1}(2)}{n_2} \right] \end{aligned}$$

1) Vgl. FOLSOM et al. (1973, S.526).

2) Vgl. FOLSOM et al. (1973, S.527).

Durch Einsetzen von \bar{w} in (3.114) ergibt sich die Varianz für den optimalen Schätzer

$$(3.117) \quad \text{Var } \hat{\pi}_{\text{opt}} = \frac{\text{Var } \hat{\pi}(1)\text{Var } \hat{\pi}(2) - \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))^2}{\text{Var } \hat{\pi}(1) + \text{Var } \hat{\pi}(2) - 2 \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))}$$

Bei Anwendungen sind die Varianzen und Kovarianzen in (3.115), (3.117) aus den Stichproben zu schätzen.

Für das beim SIMMONS-II-Modell angesprochene Optimierungsproblem, die Bestimmung der optimalen Aufteilung, sind hier keine 'einfachen' Formeln anzugeben. Numerische Berechnungen für Beispiele lassen zwei gleich große Stichproben vorteilhaft erscheinen. ¹⁾

1) Vgl. FOLSOM et al. (1973, S.527).

Übersicht 3.8: Das FOLSOM - Modell

1. Fragen- struktur	Randomisierte Frage		Direkte Frage
	Frage	Auswahlwahrscheinlichkeit	
Stich- probe 1	Haben Sie die (sensitive) Eigenschaft A ?	P	Haben Sie die (nicht-sensitive) Eigenschaft U_2 ?
	Haben Sie die (nicht- sensitive)Eigenschaft U_1 ?	1-P	
Stich- probe 2	Haben Sie die (sensitive) Eigenschaft A ?	P	Haben Sie die (nicht-sensitive) Eigenschaft U_1 ?
	Haben Sie die (nicht- sensitive)Eigenschaft U_2 ?	1-P	
2. Modell	<p>Ein alternatives (sensitives) Untersuchungsmerkmal. Zwei alternative (nicht-sensitive) Zusatzmerkmale. Das FOLSOM-Modell besteht aus zwei verschränkten SIMMONS-II-Modellen mit $P_2 = 0$. Aufteilung: $n_1 = n_2$</p>		
3. Schät- zung	<p>Für jedes dieser SIMMONS-II-Modelle wird ein Schätzwert $\hat{\pi}(i)$ ermittelt $i = 1, 2$:</p> $\hat{\pi}(1) = \frac{\hat{\lambda}_{1.}(1) - (1-P)\hat{\lambda}_{.1}(2)}{P} ;$ $\text{Var } \hat{\pi}(1) = \frac{\text{Var } \hat{\lambda}_{1.}(1) + (1-P)^2 \text{Var } \hat{\lambda}_{.1}(2)}{P^2}$ $\hat{\pi}(2) = \frac{\hat{\lambda}_{1.}(2) - (1-P)\hat{\lambda}_{.1}(1)}{P}$ $\text{Var } \hat{\pi}(2) = \frac{\text{Var } \hat{\lambda}_{1.}(2) + (1-P)^2 \text{Var } \hat{\lambda}_{.1}(1)}{P^2}$		
Gewogener Schätzer	$\hat{\pi} = w\hat{\pi}(1) + (1-w)\hat{\pi}(2)$ $\text{Var } \hat{\pi} = w^2 \text{Var } \hat{\pi}(1) + (1-w)^2 \text{Var } \hat{\pi}(2) + 2w(1-w) \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))$ $w = \frac{\text{Var } \hat{\pi}(2) - \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))}{\text{Var } \hat{\pi}(1) + \text{Var } \hat{\pi}(2) - 2\text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))}$ $\text{Var } \hat{\pi}_{\text{opt}} = \frac{\text{Var } \hat{\pi}(1) \cdot \text{Var } \hat{\pi}(2) - \text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))^2}{\text{Var } \hat{\pi}(1) + \text{Var } \hat{\pi}(2) - 2\text{Cov}(\hat{\pi}(1), \hat{\pi}(2))}$		

3.5 VERGLEICH DER MODELLE

Nachdem in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 mehrere Modelle zur Schätzung eines Anteils vorgestellt wurden, erhebt sich insbesondere für Anwendungen die Frage, welches Modell in einer bestimmten Situation zu wählen ist.

Als Entscheidungskriterium verwenden wir - wie üblich - die Schätzgenauigkeit, gemessen durch den mean square error, der aus den beiden Bestandteilen Varianz und Bias besteht.

Der mean square error wird u.a. bestimmt durch die Parameter der Grundgesamtheit, den Stichprobenumfang, die Parameter des RRT-Modells und die Antwortbereitschaft der Befragten.

Ein Vergleich von RRT-Modellen müßte zumindest alle diese Einflußfaktoren berücksichtigen. Dies ist jedoch nicht möglich, da zwischen den Modell-Parametern und der Antwortbereitschaft Zusammenhänge bestehen, die nicht genau zu spezifizieren sind.

Somit bleiben für den Vergleich nur zwei Möglichkeiten.

Zum einen kann man - unter möglichst plausiblen Annahmen - davon ausgehen, daß zwischen charakteristischen Größen des RRT-Modells - bspw. dem 'Protektionsgrad' - und der Antwortbereitschaft ein für alle Modelle gleicher Zusammenhang besteht. In diesem Fall kann man sich auf Varianzvergleiche bei gleichem Wert der charakteristischen Kenngrößen beschränken; dieser Weg wird in den Abschnitten 3.5.1 bis 3.5.3 begangen.

Zum anderen ist es möglich, die Antwortbereitschaft explizit zu berücksichtigen, indem man für unterschiedliche Konstellationen der Antwortbereitschaft bei den zu vergleichenden Modellen Effizienzvergleiche vornimmt. Über den Zusammenhang zwischen Modellparameter und Antwortbereitschaft kann man dann anhand von Vorinformationen oder Schätzungen in konkreten Anwendungsfällen entscheiden, ob man die RRT überhaupt sinnvollerweise anwenden sollte und wenn ja, welches Modell zu wählen ist. Dieses Vorgehen wird in 3.5.4 dargestellt und anhand von Modellrechnungen und Graphiken erläutert.

3.5.1 Modell - Vergleich aufgrund gleicher Auswahlwahrscheinlichkeit der sensitiven Frage

Bei der Betrachtung der Modelle vom WARNER-Typ und der Unrelated-Question-Modelle (SIMMONS-I/II-, FOLSOM-Modell) erscheint es naheliegend, Vergleiche aufgrund gleicher Auswahlwahrscheinlichkeit P vorzunehmen. Entscheidend für die Varianzvergleiche ist die Zusatzvarianz des Schätzers $\hat{\pi}$, d.h. seine Gesamtvarianz abzüglich der Varianz, die bei direkter Befragung auftritt. Da in allen Varianzformeln der Faktor $1/n$ auftritt, kann er bei Vergleichen vernachlässigt werden.

Um zu möglichst allgemein, d.h. etwa für alle $\pi, \psi \in [0,1]$ geltenden Aussagen zu kommen, ist es notwendig, die Extrema der Zusatzvarianzen bez. $(\pi, \psi) \in [0,1] \times [0,1]$ zu bestimmen.

Für das SIMMONS-I-Modell gilt für die Zusatzvarianz V^+ : 1)

$$(3.118) \quad \text{SIMMONS-I-M.:} \quad \max_{(\pi, \psi) \in [0,1]^2} V^+ = \begin{cases} \frac{1}{4 P^2} & 0 < P \leq 1/2 \\ \frac{1-P}{P} & 1/2 < P < 1 \end{cases}$$

$$(3.119) \quad \text{SIMMONS-I-M.:} \quad \min_{\psi \in [0,1]} V^+ = \begin{cases} \frac{1-P}{P} \pi & \pi \leq 1/2 \\ \frac{1-P}{P} (1-\pi) & \pi > 1/2 \end{cases}$$

Das Minimum von V^+ wird - bei vorgegebenem π - bei $\psi = 0$ bzw. $\psi = 1$ für $\pi \leq 1/2$ bzw. $\pi > 1/2$ angenommen.

Im SIMMONS-II-Modell gelten für die optimierte Form ($P_2 = 0$, optimale Aufteilung) mit $P_1 = :P$ folgende Formeln für die Extrema von V^+ : 2)

1) Vgl. zur Ableitung DOWLING/SHACHTMAN (1975, S.85).

2) Vgl. zur Ableitung DOWLING/SHACHTMAN (1975, S.86).

$$(3.120) \quad \text{SIMMONS-II-M.:} \quad \max_{(\pi, \psi) \in [0, 1]^2} V^+ = \frac{1-P}{P^2}$$

Für das Minimum von V^+ erhalten wir das gleiche Ergebnis wie im SIMMONS-I-Modell:

$$(3.121) \quad \text{SIMMONS-II-M.:} \quad \min_{\psi \in [0, 1]} V^+ = \begin{cases} \frac{1-P}{P} \pi & \pi < 1/2 \\ \frac{1-P}{P} (1-\pi) & \pi \geq 1/2 \end{cases}$$

Beim FOLSOM-Modell muß man von folgenden vereinfachenden Annahmen ausgehen, um sinnvolle Vergleiche anstellen zu können:

Die beiden Zusatzmerkmale U_1 und U_2 haben die gleiche Verteilung, $\psi_1 = \psi_2 =: \psi$, und sind unabhängig voneinander. Außerdem seien die beiden Unterstichproben gleich groß, d.h. $n_1 = n_2 =: n$. Als optimales Gewicht ergibt sich dann $\bar{w} = 1/2$.

Mit $\lambda := \lambda_1$ (1) gilt dann für die Varianz des Schätzers (3.113) ¹⁾.

$$(3.122) \quad \text{FOLSOM-M.:} \quad \text{Var } \hat{\pi}_{\text{opt}} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{n P^2} + \frac{(1-P)^2}{n P^2} \psi(1-\psi).$$

Die Schätzervarianz ist also um den zweiten Summanden größer als beim SIMMONS-I-Modell. Somit gilt für die Zusatzvarianz ($n=1$):

$$(3.123) \quad \text{FOLSOM-M.:} \quad V^+ = \frac{1-P}{P} \left[\frac{(1-P)\psi(1-\psi)}{P} + (\pi-\psi)^2 + \pi(1-\pi) \right]$$

Wie im SIMMONS-I-Modell lassen sich Maximum und Minimum von V^+ bestimmen:

$$(3.124) \quad \text{FOLSOM-M.:} \quad \max_{(\pi, \psi) \in [0, 1]^2} V^+ = \begin{cases} \frac{P^2 - 4P + 4}{8P^2} & P < 2/3 \\ \frac{1-P}{P} & P \geq 2/3 \end{cases}$$

$$(3.125) \quad \text{FOLSOM-M.:} \quad \min_{\psi \in [0, 1]} V^+ = \begin{cases} \frac{1-P}{P} \pi & \pi < 1/2 \\ \frac{1-P}{P} (1-\pi) & \pi \geq 1/2 \end{cases}$$

1) Vgl. FOLSOM et al. (1973, S.527).

Im WARNER-Modell und seinen Multiple-Trial-Versionen - wir verwenden hier die Binomialversion - sind die Zusatzvarianzen von π unabhängig:

$$(3.126) \quad \text{WARNER-Modell:} \quad v^+ = \frac{P(1-P)}{(2P-1)^2}$$

$$(3.127) \quad \text{WARNER-Modell:} \quad v^+ = \frac{P(1-P)}{m(2P-1)^2}$$

(Binomialversion)

Vergleicht man die Unrelated-Question-Modelle untereinander - jeweils das gleiche Zusatzmerkmal vorausgesetzt - so ist die Varianz des SIMMONS-I-Modells geringer als die des FOLSOM-Modells, dessen Varianz seinerseits unter der des SIMMONS-II-Modells liegt.

Ist die Verteilung des Zusatzmerkmals bekannt, wird man das SIMMONS-I-Modell anwenden; ist sie nicht bekannt und möchte man nicht mit vorgegebenen Antworten arbeiten, ist also das FOLSOM-Modell anzuwenden.

Sucht man einen Wertebereich für P, in dem die WARNER-Modelle eine geringere Varianz aufweisen als die Unrelated-Question-Modelle, so sind die Zusatzvarianzen der WARNER-Modelle mit der minimalen Zusatzvarianz der Unrelated-Question-Modelle zu vergleichen. Wir erhalten folgende Ergebnisse:

Das WARNER-Modell hat unter der Bedingung (3.128)

$$(3.128) \quad P^2 - \gamma(2P-1)^2 < 0; \quad \gamma = \min(\pi, 1-\pi)$$

eine geringere Varianz als die Unrelated-Question-Modelle:

Die Binomialversion des WARNER-Modells hat unter der Bedingung (3.129):

$$(3.129) \quad P^2 - m\gamma(2P-1)^2 < 0; \quad \gamma = \min(\pi, 1-\pi)$$

eine geringere Varianz als die Unrelated-Question-Modelle.

Die Tabelle 3.1 zeigt, daß das einfache WARNER-Modell nur für -

unrealistisch - niedrige Werte von P eine geringere Varianz als die Unrelated-Question-Modelle hat. Wählt man jedoch die Anzahl der Versuche im Multiple-Trial-Modell groß genug, so ergeben sich recht realistische Werte, die P überschreiten muß, damit das WARNER-Modell effizienter als die Unrelated-Question-Modelle ist:

Tabelle 3.1: Kritische Werte P_u, P_o für P, so daß das WARNER-Modell für $P < P_u$ bzw. $P > P_o$ eine geringere Varianz als ein Unrelated-Question-Modell hat.

Modell	π	0.95	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
		0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	
Einfaches WARNER-Modell	P_u	0.155	0.194	0.236	0.261	0.279	0.293
	P_o	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Multiple m=5 Trial-Versionen des WARNER-Modells	P_u	0.25	0.293	0.333	0.355	0.369	0.380
	P_o	1.0	1.0	1.0	0.845	0.773	0.731
	P_u	0.293	0.333	0.369	0.388	0.400	0.409
	P_o	1.0	1.0	0.773	0.703	0.667	0.644

Will man demgegenüber Bedingungen für die Vorteilhaftigkeit der Unrelated-Question-Modelle gegenüber den WARNER-Modellen angeben, so hat man von ihrem maximalen Zusatzvarianzen auszugehen. Der Vergleich der Zusatzvarianzen führt zu folgenden Ergebnissen:

Für $P > 0.339$ hat das SIMMONS-I-Modell eine kleinere Schätzer-varianz als das WARNER-Modell.¹⁾

Für $P > 0.382$ hat das SIMMONS-II-Modell eine kleinere Schätzer-varianz als das WARNER-Modell.²⁾

1) Vgl. Ableitung und Ergebnis in DOWLING/SHACHTMAN (1975, S.85).

2) Vgl. Ableitung und Ergebnis in DOWLING/SHACHTMAN (1975, S.86).

Für $P > 0.354$ hat das FOLSOM-Modell eine kleinere Schätzervarianz als das WARNER-Modell ¹⁾.

Grob gesprochen heißt dies, daß für $P > 0.4$ - also in allen realistischen Fällen - die Unrelated-Question-Modelle geringere Varianzen als das WARNER-Modell haben.

Abschließend wollen wir die Bereiche für P bestimmen, in denen die Unrelated-Question-Modelle eine geringere Schätzervarianz aufweisen als die m -Trial-Version des WARNER-Modells. Man macht sich leicht klar, daß sich dieser Bereich für sehr große m immer stärker um $P = 1/2$ konzentriert.

Aus den Vergleichen der Zusatzvarianzen erhalten wir folgende Ergebnisse:

Das SIMMONS-I-Modell hat unter der Bedingung (3.130)

$$(3.130) \quad m(2P-1)^2 - 4P^3(1-P) < 0 \quad ; \quad 0 < P \leq 1/2 \\ m(2P-1)^2 - P^2 < 0 \quad ; \quad 1/2 < P < 1$$

eine geringere Varianz als die m -Trial-Version des WARNER-Modells.

Das FOLSOM-Modell hat unter der Bedingung (3.131)

$$(3.131) \quad m(2P-1)^2(P^2 - 4P + 4) - 8P^3(1-P) < 0 \quad ; \quad 0 < P \leq 2/3 \\ m(2P-1)^2 - P^2 < 0 \quad ; \quad 2/3 < P < 1$$

eine geringere Varianz als die m -Trial-Version des WARNER-Modells.

Das SIMMONS-II-Modell hat unter der Bedingung (3.132)

$$(3.132) \quad m(2P-1)^2 - P^3 < 0$$

eine geringere Varianz als die m -Trial-Version des WARNER-Modells.

1) Vgl. das Ergebnis bei LANKE (1976, S.201), das man durch numerische Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms 4.Grades erhält, das die Gleichheit der Zusatzvarianzen wiedergibt.

In der Tabelle 3.2 sind für $m = 5, 10$ die Intervalle (P_u, P_o) aufgeführt, in denen die Unrelated-Question-Modelle eine geringere Varianz als das m -Trial-WARNER-Modell haben.

Tabelle 3.2: Intervalle $P \in (P_u, P_o)$, für die das Unrelated-Question-Modell eine geringere Varianz als ein m -trial WARNER-Modell hat.

Modell m	SIMMONS-I		FOLSOM		SIMMONS-II	
	P_u	P_o	P_u	P_o	P_u	P_o
5	0.410	0.644	0.418	0.644	0.436	0.605
10	0.432	0.594	0.438	0.593	0.452	0.568

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind in der Übersicht 3.9 zusammengefaßt.

Übersicht 3.9: Formaler Vergleich von RRT-Modellen aufgrund gleicher Auswahlwahrscheinlichkeit P für die sensitive Frage

als geringere Va- rianz	als WARNER Modell	SIMMONS-II Modell (optimale Version)	FOLSOM Modell ($\psi_1 = \psi_2 =: \psi$ U_1, U_2 unabh. $n_1 = n_2 = n/2$)	SIMMONS-I- Modell	m-Trial WARNER- Modell
WARNER- Modell		$P^2 - \gamma(2P-1)^2 < 0$ ψ beliebig $\gamma := \min(\pi, 1-\pi)$	$P^2 - \gamma(2P-1)^2 < 0$ ψ beliebig $\gamma := \min(\pi, 1-\pi)$	$P^2 - \gamma(2P-1)^2 < 0$ ψ beliebig $\gamma := \min(\pi, 1-\pi)$	unmöglich
SIMMONS-II- Modell (Optimale Version)	$P > 0.382$ π, ψ beliebig		unmöglich	unmöglich	$m(2P-1)^2 - P^3 < 0$ π, ψ beliebig
FOLSOM- Modell ($\psi_1 = \psi_2 =: \psi$ U_1, U_2 unabh. $u_1 = u_2 = u/2$)	$P > 0.354$ π, ψ beliebig	π, ψ beliebig		unmöglich	$m(2P-1)^2(P^2 - 4P + 4) - 8P^3(1-P) < 0$ $0 < P \leq 2/3$ $m(2P-1)^2 - P^2 < 0$ $2/3 < P < 1$ π, ψ beliebig
SIMMONS-I- Modell	$P > 0.339$ π, ψ beliebig	π, ψ beliebig	π, ψ beliebig		$m(2P-1)^2 - 4P^3(1-P) < 0$ $0 < P \leq 1/2$ $m(2P-1)^2 - P^2 < 0$ $1/2 < P < 1$ π, ψ beliebig beliebig
m-Trial WARNER-M.	$m > 1$ π belieb.	$P^2 - m\pi(2P-1)^2 < 0$ ψ beliebig	$P^2 - m\pi(2P-1)^2 < 0$ ψ beliebig	$P^2 - m\pi(2P-1)^2 < 0$ ψ beliebig	

3.5.2 Modellvergleich aufgrund gleicher bedingter Verteilung der Untersuchungsvariablen bez. der Antwortvariablen

Résumiert man die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts, so mag das 'gute Abschneiden' der Unrelated-Question-Modelle gegenüber den WARNER-Modellen etwas verwundern. Diese Vergleiche sind jedoch problematisch, da sie ja voraussetzen, daß das Antwortverhalten von der Auswahlwahrscheinlichkeit P bei den zu vergleichenden Modellen in gleichem Ausmaß beeinflußt wird. Der Grundidee des RRT entsprechend sollte jedoch die Vertraulichkeit der Antwort die Antwortbereitschaft entscheidend beeinflussen. Entscheidend für die Vertraulichkeit ist jedoch sicherlich, inwieweit man aus einer Antwort auf den tatsächlichen Zustand rückschließen kann; statistisch gesprochen sind also die bedingten Verteilungen der Untersuchungsvariablen bez. der Antwortvariablen bedeutsam.

Wir untersuchen diese bedingte Verteilungen für Modelle mit alternativer Antwortvariable (Antwort: Ja/Nein); nach dem Bayesschen Theorem erhalten wir die folgenden Formeln:

WARNER-Modell:

$$(3.133) \quad \begin{aligned} P(A|J) &= \frac{P \pi}{P \pi + (1-P)(1-\pi)} \\ P(A|N) &= \frac{(1-P) \pi}{(1-P) \pi + P(1-\pi)} \quad 1) \end{aligned}$$

CONTAMINATION-Modell

$$(3.134) \quad \begin{aligned} P(A|J) &= \frac{(1-\phi_n) \pi}{(1-\phi_n) \pi + \phi_p (1-\pi)} \\ P(A|N) &= \frac{\phi_n \pi}{\phi_n \pi + (1-\phi_p) (1-\pi)} \end{aligned}$$

1) Vgl. FLIGNER et al. (1977, S.1516).

SIMMONS-I/II-Modell

$$(3.135) \quad P(A|J) = \frac{[P+(1-P)\psi]\pi}{P\pi+(1-P)\psi}$$
$$P(A|N) = \frac{(1-P)(1-\psi)\pi}{P(1-\pi)+(1-P)(1-\psi)} \quad 1)$$

In (3.135) nimmt man an, das Untersuchungsmerkmal und das Zusatzmerkmal seien unabhängig voneinander.

Um einen Eindruck über die Größenordnungen zu gewinnen, sind einige Werte der bedingten Verteilungen in Tabelle 3.3 zusammengestellt.

Vergleicht man nun die Unrelated-Question-Modelle mit dem WARNER-Modell, so sieht man, daß die Effizienzvorteile, die im vorausgegangenen Abschnitt dargestellt wurden, mit geringerer Vertraulichkeit einhergehen.

Ein Vergleich der Modelle, der auf gleichen bedingten Verteilungen der Untersuchungsvariablen beruht - $P(A|J)$, $P(A|N)$ - , kommt zu folgendem Ergebnis:

Im Falle dieser gleichen bedingten Verteilungen stimmen die Verteilung der Antwortvariablen und der Momentenschätzer überein.

Ausgangspunkt dieser Überlegung ist, daß sich λ und $\hat{\pi}$ wie folgt darstellen lassen:

$$(3.136) \quad \lambda = P(J) = P(J|A)\pi + P(J|\bar{A})(1-\pi)$$

und

$$(3.137) \quad \hat{\pi} = \frac{\hat{\lambda} - P(J|\bar{A})}{P(J|A) - P(J|\bar{A})} \quad 2)$$

1) Vgl. FLIGNER et al. (1977, S.1517).

2) Vgl. LEYSIEFFER/WARNER (1976, S.651) und WARNER (1976, S.207).

Tabelle 3.3: Exemplarische Werte für die bedingte Verteilung der Untersuchungsvariablen bez. der Antwortvariablen beim WARNER-, CONTAMINATION- und SIMMONS-I/II-Modell
 $\pi = 0.2$ ¹⁾

WARNER-Modell

P	P(A J)	P(A N)
0.2	0.059	0.500
0.7	0.368	0.097
0.8	0.500	0.059
0.9	0.692*	0.027*

CONTAMINATION-Modell

P(A|J); darunter in Klammern P(A|N)

$\phi_p \backslash \phi_n$	0.0	0.1	0.3
0.1	0.714 (0.000)	0.692* (0.027)*	0.636 (0.077)
0.3	0.455 (0.000)	0.429 (0.034)	0.368 (0.097)

SIMMONS-I/II-Modell

P(A|J); darunter in Klammern P(A|N)

$\psi \backslash P$	0.2	0.7	0.8	0.9
0.0	1.000 (0.167)	1.0 (0.070)	1.0 (0.048)	1.0 (0.024)
0.5	0.273 (0.143)	0.586 (0.042)	0.692* (0.027)*	0.826 (0.013)
1.0	0.238 (0.0)	0.455 (0.0)	0.556 (0.0)	0.714 (0.0)

1) Eine äquivalente Konstellation ist mit * gekennzeichnet.

Übereinstimmende bedingte Verteilungen der Untersuchungsvariablen bedeuten also völlig gleichwertige Modelle; denn gleiche Wahrscheinlichkeit $P(A|J)$ und $P(A|N)$ bedingen gleiche Wahrscheinlichkeiten $P(J|A)$ und $P(J|\bar{A})$ und umgekehrt.

Die Bedingungen für die Gleichwertigkeit sind in Übersicht 3.10. dargestellt ¹⁾.

1) Bei einigen Formeln vgl. BORUCH (1972, S.407) und SWENSSON (1976b, S.8-10).

Übersicht 3.10: Formale Äquivalenz von Einstichproben - Modellen ¹⁾

	WARNER- Modell	CONTAMINATION- Modell	SIMMONS-I- Modell
WARNER-Modell Auswahlwahrscheinlichkeit $P_w \neq 1/2$		$\phi_p = \phi_n = 1 - P_w$	$P_u = 2P_w - 1$ $\psi = 1/2$
CONTAMINATION- Modell $\phi_p + \phi_n < 1$	nur für $\phi_n = \phi_p$ <hr/> $P_w = 1 - \phi_n$		$P_u = 1 - \phi_n - \phi_p$ $\psi = \phi_p / (\phi_n + \phi_p)$
SIMMONS-I- Modell Auswahlwahrscheinlichkeit P_u	nur für $\psi = 1/2$ <hr/> $P_w = (P_u + 1) / 2$	$\phi_p = (1 - P_u) \psi$ $\phi_n = (1 - P_u) (1 - \psi)$	

1) Die Antwortvariable Y hat jeweils dieselbe Verteilung, bzw. die bedingten Verteilungen von X (bez. Y) sind identisch.

3.5.3 Modell - Vergleich aufgrund gleichen Protektionsgrads

Wie wir im vorausgegangenen Abschnitt gesehen haben, führt die Annahme, das Antwortverhalten sei von den bedingten Verteilungen von X bez. der Antwortvariablen abhängig, zu völlig gleichartigen Modellen, was die statistischen Eigenschaften anbelangt.

Grundlage der folgenden Überlegungen ist, daß die Antwortbereitschaft entscheidend von der Vertraulichkeit der sensitiven Eigenschaft, als Protektionsgrad bezeichnet, beeinflußt wird. Für Vergleiche aufgrund gleichen Protektionsgrads ist somit der 'Protektionsgrad' zu operationalisieren.

Ausgehend von der bedingten Verteilung von X schlägt LANKE folgende Definition des (inversen) Protektionsgrads P^L vor:¹⁾²⁾

$$(3.138) \quad P^L: = \max\{P(A|J), P(A|N)\}$$

Je größer also die Wahrscheinlichkeit ist, aufgrund einer Antwort der sensitiven Kategorie A zugerechnet zu werden, desto geringer ist die Vertraulichkeit. Bei der direkten Befragung ist $P^L = 1$.

Aus den Formeln (3.133), (3.134) und (3.135) ergibt sich, daß $P(A|J) > P(A|N)$ - beim WARNER-Modell für $P > 1/2$, beim Contamination Modell für $\phi_n + \phi_p < 1$, für alle Werte P, ψ beim SIMMONS-I-Modell:

$$(3.139) \quad P^L = P(A|J), \text{ wenn im } \begin{cases} \text{WARNER-Modell:} & P > 1/2 \\ \text{CONTAMINATION-Modell:} & \phi_n + \phi_p < 1 \\ \text{SIMMONS-I/II-Modell:} & P, \psi \text{ beliebig} \end{cases}$$

1) Vgl. LANKE (1976, S.200).

2) Eine ganz ähnliche Definition des Protektionsgrads - mit gleichen Konsequenzen wie (3.138) - geben FLIGNER et al. (1977, S.1519) an, wobei jedoch mit steigenden Werten von P^F auch zunehmende Vertraulichkeit verbunden ist:

$$P^F: = [1 - \max\{P(A|J), P(A|N)\}] / (1 - \pi).$$

Eine informationstheoretische Version des Protektionsgrads wird von LEYSIEFFER und WARNER vorgeschlagen ¹⁾. P^W mißt den Informationsgewinn aufgrund einer Ja-Antwort, um A gegenüber \bar{A} zu unterscheiden:

$$(3.140) \quad P^W = \log \frac{P(A|J)}{P(\bar{A}|J)} - \log \frac{P(A)}{P(\bar{A})}$$

Aufgrund des Bayesschen Theorem ergibt sich:

$$(3.141) \quad P^W = \log \frac{P(J|A)}{P(J|\bar{A})} ,$$

so daß als entscheidende Größe das Verhältnis $P(J|A)/P(J|\bar{A})$ anzusehen ist:

Wie man aus (3.139) und (3.140) leicht sieht, bedeutet für zwei RRT-Modelle (1 und 2) Äquivalenz bez. P^L auch Äquivalenz bez. P^W und umgekehrt ²⁾. Wir können uns also im folgenden auf die Gleichheit von $P(A|J)$ bei den Vergleichen beschränken.

Für ein allgemeines RRT-Modell mit alternativer Untersuchungs- und Antwortvariabler (vgl. (3.136), (3.137)) erhalten wir folgende Formel für die Varianz von $\hat{\pi}(n=1)$:

$$(3.142) \quad \text{Var } \hat{\pi} = \frac{\pi^2 (1-\pi)^2}{(P(A|J) - \pi) (\pi - P(A|N))} \quad 3) , \quad n=1 .$$

Aus (3.142) sieht man sofort, daß - unabhängige Variationsmöglichkeit von $P(A|J)$ und $P(A|N)$ unterstellt - eine Erhöhung von $P(A|J)$ - gleichbedeutend mit einer Verringerung der Vertraulichkeit - c.p. zu einer Varianzreduktion führt. Eine Erhöhung von $P(A|N)$ bewirkt c.p. eine Varianzsteigerung. Vergleicht man nun zwei spezielle Modelle dieser allgemeinen Klasse (WARNER-, CONTAMINATION-, SIMMONS-I-Modell), so ergeben sich die entsprechenden Bedingungen für den Varianzvergleich bei gleichem Protektionsgrad (gleichem Wert für $P(A|J)$) aus dem Vergleich der

1) Vgl. LEYSIEFFER/WARNER (1976, S.650) und WARNER (1976, S.206).

2) Vgl. die Diskussionsbemerkung von MOORS in HORVITZ et al., (1976, S.227f.).

3) Vgl. die Umformung bei ANDERSON (1975a, S.12) und ANDERSON (1976, S.214).

bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|N)$. In einem ersten Schritt sind also die Bedingungen für die Äquivalenz der Modelle bei gegebenem Protektionsgrad (symbolisiert durch 'PG') zu bestimmen.

Ein Vergleich der jeweiligen Formeln für $P(A|J)$ führt zu folgenden Ergebnissen:

(3.143) WARNER-Modell $\underset{\sim}{\text{PG}}$ SIMMONS-I-Modell :

$$\frac{1-P_w}{2P_w-1} = \frac{(1-P_u)\psi}{P_u} \quad 1)$$

(3.144) WARNER-Modell $\underset{\sim}{\text{PG}}$ CONTAMINATION-Modell:

$$\frac{1-P_w}{P_w} = \frac{\phi_p}{1-\phi_n}$$

Ein vorgegebener Protektionsgrad bestimmt das einparametrische WARNER-Modell - d.h. P_w - eindeutig, dem entsprechen bei den zweiparametrischen Modellen, dem SIMMONS-I-Modell und dem CONTAMINATION-Modell unendlich viele Parameterkombinationen. Die Abbildungen 3.3/4 illustrieren diesen Sachverhalt. Während beim WARNER-Modell mit dem Protektionsgrad $P(A|J)$ auch $P(A|N)$ festgelegt wird, können die zweiparametrischen Modelle $P(A|N)$ variieren, so daß folgende Bedingungen für den Varianzvergleich bei gleichem Protektionsgrad gelten:

(3.145) Vergleich WARNER-mit SIMMONS-I-Modell bei gleichem Protektionsgrad:

$$\begin{aligned} \text{Var } \hat{\pi}_{\text{WAR}} &\geq \text{Var } \hat{\pi}_{\text{SIM}} && \Leftrightarrow \\ \psi &\geq 1/2 && 2) \end{aligned}$$

-
- 1) Vgl. LANKE (1976, S.200). Sein Theorem 1 ist eine Umformung von (3.143).
 2) Vgl. LANKE (1976, S.201); WARNER (1976, S.209f.); FLIGNER et al. (1977, S.1519).

Abb. 3.3: Iso-Protektionsgrad-Kurven für das Contamination-Modell. $\pi=0.2$.

(Inverser Protektionsgrad $P^L := P(A|J)$)

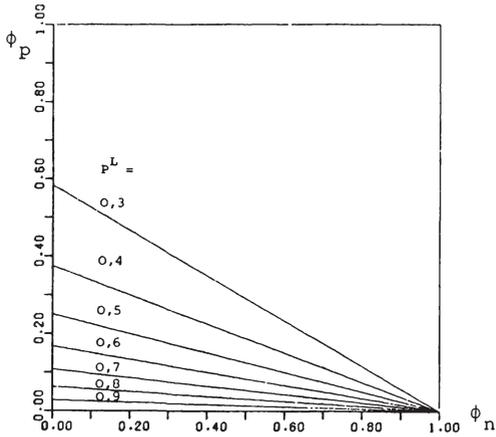
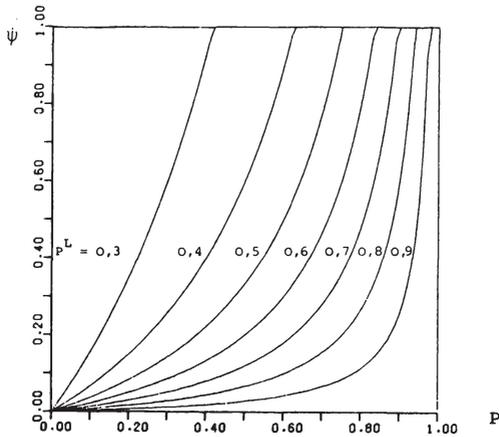


Abb. 3.4: Iso-Protektionsgrad-Kurven für das SIMMONS-I-Modell. $\pi=0.2$.

(Inverser Protektionsgrad $P^L := P(A|J)$)



(3.146) Vergleich WARNER-mit CONTAMINATION-Modell bei gleichem Protektionsgrad:

$$\text{Var } \hat{\pi}_{\text{WAR}} \geq \text{Var } \hat{\pi}_{\text{CON}} \quad <=>$$

$$\phi_n \leq 1 - P_w$$

Für das SIMMONS-I-Modell und das CONTAMINATION-Modell lassen sich also Modellparameterkonstellationen angeben, in denen die Varianz von $\hat{\pi}$ bei konstantem Protektionsgrad immer kleiner ist als beim WARNER-Modell. Die kleinsten Varianzen lassen sich für $\psi=1$ ¹⁾ bzw. $\phi_n=0$ erreichen - die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|N)$ ist dann jeweils Null. Bei einem gegebenen WARNER-Modell mit P_w sind dann $P_u = 2-1/P_w$ bzw. $\phi_p = 1/P_w - 1$. Man sieht dann sofort, daß die Varianzen im SIMMONS-I- und im CONTAMINATION-Modell gleich groß sind. Aus Tabelle 3.4, in der einige Vergleichswerte der Varianzen dargestellt sind, wird deutlich, daß die Varianzen der zweiparametrischen Modelle erheblich kleiner sein können als die des äquivalenten WARNER-Modells.

Tabelle 3.4: Verhältnis der Schätzervarianz des optimalen SIMMONS-I-/CONTAMINATION-Modells ($\psi = 1/\phi_n = 0$) zu der des WARNER-Modells (mit Parameter P_w) bei gleichem Protektionsgrad.

$P_w \backslash \pi$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.6	0.322	0.310	0.286	0.259	0.231	0.2
0.7	0.559	0.545	0.516	0.483	0.444	0.4
0.8	0.740	0.730	0.706	0.677	0.643	0.6
0.9	0.884	0.878	0.865	0.848	0.828	0.8

1) Vgl. LANKE (1975, S.83) und LEYSIEFFER/WARNER (1976, S.653).

Die Gegenüberstellung des SIMMONS-I-Modells und des CONTAMINATION-Modells führt zu folgenden Ergebnissen:

(3.147) SIMMONS-I-Modell \hat{P}_u CONTAMINATION-Modell

$$\Leftrightarrow \frac{(1-P_u)\psi}{P_u} = \frac{\phi_p}{1-\phi_n-\phi_n^{\text{Con}}}$$

(3.148) $\text{Var } \hat{\pi}_{\text{SIM}} < \text{Var } \hat{\pi}_{\text{Con}}$

$$1-\phi_n-\phi_p \gtrsim P_u$$

Grundlage aller dieser Vergleiche ist jedoch die schon oben dargestellte Annahme, das Antwortverhalten werde durch den Wert von $P(A|J)$ bestimmt. Gegen die Realitätsnähe dieser Annahme lassen sich sicherlich Vorbehalte anbringen.

So ist es höchst fraglich, ob sich ein Befragter von einer so komplexen Größe wie $P(A|J)$, die zudem noch von unbekanntem Parametern abhängen kann, in seinem Antwortverhalten leiten läßt.^{1) 2) 3)}

Andererseits kann $P(A|J)$ durchaus als objektives, statistisch begründetes Maß des Protektionsgrads aufgefaßt werden. Die Nichtbeachtung von $P(A|N)$ kann jedoch zu möglicherweise nicht kalkuliertem unerwünschten Antwortverhalten führen, insbesondere, wenn - wie in den optimalen Versionen - $P(A|N)$ gleich Null ist. Eine Nein-Antwort bedeutet in diesem Fall, der Befragte hat die

- 1) Vgl. die Diskussionsbemerkungen von MOORS und SCOTT in HORVITZ et al. (1976, S.228 und 229).
- 2) MORIARTY/WISEMAN (1976) untersuchen, wie Befragte die Wahrscheinlichkeitsverteilung von unterschiedlichen Randomisierungsinstrumenten einschätzen, und schlagen vor, solche zu verwenden, bei denen die empfundene (mittlere) Wahrscheinlichkeit (P^*) für das Auftreten der Frage nach $A(P)$ geringer ist als die tatsächliche. Aufgrund ihrer Beobachtungen bietet sich eine Summenvariable aus zwei Würfeln an ($z=1$, wenn $4 \leq X_1 + X_2 \leq 10$; $P^*=0.7$, $P=0.83$).
- 3) Bez. des Zusammenhangs der Wahrscheinlichkeit P und dem Antwortverhalten vgl. die empirische Studie von PEARL/FEDERER (1975).

Frage nach der Eigenschaft A beantwortet, so daß die Vertraulichkeit seiner Angabe nicht gewährleistet ist ¹⁾.

