

Gravitation Relativiste

Rémi Hakim

Gravitation Relativiste

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences / CNRS ÉDITIONS

Illustration de couverture : l'expérience de Cavendish
(voir la figure 1.10)

© 2001, **EDP Sciences**, 7, avenue du Hoggar, BP 112, PA de Courtabœuf,
91944 Les Ulis Cedex A.
CNRS ÉDITIONS, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

1^{re} édition :

© 1994, **InterÉditions – CNRS ÉDITIONS**

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. 01.43.26.95.35.

ISBN 2-86883-370-5

ISBN 2 271 05198 9

Table des matières[†]

Avant-propos	XI
1. La gravitation newtonienne	1
L'espace-temps newtonien	1
Simultanéité et mesure des distances*	4
Les absolus de Newton et la notion d'éther*	7
Le principe d'inertie	10
Les lois de la dynamique et de la relativité galiléenne	13
Les principes d'inertie et de relativité vus par Galilée*	18
La gravitation newtonienne	18
Mesure de la constante de gravitation	24
Limites de la théorie newtonienne de la gravitation	30
Le caractère fini de la vitesse de la lumière	33
L'expérience de Michelson	37
Exercices	40
2. L'espace-temps de Minkowski	43
L'espace-temps de la Relativité Restreinte	45
La transformation de Lorentz	48
Remarques	51
Causalité et simultanéité	55
Temps et distances mesurés par des observateurs inertiels	62
Propriétés globales de l'espace-temps*	64
Les vérifications expérimentales de la Relativité Restreinte*	66
Exercices	69
3. La forme relativiste des lois de la physique	73
Le formalisme tensoriel	73
L'effet Doppler et le phénomène d'aberration	81
La description cinématique du mouvement d'une particule	84
La dynamique relativiste; $E=mc^2$	89
L'espace de Minkowski en coordonnées curvilignes	93
Exercices	102

[†] Les paragraphes désignés par * peuvent être sautés en première lecture.

4. La gravitation et la Relativité Restreinte	105
Le décalage gravitationnel vers le rouge	107
La courbure des rayons lumineux	108
L'avance du périhélie de Mercure	110
Nécessité d'équations non linéaires pour la gravitation	112
Exercices	113
5. L'électromagnétisme et l'hydrodynamique relativistes	115
Densités et courants	115
Les équations de l'électromagnétisme	119
Le tenseur énergie-impulsion	122
L'hydrodynamique relativiste	123
Exercices	124
6. Qu'est-ce qu'un espace courbe?	129
Quelques manifestations de la courbure	129
Courbure des surfaces à deux dimensions	133
Signification de la courbure intrinsèque	139
Surfaces de \mathbf{R}^n – Espaces de Riemann	141
Courbure intrinsèque d'une variété	143
Propriétés du tenseur de courbure	145
L'espace-temps comme variété riemannienne*	147
Quelques propriétés des tenseurs dans un espace courbe	149
Trois arguments en faveur d'un espace-temps courbe	150
Exercices	152
7. Le principe d'équivalence	155
Le principe d'équivalence faible et les expériences d'Eötvös-Dicke	156
Le principe d'équivalence et le couplage minimal	166
Le décalage gravitationnel vers le rouge	175
Mouvements géodésiques	179
La déviation géodésique	181
Le tenseur métrique à symétrie sphérique	183
Aperçu du formalisme PPN	185
Les tests classiques	188
Les mirages gravitationnels	195
Exercices	203
8. La gravitation relativiste d'Einstein (Relativité Générale)	209
Les équations d'Einstein	210
Autres déductions des équations d'Einstein*	215
La solution de Schwarzschild	219
La géométrie locale des espaces de Friedman	225
Autres métriques d'intérêt astrophysique*	233
Les équations d'Einstein linéarisées	234
Ondes et rayonnement gravitationnels	237
Exercices	253

Table des matières

IX

Appendice A : Généralités sur les tenseurs	257
Appendice B : Formes différentielles extérieures	263
Appendice C : Forme variationnelle des équations de champ	279
Appendice D : Notion de variété	285
Références	291
Constantes physiques	303
Index	305

Avant-propos

Cet ouvrage est consacré à la théorie de la Relativité Générale, c'est-à-dire à la synthèse de la relativité et de la gravitation. Cette *Gravitation Relativiste*, comme on dit plutôt aujourd'hui, apparaît ainsi comme étant de première importance dans tous les phénomènes de l'astronomie qui font intervenir soit des vitesses comparables ou égales à celle de la lumière, soit des champs de gravitation intenses. L'ensemble de l'étude de ces phénomènes constitue ce que l'on appelle l'*Astrophysique Relativiste*, une expression due à Alfred Schild (1967). Ce que nous nous proposons d'exposer ici constitue le minimum minimorum de la théorie relativiste de la gravitation nécessaire pour aborder cette discipline relativement récente.

A ce stade, il peut être intéressant de rappeler brièvement la genèse de ce nouveau domaine et, plus particulièrement, la façon dont il est lié à la Relativité Générale. A cette fin, il est nécessaire de se souvenir qu'une fois les « tests classiques » de la Relativité Générale vérifiés [déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil (1919); décalage spectral vers le rouge (dans les naines blanches : W.S. Adams (1925)); avance du périhélie de Mercure], cette discipline s'était alors embourbée dans des voies assez formelles parce qu'alors, les technologies disponibles ne permettaient pas qu'elle fût en contact ni avec l'expérience, ni avec l'observation astronomique. Bien que les recherches effectuées fussent souvent d'un grand intérêt conceptuel (théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme, par exemple) et théorique (développements mathématiques divers), la relativité tournait un peu en rond [J. Eisenstaedt (1986)] en raison de l'absence d'expériences de laboratoire et/ou d'observations d'objets spécifiquement relativistes, inconnus au niveau théorique avant les années trente et, dans une large mesure, quarante voire cinquante. Ainsi, la cosmologie était bien davantage considérée comme un « *espace de liberté pour penser la relativité* » [J. Eisenstaedt (1989)] que comme un champ de vérifications astronomiques possibles de la Relativité Générale, ou même la « *science de l'Univers* » [E. R. Harrison (1981)].

La découverte de l'effet Mössbauer (1958) devait permettre la mesure du décalage spectral vers le rouge, d'origine gravitationnelle, en laboratoire, tandis que les progrès expérimentaux autorisaient le renouvellement de l'expérience d'Eötvös avec une précision inégalée. En même temps, après la Deuxième Guerre mondiale, les discussions sur la nucléosynthèse des éléments conduisaient G. Gamow et ses collaborateurs à l'idée que l'Univers avait été, dans un passé lointain, dans une phase chaude, dont subsisterait aujourd'hui un rayonnement noir du fond du ciel.

Ce rayonnement fut découvert¹ en 1965, ce qui suscita un grand intérêt envers la cosmologie qui commença à se développer alors sérieusement, d'autant que, quelques années plus tôt (1963) les quasars – les objets les plus lointains que l'on connaisse – étaient observés. Peu après cette découverte, les premiers pulsars étaient trouvés (fin 1967), très vite identifiés par T. Gold (1969) aux étoiles à neutrons imaginées en 1932 par Landau.

Ainsi, les années soixante remirent la relativité sur une base expérimentale², lui fournissant des objets d'étude astrophysique qui, jusque-là, lui avaient fait défaut. En même temps, la notion théorique de trou noir, ainsi que celle d'ondes gravitationnelles, étaient approfondies et des recherches observationnelles et expérimentales, respectivement, étaient entreprises afin de les mettre en évidence. Il s'agit là d'objets spécifiquement relativistes, susceptibles de toutes sortes d'effets astrophysiques et que l'on cherche, bien évidemment, à observer. Il va de soi, enfin, que les découvertes observationnelles mentionnées plus haut ont suscité, en retour, de nouvelles observations, par exemple les sondages profonds du ciel destinés à mettre en évidence d'éventuelles grandes structures suggérées par tel ou tel scénario cosmologique.

Il existe, à l'heure actuelle, un certain nombre de théories relativistes de la gravitation qui sont compatibles avec l'expérience et l'observation; mais la Relativité Générale d'Einstein fut sans aucun doute la première historiquement à fournir des résultats théoriques corrects en accord précis avec les faits. Aussi est-ce à cette théorie, principalement, qu'est consacré cet ouvrage sans que soit abordée la question des étoiles denses, de l'effondrement gravitationnel ou des trous noirs : le lecteur pourra consulter le livre de S.L. Shapiro et S.A. Teukolsky (1983) sur ces points. La cosmologie non plus n'est pas développée ici : il existe d'excellents ouvrages comme ceux de P.J.E. Peebles (1993), N. Straumann (1984), Ya. B. Zeldovich et I.D. Novikov (1975) ou S. Weinberg (1972), etc. Il s'agira ici, non pas tant d'un exposé de la Relativité Générale, que d'éléments conceptuels ou techniques minimaux permettant d'appréhender sans difficulté particulière les aspects en quelque sorte gravitationnels de l'Astrophysique Relativiste. Divers compléments favoriseront, en outre, l'accès à la littérature courante. Deux illustrations d'intérêt astrophysique seront étudiées de manière simple : il s'agit, d'une part, des lentilles gravitationnelles, observées ces dernières années, et d'autre part, des ondes gravitationnelles, non encore détectées en laboratoire³ mais implicitement mises en évidence par l'observation du pulsar binaire PSR 1913 + 16 et qui, dans le futur, donneront peut-être lieu à une nouvelle astronomie.

1. L'histoire de cette découverte est racontée par S. Weinberg (1978); voir aussi E.R. Harrison (1981) ou R. Hakim (1992).

2. A cela il convient d'ajouter, pendant ces mêmes années, les progrès des techniques spatiales permettant des expériences impossibles à réaliser sur Terre.

3. Une coopération franco-italienne, le projet VIRGO, en cours de réalisation, devrait peut-être permettre leur mise en évidence d'ici l'an 2000.

Pour le débutant, la théorie de la relativité, qu'il s'agisse de la théorie restreinte ou de la théorie générale, présente (comme d'ailleurs toute théorie physique) des difficultés conceptuelles d'abord et d'autres purement techniques, ensuite.

Au niveau conceptuel, le principal problème consiste à « penser de manière relativiste », c'est-à-dire dans l'*espace-temps*⁴, notion absolument centrale. On pourrait croire que depuis 1908, date à laquelle il a été introduit, ce concept d'espace-temps, avec ses structures déterminées par le cône de lumière, est acquis dès les premières années d'université. Il n'en est malheureusement rien car, pour nombre d'étudiants (et souvent d'enseignants!) la Relativité Restreinte se limite à la transformation de Lorentz, à la contraction des longueurs et à la dilatation des durées! Il est clair, enfin, que l'apprentissage de la Relativité Générale présente, dans un premier temps, assez peu de difficultés conceptuelles pour qui maîtrise la Relativité Restreinte. C'est pourquoi cet ouvrage contient un exposé de cette théorie basé uniquement sur la notion d'espace-temps, notion introduite elle-même au niveau classique. Il est ensuite assez aisé de montrer, qualitativement, qu'en déformant le cône de lumière de la Relativité Restreinte, la gravitation rend pratiquement nécessaire l'introduction d'un espace-temps courbe. Si le *principe d'équivalence* – autre concept central de la Gravitation Relativiste – présente moins de difficulté dans ses versions les plus simples, auxquelles le lecteur peut se limiter dans un premier temps, il contient nombre de subtilités dont nous n'avons mentionné quelques-unes que pour mettre en évidence leur lien avec d'éventuels phénomènes géophysiques, astrophysiques ou autres, afin aussi que le lecteur ne soit pas confronté à un système théorique fermé mais garde présent à l'esprit que d'autres voies restent possibles.

Au niveau technique, maintenant, si le calcul tensoriel dans l'espace de Minkowski peut être maîtrisé assez facilement – à cette fin, les exercices sont indispensables – ce n'est pas tout à fait le cas de ce même calcul en espace courbe. Généralement, la conjonction de ce type de difficulté avec celles de nature conceptuelle peut rendre difficile l'abord de la Gravitation Relativiste. C'est pourquoi l'usage des coordonnées curvilignes a été introduit en Relativité Restreinte⁵, l'extension au cas d'un espace-temps courbe devenant alors très simple : il s'agit, à quelques détails près, des mêmes formules.

Ajoutons que la matière de ce livre a été enseignée pendant plusieurs années à des niveaux très divers allant de la seconde année d'université, dans ses aspects les plus simples, à la quatrième ou cinquième en l'adaptant, bien entendu, à ces différents publics. De cette diversité, il subsiste dans cet ouvrage une lecture possible à deux niveaux.

Le premier niveau, élémentaire, permet d'obtenir une vue générale du sujet et est surtout fondé sur des raisonnements intuitifs et sur une approche plutôt heuristique que technique.

4. Voir E.F. Taylor, J.A. Wheeler (1966).

5. A la suite de V.I. Fock (1966).

Le second niveau, tout en restant en deçà de ce qui est indispensable à une utilisation courante, exige un peu plus d'efforts car, si les concepts en jeu sont exposés avec leurs bases expérimentales et théoriques ainsi que leur articulation logique, il est également nécessaire de les étayer par des éléments techniques tout en restant au niveau des mathématiques usuelles. Ce second niveau, pour être réellement acquis, exige le recours aux exercices proposés en fin de chapitre. Il a pour but une compréhension minimale, notamment pour ceux que l'Astrophysique Relativiste intéresse, autorisant l'accès sans trop de difficultés à la littérature courante. Il est clair, cependant, que seuls des textes plus avancés (manuels ou articles originaux) peuvent permettre une certaine maîtrise du domaine.

Ce second niveau se veut « ouvert » ainsi qu'il convient à un domaine en plein développement. C'est pourquoi le lecteur trouvera dans les références aussi bien les articles des « pères fondateurs » que des compléments divers sur tel ou tel point, sur des démonstrations non données dans le cours du texte; il trouvera aussi des indications expérimentales ou observationnelles dont le détail n'a pas sa place ici; il trouvera également des tentatives « iconoclastes »; il s'agira enfin de rendre à César ce qui lui appartient... En aucun cas les références ne sont (ni ne peuvent être) exhaustives : il s'agit d'un choix de nature purement pédagogique.

Au niveau 1, le lecteur pourra se limiter à l'étude des parties suivantes du texte : chapitre 1 (complet); chapitre 2 (complet); chapitre 4 (complet); chapitre 6 (manifestations de la courbure, courbure des surfaces à deux dimensions, signification de la courbure intrinsèque, arguments en faveur d'un espace-temps courbe); chapitre 7 (le principe d'équivalence faible, le couplage minimal, lentilles gravitationnelles); chapitre 8 (début de la métrique de Schwarzschild).

Au niveau 2, qui contient naturellement le niveau 1 et représente à peu près soixante heures d'enseignement, en y incluant les exercices, le lecteur devra étudier les divers éléments techniques présentés ainsi que leurs applications, et les conforter par les problèmes proposés, qui se rapportent aussi bien à des démonstrations simples non données dans le corps du texte qu'à des points purement techniques, voire à des illustrations ou des compléments divers. On pourra, sur tel ou tel point, consulter l'un des manuels de relativité indiqués ou même les articles originaux de la bibliographie. De manière générale, certains paragraphes en petits caractères peuvent être sautés en première lecture.

A titre d'exemple, et pour nous limiter à des ouvrages publiés ces vingt dernières années, nous mentionnerons, par ordre de difficulté à peu près croissante et sans que la liste ci-dessous soit complète, les ouvrages suivants : J. Schwarz, M. McGuinness (1980); J. Foster, J.D. Nightingale (1979); M.G. Bowler (1976); B. Schutz (1988); N. Straumann (1984); S. Weinberg (1972); R. Wald (1984), etc. Ajoutons également deux ouvrages parus en français récemment : Ph. Tourrenc (1993); J. Leite-Lopes (1993).

A ces ouvrages il pourra être utile d'ajouter le livre d'exercices de Lightman *et al.* (1975). En ce qui concerne le volumineux ouvrage de Ch. Misner, K. Thorne et J.A. Wheeler (1973), il convient, dans la perspective limitée adoptée ici, de l'utiliser

davantage comme une sorte de dictionnaire que comme un manuel à part entière; nous nous y référerons cependant à maintes reprises.

Remerciements

Je suis heureux de pouvoir remercier ici Mmes Sabine Collé et Dominique Lopez du soin apporté à la frappe de ce manuscrit.

Que mes collègues MM. E. Alvarez, L. Bel, L. Blanchet, B. Carter, T. Damour, N. Deruelle, D. Gerbal, E. Gourgoulhon, F. Hammer, J.P. Lasota, J.P. Luminet, J.A. Marck, P. Peter, D. Polarski, D. Priou, J. Schneider, H. Sivak, C. Vanderriest et M. Zonabend trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leurs nombreuses remarques et suggestions qui m'ont permis d'améliorer grandement cette introduction ainsi que d'éviter quelques erreurs. Mes étudiants de ces dernières années m'ont également fait bénéficier de leurs critiques et remarques qui, elles aussi, ont été extrêmement utiles.

CHAPITRE 1

La gravitation newtonienne

Dans toute la physique classique, l'espace et le temps constituent l'arène où se déroulent les divers phénomènes de la Nature. Ceux-ci ne modifient aucunement ce cadre spatio-temporel qui, *inerte*, est fixé une fois pour toutes, de manière absolue. Bien plus, le temps et l'espace sont de natures totalement différentes et n'ont *aucun lien* entre eux. Aussi la relativité nous apparaîtra-t-elle comme une théorie de la liaison mutuelle de l'espace et du temps, qui trouvera son couronnement avec la Relativité Générale, laquelle lie les propriétés spatio-temporelles aux processus dynamiques qui s'y produisent.

L'espace-temps newtonien

L'espace physique possède les propriétés usuelles de continuité, d'homogénéité, d'isotropie qu'on attribue à l'espace \mathbf{R}^3 , muni de sa structure affine (parallélisme, existence de droites) et de sa structure métrique habituelle ("théorème" de Pythagore). Il est cependant nécessaire de bien comprendre le sens physique des divers concepts mathématiques liés à \mathbf{R}^3 . Ainsi l'existence d'objets ou de phénomènes physiques, représentables par des droites (mathématiques) provient de la notion (expérimentale) d'alignement : trois points sont alignés (physiquement) si l'on peut trouver un point de vue tel qu'ils apparaissent confondus. Il s'ensuit que si la lumière constitue notre étalon de rectitude, c'est seulement par un pas supplémentaire de la pensée (lequel peut se révéler incorrect) que l'on peut identifier la trajectoire d'un rayon lumineux avec une droite de \mathbf{R}^3 . De même le concept mathématique de parallélisme dans \mathbf{R}^3 est directement lié à la notion (physique) de transport rigide et à celle de distance. Enfin, il faut se rendre compte que les propriétés (mathématiques) d'homogénéité et d'isotropie de l'espace physique ne font que traduire des faits d'expérience concernant les systèmes mécaniques : l'inaltérabilité des systèmes matériels mis dans quelque position et lieu que ce soit. Dans tous les cas, nos idées théoriques proviennent exclusivement de propriétés vérifiées à une *échelle locale*.

Le temps usuel est mathématisé par un simple paramètre réel et donc \mathbf{R} représente le temps : \mathbf{R} constitue l'élaboration quantitative de la notion qualitative

de *changement*. Physiquement, cela nécessite la connaissance d'un *étalon* du changement dont les états "successifs" (au sens intuitif) seront quantifiés de manière à définir une unité de temps. La principale caractéristique physique du temps est de s'écouler *uniformément*. Cela présuppose l'existence d'étalons restant semblables à eux-mêmes au cours de leurs changements d'état successifs. Cette hypothèse est basée sur la constatation empirique que les diverses horloges conduisent à des mesures concordantes de l'écoulement du temps. Enfin, le fait que \mathbf{R} soit totalement ordonné traduit, mathématiquement, la structure causale de la temporalité.

Ces propriétés physiques de l'espace (isotropie, homogénéité) et du temps (uniformité) se traduisent mathématiquement par des invariances dans des groupes de transformation (rotations, translations d'espace et de temps) qui impliqueront l'existence d'intégrales premières (moment cinétique, impulsion et énergie) ou constantes du mouvement.

Nous avons vu que, dans le cadre de la physique classique, l'espace et le temps étaient susceptibles d'être représentés mathématiquement par \mathbf{R}^3 et \mathbf{R} , respectivement. Il est alors parfaitement possible de construire un espace-temps classique (c'est-à-dire prérelativiste), à quatre dimensions,

$$\mathcal{M} \equiv \mathbf{R}^{3+1} = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}, \quad (1.1)$$

qui reste, à ce stade, une construction purement mathématique de peu d'utilité ou, tout au moins, sans base physique qui le rende nécessaire.

En réalité, même les notions (prérelativistes) d'espace et de temps sont intimement liées. C'est ce que Minkowski affirmait déjà, dans son célèbre article de 1908, de la manière suivante : "*Les objets de notre perception impliquent invariablement temps et lieu ensemble. Personne n'a jamais observé de lieu sauf en un instant donné, ni de temps sauf en un endroit précis*". A cela, on peut d'ailleurs ajouter que la présence de matière est indispensable si l'on veut observer quoi que ce soit. . . Bien que le lien entre l'espace et le temps soit tout à fait manifeste dans le contexte relativiste, il existe également dans le cadre newtonien et c'est ce que nous allons étudier rapidement ci-dessous.

Une discussion un peu approfondie [H. Reichenbach (1958); M. Bunge (1967)] du temps newtonien montre clairement déjà que le temps ne peut se concevoir sans un recours nécessaire à des notions spatiales. En outre, si nous avons analysé plus en détail les divers processus (idéaux) de mesure du temps, la liaison entre l'espace et le temps apparaîtrait également.

Dans le cas de l'espace physique, si l'on revient à la genèse de ses principales propriétés, on peut aussi constater l'existence de phénomènes temporels qui leur sont liés, quoique implicitement. Considérons, par exemple, le caractère *euclidien* de l'espace physique. Cette propriété provient, d'une part de la possibilité de déplacements *rigides* (éventuellement avec un mouvement rectiligne et uniforme) et, d'autre part, de l'analyse des processus de *mesure de distance*, lesquels impliquent soit le transport de règles rigides, soit, plus particulièrement, l'utilisation de *signaux lumineux*. Ce caractère euclidien de l'espace physique est donc basé implicitement

sur des faits utilisant la notion de temps, soit directement (mouvements divers), soit indirectement (propagation de signaux lumineux). Les autres propriétés de l'espace physique conduiraient à des conclusions semblables.

Finalement, l'espace-temps classique \mathbf{R}^{3+1} apparaît comme physiquement beaucoup plus fondamental qu'il n'y paraît à première vue; aussi peut-on se poser la question de savoir si ses diverses structures mathématiques correspondent, ou non, à des aspects particuliers de la réalité.

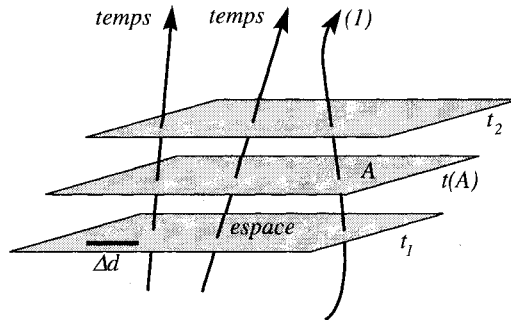


Figure 1.1 : L'espace-temps classique. Il possède une structure en strates spatiales, euclidiennes (Δd est la distance entre deux points d'une même strate du même espace physique). Le temps est représenté par des droites qui coupent ces diverses strates. (1) représente la trajectoire d'une particule ayant un mouvement arbitraire dans l'espace-temps newtonien.

Cette structure est décrite sur la figure 1.1. Le temps, universel et absolu, est représenté par des droites orientées (cette orientation est purement conventionnelle et n'est soumise qu'à une condition de cohérence minimale précisée plus loin) qui coupent chacun des 3-plans euclidiens représentant l'espace. *A priori* l'angle de ces droites avec les 3-plans spatiaux que l'on peut observer sur la figure est strictement *sans aucune signification*. En effet, \mathbf{R}^{3+1} ne possède pas de structure métrique euclidienne – contrairement au cas de la Relativité Restreinte¹ – qui puisse donner un sens à la notion d'angle dans cet espace². C'est pourquoi *toutes* les droites du genre *temps*, c'est-à-dire non contenues dans un 3-plan spatial, constituent des axes de temps possibles, parfaitement équivalents. De même, l'angle apparent formé par deux tels axes de temps, du moins sur la figure, n'a pas non plus de signification absolue : il n'est dû qu'à l'inadéquation de notre représentation d'un espace non euclidien, l'espace-temps classique, par un espace qui, lui, est euclidien, celui de la feuille de papier assimilée à \mathbf{R}^2 . Enfin la structure en *strates d'événements simultanés* de \mathbf{R}^{3+1} doit être interprétée comme sa *structure causale*. Ainsi l'hyperplan de type spatial $t(A)$, qui passe par l'événement A sépare l'espace-temps newtonien en deux régions : le futur $t > t(A)$, qui *peut* être influencé par les phénomènes susceptibles de se dérouler en A , et le passé $t < t(A)$, qui *peut* avoir

1. Pseudo-euclidienne, dans le cas de la Relativité Restreinte : voir le chapitre 2.

2. Via un produit scalaire du type $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = |\mathbf{X}| |\mathbf{Y}| \cos \theta$.

été susceptible d'influencer A ; la frontière entre le passé et le futur est le présent, c'est-à-dire l'hyperplan spatial $t(A)$ qui, lui aussi, peut influencer l'événement A en raison de l'existence possible, en physique newtonienne, d'actions à distance instantanées [Fig. 1.1].

Étudions maintenant les structures métriques de \mathbf{R}^{3+1} : chaque strate de type spatial possède une structure métrique euclidienne, la distance usuelle; de même, chaque fibre du genre temps possède également une métrique euclidienne, la durée. Par contre \mathbf{R}^{3+1} ne possède aucune structure euclidienne et, plus particulièrement, certainement pas celle de \mathbf{R}^4 .

En effet, pour qu'une distance euclidienne dans \mathbf{R}^4 du type

$$\Delta \ell^2 = \Delta \mathbf{x}^2 + \Delta t^2 v_0^2$$

ait un sens, il faudrait que l'on pût disposer d'un paramètre v_0 absolu, universel, ayant les dimensions d'une vitesse et, évidemment, possédant un sens physique quelconque.

Il reste enfin à se demander si les droites du genre temps qui nous ont servi d'axes temporels possibles ont un sens physique. C'est précisément le *principe d'inertie*, que nous étudions ci-après, qui permet de leur attribuer un tel sens qui, jusqu'ici, leur fait défaut.

En résumé, l'espace-temps newtonien possède quatre dimensions, une structure causale déterminée par des *objets géométriques* qui lui sont propres (les 3-plans spatiaux et les droites temporelles, toutes orientées de la même manière) et des structures affine et métrique assez complexes. Une classe d'objets géométriques, les droites du genre temps – elles représentent des mouvements possibles de particules libres – renforce encore la liaison entre l'espace et le temps. Nous verrons au chapitre 2 quelles structures subsistent en Relativité Restreinte et quelles sont celles qui sont modifiées et comment.

Simultanéité et mesure des distances

Dans l'analyse de l'espace-temps classique qui précède, nous avons considéré comme allant de soi la simultanéité d'événements. Cela correspond-il réellement à ce qui est *effectivement mesurable*, du moins en principe? N'y a-t-il pas là d'hypothèse implicite allant au-delà de ce que l'on peut directement tirer de l'analyse des processus expérimentaux possibles, même idéalisés? Examinons cela de plus près³.

Pour cela⁴, commençons par remarquer que la notion de simultanéité en un point d'espace n'a pratiquement pas de sens concret (elle ne peut guère être réalisée approximativement que dans le cas de collisions de particules élémentaires)

3. En outre, la critique de la notion de simultanéité classique constitue un élément important dans la genèse de la Relativité Restreinte par Einstein.

4. Nous suivrons ici l'exposé de H. Reichenbach (1927).

et constitue, au mieux, une identité logique, c'est-à-dire une définition d'un événement spatio-temporel. Le cas réellement important est celui concernant la simultanéité d'événements spatialement distincts.

Il est alors aisé de se rendre compte que la comparaison temporelle d'événements distants n'est possible que parce qu'un *signal* est envoyé d'un lieu à un autre, signal qui permet la synchronisation d'horloges situées en ces deux endroits. Pour effectuer cette comparaison, il nous faut connaître d'une part la distance spatiale des deux événements et, d'autre part, la vitesse du signal.

Comment mesurer cette vitesse? Si P_1 et P_2 désignent les deux points d'espace, si t_1 et t_2 désignent les temps de départ et d'arrivée du signal, on aura alors

$$v = \frac{P_1 P_2}{t_2 - t_1} .$$

Mais, pour que cette dernière expression ait un sens, il faut bien que les horloges situées en P_1 et P_2 aient été préalablement synchronisées! Apparemment, l'expérience de Fizeau concernant la mesure de la vitesse de la lumière [Fig. 1.2] ne requiert qu'une seule horloge : au temps t_1 un signal lumineux est envoyé vers un miroir situé à une distance ℓ où il est réfléchi au temps t_2 vers son point de départ où il arrive au temps t_3 ; on a alors

$$c = \frac{2\ell}{t_3 - t_1} ,$$

et le temps t_2 n'apparaît jamais . . .

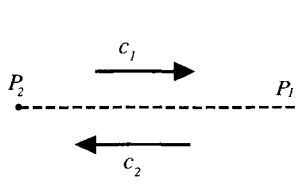


Figure 1.2 : Mesure de la vitesse de la lumière (Fizeau). Un signal lumineux émis en P_1 au temps t_1 est réfléchi en P_2 et revient en P_1 au temps t_3 ; ce faisant, on ne mesure que la moyenne des vitesses dans les sens $P_1 P_2$ et $P_2 P_1$. La mesure de t_1 et celle du temps d'arrivée t_2 en P_2 nécessitent une synchronisation préalable de deux horloges, l'une en P_1 et l'autre en P_2 , et donc l'envoi d'un signal lumineux entre ces deux points. . . dont on doit connaître la vitesse de propagation à l'avance! En réalité, la physique newtonienne admet la synchronisation des horloges par transport lent, voire à l'aide de signaux qui se propagent à vitesse infinie.

En réalité, l'expérience de Fizeau ne permet de mesurer que la moyenne harmonique des vitesses c_1 et c_2 de la lumière allant au miroir et en revenant :

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} .$$

Aussi l'usage d'une seule horloge est-il "payé" par l'hypothèse supplémentaire $c_1 = c_2$. Si l'on souhaite vérifier expérimentalement cette hypothèse, alors il faut effectivement disposer de deux horloges, en deux points différents, et qui ont donc dû être synchronisées préalablement [Fig. 1.3].

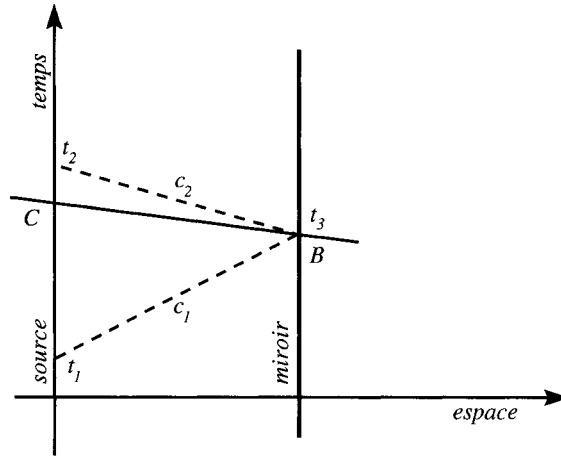


Figure 1.3 : La mesure de la vitesse de la lumière (Fizeau) telle qu'elle se présente dans l'espace-temps. C et B sont simultanés mais C est arbitraire (avec, cependant, $t_1 < t_3 < t_2$), car t_3 dépend de la façon dont la simultanéité a été définie.

Nous avons donc abouti au cercle vicieux suivant : la simultanéité nécessite la connaissance d'une vitesse, laquelle, à son tour, exige que soit établie la simultanéité de deux événements !

Il n'y a pas là, en fait, de contradiction : c'est que *la simultanéité n'est pas essentiellement une question expérimentale ; il s'agit aussi d'une question de définition* qui, comme toute définition, contient une part d'arbitraire.

Ainsi, dans l'expérience de Fizeau, l'instant d'arrivée du rayon lumineux sur le miroir sera, *par définition*,

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{2} (t_3 - t_1) .$$

Toutefois, on aurait pu aussi bien adopter la définition

$$t_2 = t_1 + \epsilon (t_3 - t_1) ,$$

avec $0 < \epsilon < 1$; et cela, sans aucune contradiction [H. Reichenbach (1927)].

En pratique, les signaux lumineux, étant les plus rapides connus, sont utilisés pour *définir* la simultanéité. Ainsi, pour reprendre la définition d'Einstein de la *simultanéité physique*, deux événements se produisant en deux points distants A et B seront simultanés si des signaux lumineux de A et de B arrivent au même moment au milieu M du segment AB .

Là où les choses se compliquent, c'est lorsqu'il s'agit d'établir la simultanéité de deux événements dans un repère en mouvement relativement à un autre repère : une paire d'événements, simultanés dans un système de référence, ne le sont plus dans le second (en mouvement) [Fig. 1.4].

La figure 1.4 (a) montre que les événements A et B sont simultanés pour M . Sur la figure 1.4 (b), on a indiqué les trajectoires des points A et B , respectivement; un observateur en mouvement par

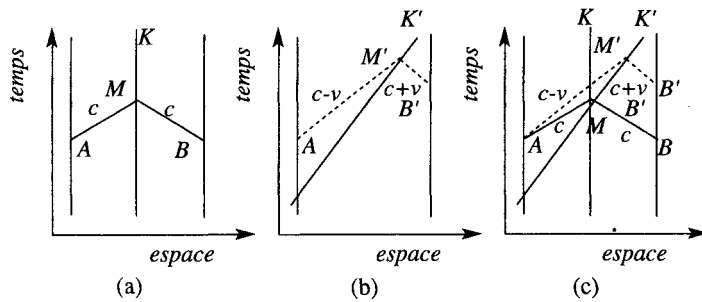


Figure 1.4 : Relativité de la simultanéité (considérée ici dans l'espace-temps newtonien). La figure (a) illustre la simultanéité d'événements distants A et B : un observateur K , au repos par rapport à la règle, considérera comme simultanés uniquement les points dont lui parviennent, au même instant, les rayons lumineux issus des extrémités (trajectoires d'espace-temps représentées par des lignes verticales continues). La figure (b) indique quels sont les événements simultanés pour l'observateur K' (trajectoire d'espace-temps oblique sur la figure) en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à K , compte tenu de la définition illustrée en (a). Enfin, la figure (c) constitue la superposition des cas (a) et (b) et montre clairement que des événements simultanés pour M (tels A et B) ne le sont plus pour M' (tels A et B').

rapport à K décrit la trajectoire désignée par K' . En M' lui parviennent les signaux lumineux de deux points A et B qui ne sont manifestement pas simultanés dans K . La figure 1.4 (c) montre les deux situations à la fois : deux événements simultanés pour M , dans K , (c'est-à-dire A et B), apparaissent comme non simultanés dans K' , et réciproquement.

Venons-en maintenant à la mesure des distances. Pour mesurer une longueur, il suffit de déplacer un certain nombre de fois une règle rigide : le processus de mesure prend alors un certain temps [Fig. 1.5] que l'on peut, dans le cadre classique, réduire arbitrairement. Cependant, lorsque l'objet à mesurer est en mouvement, par rapport à un système de référence K , ce procédé n'est pas simple à mettre en pratique. Mais, détail beaucoup plus important, il est nécessaire de mesurer les distances spatiales d'événements physiquement simultanés. Or la simultanéité physique étant une notion essentiellement relative, il en sera de même de la mesure des distances [Fig. 1.6].

Les absolus de Newton et la notion d'éther

L'espace et le temps classiques, dont nous avons indiqué plus haut les principales propriétés, ne font apparaître nulle part de notion d'éther⁵ et sont *relatifs* à des paires d'événements : le mouvement d'un système mécanique ne peut être repéré que par référence à un autre système matériel. Et, en réalité, ce point de vue "relatif" – dû à Ernst Mach – correspond très exactement aux processus de mesures et d'observations qui, effectivement, conduisent à nos concepts modernes d'espace et de temps.

5. La notion d'éther date du XIX^e siècle et est due, semble-t-il, à J.C. Maxwell.

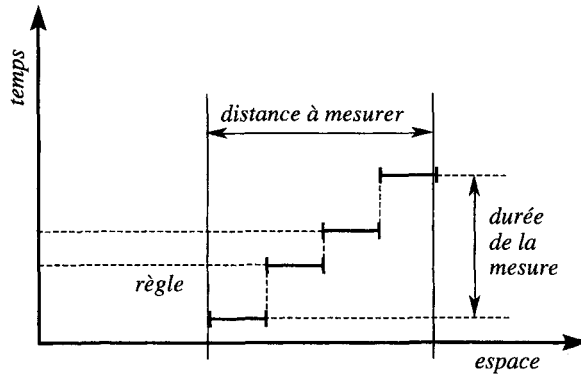


Figure 1.5 : Mesure d'une distance à l'aide d'une règle rigide. Chaque déplacement de la règle (rigide) le long de l'objet à mesurer prend a priori un certain temps pour être réalisé. Toutefois, en physique prérelativiste, la durée de chaque mesure peut – du moins en principe – être réduite arbitrairement.

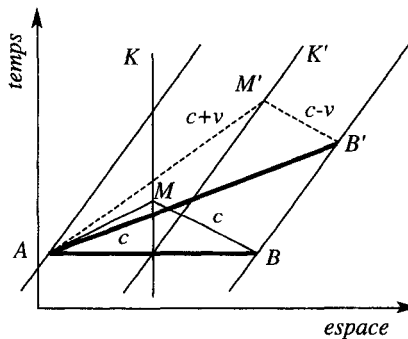


Figure 1.6 : Relativité des mesures des distances. Dans son système propre, l'observateur K' mesurera la distance $A'B'$; par contre, l'observateur K mesurera $AB \neq A'B'$.

Newton, par contre, a un point de vue fort différent dans lequel l'espace et le temps sont *absolus*, existent donc par eux-mêmes indépendamment des objets matériels qu'ils contiennent. Il distingue ainsi des mouvements relatifs – ceux que, précisément, on observe – et des mouvements absolus, qui s'effectuent relativement à l'espace absolu et à une échelle de temps absolu. Pour lui, l'espace relatif (de même que le temps relatif) n'est qu'une mesure de l'espace absolu (du temps absolu). Voici ce qu'en dit Newton :

... “L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile. L'espace relatif est cette mesure, cette dimension mobile, des espaces absolus : que nos sens déterminent par sa position aux corps; et qui est communément prise pour l'espace immobile”...
 ... “Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle durée”...
 ... “Un mouvement absolu est le déplacement d'un corps d'un lieu absolu à un autre lieu absolu; et le mouvement relatif [concerne] le déplacement d'un lieu relatif à un autre”... [cité par M. Jammer (1954); reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur].

L'existence d'un temps et d'un espace absolus, même indécélable par des moyens mécaniques, est en fait une nécessité à la fois d'ordre logique et aussi d'ordre ontologique pour la validité du principe d'inertie, du moins pour Newton. Si, en effet, l'état de repos présuppose l'existence d'un espace absolu, l'exigence qu'un système d'inertie ne soit pas une pure fiction mais puisse être conçu, fût-ce à titre de concept, et utilisé réellement implique nécessairement le temps et l'espace absolus.

Nous verrons un peu plus loin que tous les systèmes d'inertie se déduisent les uns des autres à l'aide des transformations de Galilée. Pour Newton, un seul d'entre eux est réellement immobile, de manière absolue; mais comment le distinguer des autres? "*Que le Centre du Monde soit immobile; cela est reconnu par tous, tandis que certains prétendent que la Terre, et d'autres, le Soleil, est fixe en ce centre.*" En fait, Newton place ce "Centre du Monde" au centre de gravité du système solaire⁶, ce qui est en dehors de toute vérification, quelle qu'elle soit.

Par la suite, de nombreux philosophes (Leibniz, Huyghens, etc.) s'opposèrent aux absolus de Newton car, comme il le reconnaissait lui-même, l'espace et le temps absolus "*ne tombent effectivement jamais sous l'observation de nos sens*". Néanmoins, pour des raisons d'ordre théologique⁷ [*"Newton identifie espace et temps avec des attributs divins, Dieu n'est pas éternité et infinité, mais est éternel et infini. Eternel et omniprésent, Dieu constitue durée et espace"* {Max Jammer (1954)}], et malgré les objections de Leibniz et Huyghens, les absolus de Newton furent salués comme un accomplissement remarquable de la "philosophie naturelle", c'est-à-dire de la science.

Cependant, le développement de la mécanique au XVIII^e siècle (Lagrange, Laplace, Poisson) montrait que les absolus de Newton ne jouaient qu'un rôle très faible, pour ne pas dire inexistant, dans la description et la prévision de phénomènes naturels. Il devint ainsi progressivement clair que, dans la pratique, l'on pouvait s'en dispenser. Voici ce qu'en dit J.C. Maxwell, par exemple :

"L'espace absolu est conçu comme restant toujours semblable à lui-même et immobile. L'arrangement des parties de l'espace ne peut pas plus être altéré que l'ordre de portions de temps. Les concevoir comme se mouvant de leurs lieux revient à concevoir le mouvement d'un endroit lui-même. Mais de la même façon que rien ne distingue une portion de temps d'une autre excepté les différents événements qui s'y déroulent, il n'y a rien qui distingue une partie de l'espace d'une autre sauf sa relation avec le lieu d'un corps matériel. Nous ne pouvons pas décrire le temps d'un événement sauf par référence à quelque autre événement, ou le lieu d'un corps sauf par référence à un autre corps. Toute notre connaissance, à la fois du temps et de l'espace, est essentiellement relative" [cité par M. Jammer (1954)].

A la fin du XIX^e siècle, il devint tout à fait clair que la notion d'espace absolu échappait complètement à toute possibilité d'observation [voir, plus loin, le principe de relativité galiléen]; notamment l'idée que l'espace absolu agit par lui-même mais ne peut subir d'action qui le modifie (E. Mach).

6. Quoique Halley ait annoncé en 1718 que certaines étoiles considérées jusqu'alors comme fixes (Sirius, Aldébaran, Bételgeuse) avaient changé de position depuis Ptolémée, Newton ne tient pas compte du mouvement possible du système solaire (imaginé auparavant par Giordano Bruno) qui le rend inapte au rôle de "centre du monde". . .

7. La preuve dite ontologique de l'existence de Dieu et les autres preuves traditionnelles commençaient à être considérées comme logiquement déficientes.

A ce stade, il ne restait qu'une possibilité réelle de mise en évidence d'un espace absolu, d'un *éther*. En effet, avec les découvertes (i) du caractère *fini* de la vitesse de la lumière et (ii) de sa nature ondulatoire, il semblait certain qu'un milieu matériel, *l'éther*, dernier avatar de l'espace absolu, était indispensable en tant que support à la propagation des ondes électromagnétiques. Mais, nous le verrons plus loin, même cette possibilité sera exclue par l'expérience, celle de Michelson et bien d'autres encore.

Le principe d'inertie

Dans de nombreux ouvrages de mécanique, on commence par énoncer les trois lois de Newton⁸ et, en premier lieu, le principe d'inertie⁹ sous la forme "*un corps qui n'est soumis à aucune force est soit au repos, soit en mouvement rectiligne et uniforme*", ou sous une forme semblable. Il s'ensuit que ce principe d'inertie paraît bien être la conséquence immédiate de la seconde loi de Newton, lorsqu'on y a annulé la force! En fait, le principe d'inertie possède un contenu nettement moins trivial, indépendant de la loi fondamentale de la dynamique, que nous allons considérer maintenant.

Loin de constater une banalité ou même une pétition de principe, le principe d'inertie affirme, en réalité, *l'existence de mouvements privilégiés*, les mouvements "libres" ou *mouvements inertiels*. Ces mouvements correspondent alors à *toutes* les trajectoires rectilignes possibles dans \mathbf{R}^3 , parcourues uniformément dans le temps. Il n'est peut-être pas inutile de souligner l'apport révolutionnaire de ce principe : alors que pour les penseurs médiévaux (Buridan, par exemple, au XIV^e siècle) et leurs successeurs, le mouvement inertiel est le résultat d'une qualité intrinsèque du mobile, tout au contraire, pour Newton (et pour ses prédécesseurs qui ont peu à peu découvert le principe d'inertie¹⁰) [M.A. Tonnelat (1971) ou M. Jammer (1961)], ce type de mouvement est, d'une part, équivalent à l'état de repos, et d'autre part, n'est engendré ou arrêté par une action extérieure qu'en son début ou en sa fin, respectivement.

Dans le cadre de l'espace-temps classique, le principe d'inertie se traduit par le fait que la structure affine discutée auparavant représente effectivement une réalité

8. C'est-à-dire : (i) le principe d'inertie; (ii) la loi fondamentale de la dynamique et (iii) l'égalité de l'action et de la réaction.

9. La formulation de Newton est la suivante : "*Tout corps persiste dans son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme à moins qu'il ne soit amené à changer cet état par des forces qui lui soient imposées.*"

10. La définition que nous donnons ici est de nature cinématique. Il est également possible de donner une définition de caractère dynamique du principe d'inertie; cependant, elle présente l'inconvénient de rendre beaucoup plus délicate la discussion des concepts liés à l'espace-temps classique, car celui-ci contient alors un élément dynamique qui n'a pas véritablement de justification très évidente dans le cadre newtonien. Ainsi, on peut définir un repère galiléen comme un repère dans lequel la loi fondamentale de la dynamique s'écrit sous la forme habituelle $F = m\gamma$.

physique : les droites du genre temps – donc non contenues dans des 3-plans spatiaux $t = \text{const.}$ – correspondent à des mouvements physiquement réalisables, ou plutôt concevables comme limites ou comme idéalizations de mouvements réels, les mouvements de particules “libres”. Bien entendu, la notion de mouvement “libre” est une abstraction qui reflète cependant, dans des limites qui dépendent de l'échelle des systèmes considérés, une certaine réalité.

Cette classe de mouvements privilégiés est donc définie intrinsèquement dans l'espace-temps : ce sont les droites du genre temps, donc des *objets géométriques* de \mathbf{R}^{3+1} , *indépendants de tout système de coordonnées*, indépendants aussi de la nature des “horloges” utilisées pour mesurer le temps et des “règles” qui permettent la détermination des distances. C'est seulement l'introduction de l'espace-temps classique qui permet la caractérisation géométrique, intrinsèque donc, des mouvements inertiels. Inversement, c'est l'existence de cette classe de mouvements, ou tout au moins la reconnaissance de leur importance, qui fonde assez largement le concept d'espace-temps.

Pratiquement, l'existence des mouvements inertiels se traduit par celle de *systèmes de référence inertiels*, ou encore *systèmes de référence galiléens*, c'est-à-dire la donnée d'échelles de temps où celui-ci s'écoule uniformément et de coordonnées cartésiennes dans \mathbf{R}^3 (également d'ailleurs dans \mathbf{R}^{3+1} , où les mouvements “libres” s'effectuent en lignes droites; de plus, à ces coordonnées cartésiennes, on peut toujours associer un système *physique* en mouvement “libre”).

Il est clair qu'un événement quelconque de l'espace-temps classique \mathbf{R}^{3+1} peut être repéré à l'aide de systèmes de coordonnées arbitraires. Toutefois, la possibilité de le faire à l'aide de coordonnées cartésiennes d'une part, et le fait que ces coordonnées aient un sens physique (mouvements “libres” convenables, associés), constituent un postulat, précisément le principe d'inertie.

Les mouvements inertiels déterminent donc des systèmes de coordonnées *canoniques* dans \mathbf{R}^{3+1} et, en tout point, existe une classe de repères (c'est-à-dire de vecteurs indépendants) déterminés par la classe de coordonnées galiléennes considérées : ce sont les *repères d'inertie* ou *repères galiléens*. Ces repères serviront de bases pour déterminer analytiquement les champs de vecteurs utilisés, les vitesses, les accélérations, les forces, etc.

Étant données des coordonnées galiléennes ¹¹ (\mathbf{x}, t) , il est facile de se rendre compte que l'on peut en déduire une infinité d'autres à l'aide des relations

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= \mathcal{R}\mathbf{x} - \mathbf{v}t + \mathbf{x}_0 \\ t' &= t + t_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

où \mathcal{R} est une rotation arbitraire, \mathbf{v} une vitesse arbitraire également, \mathbf{x}_0 un vecteur de \mathbf{R}^3 quelconque et t_0 une durée quelconque. Ces transformations, les *transformations de Galilée*, étant linéaires vont transformer une droite de \mathbf{R}^{3+1} en une

11. En fait, ce qui suit concerne plutôt le cas de repères galiléens. Cependant, comme nous utiliserons des coordonnées cartésiennes (\mathbf{x}, t) , nous parlerons indifféremment de repères ou de coordonnées galiléennes (ou repères inertiels), ce qui, à proprement parler, constitue un abus de langage courant.

droite de \mathbf{R}^{3+1} : un mouvement inertiel est transformé en un mouvement inertiel. Elles entérinent le fait que l'espace est isotrope : si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ et $t_0 = 0$, la rotation d'une droite de \mathbf{R}^3 fournit une autre droite ! Il en est de même pour l'homogénéité spatiale. Ces transformations forment un groupe continu à dix paramètres (trois pour les rotations, trois pour les translations spatiales, trois pour les transformations de Galilée *pures* – ou restreintes –

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}t \\ t' &= t, \end{cases} \quad (1.3)$$

et une enfin concernant les translations de l'origine du temps) dont les propriétés se traduisent aisément dans le domaine physique.

A ces transformations, on peut adjoindre les changements d'unités

$$\mathbf{x}' = \alpha \mathbf{x}, \quad t' = \beta t, \quad (1.4)$$

ainsi que les *retournements d'axes (parité)* et le *renversement du temps*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= -\mathbf{x}, \quad t' = t \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x}, \quad t' = -t \end{cases} \quad (1.5)$$

qui ne modifient pas non plus le caractère inertiel du mouvement libre.

A ce stade une question légitime se pose : existe-t-il dans la Nature des systèmes véritablement inertiels ? A l'échelle du laboratoire, les mouvements "libres" horizontaux constituent à peu près des mouvements inertiels, si l'on néglige les frottements, par exemple. Un meilleur système inertiel que celui du laboratoire est lié au mouvement de translation de la Terre sur son orbite autour du Soleil. Mais là encore, il s'agit d'une approximation valable uniquement pour des échelles de temps courtes : si la valeur absolue de la vitesse moyenne de la Terre sur son orbite solaire est de 29 km/s, elle varie cependant un peu (de l'ordre de quelques km/s) de sorte que la Terre ne constitue pas un véritable système d'inertie. A son tour, un repère lié au centre de gravité du système solaire (donc, en pratique, au Soleil) peut constituer une bonne approximation d'un repère galiléen.

Incidentement, l'adoption d'un système de coordonnées géocentrique (système de Ptolémée) ou héliocentrique (système de Copernic) est indifférent du point de vue mathématique. Néanmoins, un système héliocentrique rend les calculs analytiques du mouvement des planètes beaucoup plus simples. En outre, le système de Copernic constitue, physiquement, un meilleur système d'inertie. Cependant, la mauvaise querelle [E. Namer (1975)] cherchée aux coperniciens (dont Galilée est l'exemple le plus connu) trouve ses origines lointaines dans les conceptions cosmiques de Platon [A. Koestler (1960)] et est de nature philosophico-religieuse : il n'y a pas eu de querelle sur le choix d'un système d'inertie !

Mais le Soleil – dont la vitesse est de l'ordre de 220 km/s par rapport aux étoiles fixes – participe de la rotation générale de notre galaxie, la Voie lactée (une galaxie spirale typique), et se trouve, en outre, soumis à l'attraction gravitationnelle des autres étoiles qui la constitue : ce n'est donc pas véritablement un système d'inertie. De même, notre galaxie ne constitue pas, elle non plus, un système inertiel : elle

est située dans un amas local, constitué d'une vingtaine d'autres galaxies à l'action desquelles elle est soumise; aussi son mouvement ne saurait-il être (et il n'est) ni rectiligne, ni uniforme. Toutefois, cette hiérarchie de systèmes de plus en plus proches d'un système inertiel ne s'arrête pas là; l'amas local fait partie de l'amas de galaxies de la Vierge en mouvement lui-même dans le superamas de la Vierge . . .

On pourrait donc concevoir que la considération d'objets de plus en plus lointains, dont on ne puisse observer les mouvements propres, permettrait d'obtenir une *approximation* de plus en plus valable d'un système inertiel, concept théorique et, partant, *idéal*. Ainsi, on pourrait considérer qu'un "bon" repère inertiel puisse être constitué par le système solaire et trois quasars, objets relativement ponctuels (vus de la Terre) qui sont les plus lointains que l'on connaisse actuellement.

Il doit rester clair qu'il ne peut exister dans la Nature de véritable système d'inertie; encore une fois, il s'agit d'un concept théorique dont la principale vertu réside dans la possibilité qu'il permet d'aller au-delà des aspects purement cinématiques, de la simple description de systèmes physiques; c'est-à-dire d'en étudier la dynamique. C'est d'ailleurs précisément parce qu'il n'y a, et ne saurait y avoir, de système véritablement isolé, que le concept de système d'inertie a été si difficile et si long à se dégager d'idées *a priori*. Ajoutons encore que la présentation cinématique – c'est-à-dire en termes d'espace et de temps du principe d'inertie donnée plus haut est évidemment une simplification car ce principe ne peut acquérir tout son sens que dans un contexte dynamique, où les notions de force, de masse, etc, sont élaborées.

Une dernière remarque de nature théorique. Il pourrait s'avérer intéressant de se donner, mathématiquement, un espace-temps, c'est-à-dire une variété assez largement arbitraire, et un groupe d'invariance qui, y opérant transitivement, définirait alors une classe de mouvements, inertiels par définition (ainsi, \mathbf{R}^{3+1} et le groupe de Galilée). Bien qu'une telle idée suggère des généralisations, possibles sur le plan mathématique ou théorique, elle ne correspond pas à la démarche effectuée historiquement.

Les lois de la dynamique et la relativité galiléenne

Une fois définis les repères galiléens (ou les systèmes de référence galiléens, les coordonnées galiléennes) d'abord physiquement, puis conceptuellement et enfin mathématiquement, il est possible d'étudier non seulement les propriétés du mouvement de chaque système mécanique (cinématique) mais encore d'écrire des *lois dynamiques*¹², valables dans ces repères inertiels.

12. C'est-à-dire de lois générales qui permettent d'aller au-delà de la seule description cinématique, en "résumant" des classes de mouvements ayant une même cause.

Il sera donc possible, dans un tel repère, d'écrire la loi fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton) sous la forme

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \quad (1.6)$$

où \mathbf{F} est la force appliquée à une particule de masse m située en \mathbf{x} au temps t .

