



Elementare! (Pohlke): osservazioni sul teorema fondamentale dell'assonometria

Fabrizio Gay

Abstract

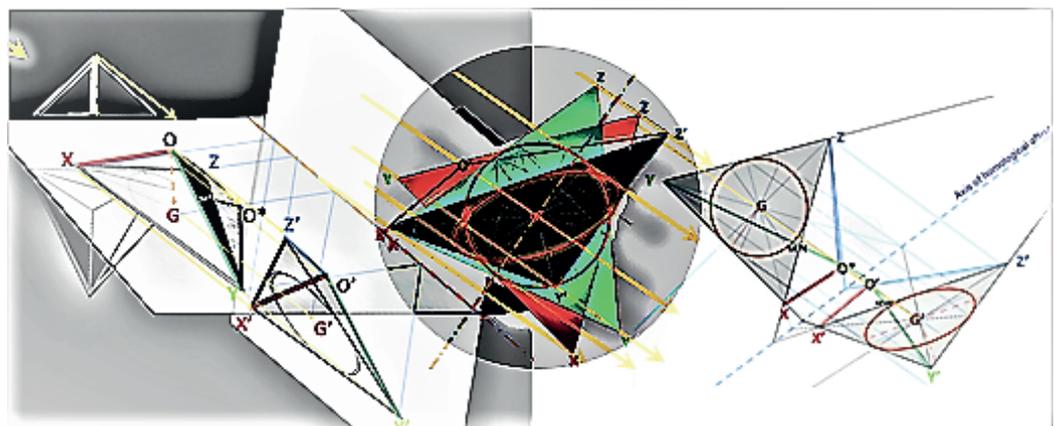
Le dimostrazioni del teorema di Pohlke hanno raggiunto un'elegante semplicità formulata in termini di algebra lineare e vettoriale [Manfrin 2018] divenendo utili strumenti per la modellazione e la trasformazione digitale delle immagini. Invece le dimostrazioni grafiche del teorema sono scomparse negli odierni manuali didattici, anche se quel teorema resta uno strumento essenziale dell'ortografia immaginativa praticata col disegno. Qui, partendo da considerazioni psicologiche sulla evidenza dimostrativa in termini visivi, proponiamo una nuova dimostrazione del teorema per via proiettiva e grafica basata solo su due lemmi: 1) l'unicità dell'*inellisse di Steiner* per ogni triangolo e 2) l'esistenza di due infinite di affinità omologiche piane con centro nella rilevata direzione di proiezione che trasformano un qualsiasi triangolo in equilatero. Ciò consente di svolgere la dimostrazione graficamente ed elementarmente, in doppia proiezione ortogonale.

Parole chiave

Teorema di Pohlke, assonometria, dimostrazioni grafiche, visualizzazioni geometriche

Topic

Comprendere



Nuova dimostrazione del teorema di Pohlke basata sull'unicità in un triangolo dell'*inellisse di Steiner*. Grafico dell'autore.

Misurare l'evidenza

“Avendogli una volta dichiarato di non vedere la verità di un'affermazione, che egli [Federigo Enriques] riteneva evidente, ma che invano avevamo tentato di dimostrare logicamente, egli si fermò di botto (eravamo nel corso di una delle abituali passeggiate) e, invece di tentare un'ultima dimostrazione, roteò il suo bastone appuntandolo sopra un cagnolino sul davanzale di una finestra, dicendomi: non vede? Per me è come se mi dicesse che non vede quel cagnolino!” [Brigaglia, Ciliberto 1998 p. 247]. Lo spettacolo fenomenico dell'ombra solare portata su un piano dai tre spigoli afferenti al vertice di un cubo – o dai tre raggi triortogonali di una sfera – è trascritto nel celebre teorema che Karl Wilhelm Pohlke formulava nel 1853: tre qualsiasi segmenti del piano $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (con un estremo O' in comune), purché non siano tutti e tre allineati e non più di uno sia nullo, possono sempre significare l'immagine per proiezione parallela di tre segmenti OX , OY , OZ nello spazio tra loro congruenti e triortogonali nel loro punto comune O .

Non elencheremo le diverse dimostrazioni della congettura di Pohlke, essendo storia ripercorsa da tanti saggi in più di un secolo e mezzo [Cunningham 1868; Emch 1918; Loria 1921; Bertan 1994; Candito 2003; Sklenáriková, Pémová 2007; De Carlo 2012]. Quella bibliografia arriva fino a oggi perché quel bel teorema induce almeno due aspettative: 1°) che le sue diverse dimostrazioni “dicano la stessa cosa” inter-traducendosi tra loro; 2°) che all'elementare spettacolo fenomenico che lo esemplifica consegua una sua dimostrazione altrettanto semplice ed evidente.

Le dimostrazioni del teorema differiscono tra loro per i presupposti assunti. Anche limitandoci a quelle sintetiche, ciascuna si focalizza su aspetti e lemmi diversi richiedendo diversi strumenti concettuali e risultando più o meno agevole delle altre alla verifica grafica con mezzi analogici o digitali. È noto che lo stesso Pohlke non pubblicò una dimostrazione del suo teorema [Pohlke 1860: § 113], pur avendola subito abbozzata; egli, nell'ultima edizione della sua *Darstellende Geometrie* (1876), preferì pubblicare quella che formulò sedici anni prima un suo studente allora diciannovenne – Herman Schwarz – ritenendola più “elementare” della sua. L'elementarità di una proposizione geometrica è la sua capacità – in quanto argomentazione sillogistica – di poter addurre il minor numero di lemmi intuitivi anche nelle loro reciproche connessioni. L'economia argomentativa è misurabile col calcolo logico, invece la “evidenza” è questione di “geometria e fisica ingenua” [Bozzi 1996] che si può misurare con la psicologia del ragionamento sensibile. Il “saper vedere” è un vissuto percettivo, immaginativo e raffigurativo – un pattern cognitivo di natura ottica (proiettiva) e aptica (metrica). È un'attitudine che la dialettica classica ha cercato di disciplinare, come Platone esemplificava nel dialogo col povero schiavo di *Menone* condotto a trovare e dimostrare la misura del lato del quadrato di area doppia di un quadrato dato che, all'occorrenza, gli viene servito già diviso dalle sue diagonali in quattro spicchi pronti da ribaltare intorno ai lati per raddoppiare l'area. Con la tesi platonica del *Menone*, forse, concorderebbe anche il grande geometra Federigo Enriques, il quale, tuttavia, non credo accettasse le conclusioni che Platone traeva nel *Teeteto*, dove nega che la ragione geometrica e discorsiva sia una verità epistemica conoscibile attraverso la sensazione [*aistesis*]. All'opposto, Enriques sosteneva che la geometria ha (kantianamente?) a che fare con l'*aistesis*: fornisce i modelli interocettivi (astratti) del nostro spazio propriocettivo ed estero-cettivo, precisando che “I tre gruppi di rappresentazioni che si legano ai concetti posti a base i) della teoria del continuo (*Analysis situs*), ii) della Geometria metrica e iii) della [*geometria*] proiettiva, si possono riattaccare nella psicogenesi, a tre gruppi di sensazioni: rispettivamente i) alle generali sensazioni tattili-muscolari, ii) a quelle del tatto speciale [*la mano e il piede*] e iii) della vista. Questo risultato ci guida ad una spiegazione psicologica dei postulati della Geometria, e alla sua volta ne riceve conferma.” [Enriques 1906, p. 378].

Pohlke/Schwarz: due scene diverse dello stesso teorema

1) È molto facile mostrare cos'è un'assonometria obliqua; basta indicare le innumerevoli fattezze che possono assumere sul piano le ombre solari di tre bastoncini della stessa lunghezza e vincolati tri-ortogonalmente a un loro estremo comune, come se fossero i tre spigoli uscenti da un vertice di un cubo. 2) Altrettanto evidente è vedere nell'ombra solare di una sagoma piana l'immagine che le corrisponde puntualmente in una prospettiva affine che ha

centro nel Sole e asse nella retta comune tra il piano dell'ombra e quello della sagoma opaca che l'ha gettata. L'ombra solare dei tre spigoli del cubo e quella della sagoma piana sono spettacoli "elementari" perché li possiamo riprodurre praticamente, immaginare facilmente e, immaginandoli, ci esemplificano fenomenicamente proprietà essenziali (elementari) dello spazio proiettivo (2) che fondano un metodo di disegno (1). Ma, esemplificare ("mostrare") non è ancora "dimostrare" e predire (calcolare) graficamente la direzione di proiezione in relazione alla giacitura del piano della figura data.

In questo compito Polke e Schwarz ebbero attitudini immaginative diverse. Forse perché formatosi come pittore e tecnico, Pohlke si avvaleva di una spiccata capacità icastica e stereotomica; invece, il suo giovane allievo Schwarz esprime ben altre doti di astrazione che lo portarono a notevoli risultati nei più svariati campi matematici. Così, Pohlke formulò la dimostrazione della sua congettura in modo iconico, secondo l'evidenza fenomenica dell'ombra solare portata di una sfera (Fig. 01). Supponendo l'esistenza di una sfera di centro O (proiettato in O') si ammette che abbia tre raggi triortogonali (OX , OY e OZ) che proiettano le loro ombre nella direzione OO' sul piano negli omonimi tre segmenti $O'X'$, $O'Y'$ e $O'Z'$ dati sul piano. Allora i tre segmenti nel piano si possono vedere come i semidiametri coniugati a due a due di tre ellissi delle quali si possono ricavare facilmente gli assi. Tali tre ellissi non sarebbero che le ombre proiettate dalla direzione OO' sul piano dato dei tre cerchi massimi della sfera tra loro triortogonali.

Costruendo sul medesimo piano della figura data una quarta ellisse tritangente alle prime tre [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas et al. 2016], questa non sarebbe altro che la curva di contorno apparente (o il contorno d'ombra portata) della supposta sfera proiettata dalla direzione OO' (quella del "Sole"). La dimostrazione si può così ridurre a un problema pratico e grafico (stereotomico): data l'ombra portata di una sfera su un piano orizzontale, determinare l'inclinazione OO' del Sole che la proietta in rapporto alla giacitura del piano della figura data. L'estensione del raggio delle possibili sfere che proiettano quell'ombra è – contrariamente a quanto afferma Loria – indicata dall'asse "minore" dell'ellisse contorno d'ombra portata; l'asse maggiore di quell'ellisse è, semmai, il cateto del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa il raggio di sole che passa per la sua apside.

