



Bruno Torrèsani
Centre de Physique Théorique de Marseille (CNRS)

Analyse continue par ondelettes

Préface de Yves Meyer, membre de l'Institut

S A V O I R S A C T U E L S

InterÉditions / CNRS Éditions

© 1995, **InterEditions**, 5, rue Laromiguière, 75005 Paris
et
CNRS Éditions, 20/22, rue Saint-Amand, 75015 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective et, d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris.
Tel. (1) 43 26 95 35.

ISBN 2 7296 0591 6

ISBN 2 271 05364 1

SOMMAIRE

Préface	xii
Introduction	1
I Références	6
II Analyse continue par ondelettes et par gaborettes	9
I Décomposition temps-fréquence	10
II L'analyse de Fourier à court terme	11
II.1 Les gaborettes en dimension 1	11
II.2 Un exemple simple	15
II.3 Le cas multidimensionnel	17
III L'analyse par ondelettes en dimension 1	17
III.1 Décompositions continues en ondelettes	17
III.2 Quelques exemples simples	24
IV Ondelettes multidimensionnelles	25
IV.1 Ondelettes radiales	25
IV.2 Ondelettes engendrées par les translations, rotations et dilata- tions de \mathbb{R}^n	26
IV.3 Retour sur l'espace "temps-fréquence"	29
V Noyaux reproduisants	30
VI Quelques remarques et compléments	33
VI.1 Analyses multirésolutions infinitésimales	33
VI.2 Quelques exemples singuliers	34
VII Commentaires et références	36
VIII Complément A : Rotation dans \mathbb{R}^n	38
VIII.1 Les angles d'Euler	38
VIII.2 Exemples	40

III	Quelques exemples et illustrations	41
I	Le plan temps-fréquence	41
II	Aspect temps-échelle	43
III	Aspect temps-fréquence	46
IV	Exemples bidimensionnels	51
V	Commentaires et références	56
IV	Ondelettes et régularité globale et locale des fonctions	59
I	Introduction	59
II	Singularité et contours	59
III	Convergence ponctuelle de la formule de reconstruction	64
IV	Régularité hölderienne	66
	IV.1 Régularité globale	66
	IV.2 Régularité locale	69
V	Auto-similarité	71
	V.1 Mesures fractales	71
	V.2 Fonctions fractales	77
VI	Commentaires et références	78
V	Applications : Approximations asymptotiques et analyse de signaux modulés en amplitude et en fréquence	81
I	Signal analytique et transformation de Hilbert	82
II	Analyse par ondelettes de lignes spectrales	85
	II.1 Coefficients d'ondelettes de lignes spectrales	85
	II.2 Caractérisation de lignes spectrales	88
III	Signaux modulés en amplitude et en fréquence	92
	III.1 Estimation des coefficients d'ondelettes	92
	III.2 L'arête de la transformée en ondelettes	93
	III.3 Les courbes-ondelette	94
	III.4 Extraction de l'arête	95
	III.5 Une implémentation possible	97
	III.6 Commentaires, développements	99
IV	Le cas bidimensionnel	105
	IV.1 Analyse de lignes spectrales	105
	IV.2 Fréquences locales bidimensionnelles et texture	106
	IV.3 Illustrations	108
V	Commentaires et références	108
VI	Complément B : Approximations asymptotiques et phase stationnaire	112
	VI.1 Développements asymptotiques : un exemple simple	112
	VI.2 Méthode de la phase stationnaire : calcul des premiers termes	114

VI.3	Méthode de la phase stationnaire : qualité de l'approximation	116
VI	Ondelettes discrètes, repère d'ondelettes et de gaborettes	119
I	Théorie élémentaire des repères dans un espace de Hilbert . . .	119
II	Repères de gaborettes	122
III	Le phénomène de Balian-Low	126
III.1	Le principe d'incertitude de Heisenberg	126
III.2	Le théorème de Balian-Low	127
IV	Repère d'ondelettes	129
V	Repères continus et généralisation	132
V.1	Repères continus	132
V.2	Repères discrets d'ondelettes interpolantes	134
VI	Ondelettes "presque continues"	134
VII	Commentaires et références	136
VII	États cohérents et représentations de carré intégrable de groupes localement compacts et d'espaces homogènes associés	139
I	Introduction	139
II	Représentations de carrés intégrables et états cohérents	140
II.1	Coefficients de Schur et relations d'orthogonalité	141
II.2	États cohérents et transformation associée	143
II.3	Retour aux représentations temps-fréquence	144
II.4	Exemples	144
III	Carré intégrabilité, modulo un sous-groupe et ondelettes associées	151
III.1	Retour sur le groupe de Weyl-Heisenberg	151
III.2	Ondelettes indexées par un espace homogène	151
III.3	Atomes temps-fréquence : le groupe de Weyl-Heisenberg affine	152
IV	Espaces de phases	156
IV.1	Théorie de Kirillov et espace des phases	157
IV.2	Retour sur les exemples précédents	158
IV.3	Les ondelettes multidimensionnelles	159
IV.4	Les gaborettes sur la sphère	160
V	Commentaires et références	164
VI	Complément C	166
VI.1	Quelques calculs d'espace des phases	166
VI.2	Le groupe euclidien	171
VII	Complément D	173
VII.1	Ondelettes sur les sphères	173
VII.2	Identité approchée sur la sphère	175
VII.3	Le schéma bilinéaire	176

VIII	Algorithmes rapides de calcul de la transformée en ondelettes	179
I	Introduction	179
II	Ondelettes sur une grille dyadique	181
II.1	Le théorème d'échantillonnage	181
II.2	Algorithmes pyramidaux en traitement d'images	184
II.3	Codage en sous-bandes	187
II.4	Transformée en ondelettes sur grille dyadique	189
II.5	Quelques exemples et commentaires	191
III	Ondelettes sur grille régulière	193
III.1	Utilisation de QMFs	194
III.2	Pseudo-QMFs	195
III.3	Redondance en échelle	201
IV	Le cas bidimensionnel	203
IV.1	Produit tensoriel	203
IV.2	Algorithmes approchés	205
V	Commentaires et références	207
VI	Complément E : Filtres pour ondelettes splines et LOG	208
VI.1	Splines de base et ondelettes de Battle-Lemarié	208
VI.2	Filtres approchés pour ondelettes LOG	212
Annexe A	Eléments d'analyse	217
I	Notions de base	217
I.1	Continuité, différentiabilité, régularité	217
I.2	Mesurabilité, intégrabilité	219
II	Espaces fonctionnels et distributions	220
II.1	Les espaces L^p	220
II.2	L'espace L^2	220
II.3	Quelques inégalités utiles	221
II.4	Identité approchée	222
II.5	Fonctions de test et distributions	222
III	Analyse de Fourier	223
III.1	Transformation de Fourier	223
III.2	Quelques propriétés (aide-mémoire).	225
III.3	Transformation de Hilbert	225
Annexe B	Eléments de théorie des groupes	227
I	Généralités	227
I.1	Notion de groupe	227
I.2	Exemples	227
II	Groupes et algèbres de Lie	230
III	Mesure de Haar	230
IV	Représentations	231

IV.1 Généralités	231
IV.2 Exemples	232
IV.3 Représentation régulière	233
V Représentations induites	233
V.1 Espaces homogènes	233
V.2 Représentations induites	234
VI Références	235
 Index	 237

PRÉFACE

Quand Bruno Torrèsani m'a prié de préfacier cet ouvrage, j'ai aussitôt laissé de côté ce que je faisais et, oubliant le temps qui passe, me suis abandonné à la lecture. Bien évidemment je savais que mon plaisir serait à la hauteur de mon admiration pour les travaux de B. Torrèsani et de ses collaborateurs qui incluent notre maître Alex Grossmann. Mon attente n'a pas été déçue et ce livre est beau, car il est le reflet d'une profonde conviction scientifique que je vais tenter d'expliquer et de justifier dans les lignes qui suivent.

Les ondelettes sont d'abord apparues (1981) dans l'article fondamental d'Alex Grossmann et Jean Morlet comme des "états cohérents" au sens de la mécanique quantique. Ce point de vue est *géométrique* par opposition à une approche *algorithmique* qui prit en 1985 le devant de la scène à la suite des travaux de S. Mallat et I. Daubechies. Pour insister davantage, disons que l'approche algorithmique repose sur l'approximation de l'espace géométrique ambiant par une suite emboîtée de réseaux (ou grilles) de plus en plus denses. Ces réseaux, une fois choisis, imposent une pénible rigidité géométrique et vont, par exemple, empêcher d'effectuer des translations ou des rotations arbitraires. Voilà un sérieux handicap si l'on compare la transformée en ondelettes orthogonale à la transformée de Fourier qui est compatible avec l'action du groupe euclidien. Mais par ailleurs, on ne saurait faire d'analyse numérique ou de calcul scientifique (méthodes multigrilles, etc.) sans utiliser ces grilles de plus en plus fines et l'usage de la FFT (fast Fourier transform ou transformée de Fourier rapide) impose aussi de choisir de telles grilles. Ce divorce entre la liberté de manœuvre dont on souhaite disposer dans l'analyse par ondelettes et les contraintes imposées par l'utilisation d'algorithmes efficaces, du type FFT, a été l'une des tensions les plus fécondes et créatrices de la théorie des ondelettes depuis les origines. Il est clair que l'ouvrage de B. Torrèsani avive ces tensions et sera donc la source de nouveaux progrès.

Un des points forts de cet ouvrage est donc l'accent mis sur la "liberté de mouvement" fournie par les diverses actions de groupe (translations, dilatations et rotations) que l'on peut envisager dans les constructions d'ondelettes. On ne peut cependant "bouger dans tous les sens" et si l'on désire le faire, il faut

dra relier ces trois types de transformations géométriques dans une recherche qui s'apparente à celle de la meilleure base dans les algorithmes de Coifman et Wickerhauser. Cette étude, qui n'avait pas été prévue par les "pères fondateurs", est un des points très originaux du beau livre de B. Torrèsani.

Un second point fort est la description précise et exacte du remarquable algorithme de détection de la "fréquence instantanée". Comme chacun sait, la quête de la "fréquence instantanée" est l'une des épopées majeures du traitement du signal et les techniques utilisées classiquement étaient basées sur la transformation de Wigner-Ville et ses généralisations. Une des plus belles réalisations scientifiques de "l'équipe ondelettes" de Marseille a été la découverte d'un algorithme "temps-fréquence" basé sur la transformation en ondelettes. La présentation de cet algorithme par B. Torrèsani est la meilleure dont nous disposons aujourd'hui.

Une troisième nouveauté, présentée par B. Torrèsani, est la construction sur la sphère d'"ondelettes de Gabor" qui soient compatibles avec l'invariance par rotation.

Un dernier chapitre traite de la possibilité d'utiliser des QMFs (quadrature mirror filters) pour effectuer des calculs approchés mais rapides sur des ondelettes non orthogonales.

L'ouvrage que nous offre B. Torrèsani complète *Ten Lectures on Wavelets*, écrit par I. Daubechies, et je crois que ces deux traités feront bon ménage sur le bureau des scientifiques qui utilisent les ondelettes.

Le style de B. Torrèsani est remarquablement clair et efficace et je suis heureux qu'un large public scientifique puisse enfin disposer de cet excellent cours avancé sur les ondelettes et leurs applications.

Yves Meyer, membre de l'Institut

Chapitre I

INTRODUCTION

L'analyse par ondelettes est apparue sous ses "formes modernes", au début des années 80, dans un remarquable article d'Alex Grossmann et Jean Morlet. L'un des points essentiels qu'elle nous enseigne est qu'un objet mathématique (qu'il s'agisse d'une fonction, d'un signal, d'un opérateur,...) peut être représenté de multiples façons, chacune de ces représentations permettant de mettre l'accent sur certaines caractéristiques de l'objet étudié. Un exemple significatif est fourni par le signal de parole, dont des représentations temps-fréquence différentes (par exemple une représentation en ondelettes et une représentation de Gabor à bande étroite) conduisent à des interprétations différentes.

Il est amusant de constater qu'il en va de même pour l'analyse par ondelettes elle-même : on peut la présenter de divers points de vue, qui dépendent autant de l'application visée que de la culture scientifique de l'utilisateur. En effet, quelle que soit l'approche choisie, on peut toujours y retrouver une "préhistoire" des ondelettes, au cours de laquelle des techniques très semblables aux ondelettes (et qui souvent avaient tout des ondelettes sauf le nom) étaient couramment utilisées.

On peut se livrer à un essai de classification des "préhistoires des ondelettes" et de leurs "prolongements contemporains". Cette classification est bien entendu arbitraire (les quatre classes ci-dessous ont une intersection non vide — et il n'est pas certain que leur réunion recouvre l'ensemble du sujet), mais elle permet de décrire les tendances générales.

- *Approches "temps-échelle"* : Il s'agit d'approches trouvant leur origine dans des problèmes de caractérisation d'espaces fonctionnels et d'opérateurs. Certaines propriétés de régularité des fonctions se trouvent mises en évidence lorsque l'on étudie le prolongement harmonique des fonctions en question (voir par exemple [13]), c'est-à-dire une autre représentation. L'un des outils de base dans ce domaine est l'identité de Calderón [5], dont la formule de représentation en ondelettes peut être vue comme une "paraphrase" plus géométrique. L'une des conséquences a été la construction de bases orthonormées d'ondelettes par J.O. Stromberg [31] puis Y. Meyer et ses collaborateurs (voir [23]), qui a abouti au concept d'analyse multirésolution [21], puis à diverses généralisations (bases d'ondelettes

sur un intervalle ou périodiques, ondelettes multidimensionnelles associées à des “dilatations généralisées”, bases trigonométriques locales,...).

- *Approches “algorithmiques”* : On peut regrouper dans cette catégorie les travaux qui font suite aux travaux de Marr [22] (bien que celui-ci ne se soit que très peu intéressé aux aspects purement algorithmiques) et ses collaborateurs (ou même certains précurseurs, puisqu’il semble que certains physiologistes de la vision aient eu, à la fin du siècle dernier, de semblables préoccupations) sur la vision par ordinateur et le traitement d’images. L’accent est mis ici sur les aspects algorithmiques. Cela fait apparaître la richesse algorithmique des ondelettes, basées sur des opérations de dilatation et translation très naturelles, y compris dans le cas de signaux définis sur un réseau (ce qui est le cas en pratique). Les “références historiques” sont les articles fameux de Burt et Adelson sur le “Laplacien Pyramidal” [4], ainsi que les travaux d’Esteban et Galand [11], puis de Smith et Barnwell [30] qui ont conduit à la construction des filtres miroir en quadrature (QMF) et rejoignent la théorie des analyses multirésolution, puis plus récemment aux algorithmes adaptatifs de décomposition en paquets d’ondelettes de l’équipe de Yale (voir par exemple [33]). Une avancée plus récente concerne l’utilisation systématique des bases d’ondelettes en analyse numérique [3], basée sur le fait qu’une large classe d’opérateurs peuvent être représentés de façon économique (*i.e.* par des matrices creuses) dans des bases d’ondelettes.
- *Approches “temps-fréquence”* : On se place ici délibérément dans le contexte du traitement du signal. Suite aux travaux fondamentaux de J. Ville [32] sur les représentations temps-fréquence des signaux, le sujet est presque devenu une discipline scientifique à part entière. De nombreux auteurs se sont particulièrement intéressés au problème de définition et d’estimation de la fréquence instantanée dans les signaux (voir à ce sujet le livre de P. Flandrin [12]). Les ondelettes apparaissent dans ce contexte comme une représentation temps-fréquence parmi beaucoup d’autres, qui a cependant pour elle une grande souplesse d’utilisation. Le problème se pose maintenant des représentations temps-fréquence adaptatives : étant donnée une famille de représentations temps-fréquence, comment choisir celle qui décrira optimalement un signal donné ? Il s’agit de l’un des défis les plus stimulants à l’heure actuelle.
- *Approches “géométriques”* : Bien que ces approches soient assez similaires aux précédentes, l’origine et le langage sont ici ceux de la mécanique quantique et de la théorie des groupes (voir par exemple l’article de base [16], ou encore [27], dans lequel le lien avec les états cohérents de la mécanique quantique est explicité). L’accent est mis sur les propriétés de symétrie des représentations en ondelettes, ce qui permet de donner

une description unifiée d'une famille de représentations temps-fréquence incluant, outre les ondelettes dans diverses versions, les représentations de Fourier à fenêtre (voir par exemple [29]) ainsi que de nombreuses généralisations. En revanche, on ne sait toujours pas comment insérer dans ce cadre les analyses multirésolution (à l'exception de quelques cas trop spécifiques), qui restent l'une des pierres angulaires de "l'édifice ondelettes".

Des descriptions axées sur divers points de vue (la plupart du temps il s'agit des deux premiers) peuvent être trouvées par exemple dans [6], [10], [12], [17], [23], [29] et [33]. En revanche, il n'existe à ce jour que très peu de textes de référence sur les décompositions continues en ondelettes.

Le présent ouvrage ne prétend pas rendre compte de l'aspect "multiforme" des ondelettes que nous venons d'évoquer (nous renvoyons à [24] pour une description globale de certains aspects ou aux compilations d'articles de revue [2], [7], [19], [20], [28]). Il est plus spécifiquement consacré aux décompositions continues en ondelettes ainsi qu'à certaines de leurs applications en traitement du signal. On insistera donc principalement sur les approches "temps-fréquence" et "géométrique", ainsi que sur les méthodes et algorithmes basés sur ces aspects.

Les trois premiers chapitres sont consacrés à des généralités concernant les représentations temps-fréquence et temps-échelle et, en particulier, sur les transformations continues en ondelettes et de Gabor. Après cette introduction, le chapitre II décrit un certain nombre de représentations de type temps-fréquence ou temps-échelle, ainsi que certaines de leurs propriétés caractéristiques, notamment la souplesse des représentations continues, qui les rend adaptables à de nombreuses situations spécifiques. Le chapitre III est, quant à lui, consacré à un certain nombre d'exemples académiques commentés et destinés à familiariser le lecteur avec les images de transformée en ondelettes.

Les chapitres IV et V illustrent les deux aspects complémentaires des représentations en ondelettes, à savoir les aspects temps-échelle et temps-fréquence. Au chapitre IV on utilise les ondelettes pour effectuer une analyse locale des fonctions et des signaux, ce qui est illustré par les problèmes de caractérisation de singularités ponctuelles des fonctions et mis en parallèle avec les problèmes de détection de contours dans les images, et de caractérisation d'auto-similarité dans les signaux, suivant entre autres les travaux du groupe de Bordeaux (voir par exemple [1]). Le chapitre V est consacré aux problèmes de caractérisation de signaux par des amplitudes et fréquences locales, donc à des aspects temps-fréquence. On y décrit les méthodes, mises au point par le groupe de Marseille, pour la mesure de fréquences locales dans les signaux et les images au moyen des transformations continues en ondelettes ou de Gabor.

Les trois derniers chapitres sont consacrés à des points précis de l'analyse continue par ondelettes. Le chapitre VI traite la stabilité des représentations

continues par rapport à la discrétisation, suivant la voie tracée par I. Daubechies [9]. Le chapitre VII consiste en une “relecture” des décompositions décrites au chapitre II selon un point de vue plus géométrique ; on y justifie en particulier le terme “temps-fréquence” sous un angle géométrique et algébrique, en montrant comment les représentations temps-fréquence sont naturellement associées à un “espace des phases” construit par la théorie des groupes. Enfin, le chapitre VIII est consacré aux algorithmes de calcul adaptés aux différentes versions de la transformation en ondelettes envisagées dans ce livre. On y montre notamment comment les algorithmes rapides de transformée en ondelettes discrètes sont obtenus naturellement à partir des algorithmes pyramidaux du traitement d’image et comment ils peuvent être adaptés à la situation plus générale de la transformation (presque) continue en ondelettes. Ces trois chapitres peuvent être lus indépendamment les uns des autres.

Quelques aspects plus spécifiques encore (comme par exemple quelques calculs géométriques sur les groupes de rotations ou le groupe euclidien ou des coefficients de filtres pour algorithmes pyramidaux) ne sont abordés que sous forme de compléments, situés en fin de chapitre, pour ne pas alourdir le corps du texte.

Pour compléter le texte, des annexes résumant quelques bases mathématiques nécessaires ont été placés à la fin de l’ouvrage.

Les analyses multirésolution et les bases d’ondelettes n’apparaissent explicitement à aucun moment dans le texte, du moins sous leur forme classique. Il s’agit là d’un choix délibéré, dans la mesure où il existe déjà d’excellents ouvrages faisant autorité sur le sujet (entre autres [6], [10] et [23]). En revanche, la notion d’analyse multirésolution apparaît en filigrane à de nombreuses reprises, comme par exemple au chapitre VIII (consacré aux algorithmes de calcul de transformée en ondelettes), où elle est naturellement associée aux algorithmes pyramidaux, ou à la fin du second chapitre dans lequel est ébauché le passage des ondelettes continues aux ondelettes discrètes.

Le lecteur désireux d’expérimenter les techniques décrites dans ce livre peut utiliser un certain nombre de logiciels du domaine public, déposés sur quelques sites du réseau *Internet* (il existe aussi quelques logiciels commerciaux). Nous donnons ici une liste (qui est loin d’être exhaustive) de tels sites :

- *cs.nyu.edu* : Dans le répertoire */pub/wave/software* se trouve une version de logiciels développés par le département “computer science” du Courant Institute de New York. On y trouve en particulier des outils de transformation en ondelettes unidimensionnelle (fichier *wave1.tar.Z*) et bidimensionnelle (fichier *wave2.tar.Z*), ainsi que de décomposition temps-fréquence adaptative (fichier *mpp.tar.Z*) ou d’autres outils reliés. Dans tous les cas, ce sont des logiciels développés en langage C.
- *pascal.math.yale.edu* : Le répertoire */pub/software* contient des logiciels

développés par le département de Mathématiques de Yale University, et fondés sur les décompositions temps-fréquence et temps-échelle adaptatives, les bases de paquets d'ondelettes et les bases trigonométriques locales, ainsi que des outils de débruitage de signaux basés sur ces méthodes.

- *maxwell.math.sc Carolina.edu* : Le répertoire */pub/wavelets/programs* contient un certain nombre d'outils liés aux décompositions en ondelettes (développés en langage C).
- *stats.stanford.edu* : Le répertoire */pub/wavelab* contient des outils (utilisant l'environnement *MATLAB*) de débruitage de signaux par transformation en ondelettes.
- *cpt.univ-mrs.fr* : Un logiciel (basé sur l'environnement *Splus*), mettant en œuvre les techniques décrites au chapitre V de ce volume, ainsi que des algorithmes reliés, sera prochainement disponible sur ce site.

Dans tous les cas, ces logiciels sont disponibles par la procédure UNIX "ftp" usuelle : composer *ftp site* ; à la question *user*, répondre *anonymous*, et à la question *password*, donner sa propre adresse Internet. Utiliser ensuite *cd rep* pour se positionner dans le répertoire voulu ("rep" en l'occurrence), puis *get nomfichier* pour transférer le fichier voulu (dont le nom est ici "nomfichier").

Cet ouvrage se fonde sur des cours que j'ai donnés au DEA "Physique des Particules, Physique Mathématique et Modélisation" des universités d'Aix-Marseille I et II, de Nice, Toulon-Var et Toulouse entre 1991 et 1994, ainsi qu'à l'école d'été "Ondelettes et Applications" organisée par l'ENSICA, Toulouse (été 1992). Avant et durant sa rédaction, j'ai bénéficié d'innombrables discussions avec, en particulier, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian, M.A. Muschietti, G. Beylkin, R. Carmona, B. Escudié, K. Flornes, P. Ponenti, V. Wickerhauser, M. Holschneider et F. Plantevin, que je tiens à remercier ici. Je suis aussi particulièrement reconnaissant envers Y. Meyer pour ses conseils, ses encouragements toujours chaleureux et ses critiques constructives, mais aussi pour avoir relu en détail et corrigé une version préliminaire de ce texte et accepté d'en écrire la préface. Je tiens à adresser mes remerciements à C. Fabre, directeur de la collection, pour ses nombreuses remarques.

Je tiens enfin à remercier S. Zhong, qui a aimablement produit les figures IV.1-IV.3 du chapitre IV, ainsi que M. Kunt, éditeur de la revue *Signal Processing* pour l'autorisation de reproduire les figures 8, 9 et 10 du chapitre V (extraites de l'article de C. Gonnet et B. Torresani, "Local frequency analysis with two-dimensional wavelet transform", *Signal Processing*, **37** (1994) 389-404).

RÉFÉRENCES

- [1] E. Bacry, A. Arneodo, J.F. Muzy, "Singularity Spectrum of Fractal Signals from Wavelet Analysis : Exact Results", *J. Stat. Phys.*, **70**, (1993) p. 635.
- [2] J. Benedetto, M. Frazier Ed., *Wavelets : Mathematics and Applications*, CRC Press (1993).
- [3] G. Beylkin, R. R. Coifman, V. Rokhlin, "Fast Wavelet Transforms and Numerical Algorithms I", *Comm. Pure and Appl. Math.*, **44** (1991) p. 141-183.
- [4] P. Burt, E. Adelson, "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Coder", *IEEE Trans. on Comm.*, **31** (1983) p. 482-540.
- [5] A. Calderón, "Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method", *Studia Math.*, **24** (1964) 113.
- [6] C. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York (1992).
- [7] C. Chui Ed., *Wavelets : a Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York (1992).
- [8] J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian Eds., "Wavelets, Time-Frequency Methods and Phase Space", *IPTI*, Springer (1987).
- [9] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localisation and Signal Analysis", *IEEE Trans. Inf. Th.* **36** (1990) p. 961-1005.
- [10] I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", *SIAM-CBMS* (1992).
- [11] D. Esteban, G. Galand, "Application of Quadrature Mirror Filters to Split Band Voice Coding Schemes", *Proc. Int. Conf. ASSP* (1977) p. 191-195.
- [12] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, Hermès (1993).
- [13] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss, "Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces", *CBMS-AMS regional conferences series, SIAM*
- [14] D. Gabor, "Theory of Communication", *J. Inst. Elec. Eng.* **903** (1946), p. 429.
- [15] A. Grossmann, J. Morlet, "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape", *SIAM J. Math. An.* **15**, (1984) p. 723.
- [16] A. Grossmann, J. Morlet, T. Paul, "Transforms Associated with Square Integrable Group Representations I", *J. Math. Phys.*, **27** (1985) p. 2473 ; "Transforms Associated with Square Integrable Group Representations II", *Ann. Inst. H. Poincaré*, **45** (1986) p. 293.
- [17] M. Holschneider, *Wavelets : an Analysis Tool*, Oxford University Press (1994).
- [18] J.R. Klauder, B.S. Skagerstam, *Coherent States*, World Scientific (1985).
- [19] T. Koornwinder Ed., *Wavelets, an Elementary Treatment of Theory and Applications*, Series in Approximations and Decompositions 1, World Scientific (1993).
- [20] P. G. Lemarié Ed., "Les Ondelettes en 1989", *Lect. Notes in Math.*, **1438** (1990).
- [21] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation", *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell.*, **11**, n. 7 (1989) p. 674-693.
- [22] D. Marr, *Vision*, Freeman, New York (1982).
- [23] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs* (en trois volumes), Hermann (1989-1991).
- [24] Y. Meyer, *Les Ondelettes, Algorithmes et Applications*, Armand Colin, 2^e édition (1994).
- [25] Y. Meyer Ed., "Ondelettes et applications", *Actes de la conférence de Marseille*, Masson (1989).

- [26] Y. Meyer, S. Roques Ed., "Wavelets and their Applications", *Actes de la conférence de Toulouse*, Editions Frontières (1992).
- [27] T. Paul, "Ondelettes et Mécanique Quantique", Thèse d'Etat, CPT Marseille (1985).
- [28] M.B. Ruskai et al. Ed., *Wavelets and their Applications*, Jones and Bartlett Publ. Comp., Boston (1992).
- [29] W. Schempp, "Harmonic Analysis on the Heisenberg Nilpotent Lie Group", *Pitman Research notes in Mathematical series*, **147** (1986).
- [30] M.J. Smith, D.P. Barnwell, "Exact Reconstruction for Tree-Structured Subband Coders", *IEEE Trans. ASSP*, **34** (1986) p. 434-441.
- [31] J.O. Stromberg, "A Modified Franklin System and Higher-Order Spline Systems on \mathbb{R} " as Unconditional Bases for Hardy Spaces", *Conference in Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund*, Wadworth math. series (1983) p. 475-493.
- [32] J. Ville, "Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique", *Câbles et Transmissions 2^e A* (1) (1948) p. 61-74.
- [33] M.V. Wickerhauser, *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, A.K. Peters Publ. Comp. (1994).

Chapitre II

ANALYSE CONTINUE PAR ONDELETTES ET PAR GABORETTES

L'analyse de Fourier est sans conteste l'un des outils les plus puissants mis à la disposition des mathématiciens et physiciens d'aujourd'hui et aussi l'un des plus utilisés. Néanmoins, bien que bâtie sur la base du concept physique de fréquence (spatiale ou temporelle), elle se révèle imparfaitement adaptée à la description de fonctions ou signaux que l'on peut rencontrer couramment.

L'exemple le plus parlant (si l'on peut dire) est celui de la musique. Nous sommes capables d'associer à chaque note que nous entendons une fréquence fondamentale (que nous appelons la, si, do,...), mais cette note est, presque par définition, de durée finie, contrairement aux exponentielles complexes utilisées dans sa décomposition de Fourier. Cette note semble donc *a priori* difficile à décrire par une analyse spectrale usuelle. C'est ainsi que la notation musicale usuelle fait naturellement intervenir simultanément des notions de temps et de fréquence : sur une portée musicale, la variable temporelle correspond à la direction horizontale et la variable fréquentielle à l'axe vertical.

Restons dans le monde de la musique et écoutons un "glissando" joué par exemple par un violoniste ou un violoncelliste. Ce que nous entendons est perçu comme une fréquence (toujours la hauteur du son) dépendant du temps de façon continue, ce que, une fois encore, l'analyse de Fourier peut difficilement décrire.

Dans ces deux cas, il semblerait à première vue préférable de calculer la transformée de Fourier d'une partie finie (un segment) uniquement de la fonction, centrée sur l'instant auquel l'on s'intéresse, plutôt que de la fonction dans son intégralité. En fait cette solution simple souffre d'un grave défaut ; elle équivaut à calculer la transformée de Fourier du produit de la fonction initiale par l'indicatrice du segment considéré, qui n'est autre que le produit de convolution de la transformée de Fourier de la fonction par celle du segment, à savoir un sinus cardinal $\sin(\omega x)/\omega x$. Le résultat est une fonction lentement décroissante de la fréquence, qui ne reflète en rien la bonne localisation fréquentielle de notre signal musical.

La variante que l'on introduit consiste à remplacer l'indicatrice du segment par une fonction (appelée fenêtre), localisée au voisinage du segment,

et suffisamment régulière pour que sa transformée de Fourier soit elle aussi bien localisée, pour éviter l'inconvénient précédent. Nous voyons donc l'intérêt qu'il peut y avoir à utiliser une fenêtre bien localisée des deux côtés de la transformée de Fourier. Il ne nous semble pas nécessaire pour l'instant de donner une définition quantitative précise de l'expression "bien localisée". Sauf spécification contraire, nous dirons qu'une fonction est bien localisée si elle possède de bonnes propriétés de décroissance à l'infini (c'est-à-dire aussi bonnes qu'un critère fixé à l'avance). Dans des cas précis, nous serons amenés à utiliser des notions plus précises de localisation. On peut par exemple supposer qu'une fonction $f(x)$ est telle que

$$|f(x)| \leq \frac{K}{(1 + |x|^N)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pour certaines constantes positives K et N .

Avant d'entrer dans le vif du sujet, donnons encore une motivation supplémentaire pour l'introduction d'une analyse de Fourier locale et illustrons la encore par un exemple musical. Considérons un enregistrement analogique d'un son extrêmement régulier, dont on peut supposer que la transformée de Fourier décroît rapidement, sur un disque détérioré en un unique point. La présence de ce craquement empêche la transformée de Fourier du signal de décroître rapidement, ce qui se traduit par une reconstruction (par transformée de Fourier inverse) numériquement instable, car obtenue à partir d'intégrales très oscillantes, et ce en tous points. Nous verrons plus loin comment l'introduction de fenêtres permettra de "localiser" cette instabilité numérique.

I DÉCOMPOSITION TEMPS-FRÉQUENCE

Nous allons maintenant décrire un certain nombre de "représentations temps-fréquence" des fonctions d'une variable réelle ; par représentation temps-fréquence nous entendons la mise en correspondance de la fonction avec une fonction de deux variables : le temps (ou la position) et la fréquence (ou la fréquence spatiale). Nous verrons plus loin qu'il existe une infinité de façons différentes de construire de telles correspondances ; aussi nous nous restreindrons à une sous-classe, à savoir celle des correspondances :

- linéaires ;
- covariantes : certaines transformations naturelles de la fonction analysée (translation, modulation, dilatation, ...) se traduisent de manière simple sur la représentation temps-fréquence.

On ajoutera à cela une contrainte plus intuitive de "lisibilité" : la représentation choisie doit permettre (dans la mesure du possible) de mettre en évidence

certain types d'informations sur la fonction ou le signal analysé¹. Comme nous l'avons signalé plus haut, la représentation musicale est un prototype de représentation temps-fréquence.

Les notions que nous allons maintenant introduire et utiliser dans les chapitres suivants se rapporteront toujours à un objet essentiel, appelé le *plan temps-fréquence* (ou *position-impulsion* dans le cas multidimensionnel), que l'on nommera aussi *espace des phases*. Le plan temps-fréquence permettra de donner une description à la fois temporelle et fréquentielle des fonctions étudiées. Disons tout de suite que la précision de cette description sera limitée par l'inégalité de Heisenberg (dont nous verrons en particulier une conséquence au chapitre VI) :

$$\Delta x \Delta \xi \geq \frac{1}{2}$$

qui nous montre qu'on ne peut espérer décrire une fonction avec une précision infinie simultanément en temps et en fréquence.

II L'ANALYSE DE FOURIER À COURT TERME

Nous débutons cette analyse par une description de la transformation de Fourier à court terme (aussi appelée transformation de Fourier à fenêtre glissante ou transformée de Gabor) et de la transformation inverse. Plaçons-nous tout d'abord dans le cadre unidimensionnel.

II.1 Les gaborettes en dimension 1

L'idée de base est donc d'introduire dans l'analyse de Fourier usuelle une notion de localité spatiale (ou temporelle) en remplaçant la fonction analysée par un produit de celle-ci par une fenêtre convenablement choisie au préalable possédant de bonnes propriétés de localisation, puis en calculant la transformée de Fourier du produit ainsi formé. On renouvelle alors l'opération avec des copies translatées de la fenêtre, ce qui conduit à une analyse locale en tous points. Si nous choisissons de noter $g(x)$ la fenêtre et $f(x)$ la fonction analysée, le résultat est alors la collection de nombres :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x-b)e^{-i\omega x} dx$$

Pour des raisons pratiques, il est souvent plus intéressant de considérer les coefficients :

$$G_f(b, \omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x-b)^* e^{-i\omega(x-b)} dx \quad (\text{II.1})$$

¹Nous ne sommes pas encore en mesure à ce point de préciser la signification de cette contrainte ; on rejoint là la problématique du traitement du signal adaptatif, qui vise essentiellement à adapter (de façon automatique) l'outil d'analyse à l'objet analysé. Ces notions se préciseront par la suite.

qui s'obtiennent à partir des précédents par une multiplication par $e^{i\omega b}$ et une redéfinition de la fenêtre. Les nouveaux coefficients forment la transformée de Gabor $G_f(b, \omega)$ de $f(x)$, et s'expriment simplement par :

$$G_f(b, \omega) = \langle f, g_{(b, \omega)} \rangle_{L^2} \quad (\text{II.2})$$

où les fonctions

$$g_{(b, \omega)}(x) = g(x - b)e^{i\omega(x - b)} \quad (\text{II.3})$$

sont appelées ondelettes de Gabor, ou encore gaborettes.

Remarque : La transformation de Gabor nous met en présence d'un objet nouveau, que nous appelons *Plan temps-fréquence*, ou *Espace des phases*. Il s'agit ici du plan \mathbb{R}^2 , mais nous verrons par la suite qu'il peut aussi prendre des formes différentes. La transformation de Gabor permet de "représenter" les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ comme des fonctions sur le plan temps-fréquence. Cependant, il est important de rappeler qu'à cause de l'inégalité de Heisenberg déjà mentionnée, toute fonction sur le plan temps-fréquence ne peut être transformée de Gabor d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$.

Remarquons que les gaborettes sont construites à partir de la fenêtre $g(x)$ par une procédure extrêmement simple, à savoir par des translations et des modulations (c'est-à-dire des translations en fréquence). C'est naturellement aussi le cas de leur transformée de Fourier :

$$\widehat{g_{(b, \omega)}}(\xi) = e^{-i\xi b} \hat{g}(\xi - \omega) \quad (\text{II.4})$$

La formule de Plancherel permet donc d'exprimer la transformée de Gabor de $f(x)$ comme une transformée de Gabor de sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$:

$$G_f(b, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi b} \hat{g}(\xi - \omega)^* d\xi \quad (\text{II.5})$$

Supposant sans perte de généralité que $g(x)$ et $\hat{g}(\xi)$ sont toutes deux bien localisées autour de l'origine (on peut en effet toujours se ramener à ce cas par une translation et une modulation), on peut donner l'interprétation suivante des coefficients $G_f(b, \omega)$. $G_f(b, \omega)$ fournit une information sur le "contenu" de $f(x)$ au voisinage du point $x = b$ et de la fréquence $\xi = \omega$. Autrement dit, $G_f(b, \omega)$ sélectionne le contenu de $f(x)$ au voisinage du point de coordonnées (b, ω) dans le plan temps-fréquence. Naturellement, la notion de "contenu" d'une fonction dans un voisinage d'un point est une notion très peu précise, qui dépend en outre très fortement de la fenêtre choisie. Nous serons amenés à donner un sens légèrement plus précis à cette notion par la suite.

La question suivante que l'on est amené à se poser est de savoir comment évolue la localisation de $g_{(b, \omega)}$ dans le plan temps-fréquence quand on fait varier

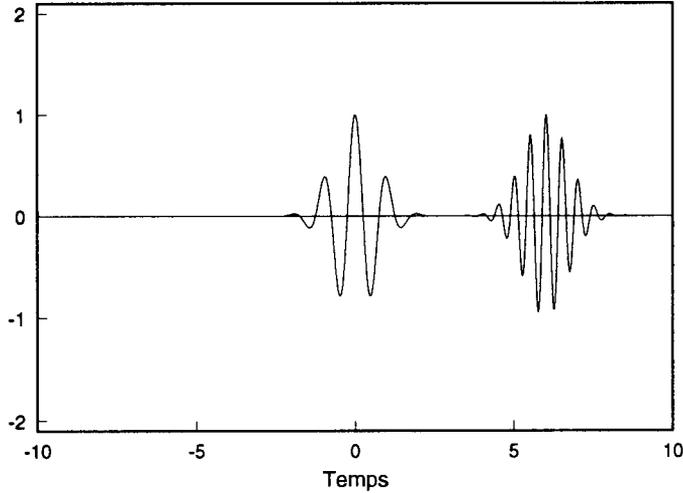


Figure II.1 : Localisation de deux gaborètes $g_{(0,2\pi)}(x)$ et $g_{(6,4\pi)}(x)$ dans l'espace des x (partie réelle).

les paramètres de translation et de modulation b et ω . La réponse à cette question est encore une fois très simple. Les gaborètes étant engendrées par des translations en temps et en fréquence de la fenêtre $g(x)$, $g_{(b,\omega)}$ est localisée dans le plan temps-fréquence à l'intérieur d'une région centrée sur le point de coordonnées (b, ω) , d'aire égale à l'aire du domaine (centré en $(0,0)$) à l'intérieur duquel est localisée $g(x)$. La localisation de $g_{(b,\omega)}$ est décrite dans les figures II.1 et II.2.

Considérons maintenant l'ensemble des coefficients de Gabor $G_f(b, \omega)$, où $b, \omega \in \mathbb{R}$. Les paramètres (b, ω) décrivant la droite réelle, les coefficients de Gabor constituent un ensemble redondant de données (nous verrons comment préciser cette redondance en discutant les espaces à noyaux reproduisants). En revanche, du fait que les gaborètes décrivent l'ensemble du plan temps-fréquence, elles constituent une information suffisante pour la caractérisation de $f(x)$. On peut donc, sous certaines hypothèses, inverser la transformée de Gabor et restituer à partir des $G_f(b, \omega)$ la fonction $f(x)$ elle-même. C'est ce qu'exprime le théorème de représentation suivant.

Théorème 1 Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$. Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée comme suit :

$$f = \frac{1}{2\pi\|g\|^2} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} G_f(b, \omega) g_{(b,\omega)} db d\omega \quad (\text{II.6})$$

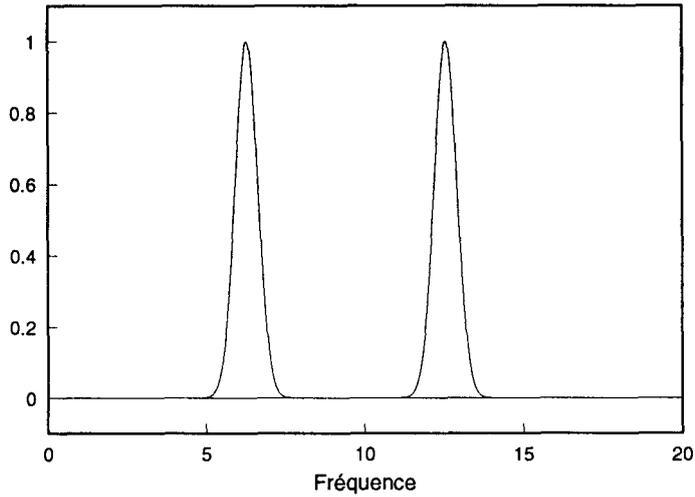


Figure II.2 : Localisation des deux gaborettes de la figure précédente dans l'espace de Fourier (seul le module est représenté).

où l'égalité est à prendre au sens faible et où G_f est la transformée de Gabor de $f(x)$: $G_f(b, \omega) = \langle f, g(b, \omega) \rangle$

Preuve : Il est bien connu que $G_f \in L^2(\mathbb{R}, db)$. Donc :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} |G_f(b, \omega)|^2 db \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i(\xi-\zeta)b} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi - \omega) \overline{\hat{f}(\zeta)} \overline{\hat{g}(\zeta - \omega)} d\xi d\zeta db \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{g}(\xi - \omega)|^2 d\xi \end{aligned}$$

De plus, puisque $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|G_f\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, dbd\omega)}^2 = \int_{\mathbb{R}} |G_f(b, \omega)|^2 dbd\omega = 2\pi \|f\|^2 \|g\|^2 \quad (\text{II.7})$$

ce qui prouve le théorème.

Notons au passage que f et g étant dans $L^2(\mathbb{R})$, $G_f(b, \omega)$ est fini pour tous $b, \omega \in \mathbb{R}$.

Remarque 1 : Découplage des fonctions d'analyse et de synthèse. Le résultat précédent peut être légèrement généralisé, en remarquant que rien ne force à

utiliser les mêmes fenêtres pour le calcul des coefficients et pour l'inversion de la transformée de Gabor. En introduisant une autre fenêtre $h \in L^2(\mathbb{R})$, on montre aisément que l'équation (II.6) peut être remplacée par :

$$f = \frac{1}{2\pi\langle h, g \rangle} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} G_f(b, \omega) h_{(b, \omega)} db d\omega \quad (\text{II.8})$$

où G_f est toujours définie par (II.2) et l'égalité est toujours à prendre au sens faible. Cette propriété peut s'avérer intéressante en pratique (nous verrons plus loin une propriété similaire dans le cadre de l'analyse par ondelettes).

Remarque 2 : Densité d'énergie dans le plan temps-fréquence. La transformée de Fourier à court terme est très utilisée depuis une trentaine d'années dans le contexte de l'analyse de signal. En particulier, son module carré $|G_f(b, \omega)|^2$, parfois appelé spectrogramme, peut être employé pour l'étude de la répartition de l'énergie de $f(x)$ dans le plan temps-fréquence. Ceci est rendu possible par l'équation (II.7), qui est une formule de Plancherel et permet l'interprétation de $\frac{1}{2\pi\|g\|^2} |G_f(b, \omega)|^2$ comme une densité d'énergie de $f(x)$ dans le plan temps-fréquence. Il convient néanmoins de préciser que cette densité d'énergie n'est pas une caractéristique intrinsèque de la fonction analysée, dans la mesure où elle dépend de la fenêtre utilisée.

II.2 Un exemple simple

Nous allons immédiatement voir sur un exemple très simple que le comportement de la transformée de Gabor est tel qu'attendu. La motivation initiale était de permettre une analyse de Fourier locale, c'est-à-dire de donner un accès simple à certaines quantités locales, telles qu'une fréquence locale ou une amplitude locale. Le cas des fréquences locales sera traité au chapitre V, mais nous pouvons considérer le cas de fonctions du type

$$f(x) = A(x)e^{i\lambda x}$$

où $A(x)$ est supposée de classe $C^2(\mathbb{R})$. Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ une fenêtre, supposée à support compact dans un intervalle I centré sur l'origine. Sans perte de généralité, on peut en outre supposer que $|\hat{g}(\xi)|$ soit maximale en $\xi = 0$. Un développement de Taylor au premier ordre $A(x) = A(b) + (x-b)r_b(x)$ conduit à

$$G_f(b, \omega) = A(b)e^{i\lambda b}\hat{g}(\lambda - \omega)^* + R(b, \omega) \quad (\text{II.9})$$

Ainsi, si le reste $R(b, \omega)$ est négligeable, on peut voir que $|G_f(b, \omega)|$ est localement maximum en $\omega = \lambda$, ce qui permet une mesure directe de λ . La décroissance de $|G_f(b, \omega)|$ quand l'on s'éloigne de cette valeur est fixée par les propriétés de localisation de \hat{g} . Sous les mêmes hypothèses, une autre mesure

de λ est fournie par l'étude de la phase de la transformée de Gabor, qui évolue linéairement en fonction de b . Enfin, une mesure de la fonction $A(x)$ est obtenue à partir des variations de $|G_f(b, \omega)|$ en fonction de b .

Tout est donc conditionné par la taille du reste $R(b, \omega)$, qui est ici facile à évaluer. En effet, comme dans $Supp(g_{(b, \omega)})$ on a $|r_b| \leq \sup |A'|$, $R(b, \omega)$ est de plus borné

$$|R(b, \omega)| \leq K \sup_{x \in b+I} |A'(x)| \quad (\text{II.10})$$

où K est une constante (finie dès que $\int |x||g(x)|dx < \infty$) qui ne dépend que de g . Dans ces conditions, on pourra négliger le reste si A'/A est petit sur le support de $g_{(b, \omega)}$, autrement dit si l'amplitude $A(x)$ est lentement variable sur le support de $g_{(b, \omega)}$.

Dans ce qui précède, l'hypothèse $A \in C^2(\mathbb{R})$ n'a pas été utilisée complètement. Elle peut l'être dans un cas bien précis, c'est-à-dire le cas où l'on se place exactement à la fréquence $\omega = \lambda$. En poussant alors le développement de Taylor à l'ordre suivant et en utilisant le fait que $\hat{g}'(0) = 0$, on obtient

$$G_f(b, \omega) = A(b)e^{i\lambda b}\hat{g}(\lambda - \omega)^* + R_2(b, \omega) \quad (\text{II.11})$$

où $R_2(b, \omega)$ est cette fois borné

$$|R_2(b, \omega)| \leq K' \sup_{x \in b+I} |A''(x)| \quad (\text{II.12})$$

pour une constante K' complètement déterminée par $g(x)$ (finie dès lors que $\int |x||g(x)|dx < \infty$).

Il est bien clair que cet exemple simple n'offre en lui-même que peu d'intérêt, dans la mesure où A et ω peuvent être caractérisés plus simplement par une simple transformée de Fourier. Il est néanmoins révélateur de l'usage qui peut être fait des décompositions temps-fréquence pour le problème de détermination de fréquences locales. Nous verrons des exemples plus complexes au chapitre V).

Il faut aussi remarquer que, compte tenu de la linéarité de la transformée de Gabor, la transformée d'une fonction du type :

$$f(x) = \sum_k A_k(x)e^{i\lambda_k x}$$

est donnée par

$$G_f(b, \omega) = \sum_k A_k(b)e^{i\lambda_k b}\hat{g}(\lambda_k - \omega)^* + R(b, \omega)$$

c'est-à-dire une superposition de composantes possédant des propriétés de localisation différentes dans le plan temps-fréquence, ce qui facilite leur séparation.

En effet, dès que ω est proche de l'une des fréquences λ_{k_0} , ou plus précisément si $A_{k_0}(b)\hat{g}(\lambda_{k_0} - \omega) \gg A_k(b)\hat{g}(\lambda_k - \omega)$ pour tout $k \neq k_0$, la transformée de Gabor va essentiellement "voir" la composante d'indice k_0 .

Remarque : On sait que le problème de la recherche des lieux x , tels qu'une fonction $|f(x)|$ atteigne un maximum, est un "problème mal posé" et donc numériquement instable. Néanmoins, le cas que nous considérons est plus favorable, dans la mesure où une transformée de Gabor est une fonction très redondante, comme nous verrons à la fin de ce chapitre. Cette redondance confère à la méthode que nous venons de décrire une plus grande stabilité. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point au chapitre V.

II.3 Le cas multidimensionnel

Terminons cette partie par une description de l'analyse de Fourier à court terme en dimensions supérieures à un. La généralisation se fait de façon immédiate. On considère une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et les gaborettes associées, toujours définies par (II.3) :

$$g_{(b,\omega)}(x) = g(x - b)e^{i\omega \cdot (x-b)}$$

mais pour lesquelles les paramètres de translation et de modulation décrivent chacun \mathbb{R}^n et où $\omega \cdot (x-b)$ est un produit scalaire dans \mathbb{R}^n . Dans ces conditions, on montre aisément que pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a la décomposition suivante généralisant (II.6) :

$$f = \frac{1}{(2\pi)^n \|g\|^2} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} G_f(b, \omega) g_{(b,\omega)} db d\omega \quad (\text{II.13})$$

Les gaborettes sont alors localisées dans l'espace des phases $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans des domaines de forme et de volume constants.

III L'ANALYSE PAR ONDELETTES EN DIMENSION 1

III.1 Décompositions continues en ondelettes

Tournons-nous maintenant vers une autre procédure permettant de décrire le plan temps-fréquence $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En guise de justification, mettons d'abord en évidence l'un des défauts de l'analyse de Fourier à court terme, qui est la conséquence immédiate du processus utilisé pour la construction des gaborettes. Les gaborettes sont des fonctions de taille constante et ne permettent donc pas d'obtenir une résolution temporelle aussi haute que nécessaire. Supposons en

particulier que la fonction analysée $f(x)$ soit singulière en un point $x = x_0$. Les coefficients $G_f(b, \omega)$ ne permettent alors pas de localiser la singularité, c'est-à-dire de déterminer x_0 avec une précision supérieure à la taille de $g(x)$. Les gaborettes étant aussi de taille constante dans l'espace de Fourier, un argument similaire peut y être développé.

Ce raisonnement très simple démontre la nécessité de pouvoir disposer d'une méthode d'analyse agissant en quelque sorte comme un microscope mathématique, c'est-à-dire adaptant sa résolution (ici la taille des fenêtres d'analyse) à la taille de l'objet (ou du détail) analysé. C'est précisément ce que fait l'analyse par ondelettes. Partant d'une fonction $\psi(x)$ bien localisée (dans le plan temps-fréquence), on lui associe la famille d'ondelettes $\psi_{(b,a)}(x)$ engendrées par des translations et des dilatations de $\psi(x)$:

$$\psi_{(b,a)}(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{III.1})$$

les paramètres b et a décrivant généralement \mathbb{R} et \mathbb{R}_+^* . Les ondelettes sont donc de forme constante, mais de taille variable, proportionnelle au paramètre de dilatation a .

Les ondelettes $\psi_{(b,a)}(x)$ permettent de décrire le plan temps-fréquence de façon assez différente de la description donnée par les gaborettes. Remarquons tout d'abord que l'on peut toujours, sans perte de généralité, supposer que $\psi(x)$ est bien localisée autour de l'origine $x = 0$. En revanche, $\hat{\psi}(\xi)$ n'a aucune raison d'être localisée autour de l'origine des fréquences $x = 0$, nous allons en fait voir plus loin que cette hypothèse doit être exclue. Supposons donc $\hat{\psi}(\xi)$ bien localisée autour du point $x = \omega_0 > 0$. Dans ces conditions, $\psi_{(b,a)}(x)$ est bien localisée dans une région du plan temps-fréquence, centrée sur le point de coordonnées $(b, \omega_0/a)$. De plus, ce domaine est une version dilatée (dans la variable x) et contractée (dans la variable ξ) du domaine dans lequel est localisée $\psi(x)$. On a supposé ici $a > 1$; si $a < 1$, il y a dilatation en x et contraction en ξ . Ces propriétés de localisation sont décrites dans les figures II.3 et II.4.

L'analyse par ondelettes associe donc à la fonction analysée l'ensemble de coefficients :

$$T_f(b, a) = \langle f, \psi_{(b,a)} \rangle_{L^2} \quad (\text{III.2})$$

qui, parallèlement aux coefficients de Gabor, décrivent le contenu de $f(x)$ au voisinage de $(b, \omega_0/a)$ dans le plan temps-fréquence. L'ensemble de ces coefficients forme la transformée en ondelettes de $f(x)$. De même que la transformée de Fourier à court terme, celle-ci est inversible sur son image dans certaines hypothèses. On peut, en particulier, reprendre une preuve similaire à celle de la section précédente et montrer une formule de réciprocity au sens faible. Nous donnons ici un résultat légèrement plus fort, qui nous sera utile pour la suite.

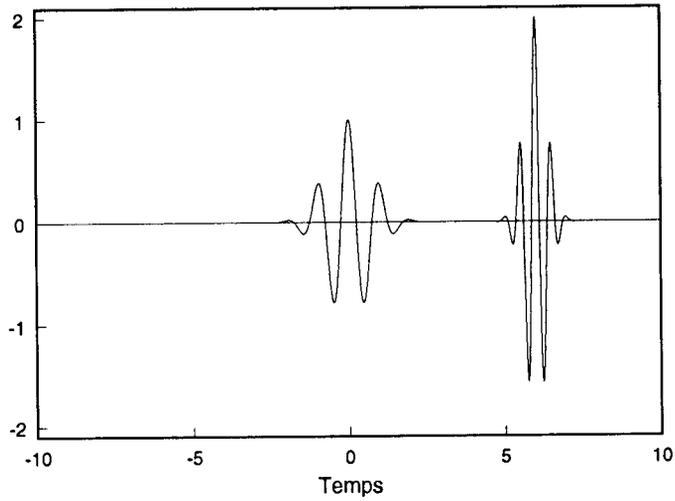


Figure II.3 : Localisation de deux ondelettes $\psi(x)$ et $\psi_{(6,2)}(x)$ dans l'espace des x (partie réelle).

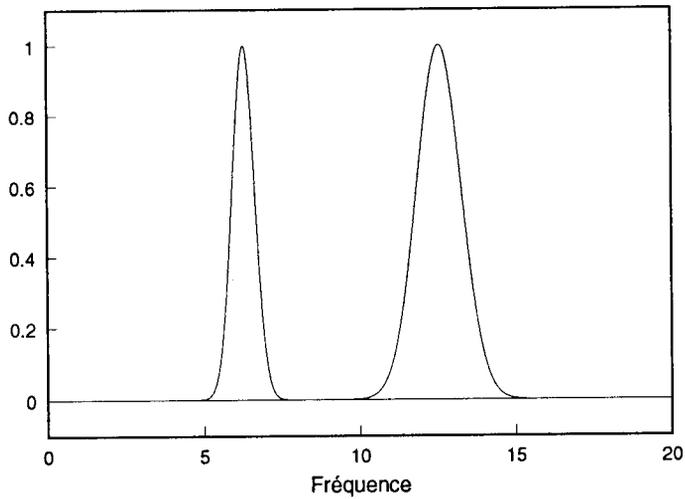


Figure II.4 : Localisation des deux ondelettes de la figure précédente dans l'espace de Fourier (seul le module est représenté).

Plus précisément, nous allons en fait donner trois formules d'inversion, utiles dans différents contextes.

Théorème 2

1) Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, telle que :

$$0 < c_\psi = \int_0^\infty \left| \hat{\psi}(u) \right|^2 \frac{du}{u} = \int_0^\infty \left| \hat{\psi}(-u) \right|^2 \frac{du}{u} < \infty \quad (\text{III.3})$$

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée ainsi :

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} T_f(b, a) \psi_{(b, a)} \frac{dadb}{a} \quad (\text{III.4})$$

où l'égalité est à prendre au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$.

2) Si $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que seules ses fréquences positives satisfont la condition d'admissibilité :

$$0 < c_\psi = \int_0^\infty \left| \hat{\psi}(u) \right|^2 \frac{du}{u} < \infty \quad (\text{III.5})$$

la formule (III.4) reste valable pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{R})$.

3) Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, telle que :

$$0 < c'_\psi = \int_{-\infty}^\infty \left| \hat{\psi}(u) \right|^2 \frac{du}{|u|} < \infty \quad (\text{III.6})$$

Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée comme suit :

$$f = \frac{1}{c'_\psi} \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} T_f(b, a) \psi_{(b, a)} \frac{dadb}{a} \quad (\text{III.7})$$

où l'égalité est à prendre au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$.

Avant de donner la démonstration de ce résultat, il est intéressant de fixer les différences entre ces trois approches. Le point essentiel est que des paramètres de dilatation positifs ne permettent en général pas de décrire de la même manière les demi-axes positif et négatif de l'espace de Fourier. Les trois résultats précédents s'appliquent à des cas dans lesquels les difficultés disparaissent de différentes manières. Dans le premier cas, l'ondelette $\psi(x)$ possède des propriétés de symétrie (dans l'espace des fréquences) suffisantes pour traiter simultanément les fréquences positives et négatives. Dans le second cas, on simplifie le problème en restreignant l'analyse à l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{R})$ des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ ne possédant pas de fréquence négative. Enfin, le problème est évité dans le troisième cas par l'introduction de dilatations négatives ou, ce qui est équivalent, de dilatations positives composées d'une réflexion par rapport à l'origine des fréquences.

Preuve : Passons maintenant à la preuve du théorème. Notons tout d'abord qu'il est facile de vérifier les égalités (III.4) et (III.7) par un calcul formel, si l'on ne se soucie pas de la convergence des expressions employées. Le travail consiste donc à donner un sens à ce calcul formel.

Si on note $\tilde{f}(x) = f(-x)^*$, il vient :

$$T_f(b, a) = [f * \tilde{\psi}_a](b) \quad (\text{III.8})$$

où

$$\psi_a(x) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{III.9})$$

et l'inégalité de Young assure que $T_f \in L^2(\mathbb{R}, db)$. Considérons :

$$d_a(x) = \int_{\mathbb{R}} T_f(b, a) \psi_{(b,a)}(x) db \quad (\text{III.10})$$

alors $d_a(x) = [T_f(\cdot, a) * \psi_a](x)$ et l'inégalité de Young entraîne que $d_a \in L^2(\mathbb{R})$ pour tout $a > 0$. \widehat{d}_a existe donc presque partout et

$$\widehat{d}_a(\xi) = \left| \widehat{\psi}(a\xi) \right|^2 \widehat{f}(\xi) \quad p.p. \quad (\text{III.11})$$

Soit ϵ un nombre réel positif non nul et soit :

$$s_\epsilon(x) = \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} d_a(x) \frac{da}{a} \quad (\text{III.12})$$

L'inégalité intégrale de Minkowsky implique que $\|s_\epsilon\|^2 \leq \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \|d_a\|^2 \frac{da}{a}$, de sorte que \widehat{s}_ϵ existe presque partout et :

$$\widehat{s}_\epsilon(\xi) = \widehat{f}(\xi) \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \left| \widehat{\psi}(a\xi) \right|^2 \frac{da}{a} \quad p.p. \quad (\text{III.13})$$

Plaçons-nous maintenant dans le cadre décrit dans la première partie du théorème.

$$\int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \left| \widehat{\psi}(a\xi) \right|^2 \frac{da}{a} = \int_{\epsilon|\xi|}^{|\xi|/\epsilon} \left| \widehat{\psi}(u\sigma) \right|^2 \frac{du}{u} \quad (\text{III.14})$$

où $\sigma = \text{sgn}(\xi)$. On a donc $|\widehat{s}_\epsilon(\xi)| < c_\psi \left| \widehat{f}(\xi) \right|$ p.p. et le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'en déduire :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| f - \frac{1}{c_\psi} s_\epsilon \right\|^2 = 0 \quad (\text{III.15})$$

ce qui prouve (1).

(2) s'obtient comme cas particulier de (1) pour des fonctions $f(x)$ telles que $\hat{f}(\xi) = 0 \forall \xi \leq 0$.

Enfin, (3) s'obtient de façon similaire en montrant que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\| f - \frac{1}{c_\psi} (s_\epsilon + s_{-\epsilon}) \right\|^2 = 0 \quad (\text{III.16})$$

La convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ entraînant la convergence faible, on déduit immédiatement de ces résultats le corollaire suivant :

Corollaire 1

i) Si $c_\psi < \infty$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $T_f \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{da db}{a})$, et

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} |T_f(b, a)|^2 \frac{da}{a} db = c_\psi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \quad (\text{III.17})$$

ii) Si $c'_\psi < \infty$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $T_f \in L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \frac{da db}{|a|})$, et

$$\int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} |T_f(b, a)|^2 \frac{da}{a} db = c'_\psi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \quad (\text{III.18})$$

Ces deux formules de Plancherel montrent que la transformée en ondelettes est une isométrie partielle de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$), et permettent donc l'interprétation de $\frac{1}{c_\psi} |T_f(b, a)|^2$ (resp. $\frac{1}{c'_\psi} |T_f(b, a)|^2$) comme une densité d'énergie dans le demi-plan (resp. plan) temps-échelle.

Remarque 1 : "Admissibilité" des ondelettes. Nous avons vu dans la section précédente qu'étant donnée une fonction fenêtre $g(x)$ intégrable, la condition nécessaire à l'utilisation de $g(x)$ dans le cadre de l'analyse de Gabor de $L^2(\mathbb{R})$ est que $g(x)$ soit de carré intégrable. Dans le cas de l'analyse par ondelettes, la condition nécessaire pour que $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ puisse être utilisée comme ondelette analysante est qu'elle vérifie une *condition d'admissibilité*, comme par exemple $c_\psi = \int_0^\infty |\hat{\psi}(u)|^2 \frac{du}{u} < \infty$ (ou une condition similaire). Cette condition implique en particulier que $\hat{\psi}(0) = \int \psi(x) dx = 0$. Une ondelette admissible est donc typiquement une fonction d'intégrale nulle, donc oscillante. Les exemples ne manquent pas. Le plus simple est sans doute la fonction de Haar, qui vaut -1 entre -1 et 0, 1 entre 0 et 1, et 0 ailleurs. Dans le contexte de l'analyse d'images et de la vision par ordinateur, les ondelettes les plus employées sont la dérivée seconde de fonction gaussienne et la différence de deux gaussiennes de même centre et intégrale, à des échelles différentes. Un autre exemple célèbre est, aussi paradoxal que cela puisse paraître car non admissible, l'ondelette de Morlet, ou gaussienne déplacée en fréquence : $\psi(x) = \exp(-x^2/2) \exp(i\omega x)$. Dans ce

cas, $\hat{\psi}(0) > 0$, mais pour ω assez grand ($\omega \geq 5$ en pratique), $\hat{\psi}(0)$ est assez petit pour pouvoir être considéré comme “numériquement admissible”². L’un des avantages pratiques de l’ondelette de Morlet est qu’elle est bien adaptée à l’analyse de $H^2(\mathbb{R})$ (nous en verrons des applications au chapitre V) et optimalement localisée dans le plan temps-fréquence (elle minimise l’inégalité de Heisenberg).

Remarque 2 : Découplage des ondelettes d’analyse et de reconstruction. Comme dans le cas de la transformée de Gabor, on peut utiliser une ondelette différente pour reconstruire f à partir de sa transformée en ondelettes. Soit $\gamma \in L^1(\mathbb{R})$, telle que de plus

$$c_{\psi,\gamma} = \int_0^\infty \hat{\psi}(u)^* \hat{\gamma}(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty \hat{\psi}(-u)^* \hat{\gamma}(-u) \frac{du}{u} \quad (\text{III.19})$$

et

$$0 < |c_{\psi,\gamma}| < \infty \quad (\text{III.20})$$

On se place par exemple dans le cadre décrit par la première partie du théorème 2. Le théorème 2 se généralise alors et on peut écrire pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$f = \frac{1}{c_{\psi,\gamma}} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} T_f(b,a) \gamma(b,a) \frac{dadb}{a} \quad (\text{III.21})$$

Une telle formule d’inversion est particulièrement utile en pratique. En effet, il arrive souvent que l’on ait besoin d’ondelettes d’analyse et de reconstruction ayant des propriétés différentes³. Nous verrons aussi à la fin de ce chapitre un exemple dans lequel l’ondelette d’analyse n’est pas admissible, mais où la condition mixte (III.19-III.20) permet de faire porter l’admissibilité sur l’ondelette de synthèse.

Remarque 3 : Décomposition de Littlewood-Paley. Si on prend formellement $\gamma = \delta$ (la masse de Dirac à l’origine) dans (III.19) et (III.21), en définissant :

$$k_\psi = \int_0^\infty \hat{\psi}(u)^* \frac{du}{u} = \int_0^\infty \hat{\psi}(-u)^* \frac{du}{u}, \quad (\text{III.22})$$

et en supposant que :

$$0 < |k_\psi| < \infty \quad (\text{III.23})$$

²Il est possible de donner un sens plus précis au terme “numériquement admissible”. Tous les calculs numériques étant en pratique effectués avec une précision finie (simple ou double précision), $g(x)$ sera numériquement admissible dès que $\hat{g}(0)$ n’excède pas la limite de précision fixée. Bien entendu, pour tous les problèmes pour lesquels la précision est cruciale, il conviendra d’être plus soigneux.

³Il est souvent utile d’utiliser des ondelettes d’analyse possédant des moments nuls, alors que la synthèse réclame plutôt des ondelettes moins oscillantes.

on obtient la formule de reconstruction dite de Morlet :

$$f(x) = \frac{1}{k_\psi} \int_0^\infty T_f(x, a) \frac{da}{a} \quad (\text{III.24})$$

Bien entendu, la formule de Morlet doit être montrée différemment. On part d'une fonction $\varphi(x)$ telle que $\int \varphi(x) dx = 1$, et on lui associe l'identité approchée $\varphi_a(x) = \varphi(x/a)/a$. Si on note $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)^*$, et si à $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ on associe $T_f(b, a) = -a \partial_a f * \tilde{\varphi}_a(b)$, (III.24) est une conséquence de $\lim_{a \rightarrow 0} f * \tilde{\varphi}_a$.

La formule de Morlet s'avère particulièrement efficace du point de vue numérique, car elle met en jeu une intégrale simple au lieu d'une intégrale double, ce qui réduit d'autant le volume des calculs.

III.2 Quelques exemples simples

1) Reprenons tout d'abord l'exemple discuté dans le paragraphe précédent, pour illustrer l'aspect "analyse de Fourier locale" des ondelettes. Soit donc

$$f(x) = A(x)e^{i\lambda x}$$

la fonction considérée précédemment, et soit $\psi(x)$ une ondelette à support compact dans un intervalle I , telle que $\hat{\psi}(\xi)$ est maximale pour une certaine valeur $\xi = \omega_0$. En utilisant les mêmes outils que précédemment, il vient

$$T_f(b, a) = A(b)e^{i\lambda b} \hat{\psi}(a\lambda)^* + R(b, a) \quad (\text{III.25})$$

où

$$|R(b, a)| \leq K \sup_{x \in aI+b} |A'(x)| \quad (\text{III.26})$$

La transformée en ondelettes est donc localisée autour de $a = \omega_0/\lambda$ et permet une mesure directe de λ et $A(x)$, à condition bien sûr que le reste $R(b, a)$ soit négligeable, ce qui est le cas quand les variations de l'amplitude sont lentes par rapport aux oscillations provenant de l'exponentielle complexe.

Le cas des signaux du même type, mais cette fois à valeurs réelles (*i.e.* $A(x) \cos(\lambda x)$), se traite de façon similaire, à condition d'utiliser une ondelette $\psi \in H^2(\mathbb{R})$, qui supprime les fréquences négatives. On est alors ramenés au problème précédent.

2) Passons donc à l'illustration de l'aspect "analyse ponctuelle" de la transformée en ondelettes. Supposons, par exemple, que nous ayons à analyser une fonction $f(x)$ qui possède un comportement singulier en x_0 , par exemple une singularité hölderienne : il existe deux constantes $0 < \alpha < 1$ et $K > 0$ telles que :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{III.27})$$

Dans ces conditions, en utilisant une ondelette ψ , donc d'intégrale nulle, telle que :

$$K' = \int |x|^\alpha |\psi(x)| dx < \infty ,$$

on a :

$$\begin{aligned} |T_f(b, a)| &= \left| \int [f(x) - f(x_0)] \psi_{(b,a)}(x)^* dx \right| \\ &\leq \int [|x - b|^\alpha + |b - x_0|^\alpha] |\psi_{(b,a)}(x)| dx , \end{aligned}$$

de sorte que :

$$|T_f(b, a)| \leq K |b - x_0|^\alpha \|\psi\|_1 + K K' a^\alpha \tag{III.28}$$

La transformée en ondelettes permet donc dans ce cas l'estimation de l'exposant α . Nous reviendrons plus en détail sur l'analyse par ondelettes des propriétés de régularité locale dans le chapitre IV.