Die angegebenen Äquivalenz- und Vorteilhaftigkeitsbedingungen sowie die numerischen Aussagen der Vergleiche aufgrund gleichen Protektionsgrads sind sicherlich nur als Anhaltspunkte zu sehen. Die Analyse soll deshalb auch nicht auf die anderen Modelle ausgedehnt werden. Deutlich ist jedoch geworden, daß die zweiparametrischen Modelle flexibler sind und somit i.a. dem einparametrischen Modell vorzuziehen sind.

1) Vgl. GREENBERG et al. (1977, S.58).

Übersicht 3.11: Modell-Vergleich aufgrund gleichen Protektionsgrads

über der Hauptdiagonalen :

Bedingung für Äquivalenz

unter der Hauptdiagonalen:

Varianzvergleich bei gleichem Protektionsgrad

Modell	WARNER- (P_w)	CONTAMINATION- (ϕ_p, ϕ_n)	SIMMONS-I- (P_u, ψ)
WARNER- (P_w)		$\frac{1-P_w}{P_w} = \frac{\phi_p}{1-\phi_n}$	$\frac{1-P_w}{2P_w-1} = \frac{(1-P_u)\psi}{P_u}$
CONTAMINATION- (ϕ_p, ϕ_n)	$\text{Var } \hat{\pi}_{\text{WAR}} \geq \text{Var } \hat{\pi}_{\text{CON}}$ $\phi_n \leq 1-P_w$		$\frac{(1-P_u)\psi}{P_u} = \frac{\phi_p}{1-\phi_n-\phi_p}$
SIMMONS-I- (P_u, ψ)	$\text{Var } \hat{\pi}_{\text{WAR}} \geq \text{Var } \hat{\pi}_{\text{SIM}}$ $\psi \geq 1/2$	$\text{Var } \hat{\pi}_{\text{CON}} \geq \text{Var } \hat{\pi}_{\text{SIM}}$ $P_u \geq 1-\phi_n-\phi_p$	

3.5.4 Modellvergleich mit expliziter Berücksichtigung der Antwortbereitschaft

Bei den bisher durchgeführten Vergleichen wurde die Antwortbereitschaft der Befragten nur implizit berücksichtigt. Außerdem konnte keine Aussage gemacht werden, ob ein RRT-Modell in einer bestimmten Anwendungssituation effizienter als die direkte Befragung ist, wobei die Genauigkeit (mean square error) als Kriterium zu verwenden ist.

Schon WARNER vergleicht sein Modell mit der direkten Befragung; dabei nimmt er an, daß ein jeweils unterschiedlicher Anteil der Befragten mit der Eigenschaft A oder \bar{A} bei direkter Befragung eine falsche Antwort gibt, bei Anwendung des RRT-Modells jedoch alle Befragten wahrheitsgemäß antworten ¹⁾.

Diesen Ansatz nehmen GREENBERG et al. ²⁾ auf und vergleichen das WARNER-Modell, Multiple-Trial-Versionen des WARNER-Modells, das Contamination-, das SIMMONS-I- und das FOLSOM-Modell. Sie gehen davon aus, daß bei direkter Befragung ein Anteil T_A der Befragten mit der Eigenschaft A nicht wahrheitsgemäß antwortet. Für die RRT-Modelle unterstellen sie wahrheitsgemäße Antworten. Diese Annahme ist sicherlich nicht realistisch; allenfalls ist zu erwarten, daß der Anteil der Falschantworten beim RRT-Modell geringer als bei der direkten Befragung ist.

Aus diesem Grund wird hier ein erweiterter Vergleichsansatz gewählt ^{3) 4)}: Sowohl für die direkte Befragung als auch für die

1) Vgl. WARNER (1965, S.64f).

2) Vgl. GREENBERG et al. (1974).

3) Vgl. den ähnlichen Ansatz bei LIU/CHOW (1976a, S.611f.).

4) O'BRIAN/COCHRAN (1977), O'BRIAN/COCHRAN (1978) berücksichtigen ebenfalls falsche Antworten im RRT-Modell. Sie gehen jedoch davon aus, daß die Gruppe der Befragten, die nicht zu einer Antwort bereit ist oder den Befragungsmechanismus überhaupt nicht versteht, homogen ist, ihr Antwortverhalten also nicht vom Vorliegen der sensitiven Eigenschaft beeinflußt ist.

RRT-Modelle wollen wir die Möglichkeit einer falschen Beantwortung der Frage nach der sensitiven Eigenschaft annehmen. Der Übersicht halber gehen wir davon aus, daß die Befragten mit der Eigenschaft \bar{A} wahrheitsgemäß antworten, da sie ja nichts zu verbergen haben.

Bei einem tatsächlichen Anteil der Eigenschaft A bekennt sich also nur ein Anteil

$$(3.149) \quad \pi^* = T_A \pi$$

bei der Befragung zu A.

Für die Varianz des Schätzers sind also die entsprechenden Formeln mit π^* zu verwenden.

Den mean square error als Vergleichsgrundlage erhalten wir durch Addition des quadrierten Bias $(\pi^* - \pi)^2$ zur Varianz von $\hat{\pi}$

$$(3.150) \quad \text{MSE}(\hat{\pi}) = \text{Var}(\hat{\pi} | \pi^*) + (\pi^* - \pi)^2 \quad .$$

Bei der Entscheidung für die RRT als Alternative zur direkten Befragung oder bei der Auswahl eines bestimmten RRT-Modells ist also die Genauigkeit als Vergleichskriterium heranzuziehen. Hierbei sind sowohl für die direkte Befragung als auch für die RRT-Modelle - bei diesen in Abhängigkeit von den Modellparametern - Schätzwerte für die Anteile T_A (bei der RRT als TAR, bei der direkten Befragung als TAD bezeichnet) anzunehmen, die angeben, wieviel Prozent der Befragten mit der Eigenschaft A in der angenommenen Befragungssituation wahrheitsgemäß antworten.

Um diese Entscheidungssituation zu verdeutlichen, führen wir hier das Konzept der Iso-MSE-Kurve ein. Eine Iso-MSE-Kurve für ein RRT-Modell und die direkte Befragung enthält all die (kritischen) Kombinationen (TAD, TAR), für die die Genauigkeit der beiden Verfahren übereinstimmen. Der Verlauf der Iso-MSE-Kurve hängt einmal von π sowie dem Stichprobenumfang n und den Parametern des RRT-Modells ab. Liegt in einem Anwendungsfall die vorliegende Antwortbereitschaft (ausgedrückt in TAD und TAR) oberhalb der

Abb. 3.5 - 3.7: Iso-MSE-Kurven für das WARNER-Modell

Abb.3.5: $n=1000, P=0.7$
 $\pi=0.1^{(1)}, 0.15^{(2)}, 0.2^{(3)},$
 $0.3^{(4)}, 0.4^{(5)}, 0.5^{(6)}.$

Abb.3.6: $\pi=0.2, P=0.7$
 $n=200^{(1)}, 300^{(2)}, 400^{(3)},$
 $500^{(4)}, 1000^{(5)}, 2000^{(6)}.$

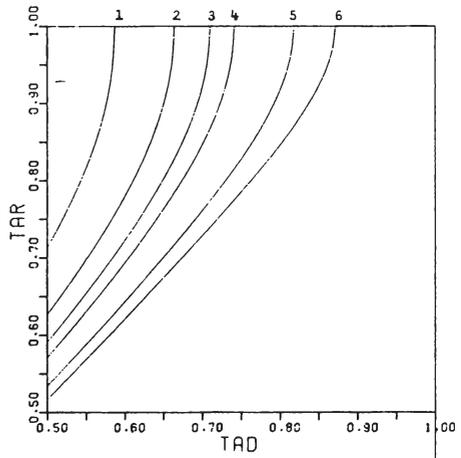
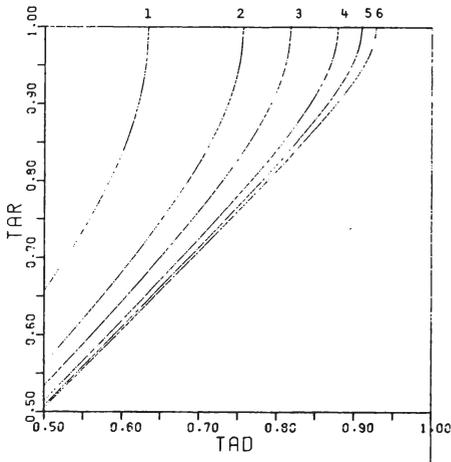


Abb.3.7: $\pi=0.2, n=1000$
 $P=0.6^{(1)}, 0.65^{(2)}, 0.7^{(3)},$
 $0.75^{(4)}, 0.8^{(5)}, 0.85^{(6)}, 0.9^{(7)}, 0.95^{(8)}.$

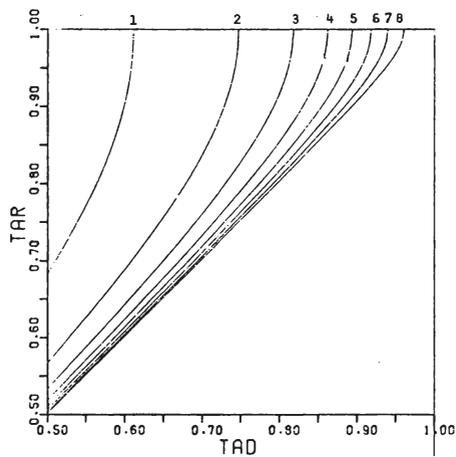


Abb. 3.8 - 3.11: Iso-MSE-Kurven für das Contamination-Modell

Abb.3.8: $n=1000$, $\phi_n=0$, $\phi_p=0.3$
 $\pi=0.05^{(1)}, 0.1^{(2)}, 0.15^{(3)},$
 $0.2^{(4)}, 0.3^{(5)}, 0.4^{(6)}, 0.5^{(7)}.$

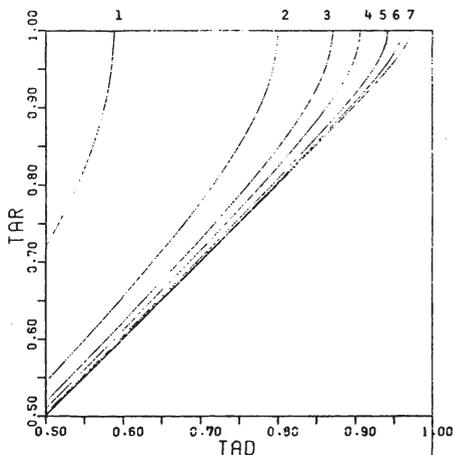


Abb.3.9: $\pi=0.2$, $\phi_n=0$, $\phi_p=0.3$
 $n=100^{(1)}, 200^{(2)}, 300^{(3)},$
 $400^{(4)}, 500^{(5)}, 1000^{(6)}, 2000^{(7)}.$

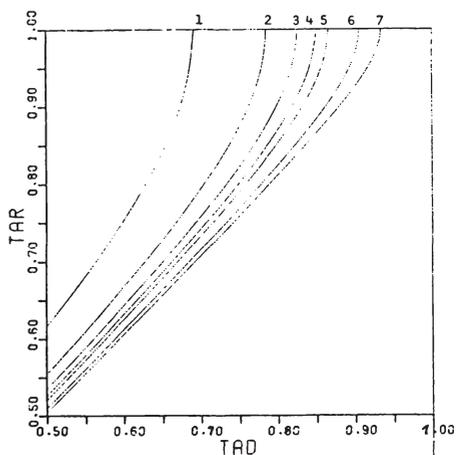


Abb.3.10: $\pi=0.2$, $n=1000$, $\phi_p=0.3$
 $\phi_n=0.6^{(1)}, 0.5^{(2)}, 0.4^{(3)},$
 $0.3^{(4)}, 0.2^{(5)}, 0.1^{(6)}.$

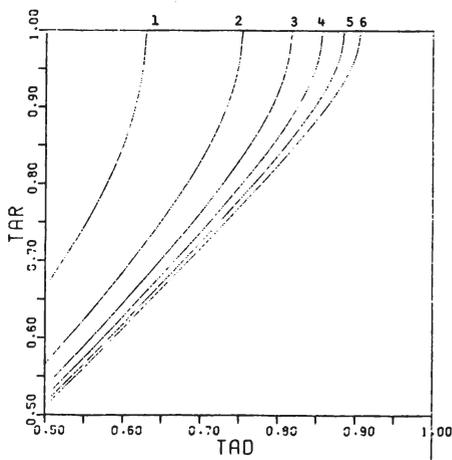


Abb.3.11: $\pi=0.2$, $n=1000$, $\phi_n=0$
 $\phi_p=0.9^{(1)}, 0.8^{(2)}, 0.7^{(3)},$
 $0.6^{(4)}, 0.5^{(5)}, 0.4^{(6)}, 0.3^{(7)}, 0.2^{(8)},$
 $0.1^{(9)}, 0.05^{(10)}.$

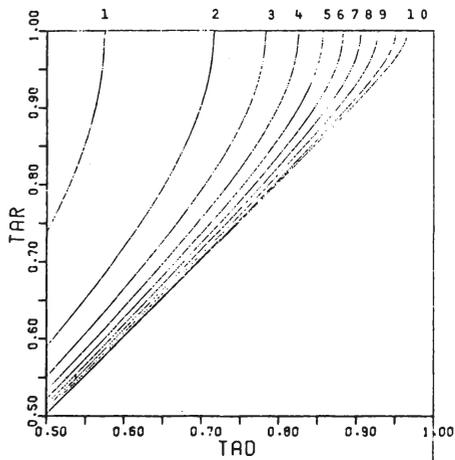


Abb. 3.12 - 3.15: Iso-MSE-Kurven für das SIMMONS-I-Modell

Abb. 3.12: $n=1000$, $P=0.5$, $\psi=1$
 $\pi=0.1^{(1)}, 0.15^{(2)},$
 $0.2^{(3)}, 0.3^{(4)}, 0.4^{(5)}, 0.5^{(6)}$

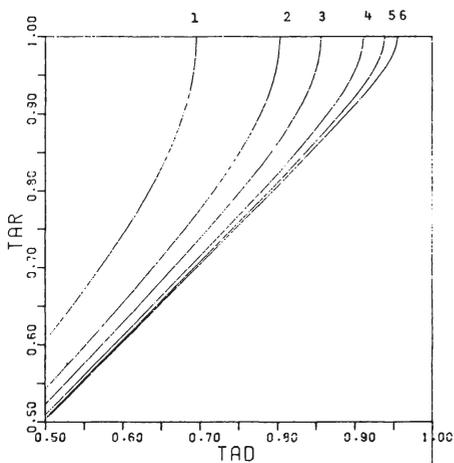


Abb. 3.13: $\pi=0.2$, $P=0.5$, $\psi=1$
 $n=100^{(1)}, 200^{(2)},$
 $300^{(3)}, 400^{(4)}, 500^{(5)}, 1000^{(6)},$
 $2000^{(7)}$.

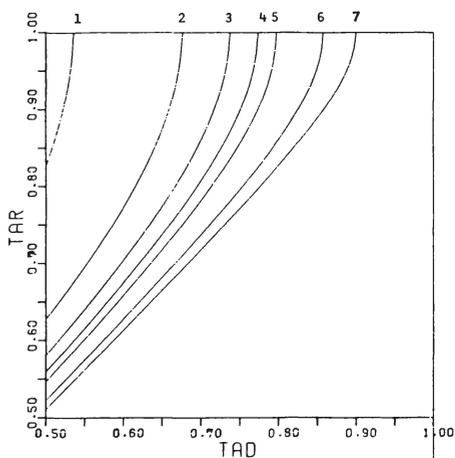


Abb. 3.14: $\pi=0.2$, $n=1000$, $\psi=1$
 $P=0.5^{(1)}, 0.55^{(2)},$
 $0.6^{(3)}, 0.65^{(4)}, 0.7^{(5)}, 0.75^{(6)},$
 $0.8^{(7)}, 0.85^{(8)}, 0.9^{(9)}$.

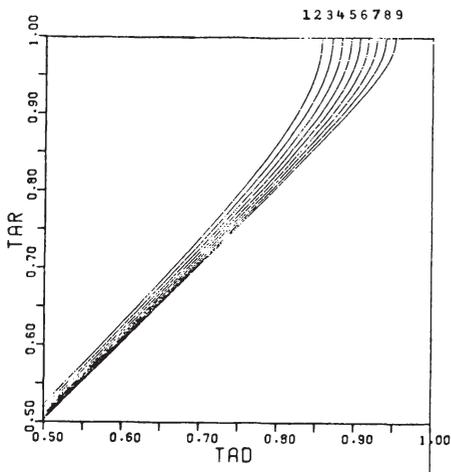
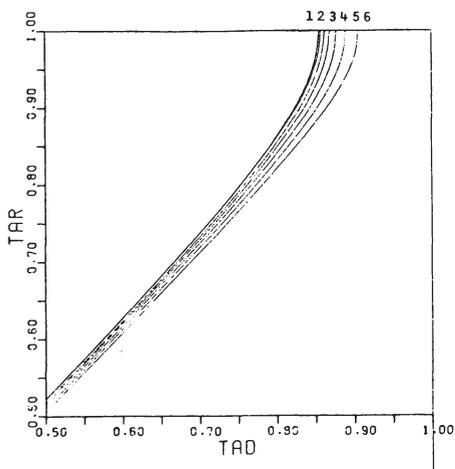


Abb. 3.15: $\pi=0.2$, $n=1000$, $P=0.5$
 $\psi=1.0^{(1)}, 0.5^{(2)},$
 $0.4^{(3)}, 0.3^{(4)}, 0.2^{(5)}, 0.1^{(6)}$.



Iso-MSE-Kurve, so ist das entsprechende RRT-Modell anzuwenden; liegt sie darunter, so erzielt die direkte Befragung eine höhere Genauigkeit. Da die Varianz bei einem RRT-Verfahren aus der Stichproben- und der Antwortvarianz besteht, verläuft die Iso-MSE-Kurve immer oberhalb der Winkelhalbierenden. Oder anders ausgedrückt: Ein RRT-Verfahren kann nur dann effizienter als die direkte Befragung sein, wenn es höhere Werte von T_A erzielt als diese.

In den Abbildungen 3.5 bis 3.16 sind für das WARNER-, das Contamination- und das SIMMONS-I-Modell Iso-MSE-Kurven ($TAD, TAR \geq 0.5$) für verschiedene Konstellationen von π und n sowie die Modellparameter dargestellt.¹⁾ Man sieht sofort, daß diese Kurven für größere Werte von TAR und TAD weiter auseinander liegen als für kleine Werte.

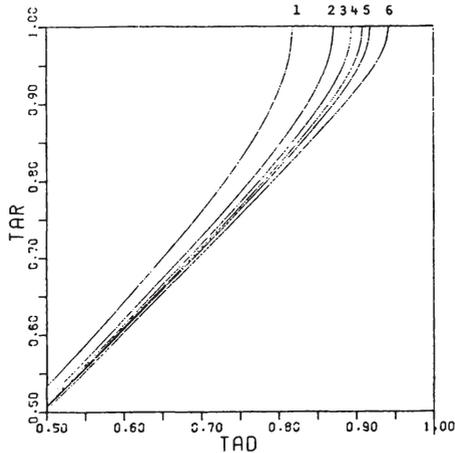
Eine Betrachtung der Abbildungen 3.6, 3.9 und 3.13 bestätigt die Erkenntnis, daß ein RRT-Modell umso eher anzuwenden ist, je größer der Stichprobenumfang ist. Die Anwendung eines RRT-Modells kann jedoch auch schon bei kleinen Stichprobenumfängen angezeigt sein: Ist im WARNER-Modell beispielsweise TAD kleiner als 0.59 und $TAR = 1$, so ist bei $n = 200$ das WARNER-Modell (mit $P=0.7$) genauer als die direkte Befragung ($\pi=0.2$). Bei $TAD = 0.5$ muß die RRT diesen Anteil der richtigen Antworten auf mindestens 0.71 steigern, um eine größere Genauigkeit zu liefern. Für $n = 2000$ lauten die entsprechenden Werte 0.87 und 0.52.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die RRT umso eher anzuwenden ist, je größer der Anteil der sensitiven Eigenschaft ist (Abb.3.5, 3.8, 3.12). Da die Anteile bei sensitiven Merkmalen, bei deren Erhebung die RRT bevorzugt einzusetzen ist, in der Regel relativ

1) Die Rechenarbeiten wurden auf der Rechenanlage ICL 2960 des Rechenzentrums der Universität Hohenheim durchgeführt. Zur Ermittlung der Iso-MSE-Kurven wurde ein Nullstellensuchprogramm der NAG-Library (ICL-Software) verwandt. Die Abbildungen wurden auf dem Plotter des Rechenzentrums angefertigt.

Abb. 3.16: Iso-MSE-Kurven für das multiple WARNER-Modell

$\pi=0.2$, $n=1000$, $P=0.7$
 $m=1^{(1)}, 2^{(2)}, 3^{(3)}, 4^{(4)}, 5^{(5)}, 10^{(6)}$.



klein sind, schränkt diese Beobachtung die Anwendbarkeit der RRT offensichtlich etwas ein. So ist für $\pi=0.05$ bei den in den Abbildungen vorgegebenen Werten - außer beim Contamination-Modell - die direkte Befragung immer effizienter als die RRT.

Beim WARNER- und beim SIMMONS-I-Modell erhöht sich die Vorteilhaftigkeit mit zunehmenden Werten von P (Abb.3.7 und 3.14). Dabei liegen die Iso-MSE-Kurven im Unrelated-Question-Modell deutlich näher beieinander. Dies gilt auch für die Reaktion bez. unterschiedlicher Werte von ψ : Die Kurven verschieben sich mit abnehmendem ψ nach rechts (Abb.3.15). Diese Kurvenverschiebungen gehen mit den in 3.5.3 besprochenen Änderungen des Protektionsgrads einher.

Im Contamination-Modell nimmt die Vorteilhaftigkeit gegenüber der direkten Befragung mit fallenden Werten von ϕ_n und ϕ_p c.p. zu (Abb.3.10, 3.11).

Beim Multiple-Trial-WARNER-Modell (Version I) liegen die Verhältnisse der Tendenz nach wie vor beim einfachen WARNER-Modell. Bei einer Erhöhung der Anzahl der Versuche (m) steigt c.p. die Vorteilhaftigkeit dieses Modells.

4. MODELLE ZUR SCHÄTZUNG DER VERTEILUNG MEHRKLASSIGER MERKMALE

4.1 MODELLE VOM WARNER-TYP

Für die Schätzung der Häufigkeitsverteilung eines mehrklassigen Merkmals - auch eines diskreten quantitativen mit endlichem Wertevorrat - werden - ähnlich wie bei alternativen Merkmalen Modelle vom WARNER-Typ vorgeschlagen, die nur mit dem Untersuchungsmerkmal arbeiten, und Unrelated-Question-Modelle, die ein Zusatzmerkmal verwenden.

ABUL-ELA et al. ¹⁾ haben eine Verallgemeinerung des WARNER-Modells zur Schätzung der Häufigkeiten eines k-klassigen Merkmals angegeben, wobei höchstens k-1 Kategorien sensitiv sind. Zur Schätzung sind k-1 Stichproben notwendig. In jeder Stichprobe beantwortet jeder Befragte eine alternative Frage nach einer zufällig ausgewählten Kategorie. Die Auswahlwahrscheinlichkeiten unterscheiden sich in den einzelnen Stichproben. Aufgrund der k-1 Ja-Antworten-Anteile aus den Stichproben lassen sich Schätzwerte für $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-1}$ angeben.

Da einem Befragten jeweils nur eine alternative Frage nach einer Merkmalskategorie gestellt wird, ist die Effizienz dieses Verfahrens geringer gegenüber einem Ein-Stichproben-Verfahren, in dem der Befragte eine mehrklassige Frage beantwortet. Ein solches Verfahren wird von BOURKE/DALENIUS ²⁾ vorgeschlagen.

1) Vgl. ABUL-ELA et al. (1967) und SKARABIS (1976, S.264-266), der das gleiche Modell vorschlägt.

2) Vgl. BOURKE/DALENIUS (1973) und BOURKE (1978b, S.197-199).

4.1.1 Das BOURKE - DALENIUS - Modell

Im BOURKE-DALENIUS-Modell sind zur Schätzung der Häufigkeiten $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-1}$ eines k-klassigen Merkmals k unterschiedliche Fragen erforderlich, die aus Permutationen der k Kategorien bestehen. Der Befragte gibt jeweils die Stelle an, auf der seine Eigenschaft genannt ist. Damit der Interviewer aus der Antwort keine direkten Rückschlüsse ziehen kann, muß jede Kategorie einmal an jeder Stelle stehen, so daß sich eine Anordnung der Fragen im lateinischen Quadrat ergibt. Für $k=3$ ist etwa folgende Darstellung möglich:

Position	Frage 0	Frage 1	Frage 2
(0)	0	2	1
(1)	1	0	2
(2)	2	1	0

Ein Befragter mit der Eigenschaft 1 antwortet bspw. 1 bei Frage 0, 2 bei Frage 1 und 0 bei Frage 2.

Die Fragen $0, 1, \dots, k-1$ werden mit den Wahrscheinlichkeiten P_0, P_1, \dots, P_{k-1} ausgewählt.

Als Randomisierungsinstrumente können ein Kartendeck mit k verschiedenartigen Fragenkarten oder eine Urne mit k verschiedenfarbigen Kugeln - je nach Farbe der gezogenen Kugel ist eine bestimmte Fragenanordnung zu beantworten - verwendet werden. ¹⁾

Das BOURKE-DALENIUS-Modell läßt sich durch das folgende Modell abbilden: ²⁾

- 1) Vgl. BOURKE (1978b, S.198).
- 2) Die Modellformulierung ist ähnlich der bei KIM/FLUECK (1978a, S.351f.), die ein 'additives RRT-Modell' vorschlagen, das jedoch mit dem BOURKE-DALENIUS-Modell identisch ist.

Die Untersuchungs-, Randomisierungs- und Antwortvariablen (X, Z, Y) können jeweils die Zahlen $0, 1, \dots, k-1$ annehmen:

$$(4.1) \quad \Omega_X = \Omega_Z = \Omega_Y = \mathbb{N}_{k-1}^{(0)} \quad ; \quad 1)$$

sie sind jeweils multinomialverteilt:

$$P_X = P(1, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-1})$$

$$P_Z = P(1, p_0, p_1, \dots, p_{k-1})$$

$$P_Y = P(1, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) \quad 2)$$

Der Zusammenhang T zwischen (X, Z) und Y läßt sich mittels der Modulo- k -Funktion (mod_k) ³⁾ definieren:

$$(4.2) \quad T: \Omega_X \times \Omega_Z \rightarrow \Omega_Y$$

$$(x, z) \mapsto \text{mod}_k(x+z) \quad .$$

Aufgrund der Abbildung T und Formel (2.3) erhält man die Wahrscheinlichkeiten λ_i für die Verteilung von Y :

$$(4.3) \quad \lambda_i = \sum_{j=0}^{k-1} P_{\text{mod}_k(i-j)} \pi_j \quad . \quad i=0, \dots, k-1$$

bzw. mit

$$\underline{P} := (P_{\text{mod}_k(i-j)})_{i,j}$$

und

$$\underline{\lambda} := (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})'$$

bzw.

$$\underline{\pi} := (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-1})'$$

1) $\mathbb{N}_n^{(0)}$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen kleiner gleich n einschließlich der Null.

2) $P(n, \pi_1, \dots, \pi_k)$ bezeichnet die Multinomial-(Polynomial-)verteilung.

3) $\text{mod}_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_{k-1}^{(0)}$
 $x \mapsto$ (nicht-negativer) Rest bei Division von x durch k .

das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$(4.4) \quad \underline{\lambda} = \underline{P} \underline{\pi}$$

Für den Spezialfall $k = 3$ erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

Aus dieser Gleichung - nach $\underline{\pi}$ aufgelöst - ermittelt man den Momentenschätzer $\hat{\underline{\pi}}_M$ aus den Schätzungen $\hat{\underline{\lambda}}$ aus der Stichprobe:

$$(4.5) \quad \hat{\underline{\pi}}_M = \underline{P}^{-1} \hat{\underline{\lambda}} \quad \hat{\lambda}_i = \frac{n_i}{n} \quad i = 0, 1, \dots, k-1$$

Im Stichprobenmodell mit Zurücklegen ist $\hat{\underline{\pi}}_M$ erwartungstreu und besitzt die Varianz-Kovarianzmatrix

$$(4.6) \quad \underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_M) = \underline{P}^{-1} \underline{D}(\hat{\underline{\lambda}}) \underline{P}^{-1'} \quad \text{mit}$$

$$\underline{D}(\hat{\underline{\lambda}}) = \begin{pmatrix} \lambda_0(1-\lambda_0) & -\lambda_0\lambda_1 & \dots & -\lambda_0\lambda_{k-1} \\ -\lambda_1\lambda_0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda_{k-1}\lambda_0 & \dots & \dots & \lambda_{k-1}(1-\lambda_{k-1}) \end{pmatrix} \quad 1)$$

Wie in Formel (4.17) gezeigt wird, läßt sich die Streuungsmatrix $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_M)$ in zwei Bestandteile aufspalten:

1) Vgl. BOURKE (1972b, S.199).

$$(4.7) \quad n \cdot \underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_{\underline{M}}) = \begin{pmatrix} \pi_0(1-\pi_0) & -\pi_0\pi_1 & \dots & -\pi_0\pi_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{k-1}\pi_0 & \dots & \dots & \pi_{k-1}(1-\pi_{k-1}) \end{pmatrix} +$$

$$+ \underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{k-1} \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & \circ \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} - \begin{pmatrix} \pi_0 & \dots & \dots & \pi_{k-1} \\ \circ & \dots & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \dots & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \dots & \dots & \circ \end{pmatrix}$$

Der erste Teil entspricht der Streuungsmatrix des Schätzers bei direkter Befragung, die beiden letzten Summanden sind auf die Randomisierung zurückzuführen.

Betrachtet man als Ausdruck für die gesamte Varianz der Schätzung der π_i die Spur von $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_{\underline{M}})$, erhalten wir folgenden einfachen Zusammenhang:

$$(4.8) \quad \text{Sp}[\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_{\underline{M}})] = \text{Sp}[\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}^d)] + \sum_{i=0}^{k-1} Q_i^2 - 1, \quad ,$$

wobei Q_i , $i=0,1,\dots,k-1$ die konstituierenden Elemente von \underline{P}^{-1} sind.¹⁾

Eine erwartungstreue Schätzung für $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_{\underline{M}})$ erhalten wir durch

$$(4.9) \quad \hat{\underline{D}}(\hat{\underline{\pi}}_{\underline{M}}) = \underline{P}^{-1} \hat{\underline{D}}(\hat{\underline{\lambda}}) \underline{P}^{-1} \quad \text{mit}$$

$$\hat{\underline{D}}(\hat{\underline{\lambda}}) = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_0(1-\hat{\lambda}_0) & -\hat{\lambda}_0\hat{\lambda}_1 & \dots & -\hat{\lambda}_0\hat{\lambda}_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\hat{\lambda}_{k-1}\hat{\lambda}_0 & \dots & \dots & \hat{\lambda}_{k-1}(1-\hat{\lambda}_{k-1}) \end{pmatrix}$$

Die Momentenschätzer können durchaus die Nichtnegativitätsbedingungen für die einzelnen Vektorkomponenten verletzen.

Die Bestimmung der ML-Schätzer ist eine nicht lineare Optimie-

1) Es läßt sich zeigen, daß die transponierte Inverse von \underline{P} im gleichen lateinischen Quadrat wie \underline{P} angeordnet ist, also auch nur n verschiedene, konstituierende Elemente enthält.

rungsaufgabe - unter Beachtung von Nebenbedingungen -, die sich nur numerisch lösen läßt.

Die Formulierung des BOURKE-DALENIUS-Modells als lineares Modell macht keine großen Schwierigkeiten.

Die Elemente von Ω_x sind die k Einheitsvektoren des \mathbb{R}^k , die von Ω_z Permutationsmatrizen:

$$\Omega_x = \{e_{i+1}^k \mid i=0, \dots, k-1\}$$

$$\Omega_z = \left\{ \begin{pmatrix} e_{\text{mod}_k(-z)+1} \\ e_{\text{mod}_k(1-z)+1} \\ e_{\text{mod}_k((k-1)-z)+1} \end{pmatrix} \mid z=0, 1, \dots, k-1 \right\}$$

Das lineare Modell läßt sich so schreiben als:

$$\underline{Y}_i = \underline{P}\pi + \underline{U}_i \quad \text{mit } E(\underline{U}_i) = \underline{0}$$

$$\text{und } \underline{D}(\underline{U}_i) = \underline{\Sigma}_0$$

$$i = 1, \dots, n$$

bzw. zusammengefaßt:

$$\underline{Y} = \underline{X}\pi + \underline{u}$$

mit

$$\underline{Y} := (\underline{Y}_1', \dots, \underline{Y}_n')'$$

$$\underline{X} := \underline{P} \otimes \underline{I}_n$$

$$\underline{u} := (\underline{U}_1', \dots, \underline{U}_n')' \quad \underline{V} := \underline{D}(\underline{U}) = \underline{\Sigma}_0 \otimes \underline{I}_n$$

Den KQ-Schätzer erhalten wir nach der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate:

$$(4.10) \quad \hat{\pi}_{KQ} = (\underline{X}'\underline{V}^{-1}\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{V}^{-1}\underline{Y}$$

nach einigen Umformungen erhält man:

$$(4.11) \quad \hat{\pi}_{KQ} = \underline{P}^{-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i \right) = \hat{\pi}_M \quad .$$

Mit der Übereinstimmung der KQ- und des Momentenschätzers sind somit gewisse Optimalitätseigenschaften dieses Schätzers gezeigt.

Für das allgemeine Stichprobenmodell werden die Variablen wie im linearen Modell formuliert.

Aus der Antwort \underline{Y}_i des i-ten Befragten läßt sich dann ein erwartungstreuer Schätzer $\hat{\underline{x}}_i$ für seinen Zustand \underline{x}_i angeben:

$$(4.12) \quad \hat{\underline{x}}_i = \underline{P}^{-1} \underline{Y}_i$$

Der Schätzer für $\underline{\pi}$ ist dann nach (2.56):

$$(4.13) \quad \hat{\underline{\pi}}^R = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} \hat{\underline{x}}_i = \underline{P}^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} \underline{Y}_i$$

Die Streuungsmatrix von $\hat{\underline{\pi}}^R$ läßt sich nach (2.60) zerlegen in:

$$(4.14) \quad \underline{D}(\hat{\underline{\pi}}^R) = \underline{D}_1(\hat{\underline{\pi}}^d) + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2 \underline{D}_2(\hat{\underline{x}}_i) = \\ = \underline{D}_1(\hat{\underline{\pi}}^d) + \underline{P}^{-1} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E_1 w_i^2 \underline{D}_2(\underline{Y}_i) \right] \underline{P}^{-1}$$

Die Streuungsmatrix $\underline{D}_2(\underline{Y}_i)$ hat folgende Gestalt:

$$(4.15) \quad \underline{D}_2(\underline{Y}_i) = E_2(\underline{Z}_i \underline{x}_i \underline{x}_i' \underline{Z}_i' | \underline{x}_i = e_{x+1}) - \underline{P} \underline{x}_i \underline{x}_i' \underline{P}' \\ = \sum_{z=0}^{k-1} P_z \underline{\Delta}(x, z) - \underline{P} \underline{x}_i \underline{x}_i' \underline{P}'$$

mit

$$\Delta_{(x,z)} := (\underline{z}_i \underline{x}_i \underline{x}'_i \underline{z}'_i | \underline{z}_i = e_{z+1}, \underline{x}_i = e_{x+1})$$

$$= (\delta_{i, \text{mod}_k(x+z)+1} \cdot \delta_{j, \text{mod}_k(x+z)+1})_{1 \leq i, j \leq k}$$

1)

Für die Schätzung von $\underline{D}(\hat{\pi}^x)$ verwendet man am besten eine - bei der direkten Befragung erwartungstreue - Schätzfunktion $\hat{\underline{D}}^d$ für $\underline{D}(\hat{\lambda})$ und verwendet dann (3.159).

Der Bias, der hierbei auftritt, geht mit wachsender Grundgesamtheit gegen Null; es ist:

$$(4.16) \quad \text{Bias}(\underline{P}^{-1} \hat{\underline{D}}^d(\hat{\lambda}) \underline{P}^{-1'}) = -\frac{1}{N^2} \underline{P}^{-1} \sum_{i=1}^N \underline{D}_2(\underline{Y}_i) \underline{P}^{-1'} =$$

$$= \frac{-1}{N} \left[\underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \lambda_{k-1} \end{pmatrix} \underline{P}^{-1'} - \begin{pmatrix} \pi_0 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \pi_{k-1} \end{pmatrix} \right] \quad 2)$$

Für den Spezialfall einer einfachen Stichprobe ohne Zurücklegen erhalten wir folgende (einfachere) Formeln:

$$\hat{\pi} = \underline{P}^{-1} \hat{\lambda} = \hat{\pi}_M$$

mit

$$(4.17) \quad \underline{D}(\hat{\pi}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n} \left[\begin{pmatrix} \pi_0(1-\pi_0) & -\pi_0\pi_1 & \dots & -\pi_0\pi_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{k-1}\pi_0 & \dots & \dots & \pi_{k-1}(1-\pi_{k-1}) \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n} \left[\underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \lambda_{k-1} \end{pmatrix} \underline{P}^{-1'} - \begin{pmatrix} \pi_0 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \pi_{k-1} \end{pmatrix} \right] \right]$$

1) $\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

2) Vgl. die Ableitung der Formel (4.18).

Den zweiten Bestandteil erhält man mit $EW_i^2 = N/n$ und (4.15):

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad \underline{P}^{-1} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E_1 W_i^2 \left[\sum_{z=0}^{k-1} P_z \Delta(x, z) - \underline{P} x_i x_i' \underline{P}' \right] \right] \underline{P}^{-1'} &= \\
 &= \frac{1}{n} \left\{ \underline{P}^{-1} \sum_{x=0}^{k-1} \sum_{z=0}^{k-1} P_z \Delta(x, z) \underline{\pi}_x \right\} \underline{P}^{-1'} - \sum_{j=0}^{k-1} e_{j+1}^k e_{j+1}^{k'} \pi_j \\
 &= \frac{1}{n} \underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \lambda_{k-1} \end{pmatrix} \underline{P}^{-1'} - \begin{pmatrix} \pi_0 & & & \\ & \circ & & \\ & & \ddots & \\ \circ & & & \pi_{k-1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Verwendet man für die Schätzung von $\underline{D}(\underline{\pi})$

mit

$$\begin{aligned}
 (4.19) \quad \underline{\hat{D}}^d(\underline{\hat{\lambda}}) &= \frac{1}{n-1} \cdot \frac{N-n}{N} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_0(1-\hat{\lambda}_0) - \hat{\lambda}_0 \hat{\lambda}_1 & & & \hat{\lambda}_0 \hat{\lambda}_{k-1} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ -\hat{\lambda}_{k-1} \hat{\lambda}_0 & & & \hat{\lambda}_{k-1}(1-\hat{\lambda}_{k-1}) \end{pmatrix} \\
 \underline{\hat{D}}(\underline{\hat{\pi}}) &= \underline{P}^{-1} \underline{\hat{D}}^d(\underline{\hat{\lambda}}) \underline{P}^{-1'} \quad ,
 \end{aligned}$$

so verwendet man einen verzerrten Schätzer; der Bias ergibt sich aus (4.16).