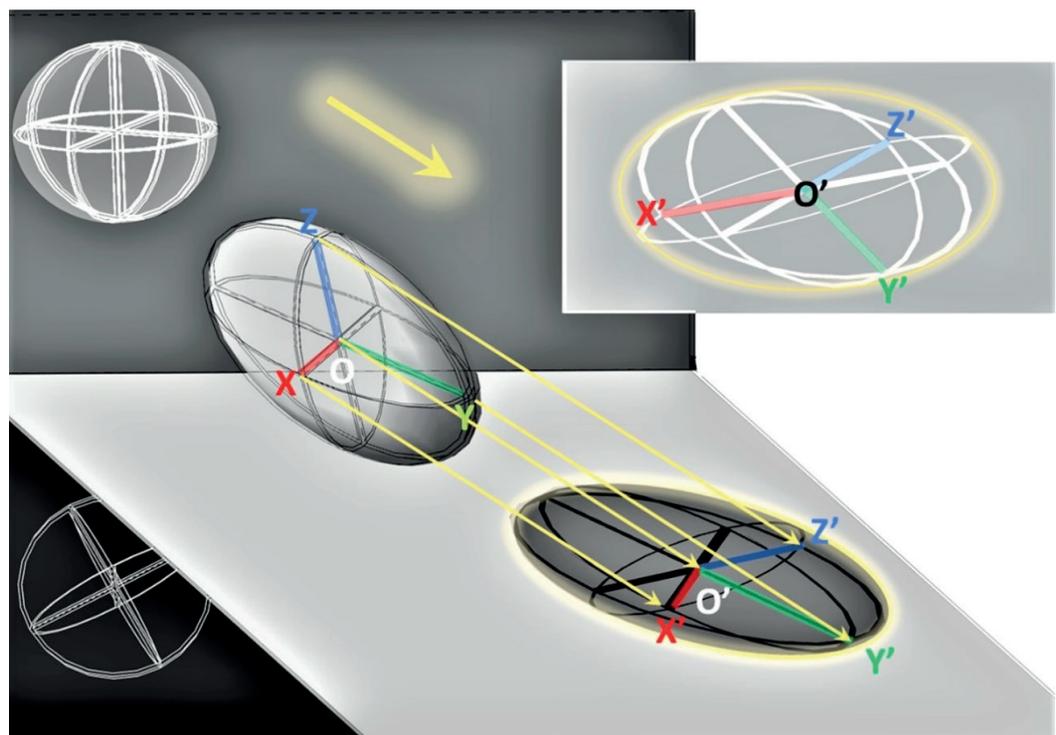


Fig. 01. Schema che visualizza la dimostrazione "classica" del teorema di Pohlke. Cfr. [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas, Lefkaditis, Markatis 2016]. Grafico dell'autore.

Tutt'altra visione (più astratta e generalizzante) ci porge la scena di Schwarz che – ragionando come Eulero –, prima di considerare i tre segmenti del piano $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, vede (Fig. 02) quello che oggi chiameremmo il “quadrilatero completo” $X'Y'Z'O'$, cioè la figura composta da sei rette: i quattro lati $X'Y'$, $Y'Z'$, $Z'O'$, $O'X'$ e le due diagonali $Z'X'$ e $O'Y'$. A questo punto basta ipotizzare che il quadrilatero completo $X'Y'Z'O'$ sia l'esito della proiezione parallela sul piano di un generico tetraedro obiettivo $XYZO$, cioè che ciascuna delle sei rette del quadrilatero sia immagine di uno spigolo di quel tetraedro. Ciò esclude solo il caso in

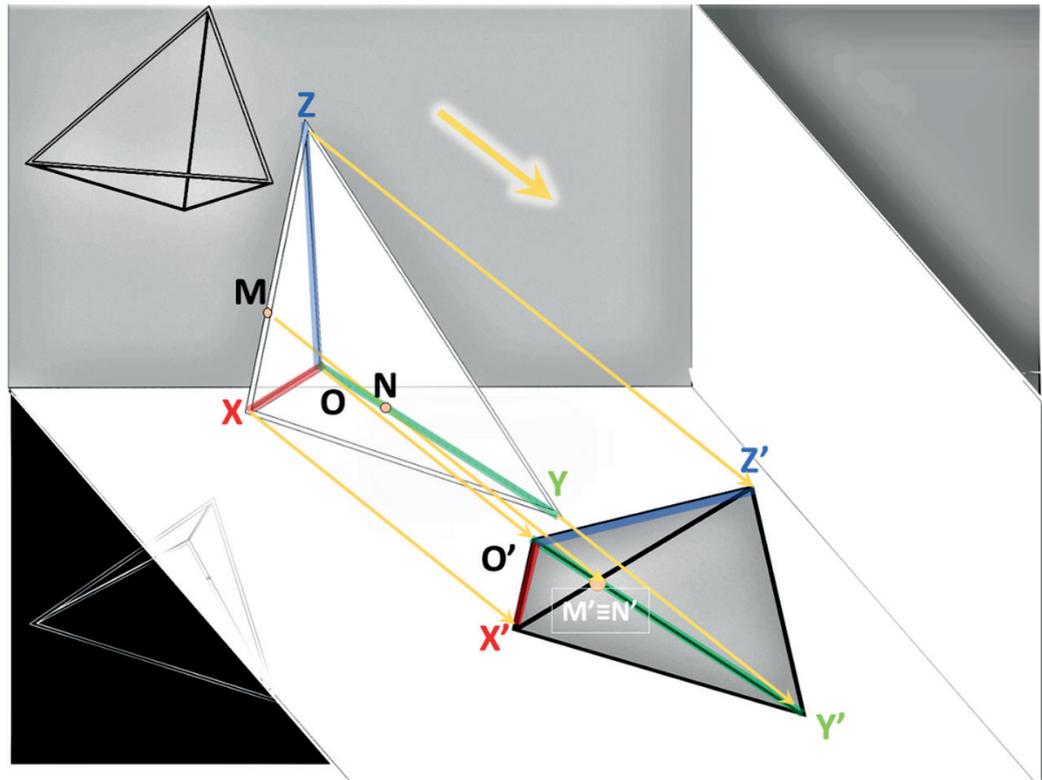


Fig. 02. - Schema che visualizza i lemmi presupposti della dimostrazione di Schwarz del teorema di Pohlke. Grafico dell'autore.

cui tutti e quattro i vertici siano collineari; ogni altra configurazione è senz'altro la proiezione parallela sul piano di un tetraedro, in forza del teorema di L'huilier sulla sezione piana dei poliedri e di quello di Desargues tradotto [Poncelet 1865, pp 362-3] in termini di due tetraedri omologici, uno dei quali degenera in quadrilatero completo piano.

Qualunque sia questo tetraedro supposto obiettivo, resta vero il significato proiettivo del quinto punto della figura piana: quello in cui si intersecano le diagonali $Z'X'$ e $O'Y'$. Dovremmo denominarlo $M'≡N'$ perché non può che essere l'immagine piana di due punti distinti del supposto tetraedro obiettivo: se N è immagine di un punto dello spigolo OY , allora M è quella di un punto dello spigolo XZ . Ma, se è indubbio che la retta MN individua la direzione della proiezione parallela, qual è tra quelle della stella di rette con centro in $M'≡N'$?

Dato che – realizzando una trasformazione proiettiva in “omologia affine” dello spazio – la proiezione parallela conserva gli elementi (punti e rette) impropri (direzioni e giaciture) e i rapporti semplici tra terne di elementi di forme di prima specie (punteggiate e fasci), sono necessariamente uguali i rapporti semplici $(X'Z'M') = (XZM)$ e $(Y'O'N') = (YON)$.

Da questo punto in poi, imponendo l'ipotesi che gli spigoli del tetraedro obiettivo afferenti in O siano triortogonali, il ragionamento può essere concluso in svariati modi, come ha fatto una diramata genealogia di dimostrazioni riportate in manuali ed eserciziari di geometria descrittiva del secolo scorso, per esempio: [Loria 1925, pp. 323-28; Dörrie 1965, pp 303-6; Campedelli 1972, pp. 28-31; Gay, 2001 pp. 42-3].

Trovata l'altezza OG , è conseguente poter disegnare in vera forma e misura il segmento OO^* che testimonia la direzione di proiezione. Immaginiamo ora che il piano XYZ divenga trasparente lasciando proseguire i raggi di Sole nella direzione OO^* verso un altro piano, comunque posto, sul quale proiettano l'ombra che corrisponde alla configurazione del dato quadrilatero $O'X'Y'Z'$ da cui partiamo. Come si vede (fig. 05), tra i due quadrilateri piani O^*XYZ e $O'X'Y'Z'$ intercorre sempre una prospettiva affine che ha centro nella direzione $O'O$ e asse (proprio o improprio) nella retta comune ai due piani prospettivi.