IV ONDELETTES MULTIDIMENSIONNELLES

Nous avons pu voir à la fin de la section II que l'analyse de Fourier à court terme se généralise sans problème à plusieurs dimensions. Nous allons maintenant voir que la généralisation multidimensionnelle de l'analyse par ondelettes est légèrement plus complexe, essentiellement pour la même raison que celle qui avait conduit à trois théorèmes de représentation à une dimension différents. Nous allons ici obtenir deux versions différentes de l'analyse par ondelettes, généralisant les parties (1) et (3) du théorème 2. Nous nous plaçons dans le cadre où les mêmes ondelettes sont utilisées pour la décomposition et la reconstruction. Il est bien évident que l'on peut, comme précédemment, découpler les ondelettes d'analyse et de reconstruction.

IV.1 Ondelettes radiales

Nous considérons ici des ondelettes engendrées de la manière habituelle, c'est-à-dire par des translations et des dilatations de l'ondelette mère $\psi(x)$. Notons donc :

$$\psi_{(b,a)}(x) = \frac{1}{|a|^n} \psi\left(\frac{x - b}{a}\right) \tag{IV.1}$$

pour tous $b \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ (noter ici la normalisation différente de (III.I). A toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on associe ses coefficients en ondelettes :

$$T_f(b, a) = \langle f, \psi_{(b,a)} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{IV.2}$$

Ces coefficients d'ondelettes permettent une analyse du même type que celles précédemment décrites, sous réserve que ψ satisfasse certaines conditions d'invariance par rotation dans \mathbb{R}^n , ce qu'exprime le résultat suivant :

Théorème 3 Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, telle que :

$$c_\psi = \int_0^\infty |\hat{\psi}(ue)|^2 \frac{du}{u} \quad (\text{IV.3})$$

soit finie et indépendante du vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^n$. Toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ peut être décomposée comme suit :

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n} T_f(b, a) \psi_{(b, a)} \frac{dadb}{a} \quad (\text{IV.4})$$

où l'égalité est à prendre au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, $T_f \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n, \frac{dadb}{a})$.

Preuve : La preuve est en tous points identique à celle du théorème 2 de la section précédente, jusqu'à l'équation (III.14). Ensuite, on a :

$$\int_\epsilon^{1/\epsilon} |\hat{\psi}(ax)|^2 \frac{da}{a} = \int_{\epsilon/\|x\|}^{\|x\|/\epsilon} |\hat{\psi}(ae_x)|^2 \frac{da}{a} \quad (\text{IV.5})$$

où on a posé $e_x = x/\|x\|$. Enfin, (III.16) est toujours valide, de sorte que le théorème de convergence dominée permet de conclure.

Examinons maintenant les conséquences de l'hypothèse faite sur l'ondelette ψ . Le fait que c_ψ soit finie est une hypothèse déjà rencontrée dans la section précédente. En revanche, le fait que (IV.3) soit indépendant du vecteur unitaire $e \in \mathbb{R}^n$ a pour conséquence (si ψ est suffisamment régulière) que $|\hat{\psi}(\xi)|$ est invariante par les translations de la sphère de rayon ξ dans l'espace de Fourier. Par conséquent, $\hat{\psi}(\xi)$ ne peut être localisée mieux que dans une couronne centrée sur l'origine des fréquences et les coefficients $T_f(b, a)$ ne peuvent donner aucune information sur des localisations dans l'espace spectral. Par exemple, si la fonction analysée est de la forme $f(x) = A(x) \exp(ik_0 \cdot x)$, où $A(x)$ est une enveloppe lentement variable, les coefficients $T_f(b, a)$ peuvent permettre l'évaluation de $\|k_0\|$, mais pas celle de k_0 lui-même. Pour pallier ce défaut de l'analyse par ondelettes usuelle, on introduit des degrés de liberté supplémentaires, correspondant à des rotations dans \mathbb{R}^n . En revanche, l'avantage des ondelettes radiales est que la transformée en ondelettes est ici une fonction de $n+1$ variables, au lieu de $2n$ dans le cas de l'analyse de Fourier à court terme.

IV.2 Ondelettes engendrées par les translations, rotations et dilatations de \mathbb{R}^n

Commençons pour simplifier par le cas bidimensionnel. Nous cherchons à construire des familles d'ondelettes que l'on puisse bien localiser dans l'espace

de Fourier. L'idée est donc de partir d'une telle fonction et de faire agir dessus des rotations, en plus des translations et dilatation usuelles, afin de faire varier sa localisation dans l'espace de Fourier. Considérons donc, pour $\theta \in [0, 2\pi]$, la matrice de rotation :

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

et notons

$$\psi_{(b,a,\theta)}(x) = \frac{1}{a^2} \psi \left(r_\theta^{-1} \cdot \frac{x-b}{a} \right) \quad (\text{IV.7})$$

On construit ainsi la transformée en ondelettes de $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$T_f(b, a, \theta) = \langle f, \psi_{(b,a,\theta)} \rangle \quad (\text{IV.8})$$

qui est maintenant une fonction de quatre variables réelles. Il est facile de vérifier (en adaptant les démonstrations précédentes et en utilisant le fait que la mesure $d\theta$ est invariante par rotation sur le cercle) que, pour peu que l'ondelette $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ vérifie la condition d'admissibilité

$$0 < c_\psi = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\|\xi\|^2} < \infty \quad (\text{IV.9})$$

on a alors la décomposition suivante : $\forall f(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} T_f(b, a, \theta) \psi_{(b,a,\theta)}(x) db \frac{da}{a} d\theta \quad (\text{IV.10})$$

La démonstration est laissée au lecteur.

Passons maintenant au cas de dimension quelconque. Nous nous donnons maintenant la possibilité de faire agir sur l'ondelette mère $\psi(x)$, en plus des dilatations et translations habituelles, des matrices de rotation en dimension n . Si r est une telle matrice — nous rappelons ici qu'une matrice de rotation est une matrice orthogonale, c'est-à-dire telle que $r \cdot {}^t r = 1$ et de déterminant 1 ; les rotations de \mathbb{R}^n forment un groupe de dimension $n(n+1)/2$, noté $SO(n)$. On considère donc les ondelettes :

$$\psi_{(b,a,r)}(x) = \frac{1}{a^n} \psi \left(r^{-1} \cdot \frac{x-b}{a} \right) \quad (\text{IV.11})$$

On construit ainsi la transformée en ondelettes de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$T_f(b, a, r) = \langle f, \psi_{(b,a,r)} \rangle \quad (\text{IV.12})$$

qui est donc maintenant une fonction de $n(n+1)/2 + 1$ paramètres réels, au lieu de $n+1$ dans le cas précédent. Nous allons voir que l'introduction des matrices

de rotation permet de se passer de l'hypothèse d'invariance par rotation de l'ondelette $\hat{\psi}(\xi)$, le prix à payer étant un accroissement notable de la dimension de l'espace des paramètres. Pour plus de détail sur les rotations et les angles d'Euler en dimension n , nous renvoyons au complément A à la fin de ce chapitre.

Considérons donc les coefficients :

$$T_f(b, a, r) = \langle f, \psi_{(b,a,r)} \rangle .$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour montrer le théorème suivant :

Théorème 4 : Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$c_\psi = A_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{dx}{\|x\|^n} < \infty \quad (\text{IV.27})$$

Alors, toute $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ peut être décomposée comme :

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \times SO(n)} T_f(b, a, r) \psi_{(b,a,r)} \frac{dadb}{a} d\mu_n(r) \quad (\text{IV.28})$$

où l'égalité est à prendre au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus, $T_f \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n \times SO(n), \frac{dadb}{a} d\mu_n(r))$.

Preuve : La preuve suit les grandes lignes des démonstrations précédentes. Introduisons la fonction $d_{a,r}$ définie par :

$$d_{a,r}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} T_f(b, a, r) \psi_{(b,a,r)}(x) db \quad (\text{IV.29})$$

puis :

$$s_\epsilon(x) = \int_\epsilon^{1/\epsilon} \int_{SO(n)} d_{a,r}(x) \frac{da}{a} d\mu_n(r) \quad (\text{IV.30})$$

En répétant les mêmes arguments que précédemment, on vérifie aisément que

$$|\hat{s}_\epsilon(\xi)| < |\hat{f}(\xi)| \int_{\mathbb{R}_+^* \times SO(n)} |\hat{\psi}(ar \cdot \xi)|^2 \frac{da}{a} d\mu_n(r) \text{ p.p.} \quad (\text{IV.31})$$

et le lemme 3 du complément A permet de conclure.

Notons que, dans ce cas, la transformée en ondelettes est une fonction de $n(n+1)/2 + 1$ paramètres, ce qui représente un important volume de données pour les grandes valeurs de n .

IV.3 Retour sur l'espace "temps-fréquence"

On vérifie de façon immédiate que dans le cas d'une ondelette $\psi(x)$ invariante par rotation, (IV.10) redonne essentiellement (IV.4). En revanche, une hypothèse légèrement plus faible permet de retrouver un espace "temps-fréquence" (ou "position-impulsion") naturel, de dimension $2n$. Supposons que $\psi(x)$ soit invariante par rotation dans un hyperplan \mathbb{R}^{n-1} de dimension $n-1$ de \mathbb{R}^n . Notons $e_n \in \mathbb{R}^n$ un vecteur unitaire perpendiculaire à l'hyperplan d'invariance. Comme nous le montre le complément A, toute matrice de rotation $r \in SO(n)$ peut être factorisée en un produit

$$r = r_0 \cdot s$$

où $s \in SO(n-1)$ est une matrice de rotation dans l'hyperplan d'invariance, laissant donc e_n invariant. Les ondelettes

$$\psi_{(b,a,r_0)} = a^{-n} \psi \left(s^{-1} r_0^{-1} \cdot \frac{x-b}{a} \right) \tag{IV.32}$$

sont donc indépendantes de s et paramétrées par les éléments de $SO(n)$ modulo $SO(n-1)$, autrement dit la sphère S^{n-1} .

Exemple : Considérons l'exemple de l'ondelette de Morlet en dimension 3, définie par sa transformée de Fourier

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-(\xi-k)^2} - e^{-k^2}$$

où $k \in \mathbb{R}^3$ est la "fréquence centrale" de l'ondelette et le terme e^{-k^2} , nécessaire pour l'admissibilité de $\psi(x)$, est numériquement négligeable dès que $|k|$ est assez grand. Il est évident que $\psi(x)$ est invariante par toutes les rotations dans le plan perpendiculaire à k . En effet, si l'on choisit une base orthonormée $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 telle que k soit proportionnel à e_3 , il vient :

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-\xi_1^2 - \xi_2^2} e^{-(\xi_3 - |k|)^2} - e^{-k^2}$$

et toute rotation dans le plan (e_1, e_2) laisse invariant $\xi_1^2 + \xi_2^2$. Dans ce cas, on pourra paramétrer les ondelettes de Morlet tridimensionnelles par trois variables de position, une variable d'échelle et deux angles de rotation seulement.

Dans le cas général, si l'on paramètre la sphère de dimension $n-1$ par ses angles d'Euler, on obtient donc une représentation temps-fréquence, fonction de :

- n variables de position b , en coordonnées cartésiennes ;
- une variable d'échelle a ;
- $n-1$ angles, paramétrant une direction dans l'espace des fréquences.

Ce qui fait un espace de dimension $2n$. Une autre interprétation des n dernières variables est qu'elles ne sont autres que les coordonnées sphériques (en dimension n) d'une fréquence, a , ou plutôt a^{-1} pour des raisons d'homogénéité, étant la variable radiale, et les angles d'Euler les variables angulaires.

Le théorème de représentation correspondant s'obtient facilement, en utilisant la factorisation de la mesure de Haar sur $SO(n)$ en mesure de Haar sur $SO(n-1)$ fois la mesure invariante sur la sphère, qui permet tout simplement de remplacer l'intégration sur $SO(n)$ par une intégration sur les angles d'Euler paramétrant S^{n-1} , tout en divisant la constante d'admissibilité par $Vol(SO(n-1))$.

V NOYAUX REPRODUISANTS

Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer que l'ensemble des coefficients d'une fonction, obtenus dans le cadre d'une analyse de type temps-fréquence, fournit une information fortement redondante sur la fonction analysée. Cette redondance peut en fait être facilement caractérisée par l'introduction du concept d'espace de Hilbert à noyaux reproduisants.

Un espace de Hilbert à noyaux reproduisants est un espace de Hilbert de fonctions satisfaisant à une relation du type :

$$f = \mathcal{K} \cdot f \tag{V.1}$$

où \mathcal{K} est un opérateur à noyau, défini par

$$[\mathcal{K} \cdot f](x) = \int K(x, y) f(y) dy \tag{V.2}$$

Il existe en fait un grand nombre d'espaces familiers qui sont des espaces à noyaux reproduisants. L'un des plus célèbres est sans doute l'espace des fonctions analytiques d'une variable complexe dans le demi-plan de Poincaré $H = \{z \in \mathcal{C}, \text{Im}(z) > 0\}$. Un noyau reproduisant de cet espace est le noyau de Cauchy et on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t - z} dt \tag{V.3}$$

Un autre exemple très classique d'espace à noyaux reproduisants, exemple que nous allons être amenés à rencontrer souvent par la suite, est l'espace de Paley-Wiener :

$$PW_{\omega} = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \text{Supp}(\hat{f}) \subset [-\omega, \omega]\} \tag{V.4}$$

aussi appelé espace des fonctions à bande limitée ou fonctions à fréquence de coupure. La théorie de l'échantillonnage usuelle montre que si $f \in PW_{\omega}$, f

est entièrement déterminée par un ensemble discret de valeurs (échantillons) $f_k = f(k\pi/\omega)$, $k \in \mathbb{Z}$; autrement dit :

$$f(x) = \sum_k f_k \frac{\sin(\omega(x - k\pi/\omega))}{\omega(x - k\pi/\omega)} \quad (\text{V.5})$$

ce qui est aussi une équation de reproduction.

Nous allons voir que, pour chaque théorème de représentation décrit depuis le début de ce chapitre, la transformée en ondelettes et la transformée de Fourier à court terme font naturellement apparaître des noyaux reproduisants. Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cadre de l'analyse par ondelettes unidimensionnelle décrite par le théorème 1 de la section III. Le théorème 1 peut être récrit sous la forme d'une égalité entre opérateurs :

$$\frac{1}{c_\psi} \int \psi_{(b,a)} \otimes \psi_{(b,a)}^{(*)} \frac{dad b}{a} = 1 \quad (\text{V.6})$$

où $\psi_{(b,a)}^{(*)}$ est la forme linéaire définie par :

$$\psi_{(b,a)}^{(*)} \cdot f = \langle f, \psi_{(b,a)} \rangle \quad (\text{V.7})$$

de sorte que l'intégrand de (V.4) est un opérateur de rang 1 :

$$[\psi_{(b,a)} \otimes \psi_{(b,a)}^{(*)}] \cdot f = T_f(b, a) \psi_{(b,a)} \quad (\text{V.8})$$

On peut alors, suivant une procédure usuelle en physique, insérer l'identité (V.4) dans la définition de $T_f(b, a)$, ce qui conduit à l'égalité :

$$T_f(b_0, a_0) = \int K_\psi(b_0, a_0; b, a) T_f(b, a) \frac{dad b}{a} \quad (\text{V.9})$$

le noyau K_ψ étant donné par :

$$K_\psi(b_0, a_0; b, a) = \frac{1}{c_\psi} \langle \psi_{(b_0, a_0)}, \psi_{(b, a)} \rangle \quad (\text{V.10})$$

K_ψ est donc entièrement déterminé par l'ondelette ψ et possède de plus la propriété de covariance par translation-dilatation suivante :

$$K_\psi(b_0, a_0; b, a) = \frac{1}{a} K_\psi\left(\frac{b_0 - b}{a}, \frac{a_0}{a}; 0, 1\right) \quad (\text{V.11})$$

Finalement, un raisonnement du même type conduit à :

$$\int K_\psi(b_0, a_0; b, a) K_\psi(b, a; b_1, a_1) \frac{dad b}{a} = K_\psi(b_0, a_0; b_1, a_1) \quad (\text{V.12})$$

Notons P_ψ l'opérateur à noyau défini par K_ψ . Clairement, P_ψ est auto-adjoint. Nous avons donc montré :

Proposition 1 Soit T_f la transformée en ondelettes de la fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ par rapport à l'ondelette $\psi \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$T_f \in \mathcal{H}_\psi \quad (\text{V.13})$$

où \mathcal{H}_ψ est le sous-espace de $L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{dadb}{a})$ défini par le noyau reproduisant K_ψ .

$$\mathcal{H}_\psi = \left\{ F \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{dadb}{a}), P_\psi \cdot F = F \right\} \quad (\text{V.14})$$

De plus, P_ψ est un projecteur orthogonal.

Cette propriété de noyau reproduisant s'avère très intéressante en pratique, car elle conduit à des formules d'interpolation permettant la restitution (approchée) de la transformée continue à partir de versions échantillonnées. On peut pour cela utiliser des résultats déjà existants concernant la théorie de l'échantillonnage dans les espaces de Hilbert à noyaux reproduisants. Nous reviendrons sur ces questions au chapitre VI quand nous décrirons les notions de repères d'ondelettes (et de gaborettes).

Remarque 1 : Nous avons déjà vu que la formule de reconstruction d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ à partir de sa transformée en ondelettes est loin d'être unique, dans la mesure où une ondelette différente peut être utilisée pour la reconstruction. De même, le noyau reproduisant est loin d'être lui-même unique. En effet, si γ est l'ondelette de reconstruction, ce qui suppose que $0 < c_{\psi,\gamma} = \int \frac{d\xi}{\xi} \hat{\gamma}(\xi) \hat{\psi}(\xi)^* < \infty$, le noyau $K_{\psi,\gamma}$ défini par :

$$K_{\psi,\gamma}(b_0, a_0; b, a) = \frac{1}{c_{\psi,\gamma}} \langle \gamma_{(b_0, a_0)}, \psi_{(b, a)} \rangle \quad (\text{V.15})$$

est lui aussi un noyau reproduisant pour la transformée en ondelettes. Il possède toujours les mêmes propriétés de covariance, mais définit cette fois un projecteur oblique sur \mathcal{H}_ψ .

Remarque 2 : La projection sur l'espace \mathcal{H}_ψ au moyen du noyau reproduisant peut aussi être vue d'une autre manière. En effet, il est facile de voir que P_ψ n'est que la composition de deux opérateurs : d'une part, l'opérateur T^* qui est l'inversion de la transformée en ondelettes : si $F \in L^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \frac{dadb}{a})$

$$T^* F(x) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} F(b, a) \psi_{(b, a)}(x) \frac{dadb}{a} \quad (\text{V.16})$$

et, d'autre part, la transformation en ondelettes $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}_\psi$. Cette remarque prendra tout son intérêt lorsque nous aurons vu comment construire des algorithmes rapides de transformation en ondelettes et transformation inverse, car on aura aussi un algorithme rapide de projection sur \mathcal{H}_ψ .

VI QUELQUES REMARQUES ET COMPLÉMENTS

VI.1 Analyses multirésolutions infinitésimales

Nous avons vu précédemment que l'analyse par ondelettes présente l'avantage suivant : les fonctions d'analyse, c'est-à-dire les ondelettes, s'adaptent à la taille des événements qu'elles analysent. Néanmoins, cet avantage peut devenir un inconvénient sur le plan pratique si les événements analysés sont de grande taille, les calculs numériques pouvant alors devenir très lourds. Il peut alors être souhaitable de regrouper les contributions des grandes échelles dans une famille unique de coefficients ; autrement dit, remplacer une famille de filtres passe-bande par un unique filtre passe-bas. Ceci peut être fait en associant à une ondelette ψ une autre fonction, appelée fonction d'échelle, dont la transformée de Fourier vérifie :

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2 = \int_1^\infty |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \frac{da}{a} \quad (\text{VI.1})$$

A cette fonction d'échelle, on associe la famille de ses dilatées et translatées :

$$\phi_{(b,a)}(x) = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{VI.2})$$

que l'on va utiliser pour analyser $L^2(\mathbb{R})$. On notera, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$M_f(b, a) = \langle f, \phi_{(b,a)} \rangle \quad (\text{VI.3})$$

les coefficients représentant l'approximation de f à l'échelle a .

Sous certaines hypothèses (assez peu restrictives), on montre que l'autocorrélation $p(x)$ de $\phi(x)$ est intégrable ; il suffit par exemple de supposer que $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, l'espace de Hardy réel, c'est-à-dire de supposer que ψ et sa transformée de Hilbert sont intégrables. Il est alors simple d'adapter la preuve des théorèmes de la section III pour montrer les corollaires ci-dessous. Nous donnons un seul énoncé ; les deux autres s'en déduisent trivialement.

Corollaire 2 Soit $\psi \in H^1(\mathbb{R})$, telle que :

$$0 < c_\psi = \int_0^\infty |\hat{\psi}(u)|^2 \frac{du}{u} = \int_0^\infty |\hat{\psi}(-u)|^2 \frac{du}{u} < \infty \quad (\text{VI.4})$$

et soit ϕ une fonction d'échelle associée. Pour tout réel positif a_0 , toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée comme suit :

$$f = \frac{1}{c_\psi} \left[\int_{\mathbb{R}} M_f(b, a_0) \phi_{(b,a_0)} db + \int_{[0, a_0] \times \mathbb{R}} T_f(b, a) \psi_{(b,a)} \frac{dad b}{a} \right] \quad (\text{VI.5})$$

où l'égalité est à prendre au sens de la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$.

On dit que l'on effectue une analyse multirésolution infinitésimale. Nous verrons dans le chapitre VIII, consacré aux algorithmes rapides de calcul, une application de ces formules.

Exemple : Considérons pour illustration l'une des plus simples des fonctions d'échelle possibles :

$$\hat{\phi}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$$

Un calcul simple montre alors que la fonction donnée par

$$\hat{\psi}(\xi) = \sqrt{2}\xi e^{-\xi^2/2}$$

vérifie (VI.5).

De même, on peut construire des fonctions d'échelle associées à des ondelettes en plusieurs dimensions. A une ondelette invariante par rotation correspondra une fonction d'échelle invariante par rotation et inversement. On peut aussi procéder de même dans le cas de la formule de Morlet ; ceci nous ramène alors directement aux décompositions de Littlewood-Paley que nous avons brièvement décrites.

VI.2 Quelques exemples singuliers

Jusqu'à présent, nous avons décrit les grandes lignes de l'analyse par ondelettes en insistant sur les propriétés caractéristiques des ondelettes, à savoir qu'une ondelette typique est une fonction oscillante et bien localisée des deux côtés de la transformée de Fourier. Néanmoins, nous allons voir ici que dans certains cas il peut être intéressant de relaxer ces hypothèses, ce qui conduit à des exemples surprenants.

Le cas le plus simple est relié à la possibilité de "découplage des ondelette d'analyse et de synthèse". Nous avons vu aux équations III.22-III.24 qu'en prenant formellement pour ondelette de reconstruction une masse de Dirac centrée à l'origine, on obtient une formule de reconstruction simplifiée —la formule de Morlet— qui fait intervenir une intégrale simple uniquement

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} T_f(x, a) \frac{da}{a} \quad (\text{V.1})$$

Dans ce cas, un choix "singulier" d'ondelette de reconstruction permet de simplifier les expressions.

Un autre exemple simple est fourni en dimension 2 par la transformée de Radon. M. Holschneider [13] a montré que si l'on prend comme ondelette d'analyse une distribution de masse équirépartie sur une droite, la transformée

en ondelettes (avec rotations suivant le schéma de Murenzi) n'est autre que la transformée de Radon.

En effet, soit $e \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire, et prenons pour ondelette d'analyse non plus une fonction mais la distribution

$$\psi(x) = \delta(x \cdot e) \quad (\text{V.2})$$

On obtient immédiatement une expression simplifiée pour la transformée en ondelettes :

$$T_f(b, a, \theta) = a^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \delta((r_\theta \cdot e) \cdot (x - b)) \quad (\text{V.3})$$

ce qui est exactement la forme d'une transformée de Radon. Notons toutefois qu'il s'agit d'une version très redondante de la transformée de Radon. En effet, $T_f(b, a, \theta)$ est constante le long des perpendiculaires à $r_\theta \cdot e$; de plus, elle dépend de façon triviale de la variable d'échelle a :

$$T_f(b, a, \theta) = a^{-1} R((b \cdot (r_\theta \cdot e)) r_\theta \cdot e, \theta) = a^{-1} R(\alpha, \theta)$$

où $\alpha = b \cdot (r_\theta \cdot e)$.

On obtient alors des formules d'inversion de la transformée de Radon [13]. Il faut pour cela utiliser la formule donnant la transformée en ondelettes inverse avec une ondelette de reconstruction $\chi(x)$ qui assure que la condition d'admissibilité mixte soit satisfaite. Plus précisément, rappelons la condition d'admissibilité mixte que l'on peut écrire en deux dimensions (quitte à renormaliser χ par une constante) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \hat{\psi}(\xi) \chi(\xi) \frac{d\xi}{|\xi|^2} \quad (\text{V.4})$$

L'ondelette nécessaire pour inverser la transformée de Radon $\gamma(x)$ doit alors vérifier :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\gamma}(\lambda e) \frac{d\lambda}{|\lambda|^2} \quad (\text{V.5})$$

où e est le vecteur unitaire que nous avons utilisé pour construire $\psi(x)$. Comme nous l'avons signalé plus haut, l'ondelette d'analyse $\psi(x)$ n'est pas admissible, et l'ondelette de synthèse $\gamma(x)$ doit "porter l'admissibilité".

La formule d'inversion de la transformation de Radon est alors donnée par :

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} R(\alpha, \theta) \Gamma \left(r_{-\theta} \frac{x - \alpha e}{a} \right) \frac{da}{a^3} d\theta d\alpha \quad (\text{V.6})$$

où $\Gamma(x)$ est une fonction qui ne varie que dans la direction du vecteur e , donnée par :

$$\Gamma(b) = \tilde{\Gamma}(b \cdot e) = \int_{\mathbb{R}^2} \gamma(x) \delta(x \cdot e - b \cdot e) \quad (\text{V.7})$$

ou, encore, dans l'espace de Fourier :

$$\hat{\hat{\Gamma}}(\lambda) = \hat{\gamma}(\lambda e), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{V.8})$$

M. Holschneider montre de plus que la fonction $\gamma(x)$ peut être choisie de sorte que la formule d'inversion soit valable point par point (voir au chapitre IV pour une description plus précise de ces notions).

Ces formules généralisent la transformation de Radon inverse classique (appelée *back-projection*) qui opère à échelle fixe. Elles sont en fait très utilisées en pratique, et ce bien avant leur interprétation en termes d'ondelettes.

VII COMMENTAIRES ET RÉFÉRENCES

La notion d'analyse temps-fréquence est trop générale et ancienne pour pouvoir lui déterminer un inventeur. L'un des pères de l'analyse temps-fréquence est le traicteur de signal J. Ville qui introduisit la représentation de Wigner-Ville pour, dit-il, pallier le manque de signification physique de la transformée de Fourier usuelle. Auparavant, le physicien E.P. Wigner avait introduit cette même représentation dans le contexte de la mécanique quantique dans l'espace des phases. Cette représentation et ses dérivées sont maintenant d'un usage courant en analyse de signaux. Précisons toutefois qu'il s'agit là de représentations bilinéaires, au contraire des représentations linéaires développées dans ce chapitre.

Parmi les représentations linéaires, la plus simple est la transformation de Fourier à fenêtre glissante. Bien qu'elle semble avoir été utilisée auparavant par de nombreux auteurs, sa formalisation semble être due à D. Gabor [8] en 1946. L'analyse continue par ondelettes unidimensionnelle a été proposée au début des années 80 par A. Grossmann et J. Morlet (voir [10]) dans un contexte d'analyse du signal. En fait, elle était déjà utilisée par les mathématiciens depuis les années 60, sous le nom d'identité de Calderón [2], pour l'étude de certains espaces fonctionnels et opérateurs définis par des intégrales singulières. La version multidimensionnelle invariante par rotation était également connue des mathématiciens, et l'introduction des rotations a été proposée par A. Grossmann et R. Murenzi [19]. Une description plus géométrique, sur laquelle nous reviendrons par la suite, est développée dans [12] et [13].

Une autre approche de la théorie des ondelettes, que nous décrirons plus tard, consiste à construire des bases orthonormées d'ondelettes. Cet aspect, maintenant très utilisé dans de nombreux contextes, s'est développé à partir des travaux de S. Mallat, Y. Meyer et I. Daubechies. Nous y reviendrons ultérieurement.

Il existe maintenant de nombreuses références de base sur l'analyse par ondelettes et ses applications dans divers domaines. Citons par exemple [16]

qui constitue un exposé introductif et un guide dans la bibliographie existante. Une exposition plus détaillée de la théorie peut être trouvée dans [3] et [6], chacun insistant plus particulièrement sur une approche précise : la théorie de l'approximation pour [3] et le traitement du signal et les aspects algorithmiques pour [6]. Une description de certaines applications ainsi que des développements plus récents peut être trouvée dans les comptes rendus de conférences [5], [17], [18] ainsi que dans les compilations d'articles [1], [4], [14] et [20].

- [1] J. Benedetto, M. Frazier Eds., *Wavelets : Mathematics and Applications*, CRC Press (1993).
- [2] A. Calderón, "Intermediate spaces and interpolation, the complex method", *Studia Math.*, **24** (1964) 113.
- [3] C. Chui, *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York (1992).
- [4] C. Chui Ed., *Wavelets : a Tutorial in Theory and Applications*, Academic Press, New York (1992).
- [5] J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian Eds., "Time Frequency Methods and Phase Space", *IPTI*, Springer (1989).
- [6] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-frequency Localisation and Signal Analysis", *IEEE Trans. Inf. Th.*, **36** (1990) p. 961-1005.
- [7] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM-CBMS (1992).
- [8] D. Gabor, "Theory of communication", *J. Inst. Elec. Eng.*, 903 (1946), 429.
- [9] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, "Reading and Understanding the Continuous Wavelet Transform", dans [5].
- [10] A. Grossmann, J. Morlet, "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape", *SIAM J. Math. An.*, **15** (1984), 723.
- [11] A. Grossmann, J. Morlet, T. Paul, "Transforms Associated with Square Integrable Group Representations I", *J. Math. Phys.*, **27** (1985) 2473.
- [12] A. Grossmann, J. Morlet, T. Paul, "Transforms Associated with Square Integrable Group Representations II", *Ann. Inst. H. Poincaré*, **45** (1986) 293.
- [13] M. Holschneider, "Inverse Radon Transforms through Inverse Wavelet Transforms", *Inverse Problems*, **7** (1991) p. 853-861 .
- [14] P. G. Lemarié Ed., "Les ondelettes en 1989", *Lect. Notes in Math.*, **1438** (1990).
- [15] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs : I Ondelettes*, Hermann (1989).
- [16] Y. Meyer, *Les Ondelettes, algorithmes et applications*, Armand Colin, 2^e édition (1994).
- [17] Y. Meyer, *Actes de la conférence "Ondelettes et applications"*, Marseille (1989).
- [18] Y. Meyer, *Actes de la conférence "Wavelets and their applications"*, Toulouse (1992).
- [19] R. Murenzi, "Transformée en ondelettes multidimensionnelle et application à l'analyse d'images", Thèse, Louvain-la-Neuve (1989).
- [20] M.B. Ruskai et al. Ed, *Wavelets and their Applications*, Jones and Bartlett Publ. Comp., Boston (1992).
- [21] N. Ja. Vilenkin, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod (1969).

VIII COMPLÉMENT A : ROTATION DANS \mathbb{R}^N

Nous décrivons dans ce complément la paramétrisation par les angles d'Euler du groupe $SO(n)$ des rotations en dimension n . Ces coordonnées sont utiles dès que l'on s'intéresse aux ondelettes en dimension supérieure à deux.

VIII.1 Les angles d'Euler

Un système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) sur \mathbb{R}^n étant choisi une fois pour toutes, on définit $r_{ij}(\theta)$ comme la rotation d'angle θ dans le plan (x_i, x_j) , orienté de sorte que $x_j = r_{ij}(\frac{\pi}{2}) \cdot x_i$. Si on note de plus $r_k = r_{k-1, k}$, on peut montrer le résultat suivant, dont la preuve peut être trouvée par exemple dans [21] :

Lemme 1 *Toute matrice de rotation peut être écrite sous la forme d'un produit de $n - 1$ rotations élémentaires, comme :*

$$r = r^{(n-1)} \cdot r^{(n-2)} \cdot \dots \cdot r^{(1)} \quad (\text{A.13})$$

où l'on a posé :

$$r^{(k)} = r_1(\theta_1^k) \cdot r_2(\theta_2^k) \cdot \dots \cdot r_k(\theta_k^k) \quad (\text{A.14})$$

et où les θ_j^k sont les angles d'Euler de r , et sont tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_1^k < 2\pi \\ 0 \leq \theta_j^k < \pi & 1 < j \leq k \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Une telle paramétrisation de $SO(n)$ permet en particulier d'exhiber une mesure μ_n sur $SO(n)$, dite mesure de Haar, définie ainsi : Si $r \in SO(n)$ est paramétrée par les angles d'Euler θ_j^k au moyen de (A.7) et (A.8), on écrit :

$$d\mu_n(r) = \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^k [(\sin \theta_j^k)^{j-1} d\theta_j^k] \quad (\text{A.16})$$

La mesure de Haar possède l'importante propriété d'invariance suivante : Pour tout $r_0 \in SO(n)$:

$$d\mu_n(r_0 \cdot r) = d\mu_n(r \cdot r_0) = d\mu_n(r) \quad (\text{A.17})$$

le symbole “ \cdot ” représentant ici la multiplication des matrices $n \times n$. Par exemple, on vérifie aisément que pour $n = 2$, toute rotation est représentée par un angle θ et $d\mu_2(r) = d\theta$.

Il existe évidemment une relation entre le groupe $SO(n)$ et la sphère unité de dimension $n - 1$ plongée dans \mathbb{R}^n , que l'on notera S^{n-1} :

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.q. } \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\} \quad (\text{A.18})$$

Plus précisément, cette relation est la suivante :

Lemme 2 S^n est isomorphe à l'ensemble des classes d'équivalence :

$$S^n \cong SO(n+1)/SO(n) \quad (\text{A.19})$$

Preuve : Soit $e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur de coordonnées $(0, 0, \dots, 0, 1)$. Clairement,

$$SO(n+1) \cdot e_{n+1} = S^n \quad (\text{A.20})$$

De plus, e_{n+1} est invariant par $SO(n)$ et on se convainc aisément qu'il n'existe pas de sous-groupe de $SO(n+1)$ plus grand qui contienne $SO(n)$ vérifiant lui aussi cette propriété. On en déduit l'isomorphisme (A.19).

Remarquons que le lemme 1 ainsi que (A.17) fournissent naturellement une factorisation de la mesure de Haar sur $SO(n)$ en un produit de la mesure de Haar sur $SO(n-1)$ et d'une mesure sur la sphère S^{n-1} . Le lemme suivant est une conséquence de cette remarque.

Lemme 3 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times SO(n)} f(ar \cdot x) \frac{da}{a} d\mu_n(r) = A_{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \frac{dz}{\|z\|^n} \quad (\text{A.21})$$

où

$$A_n = \mu_n(SO(n)) = \prod_{k=1}^n \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \quad (\text{A.22})$$

Preuve : Ecrivons $d\mu_n(r) = d\mu_{n-1}(r_0)d\eta(s)$, où $s = \{\theta_1^{n-1}, \theta_2^{n-1}, \dots, \theta_{n-1}^{n-1}\}$ représente les coordonnées angulaires sur S^{n-1} :

$$d\eta(s) = \prod_{j=1}^{n-1} [(\sin \theta_j^{n-1})^{j-1} d\theta_j^k] \quad (\text{A.23})$$

$d\mu_n \frac{da}{a}$ étant invariante par rotation et dilatation, on se ramène sans peine au cas $x = e_n$. Donc :

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times SO(n)} d\mu_n(r) f(ar \cdot x) \frac{da}{a} = \int_{\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1} \times SO(n-1)} f(ar \cdot x) \frac{da}{a} d\eta(s) d\mu_n(r) \quad (\text{A.24})$$

$$= A_{n-1} \int_{\mathbb{R}_+^* \times S^{n-1}} f_p(a, s) \frac{da}{a} d\eta(s) \quad (\text{A.25})$$

où $f_p(a, s)$ est l'écriture de f en coordonnées polaires. Enfin, la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n a l'expression suivante en coordonnées polaires :

$$dz = \|z\|^{n-1} d\|z\| d\eta(s_z) \quad (\text{A.26})$$

s_z représentant les coordonnées angulaires de z , ce qui achève la preuve de (A.21). (A.22) s'obtient par un calcul élémentaire (voir par exemple [21]).

VIII.2 Exemples

Considérons par exemple le cas $n = 2$. Il est connu qu'une rotation dans le plan est caractérisée par un angle unique, que nous noterons θ , et donc

$$\begin{aligned} SO(2) &= \left\{ r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi] \right\} \\ &\cong S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Cette caractérisation est identique à la paramétrisation d'Euler (un seul angle d'Euler).

Le cas $n = 3$ est un peu plus complexe, dans la mesure où $SO(3)$ est un groupe non commutatif de dimension 3. La paramétrisation d'Euler nous dit donc que

$$SO(3) = \{r_{12}(\phi)r_{23}(\theta)r_{12}(\psi), \phi, \psi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]\} \quad (\text{A.28})$$

(Rappelons que $r_{ij}(\alpha)$ est la rotation d'angle α dans le plan Oij .) Ainsi, le vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ est invariant par $r_{12}(\psi)$ et donc

$$SO(3) \cdot e_3 \cong S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3, v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1\} \quad (\text{A.28})$$

fournit la paramétrisation de la sphère de dimension 2 (plongée dans \mathbb{R}^3) en coordonnées sphériques.

En dimension supérieure, on obtient une paramétrisation des sphères en coordonnées sphériques.

Chapitre III

QUELQUES EXEMPLES ET ILLUSTRATIONS

Dans un grand nombre de problèmes pratiques (en physique ou en traitement du signal en particulier), la première étape vers la compréhension et/ou la modélisation est la visualisation des phénomènes en présence. Les représentations temps-fréquence peuvent être utilisées comme un outil de visualisation, à condition de savoir les “lire”, comme un spécialiste de traitement de la parole est capable de lire un spectrogramme et d’identifier ainsi la phrase prononcée.

Dans ce court chapitre, nous donnerons quelques exemples de transformée en ondelettes de fonctions et signaux académiques, dans le but de nous familiariser avec les outils classiques de représentation de la transformée. Dans tous les cas, il s’agira d’exemples extrêmement simples, uniquement destinés à illustrer quelques-unes des propriétés de la transformée en ondelettes. Le lecteur, un tant soit peu familiarisé avec les représentations temps-fréquence, peut aisément se dispenser de la lecture de ce chapitre.

Dans un premier temps, nous décrirons les représentations du plan temps-fréquence que nous utiliserons. Puis, nous nous focaliserons sur l’illustration des aspects “temps-échelle” et “temps-fréquence” des ondelettes. Nous utiliserons essentiellement des ondelettes “progressives”, c’est-à-dire ne possédant que des fréquences positives, qui sont mieux adaptées à l’étude des propriétés spectrales des signaux étudiés.

I LE PLAN TEMPS-FRÉQUENCE

L’une des premières utilisations de la transformée en ondelettes consiste à représenter graphiquement la transformée en ondelettes et à essayer de comprendre qualitativement sur la représentation graphique quelles sont les caractéristiques du signal étudié. Maintenant encore, dans les cas d’applications spécifiques à des problèmes physiques, cette étape est souvent une première étape nécessaire avant d’envisager une utilisation plus quantitative et systématique des ondelettes.

Nous utiliserons ici exclusivement une représentation bidimensionnelle de la transformée en ondelettes (et de la transformée de Gabor). Si $f(x)$ est le

signal à analyser et $T_f(b, a)$ sa transformée en ondelettes, nous coderons celle-ci en niveaux de gris dans l'espace de la transformée. Plus précisément, on considérera le demi-plan (b, a) , que l'on représentera comme demi-plan hyperbolique (voir la figure III.1), les échelles étant naturellement échantillonnées en progression géométrique. Nous renvoyons aux chapitres suivants pour une description plus précise.

Plaçons-nous dans une perspective de calcul numérique¹ de la transformée en ondelettes d'une fonction $f(x)$ à l'aide d'une ondelette $\psi(x)$. Bien entendu il n'est pas question de calculer numériquement une transformée en ondelettes pour toutes les valeurs possibles des paramètres b et a . Il faut donc :

- se restreindre à un ensemble fini de valeurs de b et a , situées sur un réseau régulier ;
- échantillonner la transformée en ondelettes correspondante.

Le premier problème est facile à résoudre dans le cas des signaux échantillonnés de longueur finie². Les valeurs extrêmes de la variable b sont naturellement fournies par les bornes du signal. De même, la longueur du signal, divisée par la taille du support I_ψ de l'ondelette fournit une borne supérieure naturelle a_{max} pour la variable d'échelle. Sauf dans certains cas très précis, cela n'a pas grand sens d'analyser un signal avec une ondelette plus grande que lui. Enfin, une borne inférieure pour a est obtenue en divisant la fréquence centrale de l'ondelette (le paramètre ω_0 que nous avons défini au chapitre précédent) par la fréquence d'échantillonnage du signal, en partant du principe que l'on ne va pas analyser des fréquences supérieures à la fréquence d'échantillonnage. Bien entendu, il ne s'agit là que de bornes heuristiques et non de règles absolues.

Une fois ces conventions générales fixées, on représentera la transformée en ondelettes $T_f(b, a)$ en codant celle-ci (ou son module et sa phase séparément dans le cas d'une ondelette à valeurs complexes) par des niveaux de gris, normalisés à la valeur maximale de la fonction représentée. On obtiendra ainsi des images sur lesquelles l'on peut souvent "lire" certaines caractéristiques du signal étudié. Pour plus de lisibilité dans le cas d'ondelettes à valeurs complexes, on force généralement à zéro la phase de $T_f(b, a)$ quand $|T_f(b, a)|$ est inférieur à une certaine valeur limite (par exemple 1 pour cent), au-dessous de laquelle il est difficile de lui donner une signification réelle. Dans les représentations données ici, les niveaux de gris seront toujours normalisés globalement, de sorte que le noir représente un module maximal et le blanc un module minimal (et de même pour la phase). Dans le cas unidimensionnel, l'ondelette utilisée sera

¹Les aspects algorithmiques seront discutés au chapitre VIII.

²Cependant, nous verrons par la suite qu'il y a deux façons naturelles d'échantillonner la transformée en ondelettes, selon que l'on veut conserver les propriétés de covariance ou, au contraire, avoir un degré de redondance constant dans l'espace des phases. Ces aspects seront discutés en détail au chapitre VIII.

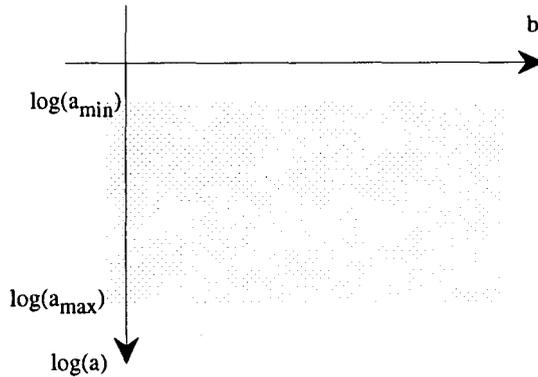


Figure III.1 : Espace des phases.

toujours une ondelette dite de Morlet, dont l'expression explicite est donnée par

$$\psi(x) = e^{i\omega_0 x} e^{-x^2/2}$$

où $\omega_0 \cong 5.5$.

II ASPECT TEMPS-ÉCHELLE

Nous avons vu que les ondelettes sont extrêmement précises à petite échelle, car elles sont construites par dilatations d'une fonction unique ; elles sont de forme constante et de taille variable. Pour employer un poncif du genre, on dit que les ondelettes fonctionnent comme un "microscope mathématique", dont la résolution serait fixée par le paramètre de dilatation et l'optique serait déterminée par le choix de l'ondelette.

Nous nous limitons ici à des fonctions à valeurs réelles, donc entièrement déterminées par leur projection sur $H^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, l'utilisation d'ondelettes progressives est pertinente et nous utiliserons dans tous les exemples une ondelette de Morlet :

$$\psi(x) = e^{-x^2/2} e^{i\omega_0 x}$$

en prenant $\omega_0 = 2\pi$.

Considérons une fonction $f(x)$ et fixons un point x_0 . Supposons pour simplifier que l'ondelette $\psi(x)$ soit à support compact $I_\psi = [-X, X]$. Il est facile

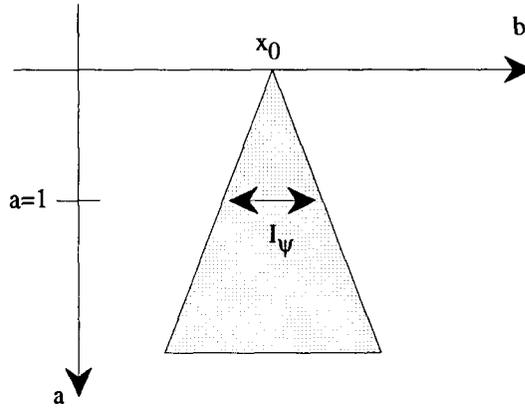


Figure III.2 : Cône d'influence d'un point x_0 .

de voir que le comportement de $f(x)$ en $x = x_0$ va se répercuter sur la transformée en ondelettes dans le cône $b \in aI_\psi + x_0 = [-aX + x_0, aX + x_0]$ (voir en figure III.2).

Nous débuterons nos illustrations avec trois exemples de fonctions singulières (il s'agit en fait de distributions), qui permettent de montrer comment les ondelettes "voient" le degré de régularité. Il ne s'agit là que d'exemples triviaux, mais sur lesquels on peut d'ores et déjà visualiser certaines caractéristiques de comportement de la transformée en ondelettes en présence de singularités et sur lesquels nous reviendrons avec plus de précision au chapitre suivant. Le dénominateur commun à ces trois exemples est que les fonctions sont homogènes. Plus précisément, elles sont telles, qu'en un certain point x_0 et pour des λ assez petits : $f(\lambda(x - x_0)) = \lambda^\alpha f(x - x_0)$ pour un certain nombre réel α , appelé le degré d'homogénéité. On montre alors facilement que ce comportement se reflète sur la transformée en ondelettes de $f(x)$ qui, au voisinage de x_0 , se comporte en a^α .

Le cas le plus simple est celui d'une fonction caractéristique, par exemple la fonction caractéristique $\chi_{[X,Y]}(x)$ de l'intervalle $[X, Y]$, qui est donc discontinue. Un calcul direct fournit :

$$\langle \chi_{[X,Y]}, \psi_{(b,a)} \rangle = \psi^{(-1)}\left(\frac{Y-b}{a}\right) - \psi^{(-1)}\left(\frac{X-b}{a}\right) \quad (\text{II.1})$$

$\psi^{(-1)}$ étant une primitive de ψ . Aux petites échelles, les ondelettes ne "voient" que les deux discontinuités, et pas la fonction constante qui est au milieu, car

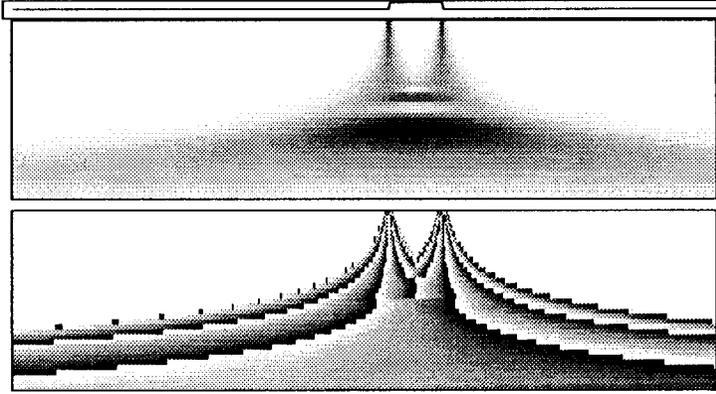


Figure III.3 : Transformée en ondelette d'une fonction caractéristique.

les ondelettes sont d'intégrale nulle. En revanche, à partir d'une échelle assez grande, les deux discontinuités sont "vues" simultanément. Ceci est particulièrement clair sur le tracé de la transformée en ondelettes (Figure III.3). Notons aussi que les lignes de phase constante convergent vers les deux points de discontinuité. Cette remarque peut être utilisée pour la localisation des points singuliers et nous y reviendrons. Il faut aussi noter que la fonction de Heaviside étant homogène de degré 0, on montre facilement que, au moins pour les petites valeurs de a et avant que les ondelettes ne voient simultanément les deux singularités, la transformée en ondelettes (à b fixé) est indépendante de a .

Considérons maintenant le cas d'une masse de Dirac δ_{x_0} . De nouveau, il est facile de voir que :

$$\langle \delta_{x_0}, \psi_{(b,a)} \rangle = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x_0 - b}{a}\right) \quad (\text{II.2})$$

On observe sur la transformée en ondelettes (Figure III.4) un comportement similaire au précédent, à ceci près que cette fois $|T_f(b,a)|$ se comporte comme a^{-1} . Ceci complète la remarque que nous avons faite plus haut : δ_{x_0} est homogène de degré -1.

Une autre interprétation possible est que δ_{x_0} est plus singulière qu'une fonction caractéristique et possède donc un contenu "petites échelles" plus important, d'où le comportement en a^{-1} .

Ce comportement est encore amplifié dans le cas de la dérivée d'une masse

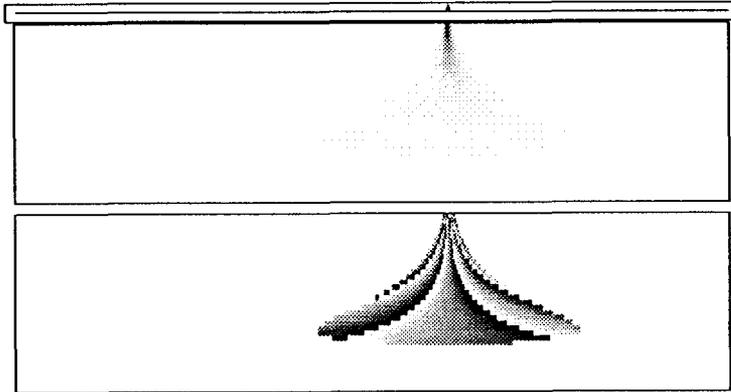


Figure III.4 : Transformée en ondelette d'une masse de Dirac.

de Dirac, pour laquelle :

$$\langle \delta'_{x_0}, \psi_{(b,a)} \rangle = -\frac{1}{a^2} \psi' \left(\frac{x_0 - b}{a} \right) \quad (\text{II.3})$$

Dans ce cas, la transformée en ondelettes croît en a^{-2} quand $a \rightarrow 0$, signe d'une singularité plus forte que la précédente. Notons encore que les lignes de phase constante convergent toujours vers les points singuliers. C'est une conséquence de l'homogénéité des fonctions étudiées.

Nous aurons l'occasion, par la suite, de revenir sur ces points en discutant les bases de l'analyse des propriétés de régularité des fonctions par ondelettes.

III ASPECT TEMPS-FRÉQUENCE

Passons maintenant aux exemples illustrant le comportement de la transformée en ondelettes comme méthode d'analyse spectrale locale. L'exemple le plus simple est celui de la transformée en ondelettes d'une fonction du type $\cos(\omega x)$. Si l'ondelette analysante est progressive (c'est-à-dire ne contient que des fréquences positives, ce que l'on exprime par $\hat{\psi}(\xi) = 0$ si $\xi \neq 0$), alors la transformée est donnée par :

$$T_f(b, a) = \frac{1}{2} e^{i\omega b} \hat{\psi}(a\omega)^* \quad (\text{III.1})$$

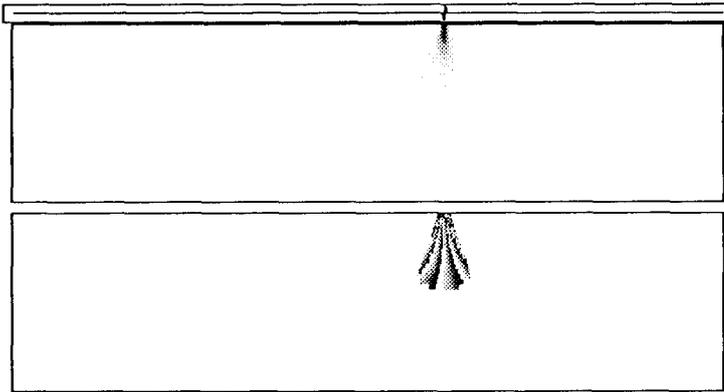


Figure III.5 : Transformée en ondelette de la dérivée d'une masse de Dirac.

Sur cette expression simple, on peut d'ores et déjà voir deux caractéristiques du comportement des ondelettes, qui sont deux remarques essentielles que nous utiliserons, sous une forme un peu plus précise plus tard :

1. Supposant que $\hat{\psi}(\xi)$ est à valeurs réelles, le module $|T_f(b, a)|$ de la transformée en ondelettes se comporte comme $\hat{\psi}(a\omega)$ et est donc localement maximum pour $a = \omega_0/\omega$. La transformée en ondelettes est donc localisée au voisinage de cette droite horizontale.
2. Sous les mêmes hypothèses, la phase de la transformée évolue linéairement avec b et reproduit en fait le comportement de la phase de la fonction analysée.

Ces remarques se retrouvent sur la figure III.6 représentant la transformée en ondelettes d'une fréquence pure par ondelette de Morlet (module et phase). De plus, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, ces remarques restent valables dans le cas où la fonction analysée est une fréquence pure modulée en amplitude par une fonction régulière dont les variations sont lentes par rapport aux oscillations (ainsi que le montre un simple développement de Taylor de l'amplitude). Le module de la transformée en ondelettes reproduit alors les variations de l'amplitude.

Précisons que sur la figure III.6, la phase n'a été représentée que dans la région du demi-plan où le module est supérieur à un certain seuil (fixé ici à un pour cent de la valeur maximale). En effet, la phase perd sa signification lorsque le module est trop faible et il est inutile de la représenter.

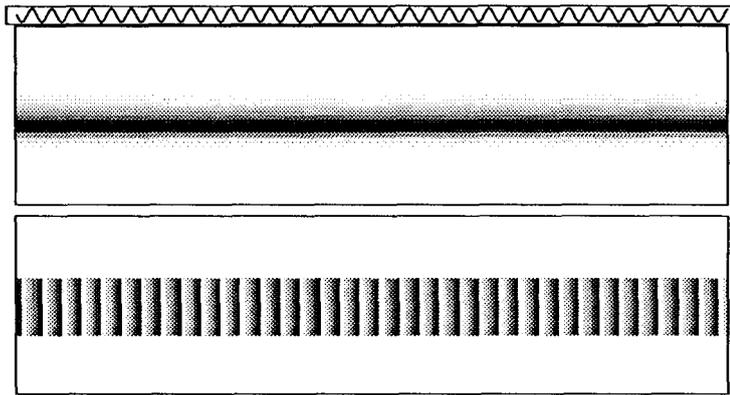


Figure III.6 : Transformée en ondelette d'une fréquence pure.

Des arguments similaires (nous en verrons une formulation plus précise au chapitre V) montrent que dans le cas où la fréquence de la fonction analysée varie elle aussi lentement et régulièrement, la transformée en ondelettes est toujours localisée au voisinage non plus d'une droite horizontale mais d'une courbe $a = a_r(b)$ qui représente, à une constante près, l'inverse de la fréquence en fonction de la position b .

Ceci apparaît sur la figure III.7, qui représente la transformée en ondelettes d'un signal contenant entre autres une fréquence pure et un "chirp quadratique", c'est-à-dire un signal dont la fréquence dépend quadratiquement de x . Cette figure est intéressante car elle permet de visualiser les interférences entre les deux composantes. Dans les premiers temps, les deux composantes fréquentielles sont suffisamment éloignées en fréquence pour que l'ondelette ne les voie pas simultanément³. En revanche, ce n'est plus le cas vers le milieu de la figure. L'ondelette voit simultanément les deux composantes, ce qui se traduit par l'apparition de battements (oscillations du module) dans la transformée en ondelettes.

Les mêmes remarques peuvent être faites pour la figure III.8, qui représente un signal dont la fréquence dépend du temps de façon périodique ; de tels signaux semblent être des modèles pertinents pour la modélisation de certains instruments de musique. Dans ce cas, tant que les oscillations de la fréquence sont bien plus lentes que celles du signal (ce qui est le cas dans notre exemple),

³En d'autres termes, l'ondelette est assez précise en fréquence pour "séparer" les deux composantes.

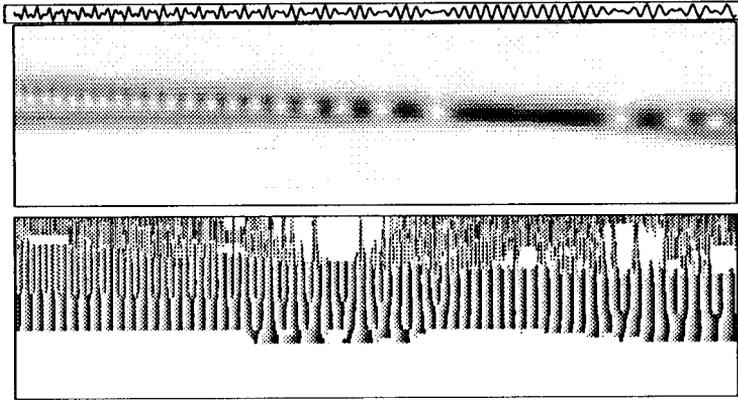


Figure III.7 : Transformée en ondelettes d'un signal contenant une fréquence pure et un "chirp quadratique".

la transformée en ondelettes est toujours localisée au voisinage de la courbe $a = a_r(b)$ qui représente l'inverse de la fréquence instantanée.

Le comportement de la phase est dans ces deux cas porteur d'information. Nous discuterons ce point en détail au chapitre V.

Nous reviendrons sur ces aspects quand nous discuterons plus en détail l'analyse par ondelettes de fonctions modulées en amplitude et en fréquence.

La dernière illustration de cette section est un exemple dans lequel se mêlent les aspects temps-échelle et temps-fréquence des ondelettes. Le signal analysé contient en particulier une fréquence pure qui se sépare en deux à un certain moment, ainsi qu'un certain nombre de singularités ponctuelles, dont l'une est plus forte que les autres et correspond à la séparation des fréquences. On retrouve sur la transformée en ondelettes toutes les caractéristiques dont il a été question plus haut. Il faut aussi remarquer (ceci est particulièrement visible sur le comportement des phases de la transformée) que, à une échelle assez grande, l'ondelette est suffisamment large pour pouvoir "voir" la répétition régulière des singularités et l'interpréter comme la présence d'une fréquence supplémentaire dans le signal.

Remarque : signaux aléatoires stationnaires au second ordre. Sans entrer dans les détails, il est utile de dire quelques mots sur le comportement de la transformée en ondelettes continue de processus stationnaires au second ordre, que l'on utilise couramment pour modéliser le "bruit" en traitement du signal. Le

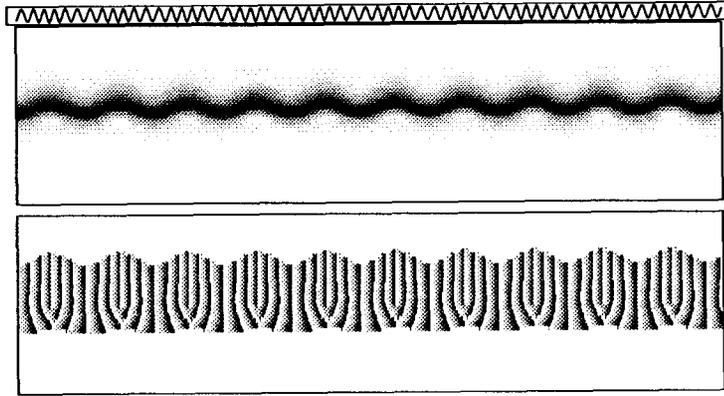


Figure III.8 : Transformée en ondelettes d'un "chirp" périodique.

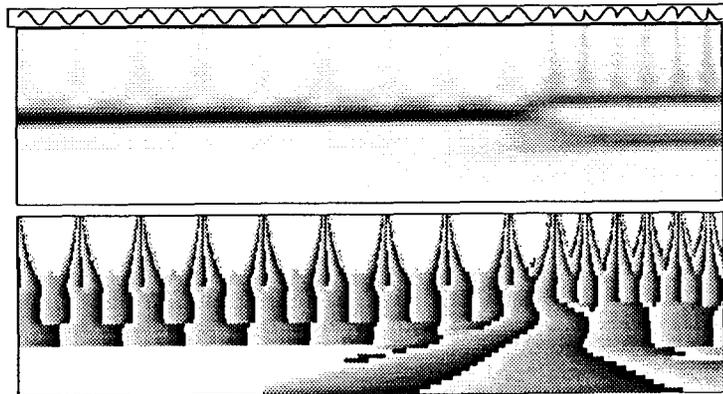


Figure III.9 : Vous avez dit bizarre ?

point essentiel est le suivant : Soit $n(x)$ un processus stationnaire au second ordre ; la stationnarité s'exprime par le fait que la fonction d'autocovariance de $n(x)$ vérifie :

$$C(x, x') = \mathbb{E}[(n(x) - \mathbb{E}[n(x)])(n(x') - \mathbb{E}[n(x')])^*] = C(x - x') \quad (\text{III.2})$$

i.e. n'est fonction que de la différence des arguments ; ici le symbole \mathbb{E} représente la moyenne statistique.

On vérifie aisément que la fonction d'autocovariance associée à la transformée en ondelettes de $n(x)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} C(b, a; b', a') &= \mathbb{E}[T_n(b, a)T_n(b', a')^*] \\ &= \int \psi_{(b, a)}(x)^* \psi_{(b', a')}(x') C(x - x') dx dx' \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Il est alors remarquable de constater que même dans le cas d'un bruit dit "blanc" (totalement décorréolé), c'est-à-dire quand formellement $C(x) = \sigma^2 \delta(x)$, sa transformée en ondelettes est elle-même corrélée et la fonction d'autocovariance n'est autre que le noyau reproduisant de l'ondelette :

$$C(b, a; b', a') = \sigma^2 \int \psi_{(b, a)}(x)^* \psi_{(b', a')}(x) dx \quad (\text{III.4})$$

C'est une conséquence de la redondance de la transformée en ondelettes.

Dans le cas général d'un processus stochastique stationnaire au second ordre, nous voyons bien d'après l'équation (III.3) que la transformation en ondelettes peut être utilisée pour estimer l'autocorrélation (et donc le spectre de puissance) du processus. En effet, on déduit de l'équation (III.3) que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|T_n(b, a)|^2] &= \int \psi_{(b, a)}(x)^* \psi_{(b, a)}(x') C(x - x') dx dx' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int |\hat{\psi}(a\xi)|^2 \hat{C}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

ne dépend pas de b , et $\hat{C}(\xi)$ n'est autre que le spectre de $n(x)$.

Cependant, compte tenu de la localité de la transformation en ondelettes, ceci suggère d'étendre (III.3) et (III.5) au cas de processus non stationnaires, pour résoudre le problème d'estimation de *spectre local*. Ce type de problèmes dépasse le cadre du présent ouvrage, mais il s'agit là d'une ouverture tout à fait intéressante (nous renvoyons à [4] pour une discussion de ces problèmes).

IV EXEMPLES BIDIMENSIONNELS

Dans le cas de la transformée en ondelettes bidimensionnelles, il n'est plus question de représenter la transformée entière, qu'il s'agisse de la version radiale

(fonction de 3 variables) ou de la version non radiale (4 paramètres). On se contente alors de faire des “coupes”, par exemple à a et θ fixés ou encore à b fixé, pour “mesurer” le contenu spectral d’une image au voisinage d’un point donné.

De même que dans le cas unidimensionnel, les ondelettes radiales (qui généralisent les ondelettes à valeurs réelles) produisent une transformée en ondelettes fondamentalement différente de la transformée produite à partir d’ondelettes “directionnelles”.

Considérons par exemple une fonction de deux variables simple, l’indicatrice d’un disque. Quand une telle fonction est analysée par une ondelette radiale, ici le laplacien de gaussienne :

$$\psi(x, y) = \Delta e^{-(x^2+y^2)/2},$$

l’ondelette n’est pas sensible aux variations angulaires et permet donc de localiser avec autant de précision désirée le contour du disque (voir Figure III.10). En revanche, pour une ondelette de Morlet bidimensionnelle (c’est-à-dire une ondelette directionnelle), ici

$$\psi(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} e^{ik_x x},$$

l’ondelette, que l’on dit “polarisée” dans la direction x , ne verra la singularité que dans les directions correspondant à sa polarisation. Dans l’exemple considéré ($a = 8$, $\theta = 45$ degrés), l’ondelette étant elle-même “polarisée” dans la direction x , on voit préférentiellement les bords correspondants du disque, c’est-à-dire que la transformée en ondelettes est localement maximale au voisinage des points b du bord du disque qui se trouvent sur la seconde diagonale (Figure III.11). En ce qui concerne la phase de la transformée en ondelettes, elle est, dans ces régions, comparable à celle des ondelettes correspondantes.

En ce qui concerne le problème d’analyse spectrale locale, il est clair que la transformée utilisant des ondelettes directionnelles est de loin supérieure, dans la mesure où elle permet d’obtenir des informations précises quant à l’orientation des fréquences. Le prototype d’une telle ondelette est l’ondelette de Morlet bidimensionnelle que nous avons vue précédemment. C’est cette ondelette que nous utiliserons jusqu’à la fin de cette section.

Par exemple, dans le cas d’une image comportant une onde plane modulée en amplitude, la transformée en ondelettes est fortement localisée au voisinage de valeurs des variables d’échelle et de rotations proches de celles définissant la fréquence.

Dans un cas un peu plus complexe comme celui de l’image de la figure III.12, où la fréquence varie localement (ici l’amplitude de la fréquence est constante, mais son orientation change), la transformée en ondelettes pour une valeur donnée de b est fortement localisée au voisinage de valeurs des variables d’échelle

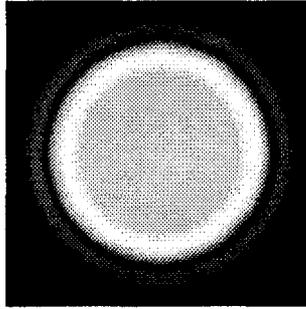


Figure III.10 : Transformée en ondelettes de l'indicatrice d'un disque, à a fixé, avec une ondelette radiale.

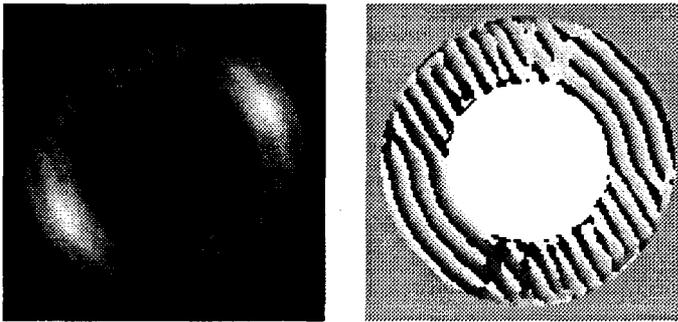


Figure III.11 : Transformée en ondelettes de l'indicatrice d'un disque, à a et θ fixés, avec une ondelette directionnelle (module et phase).

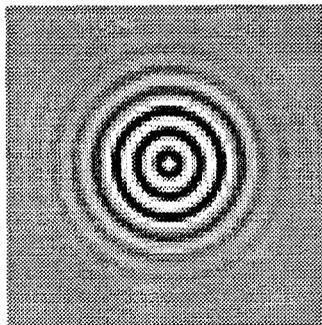


Figure III.12 : Image harmonique modulée en amplitude.

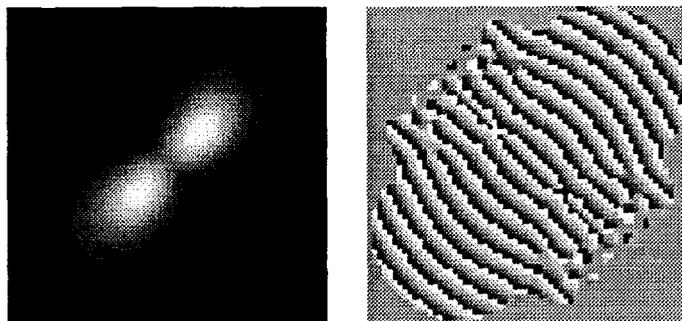


Figure III.13 : Transformée en ondelettes à a et θ fixés, avec une ondelette directionnelle (module et phase).

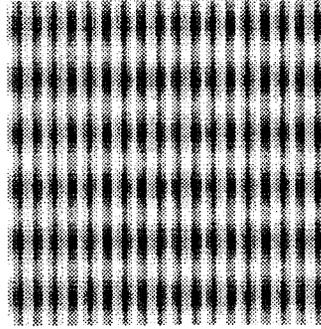


Figure III.14 : Somme de deux images harmoniques.

