LES MATHÉMATIQUES DU MILKSHAKE

Translation from the English language edition of: *The Maths of Milkshake*

Traduction et mise en page de l'édition française : Benjamin Peylet

ISBN (papier) : 978-2-7598-2757-2
ISBN (ebook) : 978-2-7598-2759-6

AVERTISSEMENT DE SÉCURITÉ

Les expériences décrites dans ce livre doivent être réalisées sous la supervision d'un adulte et avec toutes les précautions nécessaires, en particulier pour ce qui concerne les allergies et intolérances alimentaires. Les instructions de chacune des expériences ne doivent pas se substituer au bon sens bien informé des participants. L'auteur et l'éditeur déclinent par avance toute responsabilité quant aux incidents qui pourraient survenir lors de la réalisation de ces expériences.

LES MATHÉMATIQUES DU MILKSHAKE

LE MONDE FABULEUX DE LA SCIENCE EN CUISINE

DR. KATIE STECKLES

edp sciences

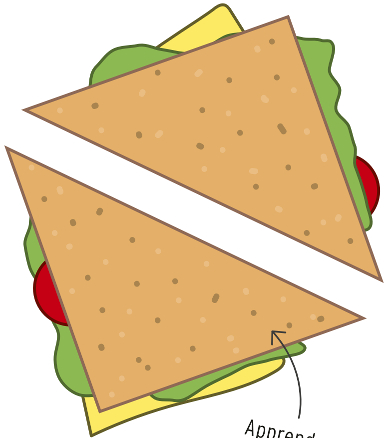
SOMMAIRE

CHAPITRE 3 : MATHS DU MONDE RÉEL

CHAPITRE 4 : PENSÉE LOGIQUE

INTRODUCTION

Les mathématiques sont l'étude des nombres, des formes et des structures de tout ce qui nous entoure. Elles incluent tout, depuis ce qu'on vous apprend à l'école (le calcul, la résolution de problème et l'application à des situations réelles) jusqu'aux formes, à la symétrie, aux structures, aux modes de pensée. Être un mathématicien, c'est chercher des moyens de simplifier des idées compliquées et employer des méthodes astucieuses pour résoudre des énigmes.



Apprendre : les maths du sandwich pages 42-43.

Il est facile de trouver des exemples en cuisine car les mathématiques interviennent aussi bien dans les nombres et les formes qui décrivent les aliments que dans les multiples manières de les préparer. La nourriture est aussi un excellent moyen de se représenter des problèmes ! Ce livre évoquera les plus beaux motifs mathématiques qu'on trouve au fondement même de l'univers au travers d'exemples piochés en cuisine, de questions pour tester vos connaissances et d'expériences à réaliser chez vous.

Il est découpé en quatre chapitres : Nombres, Formes, Monde réel et Pensée logique.

Beaucoup pensent que les maths ne s'occupent que de nombres. Bien sûr, les nombres en sont un gros morceau, des ingrédients inscrits sur les emballages aux proportions données dans les recettes. Le chapitre Nombres propose ainsi une sélection d'énigmes et de défis numériques que vous pourrez relever.

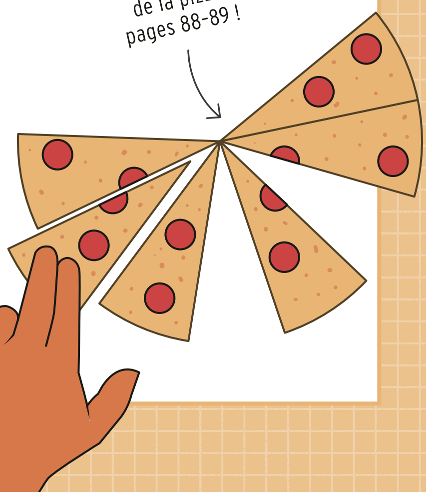
Le chapitre Formes s'intéresse à la géométrie, à la forme des biscuits, aux manières de couper un gâteau en parts égales et même aux figures étranges cachées dans les congélateurs.

Le troisième chapitre parle du Monde réel. Vous y découvrirez les moyens d'appliquer les maths à des situations vécues, par exemple pour garder un chocolat chaud le plus longtemps possible, battre vos amis aux jeux et comprendre le fonctionnemment des codes-barres qui indiquent le prix des produits.

Mais les maths sont plus que le calcul, la solution des problèmes et la mesure des côtés du triangle. Le chapitre sur la Pensée logique contient ainsi des énigmes et des défis logiques qui vous pousseront à penser mathématiquement. Il s'intéresse aussi à la manière d'optimiser le travail, que ce soit en affaires ou en cuisine !

Chaque chapitre vous aidera à résoudre de nombreuses questions (dont les réponses se trouvent à la fin du livre). Bien sûr, ce n'est qu'un livre parmi tant d'autres : vous trouverez beaucoup d'informations sur ces sujets dans d'autres ouvrages, ainsi qu'en ligne. Si quelque chose vous intéresse particulièrement, n'hésitez pas à aller voir ça de plus près !

Découvrez le jeu de la pizza pages 88-89 !



CHAPITRE 1

NOMBRES

DÉCOUVRIR…

APPRENDRE…

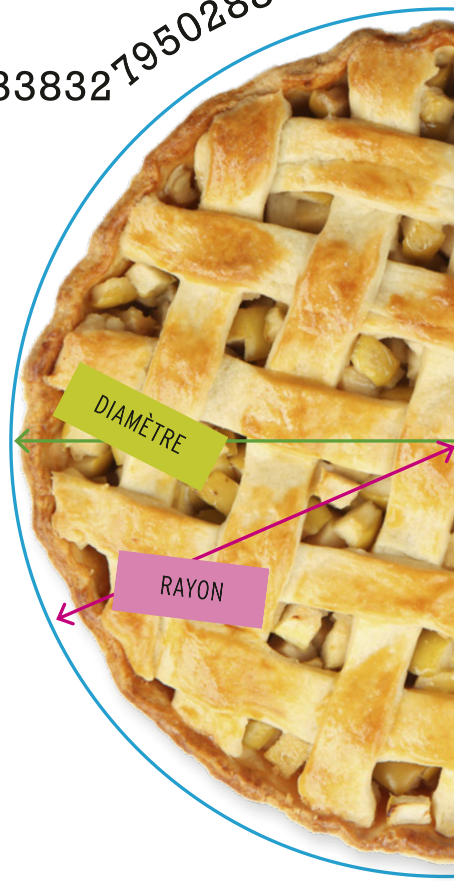
EXPÉRIMENTER…

DÉCOUVRIR : PI

Il n'est pas étonnant de voir débarquer le nombre Pi dans un livre sur les maths, mais que vient-il faire dans une tarte ? Pi, qu'on écrit plutôt à l'aide du symbole π (la seizième lettre de l'alphabet grec), représente un nombre très précis, particulièrement utile et important… même en cuisine !

Dans l'Antiquité, les Égyptiens, les Grecs et les Babyloniens avaient tous leur propre approximation de π, dont ils se servaient dans leurs calculs agricoles et fiscaux ; ainsi les valeurs 3,125 ; 3,1605 et 3,143 ont-elles été utilisées au cours de l'histoire pour le nombre π.
Aujourd'hui, la valeur de π est connue avec un degré ahurissant de précision. C'est :

3.141592653589793238462643383279502884197169



À QUOI SERT-IL ?

Vous avez peut-être croisé π dans les formules pour calculer les dimensions d'un cercle. Par exemple, le périmètre, P (la longueur du bord), est égal à π multiplié par le diamètre D (la largeur en passant par le centre) :

$$P = \pi \times D$$

On peut aussi utiliser π pour calculer l'aire A d'un cercle. Si on connaît son rayon r (la moitié du diamètre, ou la distance du centre à n'importe quel point du bord), on peut déduire l'aire du cercle à l'aide de cette formule :

$$A = \pi \times r^2$$

π apparaît aussi dans les équations de l'aire et du volume de la sphère, qui est comme un cercle en 3D, si bien qu'il est naturel que π intervienne.

π est utile à bien d'autres choses. Il apparaît dans la formule qui calcule la période d'un pendule (le temps qu'il met à se balancer) et dans celle du flambage d'une poutre (la force qu'on peut lui appliquer avant qu'elle ne ploie). π est employé dans la construction, la communication, la médecine, le transport aérien et même l'industrie spatiale.

COMBIEN DE CHIFFRES ?

Vous avez peut-être remarqué que π débordait de la page sans qu'on puisse voir sa fin. C'est parce qu'il n'en a pas ! Les chiffres de π sont en quantité infinie, il est impossible de tous les écrire. Comme on doit bien s'arrêter de l'écrire à un moment, le nombre qu'on obtient n'est pas exactement π, on ne peut donc pas placer de signe égal. On utilise à la place le symbole $\approx$, qui veut dire « à peu près égal ». On peut aussi ajouter le signe « ... » à la fin !

3993751058209749445923078164062862089986280348253

Dans la plupart des cas, prendre $\pi \approx 3{,}14$ suffit, surtout quand une grande précision n'est pas indispensable. Les ingénieurs se servent de valeurs plus précises mais, même dans ce cas, il ne sert à rien d'aller trop loin. Connaître 39 chiffres de π suffit pour calculer le périmètre de l'Univers avec une précision de l'ordre de la largeur d'un atome !

Ce n'est peut-être pas nécessaire de calculer beaucoup de chiffres de π, mais ça n'empêche pas les gens d'essayer. En mars 2019, la mathématicienne Emma Haruka Iwao en a calculé 31 400 000 000 000 (environ 10π trillions) à l'aide de super ordinateurs : un record du monde !

EXPÉRIMENTER : π ET BRETZELS

Ce qui est intéressant avec π, c'est qu'il apparaît souvent où on ne l'attend pas. Par exemple, dans la probabilité qu'une allumette, ou un bretzel, tombe sur une ligne tracée sur une feuille. En lâchant plusieurs bretzels à la fois et en comptant ceux qui tombent sur une ligne, on obtient une approximation de π.

IL VOUS FAUDRA :

- **Une douzaines de bâtonnets. Des allumettes, des bretzels ou des cure-dents, peu importe, tant que vous en avez une bonne douzaine et que tous sont de la même taille.**
- **Une feuille, un crayon, une règle.**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Mesurez la longueur d'un bâtonnet. On l'appellera la « longueur de tige ».

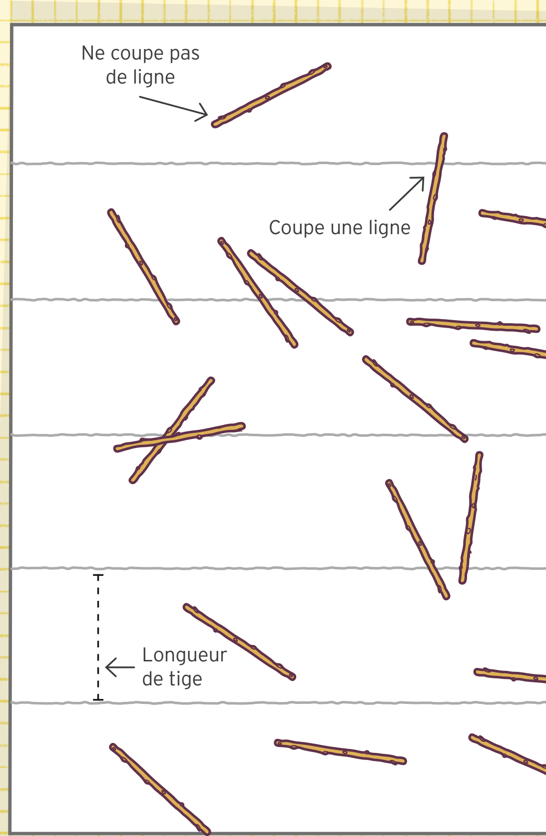
2. Tracez une ligne sur la largeur de la page, parallèle aux bords et à une distance d'une longueur de tige du bord supérieur.

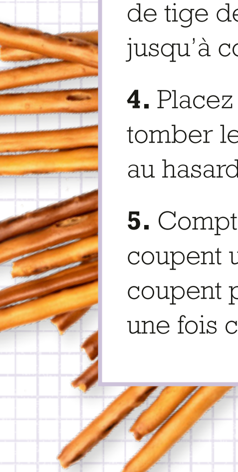
3. Dessinez une ligne identique sous la première, parallèle et à une longueur de tige de celle-ci. Répétez l'opération jusqu'à couvrir toute la page.

4. Placez la feuille par terre. Laissez tomber les bâtonnets de votre hauteur, au hasard, sur la feuille de papier.

5. Comptez combien de bâtonnets coupent une ligne et combien n'en coupent pas. (Ôtez chaque bâtonnet une fois compté pour faciliter le travail.)

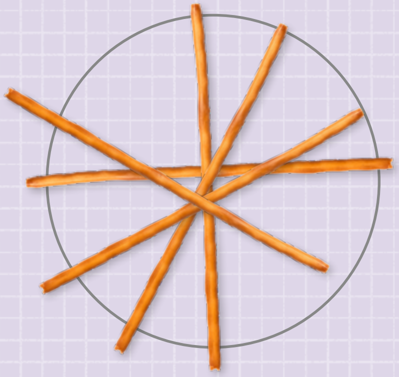
COUPER UNE LIGNE





L'AIGUILLE DE BUFFON

Cette expérience s'appelle l'aiguille de Buffon. Elle est née au XVIIIe siècle, quand un mathématicien nommé Buffon a cherché la probabilité qu'une tige lâchée au hasard coupe une ligne tracée au sol. Comme une tige tombe à plat et peut pointer dans toutes les directions, la probabilité est liée à l'aire d'un cercle, et quand il y a des cercles, le nombre π n'est jamais loin !



TROUVER π

Une fois les résultats obtenus, vous aurez besoin de ces valeurs :
A = le nombre de bâtonnets au total ;
B = le nombre de bâtonnets qui ont coupé une ligne.

Pour calculer une valeur approchée de π, vous aurez besoin de cette formule :

$$\pi \approx \frac{2A}{B}$$

Cela signifie que π est à peu près égal à 2 multiplié par A et divisé par B. Si 20 bâtonnets ont été lâchés et que 13 ont coupé une ligne, A vaut 20 et B vaut 13. La formule nous donne :
$(2 \times 20) \div 13 = 40 \div 13$, soit environ 3,077.

Comme cette méthode dépend d'une expérience réelle, et que les événements aléatoires sont difficiles à prévoir, la réponse ne sera jamais π = 3,14159... Mais si la réponse tombe bien entre 3 et 3,5, cela constituera une bonne approximation ! Notez aussi que plus vous lâcherez de bâtonnets, plus la réponse sera proche de π.

APPRENDRE : COMBIEN DE BURGERS?

Certains restaurants se vantent du nombre de plats délicieux qu'ils proposent. Grâce aux mathématiques, vous pouvez calculer combien de combinaisons sont possibles et découvrir qu'un petit nombre d'ingrédients suffit pour proposer un grand nombre de repas différents.

COMPTER LES BURGERS

Imaginez que vous préparez des burgers. Vous en faites des simples, des doubles (avec deux steaks), certains avec fromage, d'autres sans. Avec ces options, les combinaisons possibles sont :

- **Burger simple (sans fromage)**
- **Double burger (sans fromage)**
- **Simple cheeseburger**
- **Double cheeseburger**

Il y a deux choix à faire, chacun entre deux options : simple ou double, fromage ou non. Le nombre de burgers possibles est donc $2 \times 2 = 4$.

Si une troisième option est proposée, par exemple une feuille de salade, le nombre de possiblités double, car chacun des quatre burgers existants pourra être servi avec ou sans salade.

Pour chaque ingrédient ajouté ainsi, le nombre de combinaisons doublera. Le nombre de burgers possible va donc grossir rapidement. Vous pouvez voir dans le tableau ci-contre qu'avec dix options disponibles, on obtient plus de mille burgers différents.

On peut aussi ajouter des options plus larges, par exemple trois types de fromage. Dans un restaurant qui proposera ce triple choix, le nombre de combinaisons sera multiplié par trois (ou même quatre si vous incluez toujours la possibilité « sans fromage »).

NOMBRE D'OPTIONS	COMBINAISONS POSSIBLES
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024

À VOUS DE JOUER

Pour chacun des menus suivants, calculez le nombre de burgers différents qu'on peut obtenir (vous pouvez écrire toutes les combinaisons possibles si vous n'êtes pas sûr du calcul, en les barrant au fur et à mesure) :

MCBURGER'S

STEAK : simple ou double steak
FROMAGE (EN OPTION) : cheddar ou mozzarella
SAUCE (SANS, UNE SAUCE, DEUX SAUCES OU LES TROIS) : ketchup, moutarde, BBQ
EXTRAS EN OPTION : salade, tomates, cornichons

BURGER WORLD

STEAK : bœuf, poulet, soja
BUNS : blanc, sègle, brioche ou complet
EXTRAS EN OPTION : sauce, salade, cornichon, fromage

THE MEAT FACTORY

STEAK : Angus, classique ou saucisse
SAUCE AU CHOIX : burger, BBQ, sauce piquante
EXTRAS EN OPTION (JUSQU'À DEUX DE CHAQUE) : bacon, *onion rings*, œuf frit

LINDA'S BURGER PALACE

STEAK : tofu, champignon, haricot, soja
BUNS : avec ou sans sésame
SAUCES (JUSQU'À DEUX) : ketchup, mayo, moutarde, BBQ, *sweet chili*
EXTRAS EN OPTION (UN SEUL CHOIX) : *onion rings*, œuf frit, camembert

La prochaine fois que vous aurez des invités à dîner, calculez combien de repas possibles ils pourront se composer pour les impressionner !

EN 2002, une chaîne de fast-food du Royaume-Uni a proposé un menu avec huit ingrédients possibles. Elle se vantait ainsi de proposer « 40 312 combinaisons ». Était-ce vrai ? Sinon, combien y en avait-il ?

LE BUFFET du petit-déjeuner de votre hôtel dit proposer « plus d'un milliard de petits déjeuners différents ». En supposant qu'on peut en prendre un de chaque, combien d'éléments différents compte ce buffet ?

DÉCOUVRIR : FACTORIELLES !

Quand on est devant cinq délicieuses préparations, dur de savoir dans quel ordre les manger ! Les possibilités semblent infinies ! En fait, elles ne le sont pas. Il y a un bel outil mathématique pour calculer le nombre de possibilités : les factorielles.

Quand on veut choisir par quel plat commencer parmi cinq, il y a cinq possibilités, puisque tous sont encore là. Mais dès qu'un plat aura été mangé, il ne restera plus que quatre choix possibles pour la suite, puis trois pour le plat suivant, deux pour le quatrième et plus qu'une pour le dernier.

Nous pouvons calculer le nombre de possibilités totales comme suit :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

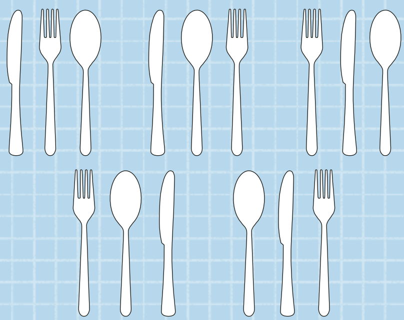
On appelle cela « factorielle 5 », qu'on écrit « 5! ». Quand vous verrez un point d'exclamation après un nombre, ce n'est pas forcément parce qu'il est très excitant ! C'est peut-être parce qu'on vous demande de le multiplier par tous les nombres qui lui sont inférieurs, jusqu'à 1.

LE BON ORDRE

Grâce à cette règle, on peut faire des calculs. Par exemple, pour poser dans l'ordre un couteau, une fourchette et une cuillère, combien existe-t-il de dispositions possibles ? Il y a :

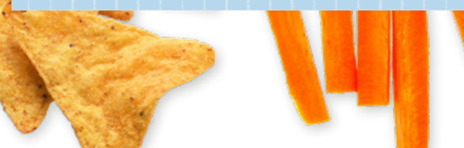
$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

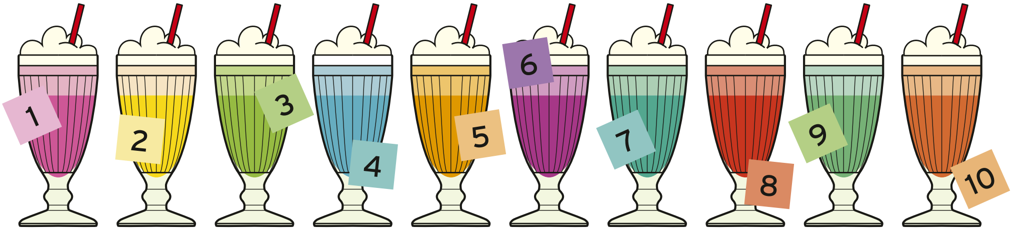
dispositions possibles. Vérifions :



Voici cinq dispositions, il en manque donc une. Laquelle ? (La réponse est page 144.)

S'il y avait quatre couverts, on aurait **$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$** combinaisons. Choisissez quatre objets autour de vous et écrivez toutes les dispositions possibles (réponse page 144).





UN GRAND NOMBRE

Comme les factorielles deviennent rapidement très grosses, le nombre de combinaisons possibles augmente beaucoup avec le nombre d'objets. Par exemple, avec dix objets : **10! = 10 × 9 × 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 3 628 800**. Ça fait plus de trois millions de dispositions !

Dans un paquet de cartes, combien y a-t-il de dispositions possibles ? Il y a 52 cartes dans un jeu, donc 52! arrangements différents. Combien ça fait ?

52! = 80 658 175 170 943 878 571 660 636 856 403 766 975 289 505 440 883 277 824 000 000 000 000

C'est un nombre gigantesque ! Si quelqu'un s'était amusé à redisposer les cartes d'un jeu dans un ordre différent chaque seconde depuis le Big Bang (qui a créé l'univers il y a 13,8 milliards d'années), il n'en aurait pas encore fini aujourd'hui. En fait, il n'en serait même qu'à...

Cela signifie qu'à chaque fois que vous prenez un paquet de cartes et que vous le mélangez pour faire une bataille, vous les disposerez dans un ordre unique dont il est à peu près certain que personne ne l'aura jamais vu avant (et ne le reverra probablement jamais)... à moins de vraiment *beaucoup* jouer à la bataille.

$$\frac{1}{584479530224231004142468383017418601270213807542632448000}$$

EXPÉRIMENTER : NOMBRES CACHÉS DANS L'ASSIETTE

Les suites de nombres cachent souvent un motif. Parfois, celui-ci nous révèle des connexions secrètes. La suite des nombres de Fibonacci en fait partie : on voit surgir ces nombres dans de curieux endroits, par exemple sur un ananas !

NOMBRES DE FIBONACCI

La suite de Fibonacci commence à 1. Et elle se poursuit… avec un autre 1. En raison de sa définition, il est nécessaire de lui donner deux nombres au départ mais, après cela, voici la règle :

Chaque nombre de la suite est l'addition des deux nombres qui le précèdent.

Une autre manière de l'énoncer serait de dire que le n-ième nombre de la suite, A_N, peut s'écrire $A_N = A_{N-1} + A_{N-2}$. On commence avec deux 1 et on les additionne pour obtenir le troisième nombre, 2. Le quatrième sera alors : 1 + 2 = 3, puis 2 + 3 = 5, etc.

On additionne ceux-là :

1 1 2 3 5 __ __ __ __ __

… pour obtenir le suivant !

Pouvez-vous calculer les cinq prochains nombres ?

FIBONACCI DANS UN ANANAS
IL VOUS FAUDRA :

- **Un ananas entier**
- **Des feutres ou des adhésifs de différentes couleurs**

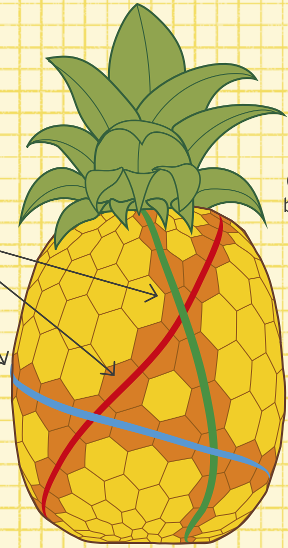
La surface d'un ananas se divise en segments qui suivent des bandes en diagonale autour du fruit. Nous allons les compter, mais il faudra bien se rappeler par où on a commencé !

CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Choisissez un segment près du haut de l'ananas et trouvez la bande diagonale à laquelle il appartient. Au moyen du feutre ou de l'adhésif, suivez cette ligne diagonale tout autour de l'ananas.

2. Choisissez un autre segment ailleurs sur l'ananas. Trouvez la bande diagonale à laquelle il appartient en vous assurant qu'elle suit une autre direction que la première et repérez-la tout du long avec un feutre ou un adhésif de couleur différente. Il se peut que les deux bandes se croisent !

ANANAS DE FIBONACCI



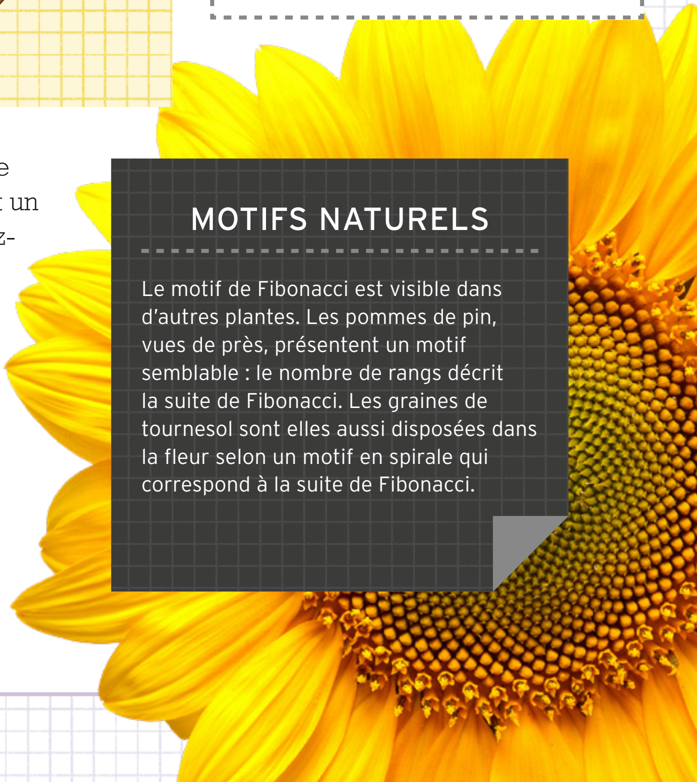
QUE SE PASSE-T-IL ?

Le nombre de bandes dans chaque direction sera souvent (mais pas toujours !) un nombre de la suite de Fibonacci. C'est parce que ces nombres fournissent de bons angles pour que les segments se répartissent de la meilleure manière possible autour de l'ananas.

Comme la croissance d'un fruit est naturelle et dépend des circonstances, il se peut qu'un nombre de bandes n'appartienne pas à la suite de Fibonacci. Si votre ananas ne vous donne pas un nombre de Fibonacci, retournez chez le maraîcher pour essayer avec un autre fruit (mais, dans ce cas, n'utilisez pas de feutres !).

3. Cherchez une troisième bande diagonale autour du fruit, qui suit un angle encore différent, et repérez-la avec une troisième couleur.

Quand vous aurez fini, votre ananas aura fière allure. En plus, vous pourrez compter combien de bandes partent dans chaque direction (en commençant d'une bande repérée et en faisant le tour du fruit jusqu'à la retrouver). Combien en comptez-vous ?



MOTIFS NATURELS

Le motif de Fibonacci est visible dans d'autres plantes. Les pommes de pin, vues de près, présentent un motif semblable : le nombre de rangs décrit la suite de Fibonacci. Les graines de tournesol sont elles aussi disposées dans la fleur selon un motif en spirale qui correspond à la suite de Fibonacci.

APPRENDRE : BONBONS ASSORTIS

Vous avez un paquet de bonbons et vous proposez à un ami d'y piocher. S'il ferme les yeux et qu'il en prend un au hasard dans le paquet, est-ce qu'il tombera sur son préféré ? Essayez de résoudre ces énigmes pour trouver la réponse.

DÉFIS SUCRÉS

1. Un ami vous offre un sachet qui contient quatre bonbons : deux bonbons à la fraise et deux chewing-gums. Combien vous faut-il en piocher au minimum pour être sûr d'en avoir au moins un de chaque sorte ?

2. À présent vous savez que le sachet contient cinq guimauves et cinq bonbons au cola. Combien vous faut-il en piocher pour être sûr que vous aurez au moins un bonbon au cola ?

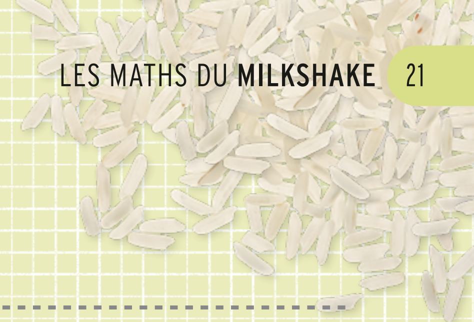
3. Le sachet contient maintenant un mélange de bonbons au chocolat, au caramel et à la cannelle. Combien vous faut-il en piocher pour être sûr d'avoir une paire de bonbons de même parfum ?

4. Maintenant, le sachet contient six bonbons à la mangue, six à la prune et six à la framboise. Combien vous faut-il en piocher pour être sûr d'avoir au moins deux bonbons à la framboise ?

5. Le sachet contient maintenant huit bonbons, dont un au kiwi et les autres au gingembre. Combien faut-il en piocher pour être sûr d'avoir sorti le bonbon au kiwi ?

6. Le sachet contient ici un mélange de bonbons au raisin, au citron et à la pomme. Il y en a dix au total. Combien faut-il en piocher pour être sûr d'avoir un bonbon au raisin ?

LA RÉPONSE à ces questions met en jeu ce qu'on appelle le « principe des tiroirs ». Vous en saurez plus sur ce principe en lisant la page 136 !



APPRENDRE : GRAINS DE RIZ SUR UN ÉCHIQUIER

Il existe une histoire mathématique très connue qui remonte au moins à l'an 1256 et implique un échiquier standard de 8 × 8, un ingénieux savant et un roi généreux. Saurez-vous résoudre l'énigme ?

LE DILEMME DE L'ÉCHIQUIER

Dans cette histoire, un ingénieux savant rend visite au roi de son pays, afin de lui présenter sa nouvelle invention géniale : le jeu d'échecs. Le roi en est si satisfait qu'il propose au savant de choisir tout ce qu'il voudra en échange.

Le savant dit : « Je voudrais que vous posiez un seul grain de riz sur la première case de l'échiquier, deux grains sur la suivante, quatre sur la troisième et ainsi de suite ; chaque case de l'échiquier devra compter le double des grains de la précédente. Et j'aimerais que vous me donniez le nombre de grains de riz que vous placerez sur la dernière case. »

Le roi, ravi que le savant n'exige que des grains de riz, lui accorde sur-le-champ. A-t-il bien fait ?

LE CALCUL

Voici quelques questions à se poser :

1. L'échiquier comporte un total de 8 × 8 cases : cela fait combien de cases en tout ?

2. Combien de grains de riz posera-t-on sur la première rangée de l'échiquier ?

3. Pouvez-vous écrire la formule qui donne le nombre de grains de riz de la case numéro N ?

4. Sur un échiquier de tournoi standard, les cases sont de 5,7 cm de côté. Combien de grains de riz peut-on poser dans une case de cette taille ? Essayez !

5. À quel niveau de l'échiquier se trouve-t-on quand le riz se met à déborder de sa case ?

6. Combien faut-il mettre de grains de riz sur la dernière case de l'échiquier ?

7. Combien pèse un grain de riz ? (Ce sera peut-être plus facile d'en peser un tas, de compter les grains et de diviser le total.)

8. Combien pèse le riz de la dernière case ? En grammes ? En kilos ? En tonnes ?

9. On produit 700 millions de tonnes de riz environ chaque année dans le monde. Combien de temps nous faudra-t-il pour donner au savant le riz qu'il a gagné ?

APPRENDRE : AUGMENTER LES DOSES

Les recettes donnent la quantité exacte de chaque ingrédient nécessaire et la façon de les mélanger. Mais que faut-il faire quand on compte cuisiner plus de portions, ou moins, que dans la recette ?

PETIT QUIZ : RECETTES

Calculez la quantité de chaque ingrédient nécessaire pour varier le nombre de portions.

1. Vous souhaitez cuisiner 36 muffins et les amener en classe pour les copains. Combien vous faut-il de chaque ingrédient ?

RECETTE DE MUFFINS
(pour 12 muffins)

- 2 verres de farine
- 1 cuillère de levure chimique
- 1/2 cuillère de sel
- 2 cuillères de sucre
- 1 œuf légèrement battu
- 1 verre de lait
- 1/4 de verre de beurre fondu

2. La recette du jambalaya précise qu'il faut 200 g de crevettes mais vous n'en avez que 150 g. Comment ajuster les autres quantités ?

JAMBALAYA FAMILIAL
(pour 4 personnes)

- 2 cuillères de beurre
- 500 g de blanc de poulet détaillé
- 200 g d'andouille
- 200 g de crevettes crues
- 4 oignons jaunes émincés
- 4 gousses d'ail pressées
- 2 poivrons émincés
- 1 verre de riz blanc long grain
- 350 g de tomates en rondelles
- 2 cuillères de sauce créole
- 4 cuillères de sauce piquante
- 2 verres de bouillon de poule

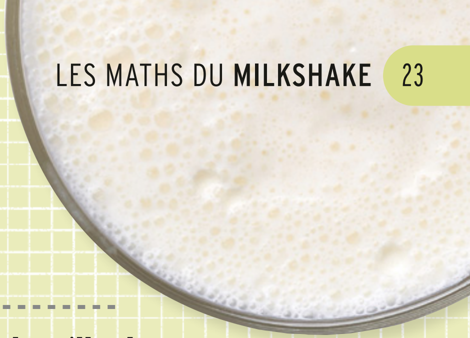
3. Vous attendez 35 invités pour déguster vos pancakes. En supposant qu'on n'utilise que des œufs entiers, y en aura-t-il assez pour tout le monde ? (Ce n'est pas grave s'il reste quelques pancakes à la fin.)

SUPER RECETTE DE PANCAKES
(10 portions)

- 1 verre de farine
- 2 cuillères de sucre
- 2 cuillères de levure chimique
- 1 pincée de sel
- 1 verre de lait
- 2 cuillères de beurre fondu ou d'huile végétale
- 1 œuf

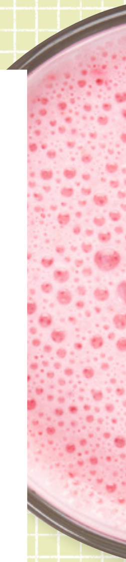
STOCK DISPONIBLE

- Un sac contenant 15 verres de farine, à moitié plein
- Un sac contenant 36 cuillères de sucre, 1/6 plein
- Un gros paquet de levure chimique
- Un gros paquet de sel
- Un litre de lait (4 verres)
- Une bouteille d'huile pleine
- Une boîte de six œufs



APPRENDRE : MILSHAKE ET VERRES MESUREURS

Un ami vous rend visite. Il est très exigeant sur la taille de ses milkshakes, mais vous n'avez pas de verre mesureur chez vous !



PETIT QUIZ : MILKSHAKES

Comment mesurer la bonne quantité ?

1. Vous avez un verre de 9 cl et un verre de 15 cl. Votre ami veut consommer exactement 12 cl de milkshake.

Il y a une machine à milkshake et vos verres n'ont aucune marque. Vous ne pouvez pas simplement vous arrêter à 12 cl parce que vous ne savez pas à quoi cette mesure correspond. Vous pouvez vider un verre (en le buvant), mais si vous en buvez seulement un peu, vous ne pouvez pas savoir combien il en reste.

Existe-t-il un moyen de faire un milkshake de 12 cl exactement ? *Indice : si vous remplissez le verre de 15 cl puis versez son contenu dans celui de 9 cl, vous aurez un verre de 9 cl rempli mais combien restera-t-il de milkshake dans le verre de 15 cl ?*

2. La machine se casse ! Avant cela, vous avez rempli un verre de 24 cl, et vous avez toujours vos verres de 15 cl et 9 cl, mais vides.
Vos deux amis veulent tous deux boirent 12 cl de milkshake. Comment diviser les 24 cl en deux portions de 12 cl ?

LES MATHS DU MILKSHAKE

Ces problèmes qui consistent à additionner et soustraire des nombres mettent souvent en scène plutôt des baignoires qui fuient, mais les milkshakes sont plus appétissants ! Voyez-vous d'autres façons de les résoudre ? Lesquelles sont les plus rapides ?

AUTRES ÉNIGMES :

a) Vous avez une machine à milkshake et des verres de 15 et 24 cl, mais pas de verre de 9 cl. Comment obtenir 12 cl ?
b) Vous avez un verre de 21 cl de milkshake (mais pas de machine), et des verres vides de 12 cl et 9 cl. Pouvez-vous le diviser en 6 cl, 6 cl et 9 cl ?
c) Vous avez une machine et des verres de 33 cl et 18 cl. Comment mesurer 24 cl ?
d) Vous avez une machine et des verres de 27 cl et 12 cl. Peut-on mesurer 18 cl ?
e) Vous avez une machine et des verres de 36 cl et 33 cl. Peut-on mesurer 18 cl ?

DÉCOUVRIR : DÎNER AU RESTAURANT ET ADDITION SÉPARÉE

Quand vous allez au restaurant avec des amis, il y aura toujours un peu de mathématiques au moment de l'addition, quand il s'agira de déterminer qui paye quoi. Il existe plusieurs manières de diviser la note, chacune avec sa dose de calcul.

PAYER CE QU'ON DOIT

Pour cela, reprenez la note élément par élément pour chaque convive et additionnez-les. Si vous avez partagé une portion de frites avec quelqu'un, il faudra diviser son coût. Si chacun additionne bien ce qu'il a pris, le total de ce que vous paierez tous devrait bien correspondre à la note finale.

DIVISER EN PARTS ÉGALES

Une méthode plus rapide consiste à diviser la note également entre les convives. Si sept personnes ont participé au dîner, chacune paiera un septième du total.

Problème : ce n'est juste que si tout le monde a mangé à peu près la même chose. Mais pour celui qui a pris un énorme milkshake en plus ? Et cet autre qui n'avait pas très faim et s'est contenté d'une salade ? Dans ce genre de cas, la méthode ne donne pas toujours des résultats très équitables.

Si vous avez pris un cheeseburger, une salade, un coleslaw et un coca light, à combien se monte la note ? (Réponse page 146)

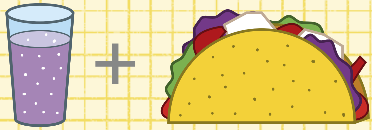
UNE MÉTHODE PLUS PRÉCISE : LES PORTIONS

Si vous aimez vous faciliter la vie en divisant mais que vous voulez aussi que ce soit équitable, vous pouvez établir des portions : un plat principal et une boisson bon marché font une portion.

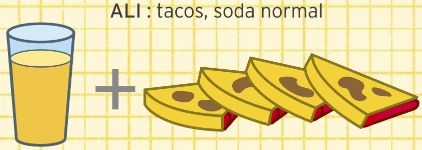
Si tout le monde a commandé un repas d'une portion, il suffit de diviser la note. Si quelqu'un a pris des suppléments ou une boisson en plus, il devra payer plus qu'une portion. Un autre qui a moins mangé ne devra peut-être que deux tiers de portion ou une demie, etc.

Calculez le nombre total de portions et divisez la note par ce total pour déterminer le coût d'une portion. Ceux qui en ont mangé une payent ce montant, ceux qui en ont mangé deux payent le double du montant, etc..

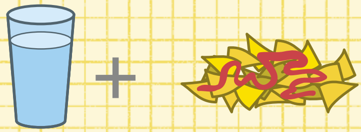
LES PORTIONS EN IMAGE



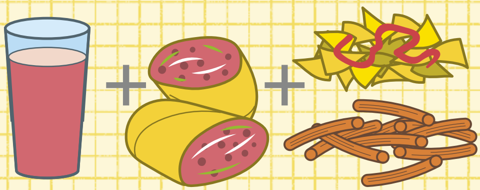
ALI : tacos, soda normal



BEN : quesadilla, jus normal



CARL : petite portion de nachos, eau



DIANE : grand burrito au bœuf, petite portion de nachos, grand milkshake banane, churros

TOTAL DÉPENSÉ : 45 €

Ici, Ali et Ben ont mangé pour une portion ; Carl, qui n'avait pas très faim, n'a pris qu'une demi-portion ; Diane quant à elle a mangé pour deux portions. Au total, cela fait 1 + 1 + ½ + 2 = 4½ = 4,5 portions. On divise la note par 4,5 (45 ÷ 4,5 = 10 €) pour obtenir le prix d'une portion. Ali et Ben payeront 10 € chacun, Carl ne paiera qu'une demi-portion (5 €) et Diane paiera les 20 € restants, ce qui nous fera bien 45 € et tout le monde sera content.

DÉCOUVRIR : NOURRITURE EN QUANTITÉ

Quand on répond à une question comme « combien de kilos de nourriture mange-t-on chaque année aux États-Unis ? », la réponse peut être un nombre énorme. On utilise alors la notation scientifique.

Quand on écrit un nombre, les chiffres se placent selon des colonnes : les unités dans la première, les dizaines dans la deuxième, les centaines dans la troisième, etc. Dans chaque colonne se trouve ainsi un nombre dix fois plus grand que celui de la colonne précédente. Autrement dit, on a multiplié par 10 entre les deux. C'est ce qu'on appelle le format décimal.

Multiplier plusieurs fois un nombre par lui-même (en l'occurrence par 10), c'est l'élever à une certaine puissance. On écrit cela avec un petit chiffre en exposant qui représente combien de fois on a multiplié ce nombre par lui-même. Par exemple, $10 \times 10 = 10^2$, et $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$.

Quand on écrit un nombre dans le format décimal, on le note en fait selon les puissances croissantes de 10 :

$10\,000 = 10^4 \quad 1\,000 = 10^3 \quad 100 = 10^2$
$10 = 10^1 \quad 1 = 10^0$

NOTATION SCIENTIFIQUE

Écrire un nombre en notation scientifique, c'est trouver une puissance de 10 à peu près équivalente, et écrire un petit nombre devant (moins de 10) qui multiplie cette puissance de 10 pour obtenir le nombre désiré. Par exemple :

$5\,000 = 5 \times 10^3$ $750 = 7{,}5 \times 10^2$
$423\,000\,000 = 4{,}23 \times 10^8$

Il est alors très facile de comparer des nombres en regardant la puissance de 10. Si le nombre compte beaucoup de chiffres, il est inutile de les écrire tous. On se contente souvent des premiers (et on arrondit si nécessaire).

$3\,628\,800 \approx 3{,}63 \times 10^6$

C'est une approximation ($3{,}63 \times 10^6$ c'est en fait 3 630 000) mais cela rend ce nombre plus facile à manipuler.

Pourrez-vous écrire tous ces nombres en notation scientifique ? Prenez deux chiffres après la virgule et arrondissez à l'inférieur ou au supérieur selon les cas.

476   362 880   10 000
43 252 003 274 489 856 000   2048

Pour multiplier deux nombres écrits en notation scientifique, on ajoute les puissances ($100 \times 1\,000 = 100\,000$, et $10^2 \times 10^3 = 10^{(2+3)}$). Et si, en multipliant les deux petits nombres devant le total dépasse 10, on augmente la puissance. Par exemple : $(5 \times 10^4) \times (3 \times 10^2) = 15 \times 10^6 = 1{,}5 \times 10^7$.

La **PUISSANCE DE 10** de la notation scientifique n'est pas que le nombre de zéros ! C'est le nombre de colonnes selon lequel il faut déplacer la virgule, qui doit être égal au nombre de chiffres moins un.

QUELLE QUANTITÉ DE NOURRITURE ?

À l'aide de la notation scientifique (et d'une calculatrice !), on peut calculer la quantité de nourriture consommée aux États-Unis tous les ans. Pourrez-vous y arriver à partir des informations ci-dessous ?

Population des États-Unis = 327,2 millions = 327 200 000 (en 2018)

Quantité de nourriture consommée par personne et par jour : 2 kg.

Vous pouvez d'abord calculer la quantité consommée par personne et par an, puis multiplier par la population totale, ou calculer la quantité de nourriture consommée par toute la population en un jour, puis multiplier cela par le nombre de jours dans une année (365).

Les réponses à toutes les questions de cette page se trouvent à la fin du livre.

APPRENDRE : ÉNIGMES DE GOURMETS

Pour profiter de la nourriture, le mieux est bien sûr de la manger, mais la deuxième meilleure technique, c'est d'en tirer des énigmes. Trouverez-vous les réponses à temps pour le dîner ?

PETIT QUIZ : NOURRITURE

1. PARTAGE DE FRAISES

Deux amis veulent partager un bol de fraises. Chacun compte un nombre égal de fraises qu'il s'attribue, mais il en reste une à la fin.

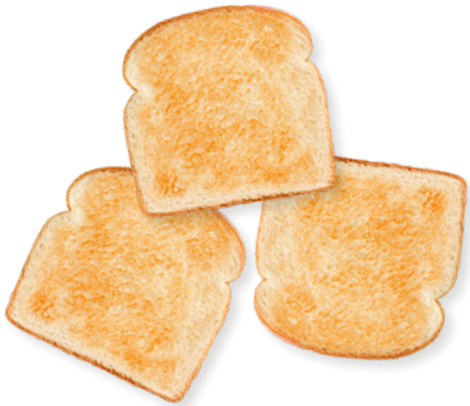
Juste avant qu'ils ne les dévorent, trois autres amis arrivent, qui veulent aussi des fraises. Toutes les fraises sont donc remises en tas et partagées équitablement. Cette fois, il en reste deux après le partage.