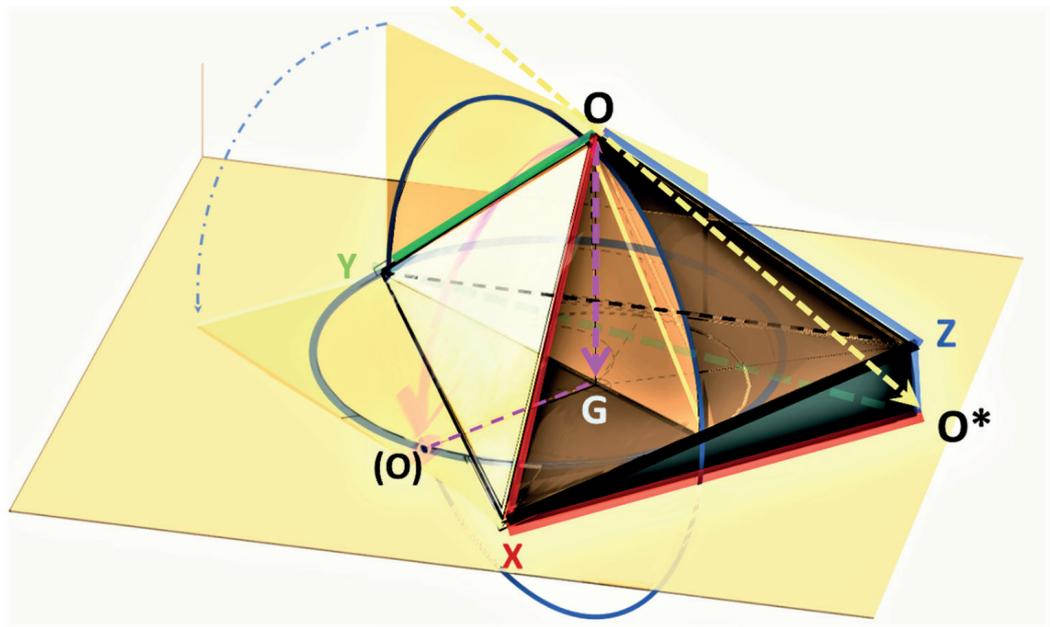


Fig. 04. Determinazione dell'altezza e della direzione di proiezione dell'ombra nel caso di un tetraedro a base equilatera e tri-ortogonale in O . Grafico dell'autore.

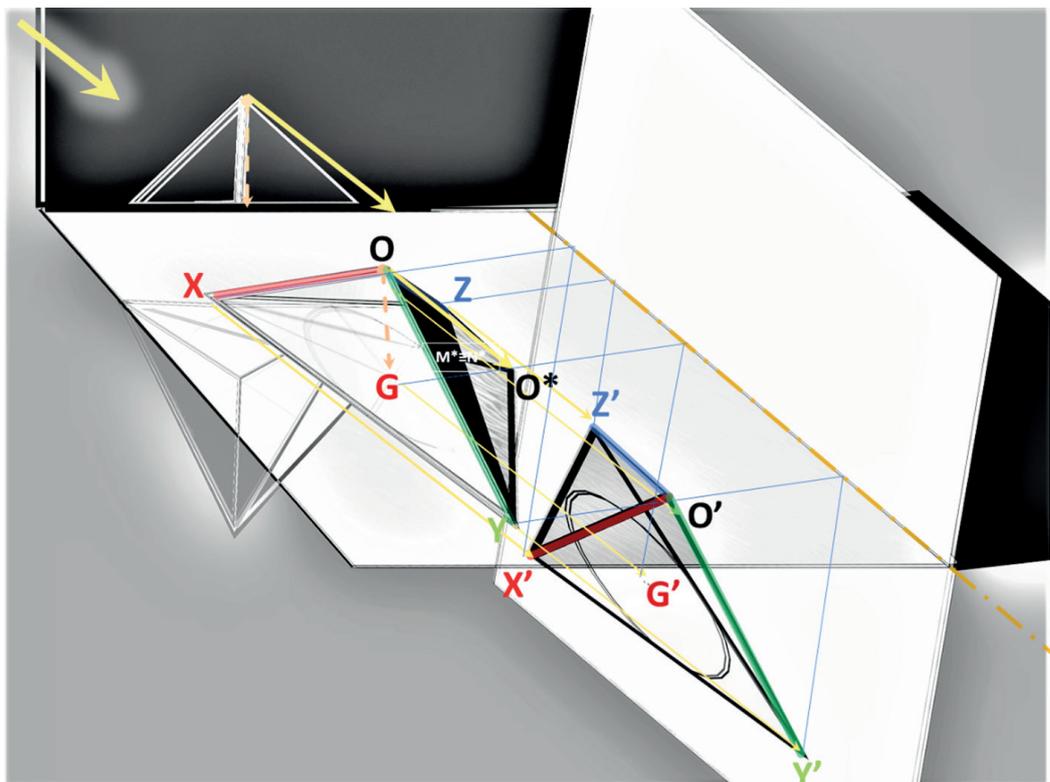


Fig. 05. Schema che visualizza i presupposti della nostra dimostrazione del teorema di Pohlke. Grafico dell'autore.

In particolare, la proiezione parallela, conservando i rapporti semplici, a fortiori, trasforma i punti medi e i baricentri dei trilateri in O^*XYZ nei punti medi e nei baricentri dei trilateri di $O'X'Y'Z'$.

Potendo dimostrare solo sulla data figura finale di quest'affinità omologica – rispondendo a Steiner – dimostriamo che è sempre determinata l'affinità omologica che ha centro improprio nella direzione OO' e che trasforma il triangolo $X'Y'Z'$ in un triangolo equilatero XYZ .

Lemma 1

Osserviamo che nella richiesta affinità è proprio l'*inellisse di Steiner* – cioè l'ellisse iscritta nel triangolo $X'Y'Z'$ a lui tri-tangente nei punti medi dei lati (ha centro nel baricentro G' ed è omotetica in G' all'ex-ellisse) – quella che si deve trasformare nel circolo di centro G iscritto nel triangolo equilatero XYZ .

È ora dimostrato [Kalman 2008] che quell'inellisse è unica e univoca per ogni triangolo. Ciò consente, dato un qualunque triangolo $X'Y'Z'$, di costruire la sua *inellisse di Steiner* come trasformazione affine di un triangolo equilatero di lato coincidente con qualunque dei tre lati del dato $X'Y'Z'$ e baricentro G^* .

Graficamente, si tratta solo di tracciare l'affinità che ha asse su un qualunque lato di $X'Y'Z'$ e centro nella direzione $G'G^*$ trovando (Fig. 06) quale coppia di diametri ortogonali del circolo in G^* si trasforma negli assi dell'inellisse di centro G' .

Lemma 2

Esistono infinite affinità omologiche nel piano $X'Y'Z'$ che hanno tutte centro improprio nella direzione $G'O'$ e che trasformano il trilatero $X'Y'Z'$ nel suo piano in due infinite schiere equipollenti di trilateri equilateri XYZ una simmetrica all'altra rispetto alla giacitura normale a $G'O'$ (figg. 07, 08).

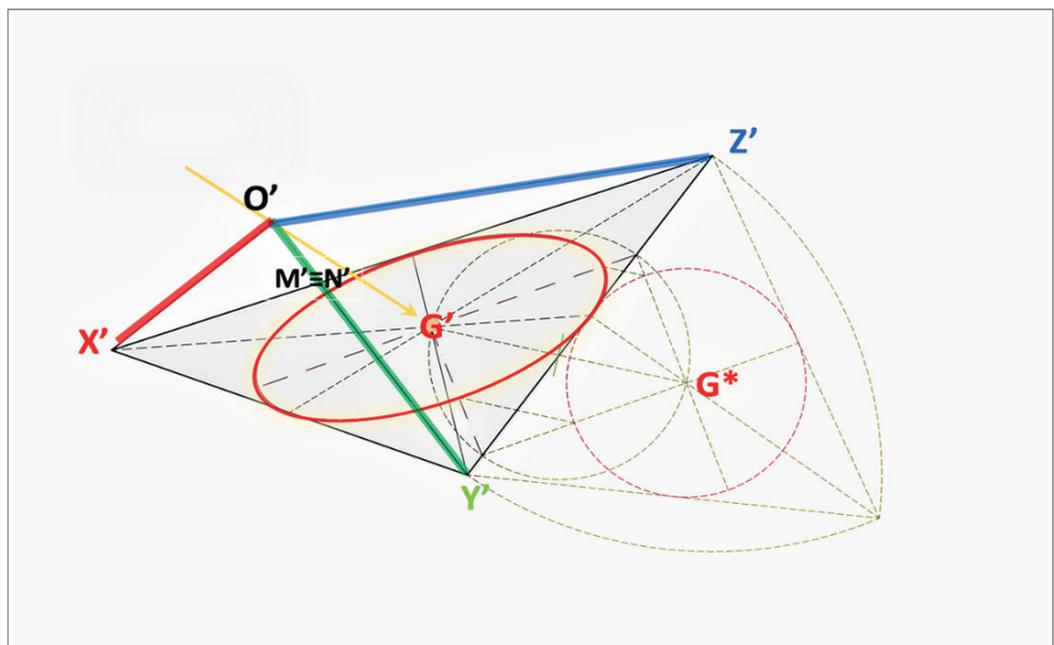


Fig. 06. Determinazione dell'inellisse di Steiner in $X'Y'Z'$ per affinità omologica di centro nella direzione $G'G^*$. Grafico dell'autore.

Dimostrazione

Disegnando una qualunque delle suddette affinità omologiche (fig. 09) si interpreta (fig. 10) l'asse dell'affinità come retta comune dei piani $X'Y'Z'$ e XYZ . Leggendo XYZ come pianta equilatera del supposto tetraedro trirettangolo in O se ne disegni la seconda proiezione ortogonale nella direzione normale all'asse dell'affinità che, essendo retta proiettante di questo "prospetto", vi risulterà rappresentato da un punto; mentre l'altezza GO della piramide risulterà in vera forma e misura, e, con essa, è rappresentata la direzione OO^* che proietta $OXYZ$ in $O'X'Y'Z'$.