Drückt man die 'Gesamtvarianz des Modells' durch die Spur der Streuungsmatrix des Schätzvektors aus, so erhält man für die Spur des zweiten Bestandteils (bezeichnet mit v^+) folgenden Ausdruck, der nur von den Modellparametern (P_0, \dots, P_{k-1}) abhängt, die ihrerseits die konstituierenden Elemente von P^{-1} (Q_0, \dots, Q_{k-1}) bestimmen.

$$(4.20) \quad v^+ = \sum_{i=0}^{k-1} Q_i^2 - 1$$

Mit (4.20) ist ein Ausdruck für die Zusatzvarianz des BOURKE-DALENIUS-Modells gegenüber der direkten Befragung gewonnen worden; anhand von v^+ lassen sich die Auswirkungen der Wahl der

$P_i; i=0, \dots, k-1$ auf die Schätzvarianzen ermitteln.

Für drei Kategorien erhalten wir ein besonders einfaches Ergebnis - ohne explizite Berechnung der Inversen von \underline{P} .

O.B.d.A. wählen wir eine Fragenanordnung, die die folgende symmetrische Matrix \underline{P} besitzt: ¹⁾

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & P_2 & P_0 \\ P_2 & P_0 & P_1 \end{pmatrix}$$

Nennen wir die Eigenwerte von \underline{P} μ_1, μ_2 und μ_3 , so können wir feststellen:

- $\mu_1 = 1$, da $\underline{P}\underline{1} = \underline{1}$ (\underline{P} ist eine stochastische Matrix),
- $\mu_2^2 = \mu_3^2$, da $\sum_{i=1}^3 \mu_i^2 = \sum_{i=0}^2 P_i^2 = 1$ (Transformationsinvarianz der Spur),
- $\sum_{i=1}^3 \mu_i^2 = 3 \cdot \sum_{i=0}^2 P_i^2$ (aus $\text{Sp}(\underline{P}^2)$).

v^+ kann man über die Spur von \underline{P}^{-2} ermitteln:

$$(4.21) \quad v^+ = \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{P}^{-2}) - 1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\mu_i^2} - 1 \quad .$$

Verwendet man die Eigenschaften der $\mu_i, i=1, \dots, 3$, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$(4.22) \quad v^+ = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3(P_0^2 + P_1^2 + P_2^2) - 1} - 1 \right]$$

Die Zusatzvarianz des BOURKE-DALENIUS-Modells für drei Klassen - ausgedrückt durch die Summe der Zusatzvarianz der Schätzer $\hat{\pi}_i$ - hängt somit lediglich von der Summe der quadrierten Auswahlwahrscheinlichkeiten für die Fragen ab. Etwas unpräzise formu-

1) Man überlegt sich anhand von (4.20) leicht, daß der Wert von v^+ vom gewählten lateinischen Quadrat unabhängig ist.

liert, ist die Zusatzvarianz umso größer, je näher die Auswahlwahrscheinlichkeiten beieinander liegen. In der Tabelle 4.1 sind für einige Werte von P_0, P_1, P_2 die Werte der Zusatzvarianz zusammengestellt. Die Summe der Varianzen der direkten Schätzer kann für $k = 3$ maximal $2/3$ sein. Man sieht also, daß durch die Randomisierung die Varianz der Schätzer beträchtlich erhöht wird. Diese Zusatzvarianz ist durch eine Verringerung des Bias zu kompensieren, um das BOURKE-DALENIUS-Modell rational anzuwenden.

Tabelle 4.1: BOURKE-DALENIUS-Modell für dreiklassige Merkmale:
Werte der Zusatzvarianz v^+ (n = 1) für aus-
gewählte Werte von P_0 und P_1 ($P_2 = 1 - P_0 - P_1$)

$P_1 \backslash P_0$	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.3	66.0	8.8571	2.8421	1.1351	-	-
0.2	16.0	8.8571	3.5	1.4839	0.6154	-
0.1	4.4615	4.4615	2.8421	1.4839	0.6939	0.2466
0.0	1.7143	2.0	1.7143	1.1351	0.6154	0.2466

$$1) \quad v^+ = \text{Var } \hat{\pi}_1 + \text{Var } \hat{\pi}_2 + \text{Var } \hat{\pi}_3 - \pi_1(1-\pi_1) - \\ - \pi_2(1-\pi_2) - \pi_3(1-\pi_3)$$

Übersicht 4.1: Das BOURKE-DALENIUS-Modell
(Beispiel eines trichotomen Merkmals)

<p><u>1. Fragenstruktur</u></p>	<p>'An welcher Stelle steht Ihre Eigenschaft?'</p> <table border="1" data-bbox="303 376 990 651"> <tr> <td data-bbox="303 376 440 459" style="text-align: center;"> Stelle Frage </td> <td data-bbox="443 376 524 459" style="text-align: center;">0</td> <td data-bbox="527 376 608 459" style="text-align: center;">1</td> <td data-bbox="611 376 692 459" style="text-align: center;">2</td> <td data-bbox="695 376 990 459" style="text-align: center;">Auswahlwahrscheinlichkeit der Frage</td> </tr> <tr> <td data-bbox="303 464 440 523" style="text-align: center;">0</td> <td data-bbox="443 464 524 523" style="text-align: center;">E_0</td> <td data-bbox="527 464 608 523" style="text-align: center;">E_1</td> <td data-bbox="611 464 692 523" style="text-align: center;">E_2</td> <td data-bbox="695 464 990 523" style="text-align: center;">P_0</td> </tr> <tr> <td data-bbox="303 528 440 587" style="text-align: center;">1</td> <td data-bbox="443 528 524 587" style="text-align: center;">E_2</td> <td data-bbox="527 528 608 587" style="text-align: center;">E_0</td> <td data-bbox="611 528 692 587" style="text-align: center;">E_1</td> <td data-bbox="695 528 990 587" style="text-align: center;">P_1</td> </tr> <tr> <td data-bbox="303 592 440 651" style="text-align: center;">2</td> <td data-bbox="443 592 524 651" style="text-align: center;">E_1</td> <td data-bbox="527 592 608 651" style="text-align: center;">E_2</td> <td data-bbox="611 592 692 651" style="text-align: center;">E_0</td> <td data-bbox="695 592 990 651" style="text-align: center;">P_2</td> </tr> </table>	Stelle Frage	0	1	2	Auswahlwahrscheinlichkeit der Frage	0	E_0	E_1	E_2	P_0	1	E_2	E_0	E_1	P_1	2	E_1	E_2	E_0	P_2
Stelle Frage	0	1	2	Auswahlwahrscheinlichkeit der Frage																	
0	E_0	E_1	E_2	P_0																	
1	E_2	E_0	E_1	P_1																	
2	E_1	E_2	E_0	P_2																	
<p><u>2. Modell</u></p> <p>Untersuchungs-Randomisierungs-Antwortvariable</p> <p>Verteilung von Y</p>	<p>trichotome Variable: $\Omega_x = \Omega_z = \Omega_y = \{0,1,2\}$</p> $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_1 \\ P_1 & P_0 & P_2 \\ P_2 & P_1 & P_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: center;">$\underline{\lambda} = \underline{P} \underline{\pi}$</p>																				
<p><u>3. Schätzung</u></p> <p>Momentenmethode</p> <p>Streuungs-matrix</p>	$\hat{\underline{\pi}}_M = \underline{P}^{-1} \hat{\underline{\lambda}}$ $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_M) = \underline{P}^{-1} \underline{D}(\hat{\underline{\lambda}}) \underline{P}^{-1} \quad \text{mit}$ $\underline{D}(\hat{\underline{\lambda}}) = \begin{pmatrix} \lambda_0(1-\lambda_0) & -\lambda_0\lambda_1 & -\lambda_0\lambda_2 \\ -\lambda_1\lambda_0 & \lambda_1(1-\lambda_1) & -\lambda_1\lambda_2 \\ -\lambda_2\lambda_0 & -\lambda_2\lambda_1 & \lambda_2(1-\lambda_2) \end{pmatrix}$																				

<p>Zerlegung der Streuungsmatrix</p>	<p>(4.7)</p> $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}_M) = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \pi_0(1-\pi_0) & -\pi_0\pi_1 & -\pi_0\pi_2 \\ -\pi_1\pi_0 & \pi_1(1-\pi_1) & -\pi_1\pi_2 \\ -\pi_2\pi_0 & -\pi_2\pi_1 & \pi_2(1-\pi_2) \end{pmatrix} + \frac{1}{n} [\underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \bigcirc \\ \bigcirc & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} \underline{P}^{-1}] + \begin{pmatrix} \pi_0 & \bigcirc \\ \bigcirc & \pi_1 \\ & & \pi_2 \end{pmatrix}]$
<p><u>4. Stichprobentheoretischer Ansatz</u></p>	<p>(4.13) $\hat{\underline{\pi}}^r = \underline{P}^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_{iS} Y_i$</p> <p>(4.14) $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}^r) = \underline{D}_1(\hat{\underline{\pi}}^d) + \underline{P}^{-1} \left[\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N E_i w_i^2 \underline{D}_2(Y_i) \right] \underline{P}^{-1}$</p>
<p>Spezialfall: Stichprobe ohne Zurücklegen</p>	<p>$\hat{\underline{\pi}} = \underline{P}^{-1} \underline{\lambda}$</p> $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \pi_0(1-\pi_0) & -\pi_0\pi_1 & -\pi_0\pi_2 \\ -\pi_0\pi_1 & \pi_1(1-\pi_1) & -\pi_1\pi_2 \\ -\pi_0\pi_2 & -\pi_1\pi_2 & \pi_2(1-\pi_2) \end{pmatrix} + \frac{1}{n} [\underline{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0 & \bigcirc \\ \bigcirc & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} \underline{P}^{-1} - \begin{pmatrix} \pi_0 & \bigcirc \\ \bigcirc & \pi_1 \\ & & \pi_2 \end{pmatrix}]$

4.1.2 Das HOPKINS-III-Modell

Für das HOPKINS-III-Modell zur Schätzung der Häufigkeiten eines mehrklassigen Merkmals ist das verwandte Randomisierungsinstrument charakteristisch. ¹⁾ Die HOPKINS-III-Urne - ähnlich der HOPKINS-II-Urne - besteht aus einem kugelförmigen Behältnis mit Kugeln in k verschiedenen Farben (jeweils eine Kategorie symbolisierend), die jeweils m_j -fach ($j=0, \dots, k-1$) vorhanden sind ($m_0 \neq m_1 \neq \dots \neq m_{k-1}$). Der Urnenausgang besteht aus einem Röhrchen mit

$$m = \sum_{j=0}^{k-1} m_j$$

Plätzen. Der Befragte schüttelt die Urne, dreht das Röhrchen nach unten und läßt alle Kugeln in den Kugelhals rollen, der für den Interviewer verdeckt ist. Er beantwortet die Frage, auf welchem Platz (von unten gerechnet) zum ersten Mal eine Kugel erscheint, die seine Eigenschaft symbolisiert.

Dieses Modell kann jedoch, wenn eine Kategorie nur durch eine Kugel repräsentiert wird, bei der Antwort 'm' einen sicheren Rückschluß auf den Zustand des Befragten zulassen. ²⁾

Die Wahrscheinlichkeit P_{ij} dafür, daß eine Kugel der Kategorie j zum ersten Mal auf dem Platz i erscheint, ermittelt man als Laplace-Wahrscheinlichkeit.

$$(4.23) \quad P_{ij} = \begin{cases} \frac{(m-i-1)! (m-m_j)! m_j}{m! (m-m_j-i)!} & ; i = 0, 1, \dots, (m-m_j) \\ 0 & i > m-m_j \end{cases}$$

Zur Schätzung von π_0, \dots, π_{k-1} verwendet man folgendes lineare Modell; ³⁾ $\hat{\lambda}_i$ bezeichnet den Anteil der Befragten, die die Position i angaben.

1) Dieses Modell wurde von LIU et al. (1975) vorgestellt.

2) Vgl. LIU et al. (1975, S.331).

3) Vgl. HORVITZ et al. (1975 a, S.279).

$$\hat{\lambda}_i = \sum_{j=0}^{k-1} P_{ij} \pi_j + U_i \quad i=0, \dots, k-1$$

$$(4.24) \quad E(U_i) = \underline{0} \quad \underline{V} = \underline{D}(U) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \lambda_0(1-\lambda_0) & -\lambda_0\lambda_1 & \dots & -\lambda_0\lambda_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{k-1}\lambda_0 & \dots & \lambda_1(1-\lambda_{k-1}) & \dots \end{bmatrix}$$

Die KQ-Schätzer $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_0, \dots, \hat{\pi}_{k-1})'$ erhält man nach der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate:

$$\hat{\pi} = (\underline{P}'\underline{V}^{-1}\underline{P})^{-1}\underline{P}'\underline{V}^{-1}\hat{\lambda} \quad \text{mit} \quad \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{k-1})'$$

In Anwendungen muß V aus der Stichprobe geschätzt werden.

Über die Varianzen der Schätzer lassen sich schwer allgemein gültige Aussagen machen. LIU et al. führten für den trichotomen Fall einige Beispielrechnungen durch und kommen zu folgenden Aussagen über die Varianzen. 1)

- a) Für $m_0 < m_1 < m_2$ fällt die Varianz bei steigendem m_2 c.p.
- b) Für $m_0 < m_1 < m_2$ steigt die Varianz bei einer Annäherung von m_0 an m_1 c.p., ist für $m_0 = 1$ also am geringsten.
- c) Bei festen Anteilen der Kugelkategorien ist die Varianz bei der kleinsten Kugelanzahl am geringsten.

Die Beispielrechnungen in Tabelle 4.2 zeigen im Vergleich zum BOURKE-DALENIUS-Modell sehr große Varianzen. In nur 3 von 39 Fällen wird eine Zusatzvarianz zwischen 1.0 und 2.0, in einem Fall ein v^+ zwischen 2.1 und 3.0 erreicht. In allen diesen Fällen ist die Kugel der Kategorie 0 nur einmal vertreten, wodurch die Projektion der Modelle eingeschränkt ist. Bedenkt man darüberhinaus, daß die Zusatzvarianz im BOURKE-DALENIUS-Modell bspw. für eine 'praktikable' Auswahlwahrscheinlichkeitskombination - $P_0 = 0.7$, $P_1 = 0.2$ und $P_2 = 0.1$ - lediglich 1.48 ist, so sieht man eindeutige Vorteile für das BOURKE-DALENIUS-Modell, wenn man die Varianzen als Vergleichskriterium heranzieht.

1) Vgl. LIU et al. (1975, S.330 f.).

Tabelle 4.2: HOPKINS-III-Modell für dreiklassige Merkmale.

Werte der Zusatzvarianz v^+ ($n=1$)¹⁾

für ausgewählte Kugelkombinationen und Grundgesamtheiten.

Grund- gesamtheit	Kugel- anzahl			m_0	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}
	π_0	π_1	π_2	1	1	1	1	2	3	1	2	3	1	1	1	1
				2	2	2	4	4	4	3	4	6	2	3	4	5
π_0	π_1	π_2	3	4	5	5	5	5	5	5	6	9	9	8	7	6
0.333	0.333	0.333	17.60	8.17	5.89	38.25	73.53	191.69	9.24	23.98	25.43	3.90	3.28	6.50	51.52	
0.050	0.015	0.8	6.41	2.81	1.89	12.51	35.74	72.25	4.43	10.75	11.79	1.13	1.33	3.43	19.59	
0.6	0.3	0.1	23.55	10.15	8.19	41.66	91.99	261.26	11.03	30.44	31.93	5.65	4.19	7.31	53.53	

1) $v^+ = \text{Var } \hat{\pi}_0 + \text{Var } \hat{\pi}_1 + \text{Var } \hat{\pi}_2 - \pi_0(1-\pi_0) - \pi_1(1-\pi_1) - \pi_2(1-\pi_2)$

Quelle: LIU et al. (1975, S.331) und eigene Berechnungen.

4.2 UNRELATED-QUESTION-MODELLE

Es liegt nahe, die in 3.4 vorgestellten Unrelated-Question-Modelle auf mehrklassige Merkmale zu verallgemeinern.

So läßt sich ein k-klassiges Merkmal in k-1 alternative Merkmale zergliedern, von denen jedes die Zugehörigkeit zu einer der k Klassen angibt. (Aus den Merkmalswerten von k-1 Klassenzugehörigkeiten läßt sich dann die Zugehörigkeit zur verbleibenden Klasse ableiten).

Auf die k-1 alternativen Merkmale kann man nun die Methoden aus Kap.3 anwenden, indem man entweder k-1 Stichproben zur Erhebung der k-1 alternativen Merkmale verwendet ¹⁾ oder in einer Stichprobe jeden Befragten mehrere alternative Unrelated-Question-Modelle beantworten läßt. ²⁾ Da jede Antwort bei solchem Vorgehen nur Information über eine Merkmalskategorie enthält, sind - ähnlich wie bei den Modellen vom WARNER-Typ - Modelle ergiebiger, bei denen jede Antwort Information über das gesamte mehrklassige Merkmal bietet.

Dies läßt sich dadurch erreichen, indem man dem k-klassigen sensitiven Untersuchungsmerkmal X ein k-klassiges nicht sensitives Zusatzmerkmal U gegenüberstellt. Genau wie im Fall des alternativen Merkmals beantwortet der Befragte mit Wahrscheinlichkeit P die Frage nach X und mit Wahrscheinlichkeit (1-P) die Frage nach U. Gegenüber den Verfahren bei alternativen Merkmalen ergeben sich fast keine Unterschiede, so daß wir dementsprechend in aller Kürze vorgehen können.

1) Vgl. GREENBERG et al. (1969a, S.536 f.).

2) HOCHBERG (1975) schlägt ein zweistufiges Modell vor, in dem der Befragte mindestens soviele Fragen beantworten muß, wie das Untersuchungsmerkmal sensitive Kategorien hat.

4.2.1 Ein-Stichproben-Modelle

Beim Ein-Stichproben-Modell muß - wie in 3.4 - entweder die Verteilung des Zusatzmerkmals gegeben sein; andernfalls sind zwei Antworten je Befragten notwendig.

Im verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell (vgl. 3.4.1.1) ¹⁾ ist also die Verteilung des nicht sensitiven Merkmals $U(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{k-1})$ bekannt. Die Häufigkeiten von $X(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{k-1})$ lassen sich wie in (3.55) schätzen als

$$(4.25) \quad \hat{\pi}_i = \frac{\hat{\lambda}_i - (1-P)\psi_i}{P}, \quad i=0, 1, \dots, k-1,$$

wobei $\hat{\lambda}_i$ der Anteil der Antworten 'i' in der einfachen Stichprobe mit Zurücklegen ist.

Für die Einzelvarianzen gilt:

$$(4.26) \quad \text{Var } \hat{\pi}_i = \frac{\lambda_i(1-\lambda_i)}{nP^2} = \frac{\pi_i(1-\pi_i)}{n} + \frac{1-P}{P} \left[\frac{\psi_i(1-\psi_i)}{P} + (\pi_i - \psi_i)^2 + \pi_i(1-\pi_i) \right]$$

Die Modifikationen im allgemeinen Stichprobenmodell lassen sich aus 3.4.1.1 entnehmen; in den Formeln sind lediglich die π , ψ und λ zu indizieren.

Das verallgemeinerte SIMMONS-I-Modell ist - wie das Ausgangsmodell - nicht symmetrisch. Bezeichne '0' nämlich eine nicht sensitive Kategorie von X , so läßt sich aus einer Antwort '0' schließen, daß der Befragte keine positive Antwort auf eine Frage nach sensitiven Kategorien gegeben hat.

Eine symmetrische Version gibt BOURKE ²⁾ an, die hier für drei

1) Vgl. GREENBERG et al. (1971) und BOURKE (1974c, S.5f.).

2) Vgl. BOURKE (1974c, S.6ff.) bzw. BOURKE (1978b, S.199f.); bei BOURKE (1974c) und BOURKE (1978b, S.199-203) sind außerdem noch mehrere modifizierte Modelle angegeben.

Kategorien exemplifiziert sei. Dem Befragten werden die Fragen des BOURKE-DALENIUS-Modells (vgl. 4.1.1) mit den Wahrscheinlichkeiten P_0, P_1, P_2 und die Frage nach U mit Wahrscheinlichkeit P_3 gestellt ($\sum_{i=0}^3 P_i = 1$):

Position

(0)	$x = 0$	$x = 2$	$x = 1$	$U = 0$
(1)	$x = 1$	$x = 0$	$x = 2$	$U = 1$
(2)	$x = 2$	$x = 1$	$x = 0$	$U = 2$

Auswahl-
wahr-
schein-
lichkeit

P_0 P_1 P_2 P_3

($P_0 \equiv P$ und $P_3 = 1-P$ entspricht dem verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell).

Die Wahrscheinlichkeiten der Antwortvariablen ($\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$) in diesem Modell lassen sich als lineare Funktion der $\pi_i, i=0,1,2$, darstellen:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 + \psi_0 P_3 & P_2 + \psi_0 P_3 & P_1 + \psi_0 P_3 \\ P_1 + \psi_1 P_3 & P_0 + \psi_1 P_3 & P_2 + \psi_1 P_3 \\ P_2 + \psi_2 P_3 & P_1 + \psi_2 P_3 & P_0 + \psi_2 P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}$$

bzw. in Matrix-Schreibweise:

$$(4.27) \quad \underline{\lambda} = \underline{P} \underline{\pi}$$

Die erwartungstreuen Momentenschätzer für $\underline{\pi}$ sind dann:

$$(4.28) \quad \underline{\hat{\pi}} = \underline{P}^{-1} \underline{\hat{\lambda}}$$

mit der Streuungsmatrix

$$(4.29) \quad \underline{D}(\underline{\hat{\pi}}) = \underline{P}^{-1} \underline{D}(\underline{\lambda}) \underline{P}^{-1}$$

Ist das Zusatzmerkmal ein Pseudo-Merkmal, d.h., besteht es lediglich aus zufällig zuzuordnenden Anweisungen 'i' zu antworten, so ist die Verteilung von U bekannt. ¹⁾ Gegenüber der Verwendung eines tatsächlichen Zusatzmerkmals ergeben sich in diesem Modell mit vorgegebenen Antworten Modifikationen nur im allgemeinen Stichprobenmodell, so auch im Fall ohne Zurücklegen. LIU/CHOW haben für dieses Modell ein spezielles Randomisierungsinstrument, die sogenannte Hopkins-IV-Urne, vorgeschlagen. ²⁾ Die Formeln für das Modell mit vorgegebenen Antworten sind - nach entsprechender Indizierung - 3.4.1.2 zu entnehmen.

Ist die Verteilung von U unbekannt und will man mit einer Stichprobe auskommen, so sind zwei Antworten je Befragten notwendig. Für den Fall $k = 3$ wird hier eine Verallgemeinerung des BOURKE-Modells (vgl. 3.4.1.3) vorgestellt:

Dem Befragten werden - aus sechs Möglichkeiten - jeweils zwei Fragen gestellt:

Position							
Frage 1	(0)	x = 0	x = 2	x = 1	U = 0	U = 0	U = 0
	(1)	x = 1	x = 0	x = 2	U = 1	U = 1	U = 1
	(2)	x = 2	x = 1	x = 0	U = 2	U = 2	U = 2
Frage 2	(0)	U = 0	U = 0	U = 0	x = 0	x = 2	x = 1
	(1)	U = 1	U = 1	U = 1	x = 1	x = 0	x = 2
	(2)	U = 2	U = 2	U = 2	x = 2	x = 1	x = 0

Auswahl-
wahr-
schein-
lichkeit

P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5

1) Dieses Modell wurde von ERIKSSON (1973, S.111ff.) vorgeschlagen; vgl. die Einzelheiten in 3.4.1.2.
2) Vgl. LIU/CHOW (1976b, S.72).

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, in der j -ten Frage eine Antwort i zu erhalten, mit λ_{ij} , so ergibt sich zwischen den λ, π, ψ -Werten folgender linearer Zusammenhang:

$$(4.30) \quad \begin{pmatrix} \lambda_{01} \\ \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{02} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_2 & P_1 & P_3 & P_4 & P_5 \\ P_1 & P_0 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ P_2 & P_1 & P_0 & P_3 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_4 & P_0 & P_1 & P_2 \\ P_4 & P_3 & P_5 & P_0 & P_1 & P_2 \\ P_5 & P_4 & P_3 & P_0 & P_1 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Auf der Grundlage der Gleichung (4.30) erhält man die Momentenschätzer für π_i, ψ_i $i=0,1,2$ und deren Streuungsmatrix wie in (4.28) und (4.29).

4.2.2 Z w e i - S t i c h p r o b e n - M o d e l l e

Bei den Zwei-Stichproben-Modellen, die dann angewandt werden, wenn die Verteilung des Zusatzmerkmals unbekannt ist, können wir wie im vorangegangenen Abschnitt - analog dem Vorgehen bei alternativen Merkmalen - verfahren.

In der optimierten Form des verallgemeinerten SIMMONS-II-Modells (vgl. 3.4.2.1) verwendet man eine Stichprobe zur direkten Erhebung des k-klassigen Zusatzmerkmals, in der anderen wird ein Unrelated-Question-Modell wie im verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell angewandt. Die Schätzer haben eine größere Varianz als im SIMMONS-I-Modell. Eine geringere Schätzervarianz läßt sich durch Verwendung von zwei Zusatzmerkmalen erreichen; diese Verallgemeinerung des FOLSOM-Modells (vgl.3.4.2.2) ist wie in den vorangegangenen Fällen trivial.

4.3 VERGLEICH DER MODELLE

Der Vergleich der Modelle zur Schätzung der Häufigkeitsverteilung eines mehrklassigen Merkmals soll hier auf die beiden wichtigsten Modelle, das BOURKE-DALENIUS-Modell und das verallgemeinerte SIMMONS-I-Modell, beschränkt werden.

Um die Darstellung zu vereinfachen, werden die Vergleiche für ein trichotomes Merkmal durchgeführt. Als Vergleichskriterium verwenden wir als Maß der Gesamtvarianz der Schätzung die Summe der Varianzen der Schätzer ($\hat{\pi}_i$), was gleichbedeutend mit der Spur der Streuungsmatrix der $\hat{\pi}_i$ ist, wobei für den Vergleich die Spur der Zusatzstreuungsmatrix entscheidend ist.

Um einen Überblick über die Größe der Zusatzvarianz zu erhalten, geben wir die Werte für das BOURKE-DALENIUS-Modell und für zwei spezielle SIMMONS-I-Modelle - im ersten Fall wird $\psi_i = \pi_i, i=0,1,2$, im zweiten $\psi_0 = \psi_1 = \psi_2 = 1/3$ gesetzt - an.

Die Formeln für die Summe der Zusatzvarianzen ($n=1$)⁺ sind:

$$(4.31) \quad v_{BD}^+ = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3(P_0^2 + P_1^2 + P_2^2) - 1} - 1 \right] \quad 1)$$

$$(4.32) \quad v_{UQ}^+ = \frac{1-P}{P} \left[\frac{\sum_{i=0}^2 \psi_i (1-\psi_i)}{P} + \sum_{i=0}^2 (\pi_i - \psi_i)^2 + \sum_{i=0}^2 \pi_i (1-\pi_i) \right]$$

Die Formel (4.32) vereinfacht sich in den beiden zu betrachtenden Spezialfällen: ²⁾

$$(4.33) \quad v_{UQ}^{I+} = \frac{1-P^2}{P^2} \sum_{i=0}^2 \pi_i (1-\pi_i) \quad [\psi_i = \pi_i; i=0,1,2]$$

1) Vgl. (4.22).

2) Vgl. zum ersten Fall HORVITZ et al. (1976, S.186).

$$(4.34) \quad v_{UQ}^{II+} = \frac{2(1-p^2)}{3 p^2} \quad [\psi_i = 1/3; i=0,1,2]$$

Vergleicht man das Verhältnis Antwortvarianz/Stichprobenvarianz in Tabelle 4.4 sowie die Werte der Antwortvarianzen für das verallgemeinerte SIMMONS-I-MODELL in Tabelle 4.3 mit den entsprechenden Werten für das BOURKE-DALENIUS-Modell, so ergeben sich - vorsichtig gesagt - insgesamt günstigere Werte für die beiden speziellen Unrelated-Question-Modelle.

Anders als bei den Modellen für alternative Merkmale, wo man mit der Auswahlwahrscheinlichkeit eine mögliche Vergleichsbasis hat, fehlt jedoch ein solcher Modellparameter beim Vergleich des BOURKE-DALENIUS-Modells mit dem verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell.

Ein formaler Vergleich erscheint somit nur auf der Basis gleicher Vertraulichkeit sinnvoll. Um zu einer Definition des Protektionsgrads von Modellen für mehrklassige Merkmale zu gelangen, knüpfen wir an die Überlegungen von LEYSIEFFER und WARNER ¹⁾ an.

Wir gehen davon aus, daß die Kategorie '0' nicht sensitiv sei. Die Vertraulichkeit eines RRT-Modells kann man dann durch die maximalen Informationen beschreiben, die eine Antwort über die beiden Aussagen 'Gehört zur (sensitiven) Kategorie i (i=1,2)' gegenüber 'Gehört zur (nicht) sensitiven Kategorie 0' enthält. Je mehr Informationen i.d.S. ein Modell gibt, um so geringer ist sein Protektionsgrad.

Formelmäßig lassen sich diese beiden Informationen erfassen als P_1^L und P_2^L

$$P_1^L = \max_{y=0,1,2} \left(\log \frac{P(X=1|Y=y)}{P(X=0|Y=y)} \right) - \log \frac{\pi_1}{\pi_0}$$

$$(4.35) \quad P_2^L = \max_{y=0,1,2} \left(\log \frac{P(X=2|Y=y)}{P(X=0|Y=y)} \right) - \log \frac{\pi_2}{\pi_0}$$

1) Vgl. LEYSIEFFER/WARNER (1976).

Tabelle 4.3: Werte der Zusatzvarianz v^+ (Antwortvarianz)
im verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell
 $[\psi_i = 1/3, i = 0,1,2. (k = 3)]$

Auswahlwkt. P	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
Zusatzvarianz v^+	0,156	0,375	0,694	1,185	2,0	3,5

Tabelle 4.4: VARIANZVERGLEICH (n=1)
Verhältnis: Zusatzvarianz (Antwortvarianz) /
Stichprobenvarianz für das BOURKE-DALENIUS-
Modell und das verallgemeinerte SIMMONS-I-
Modell

BOURKE-DALENIUS-Modell

Stichproben- varianz $\sum_{i=0}^2 \pi_i (1-\pi_i)$	P_0	0,7		0,8		0,9
	P_1	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1
0,1		11,351	14,839	6,154	6,939	2,466
0,2		5,676	7,420	3,077	3,470	1,233
0,3		3,784	4,946	2,051	2,313	0,822
0,4		2,838	3,710	1,539	1,735	0,617
0,5		2,270	2,968	1,231	1,388	0,493
0,6		1,892	2,473	1,026	1,157	0,411

Verallgemeinertes SIMMONS-I-Modell

(mit $\psi_i = \pi_i, i=0,1,2$)

P	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4
Varianz- verhält- nis	0,235	0,563	1,041	1,778	3,0	5,25

Die Anwendung des Bayesschen Theorems ergibt:

$$P_1^L = \max_{y=0,1,2} \left(\log \frac{P(Y=y|X=1)}{P(Y=y|X=0)} \right) \quad (4.36)$$

$$P_2^L = \max_{y=0,1,2} \left(\log \frac{P(Y=y|X=2)}{P(Y=y|X=0)} \right)$$

Entscheidend für die Vertraulichkeit sind also die beiden Quotienten α_1, α_2 :

$$\alpha_1 = \max_{y=0,1,2} \left(\frac{P(Y=y|X=1)}{P(Y=y|X=0)} \right) \quad (4.37)$$

$$\alpha_2 = \max_{y=0,1,2} \left(\frac{P(Y=y|X=2)}{P(Y=y|X=0)} \right)$$

Je größer α_1 bzw. α_2 ist, um so geringer ist der Protektionsgrad. Die Übersicht 4.2 gibt einen Überblick über die (bedingten) Verteilungen der Antwortvariablen der beiden zu vergleichenden Modelle. Beim SIMMONS-I-Modell ist - wie üblich - Unabhängigkeit zwischen X und U unterstellt. Im SIMMONS-I-Modell sind α_1 und α_2 ohne zusätzliche Annahmen eindeutig festgelegt:

Übersicht 4.2: Bedingte Verteilungen der Antwortvariablen beim BOURKE-DALENIUS-Modell und beim verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell

BOURKE-DALENIUS-Modell				Verallgemeinertes SIMMONS-I-Modell			
$P(Y=y X=x)$				$P(Y=y X=x)$			
$y \backslash x$	0	1	2	$y \backslash x$	0	1	2
0	P_0	P_2	P_1	0	$P + (1-P)\psi_0$	$(1-P)\psi_0$	$(1-P)\psi_0$
1	P_1	P_0	P_2	1	$(1-P)\psi_1$	$P + (1-P)\psi_1$	$(1-P)\psi_1$
2	P_2	P_1	P_0	2	$(1-P)\psi_2$	$(1-P)\psi_2$	$P + (1-P)\psi_2$

$$(4.38) \quad \text{SIMMONS-I-Modell:}$$

$$\alpha_1 = \frac{P + (1-P)\psi_1}{(1-P)\psi_1}$$

$$\alpha_2 = \frac{P + (1-P)\psi_2}{(1-P)\psi_2}$$

Im BOURKE-DALENIUS-Modell liegen die Verhältnisse etwas kompliziert:

$$(4.39) \quad \text{BOURKE-DALENIUS-M.:}$$

$$\alpha_1 = \max\left(\frac{P_2}{P_0}, \frac{P_0}{P_1}, \frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\alpha_2 = \max\left(\frac{P_1}{P_0}, \frac{P_2}{P_1}, \frac{P_0}{P_2}\right)$$

Hier sind - anders als im verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell - nicht alle Kombinationen von $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ zu verwirklichen. Nehmen wir z.B. (o.B.d.A.) an, α_2 sei P_0/P_2 und $\alpha_2 \geq \alpha_1$, α_1 ist dann entweder P_0/P_1 oder P_1/P_2 ; in jedem Fall folgt $\alpha_1^2 \geq \alpha_2$. Für $\alpha_1 < \alpha_2$ kehren sich die Ungleichungen entsprechend um. α_1, α_2 können also im BOURKE-DALENIUS-Modell nur soweit auseinanderliegen, daß der kleinere Wert immer noch größer ist als die Wurzel des größeren Wertes.

Für den Vergleich der beiden Modelle verwenden wir als Kriterium die Summe der Antwortvarianzen der Schätzfunktion $\hat{\pi}_i$, $i=0,1,2$: Um eine geeignete Darstellung für v_{UQ}^+ im Unrelated-Question-Modell zu erhalten, nehmen wir einige Umformungen vor:

$$(4.40) \quad v_{UQ}^+ = \frac{\sum_{i=0}^2 \lambda_i (1-\lambda_i)}{P^2} - \sum_{i=0}^2 \pi_i (1-\pi_i) =$$

$$= 2 \left[\frac{(\lambda_0 \lambda_1 + \lambda_0 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2)}{P^2} - \pi_0 \pi_1 - \pi_0 \pi_2 - \pi_1 \pi_2 \right] =$$

$$= 2 \left[\frac{1-P}{P} (\psi_0 (1-\pi_0) + \psi_1 (1-\pi_1) + \psi_2 (1-\pi_2)) + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-P)^2}{P^2} (\psi_0 \psi_1 + \psi_0 \psi_2 + \psi_1 \psi_2) \right]$$

wobei (3.54) verwendet wird.

Für vorgegebene Werte von α_1 und α_2 erhalten wir aus (4.38) folgende Werte für $\frac{P}{1-P}$, ψ_1 und ψ_2 in Abhängigkeit von ψ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{P}{1-P} &= \frac{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)(1-\psi_0)}{\alpha_1+\alpha_2-2} \\ (4.41) \quad \psi_1 &= \frac{(\alpha_2-1)(1-\psi_0)}{\alpha_1+\alpha_2-2} \\ \psi_2 &= \frac{(\alpha_1-1)(1-\psi_0)}{\alpha_1+\alpha_2-2} \end{aligned}$$

Setzt man (4.41) in (4.40) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} v_{UQ}^+ &= 2 \cdot \left[\frac{\psi_0(1-\pi_0)}{(1-\psi_0)} \frac{(\alpha_1+\alpha_2-2)}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)} + \frac{1-\pi_1}{\alpha_1-1} + \right. \\ (4.42) \quad &+ \left. \frac{1-\pi_2}{\alpha_2-1} + \frac{\psi_0 \cdot (\alpha_1+\alpha_2-2)^2}{(1-\psi_0) \cdot (\alpha_1-1)^2 (\alpha_2-1)^2} + \frac{1}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)} \right] \\ &= 2 \cdot \left[\frac{\psi_0(\alpha_1+\alpha_2-2)}{(1-\psi_0)(\alpha_1-1)^2(\alpha_2-1)^2} \left((1-\pi_0)(\alpha_1-1)(\alpha_2-1) + \alpha_1+\alpha_2-2 \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1-\pi_1}{\alpha_1-1} + \frac{1-\pi_2}{\alpha_2-1} + \frac{1}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)} \right] \end{aligned}$$

Da $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ ist v_{UQ}^+ bei vorgegebenem Protektionsgrad (α_1, α_2) für $\psi_0 = 0$ minimal.

Im optimalen verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell ist also $\psi_0 = 0$ zu wählen; dies entspricht der Wahl von $\psi = 1$ im SIMMONS-I-Modell für ein alternatives Merkmal.

Im BOURKE-DALENIUS-Modell ist der Ausdruck für v_{BD}^+ in (4.31) angegeben:

$$(4.31) \quad v_{BD}^+ = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3(P_0^2 + P_1^2 + P_2^2) - 1} - 1 \right]$$

Vorgegebenes α_1 und α_2 (die die o.g. Bedingungen erfüllen), lassen sich in zwei Modellen mit den folgenden Auswahlwahrscheinlichkeiten realisieren:

$$(4.43) \quad \text{Modell I: } \frac{1}{1+\alpha_1+\alpha_2}, \quad \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1+\alpha_2}, \quad \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1+\alpha_2}$$

$$(4.44) \quad \text{Modell II: } \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}, \quad \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2}$$

Entsprechend gilt für ein vorgegebenes Modell die Darstellungsart I oder II.