À ce moment, trois nouveaux amis débarquent. On leur demande s'ils veulent des fraises, mais quelqu'un n'est pas d'accord et dit : « Si nous partageons tout, cela ne fera même pas quatre fraises chacun ! »

Comment y avait-il de fraises dans le bol au départ ?

2. PAIN GRILLÉ

Vous faites griller du pain dans un grille-pain qui ne grille qu'un côté à la fois. Il est en revanche assez large pour y loger deux tranches. Il faut trois minutes pour griller un côté du pain.

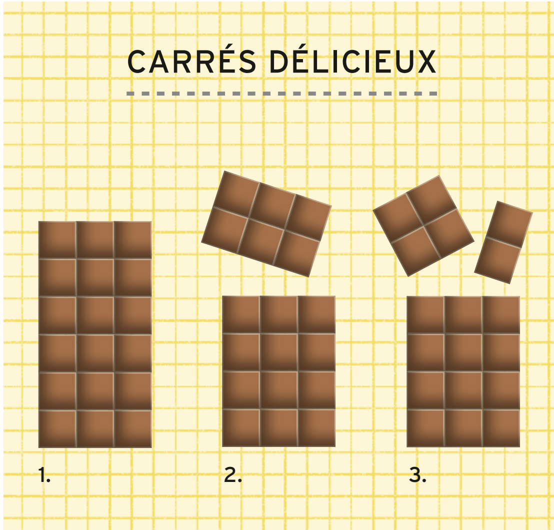


Combien de temps faudra-t-il pour griller trois tranches de pain ? Comment griller les trois tranches le plus vite possible ?

3. CASSER UNE BARRE DE CHOCOLAT

On vous a donné une barre de chocolat rectangulaire composée de carrés : six carrés de long et trois carrés de large. Il est possible de la casser en deux le long des lignes entre les carrés. Il est possible ensuite de recommencer avec les morceaux obtenus, toujours le long des lignes entre les carrés.

Si vous voulez que chaque carré de chocolat soit séparé, combien de manipulations sont nécessaires ? Comment y parvenir en cassant un minimum de barres ?



4. EMBALLAGE DE COURSES

Vous avez fait les courses au marché, mais vous n'avez que trois sacs pour les ramener. Vous savez que chaque sac ne peut pas porter plus de 1 250 g, et vous avez 3 750 g de courses à transporter. Est-ce que tout rentrera dans les sacs ? Y a-t-il plusieurs façons de s'y prendre ? Combien en trouvez-vous ?

EXPÉRIMENTER : PÂTES ALPHABET

PRÉSENCE ADULTE NÉCESSAIRE

Les pâtes et les céréales sont parfois présentées sous forme de lettres de l'alphabet. Est-ce que ce serait pratique pour transmettre des messages à vos amis ? Une petite analyse mathématique est nécessaire pour le savoir.

FRÉQUENCE DES LETTRES

Dans la langue française, les lettres de l'alphabet apparaissent à des fréquences différentes. Par exemple, sur ces deux pages, il y a 167 fois la lettre *T*, mais seulement 32 *Q*. En analysant de longs textes, on peut calculer la fréquence de chaque lettre dans la langue de tous les jours.

Le tableau ci-dessous donne pour chaque lettre de l'alphabet le nombre de fois qu'elle apparaîtra en moyenne dans un texte de mille lettres.

Si les lettres dans les pâtes alphabet ont la même fréquence, on pourra s'en servir pour composer des messages. Sinon, les *E* risquent d'être utilisés très vite tandis qu'il nous restera beaucoup de *J* !

IL VOUS FAUDRA :

- **Des pâtes alphabet, ou des céréales alphabet**
- **Un grand plateau ou une nappe imperméable pour les étaler**
- **Des pinces pour manipuler les lettres (en option)**
- **De longues bandes de papier où sera inscrit l'alphabet complet**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

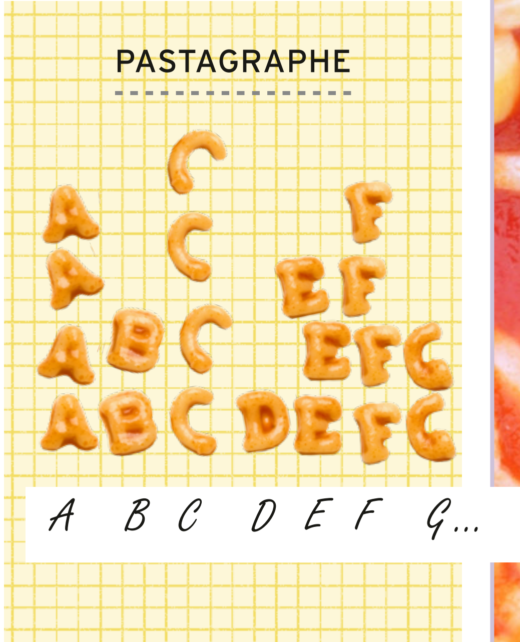
1. Lavez-vous les mains. Ouvrez le sachet de pâtes ou de céréales et versez-les dans un bol.

2. Avec une pince, étalez délicatement les lettres sur le plateau ou la nappe, et placez la longue bande de papier en dessous le long du bord. Prenez chaque pâte une à une et placez-la au-dessus de la lettre afin de former une colonne de pâtes alphabet au-dessus de chaque lettre de la bande.

LETTRE	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Pour 1 000	71	11	32	37	145	11	12	11	66	3	3	50	26	64	51	25

3. Une fois toutes les lettres triées, comptez le nombre de pâtes obtenues pour chaque lettre et comparez-le au tableau ci-dessous.

Si vous souhaitez remplir votre propre tableau avec les valeurs obtenues, il vous faudra compter le nombre de pâtes que vous avez au total. S'il y a mille pâtes dans le paquet, il n'y a plus de calcul à faire (mais cela semble peu probable, à moins que le paquet ne soit véritablement énorme). Si ce n'est pas le cas, il faut que vous calculiez le nombre de lettres pour mille pâtes :



$$\text{Nombre pour 1 000} = \frac{\text{Nombre d'occurrences de la lettre dans le paquet}}{\text{Nombre total de lettres dans le paquet}} \times 1\,000$$

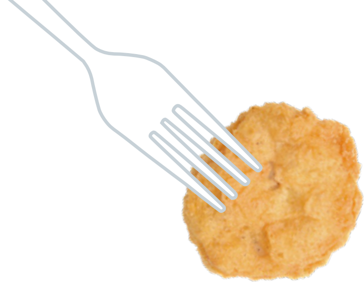
Vous pouvez analyser ainsi plusieurs paquets de pâtes alphabet, pour voir s'il existe différentes distributions.

Les cryptographes emploient ce genre d'analyse de fréquence pour déchiffrer les messages secrets. Comme les messages sont souvent codés en remplaçant chaque lettre par un autre symbole, trouver la fréquence de chaque symbole dans le message donne un indice sur la lettre qu'il remplace.

Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
6	60	65	59	45	11	2	4	5	1

LES PREMIÈRES pâtes alphabet répertoriées datent de 1867. C'est un journal américain, le *Tri-Weekly Standard* qui en parle comme d'une « nouveauté culinaire ». Aujourd'hui, on les fabrique en pressant la pâte dans des moules en forme de lettre.

DÉCOUVRIR : NOMBRES ET NUGGETS DE POULET



Quand un fast-food propose des nuggets de poulet, ils sont souvent vendus par boîte d'une certaine taille. Cela peut aboutir à des situations numériques intéressantes, en particulier l'impossibilité d'acheter certains nombres précis de nuggets !

NUGGET PAR MILLIERS

Votre fast-food local vend les nuggets par boîte de quatre, de six, de neuf ou de vingt nuggets. Si vous désirez acheter un nombre précis de nuggets, il vous faudra donc combiner les boîtes pour l'obtenir. Par exemple, si vous voulez 10 nuggets, vous pouvez acheter 6 + 4 = 10 nuggets. Pour 17, vous choisirez 4 + 4 + 9 = 17.

Mais si vous vouliez ne ramener chez vous que trois nuggets, impossible de s'en tirer en combinant les boîtes (du moins pas sans jeter des nuggets ou en les mangeant sur le trajet). Les mathématiciens appellent les nombres qu'on peut obtenir de cette façon, en combinant un ensemble précis d'autres nombres, les « nombres McNugget » !

QUEL NOMBRE DE NUGGETS PEUT-ON ACHETER ?

Pour répondre à cette question, il vaudra peut-être mieux s'intéresser à son contraire : « Quels nombres de nuggets est-il impossible d'acheter ? » Par exemple, en reprenant les boîtes de 4, 6, 9 et 20, il est impossible d'acheter un nugget, deux nuggets ou trois nuggets. Pas plus que cinq ou sept nuggets. Huit est possible (4 + 4), de même que 9 et 10 (une boîte de 9, et 4 + 6). Mais il est impossible d'acheter exactement 11 nuggets.

C'est là que ça devient intéressant. Les quatre nombres suivants, de 12 à 15, peuvent tous être achetés :

$12 = 4 + 4 + 4$
$13 = 9 + 4$
$14 = 4 + 4 + 6$
$15 = 9 + 6$

Imaginez que vous vouliez acheter 16, 17, 18 ou 19 nuggets. Il y a forcément une manière d'y parvenir puisque vous pouvez acheter une boîte de 4 à ajouter aux combinaisons de 12, 13, 14 et 15 nuggets.

Et il en ira de même avec 20, 21, 22 ou 23 nuggets ! Puis, de fait, pour n'importe quel nombre de nuggets supérieur à ça. Ce sera toujours possible en ajoutant des boîtes de 4 nuggets à l'une des combinaisons précédentes.

Il peut exister plusieurs manières d'obtenir un nombre particulier de nuggets. Par exemple, $26 = 4 + 4 + 6 + 4 + 4 + 4$, mais on a aussi $26 = 20 + 6$. Le point important, c'est qu'il sera possible d'obtenir tous les nombres de nuggets supérieurs à une certaine valeur d'au moins une façon.

Cela veut dire que les seuls nombres de nuggets qu'on ne peut pas acheter sont 1, 2, 3, 5, 7 et 11. Tous les autres nombres sont des nombres McNuggets pour cet ensemble de boîtes !

NOMBRES DE FROBENIUS

Le plus grand nombre qu'on ne peut pas obtenir avec un ensemble particulier de nombres de départ (qui vaut 11 dans notre exemple) est parfois appelé le nombre de Frobenius, d'après le nom du mathématicien allemand qui a étudié ce genre de problèmes.

Essayez d'inventer d'autres problèmes dans ce genre-là : choisissez deux, trois ou quatre tailles de boîte et essayez de trouver les nombres McNugget pour la combinaison choisie. Il y a parfois peu de nombres qu'on ne peut pas obtenir, et parfois toute une infinité !

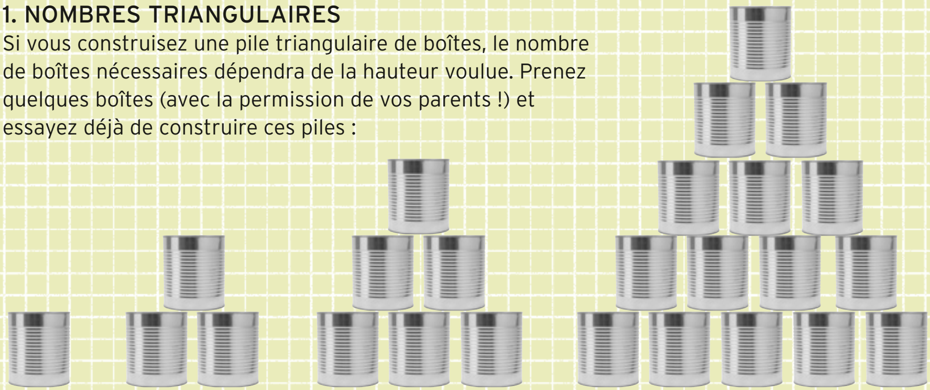
APPRENDRE : PILES DE CONSERVES

Les magasins font parfois de jolies piles triangulaires ou pyramidales de boîtes de conserve pour animer leurs rayons. Ces formes cachent d'intéressants motifs numériques qui vous donneront très envie de construire vos propres piles de conserves !

MATHÉMATIQUES DE L'EMPILEMENT

1. NOMBRES TRIANGULAIRES

Si vous construisez une pile triangulaire de boîtes, le nombre de boîtes nécessaires dépendra de la hauteur voulue. Prenez quelques boîtes (avec la permission de vos parents !) et essayez déjà de construire ces piles :



- Combien de boîtes faut-il pour chacune des piles ? Ces nombres suivent-ils un motif précis ?
- Vous n'aurez sans doute pas assez de boîtes pour aller beaucoup plus haut que ça (et la structure des piles peut commencer à être instable ; appuyez-les contre un mur !).
- Combien faudrait-il de boîtes pour obtenir une pile de 10 boîtes de hauteur ?

En général, le nombre de boîtes nécessaires pour une pile de hauteur N est donné par :

$$\textbf{Nombre de boîtes} = \frac{N \times (N+1)}{2}$$

Vérifiez que la formule fonctionne pour les nombres déjà établis jusqu'ici.

Ces nombres sont les nombres « triangulaires » et on les retrouve dans beaucoup de problèmes intéressants. Si dans un groupe de gens tout le monde se serre la main, le nombre total de poignées de mains sera triangulaire.

SI VOUS FAITES un gâteau d'anniversaire avec autant de bougies que votre âge chaque année, combien de bougies aurez-vous soufflées après votre centième anniversaire ? Combien de bougies chaque membre de votre famille a-t-il déjà soufflées ?

2. PYRAMIDES 3D

Pour l'instant, nous nous sommes contentés de formes triangulaires plates, mais pour des pyramides ? Quatre boîtes en carré, puis une par-dessus, cela fait une pyramide. Avec un carré plus gros de trois boîtes de côté au départ, sur lequel nous en plaçons un autre de deux boîtes sur deux, puis une boîte tout seule par-dessus celui-ci, la pyramide est plus grosse.

Chaque étage de la pyramide contient un nombre carré de boîtes : le nombre de boîtes le long d'un côté, élevé au carré. Pouvez-vous compléter ce tableau ?

TRIANGLES ?

Si nous choisissons une base triangulaire plutôt que carrée pour la pyramide, la suite de nombres est différente. Ce sont les nombres tétraédriques, dont la formule générale est la suivante :

$$\text{Nombre de boîtes} = \frac{N \times (N+1) \times (N+2)}{6}$$

Nombre de boîtes de côté	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de boîtes de l'étage	1 × 1 = 1	2 × 2 = 4	3 × 3 = 9	4 × 4 = ?			

Pour compter toutes les boîtes dans une pyramide à base carrée, il faut ajouter le nombre de boîtes de chaque étage. Il y a une boîte dans une pyramide à un étage, une pyramide à deux étages en aura 1 + 4 = 5, etc.

- Pouvez-vous calculer le nombre de boîtes pour ces pyramides de un à dix étages ?

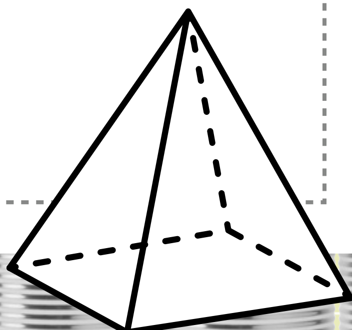
Le nombre de boîtes nécessaires pour construire une pyramide à base carrée de hauteur N est donné par :

$$\text{Nombre de boîtes} = \frac{N \times (N+1) \times (2N+1)}{6}$$

Vérifiez que la formule fonctionne pour les valeurs que vous avez déjà calculées !

C'EST POSSIBLE !

Le record du monde de la plus grosse pyramide de boîtes de conserve a été établi en 2011 par des ingénieurs du Missouri qui ont empilé 17 575 boîtes en pyramide à base carrée. Il leur a fallu sept heures pour la construire (les boîtes ont ensuite été données à une collecte alimentaire). Pouvez-vous calculer son nombre d'étages ?



DÉCOUVRIR : CARRELAGE NUMÉRIQUE BINAIRE

Pour écrire des nombres en système décimal, on a besoin de dix chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9). Mais quand la puissance est différente ? Si on se sert plutôt des puissances de deux, on obtient les nombres binaires, aux propriétés fascinantes.

PUISSANCES DE DEUX

$2^4 = 16 \quad 2^3 = 8 \quad 2^2 = 4 \quad 2^1 = 2 \quad 2^0 = 1$

Ces nombres sont particuliers parce qu'en les additionnant, on peut former tous les autres nombres. Par exemple : $7 = 4 + 2 + 1$ et $13 = 8 + 4 + 1$.
De plus, il en suffit toujours d'un. Plutôt que d'utiliser deux fois une puissance, on peut toujours passer à la puissance supérieure.
Avec les puissances de deux jusqu'à 2^4, on peut faire les nombres jusqu'à 31. Au-delà, il faudra passer à : 2^5 (32), 2^6 (64), etc.

Pouvez-vous écrire tous les nombres de la table suivante comme des sommes de puissances de deux ? Mettez oui ou non dans les cases pour indiquer si vous vous servez de cette puissance ou non.

Cette suite de oui et non nous fournit un autre moyen d'écrire un nombre : en listant combien de chaque

NOMBRE	16 ?	8 ?	4 ?	2 ?	1 ?	SOMME
13	non	oui	oui	non	oui	13 = 8 + 4 + 1
20						
28						
2						
31						

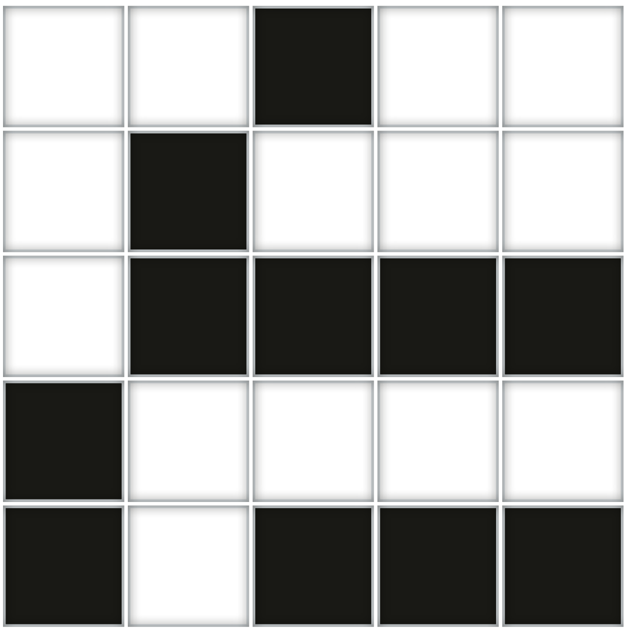
puissance de deux il contient (0 ou 1). Selon le tableau, 13 par exemple peut s'écrire 01101 (16 non, 8 oui, 4 oui, 2 non, 1 oui) : c'est son code binaire.

CARRELAGE À MOTIF

En remplaçant les zéros et les uns par des couleurs, on peut se servir des nombres binaires pour obtenir des motifs décoratifs. Certains carrelages sont bicolores, par exemple noir et blanc. Avec une bande de cinq dalles de côté, on code des nombres en prenant noir = 1, blanc = 0.

QU'EST-CE QU'ON CODE ?

Avec cinq colonnes de zéro ou de un, on peut encoder les nombres jusqu'à 31. C'est assez pour coder votre date de naissance (jour et mois), ou convertir les lettres de l'alphabet en nombres, de A = 1 jusqu'à Z = 26, afin de pouvoir cacher des messages entiers dans un carrelage !



Avec le tableau page 36, vous pourrez trouver les nombres qui se cachent dans ce carrelage. Chaque ligne représente un nombre, les colonnes sont dans le même ordre que dans le tableau (16 à gauche, 1 à droite).

Avec une feuille quadrillée et un stylo, créez un motif pour votre cuisine ! Il suffira ensuite de persuader le propriétaire des murs de refaire le carrelage !

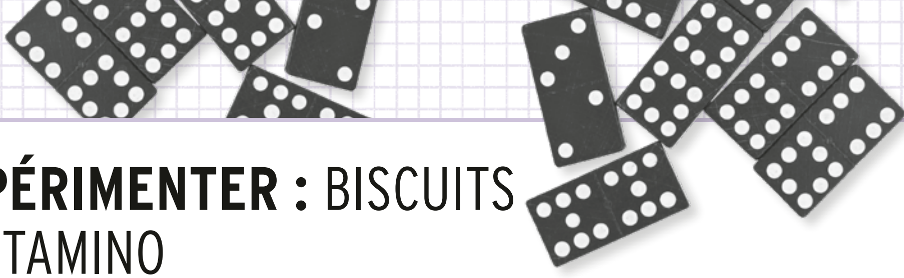
CHAPITRE 2

FORMES

DÉCOUVRIR...

APPRENDRE...

EXPÉRIMENTER...



EXPÉRIMENTER : BISCUITS PENTAMINO

Un domino est un rectangle composé de deux carrés (qu'on utilise dans un jeu rigolo). Mais le concept peut être étendu : un triomino est une forme composée de trois carrés, un tétramino en a quatre et un pentamino est une forme composée de cinq carrés attachés ensemble. Cuisinons des biscuits en forme de pentaminos !

Il n'y a qu'une seule forme possible pour un domino (un rectangle de deux sur un) et deux formes possibles pour un triomino (trois carrés en lignes ou en L). Vous connaissez peut-être déjà les formes des tétraminos, ce sont les pièces du jeu Tetris !

COMBIEN DE FORMES DIFFÉRENTES ?

Pour être un vrai pentamino, il faut :

- être fait de carrés ;
- avoir exactement cinq carrés ;
- que tous les carrés soient reliés par un côté ou plus (pas juste un coin !)

Pouvez-vous deviner les formes de tous les pentaminos ? Trouvez du papier vierge ou quadrillé et dessinez-les. Si deux formes sont les mêmes aux rotations près, cela ne compte que pour une seule forme. Vous devriez pouvoir trouver 12 formes différentes !

CUISINER DES BISCUITS PENTAMINO IL VOUS FAUDRA :

- **Une recette de pâte à biscuits**
- **Plusieurs couleurs de colorant alimentaire (en option)**
- **Un couteau et un rouleau à pâtisserie**
- **Une règle (propre !)**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Préparez la pâte et étalez-en un gros morceau bien plat.

2. Avec le couteau, marquez légèrement un quadrillage à la surface de la pâte (avec l'aide d'un adulte). Vous pouvez utiliser la règle pour que le quadrillage soit bien régulier. Il faut au moins 60 carrés, donc un rectangle de 6 × 10 sera parfait (ou plus grand si vous voulez qu'il y ait du rab).

3. Coupez les biscuits pentamino de toutes les formes possibles en suivant les lignes du quadrillage.

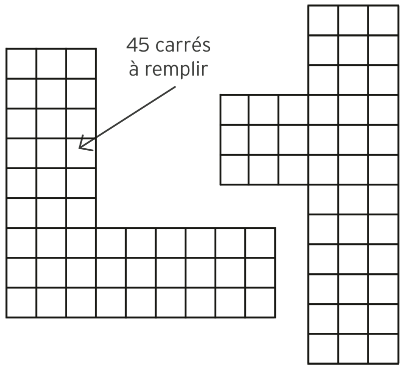
4. Cuisez les biscuits. Ils peuvent gonfler un peu à la cuisson. Recoupez-les droit ensuite à l'aide du couteau, une fois sortis du four mais avant qu'ils aient complètement refroidi.

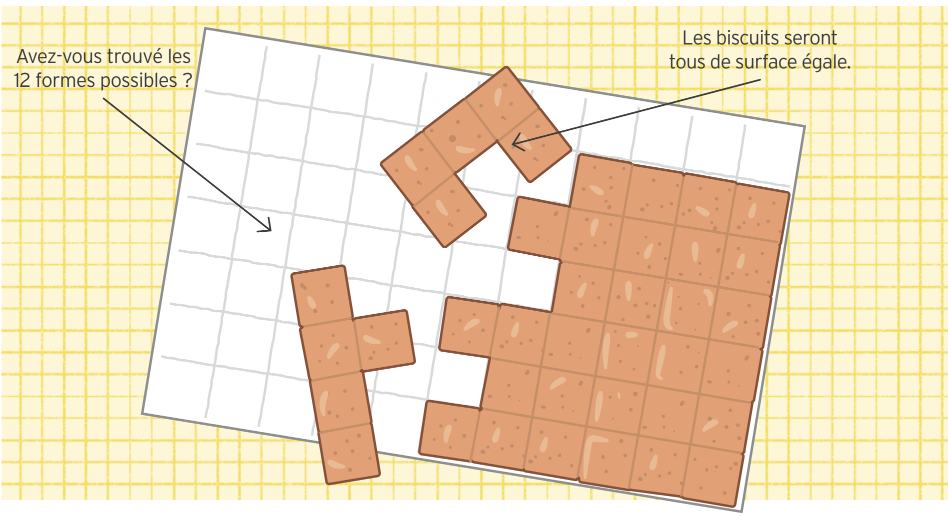
5. Utilisez les biscuits pour répondre aux questions.

ÉNIGMES EN PENTAMINO

Avec vos biscuits pentamino (vous pouvez en fabriquer avec autre chose, par exemple du carton) :

- Disposez les 12 pièces en un rectangle de 6 × 10.
- Disposez les 12 pièces en deux rectangles de même taille.
- Avec neuf des pièces, obtenez une version plus grosse des formes de pentamino, trois fois plus large et haute que celles de départ (ce n'est pas toujours les mêmes neuf pièces qui conviennent). Faites un croquis des formes pour vous aider.

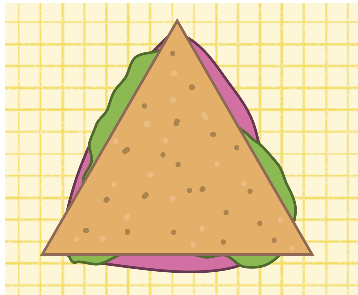




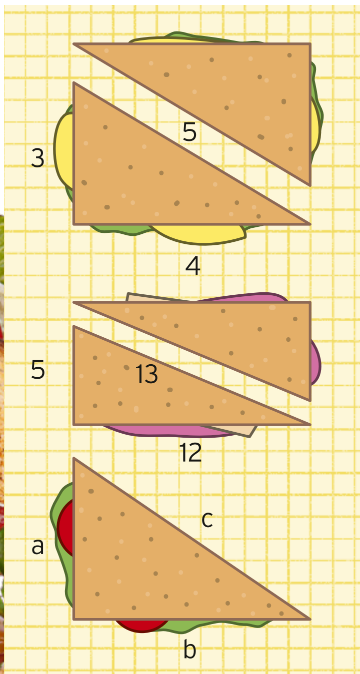
DÉCOUVRIR : CLUB PYTHAGORE

Si vous découpez un sandwich rectangulaire selon sa diagonale, vous obtenez deux triangles mathématiquement intéressants ! Chacun dispose d'un angle droit comme dans un rectangle, ce qui fait d'eux des triangles rectangles.

Tous les triangles ne sont pas rectangles. Par exemple, celui dessiné à droite ne l'est pas. Aucun de ses trois angles n'est droit.



Si on coupe un sandwich rectangulaire d'un angle à l'autre, chacun des deux triangles obtenus dispose d'un angle qui faisait partie du rectangle de départ. Il mesure 90 degrés, c'est ce qu'on appelle un angle droit.



Si le sandwich mesurait 3 cm sur 4 cm, la longueur de sa diagonale — le troisième côté des triangles — mesurera 5 cm !

C'est une propriété particulière des rectangles de 3 × 4, mais ce n'est pas le seul à donner un nombre entier pour sa diagonale. Par exemple, un sandwich de 5 × 12 aura une diagonale exactement égale à 13.

Il existe une règle qui donne la longueur de la diagonale. On l'appelle le théorème de Pythagore, on vous en a probablement parlé à l'école. Il dit que si les côtés d'un triangle rectangle sont a, b et c (avec c le plus long côté), nous savons que :

$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

Cette règle est toujours vraie dans tous les triangles rectangles.

THÉORÈME

Un théorème est un terme mathématique pour désigner une idée toujours vraie, quelque chose qu'on a prouvé et qui peut être utilisé comme une règle pour prouver autre chose.

Dans les exemples de la page 42, $a = 3$ et $b = 4$, donc $a^2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$, et $b^2 = 4^2 = 4 \times 4 = 16$, on peut donc calculer $a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$.
Pour avoir la longueur de c, on sait que $c^2 = 25$, donc c est la racine carrée de 25, qui vaut 5 ($5 \times 5 = 25$).
De même, $5^2 + 12^2 = 13^2$.

PAS TOUT UN SANDWICH

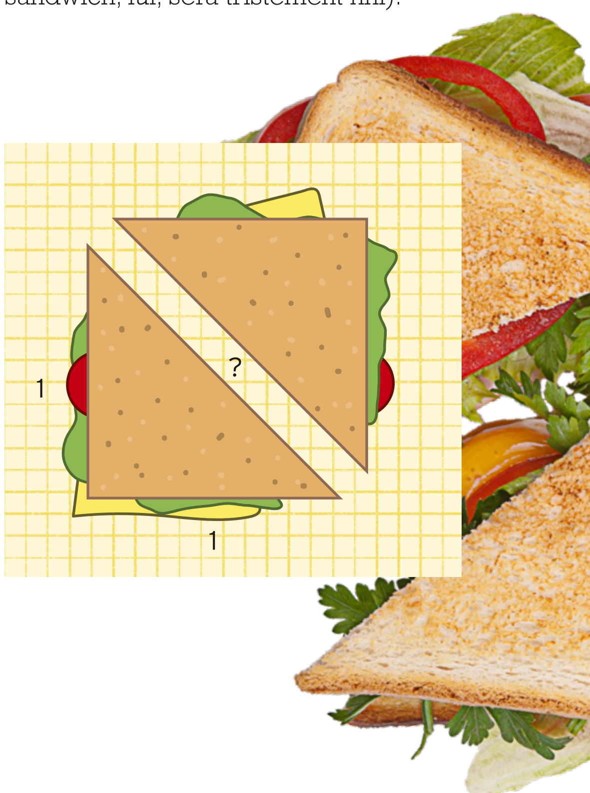
Le théorème de Pythagore nous permet de calculer la longueur de la diagonale même quand ce n'est pas un nombre entier. À droite, les deux côtés connus du sandwich font 1 (pas forcément 1 cm, 1 unité de longueur. Mais vous pouvez aussi imaginer un tout petit sandwich). Combien mesure la diagonale ?

Le théorème nous dit que si a et b = 1, alors $c^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Si $c^2 = 2$, que vaut c ? C'est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 2.

La réponse est la racine carrée de 2, qui n'est pas un nombre entier.

Comme π (voir pages 10–11), la racine carrée de 2 (parfois notée avec le symbole √) n'est pas un nombre entier et les chiffres après sa virgule continuent à l'infini sans se répéter.

Si vous prenez un sandwich carré et que vous le coupez en diagonale, la longueur de cette diagonale sera $\sqrt{2}$ fois celle des côtés, ce qui veut dire que votre déjeuner contiendra un nombre infiniment long (même si le sandwich, lui, sera tristement fini).



$$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807 8$$

EXPÉRIMENTER : EMBALLER UN SANDWICH CARRÉ

Quelle taille de papier faut-il au minimum pour emballer un sandwich carré ? À l'aide d'une super formule mathématique, vous pouvez déterminer la taille exacte de l'emballage nécessaire pour vos sandwichs, sans rien à découper.

IL VOUS FAUDRA :

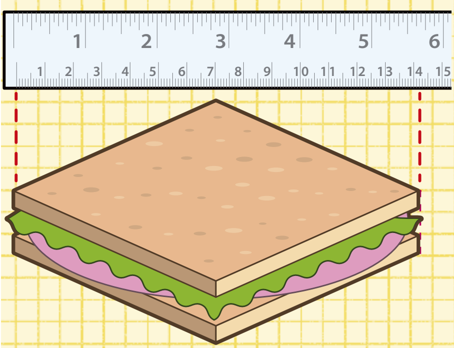
- **Un sandwich carré**
- **Une règle (propre !)**
- **Du papier sulfurisé**
- **De l'adhésif pour maintenir l'emballage fermé**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

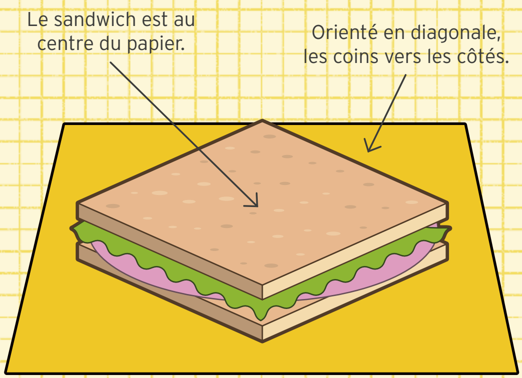
1. Placez le sandwich sur une surface propre et mesurez sa diagonale à la règle (de coin à coin), ainsi que sa hauteur.

2. Calculez la taille de papier qu'il vous faudra à l'aide de la formule suivante :

Diagonale du sandwich **+** **1,5 × hauteur du sandwich**



ÉTAPE 1



ÉTAPE 4

3. Découpez un carré de papier sulfurisé à cette longueur.

4. Placez le sandwich en diagonale au centre du papier, les coins vers les côtés du papier, et les côtés vers les coins.

5. Ramenez les quatre coins de l'emballage jusqu'au milieu du sandwich (le mieux est de procéder en même temps pour deux coins opposés, puis de passer aux deux suivants). Un peu de papier dépassera aux coins du sandwich, glissez-le à l'intérieur, derrière le reste.

6. Placez l'adhésif pour immmobiliser les quatre coins à la fois.

Voilà ! Un sandwich parfaitement emballé à l'aide d'un minimum de papier calculé mathématiquement et d'un minuscule recouvrement !

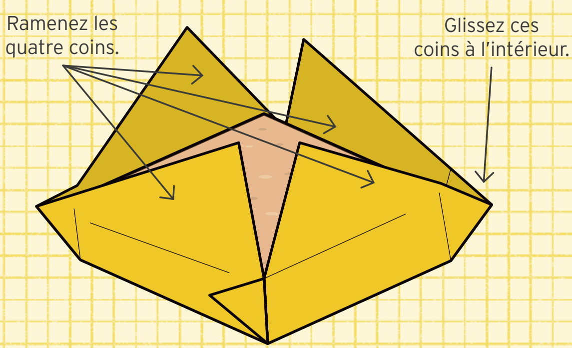
COMMENT ÇA MARCHE ?

La taille de papier nécessaire pour emballer un sandwich de cette manière est calculée à l'aide d'une formule qui comporte un 1,5. C'est une approximation pour la racine carrée de 2 (voir page 43), qui apparaît là car elle est liée à la diagonale d'un carré, égale à √2 fois son côté.

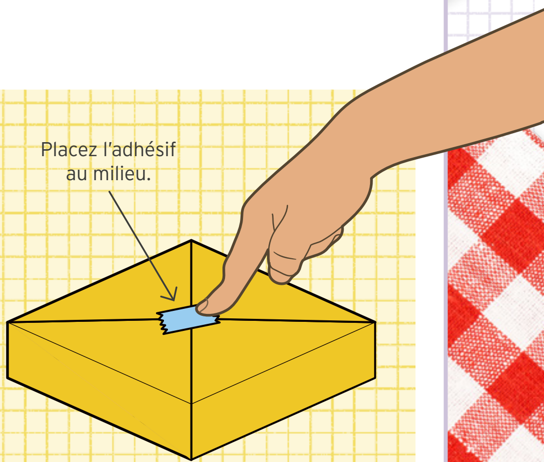
La quantité de papier nécessaire, sans aucun recouvrement est exactement donnée par cette formule :

Diagonale du sandwich + **√2 × hauteur du sandwich**

Comme il faut un petit recouvrement en réalité, on arrondit √2 = 1,41421... à 1,5.



ÉTAPE 5



ÉTAPE 6

DÉCOUVRIR : FORMES DE VERRE

Dans un bar à milkshakes, on sert les boissons dans des verres aux formes originales. Lequel contient le plus de milkshake ? Voici comment calculer le volume de différentes formes, afin de déterminer laquelle contiendra le plus de milkshake.

VERRE CYLINDRIQUE

C'est celui qui ressemble le plus à un verre normal. Le verre cylindrique est circulaire tout du long, et l'aire du cercle à sa base est $\pi \times r^2$ (voir page 10), où r est son rayon. Le rayon est la distance du centre au bord, il faut donc mesurer la largeur du verre, puis la diviser par deux pour obtenir le rayon. Le volume est alors :

$$\mathbf{V = \pi \times r^2 \times h}$$

où h est la hauteur du verre.

VERRE CONIQUE

Un cône est probablement ce qu'on aura de plus proche d'un verre à vin classique, plus large en haut qu'en bas, si ce n'est que les côtés d'un verre à vin sont incurvés. On constate avec plaisir qu'un cône aux bords droits dessine un volume exactement égal au tiers du volume du cylindre dans lequel il rentrerait ! Le volume du verre sera donc :

$$\mathbf{V = \tfrac{1}{3} \times \pi \times r^2 \times h}$$

où h est la hauteur du verre et r le rayon du cercle en haut du verre.

VERRE PYRAMIDAL

Un verre pyramidal est un peu moins habituel qu'un verre conique. Le volume d'une pyramide à base carrée se calcule néanmoins à l'aide d'une formule très proche :

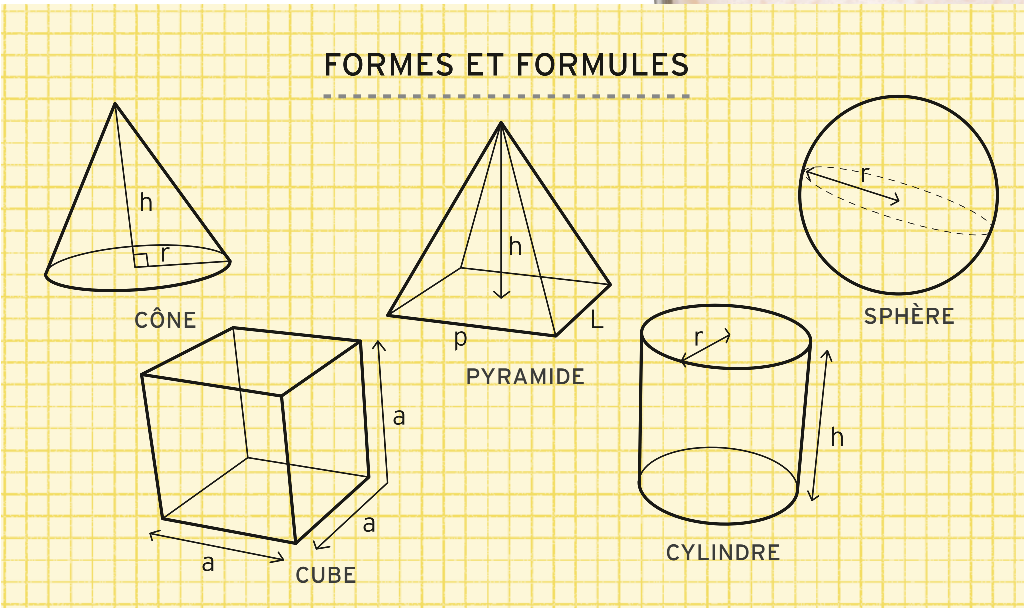
$$\mathbf{V = \tfrac{1}{3} \times L \times p \times h}$$

où h est la hauteur du verre, L la longueur et p la largeur du carré en haut du verre.

En fait, le volume de toutes les pyramides se calcule de cette façon. Si la base est triangulaire, pentagonale, hexagonale ou autre, et que les côtés partent des bords de la base et se rencontrent en un point, le volume sera toujours $\tfrac{1}{3}$ × l'aire de la base × la hauteur.

VERRE CUBIQUE

Un cube est probablement la pire forme possible pour un verre à milkshake (imaginez le nettoyage des coins !), mais d'un autre côté, son volume est très facile à calculer. Le volume d'un cube est la longueur de son côté, au cube. Pour un cube de côté a, cela nous donne : $\mathbf{V = a \times a \times a = a^3}$. Si le verre n'est pas un cube



parfait, que ses côtés ne sont pas tout à fait égaux, on multiplie la longueur par la largeur et la hauteur pour trouver le volume.

VERRE SPHÉRIQUE

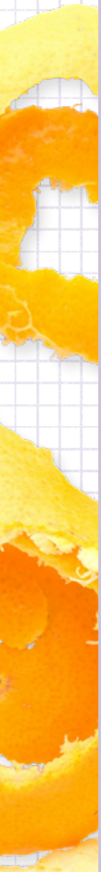
La sphère est vraiment un choix curieux pour une forme de verre. En plus, c'est difficile à mesurer car il faut connaître le rayon. Une façon d'y parvenir serait de placer le verre sur une table, de poser une planche bien droite sur le verre et de mesurer la distance entre la table et la planche, ce qui nous donne le diamètre de la sphère, qu'il reste à diviser par deux. Le volume est alors :

$$\mathbf{V} = \tfrac{4}{3} \times \pi \times \mathbf{r}^3$$

UNITÉS DE VOLUME

Quand on calcule un volume, le résultat est en unités cubiques. Si les mesures de longueur étaient en centimètres, le volume obtenu est en centimètres cubes (cm^3, parfois écrit cc). Si on avait mesuré les longueurs en mètres, le volume serait en mètres cubes (m^3).

EXPÉRIMENTER : COMMENT PELER UNE CLÉMENTINE



Quand on pèle un fruit, une orange ou une clémentine par exemple, c'est toujours un beau défi d'essayer de tout faire en une fois. Une manière très satisfaisante d'y parvenir est de commencer par le haut, et de dessiner une spirale jusqu'en bas. Si on y parvient et que la pelure est d'un seul tenant, quelle forme aura-t-elle ?

IL VOUS FAUDRA :

- **Une clémentine ou un autre fruit facile à peler. Si vous n'avez qu'une orange (ou un autre fruit à la peau plus dure), il vous faudra peut-être utiliser la pointe d'un couteau pour percer la peau (demandez à un adulte).**

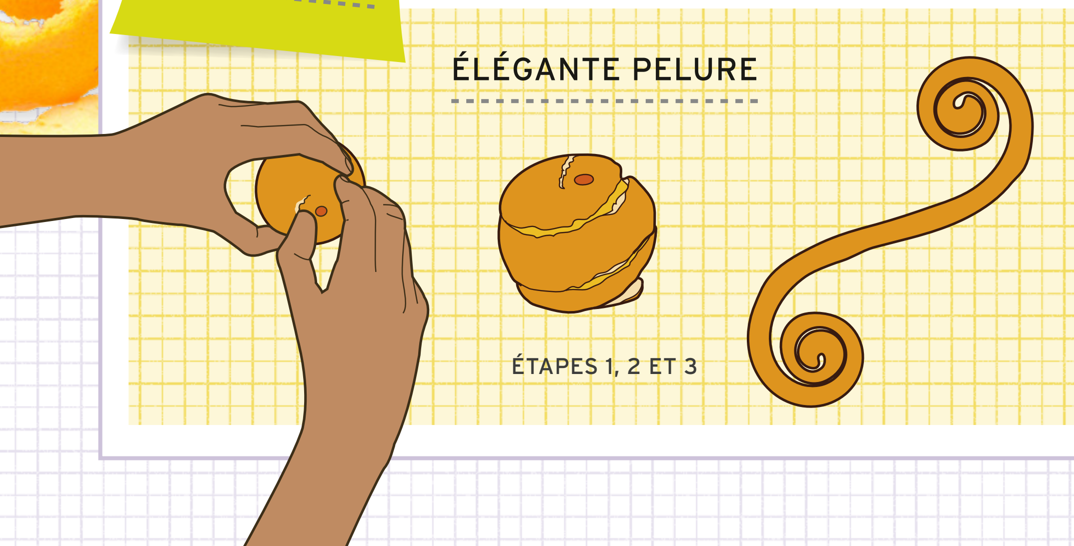
PRÉSENCE ADULTE NÉCESSAIRE

CE QU'IL FAUT FAIRE :

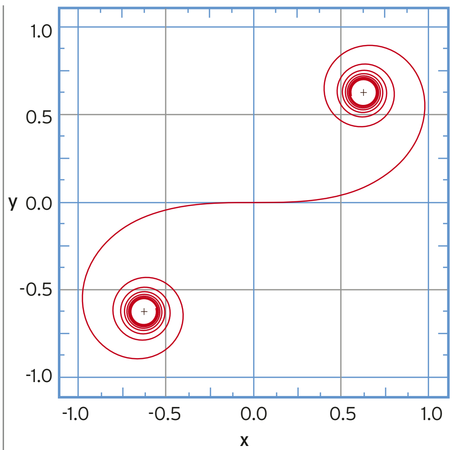
1. Pelez le fruit par le haut. Introduisez votre ongle de pouce sous la tige et commencez à peler en spirale, vers le bas.

2. Continuez en faisant le tour du fruit, vous créerez une bande de la largeur de votre pouce. Allez jusqu'en bas du fruit.

3. Étalez la pelure obtenue. Voyez par vous-même la forme obtenue !



QUE SE PASSE-T-IL ?



Cette forme est appelée une spirale d'Euler, d'après le nom du mathématicien Leonhard Euler. Elle a une propriété intéressante : sa courbure change constamment quand on la parcourt.

La pelure est très incurvée aux extrémités, elle s'échappe en spirale puis se redresse de plus en plus quand on approche de son centre.

Le milieu de la pelure est l'endroit qui correspond à la partie la plus large de la clémentine (son équateur, en quelque sorte). Il est presque droit. Pile au centre, la pelure est parfaitement droite. Puis, elle se recourbe de plus en plus dans l'autre direction.