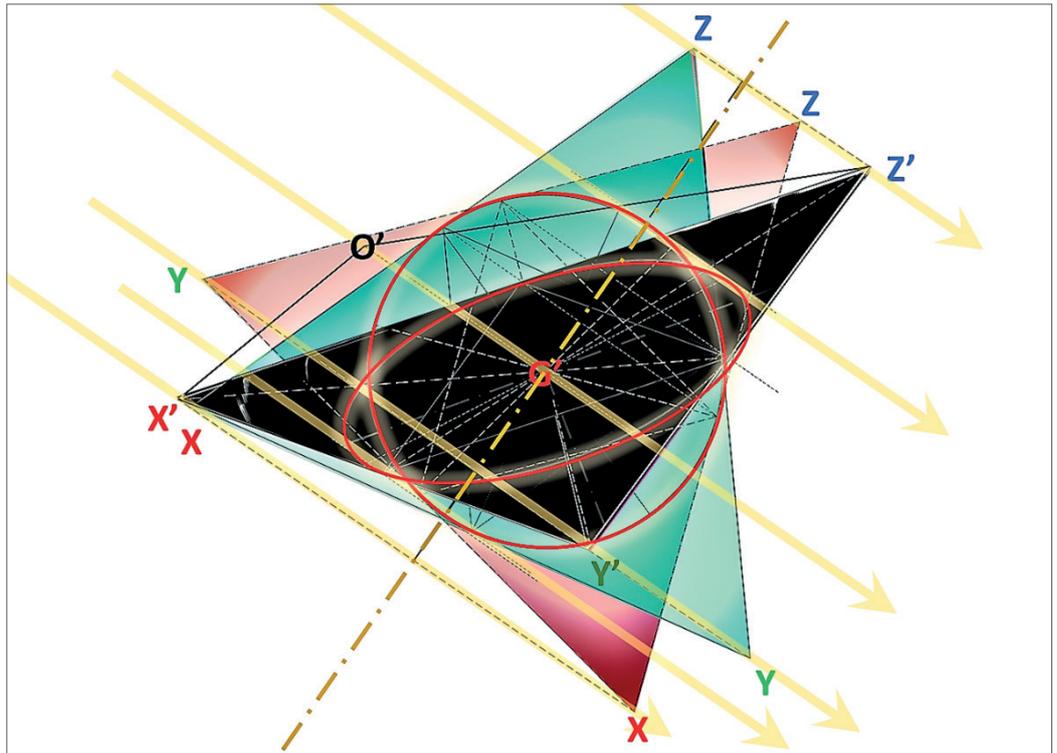


Fig. 07. Affinità di centro nella direzione $O'G$ che trasforma l'ellisse di Steiner di $X'Y'Z'$ nel circolo iscritto in triangoli equilateri simmetrici XYZ corrispondenti a $X'Y'Z'$ nella medesima affinità. Ciò è dovuto al fatto che le schiere di tetraedri che rispondono al teorema sono quattro: due simmetriche rispetto alla direzione OO' e due simmetriche nella direzione simmetrica di OO' rispetto al piano $X'Y'Z'$. Grafico dell'autore.

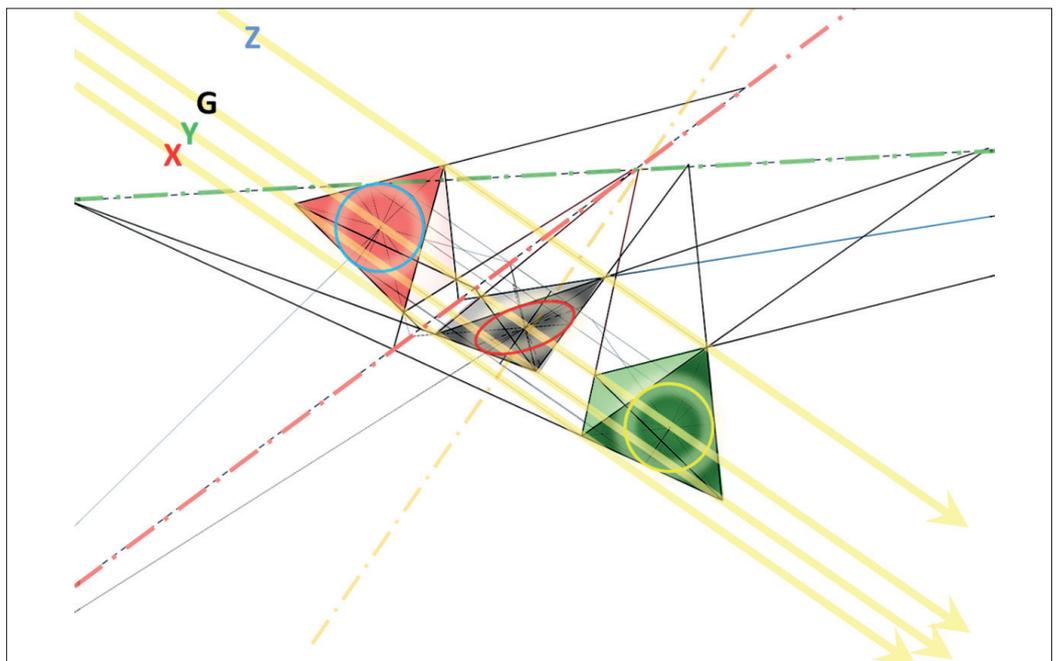


Fig. 08. Oltre ai tetraedri obiettivi equipollenti trirettangoli in O che si proiettano in $O'X'Y'Z'$ nella direzione OO' , soddisfano il teorema anche i loro simmetrici rispetto alla direzione OO' , quelli lungo la direzione simmetrica di OO' in rapporto al piano XYZ e i loro simmetrici. Grafico dell'autore.

Infine, si interpreti $X'Y'Z'$ come figura ribaltata in vera forma sul piano XYZ ; nel prospetto corrispondente si possono tracciare gli archi di circolo con centro nel punto prospettivo dell'asse e che sono quelli percorsi dal ribaltamento di $O'G'X'Y'Z'$ fino a raggiungere le corrispondenti rette nella direzione OO^* passanti per $XYZG$. Ciò restituisce l'angolo diedro tra $X'Y'Z'$ e XYZ , come se avessimo piegato il disegno dell'affinità lungo il suo asse fino a portare i punti delle due parti del foglio ad allinearsi lungo i corrispondenti piani di proiezione nella direzione OO^*O' ortogonali a XYZ .

Abbiamo – c.v.d. – disegnato uno tra le quattro infinità di tetraedri equipollenti che soddisfanno il teorema, giacché la soluzione vale anche per i simmetrici di $OXYZ$ rispetto alla direzione OO' e per i loro traslati nella direzione simmetrica di OO' in O' rispetto al piano $X'Y'Z'$.

Fig. 09. Costruzione una delle possibili affinità intercorrente tra $O'X'Y'Z'$ e O^*XYZ . Grafico dell'autore.

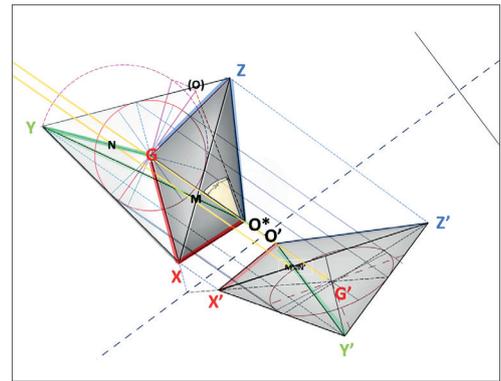
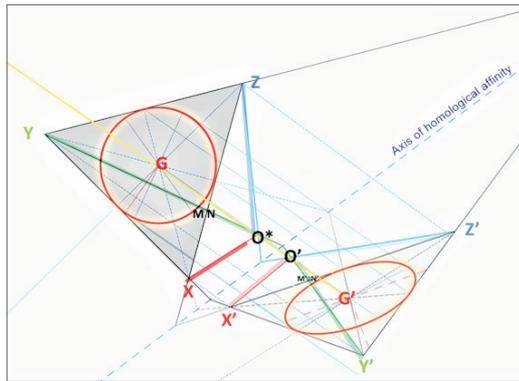


Fig. 10. Interpretazione della figura $XYZO^*$ come planimetria della piramide retta in G : determinazione del ribaltamento in vera forma dell'altezza OG e della direzione di proiezione OO^* rispetto alla giacitura XYZ . Grafico dell'autore.

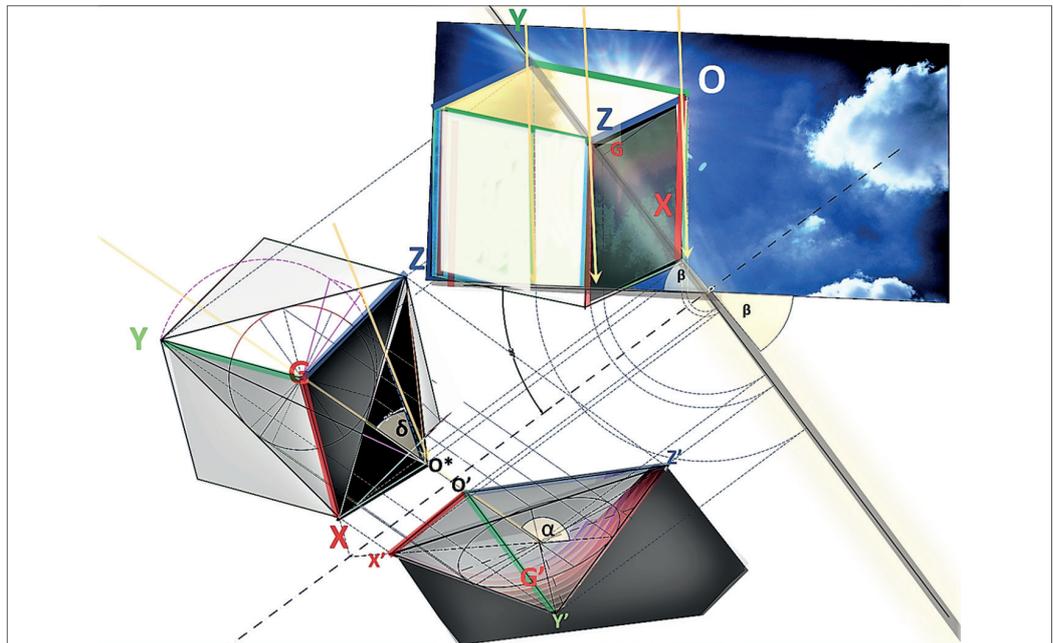


Fig. 11. Dimostrazione disegnata in doppia proiezione ortogonale della piramide $OXYZ$ e determinazione dell'angolo diedro tra i piani XYZ e $X'Y'Z'$ sul quale risulta descritta l'ombra portata. Grafico dell'autore.