En fait, Newton n'a pas écrit sa seconde loi sous la forme précédente mais plutôt sous une forme qui, en notations modernes, s'écrirait

$$\begin{aligned} \mathbf{F} dt &= d\mathbf{p} \\ \mathbf{p} &= m\mathbf{v}, \end{aligned}$$

où \mathbf{p} est l'impulsion de la particule. Cette dernière forme, qui provient, entre autres, de l'analyse faite auparavant par Huyghens, Marci, Wallis, Wren du choc des particules (où l'on a conservation de l'impulsion totale au cours du choc) subsistera en Relativité Restreinte, et non pas la précédente, avec toutefois cette différence que la relation entre impulsion et vitesse sera modifiée.

La loi fondamentale de la dynamique newtonienne constitue un *postulat* qui nécessite, répétons-le, la loi d'inertie avant de pouvoir être formulé analytiquement. Elle recouvre une grande richesse de concepts qui ont exigé beaucoup d'efforts, de temps, de discussions pour émerger, et n'est en aucune façon triviale même si sa formulation mathématique est très simple¹³. Aussi un rapide commentaire n'est-il pas totalement inutile.

D'abord, cette loi relie deux concepts de natures différentes; l'une est cinématique (l'accélération γ) et l'autre dynamique (la force \mathbf{F}). Cela constitue *déjà* une révolution car, jusqu'à Newton et depuis Aristote, la force était génératrice de vitesse et non pas d'accélération.

Si l'on essayait d'écrire une loi dynamique correspondant aux conceptions mécaniques prénewtoniennes, i.e. scolastiques, on écrirait à peu près une équation du genre

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{v}$$

Ceci n'était pas spécialement absurde : Aristote, observant des pêcheurs traînant une barque pouvait en inférer une loi de ce type, la force de frottement étant naturellement proportionnelle à la vitesse (à vitesse faible!). Ce genre de concepts devait empêcher – avec aussi l'absence de techniques mathématiques suffisamment élaborées – Kepler de parvenir à la loi de la gravitation universelle (voir plus loin), bien qu'il eût en main tous les éléments nécessaires pour y arriver (les trois lois qui portent son nom).

Dans l'équation de la dynamique, la *masse d'inertie* m apparaît comme le coefficient de la réponse (l'accélération) à une excitation extérieure (la force). Elle caractérise bien la *résistance au mouvement* de la particule, une propriété intrinsèque, caractéristique de son *contenu de matière* : plus un corps est massif et plus il est nécessaire de déployer une force importante pour l'amener à se mouvoir à une vitesse donnée. Là encore le concept d'inertie a mis beaucoup de temps (plusieurs siècles) avant de pouvoir être dégagé [Max Jammer (1961)] : des premières analyses de Buridan (XIV^e siècle) au concept *qualitatif* d'inertie de Kepler,

13. Encore fallait-il avoir inventé le calcul infinitésimal : Leibniz, Newton, . . .

aux expériences mentionnées sur les chocs de particules et à celles d'Huyghens sur la force centrifuge, le chemin a été long jusqu'à la systématisation et l'élaboration extraordinairement complexes de Newton.

La proportionnalité entre force et accélération d'une particule pourrait être différente de la forme usuelle $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma}$. Plus spécifiquement, on pourrait écrire, en se limitant à une relation linéaire,

$$F^i = \sum_j m^i_j \gamma^j \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.7)$$

Toutefois, le tenseur m^i_j , s'il n'était pas proportionnel à δ^i_j , briserait l'invariance par rotation de l'espace : les deux ou trois vecteurs propres de m^i_j introduiraient des directions privilégiées dans l'espace physique et celui-ci ne serait donc plus isotrope. Il n'en reste pas moins que l'existence éventuelle d'un tenseur de masse $m^i_j \neq m \delta^i_j$ (δ^i_j est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 autrement) doit être tranchée par l'expérience. Ceci a été fait [Chap. 3] et le résultat est que $m^i_j = m \delta^i_j$ et ce, à une très bonne approximation : c'est l'expérience de V.W. Hughes et al. (1960), R.W.P. Drever (1961); voir aussi R.H. Dicke (1965). En raison de son importance théorique – qui va bien au-delà de l'anisotropie de la masse [C.M. Will (1981)] – indiquons brièvement sur quoi est basée cette expérience en citant S. Weinberg (1972) : Hughes *et al.* et Drever, indépendamment, "ont observé l'absorption résonante de photons par un noyau de Li^7 dans un champ magnétique de 4700 Gauss. L'état fondamental a un spin 3/2 de sorte que, dans un champ magnétique, il se décompose en quatre niveaux d'énergie qui devraient être également espacés si les lois de la physique nucléaire possèdent une invariance de rotation. Dans ce cas les trois transitions entre états voisins devraient avoir la même énergie et le coefficient d'absorption des photons présenterait un pic aigu unique à cette énergie. Par contre, si l'inertie était anisotrope, alors les sous-états magnétiques ne seraient pas également espacés et il n'y aurait, non pas une seule, mais trois raies de résonances, proches" (reproduit avec l'aimable autorisation de John Wiley and Sons, Inc., copyright © 1972). Tel est le principe de cette expérience, répétée ensuite de nombreuses fois avec des matériaux différents. Le résultat de Hughes et Drever était $\Delta m/m \lesssim 10^{-20}$ et a été beaucoup amélioré par la suite. Ce résultat peut être interprété de diverses manières [C.M. Will (1981); R.H. Dicke (1965)] et, en particulier, comme un test de haute précision de l'invariance de Lorentz locale.

Enfin la notion de force elle-même appelle quelques remarques.

D'abord, si l'on souhaite que seules les positions et les vitesses initiales de la particule en déterminent complètement le mouvement, il est nécessaire que \mathbf{F} dépende seulement de \mathbf{x} (la position de la particule au temps t), de \mathbf{v} (sa vitesse au temps t) et, à la rigueur, du temps. On obtiendra alors un système différentiel du second ordre. Si \mathbf{F} dépendait, par exemple, de $\boldsymbol{\gamma} \equiv (d/dt)\mathbf{v}$, il faudrait connaître également l'accélération initiale.

Ensuite \mathbf{F} est un vecteur de \mathbf{R}^3 , ce qui semble clair puisque l'on exige sa proportionnalité à $m\boldsymbol{\gamma}$. Cependant, même cette propriété n'est pas évidente : il fallait, préalablement à l'écriture de la loi de la dynamique classique, avoir reconnu et testé expérimentalement ce caractère vectoriel. Nous reviendrons plus loin sur d'autres caractères importants de la force newtonienne, notamment en relation avec le principe de relativité galiléenne et la gravitation.

Venons-en maintenant au *principe de relativité galiléenne*. Considérons, pour cela, un système mécanique constitué de N particules ponctuelles de masses m_i ($i = 1, 2, \dots, N$) en interactions mutuelles par l'intermédiaire de forces à

deux corps du type

$$\mathbf{F}_{(ij)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),$$

de sorte que, dans un système d'inertie, les équations du mouvement de la i -ème particule s'écrivent

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{(ij)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j); \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.8)$$

Comment s'écrivent maintenant les équations du mouvement de ce système mécanique dans un autre système d'inertie? Pour le voir, effectuons une transformation de Galilée; la i -ème particule est maintenant repérée à l'aide de coordonnées (\mathbf{x}'_i, t') et l'équation précédente s'écrit

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}'_i}{dt'^2} = \sum \mathbf{F}_{(ij)}(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j) \quad (1.9)$$

où nous nous sommes limités, quoique ce ne soit pas essentiel, à des transformations de Galilée "pures". Cette nouvelle équation est formellement identique à la première! Autrement dit, le système mécanique considéré est décrit de la même manière, par des équations analogues dans *tous* les systèmes de référence galiléens. Plus concrètement, cela se traduit par le fait que le mouvement rectiligne et uniforme ne conduit à aucune modification décelable des propriétés *mécaniques* du système considéré : ce mouvement ne donne, en effet, pas lieu à des forces fictives (telle la force centrifuge dans le cas d'un mouvement de rotation) supplémentaires, qui donneraient donc naissance à des effets observables. C'est ce que Galilée exprimait en affirmant que "*le mouvement est comme rien*".

Notons que nous avons admis implicitement l'invariance des masses m_i des particules dans une transformation du groupe de Galilée :

$$m_i = m'_i.$$

En fait, si l'on considère que la masse – mesure de la résistance au changement dans le mouvement – est une propriété intrinsèque de la particule (par exemple, son contenu de matière), alors il doit bien en être ainsi.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le principe de relativité galiléen. Comme le remarque fort justement M.A. Tonnelat (1971), il comporte deux aspects : l'un physique et l'autre descriptif. Son contenu physique est le suivant : *le mouvement inertiel d'un système mécanique ne produit sur celui-ci aucun effet qui en modifie les propriétés mécaniques*. Ce qui se traduit analytiquement par l'énoncé descriptif suivant : *un système mécanique est décrit par des lois qui ont la même forme dans tous les systèmes de référence galiléens*.

Supposons, en effet, que les lois de la mécanique aient deux formes différentes dans deux systèmes de référence galiléens distincts; soit

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\gamma},$$

dans le premier système et

$$\mathbf{F}' = m\mathbf{v}' + \mathbf{K},$$

dans le second, où \mathbf{F}' est la transformée de \mathbf{F} dans une transformation de Galilée quelconque. Le terme \mathbf{K} supplémentaire traduirait alors cette non-invariance formelle des équations de la mécanique et, comme il est assimilable à une force, il donnerait lieu à des effets, en principe mesurables, et qui permettraient, par conséquent, de mettre en évidence le mouvement relatif des deux systèmes inertiels; ceci serait évidemment contraire au principe de relativité.

A ce stade on peut se poser la question : pourquoi “principe de relativité” et non pas “théorème de relativité”? Il semble bien, en effet, que nous ayons *démontré* un “théorème de relativité” et non pas évoqué un principe. En réalité nous avons bien utilisé le principe de relativité galiléen, quoique de manière implicite, notamment lorsque nous avons considéré des forces d’interaction de la forme $\mathbf{F}_{(ij)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$. Nous n’aurions pas pu démontrer le “théorème” de relativité pour des systèmes mécaniques soumis à des forces totalement arbitraires. Inversement, le principe de relativité permet de *restreindre* la classe des forces physiquement admissibles.

Montrons-le rapidement sur deux exemples simples.

(i) Considérons d’abord le mouvement d’une particule de masse m soumise à l’action d’un champ de force extérieur $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t)$:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t).$$

L’*uniformité* de l’écoulement du temps,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t+t_0) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}; t), \tag{1.10}$$

(pour tout t_0) entraîne que \mathbf{F} ne dépend pas du temps. De même, l’*homogénéité* de l’espace entraîne que \mathbf{F} ne dépend pas de la position. Le même type de raisonnement implique que \mathbf{F} ne dépend pas de \mathbf{v} si \mathbf{F} doit être la même dans tous les repères d’inertie. Enfin, l’*isotropie* de l’espace

$$\mathcal{R}\mathbf{F} = \mathbf{F} \tag{1.11}$$

(pour toute rotation \mathcal{R}) entraîne finalement que $\mathbf{F} \equiv 0$! Le seul mouvement compatible avec le principe de relativité galiléen est donc le mouvement libre. . . . Cela ne signifie évidemment pas que des forces extérieures ne puissent exister en tant que modèles approximatifs pour des systèmes dynamiques compliqués, dont tous les degrés de liberté ne nous intéressent pas. Par exemple, si nous considérons le mouvement d’une particule chargée dans le champ magnétique d’un solénoïde, la véritable interaction qui, elle, satisfait bien au principe de relativité, est celle de la particule chargée considérée, avec celles qui constituent le solénoïde : le champ magnétique traduit simplement cette interaction sans qu’il soit nécessaire d’écrire (et de résoudre!) les équations des $\approx 10^{23}$ particules du solénoïde.

(ii) Considérons maintenant un système constitué par deux particules interagissant par l’intermédiaire d’une force indépendante des vitesses et, pour simplifier (mais le résultat final est, en fait, indépendant de cette hypothèse), dérivant d’un potentiel $V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; t)$:

$$\mathbf{F}_{(ij)} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} V.$$

Les mêmes raisonnements que ci-dessus conduisent alors à admettre pour V la forme générale

$$V = V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|); \quad i, j = 1, \tag{1.12}$$

dont il découle immédiatement que

$$\mathbf{F}_{(ij)} = -\mathbf{F}_{(ji)} \propto \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, \tag{1.13}$$

Dans ce cas, le principe de relativité impose que la force d'interaction soit centrale et obéisse, en outre, au principe de l'action et de la réaction

$$\mathbf{F}_{(ij)} + \mathbf{F}_{(ji)} = 0 .$$

Les principes d'inertie et de relativité vus par Galilée

Voici, extrait de l'ouvrage de Galilée *Dialogue sur les deux principaux systèmes du Monde – le tolméen et le copernicien* (1632), une citation classique qui montre comment, au XVII^e siècle, on pouvait exprimer ces principes :

“Enfermez-vous, avec quelques amis, dans un vaste salle, bien à couvert, au fond d'un grand navire; munissez-vous de mouches, de papillons et d'autres petits animaux volants; prenez un grand vase d'eau et mettez-y des poissons; suspendez au plafond un petit seau dont l'eau tombe goutte à goutte dans un autre vase à col étroit, posé sur le sol : le navire restant immobile, observez soigneusement comme les petits animaux volètent avec des vitesses égales dans toutes les directions de la salle; les poissons nageant indifféremment de tous côtés; les gouttelettes tombant toutes dans le vase posé par terre; et vous-même lançant quelque chose à un ami, n'aurez pas besoin de lancer avec plus de force dans une direction plutôt que dans une autre, pour des distances égales; si vous sautez, comme on dit, à pieds joints, vous parcourrez des distances égales dans tous les sens. . .

Mettez maintenant le navire en marche, aussi vite que vous voudrez. Alors (pourvu que le mouvement soit uniforme, et non oscillant de-ci, de-là) vous ne discernerez pas le moindre changement dans les effets décrits et aucun d'entre eux ne pourra vous indiquer si le navire est en mouvement ou arrêté; en sautant vous franchirez les mêmes distances que précédemment et, même si le navire se meut à une très grande vitesse, vous ne ferez pas des sauts plus grands vers la poupe que vers la proue, bien que, pendant que vous serez en l'air, le sol de la salle se déplace dans le sens contraire à votre saut; et si vous jetez quelque chose à votre ami, vous n'aurez pas besoin de le lancer avec plus de force, qu'il se trouve vers la poupe ou que ce soit l'inverse; les gouttelettes continueront à tomber dans le vase inférieur, sans qu'une seule tombe vers la poupe, bien que, pendant que la gouttelette est dans l'air, le navire parcourt une bonne distance; les poissons dans leur eau et sans plus de fatigue nageront d'un côté ou de l'autre. . . ; enfin les papillons et les mouches continueront leur vol indifférent dans toutes les directions. . . La cause de la permanence de tous ces effets, c'est que le mouvement est commun au navire et à tout ce qu'il contient, y compris l'air. . .” [Traduit par J.M. Lévy-Leblond (1965).]

La gravitation newtonienne

La théorie newtonienne de la gravitation provient de l'étude du mouvement des planètes par Kepler, sur la base des observations remarquablement précises¹⁴ de Tycho Brahé (1588) et, naturellement, grâce aux élaborations théoriques des notions d'inertie, de mouvement, de système mécanique, de force, etc.

Rappelons que les trois lois de Képler sont les suivantes : (i) les orbites des planètes sont des *ellipses* (jusqu'à Kepler, elles étaient considérées comme circulaires; il fallait un très grand soin, sans parler d'une excellente acuité visuelle, pour que les observations de Tycho Brahé permettent de distinguer sans discussion possible entre des cercles et des ellipses); (ii) dans des temps égaux, les rayons vecteurs balaient des aires égales [c'est la *loi des aires* [Fig. 1.7]; elle est équivalente à

14. Rappelons qu'elles étaient faites à l'œil nu . . .

la conservation du moment cinétique $|\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}| = \text{const.}$ (\mathbf{v} : vitesse, \mathbf{x} : rayon vecteur)¹⁵; (iii) le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'ellipse :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM_\odot} \quad (1.14)$$

(M_\odot masse du Soleil; a : demi-grand axe de l'ellipse décrite par la planète considérée).

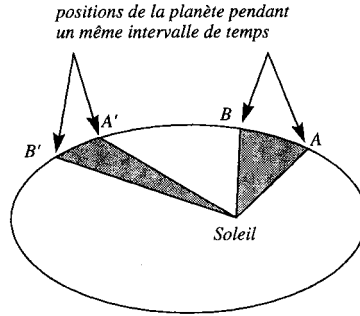


Figure 1.7 : La loi des aires. Si la Terre (ou toute autre planète) parcourt AB et $A'B'$ pendant un même intervalle de temps, alors les triangles curvilignes SAB et $SA'B'$ ont la même surface (S est la position du Soleil en l'un des foyers de l'ellipse qu'est la trajectoire de la planète considérée).

Elle est basée sur la loi d'attraction universelle des graves, donnée par Newton pour la première fois¹⁶ (1687) :

$$\mathbf{F}_{(12)} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \mathbf{n}_{12} \quad (1.15)$$

où $\mathbf{F}_{(12)}$ est la force de gravitation entre deux corps de masses m_1 et m_2 ; où r_{12} est leur distance; où \mathbf{n}_{12} est un vecteur unitaire porté par l'axe qui joint les deux corps; et où G est la constante de gravitation

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ CGS.}$$

Examinons brièvement les principales caractéristiques de la force de gravitation.

La première est que l'action entre les deux corps s'effectue *instantanément et à distance*. Ceci est tout à fait contraire à l'intuition physique selon laquelle l'action d'un corps sur un autre nécessite un certain temps, une propagation à vitesse finie, pour s'actualiser. Cette critique, dont Newton était parfaitement conscient¹⁷, devait

15. Les conceptions péripatéticiennes du mouvement et de la force, génératrice de vitesse, auraient conduit à une force de gravitation en $1/r$; en effet, comme $F \propto v$ et $v \propto 1/r$, Képler aurait pu en déduire $F \approx 1/r$.

16. En fait, de nombreux philosophes de son époque penchaient vers une loi de force en $1/r^2$ (Hooke, par exemple) mais avaient été incapables de la démontrer effectivement.

17. "Que la gravité soit innée, inhérente et essentielle à la matière, de sorte qu'un corps puisse agir à distance sur un autre corps à travers le vide, sans aucune espèce d'intermédiaire, pour transporter l'action et la force d'un corps jusqu'à l'autre, voilà qui me paraît d'une si grande absurdité que nulle personne ayant quelque capacité de raisonnement philosophique ne pourra jamais, ce me semble, y ajouter crédit" [cité par B. Hoffmann (1975)].

ralentir considérablement la diffusion des *Principia* : il fallut près de cinquante ans pour que la gravitation newtonienne fût acceptée sur le continent.

La seconde caractéristique est que, pour la première fois, aussi bien le mouvement des planètes que celui de la Lune ou la chute des corps pouvaient être attribués à une *même* cause, décrits par une *même* loi. C'était là l'un des grands accomplissements de la science du XVII^e siècle.

Ensuite, les forces de gravitation apparaissent comme étant des forces à *longue portée* et extrêmement *faibles*.

Pour deux électrons, de masse $m = .91 \times 10^{-27}$ g, le rapport entre les forces de gravitation et les forces électrostatiques est de

$$F_{\text{grav}} / F_{\text{es}} \approx 2.4 \times 10^{-43} !$$

La loi d'attraction universelle présuppose encore l'élaboration du concept de masse. Comme nous l'avons indiqué plus haut, la notion de masse inerte (ou masse d'inertie) – la masse apparaissant comme coefficient de l'accélération dans la loi fondamentale de la dynamique – provient de deux classes de faits expérimentaux : (i) les chocs élastiques ou inélastiques étudiés par Marci, Wallis, Wren et Huyghens; (ii) la rotation uniforme des corps (Huyghens constate que le rapport des forces centrifuges de deux corps tournant à la même vitesse angulaire est comme le rapport de leurs poids). A cela, il faut ajouter une découverte due à Jean Richer en 1671 : en des lieux situés à des latitudes différentes, le poids des corps est différent (en l'occurrence, il s'agissait d'étudier la période d'un pendule à Paris et en Guyane). La masse inerte est déterminée expérimentalement par collision avec une particule d'épreuve dont la masse sert à définir l'unité de masse : on utilise pour cela la conservation de l'impulsion et l'on mesure les variations de vitesse des deux particules; ce type de loi ne peut d'ailleurs en aucune façon servir de définition "opérationnelle" de la masse, contrairement aux affirmations de Mach [M. Bunge (1966)]. Ainsi, la masse du Soleil n'est nullement estimée à l'aide d'une collision mais grâce à la troisième loi de Kepler et tout le substrat théorique que l'on peut y inclure (seconde loi de Newton, attraction universelle, égalité de la masse inerte et de la masse pesante).

Dans la loi d'attraction universelle les deux masses m_1 et m_2 jouent des rôles différents. En outre, elles jouent *a priori* un rôle différent de celui de la masse inerte : elles représentent des *couplages gravitationnels* des particules 1 et 2. Considérons donc un système de deux particules en interaction gravitationnelle. Si l'on distingue les masses inertes des masses gravitationnelles, les équations du mouvement de ce système s'écriront

$$m_{I_1} \gamma_1 = -G m_{p_1} m_{A_2} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \equiv \mathbf{F}_1 \quad (1.16)$$

$$m_{I_2} \gamma_2 = -G m_{p_2} m_{A_1} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} \equiv \mathbf{F}_2 \quad (1.17)$$

où \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont les positions des particules 1 et 2. Dans ces équations les m_I sont les masses inertes, les m_p les masses graves passives (c'est-à-dire les coefficients de couplage de la particule qui subit le champ gravitationnel de l'autre particule) et les m_A les masses graves actives (qui caractérisent l'intensité du champ de gravitation de la particule qui crée ce champ). Il est alors facile de se rendre compte que, si le principe de l'action et de la réaction (troisième loi de Newton) est vérifié,

$$\mathbf{F}_{(12)} + \mathbf{F}_{(21)} = \mathbf{0}, \quad (1.18)$$

alors, nécessairement, $m_A = m_p$. En fait, ce principe pourrait ne pas être vérifié¹⁸; c'est pourquoi il est nécessaire de tester expérimentalement l'égalité de ces deux masses (active et passive); on trouve que [L.B. Kreuzer (1968); voir aussi l'interprétation de C. Will (1976)]:

$$\left| \frac{m_A - m_p}{m_p} \right| < 5 \times 10^{-5}.$$

Venons-en maintenant à l'égalité éventuelle de la masse inerte m_I et de la masse grave passive m_p . Dans un champ de gravitation uniforme \mathbf{g} , la loi de la dynamique s'écrirait

$$m_I \gamma = m_p \mathbf{g}; \quad (1.19)$$

ceci entraînerait que *les corps tombant en chute libre n'auraient pas le même mouvement*: on trouverait

$$\mathbf{z}(t) = \frac{1}{2} \frac{m_p}{m_I} \mathbf{g} t^2, \quad (1.20)$$

où $\mathbf{z}(t)$ est l'altitude au temps t d'une particule pesante lâchée à $t = 0$ sans vitesse initiale. L'expérience a été faite par Galilée¹⁹ – plutôt sur des plans inclinés qu'à la tour de Pise – et l'on constate que l'on a sensiblement $m_p \approx m_I$. De même, si $m_p \neq m_I$, *des pendules de même longueur auraient des périodes différentes*, proportionnelles à $(m_p/m_I)^{1/2}$: l'expérience a été effectuée par Newton qui a trouvé que

$$\left| \frac{m_I - m_p}{m_p} \right| < 10^{-3}.$$

Des expériences plus récentes [Chap. 7] et non contestées²⁰ donnent

18. Par exemple, il ne l'est pas dans le cas des forces électromagnétiques.

19. Au V^e siècle de notre ère, le grammairien et philosophe Philoponos effectuait déjà des expériences sur la chute des graves; mais il ne sut pas, comme Galilée, faire abstraction de phénomènes non essentiels, telle la résistance de l'air [B. Cohen (1960)].

20. V.B. Braginskii (1972) annonce $|\delta m/m| < 10^{-12}$, mais ce résultat est généralement considéré comme douteux.

$$\left| \frac{m_I - m_p}{m_p} \right| < 10^{-11},$$

et l'on espère, dans un avenir que l'on souhaite proche, grâce à des expériences effectuées à bord de satellites, obtenir une précision meilleure que 10^{-17} et même 10^{-20} .

On peut donc poser avec une excellente précision (l'une des meilleures de toute la physique)

$$m_I = m_p, \quad (1.21)$$

et faire de cette égalité un principe fondamental, le *principe d'équivalence faible*. Quelles en sont les principales conséquences?

Pour le voir, considérons un système de particules interagissant par l'intermédiaire de forces à deux corps $\mathbf{F}_{(ij)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ et plongé dans un champ de gravitation *homogène et uniforme* \mathbf{g} . Dans un système de référence galiléen, on peut alors écrire

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{(ij)}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) + m_i \mathbf{g}, \quad (1.22)$$

pour l'équation du mouvement satisfaite par la i -ème particule. Plaçons-nous maintenant dans un système de référence en *chute libre* dans le champ \mathbf{g} , donc dans un système de référence non galiléen car *accélééré* par rapport au système inertiel dans lequel on a écrit les équations du mouvement; soit encore

$$\begin{cases} t' = t \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2. \end{cases} \quad (1.23)$$

Dans ce référentiel, il est facile de s'apercevoir que les équations dynamiques du système considéré s'écrivent

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}'_i}{dt'^2} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{(ij)}(\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j). \quad (1.24)$$

Autrement dit, dans *ce* référentiel en chute libre, le champ de gravitation *extérieur* n'apparaît pas et ne joue aucun rôle dans la dynamique du système; ses effets ont été totalement annulés.

Si l'on avait, par exemple, considéré le cas d'une particule pesante, dans un système de référence "en chute libre", elle décrirait, comme toute autre particule pesante non soumise à d'autres forces que celle du champ de pesanteur, une trajectoire rectiligne sur laquelle son mouvement serait uniforme. Ce système de référence peut donc, en un sens, être considéré comme inertiel.

De manière générale, on peut toujours annuler *localement* l'effet d'un champ de gravitation newtonien, même non homogène (tel celui de la pesanteur terrestre),

par le choix d'un système de référence en chute libre (et de coordonnées adaptées, évidemment), pourvu que les distances caractéristiques du système soient notablement plus petites que la longueur caractéristique sur laquelle varie le champ de gravitation [Fig. 1.8].

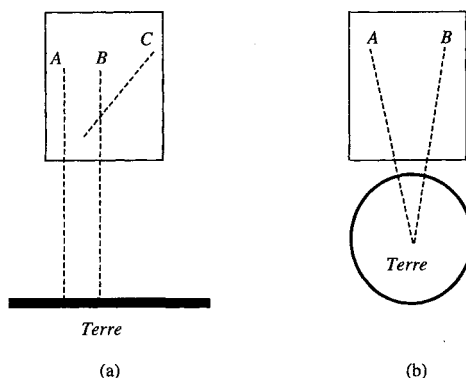


Figure 1.8 : L'ascenseur d'Einstein. Dans un champ de gravitation sensiblement homogène (a) (les dimensions de l'ascenseur sont très faibles devant celles où varie le champ de gravitation), un ascenseur en chute libre constitue un système inertiel : deux particules au repos, A et B, le restent ; une particule libre C poursuit son mouvement rectiligne et uniforme, dans ce repère. Par contre, lorsque le champ n'est pas homogène (b), un observateur lié à l'ascenseur peut décider qu'il se trouve dans un champ de gravitation extérieur au vu des comportements des particules A et B : tombant vers le centre de la Terre – en suivant les lignes de force du champ –, elles auraient tendance à se rapprocher l'une de l'autre.

La seconde conséquence de l'égalité des masses grave et inerte est très importante sur le plan théorique ; il n'est plus possible de trouver de système d'inertie car tout corps matériel est nécessairement en interaction gravitationnelle avec le reste de l'Univers ! Autrement dit, à l'inverse des forces électromagnétiques pour lesquelles il existe des corps électriquement neutres, *il n'existe pas de matière pesante qui soit neutre gravitationnellement*. Cette absence de système d'inertie global implique également que les accélérations cessent d'avoir un sens absolu, du moins localement. Si l'on accepte, en effet, l'idée d'un espace absolu, alors les accélérations ont encore un sens absolu, même globalement. Ceci pouvait constituer, aux yeux de Newton et de ses successeurs, une raison supplémentaire pour l'introduction d'un éther.

Du fait que les effets dynamiques des forces de gravitation, pour des champs suffisamment homogènes, ne dépendent pas des caractéristiques intrinsèques des corps (comme leur masse ou leur charge), elles apparaissent plutôt comme des *caractéristiques géométriques* de l'espace, lequel cesse alors d'être euclidien²¹ : ce point de vue peut être concilié avec la théorie newtonienne [P. Havas, (1964), A. Trautman (1963)] et représente l'un des fondements de la théorie d'Einstein de

21. Voir Gauss, Lobachevski, Clifford, Riemann dans J.L. Coolidge (1963).

la gravitation qui, toutefois, ne prend pleinement son sens [Chap. 7] que dans le cadre d'une unification, autre que qualitative, des concepts d'espace et de temps.

Une dernière remarque concernant la loi d'attraction universelle est que la force de gravitation due à une particule de masse m , située en \mathbf{x} , et agissant en un point de coordonnées \mathbf{y} , dérive du *potentiel de gravitation*

$$\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = -G \frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (1.25)$$

de sorte que le potentiel de gravitation en \mathbf{x} dû à un ensemble de particules situées en des points de coordonnées \mathbf{x}_i , peut s'écrire

$$\varphi(\mathbf{x}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}, \quad (1.26)$$

où l'on a fait implicitement l'*hypothèse de l'additivité des interactions* dues à chaque particule. Cette hypothèse ne va pas de soi et se trouve violée à l'échelle de la microphysique, du moins sous cette forme.

Notons enfin qu'en appliquant l'opérateur laplacien,

$$\Delta \equiv \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \equiv \nabla^2 \equiv \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right|^2, \quad (1.27)$$

à l'expression précédente de φ , on trouve facilement que

$$\Delta \varphi(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}), \quad (1.28)$$

c'est-à-dire l'équation de Poisson. Dans cette équation $\rho(\mathbf{x})$ est la densité de masse des particules en \mathbf{x} .

En posant

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i m_i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (1.29)$$

où $\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$ est la distribution de Dirac (densité de masse +1 située en \mathbf{x}_i) et en utilisant le fait que

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x}), \quad (1.30)$$

il vient bien l'équation de Poisson. Le potentiel de gravitation s'écrit aussi, avec ces définitions et propriétés²²,

$$\varphi(\mathbf{x}) = -G \int d^3 x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (1.31)$$

Mesure de la constante de gravitation

La valeur de la constante de gravitation, entrant dans la loi d'attraction universelle de Newton, joue évidemment un rôle très important dans tous les phénomènes

22. Rappelons que $\int d^3 x' \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') f(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x})$, où $f(\mathbf{x})$ est une fonction continue quelconque.

gravitationnels. On pourrait essayer de déterminer G à l'aide des oscillations d'un pendule simple. Cependant, cela ne serait pas très précis car, ce que l'on mesure effectivement, c'est l'accélération de la pesanteur, g , elle-même reliée à la constante de gravitation par la relation

$$g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}, \quad (1.32)$$

où M_{\oplus} est la masse de la Terre et R_{\oplus} son rayon²³ et où l'on a négligé l'effet de la force centrifuge due à la rotation de la Terre (cet effet est cependant de l'ordre de quelques pourcents : $g = 9.83$ à l'équateur et 9.78 au pôle) : malheureusement, pas plus la masse de la Terre M_{\oplus} que son rayon R_{\oplus} ne sont connus avec suffisamment de précision.

Ainsi, la détermination de G est strictement impossible à l'aide des seules forces gravitationnelles importantes disponibles, c'est-à-dire celles des planètes et de leurs satellites, leurs masses n'étant pas connues de manière suffisamment précise. Aussi seules des expériences de laboratoire permettent-elles de déterminer G , encore que la faiblesse de ce type d'interaction n'autorise pas, actuellement, l'obtention de plus de trois chiffres significatifs.

Historiquement²⁴, la première mesure précise de G est due à Cavendish (1798), grâce au pendule de torsion, inventé indépendamment par Coulomb et Michell vers 1750. Le principe de l'expérience est le suivant : deux masses sont suspendues aux extrémités de l'équipage mobile d'un pendule de torsion [Fig. 1.9]; lorsqu'on en approche deux masses nettement plus importantes, l'attraction gravitationnelle entre les paires de masses fait dévier le pendule; la mesure de cette déviation permet alors le calcul de G .

L'expérience de Cavendish [Fig. 1.10] est probablement la première expérience de physique qui soit véritablement moderne, notamment par la recherche systématique des causes d'erreurs possibles et, naturellement, des remèdes à y apporter. Enumérons-en quelques-unes ainsi que les solutions de Cavendish. Il existe d'abord des *gradients de température* à l'intérieur de l'appareil, ce qui entraîne des *courants de convection*. Il était donc nécessaire d'enfermer la balance du pendule à l'intérieur d'une enceinte close ayant les dimensions les plus petites possible. En outre, l'ensemble de l'expérience était également enfermé dans un logement plus important. De plus, pour éviter de perturber l'appareil, il fallait encore pouvoir le *contrôler à distance* : c'est ainsi que la position des grosses masses W est déterminée par une poulie M reliée à un fil à l'extérieur de l'enceinte m ; de même, la *remise au zéro de la position* de l'équipage mobile du pendule, qui comprend les petites masses s , s'effectue par l'intermédiaire d'une tige rigide FK et d'un engrenage; enfin la *lecture de la déviation* du pendule est effectuée par l'intermédiaire d'un vernier, éclairé de l'extérieur L et dont les graduations sont lues à travers une lunette T . Une autre cause d'erreur importante est l'effet du *champ magnétique terrestre* : l'usage de matériaux non magnétiques était donc indispensable, quoique des effets résiduels soient possibles (plomb insuffisamment pur des grosses masses W , par exemple). Il fallait encore estimer l'*effet de la convection*, due aux gradients de température dans l'appareil (les masses de plomb W ne se refroidissaient pas de la même manière que les autres matériaux, pendant

23. $M_{\oplus} = 5.977 \times 10^{27}$ g ; $R_{\oplus} = 6.3718 \times 10^8$ cm.

24. Nous suivrons ici l'exposé de F. Everitt (1975).

la nuit, par exemple); l'effet du *mouvement brownien*²⁵, dû à l'agitation moléculaire, sur l'équipage mobile du pendule (cet effet était négligeable, compte tenu de la précision de l'expérience); l'effet des *secousses sismiques* (négligeable également), etc.

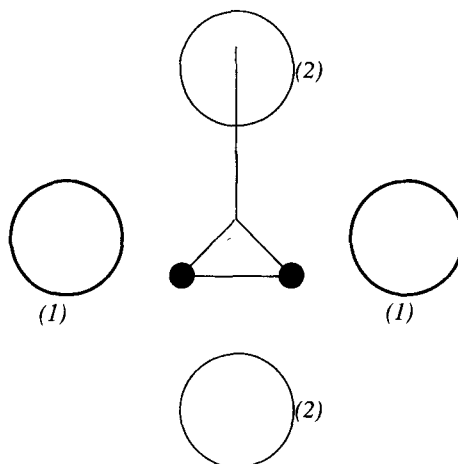


Figure 1.9 : Principe de la mesure de G . Un pendule de torsion, dont l'équipage mobile comprend deux "petites" masses d'épreuve, est soumis à l'action gravitationnelle de deux "grosses" masses, selon deux positions différentes (1) et (2). Dans l'expérience de Cavendish (1798), on mesure la déviation de l'équipage mobile du pendule lorsqu'on fait varier les positions des "grosses" masses. Par contre, dans la mesure de Heyl (1930), on évalue la variation de la période d'oscillations du pendule : la proximité (ou l'éloignement) des "grosses" masses produit une force de rappel supplémentaire due à l'attraction gravitationnelle exercée sur les "petites" masses, donc proportionnelle à G .

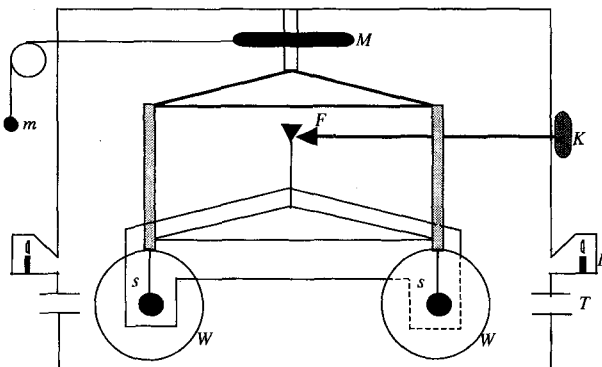


Figure 1.10 : L'expérience de Cavendish (1798). Deux petites masses s sont suspendues au bout de l'équipage mobile d'un pendule de torsion dont la position est mesurée (i) en l'absence de grosses masses W et (ii) en leur présence à l'aide d'un petit télescope T . La distance entre les deux petites masses s est d'environ deux mètres. L est un bougie servant à éclairer l'appareillage. FK est une tige rigide permettant la remise à zéro de l'équipage mobile du pendule. La poulie M permet, par l'intermédiaire du fil m , d'approcher ou d'éloigner les grosses masses W .

25. Le "mouvement brownien" a été découvert en 1827 par le botaniste R. Brown. Il s'agit donc là d'une source d'erreur que Cavendish ne pouvait guère imaginer. ...

Par la suite, plusieurs améliorations importantes, qui augmentèrent encore la précision de la mesure, furent apportés par Boys (1889). Ce furent, d'une part, l'usage de fibres de quartz (au lieu de fils d'argent, dans l'expérience de Cavendish) et, d'autre part, l'utilisation du miroir de Poggendorf ("levier optique"), comme méthode de lecture. Enfin, Boys réalisa que la précision de cette expérience pouvait être améliorée en diminuant sa taille, contrairement à l'intuition immédiate, 6 pieds (182.88 cm) 5/8 pouces (1.59 cm). La raison en est que si les "grosses" masses peuvent être augmentées, la précision angulaire reste la même. En outre, une plus faible taille permet de limiter les courants de convection, les gradients de température étant plus faibles. Diverses améliorations furent ensuite apportées [Tableau 1.1] jusqu'aux toutes dernières expériences qui utilisent des méthodes différentes dans leur principe.

Cavendish	1798	6.754
Reich	1838	6.70
von Jolly	1881	6.465
Wilsing	1889	6.596
Poynting	1894	6.698
Boys	1895	6.658
Braun	1896	6.658
von Eötvös	1896	6.65
Richard <i>et al.</i>	1898	6.685
Burgess	1901	6.64
Crémieu	1909	6.67
Heyl	1930	6.670
Zahradnicek	1933	6.659
Heyl <i>et al.</i>	1942	6.673
Rose <i>et al.</i>	1969	6.674
Facy <i>et al.</i>	1972	6.6714
Sagitov <i>et al.</i>	1977	6.6745
Luther <i>et al.</i>	1982	6.6726

Tableau 1.1 : Quelques résultats de la mesure de G
(G est en unités de 10^{-8} CGS)

La première expérience moderne est celle de Heyl (1942). Au lieu de mesurer la déviation d'un pendule de torsion, on mesure plutôt sa période pour deux positions différentes des "grosses" masses : le changement de période permet de déterminer G . La mesure d'une période d'oscillation étant plus précise que celle d'une déviation, on obtient alors une valeur plus exacte de G .

La seconde expérience est due à R.D. Rose *et al.* (1969)²⁶. Son principe est toujours celui de l'expérience de Cavendish mais l'ensemble de l'appareil peut tourner autour d'un axe vertical. Les deux "grosses" masses tendent à faire tourner l'équipage mobile du pendule de torsion [Fig. 1.11] mais un servomécanisme fait alors tourner l'appareil en sens inverse, de manière à annuler la déviation du pendule de torsion. L'appareil tourne alors autour d'un axe vertical (celui de la

26. Voir aussi Beams (1971).

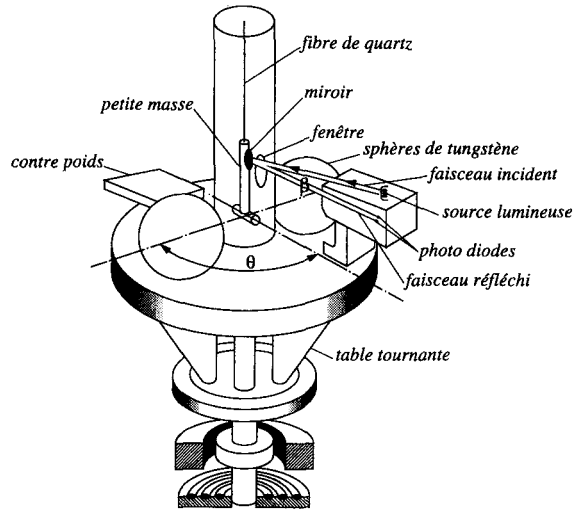


Figure 1.11 : L'expérience de R.D. Rose *et al.* (1969).

fibre qui soutient l'équipage mobile du pendule) avec une accélération sensiblement uniforme (de l'ordre de 5×10^{-6} radians/s²) que l'on mesure et dont on peut déduire directement la valeur de G .

Le tableau 1.1 donne les résultats de quelques expériences. Les chiffres qui y figurent représentent $10^8 G$, en unités CGS. D'après Beams (1971) l'erreur relative sur G est probablement de l'ordre de 5×10^{-3} , au minimum, sauf pour la dernière mesure où elle serait seulement de l'ordre de 10^{-3} .

En fait, toutes ces expériences présupposent la validité de la loi d'attraction universelle²⁷ en $1/r^2$: mm'/r^2 . En réalité, cette loi n'est bien vérifiée qu'à l'échelle des distances du système solaire; aussi peut-on se poser la question de savoir s'il en est de même à l'échelle du laboratoire [D.R. Long (1974)]. Si la loi d'attraction universelle n'est pas en $1/r^2$ à des distances plus faibles, on peut toujours l'écrire sous la forme très générale

$$F = G(r) \frac{mm'}{r^2}, \quad (1.33)$$

où la "constante" de gravitation sera une fonction lentement variable (inconnue, en général, à moins de présupposés théoriques) de la distance. Il suffit donc, en principe, de mesurer G à plusieurs distances : une loi de gravitation en $1/r^2$ donnera, aux erreurs d'expérience près, la même valeur de G , quel que soit r . Pour obtenir une indication préliminaire, il suffit de reprendre les mesures précédentes de G ; c'est précisément ce qu'a fait D.R. Long (1974). Le tableau 1.2 représente ces mesures. La figure 1.12 [D.R. Long (1974)] indique une vague tendance de G à

27. Une liste quasi exhaustive des diverses mesures de G effectuées, des principales sources d'erreur, etc., peut être trouvée dans G.T. Gillies (1983).

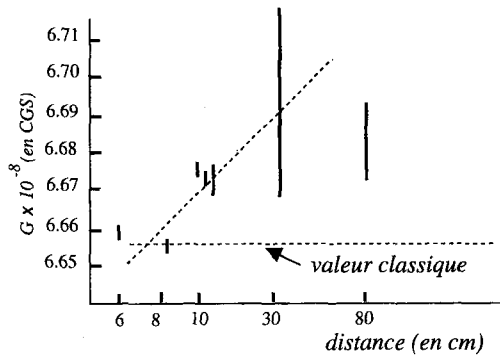


Figure 1.12 : Valeurs de G en fonction de la distance [d'après D.R. Long (1974)]. Si G ne varie pas avec la distance, on s'attend que les diverses mesures se répartissent autour d'une droite horizontale. En pointillé est dessinée la droite $G = \text{const.}$, classique. En trait continu est indiquée la droite des moindres carrés; elle indique bien une tendance de G à varier avec la distance. Cependant, les barres d'erreurs sont telles qu'une conclusion quelconque serait, pour le moment, tout à fait hasardeuse. Les coordonnées sont semi-logarithmiques.

varier avec la distance, ainsi qu'une expérience semble le confirmer [D.R. Long (1976)]. Toutefois, compte tenu des erreurs expérimentales, compte tenu aussi d'autres expériences [V.I. Panov et V.N. Frontov (1980); etc.], il semble bien que l'on puisse considérer G comme une constante et donc que la loi en $1/r^2$ soit valable à l'échelle du laboratoire.

Boys (1894)	6.6576 ± 0.002	6.3 cm
Braun (1896)	6.655 ± 0.002	8.6 cm
Poynting (1891)	6.6984 ± 0.029	32 cm
Richard <i>et al.</i> (1898)	6.685 ± 0.011	80 cm
Heyl (1930)	6.670 ± 0.005	13 cm
Heyl <i>et al.</i> (1942)	6.673 ± 0.003	13 cm
Rose <i>et al.</i> (1969)	6.674 ± 0.004	12 cm

Tableau 1.2 : Mesures de G en fonction de la distance des masses

Diverses considérations théoriques avancées ces dernières années [voir les références 1 à 15 dans E.G. Adelberger *et al.* (1990)], suggèrent l'idée d'une "cinquième force", en plus des quatre connues (les forces gravitationnelle, électromagnétique, nucléaire et faible). Cette cinquième force, s'ajoutant à l'attraction universelle de Newton, la modifierait; ce que maintes expériences ont tenté de mettre en évidence, sans pour autant parvenir à des conclusions définitives. Parmi les hypothèses les plus souvent considérées, on imagine que cette cinquième force dérive d'un potentiel de la forme

$$v(r_{12}) = \pm \frac{g_5^2}{4\pi} (q_5)_1 (q_5)_2 \frac{e^{-r_{12}/r_0}}{r_{12}},$$

ou d'une combinaison linéaire de telles expressions : g_5^2 est une constante universelle tandis que q_5 dépend du corps considéré. Selon les modèles théoriques envisagés,

q_5 peut dépendre du nombre baryonique, du nombre leptonique, ou des deux, etc. Il s'ensuit que cette nouvelle force n'obéit pas au principe d'équivalence faible et donc que des expériences du type Eötvös [Chap. 7] permettent d'en restreindre l'intensité. En outre, la présence d'une longueur caractéristique r_0 indique que la loi de Newton pourrait être modifiée sur une telle échelle; c'est ce qui explique le grand nombre de vérifications de cette loi effectuées ces derniers temps. On trouvera davantage de détails dans l'article de E.G. Adelberger *et al.* (1990) cité plus haut.

Une autre possibilité est que la loi d'attraction universelle puisse être valable mais que la constante de gravitation G ait varié au cours du temps. Toutefois, une telle variation, nécessairement extrêmement faible, aurait toutes sortes de conséquences²⁸, depuis une variation du rayon de la Terre dans le passé, en passant par des modifications géophysiques, jusqu'à des variations du mouvement de satellites ou de la Lune [T.C. Van Flandern (1981)]. Il semble que l'une des limites supérieures les plus précises à cette variation provienne de l'étude du mouvement du *pulsar binaire* PSR 1913 + 16 [T. Damour *et al.* (1988)]. Dans tous les cas, on trouve que cette variation est compatible avec la valeur zéro et, de toute manière

$$\frac{\delta \log G}{\delta t} < 10^{-11} \text{ année}^{-1} .$$

Limites de la théorie newtonienne de la gravitation

Les lois de Newton, avec la loi d'attraction universelle, permettaient de disposer d'une théorie unique et rationnelle pour décrire le mouvement des planètes et de leurs satellites, un problème ouvert pendant deux mille ans : il n'était plus besoin de disposer d'un système d'épicycles [Fig. 1.13] compliqué et tout à fait *ad hoc* pour décrire leur mouvement et faire des prévisions; la loi en $1/r^2$ suffisait et cela représentait une véritable révolution.

Néanmoins, vers le milieu du XIX^e siècle, quelques désaccords commencèrent à se faire jour (avance résiduelle du périhélie²⁹ de Mercure de 38'' d'arc par siècle selon Leverrier dès 1850) qui seront précisés davantage vers la fin du siècle par Newcomb (42''/9 pour Mercure, 8'' pour Mars, 10'' pour Vénus, etc.).

Précisons un peu tout cela. Le mouvement d'une seule planète autour du Soleil s'effectue sur une ellipse, et le périhélie correspondant est *a priori* un point fixe. Toutefois, en raison de la présence de faibles perturbations causées par divers facteurs (attraction des autres planètes, aplatissement éventuel du Soleil, précession de la Terre, etc.) la trajectoire réelle est une sorte de rosette [Fig. 1.14] qui correspond à une ellipse dont l'axe principal tournerait lentement dans son plan. Il s'ensuit que le périhélie de la planète considérée tourne également.

28. Voir le chapitre 7.

29. Le périhélie est le point de la trajectoire de la planète le plus proche du Soleil.

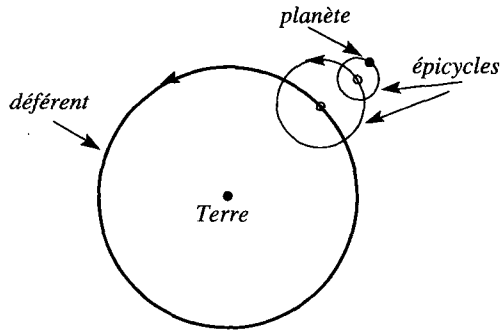


Figure 1.13 : Le mouvement d’une planète d’après Ptolémée. Autour de la Terre tournent les planètes (dont une seule a été représentée sur la figure) sur des cercles, “figures parfaites”. Le plus grand cercle est le “défèrent”; les plus petits sont les “épicycles”. En fait, pour rendre davantage compte des données de l’observation, le défèrent n’était pas centré exactement sur la Terre et il y avait plusieurs épicycles.

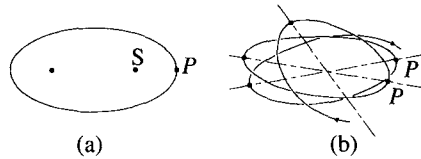


Figure 1.14 : Avance du périhélie d’une planète. En (a) P représente le périhélie et S le Soleil; en (b) on a montré, en l’exagérant, l’avance du périhélie P, P’, P’’ . . .

On montre, en mécanique, que les seules forces centrales auxquelles correspondent des trajectoires fermées (pour une particule située dans un tel champ de force) sont de la forme $F \propto 1/r^2$ ou $F \propto r$. Il en découle que toute perturbation, si faible soit-elle, à la loi en $1/r^2$ va se traduire par une avance (ou un retard) du périhélie de la planète considérée : l’ellipse “s’ouvre” et tourne lentement [Fig. 1.14].

Par exemple, on a

Mercure :	$42''56 \pm 0''94$
Venus :	$8''4 \pm 4''8$
Terre :	$4''6 \pm 2''7$

en ce qui concerne les résidus *inexpliqués* par la théorie newtonienne. Ainsi, pour Mercure, on observe une avance du périhélie de $532''$ d’arc par siècle due uniquement aux perturbations apportées par les autres planètes et éventuellement imputable à l’aplatissement du Soleil, le “reste” de cette avance ($5067''$ d’arc par siècle) étant dû à la précession des équinoxes ($50''26$ d’arc par an le long de l’écliptique). On constate donc que le résidu inexpliqué par la théorie newtonienne est tout à fait significatif, même en tenant compte des erreurs d’observations [G.M. Clemence (1947)].

Bien que des désaccords existent également concernant le mouvement de la Lune ou celui de la comète d’Encke, on peut cependant trouver diverses explications classiques (ralentissement de la rotation de la Terre dû aux marées, en ce qui concerne

la Lune; existence d'un courant météorique perturbateur de la trajectoire de la comète) de sorte que l'essentiel de ce qui échappe à la théorie newtonienne porte surtout sur le mouvement des planètes et, principalement, sur celui de Mercure.

Pour expliquer ces désaccords, plusieurs tentatives ont été effectuées, qui se sont révélées soit par trop arbitraires, soit en contradiction avec d'autres données d'observations : anneau de petites planètes, hypothèse de Seeliger à propos de la lumière zodiacale, corrections à (ou modifications de) la loi d'attraction universelle, espace physique non euclidien, etc.

En fait, seules quelques théories relativistes de la gravitation (dont celle d'Einstein est, pour le moment, la plus plausible en même temps que la première historiquement) permettent d'apporter une solution véritable – c'est-à-dire non arbitraire et en accord avec toutes les autres données d'observation – à ce problème.

La gravitation newtonienne a été parfois remise en cause ces dernières années [Milgrom, Sanders, etc.; cf. J. Bekenstein (1988) pour une revue et d'autres références] au vu des *courbes de rotation* des galaxies spirales [Fig. 1.15]; celles-ci présentent, à grande distance, un plateau caractéristique alors que l'on s'attendrait plutôt à une décroissance de la vitesse en fonction de la distance.

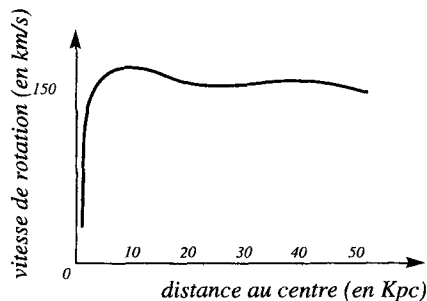


Figure 1.15 : Courbe de rotation de galaxie spirale. Notez le plateau caractéristique aux grandes distances.

Considérons une galaxie spirale, comme la nôtre, en rotation. Une étoile-test en co-rotation à la distance r du centre est telle que

$$m v^2 = \frac{GmM}{r},$$

où m la masse de l'étoile-test et M la masse totale de la galaxie. La loi de Newton ne saurait donc expliquer ce plateau caractéristique présent dans toutes les courbes de rotation, puisque $v^2 \approx 1/r$.

Cependant, la présence de matière non visible³⁰ – sous forme de particules exotiques (ions divers, matière étrange, etc.) – peut permettre d'expliquer ce plateau sans qu'il soit nécessaire de modifier la loi d'attraction universelle. Toutefois, cette matière noire n'a pas encore été mise en évidence.

30. Ou "matière noire", "matière invisible", "matière cachée", etc.

Le caractère fini de la vitesse de la lumière

Un élément très important dans la genèse de la relativité est constitué par la découverte du caractère fini de la vitesse de la lumière. Il n'était pas du tout évident, au XVII^e siècle, que cette vitesse fût finie. Ainsi, Descartes avait la "*certitude plus que morale*" que la lumière se propageait instantanément, au contraire du Père Mersenne³¹ ou de Galilée qui tenta d'en mesurer la vitesse.