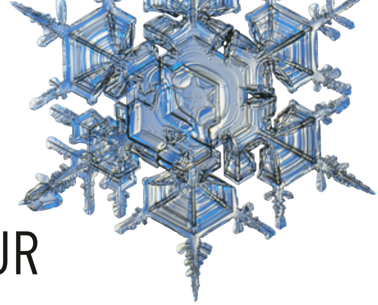
Ce changement de direction est normal : on a pelé le fruit toujours dans la même direction mais la forme de la clémentine a changé. Elle s'évasait au début, maintenant elle rétrécit. C'est pourquoi la pelure s'incurve dans l'autre sens. Elle se recourbe en spirale à mesure qu'on approche l'autre extrémité, jusqu'à n'être plus qu'un point.

SPIRALE D'EULER

Cette forme est très utile. Comme sa courbure change lentement, on s'en sert pour le dessin de certaines parties des rails de chemin de fer. Les trains à grande vitesse ne peuvent pas prendre de virages brusques, ils doivent suivre une courbe plus douce.

Les pilotes de course s'en servent aussi pour choisir une ligne d'attaque dans les virages, car plus on déplace le volant graduellement, moins on abîme la voiture.

Leonhard Euler (1707-1783)



DÉCOUVRIR : SYMÉTRIE DES FLOCONS AU CONGÉLATEUR

Les mathématiques sont partout autour de nous, même dans les petites choses ! Quand des flocons de givre se forment dans le congélateur, ils obéissent à des règles qui leur confèrent leur beauté familière.

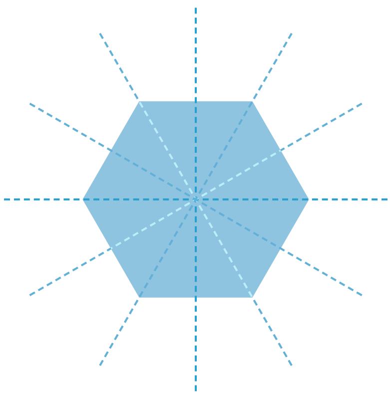
Les flocons présentent une structure délicate, trop petite pour être distinguée à l'œil nu. Leur forme ne peut s'apprécier correctement qu'à l'aide d'un microscope.

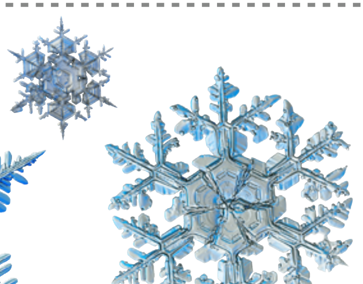
Ils apparaissent quand de la glace se cristallise autour de quelque chose, par exemple un brin de poussière ou de pollen. La croissance des flocons dépend des conditions environnantes, telles que la température et l'humidité, si bien qu'ils adoptent ensuite de nombreuses formes différentes. Cependant, tous ont la même structure mathématique : six bras cristallins de forme et de symétrie semblables à celles de l'hexagone.

FORMES DE FLOCON

On dit souvent que tous les flocons de neige sont différents, mais en réalité il y a environ 35 types de flocons, pour les 35 structures de base selon lesquelles ils pourront se former.

Ils ne sont pas tous plats non plus. Certains forment des colonnes hexagonales, ou un mélange de formes en deux et trois dimensions.





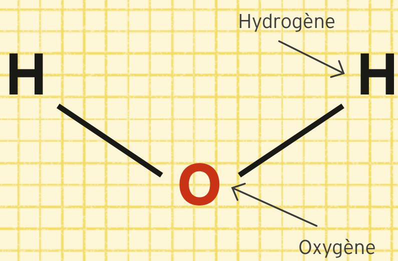
Si on pose un miroir en plein milieu d'un hexagone, on y verra encore un hexagone. On peut poser le miroir le long de n'importe laquelle des trois lignes qui passent par des coins opposés, ou des trois autres qui passent par le milieu des côtés opposés, on verra toujours un hexagone. On peut aussi le tourner d'un sixième de tour autant de fois qu'on voudra, rien ne changera. Ces propriétés sont ce qu'on appelle les symétries hexagonales.

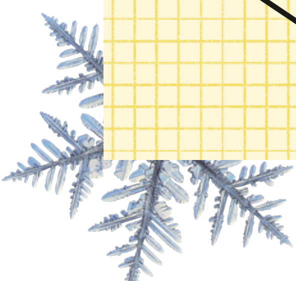
Les flocons présentent une symétrie hexagonale parce qu'ils sont faits de glace, d'eau gelée. Les molécules d'eau sont deux atomes d'hydrogène liés à un atome d'oxygène et l'angle entre les hydrogènes est toujours le même. La forme de cette molécule et la manière dont elle se lie à d'autres pour former de la glace implique que les cristaux seront toujours hexagonaux.

FAUX FLOCONS ?

En hiver, on voit souvent dans les rues fleurir les décorations en forme de flocons de neige. Malheureusement, on ne vérifie pas toujours s'ils sont bien hexagonaux. On voit ainsi parfois des flocons à cinq ou à huit branches : de faux flocons, en somme. La prochaine fois que vous verrez une publicité ou une décoration de Noël avec des flocons, vérifiez leur symétrie et méfiez-vous des imitations !

MOLÉCULE D'EAU





Vous pouvez découper des flocons dans du papier. Pliez un cercle (en six, bien sûr), découpez-en des bouts en suivant un motif, puis dépliez : cela fera une jolie décoration !

DÉCOUVREZ la symétrie plus en détail pages 80-81.

APPRENDRE : DÉCOUPAGE ALIMENTAIRE

Voici quelques énigmes de découpage de nourriture en cercle ou en rectangle. Préparez vos couteaux ! (Ou dessinez les formes sur une feuille pour les découper avec des ciseaux.) En présence d'un adulte !

PETIT QUIZ : DÉCOUPAGE

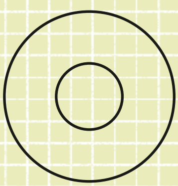
1. Vous avez une tarte circulaire qu'on ne peut découper qu'en ligne droite. Combien pouvez-vous faire de parts au maximum en trois coupes ? Il n'est pas obligatoire que les parts soient de même forme et même taille.

- La consigne précise « en trois coupes », mais il existe des questions semblables pour N coupes. Cela arrive souvent en mathématiques. Il est parfois utile de changer un élément pour voir si cela rend l'énigme plus facile et donne des indications sur une bonne méthode de résolution.

On peut couper une tarte en deux avec une coupe, et en quatre avec deux coupes.

- Reprenez la réponse pour trois coupes. (voir page 148).
- Est-ce que ces nombres suivent une suite logique ? Combien peut-on obtenir de parts au maximum en quatre coupes ? Est-ce conforme à la suite trouvée ?
- Pouvez-vous deviner le nombre de parts maximum pour cinq, six ou même sept coupes ? *Indice : révisez les pages 34-35 !*

2. Si on a un aliment circulaire avec un trou circulaire au milieu, combien de parts obtient-on au maximum avec trois coupes droites ?



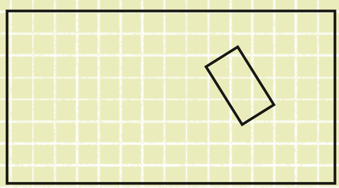
Indice : le fonctionnement est ici différent, mais il est toujours utile de se demander combien de parts on obtient en une coupe, puis en deux.

3. Vous avez un aliment rectangulaire, par exemple un gâteau, que vous alliez partager entre deux personnes mais, alors que vous aviez le dos tourné, quelqu'un en a prélevé une part rectangulaire en plein milieu ! Est-il toujours possible de le diviser en deux parts de même surface avec une seule coupe droite ?

Est-ce que cette méthode fonctionne pour n'importe quel rectangle découpé n'importe où sur le gâteau ?

Indices :

- *Si le rectangle n'était pas troué et que vous vouliez le couper en deux moitiés, comment vous y prendriez-vous ? N'y a-t-il qu'une seule technique ?*
- *Est-ce que ces lignes qui coupent le gâteau en deux moitiés ont un point commun ?*
- *Comment s'assurer que les deux parts sont bien de même taille alors qu'il manque un bout de gâteau ?*



APPRENDRE : CUBES DE FROMAGE

Voici quelques énigmes à résoudre à l'aide de cubes de fromage, ou de bouillons cubes. La plupart ne nécessitent pas vraiment d'en avoir sous les yeux, mais cela peut aider !

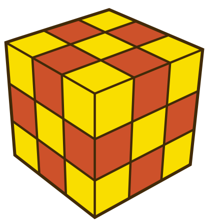
PETIT QUIZ : FROMAGE

1. Imaginons que vous vouliez construire un gros cube de fromage à l'aide de cubes plus petits, à raison de trois petits cubes par côté.

a) Combien de petits cubes faut-il ?
b) Combien de petits cubes verra-t-on de l'extérieur du gros cube ?
c) Combien de faces de petits cubes seront visibles sur le gros cube ?
d) Si vous colorez une face du gros cube avec du colorant alimentaire, puis que vous le démontez, combien de petits cubes ne seront pas colorés du tout ?

2. Quelqu'un a fabriqué un gros cube avec de petits cubes et coloré ses faces externes au colorant. Après démontage, on compte 98 cubes avec du colorant. Combien de petits cubes y avait-il dans le gros cube de départ ?

3. Le cube ci-contre est fait de petits cubes de deux types de fromage : comté (jaune) et gouda (rouge). En supposant que le cube du milieu est en gouda, et que les autres faces soient identiques, combien y a-t-il de cubes de gouda dans le gros cube ? Et de comté ?



Maintenant, imaginez ne pas savoir de quelle couleur sont les cubes qu'on ne voit pas : celui du milieu et ceux derrière. Combien faudrait-il au minimum de cubes de gouda pour obtenir le même cube ? Et au maximum ?

4. Toujours avec ces deux couleurs de fromage (gouda rouge et comté jaune), vous voulez les disposer en un gros cube de manière à ce qu'aucun petit cube de même couleur ne se trouve face contre face. Combien de cubes de chaque couleur faut-il pour un cube $2 \times 2 \times 2$? Et $3 \times 3 \times 3$, ou $4 \times 4 \times 4$?

5. Si on ajoute une troisième couleur de fromage, par exemple gouda rouge, comté jaune et tome blanche, peut-on disposer neuf cubes de chaque couleur en un gros cube de $3 \times 3 \times 3$ de manière à ce qu'aucune ligne de trois cubes (horizontale ou verticale) ne contienne deux cubes de la même couleur ?

6. Imaginez qu'on ait un cube de $3 \times 3 \times 3$ en petits cubes de fromage et qu'un ver arrive pour le dévorer. Il passe par la face extérieure d'un petit cube, la traverse et passe au petit cube suivant (en passant par le centre des faces à chaque fois). Le ver peut-il traverser tous les petits cubes et finir au centre du gros cube ? Comment ? *Indice : reprenez le cube de l'énigme 4. Comment le ver peut-il se déplacer entre les différentes couleurs ?*

EXPÉRIMENTER : TANGRAMWICH

Le tangram est un vieux puzzle chinois de sept pièces (les tans) qu'on obtient en découpant un carré d'une certaine façon. On peut ensuite les réassembler pour obtenir différentes formes. On peut aussi obtenir les mêmes formes en découpant un sandwich !

IL VOUS FAUDRA :

- **Un sandwich carré (sans croûte)**
- **Un couteau aiguisé et un adulte pour le manier**
- **Une règle (propre !)**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Découpez le sandwich selon la diagonale, du coin inférieur gauche au coin supérieur droit, sans séparer les moitiés.

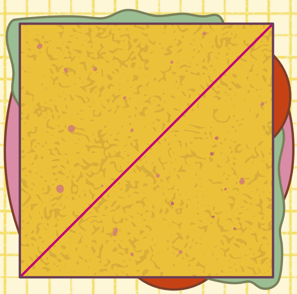
2. Mesurez le milieu du côté inférieur et le milieu du côté droit et reliez ces deux points au couteau. La coupe doit être parallèle à la première.

3. Coupez selon l'autre diagonale depuis le coin supérieur gauche, mais n'allez pas jusqu'au coin inférieur droit : arrêtez-vous à la deuxième coupe.

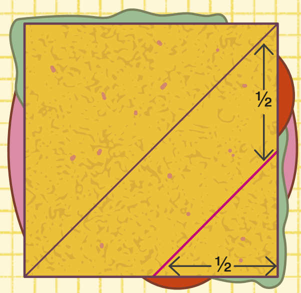
4. Découpez un carré en partant du haut de la deuxième coupe vers la première diagonale.

5. Enfin, coupez à l'horizontale entre le bas de la troisième coupe et la première coupe (ce sera plus facile en enlevant le coin inférieur droit).

Vous avez fait un tangramwich ! Séparez toutes les pièces et mettez vos amis au défi de reconstituer le carré de départ.



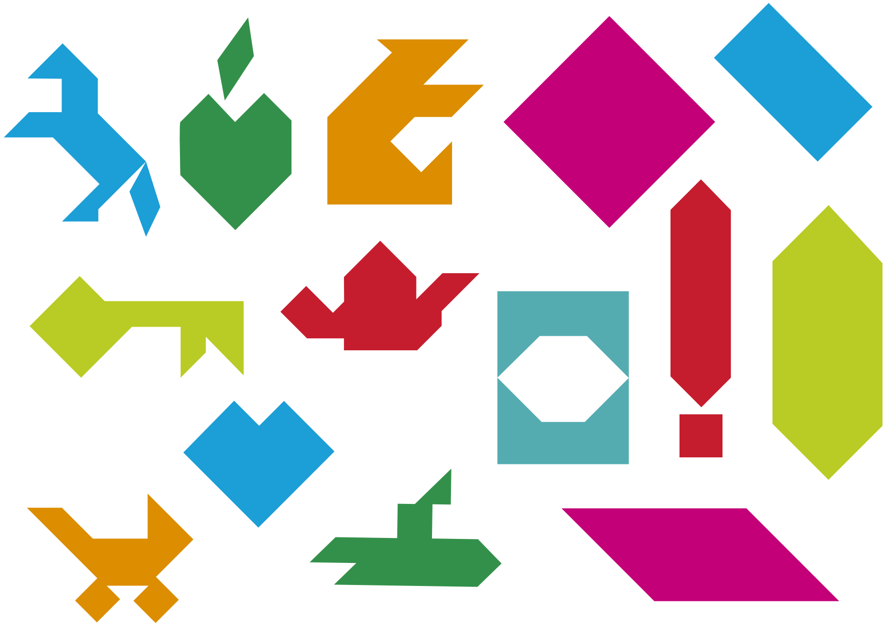
ÉTAPE 1

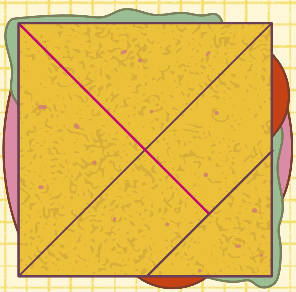


ÉTAPE 2

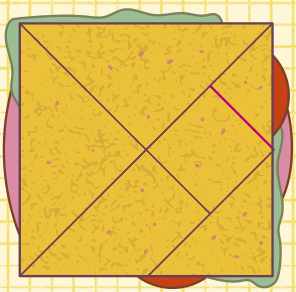
AUTRES FORMES

Quelles autres formes peut-on obtenir avec les pièces du tangramwich ?
En voici quelques-unes à trouver :

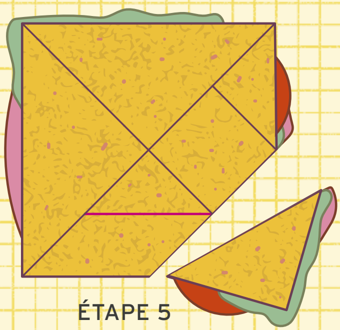




ÉTAPE 3



ÉTAPE 4



ÉTAPE 5

DÉCOUVRIR : PAVAGE SUCRÉ

Vous cuisinez des cookies, vous avez roulé la pâte en un rectangle épais sur le comptoir. Quelle est la bonne manière d'y découper des cookies à l'emporte-pièce pour en avoir le plus possible ?

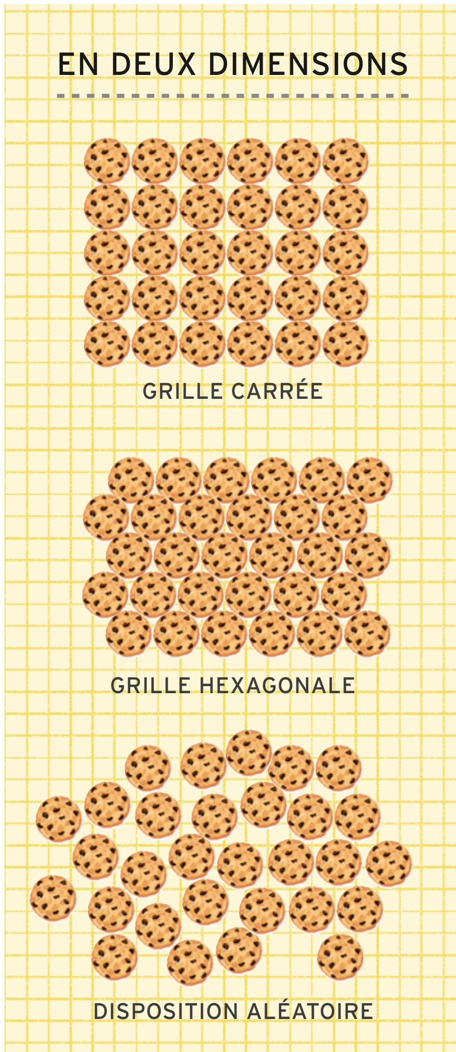
DÉCOUPER LES COOKIES

Tentez différentes dispositions et comptez le nombre de cookies obtenus. Puis, pesez la pâte qui reste. Moins il y en a, plus votre disposition était efficace. Si vous en expérimentez d'autres pour les comparer, assurez-vous d'utiliser la même pâte, roulée de la même manière et de même épaisseur (vérifiez en plaçant une pièce debout à côté de la pâte).

En mathématiques, on appelle ça un pavage de plan : comment disposer des cercles sur une grille pour utiliser l'espace au mieux ?

Une disposition régulière est toujours préférable. Des cookies circulaires disposés régulièrement en grille carrée, avec les bords qui se touchent, occuperont 78,54 % de la pâte.

Cependant, la meilleure disposition est hexagonale, quand les cookies d'une rangée se glissent entre les deux de la rangée précédente, toujours au contact. Ainsi, on occupe 90,69 % de l'espace, c'est le plus efficace possible (si les cookies sont de même taille).



ALGORITHME

Si les cookies sont de taille différente, c'est souvent difficile de déterminer la disposition la plus efficace. Toutefois, on peut parvenir à des dispositions satisfaisantes en faisant bon usage d'algorithmes numériques.

EMPILER LES ORANGES

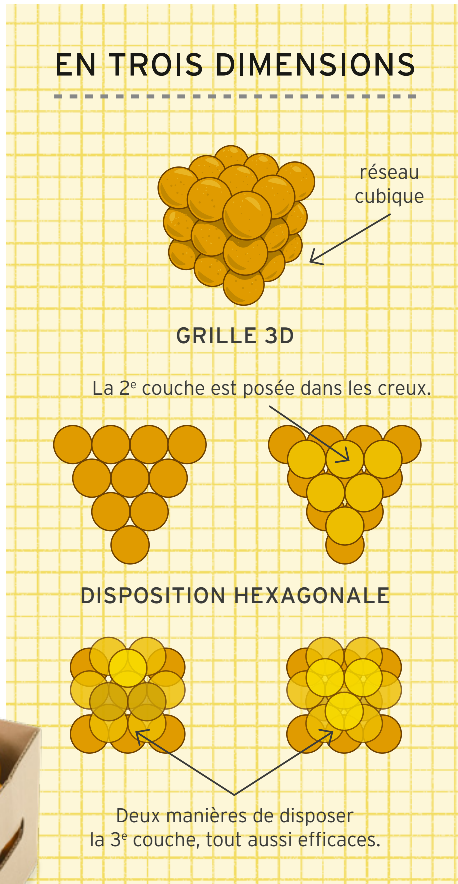
En trois dimensions (3D), c'est un pavage d'espace, parfois appelé le problème de l'épicier car, quand un marchand remplit une boîte d'oranges, il cherche à en mettre le plus possible.

Vous avez sûrement déjà vu des oranges au marché disposées en grille hexagonale. C'est le plus efficace pour les placer sur une surface plane. Mais est-ce toujours vrai en 3D ?

Les sphères disposées en une grille cubique en 3D, ce qu'on appelle un réseau cubique, ne remplissent que 52,36 % de l'espace disponible. C'est nul ! Il doit bien y avoir une meilleure solution, n'est-ce pas ?

Eh bien, oui ! Des couches d'oranges disposées en grilles hexagonales empilées les unes sur les autres, où les oranges se logent dans les espaces vacants de la grille du dessous, feront une disposition plutôt efficace. On le voit d'ailleurs souvent au marché !

Disposées de cette façon, les oranges occupent 74,05 % de l'espace. En 3D, on ne peut pas obtenir plus.



On peut mettre beaucoup d'oranges dans une boîte !

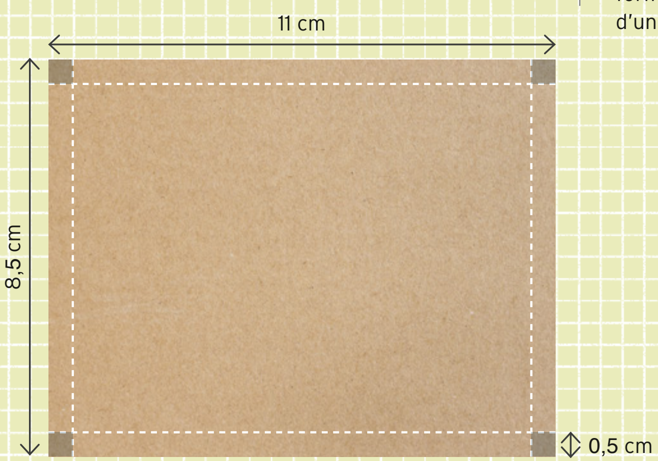
APPRENDRE : CARTONS ET RANGEMENTS PARFAITS

Dans la cuisine, on est entouré de boîtes et de paquets contenant toute sorte d'aliments. Imaginez que vous deviez inventer un emballage pour un nouveau produit. Comment optimiser sa forme et obtenir la plus grande boîte possible en pliant un morceau de papier ou de carton ?

CONSTRUIRE UNE BOÎTE

Pour construire votre boîte, vous partirez d'un morceau de carton de 8,5 × 11 cm. Pas besoin de couvercle, ce sera une boîte ouverte, mais il faudra replier les côtés vers le haut en découpant un petit carré dans chaque coin.

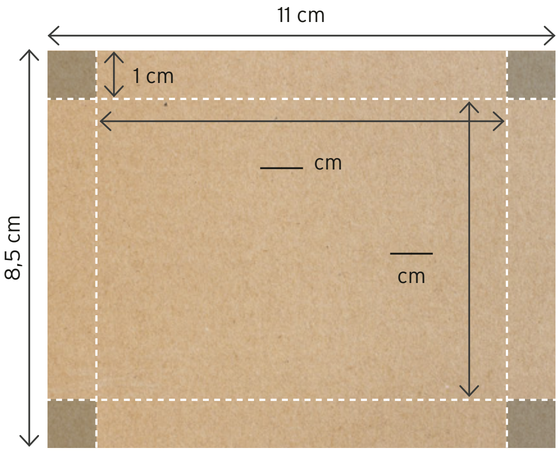
Si vous découpez un carré de 0,5 cm dans chaque coin, cela ressemblera à ça :



En repliant les quatre côtés, vous obtiendrez une boîte sans couvercle.

- Quels sont la largeur et la longueur de la base de la boîte ? N'oubliez pas que vous avez découpé des carrés de 0,5 cm pour les côtés !
- Quel est le volume de la boîte ? (Si vous ne vous rappelez pas la formule pour calculer le volume d'un pavé, révisez la page 47.)

Découpez maintenant plutôt un carré de 1 cm dans chaque coin et complétez le schéma :



Quel est le volume de la boîte à présent ?

- Si vous coupez un carré de taille différente dans les coins, cela changera le volume total.
- Complétez le tableau suivant pour chaque taille de carré à découper dans les coins :

OPTIMISATION

Les mathématiques permettent de répondre à la question : « Quel est le mieux qu'on puisse faire ? » Ingénieurs et fabricants font ainsi des maths pour y répondre, tout le temps. Il existe des méthodes mathématiques pour trouver la taille de carré qui donnera le volume maximal. Dans ce cas, la taille optimale se situe quelque part entre deux des valeurs en 0,5 (voir la réponse page 149). C'est l'analyse de fonctions qui permet de la trouver.

Vous apprendrez l'analyse au lycée. Si vous voulez la découvrir plus vite, renseignez-vous sur Internet ou demandez à votre professeur.

Taille du carré à découper (= hauteur)	Largeur de la boîte	Longueur de la boîte	Volume de la boîte
0,5			
1			
1,5			
2			
2,5			
3			
3,5			
4			

- Quelle taille de carré donne le plus gros volume ?
- Pourquoi est-il impossible de découper un carré de plus de 4 cm ?

EXPÉRIMENTER : PAQUET CADEAU

Quand on achète des fruits pour les apporter chez des amis, c'est toujours mieux d'avoir une jolie boîte. Vous pourrez en fabriquer autant que vous voudrez grâce à cet origami mathématique !

IL VOUS FAUDRA :

- Six carrés de papier coloré

CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Pliez en deux horizontalement (du bas vers le haut) et rouvrez.

2. Il devrait y avoir à présent une ligne horizontale. Repliez les bords supérieur et inférieur de manière à ce qu'ils se rejoignent sur cette ligne.

3. Pliez le coin supérieur droit de manière à ce qu'il touche le bord inférieur. Puis rouvrez-le. Il faudra faire six pièces identiques, donc assurez-vous bien de toujours commencer par le même coin !

4. Pliez le coin inférieur gauche comme à l'étape 3, et dépliez.

5. Les deux dernières pliures ont produit de petits rabats triangulaires, indiqués par un « X » sur le schéma. Pliez-les dans l'autre sens pour les faire disparaître derrière.

6. Pliez de nouveau le coin supérieur droit, mais glissez-le cette fois derrière la moitié inférieure du papier.

7. Pliez de nouveau le coin inférieur gauche en le glissant derrière la moitié supérieure du papier. (Ce sera un peu plus dur, puisque l'autre côté est déjà bloqué.)

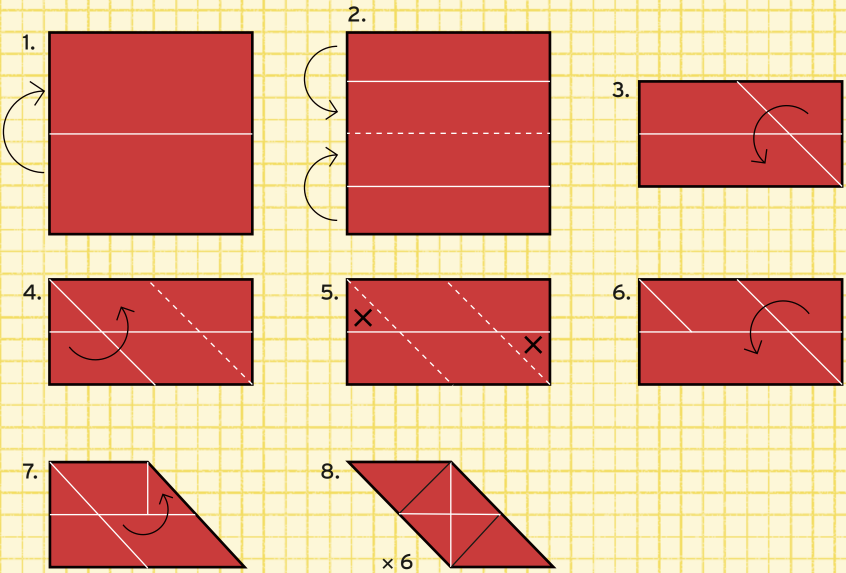
8. Trouvez la croix centrale que dessinent les bords du papier et pliez les triangles des extrémités comme sur le schéma, dans les deux sens, pour les rendre flexibles.

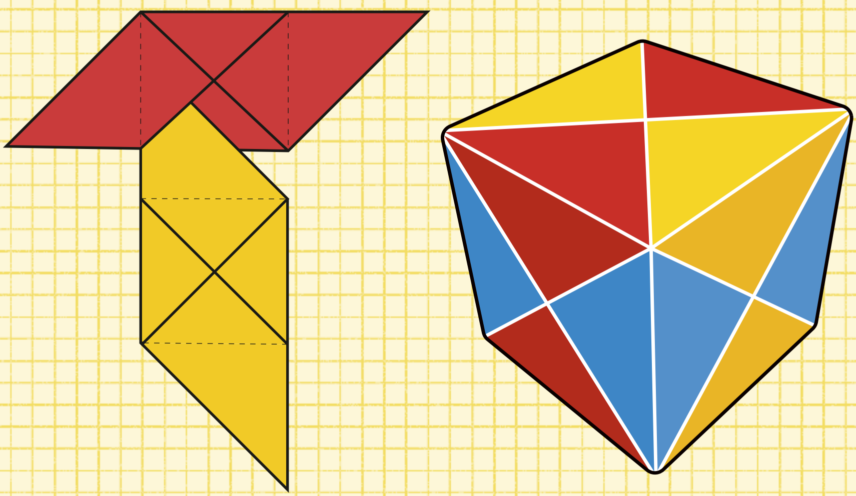
Répétez toutes ces étapes avec les cinq autres carrés de papier, afin d'obtenir six fois cette forme. Vérifiez que ce sont bien toutes les mêmes.

Vous pouvez à présent assembler les six pièces en une boîte en forme de cube. Pour cela, placez une paire de pièces à angle droit l'une de l'autre et glissez les triangles flexibles de l'une dans les rabats de l'autre.

Avec les six carrés de départ, vous devriez pouvoir faire un cube. Laissez un côté ouvert pour le remplir. Ceci fait, ajoutez la dernière pièce et fermez la boîte.

FABRICATION DE LA BOÎTE





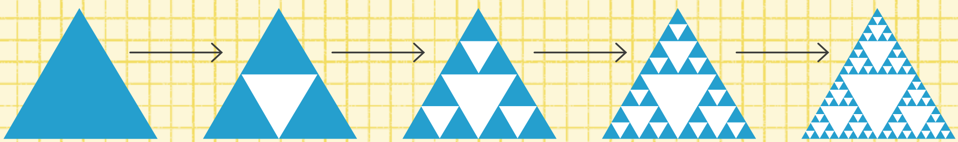
DÉCOUVRIR : LÉGUMES ET FRACTALES

Les fractales sont des formes mathématiques intéressantes. Si vous en regardez une de près, vous verrez à l'intérieur de celle-ci sa propre reproduction en miniature. Il y a beaucoup d'exemples de fractales dans le monde réel, en particulier dans votre bac à légumes !

FRACTALES IMAGINAIRES

Prenez un triangle équilatéral (dont les trois côtés sont de même longueur) et découpez un triangle plus petit en son centre comme sur le schéma. Il nous reste donc trois petits triangles..

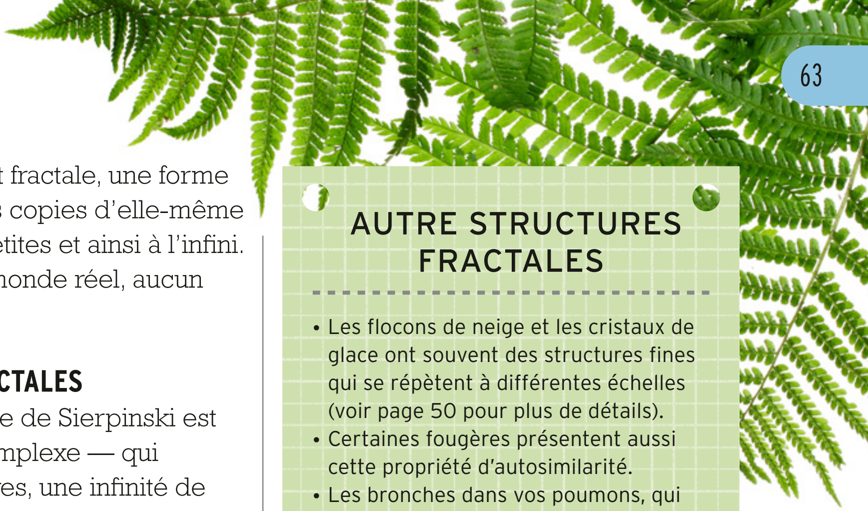
DÉCOUPAGE TRIANGULAIRE



Imaginez maintenant qu'on découpe trois plus petits triangles encore au centre des petits triangles, de la même façon. Nous voilà avec un ensemble de triangles encore plus petits, qu'on pourra encore découper ainsi.

En continuant à l'infini, il y aura toujours des espaces où découper de plus petits triangles, puisqu'à chaque fois qu'on en découpe un, on en fait apparaître trois. En pratique, dans le monde réel, les ciseaux sont vite trop grands pour continuer ainsi. Mais on peut imaginer faire ça à l'infini. Et en s'approchant d'un ensemble de trois petits triangles, on constatera qu'il ressemble toujours au grand triangle de l'étape précédente.

Ce processus crée une fractale appelée triangle de Sierpinski, des triangles découpés dans des triangles, comme ça à l'infini. En regardant de très près une partie du triangle, on verra le triangle complet. C'est parce que c'est une fractale. On appelle cette propriété l'autosimilarité.



Pour être vraiment fractale, une forme doit présenter des copies d'elle-même de plus en plus petites et ainsi à l'infini. Bien sûr, dans le monde réel, aucun objet ne le peut !

ALIMENTS ET FRACTALES

Même si le triangle de Sierpinski est une forme très complexe — qui compte, entre autres, une infinité de trous —, le procédé qui permet de l'obtenir est très simple. Il n'y a qu'une règle : retirer le triangle au centre de chaque triangle, et recommencer.

Cela signifie que beaucoup d'objets construits ainsi, selon une règle simple, peuvent présenter des propriétés fractales. Le brocoli, par exemple, est une plante qui grandit en produisant des embranchements à répétition, créant de très nombreuses branches qui s'achèvent en bouton.

En regardant bien une tête de brocoli, on s'aperçoit que la même structure est répétée à des échelles différentes dans tout le légume. Il contient de plus petites versions de lui-même. Sa structure est donc sembable à une fractale. D'autres plantes de la même famille, comme le chou romanesco ou le chou-fleur, sont aussi de forme fractale. Malheureusement (ou heureusement, si vous n'aimez pas le brocoli), ils ne sont pas infinis.

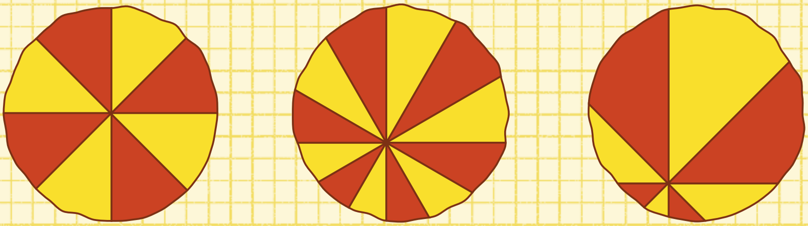
AUTRE STRUCTURES FRACTALES

- Les flocons de neige et les cristaux de glace ont souvent des structures fines qui se répètent à différentes échelles (voir page 50 pour plus de détails).
- Certaines fougères présentent aussi cette propriété d'autosimilarité.
- Les bronches dans vos poumons, qui permettent le passage de l'oxygène dans le sang, ont également une structure fractale.

APPRENDRE : MATHÉMATIQUES DE LA PIZZA

Il y a une quantité surprenante de mathématiques sur une pizza ! Comme elle est circulaire, souvent coupée en parts, on peut inventer tout un tas de problèmes à son propos. Voici une sélection de bizarreries mathématiques impliquant des pizzas.

DÉCOUPAGE DE PIZZA



LE THÉORÈME DE LA PIZZA

C'est un vrai théorème, et c'est vraiment son nom. Il indique si on coupe une pizza en un nombre de parts multiple de quatre (donc 8, 12, 16, etc.), selon des lignes également espacées passant toutes par un même point, tel que le centre de la pizza, alors les ensembles alternés de parts auront la même aire totale.

En découpant la pizza en huit parts comme sur le premier schéma, l'aire de toutes les parts jaunes est la même que celle de toutes les parts rouges. Ici, cela semble évident, car toutes les parts sont de même surface et qu'il y en a quatre de chaque couleur.

Mais le théorème de la pizza nous indique que cela marche tout le temps, même si le point où toutes les parts se touchent n'est pas le centre de la pizza.

Dans les autres exemples, où les parts se touchent ailleurs qu'au centre, les parts d'une même couleur ont bien la même aire que celles de l'autre couleur. Si votre découpage de pizza est mal parti, vous pouvez donc encore rattraper le coup et partager avec un ami !

VOIR PAGE 42 pour découvrir un autre théorème mathématique.

MATHS ET PIZZA

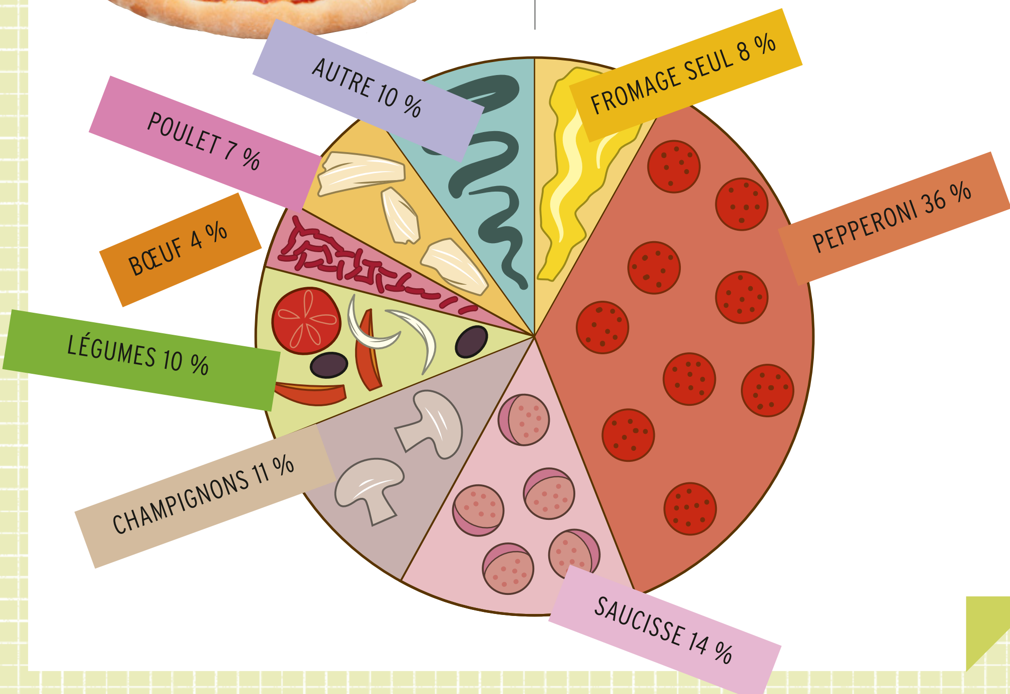
VOLUME D'UNE PIZZA

Une pizza à pâte épaisse peut être considérée comme un cylindre très bas. Pour calculer son volume, si son rayon est z et sa hauteur a, quelle serait la formule ? La formule du volume du cylindre est donnée page 46.

PIZZA CAMEMBERT

Quelle quantité de chaque garniture aimez-vous sur votre pizza ? En les disposant bien séparées, chacune sur son segment de pizza, on pourrait facilement comparer !

Un diagramme en camembert représente des données qui forment un tout. Par exemple, ce schéma de pizza donne les résultats d'un sondage de 2011 sur les garnitures préférées des clients, en pourcentage des ventes.
La première était le pepperoni, avec 36 % de favorables. Cette partie couvre donc 36 % de la surface totale de la pizza. Dans un camembert, la surface donne le pourcentage. On s'en sert souvent pour transmettre une information de façon visuelle (vérifiez toujours que le total des pourcentages donne 100 %).



EXPÉRIMENTER : HEXAGONES CACHÉS

Un hexagone est une forme à six côtés. Dans un hexagone régulier, les six côtés sont de même longueur et l'angle est le même à chaque coin. Des hexagones se cachent partout autour de nous sans que vous le sachiez, et jusque dans les cubes de fromage !

IL VOUS FAUDRA :

- **Des cubes de fromage ou un gros bout qu'on peut tailler en un cube**
- **Un couteau aiguisé (demandez l'aide d'un adulte)**
- **Une règle (propre !)**

PRÉSENCE ADULTE NÉCESSAIRE

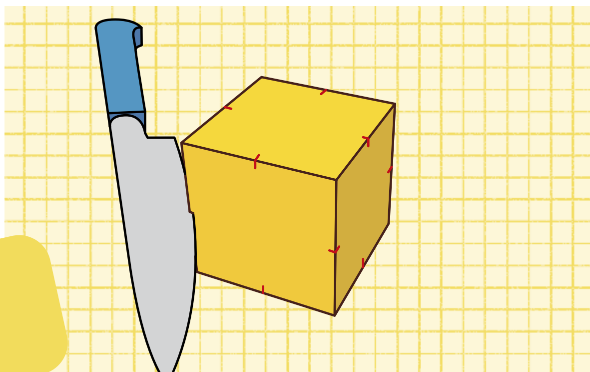
DÉCOUVREZ plus de détails sur la symétrie pages 80-81.

CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Assurez-vous que votre cube en est bien un. Mesurez les arêtes dans les trois directions. Utilisez le couteau pour mieux tailler le cube au besoin, jusqu'à ce qu'il soit régulier.

2. Mesurez le milieu de chaque arête du cube et faites une petite marque au couteau sur chacune.

3. Posez la lame du couteau de manière à ce qu'elle passe par deux milieux d'arêtes adjacentes et couperait le coin si vous poussiez, mais ne le faites pas ! La ligne rouge du schéma indique où poser la lame.



ÉTAPE 2

4. Toujours sans couper, inclinez la lame du couteau pour qu'elle passe, quand vous couperez, par les milieux des arêtes verticales les plus proches, et qu'elle puisse continuer sa route jusqu'au milieu des deux arêtes du bas. La ligne rouge de la troisième image sur le schéma vous montre la trajectoire du couteau de ce côté du cube. Il doit suivre la même trajectoire du côté opposé.

5. Coupez lentement le cube, le plus droit possible, en conservant bien l'angle pour que la lame passe bien par les milieux des arêtes. Si cela vous aide, matérialisez le passage de la lame sur les faces en traçant à la pointe du couteau une ligne entre les milieux concernés. Cela vous fournira un guide à suivre.

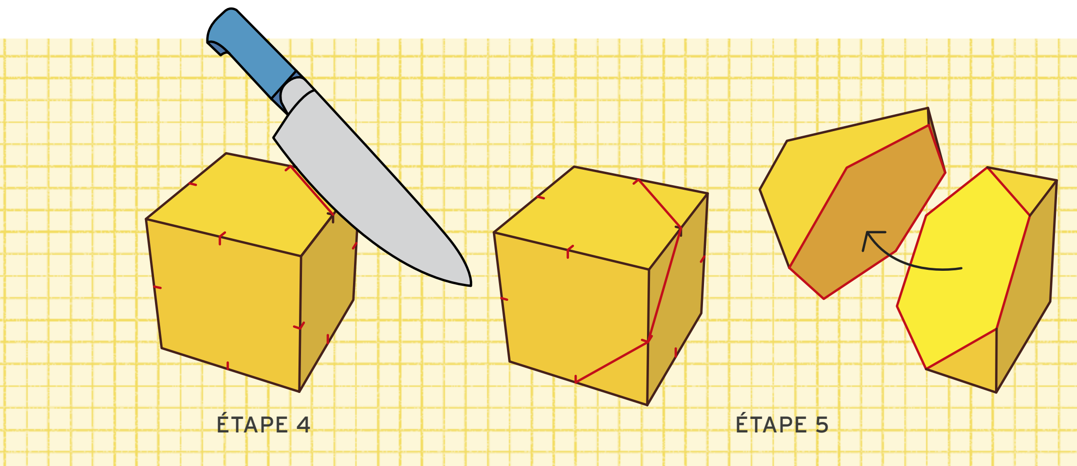
6. Ôtez le haut du fromage et découvrez la forme obtenue !

QUE SE PASSE-T-IL ?

Vous devriez obtenir un hexagone régulier à l'intérieur du cube. Il se peut qu'il soit tordu ou un peu irrégulier si la coupe n'était pas parfaite (ou si le cube lui-même ne l'était pas), mais il devait bien y avoir six côtés à peu près égaux. Cette forme se cache dans tous les cubes. C'est un cas fascinant de formes imbriquées les unes dans les autres.

SECRET À SIX CÔTÉS

Si vous offrez un cadeau dans une boîte cubique, vous pouvez y ajouter une carte hexagonale. Elle se logera dans le cube selon la même diagonale que celle découpée ici, tout en étant plus grande que les faces du cube !



DÉCOUVRIR : CHIPS ET COURBURE

Les maths permettent de décrire formes et surfaces et, pour ce faire, l'un de leurs outils est la courbure de Gauss, qui mesure la façon dont une surface se courbe selon deux directions perpendiculaires. On peut lui trouver des applications très intéressantes en cuisine !

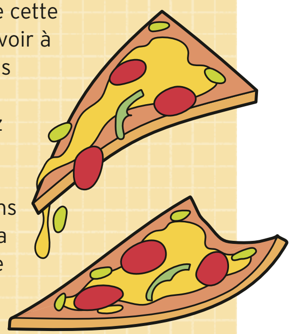
La courbure de Gauss ne se contente pas d'indiquer si une surface est courbe ou non. Elle s'intéresse à ses variations en différentes directions. La courbure de Gauss d'une surface ne peut pas être modifiée sans couper ou détruire l'objet. On classe ainsi les choses en plusieurs catégories en fonction de leur courbure de Gauss.