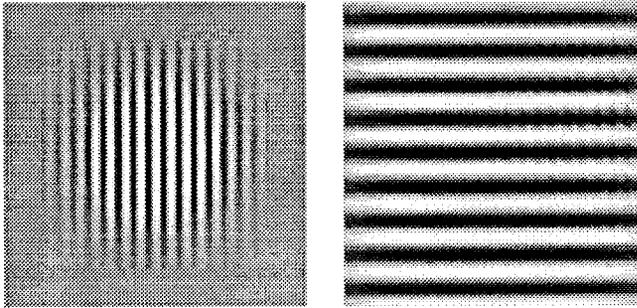


Figure III.15 : Transformée en ondelettes pour deux valeurs fixées de a et θ , avec une ondelette directionnelle.

et de rotations proches de celles définissant la fréquence en b . Réciproquement, pour a et θ fixés, le module de la transformée en ondelettes est maximum au voisinage des valeurs de b telle que la fréquence locale de l'image en b soit proche de la fréquence définie par a et θ . De plus, elle reproduit dans cette région de l'espace des phases le comportement de l'image analysée, ce qu'illustre la figure III.13 (ici $\theta = 45$ degrés). Cette remarque sera utilisée à la fin du chapitre V, quand nous aborderons le problème de mesure de fréquences locales dans les images. Considérons l'exemple à peine plus complexe de deux composantes harmoniques de fréquences différentes (voir Figure III.14 ; ici les deux composantes harmoniques sont associées aux directions x et y respectivement).

La transformée en ondelettes prise pour deux valeurs différentes du couple (a, θ) permet de séparer ces deux composantes. Dans le cas considéré à la figure III.14, il s'agit de deux vecteurs d'onde perpendiculaires, de nombres d'onde différents. La restriction de la transformée en ondelettes à des valeurs de a et θ correspondant à ces vecteurs d'onde permet de les "synthétiser séparément, comme le montre la figure III.15. La figure de gauche correspond à $\theta = 90$ degrés et celle de droite à $\theta = 0$ degré. Rappelons que l'ondelette est une ondelette de Morlet, polarisée suivant la direction x .

V COMMENTAIRES ET RÉFÉRENCES

Ce chapitre n'a d'autre but que de montrer et commenter un certain nombre d'exemples d'école, permettant de se familiariser avec le comportement des représentations d'ondelettes dans certains cas simples. Nous nous sommes sciemment limités à des représentations par niveaux de gris, car l'utilisation de palettes de couleurs introduit un arbitraire supplémentaire dans la représentation ; le choix de la palette de couleurs influence grandement la représentation, alors que cet effet est moins marqué avec des niveaux de gris.

Précisons aussi que, alors que la représentation de transformées en ondelettes de signaux en dimension 1 ne pose aucun problème majeur, il n'en est pas de même dans les dimensions supérieures, dans la mesure où l'on a alors à représenter des fonctions de trois variables ou plus.

La représentation graphique de la transformée en ondelettes (ainsi que la transformée de Gabor) a constitué le premier moyen de compréhension du comportement de celle-ci. Les premiers travaux se trouvent dans [5], [6], [7], [8] notamment. Une présentation détaillée des techniques de représentation se trouve dans [9]. Des analogues bidimensionnels se trouvent dans [1] et [10]. Ces représentations sont, en particulier, à la base des méthodes développées dans [3] pour la caractérisation de signaux modulés en amplitude et en fréquence, que nous allons décrire par la suite (voir chapitre V).

[1] J.P. Antoine, B. Carrette, R. Murenzi, B. Piette, "Image Analysis with Two-

- dimensional Continuous Wavelet Transform”, *Signal Processing*, **31** (1993) 241-272.
- [2] J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian Ed., *Wavelets, Time-Frequency Analysis and Phase-Space*, IPTI, Springer (1989).
 - [3] N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, Ph. Tchamitchian, B. Torrèsani, “Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis : Extraction of Instantaneous Frequencies”, *IEEE Trans. Inf. Th.*, **38**, special issue on wavelet and multiresolution analysis (1992) p. 644-664.
 - [4] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, Hermès (1993).
 - [5] A. Grossmann, “Wavelet Transforms and Edge Detection”, dans *Stochastic Processes in Physics and Engineering*, Ph. Blanchard, L. Streit, M. Hazewinkel Eds, Reidel.
 - [6] A. Grossmann, “Detection of Abrupt Changes in Sound Signals with the Help of Wavelet Transforms”, *Inverse Problems : an Interdisciplinary Study, Advances in electronics and Electron Physics*, Suppl. **19**, Inverse problems (1987).
 - [7] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, “Time-and-scale Representations Obtained through Continuous Wavelet Transforms”, *Signal Processing IV : Theories and Applications*, North Holland (1988) EURASIP 88
 - [8] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, “Analysis of Sound Patterns through Wavelet Transforms”, *Internat. J. Pattern Recognition and Artificial Intelligence 1* (1987) p. 273-302.
 - [9] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, “Reading and Understanding the Continuous Wavelet Transform”, dans [2].
 - [10] R. Murenzi, *Ondelettes multidimensionnelles et applications à l’analyse d’images*, Thèse de troisième cycle, IPT Louvain (1990).

Chapitre IV

ONDELETTES ET RÉGULARITÉ GLOBALE ET LOCALE DES FONCTIONS

I INTRODUCTION

L'une des caractéristiques essentielles des ondelettes est leur grande précision spatiale à petite échelle. Cette propriété est intrinsèquement liée au mode de construction des ondelettes. Dans ces conditions, il est donc naturel que les ondelettes puissent être utilisées pour la caractérisation de propriétés de régularité des fonctions, que ce soit la régularité locale ou la régularité globale.

Dans ce court chapitre, nous nous contentons de donner quelques exemples d'analyse de régularité en illustration. Les démonstrations sont, elles aussi, particulièrement instructives dans la mesure où elles mettent en évidence les propriétés des ondelettes (régularité, conditions de support, de moments nuls) qui interviennent. Nous renvoyons à [8] et [17] pour une analyse plus détaillée et exhaustive.

Les techniques basées sur les ondelettes sont aussi particulièrement utiles pour l'analyse de fonctions ou mesures qui possèdent des propriétés d'invariance par changement d'échelle (ou fractales). Une importante littérature s'est développée sur ce sujet. Nous décrirons les concepts de base à la fin de ce chapitre.

II SINGULARITÉ ET CONTOURS

L'étude des singularités est un sujet d'une grande importance dans de nombreuses applications, et notamment en traitement d'images. En effet, l'un des thèmes privilégiés du traitement d'images est la détection de contours. Un contour est défini comme une zone où l'image varie brutalement, et ce concept est donc très proche de celui de singularité.

La première idée qui vient à l'esprit pour caractériser un contour est donc de comparer des valeurs voisines de l'image ou, encore, de différencier celle-ci. On obtient alors un champ de vecteurs, dont les maxima doivent permettre de localiser et peut-être caractériser les singularités. Néanmoins, ceci n'est guère réaliste, dans la mesure où la variation, pour brutale qu'elle soit, peut quand même avoir lieu sur un certain nombre de sites voisins ; d'autre part, dans le cas

d'une image bruitée, la détection est faussée par la présence du bruit, d'autant plus si le bruit possède une composante haute fréquence non négligeable.

Pour pallier ce défaut, l'idée est de travailler non plus sur l'image elle-même, mais sur une version "lissée" ou "floue" de l'image, partant du principe que si singularité il y a, elle doit être aussi visible sur une copie faiblement lissée. On introduit donc une fonction de lissage $\theta(x)$, que l'on suppose simplement bien localisée (par exemple $\theta(x) = O((1+x^2)^{-1})$, et d'intégrale unité¹. Si on note $f(x)$ l'image, on calcule alors

$$S(b, a) = (f * \theta_a)(b) \quad (\text{II.1})$$

où $\theta_a(x)$ est une copie de $\theta(x)$, correspondant à un lissage à une certaine échelle a :

$$\theta_a(x) = \frac{1}{a^2} \theta\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{II.2})$$

La détection de contour revient alors à rechercher les endroits où la variation de l'image lissée est la plus brutale, donc à différencier cette copie lissée de $f(x)$, c'est-à-dire à calculer

$$T(b, a) = \nabla_b \cdot S(b, a) = (T_1(b, a), T_2(b, a)), \quad (\text{II.3})$$

où $T_1(b, a)$ et $T_2(b, a)$ sont les deux coordonnées de $T(b, a)$. Un calcul immédiat montre que :

$$T_i(b, a) = \frac{1}{a^3} \int f(x) \frac{\partial \theta}{\partial b_i} \left(\frac{b-x}{a} \right) = \frac{1}{a} \langle f, \psi^i_{(b,a)} \rangle \quad (\text{II.4})$$

où

$$\psi^i(x) = -\frac{\partial \theta}{\partial x_i}(-x) \quad (\text{II.5})$$

est par construction une ondelette (c'est-à-dire essentiellement une fonction d'intégrale nulle) à valeurs réelles. La recherche des maxima de $T(b, a)$ revient donc dans ce cas à une recherche des maxima d'une transformée en ondelettes. Ceci montre comment les ondelettes apparaissent naturellement dans ce contexte².

Pour illustrer notre propos, nous prendrons l'exemple d'une photographie, que l'on a numérisée puis traitée en utilisant des ondelettes et des fonctions

¹Il est cependant naturel que la fonction de lissage soit à valeurs réelles.

²Il est instructif de rapprocher ce point de la formule de resynthèse de Morlet que nous avons vue au chapitre II. Elle permet d'exprimer la transformée en ondelettes comme résultant : (1) d'une série de lissages $f * \varphi_a$ de $f(x)$, au moyen d'une identité approchée $\{\varphi_a, a \in \mathbb{R}^*_+\}$ (nous renvoyons aux annexes pour la définition d'une identité approchée) ; (2) d'une différenciation de ces lissages par rapport à la variable d'échelle a . Le point crucial est ici que la différenciation par rapport à la variable d'échelle a est équivalente à la différenciation par rapport à la variable de position x .

d'échelle. L'image originale est montrée en figure IV.1. Sont également représentées une version "floue" de cette image (obtenue par une procédure classique de lissage, c'est-à-dire une convolution avec une "fonction d'échelle", ici une fonction "spline" obtenue en prenant le produit de convolution de la fonction caractéristique de $[0, 1]$ avec elle-même trois fois), ainsi que ses transformées en ondelettes avec $\partial_x \theta$ et $\partial_y \theta$ et les contours détectés (toujours à échelle fixe, ici égale à 4 pixels). On voit, en particulier, apparaître clairement sur la figure IV.2 les deux directions dans lesquelles la dérivation est effectuée. Sur l'image de gauche, apparaissent les variations rapides dans la direction x (*i.e.* horizontale) et sur l'image de droite, les variations rapides dans la direction y . Les maxima locaux de la transformée en ondelettes à la même échelle, représentant les contours, sont représentés en figure IV.3.

Remarques

1) Il est important de remarquer que les fonctions $\psi^i(x)$ définies par l'équation (II.5) n'ont qu'un moment nul par construction, c'est-à-dire que

$$\int \psi^i(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \int x_i^k \psi^i(x) dx \neq 0$$

en général. Dans le cas des ondelettes à deux moments, nuls (que l'on obtiendrait par exemple en différenciant deux fois au lieu d'une), on s'intéresserait pour caractériser les contours, non plus aux maxima locaux de la transformée en ondelettes, mais aux "passages par zéro" (*zero crossings* en anglais) : les points b tels que $T_f(b, a) = 0$, à a fixé. Les maxima locaux porteraient quant à eux une information différente, liée à d'autres types de singularités. Ceci illustre le fait que des ondelettes possédant des propriétés différentes conduisent à des lectures différentes de l'information. Nous reviendrons plus en détail sur cette remarque en décrivant les propriétés de régularité des fonctions. Plus précisément, nous verrons que des ondelettes possédant un nombre plus élevé de moments nuls permettent une analyse fine de singularités d'ordre plus élevé.

2) En traitement d'images, la tendance est plutôt de rechercher les maxima locaux de $T(b, a)$ (avec donc une ondelette dérivée première d'une fonction de lissage), mais en considérant simultanément plusieurs valeurs différentes de la variable d'échelle a . On se retrouve alors totalement dans un contexte d'analyse par ondelettes, ce qui a très bien été remarqué et analysé par S. Mallat [18]. Il existe maintenant une littérature assez importante sur le sujet, reliée en particulier à la "conjecture de Marr"³, qui prétend que l'information donnée par les maxima locaux de la transformée en ondelettes est suffisante pour caractériser la fonction analysée. On sait maintenant que cette conjecture est fautive en toute rigueur [22], mais on pense néanmoins qu'elle peut être vraie

³Ou plutôt la conjecture de Marr modifiée par Mallat.



Figure IV.1 : Image originale et version lissée.



Figure IV.2 : Détails à l'échelle 4.



Figure IV.3 : Contours à l'échelle 4.

jusqu'à une certaine précision, pour une ondelette bien choisie. Il existe en tous cas des évidences numériques qui montrent que des signaux unidimensionnels ou des images peuvent être reconstruits à partir des maxima locaux ou des passages par zéro de leur transformée en ondelettes, avec en général une précision suffisante pour des problèmes de traitement du signal (voir par exemple [18] et [6]).

III CONVERGENCE PONCTUELLE DE LA FORMULE DE RECONSTRUCTION

Avant d'étudier plus en détail les propriétés de régularité des fonctions, il faut revenir sur la formule de Calderón que nous avons décrite précédemment (voir la section III du chapitre II). Nous avons en effet montré que la "formule de reconstruction"

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*} \langle f, \psi_{(b,a)} \rangle \psi_{(b,a)} \frac{db da}{a} \quad (\text{III.1})$$

était à prendre (en l'absence d'hypothèse supplémentaire) au sens de la convergence forte dans $L^2(\mathbb{R})$. Il est naturel de se demander dans quel cas on peut avoir convergence en tous points ou convergence en un point donné.

On sait que dans les cas où une fonction $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ aussi, alors la formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (\text{III.2})$$

converge en tout point de continuité de $f(x)$ et ainsi en tout point si l'on a choisi pour $f(x)$ le représentant continu de sa classe dans $L^1(\mathbb{R})$. Ce résultat peut être utilisé pour montrer une propriété similaire dans le cas de la transformation en ondelettes.

Supposons donc que $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ une ondelette, normalisée de sorte que :

$$c_\psi = \int \left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 \frac{da}{a} = 1.$$

En reprenant les notations de l'équation (III.12) du chapitre II, on obtient

$$\hat{s}_\epsilon(\xi) = \hat{f}(\xi) \int_\epsilon^{1/\epsilon} \left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 \frac{da}{a} \tag{III.3}$$

Ainsi, comme $c_\psi = 1$, $|\hat{s}_\epsilon(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|$ et donc $\hat{s}_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$. Comme de plus, d'après les inégalités de Young, on a $\|s_\epsilon\|_1 \leq -2 \log \epsilon \|\psi\|_1^2 \|f\|_1$ et $s_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$. Donc la transformée de Fourier inverse de $\hat{s}_\epsilon(\xi) - \hat{s}(\xi)$ coïncide en tous points avec $s_\epsilon(x) - s(x)$. Considérons maintenant :

$$\Delta_\epsilon(\xi, x) = e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) \left(1 - \int_\epsilon^{1/\epsilon} \left| \hat{\psi}(a\xi) \right|^2 \frac{da}{a} \right) \tag{III.4}$$

Comme $\Delta_\epsilon \rightarrow 0$, quand $\epsilon \rightarrow 0$, et $|\Delta_\epsilon(\xi, x)| \leq |\hat{f}(\xi)|$, le théorème de convergence dominée permet une nouvelle fois de conclure que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} s_\epsilon(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{III.5}$$

Nous obtenons donc :

Théorème 1 Soit $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et soit $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la formule de reconstruction (III.1) est valide point par point.

Notons que l'on peut montrer ce résultat sous d'autres hypothèses ; par exemple partant d'hypothèses plus faibles sur la fonction analysée et plus fortes sur l'ondelette. On montre par exemple que si l'ondelette est dans l'espace de Hardy réel (c'est-à-dire si $\psi(x)$ et sa transformée de Hilbert sont toutes deux dans $L^1(\mathbb{R})$), il suffit de supposer que la fonction $f(x)$ est bornée et faiblement oscillante, c'est-à-dire que

$$osc_x(f) := \frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y) dy \rightarrow_{\delta \rightarrow 0} f(x) \tag{III.6}$$

uniformément en x pour avoir convergence ponctuelle en tout point de continuité⁴ (voir [12] par exemple pour la démonstration).

⁴Nous savons déjà que les ondelettes sont d'intégrale nulle et il n'est donc pas surprenant de voir apparaître ici une hypothèse d'oscillation supplémentaire.

IV RÉGULARITÉ HÖLDERIENNE

Nous allons maintenant montrer un peu plus précisément comment l'analyse par ondelettes a été utilisée pour caractériser certaines propriétés de régularité des fonctions. Nous allons essentiellement nous concentrer sur l'exemple classique de la régularité hölderienne. Il s'agit d'un cas qui a été étudié en détail depuis le début du siècle. L'outil classique en est l'analyse de Fourier. Néanmoins, il s'agit d'une méthode "globale" et elle ne peut donner d'information locale, sur les degrés de régularité locale par exemple. Nous allons voir que les ondelettes, à condition de choisir une ondelette adaptée au problème, permettent de donner des renseignements précis dans ce cas.

IV.1 Régularité globale

Débutons notre description par les propriétés de régularité hölderienne globale facilement caractérisées.

Soit $0 < \alpha < 1$. On introduit l'espace de Hölder homogène :

$$\Lambda^\alpha = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \exists K < \infty, \text{ tel que : } \right. \\ \left. |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha \forall x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{IV.1})$$

La méthode classique pour caractériser de telles fonctions repose sur la transformée de Fourier. On peut en particulier montrer que si $f(x)$ est une fonction bornée telle que de plus

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|(1 + |\xi|^\alpha)d\xi < \infty \quad (\text{IV.2})$$

alors $f(x) \in \Lambda^\alpha$. En revanche, la réciproque est en général fausse.

Pour l'analyse par ondelettes, nous verrons que l'on obtient des résultats similaires. Le résultat suivant procède de la même philosophie que le précédent. Il caractérise la régularité d'une fonction (*i.e.* l'exposant α) par la vitesse de convergence de sa synthèse à partir de fonctions régulières (ici des ondelettes, plus haut des exponentielles complexes).

Théorème 2 Soit $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ une ondelette.

i) Si $\psi(x)$ est telle que :

$$\int |x|^\alpha |\psi(x)| dx < \infty \quad (\text{IV.3})$$

Alors $\forall f \in \Lambda^\alpha$, $|T_f(b, a)| \leq K a^\alpha$ pour une certaine constante positive finie K .

ii) Réciproquement, si l'ondelette $\psi(x)$ vérifie :

$$\int \sup_{|\delta| < 1} |\psi'(u + \delta)| du < \infty \quad (\text{IV.4})$$

et si $|T_f(b, a)| \leq Ka^\alpha$ pour une certaine constante positive finie K , alors $f \in \Lambda^\alpha$.

Avant de donner la preuve de ce résultat, remarquons que la caractérisation de α se fait par l'analyse du comportement de la transformée en ondelettes à travers les échelles. Le paramètre d'échelle pouvant être assimilé à une fréquence (inverse), ceci est à rapprocher de la description donnée par l'analyse de Fourier⁵.

Preuve : i) Soit $f \in \Lambda^\alpha$. Alors, puisque $\psi(x)$ est une ondelette et donc d'intégrale nulle, de même que tous les $\psi_{(b,a)}(x)$:

$$T_f(b, a) = \frac{1}{a} \int [f(x) - f(b)] \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (\text{IV.5})$$

et donc, comme $f(x) \in \Lambda^\alpha$:

$$|T_f(b, a)| \leq Ka^\alpha \int |x|^\alpha |\psi(x)| dx \quad (\text{IV.6})$$

ii) Supposons maintenant qu'il existe une constante K telle que l'on ait

$$|T_f(b, a)| \leq Ka^\alpha.$$

On a donc, en rappelant que la transformation en ondelettes peut aussi s'écrire

$$T_f(b, a) = f * \tilde{\psi}_a(b),$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \frac{1}{c_\psi} \int [f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(x) - f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(y)] \frac{da}{a} \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_0^{|x-y|} [f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(x) - f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(y)] \frac{da}{a} \\ &\quad + \frac{1}{c_\psi} \int_{|x-y|}^\infty [f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(x) - f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(y)] \frac{da}{a} \end{aligned}$$

⁵ Plus généralement, ce résultat fournit un exemple de caractérisation d'espaces de Hölder par la vitesse de convergence d'une approximation par des fonctions régulières (ici des ondelettes) ; c'est une technique très classique (voir [23] par exemple).

La première intégrale s'estime

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^{|x-y|} [f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(x) - f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(y)] \frac{da}{a} \right| \\
 & \leq 2 \left| \int_0^{|x-y|} [f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(x)] \frac{da}{a} \right| \\
 & \leq 2 \|\psi_a\|_1 K \int_0^{|x-y|} a^\alpha \frac{da}{a} \\
 & \leq K_I |x-y|^\alpha
 \end{aligned}$$

et la seconde :

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{|x-y|}^\infty [f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(x) - f * \tilde{\psi}_a * \tilde{\psi}_a^*(y)] \frac{da}{a} \right| \\
 & \leq \int_{|x-y|}^\infty |\psi_a(x-b) - \psi_a(y-b)| |T_f(b,a)| \frac{da}{a} db \\
 & \leq K \int_{|x-y|}^\infty a^{\alpha-1} \int \left| \psi\left(u - \frac{x-y}{a}\right) - \psi(u) \right| du \frac{da}{a} \\
 & \leq K \int_{|x-y|}^\infty a^{\alpha-1} \frac{|x-y|}{a} da \int_{|\delta| < 1} \sup |\psi'(u+\delta)| du \\
 & \leq K_{II} |x-y|^\alpha
 \end{aligned}$$

En réunissant les deux estimations, on obtient :

$$|f(x) - f(y)| \leq K' |x-y|^\alpha \quad (\text{IV.7})$$

qui achève la preuve du théorème.

De même, soit $n < \alpha < n+1$. L'espace de Hölder homogène correspondant est :

$$\Lambda^\alpha = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \exists K < \infty, P(x) \text{ polynôme de degré } \leq n, \right. \\
 \left. |f(x) - P(x-y)| \leq K|x-y|^\alpha \forall x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{IV.8})$$

Si $f(x) \in C^n(\mathbb{R})$, alors $P(x-y)$ n'est autre que le développement de Taylor de $f(x)$ à l'ordre n .

Pour analyser de tels espaces, il est nécessaire d'utiliser des ondelettes possédant un nombre plus élevé de moments nuls. En effet, en utilisant des

techniques en tous points similaires à la précédente, il faut annuler la contribution de $P(x - b)$, *i.e.* écrire

$$\int f(x)\psi_{(b,a)}(x)^* dx = \int [f(x) - P(x - b)]\psi_{(b,a)}(x)^* dx ,$$

ce qui est fait en supposant :

$$\int x^k \psi(x) dx = 0, \quad \forall k = 0, \dots, n \quad (\text{IV.9})$$

Ainsi peut-on dire que, dans un certain sens, l'ondelette ne voit pas les premiers termes réguliers du développement de $f(x)$ et analyse uniquement la partie singulière. Pour la seconde partie du théorème, elle se généralise également en faisant des hypothèses de régularité supplémentaires sur l'ondelette.

Remarque : Ce résultat simple est en lui-même extrêmement révélateur et caractéristique, car il met en évidence l'usage différent qui est fait de deux propriétés essentielles des ondelettes : les moments nuls et la régularité. Les moments nuls sont utilisés dans la phase de décomposition, dans laquelle ils permettent de "compacter" l'information ou de se focaliser sur la partie intéressante de la fonction analysée, dans ce cas la régularité. En revanche, la régularité de $\psi(x)$ n'intervient qu'au moment de la "synthèse" de $f(x)$.

IV.2 Régularité locale

Nous avons vu comment caractériser la régularité hölderienne locale des fonctions avec la transformée en ondelettes. Mais la transformée en ondelettes étant une méthode que l'on peut qualifier de locale, elle permet aussi d'étudier les propriétés de régularité locale des fonctions. Prenons l'exemple de la régularité hölderienne. Nous allons voir comment "presque caractériser" les exposants de Hölder locaux de fonctions à l'aide de la transformée en ondelettes. Dans ce but, nous dirons que $f \in \Lambda_{(x_0)}^\alpha$, si il existe une constante K telle que $\forall h \in \mathbb{R}$:

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq K|h|^\alpha \quad (\text{IV.10})$$

On obtient alors le résultat immédiat suivant, qui est une version locale du théorème 2. Si une fonction $f(x)$ possède une certaine régularité (ici l'exposant α) en un point x_0 , sa transformée en ondelettes va avoir le même comportement que précédemment par rapport à la variable d'échelle.

Théorème 3 Soit $f \in \Lambda_{(x_0)}^\alpha$ et soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ tel que : $\int |x|^\alpha |\psi(x)| dx < \infty$. Alors il existe une constante C telle que

$$|T_f(b, a)| \leq C(a^\alpha + |b - x_0|^\alpha) \quad (\text{IV.11})$$

Ainsi, on retrouve l'exposant en étudiant le comportement de la transformée en ondelettes à travers les échelles. L'information supplémentaire, à savoir le côté local du comportement hôlderien, se retrouve dans le terme en $O(|b-x_0|^\alpha)$.

Preuve :

$$\begin{aligned} |T_f(b, a)| &= \left| \int [f(x) - f(x_0)] \psi_{(b,a)}(x) dx \right| \\ &\leq \frac{K}{a} \int [|x-b|^\alpha + |b-x_0|^\alpha] \psi \left(\frac{x-b}{a} \right)^* dx \end{aligned}$$

d'où

$$|T_f(b, a)| \leq K_1 a^\alpha + K_2 |b-x_0|^\alpha \quad (\text{IV.12})$$

avec

$$\begin{cases} K_1 &= K \int |x|^\alpha |\psi(x)| dx \\ K_2 &= K \|\psi\|_1 \end{cases}$$

ce qui conclut la démonstration.

Nous avons vu que le résultat direct est facile à montrer. En revanche, la réciproque est en général fautive, mais néanmoins vraie "à un logarithme près", comme le montre le théorème suivant, dû à S. Jaffard [14] et M. Holschneider et Ph. Tchamitchian [12]. Si la transformée en ondelettes de $f(x)$ satisfait aux estimations locales précédentes (à un logarithme près), ainsi qu'à une condition de régularité globale supplémentaire, alors la fonction elle-même est régulière :

Théorème 4 Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ une ondelette et soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Si, en outre, (i) il existe deux constantes K et $0 < \gamma < \alpha$, telles que pour tout $a > 0$

$$|T_f(b, a)| \leq K a^\gamma \quad (\text{IV.13})$$

et (ii) la transformée en ondelettes satisfait à

$$|T_f(b, a)| \leq K' \left(a^\alpha + \frac{|b-x_0|^\alpha}{|\ln |b-x_0||} \right) \quad (\text{IV.14})$$

pour une certaine constante positive finie K' , alors $f \in \Lambda_{(x_0)}^\alpha$.

Nous renvoyons à [14] et [12] pour la preuve de ce résultat qui, bien que plus complexe, contient pour l'essentiel les mêmes ingrédients que les précédentes.

Remarques

1) Cette analyse a été précisée par S. Jaffard, qui a notamment montré que l'analyse par ondelettes peut être vue comme une version simple d'un programme plus vaste, appelé analyse 2-microlocale. Nous renvoyons à [17] pour une discussion plus précise de ce point.

2) Il est possible de montrer que si une fonction $f(x)$ a un comportement hölderien d'exposant α en un point x_0 , sa primitive $f^{(-1)}(x)$ a alors un comportement hölderien d'exposant $\alpha + 1$ en x_0 . En revanche, la réciproque est en général fautive, essentiellement à cause de possibles oscillations rapides au voisinage de la singularité⁶. Ce type de comportement a été examiné en détail dans [18].

3) Mallat et Hwang [18] montrent comment exploiter ces résultats pour la caractérisation numérique de singularités et pour celle de signaux au moyen de singularités. Ils montrent en particulier comment ce problème se ramène aux conjectures de Marr brièvement décrites au début de ce chapitre.

V AUTO-SIMILARITÉ

Par construction, la transformée en ondelettes est intrinsèquement associée à une notion d'échelle. Plus précisément, elle est covariante par rapport à l'action du groupe affine qui contient les dilatations. En particulier, on voit facilement —et nous en connaissons les raisons précises en discutant l'approche géométrique— que la transformée en ondelettes d'une copie dilatée d'une fonction donnée coïncide avec la dilatée de la transformée en ondelettes de la fonction originale. En effet, si $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ et si l'on note $f_\lambda(x) = f(x/\lambda)$, il vient immédiatement :

$$T_{f_\lambda}(b, a) = T_f\left(\frac{b}{\lambda}, \frac{a}{\lambda}\right) \quad (\text{V.1})$$

C'est l'exemple des fonctions homogènes étudiées au chapitre III, section II.

Dans le même ordre, il n'est pas étonnant que la transformée en ondelettes ait pu être utilisée avec succès pour l'étude d'objets, de fonctions ou de mesures auto-similaires. Il n'est pas question ici d'entrer dans les détails techniques, mais plutôt de donner une idée des méthodes utilisées et des raisons qui font que ces méthodes fonctionnent. Nous renvoyons à [11], [9] et [2] pour une discussion plus complète.

V.1 Mesures fractales

Commençons cette section en rappelant la définition de la dimension de Hausdorff d'un ensemble E (voir par exemple [7]). Pour simplifier nous supposons que E est un sous-ensemble de \mathbb{R} . Etant donné un recouvrement quelconque de E par des ouverts disjoints $B_k(\ell)$ de rayon inférieur ou égal à ℓ :

$$E = \bigcup_k B_k(\ell),$$

⁶L'exemple le plus typique est donné par la fonction $\sin(1/x)$.

on considère la quantité :

$$\Gamma(q) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \sum_k |B_k(\ell)|^q \quad (\text{V.2})$$

$|B_k(\ell)|$ étant l'aire de $B_k(\ell)$, qui est une fonction décroissante de q . De plus, il est facile de voir que si $\Gamma(q) < \infty$, alors $\Gamma(q') = 0 \forall q' > q$. Il existe donc une valeur de transition q_0 , telle que $\Gamma(q) = 0 \forall q > q_0$ et $\Gamma(q) = \infty \forall q < q_0$.

Définition 1 La dimension de Hausdorff de E est la valeur $\dim_H = q_0$ de transition de la fonction $\Gamma(q)$.

Un objet (ou une mesure) self-similaire est habituellement décrit par des outils statistiques. Par exemple, étant donnée une mesure μ , on dit qu'elle présente un comportement autosimilaire au voisinage du point x_0 si, étant donnée une suite de boules $B(x_0, \ell)$ de rayon ℓ , centrées en x_0 , on a :

$$\mu(B(x_0, \ell)) \sim \ell^\alpha \quad \text{quand } \ell \rightarrow 0^+ \quad (\text{V.3})$$

L'exposant $\alpha = \alpha(x_0)$ est appelé exposant d'échelle local en $x = x_0$. Il est clair que cet exposant d'échelle peut varier de point en point de façon brutale. On introduit alors le sous-ensemble E_α , consistant des points x tels que l'exposant d'échelle local en x soit précisément α :

$$E_{\alpha_0} = \{x, \alpha(x) = \alpha_0\} \quad (\text{V.4})$$

Définition 2 Le spectre de singularités $d(\alpha)$ de la mesure μ est la fonction qui à tout α associe la dimension de Hausdorff de E_α :

$$d(\alpha) = \dim_H(E_\alpha) \quad (\text{V.5})$$

Classiquement (voir par exemple [10] et [7]), le formalisme multifractal "pour les mesures" associe à une mesure un "spectre continu" de dimensions fractales généralisées, de la façon suivante. Partant d'un pavage $E = \bigcup_k B_k(\ell)$ de E par des ouverts disjoints de rayon inférieur ou égal à ℓ , on introduit la "fonction génératrice" :

$$Z_q(\ell) = \sum_k \mu(B_k(\ell))^q \quad (\text{V.6})$$

Alors en posant :

$$\tau(q) = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\log(Z_q(\ell))}{\log(\ell)} \quad (\text{V.7})$$

(quand la limite existe), les “dimensions fractales généralisées” sont définies par :

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (\text{V.8})$$

Le formalisme multifractal permet alors d'identifier le spectre de singularités $d(\alpha)$ à la transformée de Legendre de $\tau(q)$:

$$d(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \tau(q)) \quad (\text{V.9})$$

Remarque : Il est important de préciser qu'il n'est pas facile de donner un sens précis à cette heuristique (voir par exemple [7]). Néanmoins, ce formalisme, validé sur quelques exemples spécifiques sur lesquels la self-similarité est apparente (comme des mesures de Cantor par exemple) reste un formidable outil de description et de modélisation de phénomènes physiques complexes. Le spectre de singularités $d(\alpha)$ peut être un paramètre de modélisation pertinent, en turbulence notamment, et il semble que le formalisme multifractal soit le seul moyen réaliste d'y avoir accès.

Quelle est la place des ondelettes dans ce contexte ? On remarque tout d'abord que le paramètre ℓ précédent (le rayon des boules utilisées pour paver l'espace analysé) n'est autre qu'une variable d'échelle et que $\mu(B_k(\ell))$ peut aussi être écrit $\int \chi_{B_k(\ell)}(x) d\mu(x)$. D'où l'idée de remplacer cette fonction caractéristique par une fonction plus générale⁷ $\psi(x)$, dilatée et translatée. Ceci conduit immédiatement à la notion de transformée en ondelettes d'une mesure. Si $\psi(x)$ est par exemple une fonction de test, on écrit⁸ :

$$T_\mu(b, a) = \int_E \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) d\mu(x) \quad (\text{V.10})$$

Compte tenu des discussions précédentes, on s'attend heuristiquement à retrouver sur la transformée en ondelettes des traces du comportement d'échelle local de la mesure, à travers un comportement local du type :

$$T_\mu(b, \lambda a) \sim a^{\alpha(b)-p} T_\mu(b, a), \quad \text{quand } a \rightarrow 0^+.$$

Pour l'exploiter, par analogie avec le formalisme multifractal classique et suivant [11], on introduit une nouvelle fonction génératrice :

$$Z_q(a) = \int |T_\mu(b, a)|^{q-1} db \quad (\text{V.10})$$

qui doit donner accès aux dimensions fractales généralisées.

⁷Pas nécessairement d'intégrale nulle (voir par exemple [9]).

⁸La normalisation est ici choisie de sorte que T_μ puisse aussi être interprétée comme la transformée en ondelettes usuelle de la primitive $\int_{-\infty}^x d\mu(y)$ de μ , par rapport à l'ondelette $-\psi'(x)$.

Remarque : Supposons maintenant que μ soit une mesure sur un espace métrique E , muni de la distance $|\cdot|$ et non plus sur un sous-ensemble de \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n . On définira alors la transformée en ondelettes de la mesure μ de la manière suivante. Si $\psi(x)$ est une ondelette définie sur E :

$$T_\mu(b, a) = \int_E \psi\left(\frac{|x-b|}{a}\right) d\mu(x).$$

Exemple : Mesures de Bernoulli. Considérons l'intervalle unité $I = [0, 1]$ et une application linéaire par morceaux Θ sur I telle que

$$\Theta^{-1}(I) = \bigcup_{k=1}^K I_k$$

où les I_k sont des intervalles disjoints deux à deux, tels que $\text{dist}(I_k, I_l) > 0 \forall k, l$. Soit alors :

$$\Theta_k^{-1} : x \in I \rightarrow \lambda_k x + \mu_k \in I_k$$

où $0 < \lambda_k < 1 \forall k = 1, \dots, K$. En posant :

$$I_{k_1 k_2 \dots k_n} = I \cap \Theta_{k_1}^{-1}(I) \cap \dots \cap \Theta_{k_n}^{-1}(I)$$

on voit que le sous-ensemble de $[0, 1]$ invariant par Θ est de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\Theta &= \lim_{n \rightarrow \infty} I \cap \Theta^{-1}(I) \cap \Theta^{-2}(I) \cap \dots \cap \Theta^{-n}(I) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{i=1, \dots, n, k_i=1, \dots, K} I_{k_1 k_2 \dots k_n} \end{aligned}$$

Etant données K probabilités p_1, p_2, \dots, p_K telles que $\sum_1^K p_k = 1$, on appellera mesure de Bernoulli associée à Θ une mesure telle que

$$\mu(I_{k_1 k_2 \dots k_n}) = p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_n}$$

Une propriété remarquable est que le formalisme multifractal est exact pour de telles mesures de Bernoulli ; de plus, les dimensions généralisées et le spectre $d(\alpha)$ peuvent être calculés explicitement (voir par exemple [10]) : la fonction $\tau(q)$ est solution de

$$\sum_{k=1}^K \frac{p_k^q}{\lambda_k^{\tau(q)}} = 1.$$

Dans le cas de l'ensemble triadique de Cantor uniforme montré à la figure IV.4 ($K = 2$, $\lambda_k = 1/3$, $\mu_k = 0$ et $p_k = 1/2$ pour tout k), on obtient ainsi $\tau(q) = (q-1) \log(2)/\log(3)$, i.e. $D(q) = \log(2)/\log(3) \forall q$. La transformation de Legendre montre donc que, dans ce cas, seule la singularité $\alpha = \log(2)/\log(3)$ est présente. On dit alors que l'on a affaire à un monofractal. Ceci n'est plus vrai dans le cas général et $D(q)$ n'est pas toujours constante. Ces exemples permettent de tester les performances de la transformée en ondelettes, dont on attend essentiellement deux types de réponses :

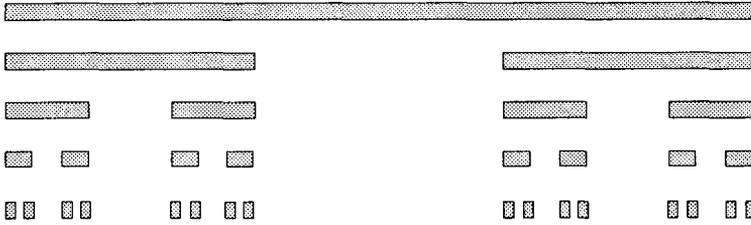


Figure IV.4 : Ensemble de Cantor triadique.

1) Caractériser le spectre de singularités $d(\alpha)$ et les dimensions généralisées de la mesure.

2) Retrouver la règle de construction de la mesure, ce qui est simple dans ce cas.

Le second point est facile à voir sur la transformée en ondelettes. La figure IV.5 montre une ondelette de Morlet et la transformée est calculée sur 6 octaves avec 9 échelles intermédiaires entre deux octaves, où apparaît clairement une “vue éclatée” du fractal. Dans le cas d’objets plus complexes, des méthodes permettant d’attaquer ce problème ont été développées (voir par exemple [1]). Il est cependant remarquable que des structures (self) similaires à celles observées sur la figure IV.3 sont aussi observées dans le cas de signaux réels, provenant de mesures physiques (en turbulence notamment).

En ce qui concerne le premier point, la réponse est fournie par la fonction génératrice $Z_{pq}(a)$ introduite en (V.10). On montre facilement que les propriétés de self-similarité de la mesure se reflètent de façon simple sur la fonction génératrice et le comportement de celle-ci à petites échelles permet donc la caractérisation des dimensions critiques. Nous reproduisons ici le résultat classique. (Nous renvoyons à [3] pour plus de détails.)

Théorème 5 Avec les notations précédentes, $\tau(q)$ est la valeur de transition telle que

$$\liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\log Z_q}{\log(q)} = \tau(q) . \quad (\text{V.11})$$

Ce résultat est ainsi utilisé pour le calcul des dimensions généralisées et du spectre de singularité des mesures de Bernoulli, ainsi que des mesures plus générales, bien qu’on n’ait en général que très peu d’informations quant à la validité du formalisme multifractal (voir par exemple [4]).

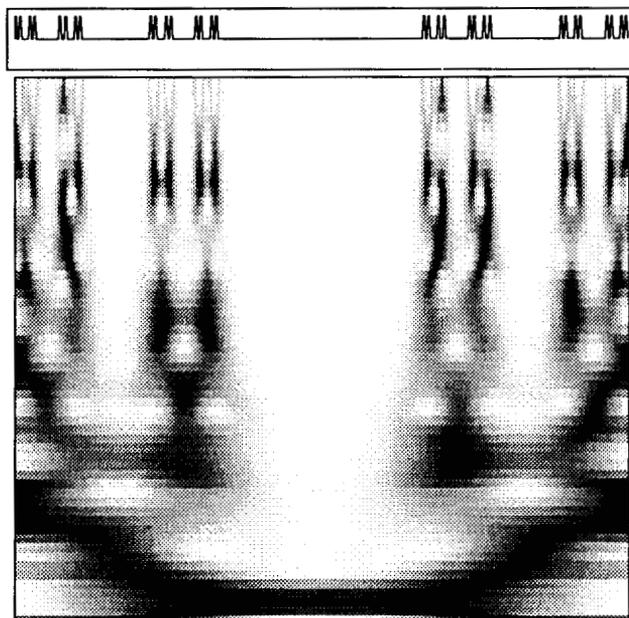


Figure IV.5 : Module de la transformée en ondelettes de la mesure de Cantor triadique uniforme.

V.2 Fonctions fractales

Dans de nombreuses situations pratiques, l'objet que l'on souhaiterait modéliser n'est pas une mesure mais plutôt une fonction ou un signal. Dans ce cas aussi, un formalisme multifractal a été développé, initialement dans un contexte d'analyse de la turbulence. Commençons par décrire l'analogie pour les fonctions du spectre de singularités. On dit qu'une fonction $f(x) \in \Gamma_{(x_0)}^\alpha$, si (voir [16])

$$\begin{cases} f(x) \in \Lambda_{(x_0)}^\gamma & \forall \gamma < \alpha \\ f(x) \notin \Lambda_{(x_0)}^\gamma & \forall \gamma > \alpha \end{cases} \quad (\text{V.12})$$

Rappelons que $f(x) \in \Lambda_{(x_0)}^\gamma$ signifie que la fonction $f(x)$ est hölderienne d'exposant γ en x_0 . Etant donnée $f(x)$, on associe alors à tout $0 < \alpha < \infty$ l'ensemble

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R}, f \in \Gamma_{(x)}^\alpha \right\} \quad (\text{V.13})$$

Définition 3 *Le spectre de singularités $d(\alpha)$ de la fonction $f(x)$ est la fonction qui à tout α associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble E_α :*

$$d(\alpha) = \dim_H(E_\alpha) . \quad (\text{V.14})$$

Il s'ensuit que le spectre de singularités d'une mesure μ est identique au spectre de singularités de la fonction primitive $\int_0^x d\mu$, ainsi d'ailleurs que de toute fonction de la forme $\int_0^x d\mu + r(x)$, où $r(x)$ est une fonction de classe C^∞ arbitraire. Une analyse similaire à celle décrite dans la section précédente peut être faite, conduisant à un formalisme multifractal pour les fonctions. Etant donnée une fonction $f(x)$, il s'agit essentiellement de lui associer une fonction génératrice de la forme

$$Z_q(a) = \int |T_f(b, a)|^q db \quad (\text{V.15})$$

et d'étudier son comportement quand $a \rightarrow 0$. On montre alors que pour les fonctions de la forme $\int_0^x d\mu + r(x)$, où μ est une mesure de Bernoulli et $r(x)$ est une fonction de classe C^∞ ,

$$\liminf_{a \rightarrow 0} \frac{\log(Z_q(a))}{\log(a)} = \tau(q) \quad (\text{V.16})$$

le spectre de singularités étant toujours relié à la fonction $\tau(q)$ par une transformation de Legendre

$$d(\alpha) = \min_q (\alpha q - \tau(q)) \quad (\text{V.17})$$

Ce résultat a été précisé par S. Jaffard [16] et étendu à une classe plus large de fonctions, qui inclut en particulier la célèbre fonction de Riemann-Weierstrass (voir aussi [11]) :

$$W(x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} \sin(\ell^2 x)$$

pour laquelle $d(\alpha) = 0$ si $\alpha \leq 1/2$ ou $\alpha > 3/4$ et $d(\alpha) = 4\alpha - 2$ si $1/2 \leq \alpha \leq 3/4$.

Cette analyse ouvre la porte à une utilisation systématique du formalisme multifractal, en traitement du signal en particulier.

Remarque : Arneodo, Bacry et Muzy [3], et Mallat et Hwang [13] ont proposé (indépendamment) des méthodes légèrement différentes pour calculer les spectres de singularités au moyen de la transformée en ondelettes. L'idée de base est de ne considérer que les maxima locaux de la transformée plutôt que la transformée elle-même. Les algorithmes correspondants semblent être plus robustes ; ils ne tiennent pas compte en effet des points où la transformée est numériquement faible.

VI COMMENTAIRES ET RÉFÉRENCES

L'étude des singularités constitue l'une des applications essentielles des ondelettes, et ce depuis bien avant qu'elles ne soient baptisées ondelettes. En effet, la formule de Calderón que nous avons utilisée tout au long de ce chapitre est à la base de la classification d'une certaine catégorie d'espaces fonctionnels, incluant en particulier les espaces de fonctions hôlderiennes. Nous renvoyons à [8] et [21] pour une description bien plus précise de ces aspects. Nous avons ici adopté un point de vue plus élémentaire.

En revanche, il semble que la caractérisation des propriétés de régularité locale des fonctions ne soit apparue que dans l'ère moderne des ondelettes, avec les travaux de S. Jaffard et Y. Meyer [14] [15] [17], Ph. Tchamitchian et M. Holschneider [12].

Dans un contexte tout à fait différent, la même problématique avait été abordée pour la caractérisation de signaux et d'images, suivant le programme tracé par D. Marr [20]. C'est ainsi que suivant les travaux de Canny [5], S. Mallat et son équipe ont développé un ensemble de méthodes permettant de mener à bien ce programme (voir [18] et [19] pour une synthèse).

Il existe maintenant une volumineuse littérature concernant l'utilisation de l'analyse par ondelettes pour la caractérisation de comportements auto-similaires. Nous renvoyons en particulier aux travaux d'A. Arneodo et son équipe ([3] par exemple) pour une analyse systématique dans des contextes aussi différents que la turbulence, la croissance cristalline ou les séquences d'ADN, ou [13] dans un contexte plus proche du traitement du signal. Une

analyse de la validité du formalisme multifractal peut être trouvée dans [7] et [4] pour des mesures et [16] pour les fonctions.

- [1] A. Arneodo, E. Bacry, J.F. Muzy, *Wavelet Analysis of Fractal Signals, and Application to Fully Developed Turbulence Data*, Prétirage, CRPP Bordeaux (1991).
- [2] A. Arneodo, G. Grasseau, M. Holschneider, "On the Wavelet Transform of Multifractals", *Phys. Rev. Lett.*, **61** (1988) p. 2281-2284.
- [3] E. Bacry, A. Arneodo, J.F. Muzy, "Singularity Spectrum of Fractal Signals from Wavelet Analysis : Exact Results", *J. Stat. Phys.*, **70** (1993) p. 635.
- [4] G. Brown, G. Michon, J. Peyrière, "On the Multifractal Analysis of Measures", *J. Stat. Phys.*, **66** (1992) 775-790.
- [5] J. Canny, "A Computational Approach to Edge Detection", *IEEE Trans. Pattern Anal. and Appl.*, **8** (1986) p. 679-698.
- [6] R. Carmona, *Wavelet Identification of Transients in Noisy Time Series*, University of California at Irvine preprint (1994).
- [7] I. Falconer, *Fractal Geometry*, J. Wiley & Sons (1990).
- [8] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss, "Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces", *CBMS-AMS Regional Conferences Series*, SIAM.
- [9] J.M. Ghez, S. Vaienti, "On the Wavelet Analysis for Multifractal Sets", *J. Stat. Phys.*, **57** (1989) p. 415-420.
- [10] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shraiman, *Phys. Rev. A* **33** (1986) p. 1141.
- [11] M. Holschneider, *Analyse d'objets fractals par transformation en ondelettes*, Thèse de doctorat, Marseille (1989).
- [12] M. Holschneider, Ph. Tchamitchian, "Pointwise Analysis of Riemann's "Non Differentiable" Function", *Invent. Math.*, **105** (1991) p. 157-175
- [13] W.L. Hwang, *Thèse*, Courant Institute, New York University (1993).
- [14] S. Jaffard, "Exposants de Holder en des points donnés, et coefficients d'ondelettes", *CRAS* 308, série 1 (1989) p. 79.
- [15] S. Jaffard, "Pointwise Smoothness, Two-microlocalization and Wavelet Coefficients", *Publicaciones Matemáticas*, **35** (1991) p. 155-168.
- [16] S. Jaffard, "Multifractal Formalism for Functions", Prétirage du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, ENPC, La Courtine (1993).
- [17] S. Jaffard, Y. Meyer, "Pointwise Behaviour of Functions", Prétirage du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, ENPC, La Courtine (1993).
- [18] S. Mallat, W.L. Hwang, "Singularity Detection and Processing with Wavelets", *IEEE Trans. Inf. Th.*, **38** special issue on wavelet and multiresolution analysis (1992).
- [19] S. Mallat, Z. Zhong, "Characterization of Signals from Multiscale Edges", *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intelligence*, **14** (1993).
- [20] D. Marr, *Vision*, Freeman, New York (1982).
- [21] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs, I : Ondelettes*, Hermann (1989)
- [22] Y. Meyer, *Les Ondelettes, algorithmes et applications*, Armand Colin, 2^e édition (1994).
- [23] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press (1970).

Chapitre V

APPLICATIONS : APPROXIMATIONS ASYMPTOTIQUES ET ANALYSE DE SIGNAUX MODULÉS EN AMPLITUDE ET EN FRÉQUENCE

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à des applications de l'analyse par ondelettes dans lesquelles le point essentiel était l'aspect "analyse locale" des décompositions en ondelettes. Nous allons maintenant considérer des exemples dans lesquels nous nous concentrerons davantage sur l'aspect "analyse spectrale". Nous allons nous intéresser à l'analyse de fonctions ou de signaux auxquels on peut associer des quantités physiques telles qu'une fréquence locale, ou une amplitude locale. Ce type de situation se rencontre assez fréquemment en physique, notamment en propagation. Ces concepts sont bien évidemment totalement naturels en musique.

Nous avons vu au chapitre III, section II, un exemple montrant la transformée en ondelettes d'un signal à fréquence dépendant du temps. Un autre exemple, en l'occurrence celui de la transformée en ondelettes d'un signal sonar émis par une chauve-souris, est montré à la figure V.1. La remarque essentielle porte sur la localisation de la transformée dans le demi-plan temps-échelle. Nous verrons plus loin qu'elle se "concentre" en fait dans le voisinage d'une courbe $a = a_r(b)$, appelée "arête" de la transformée, d'équation

$$a_r(b) = \frac{K}{\nu(b)}$$

où $\nu(x)$ est la fréquence locale du signal et K une constante ne dépendant que de l'ondelette.

Nous commencerons ce chapitre par quelques préliminaires, qui nous permettront de préciser quelque peu la nature des fonctions auxquelles nous allons nous restreindre, ainsi que les techniques que nous allons employer. Puis nous verrons dans quelle mesure l'analyse par ondelettes (et l'analyse de Fourier



Figure V.1 : Transformée en ondelettes (module) d'un signal sonar émis par une chauve-souris (ondelette de Morlet).

à court terme) permet de caractériser ces fonctions. Nous verrons en particulier l'intérêt qu'offrent, pour ce type d'analyse, des ondelettes progressives permettant d'éviter les phénomènes d'interférence entre fréquences positives et négatives du signal analysé. Il convient de préciser que les méthodes décrites ici ne s'appliquent que dans le cas de signaux non bruités ou faiblement bruités. En présence d'un bruit plus important, il est nécessaire de se tourner vers des algorithmes plus robustes. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

I SIGNAL ANALYTIQUE ET TRANSFORMATION DE HILBERT

Qu'est-ce qu'un signal (ou une fonction) modulé en amplitude et en fréquence ? Répondre à cette question sous-entend que l'on soit capable de définir des notions d'amplitude et de phase d'un signal, ce qui n'est *a priori* pas évident du tout. Considérons à titre d'exemple la fonction suivante

$$s(x) = A(x) \sin(\phi(x))$$

représentée en termes d'une amplitude et d'une phase, toutes deux dépendant de la variable x . Il est immédiat que l'on peut tout aussi bien l'écrire

$$s(x) = 2A(x) \sin\left(\frac{\phi(x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\phi(x)}{2}\right)$$

faisant ainsi apparaître une autre amplitude $2A(x) \cos\left(\frac{\phi(x)}{2}\right)$ et une autre phase $\frac{\phi(x)}{2}$. On voit donc apparaître ici une ambiguïté¹. Il importe donc de lever cette incertitude. Supposons qu'il soit possible d'associer de façon naturelle un couple $(A_s(x), \phi_s(x))$ au signal $s(x)$ étudié. On peut alors introduire naturellement une notion de fréquence instantanée, définie par :

$$\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_s(x)}{dx} \quad (\text{I.1})$$

qui traduit les variations de la phase de $s(x)$ et correspond effectivement à la fréquence usuelle si ϕ_s varie linéairement avec x (modulo 2π).

Un choix possible est celui du "couple canonique" proposé par J. Ville dans un article fondamental, qui est à la base d'un grand nombre de techniques de traitement du signal actuelles. Décrivons maintenant cette approche qui nous sera utile par la suite. En effet, bien qu'elle soit souvent inadaptée, elle constitue un point de départ pour développer d'autres approches.

Considérons tout d'abord la transformation de Hilbert \mathcal{H} , qui s'écrit dans l'espace de Fourier comme :

$$\widehat{\mathcal{H} \cdot f}(\xi) = -i \text{Sgn}(\xi) \hat{f}(\xi) \quad (\text{I.2})$$

J. Ville introduit alors la fonction $Z_s(x)$, appelée *signal analytique* de $s(x)$ et définie comme :

$$Z_s = [1 + i\mathcal{H}] \cdot s \quad (\text{I.3})$$

ou encore

$$\widehat{Z}_s(\xi) = 2H(\xi)\hat{s}(\xi) \quad (\text{I.4})$$

$H(\xi)$ étant la fonction de Heaviside. Clairement, $Z_s(x)$ peut être étendue analytiquement à tout le demi-plan supérieur :

$$Z_s(z) = 2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\xi z} \hat{s}(\xi) d\xi \quad (\text{I.5})$$

$$= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{s(t)}{z-t} dt \quad (\text{I.6})$$

ce qui justifie l'appellation "signal analytique".

En d'autres termes, $Z_s(x)$ est obtenu à partir de $s(x)$ par un filtrage linéaire supprimant les fréquences négatives. Après la spécification d'une détermination pour le logarithme, les égalités

$$A_s(x) = |Z_s(x)| \quad (\text{I.7})$$

¹Cette ambiguïté cache en fait le problème de la notion même de fréquence locale *a priori* incompatible avec le principe d'incertitude de Heisenberg.

$$\phi_s(x) = \text{Arg}[Z_s(x)] \quad (\text{I.8})$$

établissent une correspondance biunivoque entre le signal analytique $Z_s(x)$ et le couple canonique $(A_s(x), \phi_s(x))$, où $A_s(x)$ est une fonction à valeurs réelles positives et $\phi_s(x)$, une fonction définie partout où $A_s(x) > 0$ et qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, par exemple. De plus, on a clairement :

$$s(x) = \text{Re}Z_s(x) \quad (\text{I.9})$$

et la représentation de $s(x)$

$$s(x) = A_s(x) \cos(\phi_s(x)) \quad (\text{I.10})$$

est appelée représentation canonique.

Il importe de faire ici quelques remarques :

- La première concerne la signification physique que l'on entend donner à la fréquence instantanée définie par (I.1). Une fréquence proprement dite est une caractéristique d'une onde plane, mesurable expérimentalement (par interférométrie ou autre), qui décrit la rapidité des oscillations de l'onde. Si l'onde plane est maintenant affectée d'une amplitude variable, on ne pourra conserver à la fréquence sa signification physique qu'à condition que, dans le domaine d'étude, l'amplitude soit à variation lente par rapport aux oscillations, ce qui se passe effectivement avec des ondes planes expérimentales. La fréquence instantanée n'aura donc une interprétation en tant que fréquence locale qu'à la condition d'être suffisamment élevée pour que les oscillations correspondantes soient rapides par rapport aux variations de l'amplitude.

- Pour caractériser un signal modulé en fréquence et en amplitude, les traiteurs de signaux introduisent aussi la notion de retard de groupe $\tau_s(x)$: en écrivant la transformée de Fourier du signal analytique elle aussi sous forme exponentielle $\widehat{Z}_s(\xi) = M_s(\xi) \exp\{i\theta_s(\xi)\}$ le retard de groupe est défini similairement à la fréquence instantanée comme $\tau_s(x) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_s(x)}{dx}$. Dans certains cas simples, la fréquence instantanée et le retard de groupe sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre.

- Dans les cas où la fonction $s(x) = A(x) \cos(\phi(x))$ est telle que les variations relatives de $A(x)$ sont très lentes par rapport à celles de la phase $\phi(x)$, c'est-à-dire $|\phi'(x)| \gg \left| \frac{A'(x)}{A(x)} \right|$, on peut facilement voir que le modèle exponentiel $A(x) \exp i\phi(x)$ constitue une excellente approximation du signal analytique $Z_s(x)$. On est alors dans le cas des signaux dits asymptotiques.

- La fréquence instantanée introduite par Ville est particulièrement inadaptée dès que le signal analysé est un signal "multicomposantes", c'est-à-dire somme de signaux auxquels on peut naturellement associer une amplitude et une fréquence locales. La fréquence instantanée de Ville perd alors tout son sens

physique, l'information pertinente est d'ailleurs plus portée par les fréquences locales que par une unique fréquence instantanée. Un exemple simple (dû à Y. Meyer) est fourni par la fonction $s(x) = \sin(1/x)$; le signal analytique associé est alors $Z_s(x) = i(\exp\{-i/x\} - 1)$, et il s'agit bien de la superposition de $i \exp\{-i/x\}$, de fréquence instantanée x^{-2} , et de $-i$ de fréquence nulle. En revanche, le calcul de Ville conduit à une amplitude et une fréquence instantanées de la forme : $A(x) = 2|\sin(1/2x)|$ et $\nu(x) = 1/(4\pi x^2)$. Un exemple de signal réel est fourni par le signal de parole (une illustration sera donnée dans ce chapitre) que l'on peut modéliser comme somme de signaux asymptotiques, mais pour lequel le programme de Ville est totalement inadapté.

II ANALYSE PAR ONDELETTES DE LIGNES SPECTRALES

Avant d'utiliser la méthode de la phase stationnaire pour le calcul de la transformée en ondelettes de signaux modulés, considérons le cas plus simple de signaux que nous appellerons lignes spectrales. Nous appellerons ligne spectrale tout signal dont la représentation canonique est :

$$s(x) = A(x) \cos(\omega x) \quad (\text{II.1})$$

c'est-à-dire tout signal de fréquence instantanée constante (ou signal à fréquence fixe). Nous allons voir que dans les cas où ω est suffisamment grand (par rapport à une échelle de référence fixée par les variations de $A(x)$), les coefficients d'ondelettes de $s(x)$ peuvent être approximés (avec une précision contrôlable), faisant ainsi apparaître un certain nombre de caractéristiques, qui à leur tour conduisent à la caractérisation de $s(x)$.

II.1 Coefficients d'ondelettes de lignes spectrales

Considérons une ondelette $\psi(x)$, que nous choisissons progressive (*i.e.* $\psi \in H^2(\mathbb{R})$), maximale en $x = 0$ (sans perte de généralité) et "bien localisée" dans le domaine de Fourier ; nous noterons ω_0 le lieu du maximum de $|\hat{\psi}|$. Considérons maintenant la transformée en ondelettes de $s(x)$ par rapport à $\psi(x)$:

$$T_s(b, a) = \langle s, \psi_{(b,a)} \rangle = \frac{1}{2} \langle Z_s, \psi_{(b,a)} \rangle \quad (\text{II.2})$$

$$= \frac{1}{2a} \int A_s(x) e^{i\omega x} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)^* dx \quad (\text{II.3})$$

L'idée est maintenant de développer l'amplitude $A_s(x)$ en série de Taylor autour de $x = b$ (point où l'ondelette $\psi_{(b,a)}(x)$ est maximale) et d'utiliser la série obtenue pour approximer la transformée en ondelettes. Plus précisément :

Théorème 1 Soit $s(x)$ une ligne spectrale exprimée comme en (II.1).

i) Soit $\psi(x)$ une ondelette progressive, telle que $C_1 = \int |x| |\psi(x)| dx < \infty$, et supposons $A \in C^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\frac{1}{\hat{\psi}(a\omega)} T_s(b, a) = \frac{1}{2} A(b) e^{i\omega b} + r_1(b, a) \quad (\text{II.4})$$

$$|r_1(b, a)| \leq \frac{C_1}{2} \frac{a}{|\hat{\psi}(a\omega)|} \sup_x |A'(x)| \quad (\text{II.5})$$

ii) Soit $\psi(x)$ une ondelette progressive, telle que $C_2 = \int |x|^2 |\psi(x)| dx < \infty$, et supposons $A \in C^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\frac{1}{\hat{\psi}(a\omega)} T_s(b, a) = \frac{1}{2} A(b) e^{i\omega b} + \frac{-ia}{2} A'(b) e^{i\omega b} \frac{(\hat{\psi})'(a\omega)}{\hat{\psi}(a\omega)} + r_2(b, a) \quad (\text{II.6})$$

$$|r_2(b, a)| \leq \frac{C_2}{4} \frac{a^2}{|\hat{\psi}(a\omega)|} \sup_x |A''(x)| \quad (\text{II.7})$$

En particulier :

$$\frac{1}{\hat{\psi}(\omega_0)} T_s(b, \frac{\omega_0}{\omega}) = \frac{1}{2} A(b) e^{i\omega b} + r_2(b, \frac{\omega_0}{\omega}) \quad (\text{II.8})$$

Avant de donner la preuve de ce résultat, il est intéressant de le commenter quelque peu. (II.4) montre que la transformée en ondelettes d'une ligne spectrale se comporte essentiellement comme la ligne spectrale elle-même (à une constante près), modulo un terme d'erreur d'autant plus petit que les variations de l'amplitude de la ligne spectrale sont faibles. Le terme correctif $r_1(b, a)$ est d'autant plus petit que $\hat{\psi}(a\omega)$ est grand, c'est-à-dire que a est proche de ω_0/ω , et que le facteur d'échelle est petit, c'est-à-dire que ω est grand. De telles hypothèses sont essentiellement des hypothèses d'asymptotisme faites sur la ligne spectrale. Enfin, (II.8) montre que si le facteur d'échelle a est exactement ajusté à la fréquence de la ligne spectrale, le terme d'erreur devient du second ordre en a et dans les dérivées de l'amplitude. Ceci renforce la qualité de l'approximation.

Preuve du théorème : i) La formule de Taylor au premier ordre sur le support de $\psi_{(b,a)}$ conduit à $A(x_0 + \epsilon) = A(x_0) + \epsilon F_1(x)$, avec $F_1 \in C_0(\mathbb{R})$ et $|F_1(x)| \leq \sup_x |A'(x)|$. Appliqué à (II.3), cela donne (II.4), avec

$$r_1(b, a) = \frac{1}{2a} \frac{1}{\hat{\psi}(a\omega)} \int (x-b) F_1(x-b) e^{i\omega x} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)^* dx \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{aligned}
|r_1(b, a)| &\leq \frac{a}{2} \frac{1}{|\hat{\psi}(a\omega)|} \int |u| |F_1(au)| |\psi(u)| du \\
&\leq \frac{C_1}{2} \frac{a}{|\hat{\psi}(a\omega)|} \sup_x |F_1(x)| \\
&\leq \frac{C_1}{2} \frac{a}{|\hat{\psi}(a\omega)|} \sup_x |A'(x)|
\end{aligned}$$

ii) La formule de Taylor au deuxième ordre donne

$$A(x_0 + \epsilon) = A(x_0) + \epsilon A'(x_0) + \epsilon^2 F_2(x),$$

avec $F_2 \in C^1(\mathbb{R})$ et

$$|F_2(x)| \leq \frac{1}{2} \sup |A''(x)|.$$

Un raisonnement similaire au précédent conduit à (II.6) et (II.7). Ceci achève la preuve du théorème.

Ainsi, l'équation (II.4) montre que tant que $r_1(b, a)$ est suffisamment petit, $T_s(b, a)$ se comporte (à une normalisation près) essentiellement comme la ligne spectrale elle-même ou, plus précisément, comme son signal analytique $Z_s(b) = A(b)e^{i\omega b}$.

Considérons maintenant le cas d'un signal à analyser formé de la somme de plusieurs lignes spectrales :

$$s(x) = \sum_k A_k(x) e^{i\omega_k x} \quad (\text{II.10})$$

La linéarité de la transformée en ondelettes conduit à l'expression approchée suivante pour $T_s(b, a)$:

$$T_s(b, a) \approx \sum_k \hat{\psi}(a\omega_k)^* A_k(b) e^{i\omega_k b} \quad (\text{II.11})$$

Sur une telle expression, on peut prédire le comportement suivant de la transformée en ondelettes. Si les valeurs numériques des fréquences ω_k sont suffisamment éloignées les unes des autres, la présence du facteur $\hat{\psi}(a\omega_k)$ dans (II.12) fait que la contribution à $T_s(b, a)$ de la k -ième composante est localisée au voisinage de $a = a_0 = \omega_0/\omega$. Ceci fournit une première estimation des ω_k . En revanche, si certaines fréquences ω_k sont proches les unes des autres, le problème de leur détermination devient plus ardu.

II.2 Caractérisation de lignes spectrales

Si on se pose maintenant le problème inverse, à savoir celui de la caractérisation de $s(x)$ à partir de ses coefficients en ondelettes, on procédera ainsi : La valeur de ω peut être déterminée soit par la fréquence instantanée de $T_s(b, a)$ (pour une valeur fixée du paramètre d'échelle a), soit par la valeur $a = a_0 = \omega_0/\omega$ pour laquelle $|T_s(b, a)|$ est maximal, pour une valeur fixée du paramètre de translation b . L'amplitude $A(b)$ est ensuite obtenue avec une précision maximale (dans les limites permises par (II.7) bien entendu) en utilisant (II.8), c'est-à-dire en écrivant

$$A(b) = 2 \left| \frac{T_s(b, a_0)}{\hat{\psi}(\omega_0)} \right|. \quad (\text{II.12})$$

Remarque : Rappelons une fois de plus que le problème de recherche de la valeur $a = a_0 = \omega_0/\omega$, pour laquelle $|T_s(b, a)|$ est maximal, est par essence un problème mal posé, et donne ainsi des résultats instables, en particulier en présence de bruit. Il faut néanmoins remarquer que la stabilité de la solution est ici renforcée par la redondance de la transformée en ondelettes, que nous avons caractérisée au chapitre II en mettant en évidence l'espace à noyaux reproduisants correspondant. C'est ainsi que les algorithmes que nous allons maintenant décrire permettent de traiter des cas bruités, dans la limite où le rapport signal sur bruit reste positif². Pour des valeurs plus défavorables de ce rapport, une régularisation supplémentaire sera nécessaire.

Il est important de remarquer que la droite $a = a_0 = \omega_0/\omega$, dans le demi-plan H , sur laquelle la restriction de la transformée en ondelettes est maximale en module, possède une propriété particulière : la restriction de la transformée en ondelettes y possède la même fréquence instantanée que la ligne spectrale elle-même. Cette remarque sera fortement utilisée par la suite pour la caractérisation des lignes spectrales, mais aussi plus généralement des signaux modulés en amplitude et en fréquence.

Passons maintenant au cas où plusieurs lignes spectrales sont présentes dans le signal analysé. Supposons en outre que les valeurs des fréquences ω_k sont connues à l'avance. Dans ces conditions, en se plaçant à b fixé et en connaissant par un calcul préalable les valeurs des $T_s(b, \omega_0/\omega_k)$, la caractérisation des $A_k(b)$ se ramène à un problème matriciel, c'est-à-dire à l'inversion de la matrice :

$$M(b) = (M_{kl}(b)) = \hat{\psi} \left(\frac{\omega_0 \omega_k}{\omega_l} \right)^* e^{i\omega_k b} \quad \forall k, l \quad (\text{II.13})$$

²Rappelons que le rapport signal sur bruit est défini comme $10 \log_{10}(\sigma_s/\sigma_b)$, où σ_s (resp. σ_b) est la variance du signal seul (resp. du bruit seul).

et au calcul de l'image du vecteur :

$$\left(T_s(b, \frac{\omega_0}{\omega_1}), T_s(b, \frac{\omega_0}{\omega_2}), \dots, T_s(b, \frac{\omega_0}{\omega_N}) \right)$$

par $M(b)^{-1}$.

Nous voyons donc qu'il est crucial de connaître à l'avance les valeurs des fréquences des lignes spectrales et de construire un algorithme permettant de les déterminer. Nous allons maintenant décrire l'algorithme proposé et utilisé par P. Guillemain et R. Kronland-Martinet. On considère tout d'abord le cas d'une unique ligne spectrale de fréquence ω . Nous savons par (II.4) qu'à la limite asymptotique, $w = \omega_0/a_0$, où a_0 est la valeur du paramètre de dilatation pour laquelle on a coïncidence entre les fréquences instantanées de la transformée en ondelettes $T_s(b, a_0)$ et des ondelettes $\psi(b, a_0)$. Ceci fournit un moyen de détermination de a_0 et donc de ω . Néanmoins, dans le but d'augmenter la stabilité de l'algorithme et de pouvoir l'appliquer à des situations plus générales, P. Guillemain et R. Kronland-Martinet considèrent des moyennes locales de la fréquence de $T_s(b, a)$ ³. Plus précisément, si $I = [b_0, b_0 + T]$ est un intervalle de longueur T , on considère une valeur initiale a_0 de a et on calcule :

$$\omega_{(0)} = \frac{1}{T} \operatorname{Im} \left[\int_I \frac{\partial}{\partial b} \log T_s(b, a_0) db \right] \quad (\text{II.14})$$

qui fournit une approximation de ω . Dans le cas d'une ligne spectrale pure, cette approximation est aussi bonne que le permet (II.5). Si tel n'est pas le cas, on itère le processus en posant $a_1 = \omega_0/\omega_{(0)}$, puis en calculant $\omega_{(1)} = \frac{1}{T} \operatorname{Im} \left[\int_I \frac{\partial}{\partial b} \log T_s(b, a_1) db \right]$ et, plus généralement,

$$a_n = \omega_0/\omega_{(n-1)} \quad (\text{II.15})$$

$$\omega_{(n)} = \frac{1}{T} \operatorname{Im} \left[\int_I \frac{\partial}{\partial b} \log T_s(b, a_{n-1}) db \right] \quad (\text{II.16})$$

L'algorithme est donc un algorithme de point fixe, auquel on peut appliquer des techniques classiques pour en étudier les propriétés de convergence.