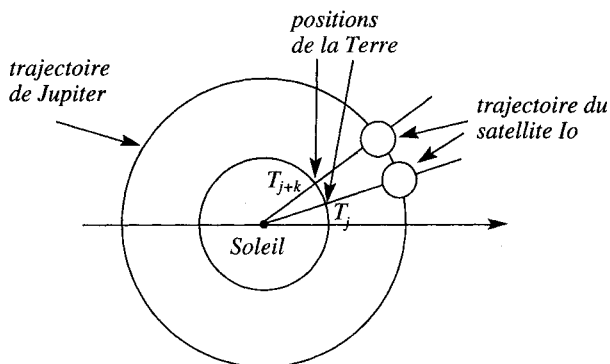


Figure 1.16 : La mesure de Römer de la période d'occultation de *Io* (l'un des satellites de Jupiter). T_j et T_{j+k} désignent les positions de la Terre après j et $j+k$ retours de *Io*.

La première mesure [Fig. 1.16] de la vitesse de la lumière est due à l'astronome danois O. Römer (1675) qui, observant la période d'occultation³² (environ 42 heures) de l'un des satellites de Jupiter³³, *Io*, avait constaté qu'en six mois de l'année, cette période – qui aurait dû être constante – ralentissait d'environ 1300 secondes : *Io*, qui aurait dû reparaître à intervalles réguliers, était de plus en plus en retard par rapport aux prédictions. La seule conclusion possible pour expliquer ce désaccord, celle de Römer, était la suivante : en six mois la distance Terre–Jupiter a varié d'à peu près un diamètre de l'orbite terrestre (Jupiter possède une période d'environ 12 ans et, en six mois, se déplace en gros de 12°) et le retard observé correspond au temps supplémentaire mis par la lumière pour parcourir cette distance (le diamètre de l'orbite terrestre est de l'ordre de 3×10^{13} cm). Par la suite, bien d'autres procédés seront utilisés.

Le principe de la mesure de Römer est le suivant : un observateur situé sur Terre mesure l'intervalle de temps δt_k entre k retours consécutifs de *Io*, sortant de l'ombre de Jupiter [Fig. 1.16], et soit $\Delta_k \ell$ le changement de distance entre la Terre et Jupiter pendant l'intervalle de temps δt_k . La vitesse de la lumière étant supposée finie et égale à c , on a alors

31. . . . Qui mesura pour la première fois la vitesse du son.

32. En fait, c'est la date de l'occultation qui était observée. O. Römer s'est d'abord basé sur les observations de Cassini.

33. L'invention de la lunette de Galilée (1610) avait permis la découverte, également par Galilée, de quatre des satellites de Jupiter.

$$\delta t_k = kT_0 + \frac{\Delta_k \ell}{c}, \quad (1.34)$$

où T_0 est la période d'occultation du satellite de Jupiter. Cette dernière équation comporte deux inconnues T_0 et c . T_0 peut être déterminé de la façon suivante. Si, au bout de m retours consécutifs, la période d'occultation T reprend sa valeur initiale, alors $\Delta_m \ell = 0$ et donc $\delta t_m = mT_0$. Les grandeurs δt_m et m sont directement accessibles à l'observation. Pour déterminer c , il suffit d'évaluer le nombre n de retours de Io qui se produisent lors de deux positions diamétralement opposées de la Terre sur son orbite. Si D est le diamètre de cette orbite, on a alors $\Delta_n \ell = D$, et donc

$$c = \frac{D}{\delta t_n - nT_0} = \frac{D}{\delta t_n - \frac{n}{m} \delta t_m}; \quad (1.35)$$

notons que, dans cette dernière relation, ne figurent que des grandeurs directement observables. Avec les chiffres dont il disposait, Römer trouvait $c \sim 200\,000$ km/s, qui constitue une valeur correcte en ordre de grandeur.

Cet effet de ralentissement [M. Jammer (1979)] de la période d'occultation de Io est un effet cumulatif que l'on peut interpréter comme une espèce d'effet Doppler. Pour le voir, considérons la Terre à six mois d'intervalle; pendant cette durée, Jupiter a peu varié sur sa trajectoire. Si T est la période alors mesurée et si v est définie par

$$v \equiv \frac{D}{T}, \quad (1.36)$$

alors, posant maintenant $\nu = T^{-1}$ et $\nu_0 = T_0^{-1}$, l'équation

$$c = \frac{D}{t_n - nT_0} \quad (1.37)$$

peut se réécrire comme

$$\nu = \nu_0(1 - \beta), \quad (1.38)$$

avec $\beta \equiv v/c$. C'est la formule de l'effet Doppler pour une Terre *fictive* allant en ligne droite le long d'un axe $T_1 T_2$ [Fig. 1.17].

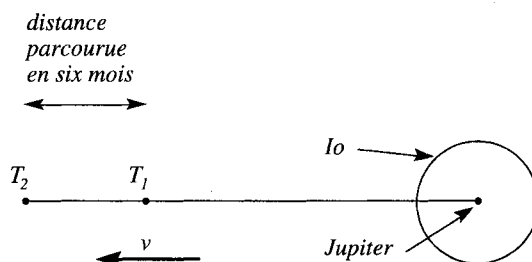


Figure 1.17 : La variation observée de la période d'occultation de Io peut être interprétée comme une sorte d'effet Doppler pour une Terre fictive se propageant en ligne droite de T_1 à T_2 en l'espace de six mois.

Les données numériques correspondantes sont : $D \approx 2 \times 10^{13}$ cm ; $T_0 \approx 42$ heures ; période de Jupiter ≈ 12 ans ; écart de la période en 1675 $\approx 22'$ (aujourd'hui $\approx 16'$).

Rétrospectivement, l'importance du caractère fini de la vitesse de la lumière nous apparaît plus clairement. En effet, si la vitesse de la lumière était infinie, les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \nabla \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{cases} \quad (1.39)$$

ne contiendraient pas le "courant de déplacement" ($-\partial \mathbf{E} / \partial t$) et les équations de l'électromagnétisme seraient alors invariantes dans le groupe de Galilée. Elles satisferaient donc, elles aussi, au principe de relativité galiléen : conservant la même forme dans deux repères galiléens arbitraires, on ne pourrait mettre en évidence leurs mouvements relatifs par des moyens électromagnétiques. On peut d'ailleurs montrer que, précisément, une limite non relativiste des équations de Maxwell est obtenue en augmentant indéfiniment la vitesse de la lumière, ce qui revient effectivement à supprimer le courant de déplacement [M. Le Bellac et J.M. Lévy-Leblond (1973)]³⁴

Toujours est-il que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes dans le groupe de Galilée; il devrait donc être possible, du moins en principe, de mettre en évidence, à l'aide de phénomènes électromagnétiques, le mouvement relatif de deux systèmes d'inertie.

Les équations de Maxwell (1.39) conduisent, après des calculs simples, aux équations

$$\square \mathbf{E} = 0, \square \mathbf{B} = 0, \quad (1.40)$$

où

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (1.41)$$

équations que l'on peut résumer par

$$\square \varphi = 0, \quad (1.42)$$

dans un système d'inertie donné. Dans un autre système d'inertie, on peut écrire

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \equiv \varphi[g^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{t})]$$

où g désigne une transformation de Galilée et où l'on a indiqué par les mêmes symboles les coordonnées d'espace et de temps dans les deux systèmes d'inertie. Autrement dit, la fonction φ et sa transformée sont ainsi considérées comme éléments d'un même espace fonctionnel. Ainsi, en nous limitant à des transformations de Galilée pures

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, t' = t \quad (1.43)$$

(ce qui ne restreint pas véritablement la généralité du raisonnement), on a

34. Voir, cependant, ces auteurs pour diverses subtilités physiques quant au passage à la limite.

$$\varphi'(x', t') \equiv \varphi(\mathbf{x}' + \mathbf{v}t', t'), \quad (1.44)$$

ou encore, avec une désignation identique des variables dans les deux systèmes d'inertie

$$\varphi'(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}t, t). \quad (1.45)$$

Remarquant maintenant que l'on peut également écrire

$$\varphi(\mathbf{x}, t) \equiv \varphi'(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, t), \quad (1.46)$$

l'équation des ondes $\square\varphi=0$ s'écrit alors

$$\left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \nabla}{c} \right)^2 - 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla}{c} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right\} \varphi'(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.47)$$

où l'on a tenu compte du fait que

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi'(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, t) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi'(\mathbf{x} - \mathbf{v}t, t). \quad (1.48)$$

L'équation des ondes possède donc des formes différentes dans les deux systèmes d'inertie animés l'un par rapport à l'autre d'une vitesse \mathbf{v} .

Avec l'identification par Maxwell des ondes lumineuses aux ondes électromagnétiques, il semblait nécessaire qu'existât un support matériel à leur propagation, l'éther, un concept dû également à Maxwell. Interprétant à la fin de sa vie (1879) la mesure de Römer, il remarquait que la même mesure effectuée à six ans d'intervalle (c'est-à-dire lorsque Jupiter a parcouru la moitié de son orbite) pouvait, en principe, permettre de mettre en évidence le mouvement du système solaire par rapport à cet hypothétique éther [Fig. 1.18].

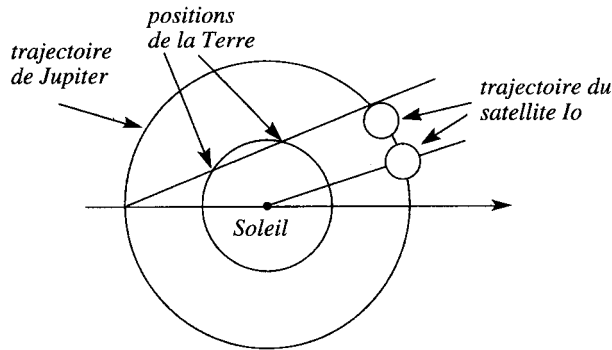


Figure 1.18 : Mesure de Römer effectuée à six ans d'intervalle. Elle permettait, en principe, de mettre en évidence le mouvement global du système solaire par rapport à l'éther.

Si v est la vitesse du système solaire par rapport à l'éther et si D est le diamètre de l'orbite terrestre, le retard dans la réapparition de Io (sortant de l'ombre de Jupiter) est

$$\delta t = \frac{D}{c+v}. \quad (1.49)$$

Par contre, six ans plus tard [Fig. 1.17 et 1.18]

$$\delta t' = \frac{D}{c-v}, \quad (1.50)$$

de sorte que la différence de ces deux retards, une grandeur observable en principe, est

$$\begin{aligned} \Delta t &\equiv \delta t' - \delta t \\ &= D \left[\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} \right] \\ &= \frac{2D}{V} \frac{\beta^2}{1-\beta^2}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

où $\beta \equiv v/c$. Cet effet est du second ordre en v/c et est donc très faible, de l'ordre de $(30/300000)^2 \approx 10^{-8}$! Une conséquence en est d'ailleurs que la mesure de Römer fournit bien une mesure correcte de la vitesse de la lumière, sous réserve de la précision des observations astronomiques.

L'expérience de Michelson

A la fin du XIX^e siècle, l'un des problèmes majeurs de la physique était donc la mise en évidence de l'éther. Déjà, quelque temps auparavant, les physiciens du début du siècle [Arago (1818), Fresnel (1818), Fizeau (1852), etc.] avaient essayé de mettre en évidence des effets du *premier ordre*³⁵ en v/c , sans succès toutefois. Il restait donc à tenter une expérience plus précise, susceptible de pouvoir déceler des effets du second ordre : c'était l'objet de la célèbre expérience d'Abraham Michelson (1881), reprise plus tard par Michelson et Morley (1887) et perfectionnée depuis par d'autres physiciens.

Remarquons, au passage, que la mesure de Römer n'était pas capable de mettre en évidence des effets du second ordre, compte tenu de l'imprécision des données astronomiques.

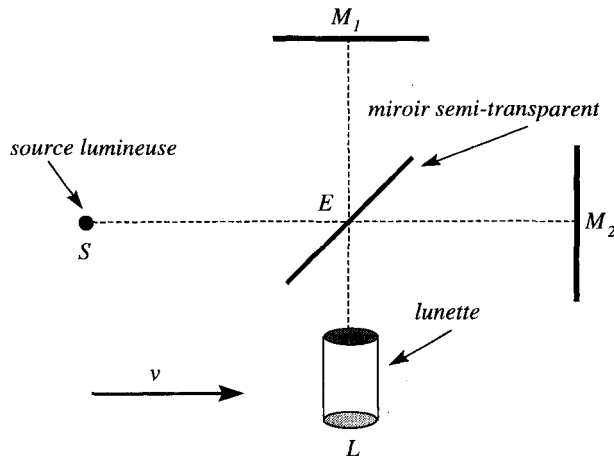


Figure 1.19 : L'interféromètre de Michelson (1881). Le faisceau SE est partagé en deux (EM_1 et EM_2) par le miroir semi-transparent E. Les faisceaux réfléchis $M_1 E$ et $M_2 E$ se recombinaient en EL et donnent lieu à des interférences (dus à leur différence de marche) observées en L.

35. Cf. M.A. Tonnelat (1971).

L'interféromètre de Michelson est constitué, pour l'essentiel, d'une source lumineuse S [Fig. 1.19] qui envoie un faisceau lumineux sur un miroir semi-transparent E , lequel décompose le faisceau incident en deux faisceaux à angles droits, réfléchis par deux miroirs M_1 et M_2 sur une lunette L . La différence de marche entre les deux faisceaux, due à des longueurs $EM_1 = \ell_1$ et $EM_2 = \ell_2$ différentes, produit des interférences, lesquelles dépendent aussi du mouvement de l'appareil par rapport à l'éther. Si l'on fait tourner l'ensemble de l'appareil de 90° , de manière à échanger les rôles de ℓ_1 et ℓ_2 , il devrait y avoir alors un déplacement des franges dû au mouvement global de l'appareil.

Examinons cela de plus près; orientons d'abord l'appareil de manière que le bras EM_2 soit parallèle au mouvement. Le temps mis par la lumière pour parcourir le trajet EM_1E est

$$t_1 = \frac{\ell_1}{c+v} + \frac{\ell_1}{c-v} = \frac{2\ell_1}{c} \frac{1}{1-\beta^2}. \quad (1.52)$$

Par contre, le temps mis par le second faisceau pour parcourir EM_1E est

$$t_2 = \frac{1}{c} [EM_1 + M_1E'] \quad (1.53)$$

car, pendant le temps t_2 , le miroir s'est déplacé en E' [Fig. 1.20] d'une distance

$$EE' = v t_2, \quad (1.54)$$

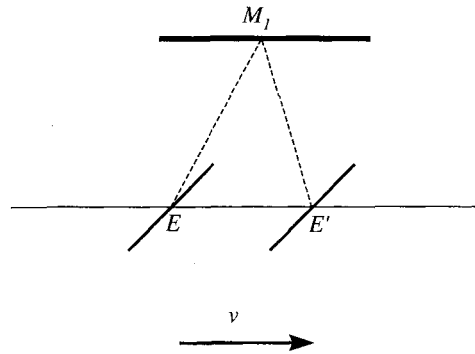


Figure 1.20 : Trajet des rayons lumineux dans l'interféromètre de Michelson. L'un des bras de l'appareil se meut avec une vitesse v par rapport à l'éther.

de sorte que

$$EM_1 + M_1E' = 2 \left[\ell_1^2 + \frac{(vt_1)^2}{4} \right]^{1/2} = [4\ell_1^2 + v^2 t_1^2]^{1/2}. \quad (1.55)$$

Finalement, on aura

$$t_2 = \frac{2\ell_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (1.56)$$

La différence de marche entre les deux faisceaux sera donc

$$\Delta t(\ell_1, \ell_2; \beta) = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left[\frac{\ell_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\ell_1}{1-\beta^2} \right]. \quad (1.57)$$

Pour éliminer les imprécisions dues à ℓ_1 et ℓ_2 , faisons tourner l'appareil de 90° : cela revient à échanger ℓ_1 et ℓ_2 . On aura ainsi un déplacement des franges correspondant à la différence

$$\delta t = \Delta t(\ell_1, \ell_2; \beta) - \Delta t(\ell_2, \ell_1; \beta) \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{c} \left[\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right] \\ &\approx \frac{(\ell_1 + \ell_2)}{c} \beta^2. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Si la source émet à la longueur d'onde λ , on observera un déplacement d'un interfrange lorsque

$$\delta t \approx \frac{\lambda}{c}, \quad (1.60)$$

donc lorsque

$$\ell_1 + \ell_2 \approx \lambda \beta^{-2}. \quad (1.61)$$

Ainsi, pour un rayonnement de $5\mu\text{m}$ et $v \approx 30 \text{ km/s}$, on trouve $\ell_1 + \ell_2 \approx 50 \text{ m}$: cette distance peut être obtenue à l'aide de réflexions multiples.

L'expérience de Michelson (1881) était, comme le note F. Everitt (1975), très sensible aux vibrations et distorsions thermiques des bras EM_1 et EM_2 de l'appareil : le problème est, pour beaucoup, un "problème de stabilité mécanique. Une mesure à un vingtième de frange près correspond à des déplacements de 130 \AA de l'un des miroirs. Un bras d'acier de 100 cm de long et de 4 cm de profondeur est infléchi, par l'action de son propre poids, d'une seconde d'arc; ce qui signifie que le bord supérieur d'un miroir qui lui est assujéti "recule" d'environ 2000 \AA en raison de la flexion du bras. Les vibrations sismiques à basses fréquences, d'amplitude 10^{-3} g , sont la cause de mouvements de l'ordre de 2 \AA et les vibrations proches de la fréquence propre du bras donnent lieu à des effets encore plus grands. Les distorsions thermiques sont même plus sérieuses encore. Une différence de température de 0.02° dans le bras le courbe d'environ une seconde d'arc" [F. Everitt (1975); reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur]. C'est pourquoi l'expérience de Michelson sera reprise avec Morley (1887) de manière à limiter ces sources d'erreur.

L'expérience de Michelson–Morley pouvait déceler un "vent d'éther" de l'ordre de 10 km/s , bien en deçà des 29 km/s dus au mouvement de la Terre sur orbite. Or,

son résultat fut *totallement négatif*, à quelque période de l'année, à quelque altitude que l'on se place. Par la suite, la précision fut portée à 1.5 km/s et dans les dernières expériences, bien en-deçà [J.P. Cedarholm *et al.* (1958); A. Brilliet *et al.* (1979, 1982)].

Ce résultat négatif ouvrait un problème majeur quant aux bases conceptuelles de la physique newtonienne, que diverses hypothèse *ad hoc* ne parvenaient pas à sauver, et que seul Einstein devait résoudre au terme d'une analyse pénétrante des notions d'espace et de temps.

EXERCICES

1. On considère un système d'unités dans lequel $\hbar=c=1$ et l'on adopte le MeV comme unité d'énergie.

(i) En quelles unités s'expriment : un temps, une longueur, une masse, une impulsion, une pression, une densité de particules, une densité de masse, une température, la constante de Boltzmann, une surface, la charge électrique ?

(ii) Mêmes questions si, au lieu d'adopter une unité d'énergie, on adopte plutôt une unité de longueur (le fermi; $1 \text{ fm} = 10^{-13} \text{ cm}$). En quelle unité s'exprime alors une énergie ?

(iii) Mêmes questions qu'en (i) et (ii) si l'on adopte, cette fois, la seconde.

2. Vérifier que les transformations de Galilée comportent effectivement dix paramètres et forment un groupe.

3. Si $g \equiv \{\mathcal{R}, \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{v}\}$ est une transformation de Galilée, où \mathcal{R} est une rotation, comment s'écrivent (i) la transformation identique, (ii) g^{-1} , (iii) $g_1 \cdot g_2$?

4. Pourquoi les transformations qui font passer d'un système d'inertie à un autre doivent-elles nécessairement former un groupe ?

5. Vérifier explicitement que les transformations de Galilée préservent les diverses structures (affine, métrique, causale) de l'espace-temps newtonien \mathbf{R}^{3+1} .

6. Soient deux particules de masses m_1 et m_2 , en interaction par l'intermédiaire d'un potentiel $V(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$ où \mathbf{x}_i est le vecteur-coordonnée de la particule i . Ecrire l'équation de Schrödinger de ce système et montrer qu'elle est invariante dans le groupe de Galilée.

7. On considère la sphère S^3 de rayon 1, plongée dans \mathbf{R}^4 :

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1.$$

Sachant que \mathbf{R}^4 est euclidien [i.e. $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$], calculer la métrique induite sur la sphère S^3 par celle de \mathbf{R}^4 .

8. On considère une particule de masse m soumise à l'action d'une force centrale qui dérive du potentiel $V(r)$.

(i) Rappeler pourquoi le mouvement s'effectue dans un plan. On appellera \mathbf{J} le moment cinétique de la particule.

(ii) Dans le plan du mouvement, on utilise les coordonnées polaires (r, φ) . Montrer que le lagrangien du système est donné par :

$$L = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2] - V(r).$$

Ecrire les équations du mouvement et en déduire la seconde loi de Kepler.

(iii) Montrer que l'énergie de la particule peut se mettre sous la forme

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\mathbf{J}^2}{2mr^2} + V(r).$$

- (iv) Discuter de la nature des trajectoires selon les valeurs de E dans le cas où $V(r) = -\text{const.}/r$.
 (v) Dans quels cas les trajectoires sont-elles des ellipses? Montrer que le paramètre p et l'excentricité de ces ellipses sont donnés par

$$p = \frac{J^2}{m \times \text{const.}}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{m(\text{const.})^2}}.$$

9. Soit $\rho(\mathbf{x})$ la densité de masse attachée à un corps de masse totale M .

- (i) En utilisant la solution formelle de l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel $\varphi(\mathbf{x})$, montrer que cette dernière grandeur peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots$$

(développement multipolaire) où les coordonnées x^i ($i=1,2,3$) ont pour origine le centre de gravité de la distribution de masse. Q_{ij} est une matrice 3×3 , le tenseur quadrupolaire.

- (ii) Comment Q_{ij} est-il modifié lorsqu'au lieu de situer l'origine des coordonnées au centre de gravité du système, on la situe en un point arbitraire? Que devient l'expression précédente pour φ ?

(iii) Comment s'écrit $\varphi(\mathbf{x})$ lorsque $\rho(\mathbf{x})$ est à symétrie sphérique?

- (iv) Comment s'écrit $\varphi(\mathbf{x})$ pour un corps massif dont tous les moments multipolaires sont nuls sauf le terme quadrupolaire? Donner l'expression correspondante pour la force de gravitation.

(v) *Application* : Le Soleil étant en rotation ($T \approx 25$ jours), son diamètre à l'équateur est légèrement supérieur à son diamètre polaire (le Soleil est donc légèrement aplati), et possède donc un moment quadrupolaire non nul. Expliquer pourquoi. Dans la suite, on supposera que tous les moments multipolaires du Soleil, supérieurs au quadrupolaire, sont nuls.

- (a) Quelles sont les composantes non nulles de Q_{ij} , le Soleil possédant la symétrie cylindrique?

(b) On considère maintenant un corps massif qui se meut dans le plan équatorial du Soleil et orthogonal à l'axe de rotation de celui-ci. Donner l'expression de la force due au Soleil et agissant sur ce corps. Quelle est l'énergie potentielle associée? Quel effet produit-elle sur le corps (qualitativement)?

(c) On pose

$$J_2 = -Q_{33} / (2M_{\odot} R_{\odot}^2),$$

et l'on donne

$$J_2 = 2.5 \times 10^{-5}, \quad M_{\odot} = 2 \times 10^{33} \text{ g}, \quad R_{\odot} = 7 \times 10^{10} \text{ cm}$$

Evaluer l'ordre de grandeur de l'avance du périhélie de Mercure dû à cet effet (on pourra utiliser des considérations énergétiques). On donne encore (concernant Mercure) :

distance du périhélie : 4.6×10^{12} cm, période : .24 années
 excentricité de l'orbite : .21.

Comparer avec le résultat que donnerait la mécanique classique [L. Landau, E. Lifschitz, *Mécanique*].

10. On considère une planète de masse m soumise à l'action du potentiel $V(r) = -GM_{\odot}m/r$. Elle possède un mouvement elliptique. On perturbe maintenant ce mouvement à l'aide d'un "petit" potentiel $\varepsilon(r)$: "petit" signifie

$$\left(\frac{\varepsilon(r)}{V(r)} \right)^2 \ll \left(\frac{\varepsilon(r)}{V(r)} \right).$$

Le potentiel auquel est soumise la planète cesse donc d'être en $1/r$ et la trajectoire s'ouvre légèrement : le périhélie de la planète varie alors d'une valeur $\delta\varphi$ à chaque révolution, valeur que l'on se propose de calculer dans cet exercice.

- (i) En intégrant l'intégrale première du moment cinétique et en tenant compte de la relation de conservation de l'énergie, montrer que

$$\Delta\varphi \equiv (\varphi - \varphi_0) = \int \frac{J dr}{r^2 \{2m[E - V(r) - \varepsilon(r)] - J^2/r^2\}^{1/2}},$$

où r varie de r_{\min} à r_{\max} , valeurs qui annulent le dénominateur. Pourquoi a-t-on $\delta\varphi=2\Delta\varphi$?

(ii) Montrer que l'on a encore

$$\delta\varphi = -2 \frac{\partial}{\partial J} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \left\{ 2m[E - V(r) - \varepsilon(r)] - \frac{J^2}{r^2} \right\}^{1/2}.$$

(iii) Calculer alors $\delta\varphi$, la variation du périhélie de la planète, à l'ordre 1 en $\varepsilon(r)$.

(iv) *Application* : (a) $\varepsilon(r) = \beta/r^2$, (b) $\varepsilon(r) = \gamma/r^3$. [L. Landau, E. Lifschitz, *Mécanique*]

11. On considère une planète en orbite circulaire autour du Soleil et l'on suppose que la constante de gravitation G varie très lentement au cours du temps. Soit R le rayon de l'orbite et Ω la vitesse angulaire de la planète.

(i) Que signifie "très lentement"? Préciser.

(ii) Montrer que le rayon de l'orbite varie comme

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = -\frac{1}{G} \frac{dG}{dt},$$

tandis que la vitesse angulaire de la planète est telle que

$$\frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{2}{G} \frac{dG}{dt}.$$

(iii) On admet que $G^{-1}dG/dt \sim 10^{-11}$ par an. Trouver la variation du rayon de l'orbite terrestre en 10^4 ans, 10^6 ans, 10^8 ans, ainsi que la variation de sa période de rotation autour du Soleil.

(iv) Après 25 ans de mesures de réflexions d'un faisceau laser sur la Lune, la distance Terre-Lune est connue avec une précision inférieure au centimètre. Combien de temps faut-il attendre, si l'on souhaite mettre en évidence une variation $|\Delta G/\Delta T \cdot G|$ de l'ordre de 10^{-11} ?

12. On considère deux masses m_1 et m_2 orbitant circulairement l'une autour de l'autre avec la vitesse angulaire ω . Calculer le moment quadrupolaire de ce système.

13. Même question que dans l'exercice précédent lorsque $m_1 \gg m_2$ et que l'orbite de m_2 est elliptique du fait de l'interaction gravitationnelle.

14. Soient deux masses égales m , en interaction par l'intermédiaire d'une force $F = -k|x_1 - x_2|$, et en mouvement le long d'un axe Ox . Calculer le moment quadrupolaire de ce système.

CHAPITRE 2

L'espace-temps de Minkowski

Nous avons déjà indiqué les principaux faits expérimentaux qui marquent la genèse de la théorie de la Relativité Restreinte : mesure d'une vitesse finie pour la lumière, impossibilité de mettre en évidence l'existence de l'éther par des effets du premier ordre en v/c et enfin, impossibilité de cette mise en évidence par des effets du second ordre (expériences d'Abraham Michelson). A côté de ces apports expérimentaux, les discussions théoriques sur la notion d'éther, sur la non-invariance des équations de Maxwell [H. Poincaré (1904)] dans le groupe de Galilée, la théorie de l'électron de Lorentz [D. Bohm (1965)], les critiques d'E. Mach des fondements de la mécanique, ont contribué puissamment à l'élaboration des idées d'Einstein [S. Feuer, (1980)].

Il faut cependant se rendre compte que les idées classiques (*i.e.* prérelativistes) n'ont pas été abandonnées sans qu'aient été épuisées toutes les possibilités d'explication dans le cadre d'idées admis à la fin du XIX^e siècle. Par exemple, Fitzgerald et Lorentz proposèrent, indépendamment, d'expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson par une contraction du bras de l'interféromètre, parallèlement à la vitesse, un effet dû à l'éther :

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.1)$$

Toutefois, si la contraction de Fitzgerald–Lorentz constitue bien une explication possible, cet effet *physique* de l'éther implique aussi que l'indice de réfraction d'un solide, la résistance d'un fil conducteur, la fréquence de vibration d'un barreau de quartz, etc., soient modifiés en raison du mouvement par rapport à l'éther. Des expériences furent effectuées [M.A. Tonnelat (1971)] et leurs résultats furent négatifs. Pour expliquer ces résultats négatifs, Lorentz était amené à faire une hypothèse supplémentaire, à savoir que la masse des corps variait avec leur vitesse par rapport à l'éther :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.2)$$

Lorentz montrait alors que les horloges devaient être *ralenties* dans le rapport

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.3)$$

(T_0 : période de l'horloge) ce qui, avec la contraction des longueurs (2.1), conduit facilement à une vitesse de la lumière indépendante de celle de l'observateur par rapport à l'éther. Cependant, les horloges étant ralenties et les longueurs contractées, la notion de simultanéité nécessitait une analyse délicate, quoique quelque peu artificielle, qui conduisait aux *transformations* de Lorentz (trouvées indépendamment par Voigt, et par Poincaré également) :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad (2.4)$$

Ces transformations laissent les équations de Maxwell *invariantes*, et la vitesse de la lumière constante. *La théorie de Lorentz fournissait donc une explication des divers résultats expérimentaux.* Par contre, en distinguant les “vrais” temps et les “vraies” distances (c'est-à-dire, ceux relatifs à l'éther) des temps et des distances liés à l'observateur (en mouvement par rapport à l'éther), la théorie de Lorentz comportait une ambiguïté fondamentale que l'expérience ne pouvait, encore une fois, lever puisque précisément, l'éther demeurait toujours *inobservable* ! Mais, bien qu'inobservable, il conservait cependant un rôle tout à fait central, notamment dans l'interprétation par Lorentz (et aussi par Poincaré) de la transformation (2.4), interprétation (1904) complètement différente de celle d'Einstein (1905).

C'est, en fait, le rejet d'un éther inobservable et la critique de la notion de simultanéité – notion sans problème et allant de soi pour les physiciens prérelativistes – qui vont conduire Einstein à la théorie de la Relativité Restreinte (1905), théorie qui apparaîtra bientôt [H. Minkowski (1908)] comme une *théorie de la liaison mutuelle de l'espace et du temps*.

Cette théorie est basée sur les deux postulats suivants :

- (i) **Dans le vide, la lumière se propage avec une vitesse constante c , dans tous les repères galiléens et ce, indépendamment du mouvement de la source et de l'observateur.**
- (ii) **Aucune expérience physique interne ne peut mettre en évidence le mouvement d'un système de référence galiléen par rapport à un autre système de référence galiléen.**

Le premier postulat – celui de la constance de la vitesse de la lumière – recouvre toute une série d'expériences et de mesures diverses [M.A. Tonnelat (1971)], dont nous ne parlerons pas ici. Le second postulat constitue l'*extension* du principe de relativité galiléen à *tous* les phénomènes de la physique, donc y compris aux phénomènes électromagnétiques, et non plus aux seuls systèmes mécaniques. Ce postulat fondamental, dont nous n'avons énoncé que l'aspect *physique*, comporte également un aspect *descriptif* :

(ii)' **Toutes les lois de la physique ont la même forme dans tous les systèmes inertiels.**

Cet aspect descriptif s'explique aisément en remarquant que deux formes différentes, dans deux repères inertiels, pour les équations régissant un phénomène physique, entraîneraient la mise en évidence du mouvement relatif des deux repères. Ainsi, si la seconde loi de Newton $F=m\gamma$ est vérifiée dans un premier référentiel inertielle, et si dans un autre tel référentiel elle prend la forme

$$F = m\gamma + \Gamma,$$

le terme Γ peut être interprété comme étant une force supplémentaire que l'on peut, en principe, mettre en évidence.

La conséquence la plus immédiate de ces postulats sera que les transformations qui font passer d'un système d'inertie à un autre devront nécessairement conserver les équations de l'électromagnétisme, *i.e.* les équations de Maxwell, les expériences d'optique étant – et de loin – beaucoup plus précises que celles portant sur des systèmes mécaniques. Il s'ensuivra alors que les équations de la mécanique newtonienne (qui sont invariantes dans le groupe de Galilée et non dans celui de Lorentz) n'auront plus la même forme dans des systèmes galiléens différents : il sera donc nécessaire de les modifier afin qu'elles satisfassent au principe de relativité d'Einstein (ii)', puis de vérifier *expérimentalement* que les conséquences des nouvelles équations sont bien réalisées dans la Nature.

L'espace-temps de la Relativité Restreinte

L'existence d'une vitesse universelle, la vitesse de la lumière, va profondément modifier la structure de l'espace-temps, aussi bien en le munissant d'une *métrique* (ou, plus précisément, d'une pseudo-métrique¹) définie par une forme quadratique, qu'en changeant la nature des *objets géométriques* qui lui sont attachés intrinsèquement. C'est cet espace-temps – qui comporte toujours quatre dimensions – avec ses structures nouvelles, que nous appellerons *espace-temps de Minkowski* (1908) et que nous désignerons par \mathfrak{M} .

Considérons donc deux systèmes d'inertie caractérisés par des coordonnées d'espace-temps (t, \mathbf{x}) et (t', \mathbf{x}') , et examinons la propagation d'une onde lumineuse sphérique à partir d'un point O de \mathfrak{M} . Nous supposons, en outre (et cela ne restreint aucunement le raisonnement ci-après), qu'à $t = t' = 0$ les deux systèmes d'inertie coïncident [*i.e.* l'origine O est la même pour les deux systèmes : $(t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{0})$ et $(t' = 0, \mathbf{x}' = \mathbf{0})$ représentent bien le même point de \mathfrak{M}].

Dans le premier système de référence, l'onde lumineuse se trouve à la distance $|\mathbf{x}|$ de O au temps t , c'est-à-dire

$$c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = 0. \quad (2.5)$$

1. Il s'agit, comme on le verra par la suite, d'une *pseudo-métrique* car la forme quadratique définie sur l'espace-temps de la relativité n'est pas définie positive. En fait, il vaudrait mieux dire "en le munissant d'une structure lorentzienne".

Dans le second système d'inertie, la *même* onde lumineuse apparaît également sphérique en vertu du principe de relativité d'Einstein (ii) et, de plus, sa vitesse est également c en vertu du postulat (i). Il s'ensuit que, dans ce système, la distance parcourue par l'onde lumineuse au bout du temps t' apparaît également comme étant

$$c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 = 0. \quad (2.6)$$

Quelles conséquences peut-on en tirer? Il faut remarquer d'abord que la relation (2.5) [ou la relation (2.6)] définit dans \mathfrak{M} une variété à trois dimensions – une surface à trois dimensions – qui est un *cône* d'origine O . Ce cône s'appelle le *cône de lumière* [Fig. 2.1] ou encore *cône isotrope*. Cela étant, l'identité formelle des relations (2.5) et (2.6) – l'une étant obtenue à partir de l'autre à l'aide des changements de coordonnées associés aux changements de système d'inertie – montre que le cône de lumière reste le même, reste *invariant* dans les changements de systèmes de référence galiléens : deux observateurs inertiels constatent que la lumière se propage de la même façon pour chacun d'eux; le cône de lumière leur apparaît comme un objet géométrique de l'espace-temps de Minkowski.

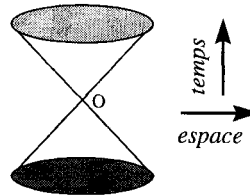


Figure 2.1 : Le cône de lumière dans l'espace de Minkowski.

En outre, comme les propriétés d'homogénéité spatiale et d'uniformité de l'écoulement du temps subsistent, il apparaît que chaque point de \mathfrak{M} peut être considérée comme le sommet d'un cône de lumière.

Le cône de lumière possède deux *nappes*, la *nappe du futur*, qui représente l'expansion dans l'espace et le temps à partir de O d'une onde lumineuse sphérique, et la *nappe du passé*, laquelle est engendrée par l'ensemble des rayons lumineux parvenant en O . On peut également considérer la nappe du futur comme étant engendrée par tous les rayons lumineux possibles issus de O : les génératrices du cône sont les droites d'équation

$$x = \mathbf{n} ct \quad (2.7)$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire quelconque ($n^2=1$) de \mathbb{R}^3 .

Les cônes de lumière présents dans l'espace-temps vont jouer un rôle considérable dans les développements ultérieurs de la relativité. En particulier, ils vont permettre de munir \mathfrak{M} d'une *métrique*, comme nous allons le voir ci-dessous. Cependant, en plus des cônes de lumière, il existe une autre classe d'objets géométriques, représentant les mouvements inertiels, les *droites*. Nous verrons toutefois que, contrairement au cas newtonien, toutes les droites ne correspondent pas à des mouvements inertiels observables, mais seulement celles qui sont situées à l'intérieur d'un cône de lumière.

Si l'on considère des coordonnées cartésiennes (t, \mathbf{x}) dans \mathfrak{M} (sur la figure 2.2, seules deux dimensions d'espace ont été indiqués, par souci de clarté) la droite $\mathbf{x} = 0$, i.e. l'axe Ot , représente un mouvement inertiel $\{K\}$. Cette droite apparaît sur la figure 2.2 comme un *axe de symétrie* du cône d'équation $c^2t^2 - x^2 = 0$. Un autre système inertiel $\{K'\}$ animé d'une vitesse v par rapport à $\{K\}$ sera représenté par une droite qui n'apparaît pas sur la figure comme un *axe de symétrie* du cône de lumière. Y a-t-il violation du principe de relativité, $\{K\}$ et $\{K'\}$ ayant, en apparence, des propriétés différentes dans leur relation au cône isotrope? Evidemment, il n'en est rien. En fait, c'est notre représentation euclidienne d'un espace non euclidien qui est en cause : elle est inadéquate et ne peut traduire *toutes* les propriétés de \mathfrak{M} . En fait, aussi bien la droite $\{K\}$ que la droite $\{K'\}$, ou d'ailleurs toute autre droite passant par le sommet du cône et située dans $\{\Gamma\}$, est bien un *axe de symétrie*. Pour cette raison, et par analogie avec le cas de la sphère usuelle dont toute droite qui passe par le centre est un *axe de symétrie*, on appelle parfois le cône de lumière *pseudosphère* [J.L. Synge (1958)].

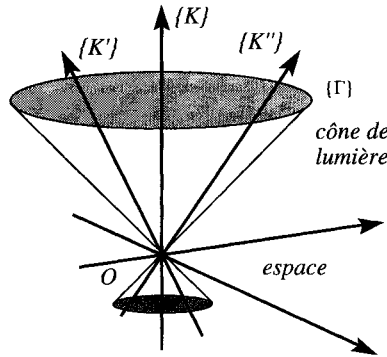


Figure 2.2 : Axes temporels du cône de lumière. Le cône de lumière n'a pas d'axe de symétrie privilégié; tout mouvement inertiel – tels ceux dénotés par $\{K\}$ et $\{K'\}$ – peut légitimement être considéré comme un *axe de symétrie* du cône $\{\Gamma\}$.

Nulle part on ne voit apparaître, comme conséquence des principes de constance de la vitesse de la lumière et de la relativité d'Einstein, de 3–plans : dans l'espace de Minkowski les *seuls* objets géométriques ayant un sens physique direct, qui ne relèvent ni d'une définition, ni d'une convention, sont les cônes de lumières et *une* classe de droites qui sera précisée plus loin. Certes, on peut encore feuilleter l'espace–temps avec des familles de 3–plans parallèles coupant tout axe de temps; néanmoins un tel feuillage est non seulement arbitraire mais encore ne s'impose aucunement.

La conséquence la plus importante de cette structure particulière de l'espace–temps de la Relativité Restreinte réside dans le fait qu'elle y induit une *métrique pseudo–euclidienne*, qui s'écrit ²

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2. \tag{2.8}$$

2. On trouve également la convention $ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2$. En posant $x^4 = ict$, on peut alors écrire $ds^2 = \pm [dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2]$, le signe dépendant de la convention adoptée. Les transformations linéaires telles que $ds^2 = ds'^2$ sont alors, formellement, des rotations de \mathbf{R}^4 , dont un "angle" est imaginaire pur.

Cette métrique possède la propriété fondamentale d'être *invariante* dans les changements de coordonnées galiléennes; autrement dit, si (t', \mathbf{x}') désigne d'autres coordonnées cartésiennes attachées à un autre référentiel galiléen, on aura

$$ds^2 = ds'^2 \quad (2.9)$$

ou encore

$$c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\mathbf{x}'^2. \quad (2.10)$$

Les propriétés (2.9) et (2.10) sont satisfaites pour $ds^2=0$, on l'a déjà vu plus haut ($ds^2=ds'^2=0$ exprime seulement la constance de la vitesse de la lumière). Montrons que ces relations sont vraies généralement. Si l'on effectue un changement de coordonnées cartésiennes $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (t', \mathbf{x}')$, on obtient alors

$$ds^2 = f(t', \mathbf{x}' ; \mathbf{v}) ds'^2 \quad (2.11)$$

où f est une fonction, pour le moment arbitraire, des positions d'espace-temps et de la vitesse relative des deux systèmes inertiels. En fait, l'homogénéité de l'espace et l'uniformité de l'écoulement du temps impliquent que f ne dépende ni de t' ni de \mathbf{x}' . En outre, si $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ on doit avoir $f(\mathbf{0})=\text{const.}=1$. Si l'on effectue maintenant la transformation inverse, on devra avoir

$$ds^2 = f(-\mathbf{v})f(+\mathbf{v}) ds'^2 \quad (2.12)$$

et l'on aura donc

$$f(-\mathbf{v})f(+\mathbf{v}) = 1. \quad (2.13)$$

Mais comme f ne peut dépendre de \mathbf{v} (isotropie de l'espace) que par l'intermédiaire de $|\mathbf{v}|/c$, cela implique que $f=1$. Dans tout ce raisonnement nous avons supposé implicitement que tous les observateurs galiléens utilisent les mêmes unités de temps et de longueur.

Notons enfin que la forme quadratique (2.8) ne définit pas une métrique sur \mathfrak{M} mais seulement une pseudo-métrique : ds^2 peut avoir n'importe quel signe et, de plus, s'annule pour des dt^2 et $d\mathbf{x}^2$ non nuls.

Nous verrons également, dans la suite, que l'existence de cette forme quadratique invariante dans les changements de systèmes inertiels définit aussi la *structure causale* de \mathfrak{M} . En outre, elle donne à la *définition physique* de la simultanéité, à la définition d'Einstein, un sens absolu : en tout point un observateur ne pourra jamais observer, à l'aide d'ondes électromagnétiques, que les événements qui se sont produits sur la nappe du passé de son cône de lumière; et ces événements lui apparaîtront comme simultanés.

La transformation de Lorentz

Il existe de très nombreuses démonstrations de la transformation de Lorentz (2.4), c'est-à-dire des formules de passage d'un système d'inertie à un autre qui préservent la structure mathématique de l'espace-temps. Celle qui est donnée ci-dessous n'est pas forcément la plus simple : elle présente cependant l'avantage d'être assez instructive.

Nous sommes donc amenés à rechercher des transformations *linéaires* [elles doivent transformer un mouvement inertiel en un autre mouvement inertiel; en fait, cette linéarité peut également être démontrée à partir de l'homogénéité de l'espace de Minkowski (c'est-à-dire de l'homogénéité de l'espace et de l'uniformité du temps)] qui laissent *invariants* les cônes de lumière.

On peut montrer que les transformations les plus générales qui laissent invariant le cône de lumière sont les *transformations conformes*, qui comprennent, outre les transformations de Lorentz, les transformations *non linéaires* suivantes :

$$\begin{cases} t' = [t - (c^2 t^2 - \mathbf{x}^2) a^0] / N \\ \mathbf{x}' = [\mathbf{x} - (c^2 t^2 - \mathbf{x}^2) \mathbf{a}] / N \\ N = 1 - 2(ct a^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) + (a^{02} - \mathbf{a}^2) (c^2 t^2 - \mathbf{x}^2) \end{cases} \quad (2.14)$$

où \mathbf{a} est un vecteur constant et où a^0 est une "constante"³. De plus, les *changements d'échelle* préservent également le cône de lumière :

$$t' = \lambda t, \quad \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}. \quad (2.15)$$

Toutes ces transformations forment un groupe continu à 15 paramètres.

Posons maintenant

$$X = \begin{vmatrix} ct \\ x \end{vmatrix}, \quad X' = \begin{vmatrix} ct' \\ x' \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

(nous considérons désormais une seule dimension spatiale, ce qui permettra de simplifier beaucoup les calculs, sans toutefois altérer la physique sous-jacente) et

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Nous cherchons donc les transformations linéaires L ,

$$X' = L X \quad (2.18)$$

où

$$L = \begin{vmatrix} \ell_{00} & \ell_{01} \\ \ell_{10} & \ell_{11} \end{vmatrix}, \quad (2.19)$$

qui préservent le cône de lumière, dont l'équation [cf. Eq. (2.5), (2.6)], compte tenu des notations ci-dessus, se réécrit⁴

$$\begin{cases} X^T G X = 0 \\ X'^T G X' = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

3. En fait, il s'agit de la composante 0 d'un quadrivecteur (voir plus loin).

4. T désigne la transposée.

La seconde de ces dernières équations se réécrit encore

$$X^T L^T G L X = 0, \quad (2.21)$$

qui doit être valable quel que soit X , satisfaisant à la première des équations (2.20). Dans ces conditions, il n'est pas très difficile de montrer que les équations (2.20) et (2.21) entraînent l'égalité matricielle

$$L^T G L = \lambda G, \quad (2.22)$$

(où λ est un paramètre caractéristique d'un changement d'unités d'un observateur à l'autre et que nous pouvons toujours prendre égal à 1) caractéristique des transformations L que nous cherchons; cette dernière relation, après avoir été multipliée à gauche par X^T et à droite par X , implique que

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2, \quad (2.23)$$

équation équivalente à l'équation (2.9) [et (2.10)] concernant l'invariance de la métrique de \mathfrak{M} .

Notons encore que, parmi les solutions particulières de l'équation (2.22), on trouve également

$$T = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

qui représentent respectivement les *renversements du temps* et les *retournements d'espace (parité)*.

Les transformations de déterminant +1 s'appellent les transformations de Lorentz *propres*; les autres sont appelées *impropres*. De même, celles qui sont telles que $\ell_{00} > 0$ sont dites *orthochrones*, les autres (*i.e.* telles que $\ell_{00} < 0$) sont dites *antichrones*. Comme l'identité fait partie des transformations propres, toutes les transformations engendrées continûment à partir de l'identité sont également des transformations propres. Les transformations orthochrones possèdent la propriété de ne pas changer le sens de l'écoulement du temps lorsqu'on passe d'un système d'inertie à un autre.

Limitons-nous donc aux transformations propres et orthochrones; pour résoudre l'équation (2.22), il suffit de la mettre sous la forme

$$L^T G = G L^{-1}, \quad (2.25)$$

qui constitue un système linéaire pour les éléments de matrice de L , lequel se résout facilement compte tenu de ce que $\det L = +1$. La condition $\ell_{00} > 0$ permet alors de mettre les matrices L sous la forme

$$L(\theta) = \begin{vmatrix} \text{ch } \theta & \text{sh } \theta \\ \text{sh } \theta & \text{ch } \theta \end{vmatrix}. \quad (2.26)$$

Le paramètre θ doit maintenant être relié à la vitesse relative des deux systèmes inertiels. On trouve que

$$\operatorname{th} \theta = -v/c. \quad (2.27)$$

Les changements de coordonnées galiléennes s'écrivent

$$\begin{cases} t' = t \operatorname{ch} \theta + x/c \operatorname{sh} \theta \\ x' = x \operatorname{ch} \theta + ct \operatorname{sh} \theta, \end{cases} \quad (2.28)$$

de sorte qu'un point immobile dans le second système d'inertie, par exemple $x'=0$, se meut à la vitesse $v = x/t$ dans le premier système. Ceci entraîne la relation (2.27).

Utilisant maintenant la relation (2.27) en l'insérant dans l'équation (2.26), il vient

$$L(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{vmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{vmatrix}, \quad (2.29)$$

c'est-à-dire les transformations de Lorentz "pures" ou "restreintes" (2.4) (les "boosts").

Dans le cas précédent, où il n'y avait qu'une dimension d'espace, le groupe de Lorentz était un groupe à un paramètre (v). Dans le cas général, le groupe de Lorentz est un groupe à six paramètres (v et trois paramètres de rotation) non abélien (non commutatif).

Remarques

1. Considérons d'abord deux transformations de Lorentz différentes $L(\theta_1)$ et $L(\theta_2)$. On vérifie facilement que

$$L(\theta_1) \cdot L(\theta_2) = L(\theta_1 + \theta_2) \quad (2.30)$$

à l'aide des formules d'addition des sinus et des cosinus hyperboliques. Utilisant la relation (2.27) ci-dessus, qui relie v et θ , il vient

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \quad (2.31)$$

qui constitue la *loi d'addition des vitesses* (parallèles) de la Relativité Restreinte (w correspond à $\theta_1 + \theta_2$; v_1 à θ_1 et v_2 à θ_2). Cette relation montre que si l'une des deux vitesses v_1 ou v_2 est égale à la vitesse de la lumière, w est aussi égale à c ; ce qui était attendu *a priori* puisque, précisément, cette constance de la vitesse de la lumière était postulée *ab initio*.

Une autre conséquence de la loi d'addition (2.31) est que la vitesse de la lumière apparaît comme une *vitesse limite* pour un système inertiel : si un système de

référence galiléen possède initialement une vitesse $v < c$, il ne pourra jamais dépasser c ; on aura beau lui faire acquérir une vitesse supplémentaire, sa vitesse résultante w [Eq. (2.31)] restera toujours inférieure à la vitesse de la lumière. Cette remarque n'implique absolument pas que la relativité interdise les vitesses supérieures à celle de la lumière [E. Recami *et al.* (1974)]; elle implique seulement que les droites de \mathfrak{M} se divisent en deux catégories, les *droites du genre temps*⁵ situées à l'intérieur des cônes de lumière [Fig. 2.3] et les *droites du genre espace*⁶, qui se trouvent à l'extérieur de ces cônes; de plus, ces deux familles sont totalement disconnectées et l'on ne peut passer de l'une à l'autre par une transformation de Lorentz : *seules les droites du genre temps correspondent à des mouvements inertiels* conformément à l'expérience (et non pour des raisons de nature théorique); les droites du genre espace correspondent, elles, à des mouvements rectilignes et uniformes, à des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière, mouvements que l'on n'observe pas actuellement.

2. L'existence du paramètre *additif* θ , qui apparaît dans $L(\theta)$, va maintenant permettre la construction explicite d'une véritable géométrie (pseudo-) métrique [I.M. Yaglom (1979)] sur \mathfrak{M} . Ainsi, étant donnés deux systèmes inertiels (a) et (b) [Fig. 2.4] animés l'un par rapport à l'autre d'une vitesse v , on appellera "angle" des deux droites représentatives, dans l'espace-temps, le paramètre θ associé à v . Cet angle possède bien une signification intrinsèque en ce sens qu'il ne dépend que de la situation relative des deux droites. Il n'en était pas ainsi dans le cadre de l'espace-temps classique. De même, si l'on considère trois observateurs inertiels, (a), (b) et (c), on aura

$$\theta_{ac} = \theta_{ab} + \theta_{bc} \quad (2.32)$$

où la notation est évidente.

On comprend désormais mieux l'affirmation selon laquelle tout mouvement inertiel peut être considéré comme un axe de symétrie pour le cône de lumière. En effet, l'angle compris entre toute droite du genre temps et le cône isotrope est infini : lorsque $v \rightarrow c$, $\theta \rightarrow \infty$ [cf. Eq. (2.27)]. Nous reviendrons plus loin sur la géométrie de \mathfrak{M} .

3. Il est facile de se rendre compte que lorsque $v \ll c$, les transformations de Lorentz (2.4) se réduisent à des transformations de Galilée pures. Toutefois, la question qui se pose est plutôt : que deviennent les structures mathématiques de l'espace de Minkowski et, notamment, celle constituée par des cônes de lumière?