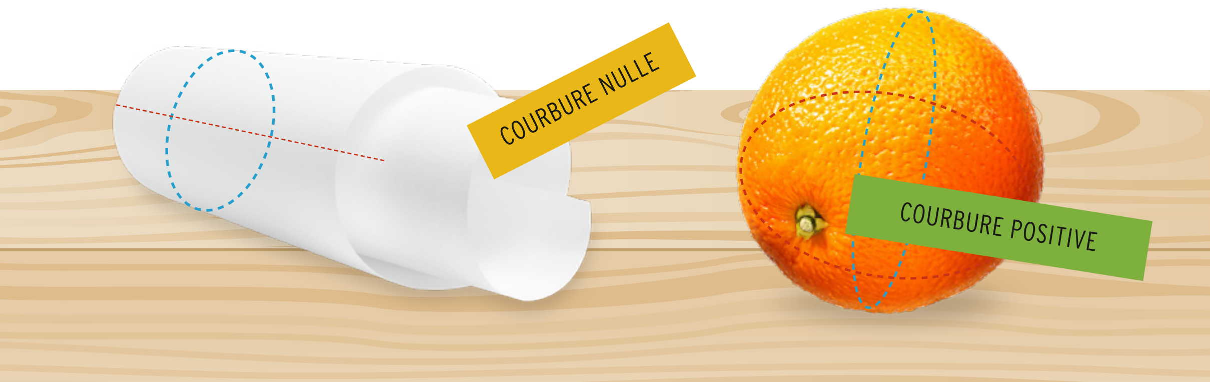
COURBURE NULLE

Une feuille de papier est de courbure nulle. Si on la courbe dans une direction, par exemple en la roulant en tube, elle restera droite dans l'autre direction. Essayez : une fois roulée dans un sens, elle est rigide dans l'autre. Bien sûr, si vous êtes prêt à chiffonner la feuille, vous obtiendrez n'importe quelle courbure. Un objet de courbure nulle ne se courbe que dans une direction à la fois sans s'abîmer.

À QUOI ÇA SERT ?

Vous vous servez de cette propriété sans le savoir à chaque fois que vous mangez une pizza. Quand vous amenez une part à votre bouche, sa pointe pique du nez, à moins de courber un peu la croûte. Ceci fait, elle reste rigide dans cette direction et se mange sans mal.





COURBURE POSITIVE

Une forme ronde, comme une orange, est de courbure positive. Si on la courbe selon une direction, elle se courbe de la même façon dans l'autre. Dessinez une croix au sommet, ses quatre extrémités se trouveront plus bas que son centre. On ne peut pas non plus l'aplatir sans la couper. Quand on la pèle, il faut arracher toute la peau pour pouvoir la poser à plat.

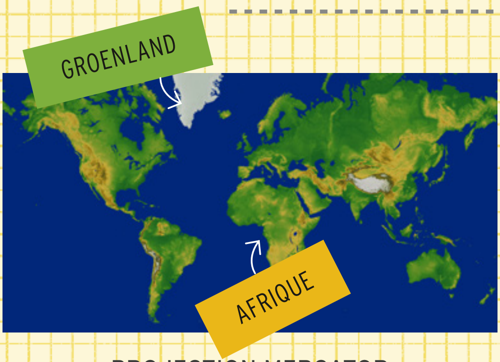
C'est pour ça que les cartes du monde sont difficiles à faire. Pour dessiner un planisphère, il faut soit couper la surface de la Terre et laisser des trous, soit déformer certaines parties du monde qui paraîtront plus petites ou plus grosses qu'elles ne le sont.

COURBURE NÉGATIVE

Quand une forme de courbure négative se courbe dans une direction, elle doit aussi se courber dans l'autre, mais en sens opposé. C'est ce qu'on appelle un point col. On trouve des formes de ce genre au rayon chips des supermarchés : certaines adoptent en effet une forme appelée paraboloïde hyperbolique, avec les côtés vers le bas et les pointes vers le haut.

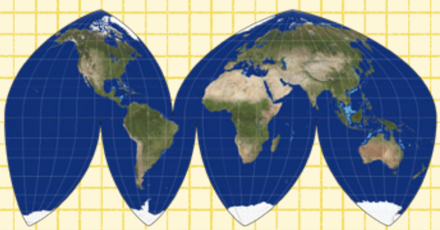
Cette forme s'empile bien dans un cylindre et elle est relativement rigide, même quand les chips sont elles-mêmes fines et fragiles.

LE PROBLÈME DES PROJECTIONS



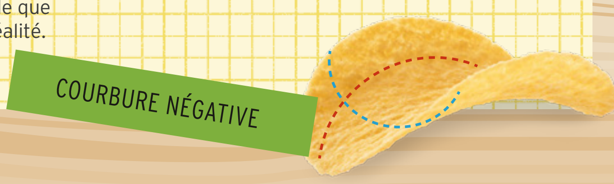
PROJECTION MERCATOR

La carte est déformée pour remplir un rectangle, si bien que le Groenland y fait la même taille que l'Afrique, pourtant 14 fois plus grosse en réalité.



PROJECTION ÉQUIVALENTE

Les pays font la bonne taille mais la carte elle-même adopte une drôle de forme.



EXPÉRIMENTER : JEU DU CHOU

Les choux de Bruxelles sont des légumes verts qui vont bien avec le poulet rôti, ça tout le monde le sait, mais saviez-vous que c'est aussi un jeu mathématique ? Idéal pour passer le temps, et vous n'aurez besoin que d'un papier et d'un crayon !

IL VOUS FAUDRA :

- **Du papier**
- **Un crayon**
- **Un adversaire**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

Commencez par placer quelques points sur la feuille. Les joueurs dessinent chacun leur tour une ligne qui relie deux points, puis ils ajoutent un point au milieu de cette ligne (en suivant les règles ci-dessous). Si un joueur ne peut pas jouer, il a perdu.

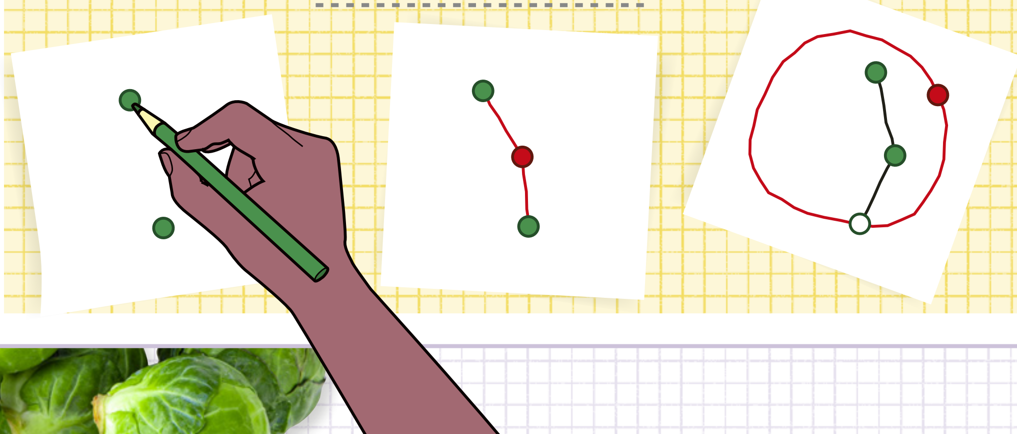
Voici les règles :

1. Les lignes ne sont pas forcément droites, mais elles ne doivent ni toucher ni croiser une autre ligne (pas plus qu'elle-même).

2. Le point ne peut pas être placé à l'extrémité de la ligne qui vient d'être dessinée, il faut qu'il soit vers le milieu, afin d'obtenir deux nouveaux segments de ligne.

VOUS POUVEZ décider chacun votre tour le nombre de points de départ et commencer à tour de rôle. Ou bien jeter un dé pour connaître le nombre de points et décider qui commence à pile ou face !

EXEMPLE DE PARTIE



3. Il ne peut y avoir plus de trois lignes attachées au même point. Si vous placez un nouveau point au milieu de la ligne, il a déjà deux lignes accrochées à lui. Si vous dessinez une ligne qui part d'un point et revient au même point, cela compte pour deux lignes attachées à ce point.

Les règles paraissent simples mais le jeu peut devenir très difficile très rapidement. Tous les points qui ont trois lignes accrochées sont « morts » et ne peuvent plus être liés à rien.

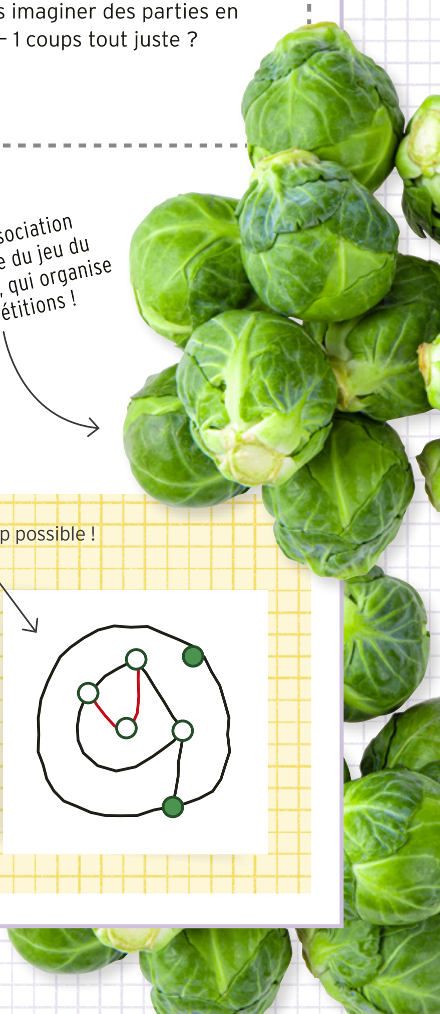
On pourrait croire qu'on crée toujours de nouveaux emplacements possibles pour y tracer des lignes, mais certains seront inaccessibles sans croiser une autre ligne, l'astuce est ainsi de piéger son adversaire et de le laisser sans aucun endroit possible où tracer sa nouvelle ligne.

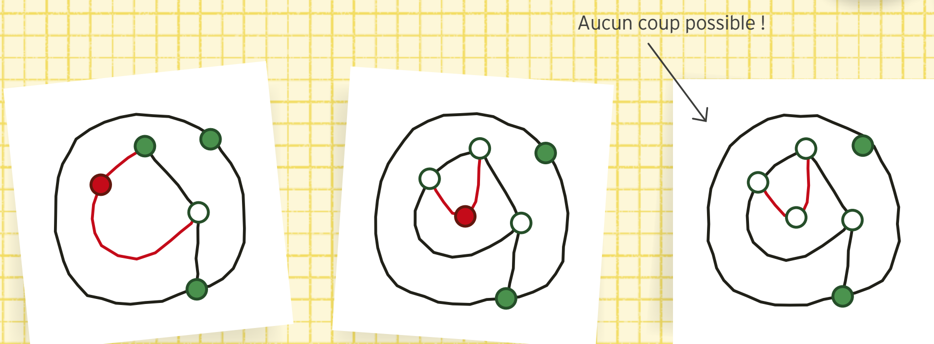
COMBIEN DE TEMPS DURE UNE PARTIE ?

Ce jeu a été inventé par deux mathématiciens de l'université de Cambridge au début des années 1960. Les mathématiques impliquées sont bien connues. On sait que si on commence le jeu avec n points, la longueur de la partie ira de 2n coups à 3n – 1 coups.

Vos parties suivent-elles cette règle ? Pouvez-vous imaginer des parties en 2n et en 3n - 1 coups tout juste ?

Il y a une Association internationale du jeu du chou (Sprouts), qui organise des compétitions !





APPRENDRE : DÉCOUPER UN GÂTEAU

Si vous comptez manger un délicieux gâteau, pourquoi ne pas d'abord vous frotter à ces énigmes de découpage ? Parfois, penser le problème différemment vous permettra de trouver des solutions originales.

PARTS DE GÂTEAU

1. Est-il possible de découper un gâteau en huit parts en trois coups de couteau ?

Le premier le coupe en deux, donc, avec trois coups, on devrait pouvoir le couper en deux, puis en quatre, puis en huit. Essayez !

Il sera peut-être difficile de trouver la réponse, et quelques questions peuvent survenir :

- Quelle est la forme du gâteau ? Est-ce forcément un beau gros gâteau comme celui de la photo ?
- Est-ce que les coupes doivent être droites ? La plupart des couteaux sont droits, mais rien n'est précisé ici.
- Dans quelle direction fait-on les coupes ? D'ordinaire, les coupes sont verticales, au travers du gâteau.

Si vous avez trouvé une réponse, déterminez lesquelles de ces hypothèses vous ont servi et lesquelles vous avez ignorées. Puis jetez un œil à ces versions différentes de la même énigme. Vous pourrez trouver une solution à chacune.

a) Est-il possible de couper un gâteau non circulaire en huit morceaux avec trois coupes droites verticales ? (Quelle est sa forme ?)

b) Peut-on couper un gâteau circulaire en huit parts avec trois coupes droites non nécessairement verticales ?

c) Peut-on couper un gâteau circulaire en huit parts avec trois coupes verticales non nécessairement en ligne droite ? (De quelle forme seraient-elles ? Et si on employait un emporte-pièce plutôt qu'un couteau ?)

Chacune de ces énigmes admet une solution, mais c'est à chaque fois un peu triché. La question à se poser, c'est : est-il possible de couper un gâteau en huit parts avec trois coupes droites verticales ? En se limitant à ces règles, difficile de trouver une réponse.
Il existe pourtant un moyen. Voici une question qui n'a pas encore été posée : est-on autorisé à déplacer les parts de gâteau entre deux coupes ?

Qu'est-ce qui doit rester vrai de toutes les coupes pour s'assurer que chacune doublera bien le nombre de parts ?

APPRENDRE : ÉCHELLE ET DIMENSIONS

Quand on veut le plus de pizza possible, les apparences peuvent être trompeuses. Si le diamètre change, la surface change aussi, mais pas de la même manière. Comment résoudre ces problèmes ?

BONNE OU MAUVAISE AFFAIRE ?

Pour chaque question, essayez d'abord de deviner la réponse sans calcul, puis calculez l'aire de la pizza obtenue pour comparer les offres.

Diamètre d'une pizza.

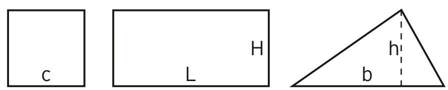
1. Trois amis comptent s'acheter chacun une pizza de 24 cm de diamètre. L'un d'eux suggère de partager plutôt une pizza de 42 cm entre eux. Quelle est la meilleure affaire ?

2. Que vaut-il mieux : une pizza de 54 cm de diamètre, ou deux pizzas de 36 cm ?

3. Vous commandez une pizza de 18 cm pour 10 €. Le serveur vous demande si vous préférez une pizza de 24 cm pour 5 € de plus. Bonne ou mauvaise affaire ?

4. Un restaurant propose une pizza légère, qui est une pizza de 30 cm au centre de laquelle on a découpé un cercle de 12 cm de diamètre (remplacé par de la salade). Est-ce plus ou moins de pizza qu'une pizza de 27 cm ?

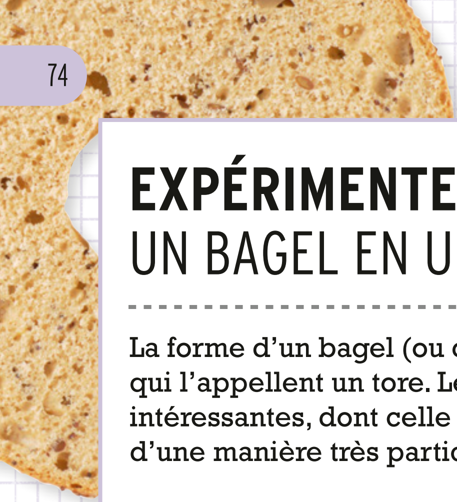
Comme toutes les formules d'aire impliquent le carré d'un nombre (on multiplie deux dimensions ensemble), quand le côté d'une forme augmente, son aire augmente plus rapidement. Quand le côté double, l'aire est ainsi multipliée par quatre : $2^2 = 4$.



$a = c^2$ $a = L \times H$ $a = ½ \times b \times h$

MONTER EN DIMENSION

Il se passe la même chose quand on passe à la troisième dimension, c'est même encore pire. Quand on augmente la longueur du côté d'une forme en 3D, son volume va augmenter bien plus vite. Pour un cube dont les côtés doublent de longueur, son volume sera $2^3 = 8$ fois plus gros. Si ses côtés triplent de longueur, il occupera $3^3 = 27$ fois plus de volume !



EXPÉRIMENTER : COUPER UN BAGEL EN UN SEUL MORCEAU

La forme d'un bagel (ou d'un doughnut) est chère aux mathématiciens, qui l'appellent un tore. Le trou au milieu lui confère des propriétés intéressantes, dont celle qui nous intéresse ici : on peut le découper d'une manière très particulière.

Il existe une branche des maths appelée la topologie qui se consacre à l'étude des formes. Et les topologistes adorent les tores (et les doughnuts) !

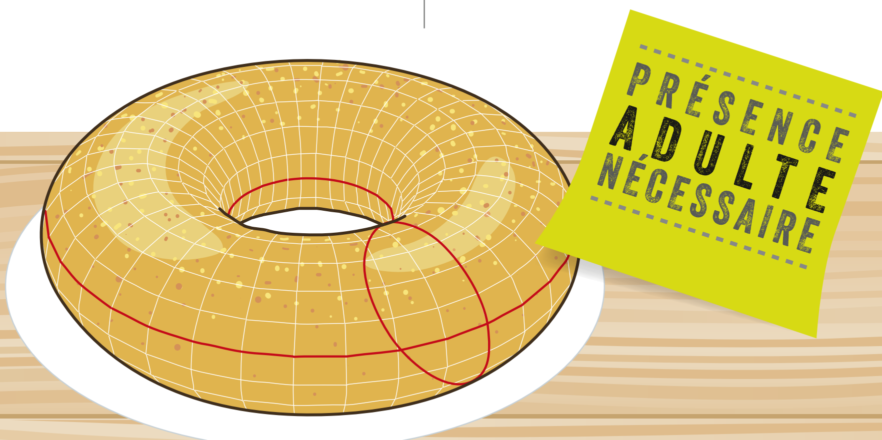
Un tore est formé de cercles. Il y a bien sûr le cercle qui forme l'extérieur de l'anneau et celui qui forme le trou, mais il y en a aussi un autre type : ceux qui passent verticalement dans le trou.

Pour définir un tore, on peut l'envisager comme un cercle « fois » un autre cercle, un usage de la multiplication un peu spécial qui concernerait les formes plutôt que les nombres. Si on regarde un tore, on voit qu'en parcourant le cercle horizontal, on peut imaginer un cercle vertical qui lui serait attaché en tout point du parcours et formerait le tube.

On peut grâce à ces deux cercles réaliser un chouette tour de magie avec un bagel ; pour cela, il vous faudra un couteau bien aiguisé et la présence d'un adulte.

IL VOUS FAUDRA :

- **Un bagel**
- **Un couteau aiguisé**
- **Une planche à découper**



CE QU'IL FAUT FAIRE :

Vous allez ouvrir le bagel mais pas de la manière habituelle. D'habitude, pour couper un bagel, on tient le couteau à l'horizontale, parallèle à la planche, et on coupe tout le bagel en passant par le centre pour en obtenir deux moitiés ouvertes, en suivant le plan des cercles horizontaux.

Ce que vous allez faire ici, c'est couper selon une ligne qui se déplacera en même temps le long des cercles verticaux : cela dessinera une spirale tout autour du bagel, si bien que quand vous serez revenu au point de départ, le couteau pointera lui aussi dans la direction de départ. Il sera peut-être nécessaire pour y parvenir de lever le couteau et d'effectuer plusieurs coupes successives plutôt qu'une seule longue coupe.

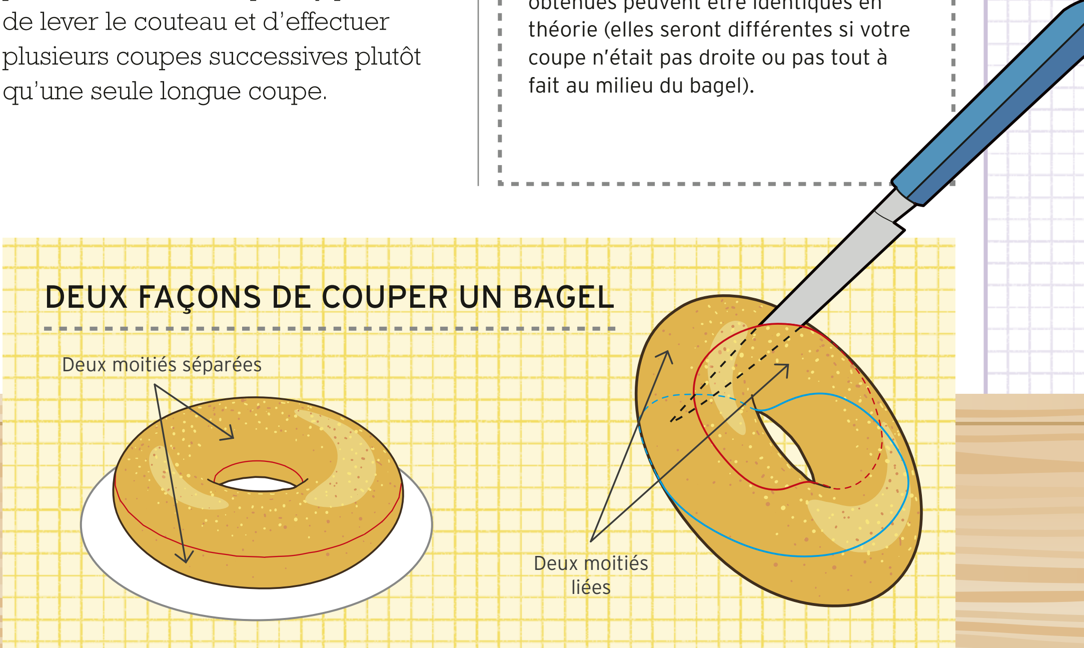
Les lignes visibles sur le schéma vous indiquent où les deux lignes que vous dessinerez au couteau doivent se situer sur le bagel. Ne vous en faites pas si vous n'y arrivez pas d'un seul coup. Le bagel restera mangeable et vous pourrez essayer avec un autre !

QUE SE PASSE-T-IL ?

En coupant tout autour de cette façon, on obtient deux moitiés de bagel séparées mais jointes comme les anneaux d'une chaîne. Vous pouvez les déplacer l'une dans l'autre mais pas les séparer sans les couper.

Les deux moitiés que vous avez obtenues peuvent être identiques en théorie (elles seront différentes si votre coupe n'était pas droite ou pas tout à fait au milieu du bagel).

DEUX FAÇONS DE COUPER UN BAGEL



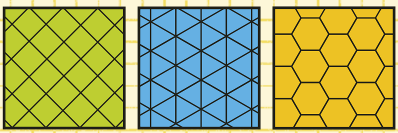
DÉCOUVRIR : PAVAGES DE PLAN

Dans la cuisine ou la salle de bain, il y a souvent du carrelage, et la plupart des carrelages emploient des formes qui permettent de tout recouvrir sans laisser de trous. Les mathématiciens parlent dans ce cas de pavages de plan. Toutes les formes ne le permettent pas.

FORMES QUI PAVENT

Les formes qu'on retrouve le plus dans les pavages de plan sont régulières. Leurs côtés sont tous de même longueur, leurs angles sont tous égaux. Il y a plusieurs formes qui rentrent dans cette catégorie:

PAVAGES RÉGULIERS



CARRÉS Les plus communs des pavages.

TRIANGLES Avec des triangles dont tous les côtés sont égaux, on peut remplir tout l'espace sans laisser de trou.

HEXAGONES Les hexagones aussi permettent de paver complètement la surface, sans trou.

Ces pavages qui font usage d'une seule forme sont appelés des pavages réguliers.

PLUS D'UNE FORME

En mélangeant des formes différentes, par exemple carrés et triangles, on obtient d'autres pavages. Les plus connus sont les pavages d'Archimède, ou pavages uniformes, dans lesquels tous les coins où les formes se rencontrent doivent présenter la même disposition, dans le même ordre.

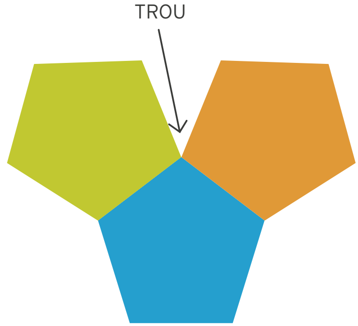
Il y a huit pavages uniformes dont les coins sont tous identiques. Quatre sont présentés page 77 (numéros 1–4). Quels sont les autres ?

Si on autorise les pavages de formes régulières mais dont les coins sont différents entre eux, il y a plus d'un millier de pavages possibles.

ALLEZ VOIR page 96 pour découvrir comment les abeilles se servent de ce pavage pour construire leurs ruches.

D'AUTRES FAÇONS DE PAVER

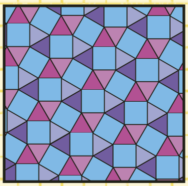
Il y a des formes avec lesquelles un pavage serait impossible. Les pentagones réguliers, par exemple, ne s'emboîtent pas bien, ils laissent des angles de 108° à chaque coin. Un pavage de pentagones laissera donc beaucoup de trous (à la différence des carrés, des triangles et des hexagones).

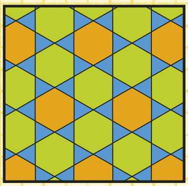


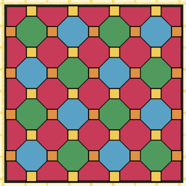
Toutefois, si on autorise les formes irrégulières (comme dans les schémas 6 à 10 ci-dessous), losanges aux angles irréguliers, triangles rectangles, pentagones dont les côtés ne sont pas égaux, et même formes arrondies, tout devient possible !

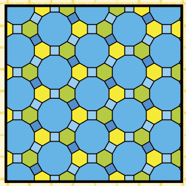
DÉCOUPEZ des bouts de fromage, de jambon et de cornichon pour tenter de paver entièrement votre assiette !

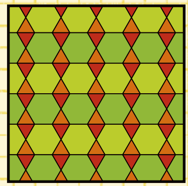
JOLIS PAVAGES


1.

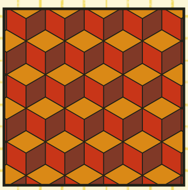

2.

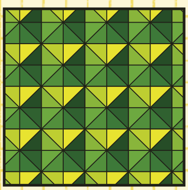

3.

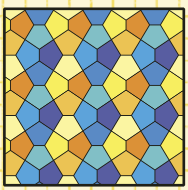

4.

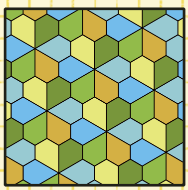

5.

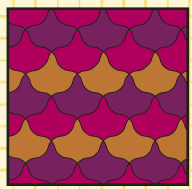
1. Carrés et triangles ; 2. Hexagones et triangles ; 3. Octogones et carrés ; 4. Carrés, hexagones et dodécagones (12 côtés) ; 5. Ce pavage n'est pas uniforme. (On trouve hexagone-triangle-hexagone-triangle dans certains coins et hexagone-hexagone-triangle-triangle dans d'autres.)


6.


7.


8.


9.


10.

6. Losanges ; 7. Triangles rectangles ; 8. Pentagones irréguliers (pavage du Caire) ; 9. Pentagones irréguliers (pavage en fleurons) ; 10. Formes de fantôme.

CHAPITRE 3

MATHS DU MONDE RÉEL

DÉCOUVRIR...

APPRENDRE...

EXPÉRIMENTER...

EXPÉRIMENTER : FRUIT ET SYMÉTRIE

Les formes présentent souvent une régularité appelée symétrie. Ainsi, un carré reste le même si on le retourne ou si on le fait tourner d'un quart de tour depuis son centre. Les mathématiciens adorent ce genre de transformations… qu'on retrouve dans les fruits !

TYPES DE TRANSFORMATIONS

Les deux principaux types de transformations sont les symétries axiales et les rotations, qu'on peut décrire mathématiquement.

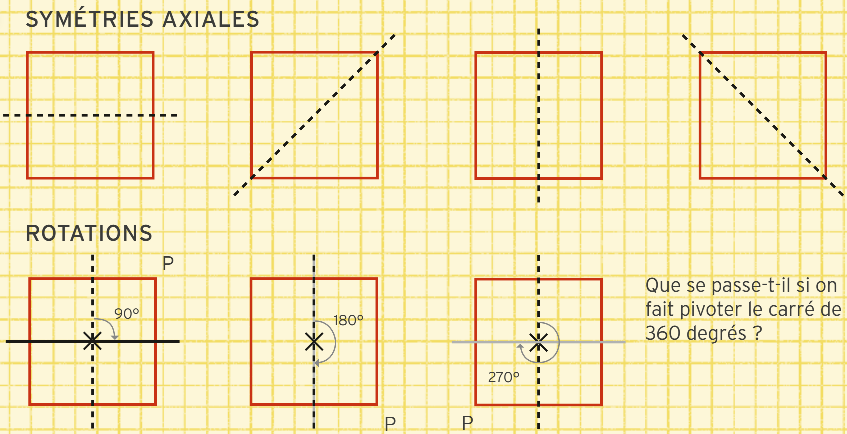
Symétrie axiale

On définit une telle symétrie en déterminant son axe, une ligne droite de part et d'autre de laquelle la forme symétrique se reflète comme dans un miroir. Un carré a quatre axes de symétrie (voir ci-dessous). Une forme pourvue d'une symétrie axiale en a souvent d'autres si on regarde bien !

Rotation

Il faut deux éléments pour définir une rotation : un centre et un angle de rotation. Par exemple, on peut faire pivoter un carré de 90° à partir de son centre, mais aussi de 180°, et même

SYMÉTRIES ET ROTATIONS DU CARRÉ



Sur le schéma, un coin est marqué d'un P pour que vous puissiez le suivre.

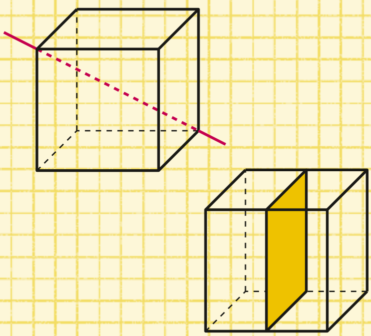
de 270°, et obtenir exactement la même figure.

Quand on effectue une rotation d'un cercle par son centre selon n'importe quel angle, on obtient exactement la même figure. De même, chacun de ses diamètres sera un axe de symétrie.

SYMÉTRIE EN 3D

Les formes en 3D ont aussi des symétries. Plutôt que de faire pivoter la forme autour d'un point, on le fait autour d'un axe (une ligne qui passe au travers), et plutôt que de se refléter selon un axe, elle se reflète selon un plan en deux dimensions (une forme plate qui la coupe en deux moitiés).

SYMÉTRIES DU CUBE



L'un des trois axes de symétrie, et l'un des neuf plans de symétrie d'un cube. Où sont les autres ? (Voir les réponses page 150.)

DES SYMÉTRIES DANS LE FRUIT

IL VOUS FAUDRA :

- **Des fruits**
- **Des cure-dents**
- **Un couteau et un adulte**

PRÉSENCE ADULTE NÉCESSAIRE

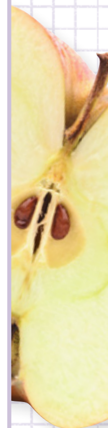
CE QU'IL FAUT FAIRE :

Cherchez des symétries dans la forme des fruits que vous avez choisis. Ils ne seront peut-être pas parfaitement symétriques, mais c'est souvent assez proche.

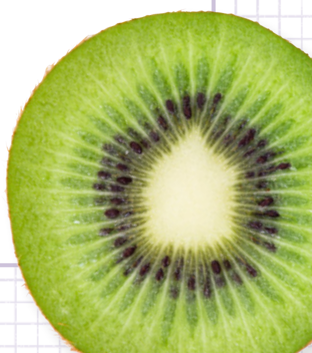
- Y a-t-il des axes de symétrie ? Si vous en trouvez un, plantez un cure-dents dans le fruit à chaque extrémité de l'axe et faites-le pivoter autour.

- Selon quel angle (ou quels angles) peut-on le faire pivoter pour retomber sur la même forme ?

- Y a-t-il des plans de symétrie ? Si vous en trouvez un, coupez le fruit en deux et comparez les deux moitiés. Rappelez-vous que c'est comme une réflexion dans le miroir, les deux moitiés n'auront pas la même orientation.



Une fois coupé, vous trouverez peut-être des symétries à l'intérieur du fruit. Traquez les rotations et les réflexions possibles !



APPRENDRE : LA MEILLEURE AFFAIRE

Il y a un endroit où vous pourrez souvent tirer profit des mathématiques : au supermarché. Si vous voulez faire la meilleure affaire, il vous faudra choisir entre différents produits à différents prix. Voici quelques astuces pour vous y retrouver.

PRIX AU POIDS

Si vous devez choisir entre deux marques de yaourts à des prix différents, la moins chère des deux n'est pas forcément la plus rentable. Si les yaourts ne sont pas de même taille, vous paierez peut-être moins, mais vous aurez peut-être aussi moins de yaourt. Il faut donc calculer le prix au gramme.

$$\textbf{Prix au gramme} = \frac{\textbf{prix en euros}}{\textbf{poids en gramme}}$$

Par exemple, en prenant les deux pots de yaourt ci-dessous, le pot de 900 g coûte 3€20, et celui de 850 g coûte 3€10. Quand on calcule le prix au gramme, on découvre que le pot de 900 g donne 3,20 ÷ 900 = 0,35 centime pour un gramme de yaourt, tandis que le pot de 850 g coûte 3,10 ÷ 850 = 0,36 centime pour un gramme. Le pot de 900 g est donc une meilleure affaire, malgré son prix supérieur.

Tant que vous ne vous retrouvez pas à acheter plus qu'il ne vous en faut (car cela reviendrait à gâcher de la nourriture), vous économiserez de l'argent en achetant les produits dont le prix au gramme est le plus bas. Les gros contenants sont ainsi souvent de meilleures affaires.

Si vous achetez des paquets de plusieurs barres de chocolat ou de plusieurs boîtes de conserve, toutes de même poids, vous pouvez calculer plutôt le prix à la barre ou à la boîte.

Ce prix est appelé le « prix à l'unité ».

Pour chacune de ces propositions, quelle est la meilleure affaire ?

a) Une barre de 500 g de chocolat, 10 €
b) Une barre de 300 g de chocolat, 5 €

a) Un sac de 10 pommes, 6 €
b) Un sac de 15 pommes, 8€50

a) Une boîte de 400 g de thon, 2€20
b) Une boîte de 600 g de thon, 3€30

a) Une boîte de 18 œufs, 4€00
b) Une boîte de 12 œufs, 3€20

APPRENDRE : DES CHAMALLOWS DANS LA BAIGNOIRE

Quand les questions impliquent des nombres énormes, il est souvent bien plus rapide de donner une réponse approchée. Les estimations de Fermi sont une technique pour ne pas tomber trop loin du compte.

COMBIEN DE CHAMALLOWS DANS UNE BAIGNOIRE ?

Pour savoir combien on peut mettre de chamallows dans une baignoire, vous pouvez en acheter des tas de paquets que vous verserez dans votre baignoire avant de les compter tous. Ça prendra un peu de temps. En fait, on peut se contenter d'une valeur approchée : plutôt 300, 3 000, 300 000, 3 millions ? Pour commencer, divisez la question en petites portions plus faciles à calculer.

- On peut commencer par assimiler la baignoire à un pavé. (Elle est sûrement plus arrondie, mais ça simplifie les calculs.)
- Une baignoire fait en gros la taille d'une personne. Allongez-vous dedans : sa longueur est environ égale à votre taille.
- Quelle est sa largeur ? Sa profondeur ? Autour de 55 cm et 50 cm ?
- Un chamallow est probablement proche d'un cube de 2,5 cm de côté. Et le nombre de chamallows qui logeront dans la baignoire est donc le volume de celle-ci divisé par le volume d'un chamallow.

Tout cela n'est que des approximations. Mais en s'y fiant, on découvre que la réponse est plus proche de 50 000 que de 5 000 ou 500 000.

ASTUCES D'ESTIMATION

- Comparez la taille des objets du problème à celle d'objets connus, la vôtre, celle d'un terrain de football (100 mètres de long), etc.
- Si vous mangez des yaourts et que vous jugez que votre amour pour cet aliment se situe dans la moyenne, vous pouvez supposer qu'une personne standard en mange autant.

D'AUTRES QUESTIONS À RÉSOUDRE

Ces questions de Fermi sont parfois posées lors d'entretien d'embauche dans les entreprises technologiques ou à l'université. Y répondre montre que vous savez donner des ordres de grandeur et vous attaquer à des problèmes compliqués.

- Combien de fois pouvez-vous réciter l'alphabet en 24 heures ?
- Combien de ballons de foot peuvent loger dans un gymnase ?
- Combien de feuilles d'érable au Canada ?
- Quelle est la distance parcourue par tous les gens qui courent dans un stade en un an ?
- Combien d'accordeurs de piano à Londres ?
- Combien de planètes dans l'univers abritent une vie intelligente qui pourrait nous contacter ?

EXPÉRIMENTER : COMMENT GARDER SA BOISSON CHAUDE

Vous préparez du thé pour une personne et voilà qu'elle est en retard, si bien que vous craignez que le thé soit froid quand elle arrivera enfin. Ne craignez plus ! Les mathématiques viennent à la rescousse.

AJOUTER DU LAIT

Beaucoup de gens apprécient d'ajouter du lait dans leur boisson chaude, chocolat, café ou thé. Mais s'il est froid, cela refroidira tout !

Quel est le meilleur moment pour ajouter du lait si vous comptez garder la boisson chaude le plus longtemps possible ?

- Dès que vous avez préparé la boisson.
- Juste avant l'arrivée de votre invité.

IL VOUS FAUDRA :

- **Trois tasses d'une boisson chaude**
- **Un thermomètre de cuisine**
- **2 cuillères à café de lait**
- **Un chronomètre**
- **Une feuille et un crayon pour noter vos résultats.**

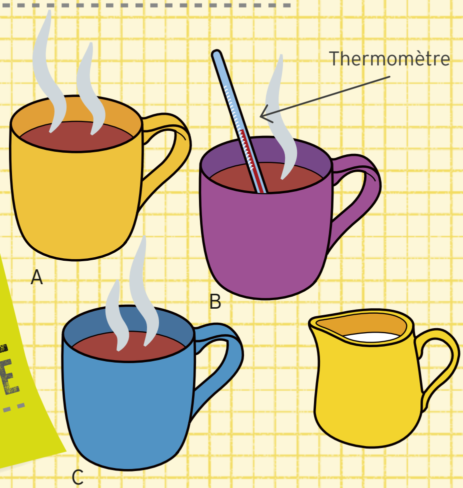
CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Préparez et étiquetez trois tasses de boisson chaude. Vous allez tester s'il vaut mieux ajouter le lait tout de suite (tasse A) ou 15 minutes plus tard (tasse B). La troisième tasse (tasse C) servira de témoin pour voir ce qu'il se passe quand on n'ajoute pas de lait.

2. Mesurez la température des boissons et déclenchez le chrono !

PRÉSENCE ADULTE NÉCESSAIRE

EXPÉRIMENTATION

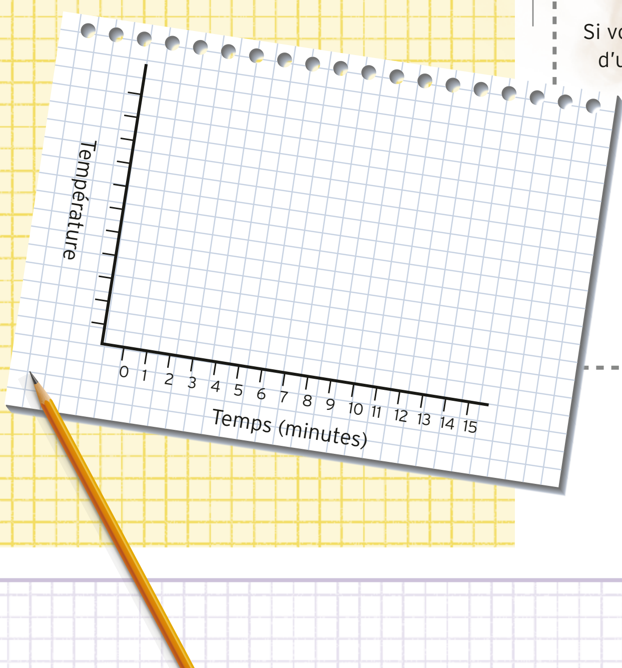


3. Ajoutez 1 cuillère de lait dans la tasse A.

4. Mesurez la température dans les trois tasses chaque minute et notez les valeurs obtenues.

5. Après 15 minutes, ajoutez 1 cuillère de lait dans la tasse B. Mesurez la température des trois boissons pendant quelques minutes encore.

Quelle tasse est la plus chaude à la fin de l'expérience ? Dessinez un graphe tel que celui ci-dessous.
Utilisez les repères à gauche du graphique pour y noter des températures régulièrement espacées, de la plus basse à la plus haute que vous avez enregistrées.



QUE SE PASSE-T-IL ?

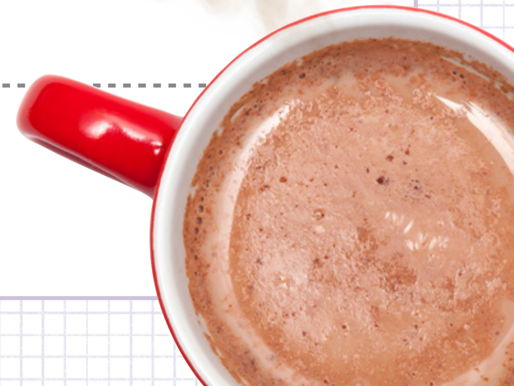
C'est la tasse C (la tasse témoin) qui devrait rester chaude le plus longtemps.

La tasse A refroidira en ajoutant le lait. Mais, à la fin des 15 minutes, quand vous ajouterez le lait à la tasse B, elle aussi refroidira, et finira souvent plus froide que la tasse A. Les données indiquent que l'ajout de lait dans une boisson chaude doit se faire tout de suite plutôt qu'au dernier moment pour garder la boisson la plus chaude possible.

POURQUOI ?

Une boisson chaude dans une pièce froide perdra de la chaleur avec le temps, puisque la chaleur passera dans l'air qui l'environne. Grâce à leurs expériences, les scientifiques ont montré que la vitesse de refroidissement dépend de la différence de température : plus un objet est chaud par rapport à ce qui l'entoure, plus il perdra vite sa chaleur.

Si vous cherchez à conserver la chaleur d'une boisson en n'ajoutant pas de lait, elle refroidira plus vite. L'ajout de lait fait chuter la température peu importe le moment, mais la tasse plus chaude perdra plus de chaleur durant les 15 minutes d'attente ! Elle sera donc plus froide à la fin.



DÉCOUVRIR : CROISSANCE EXPONENTIELLE DU YAOURT

Faire ses propres yaourts, c'est facile. Il suffit d'avoir… du yaourt ! Eh oui, impossible de faire du yaourt sans avoir déjà du yaourt. La raison, c'est que le yaourt contient une bactérie vivante essentielle pour tout le processus.

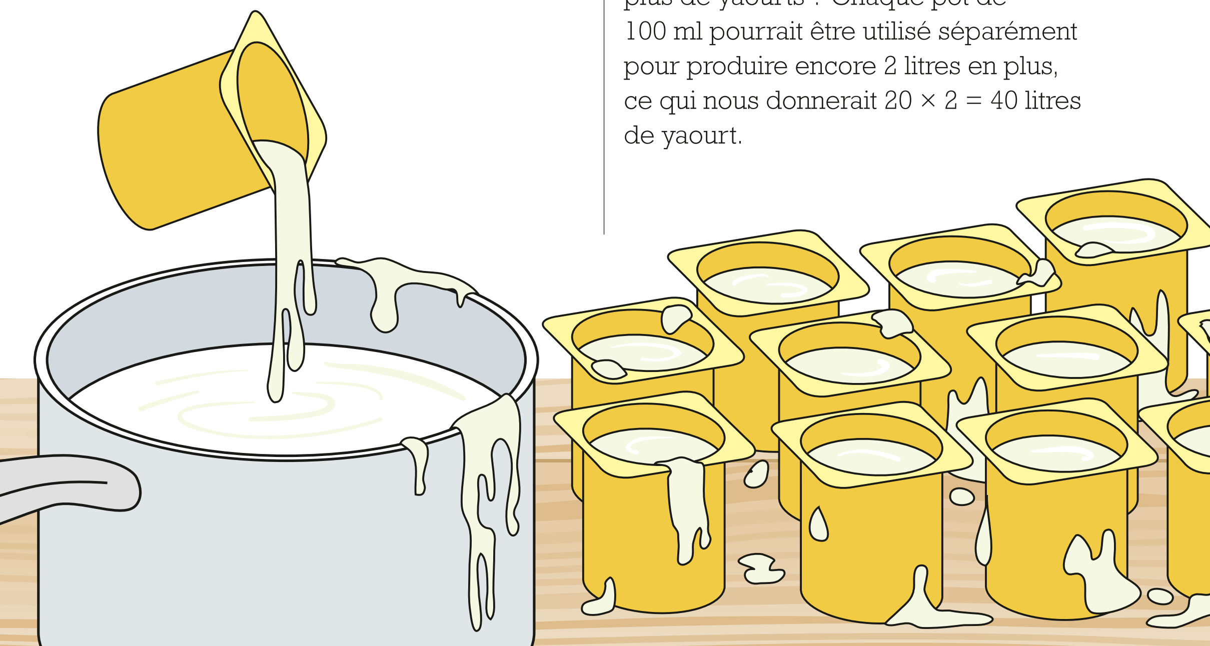
Le yaourt frais, non pasteurisé, contient des bactéries vivantes. Ces bactéries fermentent le sucre que contient le lait, le digèrent et produisent ainsi l'acide lactique qui donne au yaourt son goût si particulier.