Remarque : Si T est un multiple de la période $T = 2\pi/\omega$, alors le membre de droite de (II.14) n'est autre qu'un invariant topologique appelé *nombre d'enroulements* (*winding number* en anglais), qui compte le nombre de tours effectués par le vecteur $T_s(b, a_0)$ autour de l'origine dans le plan complexe. L'invariance de ce nombre peut s'exprimer sous la forme suivante : sa valeur n'est pas affectée par toute déformation du chemin sur lequel est prise la valeur moyenne, sous réserve que ce chemin ne croise pas un zéro du module de la transformée en ondelettes durant cette déformation. Cette remarque justifie la robustesse de l'algorithme.

³Il s'agit là d'une procédure permettant de régulariser l'algorithme qui rejoint la remarque précédente.

Si maintenant $s(x)$ est une somme de lignes spectrales comme en (II.10), on observe encore numériquement une convergence très rapide de l'algorithme, le point de convergence étant bien entendu fonction de la valeur initiale a_0 .

Avant de nous pencher sur la précision de l'algorithme, focalisons-nous tout d'abord sur ses propriétés de convergence, en faisant abstraction de toute hypothèse sur le signal étudié. Commençons donc par nous restreindre à un domaine de fréquences $[\omega_1, \omega_2] = [\omega_0/a_1, \omega_0/a_2]$, tel que $T_s(b, a) > 0$ pour tout $(b, a) \in I \times [\omega_0/a_1, \omega_0/a_2]$, et notons $\omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2$ la fréquence centrale. Nous noterons aussi pour simplifier :

$$f(b, \omega) = \text{Im}[\log T_s(b, \omega_0/\omega)] \quad (\text{II.17})$$

Notons κ la fonction

$$\kappa(\omega) = \frac{1}{T} \int_I \frac{\partial}{\partial b} f(b, \omega) db. \quad (\text{II.18})$$

L'algorithme que nous étudions consiste donc en l'itération de κ et nous utilisons le théorème des fonctions contractantes, qui s'énonce ainsi : si U est un domaine d'un espace métrique M , et si κ est contractante sur U (c'est-à-dire si $\kappa(U) \subset U$ et s'il existe $0 < C < 1$ telle que pour tous $u, v \in U$, $d(\kappa(v), \kappa(u)) < C d(v, u)$), alors il existe un unique point fixe $u_\infty \in U$, et pour tout $u_0 \in U$,

$$\kappa_\infty(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa(\kappa(\dots \kappa(u_0)\dots)) = u_\infty \quad (\text{II.19})$$

Munissons donc l'axe des fréquences de sa métrique naturelle

$$d(\omega, \omega') = |\omega - \omega'|.$$

Soient $f_1, f_2 \in [\omega_1, \omega_2]$, $f_1 < f_2$, et considérons le chemin fermé Γ dans $I \times [\omega_0/a_1, \omega_0/a_2]$, bord de $I \times [\omega_0/a_1, \omega_0/a_2]$.

$$\Gamma = \partial I \times [\omega_0/a_1, \omega_0/a_2]. \quad (\text{II.20})$$

Alors

$$\int_\Gamma d\kappa(f) = 0 \quad (\text{II.21})$$

implique que

$$\kappa(f_2) - \kappa(f_1) = \frac{1}{T} \int_{f_1}^{f_2} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} f(b_0 + T, \omega) - \frac{\partial}{\partial \omega} f(b_0, \omega) \right] d\omega. \quad (\text{II.22})$$

Ainsi, on obtient immédiatement

$$|\kappa(f_2) - \kappa(f_1)| \leq \frac{S}{T} |f_2 - f_1|, \quad (\text{II.23})$$

où

$$S = \sup_{\omega \in [f_1, f_2]} \left| \frac{\partial}{\partial \omega} f(b_0 + T, \omega) - \frac{\partial}{\partial \omega} f(b_0, \omega) \right|. \quad (\text{II.24})$$

D'autre part, si $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$,

$$\kappa(\omega) \leq \kappa(\omega) + \frac{1}{2} \frac{S}{T} |\omega_2 - \omega_1| - \frac{S}{T} |\omega_c - \omega| \quad (\text{II.25})$$

$$\leq \kappa(\omega_c) + \frac{1}{2} \frac{S}{T} |\omega_2 - \omega_1| \quad (\text{II.26})$$

de sorte que, si l'on suppose que

$$\frac{1}{2} \frac{S}{T} |\omega_2 - \omega_1| \leq \omega_2 - \kappa(\omega_c) \quad (\text{II.27})$$

on a bien

$$\kappa(\omega) \leq \omega_2. \quad (\text{II.28})$$

Un raisonnement tout à fait similaire conduit à

$$\kappa(\omega) \geq \omega_1. \quad (\text{II.29})$$

Tout ceci conduit à :

Proposition 1 Soient I , ω_1 , ω_2 tels que $T_s(b, a) > 0$ dans $I \times [\omega_1, \omega_2]$, $S < T$ et que (II.27) et (II.29) soient vérifiées. Alors l'itération (II.15)-(II.16) possède un et un seul point fixe dans $[\omega_1, \omega_2]$.

Remarque : Ce résultat mérite commentaire.

- Dans la plupart des cas, S est une quantité finie, voire petite. Dans ce cas, il suffit donc de prendre T assez grand pour assurer la convergence de l'algorithme.

- La convergence est prouvée en dehors de toute hypothèse sur le signal. La convergence n'est donc en aucun cas une preuve de la présence d'une ligne spectrale dans le signal. Il s'agit là d'un point important.

- Le problème majeur qui se pose est ici que la convergence de l'algorithme n'entraîne pas pour autant la précision de l'estimation obtenue pour la fréquence. En effet, la procédure de moyennisation introduite pour stabiliser l'algorithme a aussi pour effet de diminuer la précision de celui-ci⁴. Il suffit pour s'en convaincre de traiter comme exercice l'exemple de la somme de deux lignes spectrales. Dans le cas plus général d'une superposition de N lignes spectrales, on peut assez facilement montrer que l'erreur commise décroît en T^{-1} , de sorte que l'on a intérêt à considérer des moyennes sur des temps assez longs⁵, d'autant plus que l'estimation précédente prouve que la convergence de l'algorithme est améliorée d'autant.

⁴ Comme toute méthode de régularisation d'un problème inverse mal posé.

⁵ Avec ce que cela implique pour le temps de calcul.

III SIGNAUX MODULÉS EN AMPLITUDE ET EN FRÉQUENCE

Entrons maintenant dans le vif du sujet en considérant, non plus seulement des signaux modulés en amplitude, mais aussi modulés en fréquence. Comme dans la section précédente, nous allons tout d'abord nous focaliser sur le cas où le signal étudié est lui-même un signal modulé tel que les approximations que nous avons décrites précédemment peuvent être employées, puis nous considérerons le cas de superpositions de signaux modulés asymptotiques. Nous considérons donc des signaux $s(x)$, dont la représentation canonique est :

$$s(x) = A(x) \cos(\phi(x)) \quad (\text{III.1})$$

et nous noterons $Z_s(x)$ le signal analytique associé.

Considérons aussi une ondelette $\psi(x)$ et supposons de plus $\psi \in H^2(\mathbb{R})$. Dans ces conditions, on obtient :

$$T_s(b, a) = \langle s, \psi_{(b,a)}(x) \rangle = \frac{1}{2} \langle Z_s, \psi_{(b,a)}(x) \rangle \quad (\text{III.2})$$

Notre approche sera similaire à celle employée dans la section précédente, avec des hypothèses appropriées : estimer (III.2) par des méthodes asymptotiques et utiliser l'estimation obtenue pour caractériser le signal analysé à partir de ses coefficients d'ondelettes.

III.1 Estimation des coefficients d'ondelettes

Exprimons tout d'abord l'ondelette $\psi(x)$ sous la forme d'une amplitude et d'une phase instantanées :

$$\psi(x) = A_\psi(x) e^{i\phi_\psi(x)} \quad (\text{III.3})$$

(III.2) s'exprime donc sous la forme d'une intégrale oscillante :

$$T_s(b, a) = \frac{1}{2a} \int A(x) A_\psi \left(\frac{x-b}{a} \right) e^{i \left\{ \phi(x) - \phi_\psi \left(\frac{x-b}{a} \right) \right\}} dx \quad (\text{III.4})$$

que nous nous proposons d'évaluer par les méthodes décrites à la section II. Pour simplifier les écritures, nous noterons

$$\Phi_{(b,a)}(x) = \phi(x) - \phi_\psi \left(\frac{x-b}{a} \right). \quad (\text{III.5})$$

Soit $x_s = x_s(b, a)$ un point stationnaire de $\Phi_{(b,a)}$. Par définition, x_s est un point où la fréquence instantanée de l'ondelette tradatée et dilatée de (b, a) coïncide avec la fréquence instantanée du signal analysé :

$$\phi'(x_s) = \frac{1}{a} \phi'_\psi \left(\frac{x_s - b}{a} \right). \quad (\text{III.6})$$

supposant dans un premier temps pour simplifier que pour une paire (b, a) donnée, $x_s(b, a)$ est l'unique point stationnaire associé et, que en outre,

$$\Phi''_{(b,a)}(x_s) > 0. \quad (\text{III.7})$$

Notons Ω le domaine de H dans lequel ces deux propriétés sont vérifiées. Dans Ω , la formule (B.17) du complément B nous fournit immédiatement l'expression suivante pour $T_s(b, a)$:

$$T_s(b, a) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[\Phi''_{(b,a)}(x_s)]}}{\sqrt{a^2 |\Phi''_{(b,a)}(x_s)|}}} \psi\left(\frac{x_s - b}{a}\right)^* Z_s(x_s), \quad (\text{III.8})$$

expression qui fait essentiellement intervenir le signal analytique évalué au point stationnaire, ainsi que l'ondelette dilatée et translatée, centrée au point stationnaire. Le membre de droite de (III.8) doit être compris comme l'approximation de $T_s(b, a)$ au premier ordre de la phase stationnaire, l'erreur commise étant bornée comme en (B.22).

Remarque : On peut aussi approximer $T_s(b, a)$ par des méthodes similaires à celles employées au chapitre précédent ; on obtient ainsi :

$$T_s(b, a) \approx \frac{1}{2} \hat{\psi}(a\phi'(b))^* Z_s(b)$$

faisant intervenir $\hat{\psi}(\xi)$ au lieu de $\psi(x)$ elle-même. Cette expression est légèrement moins précise que (III.8). Elle nous permet cependant de remarquer que l'information spectrale paraît absente de (III.8). Elle se trouve en fait dans la dépendance en b du point stationnaire.

Il apparaît très clairement sur (III.8) que deux ensembles de points dans Ω sont appelés à tenir un rôle prépondérant dans ce qui suit. Ce sont les courbes sur lesquelles $x_s(b, a) = b$, que nous appellerons l'arête de la transformée en ondelettes, et les courbes sur lesquelles $x_s(b, a)$ est constant, que nous appellerons les courbes-ondelettes. Nous allons maintenant examiner en détail le comportement de la transformée en ondelettes restreinte à de telles courbes.

III.2 L'arête de la transformée en ondelettes

Introduisons donc l'arête de la transformée en ondelettes comme l'ensemble

$$A = \{(b, a) \in \Omega, x_s(b, a) = b\} \quad (\text{III.9})$$

Il découle immédiatement de (III.6) que l'arête définit une courbe dans Ω , donnée par

$$a = a_r(b) = \frac{\phi'_\psi(0)}{\phi'(b)}, \quad (\text{III.10})$$

et que la détermination de l'arête conduit immédiatement à la connaissance de $\phi'(x)$, c'est-à-dire à la loi de modulation en fréquence de $s(x)$. De plus, la restriction de la transformée en ondelettes à l'arête s'exprime très simplement :

Lemme 2

$$T_s(b, a_r(b)) \cong \text{Corr}(b)Z_s(b) \quad (\text{III.11})$$

où $\text{Corr}(b)$ est une fonction de b entièrement caractérisée par l'ondelette $\psi(x)$ et l'arête, et ne dépendant pas autrement du signal analysé.

Preuve : (III.11) s'obtient directement en remplaçant a par $a_r(b)$ dans (III.8) et $\text{Corr}(b)$ est donné par :

$$\text{Corr}(b) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[\Phi'_{(b, a_r(b))}(b)]}}{\sqrt{a_r(b)^2 |\Phi''_{(b, a_r(b))}(b)|}} \psi(0)^*. \quad (\text{III.12})$$

Pour préciser les propriétés de $\text{Corr}(b)$, calculons

$$\Phi''_{(b, a)}(x) = -\frac{a'_r(x)\phi'_\psi(0)}{a_r(x)^2} - \frac{1}{a^2}\phi''_\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{III.13})$$

qui conduit à :

$$a_r(b)^2 \Phi''_{(b, a_r(b))}(b) = -[a'_r(b)\phi'_\psi(0) + \phi''_\psi(0)] \quad (\text{III.14})$$

ce qui montre la propriété annoncée de $\text{Corr}(b)$ et achève la preuve du lemme.

La restriction de la transformée en ondelettes à l'arête correspondante sera appelée le squelette de la transformée. Nous allons en effet voir par la suite que sa connaissance est suffisante pour reconstituer directement la transformée. Le squelette permet en tous cas de reconstituer le signal lui-même. En effet, une fois l'arête déterminée, la fonction $\text{Corr}(b)$ est connue ainsi que nous l'avons vu, et il suffit de diviser le squelette $T_s(b, a_r(b))$ par $\text{Corr}(b)$ puis d'en prendre la partie réelle pour reconstituer $s(x)$.

III.3 Les courbes-ondelette

Considérons $(b_0, a_r(b_0)) \in \Omega$. La courbe-ondelette coupant $(b_0, a_r(b_0))$ est définie comme la composante connexe à $(b_0, a_r(b_0))$ de l'ensemble des points $(b, a) \in \Omega$ tels que

$$\phi'_\psi\left(\frac{b_0 - b}{a}\right) = \frac{a}{a_r(b_0)}\phi'_\psi(0), \quad (\text{III.15})$$

c'est-à-dire comme un ensemble de points (b, a) à $x_s(b, a)$ constant égal à b_0 . Clairement, les courbes-ondelette sont entièrement déterminées par l'ondelette

$\psi(x)$. En particulier, si $\psi(x)$ est l'ondelette de Morlet, c'est-à-dire une ondelette à fréquence constante, il est facile de voir que les courbes-ondelette sont les droites $a = \text{constante}$. C'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles les ondelettes à fréquence constante sont souvent utilisées numériquement.

La restriction de la transformée en ondelettes à une courbe-ondelette fixée s'écrit :

$$T_s(b, a)_{x_s(b, a)=b_0} \cong \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}[\Phi'_{(b, a)}(b_0)]}}{\sqrt{|\Phi''_{(b, a)}(b_0)|}} \times Z_s(b_0) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{b_0 - b}{a}\right) \quad (\text{III.16})$$

c'est-à-dire comme le produit de l'ondelette dilatée et translatée $\psi_{(b, a)}(x)$ centrée en b_0 par une fonction correctrice et, encore une fois, complètement déterminée par l'arête $a_s(b)$ et l'ondelette $\psi(x)$ (au facteur constant $Z_s(b_0)$ près).

Remarque : Les notions d'arête et de courbe-ondelette permettent d'exhiber une propriété remarquable de la transformée en ondelettes dans la limite asymptotique. La transformée en ondelettes est essentiellement déterminée par le signal analytique sur son arête et par les ondelettes sur les courbes-ondelette. Cette description géométrique simple est appelée propriété de factorisation.

III.4 Extraction de l'arête

Nous allons voir maintenant comment la simplicité du comportement des coefficients d'ondelette d'un signal modulé en amplitude et en fréquence permet de donner des "méthodes d'extraction de l'arête" à partir des coefficients. Commençons par étudier le comportement du module de la transformée. Nous savons qu'il existe une version "ondelettes" de la formule de Plancherel permettant d'identifier le module carré de la transformée en ondelettes à une densité d'énergie dans le plan temps-fréquence. Partant de là, il paraît naturel que cette densité d'énergie soit localement maximale au voisinage d'une zone caractérisant la fréquence instantanée, c'est-à-dire au voisinage de l'arête — cette étude de la localisation de l'énergie dans le plan temps-fréquence est une méthode très classique en traitement du signal [3]. Au vu de (III.8), c'est effectivement ce qui se passe, si on néglige les variations dues au dénominateur. En effet, les ondelettes étant par hypothèse maximales en 0, la restriction de la transformée en ondelettes à une courbe-ondelette fixée est maximale sur son intersection avec l'arête. La figure V.2 représente la transformée en ondelettes d'un "chirp linéaire"⁶ à enveloppe gaussienne. On notera la localisation du module de la transformée en ondelettes au voisinage d'une courbe. Il

⁶C'est-à-dire d'un signal modulé en fréquence, la fréquence dépendant linéairement du temps.

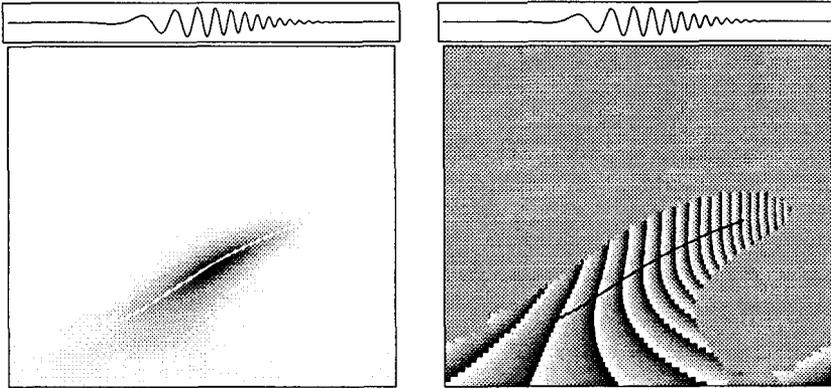


Figure V.2 : Transformée en ondelettes (module et phase) d'un "chirp linéaire" (ondelette de Morlet, $\omega_0 = 2\pi$).

ne s'agit pas d'une droite car les axes représentent ici b et $\log(a)$; nous avons une transformée sur 8 octaves avec 7 échelles intermédiaires entre deux octaves consécutives, ce qui fait un paramètre d'échelle variant de 2 à 512 ; le signal fait 1024 points. Néanmoins, la présence du dénominateur $\sqrt{a^2 |\Phi''_{(b,a)}(x_s)|}$ modifie la répartition de l'énergie dans le plan temps-fréquence et une estimation de l'arête fondée sur l'étude de $|T_s(b,a)|$ conduit en général à un résultat biaisé. Nous allons maintenant voir qu'il est souvent plus astucieux de se fonder sur l'étude de la phase de la transformée en ondelettes. Notons

$$\Psi(b,a) = \text{Arg}[T_s(b,a)] \quad (\text{III.17})$$

la phase de la transformée en ondelettes de $s(x)$. Le résultat suivant permet l'extraction de l'arête à partir des coefficients d'ondelettes :

Lemme 3

- i) $\frac{\partial \Psi(b,a)}{\partial a} = 0$ sur l'arête.
- ii) $\left[\frac{d\Psi(b,a)}{db} \right]_{x_s(b,a)=b_0} = \frac{\phi'_\psi(0)}{a}$ sur l'arête.

Avant de donner la preuve de ce résultat, notons qu'il est tout à fait compatible avec la courbure des lignes de phase constante de la figure V.2, à droite.

Preuve

i) Calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(b, a)}{\partial a} &= \frac{\partial x_s}{\partial a} \left[\phi'(x_s) - \frac{1}{a} \phi'_\psi \left(\frac{x_s - b}{a} \right) \right] - \frac{x_s - b}{a^2} \phi'_\psi \left(\frac{x_s - b}{a} \right) \\ &= -\frac{x_s - b}{a^2} \phi'_\psi \left(\frac{x_s - b}{a} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

par définition de $x_s(b, a)$. Ceci prouve (i).

ii) Résulte de :

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d\Psi(b, a)}{db} \right]_{x_s(b, a) = b_0} = \\ \frac{1}{a} \phi'_\psi \left(\frac{x_s - b}{a} \right) + \left[\frac{da}{db} \right]_{x_s(b, a) = b_0} \frac{x_s - b}{a^2} \phi'_\psi \left(\frac{x_s - b}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.19})$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Ces deux propriétés sont très utiles en pratique pour caractériser des lois de modulation en fréquence. La procédure est donc la suivante : d'abord, on calcule la transformée en ondelettes, puis sa phase et, enfin, on utilise l'une des deux propriétés précédentes pour extraire l'arête et donc la fréquence instantanée.

Remarque : Il convient de noter que ces deux propriétés ne caractérisent pas l'arête, dans la mesure où il ne s'agit pas de propriétés suffisantes pour que $(b, a) \in A$. Ceci est illustré par l'exemple suivant : Si $\psi(x)$ est une ondelette à fréquence fixe, comme par exemple l'ondelette de Morlet, les courbes-ondelette sont, comme nous l'avons vu, les droites $a = \text{constante}$. Dans ce cas, on a $\partial \Psi(b, a) / \partial b = \phi'_\psi(0) / a$ partout, ce qui ne caractérise plus rien. Nous verrons un peu plus loin que des approximations plus précises permettent de traiter cet exemple.

Superposée aux deux images, l'arête de la transformée, calculée à partir d'un algorithme déduit du lemme 3-(ii) est aussi représentée sur la figure V.2. Le calcul a été effectué sur les 500 échantillons situés au milieu du signal. On voit bien notamment la relation entre l'arête et la courbure des lignes de phase constante sur la figure de gauche.

III.5 Une implémentation possible

Soit $s(x) = A(x) \cos \phi(x)$ un signal satisfaisant les hypothèses standard ; nous avons donc à déterminer l'arête $a_r(b) = \phi'_\psi(0) / \phi'(b)$. Partant de l'un des critères donnés au lemme 3 (prenons le second critère pour être précis), le

problème se ramène, pour tout $b = b_0$, à un problème de recherche numérique des zéros d'une fonction de a , en l'occurrence :

$$f_{b_0}(a) = \left[\frac{d}{db} \operatorname{Im} \log T_s(b_0, a) \right]_{x_s(b,a)=b_0} - \frac{\phi'_\psi(0)}{a}$$

Pour tout b_0 , ce problème peut être résolu par une méthode de point fixe standard (méthode de la sécante, méthode de Newton, ...). Nous décrivons ici le cas de la méthode de Newton.

On considère un échantillonnage fini b_0, b_1, \dots, b_{N-1} de la variable b .

- *Le cas où $b = b_0$* : Soit $a = a_0$ un premier candidat pour $a_r(b_0)$. L'itération de Newton

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f_{b_0}(a_k)}{\partial_a f_{b_0}(a_k)}$$

(stoppée lorsque la précision est suffisante) fournit une estimation de $a_r(b_0)$.

- *Le cas général $b = b_n$* : De nouveau l'itération de Newton

$$a_{k+1} = a_k - \frac{f_{b_n}(a_k)}{\partial_a f_{b_n}(a_k)}$$

fournit une estimation de $a_r(b_n)$; on a besoin pour cela d'un candidat initial pour $a_r(b_n)$, qui peut être l'estimation obtenue pour $a_r(b_{n-1})$ ou une extrapolation à partir des estimations de $a_r(b_{n-1})$, $a_r(b_{n-2})$, ... On dit alors que l'algorithme suit l'arête "en continu".

- Si b_0, b_1, \dots, b_{N-1} est un sous-échantillonnage de la variable de translation, les valeurs intermédiaires peuvent être obtenues par interpolation, l'arête $a_r(b)$ étant de toute façon supposée régulière, d'après les hypothèses faites. Une interpolation par des fonctions splines cubiques fait en général parfaitement l'affaire.

Exemples : Reprenons l'exemple que nous avons montré au tout début du signal sonar de chauve-souris (voir figure V.1). La figure V.3 montre l'arête qui a été extraite à partir de la transformée en ondelettes (figure V.1) de ce signal (ondelette de Morlet).

Si nous reprenons maintenant l'exemple de ce même signal, plongé cette fois dans un bruit blanc gaussien centré, dont la variance a été ajustée pour obtenir un rapport signal sur bruit égal à 0dB (*i.e.* la variance du signal utile est égale à la variance du bruit), l'arête peut toujours être identifiée de la même façon. La figure V.4 représente le signal, le module de sa transformée en ondelettes et

l'arête correspondants, calculés dans les mêmes conditions que précédemment. Il est remarquable de constater que l'arête est presque exactement la même que plus haut, alors que le bruit est aussi fort que le signal utile. La raison essentielle en est que le signal est très localisé dans le plan temps-fréquence, ce que n'est pas un bruit blanc. On montre facilement que si $n(x)$ est un bruit blanc de variance σ^2 , $\mathbb{E}[|T_n(b, a)|^2] = K\sigma^2/a$, où K est une constante qui ne dépend que de l'ondelette.

III.6 Commentaires, développements

Le problème de caractérisation de certains signaux par amplitude et fréquence instantanées est encore loin d'être résolu. C'est pourquoi il nous semble utile de compléter cette section par un certain nombre de remarques, concernant les limites de la méthode ainsi que quelques possibles alternatives.

- Nous n'avons parlé plus haut que de la méthode de Newton. Il existe quelques variantes, notamment celle de R. Kronland-Martinet qui est particulièrement intuitive. Il s'agit encore d'un algorithme de point fixe ; l'idée est maintenant de voir la fréquence (*i.e.* la dérivée de phase) de la transformée en ondelettes comme résultant d'une interaction entre la fréquence instantanée du signal et celle de l'ondelette dilatée et translatée et se trouvant donc "quelque part entre les deux". Pour tout b , on remplace alors l'itération de Newton par :

$$a_{k+1} = \phi'_\psi(0) / \left[\frac{d}{db} \text{Im} \log T_s(b, a_k) \right]_{x_s(b, a_k)=b}$$

le reste de l'algorithme étant inchangé. Cette méthode fournit des résultats à peu près équivalents à l'autre en temps de calcul.

- Tout ce que nous avons décrit dans le cas de la transformée en ondelettes peut aussi être développé dans le cas de la transformée de Gabor. Le cheminement est exactement le même. Supposons donné un signal de la forme $s(x) = A(x) \cos \phi(x)$ vérifiant nos hypothèses standard et une fenêtre $g(x)$ que l'on met, elle aussi, sous la forme $g(x) = A_g(x) \exp\{i\phi_g(x)\}$. Avec des arguments en tous points similaires aux précédents, on montre que la transformée de Gabor peut être approximée (à des termes correctifs faisant intervenir les dérivées successives des amplitudes et des phases) comme

$$G_s(b, \omega) \approx \frac{Z_s(x_s)g(x_s - b)^* e^{-i\omega(x_s - b)}}{\text{Corr}(b, \omega)}$$

où $x_s = x_s(b, \omega)$ est le point stationnaire (encore une fois supposé unique) tel que

$$\phi'(x_s) = \phi'_g(x_s - b) + \omega$$

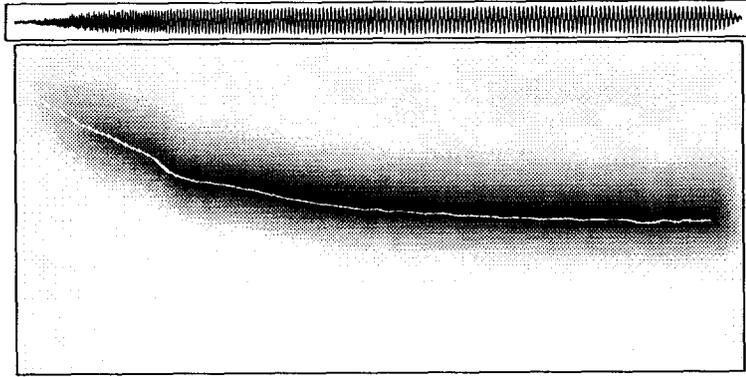


Figure V.3 : Arête de la transformée en ondelettes de la figure V.1 (l'arête a été calculée sur les 1 000 échantillons au centre des 1 300 que compte le signal).

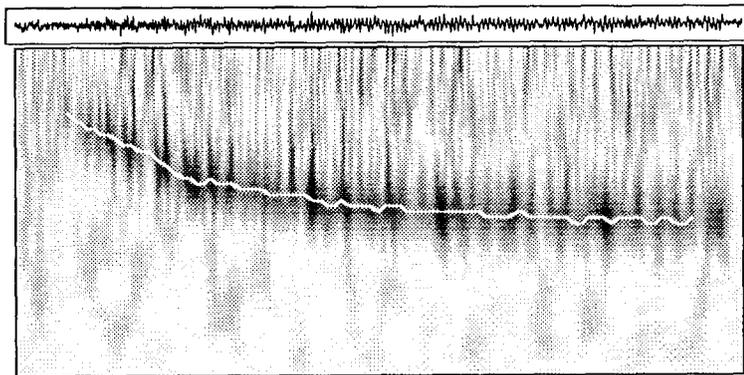


Figure V.4 : Arête de la transformée en ondelettes du signal de chauve-souris bruité par un bruit blanc gaussien centré.

et

$$\text{Corr}(b, \omega) = \sqrt{\frac{2|\phi''(x_s) - \phi_g''(x_s - b)|}{\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(\phi''(x_s) - \phi_g''(x_s - b))}$$

On montre alors que la transformée de Gabor se localise au voisinage d'une arête $\omega = \omega_r(b)$, reliée à la fréquence instantanée comme

$$\omega_r(b) = \phi'(b) - \phi'_g(0)$$

et que la restriction de la transformée de Gabor à cette arête (*i.e.* son squelette, pour conserver la même terminologie) permet de reconstituer le signal lui-même. De plus, un algorithme de point fixe similaire au précédent permet le calcul numérique de l'arête.

- Dans le cas d'un signal comportant plusieurs composantes modulées en amplitude et en fréquence, plusieurs utilisations successives de la méthode précédente (avec différentes initialisations) fournissent en principe les arêtes correspondantes, sous réserve que celles-ci "n'interagissent pas". On donnera à cette contrainte la signification heuristique suivante. On peut associer à toute fonction son "domaine de localisation temps-fréquence", une portion du demi-plan H dans laquelle elle est localisée. On dira que deux arêtes interagissent s'il existe une ondelette telle que les deux arêtes intersectent son domaine de localisation temps-fréquence. Dans ce cas, l'ondelette "voit" simultanément les deux composantes et le coefficient correspondant traduit les interférences entre les deux composantes. Le comportement du module et de la phase de la transformée en ondelettes ne sont plus les mêmes : les approximations qui sont à la base de la méthode ne sont plus valides et les algorithmes de calcul numérique de l'arête décrits plus haut fournissent une estimation biaisée.

- Cette remarque nous ramène de façon indirecte au problème de traitement du signal adaptatif. Il existe des signaux pour lesquels la transformation en ondelettes permet de "séparer les composantes" alors que la transformée de Gabor le permet, et inversement. Un exemple révélateur est fourni par le signal de parole, qui peut être modélisé comme un signal "localement harmonique", en ce sens que certains phonèmes font clairement apparaître un certain nombre d'harmoniques. Les harmoniques étant séparés en fréquence par la fréquence du fondamental, la transformation de Gabor permettra de les séparer tant que la largeur de bande de la fenêtre est inférieure à la fréquence du fondamental. C'est ce que l'on peut voir par exemple sur la figure V.5, qui représente le module de la transformée de Gabor du mot /hello/, prononcé d'une voix chantante (très modulé)⁷. On voit très clairement apparaître un certain nombre d'arêtes, bien dessinées. Chacune peut être facilement détectée par un algorithme du

⁷Il s'agit d'un signal de durée 1 seconde, échantillonné à 8kHz environ. On a utilisé une fenêtre gaussienne, de longueur 16 ms environ ; la représentation est une représentation linéaire en fréquence, entre 0 et 4kHz environ.

même type que ceux que nous avons décrits plus haut (voir Figure V.7). En revanche, sur la figure V.6 est représenté le module de la transformée en ondelettes du même signal⁸ ; on constate que seul le fondamental est bien marqué, les harmoniques étant très perturbés par les interférences se traduisant par des oscillations du module. Ceci repose le problème de trouver la représentation “la mieux adaptée” d’un signal donné. Dans le contexte de ce chapitre, “mieux adapté” signifie littéralement “qui permet de donner une description en terme de superposition de composantes modulées en amplitude et en fréquence”.

- Nous avons déjà eu l’occasion de signaler l’instabilité (potentielle) des algorithmes décrits plus haut. En particulier, dans le cas de signaux très bruités (*i.e.* de la forme $A(x) \cos \phi(x) + n(x)$ où $n(x)$ est un bruit de grande variance), la caractérisation de (ou des) arête(s) devient problématique. Il est alors nécessaire d’adopter une stratégie quelque peu différente et d’utiliser plus pleinement les informations dont on dispose *a priori*, notamment la régularité de l’arête. Une stratégie possible revient à se placer dans l’espace de toutes les arêtes possibles et à rechercher laquelle est “la plus vraisemblable” en tenant compte du signal observé (ou de sa transformée en ondelettes). Par “la plus vraisemblable”, on entend “qui minimise une certaine fonction de coût”, construite à partir des hypothèses *a priori*, qui sont :

- la transformée en ondelettes est maximale au voisinage d’une courbe d’équation $a = \varphi(b)$;
- cette fonction $\varphi(b)$ est une fonction lentement variable de b .

Un choix possible est le suivant :

$$\mathcal{E}_f[\varphi] = - \int |T_f(b, \varphi(b))|^2 db + \lambda \int |\varphi'(b)|^2 db \quad (\text{III.20})$$

Le premier terme renforce la localisation de l’énergie sur l’arête et le second renforce la régularité de $\varphi(b)$; λ est un paramètre qui contrôle l’importance relative que l’on entend donner aux deux termes. La minimisation d’une telle fonctionnelle est un problème classique. L’expérience montre (voir [5]) que, tant que le rapport signal/bruit n’est pas trop défavorable, il est possible d’utiliser des méthodes numériques classiques de résolution des équations d’Euler associées à (III.20), *i.e.*

$$\Delta \varphi = -\lambda^{-1} [\partial_a |T_f|^2] (b, \varphi(b)) \quad (\text{III.21})$$

En revanche, quand le rapport signal/bruit devient trop défavorable, il est nécessaire d’utiliser des méthodes plus robustes (un algorithme de recuit simulé dans [5]). De nouveau, de nombreuses variations autour de cette méthode de

⁸On a utilisé ici une ondelette de Morlet standard, avec $\omega_0 \approx 6$. La représentation est logarithmique : 5 octaves (puissances de 2) et 9 échelles intermédiaires entre deux octaves.

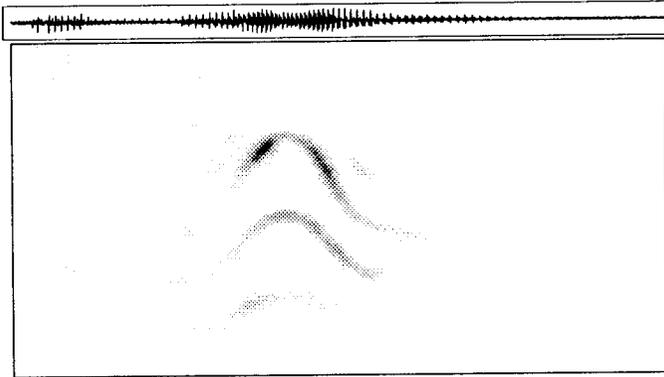


Figure V.5 : Transformée de Gabor (module) du mot /Hello/ (1 seconde) prononcé de manière fortement modulée (fenêtre gaussienne de longueur 16 ms).

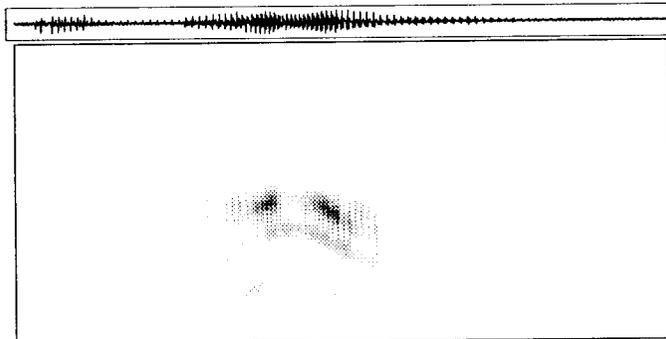


Figure V.6 : Transformée en ondelettes (module) du mot /Hello/ (1 seconde) prononcé de manière fortement modulée (ondelette de Morlet).

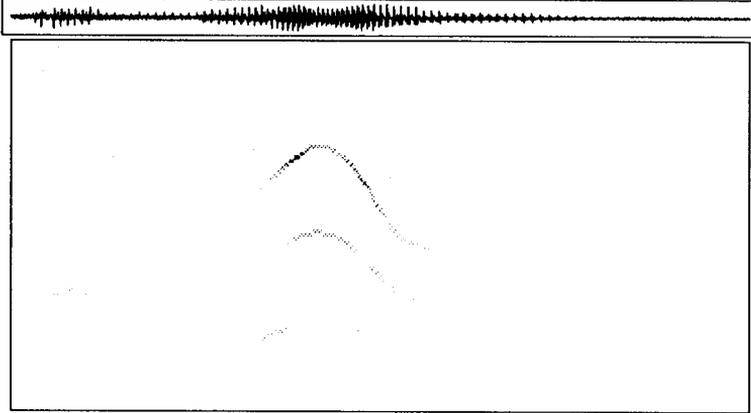


Figure V.7 : Arêtes de la transformée de Gabor du mot /Hello/.

caractérisation sont envisageables. Notons aussi que, dans les cas très bruités, la formule classique de reconstruction du signal à partir de l'arête devient elle aussi difficilement utilisable. On peut alors la remplacer par une stratégie de minimisation, faisant intervenir la dernière information *a priori* sur le signal que l'on n'a pas encore utilisée : la lenteur des variations relatives de l'amplitude du signal. La solution proposée dans [5] est la suivante : Etant donnée la fonction $\varphi(b)$ ainsi qu'un certain nombre de valeurs du squelette $z_k = T(b_k, \varphi(b_k))$ associé au signal observé (*i.e.* signal + bruit), le signal reconstruit est la fonction $\tilde{f}(x)$ qui minimise la fonction de coût

$$\tilde{\Phi}[f_{rec}] = \int |T_{f_{rec}}(b, a)|^2 db \frac{da}{a} + \epsilon \int \left| \frac{d}{db} |T_{f_{rec}}(b, \varphi(b))| \right|^2 db \quad (\text{III.22})$$

avec les contraintes

$$T_{\tilde{f}}(b_k, \varphi(b_k)) = z_k . \quad (\text{III.23})$$

Le premier terme de (III.22) (qui n'est autre que $\|f_{rec}\|^2$ à une constante près) renforce la localisation de $T_{\tilde{f}}$ au voisinage de $a = \varphi(b)$ en minimisant l'énergie globale de $\tilde{f}(x)$, et le second impose des variations lentes de l'amplitude du signal reconstruit⁹.

⁹En fait, la solution proposée dans [5] est fondée sur une approximation de (III.22) par

IV LE CAS BIDIMENSIONNEL

Tous les algorithmes développés dans le cas unidimensionnel sont généralisables au cas multidimensionnel (et donc au cas bidimensionnel en particulier), sous réserve d'utiliser une version adaptée de la transformée en ondelettes. Le problème étant de caractériser des fréquences locales dans les signaux, il est nécessaire d'utiliser des ondelettes permettant une bonne analyse spectrale, donc les ondelettes de R. Murenzi [19] (ou leur modification décrite au chapitre précédent¹⁰). Nous allons nous borner ici à décrire le cas bidimensionnel, les dimensions supérieures se traitant similairement (ce qui ne veut pas dire que ce soit aisé du point de vue pratique, les temps de calcul numérique devenant rapidement énormes).

IV.1 Analyse de lignes spectrales

Cette fois encore les lignes spectrales sont caractéristiques du comportement des ondelettes dans ce cas de figure. Comme en dimension 1, on appellera ligne spectrale un signal stationnaire du type

$$s(x) = A(x)e^{ikx} \quad (\text{IV.1})$$

où $k \in \mathbb{R}^2$ est une fréquence constante. En suivant point par point la démonstration décrite dans le cas unidimensionnel, on obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 2 Soit $s(x)$ une ligne spectrale exprimée comme en (IV.1).

- Soit $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une ondelette telle que l'on ait :

$$C_1 = \int (|x_1| + |x_2|) |\psi(x)| dx < \infty,$$

et supposons $A \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Alors

$$\frac{1}{\hat{\psi}(ar^{-1} \cdot \omega)^*} T_s(b, a, r) = A(b)e^{i\omega b} + r_1(b, a, r) \quad (\text{IV.2})$$

$$|r_1(b, a, r)| \leq C_1 \frac{a}{|\hat{\psi}(ar^{-1} \cdot \omega)|} \sup_x |\nabla A(x)| \quad (\text{IV.3})$$

- Soit $\psi(x)$ une ondelette telle que

$$\int |x_i x_j| |\psi(x)| dx < \infty \quad \forall i, j = 1, 2,$$

une forme quadratique.

¹⁰Ces deux versions coïncident dans le cas où $n = 2$.

et supposons $A \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors

$$\frac{1}{\hat{\psi}(ar^{-1} \cdot \omega)^*} T_s(b, a, r) = A(b)e^{i\omega b} - ia \nabla A(b)e^{i\omega b} \cdot \frac{\nabla \hat{\psi}(ar^{-1} \cdot \omega)}{\hat{\psi}(ar^{-1} \cdot \omega)} + r_2(b, a, r) \quad (\text{IV.4})$$

$$|r_2(b, a, r)| \leq C \frac{a^2}{|\hat{\psi}(ar^{-1} \cdot \omega)|} \sup_x |\nabla \nabla A(x)| \quad (\text{IV.5})$$

pour une certaine constante C . En particulier :

$$\frac{1}{\hat{\psi}(\omega_0)^*} T_s(b, \frac{\omega_0}{\omega}) = A(b)e^{i\omega b} + r_2(b, \frac{\omega_0}{\omega}) \quad (\text{IV.6})$$

Preuve : Le théorème résulte des mêmes arguments que son analogue unidimensionnel, c'est-à-dire essentiellement de la formule de Taylor appliquée à l'amplitude du signal au voisinage de $x = b$.

IV.2 Fréquences locales bidimensionnelles et texture

Il est possible de généraliser l'analyse unidimensionnelle au cas de la caractérisation de fréquences locales dans les signaux bidimensionnels et les images. La difficulté usuelle pour ce problème est qu'il n'existe pas de notion de fréquence instantanée¹¹. Néanmoins, comme nous l'avons vu dans le cas unidimensionnel, les ondelettes progressives permettent de sélectionner automatiquement les bonnes fréquences et de travailler implicitement sur le signal analytique. Dans le cas bidimensionnel, en utilisant les ondelettes de R. Murenzi [19], on peut travailler localement en fréquence et ainsi découpler des composantes différentes dans une image.

L'algorithme présenté et développé ici est la généralisation directe de celui étudié à une dimension. Il est donc fondé sur une analyse du comportement de la phase de la transformée en ondelettes qui, en présence d'une composante de type $A \exp\{i\phi\}$, a tendance à se comporter comme la phase de cette composante. L'algorithme consiste donc en une recherche des valeurs des paramètres de position, échelle et rotation pour lesquels l'on a coïncidence entre la fréquence instantanée de la transformée et celle de l'ondelette traduite, dilatée et tournée.

Les mêmes notions d'arête et de squelette que dans le cas unidimensionnel peuvent être développées. L'arête est ici une surface dans un espace de quatre paramètres et, en fait, un champ de vecteurs bidimensionnels. Ces vecteurs sont identifiés à des vecteurs d'onde locaux associés au signal analysé.

¹¹Une définition possible est proposée dans [15].

Plus précisément, on modélisera une “texture régulière” comme une somme de composantes du type :

$$s_i(x) = A_i(x) \cos(\phi_i(x)) \quad (\text{IV.7})$$

où $A(x)$ est une amplitude, à valeurs réelles, que l’on supposera lentement variable par rapport aux oscillations. Alors, si $\psi(x)$ est une ondelette bien localisée des deux cotés de la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes sera bien localisée au voisinage des points

$$(b; a_i = \frac{\|k_0\|}{\|\nabla\phi_i(b)\|}, \theta_i = \frac{\langle k_0, \nabla\phi_i(b) \rangle}{\|k_0\| \|\nabla\phi_i(b)\|}) \quad (\text{IV.8})$$

dans l’espace des phases. On utilisera alors la même procédure que dans le cas unidimensionnel.

Considérons donc un signal de la forme :

$$s(x) = A_i(x) \cos(\phi(x)) \quad (\text{IV.9})$$

et mettons l’ondelette sous la forme :

$$\psi(x) = A_\psi(x) e^{i\phi_\psi(x)} \quad (\text{IV.10})$$

Les coefficients $T_s(b, a, \theta)$ s’expriment donc sous la forme d’une intégrale oscillante :

$$\begin{cases} T_s = \frac{1}{a^2} \int A(x) A_\psi(r_{-\theta} \cdot \frac{x-b}{a}) e^{i\Phi_{(b,a,\theta)}(x)} dx \\ \Phi_{(b,a,\theta)}(x) = \phi(x) - \phi_\psi(r_{-\theta} \cdot \frac{x-b}{a}) \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

D’après l’argument de la phase stationnaire, la contribution essentielle à cette intégrale est fournie par les points stationnaires x_s de la phase $\Phi_{(b,a,\theta)}(x)$, *i. e.* les points $x_s = x_s(b, a, \theta)$ tels que :

$$\nabla\phi(x_s) = \frac{1}{a} r_\theta \cdot \phi_\psi \left(r_{-\theta} \cdot \frac{x-b}{a} \right) (x_s) \quad (\text{IV.12})$$

Avec la même procédure que dans le cas unidimensionnel, on obtient, en posant $\Phi(x) = \Phi_{(b,a,\theta)}(x)$ (les calculs ne présentent pas de difficulté majeure et sont laissés au lecteur, voir [11]) :

$$\begin{cases} T_s(b, a, \theta) = \frac{s(x_s) \psi(r_{-\theta} \cdot \frac{x_s-b}{a})}{Corr(b, a, \theta)} + R(b, a, \theta) \\ Corr(b, a, \theta) = \sqrt{|\partial_1^2 \Phi \partial_2^2 \Phi - (\partial_1 \partial_2 \Phi)^2|} e^{-i \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\partial_1^2 \Phi \partial_2^2 \Phi - (\partial_1 \partial_2 \Phi)^2)} \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

où $R(b, a, \theta)$ est un reste que l’on peut estimer comme précédemment.

Il s'agit donc d'une expression très similaire à celle obtenue en dimension 1 et faisant apparaître les propriétés de localisation de la transformée indiquées en (IV.8). On a donc besoin d'un algorithme permettant de caractériser numériquement cette localisation. Ceci est fait en généralisant directement la méthode unidimensionnelle, c'est-à-dire en se basant sur la phase de la transformée en ondelettes.

On définira de nouveau l'arête de la transformée en ondelettes comme l'ensemble des points dans l'espace des paramètres où l'on a :

$$x_s(b, a, \theta) = b \quad (\text{IV.14})$$

On voit immédiatement que :

$$\left. \begin{aligned} \text{Arg}[T_s(b, a, \theta)] = \\ \phi(x_s) - \phi_\psi \left(r_{-\theta} \cdot \frac{x_s - b}{a} \right) - \frac{\pi}{2} \text{sgn}(\partial_1^2 \Phi \partial_2^2 \Phi - (\partial_{12}^2 \Phi)^2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.15})$$

et donc

$$\nabla_b \text{Arg}[T_s(b, a, \theta)] = a^{-1} r_\theta \cdot \nabla \phi_\psi(0) \quad \text{sur l'arête.} \quad (\text{IV.16})$$

Ainsi, le vecteur d'onde local associé à la transformée en ondelettes coïncide sur l'arête avec celui de l'ondelette translatée, dilatée et tournée correspondante. On peut de nouveau utiliser ce critère pour la caractérisation numérique de l'arête, en utilisant un algorithme de point fixe similaire au précédent : De nouveau, on peut utiliser un algorithme fondé sur une méthode de Newton ou une généralisation bidimensionnelle de la méthode de Kronland-Martinet (voir [11]).

IV.3 Illustrations

A titre d'illustration, considérons l'image de la figure V.8, qui est clairement une image comportant une texture simple, contenant deux composantes.

La méthode des arêtes et des squelettes permet d'isoler les deux composantes par leur champ de fréquence locale, représenté sur la figure V.9 par des aiguilles de longueur proportionnelle à la fréquence locale et d'orientation parallèle à la fréquence locale.

Comme dans le cas unidimensionnel, le squelette permet de "resynthétiser" séparément les deux composantes, comme nous le montre la figure V.10.

V COMMENTAIRES ET RÉFÉRENCES

L'étude des signaux modulés en amplitude et en fréquence est l'un des sujets les plus anciens du traitement du signal [22]. Une importante littérature lui est

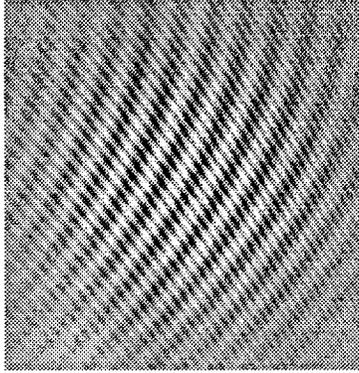


Figure V.8 : Image contenant deux textures différentes.

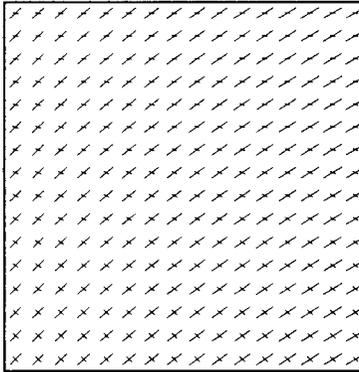


Figure V.9 : Fréquences locales des textures de la figure V.8.

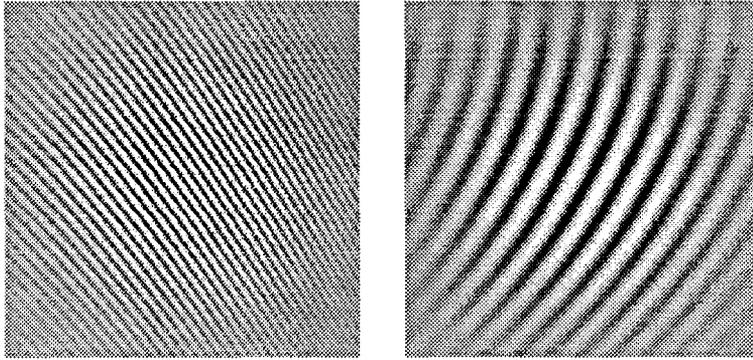


Figure V.10 : Les deux textures resynthétisées séparément.

consacrée, en particulier dans le domaine de l'analyse temps-fréquence (voir par exemple [3], [9] et [20]). On trouve de nombreuses applications en radar/sonar, mais également en musique (voir par exemple [12] ou [23]) ou en traitement de la parole, où des modèles de parole fondés sur des superpositions de composantes modulées en amplitude et en fréquence sont souvent pertinents [16]. L'emploi des méthodes asymptotiques est aussi une chose très usuelle chez les analystes de signaux. En particulier, de telles méthodes ont été employées pour étudier la localisation de l'énergie dans le plan temps-fréquence, notamment sur des distributions du type Wigner-Ville (voir [3] et [9] par exemple). En revanche, la phase est longtemps restée peu employée au niveau de l'analyse par ondelettes et ce n'est que depuis les travaux de A. Grossmann et R. Kronland-Martinet, entre autres, que la phase a été systématiquement utilisée (voir [12] pour une synthèse).

L'utilisation systématique de la phase stationnaire pour l'estimation des coefficients d'ondelettes a commencé dans [8] et les algorithmes décrits ici se trouvent dans [7]. La version bidimensionnelle décrite a été développée dans [11] (voir aussi [4] pour une approche voisine du problème des textures dans les images et [2] pour une autre approche de la séparation de composantes asymptotiques).

Signalons aussi que des idées voisines et fondées sur la même heuristique (à savoir l'étude des propriétés de localisation de la transformée en ondelettes de fonctions présentant de fortes oscillations) ont été exploitées par Meyer (voir en particulier [14], [17], [18]) dans un contexte d'analyse réelle pure. Le principal

résultat est la caractérisation de certains types de singularités oscillantes (des “chirps trigonométriques” dans le langage de [17]) au moyen de leurs coefficients en ondelettes, ce qui prolonge l’analyse développée au chapitre précédent. Dans le même ordre d’idées, A. Arneodo et ses collaborateurs ont mis au point un “formalisme multifractal” prenant en compte de telles singularités oscillantes, faisant également le lien avec la discussion du chapitre précédent.

- [1] P. Bedrosian, “A Product Theorem for Hilbert Transform”, *Proc. IRE* (1963) p. 868.
- [2] G. Beylkin, B. Torrèsani, “Implementation of Operators via Filter Banks, Auto-correlation Shell and Hardy Wavelets”, Prétirage CPT-94/P.3009, Marseille, à paraître dans *Applied and Computational Harmonic Analysis*.
- [3] B. Boashash, “Time-frequency Signal Analysis”, dans *Advances in Spectrum Analysis*, S. Haykin Ed., Prentice-Hall (1990) p. 418.
- [4] A.C. Bovik, N. Gopal, T. Emmoth, A. Restrepo (Palacios), “Localized Measurements of Emergent Images Frequencies by Gabor Wavelets”, *IEEE Trans. Inf. Th.*, **38** (1992) p. 691-712.
- [5] R. Carmona, W.L. Hwang, B. Torrèsani, “Characterization of Signals by the Ridges of their Wavelet Transform”, Preprint, Math. Dept., Université de Californie, Irvine (1994).
- [6] R. B. Dingle, *Asymptotic Expansions : their Derivation and their Interpretation*, Academic Press (1973).
- [7] N. Delprat, B. Escudié, P. Guillemain, R. Kronland-Martinet, P. Tchamitchian, B. Torrèsani, “Asymptotic Wavelet and Gabor Analysis : Extraction of Instantaneous Frequencies”, *IEEE Trans. Inf. Th.*, **38** (1992) 644-664.
- [8] B. Escudié, A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, B. Torrèsani, “Analyse en ondelettes de signaux asymptotiques, emploi de la phase stationnaire”, *Actes du colloque GRETSI*.
- [9] P. Flandrin, “Analyse temps-fréquence de signaux non stationnaires”, Thèse d’état, Lyon (1989).
- [10] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, Hermès (1993).
- [11] C. Gonnet, B. Torrèsani, “Local Frequency Analysis with two-dimensional Wavelet Transform”, *Signal Processing*, **37** (1994) p. 389-404.
- [12] A. Grossmann, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, “Reading and Understanding Continuous Wavelet Transform”, dans *Wavelets, Time-frequency Methods and Phase Space*, IPTI, Springer-Verlag, J.M. Combes et al. Ed.
- [13] L. Hormander, “The Analysis of Partial Differential Operators I”, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **256**, Springer-Verlag (1983).
- [14] S. Jaffard, Y. Meyer, “Pointwise Behaviour of Functions”, Prépublication du Laboratoire de Mathématiques Appliquées, ENPC, La Courtine (1993).
- [15] J. Kaiser, “The Analytic Signal Transform”, Preprint, Lowell University (1992).
- [16] R.J. McAulay, T.F. Quatieri, “Low Rate Speech Coding Based on the Sinusoidal Model”, dans *Advances in Speech Signal Processing*, S. Furui et M. Mohan Sondur Ed. (1992).
- [17] Y. Meyer, “Analyse par ondelettes et analyse 2-microlocale des chirps généralisés”, Prépublication CEREMADE, Paris (1993).

- [18] Y. Meyer, "Chirps n -Dimensionnels et Analyse 2-Microlocale", Séminaire EDP, Ecole polytechnique, exposé numéro 1 (1994).
- [19] R. Murenzi : "Transformée en ondelettes multidimensionnelle et application à l'analyse d'images", Thèse, Louvain-la-Neuve (1989).
- [20] B. Picinbono, W. Martin, "Représentation des signaux par amplitude et phase instantanées", *Ann. Telecom.*, **38** (1983) p. 179-190.
- [21] K. Seip, "Some Remarks on a Method for Detecting Spectral Lines in a Signal", Preprint CPT-89/P.2252, Marseille.
- [22] J. Ville, "Théorie et Applications de la Notion de Signal Analytique", *Cables et Transmissions* 2^e A (1) (1948) p. 61-74.
- [23] R. Wilson, A.D. Calway, E.R.S Pearson, "A Generalized Wavelet Transform for Fourier Analysis : the Multiresolution Fourier Transform and its Applications to Signal Analysis", *IEEE Trans. Inf. Th.*, **38** (1992) p. 674-690.

VI COMPLÉMENT B : APPROXIMATIONS ASYMPTOTIQUES ET PHASE STATIONNAIRE

Nous nous sommes intéressés à des approximations de la transformée en ondelettes appelées approximations asymptotiques. La signification de ce terme est la suivante : nous considérons des développements en série des coefficients d'ondelettes, dont la convergence peut être problématique, mais dont les premiers termes (et même en général le premier terme) suffisent à donner une excellente approximation.

Il nous semble nécessaire de décrire brièvement ce qu'est un développement asymptotique, ainsi que la méthode de la phase stationnaire que nous utiliserons ici pour approximer la transformée en ondelettes. Nous nous restreindrons au cas unidimensionnel, renvoyant à [6] pour plus de détails et pour les cas de dimensions supérieures.

VI.1 Développements asymptotiques : un exemple simple

L'exemple le plus couramment utilisé pour illustrer les développements asymptotiques est celui de la fonction d'erreur, ou fonction Erf :

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad x \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

Le développement en série de Taylor de l'exponentielle produit la série suivante :

$$\frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_k \frac{(-x^2)^k}{k!(2k+1)} \quad (\text{B.2})$$

qui est absolument convergente, mais dont l'évaluation numérique est horriblement difficile pour les grandes valeurs de $|x|$. En effet, le terme générique

de la série ne commence à décroître que lorsque k devient du même ordre de grandeur que $|x|^2$. En revanche, $Erf(x)$ peut aussi s'écrire comme :

$$Erf(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad x \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

ou encore, après avoir posé $u = t^2 - x^2$,

$$Erf(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{\sqrt{1+u/x^2}} \quad (\text{B.4})$$

Le développement du binôme $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \frac{(k+\alpha)!}{k! \alpha!} x^k$ suggère alors d'approximer $Erf(x)$ par la série tronquée

$$Erf(x) \approx 1 - \frac{e^{-x^2}}{\pi x} \sum_{k=0}^N (k-1/2)! x^{-2k} \quad (\text{B.5})$$

ce qui est fait en pratique. Le terme générique d'une telle série décroît très rapidement dans un premier temps, puis croît dès que k et $|x|^2$ sont du même ordre de grandeur, de sorte que la série entière serait finalement divergente. La raison essentielle de cette divergence est que le domaine d'intégration $[0, \infty]$ n'est pas contenu dans le domaine de convergence de la série binômiale. En revanche, la présence du facteur e^{-u} fait que l'intégrale peut être très bien approximée par une intégrale finie entre 0 et un certain u_0 , choisi de sorte que $|\frac{u_0}{x^2}| < 1$. Par exemple :

$$Erf(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\pi x} \sum_{k=0}^\infty \frac{(k-1/2)!}{k!} x^{-2k} \int_0^{u_0} e^{-u} u^k du + r_1(x) \quad (\text{B.6})$$

où $r_1(x)$ est un reste facile à estimer. Notons que la série entière est alors absolument convergente. On l'approxime par une série tronquée à $k = N$:

$$Erf(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\pi x} \sum_{k=0}^N \frac{(k-1/2)!}{k!} x^{-2k} \int_0^{u_0} e^{-u} u^k du + r_1(x) + r_2(x) \quad (\text{B.7})$$

avec $r_2(x)$ un autre reste estimé par des techniques classiques. Notons que la série converge, son terme générique étant en $k^{-3/2}$. Enfin, l'intégrale dans (B.7) est approximée par une intégrale sur $[0, \infty]$, ce qui donne (B.5) à un nouveau terme d'erreur $r_3(x)$ près. De plus, on montre facilement que

$$|r_1(x)| + |r_2(x)| + |r_3(x)| \sim O(e^{-x^2}) \quad (\text{B.8})$$

Ainsi, ce terme reste négligeable tant que $x^{-2N} \gg (N-3/2)!$, autrement dit pour des grandes valeurs de N , $N \ll x^2$.

VI.2 Méthode de la phase stationnaire : calcul des premiers termes

La méthode de la phase stationnaire procède de la même logique. Il s'agit d'évaluer une intégrale de la forme :

$$I = \int M(x)e^{if(x)}dx \quad (\text{B.9})$$

pour laquelle on suppose que les variations relatives de $M(x)$ sont lentes par rapport aux variations de $f(x)$. I est donc une intégrale rapidement oscillante, de sorte que l'on peut s'attendre à des phénomènes de compensation sur des intervalles en x où $e^{if(x)}$ effectue une oscillation complète. Ceci est concrétisé par le résultat suivant :

Lemme 1 Soit $M \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs réelles telle que $f'(x) > 0 \forall x \in \text{Supp}(M)$. Alors

$$\int M(x)e^{i\mu f(x)}dx = O(\mu^{-k}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\text{B.10})$$

Preuve : Supposons que $x \rightarrow f$ soit un changement de variable sur $\text{Supp}(M)$. Si tel n'est pas le cas, on s'y ramène à l'aide d'une partition de l'unité, *i.e.* en écrivant $M(x) = \sum M(x)u_\lambda(x)$, où les fonctions $u_\lambda \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ sont telles que $\sum u_\lambda(x) = 1$ presque partout et pour tout λ , $x \rightarrow f$ est un changement de variable sur $\text{Supp}(Mu_\lambda)$. L'intégrale s'exprime alors comme :

$$\int \frac{M[x(f)]}{f'} e^{i\mu f} df$$

c'est-à-dire comme la transformée de Fourier de M/f' . Le lemme est alors obtenu par k intégrations par parties. Ici, le paramètre μ a été introduit pour contrôler les oscillations de l'argument de l'exponentielle. La limite $\mu \rightarrow \infty$ est appelée limite asymptotique.

Considérons maintenant le cas où il existe un ou des points x_s (dits points stationnaires) tels que $f'(x_s) = 0$. Le mécanisme de compensation ne fonctionne plus au voisinage de tels points, qui contribuent donc de façon importante à I . Il est donc naturel de construire un développement en série autour de chaque point stationnaire. Ecrivons donc :

$$I = e^{if(x_s)} \int M(x)e^{i[f(x)-f(x_s)]}dx \quad (\text{B.11})$$

Supposons pour simplifier que $f''(x_s) > 0$, $f(x) - f(x_s)$ se comporte donc comme $(x - x_s)^2$ au voisinage de x_s et introduisons une variable u telle que

$$-u^2 = i[f(x) - f(x_s)] \quad (\text{B.12})$$

Au voisinage de x_s , on obtient :

$$u^2 \approx -\frac{i}{2}(x - x_s)^2 f''(x_s) \quad (\text{B.13})$$

On écrit alors :

$$I = e^{if(x_s)} \int \frac{M(x(u))}{\left[\frac{du}{dx}\right]} e^{-u^2} du \quad (\text{B.14})$$

que l'on développe en série :

$$I = e^{if(x_s)} \sum_k \frac{\underline{M}^{(k)}(0)}{k!} \int u^k e^{-u^2} du \quad (\text{B.15})$$

$$= e^{if(x_s)} \sum_k \frac{\underline{M}^{(2k)}(0)(k-1/2)!}{(2k)!} \quad (\text{B.16})$$

où l'on a posé :

$$\underline{M}(u) = \frac{M(x(u))}{\left[\frac{du}{dx}\right]}$$

Considérons par exemple le premier terme de ce développement en série, qui est celui que nous utiliserons essentiellement par la suite :

$$\underline{M}(0) = \frac{M(x_s)\sqrt{2}}{|f''(x_s)|^{1/2}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[f''(x_s)]}$$

conduit à

$$I_{(0)} = \sqrt{2\pi} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[f''(x_s)]}}{|f''(x_s)|^{1/2}} M(x_s) e^{if(x_s)} \quad (\text{B.17})$$

Le terme suivant est proportionnel à $\frac{dM}{du}(0) < \infty$ et à $\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2} du = 0$; il vaut donc $I_{(1)} = 0$. Passons donc au terme d'ordre 2. Un calcul élémentaire montre que :

$$\frac{d^2 \underline{M}(u)}{du^2} = \frac{M''u'^2 - 3M'u'u'' + M(3u''^2 - u'u''')}{u'^5} \quad (\text{B.18})$$

L'évaluation des dérivées successives de u en x_s conduit à :

$$\frac{d^2 \underline{M}(u)}{du^2}(0) = 2\sqrt{2} \frac{e^{3i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[f''(x_s)]}}{f''(x_s)^2 |f''(x_s)|^{3/2}} \left\{ M''(x_s) f''(x_s)^2 \right\}$$

$$-M'(x_s)f'''(x_s)f''(x_s) + \frac{M(x_s)}{12} [5f'''(x_s)^2 - 3f''''(x_s)f''(x_s)] \} \quad (\text{B.19})$$

de sorte que le troisième terme est donné par :

$$I_{(2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{24} \frac{e^{3i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[f''(x_s)]}}{f''(x_s)^2 |f''(x_s)|^{3/2}} e^{if(x_s)} \left\{ M''(x_s)f''(x_s)^2 \right. \\ \left. -M'(x_s)f'''(x_s)f''(x_s) + \frac{M(x_s)}{12} [(5f'''(x_s)^2 - 3f''''(x_s)f''(x_s))] \right\} \quad (\text{B.20})$$

Remarque : Une procédure tout à fait similaire peut être employée si, par exemple, toutes les dérivées de $f(x_s)$ s'annulent jusqu'à un certain ordre $k-1$ et $f^{(k)}(x_s) > 0$. Dans ces conditions, le calcul de la série asymptotique se ramène à l'évaluation d'intégrales du type $\int u^n e^{-u^k} du$. A titre d'exemple, le premier terme de la série asymptotique dans le cas $k=3$ s'écrit :

$$6^{1/3} \left(\frac{1}{3} \right)! \frac{e^{i\frac{\pi}{6} \text{Sgn}[f'''(x_s)]}}{|f'''(x_s)|^{1/3}} M(x_s) e^{if(x_s)}.$$

VI.3 Méthode de la phase stationnaire : qualité de l'approximation

Dans les applications de la méthode de la phase stationnaire que nous développerons, nous nous contenterons de l'approximation donnée par le premier terme (B.17) du développement asymptotique. Pour juger de la qualité de l'approximation, on peut soit se contenter de comparer le résultat obtenu au terme suivant (B.19) du développement, soit tenter d'estimer l'erreur commise. Nous donnons ici un résultat qui permet d'estimer cette erreur. Le lecteur intéressé peut se référer à [13] pour une présentation plus détaillée et des estimations plus précises.

Théorème 1 Soient $M \in C_0^2(\mathbb{R})$ et $f \in C^4(\mathbb{R})$, $f(x)$ à valeurs réelles. Supposons que x_s soit l'unique point stationnaire de $f(x)$ et que $f''(x)$ ne s'annule pas sur le support de M . Alors

1. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int M(x) e^{if(x)} dx = \sqrt{2\pi} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[f''(x_s)]}}{|f''(x_s)|^{1/2}} M(x_s) e^{if(x_s)} + r \quad (\text{B.21})$$

$$|r| \leq C \sup_{x \in \text{Supp}(M)} \left[\left| \frac{M''(x)}{f''(x)^{3/2}} \right| + \left| \frac{M'(x)f'''(x)}{f''(x)^{5/2}} \right| \right. \\ \left. + \left| \frac{M(x)f'''(x)^2}{f''(x)^{7/2}} \right| + \left| \frac{M(x)f''''(x)}{f''(x)^{5/2}} \right| \right] \quad (\text{B.22})$$

2. A la limite $\mu \rightarrow \infty$, on a le comportement asymptotique :

$$\left| \int M(x) e^{i\mu f(x)} dx - \sqrt{2\pi} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \text{Sgn}[f''(x_s)]}}{|f''(x_s)|^{1/2}} M(x_s) e^{if(x_s)} \right| = O(\mu^{-3/2}) \quad (\text{B.23})$$

Preuve

1) Si $x_0 \in \mathbb{R}$, si U est un voisinage de x_0 et si $f \in C^k(U)$, la formule de Taylor s'écrit :

$$f(x_0 + \epsilon) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\epsilon^j}{j!} f^{(j)}(x_0) + \frac{\epsilon^k}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} f^{(k)}(x_0 + t\epsilon) dt \quad (\text{B.24})$$

pour tout $x = x_0 + \epsilon \in M$ donne, pour $k = 2$: $f(x_0 + \epsilon) = f(x_0) + \epsilon f'(x_0) + \epsilon^2 F_2(x)$, avec $F_2 \in C^1(U)$ et $|F_2(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in U} |f''(x)|$. En insérant ceci dans (B.14) et en utilisant les évaluations des premiers termes $I_{(0)}$ et $I_{(1)}$ prouve (B.21). On a alors :

$$r = \frac{1}{2} e^{if(x_s)} \int F_2(u) u^2 e^{-u^2} du$$

et

$$|r| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_2(x)| \int u^2 e^{-u^2} du \quad (\text{B.25})$$

L'estimation précédente, combinée avec un calcul similaire à (B.18) et (B.19) conduit à (B.22).