En fait, on peut voir facilement qu'un cône isotrope dont le sommet se trouve au point de coordonnées (galiléennes) (t_0, \mathbf{x}_0) a pour équation

$$c^2 (t - t_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 = 0, \quad (2.33)$$

5. Qui représentent des mouvements rectilignes et uniformes à vitesse $v < c$.

6. Qui représenteraient des mouvements rectilignes et uniformes à vitesse $v > c$.

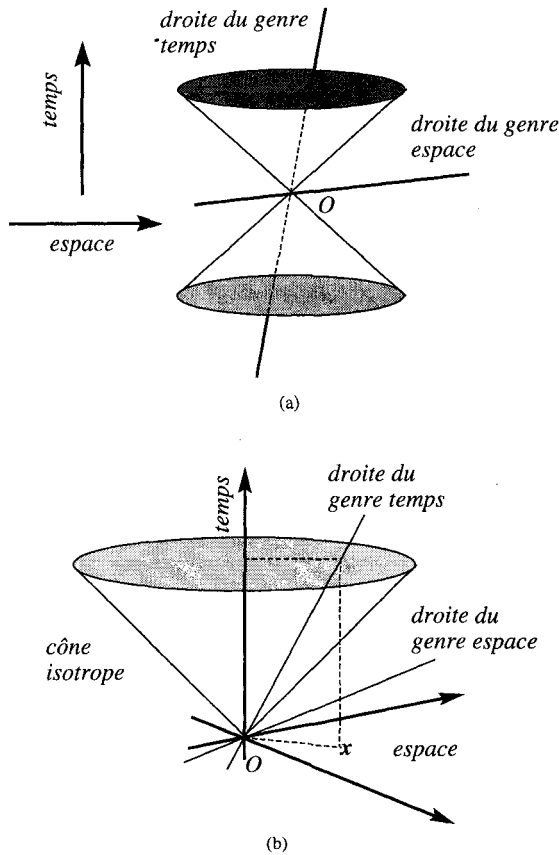


Figure 2.3 : Différents genres de droites dans l'espace-temps. (a) Une droite est du genre temps s'il existe un cône de lumière qui la contienne entièrement. Une droite est du genre espace si elle est située à l'extérieur de tout cône de lumière dont le sommet s'y trouve situé. Une droite est isotrope (ou du genre lumière) si elle constitue une génératrice du cône de lumière. (b) La pente d'une droite du genre temps représente l'inverse de la vitesse d'un système inertielle associé, relativement au système inertielle lié aux coordonnées (t, x) . Elle est donc supérieure à c^{-1} (pente des génératrices du cône isotrope) : une droite du genre temps représente donc bien un mouvement inertielle effectué à une vitesse inférieure à la vitesse de la lumière. Au contraire, une droite du genre espace représenterait un mouvement effectué à une vitesse supérieure à c .

de sorte que lorsque $c \rightarrow \infty$, ce cône s'aplatit de plus en plus, tant et si bien qu'à la limite, il se réduit au 3-plan $t = t_0$. Finalement, à cette limite, tous les cônes isotropes se réduisent aux 3-plans $t = \text{const.}$ de l'espace-temps classique. Au fur et à mesure que les cônes s'aplatissent, ils incluent de plus en plus de droites, de sorte qu'à la limite, toute droite passant par le sommet d'un cône devient une droite du genre temps : à la limite classique, toute droite qui coupe un plan spatial est du genre temps, résultat que l'on retrouve bien par passage à la limite $c \rightarrow \infty$. En fait, à cette limite, les seules droites du genre espace existantes sont les droites

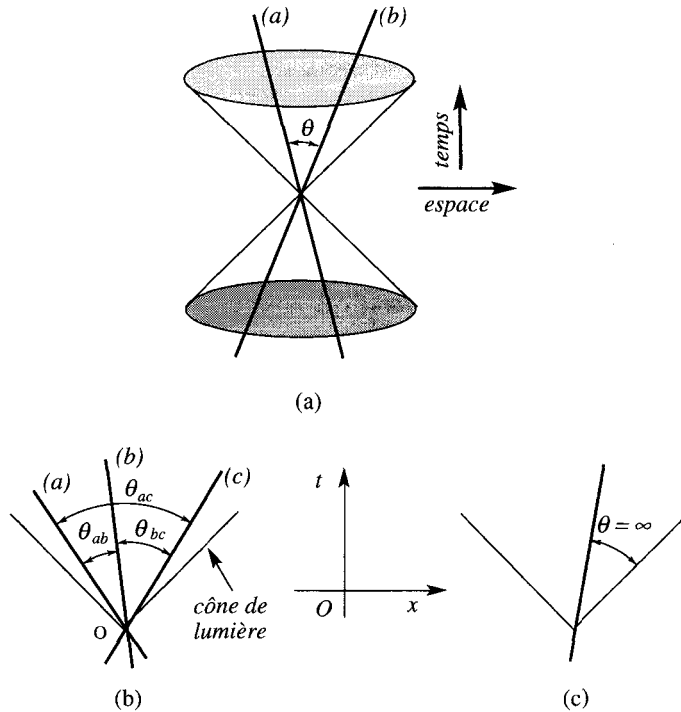


Figure 2.4 : Angle hyperbolique de deux droites du genre temps. (a) L'angle hyperbolique θ des deux droites (a) et (b) est lié de manière univoque à la vitesse relative des deux mouvements inertiels associés par la relation $\text{th } \theta = -v$. (b) Le passage du mouvement inertiel (a) au mouvement inertiel (c) peut toujours être effectué par l'intermédiaire d'un troisième mouvement inertiel (b) : c'est l'additivité des angles hyperboliques ($\theta_{ac} = \theta_{ab} + \theta_{bc}$) qui constitue la loi d'additivité des vitesses dans le cas relativiste. (c) L'angle hyperbolique entre une droite du genre temps quelconque et une génératrice du cône de lumière est toujours infini : toute droite du genre temps fait le même "angle" avec le cône isotrope et peut donc être considérée comme un axe de symétrie pour ce dernier.

contenues dans des 3-plans $t = \text{const.}$ et qui correspondent à des propagations à vitesse infinie.

4. Etant donnés deux points M_1 et M_2 de \mathfrak{M} , on peut toujours former un vecteur, à quatre composantes, dont la (pseudo-)longueur sera donnée par

$$M_1 M_2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 \quad (2.34)$$

$$= X^T G X \quad (2.35)$$

où X est la matrice représentative de $M_1 M_2$ dans le repère galiléen. Le vecteur $M_1 M_2$ sera dit du genre temps si $M_1 M_2^2 > 0$, du genre espace si $M_1 M_2^2 < 0$ et isotrope lorsque $M_1 M_2^2 = 0$. Autrement dit, le genre de $M_1 M_2$ est le même que celui de la droite qui passe par M_1 et M_2 .

Si (t_1, \mathbf{x}_1) et (t_2, \mathbf{x}_2) sont les coordonnées galiléennes des points M_1 et M_2 respectivement, le vecteur $M_1 M_2$ aura pour composantes $[(t_2 - t_1), (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)]$.

Comme la forme quadratique (2.34) est conservée par changement de coordonnées galiléennes,

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^2 = c^2 (t'_2 - t'_1)^2 - (\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)^2, \quad (2.36)$$

il s'ensuit que l'on a aussi

$$c^2 t_1.t_2 - \mathbf{x}_2.\mathbf{x}_1 = c^2 t'_1.t'_2 - \mathbf{x}'_1.\mathbf{x}'_2. \quad (2.37)$$

Ceci nous permet alors de définir un (pseudo-)produit scalaire invariant dans les changements de systèmes d'inertie, par

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 . \mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 = X^T G Y. \quad (2.38)$$

Dans un autre système d'inertie, on aura

$$X' = L X \quad \text{et} \quad Y' = L Y \quad (2.39)$$

et

$$\begin{aligned} X'^T G Y' &= X^T L^T G L Y \\ &= X^T G Y \end{aligned} \quad (2.40)$$

en vertu de la relation (2.22).

Avec ce produit scalaire, on définira dans \mathfrak{M} l'*orthogonalité* (en fait, la pseudo-orthogonalité) de deux vecteurs par

$$X \perp Y \iff X^T G Y = 0 \quad (2.41)$$

où X et Y sont les matrices représentatives de $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ et $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$.

Causalité et simultanéité

Revenons à l'espace de Minkowski et à sa structure géométrique, voire topologique. Chaque cône de lumière permet de partager l'espace-temps en trois régions et deux frontières [Fig. 2.5]. On trouve, d'une part, les deux régions situées à l'intérieur de chacune des deux nappes du cône isotrope et, d'autre part, la région qui se trouve à l'extérieur du même cône.

Pour caractériser plus précisément ces trois régions – pour leur donner un sens physique – il convient de fixer une *orientation* des cônes de lumière de l'espace-temps. Pour cela, considérons un observateur inertiel; sa trajectoire dans \mathfrak{M} est une droite du genre temps (située à l'intérieur du cône isotrope) *orientée dans le sens de l'écoulement du temps*. Notons, incidemment, que cette orientation doit être la même pour tous les systèmes inertiels dont les trajectoires d'espace-temps passent

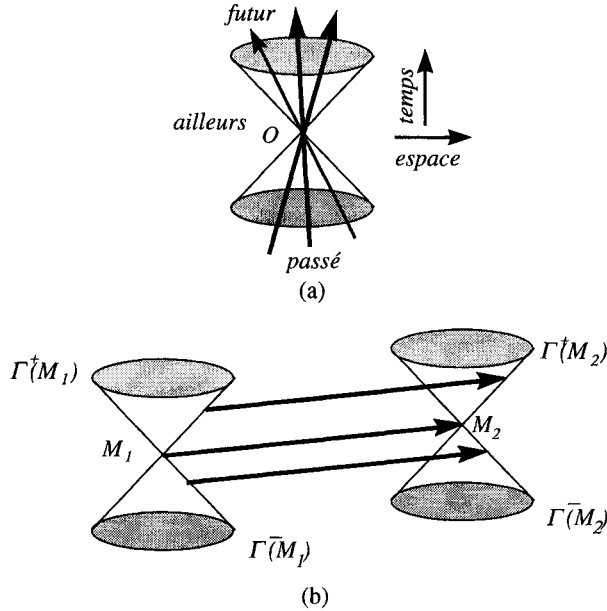


Figure 2.5 : (a) Chaque cône de lumière partage l'espace-temps en trois régions : le futur, à l'intérieur de la nappe Γ^+ ; le passé, à l'intérieur de la nappe Γ^- ; et l'ailleurs, à l'extérieur du cône. (b) Un cône $\Gamma(M_1)$ étant orienté, tous les autres cônes isotropes $\Gamma(M_2)$ le sont également, de manière que l'homogénéité de l'espace-temps soit préservée.

par le même point O ; il s'agit là d'une condition de cohérence minimale (tous les observateurs galiléens doivent voir le temps s'écouler dans le même sens) qui est préservée, par construction, par les transformations de Lorentz orthochrones. Γ^+ désignera donc la *nappe du futur*, c'est-à-dire celle qui correspond au sens positif de l'écoulement du temps pour tout observateur galiléen (dont la trajectoire passe par son sommet). Γ^- désignera la *nappe du passé*, c'est-à-dire l'autre nappe. Un cône de lumière quelconque étant ainsi orienté, tous le seront également si l'on impose que cette orientation est préservée par les translations d'espace-temps. Il s'ensuivra que, dans tous les systèmes d'inertie, le temps s'écoulera de la même façon.

Notons que les transformations de Lorentz pures, ou restreintes (2.4), conservent aussi bien le sens de l'écoulement du temps pour les différents observateurs inertiels, que les différentes régions indiquées plus haut. En effet, dans un système de coordonnées galiléennes quelconque (t, \mathbf{x}) , on a

$$\begin{cases} \text{Int. } \Gamma^+ &= \{(t, \mathbf{x}) : c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 > 0, t > 0\} \\ \text{Int. } \Gamma^- &= \{(t, \mathbf{x}) : c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 > 0, t < 0\} \\ \text{Ext. } \Gamma &= \{(t, \mathbf{x}) : c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 < 0\}. \end{cases}$$

Or, toute transformation de Lorentz conserve la forme quadratique $c^2 t^2 - \mathbf{x}^2$ [Eq. (2.23)] et donc également son signe.

Les points d'espace-temps situés à l'intérieur de $\Gamma^+(\mathbf{O})$, soit $\text{Int.}\Gamma^+$, sont dans le *futur* de \mathbf{O} : les événements qui se produisent en \mathbf{O} peuvent influencer, voire être la cause, de ceux qui se produisent à l'intérieur de Γ^+ . De même, les points d'espace-temps situés à l'intérieur de $\Gamma^-(\mathbf{O})$, soit $\text{Int.}\Gamma^-$, sont dans le *passé* de \mathbf{O} : les événements qui s'y produisent peuvent avoir influencé, voire être la cause, de ce qui se produit en \mathbf{O} . Quant à la troisième région, située à l'extérieur du cône Γ , l'*ailleurs*, elle est constituée de points totalement inaccessibles à \mathbf{O} , car on n'observe pas de signaux se propageant à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.

Dans un système de coordonnées galiléennes quelconque, la condition

$$c^2t^2 - \mathbf{x}^2 < 0$$

se traduit par

$$|\mathbf{x}|/t > c.$$

L'*ailleurs* n'est donc accessible qu'en utilisant des phénomènes physiques se propageant à des vitesses *supérieures* à celle de la lumière.

Il est nécessaire de remarquer que ce dernier point – l'inaccessibilité de l'*ailleurs* à \mathbf{O} ou, ce qui revient au même, l'inexistence d'actions se propageant à des vitesses supérieures à celle de la lumière – constitue un *postulat supplémentaire*, justiciable en dernière analyse d'une vérification expérimentale. Nous admettrons sa validité (dans un cadre non quantique).

Dans ces conditions, un observateur galiléen [Fig. 2.6] ne peut apercevoir qu'une région *limitée* de l'espace-temps : il devra attendre un certain temps \mathbf{OO}' avant d'avoir accès à une partie de l'*ailleurs* de \mathbf{O} ; en quelque sorte, à chaque instant,

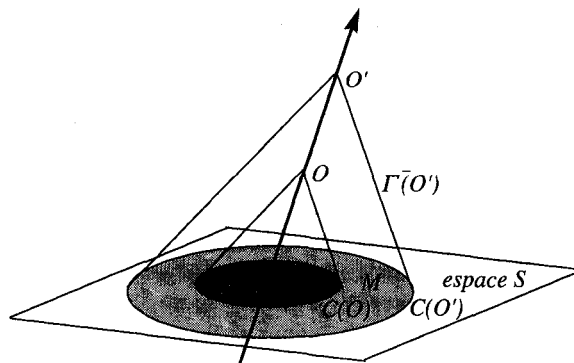


Figure 2.6 : Inaccessibilité de l'Univers global. En \mathbf{O} , l'observateur, ne peut observer que les événements situés à l'intérieur de la sphère $\mathbf{C}(\mathbf{O})$; pour avoir accès à une partie des événements situés à l'extérieur de $\mathbf{C}(\mathbf{O})$, dans le plan spatial \mathbf{S} , il devra attendre d'être arrivé en \mathbf{O}' , donc que se soit écoulé le temps \mathbf{OO}' ; ainsi, le point \mathbf{M} est inobservable de \mathbf{O} , mais l'est de \mathbf{O}' .

il possède un *horizon*⁷ [Fig. 2.7]. Autrement dit, certaines régions sont trop éloignées pour que la lumière ait le temps de parvenir en O .

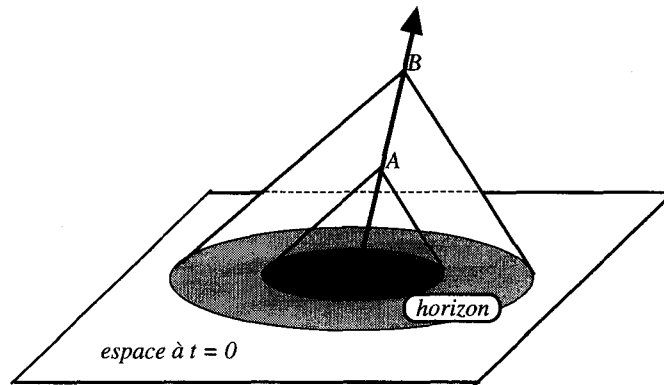


Figure 2.7 : Un horizon cosmologique. Dans le cadre du modèle cosmologique dit du "big bang" (explosion primordiale), un observateur n'a accès qu'à une partie limitée de l'Univers (région hachurée) et c'est seulement avec le temps que son horizon s'élargit.

Les cônes de lumière, orientés comme ci-dessus, définissent donc sur l'espace de Minkowski \mathcal{M} une *structure causale*, complètement différente de celle de l'espace-temps newtonien déterminée, elle, par les hyperplans $t = \text{const}$. Cette structure causale détermine sur \mathcal{M} un *ordre partiel* : on dira que le point M_1 est *antérieur* à M_2 , ce que l'on écrira

$$M_1 \prec M_2 \iff M_1 M_2^2 \geq 0, M_1 M_2 \in \Gamma^+(M_1)$$

si, et seulement si, le vecteur $M_1 M_2$ est (i) du genre temps ou, à la rigueur, isotrope et (ii) orienté vers le futur [Fig. 2.8]. On peut d'ailleurs montrer que les transformations linéaires qui préservent cet ordre partiel sont précisément les transformations de Lorentz [E.C. Zeeman (1964)]. Au contraire, la causalité dans l'espace-temps newtonien constitue un *ordre total*.

Venons-en maintenant à la notion de simultanéité. Si l'on se réfère à la définition physique de la simultanéité, celle d'Einstein, évoquée au chapitre précédent, alors à un instant donné de son temps, un observateur galiléen doit considérer comme simultanés tous les événements qui se produisent sur la nappe du passé, Γ^- , de son cône isotrope. En fait, ce sont les points de l'ailleurs, sans influence de quelque sorte que ce soit sur l'observateur (à un instant donné), qui constituent l'analogie des événements simultanés du cas classique. Cependant, alors que les hyperplans spatiaux du cas newtonien n'ont que trois dimensions, l'ailleurs relatif à un observateur galiléen à un instant donné constitue un domaine quadridimensionnel.

7. Cette question, abordée dans la plupart des ouvrages de cosmologie, le sera également dans un autre volume en préparation.

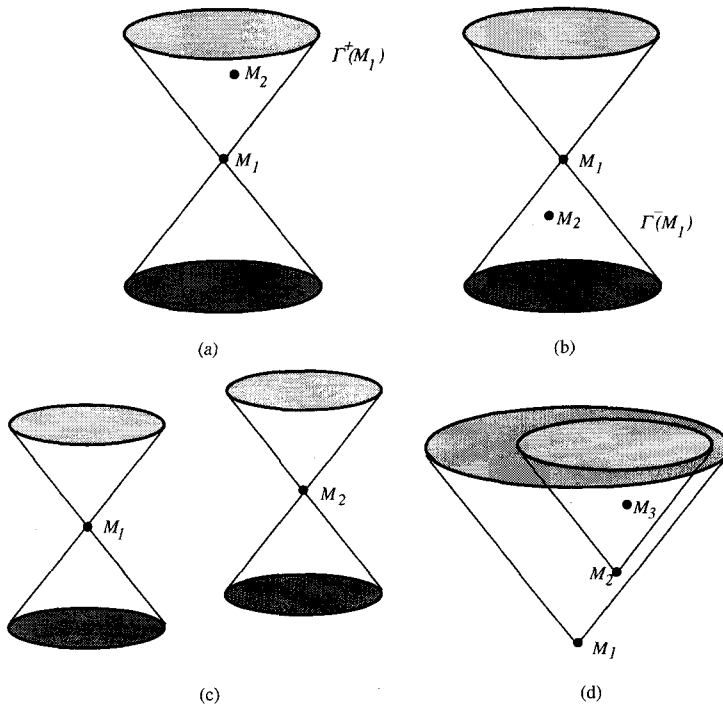


Figure 2.8 : La causalité dans l'espace de Minkowski. (a) $M_1 \prec M_2$; (b) $M_2 \prec M_1$; (c) M_1 et M_2 ne sont pas comparables et ne sont pas susceptibles d'être liés causalement; (d) $M_1 \prec M_2$ et $M_2 \prec M_3$ entraînent bien $M_1 \prec M_3$.

Aussi la notion d'espace à trois dimensions d'événements simultanés va-t-elle, dans le cadre de la Relativité Restreinte, être profondément modifiée et comporter un arbitraire certain.

En dernière analyse, si l'on souhaite conserver le caractère tridimensionnel de l'espace, le concept de simultanéité qui émerge est celui défini par des *surfaces du genre espace* [Fig. 2.9]. Une surface du genre espace Σ quelconque possède la propriété que chacun de ses points est situé dans l'ailleurs de tout autre de ses points, de sorte que deux observateurs – galiléens ou non – peuvent considérer les points de Σ comme simultanés [Fig. 2.10].

Il en résulte qu'un observateur galiléen peut parfaitement utiliser la notion de simultanéité (c'est-à-dire la ou les surfaces du genre espace) qui lui convient, comme par exemple celle définie par un *feuilletage* de l'espace-temps par une famille de surfaces (du genre espace), sans intersection, indexées par un paramètre réel [Fig. 2.11].

En réalité, la notion usuelle de simultanéité – c'est-à-dire celle *définie* par des hyperplans du genre espace orthogonaux à un axe de temps (au sens de la métrique de l'espace de Minkowski) – peut *toujours* être utilisée en Relativité Restreinte où elle est bien la plus commode. Il faut cependant garder présent à l'esprit qu'elle

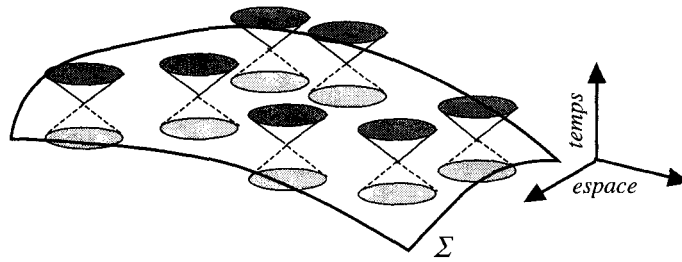


Figure 2.9 : Surface du genre espace. Tout point de la surface Σ est situé dans l'ailleurs de tout autre point de Σ .

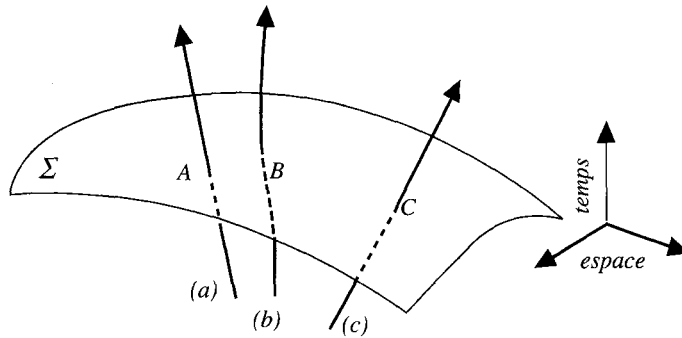


Figure 2.10 : Evénements simultanés. Les observateurs dont les trajectoires dans \mathcal{M} sont dénotées par (a), (b), (c), . . . peuvent parfaitement considérer que les événements A, B, C, . . . sont simultanés, relativement à la surface du genre espace Σ . Sur la figure, (a) et (c) représentent des observateurs galiléens (lignes droites) mais non (b).

est arbitraire et ne s'impose que pour des raisons psychologiques et de simplicité. Toutefois, en Relativité Générale où la notion d'observateur inertiel proprement dit disparaît et où l'espace-temps est courbé, il n'existe pas *a priori* de tel feuilletage par des hyperplans spatiaux; aussi la notion de simultanéité qui subsiste est-elle celle fournie par des surfaces du genre espace, dont on peut souvent limiter un peu l'arbitraire compte tenu des symétries du problème considéré.

Dans ce cadre, où la simultanéité de deux événements – i.e. de deux points d'espace-temps – comporte un certain arbitraire, il en sera naturellement de même de leur distance spatiale [Fig. 2.12]. Examinons cela d'un point de vue "opérationnel", c'est-à-dire à l'aide d'une "expérience de pensée"⁸ reproduisant des conditions expérimentales idéales. Considérons donc deux observateurs inertiels $\{K\}$ et $\{K'\}$ [Fig. 2.13] et supposons que $\{K\}$ souhaite évaluer sa distance à $\{K'\}$. A cette fin, il envoie vers $\{K'\}$ une onde électromagnétique au temps t_0 , et en reçoit l'écho au temps t_1 (une telle expérience a effectivement été réalisée à l'aide d'un radar et aussi d'un laser, pour déterminer la distance Terre-Lune ou la

8. "Gedankenexperiment".

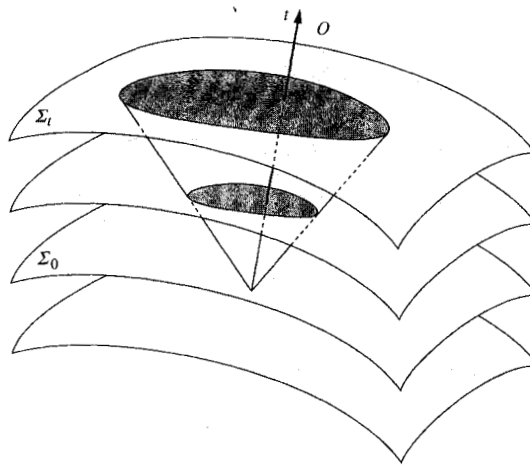


Figure 2.11 : Feuilletage de l'espace de Minkowski par une famille de surfaces du genre espace. L'observateur galiléen $\{O\}$ peut utiliser n'importe quelle surface du genre espace Σ_t , pour définir l'espace à trois dimensions des événements simultanés au temps t . En outre, il peut utiliser une famille de telles surfaces afin d'obtenir une définition de l'espace physique qui lui convienne.

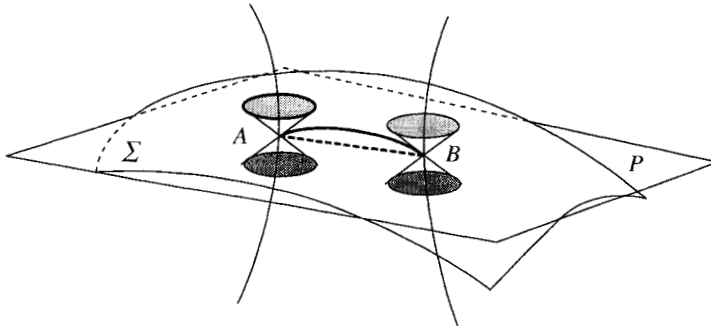


Figure 2.12 : Distance de deux événements simultanés. La distance des événements A et B dépend de la notion de simultanéité adoptée. On pourrait utiliser la convention suivante : la distance de A à B est la plus courte considérée sur une surface du genre espace Σ servant à définir la simultanéité. Sur la figure, P représente un 3-plan du genre espace passant par A et B .

distance des planètes; cf. Chap. 7). S'il utilise la convention usuelle de simultanéité, c'est-à-dire celle définie par des 3-plans de type spatial orthogonaux (au sens de la métrique de \mathcal{M}) à sa ligne d'univers [la droite $\{K\}$ sur la figure 2.13], il définira le temps t_A où se produit la réflexion du signal sur $\{K'\}$ par

$$t_A = \frac{t_0 + t_1}{2} \tag{2.42}$$

et donc sa distance à $\{K'\}$, au temps t_A , par

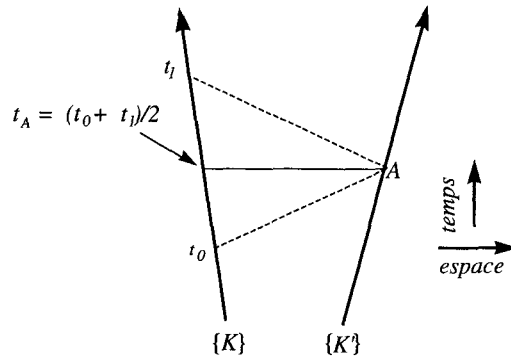


Figure 2.13 : Mesure de la distance entre deux observateurs inertiels $\{K\}$ et $\{K'\}$. $\{K\}$ envoie un signal électromagnétique vers $\{K'\}$ à l'instant t_0 et en reçoit l'écho à t_1 ; les deux nombres t_0 et t_1 , joints à une convention spécifiant la notion de simultanéité adoptée, permettent alors de déterminer une distance entre $\{K\}$ et $\{K'\}$. La convention usuelle de la simultanéité par des 3-plans orthogonaux à la droite $\{K\}$ conduit à définir l'instant où a lieu la réflexion de l'onde électromagnétique (point A) comme étant égal à $(t_1 + t_0)/2$, de sorte que la distance de $\{K\}$ à $\{K'\}$, à cet instant, sera $d_{KK'} = c(t_1 - t_0)/2$.

$$d_{KK'} = \frac{c(t_1 - t_0)}{2}. \quad (2.43)$$

Notons que toute autre notion de simultanéité définie par des 3-plans du genre espace conduirait à un temps t_A tel que [H. Reichenbach (1958)] :

$$t_A = t_0 + \varepsilon(t_1 - t_0) \quad (2.44)$$

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

et, par conséquent, à une distance $d_{KK'}(\varepsilon) < d_{KK'}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Temps et distances mesurés par des observateurs inertiels

Considérons encore deux observateurs inertiels (K) et (K') utilisant chacun la même notion de simultanéité – celle définie par des hyperplans du genre espace orthogonaux à leur ligne d'univers – et ayant synchronisé leurs horloges, par exemple au point O de la figure 2.14.

Supposons, en outre, que ces observateurs mesurent une longueur ℓ_0 entre deux points, au repos dans le système de (K) [Fig. 2.15(a)]. Pour (K) la longueur à mesurer, au temps $t = 0$, est ℓ_0 . Pour (K') , à $t' = 0$, cette même longueur est $\ell = \ell_0 / \text{ch } \theta$; ou encore

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.45)$$

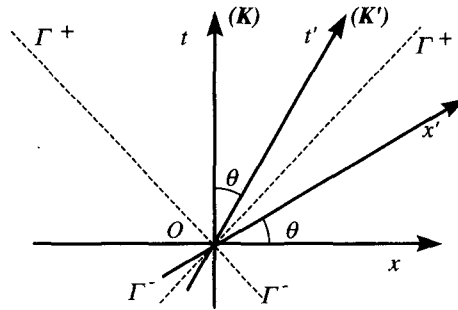


Figure 2.14 : Deux observateurs galiléens conventionnels, en ce sens qu'ils utilisent la même notion de simultanéité, celle définie par des 3-plans du genre espace orthogonaux à leurs lignes d'univers respectives (K) et (K') . A noter qu'au cours d'une transformation de Lorentz d'"angle" θ (qui fait passer de (K) à (K')), la situation des deux observateurs par rapport au cône de lumière reste similaire : l'axe $O\Gamma^+$ (à une dimension spatiale) est un axe de symétrie pour tOx aussi bien que pour $t'Ox'$; le caractère euclidien du plan de la figure ne permet pas une représentation fidèle d'un espace non euclidien.

Autrement dit, la longueur mesurée par (K') , au repos relativement à (K) , lui apparaît plus petite : c'est le phénomène de *contraction*⁹ *apparente* des longueurs. Loin d'être un effet *physique* de l'éther, comme le croyaient Fitzgerald et Lorentz, il s'agit là d'un effet apparent [pour une discussion plus détaillée, voir M. Bunge (1967); M. Jammer (1979)] dû assez largement aux définitions et conventions utilisées par les deux observateurs quant à la notion de simultanéité.

Venons-en maintenant à la comparaison des horloges des deux observateurs [Fig. 2.15(b)]. Un phénomène physique – une horloge – de durée OA dans (K) , et situé(e) en $x = 0$, semble durer plus longtemps dans le système (K') . En effet, le point A marquant l'achèvement du phénomène possède dans (K') les coordonnées (OA', OB') et l'on a

$$OA' = OA \operatorname{ch} \theta \tag{2.46}$$

et, si $OA = t_0$ et $OA' = t'$, il vient alors

$$t' = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \tag{2.47}$$

les phénomènes de (K) paraissent durer plus longtemps pour (K') que pour (K) : c'est la dilatation apparente des durées, bien observée dans tous les phénomènes de désintégration des particules élémentaires.

9. L'apparence visuelle des corps en mouvement a peu à voir avec la contraction des longueurs [voir, par exemple, V. F. Weisskopf (1960)].

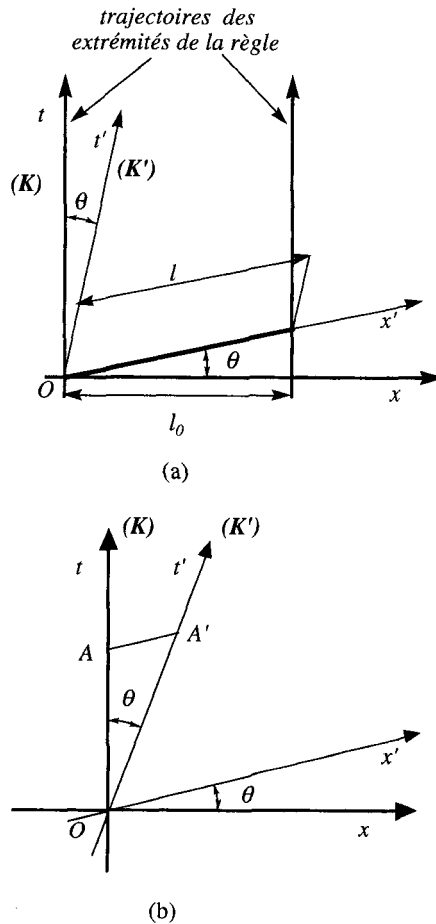


Figure 2.15 : (a) Contraction apparente des longueurs. $l_0 = l \operatorname{ch} \theta$. (b) Dilatation apparente des durées. La durée OA d'un événement dans (K) est, dans (K') , $OA' = OA \operatorname{ch} \theta > OA$.

Propriétés globales de l'espace-temps

Les propriétés que nous venons d'étudier sont, en réalité, des propriétés *locales* en ce sens qu'elles sont liées à la métrique de l'espace de Minkowski, à des événements proches de l'espace-temps. Le mot "local" signifie d'ailleurs aussi bien l'échelle de l'atome que celle du laboratoire, du système solaire, de la Galaxie, etc. Bien entendu, cela reflète uniquement le caractère lui-même local des mesures ou des observations que nous sommes capables d'effectuer.

Il n'est cependant nullement évident, ni sur le plan théorique ni d'un point de vue observationnel, que l'espace-temps ait la *topologie* – c'est-à-dire la structure *globale* – de l'espace de Minkowski.

Afin d'illustrer notre propos, considérons un espace-temps à deux dimensions, l'une de temps et l'autre d'espace. Supposons maintenant que, par la pensée, nous *identifions* les points spatiaux, [Fig. 2.16] pour former une surface à deux dimensions *spatialement fermée*. Localement, la métrique de cet espace-temps est toujours celle de l'espace de Minkowski; par contre, les propriétés globales de l'espace-temps ont changé : les sections spatiales, auparavant ouvertes, sont maintenant fermées.

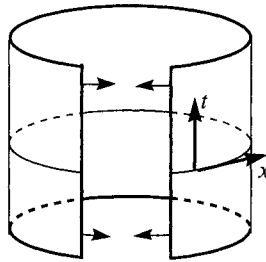


Figure 2.16 : La structure globale de l'espace de Minkowski pourrait être celle d'un cylindre (identification des points à l'infini spatial) : dans ce cas, les sections spatiales sont fermées.

Aucune mesure locale ne pourra nous donner d'indication sur la topologie de l'espace-temps. Cependant, l'observation peut éventuellement apporter une réponse : il peut exister des galaxies [Fig. 2.17] dont la lumière pourrait nous arriver de deux directions totalement différentes, voire opposées; mais jusqu'à présent, un tel effet n'a pu être observé. Notons qu'il existe encore bien d'autres possibilités de structures globales où l'espace serait borné.

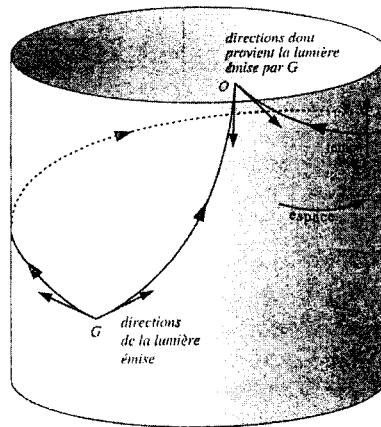


Figure 2.17 : La lumière émise par la galaxie G peut être reçue par un observateur O par plusieurs trajets, de sorte que G serait alors vue dans plusieurs directions.

Une autre possibilité de structure globale pour l'espace de Minkowski à deux dimensions est celle où, à l'inverse du cas précédent, les points à l'infini dans le

temps sont identifiés [Fig. 2.18]. En général, une telle possibilité est exclue par la causalité : nous pourrions, du moins en principe, influencer notre futur ! En fait cet argument n'est peut-être pas aussi contraignant qu'il le semble à première vue. Si la périodicité temporelle [Fig. 2.19] est très grande, la possibilité d'agir sur notre futur est pratiquement inexistante.

Une étude des propriétés globales de l'espace-temps de la cosmologie peut être trouvée dans M. Lachièze-Rey *et al.* (1994).

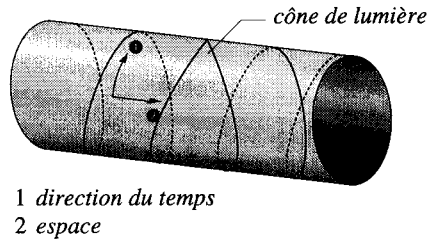


Figure 2.18 : Lorsqu'on identifie les points à l'infini temporel de l'espace de Minkowski, la causalité est perdue : un observateur peut influencer aussi bien sur son passé que sur son futur !

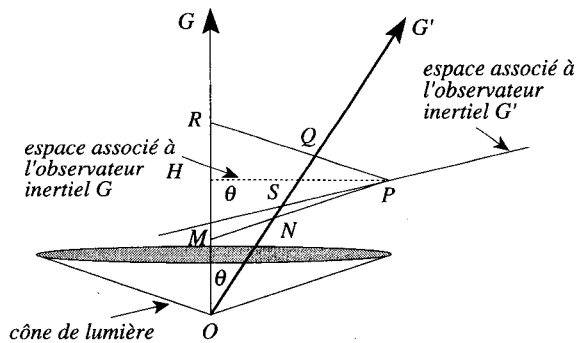


Figure 2.19 : Exercice 4.

Les vérifications expérimentales de la Relativité Restreinte¹⁰

Un grand nombre de tests expérimentaux de la Relativité Restreinte ont été effectués, qui confirment cette théorie avec une grande précision [Tableau 2.1]. A cela s'ajoutent les confirmations quotidiennes de la physique des hautes énergies. Il n'est cependant guère facile de comparer ces diverses données entre elles,

10. On pourra consulter l'excellent article de M.P. Haugan et C.M. Will (1987).

notamment en ce qui concerne leur signification théorique. Il est clair, par exemple, que les deux postulats énoncés au début de ce chapitre se subdivisent en une multitude de sous-postulats et/ou d’"évidences" expérimentales; et ce, sans parler de subtiles questions sur la synchronisation des horloges, la simultanéité et la part de convention qu’elles contiennent [voir, par exemple, H. Reichenbach (1958)].

Auteurs	Date	Effets mesurés	Précision
Brillet <i>et al.</i>	(1979)	Vent d'éther	$\pm 2 \times 10^{-11}$
Mandelberg <i>et al.</i>	(1962)	Effet Doppler transverse	5×10^{-2}
Brecher	(1977)	Vitesse de la lumière	2×10^{-9}
Grove <i>et al.</i>	(1953)	Masse relativiste	6×10^{-4}
Alvager <i>et al.</i>	(1964)	Vitesse de la lumière	1.3×10^{-4}
Gviragossian <i>et al.</i>	(1975)	Vitesse d'un électron de haute énergie	2×10^{-7}
Bailey <i>et al.</i>	(1977)	Facteur g du muon	2.7×10^{-7}
Van Dyck <i>et al.</i>	(1977)	Facteur g de l'électron	3.5×10^{-9}
Wesley <i>et al.</i>	(1971)	Facteur g de l'électron	3.5×10^{-9}

Tableau 2.1 : Quelques-unes des mesures effectuées récemment [d'après D. Newman et al. (1978)].

En tout état de cause, une fois vérifiée la réalité expérimentale de tel ou tel effet relativiste, une fois mesurée sa grandeur, il reste difficile d'évaluer quantitativement la place laissée par l'expérience à une théorie alternative éventuelle : à l'heure actuelle, il n'existe pas de formalisme complet permettant une telle comparaison, bien que d'intéressantes tentatives [H.P. Robertson (1949), (1968); R. Mansouri, R.U. Sexl (1977)] aient eu lieu.

Considérons, pour prendre un exemple simple, le postulat de la constance de la vitesse de la lumière [K. Brecher (1977)]. Afin de "modéliser" une éventuelle déviation, écrivons que la vitesse de la lumière c' , mesurée par un observateur inertiel, est donnée par

$$c' = c + kv, \tag{2.48}$$

où v est la vitesse de la source et c la vitesse de la lumière dans le système de référence de la source : k est une constante qui dépend de la théorie considérée ($k = 0$ dans le cas de la Relativité Restreinte; $k = 1$ dans le cas de la relativité newtonienne; k prend d'autres valeurs pour d'autres théories encore). L'hypothèse $k \neq 0$ conduit [W. De Sitter (1913)] à toutes sortes d'effets sur les systèmes binaires d'étoiles : excentricité apparente de l'orbite; possibilité d'images multiples, d'inversion de l'ordre temporel d'événements, etc. Ces effets ne sont généralement pas observés [K. Brecher (1977); J.G. Fox (1962), (1965)] car la lumière émise se propage dans un milieu dispersif (le milieu interstellaire) et il existe une distance d'extinction caractéristique

$$d_{\text{ext.}} = \frac{\lambda}{2\pi(n-1)} \sim \frac{mc^2}{\lambda e^2 N}$$

(λ : longueur d'onde ; n : indice du milieu ; N : densité électronique du plasma interstellaire), de l'ordre de 2 années-lumière. Toutefois, pour de très courtes longueurs d'onde (pour des rayons X de 70 keV), la distance d'extinction est de l'ordre de 20 kpc. Aussi les caractéristiques des sources X binaires (Her. X1, Cen. X3, SMC. X1) ont-elles permis à K. Brecher (1977) de fixer une limite sur k :

$$k < 2 \times 10^{-9} .$$

Ainsi une théorie qui *prédirait* $k = 10^{-10}$ serait tout à fait acceptable.

Venons-en maintenant à l'intéressant point de vue développé par H.P. Robertson [(1949) (1968)]. Cet auteur pose *a priori* quatre postulats auxquels doivent obéir les changements de référentiels d'inertie et en déduit une forme générale pour ces "transformations de Lorentz" généralisées, dépendant de paramètres arbitraires. Ces postulats sont les suivants :

- 1 – Il existe un système de référence dans lequel l'espace est isotrope.
- 2 – Dans ce système de référence, la vitesse de la lumière est c , indépendamment de la direction, du mouvement de la source, de la longueur d'onde, etc.
- 3 – Il existe un autre système de référence qui se meut à la vitesse v (le long de l'axe des x , par exemple) par rapport au premier.
- 4 – La transformation qui permet le passage de l'un à l'autre système de référence est linéaire.

Dans ces conditions, il n'est pas très difficile de montrer que la transformation de coordonnées qui fait passer des coordonnées du premier système $\{t, x, y, z\}$ à celles du second $\{t', x', y', z'\}$ est de la forme

$$\begin{cases} t' &= a(v)t + \varepsilon x + \varepsilon' y + \varepsilon' z \\ x' &= b(v)[x - vt] \\ y' &= d(v)y \\ z' &= d(v)z \end{cases} \quad (2.49)$$

où les fonctions $a(v)$, $b(v)$, $c(v)$ et $d(v)$ dépendent de la "théorie de la relativité" adoptée tandis que ε et ε' sont déterminés par le procédé utilisé pour la synchronisation des horloges [H.P. Robertson (1949) (1968); R. Mansouri, R.U. Sexl (1977)]. Avec les transformations précédentes et en utilisant la synchronisation des horloges d'Einstein, la vitesse de la lumière est alors donnée par

$$c/c(\theta) = 1 + \left(\beta + \delta - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{v}{c} \right)^2 \sin^2 \theta + (\alpha - \beta + 1) \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \quad (2.50)$$

où θ est l'angle formé par l'axe des x' avec la direction de propagation d'un rayon lumineux (dans le second référentiel) et où les paramètres α , β , δ représentent les premières déviations à la Relativité Restreinte d'Einstein, au travers des développements des fonctions $a(v)$, $b(v)$, $c(v)$ et $d(v)$ en puissance de $(v/c)^2$:

$$\begin{cases} a(v) = 1 + \alpha(v/c)^2 + \dots \\ b(v) = 1 + \beta(v/c)^2 + \dots \\ c(v) = 1 + \delta(v/c)^2 + \dots \end{cases} \quad (2.51)$$

La théorie d'Einstein correspond alors à $\alpha = -1/2, \beta = +1/2, \delta = 0$.

Les diverses expériences réalisées vont alors tester des combinaisons de ces divers paramètres; on aura ainsi [A. Brilliet, J.L. Hall (1982)] les résultats qu'indique le tableau 2.2.

Combinaison	Valeur expérimentale	Auteurs
α	$-1/2 \pm 10^{-7}$	G.R. Isaak (1970) D.C. Champeney <i>et al.</i> (1963)
$\beta + \delta$	$1/2 \pm 5 \times 10^{-7}$	A. Brilliet <i>et al.</i> (1979)
$\alpha - \beta$	$1.02 \pm 2 \times 10^{-2}$	R.J. Kennedy <i>et al.</i> (1932)

Tableau 2.2 : Résultats expérimentaux pour les paramètres α, β, δ [d'après A. Brilliet *et al.* (1982)].

Cependant, quelque utile qu'il puisse être, ce cadre théorique pour analyser les résultats expérimentaux visant à tester la Relativité Restreinte ne saurait être ni complet ni unique : d'une part, il est de nature purement cinématique et, d'autre part, il s'inscrit dans un cadre théorique déterminé – les quatre postulats posés par H.P. Robertson – qui, pour naturel qu'il soit, est assez arbitraire.

Indiquons, pour clore cette section, que l'expérience de Hughes et Drever, mentionnée au chapitre 1, peut aussi être considérée comme un test de haute précision de l'invariance de Lorentz (locale) [voir C.M. Will (1981)]. C'est pourquoi cette expérience a été améliorée à plusieurs reprises [voir, par exemple, T.E. Chupp *et al.* (1989); S.K. Lamoreaux *et al.* (1986); J.D. Prestage *et al.* (1985)].

EXERCICES

1. On considère une étoile à symétrie sphérique, en *équilibre hydrostatique*. Soit $\rho(r)$ sa densité de masse à la distance r et soit $m(r)$ la masse contenue dans la sphère de rayon r . Soit enfin $P(r)$ la pression à la distance r et $P = P^*(\rho)$ l'équation d'état à laquelle obéit la matière présente dans l'étoile.

(i) En écrivant qu'un élément de volume de l'étoile est en équilibre hydrostatique (l'attraction gravitationnelle qui s'exerce sur lui est exactement compensée par la force due à la pression), trouver une équation satisfaite par dP/dr .

(ii) Dans le cas relativiste et dans un système d'unités tel que $G = c = 1$, l'équation analogue à l'équation obtenue en (i) s'écrit

$$\frac{dP(r)}{dr} = \frac{(\rho + P) \cdot (m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}.$$

(a) Rétablir dans cette équation les facteurs G et c .

(b) Vérifier que lorsque $c \rightarrow \infty$, on retrouve bien l'équation obtenue en (i).

2. A partir de la relation $L^T G = G L^{-1}$, montrer que les transformations de Lorentz orthochrones peuvent effectivement s'écrire sous la forme

$$L(\theta) = \begin{vmatrix} \text{ch } \theta & \text{sh } \theta \\ \text{sh } \theta & \text{ch } \theta \end{vmatrix}.$$

En déduire que $L(\theta_1)L(\theta_2) = L(\theta_1 + \theta_2)$, et vérifier la loi d'addition des vitesses.

3. Soit

$$\|L_\mu^\nu\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Montrer qu'il s'agit d'une transformation de Lorentz. Laquelle ?

4. Dans ce problème, l'espace-temps de Minkowski possède deux dimensions seulement, l'une temporelle et l'autre spatiale. Les observateurs considérés ci-dessous sont équivalents en ce sens qu'ils possèdent des horloges identiques, qu'ils sont capables d'envoyer des signaux radar espacés par les mêmes intervalles de temps, et qu'enfin ils sont capables d'en recevoir l'écho avec des récepteurs identiques. On choisira un système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière c est égale à un.

Première partie : Effet Doppler longitudinal. Soient G et G' deux observateurs inertiels animés l'un par rapport à l'autre d'une vitesse v : les droites d'espace-temps G et G' se coupent en O ; on suppose, en outre, que G et G' ont synchronisé leurs horloges en $O \{t=t'=0\}$ et Γ est le cône de lumière de sommet O [Fig. 2.19]. Soit T_0 la période des signaux radars envoyés par G sur G' et T la période de ces mêmes signaux tels qu'ils sont reçus par G' .

(i) A-t-on $T_0 = T$? (justifier la réponse par un argument "newtonien"). Tracer un diagramme d'espace-temps correspondant à l'envoi par G , et à la réception, par G' , de signaux périodiques.

(ii) On pose $k(v) = T/T_0$ et l'on souhaite déterminer $k(v)$ en utilisant le principe de relativité. Si l'on appelle T' la période des signaux radar émis par G' et reçus par G , on posera $k'(v) = T'/T_0$. Evaluer $k'(v)$ en fonction de $k(v)$ {faire un diagramme d'espace-temps : en quoi diffère-t-il de celui de la question (i)?}.

(iii) On se propose maintenant de calculer explicitement $k(v)$, i.e. de démontrer la relation

$$k(v) = \left[\frac{1+v}{1-v} \right]^{1/2}.$$

Au temps T_0 (de son temps) G envoie sur G' une impulsion radar que G' reçoit au temps T et qu'il réfléchit instantanément vers G . On appellera N et N'' les points de la droite G où il y a respectivement émission puis réception du signal radar. On appellera N' le point de la droite G' où le signal émis par G est réfléchi. On appellera S le milieu de NN'' .

(a) Tracer un diagramme d'espace-temps correspondant à l'expérience précédente.

(b) Pourquoi a-t-on $ON'' = \{k(v)\}^2 T_0$?

(c) Utiliser le diagramme de la question (a) pour démontrer la relation qui donne $k(v)$.

Deuxième partie : Quelques applications. (i) Soit t la coordonnée temporelle de N' pour l'observateur G et soit t' la coordonnée temporelle de N' pour l'observateur G' . Montrer que

$$t = t' \{1 - v^2\}^{-1/2} \quad (\text{ralentissement des horloges en mouvement}).$$

(ii) On considère maintenant un troisième observateur inercial G'' , analogue aux précédents; G'' possède une vitesse w par rapport à G et une vitesse u par rapport à G' . A l'aide d'un diagramme d'espace-temps similaire aux précédents, montrer que

$$k(w) = k(v) \cdot k(u),$$

et en déduire que

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} \quad (\text{addition des vitesses}).$$

Troisième partie : La transformation de Lorentz. La distance d'un point P de l'espace de Minkowski à un observateur inertiel est définie comme étant c fois la moitié de l'intervalle de temps qui sépare l'émission d'un signal radar de la réception de l'écho sur P (faire un diagramme d'espace-temps).

Soit P un point d'espace-temps. G et G' attribuent à P les coordonnées spatio-temporelles (t, x) et (t', x') , respectivement. Démontrer que (t, x) et (t', x') sont reliées par les transformations de Lorentz habituelles. On s'aidera de la figure 2.19, du principe de relativité et des notations suivantes : $OM=T_1$, $OQ=T_2'$, $OR=T_2$. [cf. H. Bondi (1965); D. Bohm (1965)].

5. Montrer que le groupe de Lorentz se réduit au groupe de Galilée lorsque $c \rightarrow \infty$.

6. Soit x un 4-vecteur du genre temps et soit y un 4-vecteur orthogonal à x (au sens de la pseudo-métrique de l'espace de Minkowski). Montrer que y est du genre espace.

7. Montrer qu'un 3-plan $k \cdot x = \text{const.}$ est du genre espace dès que le 4-vecteur k est du genre temps.

8. On considère, dans l'espace de Minkowski \mathfrak{M} , la 3-surface Σ définie par :

$$\begin{cases} x^1 = a \operatorname{sh} \chi \cos \varphi \sin \theta \\ x^2 = a \operatorname{sh} \chi \sin \varphi \sin \theta \\ x^3 = a \operatorname{sh} \chi \cos \theta \\ x^0 = a \operatorname{ch} \chi \end{cases}$$

où a est une constante positive

(i) Montrer que Σ est du genre espace.

(ii) Calculer la métrique (i.e. l'élément de longueur) sur cette surface.

(iii) Que se passe-t-il lorsque la constante a est négative ?

9. Vérifier que la relation de causalité \prec est une relation d'ordre.

10. Vérifier que la simultanéité est une relation d'équivalence.

11. Soit P un 3-plan du genre espace et Γ^+ la nappe du futur du cône de lumière. Trouver l'intersection de P et Γ^+ (on s'aidera du principe de relativité).

12. Soit Σ la 3-surface définie par la relation

$$(x^0)^2 - \vec{x}^2 = a^2$$

et soit P un 3-plan du genre espace, d'équation

$$k^0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x} = b.$$

Quelle est l'intersection de Σ et de P ?

CHAPITRE 3

La forme relativiste des lois de la physique

On ne peut, par une expérience physique purement interne – de quelque nature qu'elle soit – mettre en évidence le mouvement (relatif) d'un système de référence galiléen; c'est le principe de relativité. Il s'ensuit que les lois de la physique – toutes les lois – doivent nécessairement avoir la *même forme* dans tous les systèmes d'inertie [Chap. 2]. Pour exprimer simplement cette propriété de manière analytique, pour éviter d'avoir à démontrer dans chaque cas que le principe de relativité est bien vérifié, il est extrêmement utile d'écrire les équations de la physique sous une forme manifestement *covariante* dans les transformations de Lorentz. Ainsi, non seulement on évite les vérifications du principe de relativité, souvent assez délicates (et toutes les erreurs que cela peut comporter), mais encore cela permet de transcrire dans un contexte unique la physique dans l'espace-temps, donc muni de sa structure pseudo-métrique. Bien plus, l'exigence de la covariance manifeste de la formulation analytique d'un phénomène physique, formulation *a priori* inconnue, en imposera éventuellement les formes *possibles*. A cette fin, on utilisera des représentations diverses du groupe de Lorentz, spinorielles, tensorielles, etc.

Le formalisme tensoriel

1. Sauf mention explicite du contraire, nous n'utiliserons dans la suite que des coordonnées cartésiennes orthogonales au sens de la métrique de \mathcal{M} . Elles comporteront donc un axe du genre temps Ox^0 et trois axes du genre espace Ox^i ($i = 1, 2, 3$) deux à deux orthogonaux, au sens de la métrique usuelle de \mathbf{R}^3 ; ces trois axes spatiaux seront orthogonaux à l'axe Ox^0 , l'axe temporel, au sens de la métrique de l'espace de Minkowski [Fig. 3.1].

Autrement dit, si $\{\mathbf{e}_\mu\}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) désigne une *tétrade* (“vierbein”) de quatre vecteurs unitaires, colinéaires aux quatre axes Ox^μ et d'origine O , on aura, aussi bien par construction que par définition,

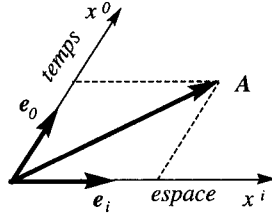


Figure 3.1 : Système de coordonnées lorentziennes et repère associé.

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu} \quad (3.1)$$

où \langle, \rangle désigne le (pseudo-) produit scalaire de l'espace de Minkowski, déterminé par $\eta \equiv \|\eta_{\mu\nu}\|$.

Remarques sur les notations

(i) Dans les paragraphes précédents, nous avons désigné le produit scalaire par un point; ainsi, avec la notation précédente, nous aurions

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle = e_\mu \cdot e_\nu. \quad (3.2)$$

(ii) De même, nous avons désigné par G la matrice du tenseur métrique; c'est-à-dire

$$G = \|\eta_{\mu\nu}\|. \quad (3.3)$$

Dorénavant, nous la dénoterons aussi par η , réservant

$$G = \|\eta_{\mu\nu}\|$$

au cas de la Relativité Générale *ou* au cas de la Relativité Restreinte écrite en coordonnées curvilignes : $\eta_{\mu\nu}$ sera indépendant de l'événement d'espace-temps considéré, alors que $g_{\mu\nu}$ en dépendra.