Riferimenti bibliografici

- Bertan, F. (1994). Strumenti e metodi per il disegno. In Scolaril, M., Borghinil, M. (a cura di) *Teorie e metodi del disegno*. Milano: CittàStudi.
- Bozzi, P. (1998). *Fisica ingenua: studi di psicologia della percezione*. Milano: Garzanti.
- Brigaglia, A., Ciliberto, C. (1998). La geometria algebrica italiana tra le due guerre mondiali. In Di Sieno, S., Guerraggio, A., Nastasi, P. (a cura di). *La matematica italiana dopo l'unità*. Milano: Marcos y Marcos.
- Campedelli, L. (1972). *Lezioni di geometria*. Vol. 2°. Parte prima. *I metodi di rappresentazione della geometria descrittiva*. Padova: Cedam.
- Candito, C. (2003). *Le proiezioni assonometriche: dalla prospettiva isometrica all'individuazione dei fondamenti del disegno assonometrico*. Firenze: Alinea editrice.
- Cunningham, A.W. (1868). *Notes on the history, methods, and technological importance of descriptive geometry*. Edinburgh: Edmonston and Douglas.
- De Carlo, L. (2012). La prospettiva parallela come metodo: una visione storica. In Migliari, R., Carlevaris, L., (a cura di) *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi Editore.
- Docci, M., Migliari, R. (1999). *Scienza della rappresentazione: fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva*. Roma: Carocci.
- Dorrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Toronto: Dover Publications.
- Emch, A. (1918). Proof of Pohlke's theorem and its generalizations by affinity. In *American Journal of Mathematics*, n. 40 (4) (1918), pp. 366–374.
- Enriques, F. (1906). *Problemi della scienza*. Bologna: Ditta N. Zanichelli.
- Gay, F. (2001). *Fondamenti geometrici del disegno*. Padova: Libreria il Progetto.
- Kalman, D. (2008). An Elementary Proof of Marden's Theorem. In *American Mathematical Monthly* 115, pp.330–338.
- Loria, G. (1921). *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Hoepli.
- Loria, G. (1925). *Metodi di geometria descrittiva*. Milano: Hoepli.
- Manfrin, R. (2018). A proof of Pohlke's theorem with an analytic determination of the reference trihedron. In *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 22 (2018), n. 2, pp. 195-205.
- Pohlke, K. W. (1860). *Darstellende Geometrie : zunächst für den Gebrauch bei den Vorträgen an der Königlichen Bau-Akadmie und dem Königlichen Gewerbe-Institut zu Berlin*. Abth. I, Tafeln Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrien. Berlin: Gaertner.
- Pohlke, K. W. (1876). *Darstellende Geometrie*. Taf.2, Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrie. Berlin: Gaertner.
- Poncelet, J. V. (1865). *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*. Second part. Paris: Gauthier-Villars.
- Sklenarikova, Z., Pemova, M. (2007). The Pohlke–Schwarz theorem and its relevancy in the didactics of mathematics. In *Quaderni di Ricerca in Didattica* n.17. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo).
- Steiner, J. (1858). *Vermischte Sätze und Aufgaben*. In *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reimer.
- Toulias, L.T., Lefkaditis, G. E., Markatis, S. (2016). *The four ellipses problem*. In *International journal of geometry*. Vol. 5 (2016), No. 2, pp. 77-92.

Autore

Fabrizio Gay, Università IUAV di Venezia, Laboratorio di Teoria delle immagini, fabrizio@iuav.it

Per citare questo capitolo: Gay Fabrizio (2022). Elementare! (Pohlke): osservazioni sul teorema fondamentale dell'assonometria/ Elementary! (Pohlke): observations on the fundamental theorem of axonometry. In Battini C., Bistagnino E. (a cura di), *Dialoghi. Visioni e visualità. Testimoniare Comunicare Sperimentare. Atti del 43° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Dialogues. Visions and visuality. Witnessing Communicating Experimenting. Proceedings of the 43rd International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 2503-2522



Elementary! (Pohlke): observations on the fundamental theorem of axonometry

Fabrizio Gay

Abstract

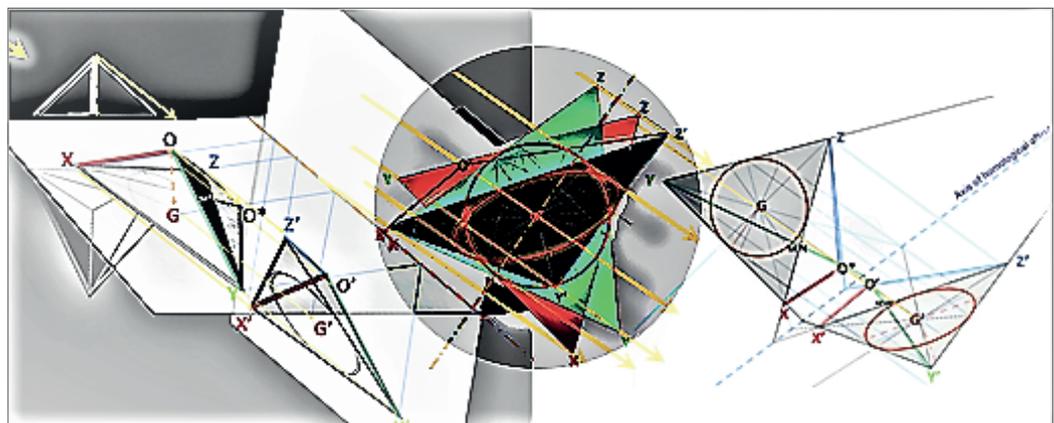
The proofs of Pohlke's theorem have reached an elegant simplicity formulated in terms of linear and vector algebra [Manfrin 2018] becoming useful tools for modelling and digital transformation of images. Instead, the graphical proofs of the theorem have disappeared in today's didactic manuals, even though that theorem remains an essential tool of imaginative orthography practiced through drawing. Here, starting from psychological considerations on the demonstrative evidence in visual terms, we propose a new proof of the theorem by projective and graphical way based only on two lemmas: 1) the uniqueness of Steiner's inellipse for each triangle and 2) the existence of two infinities of plane homological affinities with centre in the detected direction of projection that transform any triangle into an equilateral one. This allows the demonstration to be carried out graphically and elementarily, in double orthogonal projection.

Keywords

Pohlke's theorem, axonometry, graphic demonstration, geometric visualization

Topic

Understanding



New proof of Pohlke's theorem based on the uniqueness of Steiner's inellipse in a triangle.
Graphic by the author.

Introduction

"Having once declared to him that he did not see the truth of a statement, which he [Federigo Enriques] believed to be evident, but which we had tried in vain to logically prove, he suddenly stopped (we were having one of the usual walks) and, instead of trying one last demonstration, he spun his cane pointing it to a little dog on a window sill, saying to me: can't you see? For me it's as if you were telling me that you don't see that little dog!" [Brigaglia, Ciliberto 1998 p. 247] (trad. of the author).

The phenomenal spectacle of the solar shadow brought on a plane by the three edges afferent to the vertex of a cube – or by the three tri-orthogonal rays of a sphere – is transcribed in the famous theorem that Karl Wilhelm Pohlke formulated in 1853: any three segments of the plane $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ (with an extreme O' in common), as long as they are not all three aligned and no more than one is null, can always indicate the image by parallel projection of three segments OX , OY , OZ in the space, congruent and triorthogonal in their common point O .

We will not list the various proofs of Pohlke's conjecture, as history has been retraced by many essays over more than a century and a half [Cunningham 1868; Emch 1918; Loria 1921; Bertan 1996; Candito 2003; Sklenáriková, Pémová 2007; De Carlo 2012].

That bibliography continues up to the present day because that beautiful theorem induces at least two expectations: 1°) that its various proofs "say the same thing" by inter-translating each other; 2°) that an equally simple and evident demonstration follows from the elementary phenomenal spectacle that exemplifies it.

The proofs of the theorem differ from each other for the considered assumptions. Even limiting ourselves to the synthetic ones, each focuses on different aspects and terms, requiring different conceptual tools and turning out to be more or less easy than the others in the graphical proof with analog or digital means. It is known that Pohlke himself did not publish a proof of his theorem [Pohlke 1860: § 113], although he immediately sketched it out; in the latest edition of his *Darstellende Geometrie* (1876) he preferred to publish what a then nineteen-year-old student of his – Herman Schwarz – had formulated sixteen years before – considering it more "elementary" than his own.

The elementary nature of a geometric proposition is its ability – as a syllogistic argumentation – to adduce the least number of intuitive lemmas even in their mutual connections. Argumentative economics is measurable with logical calculation, whereas "evidence" is a matter of "naive geometry and physics" [Bozzi 1996] that can be measured with the psychology of sensible reasoning.

The "knowing how to see" is a perceptive, imaginative and representational experience – a cognitive pattern of an optical (projective) and haptic (metric) nature. It is an attitude that the classical dialectic has tried to discipline, as Plato exemplified in the dialogue with the poor slave of *Meno* led to find and demonstrate the measure of the side of the square having a double area of a given square given that, where appropriate, it is served already divided by its diagonals into four segments ready to flip around the sides to double the area. Perhaps the great geometer Federigo Enriques would also agree with the Platonic thesis of the *Meno*, who, however, in my opinion, wouldn't accept the conclusions that Plato drew in the *Theaetetus*, where he denies that geometric and discursive reason is an epistemic truth that can be known through sensation [*aistesis*].

On the contrary, Enriques argued that geometry has to do (in a Kantian way?) with *aistesis*: it provides the (*abstract*) interoceptive models of our proprioceptive and exteroceptive space, specifying that "The three groups of representations that are linked to the concepts underlying i) the theory of continuity (*Analysis situs*), ii) metric geometry and iii) projective [*geometry*], can be re-attached in psychogenesis to three groups of sensations: respectively i) to the general tactile-muscular sensations, ii) to those of the special sense of touch [the hand and the foot] and iii) of the sight. This result leads us to a psychological explanation of the postulates of geometry, and in turn receives confirmation!". [Enriques 1906, p. 378]. (Trad. of the author).

Pohlke/Schwarz: two different scenes of the same theorem

1) It is very easy to show what an oblique axonometry is; it is sufficient to indicate the innumerable configurations that the solar shadows of three sticks of the same length and tri-orthogonally constrained to one of their common ends can assume on the plane, as if they were the three edges coming out from a vertex of a cube.

2) It is equally evident to see in the solar shadow of a flat shape the image that corresponds punctually to it in an affine perspective that has its centre in the Sun and its axis in the common line between the plane of the shadow and that of the opaque shape that has cast it.