2) découle trivialement de (1) et le théorème est prouvé.

Notation : Tout au long de ce chapitre, nous utilisons le symbole $A \approx B$ pour signifier que B est le premier terme du développement asymptotique de A considéré.

Chapitre VI

ONDELETTES DISCRÈTES, REPÈRE D'ONDELETTES ET DE GABORETTES

Dans la plupart des applications numériques présentées dans les chapitres précédents, il est bien clair que l'on n'a pu évaluer numériquement les valeurs des coefficients d'ondelettes $T_f(b, a)$ pour tous $(b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Il est nécessaire d'échantillonner T_f , c'est-à-dire de se contenter des valeurs prises par $T_f(b, a)$ sur un sous-ensemble discret de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Dans les exemples numériques en question, l'échantillonnage était suffisamment fin pour que la transformée échantillonnée donne une description assez précise de la fonction analysée. Néanmoins, il est utile d'être un peu plus précis et d'estimer la qualité de l'approximation fournie par l'échantillonnage de la transformée en ondelettes. C'est le propos de la théorie des repères d'ondelettes (ou de gaborettes) que nous allons décrire dans ce chapitre. Mais avant d'entrer dans le vif du sujet, il est utile de décrire, dans ses grandes lignes, la théorie abstraite des repères dans un espace de Hilbert. Nous nous intéresserons par la suite aux cas particuliers des repères de gaborettes et d'ondelettes, avec leurs spécificités.

Nous décrirons de plus une variante des ondelettes discrètes, se situant à mi-chemin entre les décompositions continues et les repères et qui sont utiles dès que l'on veut construire des représentations qui soient covariantes comme les représentations continues.

I THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES REPÈRES DANS UN ESPACE DE HILBERT

Nous nous en tiendrons pour le moment aux repères discrets, c'est-à-dire aux repères constitués d'un ensemble au plus dénombrable de vecteurs. Nous nous plaçons donc dans le cadre le plus général d'un espace de Hilbert séparable \mathcal{H} , muni de sa forme hermitienne que nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Un repère discret dans \mathcal{H} est une famille $\{e_n\}$ de vecteurs de \mathcal{H} telle que l'on peut trouver deux constantes réelles strictement positives $0 < A \leq B < \infty$ réalisant l'encadrement

$$A\|x\|^2 \leq \sum | \langle x, e_n \rangle |^2 \leq B\|x\|^2 \quad (\text{I.1})$$

pour tout $x \in \mathcal{H}$. Les constantes A et B sont appelées les bornes du repère. Le repère sera dit strict, si $B = A$ et exact, si aucun de ses sous-ensembles n'est un repère.

Par exemple, considérons l'espace euclidien \mathbb{R}^2 et deux vecteurs orthonormés e_1 et e_2 . Ces deux vecteurs forment une base orthonormale de \mathbb{R}^2 , alors que e_1, e_2 et $e_1 + e_2$ forment un repère inexact et non strict. En revanche, on se convainc sans peine que $\{e_1, e_2, e_2\}$ par exemple est un repère strict et inexact.

Un repère est, par définition, une famille complète de \mathcal{H} . En effet, si tel n'était pas le cas, c'est-à-dire s'il existait un $e \in \mathcal{H}$ non nul tel que $\langle e, e_n \rangle = 0$ pour tout n , (I.1) impliquerait immédiatement que $\|e\| = 0$, d'où une contradiction. En revanche, les exemples précédents montrent clairement qu'un repère n'est pas nécessairement une base.

Etant donné un repère $\{e_n\}$ dans \mathcal{H} , on lui associe l'opérateur auto-adjoint \mathcal{R} suivant, appelé opérateur de repère et défini par :

$$\mathcal{R} \cdot x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (\text{I.2})$$

On obtient alors :

Proposition 1 Soit $\{e_n\}$ un repère dans \mathcal{H} , de bornes A et B . Alors \mathcal{R} est un opérateur borné, tel que :

$$A \cdot I \leq \mathcal{R} \leq B \cdot I \quad (\text{I.3})$$

(Rappelons ici que pour deux opérateurs auto-adjoints X et Y sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , la notation $X \leq Y$ signifie que $\langle v, X \cdot v \rangle \leq \langle v, Y \cdot v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{H}$.) Avant de montrer sa proposition, notons que sa réciproque est triviale.

Preuve : Considérons la suite des sommes partielles

$$\mathcal{R}_n \cdot x = \sum_{k=-n}^n \langle x, e_k \rangle e_k \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (\text{I.4})$$

Alors, soit $0 < n < m$ et

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_n \cdot x - \mathcal{R}_m \cdot x\|^2 &= \sup_{\|y\|=1} |(\mathcal{R}_n - \mathcal{R}_m) \cdot x, y|^2 \\ &= \sup_{\|y\|=1} \left| \sum_{n < |k| \leq m} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle \right|^2 \\ &\leq B \sum_{n < |k| \leq m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

d'où $\|\mathcal{R}_n \cdot x - \mathcal{R}_m \cdot x\|^2 \rightarrow 0$ quand $m, n \rightarrow \infty$ et la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy et converge vers $\mathcal{R} \cdot x$ dans \mathcal{H} . De même

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R} \cdot x\|^2 &= \sup_{\|y\|=1} |\langle \mathcal{R} \cdot x, y \rangle|^2 \\ &= \sup_{\|y\|=1} \left| \sum_k \langle x, e_k \rangle \langle e_k, y \rangle \right|^2 \\ &\leq B^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

montre que $\|\mathcal{R}\| \leq B$. On démontre de manière similaire que $A \leq \|\mathcal{R}\|$.

Un repère dans un espace de Hilbert devient particulièrement intéressant lorsque l'on peut facilement reconstruire tout $v \in \mathcal{H}$ à partir de ses coefficients par rapport au repère $\langle v, e_n \rangle$. C'est le cas lorsque le repère est strict. On a ainsi une formule d'inversion directe :

$$v = \frac{1}{A} \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n,$$

la somme convergeant fortement. En revanche, lorsque le repère n'est pas strict, la situation est plus complexe. Nous allons maintenant voir que lorsque le repère est presque strict, c'est-à-dire lorsque les constantes A et B sont proches l'une de l'autre, v peut être reconstruit à l'aide d'un algorithme itératif, dont la convergence est d'autant plus rapide que $B - A$ est petit. Pour cela, il est nécessaire d'étudier l'inverse de l'opérateur de repère \mathcal{R} . Notons

$$\tilde{e}_n = \mathcal{R}^{-1} \cdot e_n. \quad (\text{I.5})$$

La famille $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ vérifie :

Proposition 2 $\{\tilde{e}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est un repère de \mathcal{H} , de bornes B^{-1} et A^{-1} , appelé repère dual de $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$. De plus, pour tout $v \in \mathcal{H}$, on a les formules de décomposition :

$$v = \sum_n \langle v, \tilde{e}_n \rangle e_n \quad (\text{I.6})$$

$$v = \sum_n \langle v, e_n \rangle \tilde{e}_n \quad (\text{I.7})$$

Preuve : La première partie de la proposition est une conséquence immédiate de :

$$\langle v, \tilde{e}_n \rangle = \langle \mathcal{R}^{-1} \cdot v, e_n \rangle. \quad (\text{I.8})$$

D'autre part, évaluons :

$$\begin{aligned} \sum_n \langle v, \tilde{e}_n \rangle \langle e_n, u \rangle &= \sum_n \langle \mathcal{R}^{-1} \cdot v, e_n \rangle \langle e_n, u \rangle \\ &= \langle \mathcal{R}^{-1} \cdot v, \mathcal{R} \cdot u \rangle \\ &= \langle v, u \rangle. \end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition.

Donc, connaissant l'inverse de l'opérateur de repère, on peut reconstruire tout $v \in \mathcal{H}$ à partir de ses coefficients par rapport au repère, par un calcul préalable du repère dual. Le problème qui se pose est que souvent on ne connaît pas cet inverse.

Néanmoins, dans les cas où le repère est presque strict, on en obtient une excellente approximation comme suit. On écrit \mathcal{R}^{-1} comme :

$$\mathcal{R}^{-1} = \frac{2}{A+B} \left[1 - \left(1 - \frac{2\mathcal{R}}{A+B} \right) \right]^{-1} \quad (\text{I.9})$$

que l'on développe en série entière, qui converge puisque

$$\left\| 1 - \frac{2\mathcal{R}}{A+B} \right\| \leq \frac{B-A}{B+A}. \quad (\text{I.10})$$

On obtient ainsi un algorithme itératif de reconstruction d'un vecteur à partir de ses coefficients par rapport à un repère donné. En notant :

$$\mathcal{T} = 1 - \frac{2\mathcal{R}}{A+B}, \quad (\text{I.11})$$

il suffit d'écrire :

$$v = (1 + \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 + \dots) \sum_n \langle v, e_n \rangle e_n \quad (\text{I.12})$$

pour tout $v \in \mathcal{H}$. Numériquement, la convergence sera atteinte d'autant plus rapidement que le rapport B/A est proche de 1. Ceci illustre l'importance que revêtent en pratique les bornes du repère utilisé et l'intérêt des repères presque stricts. Notons au passage que si le repère est strict, $\mathcal{R} = A\mathbf{I}$ et l'algorithme itératif n'a plus lieu d'être comme prévu.

Remarque : La convergence de cet algorithme est malheureusement strictement limitée au cadre $L^2(\mathbb{R})$, comme l'a montré Ph. Tchamitchian.

Bien entendu, il existe une étroite relation entre les valeurs numériques des bornes du repère et les paramètres définissant le repère. Ainsi, une multiplication des e_n par un facteur constant modifie les bornes du repère. D'autre part, en nous restreignant au problème de discrétisation des décompositions continues de l'identité, il est clair que toute discrétisation ne conduit pas nécessairement à un repère, ce qui conduit à des géométries particulières. Nous verrons que la finesse de la discrétisation a également son importance.

II REPÈRES DE GABORETTES

Commençons par examiner le cas des repères de gaborettes. La première étape est le choix de la grille de discrétisation la mieux adaptée. Les gaborettes étant engendrées par des translations en temps et fréquence, le choix le plus naturel est le choix d'un réseau cubique, invariant par translation (dans la mesure où les translations fréquentielles ne modifient pas la localisation spatiale). Considérons donc une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et deux nombres réels

strictement positifs b_0 et ω_0 , qui fixent la maille de notre grille. Considérons enfin la famille de gaborettes $g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}$, définie par :

$$g_{nm}(x) = e^{im\omega_0 x} g(x - nb_0) \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.1})$$

Sous quelles conditions cette famille constitue-t-elle un repère de $L^2(\mathbb{R})$?

Avant d'y répondre, notons que, dans le cas des gaborettes, le repère dual prend une forme simple :

Lemme 1 Soit $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ un repère de gaborettes de $L^2(\mathbb{R})$ et soit $\tilde{g} = \mathcal{R}^{-1} \cdot g$. Alors, l'ensemble de gaborettes $\{\tilde{g}_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est le repère dual de $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$.

Preuve : Le lemme s'obtient simplement à partir de (I.9), en remarquant que, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{R} \cdot f_{nm} = [\mathcal{R} \cdot f]_{nm}$.

Revenons au problème d'existence des repères de gaborettes et commençons par le cas le plus simple, qui est celui des gaborettes à support compact. Nous allons voir que si la fenêtre $g(x)$ est à support compact, un choix judicieux des paramètres b_0 et ω_0 conduit à un repère. On a en effet :

Théorème 1 Soient b_0, ω_0 deux nombres réels strictement positifs et bornés et soit $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ une fonction à support compact contenu dans un intervalle I de longueur $2\pi/\omega_0$. Alors, s'il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que

$$0 < C_1 \leq \sum |g(x - nb_0)|^2 \leq C_2 < \infty \quad (\text{II.2})$$

la famille $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est un repère de $L^2(\mathbb{R})$, de bornes $2\pi C_1/\omega_0$ et $2\pi C_2/\omega_0$.

Preuve : Soit I l'intervalle de longueur $2\pi/\omega_0$ contenant le support de $g(x)$ et soit $I_n = I + nb_0$ son translaté de nb_0 . Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Alors il est clair que (II.2) implique que $f g_{nm}^* \in L^2(I_n)$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_m \left| \int f(x) g_{nm}(x)^* dx \right|^2 &= \sum_{m,n} \left| \int f(x) g_{n_0}(x) e^{-im\omega_0 x} dx \right|^2 \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \int |f(x)|^2 \sum_n |g(x - nb_0)|^2 dx \end{aligned}$$

car les $\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0}} e^{im\omega_0 x}$ forment une base orthonormée de $L^2(I_n)$. Ceci prouve le théorème.

Les hypothèses du théorème précédent sont fortement liées aux valeurs respectives des paramètres b_0 et ω_0 . En effet, supposons pour simplifier que $g(x)$

soit continue et à support compact et que, en outre, elle ne s'annule pas dans un intervalle I' de longueur L . Alors, si $\omega_0 \leq 2\pi/L$, la première hypothèse du théorème 1 est vérifiée. Il est aussi simple de vérifier qu'il existe une constante finie C_2 vérifiant les égalités de droite de (II.2), car la somme est alors une somme finie. Supposons enfin que $b_0 < L$. Alors pour tout x , on peut trouver un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $g(x - nb_0) > 0$, ce qui prouve les inégalités de gauche de (II.2). On obtient ainsi un repère de $L^2(\mathbb{R})$. Notons en particulier que les hypothèses faites impliquent :

$$b_0\omega_0 \leq 2\pi. \quad (\text{II.3})$$

Le nombre $1/b_0\omega_0$ est parfois appelé densité de Nyquist ρ_N . Nous aurons l'occasion de revenir par la suite à cette densité temps-fréquence et ce pour des fenêtres à support non nécessairement compact. Nous verrons aussi ce qui arrive lorsque l'on se rapproche de la densité dite critique $\rho_N = 1/2\pi$ (phénomène de Balian-Low).

Considérons maintenant une fenêtre $g(x)$ à support non nécessairement compact et la famille $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ de gaborettes associée aux paramètres b_0, ω_0 . Nous cherchons des critères permettant de décider si cette famille constitue un repère ou non. Le résultat suivant est dû à I. Daubechies. Nous renvoyons à l'annexe A (section II.1)- pour les définitions nécessaires.

Théorème 2 Soient

$$m(g, b_0) = \text{ess inf}_{x \in [0, b_0]} \sum_n |g(x - nb_0)|^2, \quad (\text{II.4})$$

$$M(g, b_0) = \text{ess sup}_{x \in [0, b_0]} \sum_n |g(x - nb_0)|^2, \quad (\text{II.5})$$

$$\beta(s) = \sup_{x \in [0, b_0]} \sum_n |g(x - nb_0)| |g(x + s - nb_0)|, \quad (\text{II.6})$$

$$C_\epsilon = \sup_{s \in \mathbb{R}} [(1 + s^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}} \beta(s)]. \quad (\text{II.7})$$

Si $m(g, b_0) > 0$, $M(g, b_0) < \infty$ et $C_\epsilon < \infty$ pour un certain $\epsilon > 0$, alors il existe une valeur critique ω^c telle que $\forall \omega_0 < \omega^c$, la famille $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est un repère de $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Evaluons $\sum |\langle g_{nm}, f \rangle|^2$ à l'aide de la formule sommatoire de Poisson (voir annexe A, section II.1). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} |\langle g_{nm}, f \rangle|^2 &= \sum_{m,n} \int e^{im\omega_0(x-y)} g(x - nb_0) g(y - nb_0)^* f(x)^* f(y) dx dy \\ &= \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{n,k} \int g(x - nb_0) g\left(x - nb_0 - \frac{2k\pi}{\omega_0}\right)^* f(x)^* f\left(x - \frac{2k\pi}{\omega_0}\right) dx. \end{aligned}$$

Evaluons tout d'abord le terme en $k = 0$. Il vaut :

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \int |f(x)|^2 |g(x - nb_0)|^2 dx.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux termes $k > 0$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega_0} \sum_{k>0} \left[\sum_n \int |g(x - nb_0)| \left| g\left(x - nb_0 - \frac{2k\pi}{\omega_0}\right) \right| |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \left[\sum_n \int |g(x - nb_0)| \left| g\left(x - nb_0 - \frac{2k\pi}{\omega_0}\right) \right| \left| f\left(x - \frac{2k\pi}{\omega_0}\right) \right|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En appliquant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'encadrement :

$$\sum | \langle g_{nm}, f \rangle |^2 \leq \frac{2\pi}{\omega_0} \left[M(g, b_0) + \sum_{k>0} \sqrt{\beta\left(\frac{2k\pi}{\omega_0}\right) \beta\left(\frac{-2k\pi}{\omega_0}\right)} \right] \|f\|^2 \quad (\text{II.8})$$

$$\sum | \langle g_{nm}, f \rangle |^2 \geq \frac{2\pi}{\omega_0} \left[m(g, b_0) - \sum_{k>0} \sqrt{\beta\left(\frac{2k\pi}{\omega_0}\right) \beta\left(\frac{-2k\pi}{\omega_0}\right)} \right] \|f\|^2 \quad (\text{II.9})$$

$C_\epsilon < \infty$ assure que la somme sur k converge et tend vers 0, quand ω_0 tend vers 0. Ceci implique donc qu'il existe une valeur critique strictement positive ω^c au-dessous de laquelle on obtient un repère. Ceci achève la démonstration du théorème et prouve donc l'existence de repères de gaborettes.

Notons en particulier que ce résultat fournit des estimations simples pour les bornes A et B du repère. Une étude systématique (théorique et numérique) de ces bornes est effectuée dans [5] pour quelques cas simples.

Remarque : Repères de gaborettes en dimension n . On peut tout aussi bien obtenir des repères de gaborettes de $L^2(\mathbb{R}^n)$. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre II, l'analyse de Fourier à fenêtre glissante en dimension n est la généralisation immédiate de l'analyse de Fourier à fenêtre à une dimension. Il est donc facile d'adapter les démonstrations des théorèmes précédents à la dimension n afin d'obtenir des bornes pour les repères de gaborettes que l'on a obtenus.

Pour conclure cette section, nous revenons brièvement sur la remarque que nous avons faite un peu plus tôt sur de la relation entre les bornes du repère et les paramètres qui le définissent, à savoir les constantes b_0 et ω_0 du réseau de discrétisation. En effet, il est aisé de se convaincre que l'on a nécessairement :

$$A \leq \frac{2\pi}{b_0 \omega_0} \|g\|^2 \leq B \quad (\text{II.10})$$

ce qui implique en particulier que dans le cas d'un repère strict de gaborettes, $A = B = \frac{2\pi}{b_0\omega_0} \|g\|^2$. On voit réapparaître ici la densité critique de Nyquist. Nous y reviendrons dans la prochaine section, en discutant le phénomène de Balian-Low.

III LE PHÉNOMÈNE DE BALIAN-LOW

Nous avons vu au théorème 1 de la section précédente un exemple de condition suffisante d'existence de repère de gaborettes, avec l'hypothèse $b_0\omega_0 \leq 2\pi$. Il s'avère que cette hypothèse est en fait nécessaire. En d'autres termes, si $b_0\omega_0 > 2\pi$, l'échantillonnage de la transformée de Gabor n'est pas suffisamment fin. La valeur $b_0\omega_0 = 2\pi$ est la valeur critique. C'est ce qu'exprime le théorème suivant, dont la preuve peut être trouvée dans [5] et les références incluses dans cet article.

Théorème 3 *Soit $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ un repère de gaborettes, de paramètres b_0 et ω_0 . Alors $b_0\omega_0 \leq 2\pi$; plus précisément, si $b_0\omega_0 > 2\pi$, il existe $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $f > 0$ et $\langle f, g_{nm} \rangle = 0$ pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$.*

Le théorème de Balian-Low décrit le comportement des repères de gaborettes à la densité critique, c'est-à-dire pour $b_0\omega_0 = 2\pi$. Plus précisément, il exprime l'incompatibilité entre le fait que la famille $\{g_{mn}, m, n \in \mathbb{Z}\}$ soit un repère de gaborettes à la densité critique et la régularité de g et \hat{g} . En fait, si $b_0\omega_0 = 2\pi$, $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ serait une base inconditionnelle de $L^2(\mathbb{R})$; mais nous allons montrer que c'est impossible.

De nombreuses démonstrations ont été proposées, depuis la première totalement rigoureuse due à R. Coifman et S. Semmes, fondées sur des arguments différents. Nous donnerons ici la preuve de G. Battle, qui a le mérite d'être relativement simple et de découler du principe d'incertitude de Heisenberg.

III.1 Le principe d'incertitude de Heisenberg

Commençons par une brève description du principe de Heisenberg, dans sa forme la plus générale. Soit A un opérateur auto-adjoint sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Si $v \in \mathcal{H}$, on associe à A les quantités suivantes :

- Valeur moyenne de A dans l'état v :

$$\langle A \rangle_v = \langle v, A \cdot v \rangle \quad (\text{III.1})$$

- Incertitude sur A dans l'état v :

$$\Delta_v A = [\langle A^2 \rangle_v - \langle A \rangle_v^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.2})$$

Dans ces conditions, le principe de Heisenberg s'énonce ainsi :

Théorème 4 Soient A et B deux opérateurs auto-adjoints sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} et soit $v \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) \cap \mathcal{D}(i[A, B])$. Alors

$$\Delta_v A \cdot \Delta_v B \geq \frac{1}{2} \langle i[A, B] \rangle_v \quad (\text{III.3})$$

(Ici $[A, B] = AB - BA$ est le commutateur de A et B .)

Preuve : On voit facilement que : $\Delta_v A = \|[A - \langle A \rangle_v] \cdot v\|$ et de même pour $\Delta_v B$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et évaluons :

$$\begin{aligned} \|[A - \langle A \rangle_v] \cdot v + i\lambda[B - \langle B \rangle_v] \cdot v\|^2 \\ = \lambda^2 \Delta_v B^2 + i\lambda \langle v, [A - \langle A \rangle_v, B - \langle B \rangle_v] \cdot v \rangle + \Delta_v A^2 \\ = \lambda^2 \Delta_v B^2 + i\lambda \langle [A, B] \rangle_v + \Delta_v A^2 \end{aligned}$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré en λ , toujours positif ou nul. Son discriminant est donc négatif ou nul, ce qui prouve le théorème.

Revenons au cas de $L^2(\mathbb{R})$ et introduisons les opérateurs usuels de la mécanique quantique : la position

$$Q \cdot f(x) = x f(x) \quad (\text{III.4})$$

et l'impulsion

$$P \cdot f(x) = -i \frac{df(x)}{dx}. \quad (\text{III.5})$$

(III.3) s'écrit alors, pour toute $f \in \mathcal{D}(Q) \cap \mathcal{D}(P)$:

$$\Delta_f Q \cdot \Delta_f P \geq \frac{1}{2} \quad (\text{III.6})$$

En particulier, on en déduit aisément que :

$$\int (x - \bar{x})^2 |f(x)|^2 dx \times \int (\xi - \bar{\xi})^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq \pi \int |f(x)|^2 dx, \quad (\text{III.7})$$

où $\bar{x} = \int x |f(x)|^2 dx / \|f\|^2$ (resp. $\bar{\xi}$) est la valeur moyenne de x (resp. ξ).

La relation d'incertitude de Heisenberg exprime donc l'existence d'une limite aux propriétés de concentration d'une fonction dans l'espace des phases (ou espace temps-fréquence).

III.2 Le théorème de Balian-Low

Passons maintenant au théorème de Balian-Low. Par commodité, on introduira encore les opérateurs suivants sur $L^2(\mathbb{R})$:

- Modulation : $E_m \cdot f(x) = f_{0m}(x) \quad (\text{III.8})$

- Translation : $T_n \cdot f(x) = f_{n0}(x) \quad (\text{III.9})$

La preuve de G. Battle repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 2 Si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sont telles que $Q \cdot f, Q \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$ et $Q \cdot \hat{f}, Q \cdot \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$, on obtient :

$$\langle Q \cdot f, P \cdot g \rangle - \langle P \cdot f, Q \cdot g \rangle = \frac{1}{i} \langle f, g \rangle. \quad (\text{III.10})$$

Preuve : $Q \cdot \hat{f}, Q \cdot \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ implique que $P \cdot f, P \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$. Supposons tout d'abord que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors $\langle Q \cdot f, P \cdot g \rangle - \langle P \cdot f, Q \cdot g \rangle = \langle [Q, P] \cdot f, g \rangle = \frac{1}{i} \langle f, g \rangle$. Ensuite, par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut trouver deux suites $\{f_k\}$ et $\{g_k\}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telles que $f_k \rightarrow f, g_k \rightarrow g, P \cdot f_k \rightarrow P \cdot f, Q \cdot f_k \rightarrow Q \cdot f, P \cdot g_k \rightarrow P \cdot g$ et $Q \cdot g_k \rightarrow Q \cdot g$ et la continuité du produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ permet de conclure.

Lemme 3

$$(i) [Q, E_m T_n] = n b_0 E_m T_n. \quad (ii) [P, E_m T_n] = m \omega_0 E_m T_n.$$

Preuve : i) On vérifie aisément que $[Q, E_m] = 0$, pour tout m et $[P, T_n] = 0$, pour tout n . Donc, d'après l'identité de Jacobi, $[Q, E_m T_n] = E_m [Q, T_n] = n b_0 E_m T_n$. ii) Même démonstration.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème de Balian-Low (ou plus exactement une forme plus faible, comme nous allons le voir). L'idée générale de ce résultat est qu'on ne peut construire de repère strict de gaborettes (et *a fortiori* de base de gaborettes) régulières et localisées. En supposant que l'on ait un tel repère, construit à partir d'une gaborette $g(x)$, on a alors obligatoirement $\int x^2 |g(x)|^2 dx = \infty$ (donc mauvaise localisation dans l'espace des x) ou $\int \xi^2 |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \infty$ (donc mauvaise localisation dans l'espace des fréquences).

Théorème 5 Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ soit un repère de gaborettes, de paramètres b_0 et ω_0 , avec $b_0 \omega_0 = 2\pi$. Soit $\{\tilde{g}_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ le repère dual. On ne peut avoir alors simultanément $Q \cdot g, Q \cdot \hat{g}, Q \cdot \tilde{g}, Q \cdot \hat{\tilde{g}} \in L^2(\mathbb{R})$.

Preuve : Procédons par l'absurde et supposons que $Q \cdot g, Q \cdot \hat{g}, Q \cdot \tilde{g}, Q \cdot \hat{\tilde{g}} \in L^2(\mathbb{R})$. Nous savons que $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est une base inconditionnelle bornée de $L^2(\mathbb{R})$ et $\{\tilde{g}_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est donc sa base biorthogonale. Donc $\langle g_{nm}, \tilde{g}_{kl} \rangle = \delta_{nk} \delta_{ml}$. Evaluons :

$$\begin{aligned} \langle E_m T_n Q \cdot g, \tilde{g} \rangle &= \langle Q E_m T_n \cdot g, \tilde{g} \rangle - n b_0 \langle E_m T_n \cdot g, \tilde{g} \rangle \\ &= \langle E_m T_n \cdot g, Q \cdot \tilde{g} \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les hypothèses, $P.g, P.\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\langle g, E_m T_n P \cdot \tilde{g} \rangle = \langle P \cdot g, E_m T_n \cdot \tilde{g} \rangle$ d'après le lemme 3. Donc,

$$\begin{aligned} \langle Q \cdot g, P \cdot \tilde{g} \rangle &= \sum \langle Q \cdot g, E_m T_n \cdot \tilde{g} \rangle \langle E_m T_n \cdot g, P \cdot \tilde{g} \rangle \\ &= \sum \langle E_{-m} T_{-n} Q \cdot g, \tilde{g} \rangle \langle g, E_{-m} T_{-n} P \cdot \tilde{g} \rangle \\ &= \sum \langle E_m T_n \cdot g, Q \cdot \tilde{g} \rangle \langle P \cdot g, E_m T_n \cdot \tilde{g} \rangle \\ &= \langle P \cdot g, Q \cdot \tilde{g} \rangle \end{aligned}$$

ce qui contredit le lemme 2 et prouve ainsi le théorème.

Remarque : Ce théorème n'est pas exactement le résultat de Balian et Low, mais une forme faible de celui-ci. L'énoncé original est simplement qu'on ne peut avoir simultanément $Q \cdot g \in L^2(\mathbb{R})$ et $Q \cdot \hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$. L'équivalence entre les deux énoncés est due à I. Daubechies et A. Janssen, qui ont montré que, si $\{g_{nm}, n, m \in \mathbb{Z}\}$ est un repère de gaborettes à la densité critique, alors

$$\begin{cases} Q \cdot g \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Q \cdot \tilde{g} \in L^2(\mathbb{R}), \\ Q \cdot \hat{g} \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Q \cdot \hat{\tilde{g}} \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Le théorème de Balian-Low a, notamment, une importante conséquence négative. Il implique que l'on ne peut espérer construire de base de gaborettes (orthonormée ou pas) de $L^2(\mathbb{R})$ possédant simultanément de bonnes propriétés de localisation et de régularité. Nous verrons un peu plus loin que les ondelettes ne présentent pas un tel défaut.

IV REPÈRE D'ONDELETTES

Considérons maintenant le cas des ondelettes. La première étape est le choix d'une grille de discrétisation adaptée à la géométrie sous-jacente. Dans ce cas, le choix naturel est celui d'une grille dyadique, c'est-à-dire un réseau

$$\{(b_k, a_j) = (kb_0 a_0^j, a_0^j), j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (\text{IV.1})$$

pour deux nombres réels strictement positifs a_0 et b_0 . Sans perte de généralité, on peut encore se restreindre à $a_0 > 1$, en s'y ramenant pour $a_0 < 1$ par un changement $j \rightarrow -j$. Etant donnée une fonction $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, telle que $c\psi = \int_0^\infty |\hat{\psi}(u)|^2 \frac{du}{u} < \infty$, on considère donc la famille d'ondelettes

$$\psi_{jk}(x) = a_0^{-\frac{j}{2}} \psi(a_0^j x - kb_0). \quad (\text{IV.2})$$

La première remarque à faire concerne une différence fondamentale avec le cas des gaborettes. Il n'existe, dans le cas des repères d'ondelettes, aucun analogue

de la densité critique de Nyquist, ni donc du phénomène de Balian-Low. En effet, si $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ est un repère d'ondelettes de paramètres a_0 et b_0 et de bornes A et B et si l'on note $q(x) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, il est facile de voir que $q(x)$ engendre un repère d'ondelettes, de paramètres a_0/λ et λb_0 et de bornes A et B . De plus, même en fixant le paramètre λ , on peut montrer que le phénomène persiste. Des exemples sont montrés dans [5]. Pour a_0 fixé, il n'existe donc aucune valeur critique pour b_0 au-delà de laquelle aucun repère d'ondelettes ne peut exister (indépendamment du choix de ψ). Cette remarque est en fait d'une importance considérable pour la suite. La non-existence d'une version ondelettes du phénomène de Balian-Low permet d'espérer pouvoir construire des bases d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ possédant de bonnes propriétés de régularité et de localisation. Le premier exemple de telles bases a été donné par J.O. Strömberg en 1981 et on en connaît maintenant un très grand nombre.

Revenons au problème des repères d'ondelettes. Nous avons ainsi vu qu'il n'est pas possible de trouver un domaine pour (b_0, a_0) hors duquel $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ ne peut être un repère de $L^2(\mathbb{R})$, indépendamment du choix de $\psi(x)$. En revanche, pour un $\psi(x)$ fixé, il est possible de préciser un peu plus la situation, c'est-à-dire d'obtenir des estimations analogues au théorème 2 de la section II.

Théorème 6 Soit $\psi(x)$ une ondelette et soit $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ une famille d'ondelettes définie par (IV.2). Notons

$$m(\psi, a_0) = \operatorname{ess\,inf}_{\xi \in [0, a_0]} \sum_j |\hat{\psi}(a_0^j \xi)|^2, \quad (\text{IV.3})$$

$$M(\psi, a_0) = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in [0, a_0]} \sum_j |\hat{\psi}(a_0^j \xi)|^2, \quad (\text{IV.4})$$

$$\beta(s) = \sup_{\xi \in [0, a_0]} \sum_j |\hat{\psi}(a_0^j \xi)| |\hat{\psi}(a_0^j \xi + s)|, \quad (\text{IV.5})$$

$$C_\epsilon = \sup_{s \in \mathbb{R}} [(1 + s^2)^{\frac{1+\epsilon}{2}} \beta(s)]. \quad (\text{IV.6})$$

Si $m(\psi, a_0) > 0$, $M(\psi, a_0) < \infty$ et $C_\epsilon < \infty$ pour un certain $\epsilon > 0$, il existe alors une valeur critique b^c telle que $\forall b_0 < b^c$, la famille $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ est un repère de $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve : Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Evaluons $\sum |\langle \psi_{jk}, f \rangle|^2$ à l'aide de la formule sommatoire de Poisson. Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} |\langle \psi_{jk}, f \rangle|^2 &= \sum_{j,k} \int \alpha_0^j e^{ikb_0 a_0^j (\xi - \zeta)} \hat{\psi}(a_0^j \xi) \hat{\psi}(a_0^j \zeta)^* \hat{f}(\xi)^* \hat{f}(\zeta) d\xi d\zeta \\ &= \frac{2\pi}{b_0} \sum_{j,k} \int \hat{\psi}(a_0^j \xi) \hat{\psi}\left(a_0^j \xi + \frac{2k\pi}{b_0}\right)^* \hat{f}(\xi)^* \hat{f}\left(\xi + \frac{2k\pi}{b_0} a_0^{-j}\right) d\xi \end{aligned}$$

Evaluons tout d'abord le terme en $k = 0$. Il vaut :

$$\frac{2\pi}{b_0} \int |\hat{f}(\xi)|^2 \left| \hat{\psi}(a_0^j \xi) \right|^2 d\xi.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux termes $k > 0$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{b_0} \sum_{k>0} \left[\sum_j \int |\hat{\psi}(a_0^j \xi)| \left| \hat{\psi}\left(a_0^j \xi + \frac{2k\pi}{b_0}\right) \right| |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \left[\sum_j \int |\hat{f}(\xi)| \left| \hat{\psi}\left(a_0^j \xi + \frac{2k\pi}{b_0}\right) \right| \left| \hat{f}\left(\xi + \frac{2k\pi}{b_0} a_0^{-j}\right) \right|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Appliquant de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'encadrement :

$$\sum |\langle \psi_{jk}, f \rangle|^2 \leq \frac{2\pi}{b_0} \left[M(\psi, a_0) + \sum_{k>0} \sqrt{\beta\left(\frac{2k\pi}{b_0}\right)\beta\left(\frac{-2k\pi}{b_0}\right)} \right] \|f\|^2 \quad (\text{IV.7})$$

$$\sum |\langle \psi_{jk}, f \rangle|^2 \geq \frac{2\pi}{b_0} \left[m(\psi, a_0) - \sum_{k>0} \sqrt{\beta\left(\frac{2k\pi}{b_0}\right)\beta\left(\frac{-2k\pi}{b_0}\right)} \right] \|f\|^2. \quad (\text{IV.8})$$

$C_\epsilon < \infty$ assure que la somme sur k converge et tend vers 0 quand a_0 tend vers ∞ . Ceci implique donc qu'il existe une valeur critique strictement positive b^c au-dessous de laquelle on obtient un repère. Ceci achève la démonstration du théorème et montre donc l'existence de repères d'ondelettes. Notons que ce résultat fournit très simplement des estimations pour les bornes du repère. En effet, on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire Avec les notations du théorème précédent, si $\psi(x)$, a_0 et b_0 sont tels que

$$m(\psi, a_0) > \sqrt{\beta\left(\frac{2k\pi}{b_0}\right)\beta\left(\frac{-2k\pi}{b_0}\right)} \quad (\text{IV.9})$$

alors la famille $\{\psi_{jk}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ est un repère d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$, de bornes :

$$A = \frac{2\pi}{b_0} \left[m(\psi, a_0) - \sum_{k>0} \sqrt{\beta\left(\frac{2k\pi}{b_0}\right)\beta\left(\frac{-2k\pi}{b_0}\right)} \right] \quad (\text{IV.10})$$

$$B = \frac{2\pi}{b_0} \left[M(\psi, a_0) + \sum_{k>0} \sqrt{\beta\left(\frac{2k\pi}{b_0}\right)\beta\left(\frac{-2k\pi}{b_0}\right)} \right]. \quad (\text{IV.11})$$

Dans de nombreuses applications, il est intéressant de choisir une maille de réseau a_0 égale à 2. Dans ce cas, il est possible d'obtenir des estimations plus précises pour les bornes A et B du repère. Ceci est décrit dans [5] (corollaire 2.9).

Remarque : Repères d'ondelettes en dimension n . On peut aussi construire des repères d'ondelettes en dimension n quelconque et ce pour chacune des variantes présentées au chapitre II. En ce qui concerne les ondelettes engendrées simplement par des translations et dilatations, on peut aisément adapter la démonstration du théorème précédent pour obtenir des estimations pour les bornes des repères correspondants. L'introduction des rotations rend la situation légèrement plus complexe, car elle oblige à construire une discrétisation adaptée du groupe $SO(n)$ ou de la sphère S^{n-1} , autrement dit une partition de $SO(n)$ ou de S^{n-1} en cellules de volume constant (par rapport à la mesure associée). Ainsi, on obtient aisément par des arguments similaires aux précédents des estimations pour A et B . Ceci a été fait dans les cas particuliers de $SO(2)$ et $SO(3)$ dans [15].

V REPÈRES CONTINUS ET GÉNÉRALISATION

Nous avons dans ce chapitre introduit les repères uniquement pour décrire le contrôle de la discrétisation des formules continues précédemment utilisées.

Un repère discret de $L^2(\mathbb{R})$ est naturellement introduit en considérant des familles de fonctions ψ_λ , où $\lambda \in \Lambda$ est un index au plus dénombrable. Dans ces conditions, l'opérateur

$$\mathcal{R} : f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{R} \cdot f = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle f, \psi_\lambda \rangle \psi_\lambda \quad (\text{V.1})$$

n'a en général aucune raison d'être une multiplication par une constante. Le cas des repères discrets correspond aux cas où \mathcal{R} est borné et inversible à inverse borné. On l'écrit alors sous la forme d'une perturbation d'un opérateur constant, ce qui conduit à l'algorithme itératif décrit au début de ce chapitre.

V.1 Repères continus

Il faut cependant noter que la notion de repère peut être généralisée au cas de décompositions continues, comme nous le voyons sur cet exemple simple : Supposons maintenant que Λ soit, non plus un index dénombrable, mais un espace mesuré (Λ, μ) et considérons une famille de fonctions ψ_λ , où $\lambda \in \Lambda$. On introduit de même l'opérateur :

$$\mathcal{R} : f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{R} \cdot f = \int_{\Lambda} \langle f, \psi_\lambda \rangle \psi_\lambda d\mu(\lambda) \quad (\text{V.2})$$

On dira alors que la famille $\{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ est un repère de $L^2(\mathbb{R})$ si \mathcal{R} est borné à inverse borné.

Exemple : atomes temps-fréquence. Revenons à une problématique de traitement du signal et considérons par exemple le cas des *atomes temps-fréquence*, motivé de la façon suivante. Nous entrerons plus profondément dans ces aspects au chapitre VII. Nous avons décrit au chapitre II deux types de représentations temps-fréquence linéaires, fondées sur un ensemble de transformations naturelles (translation, modulation, dilatation). Chacune de ces représentations est adaptée à certains types de signaux ou de problèmes. Il est naturel de chercher une généralisation de ces deux méthodes, en mettant ensembles ces trois transformations, qui n'apparaissent que par paires dans les deux cas classiques. On voit immédiatement qu'il n'est pas possible de conserver simultanément les trois variables (\mathcal{R} n'est pas dans ce cas borné) et qu'il faut donc introduire des dépendances (par exemple la variable d'échelle fonction de la variable de modulation). Le programme est donc de refaire l'analyse précédente dans ce cadre.

Donnons-nous donc une fonction $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ et associons-lui la famille formée par

$$\psi_{(b,\omega)}(x) = e^{i\omega(x-b)} \psi\left(\frac{x-b}{\beta(\omega)}\right) \quad (\text{V.3})$$

où $\beta(\omega)$ est une fonction de classe C^1 par morceaux et $b, \omega \in \mathbb{R}$. Si l'on prend $\Lambda = \mathbb{R}^2$ et pour mesure la mesure de Lebesgue associée, il est facile de vérifier que l'opérateur associé est un opérateur de convolution, donc caractérisé par un multiplicateur

$$\chi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\psi}(\beta(\omega)(\xi - \omega)) \right|^2 d\omega \quad (\text{V.4})$$

Ainsi, on obtient un repère continu si et seulement si il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$$0 < C_1 \leq \chi(\xi) \leq C_2 < \infty, \quad (\text{V.5})$$

ce qui correspond à une condition d'admissibilité portant simultanément sur ψ et sur β .

Nous voyons donc qu'il est facile de construire des repères continus. Dans ce cas, on parle parfois de repères associés à des multiplicateurs. On peut considérer par exemple des fonctions $\beta(\omega)$ particulières, utiles dans certains contextes spécifiques. Citons entre autres la famille de choix suivante :

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \leq \omega_0 \\ \frac{\lambda}{|\omega| - \omega_0 + \lambda} & \text{sinon} \end{cases}$$

qui conduit à des systèmes de fonctions se comportant comme des ondelettes à haute fréquence et des gaborettes à basse fréquence, propriété parfois utile pour le traitement de la parole.

V.2 Repères discrets d'ondelettes interpolantes

Reprenons l'exemple précédent et voyons maintenant dans quelle mesure il est possible de remplacer l'intégrale par une somme discrète. On peut sans trop de difficultés renouveler l'analyse précédente, et conclure à l'existence de repères discrets associés aux repères continus considérés. Avec des arguments en tous points similaires aux précédents, on a alors un critère identique pour l'existence de repères discrets d'ondelettes interpolantes :

Soit $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ et soit

$$\{(b_{mn}, \omega_n)\} = \{(m\beta(\omega_n)b_0, \omega_n), m, n \in \mathbb{Z}\}$$

un sous-ensemble discret du plan temps-fréquence. Notons

$$\Psi(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\psi}(\beta(\omega_n)(\xi + \omega_n)) \right|^2$$

et

$$B(s) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\left| \hat{\psi}(\beta(\omega_n)(\xi + \omega_n)) \right| \left| \hat{\psi}(\beta(\omega_n)(\xi + \omega_n) + s) \right|}$$

Théorème 7 Avec les mêmes notations que plus haut, si $\Psi(\xi)$ est essentiellement borné supérieurement et inférieurement et si

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sum_{k \neq 0} B\left(\frac{k}{a}\right) B\left(-\frac{k}{a}\right) = 0$$

Alors, il existe une valeur critique b_{0c} de b_0 telle que $\forall b_0 < b_{0c}$, la famille

$$\psi_{mn} = \frac{1}{\sqrt{\beta(\omega_n)}} e^{i\omega_n(x-b_m)} \psi\left(\frac{x-b_m}{\beta(\omega_n)}\right)$$

soit un repère de $L^2(\mathbb{R})$.

Nous renvoyons à [12] pour une preuve de ce résultat, ainsi que quelques exemples traités en détail. Il est en particulier montré que des fonctions β de la forme $\beta(\omega) = \omega^\alpha$ conduisent à des repères aussi bien discrets que continus.

VI ONDELETTES “PRESQUE CONTINUES”

Il est souvent utile de pouvoir disposer d'une version “intermédiaire” entre les formules continues et les repères d'ondelettes, en particulier lorsqu'on veut utiliser numériquement une décomposition continue tout en essayant de préserver au maximum les propriétés de covariance de la transformée continue

(qui sont absentes par construction dans le cas des repères). Plus précisément, la covariance par translation (*i.e.* la transformée continue en ondelettes d’une copie tradatée d’une fonction $f(x)$ est égale à la copie tradatée —de la même quantité— de la transformée continue en ondelettes de $f(x)$) est souvent utile en pratique. Ainsi, étant donnée une ondelette $\psi(x)$, on est amené à considérer la famille suivante :

$$\psi_{jk}(x) = 2^{-j}\psi(2^{-j}(x - k)) \tag{VI.1}$$

(Alors que dans le cas d’un repère, les objets considérés sont plutôt de la forme $2^{-j}\psi(2^{-j}x - k)$.) La différence essentielle entre ces deux types de fonctions est leur localisation spatiale. Alors que $\psi(2^{-j}x - k)$ est essentiellement localisée au voisinage de $x = k2^j$, $\psi(2^{-j}(x - k))$ est localisée au voisinage de $x = k$. Ainsi, les $\psi_{jk}(x)$ permettent-elles un échantillonnage de la transformée sur un réseau régulier en k , indépendant de l’échelle.

Commençons par considérer une ondelette $\psi(x)$ telle que

$$\sum_j |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \quad (\text{presque partout}) \tag{VI.2}$$

et notons, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$T_j f(x) = T_f(x, 2^j) = \langle f, \psi_{jk} \rangle \tag{VI.3}$$

Lemme 4 *La transformation $f \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \{T_j f \in L^2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}\}$ est une isométrie.*

Preuve : Un calcul immédiat montre que

$$\|T_j f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 d\xi \tag{VI.4}$$

et le lemme en résulte.

On introduit alors la fonction $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, choisie de telle sorte que

$$|\hat{\phi}(\xi)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 \tag{VI.5}$$

et pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$S_j f(x) = \langle f, \phi_{jk} \rangle \tag{VI.6}$$

Alors que la fonction $T_j f(x)$ représente essentiellement les “détails” de $f(x)$ à l’échelle 2^j , $S_j f(x)$ représente une approximation (ou un lissage) de $f(x)$ à cette même échelle, que l’on exprime comme superposition de tous les détails aux échelles supérieures.

Remarque : Notons ici que la discussion qui précède est très proche dans l'esprit de la section VI.1 du chapitre II. Il s'agit en effet d'une version discrète de cette dernière, mais aussi d'un premier pas en direction des analyses multirésolution proprement dites, abondamment décrites dans [Me] et [6] et que nous avons donc choisi de ne pas aborder dans cet ouvrage.

En pratique, les fonctions ou signaux considérés sont le plus souvent discrétisés, c'est-à-dire donnés par un ensemble de valeurs numériques (échantillons) : $\{f_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Ceci introduit naturellement une limite sur les échelles à considérer, par exemple $j = 0$. Il s'agit alors d'évaluer des coefficients $F_j f(k), k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}$ associés à la suite $\{f_n\}$.

VII COMMENTAIRES ET RÉFÉRENCES

La notion de repère dans un espace de Hilbert a été introduite initialement par R. Duffin et A. Schaeffer [8], dans un contexte d'analyse harmonique classique. Elle a été ensuite appliquée au contexte de l'analyse temps-fréquence et les premiers exemples de repères d'ondelettes et de gaborettes apparaissent dans [7]. La théorie des repères d'ondelettes et de gaborettes a ensuite été développée en détail dans [5]. D'autres aspects plus spécifiques ont été étudiés par la suite, comme par exemple les propriétés de continuité des opérateurs de repère [17] ou les connexions avec la transformée de Zak [10]. Les repères continus (voir [1]) et discrets d'ondelettes généralisées sont décrits dans [12]. Une grande partie de ces résultats est décrite dans [11] et les références incluses.

La notion de repère peut être étendue à d'autres cadres fonctionnels que L^2 . Un premier exemple concerne la construction de repères (d'ondelettes ou de gaborettes) dans les espaces de Sobolev [5] et [16]. H. Feichtinger et K. Grochenig [9] posent le problème dans un cadre plus général, en introduisant et classifiant les espaces de co-orbite, qui sont essentiellement des espaces de Banach admettant des repères d'ondelettes ou de gaborettes.

L'un des aspects importants traités ici est le théorème de Balian-Low, énoncé initialement dans [2] et [13]. La première preuve complète est due à R. Coifman et S. Semmes et celle présentée ici est due à G. Battle [3]. Une revue sur le sujet peut être trouvée dans [4].

- [1] T. Ali, J.P. Antoine, J.P. Gazeau, "Continuous Frames in Hilbert Space", Pré-ri-
rage, Louvain-La-Neuve (1992).
- [2] R. Balian, "Un principe d'incertitude fort en théorie du signal ou en mécanique
quantique", *C.R.A.S.*, **292** (1981) p. 1357-1362.
- [3] G. Battle, "Heisenberg Proof of the Balian-Low Theorem", *Lett. Math. Phys.*
15 (1988) p. 175-177.
- [4] J. Benedetto, C. Heil, D. Walnut, "Remarks on the Proof of the Balian-Low
Theorem", MITRE corporation preprint (1990).

- [5] I. Daubechies, "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localisation and Signal Analysis", *IEEE Trans. Inf. Th.*, **36** (1990) p. 961-1005.
- [6] I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", *SIAM-CBMS Conferences Series* (1992).
- [7] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, "Painless Nonorthogonal Expansions", *J. Math. Phys.*, **27** (1986) p. 1273-1283.
- [8] R.J. Duffin, A.C. Schaeffer, "A class of Non-Harmonic Fourier Series", *Trans. A.M.S.*, **72** (1952) p. 341-366.
- [9] H.G. Feichtinger, K.H. Grochenig, "Banach Spaces Related to Integrable Group Representations and their Atomic Decompositions", *I, J. Funct. An.*, **86** (1990), p. 307-340, *II, Th. Math.*, **108** (1989) p. 129-148.
- [10] C. Heil, "Generalized Harmonic Analysis in Higher Dimensions : Weyl-Heisenberg Frames and the Zak Transform", Thèse, Université du Maryland (1990).
- [11] C. Heil, D. Walnut, "Continuous and Discrete Wavelet Transforms", *SIAM Rev.*, **31** (1989) p. 628-666.
- [12] J.A. Hogan, J.D. Lakey, "Extensions of the Heisenberg Group by Dilations and Frames", University of New South Wales preprint PM94/3, Australia (1994), à paraître dans *Appl. and Comp. Harmonic Analysis*.
- [13] F. Low, "Complete Sets of Wave Packets", in "A passion for Physics", *Essays in honour of G. Chew*, World Scientific (1985) p. 17-22.
- [14] Y. Meyer, *Ondelettes et Opérateurs I*, Hermann (1989).
- [15] R. Murenzi, "Ondelettes multidimensionnelles et applications à l'analyse d'images", Thèse, IPT Louvain-La-Neuve (1990).
- [16] P. Tchamitchian, "Quelques remarques sur la décomposition discrète en ondelettes", Preprint CPT-86/P.1967 (1986).
- [17] D. Walnut, "Continuity properties of the Gabor frame operator", Yale University, Preprint (1990).

Chapitre VII

ÉTATS COHÉRENTS ET REPRÉSENTATIONS DE CARRÉ INTÉGRABLE DE GROUPES LOCALEMENT COMPACTS ET D'ESPACES HOMOGENES

Ce chapitre, quelque peu marginal par rapport aux autres aspects traités dans cet ouvrage, est consacré à une approche différente des représentations temps-fréquence et à leurs généralisations multidimensionnelles. Nous allons en effet voir comment les dériver en se basant sur de simples principes de symétrie. L'idée est ici d'élaborer un "algorithme" de construction de représentations temps-fréquence, à partir d'hypothèses de covariance. Il s'agit là d'une procédure très courante en physique quantique et en optique notamment, où elle porte parfois le nom de *représentation en états cohérents*.

Le langage employé dans ce chapitre est celui de la théorie des groupes. Nous renvoyons à l'annexe B pour une description sommaire des concepts nécessaires. Le schéma général est le suivant : étant donné un espace de Hilbert \mathcal{H} (en général un espace L^2 , espace auquel appartiennent les signaux dans notre cas) sur lequel agit un groupe de symétrie G , on associera à chaque élément $v \in \mathcal{H}$ (à chaque fonction analysée) une fonction de $L^2(G)$ ou de $L^2(X)$. X est un espace homogène par rapport à G (c'est-à-dire que l'on sait faire agir G sur cet espace), faisant apparaître explicitement des propriétés possibles d'invariance de v (par exemple, dans le cas des ondelettes classiques, l'invariance par changement d'échelle). Les questions que l'on se pose alors sont : Quelles sont les symétries possibles ? Sont-elles respectées exactement ou de façon approchée ?

I INTRODUCTION

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est utile de préciser en quelques mots les motivations à se placer dans un cadre algébrique pour décrire les

représentations temps-fréquence. Nous avons eu l'occasion de voir, au chapitre II notamment, que les ondelettes (ou gaborettes) sont engendrées à partir d'une fonction unique par des transformations géométriques simples. Nous avons aussi eu l'occasion de voir quelles sont les propriétés de covariance de ces transformées et les conséquences de la covariance. (Il s'agissait de covariance temps-fréquence.) On peut aussi illustrer la covariance position-échelle. Pour ceci, considérons une expérience imaginaire dans laquelle l'on aurait à utiliser un automate sur une planète lointaine. Cet automate aurait à prendre des décisions (du type "j'avance", "je recule", "j'enjambe", "je contourne" ...) en fonction de son environnement. Une possibilité serait de pouvoir disposer d'une représentation de cet environnement, représentation qui lui fournirait des renseignements quant à la position et la taille des obstacles. On se retrouve là dans un contexte "position-échelle". De plus, la taille dans la représentation doit être proportionnelle à la taille réelle et la position refléter la position réelle des obstacles. Ceci est exactement une contrainte de covariance.

Nous préciserons un peu plus dans ce chapitre les structures géométriques sous-jacentes. Dans un premier temps, nous décrirons le cadre dans lequel se placent les représentations temps-fréquence, à savoir le cadre des représentations de carré intégrable de groupes localement compacts. Puis, nous verrons pourquoi toutes les propriétés de covariance ne sont pas accessibles, ce qui nous amènera à considérer le cas plus complexe des représentations restreintes à un espace homogène. Nous verrons alors sur quelques exemples (le développement de la théorie complète va bien au-delà des objectifs de ce livre) se dégager un choix naturel pour l'espace homogène, bien connu des géomètres et des algébristes sous le nom d'"espace des phases", c'est-à-dire un espace de dimension paire contenant simultanément des informations spatiales et fréquentielles. Ceci nous ramène naturellement aux représentations "temps-fréquence" et donne un éclairage différent aux méthodes développées au chapitre V en particulier.

II REPRÉSENTATIONS DE CARRÉS INTÉGRABLES ET ÉTATS COHÉRENTS

Parmi les représentations unitaires d'un groupe localement compact G , il existe une classe de représentations particulièrement intéressantes, dites de carré intégrable. Considérons une représentation unitaire π du groupe localement compact G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} .

Définition 1 π est de carré intégrable si :

- (i) π est irréductible ;

(ii) il existe un élément $v \in \mathcal{H}$, $v \neq 0$, tel que

$$\int_G |\langle \pi(g) \cdot v, v \rangle|^2 d\mu_G(g) < \infty. \quad (\text{II.1})$$

v est dit vecteur admissible.

Remarquons que si π est de carré intégrable et si ρ est une autre représentation de G unitairement équivalente à π , alors ρ est elle aussi de carré intégrable.

II.1 Coefficients de Schur et relations d'orthogonalité

Si π est une représentation unitaire de G sur \mathcal{H} , on lui associe la famille suivante de fonctions sur G , appelées coefficients de Schur et définies par :

$$\phi_{u,v}(g) = \langle \pi(g) \cdot u, v \rangle, u, v \in \mathcal{H}. \quad (\text{II.2})$$

De tels coefficients jouent un rôle extrêmement important dans la théorie des représentations des groupes localement compacts en général. Ils sont particulièrement intéressants dans notre contexte, car ils vérifient des relations dites d'orthogonalité.

Ces relations ont d'abord été obtenues dans un contexte de groupes finis, puis compacts, localement compacts unimodulaires [8] et non unimodulaires [7], [5]. Les relations d'orthogonalité des coefficients de Schur permettent en particulier de réaliser une représentation de carré intégrable comme (à équivalence unitaire près) une sous-représentation irréductible de la représentation régulière gauche du groupe, ce qu'exprime le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit π une représentation irréductible unitaire du groupe G (localement compact séparable) dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors π est unitairement équivalente à une sous-représentation irréductible de la représentation régulière gauche si et seulement si il existe un coefficient de Schur $\phi_{\psi v}$ qui soit de carré intégrable.*

Preuve : 1) Soit $\psi \in \mathcal{H}$ et supposons qu'il existe $v \in \mathcal{H}$ tel que $\phi_{\psi v}$ appartienne à $L^2(G)$. Soit $T : \mathcal{H} \rightarrow L^2(G)$ l'opérateur défini par :

$$T : v \rightarrow T_v = \phi_{\psi v} \quad (\text{II.3})$$

L'irréductibilité de π assure que T est densément défini sur \mathcal{H} . De plus, si $g, h \in G$, on a

$$T_{\pi(h) \cdot v}(g) = \langle \pi(h) \cdot v, \pi(g) \cdot \psi \rangle = \langle v, \pi(h^{-1}g) \cdot \psi \rangle = T_v(h^{-1}g) = [\lambda(h) \cdot T_v](g)$$

de sorte que T entrelace π et λ (voir l'annexe B pour une définition des opérateurs d'entrelacement). Le lemme de Schur assure donc que T est un multiple d'une isométrie et est défini sur tout \mathcal{H} . Il en résulte que π est unitairement équivalente à une sous-représentation de λ , ce qui prouve la première partie du théorème.

2) Soit $\mathcal{K} \subset L^2(G)$ un sous-espace fermé invariant minimal de $L^2(G)$, soit $P : L^2(G) \rightarrow \mathcal{K}$ le projecteur orthogonal associé et soit $F \in \mathcal{K}$. Soit Φ une fonction continue à support compact sur G , telle que $F * \tilde{\Phi} \neq 0$, où on a posé comme à l'habitude $\tilde{\Phi}(g) = \Phi(g^{-1})^*$. Alors

$$\langle F, \lambda(g) \cdot P \cdot \Phi \rangle = \langle F, P \cdot \lambda(g) \cdot \Phi \rangle = F * \tilde{\Phi}(g)$$

et $F * \tilde{\Phi} \in L^2(G)$, ce qui achève la preuve du théorème.

On peut donc écrire, pour tous $u, v \in \mathcal{H}$ et tous vecteurs admissibles $\psi, \theta \in \mathcal{H}$:

$$\langle \phi_{\psi u}, \phi_{\theta v} \rangle = c_{\psi\theta} \langle u, v \rangle \quad (\text{II.4})$$

où $c_{\psi\theta}$ est une constante que l'on supposera finie.

Quant aux relations d'orthogonalité elles-mêmes, elles sont données par le théorème 2.

Théorème 2 Soit π une représentation unitaire de carré intégrable de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors il existe un unique opérateur auto-adjoint positif \mathcal{A} , tel que

$$\mathcal{A} \cdot \pi(g) = \Delta(g) \pi(g) \cdot \mathcal{A} \quad (\text{II.5})$$

et tel que l'on ait de plus :

- Si $\psi, v \in \mathcal{H}$, $\phi_{\psi v} \in L^2(G)$ si et seulement si ψ appartient au domaine de $(\mathcal{A}^{-1/2})$.
- Pour tous $v, v' \in \mathcal{H}$ et $\psi, \psi' \in \text{Dom}(\mathcal{A}^{-1/2})$, on a :

$$\langle \phi_{\psi v}, \phi_{\psi' v'} \rangle = \langle v, v' \rangle \langle (\mathcal{A}^{-1/2}) \cdot \psi, (\mathcal{A}^{-1/2}) \cdot \psi' \rangle \quad (\text{II.6})$$

Si G est unimodulaire, \mathcal{A} est un multiple de l'identité.

Preuve : Nous renvoyons à [7] et [9] pour deux démonstrations différentes de ce résultat, que nous n'utiliserons pas directement ici. L'opérateur \mathcal{A} est appelé *dimension formelle* de π . Nous verrons plus loin qu'il prend dans certains cas une forme extrêmement simple.

Nous verrons aussi, quand nous considérerons des exemples précis, comment traiter le cas des représentations complètement réductibles.

II.2 États cohérents et transformation associée

Nous allons maintenant voir comment les représentations de carré intégrable permettent de se placer dans le cadre de la théorie des états cohérents (généralisés) tels qu'ils sont définis par J. Klauder et B. Skagerstam [13]. Suivant Klauder et Skagerstam, on définit une famille d'états cohérents dans un espace de Hilbert \mathcal{H} comme une famille d'éléments de \mathcal{H} , que nous noterons $\{\theta_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, indexée par un espace mesuré $\{\Lambda, \mu\}$, telle que les conditions suivantes soient réunies :

(i) *Continuité* : θ_λ est une fonction fortement continue de l'indice λ .

(ii) *Résolution de l'identité* : L'égalité opératorielle suivante est réalisée faiblement :

$$\int_{\Lambda} \theta_\lambda \otimes \tau_\lambda d\mu(\lambda) = \mathbf{I} \quad (\text{II.7})$$

où τ_λ est la forme linéaire sur \mathcal{H} :

$$\tau_\lambda : v \in \mathcal{H} \rightarrow \tau_\lambda(v) = \langle \theta_\lambda, v \rangle \quad (\text{II.8})$$

et où $\theta_\lambda \otimes \tau_\lambda$ est donc le projecteur de rang 1 (en général non orthogonal) :

$$\theta_\lambda \otimes \tau_\lambda : v \in \mathcal{H} \rightarrow \langle \theta_\lambda, v \rangle \theta_\lambda \in \mathcal{H}. \quad (\text{II.9})$$

La résolution de l'identité est parfois notée en utilisant les notations de Dirac :

$$\int_{\Lambda} |\lambda\rangle \langle \lambda| d\mu(\lambda) = \mathbf{I} \quad (\text{II.10})$$

où $|\lambda\rangle$ représente le vecteur θ_λ et $\langle \lambda|$ la forme linéaire τ_λ . On parle aussi de relation de complétude ou de fermeture.

On appelle coefficients de $v \in \mathcal{H}$ les produits scalaires :

$$S_v(\lambda) = \langle \theta_\lambda, v \rangle = \tau_\lambda(v) \quad (\text{II.11})$$

Les coefficients forment la transformée de v , qui est une fonction sur Λ et vérifie l'équation intégrale :

$$S_v(\lambda) = \int_{\Lambda} K(\lambda, \lambda') S_v(\lambda') d\mu(\lambda') \quad (\text{II.12})$$

où le noyau

$$K(\lambda, \lambda') = \langle \theta_\lambda, \theta_{\lambda'} \rangle \quad (\text{II.13})$$

est appelé noyau reproduisant associé à la famille $\{\theta_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$.

II.3 Retour aux représentations temps-fréquence

Nous allons maintenant voir quel est le lien entre représentations temps-fréquence, états cohérents et représentations de carré intégrable. Plus particulièrement et en suivant [9], nous allons voir comment l'équivalence unitaire des représentations de carré intégrable avec une sous-représentation irréductible de la représentation régulière gauche fournit automatiquement des familles d'états cohérents et des transformations de type "transformation en ondelettes" associées.

En effet, reprenons la preuve du théorème 1 et considérons l'opérateur d'entrelacement utilisé.

$$T : v \in \mathcal{H} \rightarrow T_v = \phi_{\psi v} \quad (\text{II.14})$$

Cet opérateur est donc une isométrie et peut ainsi être inversé en utilisant son adjoint. On obtient ainsi :

Corollaire 1 *Soit π une représentation de carré intégrable de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} et soient $\psi, \theta \in \mathcal{H}$ deux vecteurs admissibles. Alors tout élément $v \in \mathcal{H}$ admet la décomposition suivante :*

$$v = \frac{1}{c_{\psi\theta}} \int_G T_v(g) \pi(g) \cdot \theta \, d\mu_L(g) \quad (\text{II.15})$$

où l'intégrale est à prendre au sens de la convergence faible et où

$$T_v(g) = \langle v, \pi(g) \cdot \psi \rangle \quad (\text{II.16})$$

et la constante $c_{\psi\theta}$ est donnée par

$$c_{\psi\theta} = \frac{1}{\langle \theta, \psi \rangle} \int_G |\langle \theta, \pi(g) \cdot \psi \rangle|^2 d\mu_L(g) \quad (\text{II.17})$$

Nous nous retrouvons donc dans le même cadre formel que celui dans lequel nous avons placé les théorèmes de représentation du chapitre II. L'identification est plus complète encore lorsque l'on met en évidence les noyaux reproduisants dans les deux cas. Nous avons obtenu une transformation intégrale inversible, associant \mathcal{H} à un sous-espace de $L^2(G)$. G est un groupe de transformations naturel associé à la représentation. Nous allons voir que les représentations temps-fréquence étudiées au chapitre II se placent parfaitement dans ce cadre.

Notons au passage que la formule de reconstruction exprime le vecteur $v \in \mathcal{H}$ comme superposition de contributions $\pi(g) \cdot \theta$ qui peuvent *a priori* être différentes des fonctions d'analyse $\pi(g) \cdot \psi$. On parle alors d'ondelettes d'analyse et d'ondelettes de reconstruction.

II.4 Exemples

Nous décrivons maintenant quelques exemples simples pour lesquels la construction précédente fonctionne et conduit à des théorèmes de représentation de type temps-fréquence.

II.4.1 Le groupe affine et les ondelettes classiques

L'exemple le plus simple est sans doute celui conduisant aux ondelettes unidimensionnelles classiques que nous avons étudiées. Le groupe correspondant est le groupe des transformations affines de la droite, ou groupe affine, ou encore groupe $ax + b$.

$$G_{aff} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad (\text{II.18})$$

La loi de groupe est donnée par :

$$(b, a) \cdot (b', a') = (b + ab', aa') \quad (\text{II.19})$$

Il est facile de montrer (voir par exemple [10]) que G_{aff} possède en tout et pour tout deux représentations unitaires irréductibles inéquivalentes, agissant sur

$$H_{\pm}^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}(\pm\xi) = 0 \forall \xi \leq 0\} \quad (\text{II.20})$$

de la manière suivante :

$$[\pi(b, a) \cdot f](x) = \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{II.21})$$

Un calcul direct montre que ces deux représentations sont effectivement de carré intégrable, de sorte qu'elles fournissent gratuitement un système d'ondelettes. En effet, si $\psi \in H_+^2(\mathbb{R})$ est un vecteur admissible, c'est-à-dire si

$$0 < c_{\psi} = \int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} < \infty \quad (\text{II.22})$$

alors $\forall f \in H_+^2(\mathbb{R})$, on peut écrire :

$$f = \frac{1}{c_{\psi}} \int_{G_{aff}} T_f(b, a) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da}{a} \frac{db}{a} \quad (\text{II.23})$$

où

$$T_f(b, a) = \phi_{\psi f}(b, a) = \langle f, \pi(b, a) \cdot \psi \rangle \quad (\text{II.24})$$

Pour faire le lien avec la version de l'analyse par ondelettes utilisée en théorie de Littlewood-Paley (c'est-à-dire sur $L^2(\mathbb{R})$ et non $H_{\pm}^2(\mathbb{R})$), il est utile de faire la remarque suivante.

Proposition 1 Soient π_1, \dots, π_N N représentations unitaires de carré intégrable inéquivalentes de G sur $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ respectivement et soit $\pi = \sum_1^{N \oplus} \pi_i$ leur somme directe, agissant sur $\mathcal{H} = \sum_1^{N \oplus} \mathcal{H}_i$. Notons P_i le projecteur orthogonal de \mathcal{H} sur \mathcal{H}_i . Soit $\psi \in \mathcal{H}$. Alors, on obtient la résolution de l'identité suivante sur $\mathcal{H} : \forall u \in \mathcal{H}$

$$u = \frac{1}{c_\psi} \int_G \langle u, \pi(g) \cdot \psi \rangle \pi(g) \cdot \psi d\mu(g) \quad (\text{II.25})$$

si et seulement si $P_i \cdot \psi$ est admissible pour π_i quel que soit $i = 1, \dots, N$ et

$$c_\psi = c_\psi^i = \int_G |\langle P_i \cdot \psi, \pi_i(g) \cdot P_i \cdot \psi \rangle|^2 d\mu(g) \quad (\text{II.26})$$

est une constante finie, différente de zéro et indépendante de $i = 1, \dots, N$

Preuve : Soit $u \in \mathcal{H}$. Ecrivons $u = \sum_1^N P_i \cdot u$. Alors on a

$$\begin{aligned} \int_G |\langle u, \pi(g) \cdot \psi \rangle|^2 d\mu(g) &= \int_G \left| \left\langle \sum_1^N P_i \cdot u, \pi(g) \cdot \psi \right\rangle \right|^2 d\mu(g) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_G |\langle P_i \cdot u, \pi(g) \cdot \psi \rangle|^2 d\mu(g) \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \int_G \langle P_i \cdot u, \pi(g) \cdot \psi \rangle \langle \pi(g) \cdot \psi, P_j \cdot u \rangle d\mu(g) \\ &= \sum_{i=1}^N \int_G |\langle P_i \cdot u, \pi_i(g) \cdot P_i \cdot \psi \rangle|^2 d\mu(g) \\ &\quad + \sum_{j \neq i} \int_G \langle P_i \cdot u, \pi_i(g) \cdot P_i \cdot \psi \rangle \langle \pi_j(g) \cdot P_j \cdot \psi, P_j \cdot u \rangle d\mu(g) \end{aligned}$$

où on a utilisé l'orthogonalité des P_i et l'irréductibilité des π_i .