Für $\sum_{i=0}^2 P_i^2$ - entscheidend für den Wert von v_{BD}^+ - erhalten wir:

$$(4.45) \quad \text{Modell I: } \sum_{i=0}^2 P_i^2 = \frac{1+\alpha_1^2+\alpha_2^2}{(1+\alpha_1+\alpha_2)^2}$$

$$(4.46) \quad \text{Modell II: } \sum_{i=0}^2 P_i^2 = \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2^2}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)^2}$$

Es läßt sich zeigen, daß $\sum_{i=0}^2 P_i^2$ im Modell II immer mindestens so groß ist wie im Modell I. Das Modell II hat also eine geringere (oder gleich große) Antwortvarianz als Modell-I - bei gleichem Protektionsgrad α_1 und α_2 .

Um das verallgemeinerte SIMMONS-I-Modell mit dem BOURKE-DALENIUS-Modell (II) zu vergleichen, schätzen wir v_{UQ}^+ , das von π_0, π_1, π_2 abhängig ist, nach oben ab, um eine für alle Werte von π_0, π_1, π_2 unabhängige gültige Aussage zu erhalten. Es läßt sich recht aufwendig zeigen, daß für $\psi_0 = 0$ die Antwortvarianz v^+ im SIMMONS-I-Modell geringer ist als im BOURKE-DALENIUS-Modell:

$$(4.47) \quad v_{UQ}^+(\psi_0 = 0 | \alpha_1, \alpha_2) < v_{BD}^+(\alpha_1, \alpha_2) \quad ;$$

die Obergrenze $\bar{\psi}_0$ für ψ_0 mit $v_{UQ}^+(\psi_0 \leq \bar{\psi}_0 | \alpha_1, \alpha_2) \leq v_{BD}^+(\alpha_1, \alpha_2)$ hängt von α_1 und α_2 ab.

Wir stellen die Zusammenhänge im einfachen Spezialfall $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ausführlicher dar. Im SIMMONS-I-Modell ist dann $\psi_1 = \psi_2$ zu wählen, im BOURKE-DALENIUS-Modell sind ebenfalls die beiden kleineren Auswahlwahrscheinlichkeiten gleich groß.

Wir untersuchen also:

$$\frac{2}{3} \left[\frac{2}{3 \cdot \frac{2+\alpha^2}{(2+\alpha)^2} - 1} - 1 \right] \geq 2 \left[\frac{\psi_0}{1-\psi_0} - \frac{2(\alpha+1)}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{\alpha-1} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} \right]$$

Einige Umformungen ergeben:

$$\frac{1-2\alpha}{(\alpha-1)^2} \geq \frac{1}{(\alpha-1)^2} (2(\alpha+1) \frac{\psi_0}{1-\psi_0} + 2\alpha-1)$$

$$(4.48) \quad \psi_0 \leq \frac{1}{\alpha+2} =: \bar{\psi}_0$$

Für $\alpha \rightarrow 1$ ist $\bar{\psi}_0 = 1/3$, für $\alpha \rightarrow \infty$ $\bar{\psi}_0 = 0$.

Aus (4.48) kann man also für den durchaus realistischen Spezialfall, daß die beiden sensitiven Kategorien gleich stark geschützt sind, ablesen, unter welchem Wert ψ_0 im verallgemeinerten SIMMONS-I-Modell liegen muß, damit dieses Modell eine geringere Antwortvarianz v^+ als das BOURKE-DALENIUS-Modell hat.

Die vorausgegangenen Überlegungen haben - wie bei einem alternativen Merkmal - gezeigt, daß das Unrelated-Question-Modell bei gleichem Protektionsgrad zumindest mit $\psi_0 = 0$ dem BOURKE-DALENIUS-Modell vorzuziehen ist. In der Tabelle 4.5 sind einige

Tabelle 4.5: Verhältnis der Zusatzvarianz v^+ des optimalen verallgemeinerten SIMMONS-I-Modells (Maximalwert) ($\psi_0 = 0, \psi_1 = 1/2, \psi_2 = 1/2$) zu der des BOURKE-DALENIUS-Modells (Minimalwert) bei gleichem (inversen) Protektionsgrad

$$\alpha : = \alpha_1 = \alpha_2 .$$

α		(1)	2	5	10	50	100
BOURKE- DALENIUS- Modell (II)	P_0	(1/3)	0,5	0,714	0,833	0,96	0,98
	P_1	(1/3)	0,25	0,143	0,083	0,02	0,01
	P_2	(1/3)	0,25	0,143	0,083	0,02	0,01
Verallg. SIMMONS-I- Modell $\psi_0 = 0$ $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}$	P	(0)	0,5	0,8	0,9	0,98	0,99
$\frac{v_{UQ}^+}{v_{BD}^+}$		(1/3)	0,6	0,818	0,90	0,98	0,99

Vergleichswerte zusammengestellt.

Die allgemeinen Bedenken gegen derartige Vergleiche sind dieselben, die schon bei der Behandlung alternativer Merkmale angeführt wurden.

5. MODELLE ZUR SCHÄTZUNG DES MITTELWERTS QUANTITATIVER MERKMALE

Sensitive Merkmale - wie z.B. das Einkommen - können auch quantitativ skaliert sein. Wir werden uns hier - wie meist in der Stichprobentheorie üblich - auf die Schätzung der Mittelwerte bzw. Merkmalssummen und die Ermittlung der Varianzen der Schätzer beschränken.

Die Schätzung der Wahrscheinlichkeitsfunktion eines diskreten Merkmals erfolgt mit den in 4 dargestellten Modellen. ¹⁾ Die Möglichkeit der Schätzung der Verteilung eines stetigen Merkmals mittels RRT behandelt POOLE (1974) innerhalb eines multiplikativen Modells, das in 5.2 dargestellt ist.

Von den bisher behandelten Modellen läßt sich das Unrelated Question-Modell auch bei quantitativen Merkmalen anwenden. Daneben kann man durch Addition bzw. Multiplikation einer Zufallszahl den tatsächlichen Merkmalswert so verschlüsseln, daß eine sichere Rekonstruktion unmöglich ist. Schließlich behandeln wir ein interessantes Modell, das im Gegensatz zu den anderen mit dichotomen Antworten arbeitet.

5.1 UNRELATED-QUESTION-MODELLE

Bei der Behandlung der Unrelated-Question-Modelle für quantitative Merkmale können wir uns am Vorgehen in 3.4 orientieren.

Bei den Ein-Stichproben-Modellen, bei denen die Verteilung bzw. der Mittelwert und die Varianz des Zusatzmerkmals bekannt sein muß, ²⁾ kann anstelle eines erhebaren nicht sensitiven Merkmals

1) Das BOURKE-DALENIUS- und das HOPKINS-III-Modell sind jedoch nur bei Merkmalen mit endlichem Wertevorrat anwendbar.

2) Vgl. GREENBERG et al. (1971, S.247).

auch ein Pseudomerkmals verwandt werden (Modell mit vorgegebenen Antworten).¹⁾ Ist die Verteilung des Zusatzmerkmals unbekannt, so sind zwei unabhängige Stichproben notwendig.²⁾

In allen Fällen ist das Zusatzmerkmal so auszuwählen, daß seine Ausprägungen im gleichen Bereich wie die des Untersuchungsmerkmals liegen.

5.1.1 Ein - Stichproben - Modelle

Das SIMMONS-I-Modell wird folgendermaßen für quantitative Merkmale verallgemeinert:³⁾

Das Untersuchungsmerkmal X und das Zusatzmerkmal U seien stetige Zufallsvariable mit den Dichten $\pi(x)$ und $\psi(u)$ (bekannt). Die Randomisierungsvariable Z ist eine Bernoulli-Variablen mit der Verteilung $B(1,P)$. Mit Wahrscheinlichkeit P hat ein Befragter die Frage nach X , mit Wahrscheinlichkeit $1-P$ die Frage nach U zu beantworten. Die stetige Antwortvariable Y ist - wie in (3.53) - mit X , U und Z folgendermaßen verknüpft:

$$(5.1) \quad T : \Omega_x \times \Omega_u \times \{0,1\} \rightarrow \Omega_y \\ (x,u,z) \quad \mapsto y = zx + (1-z)u$$

Nach (2.8) können wir die Dichte von Y - $\phi(y)$ - ermitteln:

$$(5.2) \quad \phi(y) = P\pi(y) + (1-P)\psi(y) \quad . \quad 4)$$

1) Vgl. ERIKSSON (1973, S.104-111).

2) Vgl. GREENBERG et al. (1969b) und GREENBERG et al. (1971).

3) Vgl. GREENBERG et al. (1971).

4) Für X oder U diskret gilt - nach (2.3) - (5.2) analog. Dies gilt auch für die folgenden Formeln.

Die Verteilung von Y ist also eine Mischung (Aggregation) der Verteilungen von X und U. Der Erwartungswert und die Varianzen von Y ergeben sich damit aus den entsprechenden Parametern von U und X:

$$(5.3) \quad \mu_Y = P\mu_X + (1-P)\mu_U$$

$$(5.4) \quad \sigma_Y^2 = P\sigma_X^2 + (1-P)\sigma_U^2 + P(1-P)(\mu_X - \mu_U)^2$$

Aus (5.3) läßt sich der Momentenschätzer für μ_X ableiten:

$$(5.5) \quad \hat{\mu}_X = \frac{\hat{\mu}_Y - (1-P)\mu_U}{P} \quad \text{mit} \quad \hat{\mu}_Y = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i$$

mit der Varianz

$$(5.6) \quad \text{Var} \hat{\mu}_X = \frac{\sigma_Y^2}{nP^2} = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{1-P}{nP} (\sigma_X^2 + \frac{\sigma_U^2}{P} + (\mu_X - \mu_U)^2) \quad ,$$

die durch (5.7) erwartungstreu geschätzt wird.

$$(5.7) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\mu}_X = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)P^2}$$

Mit $\Omega_{(X,U)} = \mathbb{R}^2$, $\Omega_Y = \mathbb{R}$ und $\Omega_Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

können wir folgendes lineare Modell formulieren

$$(5.8) \quad Y_i = (P \quad 1-P) \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_U \end{pmatrix} + U_i \quad i = 1, \dots, n$$

bzw.

$$(5.9) \quad Y_i - P\mu_U = P\mu_X + U_i \quad i = 1, \dots, n$$

Man sieht leicht, daß der KQ-Schätzer für μ_X mit dem Momentenschätzer übereinstimmt.

Bei der Anwendung des stichprobentheoretischen Ansatzes

lassen sich wie in 3.4.1.1 keine erwartungstreue Schätzwerte für x_i , iés finden, weshalb man unmittelbar von den Antwortwerten auszugehen hat.

Im allgemeinen Stichprobenmodell erhalten wir als Schätzwert für μ_x

$$(5.10) \quad \hat{\mu}_x = \frac{\hat{\mu}_y - (1-P)\mu_u}{P} \quad \text{mit} \quad \hat{\mu}_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i Y_i \quad .$$

Aus (2.42) erhält man die Varianz von $\hat{\mu}_y$:

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \text{Var } \hat{\mu}_y &= \frac{1}{N^2} \left[\text{Var}_1 \sum_{i=1}^N W_i (P x_i + (1-P) u_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N E W_i^2 \cdot P(1-P) (x_i - u_i)^2 \right] \\ &= P^2 \text{Var}_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i x_i + (1-P)^2 \text{Var}_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i u_i + \\ &\quad + 2P(1-P) \text{Cov} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i x_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i u_i \right) + \\ &\quad + P(1-P) \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 E W_i^2 \quad . \end{aligned}$$

Für die Varianz von $\hat{\mu}_x$ ergibt sich damit

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \text{Var } \hat{\mu}_x &= \text{Var } \hat{\mu}_x^d + \frac{(1-P)^2}{P^2} \text{Var } \hat{\mu}_u^d + \\ &\quad + \frac{2(1-P)}{P} \text{Cov}(\hat{\mu}_x^d, \hat{\mu}_u^d) + \\ &\quad + \frac{(1-P)}{N^2 P} \sum_{i=1}^N (x_i - u_i)^2 E W_i^2 \end{aligned}$$

Verwendet man zur Schätzung von (5.12) die - nur bei nichtstochastischen y-Werten erwartungstreue - Schätzfunktion

$$(5.13) \quad \text{Vâr}^d_{\hat{\mu}_x} = \frac{\text{Vâr}^d_{\hat{\mu}_y}}{p^2} \quad ,$$

so ist diese verzerrt:

$$(5.14) \quad \text{Bias Vâr}^d_{\hat{\mu}_x} = - \frac{1-p}{NP} (\sigma_x^2 - 2\sigma_{xu} + \sigma_u^2 + (\mu_x - \mu_u)^2)$$

Verfügt man (im Fall der Anwendung eines Multiple-Trial-Modells) über erwartungstreue Schätzfunktion $\hat{\sigma}_i^2$ für σ_i^2 , so läßt sich die Varianz von $\hat{\mu}_x$ erwartungstreu schätzen:

$$(5.15) \quad \text{Vâr}^d_{\hat{\mu}_x} = \frac{\text{Vâr}^d_{\hat{\mu}_y}}{p^2} + \frac{1}{N^2 p^2} \sum_{i \in S} w_i \hat{\sigma}_i^2$$

Für die einfache Stichprobe ohne Zurücklegen erhalten wir folgende Ergebnisse

$$(5.16) \quad \hat{\mu}_x = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i - (1-p)\mu_u}{p}$$

$$(5.17) \quad \text{Var} \hat{\mu}_x = \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \left[\sigma_x^2 + \frac{(1-p)^2}{p^2} \sigma_u^2 + \frac{2(1-p)}{p} \sigma_{xu} \right]$$

Stichprobenvarianz

$$+ \frac{1-p}{nP} (\sigma_x^2 - 2\sigma_{xu} + \sigma_u^2 + (\mu_x - \mu_u)^2)$$

Antwortvarianz

Die Schätzung $\hat{S}_1^2(\hat{\mu}_x)$

$$(5.18) \quad \hat{S}_1^2(\hat{\mu}_x) = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{P^2 (n-1) \cdot n} \frac{N-n}{N}$$

ist nicht erwartungstreu und hat die negative Verzerrung von (5.14); vernachlässigt man den Korrekturfaktor, so ist diese neue Schätzfunktion $\hat{S}_2^2(\hat{\mu}_x)$ ebenfalls verzerrt - jedoch mit einem positiven Bias. ¹⁾ Die Varianz des Schätzers läßt sich also im SIMMONS-I-Modell für quantitative Merkmale ohne zusätzliche Informationen nicht erwartungstreu schätzen.

Im Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten wird das Zusatzmerkmal als ein Pseudomerkmal aus dem Randomisierungsvorgang heraus generiert, in dem der Befragte mit Wahrscheinlichkeit P die Frage nach dem Untersuchungsmerkmal beantwortet und mit Wahrscheinlichkeit (1-P) eine - wiederum zufällig bestimmte - vorgegebene Antwort zu geben hat.

Dieses Modell wird mit einer Kartenmischung als Randomisierungsvorrichtung für diskrete quantitative Merkmale vorgeschlagen, ²⁾ kann jedoch mittels eines Rouletts auch für stetige (beschränkte) Merkmale verwandt werden.

Am zweckmäßigsten formuliert man die Modellstruktur wie in 3.4.1.2 mit zwei unabhängigen Randomisierungsvariablen Z_1 und Z_2 ; $Z_1 : B(1,P)$, Z_2 (Pseudomerkmal) mit vorgegebenem Erwartungswert μ_u und Varianz σ_u^2 .

Für die Antwortvariable Y gilt dann:

$$(5.19) \quad Y = Z_1 X + (1-Z_1) Z_2$$

Für eine unabhängige Zufallsstichprobe gelten die gleichen Ergebnisse wie für das entsprechende SIMMONS-I-Modell. Unterschiede werden erst bei der stichprobentheoretischen Behandlung deutlich:

Hierzu seien einige wichtige Formeln zusammengestellt: ³⁾

1) Vgl. (2.54) und (2.55).

2) Vgl. ERIKSSON (1973, S.105).

3) Vgl. in etwas anderer Darstellung ERIKSSON (1973, S.105).

$$(5.20) \quad E_2 Y_i = P x_i + (1-P) \mu_u \quad i \in S$$

$$(5.21) \quad E Y_i = P \mu_x + (1-P) \mu_u$$

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \text{Var}_2 Y_i &= E_2 Y_i^2 - (E_2 Y_i)^2 = \\ &= x_i^2 P + (1-P) (\sigma_u^2 + \mu_u^2) - (x_i P + (1-P) \mu_u)^2 \\ &= (1-P) (\sigma_u^2 + P(x_i - \mu_u)^2) \end{aligned}$$

$$(5.23) \quad E_1 \text{Var}_2 Y_i = (1-P) (P \sigma_x^2 + \sigma_u^2 + P(\mu_x - \mu_u)^2)$$

$$(5.24) \quad \text{Var}_1 E_2 Y_i = P^2 \sigma_x^2$$

Aus (5.23) und (5.24) erhält man die Varianz von Y_i :

$$(5.25) \quad \text{Var } Y_i = P \sigma_x^2 + (1-P) \sigma_u^2 + P(1-P) (\mu_x - \mu_u)^2 \quad i \in S .$$

Anders als im SIMMONS-I-Modell läßt sich hier ein erwartungstreuer Schätzer \hat{x}_i für x_i ($i \in S$) angeben: ¹⁾

$$(5.26) \quad \hat{x}_i = \frac{Y_i - (1-P) \mu_u}{P} \quad i \in S$$

Mit (5.26) können wir im allgemeinen Stichprobenmodell (ERIKSSON-Ansatz) einen erwartungstreuen Schätzer $\hat{\mu}_x$ für μ_x angeben:

$$(5.27) \quad \hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{i \in S} w_i \hat{x}_i \quad \text{mit}$$

$$(5.28) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \text{Var}_1 \hat{\mu}_x^d + \frac{1}{N^2} \frac{1-P}{P^2} \sum_{i=1}^N E W_i^2 (\sigma_u^2 + P(x_i - \mu_u)^2) \quad 2)$$

In (5.28) repräsentiert der erste Varianzbestandteil die Stichprobenvarianz, der zweite die Antwortvarianz.

Bei der Schätzung der Varianz geht man am besten direkt von den

1) Vgl. ERIKSSON (1976a, S.16).

2) Vgl. ERIKSSON (1973, S.106).

y-Werten aus (Antwortvariablenansatz).

Die erwartungstreue Schätzung der Varianz erfolgt im Multiple-Trial-Modell nach der Formel

$$(5.29) \quad \text{V\ddot{a}r} \hat{\mu}_x = \frac{\text{V\ddot{a}r}^d \hat{\mu}_y}{P^2} + \frac{\sum_{i \in S} w_i S \sigma_i^2}{N^2 P^2}$$

$$\text{mit} \quad \text{V\ddot{a}r}^d \hat{\mu}_y = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} A_{ij} \bar{Y}_i \bar{Y}_j \quad (\bar{Y}_i = \frac{1}{k} \sum_{v=1}^k Y_{iv}) \quad \text{und}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{k(k-1)} \sum_{v=1}^k (Y_{iv} - \bar{Y}_i)^2 \quad i \in S, \quad ,$$

wobei Y_{iv} die Antwort des i -ten Befragten beim v -ten Versuch ist. Da im einfachen Modell ($k=1$) jedoch kein vernünftiger Schätzer σ_i^2 zur Verfügung steht, ist ein verzerrter Schätzer zu verwenden.

$$(5.30) \quad \text{V\ddot{a}r}^d \hat{\mu}_x = \frac{\text{V\ddot{a}r}^d \hat{\mu}_y}{P^2} \quad \text{mit der Verzerrung}$$

$$(5.31) \quad \text{Bias V\ddot{a}r}^d \hat{\mu}_x = - \frac{1}{N^2 P^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 =$$

$$= - \frac{1}{NP} \left[\frac{1-P}{P} \sigma_u^2 + \sigma_x^2 + (\mu_x - \mu_u)^2 \right]$$

Abschließend sei das einfache Stichprobenmodell ohne Zurücklegen diskutiert und einige Vergleiche mit dem SIMMONS-I-Modell vorgenommen:

Die Schätzung von μ_x erfolgt mittels des Stichprobenmittelwertes der Antwortvariablen:

$$(5.32) \quad \hat{\mu}_x = \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i - (1-P) \right) / P$$

Die Varianz des Schätzers läßt sich wie folgt in Stichproben- und Antwortvarianz aufspalten:

$$(5.33) \quad \text{Var} \hat{\mu}_x = \frac{\sigma_x^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{1-P}{nP} \left[\frac{\sigma_u^2}{P} + \sigma_x^2 + (\mu_x - \mu_u)^2 \right] \quad 1)$$

1) Vgl. ERIKSSON (1973, S.106).

Vergleicht man (5.17) mit (5.33), so sieht man die unterschiedliche Aufteilung der Varianzen in Stichproben- und Antwortvarianz. Das SIMMONS-I-Modell hat eine größere Stichprobenvarianz als das Modell mit vorgegebenen Antworten, bei der Antwortvarianz sind die Verhältnisse umgekehrt. Wegen der Endlichkeitskorrektur in der Stichprobenvarianz ist insgesamt die Varianz bei SIMMONS-I-Modell etwas kleiner. Da jedoch die Antwortvarianz im Modell mit vorgegebenen Antworten größer ist, hat dieses Modell in der Multiple-Trial-Version ($k \geq 2$) eine geringere Varianz als das SIMMONS-I-Modell. ¹⁾

Zur Schätzung der Varianz (5.33) kann man zwei - verzerrte - Schätzfunktionen (V_1, V_2) benutzen:

$$(5.34) \quad V_1 = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{P^2 n(n-1)} \cdot \frac{N-n}{n} \quad \text{und (entspricht (5.30))}$$

$$(5.35) \quad V_2 = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{P^2 n(n-1)}$$

Für die Verzerrungen gilt:

$$(5.36) \quad \text{Bias } V_1 = - \frac{1}{NP} \left[\frac{1-P}{P} \sigma_u^2 + \sigma_x^2 + (\mu_x - \mu_u)^2 \right] \quad \text{und}$$

$$(5.37) \quad \text{Bias } V_2 = \frac{\sigma_x^2}{N-1} \quad 2) \quad .$$

Die Berücksichtigung des Korrekturfaktors bringt also eine negative Verzerrung, während seine Vernachlässigung einen positiven Bias bewirkt.

1) Vgl. ERIKSSON (1976a, S.17).

2) Vgl. ERIKSSON (1973, S.111).

5.1.2 Zwei - Stichproben - Modelle

Ist die Verteilung des Zusatzmerkmals unbekannt, so sind zwei Stichproben (Umfänge n_1, n_2) mit unterschiedlichen Auswahlwahrscheinlichkeiten (P_1, P_2) für die sensitive Frage zu verwenden. In diesem SIMMONS-II-Modell für quantitative Merkmale ¹⁾ können wir die wichtigsten Formeln wie in der homograden Version angeben:

Für die beiden Stichproben gelten (5.3) und (5.4):

$$(5.38) \quad \mu_{yi} = P_i \mu_x + (1-P_i) \mu_u$$

$$(5.39) \quad \sigma_{yi}^2 = P_i \sigma_x^2 + (1-P_i) \sigma_u^2 + P_i (1-P_i) (\mu_x - \mu_u)^2 \quad i=1,2$$

Aus (5.38) läßt sich - nach der Momentenmethode - der Schätzer für μ_x ableiten:

$$(5.40) \quad \hat{\mu}_x = \frac{(1-P_2) \hat{\mu}_{y1} - (1-P_1) \hat{\mu}_{y2}}{P_1 - P_2}$$

mit der Varianz

$$(5.41) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{(1-P_2)^2 \frac{\sigma_{y1}^2}{n_1} + (1-P_1)^2 \frac{\sigma_{y2}^2}{n_2}}{(P_1 - P_2)^2}$$

Der KQ-Schätzer entspricht dem Momentenschätzer. ²⁾ Zur Ableitung eines ML-Schätzers sind spezielle Annahmen über die Verteilung von X und U notwendig.

Im allgemeinen Stichprobenmodell ist (5.40) mit den Schätzfunktionen

1) Das SIMMONS-II-Modell für quantitative Merkmale wurde erstmals in GREENBERG et al. (1969b) dargestellt; vgl. auch GREENBERG et al. (1971).

2) Vgl. GREENBERG et al. (1971, S.245).

$$(5.42) \quad \hat{\mu}_{y_i} = \frac{1}{N} \sum_{j \in S_i} W_{ij} Y_j \quad i=1,2$$

zu verwenden. Die Aufteilung der Varianz von $\hat{\mu}_x$ in die Stichproben- und Antwortvarianz erfolgt analog (3.99/100) nach (5.43) und (5.44):

$$(5.43) \text{Var}_1 E_2 \hat{\mu}_x = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \{ (1 - P_2)^2 \text{Var}_1 E_2 \hat{\mu}_{y_1} + (1 - P_1)^2 \text{Var}_1 E_2 \hat{\mu}_{y_2} \}$$

mit

$$\text{Var}_1 E_2 \hat{\mu}_{y_i} = P_i^2 \text{Var} \hat{\mu}_{xi}^d + (1 - P_i)^2 \text{Var} \hat{\mu}_{ui}^d + 2P_i(1 - P_i) \text{Cov}(\hat{\mu}_{xi}^d, \hat{\mu}_{ui}^d)$$

$$i = 1, 2$$

$$(5.44) \quad E_1 \text{Var}_2 \hat{\mu}_x = \frac{(1 - P_2)(1 - P_1)}{N^2 (P_1 - P_2)^2} [P_1(1 - P_2) \sum_{i=1}^N E_1 W_{1i}^2 (x_i - u_i)^2 + P_2(1 - P_1) \sum_{i=1}^N E_1 W_{2i}^2 (x_i - u_i)^2]$$

Die Varianz von $\hat{\mu}_x$ wird analog (3.101) geschätzt:

$$(5.45) \quad \hat{\text{var}} \hat{\mu}_x = \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} [(1 - P_2)^2 \hat{\text{var}} \hat{\mu}_{y_1} + (1 - P_1)^2 \hat{\text{var}} \hat{\mu}_{y_2}]$$

Für die einfache Stichprobe ohne Zurücklegen erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$(5.46) \quad \hat{\mu}_x = \frac{(1 - P_2) \hat{\mu}_{y_1} - (1 - P_1) \hat{\mu}_{y_2}}{P_1 - P_2} \quad \text{mit}$$

$$\hat{\mu}_{y_1} = \frac{1}{n_1} \sum_{i \in S_1} Y_i \quad \text{und} \quad \hat{\mu}_{y_2} = \frac{1}{n_2} \sum_{i \in S_2} Y_i$$

$$\begin{aligned}
 (5.47) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x &= \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left\{ \sigma_x^2 \left[\frac{P_1^2 (1 - P_2)^2}{n_1} \cdot \frac{N - n_1}{N - 1} + \right. \right. \\
 &+ \frac{P_2^2 (1 - P_1)^2}{n_2} \cdot \frac{N - n_2}{N - 1} + \frac{P_1 (1 - P_1) (1 - P_2)^2}{n_1} + \\
 &+ \frac{P_2 (1 - P_2) (1 - P_1)^2}{n_2} + \left. \right\} \\
 &+ \sigma_u^2 \left[\frac{(1 - P_2)^2 (1 - P_1)^2}{n_1} \cdot \frac{N - n_1}{N - 1} + \right. \\
 &+ \frac{(1 - P_1)^2 (1 - P_2)^2}{n_2} \cdot \frac{N - n_2}{N - 1} + \\
 &+ \frac{P_1 (1 - P_1) (1 - P_2)^2}{n_1} + \frac{P_2 (1 - P_2) (1 - P_1)^2}{n_2} \left. \right] + \\
 &+ (\mu_x - \mu_u)^2 \left[\frac{P_1 (1 - P_1) (1 - P_2)^2}{n_1} + \frac{P_2 (1 - P_2) (1 - P_1)^2}{n_2} \right] + \\
 &+ 2 \sigma_{xu} \frac{(1 - P_2)^2 P_1 (1 - P_1)}{n_1} \cdot \frac{1 - n_1}{N - 1} + \\
 &+ \frac{P_2 (1 - P_2) (1 - P_1)^2}{n_2} \cdot \frac{1 - n_2}{N - 1} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.48) \quad (\text{Var } \hat{\mu}_x)_1 &= \frac{1}{(P_1 - P_2)^2} \left[(1 - P_2)^2 \frac{\sum_i (Y_i - \bar{Y}_1)^2}{S_1} \cdot \frac{N - n_1}{N} + \right. \\
 &+ (1 - P_1)^2 \frac{\sum_i (Y_i - \bar{Y}_2)^2}{S_2} \cdot \frac{N - n_2}{N} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Bei der Stichprobenplanung sind insbesondere die Aufteilung des gesamten Stichprobenumfangs $n = n_1 + n_2$ auf die beiden Stichproben und die Wahl der Auswahlwahrscheinlichkeiten zu entscheiden.

Die varianzminimale Aufteilung des Gesamtstichprobenumfangs ergibt die Bedingung (5.49):

$$(5.49) \quad \left(\frac{n_1}{n_2} \right)_{\text{opt.}} = \frac{\sigma_{y_1} (1-P_2)}{\sigma_{y_2} (1-P_1)}$$

Für $P_2=0$ (vgl. unten), sowie $\mu_x = \mu_u$ und $\sigma_x^2 = \sigma_u^2$ ermittelt man als Anhaltspunkt das optimale Verhältnis $n_1/n_2 = 1/(1-P_1)$; in diesem Fall ist die erste Stichprobe immer größer als die zweite zu wählen.

Bei der optimalen Aufteilung vereinfacht sich die Varianz aus (5.41):

$$(3.50) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{[(1-P_1)\sigma_{y_2} + (1-P_2)\sigma_{y_1}]^2}{n(P_1-P_2)^2}$$

mit $n = n_1 + n_2$ und der Aufteilung (5.49)

Nimmt man o.B.d.A. an $P_1 > P_2$, so läßt sich wie im homograden Fall zeigen, daß $\partial \text{Var } \hat{\mu}_x / \partial P_2 > 0$; d.h. für $P_2 = 0$ wird ein minimaler Varianzwert erreicht. Die zweite Stichprobe sollte also nur zur Erhebung des Zusatzmerkmals verwendet werden.

Wie das SIMMONS-II-Modell im homograden Fall läßt sich auch das FOLSOM-Modell mit geringen Modifikationen auf den heterograden Fall übertragen.

Die Grundidee des FOLSOM-Modells-in 3.4.2.2 dargestellt - liegt in einer zweifachen verschränkten Anwendung des optimierten SIMMONS-II-Modells.

Bezeichnen wir mit den Indices die Fragen (1. erste Frage randomisiert, - Auswahlwahrscheinlichkeit P -, 2. Frage direkt nach Zusatzmerkmal) und die Stichprobe mit eingeklammerten Nummern,

so erhalten wir aus jeder Stichprobe folgendermaßen einen Schätzwert für μ_x

$$(5.51) \quad \begin{aligned} \hat{\mu}_x(1) &= \frac{\hat{\mu}_1(1) - (1-P)\hat{\mu}_2(2)}{P} \\ \hat{\mu}_x(2) &= \frac{\hat{\mu}_1(2) - (1-P)\hat{\mu}_2(1)}{P} \end{aligned}$$

Als Schätzer für μ_x verwendet man eine Linearkombination von $\hat{\mu}_x(1)$ und $\hat{\mu}_x(2)$

$$(5.52) \quad \hat{\mu}_x = w \hat{\mu}_x(1) + (1-w)\hat{\mu}_x(2) \quad ,$$

für die das varianzminimale Gewicht \bar{w} folgende Bedingung erfüllen muß:

$$(5.53) \quad \bar{w} = \frac{\text{Var } \hat{\mu}_x(2) - \text{Cov}(\hat{\mu}_x(1), \hat{\mu}_x(2))}{\text{Var } \hat{\mu}_x(1) + \text{Var } \hat{\mu}_x(2) - 2 \text{Cov}(\hat{\mu}_x(1), \hat{\mu}_x(2))}$$

Bei optimalen Gewicht \bar{w} ergibt sich aus der allgemeinen Beziehung für die Varianz von $\hat{\mu}_x$

$$(5.54) \quad \begin{aligned} \text{Var } \hat{\mu}_x &= w^2 \text{Var } \hat{\mu}_x(1) + \\ &+ (1-w)^2 \text{Var } \hat{\mu}_x(2) + 2w(1-w) \text{Cov}(\hat{\mu}_x(1), \hat{\mu}_x(2)) \end{aligned}$$

mit $w = \bar{w}$

$$(5.55) \quad \text{Var } (\hat{\mu}_x)_{\text{opt}} = \frac{\text{Var } \hat{\mu}_x(1) \text{Var } \hat{\mu}_x(2) - \text{Cov}(\hat{\mu}_x(1), \hat{\mu}_x(2))^2}{\text{Var } \hat{\mu}_x(1) + \text{Var } \hat{\mu}_x(2) - 2 \text{Cov}(\hat{\mu}_x(1), \hat{\mu}_x(2))}$$

Da die Varianzen zur Bestimmung des optimalen Gewichts in (5.53) nicht bekannt sind, muß man sie nach (5.7) schätzen. Für die Kovarianz von $\hat{\mu}_x(1)$ und $\hat{\mu}_x(2)$ gilt:

$$\text{Cov}(\hat{\mu}_x(1), \hat{\mu}_x(2)) =$$

$$(5.56) \quad = \frac{p-1}{p^2} \left[\frac{\text{Cov}(Y_1(1), Y_2(1))}{n_1} + \frac{\text{Cov}(Y_1(2), Y_2(2))}{n_2} \right] ;$$

wobei $\text{Cov}(Y_1(i), Y_2(i))$, $i=1,2$, mit (5.57) erwartungstreu geschätzt werden:

$$(5.57) \quad \hat{\text{Cov}}(Y_1(i), Y_2(i)) = \frac{\sum_{j \in S_i} (Y_{1j}(i) - \bar{Y}_1(i))(Y_{2j}(i) - \bar{Y}_2(i))}{n_i - 1} \quad i=1,2 .$$

Mit zwei Fragen in jeder Stichprobe kann also das SIMMONS-II-Modell in seiner optimalen Form ($P_2=0$) durch das FOLSOM-Modell noch verbessert werden.

5.2 DAS ADDITIVE UND DAS MULTIPLIKATIVE MODELL

Zur stochastischen Verschlüsselung eines quantitativen Merkmals bietet sich die Verknüpfung mit einer Zufallszahl an, deren Verteilung bzw. Verteilungsparameter bekannt sind. Als die einfachsten Fälle werden hier die Addition und Multiplikation mit einer Zufallszahl behandelt. Der Befragte addiert bzw. multipliziert also seinen Merkmalswert, z.B. sein Einkommen, mit einer Zufallszahl, die etwa mit Hilfe eines Taschenrechners generiert wurde, und teilt dem Befrager lediglich die Summe bzw. das Produkt der beiden Werte mit. ¹⁾

Im additiven Modell bestehen zwischen der Untersuchungsvariablen X mit $\mu_x := EX$ und $\sigma_x^2 := \text{Var } X$, der von X unabhängigen Randomisierungsvariable Z mit $\mu_z = EZ$ und $\sigma_z^2 := \text{Var } Z$ und der Antwortvariablen Y folgende Zusammenhänge:

$$(5.58) \quad Y = X + Z$$

$$(5.59) \quad \mu_y = \mu_x + \mu_z$$

$$(5.60) \quad \sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2$$

Aus (5.59) läßt sich sehr einfach der Momentenschätzer für μ_x , der im übrigen auch KQ-Schätzer ist, ableiten:

$$(5.61) \quad \hat{\mu}_x = \hat{\mu}_y - \mu_z \quad \left(\hat{\mu}_y = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i \right)$$

$\hat{\mu}_x$ hat die Varianz

$$(5.62) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{n} \quad ,$$

die durch (5.63) erwartungstreu geschätzt wird:

1) Zum additiven Modell vgl. POLLOCK/BEK (1976, S.885); zum multiplikativen Modell POOLE (1974) und POLLOCK/BEK (1976, S.885); vgl. auch HIMMELFARB/EDGELL (1980), die das additive Modell für bestimmte (diskrete) Verteilungen von Z betrachten.

$$(5.63) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\mu}_x = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})^2}{n(n-1)}$$

Im allgemeinen Stichprobenmodell hat der Schätzer (5.61) mit

$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i Y_i$ folgende Varianz

$$(5.64) \quad \text{Var} \hat{\mu}_x = \frac{1}{N^2} \left[\text{Var}_1 \left(\sum_{i=1}^N W_i (x_i + \mu_z) \right) + \sigma_z^2 \sum_{i=1}^N E W_i^2 \right],$$

die mit (5.65) erwartungstreu geschätzt werden kann:

$$(5.65) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\mu}_x = \widehat{\text{Var}}^d \hat{\mu}_y + \frac{\sigma_z^2}{N}.$$

Im ERIKSSON-Ansatz erhalten wir mit

$$(5.66) \quad \hat{x}_i = Y_i - \mu_z \quad i \in S$$

den erwartungstreuen Schätzer

$$(5.67) \quad \hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_i \hat{x}_i,$$

der die Varianz (5.68) besitzt

$$(5.68) \quad \text{Var} \hat{\mu}_x = \text{Var} \hat{\mu}_x^d + \frac{1}{N^2} \sigma_z^2 \sum_{i=1}^N E W_i^2$$

und durch (5.69) erwartungstreu geschätzt wird:

$$(5.69) \quad \widehat{\text{Var}} \hat{\mu}_x = \frac{1}{N^2} \widehat{\text{Var}} x^d(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) + \frac{\sigma_z^2}{N}$$

Im einfachen Stichprobenmodell ohne Zurücklegen erhalten wir folgende Formeln:

$$(5.70) \quad \hat{\mu}_x = \frac{1}{n} \sum_{i \in S} Y_i - \mu_z$$

$$(5.71) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\sigma_x^2}{n} \cdot \frac{N-n}{n-1} + \frac{\sigma_z^2}{n}$$

$$(5.72) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n-1} \cdot \frac{N-n}{n} + \frac{\sigma_z^2}{N}$$

Im multiplikativen Modell sind X, Z und Y wie folgt verknüpft:

$$(5.73) \quad Y = X \cdot Z$$

$$(5.74) \quad \mu_y = \mu_x \cdot \mu_z$$

$$(5.75) \quad \sigma_y^2 = \mu_z^2 \sigma_x^2 + \mu_x^2 \sigma_z^2 + \sigma_x^2 \sigma_z^2 \quad 1)$$

Der Momentenschätzer (und KQ-Schätzer)

$$(5.76) \quad \hat{\mu}_x = \frac{\hat{\mu}_y}{\mu_z} \quad ; \quad \mu_z \neq 0$$

hat die Varianz

$$(5.77) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\sigma_y^2}{n \mu_z^2} = \frac{1}{n} \left[\sigma_x^2 + \frac{\sigma_z^2 (\mu_x^2 + \sigma_x^2)}{\mu_z^2} \right]$$

Im allgemeinen Stichprobenmodell fallen der Schätzer (5.76) (Antwortvariablenansatz) und der ERIKSSON-Schätzer zusammen. Die Varianz des Schätzers wird in (5.78) in die Stichproben- und in die Antwortvarianz zerlegt:

$$(5.78) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \text{Var } \hat{\mu}_x^d + \frac{\sigma_z^2}{\mu_z^2} \cdot \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{EW}_i^2 \cdot x_i^2 \quad ;$$

sie wird - verzerrt - geschätzt durch:

$$(5.79) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\text{Var } \hat{\mu}_y^d}{\mu_z^2} \quad \text{mit}$$

1) Vgl. POLLOCK/BEK (1976, S.885).

$$(5.80) \quad \text{Bias V\hat{a}r } \hat{\mu}_x = \frac{-\sigma_z^2 (\mu_x^2 + \sigma_x^2)}{N \mu_z^2}$$

Im Stichprobenmodell ohne Zurücklegen erhalten wir hier folgende Formeln:

$$(5.81) \quad \hat{\mu}_x = \frac{\sum_{i \in S} Y_i}{n \mu_z}$$

$$(5.82) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\sigma_x^2}{n} \cdot \frac{N-n}{n-1} + \frac{\sigma_x^2 (\mu_x^2 + \sigma_x^2)}{n \cdot \mu_z^2}$$

$$(5.83) \quad (\text{V\hat{a}r } \hat{\mu}_x)_1 = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y})}{n(n-1) \mu_z^2} \frac{N-n}{N}, \quad \text{Bias}(\text{V\hat{a}r } \hat{\mu}_x)_1 = \frac{-\sigma_z^2 (\mu_x^2 + \sigma_x^2)}{N \mu_z^2}$$

$$(5.84) \quad (\text{V\hat{a}r } \hat{\mu}_x)_2 = \frac{\sum_{i \in S} (Y_i - \bar{Y}_i)^2}{n(n-1) \mu_z^2}, \quad \text{Bias}(\text{V\hat{a}r } \hat{\mu}_x)_2 = \frac{\mu_z^2 \sigma_x^2}{N-1}$$

5.3 DAS DALENIUS-VITALE-MODELL

Ein interessantes Modell zur Schätzung des Mittelwerts eines beschränkten quantitativen Merkmals entwickeln DALENIUS/VITALE.¹⁾ Aus dem Intervall $I = [0, b]$, in dem das (evtl. geeignet transformierte) Untersuchungsmerkmal X Werte annehmen kann, wird für jeden Befragten eine in I gleichverteilte Zufallszahl ermittelt,²⁾ die der Befragte nicht erfährt. Der Befragte hat lediglich zu antworten, ob sein Merkmalswert x größer als die Zufallszahl z ist ($y = 1$) oder nicht ($y = 0$). Aus dem Anteil der Ja-Antworten ($\hat{\lambda}$) in der Stichprobe kann man dann den Mittelwert μ_x schätzen.