COMBIEN DE YAOURTS ?

En partant d'un pot de yaourt acheté au supermarché, combien peut-on obtenir de yaourts maison ?

Les recettes évoquent environ 100 ml de yaourt frais à mélanger à 2 litres de lait, pour produire autour de 2 litres de yaourt après chauffage et fermentation. En supposant que vous avez assez de lait, vous pouvez donc obtenir $2\,000 \div 100 = 20$ fois plus de yaourt que ce que vous aviez au départ.

Mais si nous utilisions tous ces nouveaux yaourts pour faire encore plus de yaourts ? Chaque pot de 100 ml pourrait être utilisé séparément pour produire encore 2 litres en plus, ce qui nous donnerait $20 \times 2 = 40$ litres de yaourt.



NON, VRAIMENT… COMBIEN ?

Et si vous vouliez produire encore des yaourts à partir de ces nouveaux yaourts ? Quelle quantité pourriez-vous produire en un jour, en y mettant beaucoup de bonne volonté ?

Il faut environ 8 heures de cuisson pour des yaourts, donc, en optimisant bien le temps (en le laissant fermenter la nuit et en produisant un nouveau groupe toutes les huit heures), vous pourriez obtenir trois groupes de yaourts toutes les 3 × 8 = 24 heures.

En supposant que le groupe de départ ait mis 8 heures pour passer de 100 ml à 2 000 ml, et que vous ayez trouvé par miracle 20 casseroles identiques pour produire les 20 groupes suivants, tous en même temps, vous aurez obtenu 40 litres de yaourt en 16 heures. Vous pourrez alors produire à partir de ça 40 000 ÷ 100 = 400 groupes, à l'aide de 400 casseroles (gros miracle), pour obtenir 400 × 2 = 800 litres de yaourt au bout du premier jour.

Et ça ce n'est que pour un jour ! La quantité de yaourt disponible est multipliée par 20 toutes les 8 heures. Ainsi, 8 heures après le premier jour, vous aurez 800 × 20 = 16 000 litres de yaourt. À la fin du 2^{e} jour, 2 × 8 heures auront encore passé, et vous aurez 6,4 millions de litres de yaourt, soit deux piscines olympiques et demie, remplies à ras bord !!

CROISSANCE EXPONENTIELLE

Cette croissance est dite exponentielle. C'est ce qu'il se passe quand le taux d'accroissement d'une chose augmente en fonction de la quantité de chose disponible. Ainsi, comme pour la bactérie qui se divise pour faire plus de yaourt, d'autres populations animales (dont les souris, les lapins et même les humains) peuvent connaître une croissance exponentielle.

Les intérêts des investissements financiers peuvent aussi croître de cette façon, et certains pensent que la puissance de calcul des ordinateurs grandit elle aussi selon cette loi avec les progrès de la technologie.

RAPPELEZ-VOUS les grains de riz sur l'échiquier page 21 ! C'était aussi une croissance exponentielle.

EXPÉRIMENTER : JEU DES PARTS

Voici un jeu qui se joue avec des parts de pizza ou de petits tas d'objets. C'est très stratégique et, à la fin, le gagnant emporte tout. Réfléchissez bien à vos coups avant de jouer !

IL VOUS FAUDRA :

- **13 objets (parts de pizza, pièces, allumettes, billes, etc.)**
- **Un adversaire**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

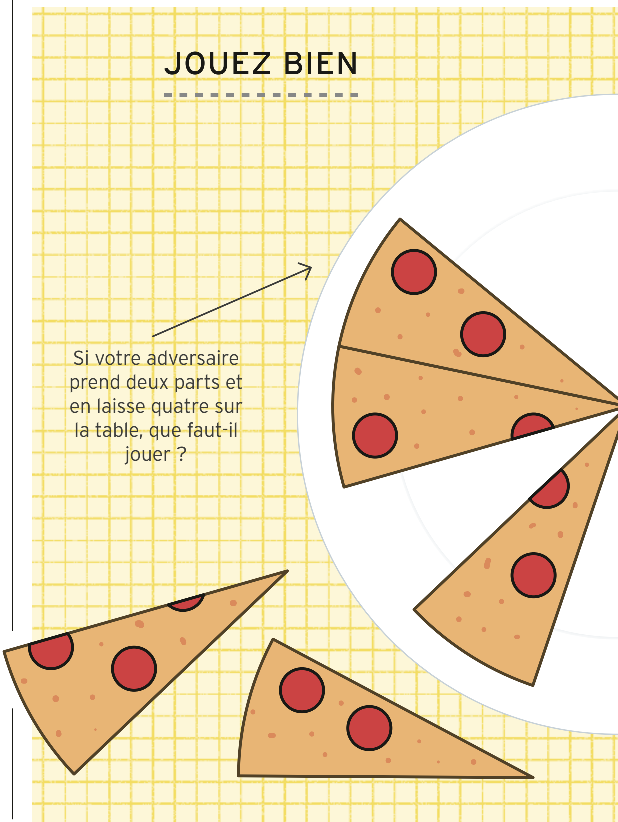
- Les 13 parts sont placées au centre, entre les deux joueurs.
- Les joueurs jouent chacun leur tour. Ils ôtent à chaque fois une, deux ou trois parts, qu'ils ajoutent à leur pile.
- Le gagnant est celui qui prend la dernière part (soit seule, soit au sein d'un groupe de deux ou trois parts enlevées).

COMMENT ÇA MARCHE ?

Faites quelques parties pour comprendre le principe. Pouvez-vous trouver une stratégie intéressante ?

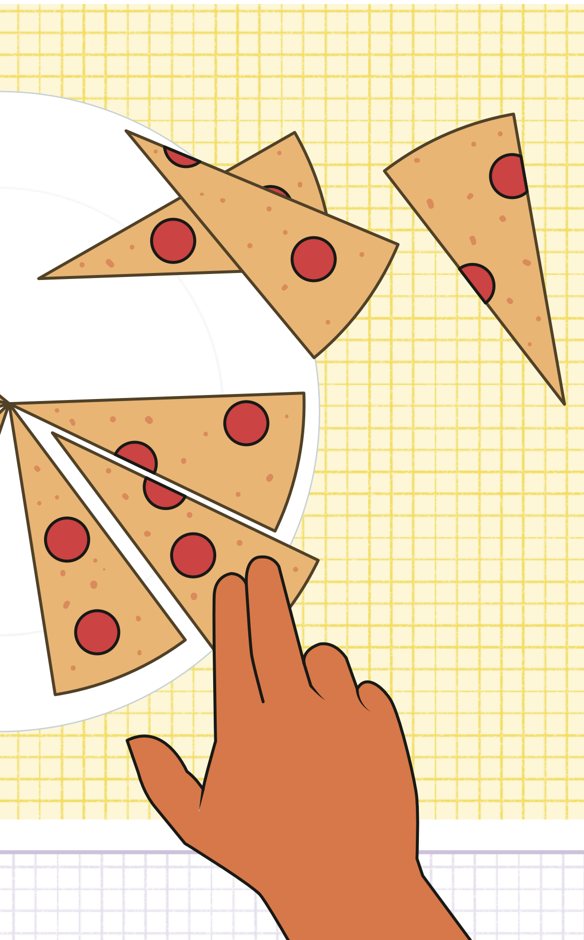
La première chose, c'est que si vous laissez à votre adversaire une, deux ou trois parts, il prendra la dernière et remportera la partie. Il faut donc à tout prix éviter cette situation.

Si c'est votre tour et qu'il ne reste que quatre parts, il est impossible de gagner. Quel que soit le nombre de parts que vous prendrez, vous laisserez à votre adversaire une, deux ou trois parts, et vous aurez perdu.



Avoir quatre parts au début de son tour est une configuration perdante, une situation à éviter pour vous et à rechercher chez votre adversaire.

Comment amener votre adversaire dans une configuration perdante ? Quatre en est une parce que cela le forcera à vous laisser prendre la dernière part. Dans ce cas, s'il reste huit parts sur la table, et que c'est à son tour de jouer, quel que soit le nombre de parts qu'il prendra, vous pourrez à votre tour vous débrouiller pour qu'il n'en reste que quatre quand viendra le sien. Autrement dit, huit est aussi une configuration perdante.



Est-ce que ça vous donne une idée de stratégie gagnante ?

- Si 4 et 8 sont des configurations perdantes, quelles sont les autres ?
- Si vous commencez avec 13 parts, quel coup faut-il jouer ?
- Si votre adversaire commence et prend deux ou trois parts, est-ce encore possible de gagner ?
- Si votre adversaire commence et prend une part, pouvez-vous gagner ?

VARIATIONS

Ce jeu se fonde sur un très vieux jeu, le Nim. Il existe de nombreuses manières de le modifier et la stratégie gagnante change à chaque fois. Inventez la vôtre et trouvez comment battre vos amis.

- Changez le nombre de parts de départ.
- Changez le nombre de parts qu'on peut prendre en un tour.
- Partez de plusieurs pizzas. On peut prendre autant de parts qu'on veut du moment qu'elles sont toutes de la même pizza, et le joueur qui prend la dernière part a gagné.

EXPÉRIMENTER : JEU DU CHOCOLAT

À la page 29, on trouve une énigme à base de barres de chocolat. Et si nous en tirions un jeu à jouer avec un ami ? Vous pouvez utiliser du vrai chocolat ou simplement dessiner une grille et colorier au fur et à mesure les carrés mangés, chacun dans sa couleur.

On pourrait s'attendre à ce que le gagnant de ce jeu soit celui qui mange le plus de chocolat, mais il s'agit en fait de pouvoir continuer à jouer. Si vous parvenez à bloquer votre adversaire et à l'empêcher de jouer à son tour, vous avez gagné.

IL VOUS FAUDRA :

- **Une plaquette de chocolats en carrés (ou un dessin)**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

- Chacun leur tour, les joueurs cassent une barre de chocolat tout au long d'une ligne.
- Une fois une barre cassée, vous pouvez manger le plus petit bout. (Si les deux bouts sont de même taille, vous choisissez lequel manger.)
- On ne peut pas casser de carré. Si votre adversaire vous laisse seulement un carré de 1 × 1, vous avez perdu.

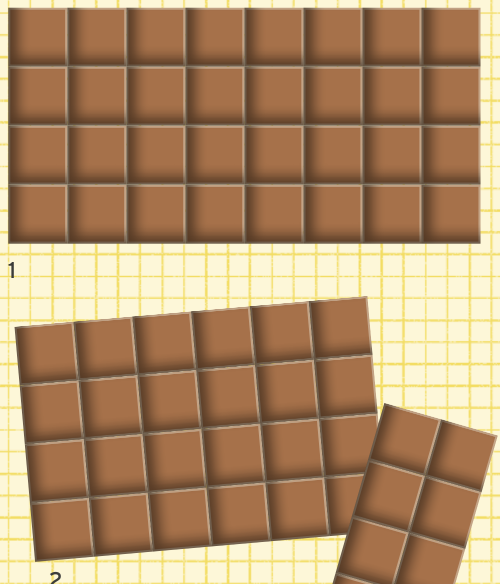
Jouez quelques parties et essayez de trouver une stratégie avant de poursuivre la lecture.

COMMENT GAGNER ?

Il faut se poser quelques questions.

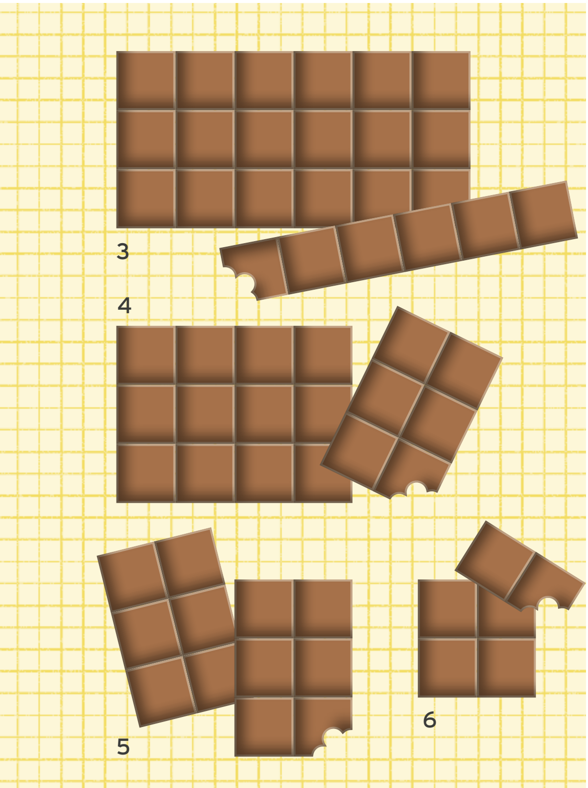
En combien de tours le jeu se finit-il ?
L'énigme de la page 29 s'intéressait au nombre de cassures qu'il faudrait pour

EXEMPLE DE PARTIE



transformer toute la plaquette en carrés, mais là, il y aura moins de coups à jouer. Comme on mange jusqu'à la moitié de la tablette à chaque tour, le nombre de tours est plus difficile à prédire.

- Comment se déroulerait la plus courte partie possible ?
- Et la plus longue partie possible ?



Qui va gagner ?
C'est la même situation que le jeu de la pizza des pages 88–89 : s'il n'y a que deux carrés de chocolat restants, et que c'est à votre tour de jouer, votre adversaire a perdu puisque vous allez prendre un carré et ne lui en laisser qu'un. De même, si c'est à votre adversaire de jouer et que vous lui avez laissé deux carrés, c'est la défaite garantie. Comment éviter ça ?

Comme votre adversaire ne peut manger au maximum que la moitié de ce qu'il reste de la plaquette à chaque fois, s'il reste plus de quatre carrés, il ne pourra pas vous en laisser que deux (s'il cassait un bout de deux carrés, il faudrait qu'il le mange). Cela peut vous donner une idée de stratégie gagnante.

Comme le jeu exige que vous cassiez les barres entières, selon les lignes, il restera toujours un carré ou un rectangle de chocolat à votre tour. Quelles tailles de rectangle sont gagnantes, et lesquelles sont perdantes ? Faites une liste de toutes les possibilités jusqu'au carré 10 × 10 et essayez de voir si vous pouvez pousser votre adversaire à la défaite en partant de là.

DÉCOUVRIR : CONVERSION D'UNITÉS

Les recettes donnent les quantités des différents ingrédients selon des systèmes d'unités variables : les liquides en litres, les solides en grammes ou en cuillerées, parfois en pincées, à l'unité ou encore en bottes. Comment fait-on quand on n'a qu'une balance pour convertir toutes ces unités entre elles ?

CONVERTIR LES POIDS

Il existe dans le monde deux grands systèmes de mesure, le système métrique en grammes (g) et le système impérial en livres (lb) et en onces (oz) employé aux États-Unis.

Facteurs de conversion

- 1 kg = 1 000 g
- 1 lb = 0,454 kg
- 16 oz = 1 lb
- 1 oz = 28,35 g (≈ 28 g)

Vous pouvez le faire :

1. Une recette demande 5 onces de farine. Combien est-ce en kilogrammes ?

2. J'ai 224 g de fromage. Combien est-ce en livres ?

3. Qu'est-ce qui pèse le plus : 4,5 oz ou 0,15 kg ?

4. Combien de grammes dans 1 lb ?

CONVERTIR LES VOLUMES

Les quantités de liquides et d'ingrédients secs sont parfois données en volume plutôt qu'en poids. Le système métrique pour cela se sert des litres (l) et des millilitres (ml), où un millilitre est le volume de 1 g d'eau. L'once fluide (fl oz) est une mesure de volume définie historiquement comme le volume de 1 oz d'eau. Le volume peut aussi se mesurer en verre (cup), en cuillère à soupe (cs) et en cuillère à café (cc), qui sont plus faciles à mesurer en cuisine.

Facteurs de conversion

- 250 ml = 1 verre = 12,5 cs = 50 cc
- 4 cups = 1 litre
- 1 pinte (impériale) = 570 ml
- 1 pinte (métrique) = 500 ml
- 8 pintes (impériales) = 1 gallon
- 1 fl oz = 28,4 ml (≈ 30 ml)
- 1 000 ml = 1 litre

Vous pouvez le faire :

1. Il me faut 6 fl oz de lait. Combien cela fait en litres ?

2. J'ai 125 g de beurre fondu. Combien cela fait en verres ?

3. Quel est le plus gros volume : 1 cs ou 0,03 litre ?

4. Combien y a-t-il de cuillères à café dans 1 gallon impérial ?

Le volume peut aussi être calculé grâce aux dimensions de l'objet, à l'aide des formules des pages 46–47. Rappelez-vous bien qu'un millilitre est égal à un centimètre cube, ou filez aux pages 94–95 pour découvrir une méthode de calcul du volume de formes irrégulières.

CONVERSION POIDS/VOLUME

Poids et volume ne correspondent pas toujours : quand on pèse plusieurs ingrédients, 250 ml de farine pèsent environ 128 g et 250 ml de beurre plutôt 225 g. On dit qu'ils sont de densités différentes. Vous pouvez calculer la densité avec la formule :

Densité = poids ÷ volume

Peu importe les unités, tant que vous utilisez les mêmes tout au long du calcul. (Mieux vaut rester sur le même système tout du long, cela évite les conversions.)

Par exemple, si une recette exige ½ verre de houmous, mais vous n'avez qu'une balance qui pèse en grammes, il vous faudra d'abord savoir combien pèse en grammes un verre de houmous. Si votre pot de 1 litre de houmous acheté au supermarché pèse 1,5 kg, quelle sera sa densité en grammes par verre ?

- 1,5 kg = 1 500 g
- 1 litre = 4 verres
- densité = poids ÷ volume = 1 500 g ÷ 4 verres = 375 g par verre.

Comme il ne faut qu'un ½ verre, cela fait 375 × ½ = 375 ÷ 2 = 187,5 g de houmous.

EXPÉRIMENTER : CHIPS TRUQUÉES

Avez-vous déjà ouvert un sachet de chips pour vous rendre compte qu'il n'était qu'à moitié plein ? Grâce aux maths, vous pouvez calculer à quel point ce sachet, c'était du vent.

Les chips et autres friandises sont vendues en sachets parfois remplis de gaz inertes, tels que l'azote. C'est en partie pour éviter que les chips s'écrasent trop facilement, mais on a parfois l'impression d'un léger excès de prudence... qui aurait pu être avantageusement remplacée par plus de chips. Cette expérience permet d'en avoir le cœur net.

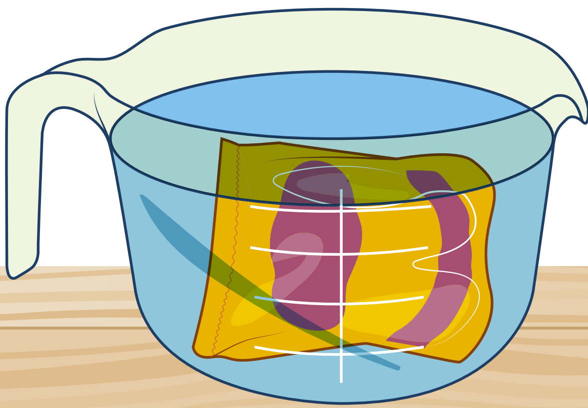
MESURER LE VOLUME

Vous avez sûrement déjà entendu l'histoire d'Archimède, mathématicien grec qui s'était écrié « eurêka » (« j'ai trouvé ») en sortant de sa baignoire. Ce qu'Archimède avait compris, c'est qu'un corps plongé dans l'eau déplaçait autant de liquide que son propre volume. Le volume de l'eau elle-même ne change pas, donc quand Archimède se plongeait complètement dans l'eau, toute augmentation du niveau de l'eau n'était due qu'à sa seule présence.

Le déplacement de l'eau permet ainsi de mesurer le volume d'objets qui ne pourrait pas être mesuré autrement, à l'aide d'une règle. Si les chips étaient vendues en boîtes carrées, il suffirait d'en mesurer les côtés pour avoir le volume. Mais comme ce sont des sachets, c'est plus simple de mesurer le déplacement d'eau.

IL VOUS FAUDRA :

- **Un sachet de chips**
- **Un grand verre mesureur ou un saladier pourvu de repères de volume**
- **De l'eau**
- **Des ciseaux et du scotch**



CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Remplissez le verre d'eau jusqu'à un repère. Il faut que le sachet puisse être plongé dedans.

2. Plongez le sachet dans l'eau et notez le nouveau niveau. Il vous faudra le maintenir en place, mais évitez au maximum d'avoir les doigts dans l'eau (car eux aussi la déplacent).

3. Pour calculer le volume du sachet, soustrayez le volume initial (l'eau seule) du volume final (l'eau et le sachet).

4. Ôtez le sachet, séchez-le et faites la plus petite ouverture possible le long d'un bord. Pressez-le pour faire sortir l'air, puis refermez le sachet avec du scotch. Il ne faut pas que l'eau rentre !

5. Mesurez le nouveau volume de la même manière (remesurez bien le volume d'eau au départ, car il a pu changer) et déterminez le volume du sachet une fois vidé de son air.

QUESTIONS À SE POSER

- Quelle est la différence de volume ?
- Quelle proportion du volume du sachet était occupée par les chips, et quelle proportion par de l'air ?
- Est-ce surprenant ? Est-ce que d'autres marques de chips font mieux ? Ce n'est pas parce que deux sachets font la même taille qu'ils contiennent autant de chips ! Pensez à vérifier le poids.

ARCHIMÈDE

Archimède a beaucoup fait avancer les mathématiques. Il a trouvé la formule de l'aire du cercle, ainsi que du volume et de l'aire de la sphère (voir page 47). Il a aussi développé les idées qui formeront la base de l'analyse.

VÉRIFIEZ VOS CHIPS !

Beaucoup de supermarchés donnent le prix à l'unité et le prix au kilo sur l'étiquette en rayon. Vous pouvez vous servir de ça ou vérifier le poids indiqué sur le sachet pour savoir quelle marque propose le meilleur rapport quantité/prix, même quand les sachets font tous la même taille.

DÉCOUVRIR : MIEL ET ABEILLES

Les abeilles rendent un service inestimable à l'industrie alimentaire en pollinisant 80 % des fruits, des légumes et des céréales du monde. Mais saviez-vous que les abeilles étaient aussi bonnes mathématiciennes ? Découvrez quelques faits surprenants :

1. Elles aiment les hexagones
Leurs ruches sont organisées en grilles d'hexagones réguliers en cire. Comme les pavages de la page 76 et les emballages de la page 56, cette disposition est très efficace pour remplir une ruche de miel.


RUCHE D'APICULTURE

Dans les fermes apicoles, les apiculteurs leur fournissent une base de départ au motif hexagonal sur laquelle elles construisent leurs rayons, qui seront ainsi bien plats pour mieux s'intégrer à la ruche. Mais même en liberté les abeilles construisent des rayons hexagonaux.

Le principal avantage de cette disposition (comparée à des carrés ou des triangles), c'est qu'elle donne la plus grande surface vide (entre les hexagones) par rapport à la quantité de cire utilisée. Ainsi, les abeilles ont moins de cire à produire.

2. Elles sont magnétiques
Les abeilles, de même que certains rongeurs, oiseaux, reptiles, bactéries et autres insectes, semblent pouvoir détecter les champs magnétiques et s'en servent pour se diriger.

Les scientifiques qui étudient ces champs modélisent mathématiquement la direction et la puissance des courants magnétiques, les abeilles, elles, les ressentent directement.

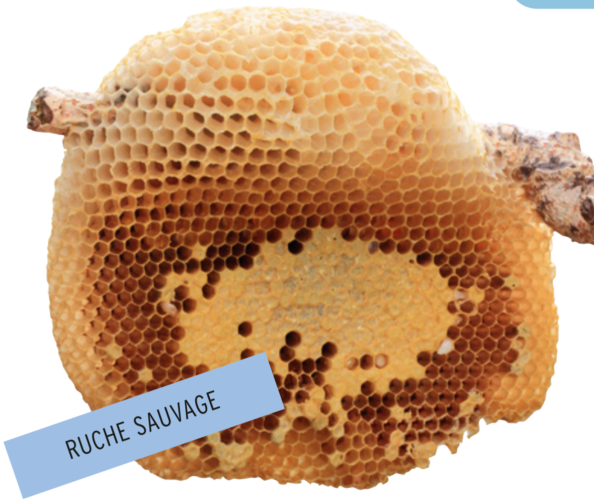
Elles ont dans l'abdomen une substance magnétique appelée la magnétite, qui contient du fer. Elles s'en servent pour détecter et suivre les lignes magnétiques afin de se repérer. Exposées à des courants magnétiques forts, elles perdent ce sens de la navigation.

3. Elles sont constamment en train de résoudre un problème de maths

Les abeilles collectent le nectar des fleurs. Elles en visitent entre 50 et 100 par voyage. Une fois trouvées toutes les fleurs du voisinage, il leur faut chercher dans quel ordre effectuer leur passage. Quand il est bien choisi, elles gagnent beaucoup de temps.

En maths, on appelle cela le problème du voyageur de commerce : un vendeur qui visite plusieurs clients doit lui aussi trouver la route la plus courte qui les relie tous.
Dans les expériences, les abeilles ont adopté la méthode « du plus proche voisin » pour choisir leur trajet, qui consiste à trouver à chaque fois la fleur la plus proche. Ce n'est pas toujours le trajet le plus efficace, mais il donne de bons résultats.

Une fois qu'une abeille a trouvé un chemin satisfaisant, elle le gardera. C'est un comportement qu'on observe chez plusieurs espèces et qui montre que les abeilles ont bonne mémoire.



4. Elles fabriquent le miel lentement

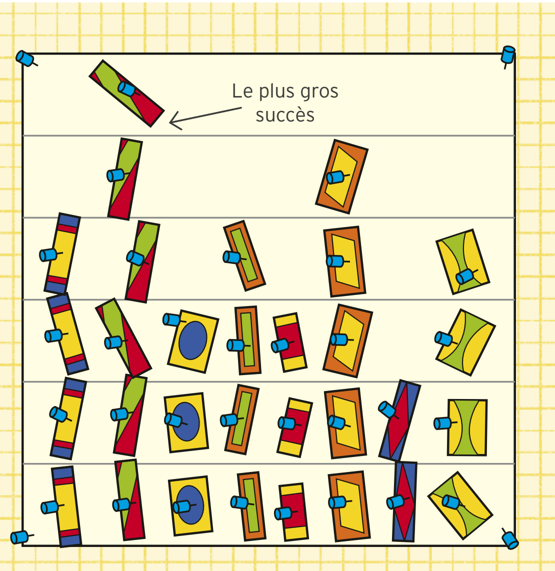
Un pot de 500 g de miel est facile à trouver dans les boutiques, mais afin de produire cette quantité de miel, les abeilles ont visité 2 millions de fleurs.

C'est un sacré nombre : les abeilles vivent quelques semaines ou quelques mois en moyenne, durant lesquels chacune va produire environ 0,5 g de miel, une demi-cuillère à soupe. Mais chaque ruche contient environ 50 000 abeilles.

Une colonie saine produit de 30 à 50 kg de miel par an, chaque kilo de miel représentant 195 109 km de vol, répartis entre les abeilles, et un très grand nombre de fleurs pollinisées.

EXPÉRIMENTER : GRAPHIQUES

Les graphiques sont de bons moyens de visualiser les données. Nous en avons déjà vu quelques-uns à base de nourriture, comme le graphe des pâtes alphabet des pages 30–31 et le camembert à la pizza de la page 65. Voici d'autres idées pour visualiser les données à la maison :

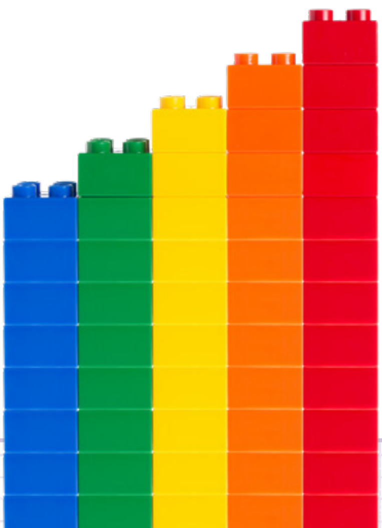


PAPIERS DE BONBON

Si vous achetez des bonbons à différents parfums en emballage individuel, gardez les papiers une fois que vous aurez mangé les bonbons pour construire un graphique qui vous indiquera quels parfums marchent le mieux chez vous : plus il y a de papiers vides d'un parfum particulier, plus sa colonne sera haute. Disposez-les pour cela comme les barres d'un histogramme.

BRIQUES DE COULEUR

Vous avez peut-être chez vous une grande caisse de briques en plastique. Combien y a-t-il de briques de chaque couleur ? Empilez-les par couleur pour former une colonne à chaque fois. Plus la colonne sera haute, plus vous avez de briques de cette couleur, comme dans un histogramme. Mais vous pouvez aussi les disposer de manière plus créative ! Un graphe en robots ? En fleurs ? En villes ?



QUELLE DISTANCE ?

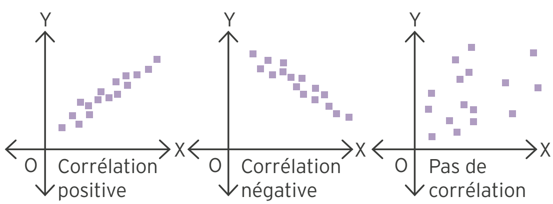
À quelle distance vos amis et vous savez lancer une balle ? Mettez chacun une étiquette sur un objet (qui ne rebondit pas), placez-vous au même endroit (plutôt dehors) et jetez vos objets le plus loin possible. En prenant ensuite une photo de tous les objets au sol, vous obtiendrez un graphique de la distance des lancers, sur lequel les points seront déjà nommés !

DONNÉES EN 2D

Un nuage de points présente deux informations différentes pour chacun de ses points, qu'on trouve sur ses axes. Rassemblez un tas de friandises et choisissez deux propriétés à mesurer. Cela peut être leur poids, leur nombre, leurs calories, leur goût (classé de 1 à 10 ?), leur couleur (sur un spectre du rouge au violet). Dessinez ensuite un grand graphique sur une feuille. Nommez vos axes et graduez-les, puis placez les friandises à la position qui indique leur valeur sur chacun des axes. Y a-t-il une corrélation?

CORRÉLATION

Quand deux choses sont corrélées, leurs variations sont liées. Par exemple, on pourrait constater que les gens qui ont de grandes jambes courent plus vite : la corrélation est ici positive. Quand on place deux choses corrélées positivement en nuage de points (comme ci-dessous), elles s'agglutinent en diagonale, du coin inférieur gauche au coin supérieur droit. Mais les choses peuvent aussi être corrélées négativement : plus il y a de renards en liberté dans la ferme, moins il y a de poules. Dans le cas d'une corrélation négative, la diagonale pointe vers le bas.



Ce n'est pas parce que deux choses sont corrélées qu'on peut dire que l'une est la cause de l'autre. Cela peut être une coïncidence, ou il peut exister un troisième facteur qui les fait varier toutes les deux ensemble.

EXPÉRIMENTER : CODES-BARRES

Quand on achète une marchandise dans un magasin, le caissier se sert souvent de son code-barres pour enregistrer l'achat. Comment ça marche ? Ce n'est qu'un tas de barres ! Pourtant, à l'aide des maths, vous pourrez impressionner vos amis !

CECI N'EST PAS UN ZÈBRE

Les barres d'un code-barres ont une organisation particulière : elles cachent des chiffres sous une forme qu'un laser pourra lire sans mal.

Ces barres fines ou épaisses sont en fait une succession de barres noires et blanches de même épaisseur. Quand elles paraissent épaisses, c'est qu'il y en a plusieurs à la suite. Les extrémités du code sont spécifiques et indiquent où commence et où finit le nombre. Les autres paquets de barres représentent les chiffres. Quand le laser scanne le code, il voit les barres et donne les chiffres.

Il y en a de genres différents partout dans le monde mais certains sont devenus des standards internationaux, comme l'EAN-13, un code à 13 chiffres comme celui ci-contre, utilisé pour de nombreux produits : dans l'alimentation, les jouets, les jeux et les livres (les plus vieux ont parfois encore un code à 10 chiffres). Si vous trouvez un produit avec ce genre de code-barres, vous pourrez vous en servir pour faire un joli tour. Il marche aussi avec un code à 12 chiffres, mais il faudra alors ajouter un 0 devant.

IL VOUS FAUDRA :

- **Un produit pourvu d'un code-barres à 13 chiffres, que vous donnera votre ami. Ne le regardez pas avant !**
- **Une calculatrice**

CE QU'IL FAUT FAIRE :

1. Demandez à votre ami de vérifier que le produit est bien pourvu du bon type de code-barres. Il doit y avoir 13 chiffres inscrits dessous, le premier décalé sur la gauche, comme ici (s'il n'est pas là, imaginez un 0 à la place).

2. Demandez à votre ami de lire lentement les chiffres mais de s'arrêter avant d'avoir lu le dernier. Écrivez-les sur une feuille.

3. Ajoutez les chiffres, mais triplez une valeur sur deux avant l'addition. Dans notre exemple où les 12 premiers chiffres sont 4018077796692, on calculerait ainsi :

$$4 + (3 \times 0) + 1 + (3 \times 8) + 0 + (3 \times 7) + 7 + (3 \times 7) + 9 + (3 \times 6) + 6 + (3 \times 9)$$

4. Le dernier chiffre sera toujours la différence entre la solution de cette addition et le multiple de 10 qui lui est immédiatement supérieur. Dans notre cas, le total est de 138, le multiple de 10 immédiatement supérieur est 140, ce qui signifie que le dernier chiffre doit être un 2 (et c'est bien ça !).

5. Vous pouvez maintenant révéler à votre ami le dernier chiffre du code.

Avec un peu d'habitude, on y arrive sans rien écrire. C'est alors un vrai tour de magie !

COMMENT ÇA MARCHE ?

Le code-barres cache un motif : les douze premiers chiffres sont des informations sur le produit, le treizième est un chiffre de vérification. Il permet de vérifier que le code a été lu correctement. Si on triple un chiffre sur deux à partir du deuxième, l'addition de tous les chiffres du code-barres doit donner un multiple de 10. Le dernier chiffre est ainsi toujours choisi pour que cela fonctionne.

Ce motif est ajouté aux codes-barres de manière à ce que, en cas d'erreur du scanner, l'ordinateur s'en rendra compte et demandera de rescanner le produit.

DÉCOUVRIR : RANGEMENT DE CARTONS

La page 29 s'intéressait à l'empaquetage des courses dans un sac. C'est un exemple de problème d'optimisation, où les mathématiques servent à décrire une situation avant de trouver le moyen le plus efficace d'obtenir le résultat souhaité.

REMPLIR LA POUBELLE

Quand on dispose d'un contenant de taille fixée (en profondeur, en poids ou en volume) et d'objets à mettre à l'intérieur, on dit qu'il s'agit d'un problème de *bin packing*.

La tâche consiste souvent à empiler des objets de tailles diverses dans le moins de « poubelles » possible, mais en réalité les poubelles peuvent représenter n'importe quoi : étagères, camion ou même disque dur. Ce sont les mêmes mathématiques que pour la découpe du bois ou de tuyaux.

Il est plus simple d'imaginer des poubelles hautes et des boîtes qui ne rentrent que dans un sens, afin que seule leur hauteur entre en compte.

- Vous avez des boîtes de 4, 7, 2, 4 et 2 de haut, et des poubelles de 10 de haut. Quel est le nombre minimum de poubelles nécessaire pour faire rentrer toutes les boîtes ?

- La pile suivante contient des boîtes de 9, 8, 2, 2, 5 et 4 de haut, et les poubelles font toujours 10. Quel est le nombre minimum de poubelles pour les contenir toutes ?

Vous pouvez déterminer l'efficacité d'une solution donnée en prenant l'espace laissé vide à la fin. Dans l'un de ces exemples, il en restait très peu.

TOUT DOIT RENTRER

Dans l'autre, il restait encore une place folle en haut des poubelles. Mesurer l'efficacité d'une solution permet aux mathématiciens de les comparer et d'inventer de meilleures méthodes.

ALGORITHMES D'EMPILEMENT

Un algorithme est un ensemble d'instructions à suivre pour savoir où placer les boîtes.

Algorithme du premier arrivé

• Disposez les poubelles en ligne, de gauche à droite. Prenez les boîtes dans l'ordre de l'énoncé et rangez-les dans la première. Dès qu'une boîte ne rentre pas, passez à la poubelle suivante.

Algorithme du pire rangement

• Prenez les boîtes dans l'ordre de l'énoncé et placez-les à chaque fois là où il reste le plus de place, mais remplissez une poubelle si possible avant de passer à la suivante.
Si les boîtes sont de hauteur 7, 4, 2, 4, 5, 1 et 5, et vos poubelles de 10, cet algorithme occupe 4 poubelles, tandis que celui du premier arrivé n'en occupe que 3.

Premier arrivé décroissant

• Classez les boîtes par ordre décroissant de tailles, puis passez à l'algorithme du premier arrivé.

Pire rangement décroissant

• Classez vos boîtes par ordre décroissant de tailles, puis appliquez l'algorithme du pire rangement.

Ces problèmes peuvent être étendus à deux et même trois dimensions. Ils deviennent alors plus complexes et les algorithmes doivent être affinés.

PROBLÈMES DE RANGEMENT

BOÎTES	POUBELLE
7, 7, 7, 4, 4, 4, 13, 13, 13	24
4, 6, 4, 1, 6, 1, 4, 4	10
2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 6, 7, 7	12
11, 2, 15, 5, 6, 17, 7	20
2, 5, 4, 7, 1, 3, 8	10

Lequel des algorithmes marchera le mieux à votre avis ? Servez-vous des exemples du tableau puis essayez d'inventer les vôtres, afin de tester ces algorithmes. Lequel est le plus efficace ?

APPRENDRE : PARTAGE EN ROND

Bien des plats délicieux, des gâteaux aux tartes en passant par les quiches, sont circulaires et donc plus difficiles à découper en parts égales que d'autres, rectangulaires ou carrés. Mais il y a des astuces mathématiques pour vous aider.

TROUVER LE CENTRE

Découper un cercle implique souvent de passer par son centre. Mais comment s'y prendre pour le déterminer ?

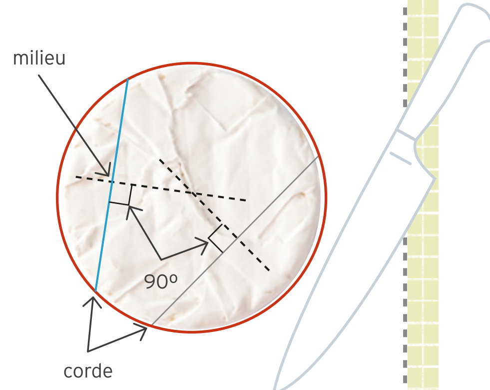
UNE MÉTHODE SIMPLE

1. Dessinez une ligne droite qui coupe le cercle en deux points, n'importe où. C'est ce qu'on appelle une corde.

2. Mesurez la corde et trouvez son milieu.

3. À l'aide d'une équerre (ou du coin d'un rectangle quelconque), dessinez une ligne qui coupe la corde à angle droit en passant par son milieu. Cette ligne passe forcément par le centre du cercle.

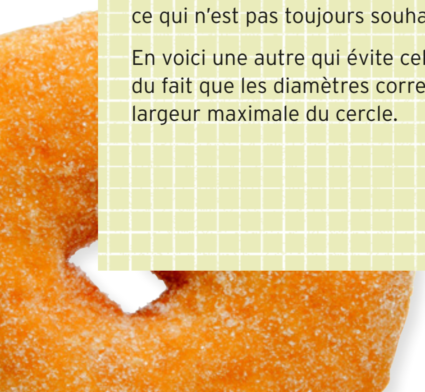
4. Recommencez avec une deuxième corde. Le centre se trouvera à l'intersection des dessins.

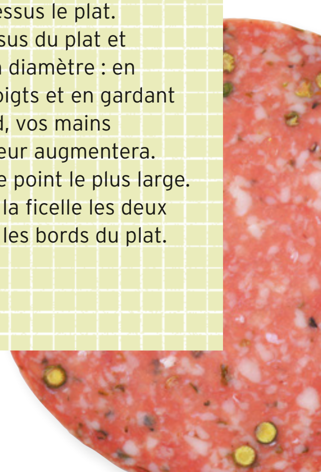


Beaucoup de méthodes géométriques pour trouver le centre, telles que celle décrite ci-dessus, impliquent de dessiner sur le cercle, ce qui n'est pas toujours souhaitable.

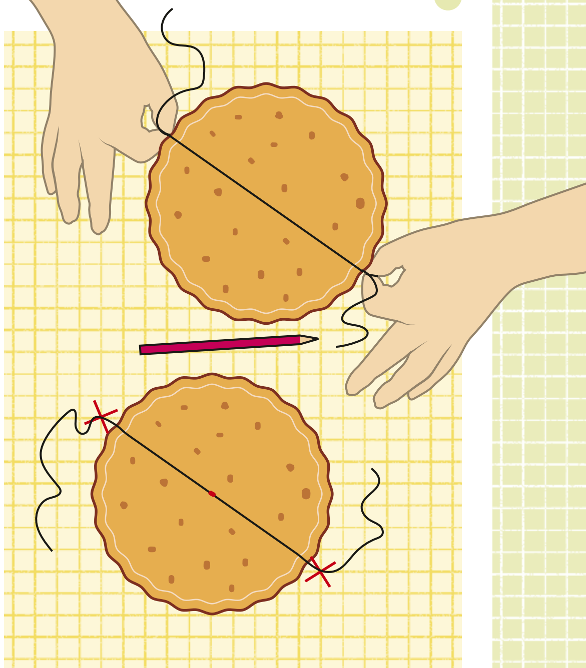
En voici une autre qui évite cela. Elle tire profit du fait que les diamètres correspondent à la largeur maximale du cercle.

1. Placez une feuille par-dessus le plat.
2. Tenez une ficelle au-dessus du plat et déplacez-la pour trouver un diamètre : en tenant la ficelle entre les doigts et en gardant les deux mains bien au bord, vos mains s'écarteront quand l'épaisseur augmentera. Continuez jusqu'à trouver le point le plus large.
3. Indiquez sur la feuille et la ficelle les deux points où la ficelle touchait les bords du plat.





4. Rassemblez les deux points de la ficelle en la repliant, et repérez le milieu entre ces deux repères en la laissant pendouiller.
5. Replacez la ficelle sur le plat, en alignant les repères de la ficelle et ceux de la feuille. Le milieu que vous avez repéré sur la ficelle vous indiquera aussi celui du cercle.



QUEL ANGLE ?

Maintenant que vous avez trouvé le centre du plat, vous pouvez découper des parts de taille égale en partant des bords et en allant jusqu'au centre. Mais comment s'y prendre ?

Si vous avez un rapporteur pour mesurer les angles, vous pouvez calculer l'angle qu'il vous faut mesurer depuis le centre du cercle à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{\text{360 degrés}}{\text{nombre de parts}} = \text{angle d'une part}$$

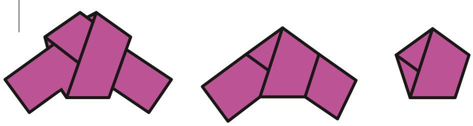
Par exemple, 6 parts seront chacune de $360 \div 6 = 60$ degrés ; 15 parts seront de $360 \div 15 = 24$ degrés chacune.

DÉCOUPER EN CINQ

S'il vous faut cinq parts, il y a une chouette astuce pour trouver le bon angle qui ne nécessite qu'une feuille de papier.

- Découpez une bandelette de papier aux côtés parallèles (2,5 × 28 cm dans l'idéal).
- Faites un nœud avec en gardant les extrémités bien plates.
- Serrez délicatement le nœud (sans déchirer le papier) et aplatissez-le bien.
- Repliez ou coupez les extrémités de la bandelette. Le nœud devrait être un pentagone régulier !

Les cinq pointes de cette forme sont également espacées, vous pouvez ainsi la placer au centre du plat et vous en servir pour découper cinq parts égales.



DÉCOUVRIR : PARTAGE EN CARRÉ

Les pages précédentes vous ont montré comment trouver le centre d'un gâteau circulaire afin de le partager équitablement. Mais les maths nous procurent toujours les bons outils pour ça, même quand le plat n'est pas rond.

PLATS CARRÉS

Quand le plat est carré, le partage est facile. Voici quelques méthodes pour couper un carré en cinq parts égales :

Rencontre au milieu

Rectangles droits

Formes irrégulières

Toutes les parts ont la même aire, même si elles n'ont pas forcément la même forme. Attention cependant ! Dans certains cas, une croûte épaisse par exemple, les différentes parts risquent de ne pas toutes être également appétissantes !

L'un des diagrammes ci-dessus donnera bien cinq parts avec la même quantité de croûte (lequel?), et il existe une méthode pour arriver à ce résultat quel que soit le nombre de parts.

Méthode pour découper un carré en N parts égales avec la même quantité de croûte pour toutes :

1. Déterminez le centre du carré (au croisement des diagonales).

2. Mesurez un côté et divisez-le par N, où N est le nombre de parts désiré (par exemple, si le côté fait 20 cm et qu'il vous faut 5 parts, 20 ÷ 5 = 4 cm).