Considérons tout d'abord le second terme ("termes croisés") et supposons qu'il ne soit pas uniformément nul. Alors on voit aisément que l'opérateur

$$u \in \mathcal{H}_i \rightarrow \int_G \langle P_i \cdot u, \pi_i(g) \cdot P_i \cdot \psi \rangle \pi_j(g) \cdot P_j \cdot \psi d\mu(g) \in \mathcal{H}_j$$

entrelace π_i et π_j , d'où une contradiction avec l'inéquivalence des représentations. Donc

$$\begin{aligned} \int_G |\langle u, \pi(g) \cdot \psi \rangle|^2 d\mu(g) &= \sum_{i=1}^N \int_G |\langle P_i \cdot u, \pi_i(g) \cdot P_i \cdot \psi \rangle|^2 d\mu(g) \\ &= \sum_{i=1}^N c_\psi^i \|P_i \cdot u\|^2 \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la proposition.

Dans notre cas, étant donné que $L^2(\mathbb{R}) = H_+^2(\mathbb{R}) \oplus H_-^2(\mathbb{R})$, on pourra “recoller les morceaux” dès lors que la contribution de l’ondelette ψ à la description de $H_+^2(\mathbb{R})$ sera égale à celle correspondant à $H_-^2(\mathbb{R})$. Ceci revient à écrire :

$$\begin{aligned} 0 < c_\psi^- &= \int_0^\infty |\hat{\psi}(-\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} \\ &= c_\psi^+ = \int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} < \infty \end{aligned}$$

ce qui est vérifié dès que l’ondelette ψ est à valeurs réelles ou imaginaires pures.

II.4.2 Le groupe de Weyl-Heisenberg et les gaborettes

Un autre exemple très classique (et abondamment décrit dans [19]) est fourni par le groupe de Weyl-Heisenberg dit polarisé, *i.e.*

$$G_{WH}^p = \mathbb{R}^2 \times S^1 \quad (\text{II.27})$$

(où on a identifié le cercle S^1 à l’intervalle $[-\pi, \pi]$ modulo 2π) avec la loi de groupe suivante :

$$(q, p, \phi) \cdot (q', p', \phi') = (q + q', p + p', \phi + \phi' + pq') \quad (\text{II.28})$$

La théorie des représentations unitaires irréductibles de G_{WH} est bien connue et le théorème de Stone-von Neumann (voir par exemple [15]) montre que toute représentation unitaire irréductible de G_{WH} est unitairement équivalente à l’une des représentations sur $L^2(\mathbb{R})$ suivantes (où $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \neq 0$)

$$[\pi_\lambda(q, p, \phi) \cdot f](x) = e^{i\lambda[\phi + p(x-q)]} f(x - q) \quad (\text{II.29})$$

Un calcul direct montre que ces représentations sont de carré intégrable et que tout $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ est admissible (le groupe étant unimodulaire) ; la constante d’admissibilité est donnée par

$$c_\psi = 2\pi \|\psi\|_2^2 \quad (\text{II.30})$$

(on a pris ici $\lambda = 1$).

La représentation temps-fréquence correspondante conduit à l’analyse de Fourier à fenêtre glissante (ou analyse de Gabor) : Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \frac{1}{2\pi \|\psi\|_2^2} \int G_f(q, p) e^{ip(x-q)} \psi(x - q) dq dp \quad (\text{II.31})$$

où la transformée de Gabor est donnée par

$$G_f(q, p) = \phi_{\psi f}(q, p, 0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ip(x-q)} \psi(x - q)^* dx \quad (\text{II.32})$$

Les gaborettes en dimension n s'obtiennent très facilement comme généralisations des gaborettes unidimensionnelles. En utilisant le langage des représentations de carré intégrables, il suffit de considérer le groupe de Weyl-Heisenberg en dimension n , i.e. $G_{WH} \cong \mathbb{R}^{2n} \times S^1$, avec la même loi de groupe qu'en dimension 1. On obtient alors la résolution de l'identité suivante :

$$f = \frac{1}{(2\pi)^n \|\psi\|_2^2} \int_{\mathbb{R}^{2n}} G_f(q, p) e^{ip(x-q)} \psi(x-q) dq dp \quad (\text{II.33})$$

où la transformée de Gabor est donnée par

$$G_f(q, p) = \phi_{\psi f}(q, p, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ip(x-q)} \psi(x-q)^* dx \quad (\text{II.34})$$

II.4.3 Les ondelettes de R. Murenzi

Le problème de la réductibilité de la représentation classique du groupe affine sur $L^2(\mathbb{R})$ se pose avec plus d'acuité encore dans le cas multidimensionnel. Le groupe affine sur \mathbb{R}^n , isomorphe à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$, agit unitairement sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ comme suit :

$$[\pi(b, a) \cdot f](x) = \frac{1}{\sqrt{a^n}} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{II.34})$$

Mais si Ω est un cône quelconque (de sommet l'origine) dans \mathbb{R}^n , on voit aisément que l'espace

$$H_{\Omega}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{Supp}(\hat{f}) \subset \Omega\} \quad (\text{II.35})$$

est invariant par π . Donc π est hautement réductible. Ce problème peut être réglé de deux manières différentes, que nous avons déjà rencontrées dans le cas unidimensionnel.

La première solution revient à utiliser une généralisation de la proposition utilisée dans le cas unidimensionnel et à écrire $L^2(\mathbb{R}^n)$ comme somme hilbertienne de copies de $H^2(\mathbb{R})$, indexées par les éléments de la sphère S^{n-1} . On considère alors une ondelette $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que "sa contribution à chacun des sous-espaces $H^2(\mathbb{R})$ soit constante", ou plus précisément telle que :

$$c_{\psi}(\epsilon) = \int_0^{\infty} \left| \hat{\psi}(a\epsilon) \right|^2 \frac{da}{a} \quad (\text{II.36})$$

soit simultanément différent de zéro, fini et indépendant¹ du vecteur unitaire $\epsilon \in \mathbb{R}^n$. On obtient la résolution de l'identité suivante, que nous avons déjà

¹ Compte tenu de l'invariance par changement d'échelle de la mesure, ceci peut être obtenu en supposant que $|\hat{\psi}(\xi)|^2$ est invariant par rotation. On parlera alors d'ondelette radiale.

rencontré au chapitre II : Pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*} T_f(b, a) \frac{1}{a^{n/2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{db da}{a^n a} \quad (\text{II.37})$$

où

$$T_f(b, a) = \frac{1}{a^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)^* dx$$

Comme nous l'avons vu, cette solution est parfaite tant que l'on ne s'intéresse qu'à des aspects position-échelle, mais souffre de son manque de précision fréquentielle (ou plus précisément de l'absence de variable angulaire dans l'espace des fréquences).

Les ondelettes "avec rotation" de R. Murenzi [16] entrent parfaitement dans le cadre des représentations de carré intégrable. Il suffit d'ajouter aux degrés de liberté de translation et de changement d'échelle une variable de rotation. On considère donc le groupe euclidien inhomogène qu'il note $IG(n)$, donné par le produit semi direct :

$$IG(n) = (\mathbb{R}_+^* \times SO(n)) \times \mathbb{R}^n \quad (\text{II.38})$$

(où $SO(n)$ est le groupe des rotations en dimension n), avec la loi de groupe suivante

$$(a, r, b) \cdot (a', r', b') = (aa', rr', b + ar^{-1} \cdot b) \quad (\text{II.39})$$

La théorie des représentations unitaires de $IG(n)$ est relativement bien connue. La représentation qui nous intéresse est la suivante. L'espace de représentation est $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $IG(n)$ agit comme suit :

$$[\pi(a, r, b) \cdot f](x) = a^{-n/2} f\left(r^{-1} \cdot \frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{II.40})$$

On vérifie aisément que π est une représentation de carré intégrable et la théorie générale lui associe des systèmes d'états cohérents. Si $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfait à la condition d'admissibilité, qui s'écrit ici²

$$0 < c_\psi = \text{vol}(SO(n-1)) \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^n} < \infty, \quad (\text{II.41})$$

on a alors, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \times SO(n)} T_f(b, a, r) \frac{1}{a^{n/2}} \psi\left(r^{-1} \cdot \frac{x-b}{a}\right) \frac{db da}{a^n a} d\mu(r) \quad (\text{II.42})$$

²Le volume du sous-groupe $SO(n-1)$ ne joue aucun rôle dans l'admissibilité de ψ , car les groupes de rotation sont des groupes compacts.

où la transformée en ondelettes est cette fois donnée par :

$$T_f(b, a, r) = \frac{1}{a^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi \left(r^{-1} \cdot \frac{x-b}{a} \right)^* dx \quad (\text{II.43})$$

Si l'on pose $\psi_{(b,a,r)}(x) = [\pi(b, a, r) \cdot \psi](x)$, on voit aisément que :

$$\widehat{\psi_{(b,a,r)}}(\xi) = a^{n/2} e^{i\xi b} \widehat{\psi}(ar^{-1} \cdot \xi) \quad (\text{II.44})$$

de sorte que si $\widehat{\psi}$ est bien localisée au voisinage d'une fréquence $\xi = k_0$, $\widehat{\psi_{(b,a,r)}}$ est elle aussi bien localisée, cette fois au voisinage de la fréquence $\xi = a^{-1}r \cdot k_0$. En faisant varier a et r respectivement dans \mathbb{R}_+^* et dans $SO(n)$, ceci permet de décrire tout l'espace de Fourier. Plus généralement, considérons un groupe de la forme

$$G = H \times \mathbb{R}^n \quad (\text{II.45})$$

où H est un sous-groupe du groupe des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace invariant par H minimal. Il est facile de se convaincre que la représentation suivante de G sur

$$H_{\mathcal{U}}^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n), \text{supp}(\hat{f}) \subset \mathcal{U} \right\}, \quad (\text{II.46})$$

donnée par

$$\pi(h, b) \cdot f(x) = |\det h|^{-n/2} f(h^{-1} \cdot (x - b)), \quad (\text{II.47})$$

est irréductible et unitaire. Pour certains sous-groupes H convenablement choisis, on peut montrer que π est de carré intégrable et conduit ainsi à un système d'ondelettes de $H_{\mathcal{U}}^2(\mathbb{R}^n)$.

Si on prend, par exemple en dimension 2, le cas des matrices diagonales à coefficients positifs :

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+^* \right\} \quad (\text{II.48})$$

la représentation donnée en (II.47) est de carré intégrable, si l'on prend par exemple $\mathcal{U} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, la condition d'admissibilité est donnée par :

$$0 < \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\psi}(\xi, \zeta)|^2 \frac{d\xi d\zeta}{|\xi\zeta|} < \infty \quad (\text{II.49})$$

Ce que l'on obtient dans ce cas est simplement une version "produit tensoriel" des ondelettes bidimensionnelles ; nous verrons dans le chapitre suivant une version algorithmique de ces ondelettes "produit tensoriel".

III CARRÉ INTÉGRABILITÉ, MODULO UN SOUS-GROUPE ET ONDELETTES ASSOCIÉES

III.1 Retour sur le groupe de Weyl-Heisenberg

L'exemple le plus simple, c'est-à-dire le groupe de Weyl-Heisenberg, a déjà été décrit quelques lignes plus haut dans la discussion de la construction de Perelomov. Le résultat de Duflo-Moore s'applique bien entendu encore au groupe de Weyl-Heisenberg polarisé décrit précédemment, mais plus du tout si l'on considère le groupe de Weyl-Heisenberg plein $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, dans lequel on autorise le facteur de phase à appartenir à la droite réelle toute entière et non plus à l'intervalle $[-\pi, \pi]$. On peut aisément se convaincre dans ce cas là qu'aucun élément de $L^2(\mathbb{R})$ n'est admissible. Nous avons pourtant eu l'occasion de signaler que le terme de phase ϕ ne joue strictement aucun rôle dans la construction. C'est pourtant lui qui est le responsable de la divergence des intégrales et qui fait échouer la construction directe des états cohérents à partir de la représentation. Dans un certain sens, on peut dire que "Gabor a été sauvé par la compacité de S^1 ".

III.2 Ondelettes indexées par un espace homogène

Décrivons maintenant le cadre général dans lequel nous allons travailler. Soit G un groupe de Lie localement compact séparable et soit π une représentation unitaire irréductible continue de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} . Soit H un sous-groupe fermé de G , considérons l'espace quotient³ $X = G/H$. Soit μ une mesure quasi-invariante sur X , c'est-à-dire que la transformée de μ par action de G est absolument continue par rapport à μ . Le groupe G est alors canoniquement muni d'une structure d'espace fibré (voir l'annexe B pour une définition), de projection :

$$\Pi : G \rightarrow X \tag{III.1}$$

Pour restreindre la représentation π à X , il est nécessaire d'introduire une section $\sigma : X \rightarrow G$ de cet espace fibré. Il résulte de théorèmes généraux que l'on peut toujours trouver de telles sections qui soient C^∞ par morceaux et Borel intégrables. On considère alors l'application

$$\pi_\sigma : X \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \tag{III.2}$$

définie par

$$\pi_\sigma = \pi \circ \sigma \tag{III.3}$$

³Nous considérons ici le cas des quotients à droite ; les quotients à gauche se traitent de manière tout à fait identique. Dans les exemples discutés par la suite, il peut arriver que pour des raisons pratiques, on considère plutôt l'un ou l'autre des types d'espaces homogènes.

Soit maintenant $\psi \in \mathcal{H}$. On introduit l'opérateur $\mathcal{A}_\sigma : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ défini par :

$$\forall u \in \mathcal{H} \quad \mathcal{A}_\sigma \cdot u = \int_X \langle u, \pi_\sigma(x) \cdot \psi \rangle \pi_\sigma(x) \cdot \psi, d\mu(x) \quad (\text{III.4})$$

Définition

1. On dira que la section σ est strictement admissible si \mathcal{A}_σ est un multiple de l'identité.
2. On dira que la section σ est admissible si \mathcal{A}_σ est un opérateur borné, inversible à inverse borné.
3. Une représentation du groupe G , telle qu'il existe un $\psi \in \mathcal{H}$ et une section admissible, sera dite de carré intégrable modulo H .

III.3 Atomes temps-fréquence : le groupe de Weyl-Heisenberg affine

Nous nous tournons maintenant vers des exemples un peu plus complexes, pour lesquels nous appliquerons la procédure précédemment décrite. Notre premier exemple est le groupe de Weyl-Heisenberg affine, c'est-à-dire le groupe de Weyl-Heisenberg étendu (par produit semi-direct) par des changements d'échelle en dimension 1. Topologiquement :

$$G_{aWH} \cong \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3 \quad (\text{III.5})$$

Algébriquement, il s'agit de produits semi directs, dans la mesure où la dilatation (\mathbb{R}_+^*) agit sur les translations (\mathbb{R}^{2n} ou \mathbb{R}^2) de manière naturelle. La loi de groupe est donnée par

$$\begin{aligned} (q, p, a, r, \phi) \cdot (q', p', a', r', \phi') \\ = (q + ar \cdot q', p + a^{-1}r \cdot p', aa', rr', \phi + \phi' + p(ar^{-1} \cdot q')) \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Pourquoi considérer un tel groupe ? La motivation provient de l'analyse du signal en dimension 1, essentiellement, et est fondée sur la constatation suivante : Les ondelettes effectuent une analyse à largeur de bande relative constante ; en d'autres termes, la largeur de bande d'une ondelette $\psi_{(b,a)}$ (ou sa largeur de bande effective si $\hat{\psi}$ n'est pas à support compact) est proportionnelle à la valeur de la fréquence autour de laquelle elle est localisée. En revanche, les gaborettes, engendrées par translation et modulation, effectuent une analyse à largeur de bande absolue constante, c'est-à-dire que leur largeur de bande ne dépend pas de la fréquence analysée.

Or, étant donné un signal à analyser, rien ne dit *a priori* que l'une ou l'autre des deux méthodes est la plus efficace pour l'analyse. Bien au contraire, on sait

maintenant avec précision (voir [4] par exemple) que, dans le cas des signaux modulés en fréquence, les fréquences instantanées dépendant linéairement du temps sont optimalement analysées par les gaborettes, alors que les ondelettes sont optimales dans le cas des fréquences instantanées qui sont fonction hyperbolique du temps. Nous avons aussi eu l'occasion d'évoquer brièvement ce problème au chapitre V ; certains signaux peuvent être modélisés fidèlement comme superpositions de composantes modulées en amplitude et en fréquence. Or, en fonction de leur largeur de bande locale, il peut arriver que certains de ces signaux soient mieux représentés *localement* par des ondelettes ou des gaborettes (la fonction d'analyse peut faire interagir plusieurs composantes, comme nous l'avons dit au chapitre V). Dans ce cas, on peut avoir besoin de minimiser cette interaction ou, au contraire (comme on le fait en traitement de la parole), de la maximiser pour produire une description plus proche d'un modèle donné (voir [2] par exemple).

On peut donc essayer de concilier ces deux approches et engendrer des théorèmes de représentation de type temps-fréquence fondés, comme les ondelettes, sur un outil de base (l'ondelette mère) et un ensemble élargi de transformations simples (en l'occurrence des translations, dilatations et modulations). Si l'on en revient au cadre général décrit plus haut, il s'agira de travailler sur la base du groupe de Weyl-Heisenberg affine. Dans le cas multidimensionnel, on s'intéressera à une généralisation des ondelettes de R. Murenzi, ce qui implique l'introduction de rotations. L'étape suivante sera l'adaptation de la décomposition au signal, c'est-à-dire la recherche de la représentation la mieux adaptée à la description souhaitée. Ce programme imite, avec une plus grande souplesse et dans une approche plus géométrique (mais au prix d'une perte de la puissance algorithmique), la méthode des paquets d'ondelettes introduite par R. Coifman et ses collaborateurs.

Nous allons donc montrer comment construire des systèmes d'ondelettes à fréquence centrale et largeur de bande variable et adaptable. La représentation que nous considérerons n'est, bien entendu, pas de carré intégrable et il est nécessaire d'utiliser le formalisme précédent. Nous allons voir que dans certains cas, la section du fibré $G \rightarrow X$ fournit la fonction qui adapte la largeur de bande à la fréquence centrale des ondelettes.

Reprenons donc le groupe de Weyl-Heisenberg affine G_{aWH} . Pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous nous limiterons au cas unidimensionnel, renvoyant à [11] pour le traitement du cas multidimensionnel. Les représentations unitaires irréductibles de G_{aWH} peuvent être complètement classifiées (à équivalence unitaire près, voir [11]) et nous nous restreindrons à la représentation suivante :

$$U(b, \omega, a, \varphi) \cdot f(x) = e^{i\{\varphi + \omega(x-b)\}} \frac{1}{\sqrt{a}} f\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (\text{III.7})$$

Un calcul immédiat montre le lemme suivant :

Lemme 1 \mathcal{U} n'est pas de carré intégrable.

Bien que ces représentations ne soient pas de carré intégrable, elles sont tout de même intéressantes pour notre propos. La preuve immédiate du lemme 1 montre en effet que la divergence de l'intégrale (II.1) pour la représentation considérée provient d'un domaine d'intégration de dimension "trop grande" (nous reviendrons plus loin sur cette notion⁴), qu'il convient donc de réduire. Dans la droite ligne du programme défini plus haut, il est ainsi naturel de considérer des quotients de G_{aWH} . Considérons par exemple le sous-groupe suivant :

$$H = \{(0, 0, a, \varphi), a \in \mathbb{R}^+, \varphi \in [-\pi, \pi]\}, \quad (\text{III.8})$$

l'espace quotient :

$$X = G_{aWH}/H, \quad (\text{III.9})$$

ainsi qu'une section $\sigma : X \rightarrow G_{aWH}$. En paramétrant X par des éléments $\{(b, \omega) \in \mathbb{R}^2\}$, nous noterons donc

$$\sigma(b, \omega) = (b, \omega, \alpha(b, \omega), \Phi(b, \omega)) \quad (\text{III.10})$$

et

$$\mathcal{U}_\sigma = \mathcal{U} \circ \sigma \quad (\text{III.11})$$

la restriction associée.

Proposition 2

(i) Avec les notations précédentes, l'opérateur \mathcal{A}_σ défini en (III.4) est un opérateur de convolution, donné par le multiplicateur

$$m_\sigma(\xi) = \int \left| \hat{\psi}(\alpha(\omega)(\xi - \omega)) \right|^2 |\alpha(\omega)| d\omega \quad (\text{III.12})$$

(ii) σ est admissible si il existe $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que le multiplicateur $m_\sigma(\xi)$ soit essentiellement borné inférieurement et supérieurement, i.e. qu'il existe deux constantes A, B telles que

$$0 < A \leq m_\sigma(\xi) \leq B < \infty \quad p.p. \quad (\text{III.13})$$

Preuve : Le calcul formel est immédiat ; une preuve plus complète peut être trouvée dans [14] par exemple.

⁴L'information importante est ici qu'il existe un espace "temps-fréquence" naturellement associé à la représentation considérée ; cet espace "temps-fréquence" est naturellement homogène par rapport à l'action du groupe. Nous verrons que les divergences apparaissent dès que la représentation est telle que chaque point de cet espace est "visité" une infinité de fois.

Remarque : Nous avons déjà discuté ces décompositions, ainsi que leurs analogues discrètes, au chapitre précédent.

Exemples : Parmi les exemples classiques, on peut citer un certain nombre de sections σ :

1) La section constante

$$\alpha(b, \omega) = \alpha_0 \quad (\text{III.14})$$

conduit bien évidemment aux gaborettes usuelles.

2) On voit facilement que les sections “affines”

$$\alpha_{aff}(b, \omega) = (\lambda\omega + \mu)^{-1} \quad (\text{III.15})$$

(ou $|\lambda\omega + \mu|^{-1}$) conduisent à une analyse par des ensembles de fonctions, copies dilatées et translatées d’une fonction unique (dans ce cas une copie modulée de la fonction $\psi(x)$), donc à une analyse très proche de l’analyse par ondelettes.

3) Dans les deux cas précédents, on voit facilement que \mathcal{A}_σ est un multiple de l’identité ; ces deux sections sont donc strictement admissibles. Plus généralement, on introduit entre les deux une famille de “sections interpolantes” de la forme

$$\alpha_\nu(b, \omega) = |\lambda\omega + \mu|^\nu \quad (\text{III.16})$$

qui ont la propriété de fournir une transition continue entre les deux sections précédentes (à la valeur absolue près). L’intérêt de ces sections est que l’on peut les voir comme une famille à un paramètre (le paramètre ν , les autres étant fixés), qui permet donc de rechercher la valeur “optimale” (dans un sens à préciser, par exemple au sens du minimum d’entropie, comme le font R. Coifman et ses collaborateurs) pour un signal donné (voir par exemple [17]).

4) Une autre famille “naturelle” de sections est donnée par les sections σ qui se comportent comme (III.14) à basse fréquence et (III.15) à haute fréquence. Ce type d’ondelettes a parfois été utilisé pour la modélisation du système auditif humain (voir [2]).

Etant donnée une section admissible σ et une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que (III.13) soit valide, on peut introduire

$$\psi_{(b,\omega)} = \mathcal{A}_\sigma^{-1/2} \cdot \mathcal{U}_\sigma(b, \omega) \cdot \psi \quad (\text{III.17})$$

où $\mathcal{A}_\sigma^{-1/2}$ est l’opérateur de convolution défini par le multiplicateur $m_\sigma^{-1/2}$. On a immédiatement :

Proposition 3 Avec les notations précédentes, toute $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée comme :

$$f = \int_X T_f^\sigma(b, \omega) \psi_{(b, \omega)} db d\omega \quad (\text{III.18})$$

où

$$T_f^\sigma(b, \omega) = \langle f, \psi_{(b, \omega)} \rangle \quad (\text{III.19})$$

Remarque 1 : On a bien entendu toujours une formule de type Plancherel, exprimant la conservation de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |T_f^\sigma(b, \omega)|^2 db d\omega = \|f\|^2 \quad (\text{III.20})$$

En revanche, la restriction de \mathcal{U} à X se traduit par la disparition des propriétés de covariance de la représentation par rapport à l'action de G_{aWII} . En effet,

$$T_{\mathcal{U}(b', \omega', a', \varphi') \cdot f}^\sigma(b, \omega) = \langle f, \mathcal{U}(b', \omega', a', \varphi')^{-1} \mathcal{A}_\sigma^{-\frac{1}{2}} \mathcal{U}_\sigma(b, \omega) \cdot \psi \rangle$$

n'est en général pas lié de façon simple à $T_f^\sigma(b, \omega)$. On parle parfois dans ce cas de covariance avec torsion (voir par exemple [1]), que l'on exprime dans le cas général sous la forme suivante :

$$T_{(\mathcal{A}_\sigma^*)^{1/2} \mathcal{U}(g)(\mathcal{A}_\sigma^*)^{-1/2} \cdot f}^\sigma(x) = T_f^\sigma(g^{-1} \cdot x) \quad (\text{III.21})$$

Remarque 2 : Retour sur l'adaptativité. Si nous considérons une famille donnée de sections, par exemple la famille de sections interpolantes, nous disposons donc d'une famille de représentations des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Il est alors naturel de se reposer le problème de sélection de "la représentation la mieux adaptée à $f(x)$ " dans la famille considérée. Comme nous l'avons déjà signalé, l'optimalité s'entend par rapport à un critère choisi à l'avance. Nous renvoyons à [20] et [22] pour un exemple de tels critères.

IV ESPACES DE PHASES

Nous n'avons vu jusqu'à présent que des exemples pour lesquels l'espace étudié était $L^2(\mathbb{R}^n)$ et l'espace image de la transformée temps-fréquence était de la forme $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ ou $L^2(\mathbb{R}^{2n} \times \Omega)$, où Ω est un espace compact. L'avantage du formalisme que nous décrivons est qu'il permet de s'adapter à des situations géométriquement un peu plus complexes.

Nous allons en effet replacer les décompositions temps-fréquence que nous avons étudiées dans un contexte plus géométrique. Ceci nous permettra de mettre en lumière le rôle joué par le plan temps-fréquence ou espace des phases,

ainsi que son statut géométrique. Nous allons voir comment l'espace des phases peut être construit directement à partir de l'action du groupe de covariance sur l'espace de représentation considéré et comment la condition de carré-intégrabilité modulo H est souvent réalisée sur cet espace des phases.

Les démonstrations ne seront le plus souvent qu'ébauchées dans cette section, une description précise dépasse le cadre de ce texte, et nous renvoyons à [1] et [20] pour un traitement plus complet.

IV.1 Théorie de Kirillov et espace des phases

Décrivons tout d'abord la méthode des orbites et la construction de l'espace des phases qui lui est associée. Soit G un groupe de Lie localement compact séparable. G est muni d'une action de lui-même, appelée action adjointe et donnée par :

$$ad(h) : g \in G \rightarrow ad(h) \cdot g = hgh^{-1} \in G \quad (\text{IV.1})$$

Par différentiation au voisinage de l'identité, cette action peut se transporter sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G :

$$Ad(h) : X \in \mathcal{G} \rightarrow Ad(h) \cdot X = hXh^{-1} \in \mathcal{G} \quad (\text{IV.2})$$

Ad est aussi appelée action adjointe. Soit \mathcal{G}^* le dual de \mathcal{G} . On peut transporter Ad sur \mathcal{G}^* par dualité :

$$\begin{aligned} Ad^*(h) : X^* \in \mathcal{G}^* &\rightarrow Ad^*(h) \cdot X^* \in \mathcal{G}^* \\ \langle Ad^*(h) \cdot X^*, Y \rangle &= \langle X^*, Ad(h) \cdot Y \rangle \quad \forall Y \in \mathcal{G} \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

Soit maintenant $F \in \mathcal{G}^*$. On appellera orbite coadjointe (ou espace des phases) associée à F l'orbite O_F de G à travers F par l'action coadjointe :

$$O_F = Ad^*(G) \cdot F \quad (\text{IV.4})$$

On peut alors montrer (voir [12] par exemple) que l'espace des phases O_F est un espace de dimension paire. Il est clair que O_F est, lui aussi, muni d'une action de G , qui en fait un espace homogène pour G . Ainsi, on a

$$O_F \cong G/G_F \quad (\text{IV.5})$$

où G_F n'est autre que le stabilisateur de F , c'est-à-dire

$$G_F = \{g \in G, Ad^*(g) \cdot F = F\} \quad (\text{IV.6})$$

Considérons maintenant l'algèbre de Lie \mathcal{G} de G . Il est possible de la munir de la forme bilinéaire suivante, notée $B_F(\cdot, \cdot)$ et définie par :

$$B_F(X, Y) = \langle F, [X, Y] \rangle \quad (\text{IV.7})$$

Définition 3 On appellera polarisation réelle de G associée à $F \in \mathcal{G}^*$ une sous-algèbre de Lie \mathcal{P} de \mathcal{G} maximale telle que :

$$B_F(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

La théorie de Kirillov permet dans certains cas d'établir une correspondance entre les orbites coadjointes et les classes d'équivalence unitaires de représentations de groupes. Ceci est vrai en particulier dans le cas des groupes nilpotents simplement connexes. Il est bien connu que de tels groupes sont monomiaux, c'est-à-dire que toute représentation unitaire irréductible est unitairement équivalente à une représentation induite à partir d'un caractère d'un sous-groupe fermé. C'est ce qu'exprime le résultat suivant ; nous renvoyons à [12] et [19] pour la démonstration.

Théorème 3 Soit G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe et soit \mathcal{G} son algèbre de Lie. Alors, il existe une correspondance biunivoque entre les classes d'équivalence unitaires de représentations irréductibles de G et les orbites coadjointes de G . Plus précisément, à toute représentation unitaire irréductible π de G , on peut associer une orbite coadjointe O_π , telle que π soit unitairement équivalente à :

$$\text{Ind}_{e_{\mathcal{H}}}^G(e^{i\langle F, \cdot \rangle}) \quad (\text{IV.9})$$

où $F \in O_\pi$ et \mathcal{H} est une polarisation réelle de \mathcal{G} . De plus, π est indépendante de \mathcal{H} et de $F \in \mathcal{G}^*$.

Bien entendu, la classe des groupes nilpotents est extrêmement restreinte. Néanmoins, il est possible de prouver des théorèmes similaires pour d'autres classes de groupes (par exemple les groupes dits exponentiels ou les groupes résolubles de type I, voir par exemple [3]). La polarisation \mathcal{P} doit, dans ce cas, satisfaire à une condition supplémentaire, appelée "condition de Pukanszky" (voir le complément C pour plus de précisions). En pratique, si le groupe considéré n'appartient à aucune de ces classes, il faut procéder au cas par cas.

IV.2 Retour sur les exemples précédents

Reprenons les exemples que nous avons étudiés jusqu'à présent.

IV.2.1 Les ondelettes unidimensionnelles

Le cas du groupe affine est le plus simple. Il est facile de voir que les représentations définies en (II.20-II.21) sont toutes deux induites à partir d'un caractère :

$$\chi(b, 1) = e^{ib}$$

de $P = \{(b, 1), b \in \mathbb{R}\} \subset G_{aff}$. De plus, un calcul simple (voir le complément C) montre que l'espace des phases associé est isomorphe au groupe affine lui-même. Ainsi les deux formalismes coïncident-ils dans ce cas précis.

IV.2.2 Les gaborettes

Le cas du groupe de Weyl-Heisenberg est légèrement plus complexe. En effet, il est notoire que la représentation (II.29) est induite à partir du caractère

$$\chi_\lambda(p, \varphi) = e^{i\lambda\varphi}$$

(où $\lambda \in \mathbb{Z}$) du sous-groupe $\{(0, p, \varphi), p \in \mathbb{R}^n, \varphi \in S^1\} \subset G_{WH}$. L'espace des phases associé est isomorphe (voir le complément C ou [11] pour le calcul complet) à \mathbb{R}^{2n} ou, plus précisément,

$$O_F \cong G_{WH}/S^1 \cong \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{IV.10})$$

La construction des gaborettes que nous avons donnée au chapitre II correspond à cet espace des phases ; nous avons en effet construit des gaborettes sans tenir compte du facteur de phase ϕ dans le groupe G_{WH} . Le résultat est une représentation temps-fréquence qui n'est plus pleinement covariante par rapport au groupe de départ, mais qui est covariante à une phase près. On retrouve bien là le résultat classique.

IV.3 Les ondelettes multidimensionnelles

Un autre exemple simple est fourni par les ondelettes "avec rotations" introduites par R. Murenzi, que nous avons également étudiées au chapitre II (et utilisées à la fin du chapitre V). Un calcul direct (voir par exemple [11]) montre que l'espace des phases associé à la représentation considérée du groupe $(\mathbb{R}_+^* \times SO(n)) \times \mathbb{R}^n$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est de la forme

$$O_F \cong (\mathbb{R}_+^* \times SO(n)) \times \mathbb{R}^n / SO(n-1) \cong \mathbb{R}_+^* \times S^{n-1} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \quad (\text{IV.11})$$

Rappelons que dans ce cas, $SO(n-1)$ étant compact et donc de volume fini, $G \neq O_F$ n'a pas de conséquence sur la carré-intégrabilité de la représentation. On vérifie facilement qu'il existe des sections admissibles. De plus, si l'ondelette $\psi(x)$ est elle-même invariante par $SO(n-1)$, il existe des sections strictement admissibles.

IV.3.1 Les paquets continus d'ondelettes

Reprenons pour finir le cas du groupe de Weyl-Heisenberg affine G_{aWH} . Dans ce cas l'espace des phase associé à la représentation étudiée est de la forme :

$$O_F \cong G_{aWH}/(\mathbb{R}_+^* \times S^1) \cong \mathbb{R}^2 \quad (\text{IV.12})$$

ce qui est l'espace quotient que nous avons utilisé pour la construction des théorèmes de représentation temps-fréquence. De nouveau, il existe des sections admissibles, et même strictement admissibles, associées.

IV.4 Les gaborettes sur la sphère

Voyons maintenant le cas de la sphère. Nous voulons construire une analyse de Fourier locale sur la sphère. Pour généraliser l'analyse de Gabor usuelle, nous avons donc besoin d'analogues des translations et des modulations. Les translations sur la sphère ne sont autres que les rotations de $SO(n)$. En revanche, pour les modulations, revenons-en à la notion physique de fréquence, c'est-à-dire à une mesure de degré d'oscillations ou de distance entre deux oscillations consécutives. Ceci implique un calcul de dérivée, de sorte que l'on est naturellement conduit à passer d'un point sur la sphère et son voisinage à l'espace tangent à la sphère en ce point (plus précisément l'espace cotangent, dual de l'espace tangent). Un candidat naturel pour l'espace de Fourier en ce point est donc l'espace cotangent à la sphère et l'espace des phases est naturellement identifié au fibré cotangent de la sphère. Les modulations (en un point de la sphère) peuvent maintenant être représentées par des translations dans l'espace de Fourier correspondant, c'est-à-dire des éléments de \mathbb{R}^{n-1} . Pour avoir des modulations en tous points, il faut donc considérer \mathbb{R}^n . En ce qui concerne la structure de groupe, notons qu'un déplacement sur la sphère (c'est-à-dire une rotation) entraîne un changement d'espace cotangent (qui est lui aussi tourné). Un bon candidat pour engendrer l'analyse de Fourier à fenêtre sur la sphère est donc le groupe euclidien $E(n)$, qui présente ces caractéristiques :

$$E(n) = SO(n) \times \mathbb{R}^n \quad (\text{IV.13})$$

où le produit semi direct indique précisément que les rotations agissent de façon naturelle sur les translations. De plus, nous savons que le groupe euclidien admet des représentations unitaires irréductibles sur $L^2(S^{n-1})$, de la forme (voir dans le complément C) :

$$[\mathcal{U}(r, q) \cdot f](s) = e^{i\langle s, q \rangle} f(r^{-1} \cdot s) \quad (\text{IV.14})$$

On montre dans le complément C comment obtenir cette représentation à partir de certaines orbites coadjointes de $E(n)$, *i.e.* les orbites associées à $x_0^* \in \mathbb{R}$ et $R_0^* = 0$. Avec les notations du complément C, on choisit un système de coordonnées identifiant x_0^* avec un vecteur e_n d'une base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n . On notera Ω la demi-sphère supérieure :

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1}, x_n > 0\}$$

Alors l'espace des phases associé à la représentation \mathcal{U} est donné par :

$$O_F = E(n) / (\mathbb{R}x_0^* \times SO(n-1))$$

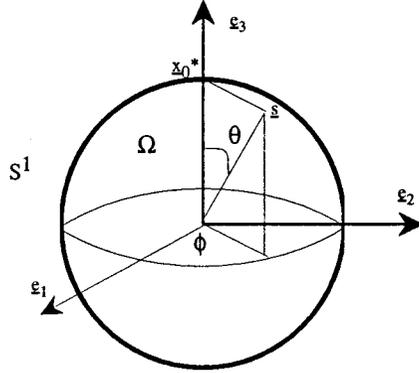


Figure VII.1 : Ondettes sur S^2 : géométrie du problème.

Pour simplifier les choses nous allons nous restreindre au cas de la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, que nous paramétrons par les angles d'Euler θ, ϕ (voir la figure 1 pour une représentation de la géométrie du problème). Etant donnés trois angles d'Euler θ, ϕ, ω , on leur associe une matrice de rotation

$$r(\phi, \theta, \omega) = r_{12}(\phi) \cdot r_{23}(\theta) \cdot r_{12}(\omega), \quad (\text{IV.15})$$

ainsi qu'un élément de la sphère $\lambda(\phi, \theta)$, défini par :

$$\lambda(\phi, \theta) = r(\phi, \theta, \omega) \cdot x_0^* = r_{12}(\phi) \cdot r_{23}(\theta) \cdot x_0^* \quad (\text{IV.16})$$

Rappelons aussi les expressions des mesures invariantes par rotation sur le groupe $SO(3)$ ($d\mu$) et sur la sphère S^2 ($d\eta$) :

$$d\mu(r) = d\mu(\phi, \theta, \omega) = d\eta(\phi, \theta)d\omega = \sin\theta d\phi d\theta d\omega \quad (\text{IV.17})$$

Soit σ une section du fibré $E(3) \rightarrow SO(3) \times \mathbb{R}^2$ et notons \mathcal{U}_σ la composition de \mathcal{U} par σ . Nous utiliserons l'espace quotient suivant :

$$E(3)/\mathbb{R} \cong SO(3) \times \mathbb{R}^2$$

qui contient $\mathcal{O}_\mathcal{F}$.

Soit $\psi \in L^1(S^2)$, à support dans Ω et considérons la transformation en ondelettes suivante : Si $f \in L^2(S^2)$ et si $r = r(\alpha, \beta, \gamma) \in SO(3)$ et $q \in \mathbb{R}^2$:

$$T_f(r, q) = \langle f, \mathcal{U}_\sigma(r, q)^{-1} \cdot \psi \rangle$$

$$= \int_{\Omega} e^{i(\lambda(\phi, \theta), q)} \psi(\phi, \theta)^* f(\phi', \theta') d\eta(\phi, \theta), \quad (\text{IV.18})$$

où (ϕ', θ') sont les angles d'Euler de $r^{-1} \cdot \lambda(\alpha, \beta)$:

$$r^{-1} \cdot \lambda(\phi, \theta) = \lambda(\phi', \theta')$$

En utilisant la démarche précédente, on peut alors démontrer le résultat suivant :

Théorème 4 Soit $\psi \in L^2(S^2)$ telle que $\text{Supp}(\psi) \subset \Omega$ et

$$0 \neq c_{\psi} = 8\pi^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\psi(\phi, \theta)|^2}{\cos \theta} d\phi d\theta < \infty \quad (\text{IV.19})$$

Alors, l'application :

$$f \in L^2(S^2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{c_{\psi}}} T_f \in L^2(SO(3) \times \mathbb{R}^2) \quad (\text{IV.20})$$

est une isométrie.

Preuve : Supposons l'équation (IV.19) vérifiée. D'après l'inégalité de Young, $T_f \in L^2(\mathbb{R}, dq) \forall \theta$. Un calcul direct (fondé sur le changement de variable $\lambda \rightarrow v(\lambda)$, où $v(\lambda)$ est la projection de $\lambda \in \Omega$ sur le disque unité $U \subset \mathbb{R}^2$ et l'égalité de Plancherel) conduit à :

$$\begin{aligned} \|T_f\|^2 &= 4\pi^2 \int_{\Omega} \int |\psi(\phi, \theta)|^2 |f(\phi', \theta')|^2 \frac{d\eta(\phi, \theta)}{J(\lambda)} d\mu(r) \\ &= 4\pi^2 \int_{\Omega} \int_{SO(3)} |f(\phi', \theta')|^2 \frac{|\psi(\phi', \theta')|^2}{\cos \theta} d\phi d\theta d\mu(r) \end{aligned}$$

Ici $J(\lambda)$ n'est autre que le Jacobien du changement de variable $\lambda \rightarrow v(\lambda)$. Comme nous l'avons vu, la mesure invariante $d\mu$ sur $SO(3)$ peut être factorisée en produit de la mesure invariante $d\eta$ sur S^2 par la mesure de Haar sur le stabilisateur de $\lambda(\alpha, \beta)$, qui est isomorphe à $SO(2)$. Ainsi

$$\int_{SO(3)} |f(\phi', \theta')|^2 d\mu(r) = 2\pi \|f\|_{L^2(S^2)}^2 \quad (\text{IV.21})$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

Il est utile de sortir du cadre quelque peu abstrait dans lequel se situe ce résultat et de le réexprimer avec des formules explicites. Pour cela, exprimons tout d'abord $\lambda(\phi, \theta)$ sous forme de coordonnées cartésiennes

$$\lambda(\phi, \theta) = (\sin \theta \sin \phi, -\sin \theta \cos \phi, \cos \theta)$$

Rappelons que θ et $\pi/2 - \phi$ représentent la partie radiale des coordonnées sphériques de $\lambda(\phi, \theta)$. On en déduit que le facteur $q \cdot \lambda(\phi, \theta)$, intervenant dans l'équation (IV.18), vaut :

$$q \cdot \lambda(\phi, \theta) = q_1 \sin \theta \sin \phi - q_2 \sin \theta \cos \phi$$

Utilisant de plus le fait que :

$$r(\phi, \theta, \omega)^{-1} = r(-\omega, \pi - \theta, -\phi)$$

on en déduit les expressions explicites des angles θ' et ϕ' :

$$\phi' = -\gamma + \arctan \left(\frac{\sin \theta \sin(\phi - \alpha)}{-\cos \beta \sin \theta \cos(\phi - \alpha) + \sin \beta \cos \theta} \right)$$

$$\theta' = \arccos(-\cos \theta \cos \beta - \sin \theta \sin \beta \cos(\phi - \alpha))$$

Ces formules rendent le théorème 4 directement utilisable.

Remarques

1) On montre un résultat analogue au théorème 4 dans le cas du groupe euclidien bidimensionnel $E(2)$, donc des fonctions sur le cercle S^1 . On obtient alors des décompositions de fonctions de $L^2(S^1)$ sur des états cohérents de la forme :

$$\psi_{(\alpha, q)}(\theta) = e^{iq \sin(\alpha + \theta)} \psi(\alpha + \theta) \quad (\text{IV.22})$$

où $\psi(\alpha)$ est une fonction à support compact sur le demi-cercle. Dans ce cas, l'espace des phases est paramétré par $(\alpha, q) \in S^1 \times \mathbb{R}$. La résolution de l'identité s'écrit alors

$$f = \frac{1}{c_\psi} \int_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}} T_f(\alpha, q) \psi_{(\alpha, q)} d\alpha dq \quad (\text{IV.23})$$

2) Dans le cas bidimensionnel, nous avons considéré un espace quotient qui n'est pas l'espace des phases lui-même, mais le contient. On peut néanmoins se ramener à une représentation "temps-fréquence" plus naturelle en faisant (comme nous l'avons fait pour les ondelettes sur \mathbb{R}^n , $n > 2$) une hypothèse de symétrie sur ψ . Si ψ est invariante sous l'action du sous-groupe $SO(2)$ qui stabilise x_0^* , alors on vérifie aisément que ce sous-groupe se factorise complètement dans toutes les équations. On obtient donc une transformation de Fourier locale sur la sphère de la forme :

$$T : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2 \times \mathbb{R}^2) \quad (\text{IV.24})$$

3) Le cas multidimensionnel est en tout point similaire au cas bidimensionnel (voir [21] par exemple). Le théorème de représentation que l'on obtient a la même forme que le théorème 4. De plus, en supposant une ondelette ψ invariante par le sous-groupe $SO(n-1)$, on se ramène une nouvelle fois à l'espace des phases.

4) Il est aussi envisageable de construire des représentations de type “temps-fréquence” sur des variétés plus générales que les sphères. Si la variété en question est homogène par rapport à l’action d’un certain groupe de transformations, le langage et les méthodes décrits dans ce chapitre peuvent encore s’appliquer. Si tel n’est plus le cas, des transformations de type “ondelettes” peuvent encore être construites, mais il n’est plus possible de donner un sens global aux propriétés de covariance.

Le théorème 4 permet l’utilisation de méthodes de type “temps-fréquence” pour des signaux définis sur des sphères et non plus sur \mathbb{R}^n . On peut notamment développer dans ce cadre un analogue des techniques du chapitre V : caractérisation de signaux définis sur la sphère et auxquels on peut associer une fréquence (ou vecteur d’onde) local (voir [21] pour un exemple simple dans le cas du cercle). Des applications en géophysique et astronomie sont envisageables.

V COMMENTAIRES ET RÉFÉRENCES

Nous venons de décrire les représentations temps-fréquence linéaires dans une perspective plus géométrique que ce que l’on fait habituellement. Le but était principalement de montrer que la notion de “temps-fréquence” ou d’espace des phases pouvaient aussi être prises dans un sens plus géométrique, faisant directement intervenir des propriétés de covariance. Cette approche a aussi le mérite de lier ce type de problématique à un domaine différent, à savoir la mécanique quantique (ces aspects étaient déjà implicites dans les premiers travaux d’A. Grossmann et ses collaborateurs [9]), puisque l’approche que nous avons suivie est très proche de certaines procédures de quantification (quantification géométrique et quantification par états cohérents, voir [13]).

L’identification des représentations temps-fréquence avec les représentations de carré intégrable a été faite dans [9] ; les relations d’orthogonalité avaient été démontrées par Godement [8] pour le cas unimodulaire, puis par Carey [5] et Duffo et Moore [7] dans le cas général. Le cas du groupe de Weyl-Heisenberg est traité en détail dans [19].

Le passage aux représentations de carré intégrable modulo un sous groupe a été proposé initialement par Ali, Antoine et Gazeau dans [1], puis repris plus tard par divers auteurs, en particulier [11], [6], [20], [21]. L’introduction de l’espace des phases, naturelle dans un contexte de physique quantique, semble être due dans le contexte des ondelettes à [6] et [11].

- [1] S.T. Ali, J.P. Antoine, J.P. Gazeau, “Square-Integrability of Group Representations on Homogeneous Spaces I, Reproducing Triples and Frames”, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **55** (1991) p.829-856, “Square-Integrability of Group Representa-

- tions on Homogeneous Spaces II, Generalized square-Integrability and Equivalent Families of Coherent States”, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **55** (1991) p. 860-890.
- [2] C. d’Alessandro, D. Beautemps, “Représentation et modification du signal de parole par transformée en ondelettes utilisant des contraintes auditives”, Preprint LIMSI, Orsay (1990).
- [3] L. Auslander, B. Kostant, “Quantization and Unitary Representations of Solvable Lie Groups”, *Bull. A.M.S.*, **73** (1967) p. 692-695.
- [4] B. Boashash, “Time-Frequency Signal Analysis”, dans *Advances in Spectrum Analysis*, S. Haykin Ed., Prentice-Hall (1990) p. 418.
- [5] A.L. Carey, “Square-Integrable Representations of Non-Unimodular groups”, *Bull. Austr. Math. Soc.*, **15** (1976) p. 1.
- [6] S. De Bièvre, “Coherent States over Symplectic Homogeneous Spaces”, *J. Math. Phys.*, **30** (1989) p. 1401-1407.
- [7] M. Duflou, C.C. Moore, “On the Regular Representation of a Non-Unimodular Locally Compact Group”, *J. Funct. An.*, **21** (1976) p. 209.
- [8] R. Godement, “Sur les relations d’orthogonalité de V. Bargmann”, *C. R. Acad. Sci.*, **255** (1947) p. 521-523, 657-659.
- [9] A. Grossmann, J. Morlet, T. Paul, “Transforms Associated to Square-Integrable Group Representations, I : General Results”, *J. Math. Phys.*, **26** (1985) p. 2473, II “Examples”, *Ann. I.H.P.*, **45** (1986) p. 293.
- [10] A. Guichardet, “Théorie de Mackey et méthode des orbites selon M. Duflou”, *Expo. Math.*, **3** (1985) p. 303-346.
- [11] C. Kalisa, B. Torrèsani, “ N -Dimensional Affine Weyl-Heisenberg Wavelets”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, **59** (1993) p. 201-236.
- [12] A. Kirillov, *Eléments de la théorie des représentations*, Editions MIR, Moscou (1974).
- [14] J.A. Hogan, J.D. Lakey, “Extensions of the Heisenberg Group by Dilations and Frames”, *Applied and Computational Harmonic Analysis* (1995).
- [15] G. Mackey, *Theory of Unitary Group Representations*, Univ. of Chicago Press (1976).
- [16] R. Murenzi : “Transformée en ondelettes multidimensionnelle et application à l’analyse d’images”, Thèse, Louvain-la-Neuve (1989).
- [17] B. Ravera, “Analyse temps-fréquence et temps-échelle de signaux de communication”, Rapport interne ENSIA-Thomson-CSF (1992).
- [18] P. Reynaud, B. Torrèsani, “Paquets continus d’ondelettes et décomposition optimale”, *Actes de la 13^e conférence GRETSI*, Juan-Les-Pins (1991) p. 29-32.
- [19] W. Schempp, “Harmonic Analysis on the Heisenberg Nilpotent Lie group”, *Pitman Research notes in Mathematical series*, **147** (1986).
- [20] B. Torrèsani, “Time-Frequency Representations : Wavelet Packets and Optimal Decomposition”, *Ann. Inst. H. Poincaré, Physique Théorique*, **56** (1992) p. 1.
- [21] B. Torrèsani, “Time-Frequency Decompositions : Local Fourier Analysis on Spheres”, Preprint CPT-93/P.2878.
- [22] M.V. Wickerhauser, *Adapted Waveform Analysis from Theory to Software*, A.K. Peters Publ. Comp. (1994).

VI COMPLÉMENT C

VI.1 Quelques calculs d'espace des phases

Nous donnons dans ce complément quelques exemples illustrant le calcul de l'espace des phases associé à une représentation donnée. Nous nous restreindrons à quelques cas particuliers, contenant les exemples que nous avons traités dans le corps du texte. Ce complément est cependant très technique et sa lecture n'est aucunement nécessaire à la compréhension du corps du chapitre VII.

VI.1.1 Le groupe de Weyl-Heisenberg affine unidimensionnel

Commençons par décrire le groupe de Weyl-Heisenberg affine en dimension n , pour fixer nos notations. En dimension n , le groupe de Weyl-Heisenberg affine est topologiquement isomorphe à :

$$G_{aWH} \cong \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}_+^* \times SO(n) \quad (\text{C.1})$$

et possède la structure d'un produit semi direct du groupe de Weyl-Heisenberg n -dimensionnel par $\mathbb{R}_+^* \times SO(n)$. L'élément générique est de la forme

$$g = (q, p, a, r, \varphi), \quad q, p \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}_+^*, \varphi \in \mathbb{R}, \rho \in SO(n) \quad (\text{C.2})$$

la loi de groupe étant donnée par :

$$(q, p, a, r, \varphi) \cdot (q', p', a', r', \varphi') = (q + ar \cdot q', p + a^{-1}r \cdot p', aa', r \cdot r', \varphi + \varphi' + p \cdot (ar \cdot q')) \quad (\text{C.3})$$

G_{aWH} peut être réalisé comme groupe de matrices de la façon suivante (la loi de groupe étant la multiplication des matrices) :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & {}^t[ar^{-1} \cdot p] & \varphi \\ 0 & [ar] & [q] \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

(Ici le symbole “ t ” représente la transposition vecteur colonne \rightarrow vecteur ligne.) L'algèbre de Lie \mathcal{G}_{aWH} de G_{aWH} peut, elle aussi, être représentée comme algèbre de Lie de matrices (avec le commutateur et l'addition des matrices comme lois) de la façon suivante : Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $R \in so(n)$, on pose $R_\lambda = R + \lambda$. Alors

$$\mathcal{G}_{aWH} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^t\xi & t \\ 0 & R\lambda & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \xi, x \in \mathbb{R}^n, \lambda, t \in \mathbb{R}, R \in so(n) \right\} \quad (\text{C.5})$$

\mathcal{G}_{aWH} est sous-tendue par les matrices suivantes :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, (P_i)_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu,0}\delta_{\nu,i+1}$$

$$Q_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, (Q_i)_{\mu}^{\nu} = \delta_{\nu,0}\delta_{\mu,i+1}$$

$$J_j^i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, (J_j^i)_{\mu}^{\nu} = \delta_{\nu,j+1}\delta_{\mu,i+1} - \delta_{\mu,j+1}\delta_{\nu,i+1}$$

Ainsi, tout élément $X \in \mathcal{G}_{aWH}$ peut être écrit sous la forme :

$$X = x^i \cdot Q_i + \xi^i \cdot P_i + \lambda K + R_i^j \cdot J_j^i + tT \quad (\text{C.6})$$

où $\lambda, t \in \mathbb{R}$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ et les R_i^j sont les coefficients d'une matrice de $so(n)$, que l'on notera R par la suite.

Le groupe de Weyl-Heisenberg affine unidimensionnel possède une structure beaucoup plus simple que le groupe multidimensionnel. Il est en effet résoluble, de sorte que la méthode des orbites s'applique. La première étape consiste en calcul de l'action adjointe du groupe sur son algèbre de Lie. Soit $(q, p, a, \varphi) \in \mathcal{G}_{aWH}$ et soient (x, ξ, λ, t) les coordonnées d'un élément $x \in \mathcal{G}_{aWH}$ dans la base $\{Q, P, K, T\}$. Un calcul simple montre que :

$$Ad(g) \cdot X = gXg^{-1} = (ax - \lambda q, a^{-1}\xi + \lambda p, \lambda, t + apx - a^{-1}q\xi - pq\lambda) \quad (\text{C.7})$$

de sorte que $Ad(g)$ a la réalisation matricielle suivante :

$$Ad(g) = \begin{pmatrix} a & 0 & -q & 0 \\ 0 & a^{-1} & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ap & -a^{-1}q & -pq & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Par rapport à la base duale $\{Q^*, P^*, K^*, T^*\}$, on en déduit l'action coadjointe suivante :

$$Ad^*(g) = {}^t Ad(g^{-1}) = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 & -p \\ 0 & a & 0 & q \\ a^{-1}q & -ap & 1 & -pq \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C.9)$$

Soit maintenant

$$F = x_0^* Q^* + \xi_0^* P^* + \lambda_0^* K^* + t_0^* T^* \in \mathcal{G}_{aWH}^* \quad (C.10)$$

Les orbites coadjointes s'écrivent :

$$\begin{cases} x_0^* \rightarrow x^* = a^{-1}x_0^* - pt_0^* \\ \xi_0^* \rightarrow \xi^* = a\xi_0^* + qt_0^* \\ \lambda_0^* \rightarrow \lambda^* = \lambda_0^* - pqt_0^* + a^{-1}qx_0^* - ap\xi_0^* \\ t_0^* \rightarrow t^* = t_0^* \end{cases} \quad (C.11)$$

On distingue donc trois familles d'orbites.

VI.1.2 Orbites dégénérées

Ce sont les orbites qui correspondent à :

$$x_0^* = \xi_0^* = t_0^* = 0, \quad \lambda^* = \lambda_0^* \quad (C.12)$$

Dans ce cas, la seule polarisation possible est

$$\mathcal{P} = \mathcal{G}_{aWH} \quad (C.13)$$

et les représentations unitaires irréductibles correspondantes sont les caractères de G_{aWH} .

VI.1.3 Orbites de type affine

Les orbites de type affine sont caractérisées par :

$$t_0^* = 0,$$

et donc complètement par :

$$x^* \xi^* = x_0^* \xi_0^* = \mu \in \mathbb{R} \quad (C.14)$$

Considérons par exemple l'élément de l'orbite O_F caractérisé par μ :

$$F = Q^* + \mu P^* \quad (C.15)$$

Soit G_F le stabilisateur de F pour l'action coadjointe. Puisque,

$$Ad^*(q, p, a, \varphi) \cdot F = a^{-1}Q^* + \mu aP^* + (qa^{-1} - a\mu p)K^*, \quad (\text{C.16})$$

G_F est donnée par :

$$G_F = \{(q, q/\mu, 1, \varphi), q, \varphi \in \mathbb{R}\} \quad (\text{C.17})$$

La seule polarisation possible est :

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}Q \oplus \mathbb{R}P \oplus \mathbb{R}T \quad (\text{C.18})$$

Elle vérifie la condition de Pukanszky (i.e. $Ad^*(e^P) \cdot F = F + \mathcal{P}^\perp$). En effet, soit $X = xQ + \xi P + tT$. Alors

$$Ad^*(e^X) \cdot F = F + (x - \mu\xi)K^* \quad (\text{C.19})$$

ce qui prouve l'assertion.

Considérons maintenant les représentations associées. Soit F défini par (C.16) et soit $h = (q, p, 1, \varphi) = \exp(X) \in P = \exp(\mathcal{P})$. Alors les coordonnées de X sont $(q, p, 0, \varphi - pq/2)$. F définit un caractère χ_F de P ; si $X \in \mathcal{P}$:

$$\chi_F(\exp X) = e^{i\langle F, X \rangle} \quad (\text{C.20})$$

et comme la condition de Pukanszky est satisfaite, la représentation \mathcal{U} de G_{aWH} induite par χ_F est irréductible.

On l'obtient de la manière suivante. Considérons l'espace de Hilbert :

$$\mathcal{H} = \left\{ f : G_{aWH} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{P \backslash G_{aWH}} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty, \right. \\ \left. \text{et } f(h \cdot g) = \chi_F(h)f(g), \forall h \in \mathbf{H} \right\} \quad (\text{C.21})$$

μ est ici une mesure quasi invariante sur $\mathbf{H} \backslash G_{aWH}$, par exemple la mesure de Lebesgue sur la demi-droite. Soit Δ la racine carrée de la dérivée de Radon-Nikodym correspondante. Alors \mathcal{U} agit sur \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}(q, p, a, \varphi) \cdot f](0, 0, u, 0) &= \Delta(q, p, a, \varphi) f[(0, 0, u, 0) \cdot (q, p, a, \varphi)] \\ &= \Delta(q, p, a, \varphi) f[(uq, u^{-1}p, 1, \varphi)(0, 0, au, 0)] \\ &= \Delta(q, p, a, \varphi) e^{i[uq + \mu u^{-1}p]} f(0, 0, au, 0) \end{aligned}$$

En identifiant \mathcal{H} avec $L^2(\mathbb{R}_+^*)$, on obtient :

$$[\mathcal{U}(q, p, a, \varphi) \cdot f](u) = \sqrt{a} e^{i[uq + \mu pu^{-1}]} f(au) \quad (\text{C.22})$$

VI.1.4 Orbites de type Stone-Von-Neumann

Ce sont les orbites caractérisées par :

$$t^* \neq 0 \quad (\text{C.23})$$

Pour tous x_0^*, ξ_0^* , il existe des valeurs de p, q, a telles que $x^* = \xi^* = 0$. On peut donc choisir sans perte de généralité :

$$x_0^* = \xi_0^* = 0 \quad (\text{C.24})$$

de sorte que les orbites coadjointes

$$\begin{cases} x^* = -pt^* \\ \xi^* = qt^* \\ \lambda^* = \lambda_0^* + \frac{x^* \cdot \xi^*}{t^*} \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

soient caractérisées par $t^* \in \mathbb{R}^*, \lambda_0^* \in \mathbb{R}$. Soit donc :

$$F = t^*T^* + \lambda^*K^* \quad (\text{C.26})$$

et soit O_F l'orbite correspondante. Le stabilisateur de F est :

$$\mathbf{G}_F = \{(0, 0, a, \varphi), a \in \mathbb{R}_+^*, \varphi \in \mathbb{R}\} \quad (\text{C.27})$$

Les seules polarisations possibles sont :

$$\mathcal{P} = \begin{cases} \mathbb{R}Q \oplus \mathbb{R}K \oplus \mathbb{R}T \\ \mathbb{R}P \oplus \mathbb{R}K \oplus \mathbb{R}T \end{cases} \quad \text{ou} \quad (\text{C.28})$$

Un calcul simple montre qu'elles satisfont toutes deux à la condition de Pukanszky. Prenons :

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}Q \oplus \mathbb{R}K \oplus \mathbb{R}T \quad (\text{C.29})$$

$P \backslash G_{aWH}$ est donc isomorphe à la droite réelle. Soit

$$X = xQ + \lambda K + tT \quad (\text{C.30})$$

un élément arbitraire de \mathcal{P} , alors

$$\exp\{X\} = \left(x \frac{e^\lambda - 1}{\lambda}, 0, e^\lambda, t\right) \quad (\text{C.31})$$

F définit le caractère suivant χ_F de $P = \exp\{\mathcal{P}\}$:

$$\chi_F(q, 0, a, \varphi) = \exp\{i(\lambda^* \ln(a) + t^* \varphi)\} \quad (\text{C.32})$$

La représentation \mathcal{U} induite par χ_F agit sur

$$\mathcal{H} = \left\{ f : G_{aWH} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbf{H} \setminus G_{aWH}} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty, \right. \\ \left. \text{et } f(h \cdot g) = \chi_F(h)f(g), \forall h \in P \right\} \quad (\text{C.33})$$

où μ est une mesure quasi invariante sur $P \setminus G_{aWH}$, par exemple la mesure de Lebesgue sur la droite réelle. \mathcal{U} est alors donnée par :

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}(q, p, a, \varphi) \cdot f](0, \xi, 1, 0) &= \Delta(q, p, a, \varphi) f[(0, \xi, 1, 0) \cdot (q, p, a, \varphi)] \\ &= \Delta(q, p, a, \varphi) f[(q, 0, a, \varphi + \xi q) \cdot (0, a(\xi + p), 1, 0)] \\ &= \Delta(q, p, a, \varphi) e^{i[\lambda \cdot \ln(a) + t \cdot (\varphi + \xi q)]} f(0, 0, a(\xi + p), 0) \end{aligned}$$

Si l'on identifie \mathcal{H} avec $L^2(\mathbb{R})$ et en tenant compte de la forme explicite de $\Delta(q, p, a, \varphi)$, on obtient :

$$[\mathcal{U}(q, p, a, \varphi) \cdot f](\xi) = \sqrt{a} e^{i[\lambda \cdot \ln(a) + t \cdot (\varphi + \xi q)]} f(a(\xi + p)) \quad (\text{C.34})$$

Ceci conclut le calcul des orbites coadjointes du groupe de Weyl-Heisenberg affine unidimensionnel. Le cas multidimensionnel, plus complexe, est traité dans [11].

VI.2 Le groupe euclidien

Considérons maintenant le cas des orbites coadjointes du groupe euclidien $E(n)$. Le groupe euclidien peut être, lui aussi, réalisé comme un groupe de matrices (c'est en fait un sous-groupe de G_{aWH}) et nous nous fonderons sur cette réalisation pour calculer l'espace des phases.

$$E(n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r \in SO(n), q \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (\text{C.35})$$

$$e(n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{R} \cdot Q_i \oplus \sum_{i < j} \mathbb{R} \cdot J_j^i \cong \left\{ \begin{pmatrix} R & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R \in so(n), x \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (\text{C.36})$$

Soient donc

$$g = \begin{pmatrix} r & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E(n)$$

et

$$X = \begin{pmatrix} R & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x^i \cdot Q_i + \sum_{i,j} R_i^j \cdot J_j^i \in e(n)$$

On voit facilement que $Ad(g) \cdot X = g \cdot X \cdot g^{-1}$ est donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} r \cdot R \cdot r^{-1} & r \cdot x - r \cdot R \cdot r^{-1} \cdot q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.37})$$

Or, puisque

$$r \cdot R \cdot r^{-1} = \sum_{i,j} R_i^j r \cdot J_j^i \cdot r^{-1} = \sum_{i,j} (r \cdot R \cdot r^{-1})_i^j J_j^i \quad (\text{C.38})$$

on en déduit l'action adjointe de $E(n)$: si $(x_0, R_0) \in e(n)$, l'algèbre de Lie de $E(n)$

$$Ad(g) \begin{cases} x_0 & \rightarrow x = r \cdot x_0 - (R_0)_i^j r \cdot J_j^i \cdot r^{-1} \cdot q \\ (R_0)_i^j & \rightarrow R_i^j = (r \cdot R_0 \cdot r^{-1})_i^j \end{cases} \quad (\text{C.39})$$

Alors

$$Ad(g^{-1}) \begin{cases} x_0 & \rightarrow x = r^{-1} \cdot x_0 + (R_0)_i^j r^{-1} \cdot J_j^i \cdot q \\ (R_0)_i^j & \rightarrow R_i^j = (r^{-1} \cdot R_0 \cdot r)_i^j \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

et on en déduit l'action coadjointe : si $(x_0^*, R_0^*) \in e(n)^*$

$$Ad^*(g) \begin{cases} x_0^* & \rightarrow x^* = r \cdot x_0^* \\ (R_0^*)_i^j & \rightarrow (R^*)_i^j = (r \cdot R_0^* \cdot r^{-1})_i^j + (r \cdot x_0^*) \cdot (J_j^i \cdot q) \end{cases} \quad (\text{C.41})$$

Considérons maintenant le cas particulier $x_0^* \neq 0$, $R_0^* = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} G_F &\cong \left\{ (s, q) \in G, s \in SO(n-1), q \in \mathbb{R}^n, J_j^i \cdot q \perp x_0^* \forall i \neq j \right\} \\ &\cong SO(n-1) \ltimes (\mathbb{R} \cdot x_0^*) \end{aligned}$$

Les représentations qui nous intéressent sont induites à partir de la polarisation suivante (qui contient G_F) :

$$\mathcal{P} = \sum_1^n \mathbb{R} \cdot X^i \oplus \sum \mathbb{R} \cdot J_j^i \quad (\text{C.42})$$

où la seconde somme est prise sur les éléments de $so(n)$ appartenant au noyau de x_0^* , *i.e.* une sous-algèbre $so(n-1)$.

Soit χ un caractère de $P = \exp \mathcal{P}$

$$\chi(e^X) = e^{i(x_0^*, X)} \quad (\text{C.43})$$

et soit μ une mesure quasi invariante sur G/P . Soit

$$\mathcal{H} = \left\{ f : G \rightarrow \mathcal{C}, \text{ mesurable, telle que } \int_{G/P} |f(u)|^2 d\mu(u) < \infty \right. \\ \left. \text{et } f(g \cdot h) = \chi(h)^{-1} f(g) \forall g \in G, h \in P \right\} \\ \cong L^2(G/P, d\mu) \quad (\text{C.44})$$

G agit sur \mathcal{H} comme suit :

$$\begin{aligned} [\mathcal{U}(r, q) \cdot f](\rho, 0) &= f((r^{-1}, -r^{-1} \cdot q) \cdot (\rho, 0)) \\ &= f((r^{-1} \cdot \rho, 0) \cdot (1, -\rho^{-1} \cdot q)) \\ &= e^{i\langle x_0^*, \rho^{-1} \cdot q \rangle} f(r^{-1} \cdot \rho, 0) \end{aligned}$$

et, après avoir identifié G/P à S^{n-1} , en posant $s = \rho \cdot x_0^*$, la représentation \mathcal{U} agit sur $L^2(S^{n-1})$:

$$[\mathcal{U}(r, q) \cdot f](s) = e^{i\langle s, q \rangle} f(r^{-1} \cdot s) \quad (\text{C.45})$$

ce qui est la forme recherchée.

VII COMPLÉMENT D

VII.1 Ondelettes sur les sphères

Nous avons vu au cours de ce chapitre comment le langage de la théorie des groupes permet de construire des représentations “temps-fréquence” sur la sphère, en se fondant sur l’action d’un “groupe de Weyl-Heisenberg adapté” à la situation. En revanche, on ne sait toujours pas à l’heure actuelle adapter ce type de construction au cas des ondelettes sur la sphère. On aurait besoin pour cela d’une notion naturelle de dilatation, ce qui est, en toute rigueur, incompatible avec la géométrie de la sphère.

Il existe en fait une (ou des) variante(s), fondées sur d’autres arguments liés plutôt aux décompositions de Littlewood-Paley ou aux analyses multirésolution infinitésimales que nous avons déjà rencontrées (voir à la fin du chapitre II et aussi dans la suite au chapitre VIII). Nous donnons ici un aperçu de ce type d’approche, pour compléter l’approche géométrique.

Les outils de base utilisés ici sont les outils classiques de l’analyse sur les sphères, à savoir les harmoniques sphériques et les polynômes de Legendre, dont nous rappellerons les grandes idées. On sait que l’opérateur laplacien sur \mathbb{R}^3 peut être écrit en coordonnées sphériques sous la forme

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta^* \quad (\text{D.1})$$

où Δ^* est la partie angulaire du laplacien, aussi appelé laplacien de Beltrami sur la sphère. On appellera polynômes harmoniques de degré ℓ les fonctions propres de Δ^* associés à la valeur propre $-\ell(\ell + 1)$. Il est bien connu que l'espace engendré par les polynômes harmoniques de degré ℓ est un espace de dimension finie égale à $2\ell + 1$, dont une base orthonormée est fournie par les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(s)$:

$$\langle Y_\ell^m, Y_{\ell'}^{m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \quad (\text{D.2})$$

qui vérifient de plus le théorème d'addition :

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(s) Y_\ell^m(s') = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_\ell(s \cdot s') \quad (\text{D.3})$$

où les $P_\ell(x)$ sont les polynômes de Legendre.