(iii) Nous utiliserons également la convention suivante, d'un usage courant dans la littérature : *les indices grecs varieront de 0 à 3; les indices latins varieront de 1 à 3.*

(iv) En outre, nous utiliserons la convention d'Einstein de *sommation des indices répétés*, dans une même formule. Par exemple, le symbole $K^{\mu\nu i} \cdot A_{\mu i}$ signifie

$$K^{\mu\nu i} \cdot A_{\mu i} = \sum_{\mu=0}^{\mu=3} \sum_{i=1}^{i=3} K^{\mu\nu i} \cdot A_{\mu i}. \quad (3.4)$$

Si \mathbf{A} désigne maintenant un vecteur quelconque de \mathfrak{M} (c'est-à-dire la donnée de O , l'origine, et d'un point M de l'espace de Minkowski), on écrira

$$\mathbf{A} = e_\mu \cdot A^\mu. \quad (3.5)$$

Les A^μ seront les composantes *contravariantes* de \mathbf{A} . Dans l'équation (3.5), on a évidemment utilisé la convention d'Einstein et l'on a donc, explicitement,

$$e_\mu \cdot A^\mu = e_0 A^0 + e_1 A^1 + e_2 A^2 + e_3 A^3. \quad (3.6)$$

Les composantes *covariantes* de \mathbf{A} , c'est-à-dire A_μ , sont définies par

$$A_\mu = \langle \mathbf{A}, \mathbf{e}_\mu \rangle \quad (3.7)$$

$$= A_\nu \langle \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu \rangle \quad (3.8)$$

ou encore

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu. \quad (3.9)$$

Explicitement, on a donc

$$A^0 = A_0 \quad \text{et} \quad A^i = -A_i. \quad (3.10)$$

Le signe moins est dû au fait que le *tenseur métrique* $\eta_{\mu\nu}$ n'est pas défini positif, contrairement au cas euclidien (dans ce dernier cas, en utilisant des coordonnées cartésiennes, on a alors un signe plus).

Posons maintenant

$$\eta^{-1} \equiv \|\eta^{\mu\nu}\| \quad (3.11)$$

de sorte que, *numériquement*

$$\|\eta_{\mu\nu}\| = \|\eta^{\mu\nu}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (3.12)$$

Mathématiquement, $\eta^{\mu\nu}$ est le tenseur (pseudo-) métrique de l'espace dual (i.e. l'espace des formes linéaires sur l'espace des vecteurs \mathbf{A} de \mathfrak{M}); c'est pourquoi les deux indices μ et ν sont "relevés".

On peut alors inverser la relation (3.9); ce qui donne

$$A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu \quad (3.13)$$

Soient maintenant deux vecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} attachés à la même origine O ; leur produit (pseudo-) scalaire s'écrira alors

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \langle A^\mu \mathbf{e}_\mu, B^\nu \mathbf{e}_\nu \rangle \quad (3.14)$$

$$= A^\mu B^\nu \langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle \quad (3.15)$$

$$= \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (3.16)$$

$$= A_\mu B^\mu \quad (3.17)$$

$$= A^\mu B_\mu \quad (3.18)$$

où l'on a utilisé, outre la bilinéarité du produit scalaire [passage de (3.14) à (3.15)], la définition (3.1) du tenseur métrique [passage de (3.15) à (3.16)] et la règle d'abaissement de l'indice (3.13) [passage de (3.16) à (3.17) ou (3.18)]. Explicitement, on a encore

$$A^\mu B_\mu = A^0 B^0 - \sum_{i=1}^{i=3} A^i \cdot B^i.$$

Notons enfin que si $d\mathcal{M}$ désigne un intervalle infinitésimal entre deux événements de \mathfrak{M} , on aura

$$ds^2 = \langle d\mathbf{M}, d\mathbf{M} \rangle = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad (3.19)$$

C'est la métrique de l'espace-temps exprimée à l'aide des conventions d'indices et de sommation que nous venons d'étudier.

Avec cette notion de produit scalaire, on se rend facilement compte de ce que le signe de la (pseudo-) norme d'un vecteur \mathbf{A} détermine son genre :

$$\begin{cases} A_\mu A^\mu > 0 \rightarrow \mathbf{A} \text{ est du genre temps} \\ A_\mu A^\mu < 0 \rightarrow \mathbf{A} \text{ est du genre espace} \\ A_\mu A^\mu = 0 \rightarrow \mathbf{A} \text{ est isotrope.} \end{cases}$$

[Fig. 3.2]. On constate que le genre d'un vecteur \mathbf{A} , c'est-à-dire le signe de sa (pseudo-) norme, est *invariant* dans une transformation de Lorentz : cette transformation laisse, par construction, le produit scalaire de \mathfrak{M} invariant.

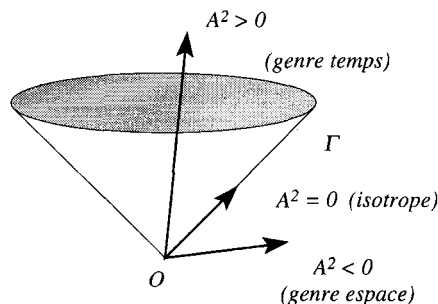


Figure 3.2 : Différents genres de 4-vecteurs. Le genre des différents quadrivecteurs (espace, temps, isotrope) dépend de leur situation relativement au cône de lumière.

2. Etudions maintenant de manière un peu plus précise l'action des transformations de Lorentz sur les composantes des quadrivecteurs de \mathfrak{M} . Bien entendu, un vecteur est un être géométrique intrinsèque qui est donc défini indépendamment de tout système de coordonnées, lorentzien ou non. Toutefois, ses composantes varient lorsque changent les coordonnées utilisées. Nous nous limiterons ici aux

changements de coordonnées lorentziennes [Fig. 2.14], les changements généraux étant étudiés plus loin.

Soit L une transformation de Lorentz, qui vérifie donc la relation (2.22), c'est-à-dire

$$L^T \eta L = \eta. \quad (3.20)$$

Elle fait passer de la tétrade $\{\mathbf{e}_\mu\}$ à la tétrade $\{\mathbf{e}'_\mu\}$ par la relation ¹

$$\mathbf{e}'_\mu = L_\mu{}^\nu \mathbf{e}_\nu \quad (3.21)$$

ce qui conduit immédiatement à

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{e}'_\mu, \mathbf{e}'_\nu \rangle &= L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle \\ &= \eta_{\alpha\beta} L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta; \end{aligned} \quad (3.22)$$

mais comme la métrique est invariante dans les transformations de Lorentz [c'est ce qu'exprime la relation (3.20)],

$$\langle \mathbf{e}'_\mu, \mathbf{e}'_\nu \rangle = \langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu} \quad (3.23)$$

on a donc

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} L_\mu{}^\alpha L_\nu{}^\beta. \quad (3.24)$$

Cette dernière égalité montre que, si l'on inverse la relation (3.21) comme

$$\mathbf{e}_\mu = (L^{-1})_\mu{}^\nu \mathbf{e}'_\nu, \quad (3.25)$$

alors on a nécessairement

$$(L^{-1})_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} L_\beta{}^\alpha. \quad (3.26)$$

Notons enfin que, dans les transformations de Lorentz, les coordonnées x^μ (ou, plus précisément, les composantes x^μ du vecteur **OM**) se transforment, de sorte que

$$\mathbf{OM} = \mathbf{e}'_\mu x'^\mu = \mathbf{e}_\mu x^\mu \quad (3.27)$$

ou encore

$$L_\mu{}^\nu \mathbf{e}_\nu x'^\mu = \mathbf{e}_\mu x^\mu; \quad (3.28)$$

1. Plus haut, nous avons appelé L la transformation $x' = LX$. En réalité, si L fait passer de \mathbf{e} à \mathbf{e}' , alors $x' = L^{-1}x$. C'est cette dernière définition que nous utiliserons désormais.

c'est-à-dire

$$L_{\mu}{}^{\nu} x'^{\mu} = x^{\nu}. \quad (3.29)$$

En inversant cette dernière relation, on obtient

$$x'^{\mu} = (L^{-1})^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \quad (3.30)$$

ou

$$x'^{\mu} \stackrel{\text{def}}{=} L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}. \quad (3.31)$$

Cette définition de $L^{\mu}{}_{\nu}$ et la relation (3.24) donnent alors

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \eta_{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} L_{\beta}{}^{\alpha} \quad (3.32)$$

(attention à la position des indices : voir plus loin).

3. De manière générale, on appellera *quadrivecteur* un être mathématique à quatre composantes qui, dans une transformation de Lorentz, se transformeront soit comme les coordonnées (composantes contravariantes) soit comme les e_{μ} (composantes covariantes). Autrement dit, \mathbf{A} sera un quadrivecteur si et seulement si,

$$\begin{cases} A'^{\mu} &= L^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu} \\ A'_{\mu} &= L_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu} \end{cases} \quad (3.33)$$

dans un changement de base $\{e_{\mu}\} \rightarrow \{e'_{\mu}\}$.

Il est bon de préciser, à ce stade, que la "définition" précédente d'un quadrivecteur n'en est pas une ! Elle représente seulement un *critère pratique* pour reconnaître si quatre quantités physiques (comme, par exemple, la densité de charge et le courant électrique) forment bien un être mathématique auquel correspond une même réalité physique : deux observateurs galiléens mesurant le même phénomène physique – l'un obtenant les nombres (A^0, A^1, A^2, A^3) et l'autre les nombres (A'^0, A'^1, A'^2, A'^3) – doivent nécessairement pouvoir confronter leurs résultats à l'aide des relations (3.33). Ajoutons encore que cette "définition" permet l'usage pratique de *tenseurs* (voir plus loin) sans qu'il soit réellement besoin d'une définition rigoureuse mais, de fait, inutilement compliquée. Plus explicitement, cela signifie qu'on ne s'intéresse qu'au sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 *stable* dans les transformations de Lorentz, seul sous-espace auquel on attribue un sens physique.

Ainsi, une loi physique s'exprimant analytiquement sous la forme

$$A^{\mu} = B^{\mu}$$

sera *manifestement covariante* dans le groupe de Lorentz; autrement dit, elle aura la *même forme* dans tous les repères galiléens, puisque, dans tout autre repère, elle s'écrira encore

$$A'^{\mu} = B'^{\mu}.$$

Notons encore que les quadrivecteurs – sous réserve de leur signification physique – forment un espace vectoriel et que l'on peut donc les ajouter ou

les multiplier par des scalaires : ce sont *aussi* des vecteurs de \mathbf{R}^4 ! Finalement, mentionnons que les quadrivecteurs d'un même genre ne forment pas des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^4 [Fig. 3.3].

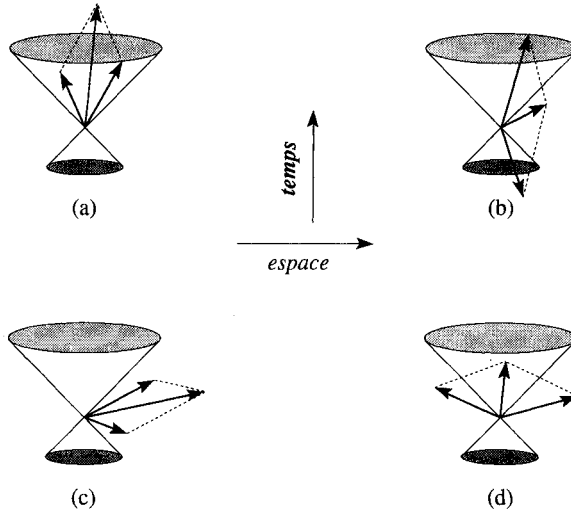


Figure 3.3 : L'addition de différents types de 4-vecteurs (temps, espace, isotrope) ne conserve pas nécessairement leur genre commun éventuel. Réciproquement, un quadrivecteur peut être obtenu comme somme de quadrivecteurs de genre quelconque.

4. A côté des quadrivecteurs existent des *invariants*, dont nous avons rencontré plusieurs exemples, tels

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu \\
 A^2 &= A_\mu A^\mu, \quad \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = A_\mu B^\mu.
 \end{aligned}$$

On trouve également des opérateurs scalaires, tel le *dalembertien*

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \Delta \tag{3.34}$$

qui peut encore s'écrire

$$= \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu = \partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial_\mu{}^\mu, \text{ etc.} \tag{3.35}$$

où l'on a posé

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{3.36}$$

Que la dérivée par rapport aux coordonnées (*contravariantes*) constitue un opérateur quadrivectoriel *covariant* résulte du fait que, si $f(x)$ représente une fonction invariante arbitraire des x^μ , sa différentielle df étant elle-même invariante, on aura

$$df(x) = \partial_\mu f(x) dx^\mu. \quad (3.37)$$

Cette dernière relation ne pourra être invariante que si $\partial_\mu f$ est un covecteur (un quadrivecteur covariant).

5. Outre les invariants et les quadrivecteurs, on trouve encore des êtres mathématiques comportant plusieurs indices, que l'on peut additionner et multiplier par des scalaires (sous réserve qu'ils comportent le même nombre d'indices, disposés de manière analogue) et que l'on appellera des *tenseurs*, dès lors que dans une transformation de Lorentz ils se transforment comme

$$\Lambda^{\alpha'\beta'\gamma'\dots}_{\mu\nu\rho\dots} = L^{\alpha'}_{\alpha} L^{\beta'}_{\beta} L^{\gamma'}_{\gamma} \dots (L^{-1})^{\mu}_{\mu'} (L^{-1})^{\nu}_{\nu'} \dots \Lambda^{\alpha\beta\gamma\dots}_{\mu\nu\rho\dots} \quad (3.38)$$

Autrement dit, chaque indice tensoriel "possède" les propriétés de transformation d'un quadrivecteur : les composantes d'un tenseur se transforment comme un produit de composantes (soit contravariantes, soit covariantes) de quadrivecteurs [Appendice A].

A partir de tenseurs de même nature, comme par exemple $U^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}$ et $V^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}$, on peut former d'autres tenseurs, tels

$$\left\{ \begin{array}{l} a U^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} + b V^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} \\ U^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} \cdot V^{\lambda\sigma}_{\tau\rho\delta} \end{array} \right.$$

Un tenseur de rang n (à n indices tensoriels) peut être *contracté* sur deux de ses indices (l'un covariant, l'autre contravariant) pour donner un tenseur de rang $n - 2$; par exemple

$$\begin{array}{ccccc} U^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} & \rightarrow & U^{\mu\nu}_{\nu\beta\gamma} & \rightarrow & U^{\mu\nu}_{\nu\mu\gamma} \\ (\text{rang } 5) & & (\text{rang } 3) & & (\text{rang } 1) \end{array}$$

ou bien

$$U^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow U^{\mu\nu}_{\alpha\nu\gamma}, \text{ etc.}$$

Par *dérivation*, on obtient un tenseur de rang $n + 1$:

$$\begin{array}{cc} U^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} & \rightarrow & \partial_\lambda U^{\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} \\ (\text{rang } 5) & & (\text{rang } 6) \end{array}$$

Ajoutons encore que les *transpositions* d'indice fournissent encore d'autres tenseurs, de même rang; par exemple

$$U^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow U^{\nu\mu}{}_{\gamma\beta\alpha}.$$

Parmi les propriétés qui se conservent dans les transformations de Lorentz citons, outre le *rang* d'un tenseur, ses éventuelles propriétés de *symétrie* ou d'*antisymétrie* dans les permutations d'indices de même nature (c'est-à-dire soit contravariants, soit covariants).

6. Un tenseur particulièrement utile est le tenseur de Levi-Civita, défini par

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation paire de } 0123 \\ -1 & \text{si } \alpha\beta\gamma\delta \text{ est une permutation impaire de } 0123 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Il est aisé de se rendre compte que le tenseur ε est réellement un tenseur *si l'on se limite aux transformations de Lorentz propres*; sinon, le tenseur transformé change de signe. Etant donné un tenseur de composantes $T^{\mu}{}_{\nu}$, son déterminant sera donné par

$$\text{dét. } \mathbf{T} = \frac{1}{4!} \varepsilon^{\gamma\mu\rho} \varepsilon^{\delta\kappa\nu\sigma} T_{\gamma\delta} T_{\mu\kappa} T_{\nu\rho} T_{\sigma\lambda}.$$

A l'aide du tenseur métrique η , on peut également former les (pseudo-) tenseurs $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$, etc. Le terme "pseudo-" se rapporte au changement de signe des composantes de ε dans les transformations de Lorentz impropres.

7. La *covariance manifeste* des équations de la physique, c'est-à-dire l'invariance de *forme* dans les transformations de Lorentz, se traduira par des équations de nature tensorielle (ou spinorielle, dont nous n'avons pas parlé ici) dont de nombreux exemples seront rencontrés par la suite.

L'effet Doppler et le phénomène d'aberration

Une illustration de l'application de la covariance manifeste des lois de la physique est fournie par l'étude de l'effet Doppler relativiste et du phénomène (qui lui est lié) d'aberration : la fréquence d'une onde électromagnétique, selon qu'elle est observée dans le système de référence au repos de l'émetteur ou dans un référentiel galiléen animé d'une vitesse donnée, apparaît différente; en outre, la direction de propagation de la même onde est également différente pour les deux observateurs. Nous poserons ν_{obs} et $\nu_{\text{ém}}$ les fréquences respectivement observées dans un référentiel galiléen $\{O_{\text{obs}}, x, y, z\}$ et émise par une source située dans un autre référentiel galiléen $\{O_{\text{ém}}, x', y', z'\}$ animé par rapport au premier d'une vitesse v parallèle à Ox . De même, nous appellerons θ_{obs} l'angle formé par l'axe $O_{\text{obs}}x$ et le rayon lumineux observé, d'une part, et $\theta_{\text{ém}}$ celui formé par le rayon

émis et l'axe $O_{\text{ém}}x'$ d'autre part. Le problème est alors de relier ν_{obs} à $\nu_{\text{ém}}$, d'une part, et θ_{obs} à $\theta_{\text{ém}}$, d'autre part.

Remarquons d'abord qu'une onde électromagnétique en propagation dans le vide satisfait l'équation des ondes, $\square\varphi = 0$, où φ est soit le champ électrique, soit le champ magnétique de l'onde. Cette équation admet des solutions du type "onde plane"

$$\varphi(x) = A(k)e^{-ik \cdot x},$$

où k est nécessairement un quadrivecteur (par ailleurs arbitraire) en raison de l'invariance relativiste de l'équation des ondes : cette dernière propriété peut également être obtenue en remarquant que ce quadrivecteur d'onde est, dans l'espace de Minkowski, dirigé selon une génératrice du cône de lumière de sommet $O_{\text{ém}}$; autrement dit, selon un rayon lumineux issu de $O_{\text{ém}}$. Il en résulte que le 4-vecteur k est isotrope, $k^2 = 0$, propriété obligatoirement satisfaite si φ doit être solution de l'équation des ondes.

Cela étant, écrivons que la phase $k \cdot x$ de l'onde φ est un invariant de Lorentz, *i.e.*,

$$k_{\mu}x^{\mu} = k'_{\mu}x'^{\mu};$$

ou encore

$$k_0x^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k'_0x'^0 - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}', \quad (3.39)$$

soit, finalement

$$k_0[t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}] = k'_0[t' - \mathbf{n}' \cdot \mathbf{x}'] \quad (3.40)$$

avec $\mathbf{n} \equiv \mathbf{k}/k_0$, et où l'on a utilisé le caractère isotrope du 4-vecteur k , c'est-à-dire la relation $k^{02} = \mathbf{k}^2$. Le vecteur \mathbf{k} (resp. \mathbf{k}') peut être choisi dans le plan $xO_{\text{obs}}y$ (resp. dans le plan $x'O_{\text{ém}}y'$), de sorte que θ_{obs} et $\theta_{\text{ém}}$ sont alors donnés par² [Fig. 3.4].

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = kx \cos \theta_{\text{obs}} + ky \sin \theta_{\text{obs}}$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' = k'x' \cos \theta_{\text{ém}} + k'y' \sin \theta_{\text{ém}}.$$

Dans ces conditions, la relation (3.40) se réécrit

2. Dans la suite de ce paragraphe x et k ne désigneront plus des 4-vecteurs mais les normes de 3-vecteurs.

$$\begin{aligned}
 k_0[t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}] &= k'_0 [t' - \mathbf{n}' \cdot \mathbf{x}'] \\
 &= tk'_0 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{v \cos \theta_{ém}}{\sqrt{1-v^2}} \right] \\
 &\quad - xk'_0 \left[\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\cos \theta_{ém}}{\sqrt{1-v^2}} \right] \\
 &\quad - yk'_0 \sin \theta_{ém} \\
 &= k_0 t - kx \cos \theta_{obs} - yk_0 \sin \theta_{obs}.
 \end{aligned}$$

Identifiant maintenant les coefficients de t , x et y dans cette dernière expression, il vient

$$\begin{aligned}
 k_0 \sin \theta_{obs} &= k'_0 \sin \theta_{ém} \\
 k_0 &= \frac{k'_0}{\sqrt{1-v^2}} [1 + v \cos \theta_{ém}] \\
 k_0 \cos \theta_{obs} &= k'_0 \frac{v + \cos \theta_{ém}}{\sqrt{1-v^2}}.
 \end{aligned}$$

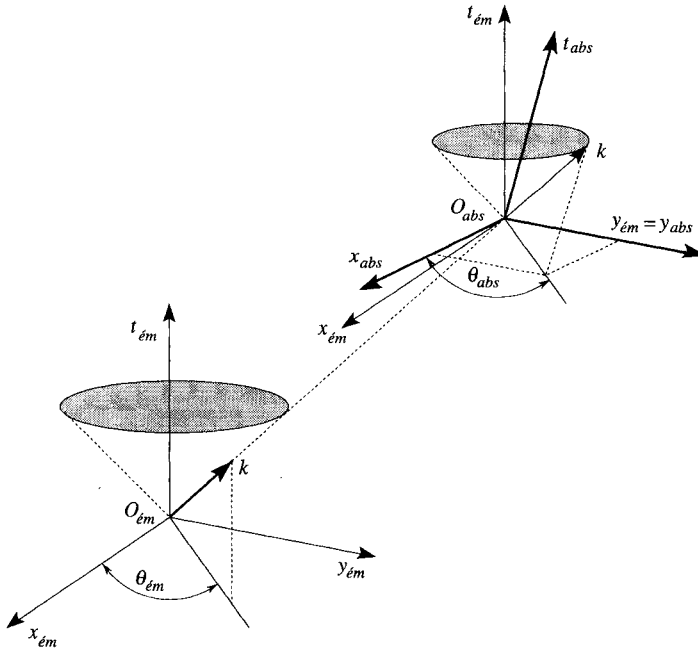


Figure 3.4 : L'effet Doppler relativiste et le phénomène d'aberration (diagramme d'espace-temps).

Ces équations conduisent immédiatement aux relations recherchées

$$\operatorname{tg}\theta_{\text{obs}} = \frac{\sin \theta_{\text{ém}} \cdot \sqrt{1-v^2}}{v + \cos \theta_{\text{ém}}} \quad (3.41a)$$

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{\nu_{\text{ém}}}{\sqrt{1-v^2}} [1 + v \cos \theta_{\text{ém}}] ; \quad (3.41b)$$

les relations analogues fournissant les grandeurs liées à la source en termes des grandeurs observées s'obtiennent sans difficulté en effectuant les substitutions : obs \longleftrightarrow ém, $v \longleftrightarrow -v$.

A la limite non relativiste, i.e. lorsque $v \ll 1$, l'expression (3.41b) se réduit à la suivante :

$$\nu_{\text{obs}} \approx \nu_{\text{ém}} [1 + v \cos \theta_{\text{ém}}] ,$$

qui n'est autre que l'expression usuelle de l'effet Doppler non relativiste. La relation (3.41a) représente un *effet d'aberration* tandis que la (3.41b), qui traduit l'*effet Doppler relativiste* proprement dit, présente quelques cas particuliers importants. Lorsque $\theta_{\text{obs}} = 0$ ou $\theta_{\text{obs}} = \pi$, l'effet Doppler est purement *longitudinal*, la source se meut vers l'observateur ou, au contraire, s'en éloigne. Dans le premier cas, on a

$$\nu_{\text{obs}} = \nu_{\text{ém}} \left[\frac{1+v}{1-v} \right]^{1/2} > \nu_{\text{ém}} ,$$

c'est-à-dire un *bleuissement* apparent de la source. Dans le second cas, où la source s'éloigne de l'observateur, on obtient

$$\nu_{\text{obs}} = \nu_{\text{ém}} \left[\frac{1-v}{1+v} \right]^{1/2} < \nu_{\text{ém}} ,$$

c'est-à-dire un *rougissement*³ apparent de la source. Cependant, lorsque $\theta_{\text{obs}} = \pi/2$, c'est-à-dire lorsque la ligne de visée est perpendiculaire au mouvement relatif, il vient

$$\nu_{\text{obs}} = \frac{\nu_{\text{ém}}}{\sqrt{1-v^2}} ,$$

un effet qui est spécifiquement relativiste – qui n'a pas d'analogue non relativiste – l'effet Doppler *transverse*.

La description cinématique du mouvement d'une particule

Dans l'espace-temps, le mouvement d'une particule soumise à une force quelconque est décrit complètement par la donnée d'une courbe, par la donnée

3. En français "redshift".

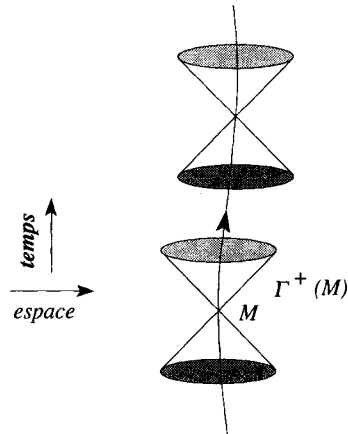


Figure 3.5 : Courbe du genre temps. Une courbe du genre temps est contenue dans tout cône de lumière dont le sommet est situé sur elle.

de sa trajectoire spatio-temporelle, c'est-à-dire par sa *ligne d'univers* : il en est exactement de même dans l'espace de Minkowski aussi bien que dans l'espace-temps newtonien.

Une telle trajectoire d'espace-temps [Fig. 3.5] peut être décrite paramétriquement

$$x^\mu = x^\mu(\xi),$$

où ξ est un paramètre *arbitraire*. Bien entendu, on peut toujours choisir $\xi = x^0/c = t$; auquel cas, on retrouve bien la forme usuelle

$$\begin{cases} x^0 & = ct \\ \mathbf{x} & = \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Cependant, contrairement au cas newtonien où toutes les trajectoires d'espace-temps sont admissibles – sous réserve, toutefois, qu'elles ne remontent pas le cours du temps [Fig. 3.6] –, les trajectoires relativistes sont astreintes à être du *genre temps* [Fig. 3.7]. Cela signifie que, pour chaque point M de la trajectoire d'espace-temps, la trajectoire future se trouve entièrement située à l'intérieur de la nappe future du cône $\Gamma(M)$.

La raison de cette restriction, qui est l'expression de la *causalité*, est la suivante. Si l'on considère un point M' très voisin de M [Fig. 3.7], la vitesse moyenne avec laquelle la particule est passée de M à M' est $\Delta\mathbf{x}/\Delta t$ et doit être inférieure à celle de la lumière. Il s'ensuit que le quadrivecteur MM' est toujours situé à l'intérieur de $\Gamma(M)$ et est donc du genre temps.

Cette propriété des trajectoires possibles d'être du genre temps va se traduire sur les quadrivecteurs tangents à la trajectoire : ils devront tous être du genre temps. Un tel quadrivecteur, soit

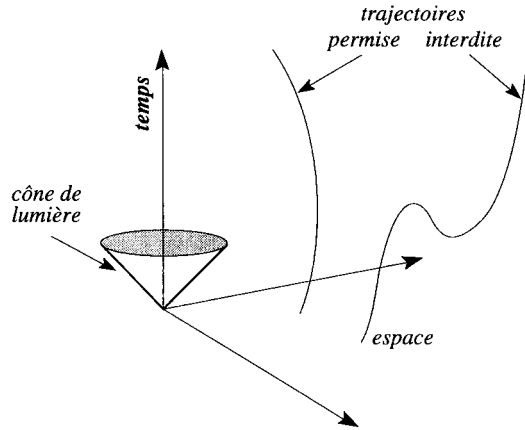


Figure 3.6 : Causalité des trajectoires. Elle se traduit par le fait qu'elles sont nécessairement du genre temps.

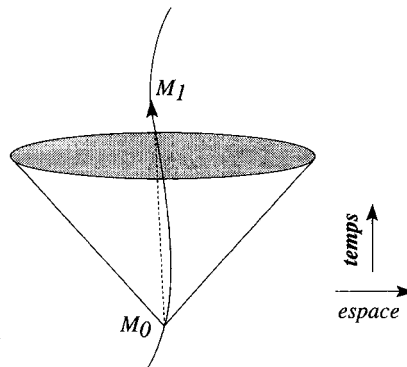


Figure 3.7 : Trajectoire du genre temps. La vitesse moyenne pour aller d'un point quelconque de la trajectoire à un autre, arbitraire, doit nécessairement être inférieure à la vitesse de la lumière. Il s'ensuit que la quadrivitesse (cas limite où les deux points sont confondus) est du genre temps.

$$u^\mu(\xi) = \frac{dx^\mu}{d\xi}$$

devra donc satisfaire à la condition

$$u^\mu(\xi)u_\mu(\xi) = \frac{dx_\mu}{d\xi} \frac{dx^\mu}{d\xi} = \frac{ds^2}{d\xi^2} > 0.$$

Etant tangent à la trajectoire, le quadrivecteur $u^\mu(\xi)$ sera, par définition, une *quadrivitesse*. De manière analogue, on définira une *quadri-accélération* par

$$\gamma^\mu(\xi) = \frac{du^\mu(\xi)}{d\xi} = \frac{d^2x^\mu(\xi)}{d\xi^2}. \quad (3.42)$$

A priori le paramètre ξ ne possède pas de signification physique directe quoique, à la rigueur, on puisse le considérer comme une échelle de temps quelconque. En fait, parmi tous les paramétrages possibles d'une trajectoire d'espace-temps, il en est un qui admet une signification physique immédiate. Il s'agit du paramétrage défini par l'arc de (pseudo-) longueur de la trajectoire, dont l'élément infinitésimal est ds^2 . Plus précisément, on utilisera le paramétrage défini par ds^2/c^2 , qui possède alors les dimensions d'un temps et l'on posera

$$d\tau^2 = ds^2/c^2. \quad (3.43)$$

Le paramètre τ s'appelle le *temps propre*. C'est un invariant qui possède donc la même valeur numérique dans tous les repères d'inertie, et qui représente le temps d'un observateur en co-mouvement avec la particule. Dans la suite, nous utiliserons le plus généralement un système d'unités dans lequel la vitesse de la lumière est prise pour unité de vitesse; il s'ensuivra qu'il n'y aura plus lieu de distinguer entre les paramètres τ et s , entre x^0 et t , etc.

Avec le paramétrage défini par le temps propre, la quadrivitesse est un quadrivecteur *unitaire*

$$\begin{cases} u^\mu &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ u^\mu u_\mu &= 1. \end{cases} \quad (3.44)$$

En dérivant par rapport à τ la seconde de ces égalités, il vient

$$u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = u_\mu \gamma^\mu = 0; \quad (3.45)$$

autrement dit, la quadri-accélération est toujours orthogonale à la quadri-vitesse. En outre, puisque u^μ est un quadrivecteur du genre temps, γ^μ , qui lui est orthogonal, est un quadrivecteur du genre espace [Fig. 3.8].

Exemple 1 : Considérons le cas d'une particule libre; son mouvement est décrit par une droite du genre temps dans l'espace de Minkowski, d'équation

$$x^\mu(\tau) = u^\mu \cdot (\tau - \tau_0) + x_0^\mu \quad (3.46)$$

dans un système de coordonnées lorentziennes arbitraires. Dans l'équation (3.46), x_0^μ est un quadrivecteur arbitraire et τ_0 un temps propre quelconque tel que

$$x^\mu(\tau_0) = x_0^\mu.$$

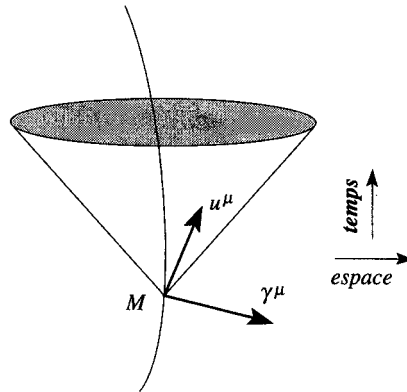


Figure 3.8 : Genre des grandeurs cinématiques. La quadrivitesse est du genre temps (causalité), tandis que la quadri-accelération, qui lui est orthogonale, est du genre espace.

Exemple 2 : Le mouvement décrit par les relations

$$x^0(\xi) = \tau_0 \operatorname{sh} \xi, \quad x^1 = \tau_0 \operatorname{ch} \xi, \quad x^2 = x^3 = 0$$

représente bien une trajectoire du genre temps car la 4-vitesse correspondante

$$u^0(\xi) = \tau_0 \operatorname{ch} \xi, \quad u^1(\xi) = \tau_0 \operatorname{sh} \xi, \quad u^2 = u^3 = 0$$

est bien du genre temps : $u^\mu(\xi)u_\mu(\xi) = \tau_0^2 > 0$. De même, la quadri-accelération est donnée par

$$\begin{aligned} \gamma^0(\xi) &= \tau_0 \operatorname{sh} \xi = x^0(\xi), \quad \gamma^1(\xi) = \tau_0 \operatorname{ch} \xi = x^1(\xi) \\ \gamma^2 &= \gamma^3 = 0. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\gamma_\mu u^\mu = 0$.

Revenons maintenant au temps propre. La relation (3.44) donne

$$dt = u^0 d\tau. \quad (3.47)$$

Comme, d'autre part, [Eq. (3.43)]

$$\frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{d\mathbf{x}^2}{dt^2} = 1 - \mathbf{v}^2 \quad (3.48)$$

on a encore

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}. \quad (3.49)$$

On trouverait de même

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (3.50)$$

(dans un système d'unités où $c \neq 1$, il faut remplacer les facteurs \mathbf{v} par \mathbf{v}/c).

A la limite non relativiste, lorsque $v \ll c$, on obtient

$$\begin{cases} u^0 \approx 1, & \mathbf{u} \approx \mathbf{0} \\ dt \approx d\tau \end{cases}$$

Si l'on choisissait une définition où u^μ est homogène à une vitesse, on aurait ⁴

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{v} .$$

La dynamique relativiste; $E = mc^2$

Jusqu'à présent, nous avons redéfini une nouvelle cinématique, en imposant que les changements de systèmes d'inertie conservent les lois de l'électromagnétisme [il nous restera à vérifier (Chap. 5) que les équations de Maxwell – lesquelles constituent la formulation analytique de ces lois – peuvent effectivement se mettre sous forme manifestement covariante et satisfont donc bien au principe de relativité]. Dans ces conditions, les lois de la dynamique newtonienne, covariantes dans le groupe de Galilée, ne le seront plus dans le groupe de Lorentz; elles ne satisferont donc pas le principe de relativité d'Einstein et nous devons alors les modifier en conséquence.

En physique newtonienne, la loi fondamentale de la dynamique constitue un *postulat supplémentaire* (la seconde loi de Newton; voir le chapitre 1) que l'on doit ajouter aux postulats de nature cinématique, comme le principe d'inertie ou le principe de relativité. En relativité, il en est évidemment de même : l'analogue de la seconde loi de Newton constitue un postulat que nous pourrions poser *a priori*.

Pour trouver la forme relativiste de la loi fondamentale de la dynamique, nous devons utiliser les grandeurs cinématiques disponibles pour décrire la trajectoire d'espace-temps, le principe de relativité en écrivant des relations manifestement covariantes, le fait qu'à faible vitesse on doive retrouver les résultats newtoniens usuels et, enfin, le critère de simplicité.

La première question qui se pose est la suivante : comment généraliser la notion d'impulsion et celle d'énergie? En physique non relativiste, ce sont des *grandeurs qui se conservent dans les chocs* de particules ou qui sont des *intégrales premières* du mouvement. On sait, en effet [H. Goldstein (1980), ou L. Landau et E. Lifschitz], que ces lois de conservation résultent de l'*homogénéité de l'espace* et de l'*uniformité du temps*, propriétés également vraies dans l'espace de Minkowski. Cependant, ces lois de conservation *ne peuvent pas* être transposées telles quelles : aussi bien l'énergie cinétique d'une particule libre $1/2 mv^2$ que son impulsion mv n'ont pas la même forme *après* transformation de Lorentz. Il faut donc commencer par modifier les relations qui lient impulsion et vitesse, énergie et vitesse. Or, le seul être mathématique qui ne fasse intervenir que la dérivé première par rapport au temps

4. La composante 0 de u^μ possède une limite singulière et ne doit pas être considérée.

est la quadrivitesse u^μ . De même, la généralisation *la plus simple* du quadrivecteur newtonien (c'est-à-dire pour le groupe de Galilée) constitué par (E, \mathbf{p}) est une quadri-impulsion que nous dénoterons p^μ . Aussi *la seule* possibilité de lien entre p^μ et u^μ est-elle un lien de proportionnalité

$$p^\mu = m_0 u^\mu \quad (3.51)$$

qu'il reste à interpréter et à vérifier expérimentalement (ou, du moins, ses conséquences).

Considérons d'abord les composantes spatiales \mathbf{p} . On a

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (3.52)$$

$$= m_0 \mathbf{v} + \frac{m_0 \mathbf{v} \mathbf{v}^2}{2c^2} + m_0 \mathbf{v} O(\mathbf{v}^2/c^2) \quad (3.53)$$

où nous avons rétabli les facteurs c dans la dernière équation, sur laquelle on voit désormais que, pour $\mathbf{v}^2 \ll c^2$, on obtient bien la limite newtonienne usuelle $\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v}$; m_0 représente donc bien la masse.

Examinons maintenant la composante temporelle p^0 ; on a

$$p^0 = m_0 u^0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (3.54)$$

$$= m_0 + \frac{m_0 \mathbf{v}^2}{2} + m_0 O(\mathbf{v}^4) \quad (3.55)$$

où, en rétablissant les facteurs c et en multipliant les deux membres de cette dernière équation par c^2 , il vient

$$p^0 c^2 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 + m_0 c^2 O(\mathbf{v}^4/c^4). \quad (3.56)$$

A l'approximation non relativiste, lorsque $\mathbf{v}^2 \ll c^2$, cette dernière expression se réduit à

$$p^0 c^2 \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 \quad (3.57)$$

qui montre que p^0 (en unités $c = 1$; ou $p^0 c^2$ en unités où $c \neq 1$) doit être interprété comme une énergie, et même comme *l'énergie d'une particule libre*. En outre, la relation (3.56) confirme clairement l'interprétation de la constante m_0 comme masse de la particule. Revenons au cas relativiste et à l'équation (3.54). Si nous

nous plaçons dans un système de référence *au repos* par rapport à la particule, donc si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, p^0 se réduit à

$$p^0 = E = m_0 c^2 . \quad (3.58)$$

Autrement dit, alors que dans le cas classique, le zéro de l'énergie d'une particule libre est arbitraire, la relativité en fixe la valeur. Cependant, la relation (3.58) représente beaucoup plus qu'une convention fixant le zéro de l'énergie; elle montre que *la masse d'un corps possède un véritable contenu énergétique*. C'est cette équivalence entre masse et énergie qui va bouleverser fondamentalement les lois de la gravitation. La relation (3.58) [ou la (3.59), plus bas] est très bien vérifiée expérimentalement dans une multitude de phénomènes physiques : réactions nucléaires, collisions entre particules élémentaires, etc.

Les relations (3.52) et (3.54) peuvent encore s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{p} &= m\mathbf{v} \\ E &= mc^2 \end{cases}$$

où l'on a posé

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \quad (3.59)$$

qui représente la *masse relativiste* d'une particule libre : alors que m_0 est la masse au repos – le contenu de matière de la particule – m est la masse en mouvement et l'on a toujours $m \geq m_0$.

A partir du quadrivecteur p^μ , on peut former l'invariant $p_\mu p^\mu$ dont il est facile de se rendre compte qu'il vaut m_0^2 ,

$$p_\mu p^\mu = m_0^2 , \quad (3.60)$$

qui s'écrit explicitement ainsi :

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^4 , \quad (3.61)$$

ce qui fournit la relation entre l'énergie et l'impulsion relativiste

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + \mathbf{p}^2} \quad (3.62)$$

très différente de la relation newtonienne $E = \mathbf{p}^2/2m_0$, à laquelle elle se réduit lorsque $c \rightarrow \infty$ et en éliminant l'énergie de masse.

L'équation du mouvement d'une particule libre s'écrit donc

$$m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0. \quad (3.63)$$

Si l'on a affaire à un problème de *collision* ponctuelle de deux particules de quadri-impulsions p_1^μ et p_2^μ , la quantité $p_1^\mu + p_2^\mu$ se conservera et l'on aura alors ⁵

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu \quad (3.64)$$

où les p'^μ représentent les quadri-impulsions après collision.

Venons-en maintenant à la dynamique relativiste proprement dite, c'est-à-dire à l'intervention de forces, d'interactions. Comme dans le cas newtonien, nous supposons – c'est un fait empirique – que les positions et les vitesses initiales d'une particule suffisent à déterminer complètement son mouvement, c'est-à-dire sa trajectoire d'espace-temps. Dans ces conditions, la loi de la dynamique relativiste *la plus simple* mathématiquement sera constituée par une équation différentielle du second ordre. En outre, si nous exigeons – comme dans le cas newtonien – que la force soit génératrice du changement de l'impulsion, alors nous devons poser

$$\frac{dp^\mu(\tau)}{d\tau} = f^\mu(x^\lambda, p^\lambda) \quad (3.65)$$

où $f^\mu(x^\lambda, p^\lambda)$ sera la *quadri-force*. C'est le seul type d'équation manifestement covariante que nous puissions avoir, compte tenu des hypothèses effectuées. Il reste encore à interpréter f^μ . Il est aisé de vérifier que les composantes spatiales de l'équation (3.65) fournissent bien la seconde loi de Newton, après passage à l'approximation non relativiste $v^2 \ll c^2$. La composante 0 se réduit, à cette même approximation, à

$$\frac{dE}{d\tau} = f^0, \quad (3.66)$$

qui montre que f^0 doit être interprétée comme la *puissance*.

Si l'on différencie les deux membres de l'équation (3.60), il vient alors

$$p_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} = 0, \quad (3.67)$$

de sorte que, multipliant la loi de la dynamique relativiste (3.65) par p^μ , on trouve

$$p_\mu f^\mu = 0. \quad (3.68)$$

Cette relation permet de relier f^0 aux autres composantes f^i de la quadri-force

$$f^0 = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{p}}{E} \equiv \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.69)$$

En outre, elle montre qu'en relativité, *les forces dépendent toujours des vitesses*, contrairement au cas newtonien.

5. Toute la cinématique des collisions entre particules élémentaires peut être trouvée dans les ouvrages complémentaires de R. Hagedorn (1964) et de E. Byckling et K. Kajantie (1973).

Un exemple de force relativiste est celui de la *force de Lorentz* à laquelle est soumise une particule chargée plongée dans un champ électromagnétique; elle est de la forme générale

$$f^\mu = \varphi^\mu{}_\nu p^\nu, \quad (3.70)$$

où $\varphi^\mu{}_\nu$ est un tenseur antisymétrique lié au champ électromagnétique de manière directe [Chap. 5]. On vérifie alors facilement que la relation (3.68) est bien satisfaite.

Ajoutons que la propriété précédente (orthogonalité de la quadri-force et de l'impulsion) ne serait plus vérifiée si l'on avait affaire à des particules de masse variable.

Le cas de systèmes de particules relativistes en interaction est plus complexe car les actions doivent généralement se propager à des vitesses inférieures à celle de la lumière. Il en résulte alors des systèmes d'équations intégral-différentielles, non locales, ou encore des systèmes différentiels où l'interaction est véhiculée par des *champs* classiques, lesquels obéissent à d'autres équations [J. Rzewuski (1960); A.O. Barut (1965)]. En fait, la dynamique relativiste ne prend une forme réellement satisfaisante que dans le cadre de la théorie quantique des champs [voir, par exemple, C. Itzykson et J.P. Zuber (1980)].

L'espace de Minkowski en coordonnées curvilignes

Pour décrire les différents objets géométriques (quadrivecteurs, tenseurs, spineurs, etc.) susceptibles de représenter des grandeurs physiques, nous avons jusqu'à présent utilisé des coordonnées lorentziennes, donc rectilignes et orthogonales au sens de la (pseudo-) métrique de l'espace de Minkowski. Cependant, ces objets géométriques sont des êtres mathématiques définis indépendamment de tout système de coordonnées, lorentziennes ou non. Certes, en Relativité Restreinte les coordonnées lorentziennes (qui correspondent *physiquement* au temps et à l'espace d'observateurs galiléens) s'imposent d'elles-mêmes et, en général, on n'a nul besoin d'utiliser des coordonnées curvilignes quelconques. Néanmoins, l'introduction de ce type de coordonnées présente l'avantage d'introduire des techniques extrêmement voisines de celles utilisées en Relativité Générale et donc d'en faciliter la compréhension.

1. Soit M un point de l'espace de Minkowski et $\{x^\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$ des coordonnées curvilignes quelconques. $\{e_\mu\}$ désigne un ensemble de quatre quadrivecteurs linéairement indépendants tangents aux lignes-coordonnées. La *base* formée par les e_μ n'est pas nécessairement orthogonale et les e_μ ne sont pas nécessairement unitaires. En outre, la base $\{e_\mu\}$ est constituée par un quadrivecteur du genre temps et trois quadrivecteurs du genre espace; cela n'a rien d'obligatoire, mais si l'on veut pouvoir trouver un sens physique direct aux lignes-coordonnées, il est nécessaire qu'il en soit ainsi : la ligne-coordonnée du genre temps représente alors la trajectoire d'univers d'un *observateur accéléré* [Fig. 3.9].

Le problème que nous voulons résoudre est le suivant : étant donnés deux points d'espace-temps M et M' , auxquels sont attachés deux repères $\{e_\mu\}$ et $\{e'_\mu\}$ et

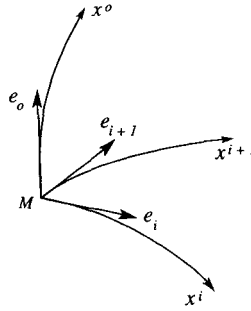


Figure 3.9 : Coordonnées curvilignes et repère associé.

des systèmes de coordonnées $\{x^\mu\}$ et $\{x'^\mu\}$, déterminer le passage d'un repère à l'autre pour les composantes des tenseurs attachés aux diverses grandeurs physiques considérées. Ce problème revêt des aspects qui, évidemment, sont liés. D'une part, il faut savoir changer de coordonnées en un point M donné et, d'autre part, savoir comparer (*transporter*) un tenseur (ou plutôt ses composantes) en M et en M' . Subsidièrement, comment écrire les lois de la physique de telle sorte qu'elles revêtent le même aspect (i.e. qu'elles soient manifestement *covariantes*) dans des changements arbitraires de systèmes de coordonnées?

2. Commençons par le premier problème et étudions le changement de système de coordonnées en M . On passe de la base $\{e_\mu\}$ à la base $\{e'_\mu\}$ en M à l'aide de relations du type

$$e'_\mu = a_\mu{}^\nu e_\nu \quad (3.71)$$

$$e_\mu = a'_{\mu}{}^\nu e'_\nu, \quad (3.72)$$

qui entraînent immédiatement la contrainte

$$a_\mu{}^\nu a'_\nu{}^\lambda = \delta_\mu{}^\lambda. \quad (3.73)$$

Considérant maintenant un point infiniment voisin $M + dM$, on a

$$dM = e_\mu dx^\mu \quad (3.74)$$

$$= e'_\mu dx'^\mu \quad (3.75)$$

avec $e_\mu = \partial_\mu M$ et $e'_\mu = \partial'_\mu M$. La comparaison de ces deux relations montre que

$$e'_\mu = \partial_\nu M \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = e_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \quad (3.76)$$

d'où il découle que

$$a_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \quad (3.77)$$

$$a'_{\mu}{}^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad (3.78)$$

et donc que

$$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \cdot \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \delta_{\lambda}{}^{\nu} \quad (3.79)$$

A ce stade, une convention extrêmement utile doit être indiquée et nous l'emploierons souvent dans la suite. Afin de ne pas spécifier chaque fois la nouvelle variable (la nouvelle coordonnée), nous utiliserons des *indices primés*; ainsi, au lieu d'écrire $a_{\mu}{}^{\nu}$ et $a'_{\mu}{}^{\nu}$ nous écrirons plutôt $a_{\mu'}{}^{\nu}$ et $a_{\mu}{}^{\nu'}$. Avec cette convention, on écrira, par exemple, la relation (3.71) comme

$$\mathbf{e}_{\mu'} = a_{\mu'}{}^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}, \quad (3.80)$$

et la relation (3.73) comme

$$a_{\mu}{}^{\nu'} a_{\nu'}{}^{\lambda} = \delta_{\mu}{}^{\lambda}. \quad (3.81)$$

A partir de l'invariant $ds^2 = d\mathbf{M}^2 \equiv d\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M}$, on trouve que

$$ds^2 = \mathbf{e}_{\mu} dx^{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} dx^{\nu} \quad (3.82)$$

$$= \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (3.83)$$

et une relation semblable avec les nouvelles variables et les nouveaux vecteurs de base. Comme, par définition, le *tenseur métrique* $g_{\mu\nu}$ est donné par

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{e}_{\mu} \cdot \mathbf{e}_{\nu}, \quad (3.84)$$

il s'ensuit que la loi de transformation du tenseur métrique est

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\mu}} \cdot \frac{\partial x^{\sigma'}}{\partial x^{\nu}} g_{\lambda'\sigma'} \quad (3.85)$$

$$g_{\mu\nu'} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\mu'}} \cdot \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x^{\nu'}} g_{\lambda\sigma}. \quad (3.86)$$

Les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique η représentent la géométrie de l'espace de Minkowski dans un système de coordonnées déterminé; celle-ci peut varier et l'on doit donc *toujours* pouvoir trouver un système de coordonnées qui les ramène à $\eta_{\mu\nu}$.

3. Par définition dx^μ se transforme, dans un changement de coordonnées curvilignes, comme un quadrivecteur *contravariant* :

$$dx^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (3.87)$$

les coefficients de la transformation se réduisant aux transformations de Lorentz si l'on utilise des coordonnées lorentziennes.

De même, si $\varphi(x)$ désigne une fonction scalaire, alors $\partial_\mu \varphi(x)$ se transforme comme les composantes d'un quadrivecteur *covariant*; on a, en effet,

$$\partial_\mu \varphi(x) = \frac{\partial \varphi\{x(x')\}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\mu} \quad (3.88)$$

$$= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^\mu} \partial_{\nu'} \varphi'(x'); \quad (3.89)$$

c'est-à-dire, encore,

$$\partial_{\mu'} \varphi' = \partial_\nu \varphi \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu'}}. \quad (3.90)$$

Le tenseur métrique se comporte donc bien comme un tenseur deux fois covariant, relativement à ces transformations. Un quadrivecteur \mathbf{A} aura pour composantes contra- et co-variantes A^μ et A_ν , dans la base des $\{e_\mu\}$:

$$\mathbf{A} = A^\mu \cdot e_\mu \quad (3.91)$$

$$A_\mu = \mathbf{A} \cdot e_\mu. \quad (3.92)$$

exactement comme dans le cas lorentzien habituel. Il faut noter que les relations précédentes sont valables seulement en un point donné. Etant donnés deux quadrivecteurs \mathbf{A} et \mathbf{B} quelconques, leur produit scalaire sera donné par

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = e_\mu \cdot e_\nu A^\mu B^\nu \quad (3.93)$$

$$= g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (3.94)$$

de la même manière que précédemment. On aura également

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (3.95)$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \quad (3.96)$$

où $g^{\mu\nu}$ est "l'inverse" de $g_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu} \frac{\text{mineur de } g_{\mu\nu}}{\text{déterminant de } g_{\mu\nu}} \quad (3.97)$$

avec

$$g_{\mu\alpha} \cdot g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu. \quad (3.98)$$

La covariance manifeste des lois de la physique va donc également trouver à s'exprimer au moyen de tenseurs, etc., ou d'égalités entre tenseurs, etc., par rapport aux transformations de systèmes de coordonnées généraux.

Nous avons vu un peu plus haut que le gradient d'une fonction scalaire est bien un quadrivecteur; en est-il de même du gradient d'un quadrivecteur? D'un tenseur? Pour le voir, examinons la différentielle d'un quadrivecteur \mathbf{A} :

$$d\mathbf{A} = d\{A^\mu \mathbf{e}_\mu\} \quad (3.99)$$

ou encore

$$d\mathbf{A} = dA^\mu \cdot \mathbf{e}_\mu + A^\mu d\mathbf{e}_\mu \quad (3.100)$$

$$= \partial_\nu A^\mu dx^\nu \mathbf{e}_\mu + A^\mu d\mathbf{e}_\mu. \quad (3.101)$$

Dans le cas de coordonnées lorentziennes, $d\mathbf{e}_\mu = 0$ et $\partial_\nu A^\mu$ se comporte comme un tenseur de rang deux. Par contre, dans le cas de coordonnées curvilignes générales, $d\mathbf{e}_\mu \neq 0$ et ce terme supplémentaire va avoir pour conséquence la non-tensorialité de $\partial_\nu A^\mu$. On a, en effet, dans un nouveau système de coordonnées

$$\partial_\nu A^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A^\lambda(x\{x'\}) \right\} \quad (3.102)$$

$$= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \left\{ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} A^\lambda(x\{x'\}) \right\}. \quad (3.103)$$

On voit alors apparaître un terme supplémentaire, qui contient l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\lambda}, \quad (3.104)$$

qui serait nulle dans le cas de transformations de Lorentz.

A quoi cela est-il dû? Pour le voir, il suffit de remarquer que la variation de A^μ contient à la fois la variation due au transport du quadrivecteur \mathbf{A} , de \mathbf{M} en $\mathbf{M} + d\mathbf{M}$, et celle du repère $\{\mathbf{e}_\mu\}$. C'est pourquoi il convient de définir une notion covariante de dérivation, qui tienne compte de la variation *absolue* des vecteurs, des tenseurs, etc.

4. Nous définirons donc la *dérivée covariante* ∇_ν d'un quadrivecteur A^μ à l'aide de la relation suivante :

$$d\mathbf{A} \stackrel{\text{déf.}}{\equiv} \mathbf{e}_\mu \nabla_\nu A^\mu dx^\nu. \quad (3.105)$$

La structure même de cette relation montre clairement que

$$\nabla_\nu A^\mu = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \nabla_{\nu'} A^{\mu'}, \quad (3.106)$$

autrement dit, $\nabla_\nu A^\mu$ est bien un tenseur. Remarquons qu'une notation courante et très commode est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_\nu A^\mu \equiv A^\mu{}_{;\nu} \\ \partial_\nu A^\mu \equiv A^\mu{}_{,\nu} \end{array} \right. \quad (3.107)$$

$$(3.108)$$

Pour évaluer la dérivation covariante ∇_ν , il est nécessaire de calculer l'accroissement $d\mathbf{e}_\mu$ dans la base $\{\mathbf{e}_\mu\}$; soit

$$d\mathbf{e}_\mu = \omega_\mu{}^\nu \mathbf{e}_\nu \quad (3.109)$$

où $\omega_\mu{}^\nu$ est linéaire en dx^α ,

$$\omega_\mu{}^\nu = \Gamma_{\mu\alpha}^\nu dx^\alpha. \quad (3.110)$$

$\Gamma_{\mu\alpha}^\nu$ est la connexion – ou plutôt, les *symboles de connexion* – qui permet(tent) de *comparer* des directions en des points infiniment voisins et donc de comparer deux bases voisines.