3. Tracez des repères éloignés de cette distance sur les quatre côtés, de façon à les diviser chacun en N sections, ce qui fait 4N sections en tout.

4. En partant d'un coin, comptez quatre sections. Tous les quatre repères, coupez de ce repère jusqu'au centre du plat. Une fois que vous serez revenu au point de départ, vous aurez ainsi un gâteau coupé en 4N parts, toutes avec la même quantité de croûte.

PLATS OVALES

Certains plats sont ovales, ce qui est plus difficile à diviser qu'un plat rond :

- En traçant des lignes depuis le centre séparées par le même angle, comme pour le cercle, les parts ne seront pas de surface égale.
- Mesurer le périmètre et diviser en sections égales à partir desquelles couper jusqu'au centre ne donne pas non plus des parts de surface égale dans le cas d'un ovale.

Pas de panique ! Les maths ont la réponse. Comme un ovale est un cercle aplati, imaginez que vous découpez un cercle puis aplatissez les coupes sur votre plat ovale.

Méthode pour découper un ovale

1. Mesurez le plus long diamètre de l'ovale puis prenez une feuille et dessinez-y un cercle de ce diamètre.

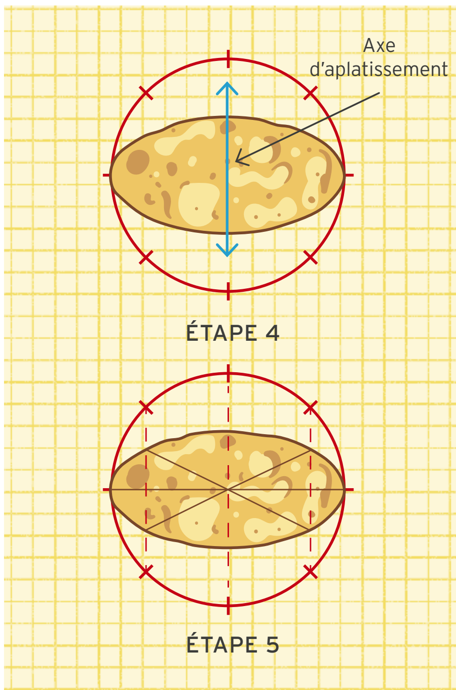
2. Divisez le cercle en parts égales et repérez sur ses bords les endroits où les coupes seront faites.

3. Placez l'ovale sur le cercle de façon à ce que les deux partagent un diamètre (dans n'importe quel sens).

4. Imaginez que vous aplatissiez le cercle sur l'ovale. Si l'ovale tient exactement dans le cercle selon un certain diamètre, aplatissez le cercle le long d'une ligne perpendiculaire à ce diamètre. C'est l'axe d'aplatissement.

5. Descendez chaque repère du cercle sur l'ovale en suivant la direction de l'axe d'aplatissement.

6. Coupez depuis ces points jusqu'au centre de l'ovale et les parts seront de surface égale !



APPRENDRE : COMMENT GARDER UN GÂTEAU FRAIS

Pour couper un gâteau, la technique habituelle est d'en trouver le milieu (pages 104–105) et de couper des parts qui s'y rejoignent. Mais quand on ne va pas le manger en entier, cela expose certaines parties du gâteau à l'air, si bien qu'il sèchera. Servons-nous des maths pour trouver une meilleure technique.

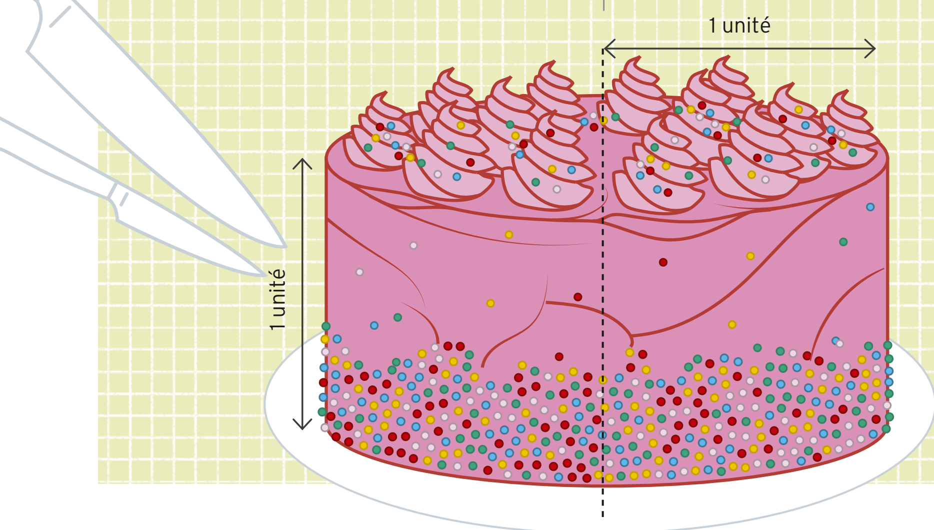
QUELLE QUANTITÉ EST EXPOSÉE ?

Pour faciliter les calculs, supposons que le gâteau est de rayon 1 unité et d'une hauteur de 1 unité. Quelques questions de base :

- Quelle est la surface de glaçage en haut du gâteau ? (Gardez π dans la réponse, plutôt que de prendre 3,14.)
- Quelle est la circonférence du gâteau ?
- Quelle surface faudrait-il glacer pour qu'il y ait du glaçage partout sur le gâteau (en supposant que le fond du gâteau est posé sur l'assiette et ne sera pas glacé) ?

Imaginez que vous découpiez une part qui représente $\frac{1}{9}$ de tout le gâteau, comme sur l'image de la page 109 en haut.

- Quelle quantité de glaçage sera ôtée au côté du gâteau ? Pensez en proportion par rapport à toute la bande de glaçage latérale.
- Quelle quantité de glaçage sera ôtée au sommet du gâteau, toujours en proportion ?
- Quelle surface de glaçage est toujours présente sur le gâteau ?



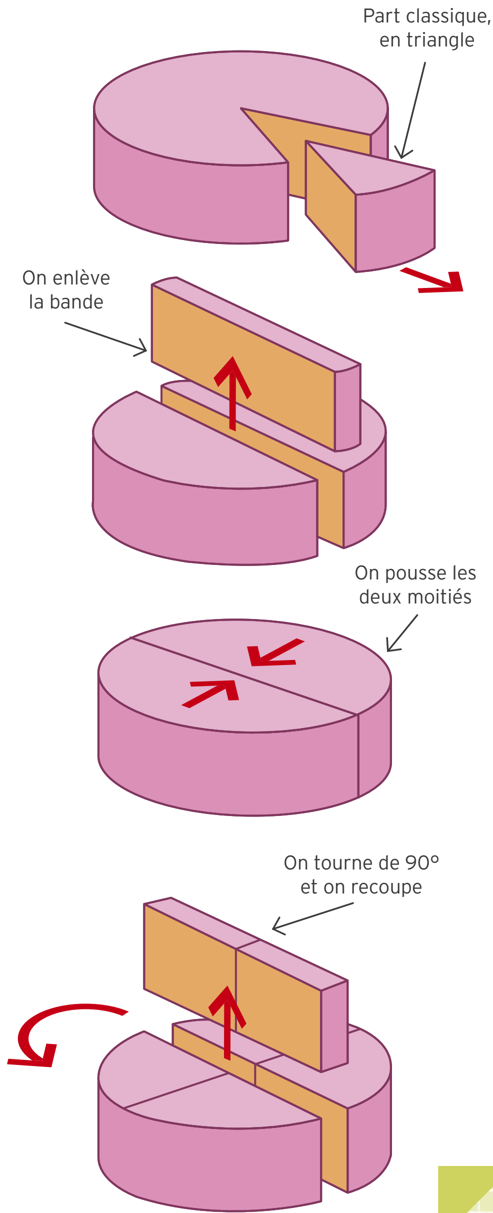
Passons maintenant à la zone sans glaçage.

- Quelle est la surface exposée ? Vous avez le rayon du gâteau et sa hauteur.
- En prenant toute la surface du gâteau une fois la part ôtée, quelle proportion est encore glacée ? (Réutilisez les réponses précédentes pour trouver la surface de gâteau restant.)

Coupez une nouvelle part de $1/9$ du gâteau, à côté de la première.

- Quelle quantité de gâteau est à présent exposée ?
- Est-ce plus ou moins, en proportion du gâteau restant ?

En continuant ainsi à découper le gâteau, on l'expose de plus en plus. Mais pas de panique ! Il y a une meilleure technique !



COMMENT DÉCOUPER UN GÂTEAU MATHÉMATIQUEMENT

Envoyée dans un courrier des lecteurs du magazine *Nature* en 1906, la méthode suivante évite que le gâteau sèche tout en proposant toujours des parts de bonne taille.

Plutôt que de couper des parts en triangle jusqu'au centre, il s'agit de couper des bandes droites au milieu du gâteau. Ceci fait, vous pouvez recouper la bande en plusieurs parts.

Poussez ensuite les deux moitiés de gâteau restantes l'une contre l'autre. (L'auteur de l'article recommandait l'usage d'un élastique pour les maintenir !)

Pour couper une autre bande, tournez le gâteau de 90° et découpez une nouvelle bande à angle droit par rapport à la première, puis refermez le gâteau. De cette façon, le gâteau restera à peu près rond.

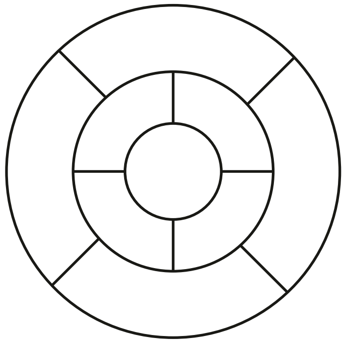
Et vous pourrez recommencer autant de fois que vous le voudrez !

DÉCOUVRIR : GLAÇAGE QUATRE COULEURS

Quand on glace un gâteau (ou qu'on colorie) avec différentes couleurs, on préfère souvent connaître à l'avance les couleurs utilisées. En plus des nombres et des calculs, les mathématiques étudient les formes... et il se trouve que les maths du coloriage sont plutôt rigolotes.

COMBIEN DE COULEURS ?

Partez de ce schéma de gâteau. Il faudra le glacer avec des glaçages de trois couleurs différentes. Toutes les sections doivent être colorées (pas de blanc en quatrième couleur). Dernière règle : quand deux sections se touchent, elles doivent être de couleur différente. Est-ce possible ?



Si vous pensez que ce schéma ne peut pas être colorié selon ces règles, pouvez-vous le prouver ? Pouvez-vous convaincre quelqu'un d'autre ?

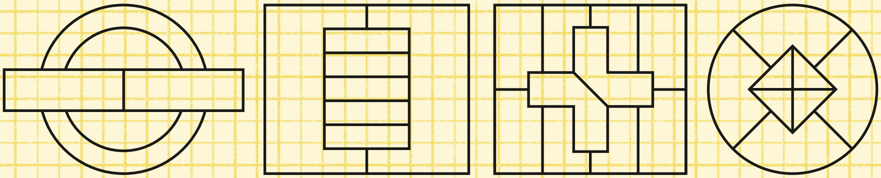
PROUVEZ-LE !

Une grande partie du travail d'un mathématicien consiste à prouver ses théories, et ainsi montrer à ses collègues son raisonnement pour les convaincre que ses idées sont vraies.

Les mathématiques du coloriage remontent à 1852, quand un cartographe a voulu savoir combien il lui faudrait de couleurs pour colorier ses cartes afin qu'aucun pays ne soit de la même couleur qu'un autre pays frontalier. Avec trois couleurs, était-ce suffisant ?

Il existe des schémas qu'on peut colorier avec trois couleurs seulement, mais pour d'autres, il en faudra quatre. La question était : peut-on imaginer quelque chose qui nécessiterait plus de quatre couleurs, ou bien quatre est-il le maximum ?

COMBIEN DE COULEURS ?



Peut-on colorier ces schémas en trois couleurs ou leur en faut-il plus ? L'un d'eux en exige-t-il plus de quatre ?

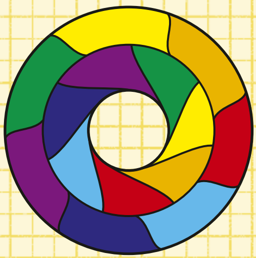
La question a trouvé sa réponse en 1976, quand des mathématiciens ont prouvé le théorème des quatre couleurs. Il indique que toute carte dessinée sur une feuille plate ou une forme ronde comme un globe peut être coloriée avec quatre couleurs au maximum. Il est impossible d'imaginer un schéma qui en exigerait plus. Pour glacer vos gâteaux, vous n'aurez donc jamais besoin de plus de quatre couleurs de glaçage !

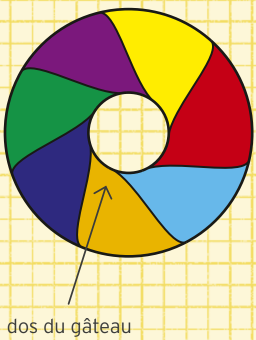
ET AVEC UN TROU ?

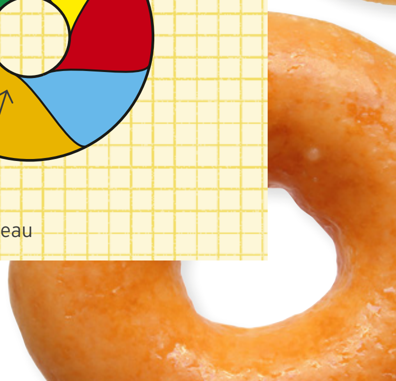
Le théorème des quatre couleurs s'applique sur une surface plate ou une boule. Quand la forme est plus compliquée – un gâteau avec un trou au milieu, par exemple –, le théorème change. Pour un objet en anneau, il est possible de tracer un schéma de sept régions différentes où toutes touchent les six autres. Il faudra donc pour cette forme sept couleurs de glaçage.

DÉCORATION D'ANNEAU

Voici comment décorer un gâteau en forme d'anneau avec sept couleurs qui touchent toutes les six autres :







CHAPITRE 4

PENSÉE LOGIQUE

DÉCOUVRIR...

APPRENDRE...

EXPÉRIMENTER...

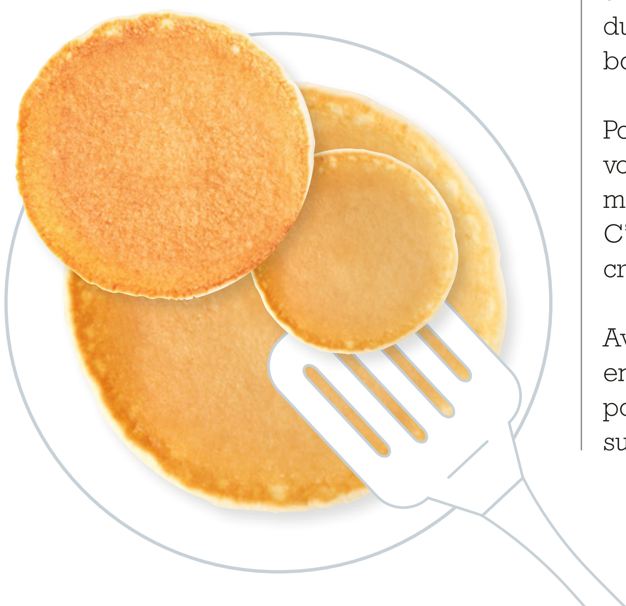
DÉCOUVRIR : NOMBRES CRÊPES

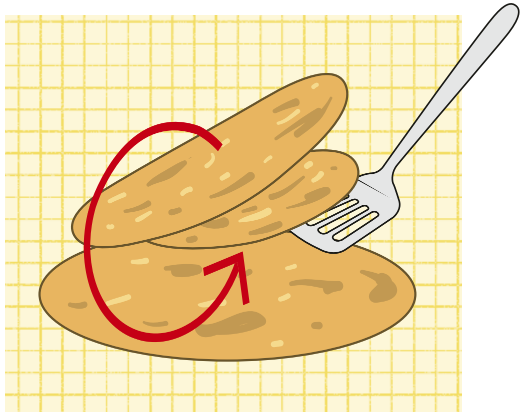
C'est toujours mieux de prendre un exemple dans le monde réel pour expliquer une idée. Il existe ainsi un ensemble particulier de nombres appelés les nombres crêpes, car les crêpes nous fournissent un excellent exemple de leur utilisation !

LE PROBLÈME

Imaginez que vous travailliez dans une crêperie. Votre chef a sa façon bien à lui de les cuisiner. Quel que soit le nombre commandé, il en prépare de toutes les formes et les empile dans l'assiette, mais jamais par ordre de taille.

Le défi, c'est de devoir les remettre dans le bon ordre (la plus petite sur le dessus, la plus grande tout en bas) tandis que vous apportez le plateau au client, à l'aide d'une spatule tenue dans l'autre main.



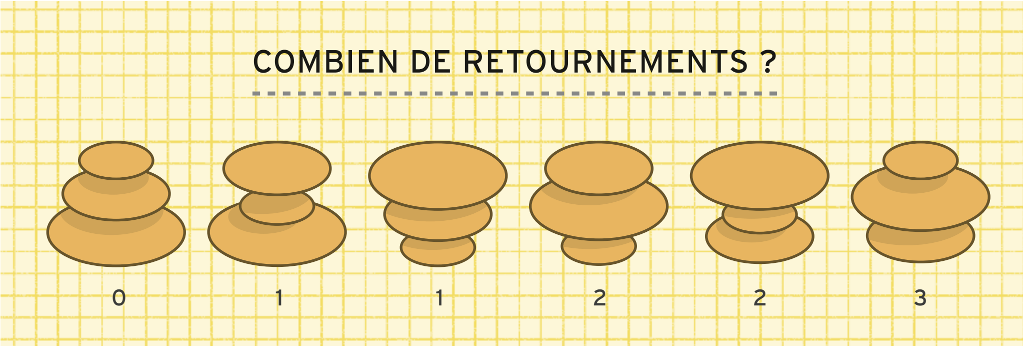


Par exemple, avec une assiette de trois crêpes empilées dans l'ordre 2-1-3, il s'agirait de retourner les deux crêpes du dessus afin de les remettre dans le bon ordre : 1-2-3.

Pour toutes les tailles de pile de crêpes, vous pouvez déterminer le nombre de manières différentes de les empiler. C'est un nombre que vous avez déjà croisé (les factorielles, pages 16–17.)

Avec N crêpes, il y a N! façons de les empiler : N choix pour la crêpe en position 1, puis N-1 choix pour la suivante, et ainsi de suite.

Avec trois crêpes, on a donc six possibilités. Pour chacune, un certain nombre de retournements est nécessaire pour les remettre dans l'ordre :



Quel est le minimum de retournements nécessaires ? Étant donné tous les arrangements possibles pour une pile de crêpes d'une taille donnée, cette question aboutit à une liste de nombres comme celle du dessus, qui concerne le cas de trois crêpes.

Le nombre crêpe pour une pile de trois est le nombre le plus élevé de cette liste. Ici, ce nombre est donc trois. Cela revient à toujours considérer le plus mauvais scénario : au pire, combien de retournements seront nécessaires ?

- Décrivez quelques piles de quatre crêpes et essayez de les remettre dans l'ordre le plus vite possible.

Le nombre crêpe pour une pile de quatre est quatre. Aucune pile de quatre crêpes n'exige plus de quatre retournements pour être remise en ordre. Le nombre crêpe augmente avec la taille des piles. On connaît ce nombre pour des piles jusqu'à 20 (et les mathématiciens travaillent d'arrache-pied pour les suivants !).

POURQUOI ?

Vous vous demandez peut-être quel est le rapport avec les mathématiques. Les crêpes ne sont qu'une manière d'expliquer le problème. L'idée est seulement de réordonner un ensemble en renversant l'ordre de certains de ses éléments, selon certaines règles.

On utilise des algorithmes numériques pour organiser les données et ces algorithmes sont très importants pour un domaine situé au croisement des mathématiques et de l'informatique. L'organisation par renversement des premiers éléments d'une pile est appelée l'inversion de préfixe, un sujet qui a été étudié en profondeur par de nombreux mathématiciens et informaticiens.

APPRENDRE : ÉNIGMES AU GOÛTER

Saurez-vous préparer les goûters qu'il vous faut ? Cela peut se faire simplement en comptant, mais il est parfois bon de discerner des motifs qui se répètent dans les questions pour trouver la réponse.

DES GOÛTERS PRESQUE PARFAITS

1. Vous aimez six sortes de goûter que vous répétez selon un motif particulier. Le premier jour, une pomme, le suivant une banane, du fromage le troisième, un beignet le quatrième, des rouleaux de printemps le cinquième, un falafel le sixième et retour à la pomme ensuite.

Aujourd'hui, c'est vendredi. Vous mangez une banane.

a) Quel goûter mangerez-vous le jeudi de la semaine suivante ?
b) En considérant ce jour le jour 1, quel sera votre goûter du jour 50 ?
c) Pourriez-vous trouver une règle qui permette de déterminer les jours pommes ?

2. Votre ami aussi est maniaque du goûter. Il mange tous les jours un nombre de grains de raisin différent. Aujourd'hui un, demain deux, trois le jour suivant, etc. Arrivé à sept grains, il les mange et reviendra à un grain le lendemain.

a) Nous sommes lundi. Combien de grains mangera-t-il cette semaine (jusqu'à dimanche) ? *Indice : la page 34 vous aidera… Avez-vous déterminé la suite ?*
b) Si nous sommes le jour 1, combien de grains mangera-t-il au jour 52 ?
c) Combien de grains aura-t-il mangés en tout à la fin du jour 52 ?

3. Vous ne mangez plus que des pommes et des bananes. Aujourd'hui, c'est pomme, demain ce sera banane, puis vous mangerez une pomme deux jours de suite, et une banane les deux jours suivants ; après cela, ce sera trois de chaque, etc., en augmentant à chaque fois le nombre de jours consécutifs.

a) Si nous sommes le jour 1, quel sera votre goûter du jour 10 ?
b) Et celui du jour 50 ?
c) Combien de jours seront passés quand vous entamerez votre premier mois (30 jours) à une pomme par jour ?

4. Vous ne mangez toujours que des pommes et des bananes mais ce sont à présent vos goûters des deux jours précédents qui comptent pour décider ce que vous mangerez. Si vous avez mangé la même chose ces deux jours-là, vous mangez une pomme, si vous avez pris des goûters différents, vous mangez une banane. Lors des deux premiers jours de ce nouveau régime, vous avez mangé une banane. Après cela, vous suivez la règle donnée.

a) Selon quel motif les goûters se répètent-ils ? Pouvez-vous le décrire simplement ?
b) Quel est le goûter du jour 10 ? Et celui du jour 12 ?

APPRENDRE : ÉNIGMES DE POIDS

Il y a beaucoup de chouettes énigmes à se poser autour de la pesée. Emparez-vous de votre balance de cuisine (même si une balance imaginaire marchera tout aussi bien) et pesez bien toutes les données !

MATHÉMATIQUES LÉGÈRES

QUEL POIDS ?

Vous disposez de poids de 3, 4, 5, 6 et 7 g. Vous les mettez tous dans la balance, sauf un. La balance indique 19 g. Quel poids manque ?

Vous mettez le poids manquant dans la balance et vous en prenez un autre. La balance indique 22 g. Lequel manque à présent ?

OURS EN GUIMAUVE

Vous avez sept paquets d'ours en guimauve. Chaque bonbon pèse 10 g, mais quelqu'un a produit de faux ours qui ne pèsent que 9 g chacun. On vous a dit que l'un de vos paquets était un faux et ne contient que des ours de 9 g ! Vous n'avez pas beaucoup de temps et pourrez ne faire qu'une seule pesée sur une balance à plateaux. Comment trouver le faux paquet ? *Astuce : vous n'avez qu'une pesée, il faudra donc prendre des ours dans chaque paquet et les peser tous ensemble. La balance ne donnera que le poids total, mais on peut très bien peser plus de sept ours à la fois…*

BONNES POMMES

Une balance à plateaux permet de comparer les poids de deux ensembles d'objets. On s'en servait déjà avant les balances plus modernes (avec un affichage numérique ou une aiguille, qui donne directement le poids mesuré). D'ordinaire, on utilise des poids, chacun de masse connue et indiquée. En plaçant le même poids total des deux côtés de la balance, les plateaux sont en équilibre, au même niveau, mais si un plateau est plus lourd, la balance penche de ce côté.

Vous avez trois pommes, toutes de poids différent. Seulement, elles se ressemblent toutes. Comment peut-on comparer leur poids et les classer de la plus lourde à la plus légère avec une balance à plateaux ? Quel est le nombre minimum de pesées à effectuer ?

RICHES MADELEINES

Vous préparez neuf madeleines et vous faites tomber par inadvertance une pièce dans la pâte. En la versant, vous ne parvenez pas à voir dans quel moule elle s'est retrouvée. Il y a donc une madeleine plus lourde que les autres.

Vous n'avez qu'une balance à plateaux et vous êtes plutôt pressé, vous n'aurez donc le temps que pour deux pesées. Que placer sur les deux plateaux pour chacune des deux pesées ?

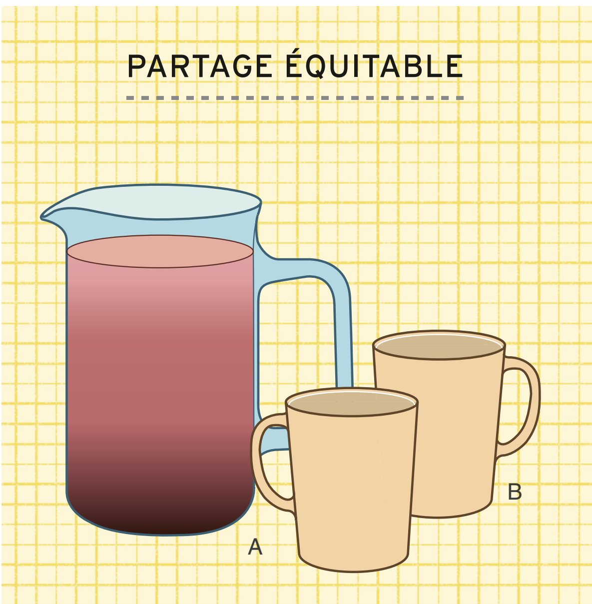
DÉCOUVRIR : COMMENT VERSER LE PARFAIT CHOCOLAT CHAUD

Vous avez préparé une casserole de chocolat chaud, mais il n'est pas très bien mélangé : il est fort au fond et plus léger en haut. Comment servir deux tasses de même dosage ?

LA BONNE DOSE

Si vous remplissez une tasse puis que vous passez à la suivante, elles seront de dosage différent. Comment les équilibrer ? En ne versant pas tout d'un coup ? Pensez-y et essayez de trouver une méthode avant de lire la suite. (Supposez que la casserole contient exactement deux tasses.) Bien sûr, en pratique, il suffit de mélanger. Toutefois, dans l'hypothèse où mélanger serait impossible, il existe un moyen d'obtenir deux tasses équivalentes.

En versant d'abord une demi-tasse, puis en remplissant complètement l'autre tasse avant de finir de remplir la première, on obtient bien deux tasses de même dosage. Les parties les plus concentrées et les plus diluées se compensent, tandis que le milieu, avec son dosage plus équilibré, finit dans l'autre tasse.



La séquence de versement pourrait être décrite ainsi : ABBA, en étiquetant les tasses A et B, chaque lettre représentant une demi-tasse.

VERSEMENTS EN LIQUIDE

C'est ce qu'on appelle la suite de Thue-Morse, dont les applications pratiques sont nombreuses, par exemple dans un jeu où chacun joue à son tour et où jouer en premier donne un avantage. Dans cette suite, quand un joueur commence, l'autre commencera au tour suivant.

Pour prolonger la suite, il suffit de répéter la même séquence de lettres, en échangeant les *A* et les *B* de la deuxième moitié, et ainsi autant de fois qu'on le souhaite. Par exemple :

ABBA
ABBA BAAB
ABBA BAAB BAAB ABBA
ABBA BAAB BAAB ABBA BAAB ABBA ABBA BAAB

C'est aussi une bonne manière de former les équipes. Si deux capitaines choisissent parmi huit joueurs, on peut classer ceux-ci par ordre, du meilleur au moins bon, et un capitaine choisira toujours le meilleur parmi ceux qui n'ont pas encore été choisis.

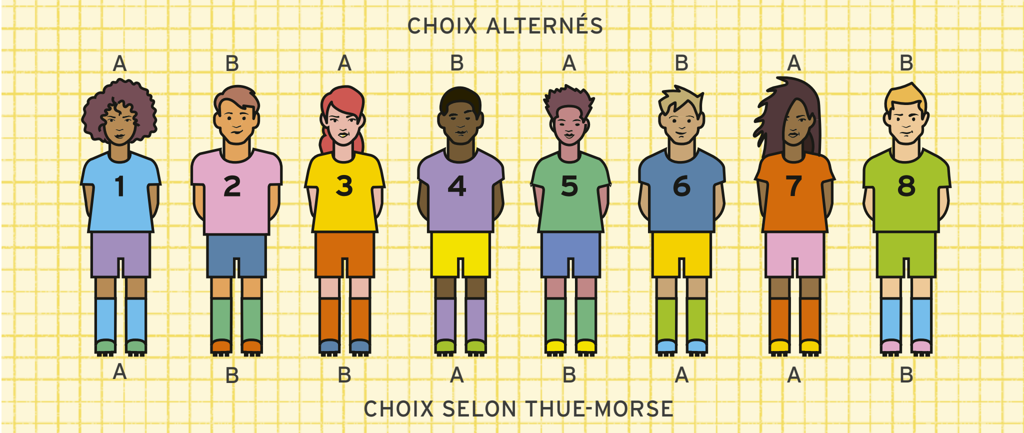
Quand on alterne, chaque joueur choisi est meilleur que le suivant. Tandis que quand on choisit selon la séquence ABBABAAB, la distribution est plus régulière :

Choix alternés :
1 + 3 + 5 + 7 = 16
2 + 4 + 6 + 8 = 20

Choix selon Thue-Morse :
1 + 4 + 6 + 7 = 18
2 + 3 + 5 + 8 = 18

Il a été suggéré que cette séquence soit utilisée pour les séances de tir au but lors des matchs de football, afin que l'équipe qui tire la première ne bénéficie pas d'un avantage indu.

CHOISIR LES JOUEURS POUR DEUX ÉQUIPES



DÉCOUVRIR : MÉTHODES DE PARTAGE

Quand on partage un plat, on se sent parfois floué, estimant qu'un autre a obtenu plus que nous et que ce n'est pas juste. C'est un problème très étudié en mathématiques et en économie : partage et allocation des ressources, gestion du trafic automobile et plus encore.

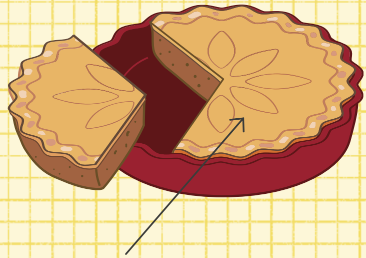
Le partage des ressources est parfois compliqué, car tout le monde n'a pas les mêmes préférences ni ne confère la même valeur aux choses.
Des méthodes mathématiques ont ainsi été conçues pour s'assurer d'un partage équitable.

COUPER ET CHOISIR

L'une des méthodes les plus simples pour un partage en deux est celle appelée « je coupe, tu choisis ». Elle consiste à laisser l'une des deux personnes diviser les choses comme elle l'entend, tandis que l'autre choisira sa part en premier.

Par exemple, si on partage une tarte entre deux personnes, l'une des deux la coupe en deux moitiés, l'autre choisit la part qui lui convient.

COUPER ET CHOISIR



Si les parts ne sont pas deux moitiés égales, le partage n'est pas juste.

Ainsi, en supposant que tout le monde aime autant la tarte et en voudrait le plus possible, si la première personne coupe une petite part et une grosse part, la deuxième prendra évidemment la grosse part. Il est donc dans l'intérêt de la première de couper deux parts le plus équitablement. Par ailleurs, elle ne pourra pas se plaindre si l'autre obtient plus que la moitié, puisque c'est elle qui a coupé les parts !

ET POUR TROIS ?

Dès qu'on ajoute une troisième personne, les choses se compliquent et cette méthode ne marche plus. Imaginez que Jean, Tiana et Fred se partagent un rosbif. Voici ce qu'ils pourraient faire.

1. Jean coupe le rosbif en trois morceaux, qu'il estime être des tiers.

2. Tiana a le choix d'accepter ce partage – si elle pense que deux des parts, ou plus, sont de bonne taille – ou, si elle n'est pas d'accord avec ce partage, de désigner les deux parts qui lui paraissent trop petites.

3. Si Tiana accepte le partage, Fred choisit le premier, suivi de Tiana, puis Jean. Ainsi, même si Fred n'a pas eu son mot à dire sur le partage, c'est lui qui choisit le premier. Quant à Tiana, elle a déjà jugé qu'il y avait au moins deux parts de la taille appropriée. Elle prendra donc la deuxième et tout le monde sera content.

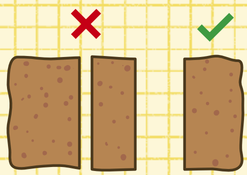
4. Si Tiana n'accepte pas le partage à l'étape 2 parce que deux parts lui paraissent trop petites, elle passe le plat à Fred, qui a lui aussi le choix d'accepter ou de refuser. Si Fred accepte, car selon elle deux parts au moins sont de la bonne taille, c'est alors Tiana qui choisira en premier, puis Fred, puis Jean, et tout le monde sera content.

5. Si Fred refuse aussi, il doit y avoir au moins une part qui, selon Fred et Tiana, n'est pas assez grosse. Jean doit la prendre, ce qui doit le satisfaire puisque c'est lui qui a fait le partage.

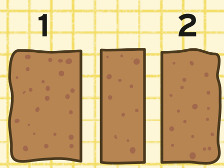
6. Les deux parts restantes sont recollées, Tiana recoupe le tout en deux parts et Fred en choisit une. (Nous sommes ramenés à la version à deux personnes de tout à l'heure.)

C'est une méthode compliquée mais elle garantit que personne ne se sente floué. On peut aussi l'étendre à plus de trois personnes, mais cela devient alors encore plus difficile !

PARTAGE EN TROIS



Pas satisfaite, car Tiana ne voit pas deux parts de bonne taille.



Fred décide que ce partage convient. Tiana choisit la première, puis Fred, puis Jean prend la part qui reste.

APPRENDRE : ÉNIGMES QUI ENFLAMMENT INTERNET

On pourrait croire qu'il y a peu de maths sur les réseaux sociaux, mais au contraire ! De nombreux problèmes y sont partagés et deviennent populaires. Ils se servent souvent d'icônes pour représenter les nombres et sont très amusants. À envoyer à famille et amis !

ÉMOJIQUATIONS

En maths, on emploie souvent des symboles à la place d'un nombre inconnu. Par exemple, si le nombre exact d'*onigiris* (des boules de riz) dans une boîte bento est inconnu, on pourrait le désigner au moyen d'une lettre, par exemple *O*, comme onigiri.

Mais on peut aussi utiliser un émoji ! On dit alors qu'il y a 🍙 onigiris, en les désignant par cette petite image d'une boule de riz.

Par exemple, si on disait, « J'ai deux fois plus d'onigiris que de crevettes », on pourrait l'écrire :

🍙 = 2 × 🦐

Le nombre d'onigiris est égal à deux fois le nombre de crevettes.

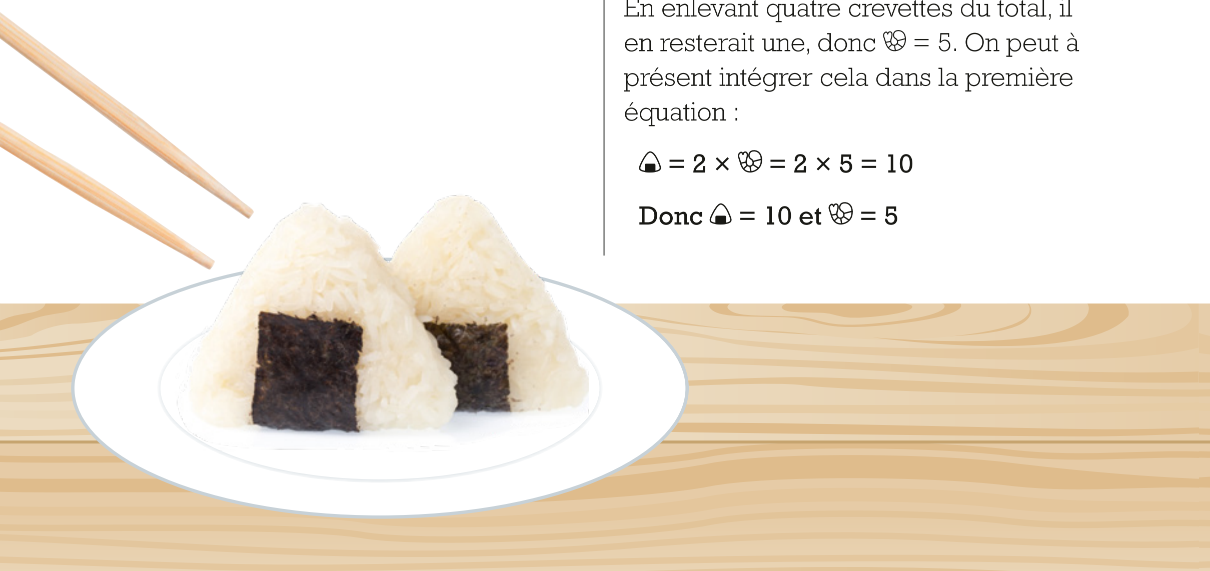
On ne sait toujours pas combien on en a, mais si on disait : « Si je mange quatre crevettes, il ne m'en restera qu'une », on écrirait :

🦐 – 4 = 1

En enlevant quatre crevettes du total, il en resterait une, donc 🦐 = 5. On peut à présent intégrer cela dans la première équation :

🍙 = 2 × 🦐 = 2 × 5 = 10

Donc 🍙 = 10 et 🦐 = 5



LETTRES EN MATHS

En mathématiques, on emploie des lettres de l'alphabet pour représenter les inconnues, surtout les lettres x, y et z (parce que peu de mots commencent par ces lettres). Certaines lettres sont réservées pour des valeurs spéciales, comme t pour le temps, v pour la vitesse. Les lettres e et i représentent des nombres spécifiques, comme la lettre grecque π (pi). (Voir page 10.)

En plus des alphabets latin (de A à Z) et grec, en majuscules et minuscules, les mathématiciens emploient parfois des lettres de l'alphabet hébreu, comme $\aleph$ (aleph) et utilisent des versions spéciales des caractères latins, comme les lettres à double barre, par exemple $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$, les majuscules cursives comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{G}$, et même les caractères gothiques comme $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. (Aucun article publié ne s'est encore servi d'émojis.)

SAUREZ-VOUS LES RÉSOUDRE ?

Pouvez-vous trouver ce que chaque symbole représente dans les problèmes suivants ? Un nombre à côté d'un symbole indique une multiplication. Tous les émojis représentent des nombres entiers positifs !

1.
🍎 + 🍎 + 🍎 = 30
🥑 + 🍎 + 🍎 = 25
🍌 + 🥑 + 🥑 = 17
2 🍌 + (🥑 × 2 🍎) = ?

2.
3 🥨 = 33
🥨 + 2 🍔 = 21
🍔 + 4 🥗 = 9
🍔 + (🥗 × 🥨) = ?

3.
2 🌭 = 24
🌭 × 🍪 = 132
🫐 + 🍪 = 18
2 🫐 - 🌭 = ?

4.
2 🥦 + 🥦 + 3 🥦 = 24
(🥦 × 🍅) + 🥦 = 44
2 🍋 × (2 🍅 + 1) = 336
2 🍋 + (🥦 × 🍅) = ?

5.
🍒 + (2 🥐 × 2 🍒) = 148
🌮 + (🍒 × 🍒) = 27
🌮 + 2 🌮 + 🥐 = 42
🥐 + (🍒 × 2 🌮) = ?

Astuce : celui-ci est plus dur, il faudra peut-être essayer quelques valeurs de 🍒 et trouver laquelle fonctionne !

EXPÉRIMENTER : TASSES ET ASSIETTES

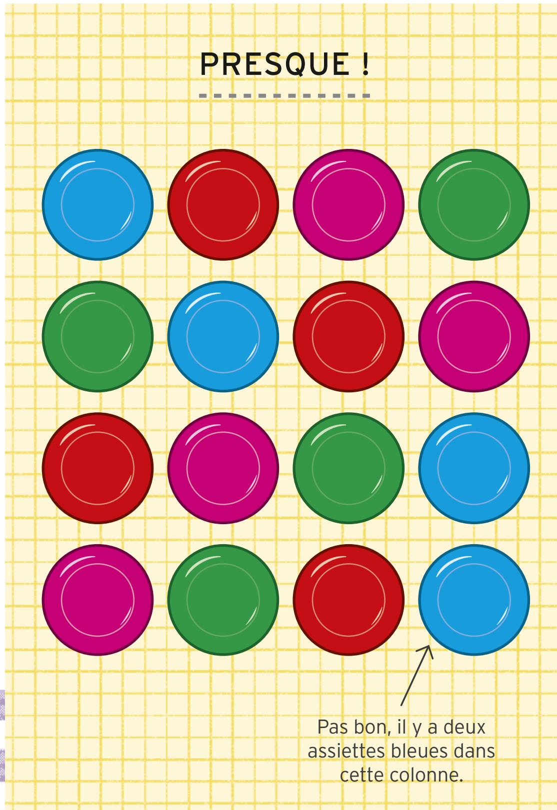
Le sudoku est un problème de logique avec des nombres disposés en lignes et colonnes. Il se fonde sur une structure mathématique appelée le carré latin, qu'on peut reproduire avec des tasses et des assiettes pour en obtenir une version concrète et tester nos talents logiques.

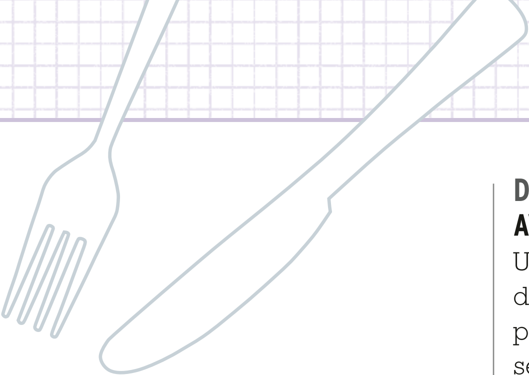
IL VOUS FAUDRA :

- 16 assiettes de quatre couleurs différentes. Si vous n'avez pas quatre couleurs, utilisez un feutre effaçable à sec pour les différencier, ou des cercles de papier coloré.
- 16 tasses de quatre différentes couleurs ou de différentes matières ; là aussi, vous pouvez utiliser des cercles de papier en différentes couleurs à la place.

DÉFI 1
CARRÉ DE 4 × 4

Avec seulement les assiettes, pouvez-vous obtenir un carré où chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement une assiette de chaque couleur ? Il y a 576 solutions !





DÉFI 2
DIAGONALES CASSÉES

Trouvez une disposition d'assiettes dans laquelle les lignes et les colonnes contiennent exactement une assiette de chaque couleur, de même que les deux diagonales.

Vous avez peut-être déjà trouvé la solution lors du défi 1, mais seulement 48 des 576 solutions disposent de cette propriété supplémentaire.

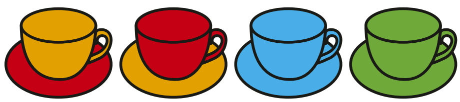
CARRÉ LATIN

Cette disposition, avec ou sans la contrainte de la diagonale, est appelée un carré latin. On peut dire aussi bien que toutes les lignes, colonnes et diagonales contiennent un élément de chaque couleur, ou qu'aucune ligne, colonne ou diagonale ne contient plus d'un élément par couleur.

Les structures en carré latin servent dans les expériences scientifiques, car elles assurent que chaque participant reçoit différentes combinaisons de traitements, ce qui rend l'expérience équitable !

DÉFI 3
AVEC LES TASSES EN PLUS

Une fois que vous avez trouvé une disposition d'assiettes, pouvez-vous placer les 16 tasses sur les assiettes, selon les mêmes contraintes (chaque ligne, colonne et diagonale contiennent une tasse de chaque) et aucune combinaison tasse/assiette n'apparaît plus d'une fois ?



CARRÉ GRÉCO-LATIN

La version double, avec deux propriétés à satisfaire à la fois, est un carré gréco-latin. Ce problème date au moins de 1725, année où il a été posé sous la forme d'un défi comprenant les 16 figures d'un jeu de cartes (avec les as). Il s'agissait de les disposer de manière à ce que chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale contiennent une carte de chaque couleur (trèfles, carreaux, cœurs, piques) et de chaque rang (as, roi, dame, valet).

Là, la deuxième contrainte (chaque combinaison n'apparaît qu'une fois) est facile à satisfaire, car les cartes ont déjà cette propriété. Ce serait peut-être plus facile en disposant d'abord assiettes et tasses par paire ?

IL EST PROUVÉ qu'on peut construire des carrés gréco-latins tels que celui-ci en n'importe quelle taille, sauf 2 × 2 et 6 × 6.

APPRENDRE : LOGIQUE DE CUISINE

Un type de problème célèbre met en jeu deux genres de personnes : les cuisiniers, qui mentent toujours, et les boulangers, qui disent toujours la vérité. Leurs toques se ressemblent, pourtant ! Pourrez-vous trouver qui est qui, armé de la seule logique ?