Zwischen der bernoulliverteilten Antwortvariablen Y und der stetigen Randomisierungsvariablen Z mit $F_Z(z) = z/b$ bzw. der stetigen Untersuchungsvariablen X mit dem unbekanntem Mittelwert μ_x bestehen folgende Zusammenhänge:³⁾

$$(5.85) \quad T: [0, b] \times [0, b] \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(x, z) \rightarrow \begin{cases} 0 & ; x \leq z \\ 1 & ; x > z \end{cases}$$

Die Bernoulliverteilung der Antwortvariablen $Y = T(X, Z)$ hat den Parameter

-
- 1) Vgl. DALENIUS/VITALE (1974).
 - 2) Als Randomisierungsmechanismus kann bspw. ein Roulette oder ein elektronischer Zufallsgenerator verwendet werden.
 - 3) Für diskrete Variable X und Z vgl. die Ableitung bei DALENIUS/VITALE (1974, S.4f.). Auch bei einer Kombination einer diskreten und einer stetigen Variable erhält man $\lambda = \mu_x/b$.

$$\begin{aligned}
 (5.86) \quad \lambda &:= P(Y=1) = \int_{T^{-1}(\{1\})} f_x(x) f_z(z) dx dz = \\
 &= \int_{x>z} f_x(x) f_z(z) dx dz = \\
 &= \int_0^b f_x(x) \left(\int_0^x f_z(z) dz \right) dx = \\
 &\quad \underbrace{F_z(x) = x/b} \\
 &= \frac{1}{b} \int_0^b f_x(x) dx = \frac{\mu_x}{b}
 \end{aligned}$$

Aus (5.86) leitet man den Momentenschätzer (und KQ-Schätzer) $\hat{\mu}_x$ ab.

$$(5.87) \quad \hat{\mu}_x = \hat{\lambda} b,$$

der die Varianz (5.88) hat:

$$(5.88) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{b^2 \lambda (1-\lambda)}{n} = \frac{\mu_x (b-\mu_x)}{n}.$$

Eine erwartungstreue Schätzung von (5.88) ist

$$(5.89) \quad \hat{\text{Var}} \hat{\mu}_x = \frac{b^2 \hat{\lambda} (1-\hat{\lambda})}{n-1}.$$

Im ERIKSSON-Ansatz erhält man mit

$$(5.90) \quad \hat{x}_i = b Y_i \quad i \in s$$

den RRT-Schätzer

$$(5.91) \quad \hat{\mu}_x = \frac{b}{N} \sum_{i=1}^N w_i Y_i,$$

der mit dem Antwortvariablenansatz übereinstimmt und die Varianz (5.92) hat:

$$(5.92) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \text{Var}^d \hat{\mu}_x + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{EW}_i^2 x_i (b-x)$$

(5.92) wird verzerrt durch (5.93) geschätzt:

$$(5.93) \quad \hat{\text{Var}} \hat{\mu}_x = b^2 \hat{\text{Var}}^d \hat{\mu}_y \quad \text{mit}$$

$$(5.94) \text{Bias} \hat{\text{Var}} \hat{\mu}_x = - \frac{1}{N} (\sigma_x^2 + \mu_x (b - \mu_x)) \quad .$$

Im Spezialfall der einfachen Stichprobe ohne Zurücklegen erhalten wir folgende Formeln:

$$(5.95) \quad \hat{\mu}_x = \frac{b}{n} \sum_{i \in S} Y_i$$

$$(5.96) \quad \text{Var } \hat{\mu}_x = \frac{\sigma_x^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1} + \frac{\mu_x (b - \mu_x) - \sigma_x^2}{n} =$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{n} \cdot \frac{1-n}{N-1} + \frac{\mu_x (b - \mu_x)}{n} \quad .$$

$$(5.97) \quad S_1^2 = \frac{b^2}{(n-1)} \cdot \frac{N-n}{N} \hat{\lambda} (1 - \hat{\lambda}) \quad , \quad \text{Bias } S_1^2 = - \frac{\sigma_x^2 + \mu_x (b - \mu_x)}{N}$$

$$(5.98) \quad S_2^2 = \frac{b^2 \hat{\lambda} (1 - \hat{\lambda})}{n-1} \quad , \quad \text{Bias } S_2^2 = \frac{\sigma_x^2}{b^2 (N-1)} \quad .$$

5.4 VERGLEICH DER MODELLE

Wir beschränken den Vergleich auf folgende Modelle zur Schätzung als Mittelwert eines quantitativen Merkmals im einfachen Stichprobenmodell mit Zurücklegen: Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten (entspricht dem SIMMONS-I-Modell mit unabhängigem Zusatzmerkmal, dessen Verteilung bekannt ist), additives Modell, multiplikatives Modell und DALENIUS/VITALE-Modell.

Für die Zusatzvarianzen (V^+) der Mittelwertschätzer, d.h.

$V^+ = \text{Var } \hat{\mu}_x - \sigma_x^2/n$, ergeben sich aus (5.6)/(5.33), (5.62), (5.77) und (5.88) folgende Formeln (für $n = 1$):

$$(5.99) \quad \text{SIMMONS-I-Modell} \quad : \quad V^+ = \frac{1-P}{P} \left[\sigma_x^2 + \frac{\sigma_u^2}{P} + (\mu_x - \mu_u)^2 \right]$$

$$(5.100) \quad \text{Additives Modell} \quad : \quad V^+ = \sigma_z^2$$

$$(5.101) \quad \text{Multiplikatives M.} \quad : \quad V^+ = \frac{\sigma_x^2 (\mu_x^2 + \sigma_x^2)}{\mu_z^2}$$

$$(5.102) \quad \text{DALENIUS-VITALE-M.} \quad : \quad V^+ = \mu_x (b - \mu_x) - \sigma_x^2$$

Um zu übersichtlichen Ausdrücken zu gelangen, treffen wir die Annahme, daß in allen Modellen (mit Ausnahme des DALENIUS-VITALE-Modells) die Zusatzvariablen (U bzw. Z) so gewählt wurden, daß sie in Erwartungswert und Varianz mit der Untersuchungsvariablen übereinstimmen. ¹⁾ Mit dieser Annahme vereinfachen sich die Formeln für die Zusatzvarianzen:

$$(5.103) \quad \text{SIMMONS-I-Modell} \quad : \quad V^+ = \frac{1-P^2}{P^2} \sigma_x^2$$

$$(5.104) \quad \text{Additives Modell} \quad : \quad V^+ = \sigma_x^2$$

1) Vgl. den gleichen Ansatz bei POLLOCK/BEK (1976, S.885).

$$(5.105) \text{ Multiplikatives M. : } V^+ = \sigma_x^2 + \frac{\sigma_x^4}{\mu_x^2} = \sigma_x^2 (1 + V_x^2)$$

$$(5.106) \text{ DALENIUS-VITALE-M. : } V^+ = [\mu_x (b - \mu_x) - \sigma_x^2]$$

Man sieht sogleich, daß das multiplikative Modell für positivwertige Merkmale mit nicht degenerierter Verteilung immer eine größere Zusatzvarianz als das additive Modell hat. Das DALENIUS-VITALE-Modell dagegen ist dem additiven Modell überlegen, wenn die Varianz des Untersuchungsmerkmals (und damit des Zusatzmerkmals) größer ist als die Hälfte der bei gegebenem Intervall $[0, b]$ und Mittelwert μ_x möglichen maximalen Varianz. Ergebnisse des Vergleichs sind in der Übersicht 5.1 zusammengefaßt.

Auf die Problematik derartiger formaler Vergleichsaussagen wurde bei den anderen behandelten Modellen bereits mehrfach hingewiesen.

Eine Berücksichtigung des Protektionsgradserweist sich jedoch als sehr schwierig, da die bedingten Verteilungen von $X|Y = y$ von äußerst komplizierter Gestalt sind und überhaupt nur bei Annahmen über die Verteilungen von X und U bzw. Z zu ermitteln sind.

Übersicht 5.1: Vergleich von Modellen zur Schätzung des Mittelwerts eines quantitativen Merkmals

als	SIMMONS-I-Modell	Additives Modell	Multiplikatives Modell	DALENIUS-VITALE-Modell
geringere Varianz ($\text{Var } \hat{\mu}_x$)				
SIMMONS-I-Modell		$P > \sqrt{2}/2$	$P > \sqrt{\frac{1}{2+V_x^2}}$	$P > \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{\mu_x (b-\mu_x)}}$
Additives Modell	$P < \sqrt{2}/2$		$V_x \neq 0$	$\sigma_x^2 < \frac{\mu_x (b-\mu_x)}{2}$
Multiplikatives Modell	$P < \sqrt{\frac{1}{2+V_x^2}}$	—		$\sigma_x^2 < \frac{\mu_x (b-\mu_x)}{2+V_x^2}$
DALENIUS-VITALE-Modell	$P < \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{\mu_x (b-\mu_x)}}$	$\sigma_x^2 > \frac{\mu_x (b-\mu_x)}{2}$	$\sigma_x^2 > \frac{\mu_x (b-\mu_x)}{2+V_x^2}$	

6. MULTIVARIATE MODELLE

Bei der Anwendung statischer Erhebungen sind nicht nur die Häufigkeitsverteilungen einzelner Merkmale bzw. deren Parameter von Interesse, vielmehr versucht man darüberhinaus mögliche Zusammenhänge zwischen Merkmalen oder Merkmalsgruppen zu untersuchen. Grundlage hierfür sind die gemeinsamen Verteilungen (bzw. deren Parameter) der untersuchten Merkmale.

Der RRT wurde häufig angelastet, daß sie zwar zur Schätzung eindimensionaler Häufigkeiten sensitiver Merkmale einsetzbar sei, jedoch bei multivariaten Fragestellungen nicht anzuwenden sei. ¹⁾ Wir werden hier die Möglichkeiten der Schätzung mehrdimensionaler Häufigkeitsverteilungen diskreter Merkmale mittels der RRT darstellen und die Möglichkeiten, einen χ^2 -Unabhängigkeitstest anzuwenden, untersuchen. ²⁾ Außerdem werden wir auf die Regressions- und Korrelationsrechnung mit quantitativen RRT-Daten eingehen.

6.1 SCHÄTZUNG MEHRDIMENSIONALER HÄUFIGKEITSVERTEILUNGEN DISKRETER MERKMALE MIT DER RRT

Da sich mehrdimensionale Häufigkeitsverteilungen auch als Häufigkeitsverteilungen eines - entsprechend definierten - eindimensionalen Merkmals darstellen lassen, sind zur Schätzung prinzipiell die Methoden zur Schätzung der Häufigkeitsverteilung eines mehrklassigen Merkmals anwendbar. ³⁾ So können z.B. die Häufigkeiten einer 2x2-Felder-Tafel als Häufigkeiten eines vierklassigen Merkmals aufgefaßt werden. In der Praxis wird dieses Vor-

- 1) Vgl. z.B. FIDLER/KLEINKNECHT (1977, S.1047).
- 2) Die Verwendung von RRT-Daten in Log-linearen Modellen stellt CHEN (1978, 1979) dar.
- 3) Vgl. BOURKE (1975, S.4-6).

gehen jedoch bei mehrklassigen Merkmalen und höheren Dimensionen sehr unübersichtlich und die Formulierung der entsprechenden Fragen sehr kompliziert.

Als Analogie zum Vorgehen bei der direkten Befragung, bei der jedes Merkmal einzeln erfragt wird, ist bei der RRT eine mehrfache Anwendung univariater RRT-Modelle anzusehen, wobei die Randomisierungen unabhängig voneinander sind. ¹⁾ Wir werden im folgenden solche unabhängigen Mehrfach-RRT-Modelle ²⁾ behandeln.

6.2 SCHÄTZUNG MEHRDIMENSIONALER HÄUFIGKEITSVERTEILUNGEN MIT UNABHÄNGIGEN MEHRFACH-MODELLEN

Grundlage der Schätzung der gemeinsamen Verteilung der Untersuchungsmerkmale ist deren Zusammenhang mit der gemeinsamen Verteilung der Antwortvariablen. Um diesen Zusammenhang zu formulieren, führen wir einige Bezeichnungen und Theoreme für diskrete multivariate Modelle ein:

Wir stellen die Verteilung einer Zufallsvariablen X , die m Ausprägungen hat, folgendermaßen dar:

$$(6.1) \quad P_x = \underline{\pi} \cdot \underline{\mu}_x \quad ,$$

wobei $\underline{\pi}$ dem $(m,1)$ -Vektor der Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion entspricht und $\underline{\mu}$ dem $(m,1)$ -Vektor der Punktmaße der Elemente von Ω_x , mit $\Omega_x = \{e_i \mid i=1, \dots, m\}$.

1) TAMHANE (1977) gibt ein Modell mit zwei Antworten an, durch das alle zweidimensionalen Randverteilungen der $k(\geq 2)$ untersuchten Merkmale geschätzt werden können.

2) Vgl. BOURKE (1975, S.7-11).

Sind zwei Zufallsvariable X_1 und X_2 unabhängig, so ergibt sich die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung als Kronecker-Produkt der beiden Vektoren $\underline{\pi}_1$ und $\underline{\pi}_2$:

Lemma 6.1:

X_1 und X_2 seien diskrete Zufallsvariablen mit m_1 und m_2 Ausprägungen und den Verteilungen

$$P_{X_i} = \underline{\pi}_i' \underline{\mu}_{X_i} \quad , \quad i = 1, 2 \quad .$$

Es gilt:

$$(6.2) \quad P_{X_1} \otimes P_{X_2} = (\underline{\pi}_1 \otimes \underline{\pi}_2)' (\underline{\mu}_{X_1} \otimes \underline{\mu}_{X_2}) \quad ,$$

wobei ' \otimes ' als Operation zwischen Maßen das Produktmaß, zwischen Vektoren das Kronecker-Produkt bezeichnet; $\underline{\mu}_{X_1} \otimes \underline{\mu}_{X_2}$ ist der Vektor der Produktmaße der Elemente von

$$\Omega_{X_1} \otimes \Omega_{X_2} \quad :$$

$$(6.3) \quad \underline{\mu}_{X_1} \otimes \underline{\mu}_{X_2} := (\mu_{X_1 i} \otimes \mu_{X_2 j})_{(i-1)m_2+j}$$

Beweis:

$$A_i \in \Omega_{X_i} \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} P_{X_1} \otimes P_{X_2} (A_1 \times A_2) &= P_{X_1} (A_1) \cdot P_{X_2} (A_2) = \\ &= (\underline{\pi}_1' \underline{\mu}_{X_1}) (A_1) (\underline{\pi}_2' \underline{\mu}_{X_2}) (A_2) = \\ &= \sum_{j=1}^{m_1} \pi_{1j} \mu_{X_1 j} (A_1) \pi_2' \underline{\mu}_{X_2} (A_2) = \\ &\quad \text{(Bilinearität des Skalarprodukts):} \\ &= \sum_j (\pi_{1j} \pi_2)' (\mu_{X_1 j} (A_1) \cdot \mu_{X_2} (A_2)) = \\ &= (\underline{\pi}_1 \otimes \underline{\pi}_2)' (\underline{\mu}_{X_1} (A_1) \otimes \underline{\mu}_{X_2} (A_2)) = \\ &= (\underline{\pi}_1 \otimes \underline{\pi}_2)' (\underline{\mu}_{X_1} \otimes \underline{\mu}_{X_2}) (A_1 \times A_2) \quad \triangle \end{aligned}$$

Den (im Sinne einer lexikographischen Ordnung aufgebaute) Vektor der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten der beiden unabhängigen Zufallsvariablen X_1 und X_2 erhalten wir also als Kronecker-Produkt der Wahrscheinlichkeitsvektoren von X_1 und X_2 .

Wir führen nun - auf BOURKE (1976) zurückgreifend - den Begriff der Design-Matrix eines RRT-Modells ein:

Läßt sich die bedingte Verteilung $Q(\underline{x}; \cdot)$ der Antwortvariablen eines RRT-Modells bei festem \underline{x} - wie folgt darstellen:

$$(6.4) \quad Q(\underline{x}; A) := P_Z(T_{\underline{x}}^{-1}(A)) = (\underline{P} \underline{x})' \underline{\mu}_Y(A) \quad , \quad A \in \alpha_Y \quad \underline{x} \in \Omega_{\underline{x}} \quad ,$$

$$\text{mit } |\Omega_{\underline{x}}| = |\Omega_Y| = : m \quad ;$$

so bezeichnet man die quadratische Matrix \underline{P} als Design-Matrix des RRT-Modells. \underline{P} ist eine stochastische Matrix mit

$$(6.5) \quad \sum_i P_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1, \dots, m$$

Für das WARNER-Modell erhalten wir also die Design-Matrix \underline{P}_W : 1)

$$(6.6) \quad \underline{P}_W = \begin{bmatrix} P & 1-P \\ 1-P & P \end{bmatrix} \quad ,$$

für das SIMMONS-I-Modell (bei unabhängigem Zusatzmerkmal):

$$(6.7) \quad \underline{P}_S = \begin{bmatrix} P+(1-P)(1-\psi) & (1-P)(1-\psi) \\ (1-P)\psi & P+(1-P)\psi \end{bmatrix} \quad .$$

Für das BOURKE/DALENIUS-Modell ist die dort angegebene Matrix \underline{P} die Design-Matrix.

1) Hierbei bezeichnet $\underline{x} = (0 \ 1)'$ die Eigenschaft A, $\underline{x} = (1 \ 0)'$ die Eigenschaft \bar{A} bzw. $\underline{y} = (0 \ 1)'$ die Antwort 'ja', $\underline{y} = (1 \ 0)'$ die Antwort 'nein'.

Bei der Erweiterung des SIMMONS-I-Modells auf mehrklassige Merkmale mit ($k > 2$) Ausprägungen hat die Design-Matrix \underline{P}_{SV} folgende Gestalt

$$(6.8) \quad \underline{P}_{SV} = \begin{pmatrix} P+(1-P)\psi_0 & (1-P)\psi_0 & \dots & (1-P)\psi_0 \\ (1-P)\psi_1 & P+(1-P)\psi_1 & \dots & \dots \\ (1-P)\psi_{k-1} & (1-P)\psi_{k-1} & \dots & P+(1-P)\psi_{k-1} \end{pmatrix}$$

Die direkte Befragung hat die Einheitsmatrix als Design-Matrix.

Für die gemeinsame Verteilung der Antwortvariablen bei mehreren Untersuchungsmerkmalen erhält man folgenden Zusammenhang, der von BOURKE ¹⁾ erstmals bewiesen wurde und für den wir hier einen wesentlich kürzeren Beweis geben:

Die Design-Matrix des mehrfachen unabhängigen multivariaten Modells ergibt sich als Kronecker-Produkt der Design-Matrizen der univariaten Modelle:

Lemma 6.2

Gegeben seien zwei diskrete univariate RRT-Modelle mit den Design-Matrizen P_1 und P_2 :

$$T_i : (\Omega_{x_i} \times \Omega_{z_i}) \rightarrow \Omega_{y_i} \quad \text{und} \\ i = 1, 2$$

$$Q_i(\underline{x}_i; \cdot) = (P_i \underline{x}_i)' \underline{\mu}_{y_i}$$

Für das zweifache unabhängig bivariate RRT-Modell mit

$$T := (T_1, T_2) := \prod_{i=1}^2 (\Omega_{x_i} \times \Omega_{z_i}) \rightarrow \prod_{i=1}^2 \Omega_{y_i}$$

gilt:

1) Vgl. BOURKE (1978a, 1979).

$$(6.9) \quad Q(\underline{x}_1, \underline{x}_2; \cdot) = [(\underline{P}_1 \otimes \underline{P}_2)(\underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2)]' [\underline{\mu}_{Y_1} \otimes \underline{\mu}_{Y_2}] \quad .$$

Beweis:

$$A_1 \in \alpha_{Y_i}, \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} Q(\underline{x}_1, \underline{x}_2; A_1 \times A_2) &= P_{(z_1, z_2)}((T_1, T_2)^{-1}(\underline{x}_1, \underline{x}_2) (A_1 \times A_2)) = \\ &= P_{(z_1, z_2)}(T_1 \underline{x}_1 (A_1) \times T_2 \underline{x}_2 (A_2)) = \\ &\quad \text{(Unabhängigkeit von } z_1 \text{ und } z_2) \\ &= P_{z_1}(T_1^{-1} \underline{x}_1 (A_1)) \cdot P_{z_2}(T_2^{-1} \underline{x}_2 (A_2)) = \\ &\quad \text{(Definition der Übergangsverteilung)} \\ &= Q_1(\underline{x}_1; A_1) \cdot Q_2(\underline{x}_2; A_2) = \\ &= Q_1(\underline{x}_1; \cdot) \otimes Q_2(\underline{x}_2; \cdot) (A_1 \times A_2) = \\ &\quad \text{(Lemma 6.1)} \\ &= [(\underline{P}_1 \underline{x}_1) \otimes (\underline{P}_2 \underline{x}_2)]' [\underline{\mu}_{Y_1} \otimes \underline{\mu}_{Y_2}] (A_1 \times A_2) = \\ &\quad \text{(Rechenregeln für das Kronecker-Produkt)} \quad 1) \\ &= [(\underline{P}_1 \otimes \underline{P}_2)(\underline{x}_1 \otimes \underline{x}_2)]' [\underline{\mu}_{Y_1} \otimes \underline{\mu}_{Y_2}] (A_1 \times A_2) \quad \triangle \end{aligned}$$

Für das zweifache WARNER-Modell ²⁾ erhalten wir also z.B. folgende Design-Matrix \underline{P}_{W2} :

1) Vgl. Fußnote 1) S.87.

2) Dieses Modell wird - in anderer Form - von BARKSDALE (1975) behandelt.

$$\underline{P}_{W2} = \begin{pmatrix} P_1 P_2 & P_1 (1-P_2) & (1-P_1) P_2 & (1-P_1) (1-P_2) \\ P_1 (1-P_2) & P_1 P_2 & (1-P_1) (1-P_2) & (1-P_1) P_2 \\ (1-P_1) P_2 & (1-P_1) (1-P_2) & P_1 P_2 & P_1 (1-P_2) \\ (1-P_1) (1-P_2) & (1-P_2) P_2 & P_1 (1-P_2) & P_1 P_2 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von Lemma 6.2, das man leicht durch vollständige Induktion auf k (beliebig) viele Merkmale erweitern kann, lassen sich ganz analog zum univariaten Fall Schätzwerte für die simultanen Häufigkeiten sowie deren Varianzen und Kovarianzen ermitteln. Bezeichnet man den Vektor der simultanen Häufigkeiten der Untersuchungsmerkmale mit $\underline{\pi}$, der Antwortvariablen mit $\underline{\lambda}$, so erhalten wir folgende Ergebnisse:

$$\underline{\lambda}_i = \underline{P}_i \underline{\pi}_i \quad i = 1, \dots, k$$

$$(6.10) \quad \underline{P} = \bigotimes_{i=1}^k \underline{P}_i$$

$$(6.11) \quad \underline{\lambda} = \underline{P} \underline{\pi}$$

Nach der Momentenmethode erhalten wir den Schätzer $\hat{\underline{\pi}}$,

$$(6.12) \quad \hat{\underline{\pi}} = \underline{P}^{-1} \hat{\underline{\lambda}}$$

mit der Varianz- Kovarianz-Matrix $\underline{D}(\hat{\underline{\pi}})$

$$(6.13) \quad \underline{D}(\hat{\underline{\pi}}) = \underline{P}^{-1} \underline{D}(\hat{\underline{\lambda}}) \underline{P}^{-1}$$

Abschließend behandeln wir noch den Spezialfall eines bivariaten Designs, in dem das eine Merkmal durch die RRT (Design-Matrix \underline{P}_1), das andere durch direkte Befragung (Design-Matrix \underline{I}) erhoben wird. Wir erhalten

$$(6.14) \quad \hat{\underline{\pi}} = (\underline{I} \otimes \underline{P}_1)^{-1} \hat{\underline{\lambda}} = (\underline{I} \otimes \underline{P}_1^{-1}) \hat{\underline{\lambda}} \quad \text{bzw.}$$

$$(6.15) \quad \begin{pmatrix} \hat{\pi}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{\pi}_{im_2} \end{pmatrix} = \underline{p}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_{im_2} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, m_1$$

Man schätzt also die bedingten Häufigkeiten in einer Kategorie i des Merkmals, das man direkt erhebt, durch die Anwendung des univariaten RRT-Modells auf die RRT-Antworten, die in die Kategorie i des direkt erhobenen Merkmals fallen.

6.3 DER χ^2 - UNABHÄNGIGKEITSTEST MIT RRT-DATEN

Bei der Analyse von Kontingenztafeln - deren Schätzung aus RRT-Daten im vorausgegangenen Abschnitt behandelt wurde - ist oftmals die Hypothese der Unabhängigkeit der Untersuchungsmerkmale zu prüfen.

Für die Analyse von Kontingenztafeln aus RRT-Daten beweisen wir das Lemma 6.3, daß in einem unabhängigen mehrfachen multivariaten RRT-Modell die Unabhängigkeit der Antwortvariablen gleichbedeutend mit der Unabhängigkeit der Untersuchungsvariablen ist ¹⁾:

Aus der Definition der Design-Matrix erhalten wir die Verteilung der Antwortvariablen Y

$$(6.16) \quad P_Y = (\underline{P} \underline{\pi})' \underline{\mu}_Y \quad .$$

1) Für Spezialfälle findet man recht aufwendige Nachweise bei DRANE (1975), DRANE (1976a, S.283 f.) bzw. DRANE (1976c, S.568-573) und CLICKNER/IGLEWICZ (1976, S.261), CLICKNER/IGLEWICZ (1980, S.80).

Lemma 6.3

Für zwei unabhängige RRT-Modelle mit den Design-Matrizen \underline{P}_1 und \underline{P}_2 gilt für die Untersuchungsvariablen $\underline{X}_1, \underline{X}_2$ und die Antwortvariablen Y_1, Y_2 :

$$Y_1, Y_2 \text{ unabhängig} \iff X_1, X_2 \text{ unabhängig}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} " \Rightarrow " : P_{(x_1, x_2)} &= \underline{\pi}' (\underline{\mu}_{x_1} \otimes \underline{\mu}_{x_2}) = \\ &= (\underline{P}^{-1} \underline{P} \underline{\pi})' (\underline{\mu}_{x_1} \otimes \underline{\mu}_{x_2}) = \\ &\quad \text{(Voraussetzung, Lemma 6.1 und 6.2)} \\ &= [(\underline{P}_1 \otimes \underline{P}_2)^{-1} (\underline{P}_1 \underline{\pi}_1) \otimes (\underline{P}_2 \underline{\pi}_2)]' (\underline{\mu}_{x_1} \otimes \underline{\mu}_{x_2}) = \\ &= [(\underline{P}_1 \otimes \underline{P}_2)^{-1} (\underline{P}_1 \otimes \underline{P}_2) (\underline{\pi}_1 \otimes \underline{\pi}_2)]' (\underline{\mu}_{x_1} \otimes \underline{\mu}_{x_2}) = \\ &= (\underline{\pi}_1 \otimes \underline{\pi}_2)' (\underline{\mu}_{x_1} \otimes \underline{\mu}_{x_2}) = P_{x_1} \otimes P_{x_2} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} " \Leftarrow " : P_{(y_1, y_2)} &= (\underline{P} \underline{\pi})' (\underline{\mu}_{y_1} \otimes \underline{\mu}_{y_2}) = \\ &\quad \text{(Lemma 6.1, 6.2 und Voraussetzung)} \\ &= [(\underline{P}_1 \otimes \underline{P}_2) (\underline{\pi}_1 \otimes \underline{\pi}_2)]' (\underline{\mu}_{y_1} \otimes \underline{\mu}_{y_2}) = \\ &= [(\underline{P}_1 \underline{\pi}_1) \otimes (\underline{P}_2 \underline{\pi}_2)]' (\underline{\mu}_{y_1} \otimes \underline{\mu}_{y_2}) = \\ &\quad \text{(Lemma 6.1)} \\ &= [(\underline{P}_1 \underline{\pi}_1)' \underline{\mu}_{y_1}] \otimes [(\underline{P}_2 \underline{\pi}_2)' \underline{\mu}_{y_2}] = P_{y_1} \otimes P_{y_2} \quad \triangle \end{aligned}$$

Verwendet man beispielsweise als asymptotischen Test auf Unabhängigkeit den bekannten χ^2 -Test, so wendet man bei RRT-Daten aus einem mehrfachen unabhängigen Modell dieses χ^2 -Verfahren

auf die Antwortvariablen an. Denn der Nullhypothese 'Unabhängigkeit der Untersuchungsvariablen' entspricht nach Lemma 6.3 die Nullhypothese 'Unabhängigkeit der Antwortvariablen'. Das geschilderte Test-Verfahren hat das gleiche Signifikanzniveau, die Testfunktion die gleiche Verteilung wie beim Test bei direkter Befragung - immer wahrheitsgemäße Antworten unterstellt.

Die RRT hat lediglich Auswirkungen auf die Gütefunktion des Tests, die wir anhand einer bivariaten Fragestellung untersuchen werden. Zur Formulierung der Gegenhypothese verwenden wir einen Ansatz von PITMAN: ¹⁾

$$(6.17) \quad H_0 : \underline{\pi} = (\underline{\pi}_1 \otimes \underline{\pi}_2)$$

$$(6.18) \quad H_1 : \underline{\pi} = (\underline{\pi}_1^0 \otimes \underline{\pi}_2^0) + \underline{\delta} / \sqrt{n} \quad \text{mit } \underline{\delta} \in \mathbb{R}^{m_1 m_2}, \quad \sum_{i=1}^{m_1 m_2} \delta_i = 0.$$

Die Gegenhypothese liegt also - mit steigendem Stichprobenumfang - zunehmend - nahe an einem festen Punkt der Nullhypothese.

Bei direkter Befragung ist die Testgröße T^d

$$(6.19) \quad T^d = \sum_{i=1}^{m_1 m_2} \frac{(n_i^d - (\underline{n}_1^d \otimes \underline{n}_2^d)_i / n)^2}{(\underline{n}_1^d \otimes \underline{n}_2^d)_i / n}$$

unter der Nullhypothese asymptotisch χ^2 - verteilt, mit $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ Freiheitsgraden.

In (6.19) ist \underline{n}^d der Vektor der beobachteten simultanen Häufigkeiten und $\underline{n}_1^d, \underline{n}_2^d$ die Vektoren der beobachteten Randhäufigkeiten.

Bei Gültigkeit der Gegenhypothese ist T^d asymptotisch nach einer nichtzentralen χ^2 -Verteilung $\chi'^2(f, \gamma^d)$ mit $f = (m_1 - 1)(m_2 - 1)$ Freiheitsgraden und dem Dezentralitätsparameter γ^d

1) Vgl. COCHRAN (1952, S.323), MOTE/ANDERSON (1965, S.98), ASSAKUL/PROCTOR (1967, S.69).

$$\gamma^d = n \sum_i \frac{(\pi_i - (\underline{\pi}_1^O \otimes \underline{\pi}_2^O)_i)^2}{(\underline{\pi}_1^O \otimes \underline{\pi}_2^O)_i} =$$

(6.20)

$$= \sum_i \frac{\delta_i^2}{(\underline{\pi}_1^O \otimes \underline{\pi}_2^O)_i}$$

verteilt. ¹⁾

Die gleichen Überlegungen lassen sich auf einen χ^2 -Test der RRT-Antwortvariablen übertragen. Nach dem Lemma 6.3 entspricht der Nullhypothese (6.17) die Nullhypothese (6.21):

$$(6.21) \quad H_0 : \underline{\lambda} = \underline{\lambda}_1 \otimes \underline{\lambda}_2$$

Die (6.18) entsprechende Gegenhypothese erhalten wir durch Einsetzen:

$$(6.22) \quad H_1 : \underline{\lambda} = \underline{P} \underline{\pi} =$$

$$= \underline{P} (\underline{\pi}_1^O \otimes \underline{\pi}_2^O + \underline{\delta} / \sqrt{n}) =$$

$$= \underline{\lambda}_1^O \otimes \underline{\lambda}_2^O + \underline{P} \underline{\delta} / \sqrt{n} \text{ mit } \underline{\lambda}_i^O = \underline{P}_i \underline{\pi}_i^O \quad i = 1, 2 .$$

Die Testgröße T^r , in die die Häufigkeiten der Antwortvariablen \underline{n}^r und $\underline{n}_1^r, \underline{n}_2^r$ eingehen,

$$(6.23) \quad T^r = \sum_{i=1}^{m_1 m_2} \frac{[n_i^r - (\underline{n}_1^r \otimes \underline{n}_2^r)_i / n]^2}{(\underline{n}_1^r \otimes \underline{n}_2^r)_i / n} ,$$

ist also bei Unabhängigkeit der Untersuchungsmerkmale asymptotisch χ^2 -verteilt mit $(m_1-1)(m_2-1)$ Freiheitsgraden.

Bei Gültigkeit der Gegenhypothese ist T^r asymptotisch nach einer

1) Vgl. COCHRAN (1952, S.324).

nicht-zentralen χ^2 -Verteilung $\chi'^2(f, \gamma^r)$ mit $f = (m_1-1)(m_2-1)$ und dem Dezentralitätsparameter

$$\begin{aligned}
 \gamma^r &= n \sum_i \frac{(\lambda_i - (\lambda_1^0 \otimes \lambda_2^0)_i)^2}{(\lambda_1^0 \otimes \lambda_2^0)_i} = \\
 (6.24) \quad &= \sum_i \frac{(\sum_j P_{ij} \delta_j)^2}{(\lambda_1^0 \otimes \lambda_2^0)_i} = \\
 &= \sum_i \frac{(\sum_j P_{ij} \delta_j)^2}{\sum_j P_{ij} (\pi_1 \otimes \pi_2)_j}
 \end{aligned}$$

verteilt.

Vergleicht man γ^d und γ^r , so läßt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zeigen, daß γ^d mindestens genau so groß wie γ^r ist:

$$(6.25) \quad \gamma^r \leq \gamma^d$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \gamma^r &= \sum_i \frac{(\sum_j P_{ij} \delta_j)^2}{\sum_j P_{ij} (\pi_1 \otimes \pi_2)_j} = \sum_i \frac{\left[\frac{\sum_j \sqrt{P_{ij} (\pi_1 \otimes \pi_2)_j} \cdot \frac{\sqrt{P_{ij}} \delta_j}{\sqrt{(\pi_1 \otimes \pi_2)_j}} \right]^2}{\sum_j P_{ij} (\pi_1 \otimes \pi_2)_j} \leq \\
 &\leq \sum_i \frac{\sum_j P_{ij} (\pi_1 \otimes \pi_2)_j \cdot \sum_j \frac{\delta_j^2}{P_{ij} (\pi_1 \otimes \pi_2)_j}}{\sum_j P_{ij} (\pi_1 \otimes \pi_2)_j} \\
 &\quad \text{(Formel (6.5))} \\
 &\leq \sum_j \frac{\delta_j^2}{(\pi_1 \otimes \pi_2)_j} = \\
 &\leq \gamma^d
 \end{aligned}$$

Da die Verteilungsfunktion der nichtzentralen χ^2 -Verteilung eine mit c.p. steigendem γ abnehmende Funktion ist, ¹⁾ ist die Macht des χ^2 -Unabhängigkeitstests bei Anwendung der RRT geringer als bei der direkten Befragung - wahrheitsgemäße Antworten unterstellt. Das Verhältnis γ^d/γ^r läßt sich interpretieren als das Verhältnis der Stichprobenumfänge n^r/n^d , die zur gleichen Macht des Tests führen: ²⁾

Denn mit

$$\frac{n^r}{n^d} = \frac{\gamma^d(n^d)}{\gamma^r(n^d)}$$

gilt nach Formel (6.24)

$$\gamma^r(n^r) = \frac{n^r}{n^d} \gamma^r(n^d) = \gamma^d(n^d) \quad .$$

In den Tabellen 6.1 und 6.2 sind für einen Spezialfall des symmetrischen Abweichens der Gegenhypothese von der Nullhypothese für das WARNER- und das SIMMONS-I-Modell Werte der Gütefunktion im Vergleich zur direkten Befragung wiedergegeben. ³⁾ Man erkennt deutlich den Rückgang der Macht des Tests bei einem RRT-Modell. Wie zu erwarten, verbessern steigende Werte der Auswahlwahrscheinlichkeit der sensitiven Frage - damit ein sinkender Protektionsgrad - die Macht des Tests. Beim WARNER-Modell sinkt die Macht mit steigenden Werten π_1^0 und π_1^1 , während sie in diesem Fall beim SIMMONS-I-Modell steigt.