Les harmoniques sphériques permettent d'associer à toute fonction $f \in L^1(S^2)$ sa transformée de Fourier sphérique :

$$f_{\ell m} = \int f(s) Y_\ell^m(s) d\eta(s) \quad (\text{D.4})$$

Si $f(s) \in L^2(S^2)$, alors $\sum |f_{\ell m}|^2 < \infty$ et on a

$$f(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_\ell^m(s) \quad (\text{D.5})$$

Les polynômes de Legendre forment, quant à eux, une base de $L^2([-1, 1])$: $\forall f(x) \in L^2([-1, 1])$ on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell + 1}{4\pi} \hat{f}(\ell) P_\ell(x) \quad (\text{D.6})$$

où les coefficients $\hat{f}(\ell)$ forment la transformée de Legendre de $f(x)$:

$$\hat{f}(\ell) = 2\pi \int_{-1}^1 f(x) P_\ell(x) dx \quad (\text{D.7})$$

Les polynômes de Legendre vérifient de plus les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{D.8})$$

ainsi que la formule de Hecke :

$$\int_{S^2} P_\ell(s \cdot \sigma) P_{\ell'}(s' \cdot \sigma) d\eta(\sigma) = \hat{P}_{\ell'}(\ell) P_\ell(s \cdot s') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{D.9})$$

VII.2 Identité approchée sur la sphère

Le point de départ est une analogie avec les exemples unidimensionnels que nous avons vus plus tôt. Prenons tout d'abord l'exemple suivant. Partant d'une fonction $f(s) \in L^p(S^2)$, on sait lui associer son prolongement harmonique dans la boule intérieure, c'est-à-dire le domaine

$$B^< = \{x \in \mathbb{R}^3, |x|^2 < 1\}$$

qui est donné par

$$S_f(s, a) = P_a * f(s) \quad (\text{D.10})$$

où $P_a(x) \in L^1([-1, 1])$ est le noyau de Poisson :

$$P_a(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1 - a^2}{(1 + a^2 + 2ax)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{4\pi} a^n P_n(x) \quad (\text{D.11})$$

$S_f(s, a)$ est donc une fonction harmonique dans la boule intérieure (i.e. vérifie $\Delta S_f = 0$ et $\lim_{a \rightarrow 1} S_f(s, a) = f(s)$). On rappelle que le produit de convolution d'une fonction $F(s) \in L^p(S^2)$ par une fonction $G(x) \in L^1([-1, 1])$ est la fonction $F * G(s) \in L^p(S^2)$ donnée par :

$$F * G(s) = \int_{S^2} F(\sigma) G(\sigma \cdot s) d\eta(\sigma) \quad (\text{D.12})$$

On peut alors écrire comme nous l'avons fait au chapitre II (quand nous avons introduit le concept d'analyse multirésolution infinitésimale) :

$$T_f(s, a) = -a \partial_a S(s, a) \quad (\text{D.13})$$

ce qui fournit une décomposition de l'identité :

$$f(s) = \int_0^1 T_f(s, a) \frac{da}{a} \quad (\text{D.14})$$

soit une formule proche du schéma linéaire de décomposition associé à la formule de Morlet. On se trouve donc en présence d'une décomposition du même type que les décompositions en ondelettes continues. La variable a joue ici le rôle de variable d'échelle.

En général, étant donnée une identité approchée $\phi_a(x)$ de $L^p([-1, 1])$, il suffit de considérer

$$\psi_a(x) = -a \partial_a \phi_a(x) \quad (\text{D.15})$$

pour obtenir des formules similaires.

VII.3 Le schéma bilinéaire

On généralise de façon similaire ce que nous avons appelé plus tôt le schéma bilinéaire. Pour cela, donnons-nous une fonction $\psi(x) \in L^1([-1, 1])$ et associons-lui la famille suivante de fonctions définies sur la sphère S^2 :

$$\psi_{(1,\sigma)}(s) = \psi(s \cdot \sigma) \quad (\text{D.16})$$

Remarquons au passage que ces expressions utilisent le produit scalaire de \mathbb{R}^3 pour décrire les déplacements sur la sphère. Considérons sa transformée de Legendre $\hat{\psi}(n)$:

$$\hat{\psi}(n) = 2\pi \int_{-1}^1 \psi(x) P_n(x) dx \quad (\text{D.17})$$

ainsi que la famille d'ondelettes $\psi_{(a,\sigma)}(s)$ définies comme des copies "tournées" des fonctions $\psi_a(s)$, elles-mêmes définies par leur transformée de Legendre :

$$\widehat{\psi}_a(n) = \hat{\psi}(an) \quad (\text{D.18})$$

$$\psi_{(a,\sigma)}(s) = (\psi_a)_{(1,\sigma)}(s) \quad (\text{D.19})$$

On a alors le théorème de représentation suivant :

Théorème 1 Soit $\psi(x) \in L^1([-1, 1])$, telle que

$$\int_0^1 |\hat{\psi}(an)|^2 \frac{da}{a} = 1 \quad \forall n \quad (\text{D.20})$$

alors $\forall f(s) \in L^2(S^2)$ on a

$$f(s) = \int_0^1 \int_{S^2} T_f(\sigma, a) \psi_a(s \cdot \sigma) \frac{da}{a} d\eta(\sigma) \quad (\text{D.21})$$

où les coefficients $T_f(\sigma, a)$ sont donnés par

$$T_f(\sigma, a) = \int_{S^2} f(s) \psi_a(s \cdot \sigma) d\eta(s) \quad (\text{D.22})$$

Preuve : Montrons simplement que la transformation

$$f(s) \rightarrow T_f(\sigma, a)$$

est une isométrie (la convergence forte de la formule de reconstruction (D.21) résulte des mêmes arguments que ceux que nous avons utilisés tout au long du chapitre II). On voit aisément que $T_f(\sigma, a) \in L^2(S^2)$. De plus, en utilisant la

définition des coefficients $T_f(\sigma, a)$ et l'expression des fonctions $\psi_a(s)$ en fonction de leur transformée de Fourier sphérique, on a :

$$\int |T_f(\sigma, a)|^2 d\eta(\sigma) = \sum_{\ell, \ell'} \int f(s) f(s')^* P_\ell(\sigma \cdot s) P_{\ell'}(\sigma \cdot s') d\eta(s) d\eta(s') d\eta(\sigma) \quad (\text{D.23})$$

En utilisant la formule de Hecke (D.9), on obtient :

$$\int |T_f(\sigma, a)|^2 d\eta(\sigma) = \sum_{\ell} \int |\hat{\psi}_a(\ell)|^2 P_\ell(s \cdot s') d\eta(s) d\eta(s') \quad (\text{D.24})$$

ce qui, combiné au théorème d'addition (D.3), conduit à

$$\int |T_f(\sigma, a)|^2 d\eta(\sigma) = \sum_{\ell, m} |\hat{\psi}_a(\ell)|^2 |f_{\ell m}|^2 \quad (\text{D.25})$$

et, de là, au résultat.

Le fait que cette construction n'entre pas dans le cadre géométrique décrit dans ce chapitre n'entraîne pas pour autant que la transformée en ondelettes ainsi définie ne possède pas de propriété de covariance. En fait, il résulte de l'invariance par rotation du produit scalaire de \mathbb{R}^3 que, si $f(s) \in L^2(S^2)$, si $r \in SO(3)$ est une matrice de rotation de \mathbb{R}^3 et si on note $f_r(s) = f(r^{-1} \cdot s)$ une copie "tournée" de $f(s)$, on a

$$T_{f_r}(\sigma, a) = T_f(r \cdot \sigma, a)$$

pour tous σ, a . On retrouve bien ainsi une propriété de covariance par rotation, similaire à celle obtenue précédemment.

Chapitre VIII

ALGORITHMES RAPIDES DE CALCUL DE LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES

I INTRODUCTION

L'un des problèmes essentiels qui se posent en pratique est celui du calcul effectif de la transformée en ondelettes d'une fonction ou d'un signal à analyser. Considérons par exemple le cas simple de la transformée en ondelettes unidimensionnelle. On doit donc évaluer des intégrales de la forme

$$T_f(b, a) = \langle f, \psi_{(b,a)} \rangle = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)^* dx \quad (\text{I.1})$$

Clairement, le choix d'un algorithme de calcul présuppose le choix d'une discrétisation de la transformée en ondelettes et donc le choix d'un réseau d'échantillonnage. Nous nous limiterons ici aux deux cas les plus simples. Le premier, que nous appellerons échantillonnage sur grille dyadique, est dicté par les règles de discrétisation que nous avons décrites en discutant la construction de repères d'ondelettes. Le second respecte une version discrétisée des propriétés de covariance de la transformée en ondelettes (covariance par dilatation et translation) : la transformée en ondelettes d'une copie translatée et dilatée d'un signal donné est égale à la copie translatée et dilatée de la transformée du signal original, pour peu que la translation et la dilatation respectent le réseau de discrétisation.

La solution la plus immédiate si l'on dispose d'une expression analytique pour la fonction $f(x)$ est d'utiliser des méthodes numériques d'intégration (des méthodes à pas adaptatif si nécessaire) pour l'évaluation de (I.1). Cette méthode présente l'avantage d'être *a priori* aussi précise qu'on le désire, mais est en général extrêmement coûteuse en temps de calcul, en particulier pour les grandes échelles (*i.e.* les grandes valeurs de a). Dans ce cas, le support de l'ondelette $\psi_{(b,a)}$ croît proportionnellement à a et le temps de calcul également. De plus, dans les cas pratiques (c'est-à-dire pour le traitement de signaux numériques), quand on ne dispose pas d'une expression analytique pour $f(x)$, il est nécessaire d'utiliser une procédure d'interpolation, par exemple, pour

pouvoir se ramener au cas précédent, ce qui est aussi coûteux en temps de calcul.

Il faut alors évaluer l'intégrale (I.1) à partir des échantillons de $f(x)$, ce qui peut être fait de façon approximative en utilisant pour discrétiser l'intégrale des "sommes de Riemann"

$$T_f(b, a) \cong \sum_n f_n \psi \left(\frac{n-b}{a} \right)^* \quad (\text{I.2})$$

(où l'on a échantillonné à la fréquence unité pour simplifier) ou une méthode de trapèzes, ou autre en fonction de la précision voulue. Bien entendu, ceci ne supprime en aucun cas le premier défaut de la méthode, qui est de nécessiter un temps de calcul très élevé à grande échelle. Il est facile d'évaluer la complexité de l'algorithme correspondant, c'est-à-dire le nombre d'opérations à effectuer¹. Si l'on dispose de $N = 2^L$ échantillons du signal f_n et que l'on souhaite évaluer $T_f(b, a)$ avec la même fréquence d'échantillonnage en b , sur des échelles en progression géométrique, disons 2^j , $j = 1, \dots, \log_2(N)$ pour fixer les idées, le nombre d'échantillons de l'ondelette à j fixé se comporte comme $2^j M$ et le calcul à j fixé nécessite donc $2^j MN$ opérations. En sommant sur les échelles, on obtient :

$$\sum_1^L 2^j MN \cong KN^2$$

pour une certaine constante K . Il s'agit donc d'un algorithme en $O(N^2)$, extrêmement lent pour grand N .

Une alternative consiste à utiliser la forme de la transformée en ondelettes donnée par la formule de Parseval :

$$T_f(b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi b} \hat{f}(\xi) \hat{\psi}(a\xi)^* d\xi \quad (\text{I.3})$$

Dans ce cas, on reconnaît immédiatement la transformée de Fourier inverse du produit $\hat{f}(\xi) \hat{\psi}(a\xi)^*$, ce qui suggère d'utiliser une méthode de transformée de Fourier rapide. Ainsi, la complexité de l'algorithme est réduite comme suit. Laissant de côté la première FFT qui donne $\hat{f}(\xi)$ à partir de $f(x)$, qui est effectuée une bonne fois pour toute, on obtient pour le même problème que précédemment $L = \log_2(N)$ fois une FFT inverse, d'où un algorithme de complexité totale

$$KN \log_2(N)^2$$

ce qui, pour N grand, représente déjà une amélioration certaine. Le défaut de cette méthode est d'utiliser la FFT comme une "boîte noire" et d'être ainsi

¹ Pour ce faire, on compte habituellement les multiplications, le coût d'une addition étant en général plus faible.

tributaire de sa qualité²

En fait, il est possible dans certains cas de construire des algorithmes adaptés à la nature même de la transformée en ondelettes. Ce sont ces algorithmes que nous allons maintenant décrire. Ils ont en fait été développés indépendamment des ondelettes, dans un contexte de traitement numérique des images. Nous avons choisi dans ce chapitre de commencer par décrire la structure algorithmique elle-même, avant d'envisager son utilisation dans le calcul de transformées en ondelettes. Comme nous allons le voir, ces algorithmes correspondent davantage à une méthodologie générale (filtrage et sous-échantillonnage) qu'à une technique figée. Dès lors, on peut concevoir beaucoup de variations autour du cadre que nous décrivons ici.

Remarque : Nous nous restreindrons ici aux algorithmes de calcul de la transformée en ondelettes et ne discuterons pas la transformée de Gabor, pour la bonne et simple raison qu'il n'existe pas d'algorithme rapide de calcul de celle-ci autre que ceux fondés sur l'utilisation de la FFT. La raison essentielle en est que les algorithmes de type "ondelettes" sont fondés sur des idées de dilatation et sous-échantillonnage, naturellement adaptées à des réseaux de discrétisation, au contraire des modulations qui sont à la base de la transformée de Gabor.

II ONDELETTES SUR UNE GRILLE DYADIQUE

Nous débutons notre description par une analyse des algorithmes permettant un calcul efficace de la transformée en ondelettes sur une grille dite dyadique, c'est-à-dire de la forme décrite dans le chapitre consacré aux repères d'ondelettes. Il s'avère que, dans ce cas, il existe une relation très étroite entre les décompositions en ondelettes et les algorithmes pyramidaux développés par les spécialistes de traitement numérique des images, à savoir essentiellement la technique du laplacien pyramidal et du codage en sous-bandes. Avant d'en revenir aux ondelettes, nous allons commencer par décrire ces deux techniques et, tout d'abord, revenir sur le théorème d'échantillonnage.

II.1 Le théorème d'échantillonnage

Concentrons-nous dans ce cas au problème d'échantillonnage (c'est-à-dire de discrétisation) de fonctions définies sur la droite réelle. La question essentielle est la suivante : peut-on échantillonner une fonction sans perte d'information ? La réponse est bien entendu positive, à condition de disposer d'information *a priori* sur la fonction échantillonnée, c'est-à-dire de la certitude de pouvoir reconstruire la fonction à partir des échantillons par interpolation. Nous nous

²En particulier, il peut arriver que dans certaines implémentations, la phase de la FFT ne soit pas très fiable.

limiterons ici au cas de l'échantillonnage des fonctions à bande limitée, c'est-à-dire des fonctions appartenant à un espace de Paley-Wiener

$$PW_\omega = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \text{supp}(\hat{f}) \subset [-\omega, \omega]\} \quad (\text{II.1})$$

où ω est un nombre réel non nul.

La question est : comment échantillonner convenablement une fonction f donnée ? En d'autres termes, comment remplacer une fonction $f \in PW_\omega$ par un ensemble discret de ses valeurs, sans perte d'information ?

On associe à f la suite de nombres (échantillons) :

$$f_n = f(n\delta_e) = f\left(\frac{n}{\nu_e}\right) \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.2})$$

où ν_e est un nombre réel, appelé fréquence d'échantillonnage. En fait, pour que l'échantillonnage soit consistant, la fréquence d'échantillonnage ne peut être choisie arbitrairement. Pour une fonction donnée f , dans une certaine classe (f est supposée à bande limitée, c'est-à-dire que sa transformée de Fourier est à support compact), il existe une fréquence critique, appelée fréquence de Shannon ν_s . Dit autrement, pour une fréquence d'échantillonnage donnée ν_e , il existe une fréquence critique (appelée fréquence de Nyquist, $\nu_n = \pi\nu_e$) telle que toute fonction ayant dans son spectre de Fourier des fréquences supérieures à la fréquence critique ne pourra être correctement échantillonnée.

Avant d'entrer dans plus de détail, considérons l'exemple simple d'une fonction $f(x)$ monochromatique, de pulsation ω_0 . Dans ces conditions, il est évident que pour $\nu_e < \omega_0/\pi$, c'est-à-dire si l'on prend moins de deux échantillons par période de $f(x)$, l'échantillonnage sera insuffisant pour caractériser $f(x)$ de manière consistante. Les traiteurs de signaux parlent d'échantillonner une fonction harmonique à deux points par cycle.

Plus précisément, le résultat suivant (dit théorème d'échantillonnage) montre que toute fonction f , dont la transformée de Fourier est à support compact contenu dans un intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$, est complètement caractérisée par les échantillons $f_n = f(n\delta_e) = f\left(\frac{n}{\nu_e}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, pour toute fréquence d'échantillonnage inférieure à la fréquence de Shannon $\nu_s = \omega_0/\pi$. Inversement, l'échantillonnage d'une fonction continue qui n'est pas à bande limitée à moins de la fréquence de Nyquist substituée à celle-ci une autre fonction, qui est elle-même à bande limitée par ν_n —cet effet est connu sous le nom *aliasing* (phénomène de repliement).

Théorème 1 Soit $f(x) \in PW_{\omega_0}$.

- (i) Si $\nu_e < \omega_0/\pi$, l'échantillonnage $f_n = f(n/\nu_e)$ ne permet pas de déterminer $f(x)$ sans hypothèse supplémentaire.
- (ii) Si $\nu_e > \omega_0/\pi$, soit $\phi \in S(\mathbb{R})$ une fonction telle que $Supp(\hat{\phi})$ est contenu dans l'intervalle $[-\pi\nu_e, \pi\nu_e]$ et $\hat{\phi}(x) = 1$ pour tout x dans l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. Alors on a :

$$f_n = f\left(\frac{n}{\nu_e}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi\left(x - \frac{n}{\nu_e}\right) dx \tag{II.3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\nu_e} \sum f\left(\frac{n}{\nu_e}\right)\phi\left(x - \frac{n}{\nu_e}\right) \tag{II.4}$$

- (iii) Si $\nu_e = \omega_0/\pi$, l'échantillonnage permet de déterminer $f(x)$ si la suite f_n est dans $l^2(\mathbb{Z})$. f est alors donnée par :

$$f(x) = \sum f\left(\frac{n}{\nu_e}\right) \frac{\sin(\pi\nu_e(x - n/\nu_e))}{\pi\nu_e(x - n/\nu_e)} \tag{II.5}$$

Nous ne donnerons pas ici la démonstration de ce théorème bien connu (voir l'introduction du livre de Y. Meyer par exemple pour une description simple). Nous nous contenterons de l'illustrer par des arguments de physiciens. La base est la formule sommatoire de Poisson, que les physiciens ont l'habitude d'interpréter comme suit. On appelle peigne de Dirac la périodisée de la masse de Dirac à l'origine :

$$\mathcal{D}_{1/\nu_e}(x) = \sum_n \delta\left(x - \frac{n}{\nu_e}\right)$$

Dans un certain sens, la formule de Poisson (voir l'annexe A) dit que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de période ν_e^{-1} $\mathcal{D}_{1/\nu_e}(x)$ est (à une constante près) un peigne de Dirac de période $2\pi\nu_e$ $\mathcal{D}_{2\pi\nu_e}(\xi)$. Si l'on interprète l'échantillonnage $f_n = f(n/\nu_e)$ de la fonction $f(x)$ comme une multiplication de $f(x)$ par le peigne de Dirac de période ν_e^{-1} , alors la transformée de Fourier discrète de $\{f_n\}$ sera le produit de convolution de $\hat{f}(\xi)$ par le peigne de Dirac de période $2\pi\nu_e$, c'est-à-dire la périodisée de $\hat{f}(\xi)$ de période $2\pi\nu_e$ (toujours à une constante près). Ainsi, les trois cas décrits dans le théorème précédent correspondent aux cas où l'on peut ou ne peut pas retrouver $\hat{f}(\xi)$ à partir de $\sum_k \hat{f}(\xi + 2\pi\nu_e k)$ par restriction à l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$. Dans le second cas, cette restriction peut être faite à l'aide d'une fonction $\hat{\phi}(\xi)$ très régulière (ici dans la classe de Schwartz), donc très bien localisée en x . Dans le troisième cas en revanche, la seule possibilité pour $\phi(x)$ est le sinus cardinal $\sin(x)/x$, qui est très lentement décroissant.

Remarque : Dans la pratique, on a fréquemment à étudier numériquement des signaux (fonctions) qui ne sont pas à bande limitée, ou à trop large bande. Dans ce cas, il faut effectuer un filtrage préalable, destiné à supprimer les trop hautes fréquences. On peut alors effectuer un échantillonnage convenable. Néanmoins, signalons que tous les signaux provenant de mesures physiques sont par la force des choses à bande limitée.

II.2 Algorithmes pyramidaux en traitement d'images

La technique du laplacien pyramidal, due à Burt et Adelson [1], part de la constatation suivante : lorsque l'on représente un signal sous forme d'échantillons, il existe une information qui n'est pas directement accessible et qui a trait aux corrélations entre échantillons successifs. Pour décrire ces corrélations, on a habituellement recours à différents filtrages, c'est-à-dire des convolutions avec des suites (en général de longueur finie) dont la transformée de Fourier est bien localisée autour d'une fréquence donnée. Le laplacien pyramidal réalise ces opérations, dans le cadre d'un algorithme de faible complexité.

Considérons par exemple une suite $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$, que l'on considérera, pour fixer les idées, comme un ensemble d'échantillons d'une fonction $s \in L^2(\mathbb{R})$. Elle définit par transformation de Fourier une fonction 2π -périodique, périodisée d'une fonction de support dans $[-\pi, \pi]$. Considérons maintenant une suite $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$, telle que la restriction de sa transformée de Fourier à $[-\pi, \pi]$ soit essentiellement concentrée dans $[-\pi/2, \pi/2]$. La situation idéale est dans ce cas la fonction caractéristique de $[-\pi/2, \pi/2]$; nous verrons un peu plus loin pourquoi cette situation n'est pas idéale en pratique. Mais revenons à l'algorithme.

Formons le produit de convolution de ces deux suites :

$$c_n = \sum_k h_{n-k} s_k \quad (\text{II.6})$$

La transformée de Fourier de ce produit de convolution est une fonction 2π -périodique et sa restriction à $[-\pi, \pi]$ est essentiellement concentrée dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Donc, on peut songer à sous-échantillonner ce produit de convolution d'un facteur 2, modulo une petite erreur (due à un terme d'*aliasing*) que l'on se propose de contrôler. Notant $\{s^0\} = \{s\}$, le résultat est une nouvelle suite :

$$s_n^1 = \sum_k h_{2n-k} s_k^0 = [H \cdot s^0]_n \quad (\text{II.7})$$

où l'on a noté H l'opérateur "convolution + sous-échantillonnage". Le résultat est une nouvelle suite, qui représente la composante "basse fréquence" de

$$\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

En effet, on a retiré à cette dernière la majeure partie de ses fréquences comprises entre $\pi/2$ et π en valeur absolue. $\{s_n^1, n \in \mathbb{Z}\}$ est donc une version lissée de $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$, à laquelle on peut faire subir le même traitement. On introduit donc :

$$s_n^2 = [H \cdot s^1]_n = \sum_k h_{2n-k} s_k^1 \quad (\text{II.8})$$

et ainsi, de proche en proche :

$$s_n^j = [H \cdot s^{j-1}]_n = \sum_k h_{2n-k} s_k^{j-1} \quad (\text{II.9})$$

L'indice j est clairement ici un indice d'échelle, puisque le passage de j à $j + 1$ correspond à un sous-échantillonnage par 2.

L'étape suivante est la reconstruction de la suite $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ à partir des suites $\{s_n^j, n \in \mathbb{Z}\}$. Considérons tout d'abord $\{s_n^1, n \in \mathbb{Z}\}$; pour pouvoir la comparer à $\{s_n^0, n \in \mathbb{Z}\}$, il est d'abord nécessaire d'insérer des zéros aux points intermédiaires (pour retrouver des fréquences d'échantillonnage compatibles), puis on fait agir l'adjoint de l'opérateur de convolution précédent :

$$\tilde{s}_n^0 = \sum_k h_{2k-n}^* s_k^1 = [H^* \cdot s^1]_n \quad (\text{II.10})$$

La suite $\{\tilde{s}_n^0, n \in \mathbb{Z}\}$ fournit donc une image floue de $\{s_n^0, n \in \mathbb{Z}\}$; on note $\{d_n^1, n \in \mathbb{Z}\}$ la différence des deux suites :

$$d_n^1 = s_n^0 - \tilde{s}_n^0 \quad (\text{II.11})$$

$$d^1 = [1 - H^* \cdot H] \cdot s^0 \quad (\text{II.12})$$

$\{d_n^1, n \in \mathbb{Z}\}$ représente les détails de $\{s_n^0, n \in \mathbb{Z}\}$ absents de $\{\tilde{s}_n^0, n \in \mathbb{Z}\}$.

De même, on introduit :

$$\tilde{s}_n^j = \sum_k h_{2k-n}^* s_k^{j+1} = [H^* \cdot s^{j+1}]_n \quad (\text{II.14})$$

ainsi que

$$d_n^j = s_n^{j-1} - \tilde{s}_n^{j-1} \quad (\text{II.15})$$

$$d^j = [1 - H^* \cdot H] \cdot s^{j-1} \quad (\text{II.16})$$

Etant donné un entier L , il est évident que la suite $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est entièrement caractérisée par son approximation $\{s_n^L, n \in \mathbb{Z}\}$ à l'échelle numéro L et ses détails $\{d_n^j, n \in \mathbb{Z}\}$, $j = 0, \dots, L - 1$ aux échelles intermédiaires. En effet, on a un algorithme de reconstruction tout aussi simple que l'algorithme de décomposition :

$$\begin{aligned} s_0 &= H^* \cdot s_1 + d_1 \\ &= H^{*2} \cdot s_2 + H^* \cdot d_2 + d_1 \\ &= H^{*L} \cdot s_L + H^{*L-1} \cdot d_L + \dots + H^* \cdot d_2 + d_1 \end{aligned}$$

Autrement dit, l'approximation s_0 à l'échelle 1 est la somme de l'approximation à l'échelle 2^L et des détails aux échelles intermédiaires :

$$s_0 = H^{*L} \cdot s_L + \sum_{j=1}^L H^{*j} \cdot d_{j+1} \quad (\text{II.17})$$

Structure pyramidale : L'algorithme de décomposition possède une structure extrêmement simple. En effet, pour chaque valeur du coefficient d'échelle j , on effectue des opérations rigoureusement identiques pour passer de l'échelle j à l'échelle $j + 1$. L'algorithme est donc un algorithme en cascade, au même titre que l'algorithme de FFT. On dit aussi qu'il possède une structure pyramidale et que les mêmes opérations (simples car toujours linéaires) sont effectuées à chaque étage de la pyramide. Il est illustré par un graphe à la figure VIII.1.

L'algorithme de reconstruction est lui aussi un algorithme pyramidal du même type.

Nombre de données et complexité algorithmique : Nous venons de voir que l'algorithme précédent fournit une représentation d'une suite quelconque, dans laquelle l'accent est mis sur la description des corrélations entre échantillons successifs. Il est important de constater que dans cette représentation, le nombre des données n'a augmenté que de façon raisonnable. Supposons, pour simplifier, que la suite $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est de longueur finie N et évaluons le nombre de coefficients nécessaires pour décrire cette nouvelle représentation. Nous supposons aussi, pour simplifier, que le nombre de coefficients non négligeables de $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est très petit devant N . Le nombre de coefficients de $\{s_n^j, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{d_n^j, n \in \mathbb{Z}\}$ est de l'ordre de $2^{-j}N$. Si la décomposition est effectuée jusqu'à l'échelle numéro L , le nombre de coefficients est de l'ordre de :

$$N + \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \dots + \frac{N}{2^{L-1}} + \frac{N}{2^L} = 2N(1 - 2^{1-L}) \leq 2N \quad (\text{II.18})$$

Un calcul tout à fait similaire fournit la complexité de l'algorithme de décomposition : supposons que le filtre $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ possède M coefficients non négligeables. Le calcul de $\{s_n^j, n \in \mathbb{Z}\}$ à partir de $\{s_n^{j-1}, n \in \mathbb{Z}\}$ comporte essentiellement $2^{1-j}NM$ multiplications. De même le calcul de $\{d_n^{j-1}, n \in \mathbb{Z}\}$ à partir de $\{s_n^j, n \in \mathbb{Z}\}$ comporte $2^{-j}NM$ multiplications. Ainsi la décomposition jusqu'à l'échelle L comporte :

$$NM(1 + 2 \sum_{j=1}^{L-1} 2^{-j} + 2^{-L}) = NM(1 + 4(1 - 2^{-L} + 2^{-L})) \leq 5NM \quad (\text{II.18})$$

On se trouve donc en présence d'un algorithme de complexité $O(N)$, ce qui est plus performant que l'algorithme de FFT.

Choix de la suite $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$: Le choix de la suite $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est extrêmement important. Tout d'abord, on veut que cette suite soit bien localisée, c'est-à-dire à décroissance suffisamment rapide pour que l'on puisse la tronquer sans commettre d'erreur trop importante. Ceci exclut en particulier la suite dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique de $[-\pi/2, \pi/2]$, qui décroît en $1/n$. D'autre part, la suite $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ doit être assez régulière pour posséder de bonnes propriétés de localisation dans l'espace de Fourier ; on se ramène alors par une dilatation des suites dont la restriction à $[-\pi, \pi]$ est bien localisée au voisinage de $[-\pi/2, \pi/2]$.

Une autre manière de tester la régularité de la suite $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est de calculer la fonction associée, c'est-à-dire la suite $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ dont la représentation est la plus simple possible, à savoir :

$$\begin{cases} d_n^j &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, j = 0, \dots, L-1 \\ s_n^L &= \delta_{n,0} \end{cases}$$

Dans ces conditions, on a :

$$s = H^{*L} \cdot s_L \quad (\text{II.19})$$

Il est souvent important en pratique que cette suite $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ soit régulière. En fait, il existe des critères permettant d'estimer la régularité de $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ à partir de certaines propriétés du filtre $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

II.3 Codage en sous-bandes

La technique du codage en sous-bandes consiste en une amélioration du laplacien pyramidal. On se place, dès le départ, dans le cadre des signaux échantillonnés, c'est-à-dire dans $l^2(\mathbb{Z})$. On considère deux suites absolument sommables $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$, similaires à la suite $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ précédente. Plus précisément, considérant les restrictions de leurs transformées de Fourier à $[-\pi, \pi]$, on impose que celle de $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ soit concentrée au voisinage de $[-\pi/2, \pi/2]$ et que celle de $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ soit concentrée au voisinage de $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$. On va alors procéder de manière similaire au chapitre précédent : la convolution de $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\}$ par $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ ou $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ produit une suite dont la bande a été réduite d'un facteur 2 (à une erreur provenant d'un mauvais échantillonnage près). On sous-échantillonne alors chacun de ces deux produits de convolution d'un facteur 2. Ce faisant, on commet dans les deux cas une erreur (*aliasing*) et on va rechercher dans quels cas ces erreurs peuvent se compenser.

Pour cela, considérons en détail les opérations effectuées lors du schéma décomposition-reconstruction, sur une seule étape tout d'abord. Pour plus de généralité, on utilisera deux suites différentes $\{\tilde{h}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\tilde{g}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ pour la reconstruction, au lieu des complexes conjugués de $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Décomposition, décimation et insertion des zéros : On considère comme dans la section précédente les convolutions

$$\sum_k h_{n-k} s_k, \quad \sum_k g_{n-k} s_k \quad (\text{II.20})$$

dont on ne conserve qu'un point sur deux comme précédemment, puis on remplace la valeur enlevée par la valeur zéro. Par convention, on force à zéro les échantillons impairs. Après transformation de Fourier, le résultat vaut :

$$\begin{cases} \hat{s}^d(\xi) &= \frac{1}{2} [\hat{s}(\xi) m_0(\xi) + \hat{s}(\xi + \pi) m_0(\xi + \pi)] \\ \hat{d}^d(\xi) &= \frac{1}{2} [\hat{s}(\xi) m_1(\xi) + \hat{s}(\xi + \pi) m_1(\xi + \pi)] \end{cases}$$

(Noter la présence du terme d'*aliasing* en $\hat{s}(\xi + \pi)$.)

Reconstruction : On utilise maintenant les suites de reconstruction $\{\tilde{h}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\tilde{g}_n, n \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} \hat{s}^r(\xi) &= \frac{1}{2} [\tilde{m}_0(\xi) m_0(\xi) + \tilde{m}_1(\xi) m_1(\xi)] \hat{s}(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{2} [\tilde{m}_0(\xi) m_0(\xi + \pi) + \tilde{m}_1(\xi) m_1(\xi + \pi)] \hat{s}(\xi + \pi) \end{aligned}$$

On impose enfin la propriété de reconstruction exacte, c'est-à-dire en particulier l'annulation du terme d'*aliasing*. Plus précisément, on écrit :

$$\begin{cases} \tilde{m}_0(\xi) m_0(\xi) + \tilde{m}_1(\xi) m_1(\xi) = 2 \\ \tilde{m}_0(\xi) m_0(\xi + \pi) + \tilde{m}_1(\xi) m_1(\xi + \pi) = 0 \end{cases}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0(\xi + \pi) & m_1(\xi + \pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{m}_0(\xi) \\ \tilde{m}_1(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.21})$$

Notons $\Delta(\xi)$ le déterminant de cette matrice. La solution est alors donnée par :

$$\begin{cases} \tilde{m}_0(\xi) = \frac{2}{\Delta(\xi)} m_1(\xi + \pi) \\ \tilde{m}_1(\xi) = -\frac{2}{\Delta(\xi)} m_0(\xi + \pi) \end{cases}$$

Il existe encore à ce point un grand nombre de solutions. Smith et Barnwell ont alors proposé de se restreindre au choix des filtres miroirs en quadrature (nous utiliserons le sigle consacré "QMF", provenant de l'expression anglaise), en se restreignant à $\Delta(\xi) = -e^{-i\xi}$ et en posant :

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi} m_0(\xi + \pi)^* \quad (\text{II.22})$$

qui conduisent à la fameuse relation (souvent appelée "condition QMF") :

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2 = 2 \quad \text{pour tous les } \xi \quad (\text{II.23})$$

Codage en sous-bandes : On sait donc maintenant transformer une suite en deux autres suites, sous-échantillonnées d'un facteur 2, de telle manière que la transformation soit inversible. On a ainsi, grossièrement parlant, remplacé une fonction de bande $[-\pi, \pi]$ en deux parties haute fréquence et basse fréquence, de bandes respectives $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ et $[-\pi/2, \pi/2]$. On peut maintenant renouveler l'opération sur la partie basse fréquence, puis itérer la procédure. Ce schéma de décomposition se nomme le codage en sous-bandes.

Quelle est la complexité algorithmique d'un schéma de codage en sous-bandes ? Pour l'évaluer, on considère une suite de N échantillons et deux filtres $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{g_n, n \in \mathbb{Z}\}$ de M échantillons chacuns. La première étape, c'est-à-dire le calcul de $\sum_k h_{2n-k} s_k$ et $\sum_k g_{2n-k} s_k$, représente 2 fois M fois $N/2$ multiplications, c'est-à-dire MN opérations. L'étape suivante représente un calcul similaire, effectué sur deux fois moins d'échantillons, d'où $MN/2$ opérations et ainsi de suite. D'où, après L étapes, le nombre total d'opérations peut être estimé comme :

$$NM(1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-L-1}) = 2NM(1 - 2^{-L}) \leq 2NM \quad (\text{II.24})$$

De plus, un calcul similaire montre que le nombre de coefficients intervenant dans la décomposition vaut exactement N , d'où aucune augmentation du nombre de données.

II.4 Transformée en ondelettes sur grille dyadique

Il existe des ondelettes pour lesquelles on peut utiliser un algorithme de type codage en sous-bandes. Ces ondelettes sont associées à des fonctions dites fonctions d'échelle. Par définition, nous appellerons fonction d'échelle une fonction $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une fonction $m_0(\xi) \in L^2([0, 2\pi])$, 2π -périodique, vérifiant :

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (\text{II.25})$$

(cette condition est identique à la condition QMF (II.22)-(II.23) à une normalisation des filtres près), telle que

$$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi) \quad (\text{II.26})$$

On notera de nouveau :

$$m_0(\xi) = \sum_k h_k e^{ik\xi} \quad (\text{II.27})$$

et

$$m_1(\xi) = \sum_k g_k e^{ik\xi} \quad (\text{II.28})$$

les développements de Fourier respectifs de m_0 et m_1 .

Notons maintenant³

$$\phi_j^k(x) = 2^{-j} \phi(2^{-j}x - k), \quad \psi_j^k(x) = 2^{-j} \psi(2^{-j}x - k) \quad (\text{II.29})$$

et les coefficients correspondants :

$$S_j^k f = \langle f, \phi_j^k \rangle \quad (\text{II.30})$$

$$T_j^k f = \langle f, \psi_j^k \rangle \quad (\text{II.31})$$

Calculons par exemple :

$$\begin{aligned} S_j^k f &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ik2^j\xi} \hat{\phi}(2^j\xi)^* d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{ik2^j\xi} m_0(2^{j-1}\xi)^* \hat{\phi}(2^{j-1}\xi)^* d\xi \\ &= \sum_l h_l^* \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{i(2k-l)2^{j-1}\xi} \hat{\phi}(2^{j-1}\xi)^* d\xi \\ &= \sum_l h_l^* S_{j-1}^{2k-l} f \end{aligned}$$

Un calcul en tous points identique fournit une expression similaire pour les coefficients $T_j^k f$. En récapitulant, on obtient :

Proposition 1 Soient $\phi(x)$, $\psi(x)$ une fonction d'échelle et une ondelette associée à une paire de QMFs. Alors, pour toute $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, le calcul de la transformée en ondelettes sur grille dyadique peut être effectué à l'aide d'un schéma de codage en sous-bandes :

$$T_j^k f = \sum_l g_l^* S_{j-1}^{2k-l} f \quad (\text{II.32})$$

$$S_j^k f = \sum_l h_l^* S_{j-1}^{2k-l} f \quad (\text{II.33})$$

Nous nous retrouvons donc dans un schéma identique au codage en sous-bandes étudié à la section précédente. L'identification est complète lorsque l'on a remarqué que la condition imposée sur m_0 et m_1 est exactement une condition

³Noter ici la normalisation choisie pour les fonctions, telle que $\|\phi_j^k\|_1 = \|\phi\|_1$ et de même pour ψ_j^k .

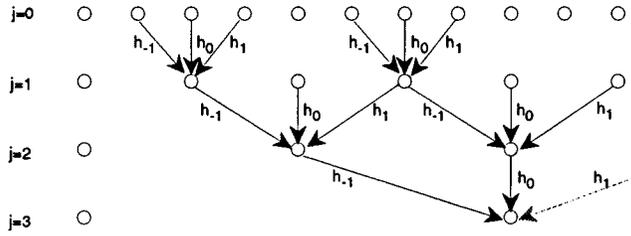


Figure VIII.1 : Algorithme QMF associé à la transformée en ondelettes sur grille dyadique.

QMF. On a donc de nouveau un algorithme rapide de reconstruction, donné par :

$$S_{j-1}^k f = \sum_l g_{2l-k} T_j^l f + \sum_l h_{2l-k} S_j^l f \quad (\text{II.34})$$

L'algorithme peut être schématiquement représenté de la manière suivante. On considère par exemple une suite $m_0(\xi)$ possédant trois coefficients non nuls h_{-1}, h_0, h_1 et on suppose que l'on connaît la suite $S_0^k f, k \in \mathbb{Z}$. Dans ces conditions, l'algorithme de décompositions aux échelles plus grandes est organisé comme dans la figure VIII.1.

En remplaçant $m_0(\xi)$ par $m_1(\xi)$, on obtient un algorithme similaire pour les coefficients $T_j^k f, k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : Pour conserver une unité de notations dans cet ouvrage, nous avons choisi en (II.29) la "normalisation L^1 " pour les fonctions ϕ_j^k et ψ_j^k . On choisit plus souvent la "normalisation L^2 ", c'est-à-dire $\phi_j^k(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$. L'unique modification à apporter à l'algorithme est alors une renormalisation des filtres par un facteur $\sqrt{2}$.

II.5 Quelques exemples et commentaires

Il est assez facile de construire des couples (ϕ, ψ) associés à des QMFs et permettant donc l'utilisation des algorithmes décrits plus haut. Beaucoup d'exemples sont fondés sur l'identité trigonométrique

$$\sin \xi = 2 \sin (\xi/2) \cos (\xi/2) = \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} 2^N \sin (2^{-N} \xi) \prod_{j=1}^N \cos (2^{-j} \xi) \quad (\text{II.35})$$

qui implique donc

$$\frac{\sin \xi}{\xi} = \prod_{j=1}^{\infty} \cos(2^{-j}\xi) \quad (\text{II.36})$$

Ainsi, en partant d'un entier $n \geq 1$ et en posant

$$\hat{\phi}_n(\xi) = e^{-in\xi/2} \left(\frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^n, \quad (\text{II.37})$$

il vient immédiatement

$$\hat{\phi}_n(2\xi) = m_0(\xi) \hat{\phi}_n(\xi) \quad (\text{II.38})$$

avec

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^n = e^{-in\xi/2} \cos^n \frac{\xi}{2} \quad (\text{II.39})$$

Notons tout de suite que ce filtre $m_0(\xi)$ ne vérifie pas la condition "QMF" (II.23) quand $n \geq 2$; la reconstruction ne sera donc possible qu'en utilisant un filtre $\tilde{m}_0(\xi)$ approprié.

Ceci conduit directement à l'algorithme pyramidal précédent pour le calcul des coefficients $S_j^k f$.

Il est facile d'obtenir une ondelette associée, en posant

$$m_1(\xi) = \left(\frac{1 - e^{-i\xi}}{2i} \right)^n = e^{-in\xi/2} \sin^n \frac{\xi}{2} \quad (\text{II.40})$$

ce qui conduit à :

$$\hat{\psi}_n(\xi) = e^{-in\xi/2} \frac{\sin^{2n} \frac{\xi}{2}}{\left(\frac{\xi}{2} \right)^n} \quad (\text{II.41})$$

et est aussi compatible avec notre algorithme pyramidal.

Il faut néanmoins noter que nous sortons ici du cadre précédent, dans la mesure où (à part pour $n = 1$) les filtres $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$ ne vérifient plus la relation de QMF. Il faut alors introduire une ondelette de reconstruction :

$$\hat{\chi}_n(\xi) = \tilde{m}_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}_n\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (\text{II.42})$$

avec le filtre passe-haut correspondant :

$$\tilde{m}_1(\xi) = \frac{1 - |m_0(\xi)|^2}{m_1(\xi)^*} \quad (\text{II.43})$$

Cet exemple correspond en fait aux ondelettes dites splines. Ces ondelettes sont étudiées plus en détail dans le complément E.

Remarques

1) Si on considère les formules précédentes, dans le cas $n = 1$, on obtient alors le célèbre système de Haar, dont la fonction d'échelle est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, 1]$:

$$\phi_1(x) = \chi_{[0,1]}(x) \quad (\text{II.44})$$

et l'ondelette est la fonction de Haar :

$$\psi_1(x) = H(x) - 2H(x - \frac{1}{2}) + H(x - 1) \quad (\text{II.45})$$

où $H(x)$ est la fonction de Heaviside. Il est bien connu que la famille des $2^{-j/2}\psi_1(2^{-j}x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, ce qui n'est plus le cas pour $n \geq 2$. Dans ce cas, il faut modifier la construction pour, dans un premier temps, obtenir une fonction $\phi(x)$ telle que la collection de ses translatées entières soit une base orthonormale de l'espace qu'elle engendre. Dans un deuxième temps, on montrera qu'il existe une ondelette associée, telle que la collection de ses translatées et dilatées (correctement normalisées) sur une grille dyadique soit une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$. Nous ne décrivons pas ces aspects ici et renvoyons à [4] et [10] pour une présentation self-consistante de la théorie et à [3],[4] pour des listes de coefficients de filtres.

2) La procédure précédente conduit à des ondelettes possédant n moments nuls (en effet $\hat{\psi}_n(\xi) \sim \xi^n$ quand $\xi \sim 0$). Il est facile de la modifier pour obtenir un nombre de moments nuls différent, par exemple en changeant la puissance de $\sin(\xi/2)$ dans la définition de $m_1(\xi)$. Il faut néanmoins faire attention aux zéros de $m_1(\xi)$ et faire en sorte que $\tilde{m}_1(\xi)$ soit bien défini quand $m_1(\xi) = 0$.

3) Nous avons vu ici le rôle joué par les QMFs dans le calcul numérique de coefficients d'ondelettes. Plus précisément, dès que l'on dispose d'une base d'ondelettes, on montre que le calcul des coefficients correspondants peut être effectué avec un algorithme de QMF (voir [3], [8] et [10] par exemple). Le problème réciproque, à savoir associer une base d'ondelettes à une paire de QMFs, est lui aussi intéressant. A. Cohen [2] a donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une paire (m_0, m_1) de QMFs engendre des fonctions ϕ et ψ de $L^2(\mathbb{R})$ conduisant à des bases d'ondelettes.

III ONDELETTES SUR GRILLE RÉGULIÈRE

Considérons maintenant le cas de la transformée en ondelettes sur un réseau régulier, c'est-à-dire dans la version discrète de la transformée en ondelettes invariante par translation. On va maintenant chercher à utiliser de nouveau des algorithmes du même type que les algorithmes de codage en sous-bandes précédents. Pour cela, commençons par le cas simple où il est possible d'associer à l'ondelette utilisée une fonction d'échelle $\phi(x)$ et une paire de QMFs.

III.1 UTILISATION DE QMFs

Supposons donc que nous disposons d'une paire de filtres miroir en quadrature m_0 et m_1 , tels que

$$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi), \quad \hat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\hat{\phi}(\xi) \quad (\text{III.1})$$

Nous noterons maintenant $S_j f$ et $T_j f$ les coefficients d'échelle et les coefficients d'ondelette respectivement⁴ :

$$S_j f(k) = 2^{-j} \int f(x)\phi(2^{-j}(x-k))^* dx \quad (\text{III.2})$$

$$T_j f(k) = 2^{-j} \int f(x)\psi(2^{-j}(x-k))^* dx \quad (\text{III.3})$$

Il est alors facile de faire un calcul similaire au précédent :

$$\begin{aligned} S_j f(k) &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi)e^{ik\xi}\hat{\phi}(2^j\xi)^* d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi)e^{ik\xi}m_0(2^{j-1}\xi)\hat{\phi}(2^{j-1}\xi)^* d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_l h_l^* \int \hat{f}(\xi)e^{i(k-2^{j-1}l)\xi}\hat{\phi}(2^{j-1}\xi)^* d\xi \\ &= \sum_l h_l^* S_{j-1} f(k - 2^{j-1}l) \end{aligned}$$

qui fournit ainsi :

Proposition 2 Soient $\phi(x)$, $\psi(x)$ une fonction d'échelle et une ondelette associée à une paire de QMFs. Alors, pour toute $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, le calcul de la transformée en ondelettes sur grille régulière peut être effectué à l'aide d'un schéma de codage en sous-bandes sans sous-échantillonnage :

$$T_j f(k) = \sum_l g_l^* S_{j-1} f(k - 2^{j-1}l) \quad (\text{III.4})$$

$$S_j f(k) = \sum_l h_l^* S_{j-1} f(k - 2^{j-1}l) \quad (\text{III.5})$$

⁴A ne pas confondre avec les coefficients $T_j^k f$ et $S_j^k f$ que nous avons utilisés précédemment.

Ainsi, on obtient une organisation pyramidale similaire à la précédente, la seule différence étant que, cette fois, on a un schéma consistant en filtrages successifs et non de filtrages et sous-échantillonnages successifs. Avec les mêmes conventions que dans la figure 1, l'algorithme peut être représenté comme sur la figure VIII.2 :

Remarque : QMFs ou FFT ? Comme nous l'avons vu, le calcul d'une transformée en ondelettes "presque continue" au moyen de la FFT requiert de l'ordre de $C_{FFT}N \log_2(N)^2$ opérations, et le calcul au moyen de l'algorithme pyramidal, de l'ordre de $C_{QMF}N \log_2(N)$ opérations⁵. L'algorithme pyramidal semble donc plus efficace, mais le rapport des temps de calcul dépend en fait de N ou, plus précisément, du rapport

$$\tau = \log_2(N) C_{FFT} / C_{QMF}.$$

Si N est assez petit pour que τ soit inférieur à 1, l'algorithme fondé sur la FFT est plus rapide. On peut facilement voir que dans le cas de filtres "classiques", de longueur 10 environ, la valeur de transition est autour de $N \sim 1000$.

III.2 Pseudo-QMFs

Nous avons donc vu quelle est la situation lorsque l'on dispose d'une paire de QMFs pour calculer la transformée en ondelettes. Malheureusement, ça n'est en général pas le cas. Par exemple, dans le cas des ondelettes les plus simples, entre autres les dérivées de gaussiennes, on ne dispose pas de QMF permettant d'accélérer le calcul. La question naturelle qui se pose est de savoir si on peut trouver une expression approchée de la transformée en ondelettes, de sorte que la transformée approchée soit calculable avec des QMFs. Ce problème a été étudié par un certain nombre d'auteurs, qui ont fourni des expressions explicites pour les filtres approchés qui interviennent. Nous décrivons ici une des solutions possibles qui est donnée par les analyses multirésolution infinitésimales que nous avons déjà en l'occasion de voir à la fin du chapitre II (et qui fait aussi le lien avec les décompositions "presque continues" de la fin du chapitre VI).

Dans ce cas, on part d'une ondelette $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$, normalisée de sorte que :

$$k_\psi = \int_0^\infty \hat{\psi}(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty \hat{\psi}(-u) \frac{du}{u} = 1. \quad (\text{III.6})$$

On construit alors une fonction d'échelle associée $\varphi(x)$, telle que :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_1^\infty \hat{\psi}(a\xi) \frac{da}{a} \quad (\text{III.7})$$

⁵Où C_{QMF} dépend de la longueur des filtres $\{h_n\}$ et $\{g_n\}$.

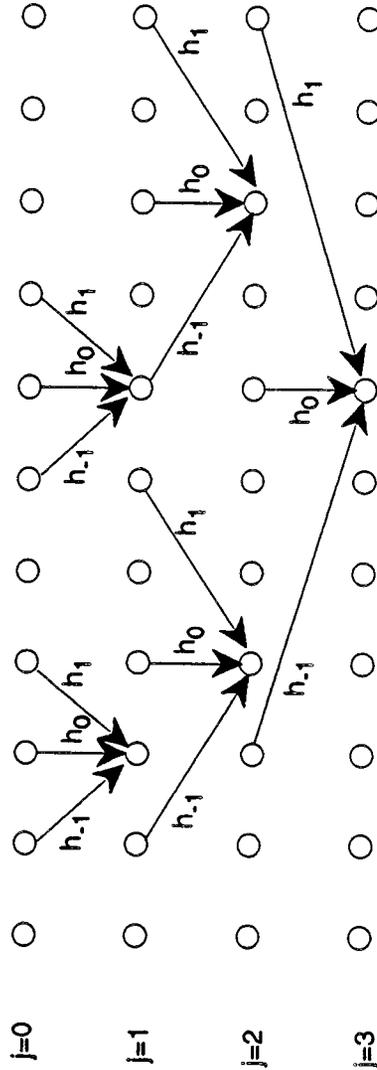


Figure VIII.2 : Algorithme QMF associé à la transformée en ondelettes sur grille fine.

et des ondelettes intégrées $\Psi(x)$, vérifiant :

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \widehat{\psi}(a\xi) \frac{da}{a} \tag{III.8}$$

On a alors

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2) - \widehat{\varphi}(\xi) . \tag{III.9}$$

et toute fonction $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée comme :

$$f(x) = \langle f, \varphi_x^{j_0} \rangle + \sum_{j=j_0}^{\infty} \langle f, \Psi_x^j \rangle \tag{III.10}$$

où l'on a posé

$$\Psi_b^j(x) = 2^{-j} \Psi(2^{-j}(x - b)) \tag{III.11}$$

et de même pour Ψ_b^j . A partir de ces nouvelles fonctions, on peut construire des filtres et un algorithme rapide approchés de la manière suivante. Nous allons tout d'abord faire l'hypothèse qu'il existe une fonction (pas nécessairement 2π -périodique) $\mu_0(\xi)$ définie partout, telle que :

$$\widehat{\varphi}(2\xi) = \mu_0(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) \tag{III.12}$$

ainsi qu'une fonction $\mu_1(\xi)$ telle que

$$\widehat{\Psi}(2\xi) = \mu_1(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) \tag{III.13}$$

L'idée essentielle est la suivante. Supposons que nous voulions échantillonner $T_j f$ et $S_j f$ à la fréquence unité, on fait l'hypothèse *a priori* que la fonction φ est essentiellement localisée dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Introduisons le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ suivant :

$$\mathcal{U}_0 = \{ f \in L^2(\mathbb{R}), f = \sum \alpha_k \varphi(x - k), \{ \alpha_k \} \in l^2(\mathbb{Z}) \} \tag{III.14}$$

Nous supposerons que la collection $\{ \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z} \}$ est une base de Riesz de \mathcal{U}_0 , c'est-à-dire qu'il existe deux constantes finies et non nulles A et B telles que

$$A \leq \sum_k |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \leq B \quad (\text{presque partout}) \tag{III.15}$$

On montre alors facilement qu'il existe une fonction $\chi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que la suite $\{ \chi(x - k), k \in \mathbb{Z} \}$ est la base de \mathcal{U}_0 biorthogonale à $\{ \varphi(x - k), k \in \mathbb{Z} \}$. χ est donnée par

$$\widehat{\chi}(\xi) = \frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{\sum_k |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2} \tag{III.16}$$

Considérons maintenant les discrétisations des fonctions $T_j f(x)$ et $S_j f(x)$:

$$S_j^d(n) = T_j(n), \quad T_j^d(n) = S_j(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.17})$$

Passons à la détermination des QMFs approchés, que nous noterons $m_0^a(\xi) = \sum_k h_k^* e^{ik\xi}$ et $m_1^a(\xi) = \sum_k g_k^* e^{ik\xi}$. L'idée qui est à la base de tout ceci est que dans la mesure où la fonction $\hat{\phi}$ est localisée dans un voisinage de 0 et où les filtres m_0 et m_1 apparaissent toujours sous la forme de produits avec $\hat{\phi}$, on peut se contenter de les approximer avec des filtres 2π -périodiques dans un voisinage de 0.

Nous noterons :

$$T_1^a f(n) = \sum_k g_k^{a*} S_0^d f(n-k) \quad (\text{III.18})$$

et

$$S_1^a f(n) = \sum_k h_k^{a*} S_0^d f(n-k) \quad (\text{III.19})$$

et aux échelles suivantes :

$$T_j^a f(n) = \sum_k g_k^{a*} S_{j-1}^a f(n-2^{j-1}k) \quad (\text{III.20})$$

et

$$S_j^a f(n) = \sum_k h_k^{a*} S_{j-1}^a f(n-2^{j-1}k) \quad (\text{III.21})$$

La sélection des filtres approchés $m_0^a(\xi)$ et $m_1^a(\xi)$ se fait en comparant les résultats fournis par l'algorithme, c'est-à-dire $S_j^a f$ et $T_j^a f$ aux discrétisées des transformées usuelles $S_j^d f$ et $T_j^d f$.

On remarque immédiatement le résultat suivant :

Proposition 3 $\text{Ker}(S_0^d) = \mathcal{U}_0^\perp$, et pour $j = 1, \dots$, $S_j^a \cdot \mathcal{U}_0^\perp = T_j^a \cdot \mathcal{U}_0^\perp = 0$

Il existe de nombreux critères de choix du meilleur filtre approché. Les filtres approchés que nous choisirons sont donnés par le résultat et les estimations suivantes :

Théorème 2 Soient $\varphi(x)$ et $\Psi(x)$ respectivement la fonction d'échelle et l'ondelette intégrée associées à l'ondelette $\psi(x)$ et soient $\mu_0(\xi)$ et $\mu_1(\xi)$ les filtres passe-bas et passe-haut associés. Notons :

$$\nu(\mu_i, m_i^a) = \left[\int_{\mathbb{R}} |(\mu_i^a(\xi) - m_i(\xi)) \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \quad (\text{III.22})$$

On a alors les propriétés suivantes :

- i) Il existe une unique paire de filtres 2π -périodiques $m_i^a(\xi) = m_i(\xi)$ qui minimisent $\nu(\mu_i, m_i^a)$. Leur expression est la suivante

$$m_0(\xi) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k) * \widehat{\varphi}(2(\xi + 2\pi k))}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2} \quad (\text{III.23})$$

$$m_1(\xi) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k) * \widehat{\Psi}(2(\xi + 2\pi k))}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2} \quad (\text{III.24})$$

- ii) On a

$$\|S_j^a f - S_j^d f\|_\infty \leq \nu(\mu_0, m_0) 2^{\frac{1-j}{2}} K_j \|f\|_2 \quad (\text{III.25})$$

et

$$\|T_j^a f - T_j^d f\|_\infty \leq 2^{\frac{1-j}{2}} \left(\nu(\mu_1, m_1) + C_1 \nu(\mu_0, m_0) \sqrt{2} K_{j-1} \right) \|f\|_2 \quad (\text{III.26})$$

où

$$C_i = \text{ess sup}_{\xi \in \mathbb{R}} m_i(\xi)$$

et

$$K_j = \frac{1 - (C_0 \sqrt{2})^j}{1 - C_0 \sqrt{2}}$$

- iii) Pour toute $f \in \mathcal{U}_0$, on a de plus :

$$S_1^a f = S_1^d f, \quad T_1^a f = T_1^d f \quad (\text{III.27})$$

Avant de démontrer ce résultat, notons le corollaire immédiat :

Corollaire Les filtres approchés donnés par le théorème précédent vérifient :

$$m_0(\xi) + m_1(\xi) = 1 \quad (\text{III.28})$$

et fournissent donc l'algorithme de reconstruction simple suivant, analogue de la formule de reconstruction de Morlet :

$$S_0 f(n) = \sum_{j \geq 0} T_j^a(n) \quad (\text{III.29})$$

Passons maintenant à la preuve du théorème. On remarque d'abord que

$$\begin{aligned} \|\widehat{S_1^a f} - \widehat{S_1^d f}\|_1 &\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}} \int_0^{2\pi} |[m_0^a(\xi) - m_0(\xi + 2\pi k)] \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k) \widehat{f}(\xi + 2\pi k)| d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |[m_0^a(\xi) - m_0(\xi)] \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq 2\pi \|f\|_2 \left[\int_{\mathbb{R}} [m_0^a(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\varphi}(2\xi)]^2 d\xi \right]^{1/2} \end{aligned}$$

On voit donc apparaître la fonctionnelle ν dans notre problème. Sa minimisation est un problème classique, qui est en fait équivalent à la projection orthogonale de $\phi(x/2)/2$ sur \mathcal{U}_0 (i.e. la minimisation de la distance dans L^2 entre $\phi(x/2)/2$ et \mathcal{U}_0). Plus précisément, les coefficients \tilde{h}_k ne sont autres que les coefficients par rapport à la base des $\phi(x-k)$, $k \in \mathbb{Z}$ de la projection de $\phi(x/2)/2$, que l'on obtient simplement en écrivant que

$$\left(\frac{1}{2} \phi \left(\frac{x}{2} \right) - \sum_{\ell} \tilde{h}_{\ell} \phi(x + \ell) \right) \perp \phi(x + k) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ce qui conduit à

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x + k)^* \left[\sum_l h_l^a \varphi(x + l) - \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{x}{2} \right) \right] dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

ou encore

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \left[m_0^a(\xi) \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 - \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi l)^* \widehat{\varphi}(2(\xi + 2\pi l)) \right] d\xi = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

On sait dans ce cas que la solution est unique et qu'elle est précisément le $m_0(\xi)$ qui est donné dans l'énoncé du théorème. On estime rigoureusement de même l'erreur $\|T_1^a f - T_1^d f\|_{\infty}$, ce qui conduit à l'expression donnée pour $m_1(\xi)$.

Passons maintenant aux échelles plus grandes. Il est utile d'introduire les coefficients intermédiaires suivants :

$$T_j^i f(n) = \sum_k g_k^{a*} S_0^d f(n - 2^{j-1}k) \quad (\text{III.30})$$

$$S_j^i f(n) = \sum_k h_k^{a*} S_0^d f(n - 2^{j-1}k) \quad (\text{III.31})$$

Clairement, on a

$$\begin{aligned} \|\widehat{S_j^i f} - \widehat{S_j^d f}\|_1 &\leq \|\widehat{S_j^a f} - \widehat{S_j^i f}\|_1 + \|\widehat{S_j^i f} - \widehat{S_j^d f}\|_1 \\ \|\widehat{T_j^a f} - \widehat{T_j^d f}\|_1 &\leq \|\widehat{T_j^a f} - \widehat{T_j^i f}\|_1 + \|\widehat{T_j^i f} - \widehat{T_j^d f}\|_1 \end{aligned}$$

Examinons les coefficients $S_j^a f$ (le raisonnement pour les $T_j^a f$ est le même).

$$\begin{aligned} \|\widehat{S_j^i f} - \widehat{S_j^d f}\|_1 &= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0(2^{j-1}(\xi + 2\pi k)) \widehat{\varphi}(2^{j-1}(\xi + 2\pi k)) \widehat{f}(\xi + 2\pi k) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_0^a(2^{j-1}\xi) \widehat{\varphi}(2^{j-1}(\xi + 2\pi k)) \widehat{f}(\xi + 2\pi k) \right| d\xi \\ &\leq \|f\|_2 \left[\int_{\mathbb{R}} |M_0^a(2^{j-1}\xi) \widehat{\varphi}(2^{j-1}\xi) - \widehat{\varphi}(2^j\xi)|^2 d\xi \right]^{1/2} \\ &\leq \|f\|_2 2^{\frac{1-j}{2}} \left[\int_{\mathbb{R}} [m_0^a(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) - \widehat{\varphi}(2\xi)]^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En ce qui concerne le second terme, on a encore :

$$\begin{aligned} \|\widehat{S_j^a f} - \widehat{S_j^i f}\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} |m_0^a(2^{j-1}\xi)| |\widehat{S_{j-1}^a f}(\xi) - \widehat{S_{j-1}^d f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \sup |m_0^a| \|\widehat{S_{j-1}^a f} - \widehat{S_{j-1}^d f}\|_1 \end{aligned}$$

En réunissant ces deux estimations, on obtient ainsi les deux premières parties du théorème. Passons maintenant à la dernière. Supposons que $f(x) \in \mathcal{U}_0$. Alors

$$\hat{f}(\xi) = F(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

où $F(\xi)$ est une fonction 2π -périodique, de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. Un calcul explicite conduit alors à

$$\begin{aligned} \widehat{S_1^a f} - \widehat{S_1^d f} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (m_0^a(\xi)^* - m_0(\xi + 2\pi k)^*) |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 F(\xi) \\ &= 0 \quad \text{si } m_0^a = m_0. \end{aligned}$$

A titre d'exemple, considérons la célèbre ondelette LOG (Laplacian Of Gaussians)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1 - x^2)e^{-x^2/2} \tag{III.32}$$

La fonction d'échelle linéaire associée est simplement la gaussienne

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{III.33}$$

alors que l'ondelette intégrée est le DOG (Difference Of Gaussians)

$$\Psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(e^{-x^2/2} - 2e^{-2x^2}) \tag{III.34}$$

Pour plus de généralité, nous considérerons la famille de fonctions d'échelle

$$\hat{\varphi}_\alpha(\xi) = e^{-\xi^2/\alpha} \tag{III.35}$$

avec les ondelettes intégrées associées. Un calcul direct fournit les coefficients pour les filtres $\{h_k\}$ et $\{g_k\}$. Les coefficients, dans les cas $\alpha = 2$ à $\alpha = 6$ sont donnés dans le complément E.

III.3 Redondance en échelle

Pour "boucler la boucle" et revenir à une transformée en ondelettes algorithmiquement efficace et proche de la transformée continue que nous avons vue au début de cet ouvrage, il ne nous reste plus qu'à réintroduire la redondance en échelle.

Le moyen le plus simple est sans doute de réutiliser les formules précédentes et d'utiliser directement l'algorithme correspondant en partant de fonctions d'échelle, copies dilatées de celles que nous avons utilisées.

Plus précisément, considérons le cas d'une transformation en ondelettes, par rapport à des ondelettes de largeur de bande d'une octave approximativement et $N - 1$ échelles intermédiaires (en progression géométrique) par octave. Soit donc $a_\lambda = a_{j,\mu} = 2^{\lambda/N}$, où $\lambda = Nj + \mu$. Si $g(x)$ est l'ondelette infinitésimale, normalisée de sorte que $c_g = 1$, on pose alors,

$$\phi_\mu(x) = \int_{2^\mu}^{\infty} \frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right) \frac{da}{a} \quad (\text{III.36})$$

et

$$\psi_\mu(x) = \int_{2^{\mu-1}}^{2^\mu} \frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right) \frac{da}{a} = 2\phi_\mu(2x) - \phi_\mu(x) \quad (\text{III.37})$$

On dispose donc d'une famille de N fonctions d'échelle et ondelettes, copies dilatées les unes des autres. La même procédure que précédemment, appliquée à chacune des ondelettes et fonctions d'échelle, produit alors une famille de filtres passe-bas et passe-haut donnés par :

$$m_0^\mu(\xi) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{\phi}_\mu(2(\xi + 2\pi k)) \hat{\phi}_\mu(\xi + 2\pi k)^*}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}_\mu(\xi + 2\pi k)|^2} \quad (\text{III.38})$$

$$m_1^\mu(\xi) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{\psi}_\mu(2(\xi + 2\pi k)) \hat{\phi}_\mu(\xi + 2\pi k)^*}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}_\mu(\xi + 2\pi k)|^2} \quad (\text{III.39})$$

Remarque : Une variation possible. On peut aussi utiliser les mêmes idées pour construire une transformation en ondelettes dans laquelle toutes les échelles sont indépendantes. Il est alors suffisant d'utiliser une unique fonction d'échelle et d'introduire la famille d'ondelettes suivantes

$$w_\mu = \int_{2^{(\mu-1)/N}}^{2^{\mu/N}} \frac{1}{a} g\left(\frac{x}{a}\right) \frac{da}{a} \quad (\text{III.40})$$

La même procédure fournit alors les filtres

$$\tilde{m}_\mu(\xi) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{w}_\mu(2(\xi + 2\pi k)) \hat{\phi}(\xi + 2\pi k)^*}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k)|^2} \quad (\text{III.41})$$

qui vérifient :

$$\tilde{m}_0 + \sum \tilde{m}_\mu = 1 \quad (\text{III.42})$$

La reconstruction s'écrit :

$$S_{j_0} f = S_J f + \sum_{\mu} \sum_{j=J}^{j_0-1} T_j^{\mu} f \quad (\text{III.43})$$

où on a posé

$$T_j^{\mu} f(k) = \langle f, 2^{-j} w_{\mu}(2^{-j}(\cdot - k)) \rangle \quad (\text{III.44})$$

IV LE CAS BIDIMENSIONNEL

IV.1 Produit tensoriel

Nous avons déjà dit dans l'introduction qu'une condition nécessaire à l'existence d'algorithmes rapides de calcul de la transformée en ondelettes était la compatibilité du réseau de discrétisation avec les opérations élémentaires utilisées pour générer les ondelettes. Ceci reste vrai pour la transformée en ondelettes bidimensionnelle. Tant qu'on se limite à des translations et dilatations, des algorithmes rapides sont toujours disponibles. En revanche, on ne sait toujours pas, à l'heure actuelle, comment discrétiser des rotations en plus des dilatations et translations, de sorte que l'on ne dispose pas d'algorithme rapide pour la transformée en ondelettes avec rotations. On se contentera donc de décrire un algorithme attaché aux ondelettes classiques et donc fondé sur les mêmes idées de QMF.

Le plus simple consiste en fait à considérer un "produit tensoriel" de deux filtres unidimensionnels. Etant donnée une fonction d'échelle unidimensionnelle $\phi(x)$, associée à une paire de filtres $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$, on construit une fonction d'échelle bidimensionnelle

$$\phi(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (\text{IV.1})$$

Il est alors immédiat que

$$\hat{\phi}(2\xi_x, 2\xi_y) = m_0(\xi_x)m_0(\xi_y)\hat{\phi}(\xi_x, \xi_y) \quad (\text{IV.2})$$

de sorte qu'un candidat naturel pour le filtre passe-bas est :

$$m_0(\xi_x, \xi_y) = m_0(\xi_x)m_0(\xi_y) \quad (\text{IV.3})$$

Si nous conservons l'idée que le filtre unidimensionnel $m_0(\xi)$ est essentiellement localisé entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, $m_0(\xi_x, \xi_y)$ est lui essentiellement localisé dans le carré $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

En ce qui concerne les ondelettes, l'identité suivante, conséquence de l'équation aux QMFs unidimensionnelle

$$\sum_{i,j=0}^1 |m_i(\xi_x)m_j(\xi_y)|^2 = 1 \quad (\text{IV.4})$$

suggère l'utilisation non plus d'un filtre passe-haut, mais de trois, à savoir :

$$m_1^1(\xi_x, \xi_y) = m_0(\xi_x)m_1(\xi_y) \quad (\text{IV.5})$$

$$m_1^2(\xi_x, \xi_y) = m_1(\xi_x)m_0(\xi_y) \quad (\text{IV.6})$$

$$m_1^3(\xi_x, \xi_y) = m_1(\xi_x)m_1(\xi_y) \quad (\text{IV.7})$$

et conduit donc à trois ondelettes correspondantes :

$$\hat{\psi}^\epsilon(2\xi_x, 2\xi_y) = m_1^\epsilon(\xi_x, \xi_y)\hat{\phi}(\xi_x, \xi_y), \quad \epsilon = 1, 2, 3 \quad (\text{IV.8})$$

Il est facile de vérifier que si les $2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$, alors les $2^{-j}\psi^\epsilon(2^{-j}x - k, 2^{-j}y - l)$, $j, k, l \in \mathbb{Z}$, $\epsilon = 1, 2, 3$ forment une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$, pour laquelle on dispose des algorithmes rapides correspondants.