En remplaçant ces dernières relations dans la définition (3.101), il vient successivement

$$d\mathbf{A} = \partial_\nu A^\mu dx^\nu \mathbf{e}_\mu + A^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu dx^\alpha \mathbf{e}_\nu \quad (3.111)$$

$$= \{ \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda \} \mathbf{e}_\mu dx^\nu, \quad (3.112)$$

où l'on est passé de la première égalité à la seconde en effectuant les substitutions d'indices : $\nu \rightarrow \mu$, $\alpha \rightarrow \nu$, $\mu \rightarrow \lambda$. Il vient alors

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu A^\lambda. \quad (3.113)$$

Il reste encore à évaluer les symboles de connexion $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$. Vérifions d'abord que les symboles de connexion sont *symétriques* par rapport aux deux indices inférieurs :

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\nu}^\mu. \quad (3.114)$$

Cela résulte de la définition (3.110) pour les $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, du fait que $\partial_\mu \mathbf{M} = \mathbf{e}_\mu$ et du théorème de Schwarz $\partial_\mu \partial_\nu \mathbf{M} = \partial_\nu \partial_\mu \mathbf{M}$. On a ainsi

$$\partial_\mu \partial_\nu \mathbf{M} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (3.115)$$

$$\partial_\nu \partial_\mu \mathbf{M} = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (3.116)$$

qui entraînent bien la symétrie des Γ . Pour calculer explicitement les Γ , il suffit de partir de la différentielle du tenseur métrique

$$dg_{\mu\nu} = d(\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu) \quad (3.117)$$

$$= \{ \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\mu\lambda} \} dx^\rho \quad (3.118)$$

$$= \partial_\rho g_{\mu\nu} dx^\rho; \quad (3.119)$$

ce qui entraîne l'égalité

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\mu\lambda}. \quad (3.120)$$

Changeons d'indices $\mu \rightarrow \rho$, puis $\nu \rightarrow \rho$; il vient

$$\Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda} = \partial_\mu g_{\rho\nu} \quad (3.121)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = \partial_\nu g_{\mu\rho}. \quad (3.122)$$

Effectuant la somme des deux premières relations et soustrayant la dernière, il vient, en utilisant la symétrie des Γ

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} &= \frac{1}{2} \{ \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \} \\ &= \Gamma_{\mu\nu,\rho} .\end{aligned}\quad (3.123)$$

Contractant maintenant cette dernière équation avec $g^{\alpha\rho}$, on obtient finalement

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \{ \partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu} \} .\quad (3.124)$$

Les $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ et $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ s'appellent les *symboles de Christoffel* de première et de seconde espèce, respectivement. On les dénote parfois

$$\Gamma_{\mu\nu,\rho} = [\mu\nu, \rho] \quad (3.125)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} .\quad (3.126)$$

On définira la *différentielle absolue* des composantes A^{μ} d'un quadrivecteur \mathbf{A} par comparaison de la différentielle

$$d\mathbf{A} = d(\mathbf{e}_{\mu} A^{\mu}) \quad (3.127)$$

et de $\mathbf{e}_{\mu} \nabla_{\nu} A^{\mu} dx^{\nu}$, c'est-à-dire par

$$\nabla A^{\mu} \equiv \nabla_{\nu} A^{\mu} dx^{\nu} .\quad (3.128)$$

Les considérations qui précèdent s'appliquaient à des contravecteurs. Pour les covecteurs, on obtient des résultats très analogues à l'aide de méthodes semblables. Ainsi, on trouve aisément

$$\nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} A_{\lambda} .\quad (3.129)$$

Pour un tenseur \mathbf{T} quelconque de composantes T^{\dots} , on obtiendra

$$\begin{aligned}\nabla_{\nu} T^{\dots} &= \partial_{\nu} T^{\dots} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\dots} T^{\lambda\dots} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\dots} T^{\dots\lambda} + \dots \\ &- \Gamma_{\nu}^{\lambda} T^{\dots\lambda} - \Gamma_{\nu}^{\lambda} T^{\dots\lambda} - \dots ;\end{aligned}\quad (3.130)$$

cela n'a rien d'étonnant puisqu'un tenseur peut être considéré, du moins du point de vue de ses propriétés de transformation, comme un produit (tensoriel) de quadrivecteurs.

En ce qui concerne le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, on trouve ainsi l'expression

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} g_{\mu\sigma} \equiv 0, \quad (3.131)$$

compte tenu de l'expression explicite pour les symboles de Christoffel de seconde espèce. C'est le *théorème de Ricci*.

5. Revenons maintenant à la covariance manifeste des équations de la physique dans les changements de coordonnées d'espace-temps généraux. En pratique, les indices lorentziens seront simplement changés en indices généraux et les dérivées partielles en dérivées covariantes. Par exemple, les équations de Maxwell s'écriront

$$\begin{cases} \nabla_{\nu} F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\mu} & (3.132) \\ \nabla_{\nu} * F^{\mu\nu} = 0, & (3.133) \end{cases}$$

tandis que les équations de base de l'hydrodynamique relativiste s'écrivent maintenant

$$\begin{cases} \nabla_{\mu} J^{\mu} = 0 & (3.132) \\ \nabla_{\nu} T_{\text{tot}}^{\mu\nu} = 0. & (3.135) \end{cases}$$

[Chap. 5].

6. Appliquons les résultats qui précèdent aux mouvements *inertiels*, c'est-à-dire à ceux d'observateurs galiléens. On pourrait partir de l'équation du mouvement

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = 0, \quad (3.136)$$

et passer à des coordonnées curvilignes arbitraires $\{x'^{\mu}\}$; il est cependant plus instructif de procéder autrement, à partir de leur définition en tant que mouvements *géodésiques* dans l'espace de Minkowski. Nous partirons donc de la définition des géodésiques passant par deux points donnés A et B

$$\delta \int_A^B d\tau = 0 \quad (3.137)$$

avec $d\tau = \{g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}\}^{1/2}$, en coordonnées arbitraires. Si ξ désigne un paramètre quelconque le long d'une géodésique (ici une droite du genre temps), on aura encore

$$\delta \int_A^B \frac{d\tau}{d\xi} d\xi = 0 \quad (3.138)$$

avec

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \left\{ g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\xi} \frac{dx^{\nu}}{d\xi} \right\}^{1/2}. \quad (3.139)$$

On a alors successivement

$$\begin{aligned} \delta \int_A^B d\tau = & \\ \int_A^B d\xi \left\{ \frac{1}{2} \frac{d\xi}{d\tau} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{d\tau} g_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\xi} \right) \right\} \delta x^\sigma & \\ + \frac{d\xi}{d\tau} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \delta x^\nu \Big|_B^A = 0. & \end{aligned} \quad (3.140)$$

Le dernier terme provient d'une intégration par parties et est nul, compte tenu de ce que les points A et B sont *fixés* (on recherche les géodésiques passant par A et par B). De la relation (3.140) et de l'arbitraire des variations δx^μ , il s'ensuit que

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\xi^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\xi} \frac{dx^\beta}{d\xi} - \frac{d\tau}{d\xi} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} \frac{dx^\mu}{d\xi} = 0; \quad (3.141)$$

et, en choisissant maintenant, c'est-à-dire après variation, un paramétrage du type $a\xi + b = \tau$, il vient

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \equiv \frac{\nabla u^\mu}{d\tau} = 0, \quad (3.142)$$

c'est-à-dire l'équation des géodésiques. Dans cette équation $\nabla u^\mu/d\tau$ est une dérivée covariante le long du mouvement.

EXERCICES

1. Soient \mathbf{K} et \mathbf{K}' deux repères galiléens animés l'un par rapport à l'autre d'une vitesse $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Soient $T^{\mu\nu}$ les composantes d'un tenseur dans le repère \mathbf{K} . Donner les composantes T'^{01} et T'^{23} dans le repère \mathbf{K}' . Donner les composantes $T'^0{}_1$ et $T'^2{}_3$.

2. Soit $A^{\mu\nu}$ un tenseur d'ordre 2. Montrer que $A^\mu{}_\mu = A_\mu{}^\mu$.

3. Soient A^μ et B^μ deux quadrivecteurs. Vérifier que les équations suivantes ne sont pas covariantes : (i) $A^\mu = 1/B^\mu$, (ii) $A^0 = B^1$, (iii) $A^0 B^1 = A^1 B^2$.

4. Soient $A^{\mu\nu}$ et $B^{\mu\nu\alpha}$ deux tenseurs. Montrer que $A_{\mu\nu} B^{\mu\nu\alpha}$ est un quadrivecteur.

5. Soit $T^{\mu\nu}$ un tenseur symétrique (resp. antisymétrique). Montrer que $T_{\mu\nu}$ l'est également.

6. Soient $S_{\mu\nu}$ et $A^{\mu\nu\alpha}$ deux tenseurs, respectivement symétrique et antisymétrique dans les indices μ et ν . Montrer que $S^{\mu\nu} A_{\mu\nu}{}^\alpha = 0$.

7. On considère dans \mathbf{R}^3 le tenseur $\Delta_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j$, avec $k_i k^i = 1$. Montrer que Δ_{ij} est un projecteur⁶. Sur quel sous-espace?

6. On rappelle qu'un projecteur P est une opération linéaire hermitienne, et telle que $P^2 = P$.

8. Soient u^μ et n^μ deux 4-vecteurs tels que $u^\mu n_\mu = 0$ et $u^\mu u_\mu = +1$. Lequel est du genre temps? Du genre espace? On pose $\Pi^{\mu\nu} = a u^\mu u^\nu + b n^\mu n^\nu + c \eta^{\mu\nu} + d[u^\mu n^\nu + u^\nu n^\mu]$. A quelles conditions ce tenseur est-il un projecteur? Sur quel sous-espace?

9. Dans \mathbf{R}^n , soient deux tenseurs $S^{\mu\nu}$ et $A^{\mu\nu}$ respectivement symétrique et antisymétrique. Combien possèdent-ils de composantes indépendantes?

10. Soit $K_{\mu\nu\alpha\beta}$ un tenseur symétrique en $(\mu\alpha)$ et antisymétrique en $(\nu\beta)$. Combien possède-t-il de composantes indépendantes?

11. Soit $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ un tenseur symétrique dans l'échange $(\mu\nu) \leftrightarrow (\alpha\beta)$, antisymétrique dans les échanges $\mu \leftrightarrow \nu$ ou $\alpha \leftrightarrow \beta$ et vérifiant $\sum R_{\mu(\nu\alpha\beta)} = 0$, où la somme est étendue aux permutations circulaires des indices (ν, α, β) . Les indices μ, ν, α, β varient de 1 à n .

(i) Soit $z_{\mu\nu}$ un tenseur symétrique. Vérifier que le tenseur $\{z_{\mu\alpha} z_{\nu\beta} - z_{\mu\beta} z_{\nu\alpha}\}$ satisfait aux conditions de symétrie de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$.

(ii) Calculer le nombre de composantes indépendantes du tenseur $R_{\mu\nu\alpha\beta}$.

(iii) Donner la forme la plus générale du tenseur $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, sachant que l'espace est isotrope et homogène.

12. Démontrer la relation $(L^{-1})^\nu_\mu = \eta_{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} L_\beta^\alpha$.

13. Montrer que le tenseur de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ est bien un tenseur lorsqu'on se limite aux transformations de Lorentz orthochrones. Comment ce tenseur se transforme-t-il dans les transformations T et/ou P ?

14. Calculer dans \mathbf{R}^3 l'expression $\varepsilon_{ijk} a^j b^k$, où a^j et b^k sont des 3-vecteurs.

15. Soient A^μ et B^μ deux 4-vecteurs et soit C^μ un pseudo-4-vecteur.

(i) Trouver tous les tenseurs d'ordre 2, symétriques formés à l'aide de A^μ , B^μ , C^μ , etc.

(ii) Idem mais antisymétriques.

16. Dans le plan euclidien $\mathbf{R}^2(O, x, y; \delta_{ij})$ on considère les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi. \end{cases}$$

(i) Indiquer les courbes-coordonnées et donner les e_r, e_ϕ correspondant à $x^r \equiv r$ et $x^\phi \equiv \phi$.

(ii) Trouver les composantes du tenseur métrique $g_{ij}(r, \phi)$ dans ce système de coordonnées.

(iii) En déduire les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k .

(iv) Calculer $\nabla_i \nabla^i A$ dans ce système de coordonnées, où A est un champ scalaire.

(v) Calculer $(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i) A$.

(vi) Mêmes questions qu'en (iv) et (v) lorsque A est un champ vectoriel de composantes A^i .

17. Mêmes questions en ce qui concerne les coordonnées sphériques dans \mathbf{R}^3 :

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \sin \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

18. Mêmes questions en ce qui concerne l'espace de Minkowski à deux dimensions d'espace et les coordonnées polaires relativistes :

$$\begin{cases} x^1 = \tau \cos \phi \operatorname{sh} \chi \\ x^2 = \tau \sin \phi \operatorname{sh} \chi \\ x^0 = \tau \operatorname{ch} \chi \end{cases}$$

[on se limitera à des points d'espace-temps situés à l'intérieur du cône $\Gamma^+(0)$].

19. On considère maintenant dans \mathbf{R}^3 un cylindre de rayon a et d'axe Oz . Sur ce cylindre on adopte les coordonnées (ϕ, z) suivantes :

$$\begin{cases} x = a \cos \phi \\ y = a \sin \phi \\ z = z. \end{cases}$$

(i) – (v) Mêmes questions qu'en **16**.

(vi) Ecrire l'équation des géodésiques.

20. On considère dans \mathbf{R}^3 une sphère de rayon a et de centre O .

(i) – (v) Mêmes questions qu'en **16**.

(vi) Mêmes questions qu'en **16** mais en utilisant les coordonnées polaires définies en **18** avec $a=r$.

(vii) Quelles sont les géodésiques de la sphère? Ecrire l'équation d'une géodésique quelconque. Ecrire puis résoudre l'équation des géodésiques.

21. Mêmes questions qu'en **20** mais en ce qui concerne la "pseudo-sphère" d'équation $x^{02} - x^2 = a^2$ ($a = \text{const.}$).

22. Dans l'espace de Minkowski, on considère les coordonnées

$$\begin{cases} \xi = t - x \\ \eta = t + x \\ y = y \\ z = z. \end{cases}$$

Calculer le tenseur métrique dans ce nouveau système de coordonnées. Calculer les nouveaux vecteurs de base en fonction des anciens. De quel genre sont les 4-vecteurs e_ξ et e_η ? Sont-ils orthogonaux?

23. Montrer que l'équation des géodésiques peut encore s'écrire

$$\frac{d}{d\tau} \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right] - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

CHAPITRE 4

La gravitation et la Relativité Restreinte

Dans tous les phénomènes de l'astronomie, la gravitation joue un rôle primordial. A grande distance, les forces de gravitation – quoique plus faibles que les forces électrostatiques – l'emportent sur ces dernières : la matière est électriquement neutre et les forces électrostatiques¹ sont écrantées; par contre, il n'existe pas de masse négative et la gravitation agit arbitrairement loin. On conçoit donc qu'en cosmologie par exemple, les forces de gravitation vont déterminer très largement l'évolution de l'Univers et, entre autres, celle du facteur d'échelle $R(t)$ qui la caractérise. Bien entendu, l'état de la matière (son mouvement, son énergie, sa composition, etc.) contribuera également à cette évolution, notamment dans la mesure où il influera sur la gravitation.

Ce point, fondamental, nécessite quelques explications. Si nous considérons un corps de masse M et de taille caractéristique R , nous pouvons à l'aide de la constante de gravitation G former une vitesse caractéristique

$$v \sim \left(\frac{GM}{R} \right)^{1/2}, \quad (4.1)$$

que l'on peut interpréter, par exemple, comme une "vitesse de libération". On conçoit alors que, lorsque cette vitesse va être de l'ordre de c , la vitesse de la lumière,

$$v \sim c \quad \text{ou} \quad \frac{GM}{Rc^2} \sim 1 \quad (4.2)$$

les *effets relativistes* vont jouer un rôle important dans la description théorique des phénomènes considérés. Le *paramètre gravitationnel* GM/Rc^2 peut encore être interprété comme étant égal au rapport de l'énergie potentielle gravitationnelle du système considéré à son énergie de masse :

1. Dans les planètes, il peut arriver que les forces électrostatiques soient comparables aux forces de gravitation [voir à ce sujet l'intéressant article de J.M. Lévy-Leblond (1969) et les références citées].

$$\frac{GM}{Rc^2} = \frac{\text{énergie potentielle}}{\text{énergie de masse}} = \frac{GM^2}{R} \cdot \frac{1}{Mc^2}. \quad (4.3)$$

Là encore, on se rend compte de la nécessité de disposer d'une *théorie relativiste de la gravitation* si l'on souhaite pouvoir considérer les phénomènes pour lesquels le paramètre gravitationnel n'est pas négligeable. La relation (4.3) montre également que les contributions énergétiques diverses à la masse M (et notamment l'état physique du système, en y incluant ses mouvements internes ou non) vont jouer un rôle important dans la théorie relativiste de la gravitation.

Le tableau 4.1 donne quelques ordres de grandeur du paramètre gravitationnel.

Objet	Masse	Taille	GM/Rc^2
Noyau	10^{-23} g	10^{-13} cm	10^{-38}
Atome	10^{-23} g	10^{-8} cm	10^{-43}
Homme	10^5 g	10^2 cm	10^{-25}
Terre	6×10^{27} g	6×10^8 cm	10^{-9}
Soleil	2×10^{33} g	7×10^{10} cm	10^{-6}
Galaxie	10^{44} g	10^{23} cm	10^{-7}
Naines Blanches	2×10^{33} g	10^9 cm	3×10^{-4}
Etoiles à neutrons	2×10^{33} g	10^6 cm	.3
Univers			$\lesssim 1$
Trous noirs (?)			1

Tableau 4.1 : Quelques valeurs du paramètre gravitationnel GM/Rc^2 .

On constate que les objets astrophysiques dont l'étude nécessite la connaissance de la Gravitation Relativiste sont les *étoiles à neutrons*, l'*Univers*, les (éventuels) *trous noirs*. L'étude de ces objets constitue l'*Astrophysique Relativiste*. Ajoutons encore que les théories relativistes de la gravitation prédisent toutes l'existence d'*ondes gravitationnelles*, non encore observées directement, et qui elles aussi ressortent de l'*Astrophysique Relativiste*.

Parmi les diverses possibilités théoriques d'une description relativiste de la gravitation, la Relativité Générale d'Einstein est la première (qui soit compatible avec l'expérience) et aussi la plus simple. A ce jour, il existe un grand nombre de théories concurrentes dont beaucoup ont déjà été éliminées par une précision accrue de tests classiques ou par de nouveaux tests ou de nouvelles données astrophysiques (notamment, celles fournies par le *pulsar double* PSR 1913+16). En outre, des arguments théoriques très divers vont dans le sens de la Relativité Générale.

Dans ce chapitre, nous allons examiner rapidement ce qu'apporte, ou peut apporter, le mariage de la gravitation newtonienne et de la Relativité Restreinte.

Un élément essentiel de la Relativité Restreinte est qu'à toute énergie est associée une masse ($E = mc^2$) et *réciroquement*. Il en découle que désormais *tout pèse!* La loi d'attraction universelle de Newton,

$$\mathbf{F} = -G \frac{mm'}{r^3} \mathbf{r}, \quad (4.4)$$

implique, en effet, l'attraction gravitationnelle de *toute* forme d'énergie, que celle-ci corresponde à une masse newtonienne usuelle, à de l'énergie électromagnétique ou à la gravitation elle-même ! Les conséquences de ce phénomène nouveau vont être très profondes et seront étudiées au chapitre 7. Nous allons cependant examiner quelques conséquences possibles de l'équivalence relativiste masse/énergie et de la gravitation, à l'aide de raisonnements approximatifs ; néanmoins, ces raisonnements permettent de mettre en lumière de manière simple les processus physiques à la base de la Relativité Générale. Nous examinerons donc successivement : (i) le décalage gravitationnel vers le rouge, (ii) la courbure des rayons lumineux, (iii) l'avance du périhélie de Mercure et (iv) la nécessité d'équations non linéaires pour décrire la gravitation relativiste.

Le décalage gravitationnel vers le rouge

Considérons un photon émis dans un champ de gravitation, par exemple à la surface d'une étoile, et observons-le à l'altitude z_1 au-dessus du point d'émission d'altitude z_0 [Fig. 4.1]. Le photon est émis avec une fréquence ν_0 . A cette fréquence ν_0 correspond une énergie $h\nu_0$ et donc une masse $m = h\nu_0/c^2$.

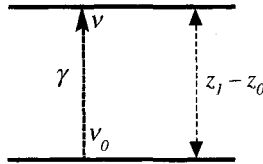


Figure 4.1 : Décalage vers le rouge de la fréquence d'un photon dans un champ gravitationnel. Le photon "dépense" de l'énergie, contre la gravitation, pour grimper à l'altitude z_1 .

Pour atteindre l'altitude z_1 , le photon doit dépenser contre la gravitation une énergie

$$\Delta W = m\Delta U, \quad (4.5)$$

où ΔU est la variation du potentiel de gravitation entre le point d'émission et le point d'observation du photon :

$$\Delta U = \frac{GM}{R+z_0} - \frac{GM}{R+z_1} \sim -\frac{GM}{R^2}(z_1 - z_0). \quad (4.6)$$

(M est, par exemple, la masse de l'étoile considérée). A l'altitude où le photon est observé, il possède donc une énergie E

$$E = E_0 - \Delta W, \quad (4.7)$$

où $E_0 = h\nu_0$ et $E = h\nu$. On a donc

$$\nu = \nu_0 \left[1 - \frac{|\Delta U|}{h} \right] < \nu_0 ; \quad (4.8)$$

il y a donc *rougissement* du photon. Le décalage spectral Z est alors donné par

$$Z = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta U}{c^2} = \frac{GM}{R^2 c^2} \cdot (z_1 - z_0) . \quad (4.9)$$

Ainsi, le décalage spectral d'un photon émis à la surface de l'étoile, comparé au cas de l'absence de gravitation, est donné par

$$Z = \frac{GM}{Rc^2} .$$

Bien entendu ce raisonnement n'est nullement rigoureux et n'a d'autre valeur qu'heuristique : le photon est sans masse, bien que tout se passe effectivement *comme si* son énergie/ c^2 était susceptible d'interaction gravitationnelle — on voit apparaître le fameux paramètre gravitationnel GM/Rc^2 comme on s'y attendait. Ce décalage spectral a effectivement été mesuré, sur Terre d'abord [R. V. Pound et G. A. Rebka (1960)], puis sur le rayonnement émis au centre du disque solaire [R. V. Pound et J. L. Snider (1964)], enfin dans les naines blanches [J. L. Greenstein, J. B. Oke et H. L. Shipman (1971)]. Toutes ces mesures confirment la relation précédente, relation que l'on peut également déduire de la Relativité Générale. Nous verrons que ce décalage spectral vers le rouge peut également être utilisé comme argument [A. Schild (1967)] en faveur d'un espace-temps courbe.

La courbure des rayons lumineux

Une autre conséquence de l'équivalence masse-énergie, de la "masse" du photon, est que celui-ci ne se propage plus exactement en ligne droite! Il est sensible à la présence de masses importantes, comme celle du Soleil.

La figure 4.2 montre comment la lumière émise par une étoile est déviée par le Soleil lorsqu'elle passe suffisamment près. Ainsi, en mesurant les positions d'une étoile à une époque où sa lumière est défléchiée par le Soleil et à une époque où ce n'est pas le cas, on doit pouvoir constater une déviation dans sa position angulaire apparente. C'est effectivement ce qu'on observe (les premières observations, par comparaison de plaques photos, datent de 1919) [J. Eisehaedt (1986)].

Nous allons maintenant évaluer l'ordre de grandeur de cet effet en imaginant que le photon possède bien une masse $h\nu/c^2$ et une impulsion $h\nu/c$. On a alors affaire à un simple problème de Kepler [voir la figure 4.3 pour les notations] et, en coordonnées polaires (φ, r) , l'équation de la trajectoire (hyperbolique) du photon soumis à l'attraction du Soleil est donnée par [voir, par exemple, L. Landau et E. Lifschitz ou H. Goldstein (1960)] :

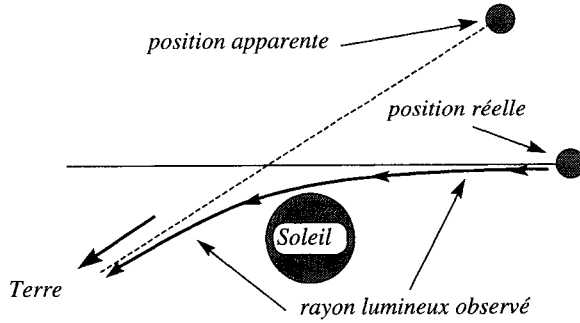


Figure 4.2 : Courbure des rayons lumineux au voisinage du Soleil.

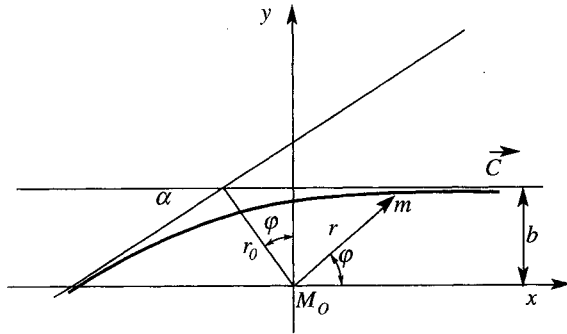


Figure 4.3 : Courbure des rayons lumineux au voisinage du Soleil. Notations utilisées dans le texte.

$$\varphi = \int_r^\infty \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\left[2m_\gamma \left[E - \frac{GM_\odot m_\gamma}{r} \right] - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2}}, \quad (4.10)$$

dont on déduit immédiatement la déviation $\delta\varphi$ pour un photon “rasant” la surface du Soleil :

$$\delta\varphi = 2\varphi_0 - \pi = \int_{R_\odot}^\infty \frac{\frac{L}{r^2} dr}{\left[2m_\gamma \left[E - \frac{GM_\odot m_\gamma}{r} \right] - \frac{L^2}{r^2} \right]^{1/2}}, \quad (4.11)$$

où L est le moment cinétique² du photon, $L = m_\gamma R_\odot c$, et où φ_0 est l’angle φ lorsque le photon est à la distance minimum du Soleil. D’autre part, l’énergie E étant conservée, on a encore

2. Le moment cinétique du photon est $L_\odot = bm_\gamma c$, où b est le paramètre d’impact. Strictement parlant $b \neq R_\odot$, mais comme la déviation est très faible, b est très peu différent de R_\odot . Il convient de se souvenir que la déviation indiquée sur la figure 4.2 est très fortement exagérée.

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{m_\gamma}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - \frac{GM_\odot m_\gamma}{r} \\
 &= \frac{m_\gamma b^2 c^2}{2R_\odot^2} - \frac{GM_\odot m_\gamma}{R_\odot}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Les équations (4.10) à (4.12) donnent finalement

$$\delta\varphi = \frac{2GM_\odot}{bc^2} \sim \frac{2GM_\odot}{R_\odot c^2}.$$

En fait, la Relativité Générale fournit une valeur double, précisément celle qui est observée : nous verrons que cela est dû à la nécessité de tenir compte du caractère “relativiste” du photon . . .

L'avance du périhélie de Mercure

A la fin du siècle dernier, les observations du mouvement de Mercure montraient que son périhélie avançait de 43'' d'arc par siècle. Il s'agissait là d'une avance *résiduelle*, non expliquée dans le cadre de la mécanique newtonienne [Chap. 1]. En fait, pour qu'il y ait avance —ou retard— du périhélie, il suffit que la loi d'attraction universelle soit différente, même très peu, de la loi en $1/r^2$: on sait, en effet, que les seules forces centrales susceptibles de donner des trajectoires fermées sont des forces en $1/r^2$ ou en r . Il s'ensuit que *toute modification* à la loi de Newton va entraîner une variation du périhélie.

La relativité va fournir deux telles modifications. D'une part, les corrections relativistes usuelles (i.e. en v^2/c^2), et d'autre part, l'énergie du champ de gravitation vont pouvoir expliquer, à la fois *qualitativement* et *en ordre de grandeur*, cette avance du périhélie de Mercure. Si nous appelons M_{0P} et M_P les masses au repos et en mouvement d'une planète, on a évidemment

$$M_P = \frac{M_{0P}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4.13}$$

qui donne la première correction. Le champ gravitationnel (qui occupe un volume sphérique de centre le Soleil et de rayon r , la distance à la planète considérée) possède une énergie, donc une *masse*, qui vient s'ajouter à celle du Soleil. La densité d'énergie ρ_G du champ de gravitation est donnée par

$$\rho_G = - \frac{(\nabla V)^2}{8\pi G} \tag{4.14}$$

$$= - \frac{M^2 G}{8\pi r^4} \tag{4.15}$$

par analogie avec le cas électromagnétique (remarquer le signe moins dans ces deux dernières équations, qui exprime que l'interaction gravitationnelle entre deux masses est attractive, contrairement au cas électrostatique où deux charges de même signe se repoussent). Dans ces conditions, la planète ne subit pas l'action de la masse du Soleil uniquement mais aussi celle qui est due à l'énergie du champ de gravitation; soit

$$M(r) = M_{\odot} + \frac{M_{\odot}^2 G}{2rc^2}. \quad (4.16)$$

Le calcul se poursuit alors sans difficulté particulière [R. Sexl et H. Sexl (1979)], en écrivant la conservation de l'énergie en ne conservant que les termes à l'ordre v^2/c^2 et par une estimation de v^2 à l'aide d'orbites à peu près circulaires :

$$\frac{1}{2} M_P v^2 - M_P \frac{GM(r)}{r} = E \quad (4.17)$$

(conservation de l'énergie)

$$M_P \approx M_{0P} + \frac{1}{2} M_{0P} v^2 / c^2 + \dots \quad (4.18)$$

(ordre v^2/c^2)

$$\frac{M_{0P} v^2}{r} \approx \frac{GM_{0P} M_{\odot}}{r^2} \longrightarrow v^2 \approx \frac{GM_{\odot}}{r}. \quad (4.19)$$

(orbite circulaire)

Incidentement, on peut remarquer que les corrections apportées par l'énergie du champ gravitationnel sont du même ordre de grandeur que celles en v^2/c^2 ; en effet, $v^2/c^2 \approx GM_{\odot}/rc^2$. Reportant maintenant tous ces résultats dans l'équation de conservation de l'énergie (4.17), il vient

$$E = \frac{1}{2} M_{0P} v^2 - G \frac{M_{0P} M_{\odot}}{r} - \frac{3G^2 M_{0P} M_{\odot}^2}{4r^2 c^2} \quad (4.20)$$

qui montre qu'à l'énergie usuelle s'ajoute un potentiel supplémentaire $V_S(r)$

$$V_S(r) = -\frac{3}{4} \frac{GM_{\odot}}{Rc^2} \frac{R}{r} \frac{GM_{\odot} M_{0P}}{r}. \quad (4.21)$$

L'avance du périhélie $\delta\Psi$ de la planète sera *grosso modo* de l'ordre du rapport entre le potentiel newtonien et le potentiel dû aux diverses corrections relativistes, c'est-à-dire

$$\frac{\delta\Psi}{2\pi} \approx \frac{V_S}{V_N} = \frac{3}{4} \frac{GM_\odot}{Rc^2}. \quad (4.22)$$

En Relativité Générale on trouve un effet quatre fois plus important; néanmoins, le raisonnement grossier³ précédent fournit à la fois l'ordre de grandeur de l'effet et son sens (une avance et non un retard).

Nécessité d'équations non linéaires pour la gravitation

L'équation de Poisson fournit le potentiel gravitationnel classique V en fonction de la densité de masse ρ ,

$$\Delta V = 4\pi G\rho. \quad (4.23)$$

Cependant, dès lors que l'énergie, sous toutes ses formes, est équivalente à de la masse grave, il nous faut inclure dans ρ toutes les densités de masse correspondantes, *y compris celle du champ de gravitation* ρ_G ,

$$\rho_G = -\frac{(\nabla V)^2}{8\pi Gc^2}. \quad (4.24)$$

L'équation de Poisson s'écrira donc maintenant

$$\Delta V + \frac{(\nabla V)^2}{2c^2} = 4\pi G\rho_{\text{mat}}. \quad (4.25)$$

Cette équation est *non linéaire*, ce qui exprime que *le champ de gravitation est couplé avec lui-même*. Bien entendu, cette équation n'est ni manifestement covariante, ni même relativiste : elle nous donne simplement une idée de ce à quoi nous devons nous attendre. Si l'on souhaite trouver une équation relativiste, on doit *a priori* effectuer la substitution $\Delta \rightarrow \square$ et aussi connaître la variance relativiste de V . On peut montrer que si l'on choisit pour V un scalaire, alors on trouve un *retard* du périhélie des planètes tandis que si V est la quatrième composante d'un quadrivecteur, on obtient une théorie où la gravitation est *répulsive*. Par contre – et c'est l'objet des prochains chapitres – un tenseur d'ordre deux convient, bien qu'il ne s'agisse pas là de la seule possibilité.

3. On trouvera un calcul général dans L. Landau et E. Lifschitz, *Mécanique*.

EXERCICES

1. Compte tenu du potentiel perturbateur évalué dans ce chapitre,

$$V_S(r) = -\frac{3}{4} \frac{GM_\odot}{Rc^2} \frac{R}{r} \frac{GM_\odot M_{OP}}{r},$$

calculer exactement l'avance du périhélie de Mercure [cf. L. Landau et E. Lifschitz, *Mécanique*; exercice n° 10; chapitre 1].

2. Expliquer la relation (4.16) : quelle masse mesure-t-on effectivement ? Commenter.

CHAPITRE 5

L'électromagnétisme et l'hydrodynamique relativistes

Deux questions importantes restent à discuter. Il nous faut d'abord établir que l'électromagnétisme possède bien l'invariance de Lorentz exigée par le principe de relativité d'Einstein et, entre autres, trouver la forme manifestement covariante des équations de Maxwell. Ensuite, il est nécessaire de donner les notions élémentaires d'hydrodynamique relativiste dont l'usage est constant aussi bien dans l'étude des étoiles denses que dans celle de leur effondrement gravitationnel, voire en cosmologie.

Densités et courants

Considérons un système de N particules, la trajectoire d'espace-temps de la i -ème étant désignée par $x_i^\mu(\tau)$. L'expression

$$J^\mu(x) = \sum_{i=1}^{i=N} \int \delta^{(4)}[x^\mu - x_i^\mu(\tau)] u_i^\mu(\tau) d\tau \quad (5.1)$$

représente un quadrivecteur, le *quadr courant* de particules. Vérifions que cette relation correspond bien à une densité et à un courant de particules en ce qui concerne la composante temporelle et les composantes spatiales, respectivement. Montrons-le pour la composante 0, la démonstration étant identique pour les autres composantes. On a successivement ¹

1. L'intégrale est une intégrale curviligne, le long de la trajectoire de la i -ème particule.

$$\begin{aligned}
J^0(x) &= \sum_{i=1}^{i=N} \int \delta [t - t_i(\tau)] \cdot \delta^{(3)} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(\tau)] \frac{dt_i}{d\tau} d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{i=N} \int \delta [t - t_i(t)] \cdot \delta^{(3)} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] dt_i \\
&= \sum_{i=1}^{i=N} \delta^{(3)} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] ,
\end{aligned}$$

où l'on est passé de la première ligne à la seconde en paramétrant les trajectoires des diverses particules avec le même paramètre, c'est-à-dire avec le temps usuel, et en intégrant finalement sur t . La dernière expression n'est autre que la densité de particules habituelle. On trouverait de même

$$\mathbf{J}(x) = \sum_{i=1}^{i=N} \mathbf{v}_i(t) \delta^{(3)} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] , \quad (5.2)$$

où \mathbf{v} est la vitesse usuelle : $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{x}/dt$.

Multipliant les deux membres de la définition de $J^\mu(x)$ par la charge commune de ces particules – en admettant qu'elles soient chargées – on voit que *les quatre quantités "densité de charge" et "courant électrique" forment un quadrivecteur.*

Quel sens physique donner à l'invariant $[J^\mu(x) \cdot J_\mu(x)]^{1/2}$? De même, quel sens attribuer à la (quadri-) direction de $J^\mu(x)$? Pour le voir et simplifier les notations, appelons $n(x)$ l'invariant précédent et soit $v^\mu(x)$ un vecteur unitaire dans la direction de $J^\mu(x)$:

$$J^\mu(x) = n(x) \cdot v^\mu(x) . \quad (5.3)$$

Notons d'abord que J^μ aussi bien que v^μ sont des quadrivecteurs du genre temps; il s'agit, en effet, de combinaisons linéaires de quadrivecteurs du genre temps de composantes temporelles positives : les quadrivitesse des particules possèdent bien cette propriété et les δ sont bien positifs. Nous pouvons donc nous placer dans un repère où v^μ se réduit à sa composante 0 : $v^\mu = (1, \mathbf{0})$. Dans ce repère J^μ se réduit à $J^\mu = (n, \mathbf{0})$; autrement dit, dans ce repère, le 3-courant est nul et n représente la densité de particules.

Le nombre total de particules présentes dans le système – ou, si l'on a affaire à des particules chargées, la charge totale – se calcule en évaluant le flux de ce quadricourant au travers d'une 3-surface du genre espace [Fig. 5.1] :

$$N = \int_{\Sigma} d\Sigma_\mu J^\mu(x) , \quad (5.4)$$

où $d\Sigma_\mu$ est la forme différentielle "élément de surface" [Appendice B] :

$$d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta . \quad (5.5)$$

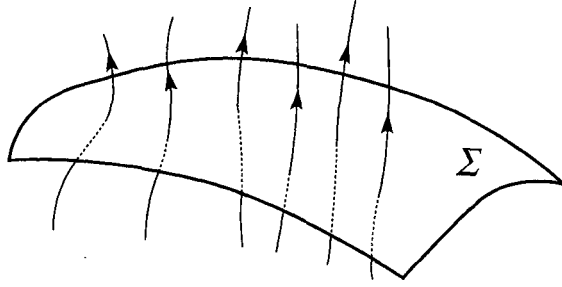


Figure 5.1 : Flux de particules à travers une surface du genre espace Σ . Le nombre total de particules présentes dans le système est égal au nombre d'intersections de leurs lignes d'univers et de Σ .

Intuitivement, cela se conçoit bien. En effet, d'une part nous devons intégrer un quadrivecteur de manière à obtenir un scalaire : cela exige d'intégrer de manière covariante (donc de contracter J^μ par le seul quadrivecteur dont nous disposons, soit $d\Sigma_\mu$); d'autre part, le nombre total de particules du système est égal au nombre de points d'intersection de leurs lignes d'univers avec la 3-surface Σ . Il est facile de vérifier que si la 3-surface du genre espace choisie est définie par $t = \text{const.}$, alors $d\Sigma_\mu$ se réduit à [Appendice B]

$$d\Sigma_\mu = (d^3x, 0, 0, 0)$$

et l'on a

$$\int d\Sigma_\mu J^\mu(x) = \int d^3x J^0(x) = N. \quad (5.6)$$

De manière générale, les propriétés précédentes sont encore vraies même si l'on a affaire à un système continu. Si l'on veut comprendre de manière intuitive pourquoi à une grandeur scalaire (comme le nombre de particules ou la charge totale) est associée une densité quadrivectorielle, on peut utiliser l'argument heuristique suivant. A la charge totale N_0 , par exemple, est associée la densité $n = N_0/V_0$ où V_0 est le volume dans lequel le système est enfermé. Lors d'une transformation de Lorentz, le volume V_0 se contracte et devient $V = V_0(1 - v^2)^{1/2}$; autrement dit, la densité devient $n/(1 - v^2)^{1/2}$. Il s'ensuit qu'elle se comporte comme la quatrième composante d'un quadrivecteur. Il en est de même pour la densité de toute grandeur scalaire.

Cette circonstance est tout à fait générale : à toute grandeur tensorielle du type \mathbf{T} correspond une densité ayant un indice de Lorentz supplémentaire, soit T^μ . Ainsi, à l'impulsion-énergie P^μ d'un système physique correspondra une densité d'impulsion-énergie que l'on appellera le tenseur impulsion-énergie $T^{\mu\nu}$, que nous étudions plus loin. L'impulsion-énergie totale sera donnée par

$$P^\mu = \int_\Sigma d\Sigma_\nu T^{\mu\nu}. \quad (5.7)$$

De même, au spin correspondra un tenseur à trois indices.

Revenons maintenant au quadricourant de particules. Si l'on choisit deux 3-surfaces du genre espace arbitraires Σ et Σ' , il est clair qu'elles contiennent le même nombre de points d'intersection avec les lignes d'univers des particules : leur nombre est constant, du moins si l'on considère des particules stables. Pour exprimer cette conservation du nombre de particules (ou de la charge, ou d'une autre grandeur scalaire) considérons le volume d'espace-temps délimité par les deux surfaces Σ et Σ' et la surface S engendrée par un tube de courant [Fig. 5.2]. Le théorème de Stokes [Appendice B] donne

$$\int d^4x \partial_\mu J^\mu(x) = \int_\Sigma d\Sigma_\mu J^\mu(x) - \int_{\Sigma'} d\Sigma_\mu j^\mu(x) + \int_S d\Sigma_\mu J^\mu(x) = 0 \quad (5.8)$$

qui exprime la conservation du nombre de particules (la dernière intégrale est nulle car J^μ est orthogonal à $d\Sigma_\mu$, au sens de la métrique de \mathcal{M} ; la seconde intégrale comporte un signe moins car $d\Sigma_\mu$ est proportionnel à la normale à Σ et cette normale est orientée vers le passé sur Σ' , si elle l'est vers le futur sur Σ).

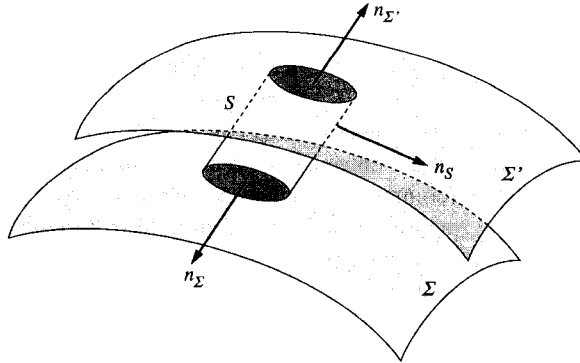


Figure 5.2 : Conservation du nombre de particules. Le théorème de Stokes est appliqué au volume délimité par un tube de courant, de surface S , et deux surfaces du genre espace Σ et Σ' . n_S est la normale à S tandis que n_Σ (resp. $n_{\Sigma'}$) est la normale à Σ (resp. Σ'). On a choisi la normale extérieure à la surface du volume.

Comme l'intégrale (5.8) est nulle [la conservation de N implique que le nombre d'intersections de trajectoires d'univers sur Σ et sur Σ' soient égales; cf. Fig. 5.1] quel que soit le 4-volume d'intégration, il s'ensuit que l'intégrand est nul (*modulo* des conditions mathématiques réalisées en pratique) et l'on a alors

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (5.9)$$

En coordonnées usuelles, cette relation s'écrit

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 ; \quad (5.10)$$

c'est l'équation de continuité habituelle.

Les équations de l'électromagnétisme

Pour trouver la forme des changements de repère d'inertie, compte tenu de la constance de la vitesse de la lumière, nous avons admis que les lois de l'électromagnétisme conservaient la même forme dans tous les repères galiléens; en particulier, une onde sphérique restait une onde sphérique : cette dernière propriété nous avait permis d'obtenir les transformations de Lorentz. Il reste cependant à *vérifier* que les équations de l'électromagnétisme – c'est-à-dire les équations de Maxwell – satisfont bien à cette condition et qu'elles peuvent notamment s'écrire sous une forme *manifestement covariante*. Pour cela, partons des équations de Maxwell écrites sous la forme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi n \quad (5.11)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{J} \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.13)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (5.14)$$

où nous avons regroupé les équations avec second membre entre elles et celles qui sont homogènes également et où l'on a adopté $c = 1$. Ces équations sont *linéaires* en \mathbf{E} et \mathbf{B} , d'une part, et d'autre part du premier ordre relativement aux diverses dérivées partielles ∂_μ . Comme n et \mathbf{J} peuvent être regroupés en un quadrivecteur J^μ , le premier groupe des équations de Maxwell *doit nécessairement* s'écrire sous la forme

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu. \quad (5.15)$$

Autrement dit, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} forment les composantes d'un tenseur du second ordre $F^{\mu\nu}$. Cependant, alors que \mathbf{E} et \mathbf{B} ont 6 composantes indépendantes, le tenseur \mathbf{F} en possède *a priori* 16. Ce tenseur doit donc posséder des propriétés de symétrie particulières; notons, à cet égard, qu'un tenseur *antisymétrique* du second ordre, dans l'espace de Minkowski, possède 6 composantes indépendantes. En fait, la conservation de la charge électrique,

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (5.16)$$

impose que l'on ait

$$\partial_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.17)$$

et ce, quel que soit le tenseur champ électromagnétique \mathbf{F} . Il s'ensuit que ce tenseur est antisymétrique, puisque $\partial_{\mu\nu}$ est symétrique. Pour trouver les différentes composantes de \mathbf{F} en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{B} , il suffit d'identifier le premier groupe d'équations de Maxwell avec l'équation covariante (5.15). On trouve alors

$$\|F^{\mu\nu}\| = \begin{vmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.18)$$

Les composantes $F_{\mu\nu}$ et $F^{\mu\nu}$ s'obtiennent facilement en élevant et en abaissant les indices de $F^{\mu\nu}$ à l'aide du tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$.

Le second groupe des équations de Maxwell – en fait, des *contraintes* sur le champ électromagnétique – s'obtient de manière analogue² et s'écrit

$$\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0, \quad (5.19)$$

où $*F^{\mu\nu}$ est donné par

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (5.20)$$

(* \mathbf{F} est le tenseur *dual* de \mathbf{F}). En développant l'expression précédente de $*F^{\mu\nu}$, il est facile de se rendre compte que le second groupe des équations de Maxwell peut encore s'écrire

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.21)$$

En fait, ce second groupe implique³ que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} dérivent de *potentiels électromagnétiques* V et \mathbf{A} à l'aide des relations

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.22)$$

que l'on peut réécrire immédiatement sous la forme manifestement covariante

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.23)$$

2. Ce second groupe d'équations de Maxwell (i) est linéaire en les dérivées ∂_μ , (ii) est linéaire en $F^{\mu\nu}$ et (iii) ne peut s'écrire de manière manifestement covariante qu'à partir des tenseurs dont on dispose, c'est-à-dire $\eta_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ et $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$.

3. Cf. Appendice B.

où l'on a posé $A^\mu = (V, \mathbf{A})$. Le caractère quadrivectorel de A_μ est manifeste lorsqu'on remplace \mathbf{F} en termes des potentiels dans l'équation de Maxwell (5.15); on obtient, en effet,

$$\square A^\mu - \partial^\mu [\partial_\nu A^\nu] = 4\pi J^\mu ; \quad (5.24)$$

qui indique bien la variance tensorielle de (V, \mathbf{A}) . Cette équation aurait également pu être obtenue en partant de la forme non manifestement covariante (5.11)–(5.14) des équations de Maxwell, de la définition (5.22) des potentiels et en regroupant les composantes de J^μ . L'équation (5.24) est bien covariante; en effet, les opérateurs $\eta_{\mu\nu}$ et $\partial^\mu \partial_\nu$ possèdent bien la variance relativiste indiquée par leurs indices.

Si l'on fait subir au quadripotentiel A^μ la transformation dite *de jauge*

$$A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda , \quad (5.25)$$

où Λ est une fonction arbitraire, on constate que le champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ ne change pas. La définition des potentiels laisse donc la place à un certain arbitraire que l'on peut lever en *imposant* des conditions supplémentaires⁴, des *conditions de jauge*. Une telle condition est réalisée par la *condition de Lorentz*

$$\partial_\mu A^\mu = 0 ; \quad (5.26)$$

cette condition ne suffit pas à déterminer univoquement le quadripotentiel puisqu'une transformation de jauge pour laquelle la fonction Λ satisfait la relation

$$\square \Lambda = 0 \quad (5.27)$$

conduit au même champ électromagnétique. Il existe, naturellement, bien d'autres conditions de jauge possibles.

Revenons maintenant au champ électromagnétique. A l'aide du tenseur \mathbf{F} et de son dual ${}^*\mathbf{F}$, il est possible de former les deux *invariants*

$$F^{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad {}^*F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} . \quad (5.28)$$

En termes des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , ces deux invariants s'écrivent

$$F^{\mu\nu} \cdot F_{\mu\nu} = 2[\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2] \quad (5.29)$$

$${}^*F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} = 4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} . \quad (5.30)$$

Pour une onde électromagnétique se propageant dans le vide, ces deux invariants sont nuls : les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont orthogonaux et l'onde contient autant d'énergie sous forme magnétique que sous forme électrique.

4. D'une certaine manière, lorsqu'il satisfait une condition de jauge non manifestement covariante comme la condition de Lorentz, A^μ n'est pas réellement un quadrivecteur; lorsqu'on change de système d'inertie, il est alors nécessaire d'effectuer aussi une transformation de jauge.

Le tenseur énergie-impulsion

Nous avons considéré plus haut un système de particules identiques; sa densité d'énergie-impulsion est alors

$$T_{\text{part}}^{\mu\nu} = \sum \int d\tau p^\mu u_i^\nu \delta[x - x_i(\tau)]. \quad (5.31)$$

A l'approximation non relativiste, cette expression se réduit à

$$T_{\text{part}}^{00} = \sum p_i^0 \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)] \quad (5.32)$$

où p^0 se réduit à l'énergie cinétique usuelle lorsqu'on néglige l'énergie de masse des particules et si, de plus, $p^\mu = mu^\mu$, T^{00} représente bien la densité d'énergie du système. On vérifierait de même que T^{i0} est une densité d'impulsion, que T^{0i} est un flux d'énergie, que T^{ij} représente le tenseur des *tensions* et qu'enfin le tenseur $T^{\mu\nu}$ est *symétrique*.

Examinons brièvement cela d'un peu plus près. Commençons par les composantes spatiales de $T^{\mu\nu}$. L'élément de 3-impulsion s'écrit

$$\begin{aligned} dP^i &= T^{ij} d\Sigma_j \\ &= T^{ij} \frac{1}{3!} \varepsilon_{j\kappa\lambda\mu} dx^\kappa \wedge dx^\lambda \wedge dx^\mu; \end{aligned}$$

ou encore

$$dP^i \sim T^{ij} dx^0 dx^k dx^l.$$

dP^i/dx^0 est la force dans la direction i et $dP^i/dx^0 \times 1/(dS = dx^k dx^l)$ est la force (dans la direction i) appliquée à un élément de surface orienté parallèlement au plan (k, l) ; c'est donc bien une tension.

Comme les équations du mouvement d'un système de particules peuvent souvent être déduites d'un lagrangien, y compris dans le cas relativiste [A.O. Barut (1965); G. Kalman (1961); A. Peres et N. Rosen (1960)], on peut constater que, malgré une définition différente, le tenseur énergie-impulsion des champs et des particules est susceptible d'une même interprétation physique [Appendice C].

En général, un système physique est composé de champs [Appendice C] et de particules et le tenseur impulsion-énergie total est, en l'absence de champs extérieurs,

$$T_{\text{tot}}^{\mu\nu} = T_{\text{part}}^{\mu\nu} + T_{\text{ch}}^{\mu\nu}. \quad (5.33)$$

Dans le cas de particules identiques chargées, la conservation de l'énergie et de l'impulsion *totales* du système s'écrit

$$\partial_\mu T_{\text{tot}}^{\mu\nu} = 0, \quad (5.34)$$

fournissant la relation de conservation

$$\partial_\mu T_{\text{part}}^{\mu\nu} = 4\pi F^{\mu\nu} J_\mu; \quad (5.35)$$

le second membre de cette dernière équation représente le *couplage* entre le champ électromagnétique et les charges du système.

L'hydrodynamique relativiste

Nous donnerons maintenant quelques aperçus sommaires de l'hydrodynamique relativiste, nécessaires pour traiter aussi bien des problèmes de Relativité Générale (cosmologie, étoiles denses et trous noirs) que de questions concernant la matière à haute densité (collisions d'ions lourds, matière dense, etc.).

Tout comme l'hydrodynamique newtonienne, l'hydrodynamique relativiste est basée sur la donnée explicite du courant de matière J^μ (ou, éventuellement, d'autres courants), du tenseur énergie-impulsion total $T^{\mu\nu}$, et surtout sur des *équations de conservation*

$$\begin{cases} \partial_\mu J^\mu = 0 \\ \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

Un cas physiquement intéressant est constitué par ce qu'on appelle le schéma *fluide parfait*. Dans un tel schéma, il n'existe dans le système qu'un seul quadrivecteur, soit u^μ . Ce quadrivecteur est alors nécessairement égal à la quadrivitesse moyenne du fluide car le courant ne peut être que proportionnel à ce vecteur, supposé unitaire (mais ce n'est pas là une restriction importante); u^μ est donc obligatoirement du genre temps, comme tout quadricourant de particules. Dans ces conditions, la forme la plus générale du tenseur énergie-impulsion est

$$T^{\mu\nu} = A u^\mu u^\nu + B \eta^{\mu\nu} \quad (5.37)$$

$$= (A + B) u^\mu u^\nu - B \Delta^{\mu\nu}(u), \quad (5.38)$$

où $\Delta^{\mu\nu}(u)$ est le projecteur orthogonal à u^μ , i.e. sur l'espace propre à la direction temporelle définie par u^μ :⁵

$$\Delta_{\mu\nu}(u) \equiv u^\mu u^\nu - \eta^{\mu\nu}. \quad (5.39)$$

En effet, les seuls tenseurs symétriques que l'on puisse construire à partir du tenseur métrique $\eta^{\mu\nu}$ et du quadrivecteur u^μ sont précisément $\eta^{\mu\nu}$ et $u^\mu u^\nu$: $T^{\mu\nu}$, un tenseur symétrique, est donc nécessairement une combinaison linéaire de ces tenseurs⁶. Interprétons maintenant les fonctions arbitraires A et B . Dans un système de référence en co-mouvement avec le fluide, u^μ se réduit à

5. On trouve aussi la définition $\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu$.

6. Remarquons que u^μ est le vecteur propre du genre temps de $T^{\mu\nu}$; les trois autres, du genre espace, sont totalement arbitraires.

$$u^\mu = (1, \mathbf{0}), \quad (5.40)$$

et les seules composantes non nulles de $T^{\mu\nu}$ sont

$$T^{00} = A, \quad T^{ii} = B \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.41)$$

A représente donc la *densité d'énergie* ρ du système, tandis que T^{ij} représente les *tensions* du milieu; ces tensions sont les mêmes dans toutes les directions i , le milieu est isotrope et B n'est autre que la *pression* P usuelle. Finalement, la forme la plus générale du tenseur énergie-impulsion du schéma fluide parfait est

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)u^\mu u^\nu - P\eta^{\mu\nu}. \quad (5.42)$$

Dans l'expression "schéma fluide parfait", le mot "parfait" se rapporte à l'*absence de phénomènes de transport* – de phénomènes dissipatifs – comme la propagation de la chaleur, la viscosité ou la diffusion. Cela se traduit par le fait que le tenseur énergie-impulsion ne contient *pas de gradient* de grandeurs macroscopiques (de température, de vitesse, de densité, etc.).