The solar shadow of the three edges of the cube and that of the flat shape are "elementary" spectacles because we can practically reproduce them, easily imagine them and, by imagining them, they phenomenally exemplify essential (elementary) properties of the projective space (2) that are at the basis of a drawing method (1). However, to exemplify ("show") is not yet "demonstrate" and graphically predict (calculate) the direction of projection in relation to the position of the plane of the given figure.

In this task Pohlke and Schwarz had different imaginative aptitudes. Perhaps, since he trained as a painter and technician, Pohlke made use of a marked figurative and stereotomic ability; conversely, his young pupil Schwarz expressed many other abstraction skills that led him to remarkable results in the most varied mathematical fields. Thus, Pohlke formulated the proof of his conjecture in an iconic way, according to the phenomenal evidence of the drop shadow produced by the Sun on a sphere (fig. 01). Assuming the existence of a sphere centred in O (projected in O') it is admitted that it has three triorthogonal rays (OX , OY and OZ) which project their shadows in the direction OO' on the plane in the homonymous three segments $O'X'$, $O'Y'$ and $O'Z'$ given on the plane. Then the three segments on the plane can be seen as the half-diameters, conjugated two by two, of three ellipses whose axes can be easily obtained. These three ellipses would be nothing more than the shadows projected from the direction OO' on the given plane of the three maximum circles of the sphere triorthogonal to each other. By constructing a fourth ellipse, tritangent to the first three on the same plane as the given figure [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas et al. 2016], this would be nothing more

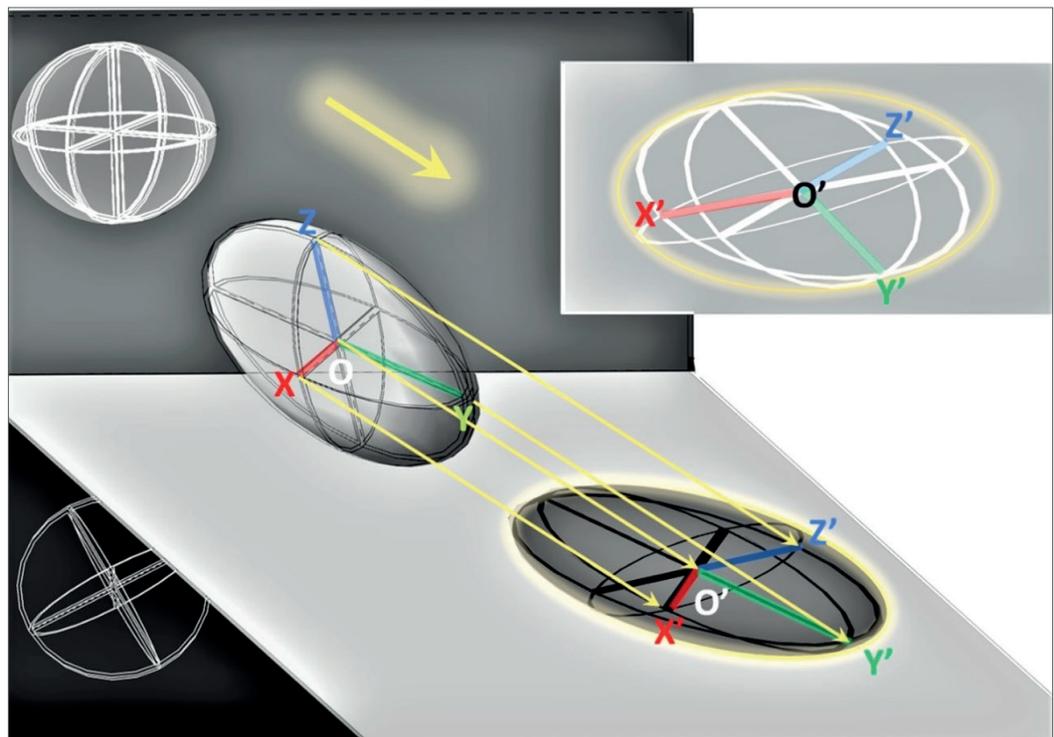


Fig. 01. Diagram showing the "classical" proof of Pohlke's theorem. Cf. [Docci, Migliari 1999 pp. 236-39; Toulas, Lefkaditis, Markatis 2016]. Graphic by the author.

than the apparent contour curve (or the drop shadow contour) of the supposed sphere projected from the OO' direction (the one of the "Sun"). The demonstration can thus be reduced to a practical and graphic (stereotomic) problem: given the shadow cast by a sphere on a horizontal plane, determine the inclination OO' of the Sun which projects it in relation to the position of the plane of the given figure. The extension of the radius of the possible spheres that cast that shadow is – contrary to what Loria claims – indicated by the "minor" axis of the ellipse that constitutes the contour of the shadow; the major axis of that ellipse is, if anything, the cathetus of the right triangle which has as its hypotenuse the ray of the sun that passes through its apsis.

A completely different vision (a more abstract and generalizing one) is offered to us by Schwarz's scene which – reasoning like Euler –, before considering the three segments of the $O'X', O'Y', O'Z'$ plane, sees (fig. 02) what today we would call the "complete quadrilateral" $X'Y'Z'O'$: that is the figure made up of six straight lines: the four sides $X'Y', Y'Z', Z'O', O'X'$ and the two diagonals $Z'X'$ and $O'Y'$. At this point it is sufficient to assume that the complete quadrilateral $X'Y'Z'O'$ is the result of the parallel projection on the plane of a generic objective tetrahedron $XYZO$, that is, that each of the six straight lines of the quadrilateral is an image of an edge of that tetrahedron.

This only excludes the case in which all four vertices are collinear; any other configuration is undoubtedly the parallel projection on the plane of a tetrahedron, by virtue of L'Huilier's theorem on the plane section of the polyhedra and that of Desargues translated [Poncelet 1865, pp 362-3] in terms of two homological tetrahedra one of which degenerates into a "complete quadrilateral plane". Whatever this supposed objective tetrahedron is, the projective meaning of the fifth point of the plane figure remains true: the one in which the diagonals $Z'X'$ and $O'Y'$ intersect. We should call it $M' \equiv N'$ because it can only be the plane image of two distinct points of the supposed objective tetrahedron: if N is the image of a point of the edge OY , then M is that of a point of the edge XZ . But, if there is no doubt that the line MN identifies the direction of the parallel projection, which one is it among those of the star of lines with centre in $M' \equiv N'$?

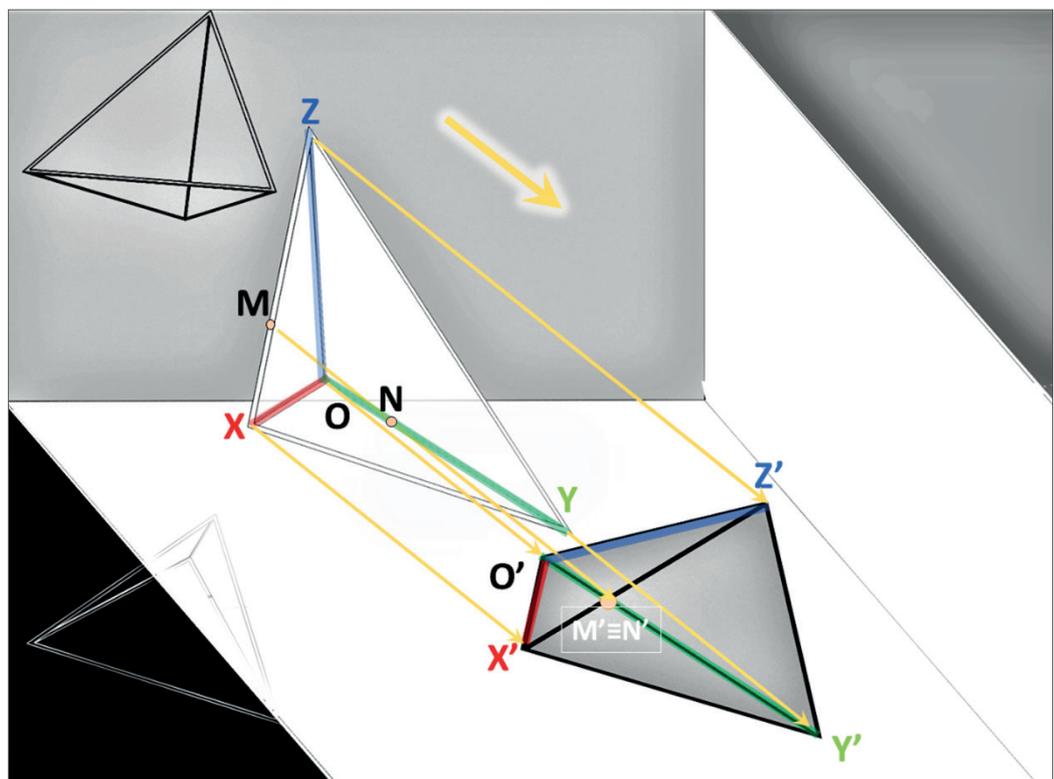


Fig. 02. Diagram showing the presupposed lemmas of Schwarz's proof of Pohlke's theorem. Graphic by the author.