Si on note :

$$S_j^{k,l}f = \langle f, 2^{-2j}\phi(2^{-j} \cdot -k, 2^{-j} \cdot -l) \rangle \quad (\text{IV.9})$$

et

$$T_{j,\epsilon}^{k,l}f = \langle f, 2^{-2j}\psi^\epsilon(2^{-j} \cdot -k, 2^{-j} \cdot -l) \rangle, \quad (\text{IV.10})$$

il est facile de voir, d'après les calculs précédents, que l'on a :

$$S_j^{m,n}f = \sum_k \sum_l h_k^* h_l^* S_{j-1}^{2m-k, 2n-l}f \quad (\text{IV.11})$$

ainsi que

$$T_{j,1}^{m,n}f = \sum_k \sum_l h_k^* g_l^* S_{j-1}^{2m-k, 2n-l}f \quad (\text{IV.12})$$

$$T_{j,2}^{m,n}f = \sum_k \sum_l g_k^* h_l^* S_{j-1}^{2m-k, 2n-l}f \quad (\text{IV.13})$$

$$T_{j,3}^{m,n}f = \sum_k \sum_l g_k^* g_l^* S_{j-1}^{2m-k, 2n-l}f \quad (\text{IV.14})$$

On se retrouve donc exactement dans le même schéma algorithmique que précédemment. L'algorithme de resynthèse est exactement similaire au précédent.

IV.2 Algorithmes approchés

On peut, bien entendu, modifier encore une fois cet algorithme, par exemple, en n'utilisant plus que deux ondelettes au lieu de trois (dans ce cas, on n'a pas de base orthonormée sous-jacente et il est nécessaire de considérer des filtres de reconstruction différents des filtres d'analyse). Là encore, le choix de l'algorithme est lié à l'application que l'on souhaite en faire.

Néanmoins, cette structure algorithmique est trop contraignante si l'on s'intéresse à des ondelettes bidimensionnelles comme celles dont nous avons parlé auparavant, c'est-à-dire radiales ou localisées fréquemment. Dans un tel cas, on peut néanmoins reprendre la technique d'approximation développée dans le cadre unidimensionnel, pour construire des filtres approchés qui permettent un calcul efficace de coefficients en ondelettes.

Prenons pour simplifier le cas d'une fonction d'échelle radiale $\phi(x, y)$. Naturellement, il n'existe pas en général de fonction $2\pi \times 2\pi$ -périodique reliant $\phi(x, y)$ et $\phi(x/2, y/2)/4$. Il est en revanche toujours possible de chercher la combinaison linéaire des $\phi(x - k, y - \ell)$ la plus proche de $\phi(x/2, y/2)/4$. En procédant comme précédemment, on obtient immédiatement :

Proposition 4 Les fonctions périodiques :

$$m_0(\xi, \zeta) = \sum_{k, \ell} h_{k, \ell} \exp\{i(k\xi + \ell\zeta)\}$$

et

$$m_1(\xi, \zeta) = \sum_{k, \ell} g_{k, \ell} \exp\{i(k\xi + \ell\zeta)\}$$

qui minimisent respectivement :

$$\|\phi(x/2, y/2)/4 - \sum_{k, \ell} h_{k, \ell} \phi(x + k, y + \ell)\|_2$$

et

$$\|\psi(x/2, y/2)/4 - \sum_{k, \ell} g_{k, \ell} \phi(x + k, y + \ell)\|_2,$$

sont données par

$$m_0(\xi, \zeta) = \frac{\sum_{k, \ell \in \mathbf{Z}} \hat{\phi}(2(\xi + 2\pi k), 2(\zeta + 2\pi \ell)) \hat{\phi}(\xi + 2\pi k, \zeta + 2\pi \ell)^*}{\sum_{k, \ell \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k, \zeta + 2\pi \ell)|^2} \quad (\text{IV.15})$$

et

$$m_1(\xi, \zeta) = \frac{\sum_{k, \ell \in \mathbf{Z}} \hat{\psi}(2(\xi + 2\pi k), 2(\zeta + 2\pi \ell)) \hat{\phi}(\xi + 2\pi k, \zeta + 2\pi \ell)^*}{\sum_{k, \ell \in \mathbf{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k, \zeta + 2\pi \ell)|^2} \quad (\text{IV.16})$$

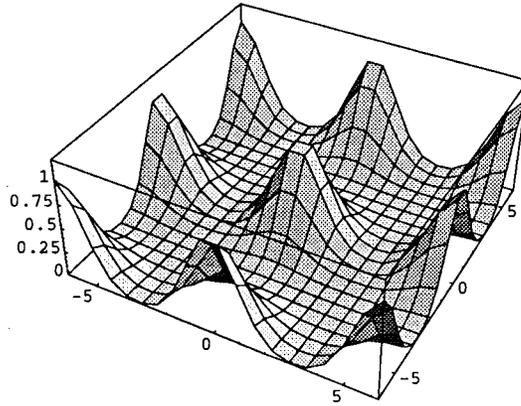


Figure VIII.3 : Filtre passe-bas approché pour ondelette LOG bidimensionnelle.

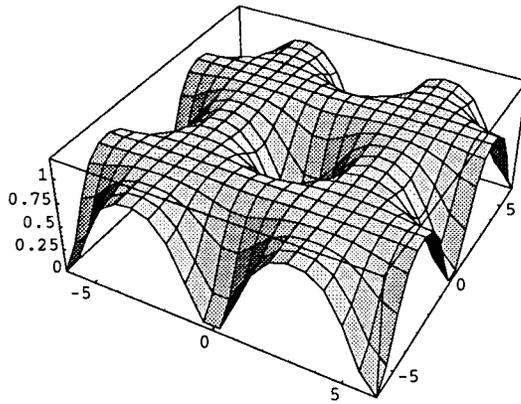


Figure VIII.4 : Filtre passe-haut approché pour ondelette LOG bidimensionnelle.

Exemple : Ondelettes LOG. Si nous reprenons l'exemple précédent des ondelettes laplacien de gaussienne bidimensionnelles, les filtres correspondants peuvent être calculés numériquement. Les fonctions m_0 et m_1 approchées sont respectivement représentées en figure VIII.3 et VIII.4.

On traite de façon similaire le cas d'ondelettes associées à des rotations.

V COMMENTAIRES ET RÉFÉRENCES

Les algorithmes pyramidaux fondés sur les QMFs sont en fait antérieurs aux premières constructions d'ondelettes. En effet, les techniques de laplacien pyramidal remontent aux travaux de Burt et Adelson [1] sur la vision par ordinateur et les méthodes de codage en sous-bandes ont été proposées initialement en 1977 par Esteban et Galand [6], puis modifiées en 1986 par Smith et Barnwell [14] dans un contexte de traitement d'images.

La relation entre les QMF et les bases d'ondelettes a été dans un premier temps notée et utilisée par S. Mallat [8], puis clarifiée par A. Cohen [2] et W. Lawton [7], qui ont montré sous quelles conditions il y a équivalence entre les deux approches. Ces aspects de l'analyse par ondelettes ont donné naissance à une importante littérature (voir [4] par exemple pour une revue de différents aspects). En particulier, Coifman, Meyer et Wickerhauser ont montré quel parti on pouvait tirer de la richesse algorithmique des décompositions en ondelettes et ont construit des algorithmes pyramidaux adaptatifs, permettant de sélectionner une "meilleure base" dans une bibliothèque fournie par l'algorithme (voir [16] pour une description complète).

- [1] P. Burt, E. Adelson, "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Coder", *IEEE Trans. on Comm.*, **31** (1983) p. 482-540.
- [2] A. Cohen, "Ondelettes et traitement du signal digital", Thèse de doctorat, CEREMADE (1990)
- [3] I. Daubechies, "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets", *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1988) p. 909-996.
- [4] I. Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", *CBMS-NSF series, SIAM* (1992).
- [5] M. Duval-Destin, M.A. Muschietti, B. Torrèsani, "Continuous Wavelet Decompositions: Multiresolution and Contrast Analysis", *SIAM J. Math. An.*, **24** (1993) p. 739-755.
- [6] D. Esteban, G. Galand, "Application of Quadrature Mirror Filters to Split Band Voice Coding Schemes", *Proc. Int. Conf. ASSP* (1977) p. 191-195.
- [7] W. Lawton, "Sufficient Conditions for Constructing Orthonormal Wavelet Bases", *J. Math. Phys.*, **32** (1991) p. 57-61.
- [8] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", *IEEE Trans. Pattern Anal. and Mach. Intell.*, **11**, n. 7 (1989) p. 674-693.
- [9] D. Marr, *Vision*, Freeman (1982).

- [10] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs : I. Ondelettes*, Hermann (1989).
- [11] Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents*, Masson (1993).
- [12] R. Murenzi, "Ondelettes multidimensionnelles et applications à l'analyse d'images", Thèses, IPT Louvain-La-Neuve (1990).
- [13] M.A. Muschietti, B. Torrèsani, "Pyramidal Algorithms for Littlewood-Paley Decompositions", *SIAM J. Math. An.*, à paraître.
- [14] M.J. Smith, D.P. Barnwell, "Exact Reconstruction for Tree-Structured Subband Coders", *IEEE Trans. ASSP*, **34** (1986) p. 434-441.
- [15] B. Torrèsani, "Approximate Filters for LOG Wavelets", code MathematicaTM, FTP anonyme à cpt.univ-mrs.fr, dans [/pub/preprints/94/wavelets/94-P.3002](http://pub/preprints/94/wavelets/94-P.3002).
- [16] M.V. Wickerhauser, *Adapted Wavelets Analysis from Theory to Software*, A.K. Peters Publ. Comp. (1994).

VI COMPLÉMENT E : FILTRES POUR ONDELETTES SPLINES ET LOG

Nous donnons dans ce complément plus de détail sur deux exemples d'ondelettes associées à des algorithmes pyramidaux. Le premier exemple est une famille d'ondelettes pour laquelle il existe un algorithme rapide de décomposition-synthèse : les ondelettes splines. Le second est une application de la méthode des pseudo-QMFs développée dans la section III du présent chapitre.

VI.1 Splines de base et ondelettes de Battle-Lemarié

On connaît maintenant de nombreux exemples de filtres $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$ permettant l'utilisation des algorithmes pyramidaux décrits au chapitre VIII. Le prototype des ondelettes et des fonctions d'échelle associées à une telle structure algorithmique est fourni par les ondelettes dites splines (associées à la théorie de l'approximations par fonctions splines), dont nous avons ébauché la construction dans la section II du chapitre VIII. Nous développons maintenant cette construction en détail.

Définition 1 La fonction spline de base d'ordre n $\beta^n(x)$ est définie récursivement par

$$\beta^n(x) = \beta^0 * \beta^{n-1}(x) \quad (\text{E.1})$$

où $\beta_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$.

On voit immédiatement que

$$\widehat{\beta}^n(\xi) = \left(\frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi} \right)^{n+1} \quad (\text{E.2})$$

Si l'on note

$$\mathcal{V}_0^{(n)} = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^{n-1}(\mathbb{R}), \text{ polynômiale}\}$$

$$\text{d'ordre } n \text{ sur } [k, k + 1[, \forall k \in \mathbb{Z} \} \tag{E.3}$$

alors c'est un résultat classique de théorie de l'approximation que toute $f(x) \in \mathcal{V}_0^{(n)}$ peut être représentée comme combinaison linéaire des translatées entières de $\beta^n(x)$:

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \beta^n(x - k) \tag{E.4}$$

Plus précisément, on a :

Théorème 1 *La collection des translatées entières $\beta_k^n(x) = \beta^n(x - k)$ est une base inconditionnelle de $\mathcal{V}_0^{(n)}$, i.e. il existe deux constantes $0 < C \leq C' < \infty$ telles que $\forall \{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$*

$$C \|\alpha\|_{\ell^2} \leq \|\sum_k \alpha_k \beta^n(x - k)\|_2 \leq C' \|\alpha\|_{\ell^2} \tag{E.5}$$

De plus, il existe $\tilde{\beta}^n(x) \in \mathcal{V}_0^{(n)}$ telle que

$$\langle \beta_k^n, \tilde{\beta}_l^n \rangle = \delta_{kl} \tag{E.6}$$

Toute $f(x) \in \mathcal{V}_0^{(n)}$ peut être décomposée comme :

$$f(x) = \sum_k \langle f, \tilde{\beta}_k^n \rangle \beta_k^n(x) = \sum_k \langle f, \beta_k^n \rangle \tilde{\beta}_k^n(x) \tag{E.7}$$

On déduit immédiatement de l'équation (E.6) la forme de $\tilde{\beta}^n(x)$ dans l'espace de Fourier :

$$\widehat{\tilde{\beta}^n}(\xi) = \frac{\widehat{\beta^n}(\xi)}{\sum_\ell |\widehat{\beta^n}(\xi + 2\pi\ell)|^2} \tag{E.8}$$

Bien entendu, la collection des $\beta^n(x - k)$ est loin d'être l'unique base inconditionnelle de $\mathcal{V}_0^{(n)}$. En particulier, on a :

Lemme 1 *Soit $g(x) = \sum_k \alpha_k \beta^n(x - k)$, où $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. La collection des $g(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ est une base inconditionnelle de $\mathcal{V}_0^{(n)}$ si et seulement si la transformée de Fourier $m(\xi) = \sum_k \alpha_k \exp\{ik\xi\}$ de la suite $\{\alpha_k, k \in \mathbb{Z}\}$ est telle que*

$$0 < A \leq |m(\xi)| \leq B < \infty \tag{E.9}$$

pour deux constantes réelles finies A et B .

Preuve : Il suffit d'écrire, $\forall \{\gamma_k, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\left\| \sum_k \gamma_k g(x-k) \right\|_2 = \left\| \sum_k \sum_\ell \gamma_\ell \alpha_k \beta^n(x-k-\ell) \right\|_2$$

On a alors

$$C \|\alpha * \gamma\|_{\ell^2} \leq \left\| \sum_k \gamma_k g(x-k) \right\|_2 \leq C' \|\alpha * \gamma\|_{\ell^2}$$

et le lemme en est le résultat.

Les fonctions splines de base sont bien adaptées à la structure algorithmique pyramidale du chapitre VIII, pour la raison suivante :

Lemme 2 *Les fonctions splines de base vérifient l'équation à deux échelles :*

$$\frac{1}{2} \beta^n \left(\frac{x}{2} \right) = \sum_{k=0}^{n+1} u_k^n \beta^n(x+k) \quad (\text{E.10})$$

où les coefficients u_k^n ne sont autres que :

$$u_k^n = 2^{-n-1} \binom{n+1}{k} \quad (\text{E.11})$$

Preuve : Il suffit d'écrire l'expression de $\widehat{\beta}^n(\xi)$ pour voir :

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}^n(2\xi) &= \left(\frac{e^{i\xi} + 1}{2} \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi} \right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{e^{i\xi} + 1}{2} \right)^{n+1} \widehat{\beta}^n(\xi) \end{aligned}$$

En développant :

$$\left(\frac{e^{i\xi} + 1}{2} \right)^{n+1} = 2^{-n-1} \sum_k \binom{n+1}{k} e^{ik\xi}$$

on obtient bien l'équation à deux échelles recherchée.

La conséquence immédiate de la relation à deux échelles est que le calcul des coefficients $\langle f, 2^{-j} \beta^n(2^{-j}x-k) \rangle$ d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut s'effectuer *via* l'algorithme de codage en sous-bandes. Les coefficients u_k^n sont les coefficients de Fourier du filtre passe-bas :

$$m_0(\xi) = \left(\frac{e^{i\xi} + 1}{2} \right)^{n+1} \quad (\text{E.12})$$

alors que le filtre passe-bas associé à $\tilde{\beta}^n$ est donné par :

$$\tilde{m}_0(\xi) = \frac{\widehat{\tilde{\beta}^n}(2\xi)}{\widehat{\tilde{\beta}^n}(\xi)} = m_0(\xi) \frac{\sum_{\ell} |\widehat{\tilde{\beta}^n}(\xi + 2\pi\ell)|^2}{\sum_{\ell} |\widehat{\tilde{\beta}^n}(2\xi + 2\pi\ell)|^2} \quad (\text{E.13})$$

Les coefficients de Fourier de ces filtres peuvent être calculés numériquement.

Dans la terminologie des ondelettes, $\beta^n(x)$ est appelée fonction d'échelle. On construit ici les ondelettes associées de la façon suivante. Les translatées de la dilatée de $\beta^n(x)$:

$$2^{-j/2} \beta^n(2^{-j}x - k)$$

forment une base inconditionnelle de l'espace fermé $\mathcal{V}_j^{(n)}$ qu'elles engendrent.

$$\mathcal{V}_j^{(n)} = \left\{ \sum_k \alpha_k 2^{-j/2} \beta^n(2^{-j}x - k), \{\alpha_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \quad (\text{E.14})$$

On introduit alors l'espace $\mathcal{W}_j^{(n)}$, complément orthogonal de $\mathcal{V}_j^{(n)}$ dans $\mathcal{V}_{j-1}^{(n)}$. Dans ce contexte, une ondelette sera une fonction $\psi(x) \in \mathcal{W}_0^{(n)}$, telle que la collection de ses translatées entières soit une base inconditionnelle de $\mathcal{W}_0^{(n)}$. De l'inclusion $\mathcal{W}_1^{(n)} \subset \mathcal{V}_0^{(n)}$, on déduit immédiatement l'existence d'une suite $\{g_k^n\}$ telle que :

$$\frac{1}{2} \psi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_k g_k^n \beta^n(x + k) \quad (\text{E.15})$$

Cette équation à deux échelles conduit, elle aussi, directement à un algorithme de type "codage en sous-bandes" pour le calcul des coefficients $\langle f, 2^{-j} \psi(2^{-j}x - k) \rangle$ d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Naturellement, le lemme 1 s'applique également à $\mathcal{W}_0^{(n)}$, de sorte que toute fonction $\sum_k \gamma_k \psi(x - k)$, où $\{\gamma_k\}$ définit un opérateur de convolution inversible, fournit aussi une base inconditionnelle de $\mathcal{W}_0^{(n)}$.

Nous voyons donc qu'il subsiste une grande liberté pour le choix des fonctions $g(x)$ et $\psi(x)$ (et donc des filtres d'analyse $m_0(\xi)$ et $m_1(\xi)$). En revanche, une fois ces fonctions d'analyse fixées, les fonctions et les filtres de synthèse sont complètement déterminés.

Il existe notamment des choix conduisant à des fonctions d'échelle interpolatrices (c'est-à-dire telles que $g(k) = \delta_{k,0} \forall k \in \mathbb{Z}$, ce qui permet d'écrire $f(x) = \sum_k f(k)g(x - k) \forall \phi \in \mathcal{V}_0^{(n)}$) ou à des ondelettes $\psi(x)$ à support compact.

Parmi tous ces choix possibles, on peut en particulier utiliser la procédure de Gram pour orthonormaliser la base de $\mathcal{V}_0^{(n)}$. On obtient ainsi les ondelettes de Battle-Lemarié :

Théorème 2 Soit $\beta^n(x)$ une fonction spline de base et soit $\mathcal{V}_0^{(n)}$ l'espace fermé sous-tendu par ses translatées entières. Soient $\phi(x)$ et $\psi(x)$ définies par leur transformée de Fourier :

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\widehat{\beta^n}(\xi)}{\sqrt{\sum_{\ell} |\widehat{\beta^n}(\xi + 2\pi\ell)|^2}} \quad (\text{E.16})$$

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \frac{\hat{\phi}(\xi + 2\pi)}{\hat{\psi}(\xi/2 + \pi)} \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (\text{E.17})$$

i) La collection des $\phi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}_0^{(n)}$.

ii) La collection des $\psi(x - k)$, $k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormée de $\mathcal{W}_0^{(n)}$.

La preuve de ce théorème résulte d'une vérification directe. Etant donnée une fonction $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ à décomposer, le calcul de ses coefficients par rapport à cette base s'effectue au moyen de l'algorithme de codage en sous-bandes, les coefficients des filtres étant les coefficients de Fourier des fonctions 2π -périodiques :

$$m_0(\xi) = \hat{\phi}(2\xi)/\hat{\phi}(\xi) \quad (\text{E.18})$$

$$m_1(\xi) = \hat{\psi}(2\xi)/\hat{\phi}(\xi) \quad (\text{E.19})$$

qui se calculent numériquement. Les ondelettes de Battle-Lemarié ne sont pas à support compact, mais présentent l'avantage d'utiliser les mêmes filtres pour l'analyse et la synthèse.

VI.2 Filtres approchés pour ondelettes LOG

Nous revenons ici plus en détails sur les ondelettes "laplacien de gaussienne" et "différence de gaussiennes", et les coefficients des filtres approchés qui leur sont associés. Rappelons ici, qu'à la différence des ondelettes splines que nous venons d'étudier, nous avons abandonné toute notion d'orthogonalité. Les translatées entières des ondelettes et des fonctions d'échelle ne sont plus orthogonales ; de plus, les analogues des espaces $\mathcal{V}_0^{(n)}$ et $\mathcal{W}_0^{(n)}$ ne sont plus orthogonaux entre eux.

Le but de cette section est de fournir les valeurs numériques des coefficients des filtres approchés pour ces ondelettes. Ces valeurs ne sont en effet pas disponibles dans la littérature.

Considérons donc les fonctions d'échelle

$$\hat{\varphi}_\alpha(\xi) = e^{-\xi^2/\alpha} \quad (\text{E.20})$$

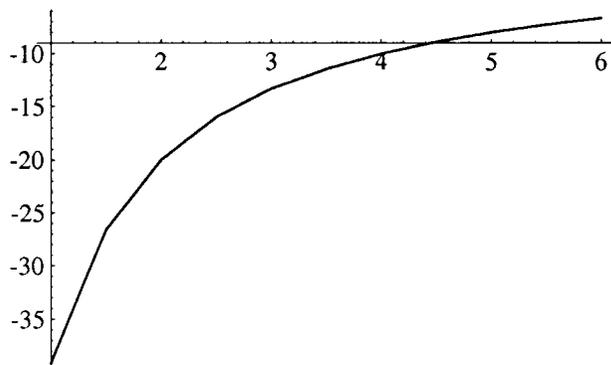


Figure VIII.5 : $\log \nu(\mu_1, m_1)$ en fonction de α .

avec les ondelettes intégrées associées (voir les formules (III.32) à (III.35) du chapitre VIII). Les coefficients du filtre passe-bas

$$m_0(\xi) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k) \widehat{\varphi}(2(\xi + 2\pi k))}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2}, \quad (\text{E.21})$$

dans les cas $\alpha = 2$ à $\alpha = 6$, sont représentés dans les tableaux 1 et 2.

Quant aux coefficients du filtre passe-haut

$$m_1(\xi) = \frac{\sum_{k \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k) \widehat{\Psi}(2(\xi + 2\pi k))}{\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2} \quad (\text{E.22})$$

ils se déduisent immédiatement de la relation :

$$m_0(\xi) + m_1(\xi) = 1 \quad (\text{E.23})$$

La précision de l'algorithme approché correspondant se mesure directement au paramètre $\nu(\mu_1, m_1)$, dont le logarithme est représenté à la figure VIII.5, en fonction de α .

Tableau VIII.1 : Coefficients du filtre $\{h_k\}$.

$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$
0.2303293981504295	0.2820879504943221	0.3256327400276189
0.1949696890597745	0.2197019560174942	0.23348983204217
0.1182550445250639	0.1037718457676399	0.085798244731082
0.0513934674734677	0.02973617314347277	0.01625749135447543
0.01600406489791245	0.005164308485305415	0.0015489926732795
0.003571008383091751	0.000546197488144622	0.0000922406284932685
0.000570918511923951	0.00003372200057470929	$-6.329399769840077 \cdot 10^{-6}$
0.00006541345583418924	$2.088986689311967 \cdot 10^{-6}$	$5.046635369126971 \cdot 10^{-6}$
$5.362330274241683 \cdot 10^{-6}$	$-4.723263083251334 \cdot 10^{-7}$	$-3.037204277690354 \cdot 10^{-6}$
$3.207260971336785 \cdot 10^{-7}$	$3.455616621472636 \cdot 10^{-7}$	$1.840533840997319 \cdot 10^{-6}$
$9.48164740493837 \cdot 10^{-9}$	$-2.367435406612139 \cdot 10^{-7}$	$-1.115951095201895 \cdot 10^{-6}$
$3.36607196807179 \cdot 10^{-9}$	$1.62569144373247 \cdot 10^{-7}$	$6.767716261725134 \cdot 10^{-7}$
$-2.292280072147649 \cdot 10^{-9}$	$-1.116847864424092 \cdot 10^{-7}$	$-4.104633291249153 \cdot 10^{-7}$
$1.788522779512123 \cdot 10^{-9}$	$7.674439326224147 \cdot 10^{-8}$	$2.4895426118785 \cdot 10^{-7}$
$-1.391076845433387 \cdot 10^{-9}$	$-5.274060648001265 \cdot 10^{-8}$	$-1.509974254859814 \cdot 10^{-7}$
$1.082557022573435 \cdot 10^{-9}$	$3.624643193430867 \cdot 10^{-8}$	$9.15843523247666 \cdot 10^{-8}$

Tableau VIII.2 : Coefficients du filtre $\{h_k\}$ (suite).

$\alpha = 5$	$\alpha = 6$
0.3636450885964668	0.3972771041574456
0.2405389812712865	0.2433136948393599
0.06849623968237273	0.05323383400865474
0.008720731154457	0.004788125238023543
0.0003826569816774996	-0.00002934485917262438
0.00005326775323516695	0.00007751303939803942
-0.00002238764144303302	-0.00003576989742401233
0.00001201348496626678	0.00001688424764446744
$-6.425396023889129 \cdot 10^{-6}$	$-7.973936211287443 \cdot 10^{-6}$
$3.438542742579532 \cdot 10^{-6}$	$3.766450307869193 \cdot 10^{-6}$
$-1.840408005570329 \cdot 10^{-6}$	$-1.779127172761447 \cdot 10^{-7}$
$9.85082341844433 \cdot 10^{-7}$	$8.40398274685488 \cdot 10^{-7}$
$-5.272739623658996 \cdot 10^{-7}$	$-3.96975836221321 \cdot 10^{-7}$
$2.822290126514502 \cdot 10^{-7}$	$1.875180862168162 \cdot 10^{-7}$
$-1.510662429203402 \cdot 10^{-7}$	$-8.8577269777009 \cdot 10^{-8}$
$8.08599235222767 \cdot 10^{-8}$	$4.184093934894746 \cdot 10^{-8}$

ANNEXE A : ÉLÉMENTS D'ANALYSE

Nous donnons ici quelques éléments nécessaires pour la lecture du texte. Les notions de base sont supposées connues et nous ne nous y attarderons donc pas. Donnons tout de même quelques détails supplémentaires sur les espaces fonctionnels, ainsi que sur la transformation de Fourier et les distributions continuellement utilisées dans le corps de l'ouvrage.

I NOTIONS DE BASE

Nous manipulons tout au long de cet ouvrage un certain nombre de notions simples d'analyse telles que des notions de continuité, de différentiabilité ou d'intégrabilité. Nous décrivons ici quelques points nécessaires, sans entrer dans les détails techniques. Nous renvoyons par exemple à [8], [7] ou [4] pour une présentation complète.

I.1 Continuité, différentiabilité, régularité

Nous ne reviendrons pas en détail sur la notion de continuité. Comme à l'habitude, nous noterons $C^m(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions m fois différentiables sur \mathbb{R}^n . Un outil essentiel que nous utiliserons est la formule de Taylor, que l'on peut écrire dans le cas multidimensionnel comme suit. Si $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, alors on peut écrire :

$$f(x) = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x_0) + r_{m, x_0}(x) \quad (\text{I.1})$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \\ \alpha! &= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \\ f^{(\alpha)} &= \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n} f \end{aligned}$$

et $r_{m,x_0}(x)$ est un reste, borné par

$$|r_{k,x_0}(x)| \leq \frac{1}{m!} \sup_{x,\alpha=m} |f^\alpha(x)| \quad (\text{I.2})$$

On dispose de formules analogues dans le cas de fonctions différentiables sur un ouvert.

Il existe des mesures plus fines de régularité des fonctions. Nous nous intéresserons en particulier aux propriétés de régularité hölderienne.

Si $0 < \alpha < 1$, l'espace $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ est défini comme suit :

$$\Lambda^\alpha(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \exists A < \infty, |f(y) - f(x)| \leq A|y - x|^\alpha \forall x, y \in \mathbb{R}\} \quad (\text{I.3})$$

Si l'on note $\|f\|_\alpha$ la borne inférieure des constantes A telle que l'inégalité précédente soit vérifiée, on peut vérifier que $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme (à condition de considérer les éléments de $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ modulo une constante additive, ce qui est implicite dans la définition), qui fait de $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ un espace de Banach. Nous verrons comment caractériser de tels espaces au moyen de la transformation en ondelettes¹.

Si $p < \alpha < p + 1$, $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ est défini comme suit :

$$\Lambda^\alpha = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \exists K < \infty, P(x) \text{ polynôme de degré } \leq p, \right. \\ \left. |f(x) - P(x - y)| \leq K|x - y|^\alpha \forall x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{I.4})$$

et la généralisation immédiate de la norme précédente en fait aussi un espace de Banach. (Il faut cette fois considérer les éléments de $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ modulo les polynômes de degré p .)

Ce critère de régularité peut aussi être testé localement : la fonction $f(x)$ sera dite hölderienne d'exposant $\alpha \in]p, p+1[$ au point x_0 , s'il existe un polynôme $P_{x_0}(x)$ de degré inférieur ou égal à p et une constante $A > 0$ tels que $\forall h \leq h_0$:

$$|f(x_0 + h) - P_{x_0}(h)| \leq A|h|^\alpha \quad (\text{I.5})$$

Si $f(x)$ est p fois différentiable en x_0 , $P_{x_0}(h)$ n'est autre que le développement de Taylor à l'ordre p de $f(x)$ en x_0 . Nous montrons au chapitre IV comment mesurer précisément ce type de régularité.

¹En anticipant quelque peu, disons qu'une ondelette est par essence une fonction d'intégrale nulle (il s'agit là d'une propriété "minimale"). Les ondelettes sont bien adaptées à l'étude de $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$; en effet, le produit scalaire d'une ondelette par une fonction constante est donc nul ; on dit parfois que les ondelettes ne "voient pas les constantes additives".

I.2 Mesurabilité, intégrabilité

La mesure de Lebesgue² sur \mathbb{R} est l'application qui à tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ associe

$$E \rightarrow |E| = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |b_i - a_i|, E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty}]a_i, b_i[\right\} \quad (\text{I.6})$$

l'inf étant pris sur tous les recouvrements de E par des ouverts $]a_i, b_i[$. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n est simplement obtenue en considérant des produits cartésiens.

Le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable si pour tout $F \subset \mathbb{R}^n$, on a $|F| = |F \cap E| + |F \cap E^c|$.

Une fonction $f(x)$ est dite mesurable si pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_y = \{x, f(x) > y\}$ est mesurable.

Etant donnée une fonction $f(x)$, son intégrale de Riemann sur l'intervalle $[a, b]$ est définie de la façon suivante. Considérant des partitions quelconques $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_\infty = b$ de $[a, b]$ en sous-intervalles $[a_k, a_{k+1}]$ de taille maximale δ , et pour tout k un $x_k \in [a_k, a_{k+1}]$ quelconque :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_k f(x_k)(a_{k+1} - a_k) \quad (\text{I.7})$$

$f(x)$ est dite intégrable au sens de Riemann si la limite existe, indépendamment de la partition et des points x_k choisis.

Etant donnée une fonction Lebesgue mesurable $f(x) \geq 0$, on lui associe sa fonction de distribution $y_f(x)$, définie par

$$y_f(x) = |\{y \in \mathbb{R}, f(x) > y\}| \quad (\text{I.8})$$

Si $y_f(x)$ est intégrable au sens de Riemann, $f(x)$ est intégrable. Son intégrale de Lebesgue est alors :

$$\int f(x) dx = \int_0^\infty y_f(x) dx \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas général, on suppose $|f(x)|$ intégrable et on note : $f_+(x)$ (resp. $f_-(x)$) est le produit de $f(x)$ par la fonction de Heaviside $H(x)$ (resp. $H(-x)$). Alors l'intégrale de Lebesgue de $f(x)$ est donnée par

$$\int f(x) dx = \int_0^\infty y_{f_+}(x) dx - \int_0^\infty y_{f_-}(x) dx \quad (\text{I.10})$$

²Il s'agit en fait de la mesure extérieure de Lebesgue, mais nous n'entrerons pas dans ces détails ici.

II ESPACES FONCTIONNELS ET DISTRIBUTIONS

II.1 Les espaces L^p

Soit $1 \leq p \leq \infty$. Dans tout ce qui suit, on notera

$$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \|f\|_p = \left[\int |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty\} \quad (\text{II.1})$$

l'espace des fonctions p -sommables sur \mathbb{R} par rapport à la mesure de Lebesgue et $L^p(\mathbb{R}^n)$ la généralisation multidimensionnelle évidente. On notera également

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}, \|f\|_\infty = \text{ess sup}|f(x)| < \infty\} \quad (\text{II.2})$$

où

$$\text{ess sup}|f(x)| = \inf\{r : y_{|f|}(r) = 0\}$$

Pour tout p , $L^p(\mathbb{R})$ est complet par rapport à la métrique d_p induite par $\|\cdot\|_p$, définie par

$$d_p(f, g) = \|f - g\|_p \quad f, g \in L^p \quad (\text{II.3})$$

Dans le cas périodique (par exemple 2π -périodique) on dira que $f \in L^p([0, 2\pi])$ si

$$\|f\|_{L^p([0, 2\pi])} = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (\text{II.4})$$

On notera enfin $\ell^p(\mathbb{Z})$ l'analogue discret des espaces L^p ; plus précisément, on dira que la suite $\{s_n, n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ si

$$\|f\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} |s_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (\text{II.5})$$

II.2 L'espace L^2

Parmi les espaces L^p , l'espace $L^2(\mathbb{R})$ a un statut particulier en ce sens qu'il est muni d'un produit scalaire (en d'autres termes une forme hermitienne non dégénérée), que nous noterons :

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)^* dx \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad (\text{II.6})$$

Quand il n'y a pas de confusion possible, nous noterons plus simplement $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la norme et le produit scalaire dans L^2 . Le produit scalaire permet de donner à $L^2(\mathbb{R})$ une structure d'espace de Hilbert.

Comme dans tous les espaces où la norme provient d'un produit scalaire, celui-ci peut être retrouvé à partir de la norme en utilisant l'identité de polarisation :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} \{ (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) + i (\|f + ig\|^2 - \|f - ig\|^2) \} \quad (\text{II.7})$$

II.3 Quelques inégalités utiles

Nous utiliserons constamment par la suite les deux ensembles d'inégalités suivantes :

II.3.1 Inégalités de Hölder

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors le produit point par point fg appartient à $L^r(\mathbb{R})$, où r est donné par

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (\text{II.8})$$

De plus :

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (\text{II.9})$$

Les cas particuliers classiques sont l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\langle f, g \rangle \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \quad (\text{II.10})$$

et

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_\infty \|g\|_p \quad (\text{II.11})$$

II.3.2 Inégalités de Young

Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$, alors le produit de convolution $f * g$

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy \quad (\text{II.12})$$

appartient à $L^r(\mathbb{R})$, où r est maintenant donné par

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (\text{II.13})$$

De plus :

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \quad (\text{II.14})$$

Ceci implique en particulier que tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$ sont stables par convolution avec une fonction intégrable : $L^1 * L^p = L^p$. On peut aussi montrer que, si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, le produit de convolution $f * g$ est alors une fonction continue.

II.3.3 Inégalités intégrales de Minkowsky

Si $F(x, y)$ est une fonction de deux variables, intégrable sur $X \times Y$, alors

$$\left[\int_Y \left(\int_X |F(x, y)| dx \right)^p dy \right]^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left[\int_Y |F(x, y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} dx \quad (\text{II.15})$$

pour tout $1 \leq p < \infty$.

II.4 Identité approchée

Soit $\{\phi_\epsilon, \epsilon \in \mathbb{R}_+^*\}$ une famille de fonctions intégrables. On dira que cette famille fournit une identité approchée dans $L^p(\mathbb{R})$, $p < \infty$ si $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$ on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f - f * \phi_\epsilon\|_p = 0 \quad (\text{II.16})$$

On dira alors que $f * \phi_\epsilon$ tend (fortement) vers f dans L^p . Un exemple d'identité approchée est obtenu comme suit : Si $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction d'intégrale égale à 1, on pose :

$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \quad (\text{II.17})$$

Il est facile de montrer que l'on obtient ainsi une identité approchée de $L^2(\mathbb{R})$ par exemple.

II.5 Fonctions de test et distributions

Etant donnée une fonction $f(x)$ mesurable, on définit son support $\text{supp}(f)$ comme le complémentaire de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$. $\text{supp}(f)$ est un ensemble mesurable.

On appellera fonctions de test les fonctions de classe C^∞ à support compact et on notera $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces fonctions.

On dira d'une fonction qu'elle appartient à la classe de Schwartz si toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, c'est-à-dire telles que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, il existe une constante finie strictement positive $C_{m,n}$ telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^n \frac{d^m f(x)}{dx^m} \right| < C_{m,n} \quad (\text{II.18})$$

On notera $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ la classe des fonctions de Schwartz. On a clairement, $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il est à noter que les espaces $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont tous deux denses dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p < \infty$.

Etant donné un espace fonctionnel noté génériquement $F(\mathbb{R})$, son espace dual est défini comme l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur $F(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des applications continues $T : F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}$ telles que $\forall f, g \in F(\mathbb{R})$

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g) \quad (\text{II.19})$$

L'espace $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ dual de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions et l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions tempérées :

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad (\text{II.20})$$

Les distributions se dérivent conformément à la règle : si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} T \right) (f) = (-1)^n T \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (\text{II.21})$$

Parmi les exemples les plus classiques de distributions (hormis les distributions de type "fonction"), les plus utiles nous seront la "masse de Dirac" :

$$\delta(f) = f(0) \quad (\text{II.22})$$

ainsi que ses dérivées. Par abus de notation, on traite souvent la distribution de Dirac comme s'il s'agissait d'une distribution de type fonction, que l'on note $\delta(x)$.

Toutes ces notions s'étendent de façon immédiate au cadre multidimensionnel.

III ANALYSE DE FOURIER

III.1 Transformation de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$; sa transformée de Fourier est définie par :

$$\hat{f}(\xi) = [F \cdot f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (\text{III.1})$$

Alors \hat{f} est continue, bornée et s'annule à l'infini (ce résultat est connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue). On montre aussi facilement que pour toutes fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \hat{f}(x) dx \quad (\text{III.2})$$

En supposant de plus que f et \hat{f} sont suffisamment rapidement décroissantes à l'infini (plus précisément f et \hat{f} sont respectivement $O(x^{-2})$ et $O(\xi^{-2})$ à l'infini), on obtient la formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{III.3})$$

Ces hypothèses de décroissance à l'infini sont, en particulier, vérifiées par toute fonction de la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Il est facile aussi de vérifier que la transformée de Fourier de toute fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, de telle sorte que la transformée de Fourier F restreinte à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

La transformation de Fourier est étendue aux distributions tempérées (c'est-à-dire aux éléments du dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) comme suit : si $\sigma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\hat{\sigma}$ est définie par : $\langle \hat{\sigma}, f \rangle = \langle \sigma, \hat{f} \rangle$ pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On transporte la transformée de Fourier au cadre $L^2(\mathbb{R})$ de la manière suivante : si

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)^* dx \quad (\text{III.4})$$

est la forme hermitienne sur $L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle \quad (\text{III.5})$$

Par conséquent, $\frac{F}{\sqrt{2\pi}}$ est une isométrie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, munie de la structure pré-hilbertienne induite par la structure hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Finalement, par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, cette isométrie s'étend à $L^2(\mathbb{R})$.

Le cas multidimensionnel est très similaire. Nous noterons $\hat{f}(\xi)$ la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, définie comme

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi \cdot x} dx \quad (\text{III.6})$$

De nouveau, la transformation de Fourier se prolonge en une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (à une constante près), c'est-à-dire que l'on a $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle \quad (\text{III.7})$$

Remarque : En incluant la transformation de Fourier inverse dans la formule donnant la transformation de Fourier, on obtient l'identité formelle

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} d\xi \quad (\text{III.8})$$

Lorsqu'il est évident qu'aucun problème de convergence ne se pose et qu'on peut facilement donner un sens aux expressions correspondantes, nous utiliserons directement cette identité (qui n'est autre, rappelons-le, que la réécriture formelle de la formule d'inversion de la transformation de Fourier).

III.2 Quelques propriétés (aide-mémoire)

On donne ici une liste de propriétés immédiates de la transformée de Fourier : si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont vérifiées.

- Linéarité : $F \cdot (f + g) = F \cdot f + F \cdot g$.
- Convolution-produit : $F \cdot (f \cdot g) = [F \cdot f] * [F \cdot g]$ et $F \cdot [f * g] = [F \cdot f] \cdot [F \cdot g]$.
- Translation-modulation : Si on note T_b l'opérateur de translation par b : $[T_b \cdot f](x) = f(x - b)$ et par E_ω l'opérateur de modulation : $[E_\omega \cdot f](x) = e^{i\omega x} f(x)$, on a :

$$F \cdot [T_b \cdot f] = E_{-b} \cdot [F \cdot f]$$

$$F \cdot [E_{\omega_0} \cdot f] = T_{\omega_0} \cdot [F \cdot f]$$

- Dilatation : Si on note D_a l'opérateur de dilatation par a : $[D_a \cdot f](x) = f(ax)$, on a :

$$F \cdot [D_a \cdot f] = \frac{1}{|a|} D_{\frac{1}{a}} \cdot [F \cdot f]$$

- Parité : F : fonction paire \rightarrow fonction paire ; F : fonction impaire \rightarrow fonction impaire.
- Réalité : $f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)^* \forall \xi$; $f(x) \in i\mathbb{R} \Rightarrow \hat{f}(\xi) = -\hat{f}(-\xi)^* \forall \xi$.

III.3 Transformation de Hilbert

Nous aurons souvent besoin d'utiliser la transformation de Hilbert H , qui joue un rôle capital dans l'analyse par ondelettes. Elle est définie par son action sur les fonctions comme suit :

$$H : f \rightarrow [F^{-1} \cdot \epsilon \cdot F] \cdot f \quad (\text{III.9})$$

où ϵ est défini par : $[\epsilon \cdot f](\xi) = -i \text{Sgn}(\xi) f(\xi)$. On a donc :

$$[1 + iH] = 2F^{-1} \Theta F \quad (\text{III.10})$$

où Θ est la multiplication par la fonction de Heaviside $H(\xi)$. Par exemple, si $f(x) = \cos(x)$, alors $[H \cdot f](x) = \sin(x)$ et $([1 + iH] \cdot f)(x) = e^{ix}$.

Les spécialistes de traitement du signal utilisent la transformation de Hilbert pour associer à un signal réel quelconque un signal complexe, appelé signal analytique associé, qui ne contient que des fréquences positives et peut donc être qualifié de causal. Mathématiquement, l'image de $L^2(\mathbb{R})$ par l'opérateur $C = [1 + iH]$ est appelé le second espace de Hardy complexe :

$$H^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}), \hat{f}(\xi) = 0 \forall \xi \leq 0\} \quad (\text{III.11})$$

Nous verrons une version de l'analyse par ondelettes spécialement adaptée à cet espace particulier.

Dans un cas très particulier, c'est-à-dire dans le cas de fonctions $f(x) = A(x) \cos \phi(x)$ telles que les variations de $A(x)$ sont lentes par rapport aux variations de $\phi(x)$ (fonctions ou signaux asymptotiques), on peut se convaincre sans trop de difficultés que $C \cdot f$ est peu différente de $A(x)e^{i\phi(x)}$. C'est ce que l'on appelle le théorème de Bedrosian, sur lequel nous aurons l'occasion de revenir par la suite.

Pour conclure, remarquons que la transformation de Hilbert ne se généralise pas naturellement au contexte multidimensionnel. Ou, plus précisément, sa généralisation multidimensionnelle est fournie par un ensemble de transformations appelées transformations de Riesz. Nous reviendrons aussi sur cet aspect des choses par la suite.

ANNEXE B : ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES GROUPES

Nous décrivons dans cette annexe de façon très succincte, les notions de base nécessaires. La plupart des résultats sont énoncés sans démonstration. Pour plus de détail, le lecteur est invité à se référer à [3] et [1], pour un exposé adapté à la physique, et à [11] et [5], pour une description plus complète.

I GÉNÉRALITÉS

I.1 Notion de groupe

Un groupe est un ensemble G , muni d'une loi de composition interne (appelée produit ou loi de groupe) notée “.”, associative telle que G possède un élément neutre e et que tout élément $g \in G$ possède un inverse g^{-1} pour cette loi.

Les exemples de groupe ne manquent pas. On peut citer, entre autres, le groupe réel additif, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels muni de l'addition, ou encore le groupe réel multiplicatif, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels non nuls muni de la multiplication. Ces deux groupes possèdent la particularité d'être des groupes commutatifs. Il existe une famille de groupes particulièrement intéressante, les groupes de transformations, engendrés par des transformations de \mathbb{R}^n et que l'on peut réaliser comme des groupes de matrices. Nous avons ainsi vu apparaître au chapitre II les groupes $SO(n)$ de rotations. $SO(n)$ est l'ensemble de toutes les matrices de rotation de \mathbb{R}^n , muni de la multiplication des matrices. Autrement dit, $SO(n)$ est l'ensemble de toutes les matrices $n \times n$, orthogonales (c'est-à-dire dont la matrice inverse est égale à la matrice transposée) et de déterminant égal à 1. $SO(n)$ signifie en fait groupe spécial orthogonal en dimension n .

I.2 Exemples

Il existe néanmoins trois exemples auxquels nous consacrerons une attention particulière, ce sont les groupes qui vont nous conduire directement aux gaborettes et aux ondelettes. Ce sont respectivement le groupe de Weyl-Heisenberg et le groupe affine (dans deux versions différentes).

I.2.1 Le groupe de Weyl-Heisenberg

Le groupe de Weyl-Heisenberg à n dimensions est topologiquement isomorphe au produit $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^1$, c'est-à-dire qu'il est constitué d'éléments de la forme :

$$G_{WH} = \{(\omega, b, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 2\pi]\} . \quad (\text{I.1})$$

La loi de groupe est donnée par :

$$(\omega, b, \varphi) \cdot (\omega', b', \varphi') = (\omega + \omega', b + b', \varphi + \varphi' + \omega \cdot b'). \quad (\text{I.2})$$

Il est facile de voir que

$$e = (0, 0, 0) \quad (\text{I.3})$$

est l'élément neutre de G_{WH} et que

$$(\omega, b, \varphi)^{-1} = (-\omega, -b, -\varphi + \omega \cdot b). \quad (\text{I.4})$$

En particulier

$$(\omega, b, \varphi) \cdot (\omega', b', \varphi') \cdot (\omega, b, \varphi)^{-1} = (\omega', b', \varphi' - (\omega' \cdot b - \omega \cdot b')). \quad (\text{I.5})$$

Notons que le sous-groupe $S^1 = \{(0, 0, \varphi) \in G_{WH}\}$ de G_{WH} est commutatif. Néanmoins, le groupe de Weyl-Heisenberg est un groupe non commutatif. On dit qu'il est l'extension centrale (le centre d'un groupe est par définition l'ensemble de ses éléments qui commutent avec tout le groupe) de \mathbb{R}^{2n} (qui serait lui-même commutatif en l'absence du facteur S^1) par le cercle S^1 . Nous verrons précisément que c'est cette extension centrale qui fait toute la richesse du groupe.

On peut faire agir G_{WH} sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ comme suit : Si $(\omega, b, \varphi) \in G_{WH}$, on lui associe l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ suivant :

$$[\pi(\omega, b, \varphi) \cdot f](x) = e^{i(\varphi + \omega \cdot (x-b))} f(x-b) \quad (\text{I.6})$$

et vérifie immédiatement que

$$\pi(\omega, b, \varphi) \cdot \pi(\omega', b', \varphi') = \pi(\omega + \omega', b + b', e^{i(\varphi + \varphi' + \omega \cdot b')}). \quad (\text{I.7})$$

I.2.2 Le groupe affine

Le groupe affine à n dimensions est l'ensemble

$$G_{aff} = \{(b, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*\}, \quad (\text{I.8})$$

muni du produit

$$(b, a) \cdot (b', a') = (b + ab', aa'). \quad (\text{I.9})$$

Nous voyons que ce groupe possède une structure différente de celle du groupe de Weyl-Heisenberg, puisque la variable a agit sur la variable b . On parle dans ce cas d'un produit semi direct (ou produit croisé) de \mathbb{R}^n par \mathbb{R}_+^* . La représentation que nous utiliserons est obtenue comme suit. Si $(b, a) \in G_{aff}$, on lui associe l'opérateur $\pi(b, a)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, qui agit comme :

$$[\pi(b, a) \cdot f](x) = a^{-n/2} f\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (\text{I.10})$$

et il est facile de vérifier que :

$$\pi(b, a) \cdot \pi(b', a') = \pi(b + ab', aa'). \quad (\text{I.11})$$

I.2.3 Le groupe affine avec rotations

Le groupe affine augmenté des rotations à n dimensions (parfois appelé groupe euclidien inhomogène) est l'ensemble :

$$G_{aff}^r = \{(b, a, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \times SO(n)\}, \quad (\text{I.12})$$

muni du produit

$$(b, a, r) \cdot (b', a', r') = (b + ar \cdot b', aa', r \cdot r'). \quad (\text{I.13})$$

($r \in SO(n)$ est ici une matrice de rotation à n dimensions.) Ce groupe possède, lui aussi, une structure de produit semi direct (ou produit croisé), cette fois de \mathbb{R}^n par $\mathbb{R}_+^* \times SO(n)$. Nous rencontrerons le groupe affine dans la construction des ondelettes avec rotations. En effet, si $b, a, r \in G_{aff}^r$, on lui associe l'opérateur $\pi(b, a, r)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, qui agit comme suit :

$$[\pi(b, a, r) \cdot f](x) = a^{-n/2} f\left(r^{-1} \cdot \frac{x-b}{a}\right), \quad (\text{I.14})$$

et il est facile de vérifier que

$$\pi(b, a, r) \cdot \pi(b', a', r') = \pi(b + ar \cdot b', aa', r \cdot r'). \quad (\text{I.15})$$

Notons que, dans le cas $n = 1$, $SO(n)$ doit être remplacé par le groupe fini $\mathbb{Z}_2 = -1, 1$, l'unique transformation orthogonale en dimension 1 en dehors de l'identité étant la symétrie $x \rightarrow -x$. Il est alors facile de vérifier que $G_{aff}^r \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et conduit à l'une des variantes de l'analyse par ondelettes unidimensionnelle rencontrées au chapitre II.

II GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

Un groupe de Lie est un groupe G tel que :

- G est un groupe topologique : il est muni d'une topologie séparée telle que les opérations $g \in G \rightarrow g^{-1}$ et $g, g' \in G \rightarrow g \cdot g'$ soient continues.
- G est une variété analytique : pour tout $g \in G$, il existe un voisinage $O(g)$ de g qui est homéomorphe à un ouvert U de \mathbb{R}^d (ou \mathbb{C}^d) pour une dimension d fixée. De plus, si U et U' sont deux tels ouverts et si j et j' sont les homéomorphismes correspondants, $j \circ j'^{-1}$ est analytique sur $U \cap U'$.

Dans ces conditions, on montre que G possède en tout point un espace tangent de dimension d . De plus, l'espace tangent à G en $g = e$, que l'on appelle l'algèbre de Lie de G et que l'on note $\mathcal{G} = Lie(G)$, hérite d'une loi de composition interne, notée $[\cdot, \cdot]$, qui vérifie, pour tous $x, y, z \in \mathcal{G}$,

$$[x, y] = -[y, x] \quad (\text{II.1})$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \quad (\text{II.2})$$

On dit que le crochet de Lie (*i.e.* la loi $[\cdot, \cdot]$) est anticommutatif et Jacobi-associatif. Par extension, on appelle aussi algèbre de Lie tout espace vectoriel muni d'une telle loi.

Considérons les exemples précédents, en particulier le groupe de Weyl-Heisenberg et le groupe affine. Il est facile de montrer que l'algèbre de Lie du groupe de Weyl-Heisenberg, (souvent appelée algèbre de Heisenberg ou algèbre des relations de commutation canoniques) est engendrée par l'identité \mathbf{I} et $2n$ opérateurs P_k et Q_k , $k = 1, \dots, n$, vérifiant les relations de commutation dites canoniques :

$$[Q_k, P_\ell] = i\delta_{k\ell}\mathbf{I} \quad (\text{II.3})$$

En revanche, le groupe affine à n dimensions est engendré par $n+1$ éléments Q_k , $k = 1, \dots, n$ et K , vérifiant :

$$[K, Q_k] = K \quad (\text{II.4})$$

III MESURE DE HAAR

Nous avons vu dans la section précédente que les groupes de Lie sont, par définition, munis d'une topologie et d'une structure différentiable. Nous allons maintenant nous restreindre aux groupes localement compacts et décrire les propriétés de mesurabilité. Il s'avère que tout groupe localement compact G peut être muni de mesures qui jouent le même rôle que celui joué par la mesure

de Lebesgue sur \mathbb{R} . Plus précisément, on montre (voir [3] par exemple) qu'il existe deux mesures μ_G et μ_D sur G , appelées mesures de Haar gauche et droite respectivement, telles que :

$$d\mu_G(g' \cdot g) = d\mu_G(g), \forall g' \in G, \quad (\text{III.1})$$

$$d\mu_D(g \cdot g') = d\mu_D(g), \forall g' \in G, \quad (\text{III.2})$$

et sont uniques avec cette propriété (à un facteur multiplicatif près). μ_G et μ_D sont en général différentes. Si $\mu_D = \mu_G$, on dit que G est un groupe unimodulaire. En particulier si G est compact, il est automatiquement unimodulaire et $\int_G d\mu_G(g) < \infty$.

Si nous revenons aux exemples précédents, on vérifie aisément, par exemple, que le groupe de Weyl-Heisenberg est unimodulaire, la mesure de Haar associée étant

$$d\mu(b, \omega, \varphi) = d^n b d^n \omega d\varphi. \quad (\text{III.3})$$

De même, dans le cas du groupe affine à n dimensions,

$$d\mu_G(b, a) = \frac{d^n b}{a^n} \frac{da}{a}, \quad (\text{III.4})$$

$$d\mu_D(b, a) = db \frac{da}{a}. \quad (\text{III.5})$$

Quant au groupe des rotations $SO(n)$, il est compact et donc unimodulaire. Sa mesure invariante peut être paramétrée par les angles d'Euler et est donnée au chapitre II.

IV REPRÉSENTATIONS

IV.1 Généralités

Considérons un groupe de Lie G et un espace vectoriel V . Une *représentation* (linéaire) de G sur V est une application continue

$$\pi : G \rightarrow GL(V) \quad (\text{IV.1})$$

de G sur le groupe des opérateurs linéaires sur V , qui préserve la structure de groupe de G , c'est-à-dire telle que, pour tous $g_1, g_2 \in G$,

$$\pi(g_1) \cdot \pi(g_2) = \pi(g_1 \cdot g_2) \quad (\text{IV.2})$$

et donc $\pi(e) = I_V$.

Les exemples les plus simples de représentations sont les *caractères* des groupes commutatifs, qui associent à tout élément g du groupe un nombre

complexe $\chi(g)$. Par exemple, si nous prenons le groupe additif \mathbb{R} des nombres réels, les caractères sont les fonctions sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathcal{C} .

On dit que la représentation π de G sur V est *réductible* si V possède un sous-espace invariant, c'est-à-dire s'il existe un sous-espace U de V tel que U contienne $\pi(G) \cdot U$. Dans le cas contraire, la représentation est dite *irréductible*.

La représentation π est dite *unitaire* si V peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que tous les $\pi(g)$, $g \in G$ soient des opérateurs unitaires ; en d'autres termes, $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^*$.

IV.2 Exemples

Nous considérons le groupe de Weyl-Heisenberg et la famille d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, donnée par :

$$[\pi(b, \omega, \varphi) \cdot f](x) = e^{i[\varphi + \omega \cdot (x-b)]} f(x - b). \quad (\text{IV.3})$$

On vérifie aisément qu'il s'agit d'une représentation unitaire du groupe de Weyl-Heisenberg, qui est de plus irréductible sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Considérons maintenant le groupe affine G_{aff} et son action sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ donnée par :

$$[\pi(b, a) \cdot f](x) = a^{-n/2} f\left(\frac{x-b}{a}\right). \quad (\text{IV.4})$$

Il s'agit clairement d'une représentation unitaire, néanmoins hautement réductible. En effet, si Ω est un cône de \mathbb{R}^n pointant sur l'origine, l'ensemble

$$\left\{ (f \in L^2(\mathbb{R}), \text{Supp}(\hat{f}) \subset \Omega) \right\}$$

est un sous-espace invariant de $L^2(\mathbb{R})$ pour π . Ceci reste vrai pour $n = 1$, où seule la restriction de π à $H^2(\mathbb{R})$ (ou à l'espace analogue de fonctions n'ayant que des fréquences négatives) est irréductible. Un tel inconvénient est évité en considérant la représentation du groupe étendu G_{aff}^r , définie par :

$$[\pi(b, a, r) \cdot f](x) = a^{-n/2} f\left(r^{-1} \cdot \frac{x-b}{a}\right), \quad (\text{IV.5})$$

qui est unitaire et irréductible sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dans le cas $n = 1$, pour lequel nous avons vu qu'il est équivalent de considérer des paramètres de dilatation positifs et négatifs, il convient de modifier (IV.5) en remplaçant la normalisation $a^{-1/2}$ par $|a|^{-1/2}$.

Deux représentations unitaires π_1 et π_2 de G sont dites unitairement équivalentes s'il existe un opérateur unitaire U (appelé opérateur d'entrelacement unitaire) tel que pour tout $g \in G$:

$$\pi_2(g) = U \pi_1(g) U^{-1}. \quad (\text{IV.6})$$

L'un des principaux problèmes de l'analyse harmonique sur les groupes de Lie est le suivant : étant donnée une représentation π de G sur \mathcal{H} , déterminer les classes d'équivalence unitaire de représentations irréductibles ρ de G qui soient des sous-représentations de π . Le lemme de Schur (bien connu, sous une forme un peu plus faible, en mécanique quantique sous le nom de théorème de la projection, ou théorème de Wigner-Eckart) est particulièrement utile dans ce contexte. Nous en donnons ici un énoncé, sans démonstration (pour plus de détail, voir [3], [11]).

Lemme 1 (Schur) *Soient π_1 et π_2 deux représentations de G sur \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 respectivement et supposons que π_1 soit irréductible. Alors tout opérateur d'entrelacement (non nécessairement unitaire) : $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ est un isomorphisme ou vérifie $T = 0$.*

IV.3 Représentation régulière

Parmi les représentations d'un groupe de Lie, la représentation régulière occupe une place privilégiée. En effet, le problème de la réduction de la représentation régulière en représentations irréductibles est souvent "presque équivalent" à celui de la classification de ces représentations irréductibles¹. La *représentation régulière gauche* du groupe de Lie localement compact G agit sur l'espace $L^2(G, d\mu)$ (μ étant la mesure de Haar gauche de G) comme suit : si $f \in L^2(G, d\mu)$:

$$[\lambda(g) \cdot f](x) = f(g^{-1} \cdot x), \quad x \in G \quad (\text{IV.7})$$

V REPRÉSENTATIONS INDUITES

V.1 Espaces homogènes

Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe de Lie de G (c'est-à-dire un sous-ensemble de G qui soit lui aussi un groupe de Lie). On considère les classes d'équivalence de la forme :

$$gH = \{g \cdot h, h \in H\} \quad (\text{V.1})$$

Le quotient G/H , formé des classes d'équivalence

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}, \quad (\text{V.2})$$

¹Nous pouvons d'ailleurs voir dans le chapitre VII, consacré à l'approche "représentations de groupes", que les ondelettes jouent un rôle important dans ce contexte.

est appelé *espace homogène*. Il est canoniquement muni d'une projection

$$P : G \rightarrow G/H$$

définie par

$$P(g) = g \cdot H. \quad (\text{V.3})$$

En termes géométriques, on dit que le groupe G est ainsi muni d'une structure d'espace fibré principal, de base G/H et de fibre type H . Lorsque l'on peut écrire $G = G/H \times H$, on dit que le fibré est trivial.

Nous avons vu que tout groupe localement compact possède une mesure invariante à gauche et une mesure invariante à droite. Ce résultat n'est plus valable pour les espaces homogènes, mais il en existe néanmoins une version plus faible : Il existe toujours une mesure $d\eta(x)$ telle que sa transformée $d\eta(g \cdot x)$ soit absolument continue par rapport à $d\eta(x)$. On dit que η est quasi invariante par l'action du groupe. On peut alors considérer l'espace $L^2(X, d\eta)$ et l'action suivante de G sur $L^2(X, d\eta) : \forall f \in L^2(X, d\eta) :$

$$[\lambda_X(g) \cdot f](x) = \sqrt{\frac{d\eta(g^{-1} \cdot x)}{d\eta(x)}} f(g^{-1} \cdot x) \quad (\text{V.4})$$

Le terme $d\eta(g^{-1} \cdot x)/d\eta(x)$ est appelé "dérivée de Radon-Nikodym" de $d\eta(g^{-1} \cdot x)$ par rapport à $d\eta(x)$. On vérifie sans peine que λ_X est une représentation unitaire de G sur $L^2(X, d\eta)$. Nous verrons aussi comment une telle représentation s'introduit naturellement dans le contexte de l'analyse par ondelettes.

On appelle section du fibré toute application

$$\sigma : G/H \rightarrow G, \quad (\text{V.5})$$

telle que

$$P \circ \sigma = \text{I}. \quad (\text{V.6})$$

On peut utiliser de telles sections pour associer des fonctions définies sur G/H à des fonctions définies sur G : si $f(g)$ est une fonction sur le groupe G , on peut lui associer la fonction $f_\sigma(x)$, définie sur $X = G/H$ par :

$$f_\sigma(x) = f(\sigma(x)) \quad x \in X \quad (\text{V.7})$$

Cette construction peut être utilisée pour restreindre une représentation à un espace homogène.

V.2 Représentations induites

Nous utilisons au chapitre VII la notion de représentation induite, que nous allons brièvement introduire dans un cas simple ici. Considérons un groupe de Lie, localement compact séparable G et un sous-groupe $H \subset G$. Soit

$$\chi : H \rightarrow \mathcal{C} \quad (\text{V.8})$$

un caractère unitaire (*i.e.* tel que $|\chi| = 1$) de H . Soit $X = G/H$ et soit η une mesure quasi invariante sur X . La représentation $\mathcal{U} = \text{Ind}_H^G(\chi)$ est définie de la façon suivante : On considère l'espace

$$\mathcal{H} = \left\{ f : G \rightarrow \mathcal{C}, \text{ mesurable tel que} \right. \\ \left. \int_X |f(x)|^2 d\eta(x) < \infty \text{ et } f(gh) = \chi(h)^{-1} f(g) \forall h \in H \right\} \quad (\text{V.9})$$

(Remarquons que $\mathcal{H} \cong L^2(G/H, d\eta)$.) Alors \mathcal{U} agit sur \mathcal{H} comme suit : $\forall f \in \mathcal{H}$

$$[\mathcal{U}(g) \cdot f](x) = \sqrt{\frac{d\eta(g^{-1} \cdot x)}{d\eta(x)}} f(g^{-1} \cdot x) \quad (\text{V.10})$$

Notons qu'il s'agit d'une forme analogue à celle de la représentation que nous avons vue en (IV.14). Il est facile de vérifier que \mathcal{U} est une représentation unitaire de G . Les représentations induites jouent un rôle crucial dans la théorie des représentations de groupes. Elles en permettent parfois la classification (voir par exemple [5] ou [6]).

VI RÉFÉRENCES

- [1] J.F. Cornwell, "Group Theory in Physics I, II", *Techniques in physics*, Academic Press (1984).
- [2] I.M. Gelfand, M.I. Graev, G.E. Shilov, N. Ja. Vilenkin, *Les Distributions*, Dunod.
- [3] G. Hermann, *Lie Groups for Physicists*, Benjamin (1966).
- [4] L. Hormander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag (1979).
- [5] A. Kirillov, *Eléments de la théorie des représentations*, Editions MIR, Moscou (1974).
- [6] G. Mackey, *Theory of Unitary Group Representations*, Univ. of Chicago Press (1976).
- [7] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press (1978).
- [8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3^e édition, McGraw-Hill (1986).
- [9] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill (1973).
- [10] E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press (1970).
- [11] G. Warner, "Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups I, II", *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, 188 (1972).

INDEX

- Action
 - adjointe : 157
 - coadjointe : 157
- Algèbre de Lie : 230
- Aliasing : 182, 187
- Analyse multirésolution infinitésimale : 33
- Angle d'Euler : 38, 161
- Arête
 - de la transformée de Gabor : 101
 - de la transformée en ondelettes : 81, 93
 - de la transformée en ondelettes bidimensionnelle : 107, 109
- Base de Riesz : 197
- Chirp : 48, 95, 111
- Coefficient de Schur : 141
- Codage en sous-bandes : 187, 189
- Condition QMF : 188
- Conjecture de Marr : 61
- Contour : 59
- Courbe-ondelette : 94
- Covariance : 140, 156
- Décomposition de Littlewood-Paley : 23
- Découplage des fonctions d'analyse et de synthèse : 15, 23, 32, 35
- Densité de Nyquist : 124
- Dérivée de Radon-Nikodym : 234
- Dimension
 - de Hausdorff : 72
 - fractales : 73
- Echantillonnage : 36, 181
- Ensemble de Cantor : 75
- Espace
 - à noyaux reproduisants : 30, 51, 143
 - de Hardy : 227
 - de Paley-Wiener : 30
 - des phases : 11, 156, 157
 - $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{S}, \mathcal{S}'$: 222
 - fibré : 234
 - homogène : 233
 - L^p, L^2 : 220
 - temps-fréquence : 11, 29,
- Etats cohérents : 139, 143
- Fenêtre : 11
- FFT : 180, 195
- Formule de Morlet : 24, 34
- Fonction
 - d'autocovariance : 51
 - d'échelle : 33
 - de Riemann-Weierstrass : 78
 - de test : 222
 - fractale : 77
 - homogène : 45
- Formule de Morlet discrète : 199
- Formule de Taylor : 217
- Fréquence instantanée : 83
- Gaborette : 11
- Grille
 - dyadique : 181, 189
 - régulière : 193
- Groupe
 - affine : 145, 228
 - de Weyl-Heisenberg : 147, 148, 151, 228
 - de Weyl-Heisenberg affine : 152, 153, 166

- euclidien : 160, 171
- euclidien inhomogène : 149, 229
- Harmonique sphérique : 174
- Incertitude de Heisenberg : 126
- Inégalité de Heisenberg : 11
- Intégrale
 - de Lebesgue : 219
 - de Riemann : 219
- Internet (logiciels disponibles sur) : 4
- Laplacien
 - de Beltrami : 174
 - pyramidal : 184
- Lemme de Schur : 233
- Ligne spectrale : 85, 105
- Lissage : 60
- Maxima locaux de la transformée en ondelettes : 60, 61
- Mesure
 - de Bernoulli : 74
 - de Haar : 230
 - de Haar sur $SO(n)$: 38
 - fractale : 72
 - quasi invariante : 234
- Moments nuls des ondelettes : 61, 68, 69, 193
- Noyau de Cauchy : 30
- Ondelette : 18
 - admissible : 22, 35
 - de Haar : 22
 - de Morlet : 21, 28
 - interpolante : 134, 155
 - polarisée : 52
 - produit tensoriel : 150, 203
 - progressive : 44
 - radiale : 25
 - splines : 192
- Opérateur d'entrelacement : 233
- Orbite coadjointe : 157
- Paquets d'ondelettes : 153
- Phase stationnaire : 114
- Phénomène de Balian-Low : 124, 126, 128
- Point stationnaire : 93, 101, 108
- Polarisation : 158
- Polynôme harmonique : 174
- Processus stationnaire : 51
- Produit semi-direct : 229
- Pseudo-QMF : 195
- QMF : 188, 194
- Régularité hölderienne
 - globale : 66, 218
 - locale : 69
- Repère : 119
 - dual : 121
 - de gaborettes : 123
 - d'ondelettes : 129
 - exact : 120
 - strict : 120
- Représentation : 231
 - de carré intégrable : 141
 - de Wigner-Ville : 37
 - induite : 234, 235
 - irréductible : 232
 - régulière : 233
 - temps-fréquence : 10, 144
- Retard de groupe : 84
- Rotation : 38
- Section : 234
- Section admissible : 152
- Signal
 - analytique : 82
 - asymptotique : 84
- $SO(3)$: 40
- $SO(n)$: 27, 38
- Spectre
 - de singularités : 72
 - local : 51
- Sphère S^{n-1} : 38, 160, 173
- Squelette
 - de la transformée de Gabor : 102
 - de la transformée en ondelettes : 94
- Théorème des fonctions contractantes : 90

Transformation

de Fourier : 223

de Gabor multidimensionnelle : 17

de Gabor unidimensionnelle : 12

de Hilbert : 225

de Radon : 34

en ondelettes multidimensionnelle :
25, 26, 29

en ondelettes unidimensionnelle : 18

Vecteur admissible : 141

Imprimé en France. - JOUVE, 18, rue Saint-Denis, 75001 PARIS
N° 230122V. - Dépôt légal : Septembre 1995