Le problème hydrodynamique comporte maintenant *six* fonctions inconnues [P , ρ , n , (où n est la densité de particules) et les trois composantes indépendantes de u^μ] qui satisfont seulement *cinq* équations, les cinq équations de conservation (5.36). Il nous faut donc disposer d'une équation supplémentaire. La donnée d'une *équation d'état*, du type

$$P = P(\rho), \quad n = n(\rho) \quad (5.43)$$

ou bien

$$P = P(n), \quad \rho = \rho(n) \quad (5.44)$$

suffit, en principe, à résoudre le problème. Encore faut-il que cette équation d'état ne soit pas bi- ou multiparamétrique. Ainsi, lorsque l'équation d'état dépend de la température, il est nécessaire de disposer également d'une équation de propagation de la chaleur ou de toute autre relation supplémentaire.

Il est également nécessaire de pouvoir disposer d'une *thermodynamique relativiste*. On peut montrer que les relations habituelles restent valables dans un repère local [voir, par exemple, J. Ehlers (1971) ou C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler (1973)] et nous y reviendrons quand cela sera nécessaire.

EXERCICES

1. Soit $F^{\mu\nu}$ un tenseur antisymétrique. Calculer F_ν^μ et $F_{\mu\nu}$. Calculer $*F^{\mu\nu}$.
2. Soit P un 3-plan du genre espace d'équation $k_\mu x^\mu = \text{const}$. Calculer l'élément de 3-surface $d\Sigma_\mu$.
3. Calculer l'élément de surface $d\Sigma_\mu$ de la surface $x_\mu x^\mu = a^2$.

4. On considère le mouvement d'une particule de charge e et de masse m dans un champ électromagnétique extérieur $A^\mu(x)$. L'action est donnée par

$$S = \int_a^b \{ [\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu]^{1/2} + e A_\mu(x) dx^\mu \}.$$

En écrivant que $\delta S=0$, trouver les équations du mouvement correspondantes.

5. On considère un système de N particules, de coordonnées $x_i^\mu(\tau)$ dans l'espace de Minkowski, et de quadrivitesse $u_i^\mu(\tau)$; $i=1,2,\dots,N$; τ = temps propre. Ces particules sont identiques, de charge e et de masse m . Leur dynamique est définie par

$$m \frac{d^2 x_i^\mu(\tau)}{d\tau^2} = e F^{\mu\nu}(x_i) u_{i\nu}(\tau) \quad i=1,2,\dots,N$$

où $F_{\mu\nu}$ est le champ électromagnétique du système. On pose

$$R(x,u) = \sum_{i=1}^{i=N} \int d\tau \delta^{(4)}[x-x_i(\tau)] \cdot \delta^{(4)}[u-u_i(\tau)]$$

$$[x \equiv x^0, x^1, x^2, x^3, \dots].$$

(i) Montrer que le quadricourant du système est donné par

$$J^\mu(x) = e \int d^4u R(x,u) u^\mu.$$

(ii) Montrer que le tenseur énergie-impulsion des particules est donné par

$$T_{\text{part}}^{\mu\nu} \equiv \int d^4u R(x,u) m u^\mu u^\nu.$$

(iii) Montrer que $R(x,u)$ obéit à l'équation

$$u^\mu \partial_\mu R(x,u) + \frac{e}{m} F^{\mu\nu}(x) u_\nu \frac{\partial}{\partial u^\mu} R(x,u) = 0.$$

(iv) Par intégration, déduire de la relation précédente que

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0.$$

(v) De manière analogue, montrer que

$$\partial_\nu T_{\text{part}}^{\mu\nu} = 4\pi J_\nu(x) F^{\mu\nu}(x).$$

6. Soient a^μ, b^μ, c^μ trois quadrivecteurs de \mathfrak{M} . Ecrire le tenseur du second ordre le plus général qui soit (i) symétrique, (ii) antisymétrique.

7. Soit $F_{\mu\nu}$ le tenseur champ électromagnétique. Soient u^μ et h^μ deux 4-vecteurs tels que :

$$u^\mu u_\mu = 1, \quad h^\mu h_\mu = -h^2, \quad u^\mu h_\mu = 0.$$

(i) Calculer $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}$.

(ii) Comment interpréter h^μ et u^μ lorsque $F_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} h^\alpha u^\beta$?

(iii) Calculer alors

$$h^\mu F_{\mu\nu}, \quad u^\mu F_{\mu\nu}, \quad u^\mu {}^* F_{\mu\nu}, \quad h^\mu {}^* F_{\mu\nu}.$$

Interpréter.

(iv) Calculer le tenseur impulsion-énergie du champ électromagnétique en fonction de u^μ et h^μ .

(v) h^μ est-il réellement un quadrivecteur ?

8. On se propose de généraliser de manière covariante la loi d'Ohm usuelle $J = \sigma E$. On écrira donc, dans le cas relativiste, une expression de la forme

$$J^\mu = \Lambda^{\mu\alpha\beta} F_{\alpha\beta},$$

où J^μ est le quadricourant et $F_{\alpha\beta}$ le tenseur champ électromagnétique. Dans la suite, on considérera que toutes les grandeurs utilisées sont, en réalité, des transformées de Fourier.

- (i) Comment s'écrit la conservation de la charge et qu'implique-t-elle pour le tenseur $\Lambda^{\mu\alpha\beta}$?
 (ii) Quelles sont les symétries du tenseur $\Lambda^{\mu\alpha\beta}$? Combien de composantes indépendantes ce tenseur possède-t-il ?
 (iii) Donner la forme la plus générale de $\Lambda^{\mu\alpha\beta}$ compte tenu du fait qu'on ne dispose pour le former que de k^μ , le vecteur d'onde, et u^μ , un 4-vecteur du genre temps.

9. Soit $A^\mu(x)$ le quadripotential électromagnétique. On se propose d'en obtenir une équation sur la base des hypothèses suivantes : (i) covariance manifeste, (ii) équation du second ordre, (iii) linéarité. On admet, en outre, que le quadricourant J^μ , source du champ A^μ , apparaît seul au second membre de l'équation cherchée.

- (i) Trouver la forme la plus générale de l'équation satisfaite par $A^\mu(x)$.
 (ii) Montrer que cette équation est totalement déterminée dès lors qu'on lui impose d'être invariante de jauge et que $\partial_\mu J^\mu = 0$.
 (iii) Montrer que cette équation est totalement déterminée dès lors qu'on impose que des ondes planes du type

$$A^\mu(x) = A^\mu(k) e^{ik \cdot x}$$

soient solutions (avec $J^\mu \equiv 0$), avec $k^2 = 0$.

10. Soit $F^{\mu\nu}$ un tenseur champ électromagnétique tel que $F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = 0$. Montrer que, si $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} > 0$, alors il existe un système de référence galiléen où $F_{\mu\nu}$ se réduit à un pur champ magnétique. Qu'en est-il lorsque $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} < 0$?

11. Le vide est, par hypothèse, homogène (au sens de l'espace de Minkowski) et isotrope. Si on l'assimile à un milieu matériel, (i) donner la forme la plus générale du tenseur énergie-impulsion associé et (ii) en déduire la forme de l'"équation d'état" correspondante.

12. La distribution de Maxwell-Boltzmann relativiste s'écrit

$$f(p^\mu) = 2A \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2) \exp\{-\beta u^\mu p_\mu\} \quad (1)$$

et est normalisée par

$$J^\mu = \int d^4p \frac{p^\mu}{m} f(p^\lambda) \quad (2)$$

où J^μ est le quadricourant de particules.

(i) Ecrire l'expression (2) sous la forme d'une intégrale triple. A l'aide d'un changement de variables du type $p^0 = mch\chi$, évaluer J^μ en fonction de A et u^μ , puis en déduire A .

(ii) Expliquer et commenter la forme (1) pour la distribution de Maxwell-Boltzmann relativiste. Montrer que, lorsque $\beta m \gg 1$, la fonction

$$f(p) = A \exp\{-\beta u^\mu p_\mu\}$$

se réduit à la distribution de Maxwell ordinaire.

(iii) On pose

$$T^{\mu\nu} = \int d^4p \frac{p^\mu p^\nu}{m} f(p).$$

Interpréter les différentes composantes de ce tenseur. Montrer qu'il s'agit bien du tenseur impulsion-énergie (du gaz parfait relativiste).

(iv) Vérifier que $T^{\mu\nu}$ a nécessairement la forme

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu - P \eta^{\mu\nu}.$$

Calculer alors la densité d'énergie ρ et la pression P . Vérifier que $P = n\beta^{-1}$, avec $n^2 = J^\mu J_\mu$.

(v) L'énergie est-elle équirépartie entre les différents degrés de liberté ?

(vi) Calculer $T^{\mu\nu}$ lorsque $m \rightarrow 0$, et en déduire que $P = \frac{1}{3} \rho$ pour des photons ou des neutrinos.

Données :

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \int d\chi \, ch \, n\chi \, \exp\{-xch\chi\} \\ &= \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1} \int d\chi \, sh^{2n}\chi \, \exp\{-xch\chi\} \\ K_{n+1}(x) - K_{n-1}(x) &= 2n \frac{K_n(x)}{x} \end{aligned}$$

(K_n : fonctions de MacDonald, ou de Kelvin = fonctions de Bessel modifiées)

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{(4n^2-1)}{1!8x} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right\} \\ &\text{pour } x \gg 1 \\ K_n(x) &= \frac{1}{2} (n-1)! \left[\frac{x}{2} \right]^n + \dots \\ K_0(x) &= -0.5772 - \log \frac{x}{2} + \dots \\ &\text{pour } x \ll 1 \\ K'_n(x) &= \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n+1}(x). \end{aligned}$$

13. Comment s'écrit la distribution de Fermi-Dirac relativiste? Comment est-elle normalisée? Calculer la pression et la densité d'énergie du gaz de Fermi complètement dégénéré à $T=0^\circ\text{K}$. On donne

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \int_0^x dt \, t^2 [1+t^2]^{1/2} = \frac{1}{4} \{ x(1+x^2)^{3/2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} [x(1+x^2)^{1/2} - \log(x+(1+x^2)^{1/2})] \}. \end{aligned}$$

[Références pour les exercices 12 et 13 : J.L. Synge (1957); S.R. de Groot *et al* (1980).]

14. A partir de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, d'un fluide parfait, montrer que l'on a

$$dU + PdV = 0.$$

Justifier le fait qu'un fluide parfait est non dissipatif.

CHAPITRE 6

Qu'est-ce qu'un espace courbe?

La description de la gravitation relativiste va nécessiter, comme on le verra à la fin de ce chapitre, l'introduction d'un espace-temps courbe. Mais qu'entend-on par "espace courbe"? Notre intuition, basée sur la vision de surfaces dans l'espace \mathbf{R}^3 , peut suffire à étendre ce concept à des espaces de dimension supérieure à 2. Aussi convient-il d'extraire l'essentiel d'exemples simples (comme celui de la sphère) de surfaces de \mathbf{R}^3 . C'est ce que nous ferons, d'abord en étudiant quelques propriétés géométriques de surfaces connues puis en les comparant aux propriétés correspondantes du plan \mathbf{R}^2 . Nous définirons ensuite la courbure de Riemann et nous donnerons finalement quelques arguments en faveur d'un espace-temps courbe.

Quelques manifestations de la courbure

Dans ce paragraphe, nous considérons seulement le cas d'une sphère de rayon R , plongée dans \mathbf{R}^3 : il est indubitable qu'il s'agit bien là d'une surface courbe! Nous nous efforcerons alors d'y construire des figures géométriques élémentaires dont nous comparerons les propriétés avec celles de figures planes analogues.

1. **Triangle géodésique** [Fig. 6.1] : Dans le plan, un triangle quelconque est formé à partir de l'intersection de trois droites non parallèles. Sur une sphère, ce qui joue le rôle d'une droite, c'est un arc de grand cercle : la droite est, dans le plan \mathbf{R}^2 , le plus court chemin (géodésique) entre deux points tandis que, sur la sphère S_2 , c'est bien un arc de grand cercle. Traçons donc un triangle sur une sphère S_2 ; entre deux points A et B passe un arc de grand cercle (et un seul, si la distance AB doit être minimale et si A et B ne sont pas situés aux pôles). Choisissons maintenant le point C de telle sorte que l'angle \widehat{CAB} soit égal à $\pi/2$. Nous pouvons également choisir C de sorte que $\widehat{CBA} = \pi/2$ aussi. Nous obtenons ainsi un triangle dont la somme des angles est supérieure à π .

Cette circonstance est tout à fait générale : dans un espace courbe, la somme des angles d'un triangle (géodésique) est, la plupart du temps, différente de π .

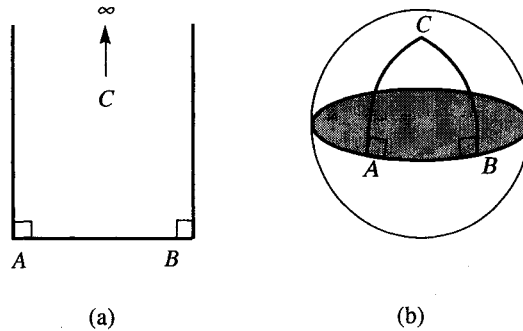


Figure 6.1 : Triangles bi-rectangles dans le plan et sur la sphère. Sur la sphère, la somme des angles du triangle est supérieure à π .

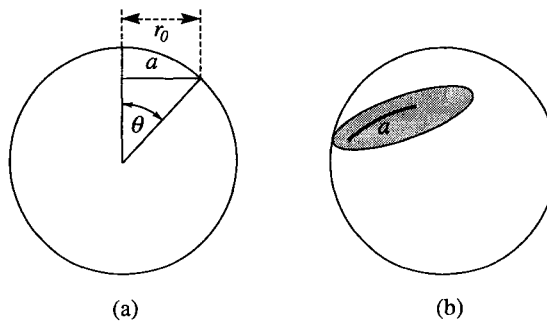


Figure 6.2 : Cercle géodésique (a) et données géométriques (b) utilisées pour le calcul de son périmètre et de sa superficie.

2. Cercle géodésique [Fig. 6.2] : Considérons maintenant un cercle de centre un point O (quelconque) de la sphère, et de rayon a . Cela signifie qu'à partir du point O , nous traçons tous les arcs de géodésiques de longueur a .

Si l'on appelle θ l'angle au centre qui sous-tend l'un des rayons du cercle géodésique, et r_0 le rayon de ce cercle dans \mathbf{R}^3 , on aura

$$a = R\theta \quad \text{et} \quad r_0 = R \sin \theta \quad (6.1)$$

avec $0 < \theta < \pi/2$, c'est-à-dire $0 < \sin \theta < 1$, où R est le rayon de la sphère. Dans ces conditions, le périmètre du cercle géodésique est $\ell = 2\pi r_0$, tandis que sa surface est la surface de la calotte sphérique qu'il sous-tend, $S = 2\pi R^2(1 - \cos \theta)$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} \ell &= 2\pi R \sin \theta = 2\pi R \sin \frac{a}{R} \\ &\sim 2\pi a \left[1 - \frac{a^2}{6R^2} + \dots \right] \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi R^2(1 - \cos \theta) = 2\pi R^2 \left(1 - \cos \frac{a}{R}\right) \\
 &\sim \pi a^2 \left[1 - \frac{a^2}{12R^2} + \dots\right].
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Les expressions précédentes de ℓ et S doivent être comparées avec les valeurs usuelles 2π et πa^2 , respectivement. On constate d'abord que, si R est très grand, les deux valeurs sont très voisines : une sphère de très grand rayon est, localement, très semblable à un plan. Ensuite, si $R \ll a$, ℓ et S vont différer notablement des valeurs euclidiennes habituelles. C'est ce que l'on traduit parfois en disant un peu incorrectement que *dans un espace courbe, la valeur de π n'est plus 3.14159...*

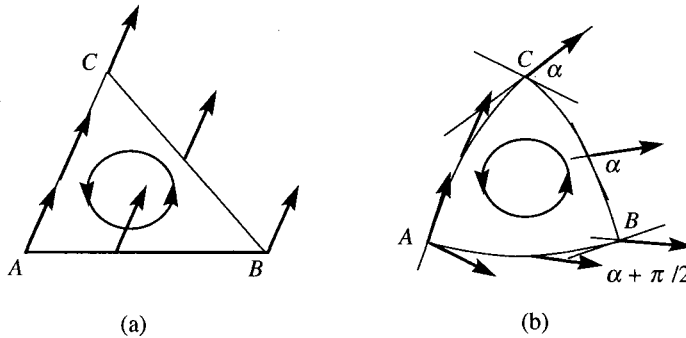


Figure 6.3 : Transport parallèle (a) dans le cas euclidien et (b) dans le cas de la sphère S_2 .

3. Transport parallèle d'un vecteur [Fig. 6.3] : Considérons encore deux triangles géodésiques, l'un dans le plan \mathbb{R}^2 , l'autre sur la sphère S_2 . Soit maintenant un vecteur \mathbf{X} dans le plan, et transportons-le parallèlement à lui-même le long du circuit fermé défini par le triangle. Après un tour, le vecteur \mathbf{X} coïncide parfaitement avec le vecteur \mathbf{X} que l'on avait au départ, et cela est vrai quel que soit le triangle considéré. Qu'en est-il dans le cas de S_2 ? Choisissons, pour simplifier, un triangle bi-rectangle. Il est cependant nécessaire de s'entendre sur le sens de l'expression "transport parallèle". Dans le cas euclidien, le vecteur \mathbf{X} est toujours parallèle à lui-même; toutefois, cela signifie aussi que l'angle qu'il forme avec chacun des côtés du triangle ABC est constant. Dans le cas de la sphère, la comparaison des directions successives de \mathbf{X} entre elles est beaucoup plus délicate; la direction de \mathbf{X} est comparée au vecteur tangent aux géodésiques formant le triangle curviligne ABC . Ainsi, prenons pour \mathbf{X} au point A , un vecteur tangent au côté AC . A partir de C , et ce jusqu'au point B , le vecteur \mathbf{X} forme avec le côté CB un angle α ; puis, à partir de B et jusqu'en A , il forme un angle $\alpha + \pi/2$. Arrivé en A , le vecteur \mathbf{X} fait maintenant un angle non nul avec le vecteur de départ et ne coïncide donc plus avec lui, contrairement au cas euclidien – ceci est encore une manifestation de la

courbure, comme on peut facilement le calculer en évaluant l'angle α en fonction de R et de la distance (géodésique) AB .

4. **Déviations géodésiques** [Fig. 6.4] : Considérons maintenant deux géodésiques de la sphère S_2 , issues du même point O où elles se coupent selon un angle α supposé petit. Soient A et B deux points (un sur chaque géodésique) situés à la distance a de O et soit χ la distance entre A et B , comptée *sur* la sphère.

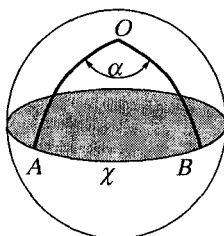


Figure 6.4 : La déviation géodésique.

La distance χ entre A et B s'évalue facilement et l'on trouve

$$\chi = \alpha R \sin \theta = \alpha R \sin \frac{a}{R} \quad (6.4)$$

$$\sim \alpha a. \left[1 - \frac{1}{6} \frac{a^2}{R^2} + \dots \right], \quad (6.5)$$

de sorte que la *déviations géodésiques* χ obéit à l'équation différentielle (équation de la déviation géodésique; voir chapitre 7)

$$\frac{d^2 \chi}{da^2} = -\frac{1}{R^2} \chi = -K \chi. \quad (6.6)$$

La figure 6.5 donne une idée qualitative de l'écart entre la déviation euclidienne $K = 0$ et celle qui concerne la sphère $K > 0$ (K est la *courbure*); nous avons rajouté

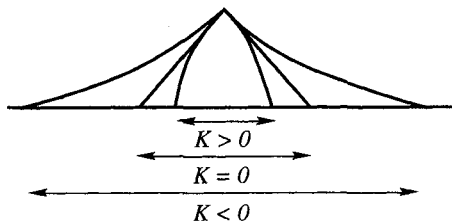


Figure 6.5 : Ecart à la déviation géodésique selon le signe de la courbure K .

le cas où $K < 0$, sur lequel nous reviendrons plus loin. La déviation géodésique joue un rôle important en Relativité Générale (diamètre angulaire de galaxies, en cosmologie; antennes pour la détection éventuelle d'ondes gravitationnelles; etc.) et nous en verrons la forme covariante générale au prochain chapitre.

5. Rectangle géodésique [Fig. 6.6] : Donnons un dernier exemple où la courbure se manifeste. Traçons un rectangle curviligne $ABCD$ sur S_2 , c'est-à-dire une figure comportant quatre angles droits. On vérifie facilement que si les côtés AD et BC ont bien mêmes longueurs, il n'en est pas ainsi pour AB et CD . Bien plus, l'arc DC n'est pas un arc de géodésique et, si l'on trace la géodésique de longueur égale à AB , on aboutit en un point C' tel que la figure $ABC'D$ ne comporte plus ni quatre angles droits, ni même deux paires de côtés opposés égaux ! Ceci est, une fois de plus, une manifestation de la courbure.

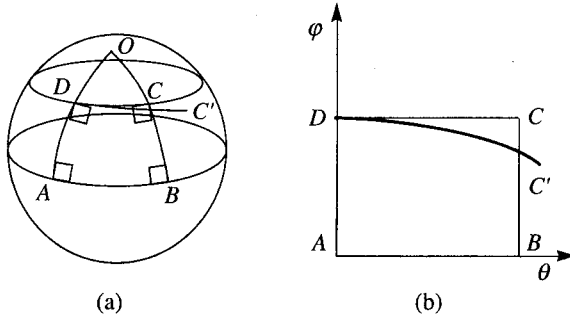


Figure 6.6 : Rectangle géodésique. (a) Le quadrilatère $ABCD$ est bien un rectangle; toutefois, si AB , AD et BC sont bien des arcs de géodésiques, il n'en est pas de même de CD . L'arc de géodésique issu de D et orthogonal à AD aboutit en $C' \neq C$: on ne peut refermer le quadrilatère! (b) La même situation est exprimée dans le système de coordonnées polaires (θ, φ) qui permet de décrire la sphère S_2 , localement.

Courbure des surfaces à deux dimensions

La courbure des surfaces à deux dimensions est particulièrement importante à établir, car c'est à partir de sa définition que l'on construit celle d'espaces courbes plus généraux à n dimensions. Cette courbure sera d'ailleurs définie à l'aide de la notion usuelle de courbure d'une courbe plane.

A l'aide des exemples précédents – qui tous concernent la sphère S_2 – nous pourrions être tentés de définir la courbure d'une surface soit comme l'excès (positif ou négatif) de longueur du périmètre d'un cercle géodésique tracé sur la surface considérée, relativement à un cercle euclidien de même rayon, c'est-à-dire

$$K = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left\{ \frac{2\pi a - \ell}{a^3} \right\}, \tag{6.7}$$

soit comme un excès (positif ou négatif) de surface [Fig. 6.7], soit d'une autre manière faisant intervenir la courbure par l'intermédiaire d'une propriété quelconque :

$$K = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{12}{\pi} \left\{ \frac{\pi a^2 - S}{a^4} \right\}. \quad (6.8)$$

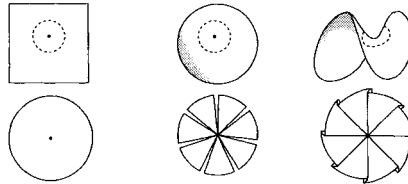


Figure 6.7 : Excès (ou défaut) de surface d'un cercle géodésique tracé sur une surface S et "aplani" sur un plan euclidien \mathbb{R}^2 , pour $K=0$, $K>0$, ou $K<0$ [d'après F. Rindler (1977) Fig. 7.3; reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur, © Springer-Verlag].

Toutefois, ce genre de définition pêche par un grave défaut : il utilise, en effet, les propriétés de symétrie de la sphère (isotropie) et n'est donc pas adapté au cas général d'une surface sans symétrie particulière.

Si l'on analyse les manifestations de la courbure qu'indiquent les exemples précédents, il est immédiat qu'elles font *toutes* intervenir des *propriétés métriques* (angles, parallélisme, longueurs, surfaces, etc.) donc liées à la métrique de la surface. *A priori* la métrique définie par $g_{ij}(\xi^1, \xi^2)$ sur une surface S , à deux dimensions, plongée dans \mathbb{R}^3 , s'écrit sous la forme

$$d\sigma^2 = g_{ij}(\xi^1, \xi^2) d\xi^i d\xi^j \quad (i, j = 1, 2), \quad (6.9)$$

où les ξ^i sont deux paramètres quelconques permettant de décrire la surface au voisinage d'un point donné. La surface S de \mathbb{R}^3 est définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x = x(\xi^1, \xi^2) \equiv x^1 \\ y = y(\xi^1, \xi^2) \equiv x^2 \\ z = z(\xi^1, \xi^2) \equiv x^3 \end{cases} \quad (6.10)$$

de sorte que l'on peut toujours écrire, pour la (distance)² $d\sigma^2$ sur S :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \\ &= d[x(\xi^1, \xi^2)]^2 + d[y(\xi^1, \xi^2)]^2 + d[z(\xi^1, \xi^2)]^2 \\ &= \delta_{i\ell} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}(\xi^1, \xi^2) \frac{\partial x^\ell}{\partial \xi^k}(\xi^1, \xi^2) d\xi^j d\xi^k, \end{aligned} \quad (6.11)$$

d'où l'on tire immédiatement

$$g_{ij}(\xi^1, \xi^2) = \delta_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^i}(\xi^1, \xi^2) \cdot \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}(\xi^1, \xi^2). \quad (6.12)$$

Notons que g_{ij} contient *a priori* trois fonctions des ξ^i (c'est-à-dire g_{11} , g_{22} et g_{12}) mais comme les *coordonnées* des points de la surface S (ou plutôt d'une partie ouverte de S) sont arbitraires, il est toujours possible, *dans le cas des surfaces à deux dimensions*, de trouver localement un paramétrage $\{\alpha^i\}_{i=1,2}$ avec lequel la métrique prend la forme

$$d\sigma^2 = G(\alpha^1, \alpha^2) [(d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2], \quad (6.13)$$

où G est une fonction connue dès lors que la surface S l'est également. Dans ces conditions, la courbure d'une surface S de \mathbf{R}^2 est directement liée à cette fonction G . En outre, aussi bien les pseudo-définitions (6.7) et (6.8) que la façon dont la courbure intervient dans l'équation de la déviation géodésique (6.6) montrent que ce sont les *dérivées secondes du tenseur métrique* (ou de G) qui permettent la définition de la courbure. Si la fonction $G(\alpha^1, \alpha^2)$ est constante, alors la métrique (6.13) peut toujours se mettre sous la forme *euclidienne*

$$d\sigma^2 = (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2; \quad (6.14)$$

l'espace (la surface) muni(e) de cette métrique est alors *localement euclidienne*, ou encore localement plate. Par exemple, un point d'un *cylindre* d'axe Oz et de rayon R , représenté dans \mathbf{R}^3 à l'aide des coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z, \end{cases} \quad (6.15)$$

est défini par le couple ($\xi^1 \equiv \theta$, $\xi^2 \equiv z$) et possède la métrique

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dz^2 + R^2 d\theta^2 \equiv (d\xi^2)^2 + R^2 (d\xi^1)^2 \\ &= (d\alpha^1)^2 + (d\alpha^2)^2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

avec $\alpha^1 \equiv \xi^2$ et $\alpha^2 \equiv R\xi^1$.

Avant d'en venir à la courbure des surfaces à deux dimensions, rappelons rapidement comment est définie la courbure d'une courbe plane [Fig. 6.8]. Considérons un cercle C de centre O et de rayon R et soit Ox une droite passant par O . Menons par un point M de C la tangente; elle coupe l'axe Ox selon un angle α . Si le point M est déplacé en $M + dM$, il parcourt sur C un élément d'arc $ds = R d\alpha$ et l'on a donc

$$R = \frac{ds}{d\alpha}. \quad (6.17)$$

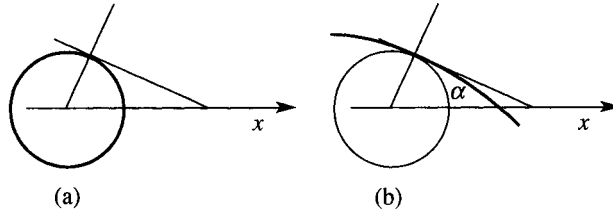


Figure 6.8 : Courbure d'une courbe plane. (a) Dans le cas d'un cercle, on a la relation $R=ds/d\alpha$ que l'on étend (b) au cas d'une courbe quelconque.

Pour une courbe plane quelconque, le *rayon de courbure* R sera défini de manière analogue, c'est-à-dire par le rayon du cercle osculateur à la courbe au point considéré. Pour une courbe plane représentée par une équation du type $y = y(x)$ on aura

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{[1 + y'^2]^{3/2}}{y''}, \quad (6.18)$$

et pour une courbe définie paramétriquement par $\{x = x(t), y = y(t)\}$, on aura alors

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}y|}. \quad (6.19)$$

Considérons maintenant une surface S de \mathbf{R}^3 représentée, au moins localement, par une équation du type $z = f(\xi^1, \xi^2)$: un point M de S est donc parfaitement défini par la donnée des deux coordonnées ξ^1 et ξ^2 . On peut toujours écrire, au voisinage d'un point $[\xi_0^1, \xi_0^2, z_0 \equiv f(\xi_0^1, \xi_0^2)]$ de S

$$\begin{aligned} z = z_0 + (\xi^1 - \xi_0^1) \left. \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \right|_{\xi^i = \xi_0^i} + (\xi^2 - \xi_0^2) \left. \frac{\partial f}{\partial \xi^2} \right|_{\xi^i = \xi_0^i} \\ + \frac{1}{2} (\xi^1 - \xi_0^1) (\xi^2 - \xi_0^2) \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right|_{\xi^i = \xi_0^i} + \dots, \end{aligned} \quad (6.20)$$

expression qui se réduit à la suivante :

$$z = \frac{1}{2} f_{ij} \xi^i \xi^j + O(\xi^3), \quad (6.21)$$

si l'on prend soin de situer le point M à l'origine des coordonnées et de choisir le plan tangent en M parallèle au plan (ξ^1, ξ^2) (auquel cas on a $\xi_0^i = z_0 = 0$ et $\partial f / \partial \xi^i|_{\xi^i=0} = 0$). Autrement dit, au voisinage du point (ξ_0^1, ξ_0^2) la surface S est approchée par le paraboléide anisotrope (6.21). Dans l'expression (6.21), on a évidemment

$$f_{ij} \equiv \left. \frac{\partial^2 f(\xi^1, \xi^2)}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \right|_M ; \tag{6.22}$$

qui reflète l'anisotropie de S en M si $f_{ij} \neq \text{const.} \times \delta_{ij}$.

Plaçons-nous dans le plan tangent à S au point M et soit \vec{t} une direction quelconque dans ce plan. Le plan défini par \vec{t} et l'axe des z [Fig. 6.9] est évidemment orthogonal à S en M ; son intersection avec la surface S est une courbe C dont la courbure dépend, naturellement, de la direction \vec{t} choisie. Dans le plan tangent en M à S , la courbe C se projette selon $\xi^i = t^i \alpha$, où α est un paramètre quelconque, de sorte que dans le plan (Mz, \vec{t}) , elle a pour équation

$$z = z(\alpha) \sim \frac{1}{2} f_{ij} t^i t^j \alpha^2, \tag{6.23}$$

ce qui, pour sa courbure, donne immédiatement [cf. Eq. (6.19)] :

$$K = f_{ij} t^i t^j. \tag{6.24}$$

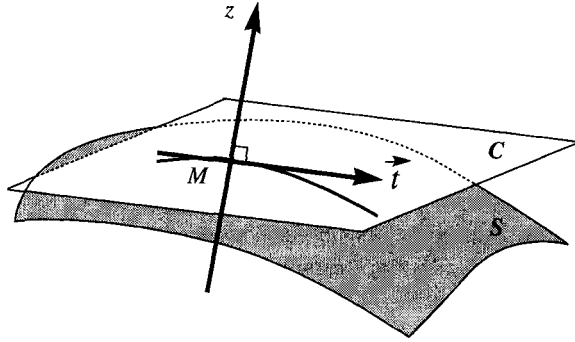


Figure 6.9 : Le vecteur arbitraire \vec{t} , situé dans le plan tangent à la surface S au point M , définit avec l'axe Mz (normal à S) un plan orthogonal à S en M . Ce plan coupe S selon une courbe C , qui dépend de la direction \vec{t} choisie, et dont la courbure est la courbure de S dans cette direction.

Comme il se doit, K dépend de la direction \vec{t} considérée. Toutefois, une définition acceptable de la courbure de la surface S ne doit pas dépendre de \vec{t} , même si l'on doit la relier aux courbures possibles des courbes intersections. Une telle définition ne peut donc dépendre que des *invariants* que l'on peut former à partir de la matrice $\|f_{ij}\|$, c'est-à-dire de sa *trace* et de son *déterminant*. Si l'on appelle K_i ($i = 1, 2$) les valeurs propres¹ de la matrice $\|f_{ij}\|$, on aura

$$\text{Det. } \|f_{ij}\| = K_1 \cdot K_2 \equiv K_G \tag{6.25}$$

(courbure de Gauss)

$$\frac{1}{2} \text{Tr. } \|f_{ij}\| = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) \equiv K_M \tag{6.26}$$

(courbure moyenne).

1. Rappelons que, par construction, $\|f_{ij}\|$ est une matrice symétrique : elle est donc diagonalisable.

Les deux valeurs propres K_1 et K_2 sont les *courbures principales* de S , et les vecteurs propres correspondants (lorsque $K_1 \neq K_2$) sont les *directions principales* de S au point M . La courbure de Gauss², ou *courbure intrinsèque* de la surface, est la seule qui nous concernera réellement dans la gravitation relativiste car elle dépend de S en tant que telle et non en tant que surface plongée dans un espace plus grand (cette question est illustrée dans le prochain paragraphe); par contre, la courbure moyenne² dépend non seulement de S mais aussi de la manière dont elle est plongée dans \mathbf{R}^3 et n'est donc pas intrinsèque.

Pour s'en convaincre, considérons les cas d'une sphère de rayon R puis d'un cylindre d'axe Oz . Pour la sphère, on a

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ \sim R \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} + \dots \right\},$$

et l'on a donc, en orientant la normale vers l'intérieur,

$$f_{ij} = \frac{1}{R} \delta_{ij}, \quad (6.27)$$

et, par conséquent, $K_1 = K_2 = 1/R$; soit

$$K_G = \frac{1}{R^2}, \quad K_M = \frac{1}{R}. \quad (6.28)$$

Pour un cylindre, il suffit de considérer deux directions perpendiculaires et de trouver la courbure des courbes correspondantes : si l'on prend une génératrice et un cercle, on aura $K_1 = 0$ et $K_2 = 1/R$, de sorte que

$$K_G = 0 \quad \text{et} \quad K_M = 1/2R. \quad (6.29)$$

Le cylindre est intrinsèquement plat – c'est ce que révélait la forme euclidienne (6.16) de sa métrique – tandis qu'en tant que surface plongée dans \mathbf{R}^3 , il possède une courbure moyenne non nulle.

Notons, au passage, le fait que la courbure moyenne dépend de l'orientation choisie (dans \mathbf{R}^3) pour la normale à S : cela montre bien que K_M dépend non seulement de S mais aussi du plongement de S dans \mathbf{R}^3 . Des définitions plus élaborées peuvent être trouvées dans B. Carter (1992).

Nous avons souligné plus haut que la courbure³ était liée à la métrique de la surface considérée. Vérifions-le maintenant. La métrique de \mathbf{R}^3

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.30)$$

2. Notons que la courbure de Gauss est de dimension L^{-2} tandis que la courbure moyenne est de dimension L^{-1} .

3. Dorénavant, nous ne nous intéresserons qu'à la courbure intrinsèque (de Gauss) et il n'y aura pas d'ambiguïté lorsque nous parlerons de courbure.

jointe à l'équation locale de S

$$x^3 \equiv z \sim \frac{1}{2} f_{ij} x^i x^j, \quad (i = 1, 2), \quad (6.31)$$

où l'on a choisi les x^i comme coordonnées des points de S , donne immédiatement la métrique g_{ij} de la surface

$$g_{ij} \sim \delta_{ij} + f_{ik} \cdot f_{jl} x^k x^l. \quad (6.32)$$

Le premier terme δ_{ij} est le terme euclidien; quant au second, il représente nécessairement une partie (non euclidienne) liée à la courbure, étant donnée sa dépendance en f_{ij} . L'expression de la métrique (6.32) montre également que la courbure – donc f_{ij} – ne peut être obtenue à partir de g_{ij} qu'en éliminant la dépendance dans les x^ℓ , donc en *dérivant deux fois* : la courbure est bien liée aux dérivées secondes du tenseur métrique.

Signification de la courbure intrinsèque

Afin de pénétrer le sens physique de la courbure de Gauss, nous allons considérer un exemple de variété à deux dimensions dû à H. Poincaré (1968). Soit donc une surface parfaitement plane – disons, pour fixer les idées, une table de marbre parfaitement polie, vérifiée au laser, etc. – et supposons que des êtres bidimensionnels y vivent, y fassent de la physique théorique et expérimentale. En particulier, ils disposent de règles graduées, toutes composées du *même* métal. Si la table de marbre est uniformément à la même température [Fig. 6.10] les règles de tous les expérimentateurs ont les mêmes propriétés, et ceux-ci mesureront les mêmes longueurs pour les côtés d'un triangle ABC , quel que soit le lieu où il est situé et quelle que soit son orientation [Fig. 6.10(a)]; de même ils vérifieront qu'en tout point le théorème de Pythagore est vrai et en concluront que l'espace à deux dimensions où ils évoluent est euclidien. Supposons maintenant que la température varie d'un lieu à l'autre et soit une fonction $T(x, y)$ donnée. La longueur propre ds des règles des expérimentateurs bidimensionnels au voisinage de coordonnées (x, y) sera donnée par

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{[1 + \chi T(x, y)]^2}, \quad (6.33)$$

où χ est le coefficient de dilatation, supposé constant, de la règle, la table de marbre *n'étant pas* susceptible de se dilater ou de se contracter. Dans ces conditions, l'expérimentateur mesurant, par exemple, la somme des angles de son triangle rectangle ABC trouvera alors que celle-ci est différente de π et donc que son espace physique n'est pas euclidien. Il trouvera, de même, que sa courbure intrinsèque est donnée par

$$K = \chi \nabla^2 T, \quad (6.34)$$

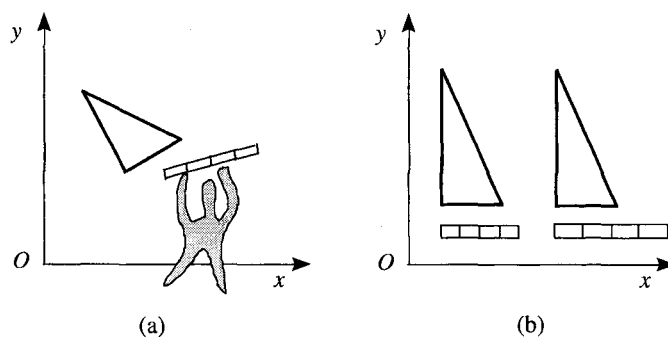


Figure 6.10 : La table de Poincaré. Lorsque le plan xOy est à température constante (a) les êtres bidimensionnels considèrent que leur espace est euclidien. Par contre (b), si la température n'est pas uniforme, les règles (i.e. les étalons de longueur) varient de point en point, le théorème de Pythagore n'est plus vérifié, et l'espace peut alors être considéré comme courbe.

où l'on a négligé des termes d'ordre χ^2 . Toutefois, par ses seules mesures, confinées à son espace physique, il ne peut avoir aucune information sur un éventuel espace euclidien \mathbf{R}^n dans lequel il serait plongé : cela reste pour lui un pur objet de spéculation théorique voire théologique.

Quelles indications pouvons-nous encore tirer de cet exemple? Il est clair d'abord que la table de marbre n'est plate – sans courbure – que pour un observateur “extérieur”, à trois dimensions mais que, pour ses habitants à deux dimensions, elle apparaît intrinsèquement courbée.

Cet exemple nous renseigne ensuite sur l'importance de la métrique ds^2 , directement liée aux mesures de longueurs possibles dans cet espace fictif et de ses liens physique avec la courbure : de manière imagée et un peu fautive (voir plus loin), on peut dire que cet espace est tel que *les étalons de longueur y varient de point en point* et ceci est caractéristique des espaces courbes.

Enfin, nous pouvons mettre en évidence le lien et la différence entre coordonnées et distances : les distances, mesurées à l'aide de règles (i.e. d'étalons de longueur) sont évaluées à l'aide de la métrique ds^2 , tandis que les coordonnées ne servent qu'au repérage des points de l'espace [Fig. 6.11].

Surfaces dans \mathbf{R}^n – Espaces de Riemann

Dans \mathbf{R}^3 , une surface ordinaire peut être définie de plusieurs manières :

$$z = z(x, y) \quad (6.35)$$

$$f(x, y, z) = 0 \quad (6.36)$$

$$\begin{cases} x = x(\xi^1, \xi^2) \\ y = y(\xi^1, \xi^2) \\ z = z(\xi^1, \xi^2) \end{cases} \quad (6.37)$$

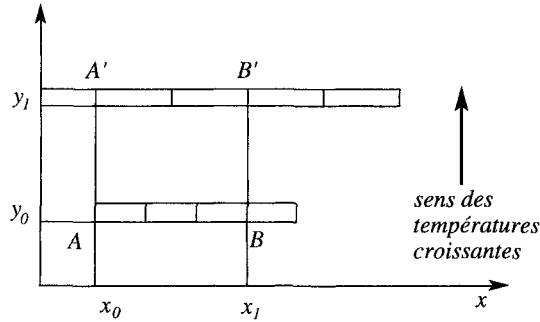


Figure 6.11 : Distances et coordonnées. Les points A et A' d'une part, B et B' d'autre part, ont même abscisse, x_0 et x_1 respectivement. Ces points sont disposés aux sommets d'un rectangle défini par des coordonnées (x,y) cartésiennes. Cependant, la distance AB est supérieure à la distance A'B', si les températures sont croissantes dans la direction des y : les règles se dilatent lorsqu'on les transporte de y_0 en y_1 .

et l'intersection de deux surfaces est, généralement, une variété de dimension inférieure, une courbe. Qu'en est-il dans le cas de \mathbf{R}^n ? Comment ces notions usuelles se généralisent-elles?

Afin de préserver la symétrie entre les diverses variables, nous ne considérerons que les définitions (6.36) et (6.37). Une hypersurface V_{n-1} de \mathbf{R}^n est une variété⁴ (continuum) à $n - 1$ dimensions, que l'on peut donc définir analytiquement par

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0 \tag{6.38}$$

ou par une représentation paramétrique (un plongement de V_{n-1} dans \mathbf{R}^n)

$$\begin{cases} x^1 &= x^1(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}) \\ x^2 &= x^2(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}) \\ \dots & \dots \dots \dots \\ x^n &= x^n(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}) \end{cases} \tag{6.39}$$

La métrique définie sur une telle hypersurface est induite par celle de \mathbf{R}^n ,

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j, \tag{6.40}$$

et est donnée par

$$ds^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x^i(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1})}{\partial \xi^k} \frac{\partial x^j(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1})}{\partial \xi^\ell} d\xi^k d\xi^\ell \tag{6.41}$$

$$\equiv g_{k\ell} d\xi^k d\xi^\ell, \tag{6.42}$$

4. Cf. Appendice D.

avec

$$g_{k\ell} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\ell} \delta_{ij} \quad (6.43)$$

$$(k, \ell = 1, 2, \dots, n-1; i, j = 1, 2, \dots, n) .$$

Bien entendu, la représentation (6.38) permet également d'obtenir une forme du tenseur métrique $g_{k\ell}$ sur l'hypersurface considérée, dès lors que l'une des coordonnées peut s'exprimer en fonction des $n-1$ autres.

De manière similaire, une variété à p dimensions, soit S_p , plongée dans \mathbf{R}^n , sera déterminée soit par la donnée de $n-p$ relations

$$f_1(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, f_2(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \dots, f_{n-p}(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0, \quad (6.44)$$

entre les x^i , soit paramétriquement par

$$\begin{cases} x^1 &= x^1(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) \\ x^2 &= x^2(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) \\ \dots & \dots \dots \dots \\ x^n &= x^n(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p) . \end{cases} \quad (6.45)$$

Le nombre de paramètres *indépendants* (de *coordonnées* indépendantes), ici p , qui définissent les points de S_p , est la *dimension* de S_p . Soient maintenant S_p et S_q deux variétés de dimension p et q , respectivement. Lorsque leur intersection est non vide, on a, généralement,

$$\dim . [S_p \cap S_q] = p + q - n . \quad (6.46)$$

De même que précédemment, la métrique induite par \mathbf{R}^n sur S_p est obtenue de manière analogue et l'on a encore la forme (6.43) avec, cependant, $(k, \ell) = 1, 2, \dots, p$ (au lieu de $n-1$).

Toutefois, nous nous intéresserons principalement à des variétés [Appendice D] à n dimensions V_n (sans référence à un espace euclidien dans lequel elles seraient plongées), munies d'une métrique $g_{ij}[(i, j) = 1, 2, \dots, n]$ et à des sous-variétés S_p qui y sont plongées. Ce qui précède reste essentiellement valable sauf la relation (6.43) qui devient

$$g_{k\ell}[S_p] = g_{ij}[V_n] \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \cdot \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\ell} , \quad (6.47)$$

où les $\{x^i\}$ représentent maintenant des coordonnées dans V_n et où les indices (k, ℓ) varient de 1 à p .

Une variété (un "continuum", selon l'expression de H. Poincaré) à n dimensions, munie d'une notion de distance – d'une métrique – définie par une forme quadratique s'appelle encore un *espace de Riemann* et joue un grand rôle dans les théories relativistes de la gravitation. Notons encore qu'une variété peut toujours être assimilée, *localement*, à son espace ("plan") tangent : nous retrouverons cette propriété un peu plus loin et dans le chapitre 7 où elle permettra d'exprimer le *principe d'équivalence*.

Courbure intrinsèque d'une variété

Nous avons vu ci-dessus que la courbure de Gauss d'une surface S à deux dimensions, de \mathbf{R}^3 a été définie comme propriété invariante liée à la courbure de courbes tracées sur S . Nous nous sommes alors rendu compte que la courbure de S était directement proportionnelle aux dérivées secondes de la métrique de S (induite par celle de \mathbf{R}^3).

La première remarque suggère que la courbure d'une variété V_n à n dimensions puisse être construite et définie à partir des courbures de surfaces à deux dimensions qui y sont plongées. Toutefois, la *direction* de ces surfaces (en un point) étant quelconque, la courbure elle-même va contenir un certain arbitraire qui se traduira par l'existence d'un tenseur, lequel exprimera toutes les possibilités d'orientation de surfaces à deux dimensions.

Pour trouver ce tenseur, considérons en un point x de V_n deux n -vecteurs quelconques a^μ et b^μ . Formons la surface S engendrée par les géodésiques issues de x et tangentes au plan défini par les deux n -vecteurs a^μ et b^μ . L'orientation de S , étant fixée par ces derniers, est donc arbitraire. La métrique de S , induite par celle de V_n , est encore donnée par la relation (6.47), avec $(k, \ell) = 1, 2$ et $(i, j) = 1, 2 \dots n$. La courbure de Gauss de cette surface est encore $K = \text{Det.} \|f_{k\ell}\|$, où $f_{k\ell}$ doit être trouvé à partir de l'expression (6.47) de la métrique $g_{k\ell}$ de S , compte tenu de l'expression (6.32) qui permet de relier ces deux grandeurs. On trouve alors, après un calcul fastidieux,

$$K = \frac{R_{ijmn} a^i b^j a^m b^n}{(g_{in} g_{jm} - g_{im} g_{jn}) a^i b^j a^m b^n}, \quad (6.48)$$

qui indique clairement la dépendance de K des vecteurs a^μ et b^μ , et donc de S . Dans cette dernière relation, le tenseur R_{ijmn} , le *tenseur de Riemann*, est donné par

$$R_{ijmn} = \frac{1}{2} \{ \partial_{nj} g_{im} - \partial_{ni} g_{jm} - \partial_{jm} g_{in} + \partial_{im} g_{jn} \} + g_{rs} \{ \Gamma_{mi}^r \Gamma_{jn}^s - \Gamma_{ni}^r \Gamma_{mj}^s \}, \quad (6.49)$$

où tous les indices varient de 1 à n . Dans l'équation (6.48), c'est la seule partie qui à la fois soit indépendante de S et dépende linéairement des dérivées secondes de

la métrique de V_n . Elle représente nécessairement la courbure de V_n : le tenseur de Riemann *est* le tenseur de courbure.

A ce point de l'étude de la courbure d'une variété à n dimensions, il convient de remarquer que l'on a parlé de vecteurs, tenseurs, etc., sur V_n sans que ceux-ci aient été réellement définis, nous reposant sur les considérations du chapitre 3 concernant les coordonnées curvilignes et qui, pour la plupart, restent valables dans un espace courbe. Nous y reviendrons un peu plus loin dans ce chapitre.

Revenons à la relation (6.49) définissant le tenseur de courbure R_{ijmn} . Ce tenseur apparaît également lorsqu'on essaye de transporter un n -vecteur parallèlement à lui-même le long d'un circuit fermé : si A^i est un tel vecteur, il est facile de montrer que sa variation δA^i , après un tour, est donnée par

$$\delta A^i = \frac{1}{2} R^i{}_{jmn} A^j \oint x^n dx^m, \quad (6.50)$$

expression utilisée dans la plupart des ouvrages de relativité pour introduire le tenseur de courbure. Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que $\delta A^i = 0$, quel que soit le circuit fermé considéré, est que le tenseur de Riemann soit nul; autrement dit, $\delta A^i = 0$ si et seulement si l'espace est plat, localement.

Le tenseur R_{ijmn} apparaît aussi dans toutes sortes de propriétés où la courbure intervient, et qui peuvent également être utilisées pour l'introduire. Ainsi l'équation de la *dévi*ation géodésique [Chap. 7]

$$\frac{\nabla^2 \delta x^i}{ds^2} = R^i{}_{jkl} \delta x^k \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^l}{ds}, \quad (6.51)$$

(où δx^i est la déviation entre deux géodésiques) permet, elle aussi, l'introduction de ce tenseur. Cela est *a priori* un peu étonnant car on pourrait s'attendre que des manifestations très diverses de la courbure introduisent des tenseurs différents construits à partir de g_{ij} et de ses premières dérivées. Le fait que R_{ijkl} apparaisse *toujours* laisse présumer de l'*unicité* de ce tenseur; ce qui nous amène à la seconde remarque effectuée au tout début de ce chapitre.

Si nous avons, en effet, essayé de définir la courbure à l'aide, entre autres, des dérivées secondes $\partial_{ij} g_{kl}$ du tenseur métrique de V_n , nous nous serions de suite heurtés au fait qu'elles ne constituent pas un tenseur. Cependant, en construisant le *tenseur* le plus général possible, linéaire en les dérivées secondes du tenseur métrique, nous aurions inmanquablement abouti au tenseur de Riemann :

Théorème : *Le tenseur d'ordre 4 le plus général, linéaire en les dérivées secondes du tenseur métrique, est le tenseur de Riemann.*

[Démonstration : voir, par exemple, S. Weinberg (1972)].

Dans ces conditions, il n'y a plus rien d'étonnant à ce que le tenseur R_{ijkl} apparaisse partout où la courbure se manifeste.

Propriétés du tenseur de courbure

Le tenseur de Riemann (6.49) possède un certain nombre de propriétés algébriques qui découlent de sa forme explicite. Ainsi, en élevant le premier indice à l'aide du tenseur métrique, il est aisé de montrer que l'on a également la relation

$$R^i{}_{jkl} = \partial_k \Gamma_{j\ell}^i - \partial_\ell \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{j\ell}^r \Gamma_{rk}^i - \Gamma_{jk}^r \Gamma_{r\ell}^i. \quad (6.52)$$

De même, on voit immédiatement que R_{ijkl} obéit aux deux relations de symétrie suivantes :

$$R_{ijkl} = R_{klij} = R_{jilk} \quad (6.53)$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} \quad (6.54)$$

ainsi qu'à la relation cyclique

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0. \quad (6.55)$$

Ces trois dernières relations permettent d'obtenir le nombre de composantes indépendantes du tenseur de courbure. Les indices (i, j, k, ℓ) variant de 1 à n , une paire d'indices – soit les deux premiers, soit les deux derniers – de R_{ijkl} ayant la propriété (6.54) peut prendre $A = \frac{1}{2}n(n-1)$ valeurs; comme, d'autre part, les couples (i, j) et (k, ℓ) sont symétriques, [Eq. (6.53)], ils peuvent prendre $\frac{1}{2}A(A+1)$ valeurs, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A(A+1) &= \frac{1}{2} \frac{n(n-1)}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{8}n(n-1)(n^2 - n + 2) \equiv B_n; \end{aligned} \quad (6.56)$$

enfin, la relation cyclique (6.55) impose C_n^4 contraintes, de sorte que le nombre de composantes indépendantes cherchées est

$$r_n = B_n - C_n^4 = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1), \quad (6.57)$$

ce qui montre bien que si $n = 2$, R_{ijkl} ne possède qu'une seule composante indépendante : une surface de \mathbf{R}^3 ne possède qu'une seule courbure intrinsèque. Ceci n'est vrai ni pour $n = 3$ qui implique 6 composantes indépendantes, ni pour $n = 4$ – le cas auquel nous nous limiterons désormais ⁵ – qui entraîne 20

5. Les indices grecs prendront, comme auparavant, les valeurs 0, 1, 2, 3. Ainsi, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ sera le tenseur de courbure d'une variété à 4 dimensions.

composantes indépendantes. Pour $n = 1$, on obtient le résultat *a priori* un peu surprenant qu'une courbe n'est pas ... courbée ! Il faut se rappeler, cependant, que le tenseur de Riemann ne caractérise que la courbure intrinsèque : si une courbe est intrinsèquement plate elle est, par contre, courbée extrinsèquement, c'est-à-dire en tant que variété plongée dans $\mathbf{R}^n (n > 1)$.

Aux propriétés (6.53)–(6.55) du tenseur de Riemann, il faut adjoindre l'identité

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} \equiv 0, \quad (6.58)$$

l'identité de Bianchi.