Um einen - unter Effizienzgesichtspunkten - sinnvollen Einsatz der RRT zu gewährleisten, muß also der Machtverlust durch misclassification bei der direkten Befragung größer als der Verlust durch die Anwendung des RRT-Modells sein.

1) Vgl. JOHNSON/KOTZ (1970, S.135).

2) Vgl. die Analogie in ASSAKUL/PROCTOR (1967, S.70).

3) Bei den Berechnungen wurde das Tabellenwerk von HARTER/OWEN (1973, S.13-78) verwandt.

Tabelle 6.1: Macht des $2 \times 2 - \chi^2$ -Unabhängigkeitstests ($\alpha = 1 \%$) für die direkte Befragung, das WARNER-Modell ¹⁾ und das SIMMONS-I-Modell ²⁾

$$H_1(n) : \pi_{ij} = \pi_{i.}^0 \cdot \pi_{.j} + \delta_{ij} / \sqrt{n} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ -1 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0, 1$$

$\pi_{1.}^0$	$\pi_{.1}^0$	Direkte Befragung	Zweifaches WARNER-Modell $P_1 = P_2 = P$		Zweifaches SIMMONS-I-Modell $\psi = 1 ; P_1 = P_2 = P$	
			$P = 0,7$	$P = 0,9$	$P = 0,5$	$P = 0,7$
0,1	0,1	1,00	0,03	0,96	0,06	0,32
	0,2	1,00	0,03	0,89	0,06	0,30
	0,3	1,00	0,03	0,83	0,06	0,29
	0,4	1,00	0,03	0,79	0,07	0,30
	0,5	1,00	0,03	0,77	0,08	0,33
0,2	0,2	1,00	0,03	0,77	0,06	0,28
	0,3	1,00	0,03	0,68	0,07	0,27
	0,4	0,99	0,03	0,64	0,07	0,28
	0,5	0,99	0,03	0,62	0,08	0,31
0,3	0,3	0,99	0,03	0,61	0,07	0,27
	0,4	0,97	0,03	0,55	0,08	0,28
	0,5	0,96	0,03	0,54	0,09	0,30
0,4	0,4	0,94	0,03	0,52	0,08	0,29
	0,5	0,93	0,03	0,51	0,09	0,31
0,5	0,5	0,92	0,03	0,49	0,11	0,34

1) In diesem Beispiel gilt für das SIMMONS-I-Modell

$$Y^r = (2P-4)^4 [(\lambda_{0.} \lambda_{.0})^{-1} + (\lambda_{0.} \lambda_{.1})^{-1} + (\lambda_{1.} \lambda_{.0})^{-1} + (\lambda_{1.} \lambda_{.1})^{-1}]$$

2) In diesem Beispiel gilt für das SIMMONS-I-Modell

$$Y^r = P^4 [(\lambda_{0.} \lambda_{.1})^{-1} + (\lambda_{0.} \lambda_{.1})^{-1} + (\lambda_{1.} \lambda_{.0})^{-1} + (\lambda_{1.} \lambda_{.1})^{-1}]$$

Tabelle 6.2: Macht des $2 \times 2 - \chi^2$ -Unabhängigkeitstests ($\alpha = 5 \%$) für die direkte Befragung, das WARNER-Modell ¹⁾ und das SIMMONS-I-Modell ²⁾

$$H_1(n) : \pi_{ij} = \pi_{i \cdot}^0 \cdot \pi_{\cdot j}^0 + \delta_{ij} / \sqrt{n} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} +1 & i=j \\ -1 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 0, 1$$

π_{10}^0	π_{11}^0	Direkte Befragung	Zweifaches WARNER-Modell $P = P_1 = P_2$		Zweifaches SIMMONS-I-Modell, $\psi = 1 ; P = P_1 = P_2$	
			$P = 0,7$	$P = 0,9$	$P = 0,5$	$P = 0,7$
0,1	0,1	1,00	0,11	0,99	0,17	0,56
	0,2	1,00	0,11	0,97	0,18	0,53
	0,3	1,00	0,11	0,94	0,18	0,53
	0,4	1,00	0,10	0,92	0,19	0,54
	0,5	1,00	0,10	0,91	0,21	0,57
0,2	0,2	1,00	0,10	0,91	0,18	0,51
	0,3	1,00	0,10	0,87	0,18	0,51
	0,4	1,00	0,10	0,84	0,20	0,52
	0,5	1,00	0,10	0,83	0,22	0,54
0,3	0,3	1,00	0,10	0,81	0,20	0,50
	0,4	0,99	0,10	0,78	0,21	0,51
	0,5	0,99	0,10	0,77	0,22	0,54
0,4	0,4	0,99	0,10	0,74	0,21	0,52
	0,5	0,98	0,10	0,74	0,24	0,55
0,5	0,5	0,98	0,10	0,73	0,27	0,58

1) Siehe Fußnote ¹⁾, S. 202.

2) Siehe Fußnote ²⁾, S. 202.

6.4 MULTIVARIATE ANALYSE QUANTITATIVER MERKMALE MIT RRT-DATEN

Die multivariate Analyse von quantitativen Merkmalen beruht in den meisten Fällen auf der Auswertung von Varianz-Kovarianz- bzw. Korrelationsmatrizen der untersuchten Merkmale. Aus diesem Grund wollen wir uns auf die Schätzung von Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten (nach Pearson-Bravais) aufgrund von RRT-Daten beschränken. ¹⁾

Es sei jedoch erwähnt, daß sich etwa auch Regressionsanalysen mit Hilfe von RRT-Daten durchführen lassen: ²⁾ Ist die RRT-Variablen Regressand, so besteht die Störvariable einer Gleichung aus zwei additiven Bestandteilen: einem, der wie üblich im Modell formuliert ist und dem anderen, der auf die Randomisierung zurückzuführen ist. Da die Varianz des zweiten Bestandteils i.a. von einem Beobachtungspunkt zum anderen variieren kann, liegt hier i.a. ein lineares Modell mit heteroskedastischen Störvariablen vor. Treten die RRT-Variablen als Regressoren auf, so sind die in der Ökonometrie gebräuchlichen Schätzverfahren bei Fehlern in den Variablen anzuwenden.

Für das Unrelated-Question-Modell (in der SIMMONS-I-Version), für das additive und das multiplikative Modell geben wir nun die Zusammenhänge zwischen der Kovarianz der (beobachtbaren) Antwortvariablen und der Kovarianz der (nicht beobachtbaren) Untersuchungsvariablen an, die eine Schätzung der Kovarianz bzw. Korrelationskoeffizienten der Untersuchungsvariablen ermöglichen. Das DALENIUS/VITALE-Modell eignet sich nicht für multivariate Fragestellungen, da es lediglich auf die Schätzung von Mittelwerten ausgerichtet ist.

1) SEN (1974, S.1000) gibt eine Schätzfunktion für Kendalls τ an, einen Korrelationskoeffizienten für mindestens ordinal skalierte Merkmale. Diese Schätzfunktion wird mit Hilfe spezieller Sätze abgeleitet, die die Theorie der U-Statistik auf die RRT erweitern. Vgl. auch SEN (1976).

2) Vgl. ERIKSSON (1976b).

Beim Unrelated-Question-Modell gilt für die Antwortvariablen Y_1, Y_2

$$(6.26) \quad Y_i = Z_i X_i + (1-Z_i) U_i \quad i = 1, 2$$

wobei Z_1, Z_2, U_1 und U_2 untereinander und von X_1 und X_2 unabhängig sind.

Für die Kovarianz der Antwortvariablen erhalten wir ¹⁾

$$\begin{aligned} (6.27) \quad \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(Z_1 X_1, Z_2 X_2) + \text{Cov}(Z_1 X_1, (1-Z_2) U_2) + \\ &\quad + \text{Cov}((1-Z_1) U_1, Z_2 X_2) + \text{Cov}((1-Z_1) U_1, (1-Z_2) U_2) \\ &= \text{Cov}(Z_1 X_1, Z_2 X_2) = \\ &= P_1 P_2 \text{Cov}(X_1, X_2) \quad ; \end{aligned}$$

d.h., die Kovarianz der Antwortvariablen unterscheidet sich nur um den Faktor $P_1 P_2 = E Z_1 E Z_2$ von der der Untersuchungsvariablen.

Für den Korrelationskoeffizienten ρ gilt damit:

$$(6.28) \quad \rho(X_1, X_2) = \frac{\rho(Y_1, Y_2)}{P_1 P_2} \sqrt{\frac{\text{Var } Y_1 \cdot \text{Var } Y_2}{\text{Var } X_1 \text{ Var } X_2}}$$

Die Faktoren auf der rechten Seite von (6.28) lassen sich aus der Stichprobe schätzen, wodurch man eine Schätzung von $\rho(X_1, X_2)$ erhält. Hierbei ist - nach Formel (5.4)

$$(6.29) \quad \text{Var } X_i = \frac{1}{P_i} [\text{Var } Y_i - (1-P_i) \text{Var } U_i - P_i (1-P_i) (E X_i - E U_i)^2] \quad i = 1, 2 .$$

Beim additiven Modell geht man entsprechend vor. Für die Antwortvariablen gilt:

$$(6.30) \quad Y_i = X_i + Z_i \quad i = 1, 2$$

1) Vgl. KRAEMER (1980, S.307).

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(X_1, X_2) + \underbrace{\text{Cov}(X_1, Z_2)}_{0} + \\
 (6.31) \quad &+ \underbrace{\text{Cov}(Z_1, X_2)}_{0} + \underbrace{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}_{0} \\
 &= \text{Cov}(X_1, X_2)
 \end{aligned}$$

$$(6.32) \quad \rho(X_1, X_2) = \rho(Y_1, Y_2) \sqrt{\frac{\text{Var } Y_1 \cdot \text{Var } Y_2}{\text{Var } X_1 \cdot \text{Var } X_2}} \quad ;$$

die Kovarianz der Untersuchung - und der Antwortvariablen stimmen hier also überein.

Für das multiplikative Modell erhalten wir

$$(6.33) \quad Y_i = X_i Z_i \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned}
 (6.34) \quad \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= E(Z_1 Z_2 X_1 X_2) - E(X_1 Z_1) E(Z_1 X_2) \\
 &= \mu_{Z_1} \mu_{Z_2} \text{Cov}(X_1, X_2)
 \end{aligned}$$

$$(6.35) \quad \rho(X_1, X_2) = \frac{\rho(Y_1, Y_2)}{\mu_{Z_1} \mu_{Z_2}} \sqrt{\frac{\text{Var } Y_1 \cdot \text{Var } Y_2}{\text{Var } X_1 \cdot \text{Var } X_2}}$$

mit

$$(6.36) \quad \text{Var } X_i = \frac{\text{Var } Y_i - \mu_{xi}^2 \text{Var } Z_i}{\mu_{Zi}^2 + \text{Var } Z_i} \quad i = 1, 2 \quad ;$$

Bedingung für die Ermittlung der Kovarianz bzw. des Korrelationskoeffizienten der Untersuchungsvariablen ist hier - wie bei der Schätzung des Mittelwerts - , daß keine der Randomisierungsvariablen den Erwartungswert Null hat.

Eine Betrachtung der Formeln 6.27/8, 6.31/2 und 6.34/5 für die Kovarianzen bzw. die Korrelationskoeffizienten zeigt eine Analogie zu den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts für

qualitative Merkmale.

Entspricht dort der Unabhängigkeit der Untersuchungsvariablen die Unabhängigkeit der Antwortvariablen, so gilt dies hier bei quantitativen Variablen für die Unkorreliertheit. Ein Test auf Unkorreliertheit der Untersuchungsvariablen ($H_0: \rho(X_1, X_2) = 0$), kann somit als Test auf Unkorreliertheit der Antwortvariablen ($H_0: \rho(Y_1, Y_2) = 0$) durchgeführt werden.

Die Ergebnisse des 6. Kapitels haben also gezeigt, daß die RRT nicht nur auf univariate Fragestellungen beschränkt ist, sondern auch im Rahmen der multivariaten Analyse anwendbar ist, mit deren Hilfe Abhängigkeiten und Interdependenzen von Variablen untersucht werden können.

7. ANWENDUNGEN DER RRT

Die vorausgegangenen Kapitel dieser Arbeit beschäftigten sich - von Ausnahmen im Anfangskapitel abgesehen - mit Fragen des Modell-Designs, der Schätzung und des Effizienzvergleichs bei der RRT, wie dies dem statistisch-methodischen Charakter der Arbeit entspricht. Neben der Voraussetzung und Notwendigkeit solcher methodischer Überlegungen für die praktische Anwendung von RRT-Methoden sind jedoch gerade für die Praxis Erfahrungen, die bei der Anwendung verschiedenster RRT-Modelle gesammelt wurden, von großer Bedeutung.

Aus methodischer Sicht interessieren hier insbesondere Studien, in denen einmal die Anwendbarkeit der RRT überhaupt untersucht wird, und andere, in denen die RRT mit konkurrierenden Befragungsverfahren verglichen wird.

Die erste Kategorie solcher Vergleichsstudien könnte man als Validierungsstudien bezeichnen; in ihnen werden die Ergebnisse der RRT anhand verlässlicher Daten überprüft. Bei den Vergleichsstudien i.e.S. werden gleiche Tatbestände mit verschiedenen Methoden erhoben; für eine sinnvolle Auswertung sind plausible Annahmen über das Antwortverhalten zu treffen, da die 'wahren' Werte unbekannt sind. Bei sensitiven Merkmalen ist eine Unterfassung zu erwarten, so daß die Methode am besten erscheint, die die höchsten Werte erzielt.

Zu den Anwendungen i.e.S. sind solche Studien zu zählen, in denen die RRT als Erhebungsinstrument zur Informationsgewinnung über die Häufigkeitsverteilung gewisser Merkmale eingesetzt wird.

Betrachtet man die Übersicht 7.1, die die wichtigsten in der Literatur dokumentierten Vergleichsstudien enthält, und die Übersicht 7.2 der Anwendungsstudien i.e.S., so fällt auf, daß als RRT fast ausschließlich ein Unrelated-Question-Modell, allerdings

in den unterschiedlichsten Versionen, angewandt wurde. Dies reflektiert die Flexibilität und Effizienz, die wir in den theoretischen Teilen der Arbeit angeführt haben.

Desgleichen sind gewisse Schwerpunkte bei den untersuchten Merkmalen auszumachen. Als Bereiche sind zu nennen: Fertilität (einschließlich Schwangerschaftsabbruch, uneheliche Geburten), Sexualverhalten, Drogenkonsum und kriminelle Handlungen.

Bei der Darstellung der - aus methodischer Sicht - interessanten Studien werden wir nach dem Schwerpunkt des Untersuchungszieles zwischen Vergleichs- und Anwendungs-Studien (i.e.S.) unterscheiden und - soweit möglich - einzelne Merkmalsbereiche gesondert behandeln.

Übersicht 7.1: Vergleichsstudien zur RRT

Autor(en) (Jahr der Publikation)	Merkmalsbereiche	angewandtes RRT-Modell	verglichene Methoden
HORVITZ/SHAH/SIMMONS (1967)	Uneheliche Geburten (alternatives Merkmal)	SIMMONS-II-Modell	Vergleich mit bekannten wahren Werten
GERSTEL/MOORE/ FOLSOM/KING (1970)	Trunkenheit am Steuer	Unrelated-Question- Modell (vorgegebene Antworten)	Interview
BORUCH (1972)	Drogenkonsum	Unrelated-Q.-M., Contamination-Modell	Interview
I-CHENG/CHOW/RIDER (1972) LIU/CHEN/CHOW (1976) LIU/CHOW (1976a) RIDER/HARPER/CHOW/ I-CHENG (1976) CHOW/GRUHN/CHANG (1979)	Schwangerschafts- abbruch	Unrelated-Question-M. Multiple-Trial-Versio- nen des WARNER-Modells	Interview, Validierung anhand von Zusatzin- formation
BROWN/HARDING (1973)	Drogenkonsum	SIMMONS-II-Modell	anonymer Fragebogen
FOLSOM (1974)	Trunkenheit am Steuer	Unrelated-Question-M. (vorgegebene Antworten)	Interview, Validierung anhand von Zusatzinform.
KRÓTKI/FOX (1974)	Fertilität, Schwanger- schaftsabbruch	SIMMONS-I-Modell	Interview, anonymer Fragebogen
LOCANDER/SUDMAN/ BRADBURN (1974)	Wahlverhalten, Trunken- heit am Steuer, Bankrott	SIMMONS-I-Modell	Interview, telefonische Befragung, Fragebogen
SMITH/FEDERER/ RAGHAVARAO (1974)	Drogenkonsum, Einkom- men, Sexualverhalten	Unrelated-Question- M.- (vorgegeb. Antw.)	Block-Total-Response- Procedure, Randomized- Block-Total-Response- Procedure

GOODSTADT/GRUSON GOODSTADT/COOK/ GRUSON	(1975) (1978)	Drogenkonsum (quantitatives Merkmal)	SIMMONS-II-Modell	Interview
WISEMAN/MORIARTY/ SCHAEFER	(1975)	Rassenvorurteile, politische und mora- lische Vorstellungen	Unrelated-Question-M. (vorgegeb. Antw.)	anonymer Fragebogen, Interview
BARTH/SANDLER	(1976)	Alkoholkonsum	SIMMONS-I-Modell	anonymer Fragebogen
ZDEP/RHODES	(1976)	Kindesmißhandlung	FOLSOM-Modell	Interview, Fragebogen
BERMAN/McCOMBS/ BORUCH	(1977)	Sexualverhalten, Kri- minalität, Drogen- konsum	Contamination- Modell	anonymer und identifi- zierter Fragebogen
FIEDLER/KLEINKNECHT	(1977)	Sexualverhalten u.a.	Unrelated-Question-M. (vorgegeb. Antw.)	Fragebogen
LAMB/STEM	(1978)	Examensmißerfolg (qual. u. quantitat. Merkmal)	SIMMONS-II-Modell	Interview, Validierung durch Zusatzinformationen
ROSENBLATT/KELLY	(1978)	Täuschungsversuche bei Examina	SIMMONS-I-Modell	Interview
BEGIN/BOIVIN/ BELLEROSE	(1979)	Sexualverhalten etc.	Unrelated-Question- Modell (vorgegeb.A.)	Fragebogen
ZDEP/RHODES/ SCHWARZ/KILKENNY	(1979)	Drogenkonsum	FOLSOM-Modell	direkte Befragung

Übersicht 7.2: Anwendungen (i.e.S.) der RRT

Autor(en) Jahr der Publikation	Merkmalsbereich	angewandte RRT
ABUL-ELA/GREENBERG/ HORVITZ (1967)	uneheliche Geburt, Schwangerschaftsabbruch	Erweiterung des WARNER-Modells
GREENBERG/ABUL-ELA/SIMMONS/ HORVITZ (1969a) ABERNATHY/GREENBERG/HORVITZ (1970) GREENBERG/ABERNATHY/HORVITZ (1970)	Schwangerschaftsabbruch, Ver- wendung von Kontrazeptiva, psychische Probleme	Unrelated-Question-Modell (Ein- und Zweistichproben- version)
GREENBERG/KÜBLER/ ABERNATHY/HORVITZ (1971)	Einkommen, Schwangerschafts- abbruch	SIMMONS-II-Modell
IIT (1971)	Wetten von Jugendlichen	WARNER-Modell
SMITH/SOSNOWSKI (1972)	Beurteilung von Lehrkräften	WARNER-Modell
FOLSOM/GREENBERG/ HORVITZ/ABERNATHY (1973)	Trunkenheit am Steuer bei Unfällen	FOLSOM-Modell
DAWES (1974)	Sexualverhalten	Unrelated-Question-Modell (vorgegebene Antworten)
REINMUTH/GEURTS (1975) GEURTS/ANDRUS/REINMUTH (1975)	Ladendiebstahl	SIMMONS-II-Modell
HOCHBERG et al. (1976)	Benutzung von Sicherheits- gurten	Unrelated-Question-Modell (vorgegebene Antworten) zweistufiges Modell
MADIGAN/ABERNATHY/ HERRIN/TAN (1976)	Bewußte Verheimlichung von Sterbefällen auf den Philippinen	SIMMONS-I-Modell
SHIMIZU/BONHAM (1976,1978)	Schwangerschaftsabbruch	FOLSOM-Modell
KIM/FLUECK (1978b)	Inanspruchnahme von bestimmten Sozialleistungen	WARNER-Modell

7.1 VERGLEICHSSSTUDIEN

7.1.1 Vergleichsstudien mit Schwerpunkt im Bereich Fertilität, Schwangerschaftsabbruch, uneheliche Geburten etc.

Über eine sehr frühe Vergleichs-/Validierungsstudie zur RRT aus dem Jahre 1965 wird von HORVITZ et al. (1967) berichtet. In North-Carolina/USA wurden 148 Haushalte befragt ¹⁾, in denen im August oder September 1965 ein Kind geboren worden war, darunter in 28 Haushalten (18,9 %) von einer unverheirateten Mutter - wie den Geburtenregistern zu entnehmen war. Verwendet wurde das SIMMONS-II-Modell, wobei zur Randomisierung ein Kartenspiel mit insgesamt 50 Karten verwendet wurde ($P_1 = 0,7$, $P_2 = 0,3$). Die sensitive Frage betraf die Geburt eines unehelichen Kindes; in der nicht sensitiven Zusatzfrage wurde gefragt, ob die Interviewte in North-Carolina geboren sei. Die Ergebnisse sind in Übersicht 7.3 zusammengestellt.

Übersicht 7.3: Ergebnisse der Validierungsstudie von HORVITZ et al. (1967). Anteil unehelicher Geburten in North-Carolina bei 148 befragten Haushalten.

	Alle Haushalte	Weißer Haushalte	Nicht weiße Haushalte
RRT-Schätzwert	0.235	0.074	0.423
Wahrer Wert	0.189	0.077	0.454

Quelle: HORVITZ et al. (1967), S.67

Der RRT-Schätzer für alle Haushalte lag also recht nahe am wahren Wert; für die Untergruppen der weißen bzw. nicht-weißen Haushalte ergaben sich noch bessere Ergebnisse.

1) Vgl. HORVITZ et al. (1967, S.66f.).

Eine zweite - recht ungünstig angelegte - Stichprobe ¹⁾ mit einem Two-Trial-Unrelated-Question-Modell zeigt jedoch sehr viel schlechtere Ergebnisse; die Anteile wurden stark überschätzt, wobei die wahren Werte jedoch sehr klein waren (2 o/oo - 3 o/o).

Die Autoren vermuten die Ursache darin, daß - neben den bekannten Schwierigkeiten der Schätzung sehr kleiner Anteile - die realisierten Werte von P nicht mit den theoretischen übereinstimmen und zudem seitens der Befragten einige Mißverständnisse aufgetreten sein könnten. GOULD et al. (1969) analysieren diese Ergebnisse ausführlich anhand eines umfangreichen Fehlermodells.

Insgesamt sind die Ergebnisse von HORVITZ et al. (1967) also etwas kritischer zu betrachten, als dies gelegentlich geschieht ²⁾.

In Anlehnung an die Anwendungsstudie von GREENBERG et al. (1970) ³⁾ führten KRÓTKI/FOX ⁴⁾ eine Vergleichsstudie an der University of Alberta durch. 1045 Frauen im Alter zwischen 18 und 54 Jahren wurden in Edmonton/Canada entweder in einer persönlichen Interview, mit einem anonymen Fragebogen, der mit der Post zurückzusenden war, oder mit der RRT befragt. Die Fragen betrafen Schwangerschaftsabbruch, Geburt eines unehelichen Kindes, vorehelichen Geschlechtsverkehr und die Verwendung von Kontrazeptiva. Als RRT wurde das SIMMONS-I-Modell ($P = 0,7$) verwendet. Die Ergebnisse sind in der Übersicht 7.4 zusammengefaßt.

Die RRT erzielte i.a. höhere Schätzwerte als die direkten Methoden; die Unterschiede konnten jedoch wegen der großen Streubreiche nicht statistisch gesichert werden. Ein Vergleich mit den amtlichen Angaben über das Ausmaß von Schwangerschaftsabbrüchen zeigt, daß die Zahlen aus den direkten Befragungen erheblich

1) Vgl. HORVITZ et al. (1967, S.67-72).

2) Vgl. GREENBERG et al. (1969a, S.537f.) und HORVITZ et al. (1976, S.191).

3) Vgl. 7.2.1.

4) KRÓTKI/FOX (1974).

Übersicht 7.4: Ergebnisse der Vergleichsstudie von KRÓTKI/FOX (1974). Vergleich der 95 %-Konfidenzintervalle für Anteile aus verschiedenen Befragungsmethoden.

Frage	RRT	Fragebogen	Interview
Schwangerschaftsabbruch i.d. letzten 12 Monaten	0,032 (±0,032)	0,008 (±0,001)	0,003 (±0,003)
Schwangerschaftsabbruch im Laufe des bisherigen Lebens	0,090 (±0,068)	0,038 (±0,023)	0,015 (±0,013)
unverheiratet			
- , Geschlechtsverkehr	0,623 (±0,076)	0,605 (±0,059)	
- , Schwangerschaft	0,190 (±0,055)	0,213 (±0,049)	
- , Verwendung von Kontrazeptica	0,326 (±0,067)	0,281 (±0,054)	
- , Geburt	0,078 (±0,063)	0,075 (±0,032)	
- , Schwangerschaftsabbruch	0,021 (±0,030)	0,034 (±0,022)	

Quelle: KRÓTKI/FOX (1974, S.370).

niedriger liegen (etwa um 24 % beim Fragebogen und um 72 % beim Interview), während sich bei der RRT ein Schätzwert ergibt, der etwa doppelt so groß wie die offizielle Angabe ist.¹⁾ Auf Fragen nach der Einstellung (ihrer Bekannten) zur RRT antworteten 68 %, sie würden auf eine direkte (!) Frage wahrheitsgemäß antworten, 63 % sahen keinen Trick in der RRT und nur 58 % empfanden die Vertraulichkeit durch die RRT geschützt. Die Zweckmäßigkeit der RRT wurde darüberhinaus durch die Beobachtung infragegestellt, daß nur wenige Befragte die beantwortete Frage nicht (!) ankreuzten, also den Sinn der RRT entweder nicht erkannten oder nicht anerkennen wollten.

In den Jahren 1970-1973 wurden in Taiwan Befragungen durchgeführt,²⁾ die eine dreifache Zielsetzung hatten:

- Test der Anwendbarkeit der RRT in einem Land mit einer relativ hohen Analphabetenrate,
- Vergleich der RRT mit der herkömmlichen direkten Befragung,
- Gewinnung von Informationen über das Ausmaß des Schwangerschaftsabbruchs.

Die RRT wurde in zwei Stichproben angewandt.

In der ersten Stichprobe³⁾ wurde ein Unrelated-Question-Modell benutzt.

Die sensitive und die Zusatzfrage lauteten:

- 'Have you ever had an induced abortion in your lifetime?'
- 'Were you born in a year of horse?'

Zur Randomisierung wurden 35 schwarze und 15 weiße Go-Steine verwandt ($P = 0,7$). ψ wurde durch eine entsprechende Interviewfrage aus der Stichprobe geschätzt. Insofern sind die angegebenen Varianzen, die nach der Formel (3.56) berechnet wurden,⁴⁾ nicht

- 1) Vgl. KRÓTKI/DANIEL (1975, S.69).
- 2) Vgl. I-CHEN et al. (1972), RIDER et al. (1976), LIU/CHOW (1976a) und LIU et al. (1976).
- 3) Vgl. I-CHENG et al. (1972), RIDER et al. (1976).
- 4) Vgl. RIDER et al. (1976, S.45).

korrekt. Der Anteil der Befragten, die sich weigerten, an der RRT-Befragung teilzunehmen, war mit 32,2 % recht groß. Dies hing eng mit dem Bildungsstand der Befragten zusammen; so nahm die Kooperationsrate von 51,3 % (keinerlei Ausbildung) bis auf 90 % (high school und mehr) zu.

In der zweiten Stichprobe ¹⁾ wurde eine Multiple-Trial-Version des WARNER-Modells angewandt: die Binomialversion mit $m = 3$ und $P = 0,3$. Zur Randomisierung wurde die Hopkins-I-Urne (vgl. Abb.3.2) verwandt.

Die Ergebnisse der beiden Stichproben sind in der Übersicht 7.5 zusammengestellt und den Ergebnissen direkter Befragungen gegenübergestellt. ²⁾

Die RRT-Ergebnisse liegen deutlich über denen der direkten Befragungen.

Bei einer zusätzlichen Validierungsstichprobe mit 48 Befragten, von denen man wußte, daß sie bereits einen Schwangerschaftsabbruch hatten vornehmen lassen, und mit einer gleich großen Kontrollgruppe, ³⁾ ergab sich für die erstere ein Schätzwert von 93,5 %, ⁴⁾ für die letztere von 19,8 %. 'This suggests that most of the abortion cases were willing to give truthfull response in the Multiple Trial Model'. ⁵⁾

1) Vgl. LIU/CHOW (1976a) und LIU et al. (1976).

2) Die Ergebnisse von LIU/CHOW (1976a) und LIU et al. (1976) stimmen teilweise nicht überein, obwohl sie über die gleiche Studie berichten.

3) Die Interviewer wußten nicht, zu welcher Gruppe die Befragten gehörten.

4) Das 95 %-Konfidenzintervall des Momentenschätzers überdeckt 100 %. Bei der Berechnung der Standardabweichung ist jedoch lediglich die Antwortvarianz zu berücksichtigen; vgl. hierzu im Gegensatz LIU/CHOW (1976a, S.615).

5) LIU/CHOW (1976a, S.615).

Übersicht 7.5: Ergebnisse der TAIWAN-Studien
nach LIU/CHOW (1976a)

Befragungsmethode	Kreis der Befragten	Jahr der Stichprobe/Umfang	Anteil der Schwangerschaftsabbrüche (%)	Standardfehler (%)
<u>RRT</u>				
1. Unrelated Question Modell	1 County verh. Frauen 15 - 49 J.	1971/ n = 692	28,2	(4,69)
2. 3-Trial-WARNER-Modell	2 Townships verh. Frauen 20 - 44 J.	1973/ n = 300	30,3	(4,53)
<u>Direkte Befragung</u>				
1. Island-wide KAP III ^{a)}	Taiwan verh. Frauen 15 - 44 J.	1970/ n = 2558	13,8	(0,68)
2. Island-wide KAP IV ^{a)}	Taiwan verh. Frauen 15 - 44 J.	1973/ n = 5588	19,5	(0,53)
3. Taoyunan Abortion Study KAP ^{a)}	1 County verh. Frauen 15 - 49 J.	1971/ n = 1102	12,7	(1,00)

a) KAP : Knowledge, Attitude and Practice-Survey
(bez. Sexualverhalten)

Quelle: LIU/CHOW (1976a, S.615).

Im Anschluß an die Untersuchungen in Taiwan wurde ein ähnliches Experiment in einem ländlichen Gebiet Äthiopiens durchgeführt. ¹⁾ Verwandt wurde die hypergeometrische Version des Multiple-Trial-WARNER-Modells ($M = 50$, $K = 35$, $m = 5$) mit der Hopkins-II-Urne. Die Beteiligungsrate lag mit 98,8 % bedeutend höher als in Taiwan. Im übrigen wurden die recht positiven Erfahrungen aus der Taiwan-Studie auch in diesem noch weniger entwickelten Land bestätigt.

7.1.2 Vergleichsstudien mit Schwerpunkt im Bereich Alkohol- und Drogenkonsum

Neben einer kleinen, nicht allzu erfolgreichen Pilot-Studie von BORUCH (1972), ²⁾ die mit dem Contamination-Modell arbeitete, verwenden alle hier behandelten Studien ein Unrelated-Question-Modell. Als Vergleichsmethoden werden direkte Befragungsmethoden herangezogen - sieht man von der Vergleichsstudie von SMITH et al. (1974) ab, die die RRT mit der Block-Total-Response-Technik (BTR) und der randomisierten BTR vergleichen, jedoch wegen der geringen Stichprobenumfänge zu keinen allzu aussagekräftigen Ergebnissen gelangen.

BROWN/HARDING ³⁾ vergleichen bei Angehörigen der Streitkräfte das SIMMONS-II-Modell mit der Befragung durch anonyme Fragebogen. Die Ergebnisse sind in Übersicht 7.6 dargestellt. Die RRT-Schätzer sind in fast allen Fällen größer als die direkten. Aufgrund der großen Streuung lassen sich jedoch die Unterschiede nur bei den Halluzinogenen (Offiziere) und den Babituranten (Unteroffiziere und Mannschaften) statistisch sichern ($\alpha = 5 \%$). Da Offiziere die Konsequenzen bekanntgewordenen Drogenkonsums stärker befürchten als die Mannschaften, sind bei ihnen -

1) Vgl. CHOW et al. (1979).

2) Vgl. BORUCH (1972, S.411).

3) Vgl. BROWN/HARDING (1973) zitiert nach HORVITZ et al. (1976, S.192).

so BROWN/HARDING - die Differenzen zwischen RRT und direkter Befragung besonders groß.

Übersicht 7.6: Ergebnisse der Vergleichsstudie von BROWN/HARDING (1973): Drogenkonsum von Soldaten im letzten Monat

Droge	Anonymer Fragebogen		RRT	
	Prozent	Standardfehler	Prozent	Standardf.
<u>Offiziere (n=320)</u>				
Marihuana	5,0	(1,2)	9,0	(4,1)
Halluzinogene	1,6	(0,7)	11,6	(4,0)
Amphetamine	1,9	(0,7)	8,0	(3,3)
Barbiturate	0,6	(0,4)	7,9	(3,9)
Narkotika	0,3	(0,3)	4,0	(3,9)
<u>Unteroffiziere und Mannschaften (n=663)</u>				
Marihuana	39	(1,9)	36	(3,2)
Halluzinogene	17	(1,5)	21	(3,0)
Amphetamine	16	(1,4)	18	(2,8)
Barbiturate	10	(1,2)	17	(3,0)
Narkotika	5	(0,8)	6	(2,8)

Quelle: HORVITZ et al. (1976, S.192).

Eine Studie von GOODSTADT et al. ¹⁾ vergleicht die RRT mit der direkten Befragung bei der Ermittlung des Ausmaßes des Drogenkonsums amerikanischer High-School-Studenten; insgesamt wurden über 800 Studenten in Ontario befragt. Angewandt wurde das (nicht optimierte) SIMMONS-II-Modell für quantitative Merkmale. Endziffern von Telefonnummern dienten zur Randomisierung ($P_1 = 0,7$, $P_2 = 0,3$). Der Fragebogen enthielt folgende Fragenkonstellationen

1) Vgl. GOODSTADT/GRUSON (1975) und GOODSTADT et al. (1978)

<u>Sensitive Frage</u>	<u>Zusatzfrage</u>	Number of times during the last 3 months
I have used	I have	
1) Alcohol	Watched T.V.	<input type="text"/>
2) Cannabis	Been to a library	<input type="text"/>
3) Hallucinogens	Attended a rock concert	<input type="text"/>
4) Amphetamines (speed)	Attended a classical concert	<input type="text"/>
5) Tranquilizers	Visited a museum	<input type="text"/>
6) Heroin	Attended a play	<input type="text"/>

Die Ergebnisse der Studie lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Die Antwortbereitschaft war bei der RRT (5,5 % Weigerungen) größer als bei der direkten Befragung (13,3 % Weigerungen).
- Bei Alkohol, Cannabis, Amphetaminen, Tranquilizern und Heroin lagen die Durchschnittswerte aufgrund der RRT-Befragung signifikant ($\alpha = 5 \%$) höher als bei der direkten Befragung.
- Bei den Halluzinogenen konnten keine Unterschiede festgestellt werden.
- 'The present study has demonstrated the viability and utility of employing the randomized response technique to obtain estimates of drug use'. 1)

Einzig auf die Erfassung des Alkoholkonsums - als alternative Frage gestellt - ist die Vergleichsstudie von BARTH/SANDLER (1976) ausgerichtet. Der Befragung mittels eines anonymen Fragebogens wird das SIMMONS-I-Modell gegenübergestellt; zweifacher Münzwurf zur Randomisierung ($P = 0,75$) - gerade/ungerade Telefonnummer als Zusatzmerkmal ($\psi = 0,5$). Die sensitive Frage, die High-School-Studenten in Nashville/TN zu beantworten hatten, lautete:

1) GOODSTADT et al. (1978, S.366).

'Over the past year have you consumed 50 or more glasses (drinks) of any alcoholic beverages?'

Die Ergebnisse der direkten Befragung ($n^d = 63$, $\hat{\pi}^d = 0,635$) sind signifikant ($\alpha = 5\%$) niedriger als die der RRT-Befragung ($n^r = 59$, $\hat{\pi}^r = 0,850$).

Diese positiven Ergebnisse werden auch von ZDEP et al. (1979) bestätigt, die 2084 Erwachsene mit Hilfe des FOLSOM-Modells über Marihuana-Konsum befragten. Es zeigte sich, daß die RRT-Schätzer gerade in den Bevölkerungsgruppen gegenüber Werten aus direkten Befragungen besonders stark nach oben abwichen, bei denen die Antwortbereitschaft a-priori als schlecht eingeschätzt wurde.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die RRT bei Fragen nach Drogenkonsum i.a. eine höhere Antwortbereitschaft als die direkte Befragung erreicht.

7.1.3 Vergleichsstudien in anderen Merkmalsbereichen

Die verbleibenden Vergleichsstudien beziehen sich auf die unterschiedlichsten sensitiven Merkmale. Die beiden Studien von GERSTEL et al. (1970) und FOLSOM (1974) untersuchen den Bereich 'Trunkenheit am Steuer' in Mecklenburg County/North Carolina. GERSTEL et al. (1970) ¹⁾ vergleichen die direkte Befragung mit dem Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten ($P = 0,7$, $\psi = 1/3$). Der Anteil der Befragten, der kurze Zeit nach dem Genuß von vier alkoholischen Drinks noch Auto gefahren war, wurde mit der direkten Befragung auf 12,2 % gegenüber 20,1 % mit der RRT geschätzt. Eine vergleichbare Stichprobe, die ein Jahr später mit der RRT befragt wurde, ergab den Schätzwert von 22 % und bestätigte somit den höheren RRT-Wert aus der ersten Vergleichsstudie. ²⁾ FOLSOM (1974) ³⁾ benutzte in seiner Validierungsstudie neben der direkten Befragung ebenfalls das Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten. Befragt wurden 283 Personen, die in den letzten 8 Monaten wegen Trunkenheit am Steuer festgenommen worden waren, daneben auch eine Kontrollgruppe. Das Ergebnis war für die RRT ungünstig: 84 % der direkt Befragten bekannten sich zu ihrer Festnahme wegen Alkohol am Steuer, bei der Anwendung der RRT jedoch nur 71,6 % (so der Schätzwert).

Eine andere Gruppe von Vergleichsstudien befaßt sich mit Antworten von Studenten auf sensitive Fragen. ROSENBLATT/KELLY (1978) untersuchen Täuschungsversuche bei Examensarbeiten mittels des SIMMONS-I-Modells.