PETIT QUIZ : PROBLÈMES DE LOGIQUE

1. Vous rencontrez deux personnes (chacune cuisinier ou boulanger) appelées Jean et Thomas. Jean dit : « Thomas est cuisinier. » Thomas dit : « Ni lui ni moi ne sont cuisiniers. » Sont-ils :
a) Tous les deux cuisiniers (menteurs)
b) Jean est cuisinier, Thomas boulanger
c) Thomas est cuisinier, Jean est boulanger
d) Tous les deux boulangers (disent la vérité)

Analysez les quatre options. Lesquelles sont possibles et lesquelles n'ont pas de sens étant donné ce que disent Jean et Thomas ?

2. Vous rencontrez ensuite Sam et Ezra, qui peuvent être chacun cuisinier ou boulanger. Sam dit : « Nous sommes cuisiniers. » Sont-ils :
a) Tous les deux cuisiniers (menteurs)
b) Sam est cuisinier ; Ezra est boulanger
c) Ezra est cuisinier ; Sam est boulanger
d) Tous les deux cuisiniers (disent la vérité)

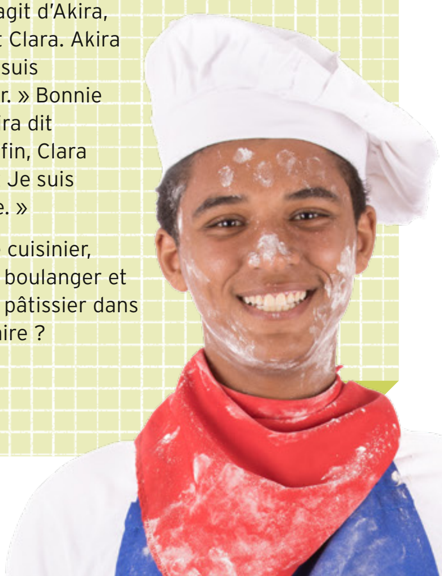
3. Vous rencontrez Yael et Nikita, chacun cuisinier ou boulanger. Yael dit : « L'un de nous seulement est cuisinier. » Nikita dit : « Seul un cuisinier dirait que Yael est cuisinière. » Sont-ils :
a) Tous les deux cuisiniers (menteurs)
b) Yael est cuisinière ; Nikita est boulanger
c) Nikita est cuisinier ; Yael est boulangère
d) Tous les deux boulangers (disent la vérité)

4. Plus tard, vous rencontrez Diane et Ali (chacun cuisinier ou boulanger). Diane dit : « Nous sommes soit tous les deux cuisiniers, soit tous les deux boulangers. » Ali ajoute : « Diane vous dirait que je suis cuisinier. » Sont-ils :
a) Tous les deux cuisiniers (menteurs)
b) Diane est cuisinière ; Ali est boulanger
c) Ali est cuisinier ; Diane est boulangère
d) Tous les deux boulangers (disent la vérité)

5. Dans cette énigme, le pâtissier peut soit mentir, soit dire la vérité.

Vous rencontrez trois personnes et vous savez qu'une est cuisinière, une boulangère, une pâtissière, mais pas qui est quoi. il s'agit d'Akira, Bonnie et Clara. Akira dit : « Je suis boulanger. » Bonnie dit : « Akira dit vrai. » Enfin, Clara admet : « Je suis pâtissière. »

Qui est le cuisinier, qui est le boulanger et qui est le pâtissier dans cette affaire ?



APPRENDRE : PROBLÈME DE PASTÈQUE

Voici une énigme sur laquelle vous pencher la prochaine fois que vous mangerez une pastèque, ou un autre fruit gorgé d'eau : combien d'eau contient-il ? Les pourcentages sont parfois trompeurs !

L'ÉNIGME DE LA PASTÈQUE

Il fait chaud et vous portez une énorme pastèque de 12 kg, que vous comptez partager avec vos amis. Vous l'accrochez à votre porte-bagages et c'est parti. Vous savez que la pastèque est composée à 99 % d'eau, mais elle en perd à mesure qu'elle sèche au soleil. Une fois chez vos amis, la pastèque ne contient plus que 98 % d'eau. Combien pèse-t-elle ?

Prenez le temps d'y réfléchir un peu avant de lire la suite.

PORTEUR D'EAU

Les pourcentages permettent de déterminer des proportions, mais quand le total change, le pourcentage est toujours une portion de 100 % et il peut se comporter bizarrement.

En envisageant ce problème de façon logique, vous pouvez vous attendre à ce que le poids de la pastèque diminue juste un peu, puisque le pourcentage passe de 99 % à 98 %. Mais il faudra calculer pour en être sûr !

Il faut d'abord savoir comment se compose la pastèque entre liquide et solide. Si elle est faite d'eau à 99 %, cela veut dire que 1 %, ou $\frac{1}{100}$ du fruit, est composé de matière solide.

Comme la pastèque pèse 12 kg ou 12 000 g, 1 % nous donne 12 000 g/100 = 120 g de chair et d'écorce. Cette masse ne changera pas quand l'eau s'évaporera, mais elle occupera un plus gros pourcentage du total.

Après évaporation, la pastèque est composée à 98 % d'eau. Cela veut dire qu'il reste 2 % de chair. Si 120 g font 2 % de son poids, cela veut dire que 1 % de la pastèque pèse 60 g et que la pastèque entière pèse donc 6 000 g, soit 6 kg. La pastèque a perdu la moitié de son poids !

LES POURCENTAGES sont utiles pour comprendre l'information, mais comme le montre cette énigme ils se comportent parfois bizarrement quand on oublie les nombres qu'ils représentent.

Par exemple, quand un journal raconte que le nombre de cas d'une certaine maladie a doublé, cela peut signifier que son incidence est passée de 0,25 % à 0,5 %, ce qui n'en fait pas une maladie répandue pour autant !

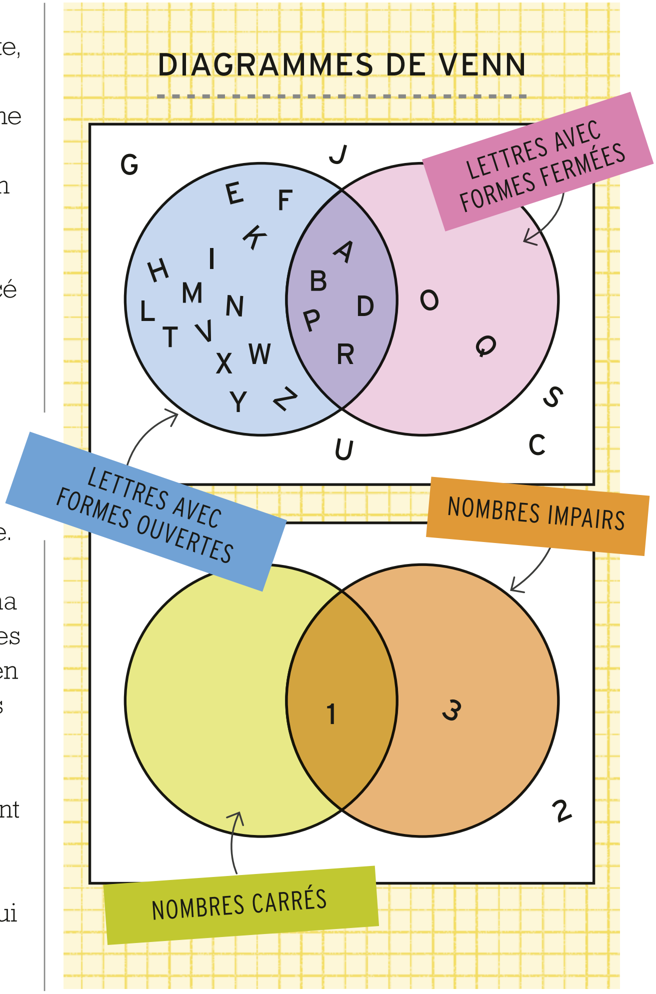
DÉCOUVRIR : PATATES DE VENN

En mathématiques, on aime rassembler les choses en catégories, en ensembles tels que les nombres pairs ou les polygones à tant de côtés. Les diagrammes de Venn sont un outil à notre disposition pour présenter la manière dont divers éléments se rassemblent.

DOUBLE PATATE

Dans le schéma sur votre droite, appelé schéma en patate ou plus techniquement diagramme de Venn, chaque cercle représente une propriété. Si un élément est doté de cette propriété, il est placé dans le cercle. S'il ne l'a pas, il est placé en dehors. Le rectangle blanc représente tout (même les éléments qui n'ont ni l'une ni l'autre propriété), si bien que tout ce qu'on voudra ajouter au schéma trouvera sa place quelque part dans le rectangle.

Essayez de remplir le schéma du dessous. Il doit contenir les nombres de 1 à 10, classés en nombres impairs et nombres carrés (qu'on obtient en multipliant un nombre par lui-même). Quelques-uns sont déjà placés : 1, qui est carré (1 = 1 × 1) et impair ; 2, qui n'est ni l'un ni l'autre ; et 3, qui est impair mais pas carré.



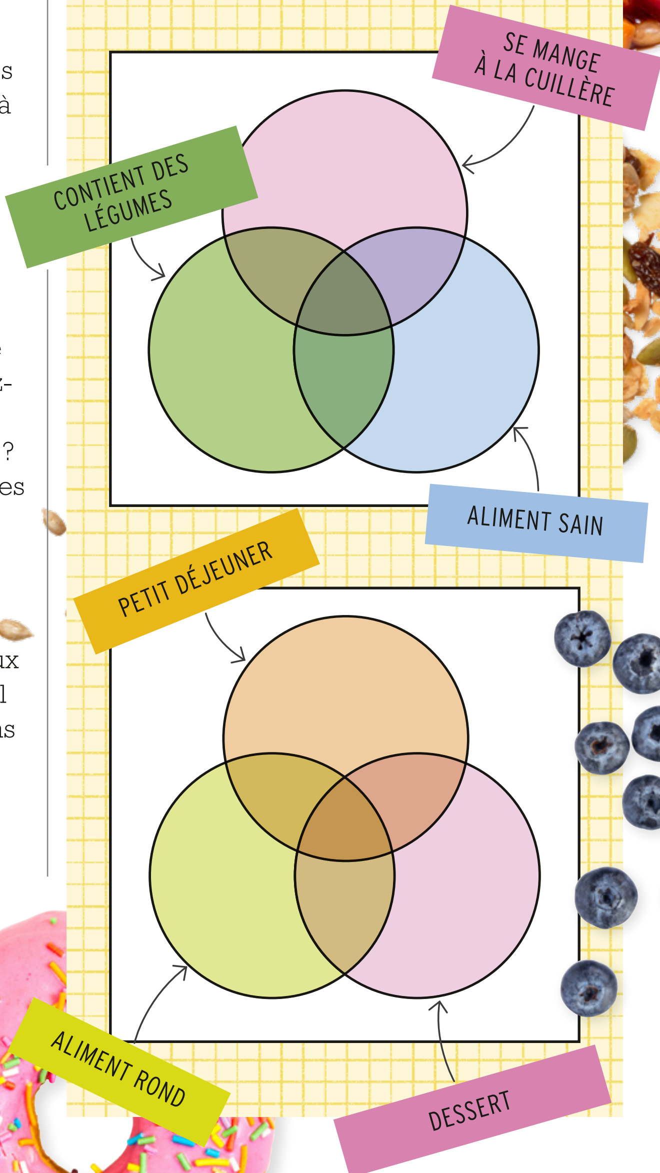
TRIPLE PATATE

On peut comparer plus de deux propriétés en créant un diagramme de Venn à trois cercles superposés. Chacun contient toujours les choses pourvues d'une de ces propriétés, et il y a des zones pour celles qui en ont deux à la fois, et même une zone pour celles qui ont les trois.

Afin d'organiser les plats du dîner en différentes catégories, vous pourriez vous servir d'un diagramme tel que celui ci-contre. Voyez-vous un plat qui appartient aux trois catégories à la fois ? Et aux autres intersections (les zones où deux cercles se superposent) ?

Quand on place quelque chose dans une zone où deux propriétés se superposent, il est important qu'elle n'ait pas la troisième propriété. Par exemple, les bâtonnets de carotte sont sains et contiennent des légumes, mais on ne les mange pas à la cuillère.

FAITES VOS PROPRES SCHÉMAS EN PATATE !



APPRENDRE : JEU DE SERVICE

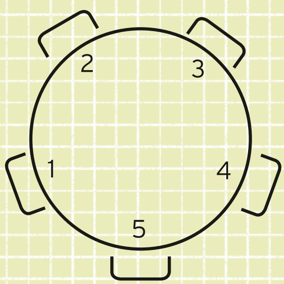
Vous et vos amis êtes assis à la table d'un restaurant et le serveur vous apporte vos plats un par un. Si tout le monde attend l'arrivée de tous les plats pour commencer, seul le dernier servi mangera chaud ! Pourrez-vous déterminer qui aura cette chance ?

COMMANDES DANS L'ORDRE

Voici les règles qui régissent le service :

- On commence par sauter la personne assise en 1, puis on amène les plats toutes les deux places, comme ça : 2, 4, 6, 8, etc.
- Une fois revenu à une personne déjà servie, on la saute et on passe à la suivante, puis on recommence à en sauter une sur deux : on amène le plat à la prochaine personne non encore servie, puis on saute la personne non encore servie suivante, etc.
- On continue jusqu'à ce que tout le monde soit servi.

Si vous êtes sur une table avec quatre autres personnes (donc cinq places au total), où faut-il s'asseoir pour être servi en dernier?



S'il y a N personnes autour de la table, pouvez-vous trouver la meilleure place pour être certain de manger chaud ?

APPROCHER LE PROBLÈME

Voici quelques astuces génériques pour ce genre de problèmes :

- Pour trouver ce qu'il se passe pour différentes valeurs de N, réfléchissez à chaque cas. Que se passera-t-il quand vous reviendrez à la première personne ?
- Commencez avec de petites valeurs pour voir ce qu'il se passe en calculant tout à la main. Cela ne vous donnera pas la réponse, mais certainement de bonnes pistes.
- Un schéma est toujours utile. Vous pouvez dessiner les nombres en cercle et rayer ceux déjà servis, en notant l'ordre.
- Après avoir essayé quelques valeurs, essayer d'en dresser la liste des réponses pour discerner la logique de la suite. Si vous l'avez trouvée, prédisez la solution de la valeur suivante et vérifiez.
- Les réponses formeront peut-être une séquence, à moins que la séquence ne se trouve dans les valeurs de N, qui donnent la bonne réponse.
- Pouvez-vous décrire cette séquence et donner la règle générale qui permet de trouver la meilleure place pour N donné ? Pas besoin d'écrire la formule, décrivez avec vos mots.

Parlez-en à vos amis et en famille, peut-être lors d'un déjeuner autour d'une table ronde. Regardez les réponses à la fin de ce livre pour y trouver quelques suggestions.

APPRENDRE : TOQUES DE CHEF

Dans ces énigmes, les gens portent des toques de chef cuisinier de différentes couleurs, mais ils ne peuvent pas voir la couleur de la leur. Essayez de les résoudre par un raisonnement mathématique.

COUP DU CHAPEAU

1. Trois chefs sont assis de manière à tous se voir. On les coiffe de toques de couleur.

On leur dit qu'il y a deux couleurs de toque, rouge et bleu, et qu'une de ces toques est d'une couleur, les deux autres de l'autre couleur.

Lequel des trois chefs peut donner en toute confiance la couleur de sa toque ?

Si on ajoute que les deux toques de la même couleur sont bleues, l'autre rouge, qui peut répondre correctement ?

2. Trois chefs sont assis de manière à tous se voir. On les coiffe de toques de couleur.

On leur dit que les toques ont été prises dans un paquet de cinq toques, qui comptait trois toques rouges et deux toques bleues.

On leur demande chacun leur tour la couleur de leur toque. Le premier ne sait pas, le deuxième ne sait pas non plus. Est-ce que le troisième peut savoir la couleur de sa toque ?

3. Quatre chefs sont alignés de manière à voir tous ceux qui sont devant et aucun derrière. On les coiffe de toques de couleur.

On leur dit qu'il y a trois couleurs de toque, rouge, vert et bleu, qu'il n'y a qu'une toque pour deux d'entre elles, et que la quatrième toque est de la même couleur qu'une autre toque.

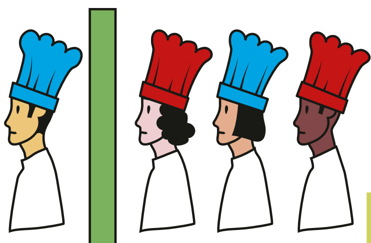
On demande aux chefs, en commençant par celui du fond, la couleur de leur toque. Celui du fond répond « verte », et il a raison. Après lui, tous les chefs répondent correctement ! De quelles couleurs étaient leurs toques et dans quel ordre ?

4. Quatre chefs sont alignés comme sur le schéma, chacun pouvant voir les chefs devant, aucun les chefs derrière, et personne ne pouvant voir au travers du mur. On les coiffe de toques de couleur, dans la disposition suivante.

On leur indique qu'il y a deux couleurs de toque, bleu et rouge, et qu'il y a deux toques de chaque couleur.

Pendant une minute d'attente tendue, tous réfléchissent. Soudain, l'un d'eux s'écrie : « Je connais la couleur de ma toque ! »

Lequel est-ce, et comment a-t-il su ?



DÉCOUVRIR : DÎNER PARFAIT

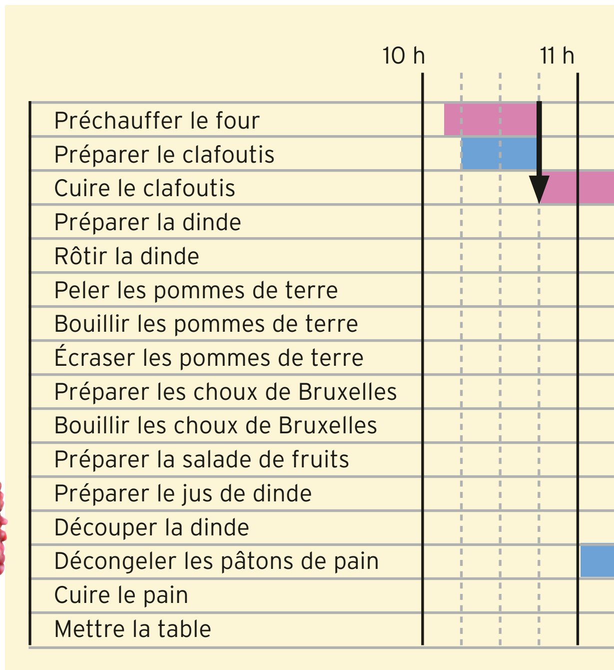
On connaît de nombreuses façons de présenter les données en graphiques (voir les pages 98–99), mais ce n'est pas la seule utilité des graphiques. Un diagramme de Gantt sert à l'organisation des tâches, et vous pouvez vous en servir pour exécuter un dîner parfait en famille.

TOUT EN DIAGRAMME

Voici un exemple de diagramme de Gantt pour la préparation d'un repas. Le temps défile en haut, et les tâches nécessaires sont listées sur le côté. C'est une excellente façon d'organiser un travail compliqué, car il permet de savoir quand commencer la première activité afin de tout finir à temps.

Certaines de ces tâches dépendent des précédentes, ce qui signifie qu'on ne peut pas les commencer en avance. Par exemple, dans cette grille, la préparation de la dinde doit être finie avant de mettre au four. On l'indique en traçant une flèche depuis la fin de la première activité jusqu'au début de celle qui en dépend.

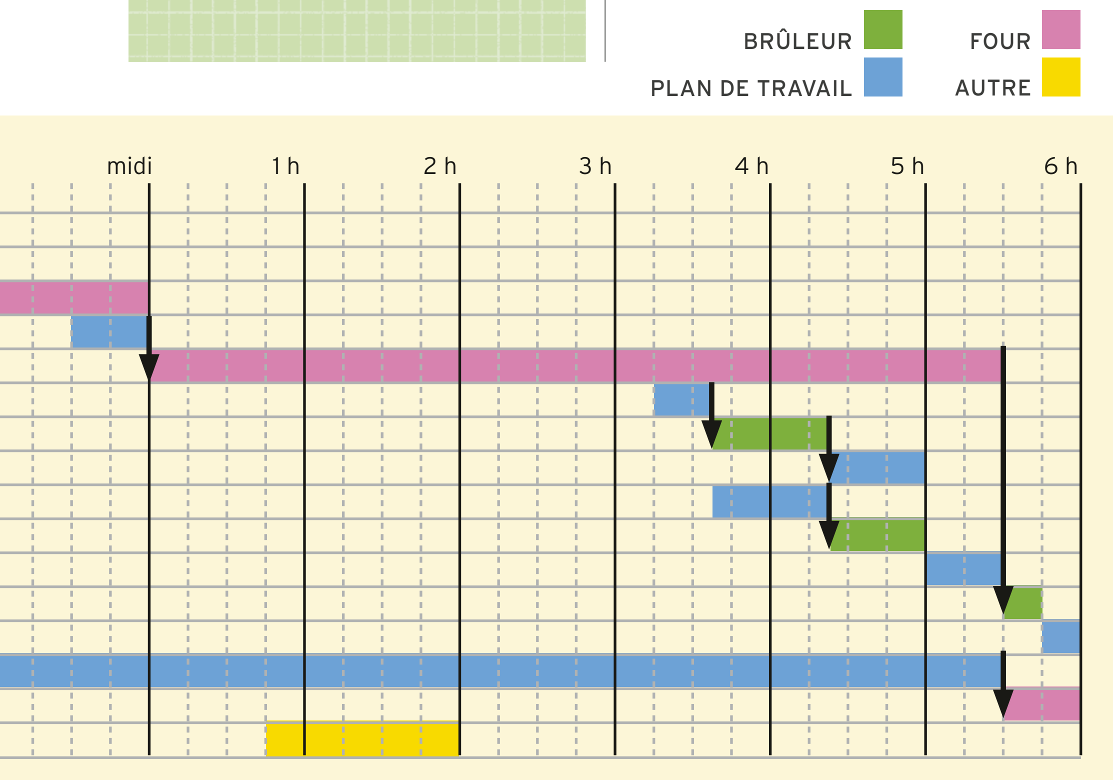
Certaines tâches peuvent être déplacées, par exemple peler, faire bouillir et écraser les pommes de terre plus tôt (en supposant qu'on peut les maintenir au chaud), ou mettre la table plus tard. Mais les tâches dépendantes exigent qu'on ait fini la précédente.



CHEMINS CRITIQUES

La durée totale du projet est souvent fonction des tâches dépendantes qu'il implique. Par exemple, si trois tâches d'une heure sont nécessaires, chacune ne pouvant être démarrée avant la fin de la précédente, tout le projet prendra au moins trois heures. Cette succession de tâches limitantes est appelée un chemin critique. Ceux qui travaillent avec des diagrammes de Gantt s'en servent pour déterminer la durée d'un projet et les moyens de l'accélérer.

On peut aussi employer des couleurs pour indiquer les tâches qui occuperont un lieu ou une ressource particulière, ainsi, si vous aviez prévu de faire bouillir à un moment plus de casseroles que vous n'avez de brûleur, vous le détecterez et pourrez modifier le planning pour éviter l'embouteillage. Cela vous permet de voir aussi les trous qu'il contient. Le four pourrait être utilisé pour cuire un dessert de plus s'il n'est pas utilisé pendant une demi-heure.



APPRENDRE : CUPCAKE SURPRISE

Un ami vous a apporté des cupcakes, sans donner trop de détails quant à leur composition. En faisant preuve d'un peu de logique, saurez-vous la retrouver ?

LOGIQUE À LA NOIX

Il y a quatre cupcakes : un au chocolat, un à la vanille et deux encore dans leur boîte. Impossible de connaître leur parfum sans ouvrir la boîte, cependant il est indiqué que l'un d'eux contient des noix et pas l'autre. Vous ne savez pas si c'est le cas des deux cupcakes hors de la boîte, mais vous pouvez les couper pour voir s'ils contiennent des noix.

Votre mère, qui adore les cupcakes au chocolat mais qui est un peu allergique aux fruits à coque, entre dans la cuisine, voit les cupcakes et demande : « Est-ce que tous les cupcakes au chocolat contiennent des noix ? »

Lequel des quatre cupcakes devez-vous couper pour répondre ?

Prenez quelques minutes et demandez leur avis à vos amis avant de lire la suite.

TEST DE PSYCHOLOGIE

C'est une reformulation d'un vieux problème appelé le test de Wason, qui se servait pour cela d'un jeu de cartes où étaient inscrits des lettres et des nombres. Ce qui est intéressant ici, c'est que beaucoup se trompent dans leur réponse.

La plupart des gens comprennent qu'il faut couper le cupcake au chocolat pour voir s'il contient des noix. Beaucoup veulent aussi ouvrir la boîte « sans noix », qui pourrait contenir un cupcake au chocolat. Jusqu'ici tout va bien.

Certains veulent aussi vérifier le contenu de la boîte « avec noix », pour voir si le cupcake est au chocolat. Mais c'est inutile en réalité.

Elle pourrait contenir un cupcake au chocolat avec noix, que votre mère ne pourrait pas manger. Ou un cupcake à la vanille avec des noix. Mais cela ne nous aide pas à répondre à la question posée.

Ce que contient cette boîte ne change rien, car elle contient des noix. Or, pour que l'affirmation « tous les cupcakes au chocolat contiennent des noix » soit fausse, tout ce qu'il faut est de trouver un cupcake au chocolat sans noix.

POURQUOI EST-CE SI COMPLIQUÉ ?

Ce problème contient une affirmation à sens unique. La phrase « tous les cupcakes au chocolat contiennent des noix » pourrait être plus explicite sur le plan logique en la tournant ainsi : « Si un cupcake est au chocolat, alors il contient des noix. »

C'est avec ce genre de phrases en si/alors que les mathématiciens rédigent leurs règles. Par exemple, vous pouvez dire « si un nombre est pair, alors il est divisible par deux. » D'ailleurs, cette phrase marche dans les deux sens. Il est tout aussi vrai de dire : « Si un nombre est divisible par deux, alors il est pair. »

Ce qui trouble beaucoup de monde dans ce problème, c'est qu'ils considèrent l'affirmation comme étant à double sens. Ils mélangent : « Si un cupcake est au chocolat, alors il contient des noix. » et « Si un cupcake contient des noix, alors il est au chocolat. »

Or, ces phrases ne sont pas équivalentes. Si un cupcake contient des noix, votre mère se fiche de son parfum, puisqu'elle ne pourra pas le manger dans tous les cas !
Lesquelles de ces phrases en si/alors sont vraies ?
Lesquelles marchent dans les deux sens ?

1. Si une forme a trois côtés droits, c'est un triangle.
2. Si une forme a quatre côtés droits, c'est un carré.
3. Si X et Y sont impairs, X + Y est impair.
4. Si X est plus grand que 4, alors X + 2 est plus grand que quatre.
5. Si une pièce vaut plus de 10 centimes, c'est une pièce de 20 centimes.
6. Si un gâteau contient des fruits à coque, une personne allergique aux fruits à coque peut le manger sans risque.
7. Si un nombre supérieur à deux est premier, alors il est impair.

DÉCOUVRIR : PIQUE-NIQUE ET SANDWICHS

En mathématiques, certaines idées trouvent leur utilité dans de nombreux contextes. La page 20 a introduit le principe des tiroirs pour résoudre le problème des bonbons. Mais qu'est-ce exactement que ce principe, et comment s'en servir pour confectionner un pique-nique?

COMBIEN DE SANDWICHS ?

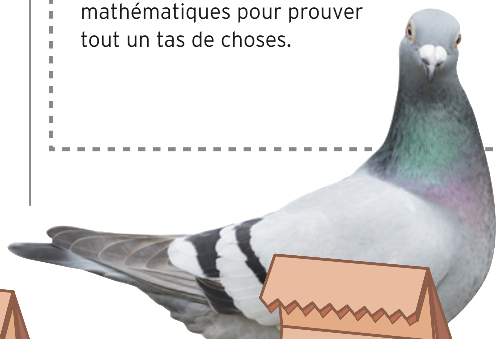
Le principe des tiroirs se fonde sur une idée simple : s'il faut faire 10 paniers pique-nique, et que vous avez 11 sandwichs, il y a aura au moins un panier qui contiendra deux sandwichs.

Peut-être avez-vous composé des paniers déséquilibrés dès le départ, plaçant par exemple deux sandwichs dans cinq paniers, puis un sandwich dans le sixième et aucun dans les autres. Mais, de toute manière, quel que soit l'arrangement choisi, il est impossible de n'avoir qu'un sandwich dans chaque panier si vous avez empaqueté tous les sandwichs.

• S'il y a N sacs, combien de sandwichs faut-il pour garantir qu'il y aura au moins un panier à deux sandwichs ?

PRINCIPE DES TIROIRS

On l'appelle le principe des tiroirs, car il est tiré de l'exemple dans lequel on range des chaussettes dans des tiroirs ou des casiers. Il est très utile en mathématiques pour prouver tout un tas de choses.



CASIERS

OÙ SERT-IL ?

Voici quelques situations où le principe des tiroirs est utile.

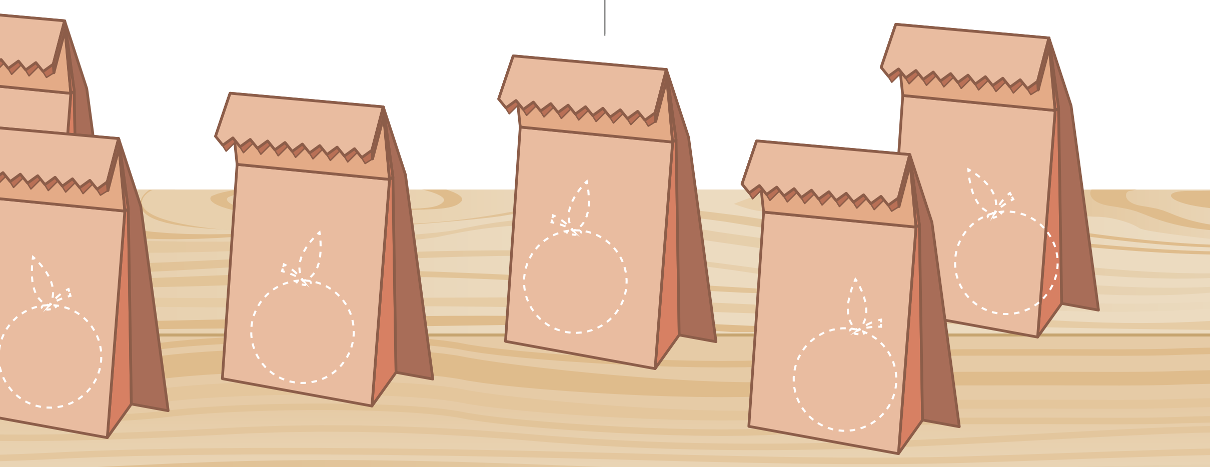
• Si on réunit un groupe de 32 personnes qui ont toutes leur anniversaire en mai, deux d'entre elles au moins auront la même date d'anniversaire.

• En général, quel est le nombre de personnes qu'il faut rassembler pour être certain que deux d'entre elles auront la même date d'anniversaire ?

• Dans toute phrase qui compte au moins 27 mots, au moins deux mots commenceront par la même lettre, ce qui est valable pour cette phrase.

• Dans toute grande salle avec plusieurs centaines de gens, il doit y avoir au moins deux personnes qui auront les mêmes initiales. (Essayez de trouver exactement combien de personnes il faut pour que cela fonctionne – combien y a-t-il de possibilités d'initiales ?)

• Il doit y avoir au moins deux personnes (non chauves) à Adélaïde qui ont le même nombre de cheveux sur la tête ! Le nombre moyen de cheveux sur une tête humaine est d'environ 100 000 – et dans toute ville comprenant plus de non chauves que ça, il est impossible que chacun ait un nombre de cheveux différent sur la tête.



DÉCOUVRIR : *CHEZ HILBERT* LE RESTAURANT INFINI

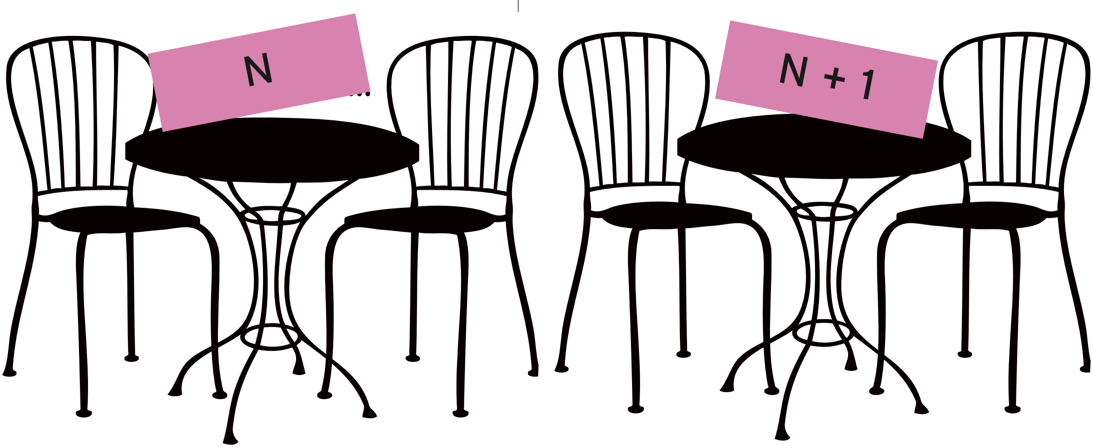
L'infinité, c'est compliqué. Les nombres finis se comportent normalement, pas l'infini. Un mathématicien appelé David Hilbert a inventé une bonne façon de concevoir l'infinité, qui consistait à imaginer un hôtel infini. Nous l'avons transformé en restaurant.

CHEZ HILBERT

Chez Hilbert est le nouveau restaurant à la mode. Il dispose d'une infinité de tables, numérotées 1, 2, 3, etc. La salle est si vaste, dans toutes les directions, que cette suite ne s'arrête jamais.

Comme l'infini peut être contre-intuitif, le restaurant infini a des propriétés étranges. Par exemple, quand toutes les tables sont prises et qu'un nouveau groupe arrive, un restaurant normal leur refusera l'entrée. Mais dans le restaurant infini, il suffira d'envoyer les serveurs demander poliment aux clients qui occupent les tables de se déplacer. « Si vous êtes à la table N, merci de passer à la N+1. »

Les gens de la table 1 iront à la table 2, les gens de la table 2 à la table 3, etc. Comme le restaurant est infini, il y a des tables disponibles pour tout le monde. Et une fois que tout le monde s'est déplacé (ce qui va vite puisque tout le monde bouge en même temps), la table 1 devient libre pour les nouveaux arrivants. Et si sept nouveaux groupes



arrivent, l'équipe demandera simplement à tout le monde de se déplacer à la table N+7, selon le même procédé, qui fonctionnera de même.

LES MATHÉMATICIENS ne considèrent pas l'infini comme un nombre, car il ne se comporte pas comme un nombre. Quand on ajoute un (ou toute autre valeur) à un nombre fini, le résultat est un autre nombre.
Or, si on commence avec une infinité de choses et qu'on en rajoute, on a toujours une infinité de choses : le résultat n'a pas changé.

Tout nombre fini de clients pourra trouver une table dans le restaurant déjà plein. On pourrait croire que les choses se compliqueraient si un bus infini, contenant une infinité de groupes de gens, se garait devant. Mais pas du tout ! Le gérant enverra simplement le message suivant : « Si vous occupez la table N, déplacez-vous à la table 2N. »

Une fois que tout le monde s'est déplacé, les tables de numéro pair seront toutes occupées, mais les tables de numéro impair seront toutes libres.

Le bus infini pourra débarquer ses clients infinis qui viendront aux tables 1, 3, 5, etc. : un nombre infini de tables à présent disponibles. Tout le monde peut dîner dans ce restaurant !

IMAGINER L'INFINI

L'idée du restaurant infini nous révèle certaines des bizarreries de l'infinité. Elle permet de répondre à des questions telles que : « Y a-t-il plus de nombres que de nombres pairs ? » Il paraît évident que la réponse devrait être oui, puisque seule la moitié des nombres sont pairs. Mais comme nous l'avons vu au restaurant, en multipliant tous les nombres par deux, on peut attribuer un nombre pair à tous les nombres, ce qui indique qu'il y a autant de nombres pairs que de nombres ! C'est parce que les deux valeurs sont infinies.

EXPÉRIMENTER : CONSTRUIRE LA PLUS HAUTE TOUR

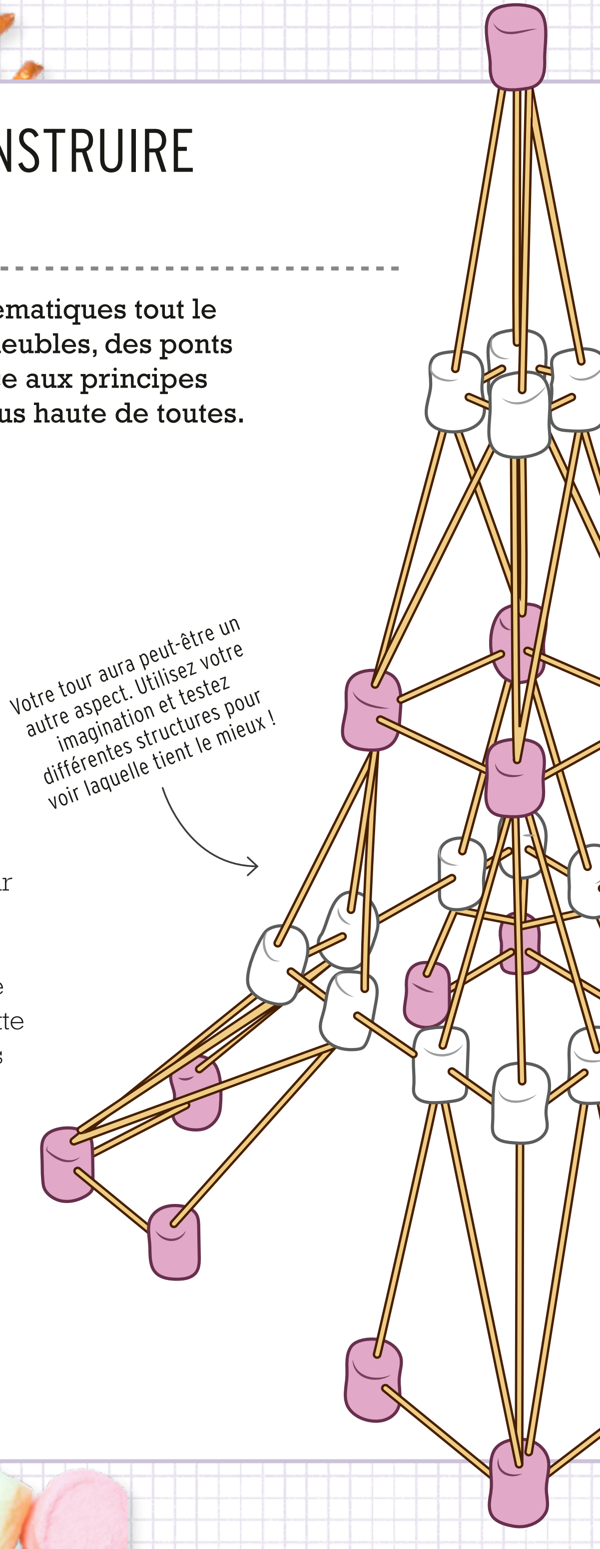
Les ingénieurs se servent des mathématiques tout le temps pour construire de hauts immeubles, des ponts et des routes. À vous de jouer ! Grâce aux principes mathématiques, votre tour sera la plus haute de toutes.

IL VOUS FAUDRA :

- Des chamallows
- Des bâtonnets comestibles longs et fins, type bretzels
- Un chronomètre
- Une règle ou un mètre
- Une assiette par personne pour la base
- Des amis

CE QU'IL FAUT FAIRE :

Le défi est de construire la plus haute tour possible en 10 minutes. Enfoncez les bâtonnets dans les chamallows pour les assembler. La tour doit tenir debout toute seule, la hauteur sera mesurée de l'assiette au plus haut point encore debout une fois les 10 minutes écoulées.



ASTUCES

Lisez cela avant de commencer. Ce sont les meilleures astuces des ingénieurs et les principes mathématiques dont ils se servent.

PARTEZ D'UNE BASE LARGE

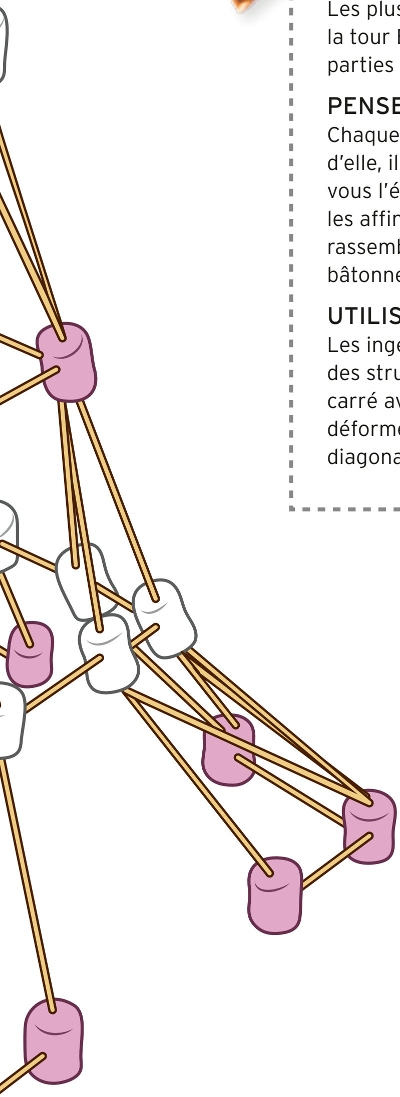
Les plus hautes structures, comme celles des piliers à haute tension ou la tour Eiffel, sont construites sur une base très large qui soutient des parties hautes plus fines.

PENSEZ AU POIDS

Chaque partie de la tour doit soutenir toutes les pièces situées au-dessus d'elle, il faudra donc que la base soit le plus solide possible. À mesure que vous l'élèverez, réfléchissez à des moyens d'alléger les parties hautes, en les affinant par exemple. Vous pouvez utiliser des demi-chamallows pour rassembler les coins du sommet, ce qui sera plus léger, ou casser les bâtonnets pour réduire leur longueur.

UTILISEZ DES TRIANGLES

Les ingénieurs et les mathématiciens adorent les triangles, car ce sont des structures rigides, qui se déforment difficilement. Essayez de faire un carré avec des bâtonnets et des chamallows, vous verrez qu'il se déformera. Ajoutez un cinquième bâtonnet en travers le long de la diagonale pour former deux triangles et la structure sera plus rigide.



TRIANGLES

Les triangles sont utiles en ingénierie dès lors qu'on cherche à obtenir des structures rigides et légères : tours, ponts et stades en sont pleins. Les matériaux employés pour les construire, comme ceux dont vous vous servez ici, résistent bien à la compression. Ici, elle rapproche les extrémités des bâtonnets les unes vers les autres.

La forme du triangle répartit les forces (dont le poids des parties supérieures) le long des côtés.

RÉPONSES

RÉPONSES

CHAPITRE 1 NOMBRES

P. 15 COMBIEN DE BURGERS ?

- McBurger's : 2 types de steak × 3 options de fromage (dont « pas de fromage ») × 2^3 options de sauce (avec ou sans pour chacune) × 2^3 options de supplément = 384 burgers
- Burger World : 3 types de steak × 4 buns × 2^4 options de supplément = 192 burgers
- The Meat Factory : 3 types de steak × 3 sauces × 3^3 options de suppléments (sans, avec, double portion) = 243 burgers
- Linda's Burger Palace : 4 types de steak × 2 bun × 4 options de supplément (dont « sans ») × 16 options de sauce (1 option à 0 sauce, 5 options à 1 sauce, 10 options à 2 sauces) = 512 burgers

Choisir deux options (oui ou non) parmi huit ingrédients font 2^8 = 256 repas seulement, en supposant qu'on ne peut avoir qu'un exemplaire de chaque ingrédient (sinon, le nombre de repas possible est infini !). On a découvert que le restaurant considérait en fait le nombre de façons d'organiser huit éléments dans un ordre déterminé. Cela suppose que tous les repas consistent en un exemplaire de chaque ingrédient, et que le repas est différent selon l'ordre dans lequel vous les mangez. Par ailleurs, ce calcul était lui-même faux. Il y a 40 320 façons d'arranger huit éléments (voir la page 16 sur les factorielles).

En supposant qu'un petit déjeuner puisse se composer de chaque élément du buffet, un choix entre 30 éléments différents donne 2^{30} = 1 073 741 824 combinaisons possibles.

P. 16 FACTORIELLES !

La combinaison manquante est cuillère, fourchette, couteau.

Si les objets sont A, B, C et D, les 24 manières de les arranger sont :
ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB, BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA, CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA, DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

P. 18 NOMBRES CACHÉS DANS L'ASSIETTE

Les cinq nombres suivants dans cette suite sont 8, 13, 21, 34, 55.

P. 20 BONBONS ASSORTIS

1. Il faut prendre trois des quatre bonbons. Si on n'en prend que deux, ce pourrait être les mêmes.
2. Il faut sortir au moins six bonbons du sachet pour être sûr d'avoir un cola. Les cinq premiers pourraient tous être de la guimauve !
3. Si on sort trois bonbons, ils peuvent tous être de parfum différent, mais le quatrième sera forcément du même parfum qu'un autre.
La réponse est quatre.
4. Si on veut être absolument sûr, il faut sortir 14 bonbons, car les 12 premiers pourraient tous être à la mangue et à la prune !
5. Il faut sortir les huit bonbons !
6. Si on ne sait pas combien il y en a de chaque parfum, il se pourrait qu'un seul soit au raisin ! Il faut donc sortir les dix pour être sûr.