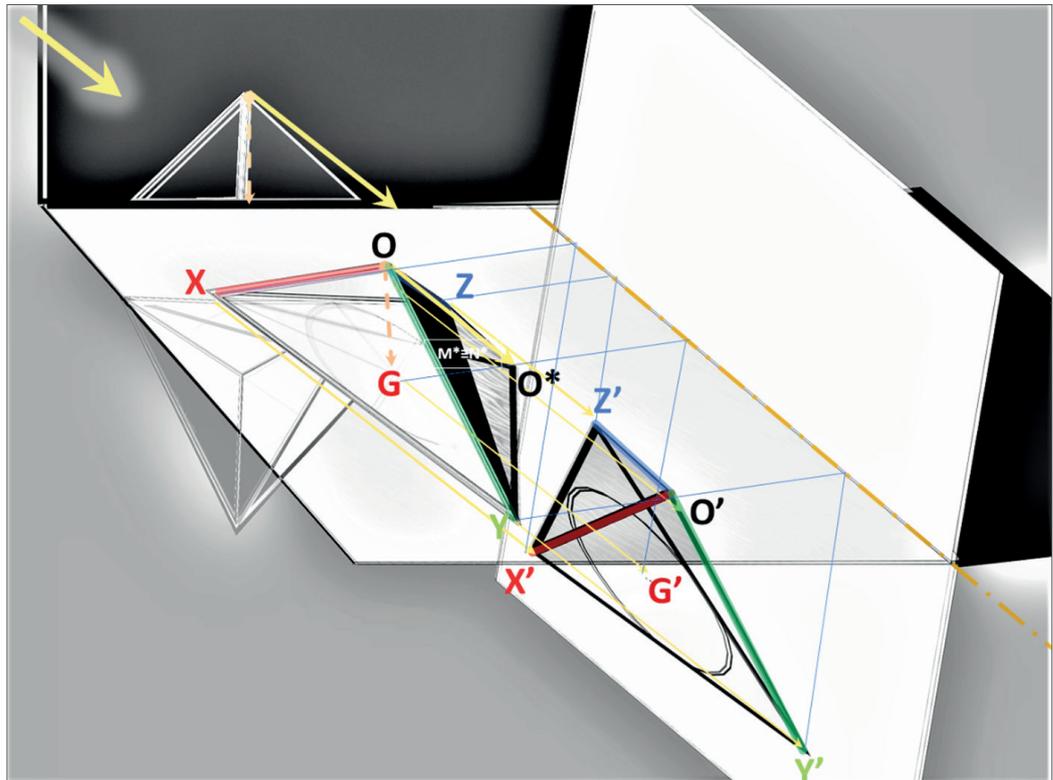


Fig. 05. Diagram showing the assumptions of our proof of Pohlke's theorem. Graphic by the author.

It is now proved [Kalman 2008] that that *inellipse* is unique and univocal for each triangle. This allows, given any triangle $X'Y'Z'$, to construct its Steiner inellipse as an affine transformation of an equilateral triangle with a side coinciding with any of the three sides of the given $X'Y'Z'$ and centre of gravity G^* . Graphically, it is only a question of plotting the affinity that has axis on any side of $X'Y'Z'$ and centre in the direction $G'G^*$ finding (Fig. 06) which pair of orthogonal diameters of the circle in G^* is transformed in the axes of the *inellipse* with centre G .

Lemma 2

There are infinite homological affinities in the $X'Y'Z'$ plane which all have an improper centre in the $G'O'$ direction and which transform the trilateral $X'Y'Z'$ in its plane into two infinite equivalent arrays of equilateral trilaterals $X'Y'Z'$ one symmetrical to the other with respect to the position normal to $G'O'$ (figs. 07, 08).

Proof

By drawing any of the aforementioned homological affinities (fig. 09) we interpret (fig. 10) the affinity axis as a common line of the $X'Y'Z'$ and XYZ planes. Reading XYZ as an equilateral plan of the supposed three-rectangle tetrahedron in O , one draws the second orthogonal projection in the direction normal to the affinity axis which, being a projecting straight line of this "elevation", will be represented by a point; while the GO height of the pyramid will be in true shape and size, and, with it, the direction OO^* is represented which projects $OXYZ$ into $O'X'Y'Z'$. Finally, interpret $X'Y'Z'$ as an overturned figure in true form on the XYZ plane; in the corresponding elevation it is possible to trace the circular arcs centred in the elevation point of the axis and which are those crossed by the overturning of $O'G'X'Y'Z'$ until reaching the corresponding straight lines in the direction OO^* passing through $XYZG$.

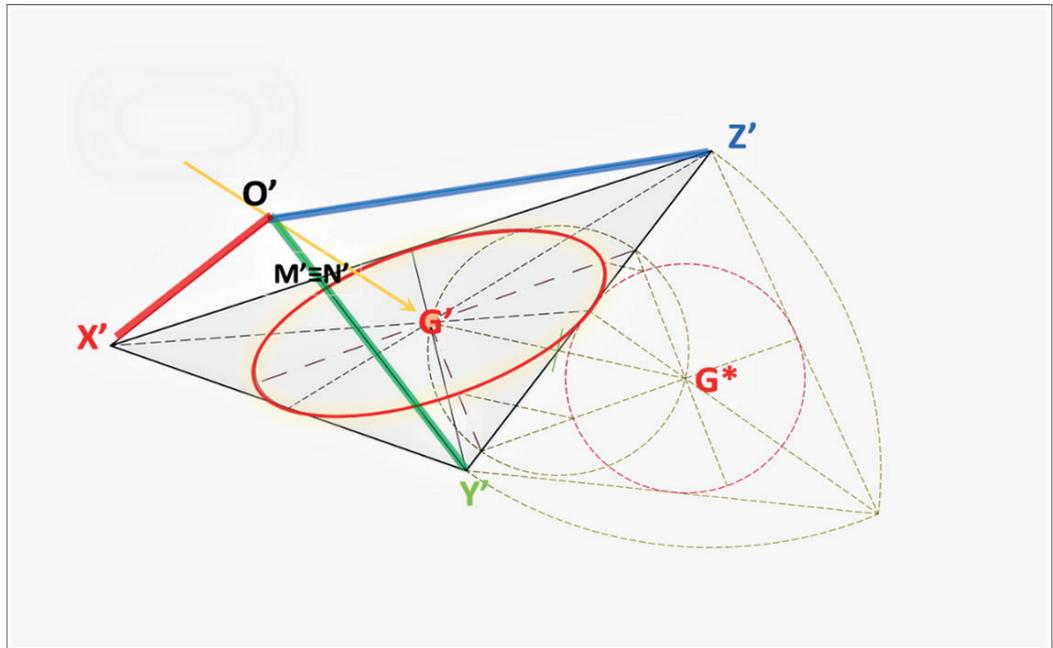


Fig. 06. Determination of Steiner's inellipse in $X'Y'Z'$ by homological affinity of centre in the direction $G'G^*$. Graphic by the author.

This returns the dihedral angle between $X'Y'Z'$ and XYZ , as if we had folded the affinity drawing along its axis until the points of the two parts of the sheet are aligned along the corresponding projection planes in the direction OO^*O' orthogonal to XYZ . We have – q.e.d. - drawn one of the four infinities of equivalent tetrahedra that satisfy the theorem, since the solution also holds for the symmetrical ones of $OXYZ$ with respect to the direction OO' and for their translations in the symmetrical direction of OO' in O' with respect to the plane $X'Y'Z'$.

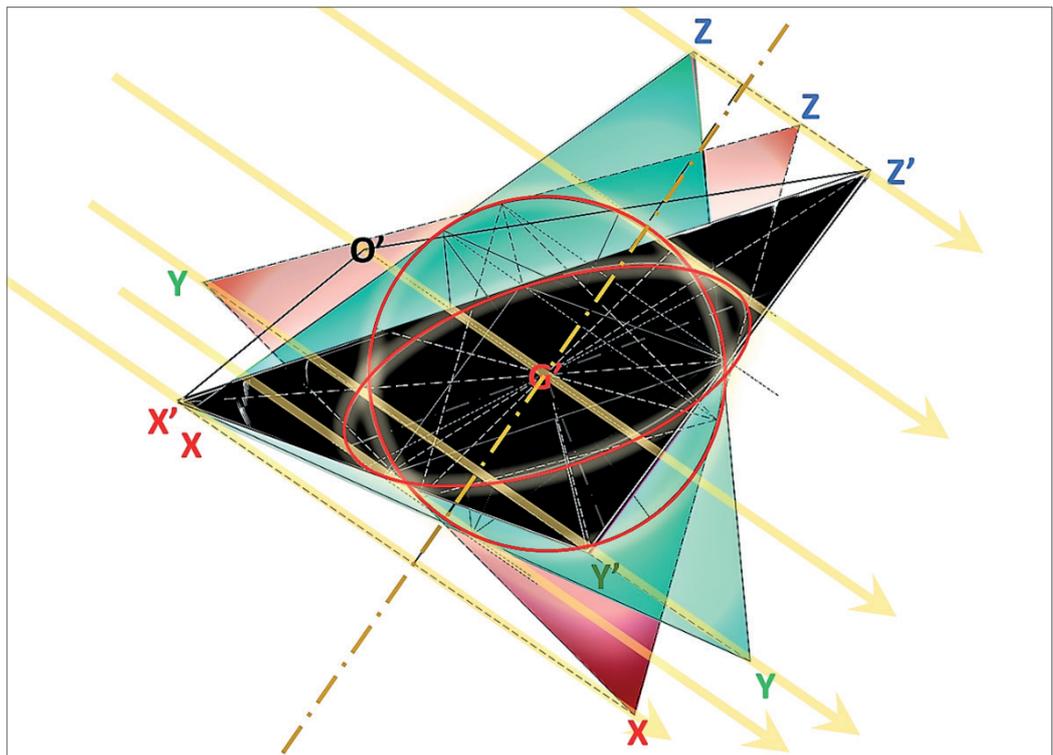


Fig. 07. Centre affinity in the direction $O'G'$ which transforms Steiner's inellipse of $X'Y'Z'$ in the circle inscribed in symmetrical equilateral triangles XYZ corresponding to $X'Y'Z'$ in the same affinity. This is due to the fact that the arrays of tetrahedra that respond to the theorem are four: two symmetrical with respect to the OO' direction and two symmetrical in the symmetrical direction of OO' with respect to the $X'Y'Z'$ plane. Graphic by the author.