- 1) Vgl. GERSTEL et al. (1970), zitiert nach HOCHBERG et al. (1976, S.36f.).
- 2) Vgl. GERSTEL et al. (1970), zitiert nach HORVITZ et al. (1976, S.193).
- 3) Vgl. FOLSOM (1974), zitiert nach HOCHBERG et al. (1976, S.38ff.).

LAMB/STEM (1978) führten für die direkte Befragung und das SIMMONS-II-Modell, das jedoch nicht in der optimierten Form angewandt wurde, ¹⁾ eine Validierungsstudie durch. Sie befragten 312 amerikanische College-Studenten nach ihrem/n Examensmißerfolg/en - sowohl in einer qualitativen wie auch in einer quantitativen Fragestellung. Außerdem wurden nach REINMUTH/GEURTS (1975) Schätzwerte für eine Untergruppe angegeben.

Aufgrund der Identifikation der Befragten konnten die wahren Parameter aus Verwaltungsunterlagen bestimmt werden. Neben der RRT-Gruppe (n = 249) wurde eine Kontrollgruppe (n = 63) direkt befragt. Der Anteil der Studenten, die einen Examensmißerfolg angaben, war um (relativ) 4,6 % (entspricht 1,4 %-Punkten) geringer als der tatsächliche; die angegebene Durchschnittszahl der nicht bestandenen Kurse um 36 % (0,254). ²⁾ Der RRT-Schätzer überschätzte - bei großer Streuung - den Anteil um 4,6 % (1,6 %-Punkte); der Durchschnittswert wurde um nur 14 % (0,078) unterschätzt. ³⁾ Die RRT scheint hier also recht passabel abzuschneiden. Exakte Wertungen der Studie sind wegen ihrer methodischen Unzulänglichkeiten nicht möglich; mit den angegebenen Daten ist eine methodisch adäquate Bearbeitung auch leider nicht möglich.

In Studien von BERMAN et al. (1977), FIDLER/KLEINKNECHT (1977) und BÉGIN et al. (1979) wurden Studenten nach einer Vielzahl sensitiver Merkmale befragt.

- 1) LAMB/STEM (1978) verwenden die nicht optimierte Version mit $P_1 = 0,75$ und $P_2 = 0,25$, obwohl sie die Arbeit von MOORS (¹1971) - wenn auch falsch - als Referenz angeben.
- 2) LAMB/STEM (1978, S.620) führten bei diesen Vergleichen t-Tests ($\pi = \pi_0$, $\mu = \mu_0$) durch, die schon deshalb nicht anwendbar sind, weil π_0 für π und μ_0 die tatsächlichen Werte aus der Stichprobe (!) π_0 verwandt werden.
- 3) Die von LAMB/STEM (1978, S.620) durchgeführten t-Tests werden ²⁾ der Probenstellung nicht gerecht, vgl. Fußnote ²⁾.

BERMAN et al. (1977) - die einzige ausführliche Studie zum Contamination-Modell - vergleichen dieses mit zwei Methoden der direkten Befragung, dem anonymen und dem identifizierten Fragebogen.

Befragt wurden insgesamt 216 amerikanische College-Studenten, die auf zwei Stichproben aufgeteilt wurden. Für das Contamination-Modell wurde ein Würfel zur Randomisierung verwandt, die Wahrscheinlichkeiten für falsche positive und negative Antworten waren identisch: $\phi_n = \phi_p = 1/12$. Gefragt wurde nach einer Vielzahl illegaler, als unmoralisch oder heikel geltender Verhaltensweisen (z.B. Eigentumsdelikte, Sexualverhalten, Drogenkonsum etc.). Überraschenderweise zeigte die identifizierte direkte Befragung in fast allen Fällen die höchsten positiven Antwortanteile, die anonyme direkte Befragung dagegen die geringsten; das Contamination-Modell erzielte keinerlei erhöhte Werte, konnte also die Erwartung nicht erfüllen, durch erhöhte Vertraulichkeit eine erhöhte Antwortbereitschaft zu erzielen. Die Autoren fassen die Ergebnisse folgendermaßen zusammen: ¹⁾

- Das gute Abschneiden der identifizierten Befragung könne auf die empfundene Verantwortlichkeit zur richtigen Beantwortung durch das Nennen des Namens zu erklären sein.
- Das unerwartet schlechte Abschneiden des Contamination-Modells wird einmal dadurch erklärt, daß dieses Modell durch die Anforderungen zu lügen recht verwirrend ist und außerdem die Notwendigkeit einer wahrheitsgemäßen Antwort infragestellen könnte.

FIDLER/KLEINKNECHT (1977) stellen in ihrer Vergleichsstudie ebenfalls die direkte Befragung der RRT gegenüber. Sie arbeiten mit dem Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten ($\psi = 0,5$). Befragt wurden in der direkten Befragung 68, mit der RRT 132 Undergraduate-Studentinnen der University of South Carolina. In

1) Vgl. BERMAN et al. (1977, S.60f.).

der Übersicht 7.7 sind die Fragen, die Ergebnisse und die Signifikanz der Unterschiede dargestellt.

Bei der Anwendung der RRT verweigerten weniger Befragte eine Antwort als bei der direkten Befragung. Von Ausnahmen abgesehen, die in der Originalarbeit erläutert werden, kann als Ergebnis festgehalten werden, daß die RRT bei wenig sensitiven Fragen in etwa die gleichen Werte wie die direkte Befragung erzielt, bei sehr sensitiven - Frage 5 und 8 - jedoch deutlich höhere.

Diese Studie wurde von BÉGIN et al. (1979) aufgenommen. Sie erweitern den Fragenkatalog um die Themenbereiche Euthanasie und Kernkraft u.a. Sie erhielten z.T. Ergebnisse, die denen von KLEINKNECHT/FIEDLER widersprechen: '... Our data suggest as an alternative hypothesis to that of Fidler and Kleinknecht the notion that the comparison between the two data collection methods (...) could be a good index of social desirability of a particular trait, behavior or attitude'. So besteht die Vermutung, daß soziale Wünschbarkeit/Nichtwünschbarkeit bei der direkten Befragung zu over-/underreporting führt.

Fragen über Einstellungen zu Rassenvorurteilen, politischen und moralischen Positionen stellten WISEMAN et al. (1975) in einer Vergleichsstudie zwischen RRT, persönlichem Interview und Befragung mit selbst ausgefüllten Fragebögen. Als RRT verwendeten sie das Unrelated-Question-Modell mit vorgegebenen Antworten. - $P = 0,5$, $\psi = 0,5$. Die Ergebnisse zeigten keine (!) höheren geschätzten Anteile bei der RRT als bei den direkten Verfahren; sie lagen dagegen nahe bei den Werten, die man aufgrund der persönlichen Befragung erhalten hatte. 'Thus it appears that the randomization procedure was not successful in reducing the total amount of response bias in this survey'. ¹⁾ Als Hauptursache hierfür sehen die Autoren fehlendes Vertrauen der Befragten in die RRT; so gab ein Fünftel der Befragten an, sie glaubten, der Interviewer würde die beantwortete Frage/Aufforderung kennen.

1) WISEMAN et al. (1975, S.511).

Übersicht 7.7: Ergebnisse der Vergleichsstudie von FIEDLER/KLEINKNECHT (1977)

Frage	Stichprobe 1 (n ₁ =68) direkte Befragung		Stichprobe 2 (n ₂ =132) RRT		Signifikanz des Unter- schieds
	Antwortverw. $\hat{\pi}^d$ (abs.)		Antwortverw. $\hat{\pi}^r$ (abs.)		
1. Are you a Protestant?	2	0.82	2	0.89	ns
2. Do you approve of premarital sex for engaged couples?	3	0.85	2	0,84	ns
3. Have you ever been raped?	2	0.02	2	-0.04	ns
4. Do you approve kissing on the first date?	3	0.99	2	0.74	xxx
5. Have you ever masturbated?	7	0.20	2	0.51	xxx
6. Have you ever had homosexual experience?	3	0.02	2	0.01	ns
7. Are you a virgin?	3	0.45	2	0.47	ns
8. Have you ever touched a male's genitals with your mouth (fellatio); or have you ever had a male touch your genitals with his mouth (cunnilingus)?	8	0.43	2	0.67	x
9. Do you think junior high school students should have a course in sex education?	2	0.96	2	1.07	xx

Erläuterung: ns = nicht signifikant

x signifikanter Unterschied, $\alpha = 0,05$

xx signifikanter Unterschied, $\alpha = 0,01$

xxx signifikanter Unterschied, $\alpha = 0,001$

Quelle: FIEDLER/KLEINKNECHT (1977,
S.1047 f.).

Für die Befragten glich die RRT damit weitgehend einem persönlichem Interview, was auch mit den Ergebnissen kompatibel ist. Darüber hinaus konnte ein Teil der Befragten die Aufforderung in einigen Fällen, 'Ja' bzw. 'Nein' zu antworten, einfach nicht verstehen. Eine Schwierigkeit, die beim Modell mit vorgegebenen Antworten auftritt.

Extensive Pretests gingen der Studie von ZDEP/RHODES (1976) voraus. Des weiteren wurde - aufgrund von Erfahrungen wie denen von WISEMAN et al. (1975) - innerhalb des Interviews die RRT ausführlich erläutert. Die Autoren verwendeten in ihrer Studie ein 'national probability sample' der Opinion Research Company, Princeton, um die RRT mit zwei direkten Befragungsverfahren zu vergleichen. Die sensitive Frage bezog sich auf Kindesmißhandlung:

'Have you or your spouse ever intentionally used physical force on any of your children in an effort specifically meant to hurt or cause injury to that child?'

Als RRT wurde das FOLSOM-Modell angewandt, eine Münze diente zur Randomisierung ($P = 0,5$), die beiden nicht sensitiven Fragen lauteten:

'Have you attended church or synagogue within the past week?'

'Have you attended a PTA meeting at school within the past 12 months?'

Bei der RRT lagen die Antwortraten bei 98 % bzw. 99 % in den beiden Unterstichproben.

Bei jedem der beiden direkten Verfahren füllten die Befragten die Fragebögen selbst aus. Im ersten wurden sie sofort dem Interviewer in einem verschlossenen Umschlag zurückgegeben (Antwortrate 88 %); im zweiten sollten die Fragebögen mit der Post zurückgesendet werden (Antwortrate 75 %). Die Ergebnisse sind der Übersicht 7.8 zu entnehmen.

Übersicht 7.8: Ergebnisse der Vergleichsstudie von ZDEP/RHODES (1976)
Anteil der Haushalte, in denen Kinder mißhandelt wurden.

Befragungsmethode	Schätzwerte (Standardabweichungen) a)		
RRT	$n_1 = 506$ $\hat{\pi}(1) = 0,15$ (0,043)	$n_2 = 476$ $\hat{\pi}(2) = 0,16$ (0,047)	$\hat{\pi} = 0,15$
Fragebogen, Rückgabe an Interviewer	$n = 473$		$\hat{\pi} = 0,03$ (0,008)
Fragebogen, Rücksendung mit Post	$n = 348$		$\hat{\pi} = 0,04$ (0,011)

Quelle: ZDEP/RHODES (1976), S.536, eigene Berechnungen aufgrund der angegebenen Daten

- a) Die Standardabweichungen wurden nach den Formeln für die einfache Stichprobe mit Zurücklegen berechnet.

Die RRT erweist sich in dieser sorgfältig geplanten Studie gegenüber den direkten Befragungsverfahren sowohl hinsichtlich der non-response als auch der Schätzergebnisse als eine brauchbare Alternative bei der Frage nach sensitiven Merkmalen.

Abschließend gehen wir noch auf die methodisch gut fundierte Validierungsstudie von LOCANDER et al. (1974,1976) ein, in der sie vier Befragungsmethoden bei der Frage nach fünf unterschiedlichen sensitiven Merkmalen vergleichen.

Die Befragungsmethoden waren:

- a) persönliches Interview
- b) RRT (SIMMONS-I-Modell) innerhalb eines Interviews
- c) telefonische Befragung
- d) selbständig ausgefüllter Fragebogen, der vom Interviewer gebracht und später wieder abgeholt wurde.

Die Merkmale waren:

- (a) Registratur in Wahllisten
- (b) Besitz einer Chicago Library Card
- (c) Teilnahme an den Primaries zur Präsidentenwahl (1972)
- (d) Bankrott-Erklärung
- (e) Bestrafung wegen Alkohol am Steuer in den letzten 12 Monaten.

Die Befragten zu den Merkmalen (a)-(c) wurden, aus einem 'Chicago household probability sample' gezogen. Ihr wahrer Status wurde anhand der Karteien der Chicago Library und von Wahllisten festgestellt.

Die Befragten zu den Merkmalen d) und e) hatten alle die gefragten Eigenschaften.

Die Beteiligung lag insgesamt im Rahmen des Üblichen:

72,2 % der 941 Befragungen wurden zu Ende geführt.

Die Einzelheiten sind der Übersicht 7.9. zu entnehmen.

Die höchsten Antworten waren bei der Telefonbefragung zu verzeichnen, die RRT lag etwa gleich mit der persönlichen Befragung, und am schlechtesten schnitt die Befragung mit selbstausgefüllten Fragebögen ab.

Da die Befragten in den beiden speziellen Stichproben schwerer zu erreichen waren als die in der - als Flächenstichprobe angelegten - allgemeinen Stichprobe, lagen die Raten hier entsprechend höher.

Übersicht 7.9: Ergebnisse von LOCANDER et al. (1974,1976)
Anteile in % der durchgeführten Befragungen
mit (geschätzten) Standardfehlern.

Befragungs- methode	Stichprobe			
	Allg. Stichprobe zu Merkmal (a), (b), (c)	Bankrott	Trunken- heit am Steuer	Insgesamt
Persönli- che Befra- gung	76,0 (3,82) n = 125	70,3 (6,22) n = 54	57,1 (6,31) n = 63	69,8 (2,95) n = 242
Telephon. Befragung	89,9 (2,89) n = 109	68,9 (5,98) n = 60	77,8 (5,24) n = 63	81,0 (2,58) n = 232
Selbstaug. Fragebogen	75,4 (4,03) n = 114	59,3 (6,40) n = 69	47,5 (6,38) n = 61	64,1 (3,14) n = 234
RRT	77,6 (3,87) n = 116	67,2 (6,33) n = 55	58,1 (6,27) n = 62	70,0 (3,0) n = 233
insgesamt:	79,7 (1,87) n = 464	66,2 (3,13) n = 228	60,2 (3,10) n = 249	72,2 (1,46) n = 941

Quelle: LOCANDER et al. (1976, S.271).

Zur Validierung und zum Vergleich der Methoden ermitteln die Autoren die 'proportion of distorted responses', welche dem (geschätzten) Bias $\hat{b} = \hat{\pi} - \bar{\pi}$ entspricht, wobei $\hat{\pi}$ der Anteil der positiven Antworten in der Stichprobe und $\bar{\pi}$ der wahre

Anteil der Stichprobe sind. Die Ergebnisse stehen in der Übersicht 7.10.

Übersicht 7.10: Ergebnisse von LOCANDER et al. (1974,1976)
Geschätzter Bias mit (geschätzten)
Standardfehlern

Befragungsmethode	Merkmale				
	Registrierung (a)	Library Card (b)	Wahlteiligung (c)	Bankrott (d)	Alkohol (e)
Persönliche Befragung	0,15 (0,037)	0,19 (0,04)	0,39 (0,055)	-0,32 (0,075)	-0,47 (0,09)
Telefon. Befragung	0,17 (0,039)	0,21 (0,044)	0,31 (0,052)	-0,29 (0,075)	-0,46 (0,073)
Selbstausgef. Fragebögen	0,12 (0,036)	0,18 (0,042)	0,36 (0,056)	-0,32 (0,083)	-0,54 (0,094)
RRT 1)	0,11 (0,058)	0,26 (0,08)	0,48 (0,101)	0,00 (0,00)	-0,35 (0,141)

Quelle: SUDMAN (1980, S.265), bzw. LOCANDER et al. (1976, S.271).

1) Zur Berechnung der Standardfehler bei der RRT bemerken LOCANDER et al. (1976, S.271): 'Std. errors of Random Response computed using Greenberg et al. (1969) formulation'. Der Verfasser kann die Berechnung dennoch nicht nachvollziehen, insbesondere erscheint unerklärlich, wie der Wert 0,00 in der vierten Spalte auftreten kann.

Eine Betrachtung der Übersicht 7.10 zeigt, daß die RRT nicht in der Lage ist, overreporting merklich zu reduzieren (Merkmale a)-c)); in diesen Fällen ist der Bias bei der RRT oft noch größer als bei den direkten Verfahren. Dagegen reduzierte die RRT underreporting bei den sensitiven Merkmalen erheblich, wenn auch bei der Frage nach Trunkenheit trotz RRT noch 35 % falsche Antworten geschätzt werden: ^{1),2)} 'It is clear from this experiment that no data collection method is superior to all other methods for all types of threatening questions. (...) The randomized response procedure gives the lowest distortion on threatening questions asking about the performance of socially undesirable acts'. ³⁾

-
- 1) Wegen der geringen Stichprobenumfänge lassen sich die Differenzen jedoch nicht statistisch sichern.
 - 2) Aus den bei den Merkmalen (d) und (e) angegebenen Bias-Werten lassen sich die Größen TAD und TAR, die wir in 3.1.5 bei Effizienzvergleichen verwandt haben, durch Addition von 100 % ermitteln.
 - 3) LOCANDER et al. (1976, S.273).

7.2 ANWENDUNGEN (i.e.S.) DER RRT

7.2.1 Anwendungen der RRT mit Schwerpunkt im Bereich Fertilität, Schwangerschaftsabbruch etc.

Ähnlich wie bei den Vergleichsstudien liegt auch der Schwerpunkt der Anwendungen bei den Merkmalen Schwangerschaftsabbruch, uneheliche Geburten etc.

ABUL-ELA et al. (1967) ¹⁾ berichten recht knapp über eine erste Anwendung der RRT; hierbei handelt es sich um eine Erweiterung des WARNER-Modells auf Merkmale mit drei Ausprägungen, wobei jedoch zwei Stichproben notwendig sind, da die Antwortvariable lediglich alternativ ist. ²⁾ Das angewandte Modell hat deshalb eine geringere Effizienz als das BOURKE-DALENIUS-Modell. Ziel der Studie war die Schätzung des Anteils der unverheirateten Mütter in North Carolina, die zwischen Oktober 1964 und Oktober 1965 eine Lebendgeburt hatten.

Die drei Merkmalsausprägungen waren

- verheiratet bei Beginn der Schwangerschaft
- Heirat während der Schwangerschaft
- unverheiratet bei der Niederkunft.

Die Schätzungen wurden mit Informationen aus der Geburtenstatistik verglichen ; die Autoren geben jedoch keine konkreten Zahlenwerte an. Die Studie erscheint jedoch nicht allzu erfolgreich gewesen zu sein - mehrere Anteilsschätzungen lagen nicht in $[0,1]$ - , denn sie benennt als Ergebnis vier wichtige Punkte, die bei zukünftigen Anwendungen der RRT zu beachten seien: ³⁾

- Kartenspiele sind zur Randomisierung unzureichend, es sei denn bei gut ausgebildeten Interviewern und intelligenten Befragten.
- Nicht randomisierte Antworten erzeugen einen großen Bias,
- ebenfalls falsche Antworten;
- desgleichen fehlendes Verständnis für den Sinn und das Funktionieren der RRT.

1) Vgl. ABUL-ELA et al. (1967, S.1004f.).

2) Vgl. 4.1.

3) Vgl. ABUL-ELA et al. (1967, S.1005).

Die Erfahrungen dieser Studie gingen ein in eine großangelegte Studie, dem North-Carolina-Abortion-Survey 1968, die vom National Institute of Child Health and Human Development (USA) gefördert wurde. In ihr untersuchten ABERNATHY, ABUL-ELA, GREENBERG, HOVITZ und KUEBLER ¹⁾ in mehreren unabhängigen (geschichteten Klumpen-) Stichproben die Häufigkeit von Schwangerschaftsabbrüchen, der Anwendung oraler Kontrazeptiva und des Auftretens psychischer Schwierigkeiten bei Frauen; außerdem wurden auch die quantitativen Merkmale, Anzahl der Schwangerschaftsabbrüche und Einkommen des Haushaltsvorstands, erhoben. Die Untersuchungen beziehen sich auf die städtischen Gebiete in North-Carolina.

Als RRT wurde das Unrelated-Question-Modell - in unterschiedlichen Versionen - verwandt. Hierbei wurde folgende Randomisierungsvorrichtung benutzt: Ein verschlossener Kasten, der 35 rote und 15 blaue Kugeln enthält; nach dem Schütteln des Kastens ist in einem Fensterchen eine Kugel zu beobachten. Die Bedeutung der Kugelfarbe ist durch entsprechende Aufschriften auf dem Kasten erläutert.

Bei der Erhebung der qualitativen Merkmale wurde die folgende nicht sensitive Zusatzfrage gestellt:

'I was born in the month of April'.

In einigen Stichproben wurde ψ als bekannt angenommen (ermittelt aus der Geburtenstatistik), in anderen mußte es geschätzt werden. Hierzu waren dann zwei Unterstichproben notwendig, in denen - sub-optimal - $P_2 = 1 - P_1$ gewählt wurde.

In der Studie von ABERNATHY et al. (1970) wurde die Häufigkeit des Schwangerschaftsabbruchs untersucht. Es wurden zwei sensitive Fragen in unterschiedlichen Stichproben gestellt:

- 'I was pregnant at some time during the past 12 months and had an abortion which ended the pregnancy'.

1) Vgl. GREENBERG et al. (1969b), ABERNATHY et al. (1970), GREENBERG et al. (1970) und GREENBERG et al. (1971).

$\hat{\pi} = 0,0342$ ($\hat{\sigma}(\hat{\pi}) = 0,00996$) für Frauen zwischen 18 und 44 Jahren.

- 'At some time during my life I had an abortion which ended the pregnancy.'

$\hat{\pi} = 0,0412$ ($\hat{\sigma}(\hat{\pi}) = 0,010$) für Frauen über 18 Jahren.

Die Schätzungen für die Häufigkeiten wurden für die Totalgesamtheit als auch für Subpopulationen - aufgeteilt nach Rasse, Alter, Bildungsstand, Familienstand - angegeben. Obgleich keine direkten Vergleichsdaten vorliegen, sind die Ergebnisse im Einklang mit anderen vergleichbaren Untersuchungen.

Die Befragten wurden vor der Anwendung des Unrelated-Question-Modells über dessen Sinn und Funktionsweise ausführlich aufgeklärt. Außerdem wurden Fragen zur Akzeptanz der RRT gestellt. Auf die Frage, ob eine Freundin auf die direkte Frage nach Schwangerschaftsabbruch wahrheitsgemäß antworten würde, gaben 67 % 'Nein', 17 % 'Ja' und 16 % 'Unentschieden' an. Auf eine Abschlußfrage hin glaubten 60 %, daß die RRT ihre persönliche Situation nicht preisgeben würde, 20 % glaubten es jedoch und 20 % waren unentschieden. Die Antwortrate betrug insgesamt 92,2 %.

Bei der Frage nach oralen Kontrazeptiva ergab sich 25,1 % als Schätzwert für die Häufigkeit der positiven Beantwortung der Frage

'I am now taking the 'pill' to prevent pregnancy'.

22,8 % der Frauen über 31 Jahren - so die Schätzung - hatten schon einmal in ihrem Leben professionelle Hilfe wegen psychischer Schwierigkeiten in Anspruch genommen. Zusammenfassend kommen die Autoren zu dem Ergebnis: "... we were generally satisfied with the findings, and are confident that, when properly used, the randomized response technique can provide answers to a number of sensitive questions in the field of public health".¹⁾

Bei der Auswertung der quantitativen Merkmale wurde die folgende Fragenkombination gewählt:

1) GREENBERG et al. (1970, S.55).

- 'How many abortions have you had during your lifetime?'
- 'If a woman has to work full time to make a living, how many children do you think she should have?'

Da die Verteilung des Zusatzmerkmals nicht bekannt ist, mußte ein Zwei-Stichproben-Modell angewandt werden, das jedoch nicht optimiert war.

Das gleiche gilt für die Einkommensfrage:

- 'About how much money in dollars did the head of this house earn last year?'
- 'About how much money in dollars do you think the average head of a household of your size earns in a year?'

GREENBERG et al. (1969b) geben für die Anzahl der Schwangerschaftsabbrüche sowohl die (geschätzte) Häufigkeitsverteilung als auch den Mittelwert, für das Einkommen nur das Durchschnittseinkommen an. Alle Angaben sind auch für die weiße und die nicht-weiße Bevölkerung gesondert aufgeführt.

Bei der Frage nach Schwangerschaftsabbruch verweigerten nur 1 % die Mitarbeit, bei der nach dem Einkommen 3 %.

Die wohl umfangreichste Stichprobe, in der die RRT angewandt wurde, war der 1973er National Survey of Family Growth ¹⁾ in den USA. Mit einem FOLSOM-Modell in dem ein Münzwurf zur Randomisierung verwandt wurde ($P = 1/2$), wurde das Ausmaß von Schwangerschaftsabbrüchen im vorausgegangenen Jahr ermittelt. Befragt wurden 9757 Frauen im Alter von 15 bis 44 Jahren, 98,5 % beteiligten sich an der Befragung.

Es wurden folgende Fragen gestellt:

- A : - 'In the past 12 months, I had an abortion done to end pregnancy'.
- U1 : - 'Was your mother born in April?'
- U2 : - 'This time last year, I lived in a different county or

1) Vgl. SHIMIZU/BONHAM (1976), SHIMIZU/BONHAM (1978).

state than this one'.

Die Ergebnisse sind in Übersicht 7.11 zusammengefaßt.

Übersicht 7.11: Ergebnisse des NSFG 1973/USA

Anteil $\hat{\pi}$ (in %) der Frauen im Alter von 15 bis 44 Jahren, die in den 12 Monaten vor der Befragung einen Schwangerschaftsabbruch vornehmen ließen - nach Familienstand. (Standardfehler).

Schätzwert	Insgesamt	Alleinstehend mit Kind	nicht ledig	verheiratet	verwitwet geschieden getrennt lebend
$\hat{\pi}$	3,0 (0,8)	10,0 (3,7)	2,8 (0,8)	2,6 (0,8)	5,4 (1,7)
$\hat{\pi}(1)$	5,3 (1,1)	9,0 (4,8)	5,3 (1,1)	5,1 (1,1)	6,4 (2,3)
$\hat{\pi}(2)$	0,6 (1,1)	11,4 (5,6)	0,3 (1,1)	-0,2 (1,1)	4,0 (2,7)
$\hat{\psi}_1$	8,6 (0,5)	6,3 (1,4)	8,7 (0,5)	8,6 (0,5)	9,6 (1,1)
$\hat{\psi}_2$	12,0 (0,6)	5,4 (1,8)	12,2 (0,6)	12,7 (0,7)	8,4 (1,2)

Quelle: SHIMIZU/BONHAM (1978, S.37).

Problematisch erscheint die große Differenz der Ergebnisse in den beiden Unterstichproben. So ergab die 1. Stichprobe insgesamt einen Schätzwert von 5,3 %, die 2. jedoch nur von 0,6 %. Trotz der recht hohen Streuung überschneiden sich die 95 %-Konfidenzintervalle nicht, so daß hier bedeutsame Meßfehler zu vermuten sind.

Als mögliche Fehlerquellen nennen die Autoren: ¹⁾

- Mißverständnisse bei der zweiten direkten Frage ('Country' statt 'county') und

1) Vgl. SHIMIZU/BONHAM (1978, S.39).

- Raten bei der ersten direkten Frage nach dem Geburtstag der Mutter. ¹⁾

Ein Vergleich der Ergebnisse mit denen aus früheren Erhebungen (z.B. National Fertility Study 1970, Zahlen über legale Abtreibungen, Daten aus Krankenhausunterlagen), die bei verheirateten Frauen im Bereich 0,6-0,8 % liegen, zeigt deutlich höhere Werte bei der Anwendung der RRT: 'It is not likely that all of these differences are due to measurement error and they suggest that a large number of woman had an unreported and/or illegal abortion in 1973'.²⁾

7.2.2 Anwendungen der RRT in anderen Merkmalsbereichen

Die RRT wurde auch auf eine Vielzahl anderer als in 7.2.1 behandelten - Merkmale angewandt. SMITH/SONSNOWSKI (1972) führten Befragungen von Studenten über ihre Einschätzungen der Lehrkräfte durch. Diese Studie ist einer der wenigen Anwendungsbeispiele des ursprünglichen WARNER-Modells. DAWES (1974) überprüfte mit der RRT, ob bestimmte Verhaltensmuster (in den Bereichen Sexualität und Kriminalität) einer Guttman-Skala genügen. KIM/FLUECK (1978) ermittelten in einer kleineren Anwendung der RRT den Umfang der Inanspruchnahme bestimmter Sozialleistungen.

Die Häufigkeit und Intensität von Ladendiebstahl untersuchten ³⁾ REINMUTH/GEURTS (1975) im Einkaufszentrum Ala Moana in Honolulu

- 1) In einer Erhebung 1976, für die jedoch noch keine ausführlichen Ergebnisse zugänglich sind, wurden die beiden Zusatzfragen geändert, wodurch sich die noch immer beträchtlichen Differenzen der beiden Unterstichproben verringerten. Vgl. SHIMIZU (1979, S.488f.).
- 2) SHIMIZU/BONHAM (1978, S.39).
- 3) GEURTS et al. (1975) berichten über eine ganz ähnlich aufgebaute Studie, ohne jedoch die quantitativen Ergebnisse ausführlich darzustellen.

mittels des - nicht optimierten - SIMMONS-II-Modells ($P_1 = 0,75$, $P_2 = 0,25$).

In einer ersten Stichprobe ($n_1 = 138$, $n_2 = 46$) wurde nach Ladendiebstahl in den letzten 12 Monaten gefragt; die nicht sensitive Zusatzfrage bezog sich auf den Einkauf in Ala Moana in der letzten Woche. In der zweiten Stichprobe ($n_1 = 126$, $n_2 = 42$) wurde nach der Zahl der Ladendiebstähle in den letzten 12 Monaten gefragt; die Zusatzfrage bezog sich auf die Zahl der Einkäufe in Ala Moana im letzten Monat. Die Ergebnisse sind in Übersicht 7.12 zusammengestellt. ¹⁾

Übersicht 7.12: Ergebnisse der Studie von REINMUTH/GEURTS (1975). Ladendiebstahl in Honolulu.

	Qualitatives Merkmal Ladendiebstahl in den letzten 12 Monaten		Quantitatives Merkmal Anzahl der Ladendiebstähle in den letzten 12 Monaten
Mittelwert (Standardabweichung)	Stichprobe 1 $\hat{\pi}_1 = 0,1957$ (0,0608)	Stichprobe 2 $\hat{\pi}_2 = 0,1786$ (0,0730)	Stichprobe 2 $\hat{\mu} = 1,7142$ (0,5758)
95 %-Konfidenzintervall	0,0756- 0,3157	0,0355- 0,3217	0,5642 - 2,8642

Quelle: REINMUTH/GEURTS (1975, S.406) und eigene Berechnung nach diesen Daten

1) REINMUTH/GEURTS (1975, S.405f.), schätzen darüber hinaus die Anzahl der Ladendiebstähle je Ladendieb und ermitteln hierfür Standardfehler und Konfidenzintervalle.

Durch die recht kleinen Stichprobenumfänge und die Anwendung der nicht optimierten Form des Modells sind die Konfidenzintervalle aufgrund der Schätzungen relativ groß. Vergleicht man die Ergebnisse 1 und 2 bez. des qualitativen Merkmals, so fällt die weitgehende Übereinstimmung der Schätzungen auf. Die Autoren der Studie machen jedoch ihrerseits keinerlei Aussage über die Plausibilität der Ergebnisse.

MADIGAN et al. (1976) untersuchten mit dem SIMMONS-I-Modell das Ausmaß (im Interview bei direkter Frage) bewußt verheimlichter Todesfälle in einer philippinischen Provinz. Nicht sensitives Zusatzmerkmal war die Geburt der Mutter der Befragten im April. Zur Randomisierung wurde eine Münze verwandt ($P = 1/2$). Es wurden jeweils ungefähr 2000 Haushalte in ländlichen und städtischen Gegenden befragt, nur 1,3 % der Befragten verweigerten die Antwort. Die Ergebnisse der Studie sind in der Übersicht 7.13 zusammengestellt.

Übersicht 7.13: Ergebnisse der Studie von MADIGAN et al. (1976)

Anteile (in %) der Haushalte mit Todesfällen im Jahre 1973 in der Misamis Oriental Province / Philippinen; in Klammern sind die Standardfehler angegeben.

Merkmal	Städt. Gebiet	Ländl. Gebiet
Absichtliche Verheimlichung eines Todesfalls	4,56 (1,10)	4,14 (1,06)
Auftreten eines Todesfalls	8,58 (1,25)	6,10 (1,13)
Keine offizielle Meldung eines Todesfalls	5,58 (1,14)	3,84 (1,04)

Quelle: MADIGAN et al. (1976, S.299, 302, 303).

Es wurden also etwa 50 % der Todesfälle - so die Schätzungen - verheimlicht. Die Autoren benannten als Gründe religiöse Motive, Furcht vor behördlichen Untersuchungen und wirtschaftliche Beweggründe. Die aufgrund dieser Ergebnisse korrigierten Sterberaten erscheinen sehr plausibel.

Die beiden letzten zu erwähnenden RRT-Anwendungsstudien befassen sich mit der Verkehrsunfallforschung. HOCHBERG et al. (1976) berichten über recht schlechte Erfahrungen aus Pilot-Studien betr. das Tragen von Sicherheitsgurten; die schlechten Ergebnisse werden insbesondere auf die fehlende Sensitivität des untersuchten Merkmals als auch auf Schwierigkeiten, die RRT bei schriftlichen Befragungen anzuwenden, zurückgeführt. In einer kleinen Studie wendeten FOLSOM et al. (1973) erstmals das FOLSOM-Modell zur Erfassung des Ausmaßes von Trunkenheit am Steuer bei Verkehrsunfällen an. In dieser Studie differierten - wie bei SHIMIZU/BONHAM (1978) - die Schätzwerte aus den beiden Unterstichproben sehr stark, was auf Meßfehler hindeutet, die jedoch von den Autoren nicht kommentiert werden.

7.3 AUSWERTUNG DER ANWENDUNGSSTUDIEN

Versucht man die unterschiedlichen Studien, die hier in aller Kürze referiert wurden, zu werten, so ergibt sich kein einheitliches Bild. Den in der Mehrzahl positiven Erfahrungen mit der RRT stehen auch einige gewichtige negative gegenüber. Es erscheint daher notwendig, auf einige Punkte hinzuweisen, die für eine erfolgreiche Anwendung der RRT gegeben sein müssen. Voraussetzung für eine erfolgreiche Anwendung der RRT sind

- Sensitivität der untersuchten Merkmale und nicht zu kleine Stichprobenumfänge.
- Einwandfreies technisches Funktionieren der Randomisierung.
- Kooperationsbereitschaft der Befragten.
- Geeignete Wahl der Modell-Parameter.

Unter dem Gesichtspunkt der Effizienz - nicht des Schutzes von Einzeldaten überhaupt - ist die RRT nur dann anzuwenden, wenn die Antwortbereitschaft bei der direkten Befragung stark beeinträchtigt ist - das Merkmal also sensitiv ist - und der Stichprobenumfang so groß ist, daß die Verringerung des Bias nicht durch die zusätzliche Antwortvarianz kompensiert wird. Die RRT muß darüber hinaus technisch einwandfrei funktionieren, d.h., die Randomisierung muß auch tatsächlich die angenommene Zufallsvariable Z generieren. Die Erfahrungen scheinen nicht unbedingt für Kartenspiele zu sprechen, deren Zusammensetzung schwer überwachbar ist, eher für die verschiedenen HOPKINS-Urnen oder Münzen.

Die entscheidende Voraussetzung für die RRT ist jedoch die Kooperationsbereitschaft der Befragten. Wird das Merkmal als nicht sensitiv empfunden und besteht kein besonderes Datenschutzbedürfnis, so wird man dem Befragten den zusätzlichen Aufwand der RRT kaum verständlich machen können. Bei sensitiven Merkmalen muß dem Befragten glaubhaft gemacht werden können, daß die RRT wirklich Vertraulichkeit der Daten erzeugt; hierzu sind ausführliche Erläuterungen sorgfältig geschulter Interviewer notwendig. Sie müssen darüber hinaus deutlich machen, daß es trotz der scheinbaren

Willkürlichkeit des 'RRT-Spiels' darauf ankommt, die gestellten Fragen wahrheitsgemäß zu beantworten.

Sind diese Voraussetzungen gegeben, dann lassen sich mit der RRT - wie insbesondere einige der Validierungs- und Vergleichsstudien zeigen - eindrucksvolle Ergebnisse erzielen.

Betrachtet man die in der Praxis verwendeten Modelle, so fällt das Überwiegen der Unrelated-Question-Modelle auf. Das WARNER-Modell erscheint wegen seiner geringen Effizienz nicht sinnvoll anzuwenden zu sein; hingegen stellen die Multiple-Trial-Versionen - insbesondere die hypergeometrische Version - erwägenswerte und erfolgreich angewandte Alternativen dar. Das Contamination-Modell hat sich wegen der Aufforderungen, einmal die Wahrheit zu sagen, im anderen Fall nicht, als für die Befragten zu verwirrend erwiesen.

Für das Unrelated-Question-Modell schließlich spricht neben seiner relativ hohen Effizienz und Flexibilität die Möglichkeit, nominal, ordinal und metrisch skalierte Merkmale zu erheben. Die Anwendung des Ein-Stichproben-Modells ist trotz seiner hohen theoretischen Effizienz nicht unproblematisch. Bei bekanntem ψ sollte die Zusatzfrage nicht zu trivial gewählt sein, um die Glaubwürdigkeit der Befragung nicht zu gefährden. Diese Gefahr besteht auch beim Modell mit vorgegebenen Antworten, wo die Aufforderungen einfach 'ja' oder 'nein' zu antworten, die Notwendigkeit wahrheitsgemäß zu antworten, unbedeutend erscheinen lassen kann.