P. 21 GRAINS DE RIZ SUR UN ÉCHIQUIER

1. 64 cases
2. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
3. 2^{N-1} grains sur la N-ième case
4. On peut loger environ 300 grains de riz à plat sur une case d'échiquier de tournoi standard, mais cela peut varier selon le type de grains !
5. Les 256 grains de la neuvième case devraient donc tous y loger, mais les 512 grains de la dixième case déborderont. Cela arrangerait les choses si on pouvait empiler les grains !
6. Sur la 64e case, il y aura $2^{N-1} = 2^{63}$ grains de riz. C'est 9 223 372 036 854 775 808 grains en tout.
7. Un grain de riz pèse environ 0,03 g.
8. Cela nous donne un poids total de 276 701 161 105 643 000 g, soit presque trois cent mille milliards de tonnes.
9. En divisant la réponse précédente par 700 millions, on trouve environ 430 ans.

P. 22 AUGMENTER LES DOSES

1. C'est une recette pour 12 muffins et il vous en faut 36, 36 ÷ 12 = 3, ce qui signifie qu'il vous faut tripler les quantités de chaque ingrédient.
600 g de farine
3 cuillères de levure
1½ cuillère de sel
6 cuillères de sucre
3 œufs, légèrement battus
600 ml de lait
75 g de beurre fondu

2. Comme 6 ÷ 8 = ¾, il faut tout multiplier par ¾ pour obtenir les bonnes proportions.
1½ cuillère de beurre
340 g de blanc de poulet détaillé
170 g d'andouille
170 g de crevettes crues
3 oignons jaunes émincés
3 gousses d'ail pressées
1½ poivron émincé
75 g de riz long grain
226 g de tomates en rondelles
1½ cuillère de sauce créole
3 cuillères de sauce piquante
300 ml de bouillon de poule

3. L'ingrédient central est le sucre : ⅙ de 360 g ne fait que 60 g, ce qui fait que vous ne pourrez faire que trois fois la recette, soit 30 portions :
3 verres de farine
6 cuillères de sucre
6 cuillères de levure
3 pincées de sel
600 ml de lait
6 cuillères d'huile végétale
3 œufs

P. 23 MILKSHAKE ET VERRES MESUREURS

1. Remplissez le verre de 15 cl et versez le contenu dans le verre de 9 cl jusqu'au bord. Il reste à présent 6 cl dans le verre de 15 cl. Buvez les 9 cl de milkshake (et lavez bien le verre ensuite !), puis versez les 6 cl du verre de 15 cl au verre de 9 cl. Il reste donc 3 cl à remplir.
Remplissez à ras le verre de 15 cl puis reversez-le dans le verre de 9 cl jusqu'au bord.
Il reste à présent 12 cl dans le verre de 15 cl, votre ami sera ravi !

2. Cette fois, vous ne pouvez plus boire de milkshake, mais vous disposez du verre de 24 cl pour le contenir. Vous pouvez employer la même méthode que dans la première énigme : remplissez le verre de 15 cl à partir du verre de 24 cl, puis reversez dans le verre de 9 cl. Il reste 6 cl dans le verre de 15 cl. Videz le verre de 9 cl dans le verre de 24 cl (qui contiendra donc 18 cl), puis videz le verre de 15 cl dans le verre de 9 cl (qui contiendra donc 6 cl, il restera 3 cl à remplir). Remplissez le verre de 15 cl à partir de celui de 24 cl, puis versez 3 cl dans le verre de 9 cl (le verre de 15 cl contient 12 cl à présent). Enfin, videz le verre de 9 cl dans le verre de 24 cl, dans lequel il y a déjà 3 cl, pour obtenir un deuxième verre de 12 cl. Il existe peut-être une autre méthode… Si vous le sentez, ça doit marcher !

AUTRES ÉNIGMES :
a) Remplissez le verre de 15 cl, puis videz-le dans le verre de 24 cl. Remplissez de nouveau le verre de 15 cl, puis reversez-le encore dans celui de 24 cl. Buvez le verre de 24 cl et lavez-le, puis versez les 6 cl du verre de 15 cl dans le verre de 24 cl. Remplissez le verre de 15 cl, puis videz-le dans le verre de 24 cl une troisième fois ; cela vous fera un verre de 21 cl. Remplissez le verre de 15 cl une dernière fois, puis videz-le dans le verre de 24 cl pou obtenir 12 cl dans le verre de 15 cl, puisque (15 × 4) – (2 × 24) = 12.
b) Remplissez le verre de 12 cl à partir du verre de 21 cl, puis videz-le dans le verre de 9 cl. Reversez les 9 cl dans le verre de 21 cl (qui contiendra alors 18 cl) et videz les 3 cl du verre de 12 cl dans le verre de 9 cl. Remplissez le verre de 12 cl depuis le verre de 21 cl. Il vous reste 6 cl dedans. Remplissez le verre de 9 cl depuis celui de 12 cl. Vous aurez deux verres remplis à 6 cl et un verre à 9 cl.

c) Comme (5 × 18) – (2 × 33) = 24, cette énigme peut se résoudre en remplissant le verre de 18 cl cinq fois, chaque fois en le vidant dans celui de 33 cl et en le buvant (deux fois) une fois plein. Cela laissera 24 cl dans le verre de 33 cl.
d) Comme (2 × 27) – (3 × 12) = 54 – 36 = 18, cette énigme peut se résoudre en remplissant le verre de 27 cl puis en le vidant dans celui de 12 cl qu'on boit, et en répétant l'opération jusqu'à boire trois fois le verre de 12 cl et remplir deux fois le verre de 27 cl. À ce moment, il restera 18 cl dans le verre de 27 cl.
e) Comme (6 × 36) – (6 × 33) = 18, cette énigme peut se résoudre en remplissant le verre de 36 cl, qu'on vide dans le verre de 33 cl avant de le boire et de le laver, et ce six fois de suite. Cette méthode fonctionne, mais il faudra boire beaucoup de milkshake. Demandez à vos amis de vous aider !

Dès lors que le volume des verres a un facteur commun, vous ne pourrez obtenir que des doses multiples de ce même facteur. Par exemple, si les deux sont divisibles par deux, vous n'obtiendrez que des volumes multiples de deux.

P. 24 DÎNER AU RESTAURANT ET ADDITION SÉPARÉE

1 cheeseburger : 10 € 95
1 salade : 1 € 90
1 coleslaw : 1 € 60 (divisez le total par deux)
1 coca light : 3 € 40 (divisez le total par deux)
Total : 17 € 85

P. 27 NOURRITURE EN QUANTITÉ

476 = 4,76 × 10^2
362 880 = 3,63 × 10^5
10 000 = 1 × 10^4
43 252 003 274 489 856 000 = 43,3 × 10^{19}
2 048 = 2,05 × 10^3 (il faut arrondir la deuxième décimale)
25 712 870 personnes × 2 kg × 365 jours
= 18 770 395 100 kg de nourriture par an
= 18,8 × 10^{10}

P. 28 ÉNIGMES DE GOURMETS

1. PARTAGE DE FRAISES

Il doit y avoir 27 fraises. Pour deux personnes, il en reste une, donc le total est impair. Pour cinq personnes, il en reste deux, donc le total est un multiple de cinq auquel on ajoute deux, et comme il est impair, c'est forcément 7, 17, 27, etc.
La troisième condition nous indique que le total est inférieur à 32 (quatre fraises par personne), mais assez pour obtenir trois fraises par personne (3 × 8 = 24), c'est donc 27.

2. PAIN GRILLÉ

Neuf minutes. On peut griller deux tranches de pain à la fois, ce qui prend trois minutes par côté, et encore six minutes pour griller le troisième morceau (12 minutes en tout). Mais on peut être plus rapide. Grillez deux pains d'un côté (trois minutes), puis remplacez la première tranche par une troisième non grillée et retournez la deuxième. Vous serez à six minutes. Il restera deux côtés à griller : un sur la première tranche, un sur la troisième, pour un total de neuf minutes.

3. CASSER UNE BARRE DE CHOCOLAT

Dix-sept manipulations. Peu importe l'ordre, chaque manipulation augmente d'un le nombre de morceaux que vous avez. Si vous voulez 18 morceaux, il faudra briser la plaquette 17 fois.

4. EMBALLAGE DE COURSES

Il y a 10 façons de s'y prendre. Combien en avez-vous trouvées ?
[750, 500], [650, 400, 200], [550, 450, 100, 100, 50]
[750, 500], [650, 550, 50], [450, 400, 200, 100, 100]
[750, 500], [550, 400, 200, 100], [650, 450, 100, 50]
[750, 500], [550, 450, 200, 50], [650, 400, 100, 100]
[550, 500, 200], [750, 400, 100], [650, 450, 100, 50]
[550, 500, 200], [750, 450, 50], [650, 400, 100, 100]
[650, 400, 200], [750, 450, 50], [550, 500, 100, 100]
[650, 500, 100], [750, 400, 100], [550, 450, 200, 50]
[650, 500, 100], [750, 450, 50], [550, 400, 200, 100]
[650, 550, 50], [750, 400, 100], [500, 450, 200, 100]

P. 34 PILES DE CONSERVES

1. Le nombre de boîtes pour obtenir une pile triangulaire est, selon la hauteur désirée : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55. Il faudra 55 boîtes pour une pile de 10 boîtes de haut.

Gâteau d'anniversaire

Vous soufflez N bougies pour votre N-ième anniversaire, vous aurez donc soufflé 1 + 2 + 3 + ... + 100 bougies après le centième, ce qui fait 100 × 101 divisé par 2 = 5 050 bougies. La même formule marche pour n'importe quel âge !

2. TABLEAUX COMPLÉTÉS

Nombre de boîtes de côté	1	2	3	4	5	6	7
Nombres de boîtes de l'étage	1 × 1 = 1	2 × 2 = 4	3 × 3 = 9	4 × 4 = 16	5 × 5 = 25	6 × 6 = 36	7 × 7 = 49

Le nombre de boîtes nécessaire pour construire une pyramide à base carrée est, selon la hauteur désirée : 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385. Il faudra 385 boîtes pour une pyramide de 10 boîtes de haut, car (10 × 11 × 21) ÷ 6 = 385.

Si la pile contient 17 575 boîtes, il faut une hauteur de 37 boîtes (c'est aussi la longueur d'un côté de la base de la pyramide). En injectant 37 dans l'équation, on a : (37 × 38 × 75) ÷ 6 = 17 575.

P. 36 CARRELAGE NUMÉRIQUE BINAIRE

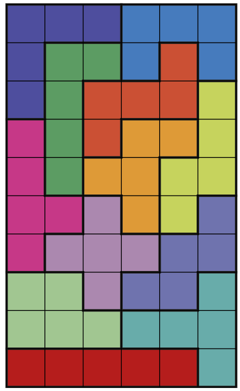
Nombre	16 ?	8 ?	4 ?	2 ?	1 ?	Somme
13	Non	Oui	Oui	Non	Oui	13 = 8 + 4 + 1
20	Oui	Non	Oui	Non	Non	20 = 16 + 4
28	Oui	Oui	Oui	Non	Non	28 = 16 + 8 + 4
2	Non	Non	Non	Oui	Non	2 = 2
31	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1

Les motifs codent les nombres 00100 (4), 01000 (8), 01111 (15), 10000 (16), et 10111 (23).

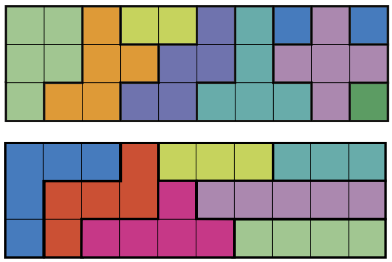
CHAPITRE 2 FORMES

P. 41 BISCUITS PENTAMINO

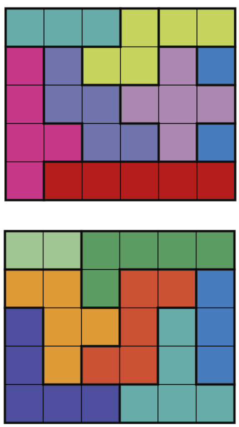
Voici 12 pentaminos différents, disposés en un rectangle 6 × 10 :



Deux rectangles de même taille (il y a plusieurs réponses) :

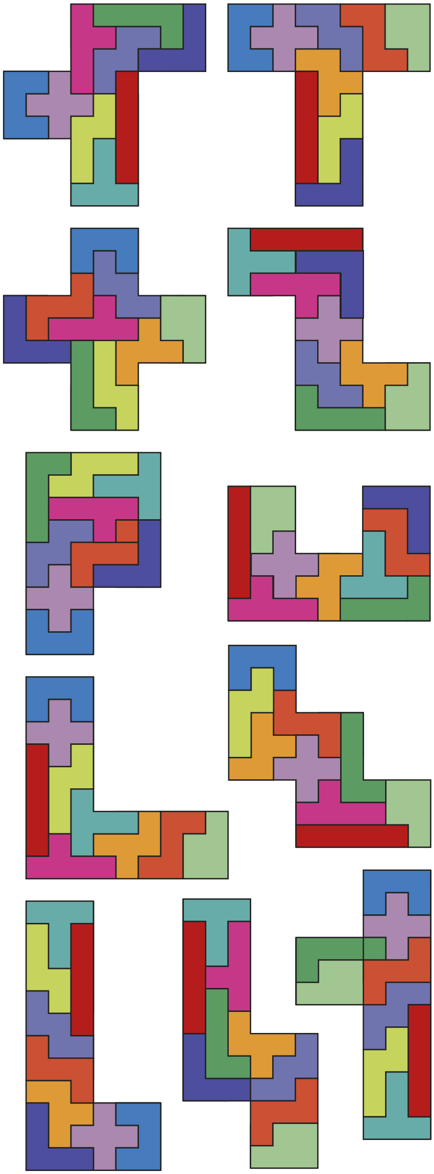


Rectangles 3 × 10



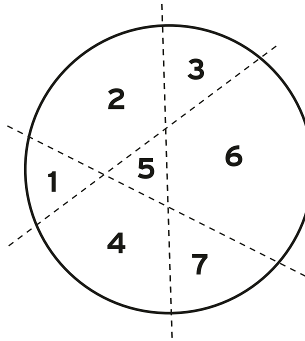
Rectangles 5 × 6

Gros pentaminos, chacun composé de 12 petits pentaminos :

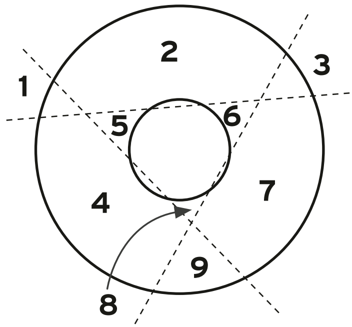


P. 52 DÉCOUPAGE ALIMENTAIRE

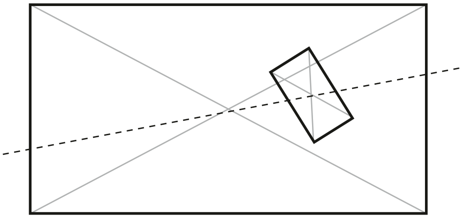
1. Avec trois coupes, on peut couper un cercle en sept morceaux, comme indiqué. Avec quatre coupes, on peut aller à 11, ce qui nous donne la suite 2, 4, 7, 11, appelée suite du traiteur paresseux. Son motif n'est pas régulier, mais en général le nombre maximum de parts pour N coupes est $(N^2 + N + 2) \div 2$. Avec cinq, six et sept coupes, on peut donc obtenir 16, 22 et 29 parts. La dernière doit toujours passer par toutes les autres.



2. S'il y a un trou circulaire au milieu, on peut obtenir jusqu'à neuf parts en coupant bien.



3. Toute ligne droite qui passe par le centre du gâteau le coupe en deux moitiés égales. Par ailleurs, il faudra inclure la moitié du trou dans chaque part. La ligne à suivre passe donc à la fois par le centre du gâteau (à l'intersection des diagonales) *et* par le centre du trou !



P. 53 CUBES DE FROMAGE

1.

a) 27 cubes

b) 26 (tous sauf celui du centre)

c) 54 (neuf sur chacune des six faces du cube)

d) 9 cubes seront colorés, donc 18 cubes qui ne le seraient pas.

2. Un cube de 5 × 5 × 5 contient 125 cubes, parmi lesquels 27 formeraient un cube de 3 × 3 × 3 au centre, avec 98 cubes colorés autour.

3. 5 + 9 + 5 = 19 cubes rouges, et 27 – 19 = 8 cubes jaunes.

Si tous les cubes qu'on ne voit pas étaient rouges, il y aurait 20 cubes rouges. Si tous les cubes qu'on ne voit pas étaient jaunes, il y aurait 15 cubes jaunes et donc 27 – 15 = 12 cubes rouges.

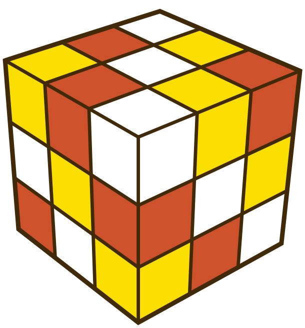
4. Les cubes sont toujours disposés selon un échiquier en 3D et le nombre de chaque cube est le même si le côté du cube est d'une longueur paire, différent s'il est impair.

2 × 2 × 2 : quatre cubes de chaque couleur

3 × 3 × 3 : 13 cubes d'une couleur et 14 d'une autre

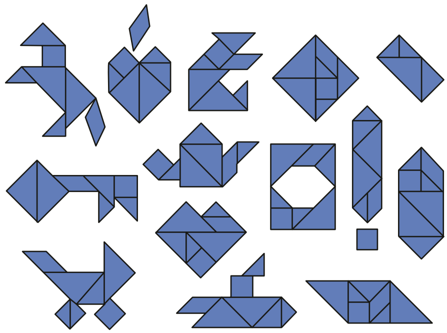
4 × 4 × 4 : 32 cubes de chaque couleur

5. C'est possible, il faut qu'une diagonale de chaque côté soit d'une seule couleur.



6. C'est impossible. Si on imagine que le cube est fait de cubes rouges et jaunes alternés (comme dans l'énigme 4) et que le centre est rouge, il y aurait 13 cubes rouges et 14 jaunes. Comme le ver se déplace au travers des faces des petits cubes, il passe toujours d'une couleur à l'autre, rouge, jaune, rouge, jaune. Mais pour traverser tous les cubes, il faudrait qu'il commence et qu'il finisse dans un cube jaune, pas dans un rouge !

P. 55 TANGRAMWICH



P. 58 CARTONS ET RANGEMENTS PARFAITS

- La base de la boîte sera de 7,5 × 10 cm.
- Le volume est la longueur multipliée par la largeur multipliée par la hauteur, soit 10 × 7,5 × 0,5 = 37,5 cm^3.
- Le volume de la boîte moins les coupes de 1 cm de côté sera 9 × 6,5 × 1 = 58,5 cm^3.

Taille du carré à découper (hauteur de la boîte)	Largeur de la boîte	Longueur de la boîte	Volume de la boîte
0,5	7,5	10	37,5
1	6,5	9	58,5
1,5	5,5	8	66
2	4,5	7	63
2,5	3,5	6	52,5
3	2,5	5	37,5
3,5	1,5	4	21
4	0,5	3	6

La taille optimale du carré à découper est de 1,5 cm de côté, pour un volume de 66 cm^3.

Si vous vouliez découper un carré de plus de 4 cm de côté, vous n'auriez pas assez de carton ! La largeur étant de 8 cm, vous ne pouvez découper que des carrés de 8 ÷ 2 = 4 cm maximum.

Si vous vous servez de méthodes analytiques (en autorisant toutes les tailles de carré), vous verrez que la réponse est proche de 1,585 cm.

P. 65 MATHÉMATIQUES DE LA PIZZA

Si la pizza a un rayon z et une épaisseur a, son volume sera :

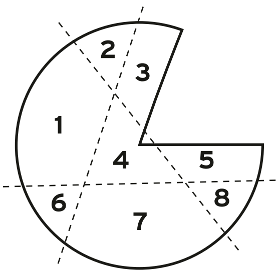
$\pi \times z^2 \times a$

qu'on peut écrire aussi :

pi × z × z × a

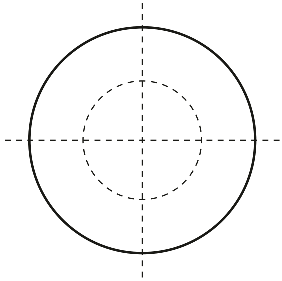
P. 72 DÉCOUPER UN GÂTEAU

1. a) Il y a beaucoup de solutions. Si la forme n'est pas ronde (avec un trou par exemple), il n'est pas toujours nécessaire qu'une coupe passe par toutes les parts existantes. En imaginant qu'il manque déjà une part de gâteau, il est possible de couper le reste en huit comme ceci :



b) Couper le gâteau en quatre puis pratiquer une coupe horizontale par le milieu fera bien huit parts en tout.

c) Couper le gâteau en quatre puis pratiquer une coupe circulaire autour du centre du gâteau comme indiqué fera bien huit parts en tout.



Pour la dernière énigme, la réponse est oui. On coupe le gâteau en quatre (deux coupes), puis on empile les quatre parts ou on les aligne et on les coupe toutes à la fois pour obtenir huit parts.

Pour doubler à chaque fois le nombre de parts, toutes les coupes doivent passer par toutes les parts et les couper en deux à leur tour.

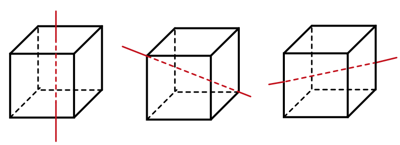
P. 73 ÉCHELLES ET DIMENSIONS

1. Une pizza de 42 cm donne (un peu) plus de pizza que trois pizzas de 24 cm.
2. Une pizza de 54 cm donne plus de pizza que deux pizzas de 36 cm.
3. Dans le premier cas vous obtenez 81π cm^2 de pizza, soit 10 €/(324π) ≈ 4 centimes le centimètre carré, dans le second vous avez 144π cm^2, soit 15 €/(144π) ≈ 3 centimes le centimètre carré. C'est une affaire légèrement meilleure.
4. La pizza de 30 cm avec un trou donne (un peu) plus de pizza que la pizza de 27 cm.

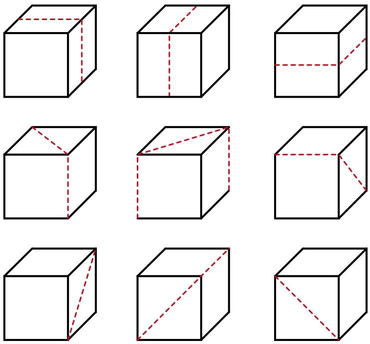
CHAPTITRE 3 MATHS DU MONDE RÉEL

P. 80 FRUIT ET SYMÉTRIE

Les axes de symétrie du cube sont tous sur le modèle de ces trois-là :



Les plans de symétrie du cube :



P. 82 LA MEILLEURE AFFAIRE

La barre de 300 g est une meilleure affaire (1,67 centime le gramme au lieu de 2 centimes). C'est plus que la moitié de chocolat pour la moitié du prix !
Le sac de 10 pommes revient à 60 centimes par pomme, le sac de 15 pommes 56,67 centimes la pomme, c'est donc une meilleure affaire.
Les deux boîtes reviennent à 0,55 centime le gramme : c'est le même prix !
La boîte de 18 œufs est une meilleure affaire : 22,22 centimes l'œuf au lieu de 26,67 centimes.

P. 83 DES CHAMALLOWS DANS LA BAIGNOIRE

Tous ces problèmes sont trop compliqués pour admettre une réponse exacte, on ne peut parvenir qu'à une approximation. Voici des suggestions d'éléments à envisager pour calculer la vôtre :

- Vous pouvez parvenir à une estimation du temps nécessaire en le récitant vous-même, en tout ou en partie (dans ce cas, il faudra multiplier), puis diviser 24 heures par la valeur obtenue.
- Estimez la taille d'un ballon et les dimensions d'un gymnase.
- Estimez le nombre de feuilles sur un arbre, la distance entre deux arbres, la proportion d'érables dans une forêt, la proportion de forêts au Canada et la superficie du Canada (c'est grand !).
- Estimez le nombre de courses organisées par an, le nombre de coureurs qui s'entraînent, la distance parcourue aux entraînements, le nombre de stades dans lesquels on trouve une piste d'athlétisme.
- C'est le plus classique des problèmes de Fermi, celui que Fermi lui-même avait posé. Il faut estimer le nombre de maisons à Londres, la proportion qui contiennent un piano, la fréquence à laquelle on accorde un piano et le nombre de pianos qu'un professionnel peut accorder en une semaine pour en déduire le besoin (et donc le nombre) d'accordeurs en ville.
- Estimez le nombre d'étoiles dans une galaxie, le nombre de galaxies dans l'univers, le nombre de planètes en orbite autour d'une étoile, la proportion de planètes habitables, la proportion d'espèces assez intelligentes pour communiquer, la proportion d'espèces capables d'envoyer un signal qu'on recevra. Tapez dans un moteur de recherche « équation de Drake » pour plus d'informations à ce sujet !

P. 90 JEU DU CHOCOLAT

La partie la plus courte serait qu'à chaque tour, exactement la moitié de la plaquette soit mangée. Pour la partie la plus longue, ce serait qu'à chaque tour la plus petite quantité possible soit mangée, autrement dit que les joueurs cassent une rangée de carrés dans la largeur à chaque fois.

P. 92 CONVERSION D'UNITÉS

CONVERTIR LES POIDS

1. 5 oz = (5 × 28) g = 140 g = (140 ÷ 1,000) kg = 0,14 kg
2. 224 g = (224 ÷ 28,35) oz = 7,9 oz, un tout petit peu en dessous de 0,5 lb (8 oz).
3. 4,5 oz = (4,5 × 28,35) g = 127,5 g ; 0,15 kg = (1 000 × 0,15) g = 150 g. C'est plus que 4,5 oz.
4. 1 lb = 16 oz = (16 × 28,36) g = 453,6 g dans 1 lb.

CONVERTIR LES VOLUMES

1. 6 fl oz = (6 × 30) ml = 180 ml = (180 ÷ 1,000) = 0,18 litre
2. 120 g = (120 ÷ 30) fl oz = 4 fl oz = 0,5 cup
3. 1 cs = 0,5 fl oz = (30 ÷ 2) ml = 15 ml = (15 ÷ 1,000) litres = 0,015 litre, moins que 0,03 litre.
4. 16 verres dans un gallon × 48 cc dans un verre = 768 cc dans un gallon impérial.

P. 102 RANGEMENT DE CARTONS

Les boîtes de hauteur 4, 7, 2, 4, 2 rentrent dans deux poubelles de hauteur 10 : 4 + 4 + 2 et 7 + 2. Celles de hauteur 9, 8, 2, 2, 5, 4 nécessiteront quatre poubelles de hauteur 10 : 9, 8 + 2, 4 + 5 et encore une pour la 2 qui reste et qui ne rentre nulle part ailleurs.

L'efficacité d'un algorithme dépend du problème auquel il s'applique, mais en moyenne, parmi ces quatre-là, les versions décroissantes sont bien plus efficaces que de procéder dans l'ordre. L'algorithme du pire rangement tente « d'égaliser » les poubelles afin de les remplir à la même vitesse, ce qui veut dire que les petites boîtes qui restent à la fin iront remplir de petits espaces. C'est parfois très efficace !

P. 108 COMMENT GARDER UN GÂTEAU FRAIS

- Le haut du gâteau est un cercle de rayon 1, sa surface est donc $\pi \times r^2 = \pi \times 1 = \pi$.
- La circonférence du gâteau est π fois son diamètre de 2, c'est donc 2π.
- Le côté du gâteau est une bande rectangulaire de longueur 2π et de largeur 1, il y a donc 2π de surface sur les côtés, plus π sur le dessus, soit 3π de glaçage en tout.
- Si vous ôtez une part de $\frac{1}{9}$, cela enlève $\frac{1}{9}$ de glaçage au côté et $\frac{1}{9}$ de glaçage au-dessus. $\frac{8}{9}$ du gâteau seront toujours recouverts de glaçage, soit $3\pi \times 8 \div 9 = 2\frac{2}{3}\pi$ de glaçage, soit environ 8,37.
- Le trou qui reste a deux faces de 1 sur 1 chacune. Il y a donc deux carrés de surface 1 exposés à l'air, soit 2 unités de surface. Comme le reste est de surface 8,37, la surface totale du gâteau est alors de 8,37 + 2 = 10,37, et la proportion encore glacée de 8,37 ÷ 10,37, soit 80 % environ.
- Si vous coupez une deuxième part, la surface exposée est la même, 2 unités, mais comme la surface du gâteau a diminué, cela représente à présent une plus grosse proportion du gâteau.

CHAPITRE 4 PENSÉE LOGIQUE

P. 116 ÉNIGMES AU GOÛTER

1. La suite est B C D E F A B C D E F...
a) Le jeudi suivant, ce sera banane, puisque c'est dans six jours.
b) Au jour 50, vous mangerez du fromage.
c) Les jours de pomme tombent tous les six jours, à partir du jour 6. Ils sont donc de la forme 6 × N, où N = 1, 2, 3...

2. La suite est 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7...
a) Cette semaine, il mangera 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 raisins.
b) Au jour 52, il mangera 3 raisins.
c) Il aura mangé du raisin pendant 7 semaines pleines plus trois jours, soit (7 × 28) + 1 + 2 + 3 pour un total de 202 grains de raisin.

3. A B A A B B A A A B B B A A A A B B B B...
a) Jour 10 : une banane.
b) Jour 50 : une banane aussi. Les séquences de A et de B durent chacune 2, 4, 6, 8... jours. 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42 ; la séquence suivante (7 pommes puis 7 bananes) démarre au jour 43 et le jour 50 sera la première banane de cette séquence.
c) La première séquence de 30 pommes démarre au jour 871. Juste avant cette séquence de 30, vous aurez mangé 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 29 pommes et 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 29 bananes, il faut donc calculer la somme de 1 à 29 et la doubler. À l'aide de la formule de la page 34, on obtient 870.

4. **a)** La suite est B B A B B A B B A B B...
b) Jour 10 : une banane. Vous ne mangerez de pomme que les jours multiples de 3, donc le jour 12 sera jour de pomme.

P. 117 ÉNIGMES DE POIDS

QUEL POIDS ?

Le poids de 6 g manque : 3 + 4 + 5 + 7 = 19.
Puis il manque le poids de 3 g : 4 + 5 + 6 + 7 = 22.

OURS EN GUIMAUVE

Prenez un ourson du premier paquet, deux du deuxième, etc., jusqu'à sept. En les pesant tous ensemble, le poids vous donnera le paquet plus léger. Si tous faisaient bien 10 g, le poids serait de 10 × (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 280 g.
La différence avec ce total vous indiquera le paquet trop léger : par exemple, s'il y a 7 g de moins, les oursons légers proviennent du paquet dans lequel vous avez pioché 7 oursons.

BONNES POMMES

Si vous avez trois pommes, pesez-en deux, puis pesez la troisième par rapport à la plus légère ; si elle est encore plus légère, c'est la plus légère des trois. Si elle est plus lourde, il faudra une pesée de plus par rapport à l'autre pomme plus lourde, pour savoir où la placer. Il faudra donc trois pesées au maximum et deux au minimum.

RICHES MADELEINES

On y arrive en deux pesées ! Pesez trois madeleines de chaque côté de la balance, laissez les trois dernières sur la table. Si un paquet de trois est plus lourd, c'est qu'il contient la pièce. S'ils sont de même poids, c'est qu'elle est parmi les trois pas encore pesées. Répétez l'opération avec les trois madeleines qui peuvent encore la contenir – en plaçant une madeleine dans chaque plateau de la balance et en laissant la dernière sur la table. Vous trouverez alors la madeleine la plus lourde de toutes, celle qui contient la pièce.

P. 123 ÉNIGMES QUI ENFLAMMENT INTERNET

1. = 10, = 5 et = 7, le résultat est 114.
2. = 11, = 5 et = 1, le résultat est 16.
3. = 12, = 11 et = 7, le résultat est 2.
4. = 4, = 10 et = 8, le résultat est 56.
5. = 4, = 9 et = 11, le résultat est 97.

P. 125 TASSES ET ASSIETTES

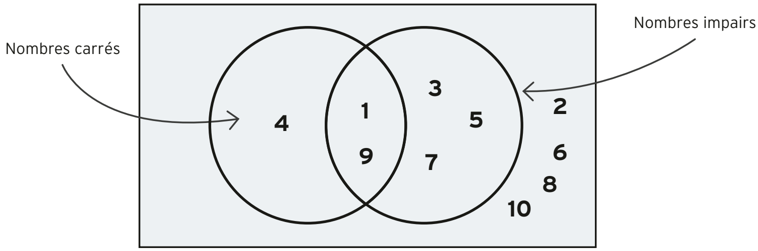
DÉFI 3

Voici une solution. En avez-vous une autre ? Votre réponse pourrait être une rotation ou une version symétrique de celle-ci !

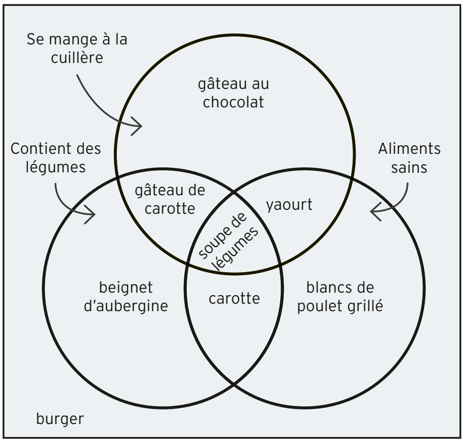
P. 126 LOGIQUE DE CUISINE

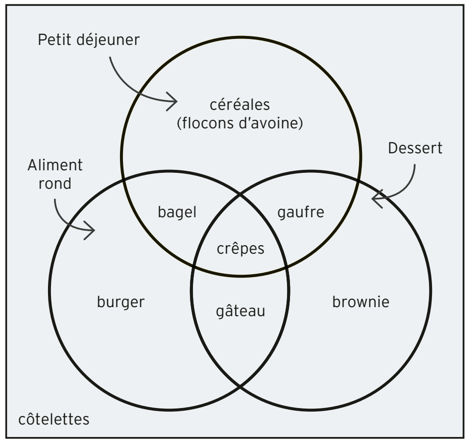
1. **c)** Les deux phrases ne peuvent être vraies toutes les deux, donc l'un des deux ment. Donc la phrase de Thomas ne peut être vraie, Thomas est donc cuisinier et Jean boulanger.
2. **b)** Si Sam dit vrai, sa propre phrase doit être fausse ! Impossible. Sam est donc nécessairement un cuisinier. Ezra ne peut pas en être un (sinon Sam dirait la vérité).
3. **a)** La phrase de Nikita revient à dire « Yael n'est pas cuisinière » (donc Yael dit la vérité) ; mais si Nikita dit vrai, alors Yael dit vrai aussi, donc Nikita est un cuisinier. La seule option sans contradiction est qu'ils sont tous deux cuisiniers.
4. **b)** C'est la seule option qui ne fait pas apparaître de contradiction dans les deux phrases.
5. Akira est boulanger, Bonnie est pâtissière, Clara est cuisinière.

P. 128 PATATES DE VENN



On peut placer énormément de choses dans ces diagrammes. Voici quelques suggestions :





P. 130 JEU DE SERVICE

Ce problème est appelé le problème de Josèphe, il s'agissait à l'origine de gens qui s'attaquaient à l'épée chacun leur tour ! On peut l'énoncer de plusieurs manières : plutôt que de servir une personne sur deux, le serveur pourrait en sauter deux d'un coup, ou trois, ou K, ce qui aboutit à d'autres suites de nombres.

Voici les placements optimaux de 1 à 16 personnes autour d'une table. Dans cette suite, pour toutes les puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, etc.), mieux vaut être à la place 1. Ensuite, la meilleure place se déplace, augmentant de 2 à chaque fois (c'est donc toujours un nombre impair) et revenant à 1 quand on atteint la puissance de 2 suivante.

En termes mathématiques, on pourrait dire : si le nombre de personnes est $2^k + m$ (il faut alors trouver la puissance de 2 immédiatement inférieure à ce nombre et calculer la différence m), alors il faut se trouver à la place $2m + 1$.

N (nombre de personnes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Meilleure place	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

P. 131 TOQUES DE CHEF

1. Un seul chef verra deux toques de même couleur. Seul lui connaîtra la couleur de la sienne (ce sera la couleur opposée).

S'ils savent qu'il y a deux bleues et une rouge, tous pourront déduire la couleur de leur toque, à partir de ce qu'ils verront (une toque bleue et une toque rouge donnent une toque bleue, deux toques bleues donnent une toque rouge).

2. Si le premier chef voyait deux toques bleues, il saurait que la sienne est rouge – comme il ne sait pas, c'est qu'il voit au moins une toque rouge.
Le deuxième chef ne sait pas non plus, c'est donc qu'il ne voit pas non plus deux toques bleues, et qu'il voit une ou deux toques rouges.
Le troisième chef, voyant que les deux autres ne savent pas de quelle couleur est leur toque, déduit que la sienne est rouge.

3. Si le chef en bout de file voyait trois toques de couleur différente, il ne pourrait pas connaître la couleur de la sienne – mais il la connaît, c'est donc une couleur unique (ici, verte), car il doit voir une rouge et deux bleues. Le chef suivant, s'il voyait des toques de deux couleurs différentes, ne connaîtrait pas la sienne – mais il la connaît, il voit donc deux toques de la même couleur, bleues, et il sait que la sienne est rouge.

Le troisième chef a entendu que la première toque était verte et la deuxième rouge.
Par ailleurs, il voit une toque bleue. Il sait que si les deux précédents chefs avaient vu autre chose que deux toques de la même couleur devant, ils n'auraient pas pu déduire leur couleur – lui doit donc être coiffé d'une toque bleue. Le dernier chef suit le même raisonnement, il sait que sa toque est de même couleur que celle du chef juste derrière lui !

4. C'est le mur qui rend cette énigme intéressante, car la plupart des chefs ne savent rien des autres. Les deux plus à gauche ne voient aucune toque, ils ne diront donc rien. Le chef le plus à droite devrait pouvoir dire de quelle couleur est sa toque s'il voyait deux toques de même couleur. Mais ce n'est pas le cas, donc il ne sait pas. Cela nous laisse le deuxième chef depuis la droite : il sait que si le chef derrière lui avait vu deux toques de même couleur, il aurait annoncé sa couleur de toque. Maintenant qu'une minute s'est écoulée, il sait que ce n'est pas le cas, il a donc une toque de couleur différente de celle de la toque rouge qu'il voit devant lui. La sienne est bleue !

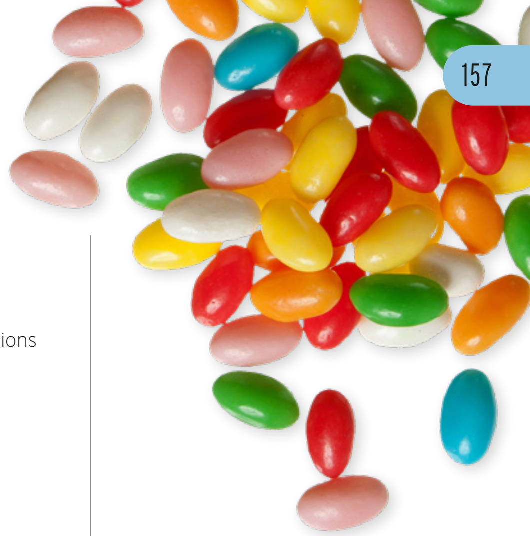
P. 135 CUPCAKES SURPRISE

1. Si une forme a trois côtés, c'est un triangle : VRAI, dans les deux sens.
2. Si une forme a quatre côtés, c'est un carré : FAUX mais VRAI dans l'autre sens ! Un rectangle a quatre côtés mais n'est pas un carré.
3. Si X et Y sont impairs, alors X + Y est impair : FAUX – pour qu'une somme soit impaire, il faut un terme pair et un terme impair.
4. SI X est plus grand que 4, alors X + 2 est plus grand que quatre : VRAI mais pas dans l'autre sens ; 3 + 2 = 5, et 5 est plus grand que 4, mais 3 ne l'est pas.
5. Si une pièce vaut plus de 10 centimes, c'est une pièce de 20 centimes : FAUX mais vrai dans l'autre sens !
6. Si un gâteau contient des fruits à coque, une personne allergique peut le manger : FAUX dans les deux sens. Il n'est pas vrai non plus que si une personne allergique aux fruits à coque peut manger un gâteau, alors il en contient.
7. Si un nombre supérieur à 2 est premier, alors il est pair : VRAI, dans un seul sens. Tous les nombres pairs ne sont pas premiers et 1 est un nombre impair inférieur à deux !

P. 136 PIQUE-NIQUE ET SANDWICHS

- S'il y a N paniers, il faut N + 1 sandwichs pour garantir qu'au moins un panier en contiendra deux.
- Il faut 367 personnes dans une pièce pour être sûr que deux partageront leur anniversaire, car il y a 366 dates possibles (avec les années bissextiles).
- Chaque initiale pouvant être l'une des 26 lettres de l'alphabet, il y a 26 × 26 = 676 paires d'initiales différentes. Avec 677 personnes, on est sûr que deux auront les mêmes initiales.

INDEX



CRÉDITS PHOTOGRAPHIQUES

ADOBE STOCK
14-15, 24-25, 28-29, 72-73, 92-93, 124-125, 134-135 © Andrew Griffiths
SHUTTERSTOCK
4, 23, 47, © baibaz
10-11 © Pixel-Shot
12-13 tout © natali_ploskaya
15 © Zick Svift
16 (de gauche à droite) © Hong Vo ; LightField Studios ; Robyn Mackenzie ; vitals ; paintings ;
17 ©Tatiana Popova
18 © MikhailSh
19 © Ian 2010
20 © Gyvafoto
21 en haut © Nataly Studio
21 en bas © SIM VA
24 © gowithstock
26-27 © Spayder pauk_79
28-29 © jakkapan
28 en haut © Danny Smythe
28 en bas © Krasula
29 (de gauche à droite) © haraldmuc ; MIGUEL G. SAAVEDRA ; Iurii Kachkovskyi ; MRAORAOR ; Kyselova Inna ; D-M ; Olexandr Panchenko ; Tiger Images ; Viktor1
30-31 © Gunnar Pippel
32 en haut © Hong Vo
32-33 © Richard Peterson
34-35 © Mega Pixel
36-37 (dalles blanches), 147 © cherezoff
36-37 (dalles noires), 147 © Purple Moon
40 en haut © goldnetz
40-41 © Veja
42-43 © Nataliia Sokolovskaia
44-45 © ArtCookStudio
48-49 © onair
49 en bas © Georgios Kollidas
50-51 tout © Alexey Kljatov
52 © itay uri
53, 66-67 © Hong Vo
54-55 © GMEVIPHOTO
56-57 © Oliver Hoffmann
57 en bas © You Touch Pix of EuToch
58-59 © Mega Pixel
58 gauche © Tusumaru
60 © dinodentist
63 en haut © Africa Studio
63 bas gauche © ravl
63 bas droite © Maks Narodenko
65 © Timmary
68 en haut © Yeti studio
68 bas gauche © HomeStudio
68 bas droite © Cheers Group
68-69, 74-75, 86-87, 94-95, 122-123, 136-137 © yukipon
70-71 © pukao
72 © Tania Kitura
73 © Timmary
74-75 © Viktor1
76 © Olena Serzhanova
80 en haut © Quang Ho
80 au milieu © Venus Kaewyoo
80 en bas © alexassault
81 haut gauche © Artem Kutsenko
81 au milieu © Anna Sedneva
81 en bas © NikHu
82 en haut © White bear studio
82 bas gauche © Nataly Studio
82 bas milieu © nechaevkon
82 bas droite © fotosv
83 © Yellow Cat
85 © Dmytro Amanzholov
88-89 © Africa Studio
90-91 tout © New Africa
92 © Nataly Studio
94 © Africa Studio
95 © Nataliia Sokolovskaia
96 en haut © irin-k
96 en bas © OLEG525
97 © apixelstudio
98 en haut © Obprod
98 en bas © HeinzTeh
99 en haut © Katrina Leigh
99 en bas © inkanya Anankitrojana
100© pandapaw
102-103 © Y Photo Studio
104-105 en haut © Boltenkoff
104-105 en bas © Viktor1
104 au milieu © Svetlana Foote
104 en bas © Alluvion Stock
106 © P Maxwell Photography
110 © October22
111 © Passakorn sakulphan
114 © New Africa
116 © xpixel
117 © Sergiy Kuzmin
118 © Andrey_Kuzmin
121 © bonchan
122-123 © yukipon
122 © Yellow Cat
124 © Seregam
126 © Ebtikar
127 © grey_and
129 en haut © Madlen21
129 milieu haut © Sunghorn
129 milieu bas © Kompor
129 en bas © Nataliia Pyzhova
132-133 © Africa Studio
132 © photomaster
133 © Bozena Fulawka
134 (cupcakes) © Lifestyle Travel Photo
134 (sacs) © sevenke
135 © Lifestyle Travel Photo
136 en haut © greg_wozniak
136 en bas © stockphoto mania
136-137 (sacs) © Dejan Stanisavljevic
136-137 (pommes) © bergamont
137 © Stephen Barnes
138 © MiniDoodle
139 © Africa Studio
140 en haut, 141 en haut © Radu Bercan
140 en bas, 141 en bas © Natali Zakharova
150 © Timmary
152 © Theerapol Pongkangsananan
155 © Danny Smythe

Sauf mention contraire, les illustrations sont de Rob Brandt. Tout a été mis en œuvre pour retrouver les ayants-droit des images utilisées. Nous vous prions d'excuser toute erreur ou omissions et de nous les signaler afin que nous ajoutions les mentions appropriées dans les éditions futures de cet ouvrage.