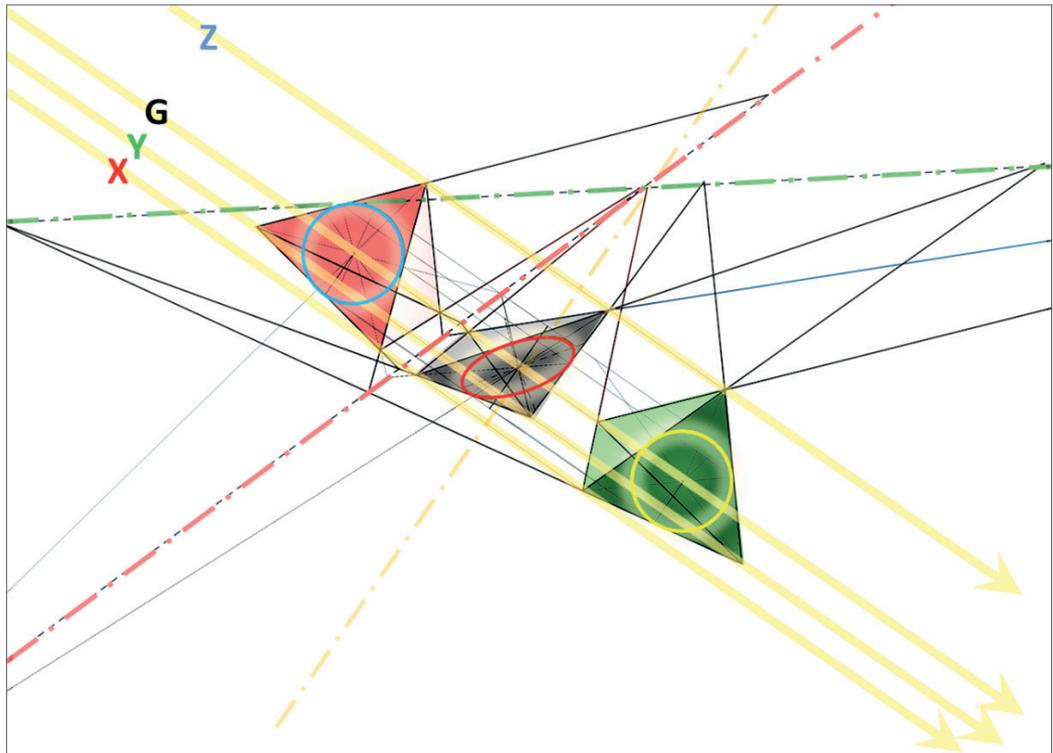


Fig. 08. In addition to the objective tetrahedrons equivalent to three-rectangles in O that are projected in $O'X'Y'Z'$ in the direction OO' , also their symmetric ones with respect to the direction OO' , those along the symmetrical direction of OO' in relation to the plane satisfy the theorem XYZ and their symmetricals. Graphic by the author.

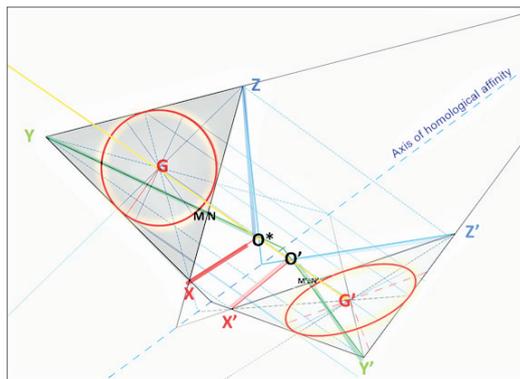


Fig. 09. Construction of one of the possible affinities between $O'X'Y'Z'$ and O^*XYZ . Graphic by the author.

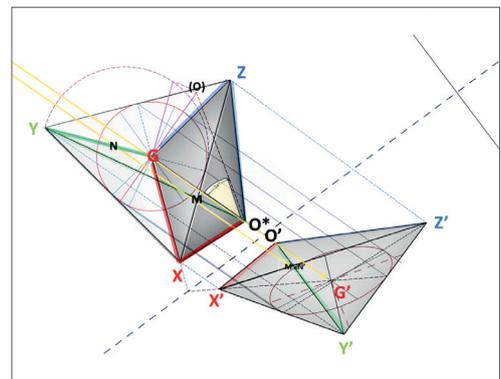


Fig. 10. Interpretation of the figure $XYZO^*$ as a plan of the right pyramid in G ; determination of the overturning in true form of the height OG and the direction of projection OO^* with respect to the XYZ position. Graphic by the author.

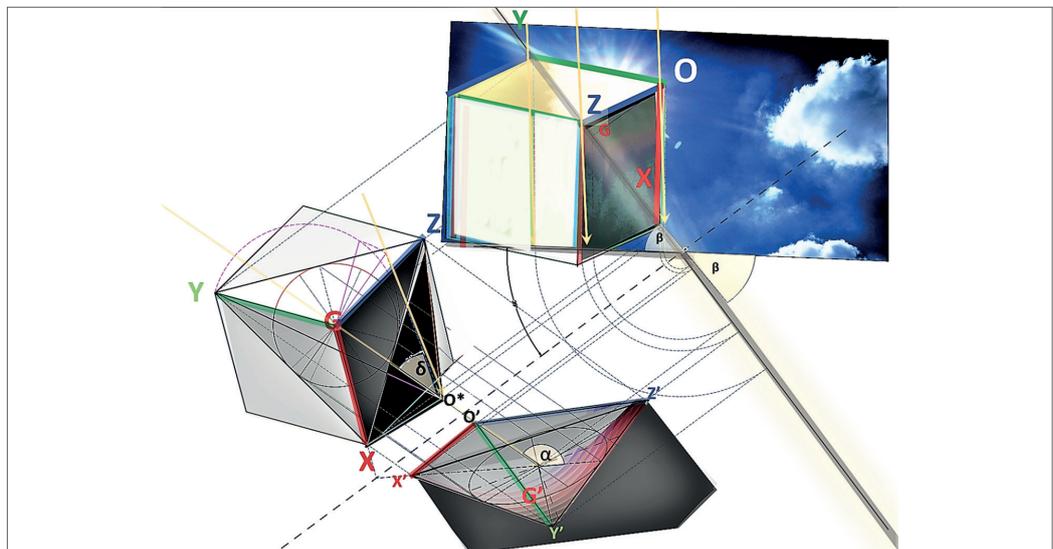


Fig. 11. Demonstration in double orthogonal projection of the $OXYZ$ pyramid and determination of the dihedral angle between the XYZ and $X'Y'Z'$ planes. Graphic by the author.

References

- Bertan, F. (1994). Strumenti e metodi per il disegno. In Scolaril, M., Borghinil, M. (a cura di) *Teorie e metodi del disegno*. Milano: CittàStudi.
- Bozzi, P. (1998). *Fisica ingenua: studi di psicologia della percezione*. Milano: Garzanti.
- Brigaglia, A., Ciliberto, C. (1998). La geometria algebrica italiana tra le due guerre mondiali. In Di Sieno, S., Guerraggio, A., Nastasi, P. (a cura di). *La matematica italiana dopo l'unità*. Milano: Marcos y Marcos.
- Campedelli, L. (1972). *Lezioni di geometria*. Vol. 2°. Parte prima. I metodi di rappresentazione della geometria descrittiva. Padova: Cedam.
- Candito, C. (2003). *Le proiezioni assonometriche: dalla prospettiva isometrica all'individuazione dei fondamenti del disegno assonometrico*. Firenze: Alinea editrice.
- Cunningham, A.W. (1868). *Notes on the history, methods, and technological importance of descriptive geometry*. Edinburgh: Edmonston and Douglas.
- De Carlo, L. (2012). La prospettiva parallela come metodo: una visione storica. In Migliari, R., Carlevaris, L., (a cura di) *Attualità della geometria descrittiva*. Roma: Gangemi Editore.
- Docci, M., Migliari, R. (1999). *Scienza della rappresentazione: fondamenti e applicazioni della geometria descrittiva*. Roma: Carocci.
- Dorrie, H. (1965). *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Toronto: Dover Publications.
- Emch, A. (1918). Proof of Pohlke's theorem and its generalizations by affinity. In *American Journal of Mathematics*, n. 40 (4) (1918), pp. 366–374.
- Enriques, F. (1906). *Problemi della scienza*. Bologna: Ditta N. Zanichelli.
- Gay, F. (2001). *Fondamenti geometrici del disegno*. Padova: Libreria il Progetto.
- Kalman, D. (2008). An Elementary Proof of Marden's Theorem. In *American Mathematical Monthly* 115, pp.330–338.
- Loria, G. (1921). *Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri*. Milano: Hoepli.
- Loria, G. (1925). *Metodi di geometria descrittiva*. Milano: Hoepli.
- Manfrin, R. (2018). A proof of Pohlke's theorem with an analytic determination of the reference trihedron. In *Journal for Geometry and Graphics*. Vol. 22 (2018), n. 2, pp. 195-205.
- Pohlke, K. W. (1860). *Darstellende Geometrie*: zunächst für den Gebrauch bei den Vorträgen an der Königlichen Bau-Akademie und dem Königlichen Gewerbe-Institut zu Berlin. Abth. I, Tafeln Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrien. Berlin: Gaertner.
- Pohlke, K. W. (1876). *Darstellende Geometrie*. Taf.2, Zehn Tafeln zur darstellenden Geometrie. Berlin: Gaertner.
- Poncelet, J. V. (1865). *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*. Second part. Paris: Gauthier-Villars.
- Sklenarikova, Z., Pemova, M. (2007). The Pohlke–Schwarz theorem and its relevancy in the didactics of mathematics. In *Quaderni di Ricerca in Didattica* n.17. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo).
- Steiner, J. (1858). *Vermischte Sätze und Aufgaben*. In *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reimer.
- Toulias, L.T., Lefkaditis, G. E., Markatis, S. (2016). *The four ellipses problem*. In *International journal of geometry*. Vol. 5 (2016), No. 2, pp. 77-92.

Author

Fabrizio Gay, Università IUAV di Venezia, Laboratorio di Teoria delle immagini, fabrizio@iuav.it

To cite this chapter: Gay Fabrizio (2022). Elementare! (Pohlke): osservazioni sul teorema fondamentale dell'assonometria/ Elementary! (Pohlke): observations on the fundamental theorem of axonometry. In Battini C., Bistagnino E. (a cura di). *Dialoghi. Visioni e visualità. Testimoniare Comunicare Sperimentare. Atti del 43° Convegno Internazionale dei Docenti delle Discipline della Rappresentazione/Dialogues. Visions and visuality. Witnessing Communicating Experimenting. Proceedings of the 43rd International Conference of Representation Disciplines Teachers*. Milano: FrancoAngeli, pp. 2503-2522.