Das Zwei-Stichproben-Modell bietet sich innerhalb eines Fragebogens mit mehreren direkten Fragen an. Als Zusatzfragen können dann auch Merkmale von tatsächlichem Interesse erhoben werden; diese sollten - wie alle anderen Fragen auch - sehr sorgfältig formuliert werden. Die Anwendungsstudien zeigen eine häufige Verwendung des Zwei-Stichproben-Modells (mit einem Zusatzmerkmal) mit $P_2 = 1 - P_1$; dieses Modell ist wegen seiner geringeren

Effizienz abzulehnen. Das nicht sensitive Zusatzmerkmal sollte immer direkt erhoben werden. Empfehlenswert erscheint ein verschränktes Modell, das FOLSOM-Modell, das mit zwei direkt erfragten Zusatzmerkmalen arbeitet. Es bietet neben der erhöhten Effizienz die Möglichkeit, anhand des Vergleichs der beiden Schätzungen $\hat{\pi}(1)$ und $\hat{\pi}(2)$ aus den beiden Unterstichproben Hinweise auf eventuelle Meßfehler zu erhalten.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- ABERNATHY, J.R., GREENBERG, B.G., HORVITZ, D.G. (1970)
Estimates of Induced Abortion in Urban North Carolina.
Demography, 7(1970), S.19-29.
- ABUL-ELA, A.-L., GREENBERG, B.G., HORVITZ, D.G. (1967)
A Multi-Proportions Randomized Response Model. Journal of
the American Statistical Association, 62(1967), S.990-1008.
- ALEXANDER, J.R. (1978)
Probability as an Aid in Social Research: The Randomised
Response Technique. Mathematical Spectrum, 11(1978),
S.10-13.
- AMERICAN STATISTICAL ASSOCIATION (1977)
Report of the ASA Ad Hoc Committee on Privacy and Confi-
dentiality. The American Statistician, 31(1977), S.59-78.
- ANDERSON, H. (1975a)
Efficiency versus Protection in Randomized Response Designs
for Estimating Proportions. Report 9(1975), Department of
Mathematical Statistics, Universität Lund/Schweden.
- ANDERSON, H. (1975b)
Efficiency versus Protection in a General Randomized Res-
ponse Model. Report 10(1975), Department of Mathematical
Statistics, Universität Lund/Schweden.
- ANDERSON, H. (1976)
Estimation of a Proportion through Randomized Response.
International Statistical Review, 44(1976), S.213-217.
- ANDERSON, H. (1977)
Efficiency versus Protection in a General Randomized Res-
ponse Model. Scandinavian Journal of Statistics, 4(1977),
S.11-19.
- ASSAKUL, K., PROCTOR, C.H. (1967)
Testing Independence in Two-Way Contingency Tables with
Data Subject to Misclassification. Psychometrika, 32(1967),
S.67-76.
- BARKSDALE, W.B. (1975)
New Randomized Response Techniques for Control of Nonsamp-
ling Errors in Surveys. American Statistical Association,
Proceedings of the Social Statistics Section, 1975,
S.302-304.
- BARTH, J.T., SANDLER, H.M. (1976)
Evaluation of the Randomized Response Technique in a Drin-
king Survey. Journal of Studies on Alcohol, 37(1976),
S.690-693.

- BARTON, A.H. (1958)
Asking the Embarrassing Question. The Public Opinion Quarterly, 22(1958), S.67-68.
- BEGIN, G., BOIVIN, M., BELLEROSE, J. (1979)
Sensitive Data Collection through the Random Response Technique: Some Improvements. The Journal of Psychology, 101 (1979), S.53-65.
- BELLAGIO - PRINZIPIEN (1978)
Bellagio-Prinzipien über Datenschutz und den Gebrauch von öffentlichen Mikrodaten für Zwecke der Forschung und Statistik. Allgemeines Statistisches Archiv, 62(1978), S.210-212.
- BELLHOUSE, D.R. (1980)
Linear Models for Randomized Response Designs. Journal of the American Statistical Association, 75(1980), S.1001-1004.
- BELSON, W.A. (1968)
The Extent of Stealing by London Boys and some of its Origins. Advancement of Science, 25(1968), S.71-184.
- BERMAN, J., McCOMBS, H., BORUCH, R. (1977)
Notes on the Contamination Method. Two Small Experiments in Assuring Confidentiality of Responses. Sociological Methods & Research, 6(1977), S.45-62.
- BICKEL, P.J., DOKSUM, K.A. (1977)
Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics. San Francisco etc., 1977.
- BLAIR, E., SUDMAN, S., BRADBURN, N.M., STOCKING, C. (1977)
How to Ask Questions About Drinking and Sex: Response Effects in Measuring Consumer Behavior. Journal of Marketing Research, 14(1977), S.316-321.
- BORUCH, R.F. (1971a)
Maintaining Confidentiality of Data in Educational Research: A Systemic Analysis. American Psychologist, 26(1971), S.413-430.
- BORUCH, R.F. (1971b)
Educational Research and the Confidentiality of Data: A Case Study. Sociology of Education, 44(1971), S.59-85.
- BORUCH, R.F. (1972)
Relations Among Statistical Methods for Assuring Confidentiality of Social Research Data. Social Science Research, 1(1972), S.403-414.
- BORUCH, R.F., ENDRUWEIT, G. (1973)
Mathematische Methoden zur Sicherung der Vertraulichkeit und Anonymität von Forschungsdaten. Zeitschrift für Soziologie, 2(1973), S.227-238.

- BOURKE, P.D. (1974a)
Symmetry of Response in Randomized Response Designs. Report No. 75 Research Project Errors in Surveys, Institute of Statistics, Universität Stockholm, 1974.
- BOURKE, P.D. (1974b)
Vector Response in Randomized Response Designs. Report No. 76 Research Project Errors in Surveys, Institute of Statistics, Universität Stockholm, 1974.
- BOURKE, P.D. (1974c)
Multi-Proportions Randomized Response Using the Unrelated Question Technique. Report No. 74 Research Project Errors in Surveys, Institute of Statistics, Universität Stockholm, 1974.
- BOURKE, P.D. (1975)
Randomized Response Designs for Multivariate Estimation. Report No. 6 Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1975.
- BOURKE, P.D. (1976)
The Generation of Randomized Response Designs for Multivariate Estimation Using Design Matrices. Report No. 16 Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1976.
- BOURKE, P.D. (1978a)
The Analysis of Multivariate Randomized Response Designs Using the Kronecker Product of Design Matrices. Report No. 33 Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1978.
- BOURKE, P.D. (1978b)
Randomized Response Designs with Symmetric Response for Multi-Proportions Estimation. *Statistisk Tidskrift*, 16 (1978), S.197-204.
- BOURKE, P.D. (1979)
Design Matrices in Multivariate Randomized Response Designs. International Statistical Institute, Contributed Papers 42nd Session, Manila, 1979.
- BOURKE, P.D., DALENIUS, T. (1973)
Multi-Proportions Randomized Response Using a Single Sample. Report No. 68 Research Project Errors in Surveys, Institute of Statistics, Universität Stockholm, 1973.
- BOURKE, P.D., DALENIUS, T. (1975)
Some New Ideas in the Realm of Randomized Inquiries. Report No. 5 Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1975.

- BOURKE, P.D., DALENIUS, T. (1976)
Some New Ideas in the Realm of Randomized Inquiries. International Statistical Review, 44(1976), S.219-221.
- BRADBURN, N., SUDMAN, S. and Associates (1979)
Improving Interview Method and Questionnaire Design. San Francisco, 1979.
- BROWN, G.H., HARDING, F.D. (1973)
A Comparison of Methods for Studying Illicit Drug Usage. Technical Report 73-79, Human Resources Research Organisation, 1973.
- BÜRGIN, G. (1980)
Zur Novellierung des Bundesstatistikgesetzes. Wirtschaft und Statistik, 1980, S.501-508.
- BUNDESDATENSCHUTZGESETZ (1977)
Gesetz zum Schutz vor Mißbrauch personenbezogener Daten bei der Datenverarbeitung (Bundesdatenschutzgesetz - BDSG) vom 27. Januar 1977. Bundesgesetzblatt 1977, Teil I, S.201-214.
- BUNDESSTATISTIKGESETZ (1980)
Gesetz über die Statistik für Bundeszwecke (Bundesstatistikgesetz - BStatG) vom 14.3.1980. Bundesgesetzblatt 1980, Teil I, S.289-293.
- BUNDESVERFASSUNGSGERICHT (1970)
Beschluß vom 16. Juli 1969 (1BvL 19/63). Verfassungsmäßigkeit einer Repräsentativstatistik (Mikrozensus). Entscheidungen des Bundesverfassungsgerichts, 27(1970), Nr. 1, S.1-10.
- CAMPBELL, C., JOINER, B.L. (1973)
How to Get the Answer Without Being Sure You've Asked the Question. The American Statistician, 27(1973), S.229-231.
- CARIFIO, J., BIRON, R. (1978)
Collecting Sensitive Data Anonymously - The CDRGP Technique. Journal of Alcohol and Drug Education, 23(1978), S.47-66.
- CASSEL, C.M., SÄRNDAL, C.E., WRETMAN, J.H. (1977)
Foundations of Inference in Survey Sampling. London etc., 1977.
- CHEN, T.T. (1978)
Log-linear Models for the Categorical Data Obtained from Randomized Response Techniques. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1978, S.284-288.
- CHEN, T.T. (1979)
Analysis of Randomized Response as Purposively Misclassified Data. American Statistical Association, Proceedings of the Survey Research Methods Section, 1979, S.158-163.

- CHOW, L.P., GRUHN, W., CHANG, W.P. (1979)
Feasibility of the Randomized Response Technique in Rural Ethiopia. American Journal of Public Health, 69(1979), S.273-276.
- CLICKNER, R.P., IGLEWICZ, B. (1976,1980)
Warner's Randomized Response Technique: The Two Sensitive Question Case. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1976, S.260-263. South African Statistical Journal, 14(1980), S.77-86.
- COCHRAN, W.G. (1952)
The χ^2 Test of Goodness of Fit. Annals of Mathematical Statistics, 23(1952), S.315-345.
- COCHRAN, W.G. (1968)
Errors of Measurement in Statistics. Technometrics, 10 (1968), S.637-665.
- COCHRAN, W.G. (1977)
Sampling Techniques. 3rd ed., New York etc., 1977.
- COCHRAN, W.G., MOSTELLER, F., TUCKEY, J. (1953)
Statistical Problems of the Kinsey Report. Journal of the American Statistical Association, 48(1953), S.673-716.
- DALENIUS, T. (1974)
The Invasion of Privacy Problem and Statistics Production - An Overview. Statistisk Tidskrift, 12(1974), S.213-225.
- DALENIUS, T. (1975)
Confidentiality in Surveys. A Research Report. Report No. 1, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universitat Stockholm, 1975.
- DALENIUS, T. (1977a)
Privacy Transformations for Statistical Information Systems. Journal of Statistical Planning and Inference, 1(1977), S.73-86.
- DALENIUS, T. (1977b)
Bibliography on Non-Sampling Errors in Surveys. International Statistical Review, 45(1977), S.71-89,181-197,303-317.
- DALENIUS, T. (1978)
Informed Consent or R.S.V.P. Report No. 32, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universitat Stockholm, 1978.
- DALENIUS, T., KLEVMARKEN, A. (ed.) (1976)
Personal Integrity and the Need for Data in the Social Sciences. Proceedings of a symposium held at Hasselby Slott, Stockholm, Stockholm, 1976.

- DALENIUS, T., VITALE, R.A. (1974)
A New Randomized Response Design for Estimating the Mean of a Distribution. Report No. 78, Research Project Errors in Surveys, Department of Statistics, Universitat Stockholm, 1974.
- DANIEL, W.W. (1979)
Collecting Sensitive Data by Randomized Response: An Annotated Bibliography. Research Monograph No. 85, College of Business Administration/Georgia State University, Atlanta, 1979.
- DAWES, R.M. (1974)
Guttman Scaling Randomized Responses: A Technique for Evaluating the Underlying Structures of Behaviors to which People May not Wish to Admit. Oregon Research Institute, University of Oregon, 1974.
- DELACY, P.W. (1975)
Randomized Conditional Response. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1975, S.383-386.
- DEVORE, J.L. (1977)
A Note on the Randomized Response Technique. Communications in Statistics - Theory and Methods, 6(1977), S.1525-1529.
- DEVORE, J.L. (1979)
Estimating a Population Proportion Using Randomized Responses. Mathematics Magazin, 52(1979), S.38-40.
- DOWLING, T.A., SHACHTMAN, R. (1975)
On the Relative Efficiency of Randomized Response Models. Journal of the American Statistical Association, 70(1975), S.84-87.
- DRANE, W. (1975)
Randomized Response to More than One Question. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1975, S.395-397.
- DRANE, W. (1976a)
On the Theory of Randomized Responses to Two Sensitive Questions. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1976, S.282-285.
- DRANE, W. (1976b)
Correction to 'On the Theory of Randomized Responses to Two Sensitive Questions'. Communications in Statistics - Theory and Methods, 5(1976), S.1552.
- DRANE, W. (1976c)
On the Theory of Randomized Responses to Two Sensitive Questions. Communications in Statistics - Theory and Methods, 5(1976), S.565-574.

- DUNCAN, J.W. (1976)
Confidentiality and the Future of the U.S. Statistical System. *The American Statistician*, 30(1976), S.54-58.
- ERIKSSON, S.A. (1973)
A New Model for Randomized Response. *International Statistical Review*, 41(1973), S.101-113.
- ERIKSSON, S. (1976a)
Some Sampling Theory for Surveys with Randomized Response Interviews. Report No. 8, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1976.
- ERIKSSON, S. (1976b)
Regressions Analysis of Data from Randomized Interviews. Report No. 17, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1976.
- EULER, M. (1977)
Einkommens- und Verbrauchsstichprobe 1978. *Wirtschaft und Statistik*, 1977, S.576-579.
- FELLEGI, I.P. (1972)
On the Question of Statistical Confidentiality. *Journal of the American Statistical Association*, 67(1972), S.7-18.
- FERRARI, P.A. (1978)
Il Test Sequenziale di Wald nel Campionamento con Risposte Casualizzate. *Statistica*, 38(1978), S.481-492.
- FIDLER, D.S., KLEINKNECHT, R.E. (1977)
Randomized Response Versus Direct Questioning: Two Data-Collection Methods for Sensitive Information. *Psychological Bulletin*, 84(1977), S.1045-1049.
- FLIGNER, M.A., POLICELLO II, G.E., SINGH, J. (1977)
A Comparison of Two Randomized Response Survey Methods with Consideration for the Level of Respondent Protection. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 6(1977), S.1511-1524.
- FOLSOM, R.E. (1974)
A Randomized Response Validation Study: Comparison of Direct and Randomized Reporting of DUI Arrests. Final Report 25U-807, Statistics Research Division, Research Triangle Institute, prepared for Research Center for Measurement Methods, Bureau of the Census, 1974.
- FOLSOM, R.E., GREENBERG, B.G., HORVITZ, D.G., ABERNATHY, J.R. (1973)
The Two Alternate Questions Randomized Response Model for Human Surveys. *Journal of the American Statistical Association*, 68(1973), S.525-530.

- FRANKEL, L.R. (1969)
The Role of Accuracy and Precision of Response in Sample Surveys. In: Johnson, N.L., Smith, H. (eds.), New Developments in Survey Sampling, New York etc., 1969, S.439-456.
- FRANKEL, L.R. (1976)
Statistics and People - Statistician's Responsibilities. Journal of the American Statistical Association, 71(1976), S.9-16.
- FRANKEL, M.R., FRANKEL, L.R. (1977)
Some Recent Developments in Sample Survey Design. Journal of Marketing Research, 14(1977), S.280-293.
- GELLES, R.J. (1978)
Methods for Studying Sensitive Family Topics. American Journal of Orthopsychiatry, 48(1978), S.408-424.
- GERSTEL, E.K., MOORE, P., FOLSOM, R.E., KING, D.A. (1970)
Mecklenburg County Drinking - Driving Attitude Survey. Report prepared for U.S. Department of Transportation, Research Triangle Institute, 1970.
- GEURTS, M.D., ANDRUS, R.R., REINMUTH, J. (1975)
Researching Shoplifting and Other Deviant Customer Behavior, Using the Randomized Response Research Design. Journal of Retailing, 51(1975), S.43-48.
- GODAMBE, V.P. (1980)
Estimation in Randomised Response Trials. International Statistical Review, 48(1980), S.29-32.
- GOLDFIELD, E.D., TURNER, A.G., COWAN, C.D., SCOTT, J.C. (1977)
Privacy and Confidentiality as Factors in Survey Response. (mit Diskussion). American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1977, S.219-231.
- GOODSTADT, M.S., GRUSON, V. (1975)
The Randomized Response Technique: A Test on Drug Use. Journal of the American Statistical Association, 70(1975), S.814-818.
- GOODSTADT, M.S., COOK, G.C., GRUSON, V. (1978)
The Validity of Reported Drug Use: The Randomized Response Technique. The International Journal of the Addictions, 13(1978), S.359-367.
- GOULD, A.L., SHAH, B.V., ABERNATHY, J.R. (1969)
Unrelated Question Randomized Response Techniques with Two Trials per Respondent. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1969, S.351-359.

- GREENBERG, B.G., ABUL-ELA, A.L., SIMMONS, W.R., HORVITZ, D.G. (1969a)
The Unrelated Question Randomized Response Model: Theoretical Framework. Journal of the American Statistical Association, 64(1969), S.520-539.
- GREENBERG, B.G., ABERNATHY, J.R., HORVITZ, D.G. (1969b)
Application of the Randomized Response Technique in Obtaining Quantitative Data. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1969, S.40-43.
- GREENBERG, B.G., ABERNATHY, J.R., HORVITZ, D.G. (1970)
A New Survey Technique and its Application in the Field of Public Health. The Milbank Memorial Fund Quarterly, 48 (1970), S.39-55.
- GREENBERG, B.G., KUEBLER, R.R., ABERNATHY, J.R., HORVITZ, D.G. (1971)
Application of the Randomized Response Technique in Obtaining Quantitative Data. Journal of the American Statistical Association, 66(1971), S.243-250.
- GREENBERG, B.G., HORVITZ, D.G., ABERNATHY, J.R. (1974)
A Comparison of Randomized Response Designs. In: Prochan, F., Serfling, R.J. (eds.), Reliability and Biometry: Statistical Analysis of Lifelength. SIAM, Philadelphia, 1974, S.787-815.
- GREENBERG, B.G., KUEBLER, R.R., ABERNATHY, J.R., HORVITZ, D.G. (1977)
Respondent Hazards in the Unrelated Question Randomized Response Model. Journal of Statistical Planning and Inference, 1(1977), S.53-60.
- GROHMANN, H. (1980)
Podiumsdiskussion zum Thema "Vielseitige Nutzung statistischer Einzelangaben und Datenschutz". Diskussionsleiter: Grohmann, H., Diskussionsteilnehmer: Bürgin, G., Krupp, H.-J., Simitis, S. Allgemeines Statistisches Archiv, 64 (1980), S.39-75.
- HANSEN, M.H., HURWITZ, W.H., MADOW, W.G. (1953a,b)
Sample Survey Methods and Theory. Vol.1(a): Methods and Applications, Vol.2(b): Theory. London etc. 1953.
- HARTER, H.L., OWEN, D.B. (eds.) (1973)
Selected Tables in Mathematical Statistics. Vol. I, 2. Aufl., Providence, 1973.
- HIMMELFARB, S., EDGELL, S.E. (1980)
Additive Constants Model: A Randomized Response Technique for Eliminating Evasiveness to Quantitative Response Questions. Psychological Bulletin,87(1980), S.525-530.

- HINDERER, K. (1975)
Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Korr. Nachdruck d. 1. Aufl., Berlin etc., 1975.
- HOCHBERG, Y. (1975)
Two Stage Randomized Response Schemes for Estimating a Multinomial. Communications in Statistics 4(1975), S.1021-1032.
- HOCHBERG, Y., STUTTS, J.C., REINFURT, D.W. (1976)
The Randomized Response Technique: A Review and Application. Highway Safety Research Center, Chapel Hill, 1976.
- HORVITZ, D.G., SHAH, B.V., SIMMONS, W.R. (1967)
The Unrelated Question Randomized Response Model. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1967, S.65-72.
- HORVITZ, D.G., GREENBERG, B.G., ABERNATHY, J.R. (1975a)
Recent Developments in Randomized Response Designs. In: Srivastava, J.N. (ed.), A Survey of Statistical Design and Linear Models, Amsterdam etc., 1975, S.271-285.
- HORVITZ, D.G., GREENBERG, B.G., ABERNATHY, J.R. (1975b)
The Randomized Response Technique. In: Sinaiko, H.W., Broedling, L.A. (eds.), Proceedings of Conference on Perspectives on Attitude Assessment: Surveys and their Alternatives, Smithsonian Institution, Washington, D.C., 1975, S.199-216.
- HORVITZ, D.G., GREENBERG, B.G., ABERNATHY, J.R. (1976)
Randomized Response: A Data-Gathering Device for Sensitive Questions. (mit Diskussion). International Statistical Review, 44(1976), S.181-230.
- IIT RESEARCH INSTITUTE AND THE CHICAGO CRIME COMMISSION (1971)
A Study of Organized Crime in Illinois. Report Prepared for the Illinois Law Enforcement Commission, Chicago, Illinois, 1971.
- I-CHENG, C., CHOW, L.P., RIDER, R.V. (1972)
The Randomized Response Technique as Used in the Taiwan Outcome of Pregnancy Study. Studies in Family Planning, 3 (1972), S.265-269.
- JESSEN, R.J. (1978)
Statistical Survey Techniques. New York etc., 1978.
- JOHNSON, N.L., KOTZ, S. (1970)
Distributions in Statistics, Continours Univariate Distributions - 2. Boston etc., 1970.
- JOHNSON, N.L., KOTZ, S. (1977)
Urn Models and their Application. An Approach to Modern Discrete Probability Theory. New York etc., 1977.

- JOHNSON, W.T., DELAMATER, J.D. (1976)
Response Effects in Sex Surveys. Public Opinion Quarterly, 40(1976), S.165-181.
- KIM, J.I., FLUECK, J.A. (1976)
A Review of Randomized Response Models and Some New Results. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1976, S.477-482.
- KIM, J.I., FLUECK, J.A. (1978a)
An Additive Randomized Response Model. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1978, S.351-355.
- KIM, J.I., FLUECK, J.A. (1978b)
Modifications of the Randomized Response Technique for Sampling without Replacement. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1978, S.346-350.
- KISH, L. (1965)
Survey Sampling. New York etc., 1965.
- KRAEMER, H.C. (1980)
Estimating and Testing of Bivariate Association Using Data Generated by RRT. Psychological Bulletin, 87(1980), S.304-308.
- KROTKE, K.J., FOX, B. (1974)
The Randomized Response Technique, the Interview, and the Self-Administered Questionnaire: An Empirical Comparison of Fertility Reports. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1974, S.367-371.
- KROTKE, K.J., McDANIEL, S.A. (1975)
Three Estimates of Illegal Abortion in Alberta, Canada: Survey, Mailback and Randomized Response Technique. Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings of the 40th Session, Vol. 4 - Contributed Papers, Warschau, 1975, S.67-70.
- KRUPP, H.J. (1977)
Datenschutz und die Verwendung von Mikrodaten in der Forschung. Bericht von einer internationalen Konferenz in Belgien vom 16. bis 20.8.1977. Allgemeines Statistisches Archiv, 61(1977), S.198-202.
- LAMB, C.W., STEM, D.E. (1978)
An Empirical Validation of the Randomized Response Technique. Journal of Marketing Research, 15(1978), S.616-621.

- LANKE, J. (1975)
On the Choice of the Unrelated Question in Simon's Version of Randomized Response. Journal of the American Statistical Association, 70(1975), S.80-83.
- LANKE, J. (1976)
On the Degree of Protection in Randomized Interviews. International Statistical Review, 44(1976), S.197-203.
- LEVY, K.J. (1976a)
The Randomized Response Technique and Large Sample Pairwise Comparisons Among the Parameters of k Independent Binomial Populations. The British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 29(1976), S.257-262.
- LEVY, K.J. (1976b)
Reducing the Occurrence of Omitted or Untruthful Responses When Testing Hypotheses Concerning Proportions. Psychological Bulletin, 83(1976), S.759-761.
- LEVY, K.J. (1977a)
The Randomized Response Technique and Large Sample Comparisons Among the Parameters of k Independent Binomial Populations. Psychological Bulletin, 84(1977), S.244-246.
- LEVY, K.J. (1977b)
The Randomized Response Technique and Appropriate Sample Sizes for Selecting the Population with the Largest Value of π from Among k Binomial Populations. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 30(1977), S.234-236.
- LEVY, K.J. (1978)
Sample-Size Comparisons Involving the Randomized Response Technique. Journal of Experimental Education, 47(1978), S.21-23.
- LEYSIEFFER, F.W., WARNER, S.L. (1976)
Respondent Jeopardy And Optimal Designs in Randomized Response Models. Journal of the American Statistical Association, 71(1976), S.649-656.
- LIU, P.T., CHOW, L.P., MOSLEY, W.H. (1975)
Use of the Randomized Response Technique With a New Randomizing Device. Journal of the American Statistical Association, 70(1975), S.329-332.
- LIU, P.T., CHOW, L.P. (1976a)
The Efficiency of the Multiple Trial Randomized Response Technique. Biometrics, 32(1976), S.607-618.
- LIU, P.T., CHOW, L.P. (1976b)
A New Discrete Quantitative Randomized Response Model. Journal of the American Statistical Association, 71(1976), S.72-73.

- LIU, P.T., CHEN, C.N., CHOW, L.P. (1976)
A Study of the Feasibility of Hopkins Randomized Response Models. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1976, S.561-566.
- LOCANDER, W., SUDMAN, S., BRADBURN, N. (1974,1976)
An Investigation of Interview Method, Threat and Response Distortion. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1974, S.21-27, und Journal of the American Statistical Association, 71(1976), S.269-275.
- LOYNES, R.M. (1976a)
Asymptotically Optimal Randomized Response Procedures: An Abstract. International Statistical Review, 44(1976), S.225.
- LOYNES, R.M. (1976b)
Asymptotically Optimal Randomized Response Procedures. Journal of the American Statistical Association, 71(1976), S. 924-928.
- MADIGAN, F.C., ABERNATHY, J.R., HERRIN, A.N., TAN, C. (1976)
Purposive Concealment of Death in Household Surveys in Misamis Oriental Province. Population Studies, 30(1976), S.259-303.
- MARASINI, D. (1978)
La Stratificazione nel Campionamento con Riposte Casualizzate. Statistica, 38(1978), S.493-506.
- MARBACH, G. (1975)
Sull' Uso di Quesiti che Tutelano Completamente la Riservatezza dell' Informazione. Metron, 33(1975), S.309-334.
- McALISTER, A.L., PERRY, C., MACOBY, N. (1979)
Adolescent Smoking: Onset and Prevention. Pediatrics, 63(1979), S.650-658.
- MENDENHALL, W., OTT, L., SCHAEFFER, R.L. (1971)
Elementary Survey Sampling. Belmont, 1971.
- MOOD, A.M., GRAYBILL, F.A., BOES, D.C. (1974)
Introduction to the Theory of Statistics. New York etc., 1974.
- MOORS, J.J.A. (1971)
Optimization of the Unrelated Question Randomized Response Model. Journal of the American Association, 66(1971), S.627-629.
- MORIARTY, M., WISEMAN, F. (1976)
On the Choice of a Randomization Technique With the Randomized Response Model. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1976, S.624-626.

- MOSER, C., KALTON, G. (1971)
Survey Methods in Social Investigation. 2nd ed., London, 1971.
- MOTE, V.L., ANDERSON, R.L. (1965)
An Investigation of the Effect of Misclassification on the Properties of χ^2 -Tests in the Analysis of Categorical Data. *Biometrika*, 52(1965), S.95-109.
- NOETHER, G.E. (1976)
Introduction to Statistics: A Nonparametric Approach. 2nd ed., Boston etc., 1976.
- NORDEN, R.H. (1972, 1973)
A Survey of Maximum Likelihood Estimation. *International Statistical Review*, 40(1972), S.329-354, 41(1973), S.39-58.
- O'BRIEN, D.M., COCHRAN, R.S. (1977)
The Comprehension Factor in Randomized Response. *American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section*, 1977, S.270-272.
- O'BRIEN, D.M., COCHRAN, R.S. (1978)
The Effect of Less Than Complete Truthfulness On a Quantitative Randomized Response Model. *American Statistical Association, Proceedings of Business and Economics Statistics Section*, 1978, S.743-747.
- ORKIN, M., DROGIN, R. (1975)
Vital Statistics. New York etc., 1975.
- PEARL, R.L., FEDERER, W. T. (1975)
Varying Levels of Probability for Selecting Sensitive Questions Using a Randomized Response Technique. *American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section*, 1975, S.584-587.
- POHL, B.B., POHL, N.F. (1975)
Random Response Techniques for Reducing Non-Sampling Error in Interview Survey Research. *Journal of Experimental Education*, 44(1975), S.48-53.
- POLLOCK, K.H., BEK, Y. (1976)
A Comparison of Three Randomized Response Models for Quantitative Data. *Journal of the American Statistical Association*, 71(1976), S.884-886.
- POOLE, W.K. (1974)
Estimation of the Distribution Function of a Continuous Type Random Variable Through Randomized Response. *Journal of the American Statistical Association*, 69(1974), S.1002-1005.

- RAGHAVARAO, D. (1978)
On an Estimation Problem in Warner's Randomized Response Technique. *Biometrics*, 34(1978), S.87-90.
- RAGHAVARAO, D., FEDERER, W.T. (1979)
Block Total Response as an Alternative to the Randomized Response Method in Surveys. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B(Methodological)*, 41(1979), S.40-45.
- RAJ, D. (1966)
Some Remarks on a Simple Procedure of Sampling without Replacement. *Journal of the American Statistical Association*, 61(1966), S.391-396.
- RAJ, D. (1968)
Sampling Theory. Bombay-New Delhi, 1968.
- RAO, C.R. (1973)
Linear Statistical Inference and Its Applications. 2nd ed., New York etc., 1973.
- REINMUTH, J.E., GEURTS, M.D. (1975)
The Collection of Sensitive Information Using a Two-Stage Randomized Response Model. *Journal of Marketing Research*, 12(1975), S.402-407.
- RIDER, R.V., HARPER, P.A., CHOW, L.P., I-CHENG, C. (1976)
Comparison of Four Methods for Determining Prevalence of Induced Abortion, Taiwan, 1970-71. *American Journal of Epidemiology*, 103(1976), S.37-50.
- ROSENBLATT, R.R., KELLY, E.L. (1978)
A Comparison of the Sensitivity of the Unrelated Question Randomized Response Model With Three Other Data Accumulation Techniques Using Examination Cheating As a Model. *American Statistical Association, Proceedings of the Survey Research Methods Section*, 1978, S.356-361.
- SCHÄFFER, K.A. (1977)
Artikel: Statistik, Fehler in der. *Handwörterbuch der Wirtschaftswissenschaft (HdWW)*, Band 7, Stuttgart etc., 1977, S.233-238.
- SEN, P.K. (1974)
On Unbiased Estimation for Randomized Response Models. *Journal of the American Statistical Association*, 69(1974), S.997-1001.
- SEN, P.K. (1976)
Asymptotically Optimal Estimators of General Parameters in Randomized Response Models. *International Statistical Review*, 44(1976), S.223-224.

- SHIMIZU, I.M., BONHAM, G.S. (1976)
Randomized Response Technique in a National Survey. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1976, S.761-765.
- SHIMIZU, I.M., BONHAM, G.S. (1978)
Randomized Response Technique in a National Survey. Journal of the American Statistical Association, 73(1978), S.35-39.
- SHIMIZU, I. (1979)
Experience with Randomized Response Technique to Estimate Prevalence of Abortion. International Statistical Institute, Contributed Papers, 42nd Session, Manila, 1979, S.487-491.
- SIMITIS, S., DAMMANN, U., MALLMANN, O., REH, H.J. (1979)
Kommentar zum Bundesdatenschutzgesetz. 2. Aufl., Baden-Baden, 1979.
- SINGER, E. (1978)
Informed Consent. American Sociological Review, 43(1978), S.144-161.
- SINGH, J. (1976)
A Note on the Randomized Response Technique. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1976, S.772.
- SINGH, J. (1978)
A Note on Maximum Likelihood Estimation from Randomised Response Models. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1978, S.282-283.
- SKARABIS, H. (1976)
Statistical Problems Concerning Misleading Replies in Sample Surveys of Human Populations. Compstat 1976, Proceedings in Computational Statistics, 2nd Symposium, Berlin (West), 1976, S.264-271.
- SMITH, E.P., SOSNOWSKI, T.S. (1972)
Faculty Evaluations by Randomized Response Sampling. The Journal of Experimental Education, 41(1972), S.70-72.
- SMITH, L.L., FEDERER, W.T., RAGHAVARAO, D. (1974)
A Comparison of Three Techniques for Eliciting Truthful Answers to Sensitive Questions. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1974, S.447-452.
- SPURRIER, J.D., PADGETT, W.J. (1980)
The Application of Bayesian Techniques in Randomized Response. in: Schuessler, K.F. (ed.), Sociological Methodology 1980, San Francisco etc., 1980.

- STENGER, H. (1977)
Antwortvariabilität als Fehlerquelle. Allgemeines Statistisches Archiv, 61(1977), S.391-403.
- STRECKER, H. (1978)
Zur Genauigkeit statistischer Daten. in: Born, K.E. (Hrsg.), Gegenwartsprobleme der Wirtschaft und der Wirtschaftswissenschaft, Tübingen, 1978, S.85-115.
- STRECKER, H. (1980)
Model for the Decomposition of Errors in Statistical Data into Components, and the Ascertainment of Respondent Errors by Means of Accuracy Checks. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 195(1980), S.385-420.
- SUDMAN, S. (1980)
Reducing Response Error in Surveys. The Statistician, 29 (1980), S.237-273.
- SUDMAN, S., BRADBURN, N.M. (1974)
Response Effects in Surveys: A Review and Synthesis. Chicago, 1974.
- SUZUKI, T., TAKAHASI, K., SAKASEGAWA, H. (1977)
Some Notes on Randomized Response Techniques. Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, 24 (1977), S.1-13.
- SWENSSON, B. (1972)
Stratified Randomized Response with the Special Case: A Combined Use of Regular Interview and Randomized Response Interview. Report No. 45, Research Project Errors in Surveys, Institute of Statistics, Universität Stockholm, 1972.
- SWENSSON, B. (1974)
Combined Questions: A New Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias. Part One: Basic Theory. Report No. 70, Research Project Errors in Surveys, Institute of Statistics, Universität Stockholm, 1974.
- SWENSSON, B. (1975)
Combined Independent Questions I. Report No. 7, Research Report Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1975.
- SWENSSON, B. (1976a)
Combined Independent Questions II. Report No. 11, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1976.
- SWENSSON, B. (1976b)
A Note on Relations Among One-Sample Randomized Response Techniques for Dichotomies. Report No. 12, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1976.

- SWENSSON, B. (1976c)
Combined Independent Questions versus Randomized Response, Efficiencies Under Equal Degree of Protection. Report No. 15, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1976.
- SWENSSON, B. (1976d)
Using Mixtures of Techniques for Estimating Sensitive Attributes. Report No. 13, Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1976.
- TAKAHASI, K., SAKASEGAWA, H. (1977)
A Randomized Response Technique Without Making Use of Any Randomizing Device. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 29(1977), S.1-8.
- TAMHANE, A.C. (1977)
A Randomized Response Technique for Investigating Several Sensitive Attributes. American Statistical Association, Proceedings of the Social Statistics Section, 1977, S.273-278.
- THEDEEN, T. (1975)
Value-Indifferent Observation Schemes. Report No. 3. Research Project Confidentiality in Surveys, Department of Statistics, Universität Stockholm, 1975.
- VERDOOREN, L.R. (1976)
Loten bij delicate vragen; een overzicht van "randomized response" - technieken. Statistica Neerlandica, 30(1976), S.7-24.
- WARNER, S.L. (1965)
Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias. Journal of the American Statistical Association, 60(1965), S.63-69.
- WARNER, S.L. (1971)
The Linear Randomized Response Model. Journal of the American Statistical Association, 66(1971), S.884-888.
- WARNER, S.L. (1976)
Optimal Randomized Response Models. International Statistical Review, 44(1976), S.205-212.
- WILLIAMS, B. (1978)
A Sampler on Sampling. New York etc., 1978.
- WINKLER, R.L., FRANKLIN, L.A. (1979)
Warner's Randomized Response Model: A Bayesian Approach. Journal of the American Statistical Association, 74(1979), S.207-214.

WISEMAN, F. (1972)

Methodological Bias in Public Opinion Surveys. The Public Opinion Quarterly, 36(1972), S.105-108.

WISEMAN, F., MORIARTY, M., SCHAFFER, M. (1975)

Estimating Public Opinion With the Randomized Response Model. The Public Opinion Quarterly, 39(1975), S.507-513.

ZDEP, S.M., RHODES, I.N. (1976)

Making the Randomized Response Technique Work. The Public Opinion Quarterly, 40(1976), S.531-537.

ZDEP, S.M., RHODES, I.N., SCHWARZ, R.M., KILKENNY, M.J. (1979)

The Validity of the Randomized Response Technique. The Public Opinion Quarterly, 43(1979), S.544-549.

FOLKERS, CAY

VERMÖGENSVERTEILUNG UND STAATLICHE AKTIVITÄT

Zur Theorie distributiver Prozesse im Interventionsstaat

Frankfurt/M., Bern, 1981. VIII, 380 S.

FINANZWISSENSCHAFTLICHE SCHRIFTEN. Bd. 14

ISBN 3-8204-6191-4

br. sFr. 49.-- *)

Die Untersuchung hat das Ziel, eine theoretische Analyse der Funktionen und Bestimmungsgründe der Vermögensverteilung unter besonderer Berücksichtigung der Beziehungen zu den ökonomischen Aktivitäten des Staates zu entwerfen. Sie will zu einer Neuformulierung von Konzepten und Systemzusammenhängen der Vermögensverteilung beitragen, um eine fundierte Beurteilung verteilungspolitischer Maßnahmen des Staates bezüglich des Vermögens zu ermöglichen.

Aus dem Inhalt: U.a. Die Vermögensfunktionen - Die langfristige Inzidenz vermögenspolitischer Maßnahmen - Die private Vermögensverteilung aus neoklassischer und neok Keynesianischer Sicht - Machtfunktion und Vermögensverteilung - Die Vermögensverteilung zwischen ökonomischen Abhängigkeiten und staatlichem Eingriff - Private Vermögensverteilung und öffentliches Vermögen.

KIENAST, ROLF

AKTIENANALYSE

Möglichkeiten rationaler Anlageentscheidungen

Frankfurt/M., Bern, Las Vegas, 1977. 258 S.

EUROPÄISCHE HOCHSCHULSCHRIFTEN: Reihe 5, Volks- und Betriebswirtschaft. Bd. 156

ISBN 3-261-02945-5

br. sFr. 43.-- *)

Der Kauf einer kotierten Aktie stellt den Anleger vor das Entscheidungsproblem, aus einer Vielzahl möglicher Kaufalternativen jene auszuwählen, die seinen Nutzererwartungen am ehesten entspricht. Die Aktienanalyse versucht, für solche Wahlsituationen Entscheidungsgrundlagen zu erarbeiten, um die Aktienanlage einer möglichst rationalen Beurteilung zugänglich zu machen. Die vorliegende Untersuchung bezweckt, die grundsätzlichen Möglichkeiten rationaler Aktienanlageentscheidungen aufzuzeigen und kritisch zu beurteilen.

Aus dem Inhalt: Der Aktienkauf als Entscheidungsproblem - Inhaltliche Deutung der Entscheidungselemente: Anlageziele, Kaufalternativen, relevante Umweltkonstellation für den Anleger, Möglichkeiten der Aktienbewertung.

*) unverbindliche Preisempfehlung

Auslieferung: Verlag Peter Lang AG, Jupiterstr. 15, CH-3015 Bern