A partir du tenseur de courbure, on peut former plusieurs tenseurs utiles, tel le tenseur de Ricci,

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \quad (6.59)$$

qui est symétrique en vertu de (6.53). A l'aide de la propriété d'antisymétrie (6.54) de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, on montre facilement que le tenseur de Ricci est le seul tenseur d'ordre 2 que l'on puisse former par contraction du tenseur de Riemann : les autres contractions possibles donnent 0 ou $\pm R_{\mu\nu}$. En outre, le scalaire

$$R \equiv R^\mu{}_\mu = R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}, \quad (6.60)$$

le scalaire de courbure, est le seul scalaire non nul que l'on puisse former⁶ à partir de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Enfin, les identités de Bianchi (6.58) contractées sur les premier et dernier indices d'une part, ainsi que sur les second et troisième, d'autre part, fournissent la relation

$$\nabla_\lambda R - 2\nabla_\alpha R^\alpha{}_\lambda = 0 \quad (6.61)$$

où nous avons utilisé les définitions (6.59) et (6.60) ainsi que les propriétés (6.53)–(6.55) du tenseur de courbure. Cette dernière relation s'écrit encore

$$\nabla_\lambda \left[R^{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} R \right] = 0. \quad (6.62)$$

Le tenseur

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (6.63)$$

est le tenseur d'Einstein, qui jouera un rôle essentiel dans la suite [Chap. 8].

Les définitions adoptées dans le cas de l'espace-temps – dont la métrique est pseudo-euclidienne – sont étroitement calquées sur le cas des variétés V_n à métrique définie positive. L'espace-temps sera donc (localement) pseudo-euclidien si et

6. La relation (6.55) permet de montrer que le pseudo-scalaire $\frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}$ est nul (g est le déterminant de $g_{\mu\nu}$).

seulement si $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$. A cet égard, notons que les conditions $R = 0$ ou $R_{\mu\nu} = 0$, voire $G_{\mu\nu} = 0$, représentent des conditions nécessaires mais non suffisantes pour que l'espace-temps soit (localement) plat.

L'espace-temps comme variété riemannienne

Lorsque nous effectuons des expériences de laboratoire, l'espace-temps nous paraît être celui de Minkowski, c'est-à-dire un espace plat, au moins à notre échelle. Autrement dit, même si l'espace-temps est courbe, il nous apparaît être localement plat, pourvu que nous ne considérons que des événements très voisins entre eux. Cela signifie encore que la variété (courbe) espace-temps est (localement) assimilable à son espace (4-plan) tangent. Une telle structure de variété [assimilable localement à un espace (pseudo-) euclidien] munie d'une métrique (qui se réduit, dans un système de coordonnées convenable, à $\eta_{\mu\nu}$) constitue, par définition, une *variété riemannienne* [Appendice D]. Nous verrons, au cours du chapitre 7, comment le *principe d'équivalence* est relié à cette intuition; pour le moment nous essaierons d'établir un lien purement algébrique avec ce qui précède. En particulier, nous allons vérifier que, localement, on peut toujours trouver un système de coordonnées dans lequel (i) le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ se réduit à la forme (pseudo-) euclidienne $\eta_{\mu\nu}$ et (ii) les dérivées premières du tenseur métrique sont nulles.

Considérons donc un changement de variables – de coordonnées – du type

$$\{x^\alpha\} \longleftrightarrow \{x^{\lambda'}\} \quad \text{ou} \quad x^\alpha = x^\alpha(x^{\lambda'}) \quad (6.64)$$

avec

$$A^\alpha{}_{\mu'} \equiv \frac{\partial x^\alpha(x^{\lambda'})}{\partial x^{\mu'}}. \quad (6.65)$$

Le tenseur métrique se transforme alors comme [Chap. 3]

$$g_{\mu'\nu'}(x') = A^\mu{}_{\mu'} A^\nu{}_{\nu'} g_{\mu\nu}[x(x')] . \quad (6.66)$$

Plaçons-nous maintenant en un point M de coordonnées $x_0^{\lambda'}$ et considérons un point de coordonnées $x^{\lambda'}$ proche de M de sorte que nous puissions développer aussi bien les $A^\mu{}_{\mu'}$ que les $g_{\mu\nu}$ en série de Taylor :

$$\begin{aligned} A^\mu{}_{\mu'}(x') &= A^\mu{}_{\mu'} + (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) \frac{\partial A^\mu{}_{\mu'}}{\partial x^{\lambda'}} \\ &+ \frac{1}{2} (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) (x^{\sigma'} - x_0^{\sigma'}) \frac{\partial^2 A^\mu{}_{\mu'}}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\sigma'}} + \dots \quad (6.67) \\ &= A^\mu{}_{\mu'} + (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'}} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) (x^{\sigma'} - x_0^{\sigma'}) \frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'} \partial x^{\sigma'}} + \dots \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x') &= g_{\mu\nu} + (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda'}} \\ &+ \frac{1}{2} (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) (x^{\sigma'} - x_0^{\sigma'}) \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda'} \partial x^{\sigma'}} + \dots \end{aligned} \quad (6.69)$$

où les grandeurs $A^\mu{}_{\mu'}$, $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées, dans les membres de droite de ces deux dernières équations, sont prises au point M . Insérant maintenant les développements (6.67) et (6.68) dans la loi de transformation (6.66) pour le tenseur métrique, il vient

$$\begin{aligned} g_{\mu'\nu'}(x') &= A^\mu{}_{\mu'} A^\nu{}_{\nu'} g_{\mu\nu} + \\ &+ (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) \left\{ A^\mu{}_{\mu'} A^\nu{}_{\nu'} \partial_\lambda g_{\mu\nu}^\nu \right. \\ &+ A^\mu{}_{\mu'} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\nu'} \partial x^{\lambda'}} \\ &+ A^\nu{}_{\nu'} g_{\mu\nu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'}} \left. \right\} \\ &+ \frac{1}{2} (x^{\lambda'} - x_0^{\lambda'}) (x^{\sigma'} - x_0^{\sigma'}) [\dots]_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} + \dots \end{aligned} \quad (6.70)$$

Examinons maintenant les possibilités de choix des changements de coordonnées (6.64) (6.65). La matrice $A^\mu{}_{\mu'}$ possède 16 éléments totalement arbitraires tandis que les dérivées $\partial^2 x^\nu / \partial x^{\nu'} \partial x^{\lambda'}$ comportent $4 \times \left[\frac{1}{2} 4(4+1) \right] = 40$ coefficients, arbitraires eux aussi. Enfin dans l'expression $[\dots]_{\mu'\nu'\lambda'\sigma'}$, non écrite parce que complexe et inutile, sont implicitement contenues des dérivées d'ordre 3, du type $\partial^3 x^\mu / \partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'} \partial x^{\sigma'}$. Ces dernières, compte tenu de la symétrie entre les indices $(\mu', \lambda', \sigma')$, sont au nombre de 80 ($80 = 4 \times 20$). Par un choix convenable des 16 $A^\mu{}_{\mu'}$ nous pouvons certainement choisir les 10 composantes de $g_{\mu'\nu'}$ de sorte que $g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'}$: les 6 degrés de liberté qui subsistent correspondent alors aux 6 degrés de liberté des transformations de Lorentz dans l'espace tangent (3 pour la vitesse \mathbf{v} et 3 pour une rotation spatiale). De même, les 40 dérivées $\partial_{\mu'} g_{\alpha'\beta'}$ peuvent être annulées exactement grâce à la possibilité de choisir *exactement* les 40 coefficients $\partial x^\mu / \partial x^{\lambda'} \partial x^{\sigma'}$. Par contre, nous ne pouvons pas, en général, annuler les 100 dérivées secondes $\partial_{\mu'\nu'} g_{\alpha'\beta'}$ car nous ne disposons que de 80 degrés de liberté $\partial x^\mu / \partial x^{\lambda'} \partial x^{\sigma'} \partial x^{\gamma'}$. Aussi subsiste-t-il 20 degrés de liberté qui concernent les dérivées secondes du tenseur métrique : ils correspondent précisément aux 20 composantes indépendantes du tenseur de courbure $R_{\mu\nu\alpha\beta}$. On appelle quelquefois ces propriétés le *théorème de platitude locale*, ce qui se traduit analytiquement par l'existence de coordonnées locales telles que :

$$g_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} + O(x'^2) . \quad (6.71)$$

En conclusion, on peut toujours trouver un système de coordonnées *local* où le tenseur métrique prend la forme (pseudo-) euclidienne (6.71) et dans lequel les symboles de connexion $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ s'annulent en un point. Lorsque le tenseur de courbure est *identiquement nul*, ce qui est le cas de l'espace de Minkowski, on peut trouver des coordonnées globales, et non plus seulement en un point, pour lesquelles $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \equiv 0$. Nous reviendrons au chapitre 7 sur la signification physique de ces propriétés.

Quelques propriétés des tenseurs dans un espace courbe

La plupart des définitions et propriétés des tenseurs de l'espace de Minkowski en coordonnées curvilignes, étudiées au chapitre 3, restent valables en espace courbe avec quelques petites modifications qu'il convient d'avoir à l'esprit.

Considérons un 4-vecteur A^μ de la variété espace-temps, défini ainsi qu'au chapitre 3. Sa dérivée covariante est ⁷

$$\nabla_\alpha A^\mu \equiv \partial_\alpha A^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\nu , \quad (6.72)$$

et ses dérivées covariantes secondes sont données par

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta A^\mu = \partial_{\alpha\beta} A^\mu + \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu A^\nu + \dots \quad (6.73)$$

de sorte qu'en échangeant les indices α et β et en soustrayant, il vient

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A^\nu ; \quad (6.74)$$

autrement dit, *dans un espace courbe les dérivées covariantes ne commutent pas*. Dans l'espace de Minkowski, on avait $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = 0$ dans tous les systèmes de coordonnées curvilignes. La courbure introduit donc dans l'algèbre tensorielle quelques différences importantes. Notons que la relation (6.74) aurait pu également être utilisée pour définir le tenseur de courbure.

Donnons maintenant, sans démonstration [voir exercices], quelques relations utiles, valables aussi bien en espace courbe qu'en espace plat; on a :

$$\Gamma^\mu{}_{\mu\nu} = \partial_\nu \ln \sqrt{|g|} \quad (6.75)$$

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (A^\mu \sqrt{|g|}) \quad (6.76)$$

7. La relation (6.72), jointe aux propriétés énoncées au paragraphe précédent, montre qu'il existe toujours un système de coordonnées locales tel que $\nabla_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu$.

$$\int_V \sqrt{|g|} d^4x \nabla_\mu A^\mu = \int_{\partial V} d\Sigma_\mu A^\mu \quad (6.77)$$

(théorème de Gauss)

$$d\Sigma_\mu = \frac{1}{3!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad (6.78)$$

$$\nabla_\mu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} A^{\mu\nu} \right) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A^{\mu\lambda} \quad (6.79)$$

$$\nabla_\mu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} A^{\mu\nu} \right) \quad (6.80)$$

($A^{\mu\nu}$ antisymétrique)

Trois arguments en faveur d'un espace-temps courbe

Quoique la véritable question devrait être : “Pourquoi l'espace-temps serait-il plat?”, notre intuition repose avant tout sur la simplicité des notions euclidiennes; aussi nous faut-il plutôt argumenter en sens inverse. En fait, nous sommes assez naturellement conduits à concevoir que notre espace-temps est courbe, même si rien ne l'impose véritablement : une expérience n'impose jamais un concept théorique, même si elle le suggère plus ou moins.

1. La relation $E = mc^2$, en associant une masse à toute forme d'énergie (et cela reste à vérifier expérimentalement; voir le chapitre 7), jointe à l'égalité expérimentale entre masse inerte et masse grave (principe d'équivalence faible), implique que, désormais, tout pèse! Il n'existe pas de forme de matière qui soit gravitationnellement neutre. Il en résulte que, même en l'absence de forces d'interaction, les corps sont constamment accélérés et la notion même de mouvement inertiel devient dénuée de sens, sinon peut-être sur de courtes distances et pendant de petits intervalles de temps, c'est-à-dire localement.

Ainsi l'espace-temps devient, en présence de la gravitation, localement (pseudo-) euclidien, localement minkowskien. Il ne possède plus un système de droites du genre temps, auxquelles étaient associés des systèmes d'inertie globaux *via* des mouvements inertiels, globaux eux aussi. L'espace-temps apparaît ainsi comme un espace (pseudo-) riemannien. Le mouvement le plus “droit” possible, c'est-à-dire un mouvement “géodésique”, dépend alors de la répartition et du mouvement des sources d'énergie dans l'espace-temps par l'intermédiaire de la loi d'attraction universelle ou, plus généralement, d'une loi covariante traduisant l'existence d'interactions gravitationnelles. Ce type de mouvement ne peut jamais

être réduit à un mouvement rectiligne et uniforme, *dans tout l'espace-temps*, grâce à un choix judicieux de système de coordonnées : l'espace-temps est courbe.

2. Un argument de nature différente, dû à A. Schild (1967), repose sur le décalage vers le rouge d'un photon "grimant" dans un champ de gravitation, décalage mesuré, rappelons-le, par R.V. Pound et G.A. Rebka (1960) ainsi que par R.V. Pound et J.L. Snider (1965), et observé dans le cas de Sirius B par W.S. Adams (1925), observations confirmées plus tard dans d'autres naines blanches par J.L. Greenstein, J.B. Oke et H.L. Shipman (1971) (1985).

Rappelons [Chap. 4] que si un observateur situé à l'altitude z_0 envoie des signaux (des photons) de période T_0 , un observateur situé à l'altitude z [Fig. 6.12] reçoit ces mêmes signaux avec une période $T > T_0$, bien que ces deux observateurs soient au repos l'un par rapport à l'autre : dans l'espace de Minkowski, tous les rayons lumineux émis par l'observateur situé en z_0 sont "parallèles" entre eux et devraient donc arriver en z espacés de $T = T_0$. Cette contradiction montre que l'espace de Minkowski est *inadéquat* en vue de la description des phénomènes gravitationnels et seul un espace courbe peut lever la contradiction. On exprime quelquefois ce fait en disant que, dans un espace courbe, les étalons de distance (et aussi de temps) varient de point en point, en raison de la gravitation. Cette manière de dire, quoique imagée, n'est pas réellement correcte. En effet, une horloge atomique donnée, située à l'altitude z_0 , possède exactement la même période qu'une horloge identique placée à l'altitude z_1 . C'est seulement lorsqu'on compare les indications fournies par les deux horloges, par exemple à l'aide de signaux électromagnétiques, que l'on constate une différence. Cette différence – certes due à la courbure de l'espace-temps – n'a évidemment pas pour cause une modification réelle des étalons de temps en présence d'un champ de gravitation [c'est-à-dire une modification du comportement d'horloges (non gravitationnelles, tel un pendule simple)], mais prend sa source dans la connexion établie entre deux points distincts de l'espace-temps : cela apparaîtra plus clairement au chapitre 7 (décalage spectral vers le rouge). Dans l'expérience de Pound et Rebka, la présence de gravitation fait que la comparaison des étalons de temps donne des résultats différents à l'altitude z_0 et à l'altitude z .

Il est intéressant de noter que, dans cette discussion de Schild, la nature même du champ de gravitation n'intervient nulle part : il peut s'agir d'un champ scalaire, spinoriel, vectoriel, etc. Le champ de gravitation induit une courbure de l'espace-temps sans que la nature de cette courbure soit autrement spécifiée.

3. La courbure des rayons lumineux, observée au voisinage du Soleil et bientôt au voisinage de Jupiter, vérifiée à l'aide des "mirages gravitationnels" [Chap. 7], rend, elle aussi, nécessaire l'introduction d'un espace-temps courbe. En effet, la structure de l'espace de Minkowski est essentiellement déterminée⁸ par le *cône de lumière*, le même partout : c'est le cône de lumière qui induit la *structure métrique* de l'espace de Minkowski, structure définie par le tenseur $\eta_{\mu\nu}$. La courbure des

8. C'est pourquoi nous avons beaucoup insisté, au chapitre 2, sur les propriétés de l'espace de Minkowski, liées au cône de lumière.

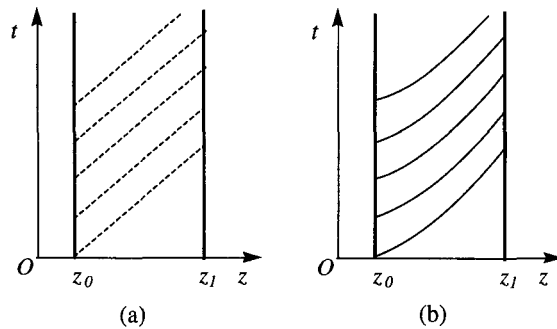


Figure 6.12 : Diagramme d'espace-temps (dans l'espace de Minkowski) correspondant à l'expérience de Pound et Rebka (1960). En (a), les signaux émis par un observateur situé à l'altitude z_0 au-dessus du niveau de la mer, se propageant à la vitesse de la lumière, c'est-à-dire le long de génératrices de cônes de lumière, avec la période T_0 , sont reçus par un observateur, situé à l'altitude z , avec la même période : ceci est contraire à l'expérience de Pound et Rebka, qui montre que $T > T_0$. L'espace de Minkowski est incompatible avec l'expérience. En (b), on tient compte de la courbure des rayons lumineux dans le champ de gravitation terrestre : l'argument reste encore valable. Pour expliquer l'expérience de Pound et Rebka, il est nécessaire que l'étalon de temps en z_0 soit différent de celui à l'altitude z , donc que l'espace-temps soit courbe.

rayons lumineux au voisinage du Soleil indique que le cône de lumière est déformé par la gravitation et ce, de manière différente selon que l'on est plus ou moins proche de la surface. Comme c'est précisément le cône de lumière qui permet d'obtenir la métrique de l'espace-temps, on en déduit nécessairement que celle-ci varie spatialement. Par contre l'argument de Schild, rappelé ci-dessus, montrait que l'étalon de temps (une "horloge") variait avec la gravitation. Ainsi ces deux faits expérimentaux permettent d'estimer que la gravitation fait varier les étalons de temps et de distance : l'espace-temps apparaîtra donc courbe.

Ajoutons que la lumière constituant notre étalon de "rectitude", celle-ci perd donc toute signification en tant que tel dès lors que la gravitation est présente : les droites de l'espace de Minkowski, y compris isotropes, n'ont plus aucun sens physique général, ce ne sont plus des objets géométriques intrinsèques à la structure de l'espace-temps.

EXERCICES

1. On considère l'espace à deux dimensions constitué par la "table de Poincaré" que l'on chauffe, la propagation de la chaleur étant déterminée par la relation

$$\nabla^2 T = S,$$

où S est la source de chaleur. La métrique est toujours donnée par

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + \chi T)^2}.$$

On suppose maintenant que S possède la symétrie circulaire ainsi que T .

(i) Calculer $T(r)$ lorsque $S = \text{const.}$

(ii) Calculer alors la courbure K de cet espace et montrer que la métrique peut encore s'écrire sous la forme

$$ds^2 = \frac{d\bar{r} + \bar{r}^2 d\theta^2}{\left(1 + \frac{K}{4} \bar{r}^2\right)^2},$$

où \bar{r} et θ s'expriment (préciser comment) en fonction de x et y .

(iii) Lorsque K est négatif, montrer que la métrique peut encore s'écrire comme

$$ds^2 = |K|^{1/2} [d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi d\theta^2].$$

[Réf. : H.P. Robertson et T.W. Noonan (1968)]

2. Dans l'espace \mathbf{R}^4 on considère la surface S_3 définie par

$$\begin{cases} w &= a \cos \chi \\ z &= a \sin \chi \cos \theta \\ y &= a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ x &= a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi. \end{cases}$$

(i) Trouver la métrique de S_3 dans le système de coordonnées $\{\chi, \theta, \varphi\}$.

(ii) Trouver les symboles de Christoffel et en déduire les composantes du tenseur de courbure.

3. Soient S_p et S_q deux surfaces à p et q dimensions, respectivement, plongées dans \mathbf{R}^n . Montrer qu'en général, $\dim[S_p \cap S_q] = p + q - n$.

4. On considère une variété riemannienne à deux dimensions munie de la (pseudo-) métrique

$$ds^2 = a^2 [1 - \text{ch}^2 \xi^0 \cdot \sin^2 \xi^1] d\xi^{02} - a^2 \text{sh}^2 \xi^0 d\xi^{12}$$

où (ξ^0, ξ^1) sont des coordonnées curvilignes sur la variété et où a est une constante ayant les dimensions d'une longueur.

(i) Donner les composantes g_{ij} du tenseur métrique et calculer *directement* les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k .

(ii) Ecrire l'équation des géodésiques à partir de la définition

$$\delta \int ds = 0,$$

et en déduire les symboles de Christoffel par identification avec l'équation des géodésiques (3.142).

(iii) Calculer le tenseur de courbure. La variété est-elle courbe ?

(iv) On effectue le changement de coordonnées $\{\xi\} \rightarrow \{\xi'\}$ défini par

$$\begin{cases} \xi'^0 &= a \text{ch} \xi^0 \\ \xi'^1 &= a \text{sh} \xi^0 \cos \xi^1. \end{cases}$$

(a) Calculer les coefficients des transformations directe et inverse, c'est-à-dire les tenseurs $\partial \xi^i / \partial \xi'^j$ et $\partial \xi'^i / \partial \xi^j$.

(b) Calculer la nouvelle forme du tenseur métrique de deux manières différentes.

(c) Calculer les nouveaux symboles de Christoffel de trois manières différentes.

(v) Calculer l'élément de volume $\sqrt{|g|} d\xi^1 d\xi^2$.

5. Montrer que

$$(i) \Gamma_{\mu\nu}^\mu = \frac{1}{2} \partial_\nu \ln |g|.$$

$$(ii) g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\rho = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda [g^{\lambda\rho} \sqrt{|g|}].$$

$$(iii) \nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} [\sqrt{|g|} F^{\mu\nu}].$$

$$(iv) \nabla_{\mu} A^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} [\sqrt{|g|} A^{\mu}].$$

6. Vérifier que $(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) A_{\alpha} = -R^{\lambda}{}_{\mu\nu\alpha} A_{\lambda}$.

7. Montrer que si $u^{\mu} \cdot u_{\mu} = +1$, alors $u^{\mu} \nabla_{\alpha} u_{\mu} = 0$.

8. Soit $T^{\mu\nu}$ un tenseur. Montrer que

$$(\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu}) T^{\alpha\beta} = R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu} T^{\lambda\beta} + R^{\beta}{}_{\lambda\mu\nu} T^{\alpha\lambda}.$$

9. Soit ϕ un champ scalaire. Calculer $(\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) \phi$.

10. On considère un espace-temps à quatre dimensions dont la métrique est donnée par

$$ds^2 = A(r) dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Trouver l'équation des géodésiques et les symboles de Christoffel.

11. Soit S^2 la sphère usuelle de \mathbf{R}^3 , décrite par des coordonnées polaires.

(i) Rappeler quel est son tenseur métrique g_{ij} et les symboles de connexions Γ_{ij}^k .

(ii) Trouver les tenseurs de courbure et de Ricci. Trouver le scalaire de courbure.

12. Mêmes questions pour la sphère S^3 plongée dans \mathbf{R}^4 .

13. Mêmes questions pour l'hyperboloïde H^3 plongé dans \mathcal{M}^4 et d'équation $x^0{}^2 - \mathbf{x}^2 = a^2$ ($a = \text{const.}$).

Le principe d'équivalence

L'expérience de pensée (“Gedankenexperiment”) que constitue l'ascenseur d'Einstein, étudiée au chapitre 1, indique que, dans un champ de gravitation homogène et uniforme, il est toujours possible d'annuler celui-ci, à l'aide d'un choix judicieux de coordonnées. Il est clair, d'autre part, que dans le cas d'un champ de gravitation qui n'est ni homogène ni uniforme, il existe toujours une échelle de temps et de distance telle qu'il possède *approximativement* ces propriétés. Il est alors possible d'annuler *localement*, dans l'espace et dans le temps (c'est-à-dire sur des distances très faibles et pendant des intervalles de temps très courts), les effets mécaniques de la gravitation. On se souvient [Chap. 1] que cette possibilité était liée à l'égalité supposée de la masse inerte et de la masse grave d'un corps,

$$m_{\text{inertie}} = m_{\text{grave}} , \quad (7.1)$$

égalité théorique suggérée par une égalité expérimentale vérifiée avec une excellente précision (voir plus loin). L'égalité (7.1), le *postulat* (7.1), s'appelle le *principe d'équivalence faible*.

Ce principe est ensuite étendu non plus aux seuls effets mécaniques dus à la gravitation, mais encore aux effets de *toutes* les lois de la physique, qu'il s'agisse de l'électromagnétisme ou des phénomènes quantiques. Ainsi cette extension, appelée le *principe d'équivalence fort*, affirme, par exemple, que dans un référentiel en chute libre, la lumière se propage en ligne droite, que les équations de l'électromagnétisme sont les équations de Maxwell ordinaires, etc. Une extension supplémentaire, le *principe d'équivalence ultra-fort*, affirme la validité du principe en ce qui concerne la gravitation elle-même.

Le principe d'équivalence¹ entraîne une révision fondamentale de nos concepts d'espace et de temps. En effet, dire que, *localement*, les lois de la physique sont les lois usuelles (donc relativistes), c'est aussi affirmer que, localement, l'espace-temps est l'espace de Minkowski. C'est également admettre qu'en chaque point de

1. Sauf mention explicite du contraire, lorsque nous utiliserons l'expression “principe d'équivalence”, il s'agira toujours du principe ultra-fort.

l'espace-temps, on peut toujours trouver un système de coordonnées lorentziennes, lesquelles correspondent donc à un système de référence "en chute libre". Une exigence de cohérence minimale est alors que l'on puisse raccorder ensemble tous ces systèmes de coordonnées locales. Tout ceci est, en fin de compte, caractéristique d'une variété pseudo-riemannienne $[V^4, g_{\mu\nu}(x)]$, à quatre dimensions, munie d'une (pseudo-) métrique $g_{\mu\nu}$ [Appendice D], caractéristique de la manière dont la gravitation agit sur les étalons de temps et de longueur, et donc sur l'ensemble des phénomènes physiques.

Toutefois, si le principe d'équivalence nous apprend que l'espace-temps est une variété pseudo-riemannienne, et donc *a priori* un espace-temps courbe, il ne nous enseigne rien sur la façon dont il est courbé, c'est-à-dire sur le tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x)$. C'est pourquoi ce principe permet une grande variété de théories relativistes de la gravitation dont nous n'examinerons qu'une seule, au chapitre suivant, la Relativité Générale.

Dans ce chapitre, nous explorerons davantage les conséquences du principe d'équivalence et ses fondements expérimentaux.

Le principe d'équivalence faible et les expériences d'Eötvös-Dicke

Nous avons déjà expliqué que les expériences de Galilée sur la chute des corps constituaient la première indication suggérant l'identité des masses grave et inerte. L'existence de ces deux types de masse avait d'ailleurs bien été comprise par Newton qui, à l'aide d'un pendule simple [Chap. 1], avait montré leur égalité à environ un millième près. Toutefois, à la fin du siècle dernier, la nécessité d'une meilleure précision se faisait sentir et était d'ailleurs rendue possible par les progrès techniques de l'époque.

Le principe de cette mesure [c'est-à-dire, de l'égalité $m_{\text{in.}} = m_{\text{gr.}}$] est simple; il consiste à se placer dans une situation physique où les deux types de masse interviennent concurremment pour donner lieu à une situation d'équilibre de l'appareil expérimental. Ainsi la masse inerte sera liée à une force du type centrifuge (rotation de la Terre) tandis que la masse grave contribuera de par la force de pesanteur.

1. L'expérience de R. Eötvös est l'une de ces expériences (1889); répétée à plusieurs reprises avec divers perfectionnements avec D. Pekár et E. Fekete (1922), elle avait beaucoup impressionné Einstein. Son principe est le suivant. Considérons [Fig. 7.1] le système constitué par un pendule de torsion dont l'équipage mobile est formé par deux masses A et B , faites de substances différentes, et situées à des distances ℓ_A et ℓ_B du fil de torsion. Supposons que les deux corps A et B réagissent différemment au champ de gravitation ambiant (celui de la Terre, en l'occurrence). Cela signifie que le rapport des masses graves aux masses inertes de ces deux corps n'est pas une constante universelle (que l'on peut toujours poser comme étant égale à 1 par un choix judicieux des unités de masse). Dans ces conditions, la position

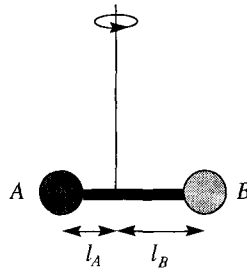


Figure 7.1 : Schéma de principe des expériences d'Eötvös-Dicke.

d'équilibre du pendule va varier légèrement par rapport à celle qu'il aurait si les deux corps *A* et *B* réagissaient de manière identique.

Examinons cela d'un peu plus près et, à cette fin, détaillons davantage les forces auxquelles est soumis le pendule [Fig. 7.2]. Une masse quelconque est soumise d'une part à la pesanteur $P = mg$ dirigée verticalement et, d'autre part, à une force horizontale $F_H = m\omega^2 R \sin \varphi$, où g est l'accélération de la pesanteur, ω la vitesse de rotation, R le rayon de la Terre et φ la latitude du lieu où se situe l'expérience (en l'occurrence, la latitude de Budapest). Les forces horizontales [Fig. 7.3] qui agissent sur le pendule sont équilibrées par la torsion du fil et l'on a alors

$$C = \ell_A F_{HA} - \ell_B F_{HB} \tag{7.2}$$

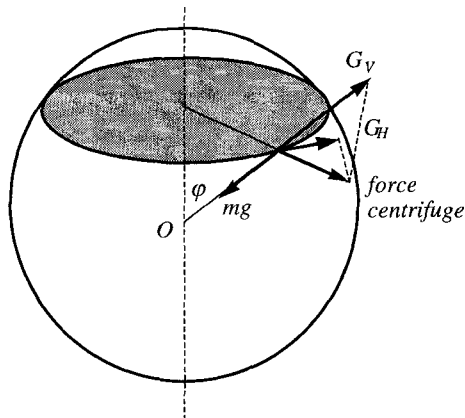


Figure 7.2 : Les forces qui agissent sur une masse située à la surface de la Terre.

où C est le couple des forces. A l'équilibre, les forces verticales obéissent à

$$\ell_A \cdot (m_{gA}g - m_{iA}G_V) = \ell_B \cdot (m_{gB}g - m_{iB}G_V) \tag{7.3}$$

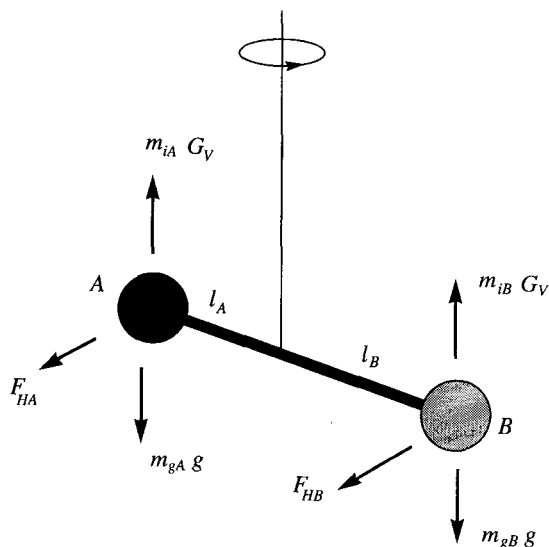


Figure 7.3 : Action des différentes forces sur l'équipage mobile du pendule.

où G_V est la composante verticale de l'accélération centrifuge

$$G_V = \omega^2 R \cos \varphi . \quad (7.4)$$

Les relations (7.2) et (7.3) donnent encore

$$C = l_A m_{iA} G_H \left\{ 1 - \left[\frac{m_{gA}}{m_{iA}} g - G_V \right] \left[\frac{m_{gB}}{m_{iB}} g - G_V \right]^{-1} \right\} , \quad (7.5)$$

qui, compte tenu de ce que $G_V \ll g$, s'écrit également

$$C \simeq l_A m_{gA} G_H \left\{ \frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}} \right\} , \quad (7.6)$$

où la composante horizontale G_H de l'accélération centrifuge est donnée par

$$G_H = \omega^2 R \sin \varphi . \quad (7.7)$$

La relation (7.6) indique clairement que si le rapport de la masse inerte à la masse grave n'est pas une constante universelle (autrement dit, si $m_i \neq m_g$, avec un choix convenable d'unités, et ce pour toute substance), alors une rotation du pendule est possible ($C \neq 0$), laquelle pourrait être observée.

D'un point de vue expérimental, l'expérience est réalisée deux fois, en échangeant le rôle des masses A et B . Cela permet, d'une part, d'obtenir une position de

référence pour l'équipage mobile du pendule et, d'autre part, de pouvoir mesurer une déviation éventuelle plus importante – le double – de ce même équipage.

L'appareil de R. Eötvös est représenté sur la figure 7.4. La forme curieuse de l'instrument est due [R.H. Dicke (1961)] à ce qu'il était conçu et utilisé en vue de recherches géophysiques². Le décalage en altitude des deux masses du pendule était alors rendu nécessaire pour mesurer des gradients verticaux du champ de gravitation terrestre. Malheureusement, cette même structure est, dans le cadre de la vérification du principe d'équivalence faible, une source d'erreurs peu contrôlables; elle rend, en effet, l'appareil sensible aux gradients du champ de gravitation et donc à la position même des objets massifs – telle celle de l'expérimentateur – autour de l'appareil. L'expérience fut réalisée d'abord en 1889 par R. Eötvös puis en collaboration avec D. Pekár et E. Fekete en 1922, en utilisant des substances diverses (cuivre, verre, etc.) et aucune déviation sensible ne fut trouvée. Le résultat final (1922) est

$$\left| \frac{m_i - m_g}{m_g} \right| \lesssim 3 \times 10^{-9}.$$

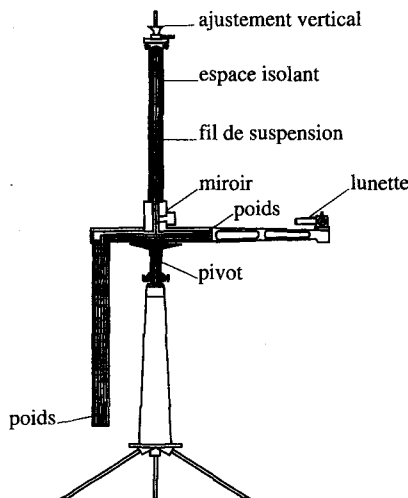


Figure 7.4 : Schéma de l'appareil d'Eötvös [extrait de *Annalen der Physik*, 68, 11, 1922; article de R. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete; reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur].

R.H. Dicke (1961, 1965) a émis les critiques suivantes sur cette expérience [voir aussi F. Everitt (1975)] : (i) sa sensibilité éventuelle aux gradients du champ de gravitation; (ii) la possibilité de courants de convection apparaissant du fait de l'existence de gradients de température (même non mesurables!) au sein de l'appareil; (iii) la contamination magnétique des poids : quelques 10^{-6} g d'un

2. Un domaine où R. Eötvös a laissé un nom . . .

matériau magnétique suffisent, en raison du champ magnétique terrestre, à produire une déviation du pendule environ 1000 fois plus importante que l'erreur probable annoncée par R. Eötvös; (iv) la diffraction du télescope, servant à la lecture de la déviation du miroir lié à l'équipage mobile du pendule, est une source d'erreur supplémentaire (alors que l'erreur probable annoncée correspond à $\cdot 5 \times 10^{-2}$ fois la plus petite division, la tache de diffraction du télescope représente, à elle seule, 40 fois autant); (v) la présence d'un opérateur, nécessaire pour lire le résultat de la mesure, produit une perturbation gravitationnelle environ 200 fois plus importante que l'erreur probable.

2. Pour ces raisons (et quelques autres), R.H. Dicke, R. Krotkov et P.H. Roll furent amenés à refaire l'expérience d'Eötvös, en remédiant aux difficultés signalées plus haut. L'expérience de Dicke est un peu différente dans son principe, en ce qu'elle utilise le champ de gravitation dû au Soleil, c'est-à-dire l'accélération de la Terre tombant sur le Soleil.

Bien que l'accélération due au Soleil soit environ deux fois plus faible [$\cdot 62 \text{ cm/s}^2$] que celle correspondant à la force centrifuge due à la rotation de la Terre [1.4 cm/s^2], une telle expérience présente plusieurs avantages. D'abord, l'appareil est fixe, ce qui évite d'avoir à le retourner (échange des masses A et B) : ce retournement a lieu automatiquement toutes les 24 heures, en raison de la rotation apparente du Soleil autour de la Terre. Ceci, en évitant une manipulation, élimine *ipso facto* une source d'erreur. Ensuite, un résultat positif éventuel de l'expérience se traduirait par un mouvement périodique, de période 24 heures, de l'équipage mobile du pendule [Fig. 7.5]. Pour le voir, supposons que l'un des poids, A par exemple, de l'expérience d'Eötvös-Dicke, tombe vers le Soleil un peu plus rapidement que l'autre, B . Supposons en outre que l'expérience débute à 0 heure, l'appareil étant par définition à l'équilibre. Six heures plus tard, la Terre a effectué un quart de tour et, du fait des forces appliquées en A et B (qui sont différentes par hypothèse), la position d'équilibre du pendule a varié. Six heures après – soit douze heures après le début de l'expérience – la position du pendule est à l'opposé de sa position initiale, etc. Ceci se traduira par un signal de période 24 heures dans la position d'équilibre du pendule.

Cependant, à côté des avantages indiqués plus haut, existent aussi quelques inconvénients, comme la faiblesse déjà mentionnée de l'accélération des corps "tombant" vers le Soleil, telles les perturbations diurnes (marées, effets de température induits par le cycle jour-nuit, etc.) qu'il convient d'éliminer très soigneusement.

Examinons maintenant rapidement comment R.H. Dicke et ses collaborateurs (1964) ont pu remédier aux difficultés de l'expérience d'Eötvös et, en conséquence, ont pu augmenter sa précision.

D'abord, l'ensemble de l'appareil [Fig. 7.6] est enterré dans un puits, soigneusement isolé thermiquement, la température et l'un de ses gradients pouvant être enregistrés à distance. L'équipage du pendule est conçu de telle sorte que l'influence des gradients du champ de gravitation soit minimale, contrairement au cas de l'expérience d'Eötvös : la disposition des poids, aux sommets d'un triangle équilatéral, permet de diminuer le moment quadrupolaire de l'équipage du pendule.

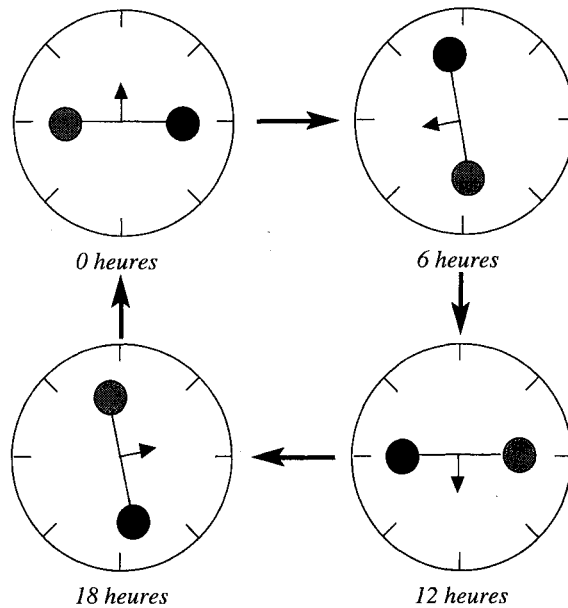


Figure 7.5 : Variation périodique de la position d'équilibre du pendule d'Eötvös-Dicke. Si les deux masses A et B subissent des forces horizontales nettes différentes (dans le cas où $m_{iA}/m_{gA} \neq m_{iB}/m_{gB}$), cela se traduit par une variation périodique (de période 24 heures) de la position d'équilibre. La figure indique, de manière exagérée, d'éventuelles positions d'équilibre toutes les six heures, ce qui correspond à une rotation de la Terre de 90° . Rappelons que la position du pendule par rapport à la Terre est fixe. Le cadran gradué indique donc la position de la Terre par rapport au Soleil. Notons le renversement de A (en noir) et de B (en grisé) toutes les douze heures.

Celui-ci est constitué de deux poids de cuivre et d'un poids d'or (ou de chlorure de plomb, de cuivre, de platine, etc.) suspendus à un cadre de quartz (un matériau très stable à de nombreux égards : insensibilité au champ magnétique terrestre, difficulté à être chargé électriquement, rigidité, etc.). Enfin, l'ensemble du pendule de torsion est enfermé dans une enceinte au sein de laquelle règne un très bon vide (10^{-8} mm de mercure), ce qui permet de réduire sensiblement les effets d'éventuels gradients de température ou des fluctuations de la pression sur l'équipage mobile, dues au gaz résiduel.

A ces précautions, afin de prévenir l'excitation éventuelle de modes d'oscillations *non linéaires* (du pendule) à des périodes de 24 heures, l'équipage est amorti électroniquement par un système de rétroaction : ces modes peuvent, en effet, être excités par de nombreux phénomènes tels que des ondes sismiques. Parmi ces modes, outre les modes de torsion, existent également des oscillations d'ensemble, l'oscillation de la fibre de quartz agissant alors comme un ressort. Il convient donc de les amortir car, en fait, ils tendent à changer le zéro de la position du pendule de manière *aléatoire*.

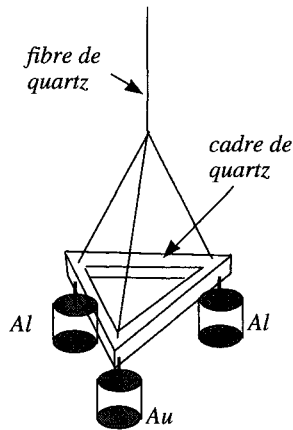


Figure 7.6 : Le pendule de Dicke [d'après P. Roll et al. (1964)].

Enfin, la position de l'équipage mobile du pendule est mesurée à distance, sans intervention d'un expérimentateur. Un faisceau lumineux est réfléchi sur l'un des barreaux de quartz du pendule et sa déviation traduite sous forme électrique par une cellule photoélectrique. Ce signal est ensuite utilisé de façon à ramener le pendule au zéro, la force exercée étant, elle, enregistrée. Ainsi, sur une période d'environ 10 s, ce système permettait de détecter une déviation angulaire de l'ordre de 10^{-7} degrés.

Finalement, cette expérience conclut à l'égalité de la masse inerte et de la masse grave avec la précision [P.G. Roll et al. (1964)] :

$$\left| \frac{m_i - m_g}{m_g} \right| < 1.5 \times 10^{-11} \quad (\text{à } 1\sigma).$$

3. Les principales limitations de cette expérience étaient les perturbations sismiques, les effets thermiques et les gradients du champ de gravitation [voir la discussion de F. Everitt (1975)], aussi n'est-il guère étonnant que cette expérience ait été reprise avec un pendule possédant un moment quadrupolaire plus faible et un meilleur environnement sismique. Ainsi V.B. Braginsky et V.I. Panov (1971) donnent

$$\left| \frac{m_i - m_g}{m_g} \right| < .45 \times 10^{-12} \quad (\text{à } 1\sigma);$$

toutefois cette expérience a été parfois critiquée.

4. Plus récemment E.G. Adelberger et al. (1990) ont beaucoup perfectionné l'expérience d'Eötvös et ont également testé le principe d'équivalence faible dans le champ de gravitation de la Terre. Comme nous l'avons déjà mentionné au chapitre 1, ils entendaient principalement tester plusieurs modèles possibles pour

une éventuelle cinquième force. Néanmoins, ils ont légèrement amélioré le résultat de Roll *et al.* (1964) et, au niveau d'un sigma, ils obtiennent

$$\frac{\Delta m}{m} = \begin{cases} (.2 \pm 1.0) \times 10^{-11} & \text{pour le couple } Cu/Be \\ (.5 \pm 1.3) \times 10^{-11} & \text{pour le couple } Al/Be . \end{cases}$$

5. Mentionnons enfin, pour terminer ce paragraphe, une expérience spatiale³ étudiée par F. Everitt et P.W. Worden (1974, 1975, 1978) qui devrait permettre une détermination du rapport m_i/m_g avec une précision de l'ordre de 10^{-17} et même, dans des versions plus élaborées, de l'ordre de 10^{-20} ! Le principal avantage d'une expérience spatiale réside dans l'élimination des vibrations (aléatoires) d'origine sismique, qui constituent la limitation la plus importante des expériences de laboratoire. En outre, l'accélération que l'on peut obtenir dans une telle expérience – celle qui fait intervenir la masse d'inertie – est beaucoup plus importante que celle due à la rotation de la Terre. Cependant, une expérience du type Eötös, réalisée à bord d'un satellite, ne peut guère donner une précision supérieure à 10^{-14} ou 10^{-15} : en effet, le mouvement du satellite le long de sa trajectoire introduit, au cours du temps, des gradients du champ de gravitation – et ce, d'autant plus que l'orbite est plus excentrique – dont l'effet ne pourrait être séparé de ce que l'on recherche qu'au prix d'une durée exagérée de l'expérience. Il est donc nécessaire de recourir à un autre type de mesure.

Le principe en est le suivant [Fig. 7.7]. Deux cylindres coaxiaux, constitués de matériaux différents, sont mis en orbite, l'axe commun des deux cylindres conservant une direction fixe dans l'espace. Chacune des deux masses est soumise à l'attraction de la Terre, d'une part, et à l'accélération centrifuge orbitale, d'autre part. Une quelconque différence dans la chute de l'un des corps vers la Terre se traduira par un déplacement relatif périodique des deux cylindres. Ce déplacement est évidemment très faible : pour obtenir une précision sur le rapport m_i/m_g d'environ 10^{-17} , on doit pouvoir mesurer un déplacement relatif inférieur à 1Å ! Une telle mesure nécessite évidemment des techniques très particulières [techniques cryogéniques, W.M. Fairbank (1974)] pour pouvoir mettre en évidence un déplacement aussi petit, et ce, sans parler de la nécessité d'études préalables d'effets perturbateurs de toutes sortes : mouvements du satellite, "marées" de l'hélium liquide dans son réservoir (nécessaire pour l'obtention de très basses températures) . . . même la position des divers composants électroniques n'est pas (gravitationnellement) indifférente !

6. Examinons maintenant dans quelle mesure le principe d'équivalence faible est satisfait par les diverses interactions rencontrées dans la Nature : électromagnétiques, fortes, faibles et gravitationnelles. Il est clair *a priori* que les interactions gravitationnelles au sein d'un noyau, étant d'ordre $Gm_{\text{proton}}/R_{\text{noyau}}c^2 \sim 10^{-39}$, sont tout à fait négligeables; aussi nous limiterons-nous aux autres types de force.

3. Cette expérience, appelée STEP (Satellite Test of the Equivalence Principle), acceptée d'abord par l'ESA (European Space Agency), en avril 1991, a malheureusement été repoussée.

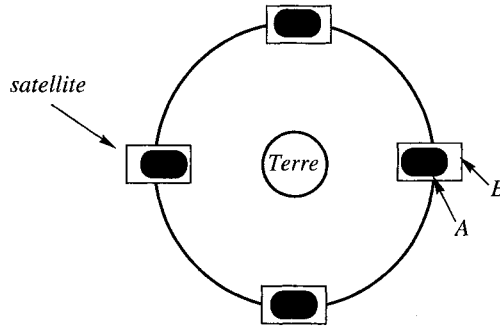


Figure 7.7 : Principe d'une mesure spatiale du rapport m_i/m_g . Deux cylindres coaxiaux A et B, constitués de deux substances différentes, sont mis en orbite autour de la Terre. Si l'un des corps tombe plus vite que l'autre vers la Terre, cela se traduira par un mouvement relatif de A et B périodique (avec la période du satellite).

Pour trouver l'ordre de grandeur de ces effets, supposons que l'interaction de type K viole (faiblement) le principe d'équivalence faible, de sorte que l'on puisse écrire

$$m_G = m_I + \sum_K \eta_K \frac{E_K}{c^2} \quad (7.8)$$

où η_K est un "coefficient de violation" qui dépend de la nature K de l'interaction considérée, tandis que E_K est la contribution à l'énergie interne du corps étudié (dans une expérience du type Eötvös) pour le même type d'interaction. Pour deux corps de compositions différentes A et B situés dans le champ de gravitation g , l'accélération est donnée par

$$\gamma(A \text{ ou } B) = \left\{ 1 + \sum_K \eta_K \frac{E_K(A \text{ ou } B)}{m_I(A \text{ ou } B)c^2} \right\} g, \quad (7.9)$$

de sorte que le rapport

$$\eta \equiv 2 \frac{\gamma(A) - \gamma(B)}{\gamma(A) + \gamma(B)} = \sum_K \eta_K \left[\frac{E_K(A)}{m_I(A)c^2} - \frac{E_K(B)}{m_I(B)c^2} \right] \quad (7.10)$$

constitue une mesure de la violation du principe d'équivalence faible, mesure dont nous avons vu plus haut qu'elle fournit $|\eta| < 10^{-11}$ ou 10^{-12} suivant les expériences réalisées. Ainsi, en attribuant toute la violation éventuelle de l'égalité $m_I = m_G$ à l'interaction de type K , on obtiendra une *borne supérieure* pour η_K .

A titre d'exemple, considérons un noyau composé de A nucléons dont Z protons. Son énergie électrostatique est donnée par

$$E_{es} = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R_0 A^{1/3}}, \quad (7.11)$$

où l'on a utilisé la relation semi-empirique qui fournit le rayon d'un noyau, $R = R_0 A^{1/3}$ ($R_0 = 1.24 \times 10^{-13}$ cm), supposé uniformément chargé. Pour deux corps aussi dissemblables que le platine ($Z = 78$, $A = 195$) et l'aluminium ($Z = 13$, $A = 27$) utilisés dans ces expériences – donc qui pourraient éventuellement donner lieu à un effet perceptible – on a

$$\left| \frac{E_{es}(Pt)}{m_I(Pt)} - \frac{E_{es}(Al)}{m_I(Al)} \right| \sim 10^{-3},$$

et, finalement, $\eta \lesssim 10^{-8} - 10^{-9}$. Cet exemple, extrêmement simple, montre non seulement que les interactions électrostatiques ne violent pratiquement pas l'équivalence faible, mais encore la nécessité de *modèles* décrivant la matière et la façon dont interagissent ses divers composants : ici, le noyau a été assimilé à une sphère uniformément chargée *et* l'on a utilisé une formule semi-empirique fournissant son rayon.

On utilise, généralement, pour les interactions nucléaires une formule *semi-empirique*⁴ bien établie qui fournit l'énergie de liaison d'un noyau $[A, Z]$,

$$E_{\text{nucl.}}(\text{MeV}) = 15.68 A - 18.56 A^{2/3} - 0.717 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 28.1 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + E_P, \quad (7.12)$$

expression dans laquelle on peut reconnaître, compte tenu de la relation $R = R_0 A^{1/3}$, l'énergie de liaison par nucléon, l'énergie de surface du noyau, son énergie électrostatique et où E_P est une énergie d'appariement donnée par

$$E_P = \frac{1}{2}(-1)^Z [1 + (-1)^A] \times \frac{12}{A^{1/2}}. \quad (7.13)$$

Le cas des interactions électromagnétiques autres qu'électrostatiques, à l'intérieur du noyau, est beaucoup plus complexe car il requiert un modèle détaillé de la structure nucléaire. Ces interactions donnent lieu, en effet, à des forces magnétostatiques dues aux courants de protons au sein du noyau, d'une part, et à des forces entre les spins des nucléons et les champs magnétiques qu'ils engendrent, d'autre part.

De même, l'énergie de liaison des électrons atomiques peut être estimée [M.G. Bowler (1976)] à partir du modèle d'atome de Thomas-Fermi, qui fournit⁵

$$E_{\text{at.}} = 15.73 Z^{7/3}, \quad (7.14)$$

et donc la valeur de $\eta_{\text{at.}}$.

Les interactions faibles nécessitent également, pour pouvoir être considérées, un modèle précis du noyau dans lequel les nucléons interagissent faiblement *via* la théorie de Weinberg-Salam. Ceci a été calculé par M.P. Haugan et C.M. Will

4. Cf. L. Valentin (1975).

5. L.D. Landau, E.M. Lifschitz, *Mécanique Quantique*.

(1976) qui donnent $\eta_{\text{faible}} \lesssim 10^{-2}$ tandis qu'un calcul d'ordre de grandeur basé sur le modèle de Fermi [M.G. Bowler (1976)] fournit $\eta_{\text{faible}} \lesssim 10^{-1} - 10^{-2}$ si l'on accepte $\delta m/m \lesssim 10^{-12}$ et $\eta_{\text{faible}} \lesssim 10^{-1}$ si l'on se limite aux résultats de R.H. Dicke *et al.*, soit $\delta m/m \lesssim 10^{-11}$. Il n'est donc pas totalement évident que les interactions faibles obéissent bien au principe d'équivalence [voir également J.P. Hsu (1978)].

Le tableau 7.1 résume ces différents effets.

Nature de l'interaction	$\eta \equiv$ violation de $m_g = m_I$
Interactions électrostatiques (noyau)	$\eta_{\text{es}} < 4 \times 10^{-10}$
Interactions magnétostatiques (noyau)	$\eta_{\text{ms}} < 6 \times 10^{-6}$
Couplages des moments magnétiques des nucléons avec le champ magnétique des protons	$\eta_{\text{HF}} < 2 \times 10^{-7}$
Interactions électrostatiques des électrons atomiques	$\eta_{\text{TF}} < 5 \times 10^{-7}$
Interactions nucléaires	$\eta_{\text{nuc1}} < 5 \times 10^{-10}$
Forces gravitationnelles entre nucléons	$\eta_{\text{grav}} < 10^{+27}!$
Interactions faibles	$\eta_{\text{faible}} < 10^{-2}$

Tableau 7.1 : Bornes supérieures d'éventuelles violations du principe d'équivalence faible, pour différents types d'interactions, déduites des expériences du type Eötvös [d'après C.M. Will (1981)].

Le principe d'équivalence et le couplage minimal

Nous venons de voir que le principe d'équivalence faible est bien vérifié, expérimentalement parlant. Nous allons maintenant énoncer ce principe dans toute son extension et examiner ses principales conséquences et, en particulier, dans quelle mesure il est, lui aussi, vérifié au niveau expérimental. Nous utiliserons la formulation de C.M. Will (1981) qui, outre la précision, possède l'avantage de bien séparer les différentes hypothèses effectuées.

Principe d'équivalence d'Einstein : (i) la masse inerte d'un corps est égale à sa masse grave (passive); (ii) l'issue de toute expérience non gravitationnelle locale est indépendante de la vitesse de l'appareillage dans un système en chute libre; (iii) l'issue de toute expérience non gravitationnelle et locale⁶, est indépendante de l'endroit et de l'époque où elle est réalisée [C.M. Will (1981)].

1. Cet énoncé appelle un certain nombre de remarques. Nous avons déjà commenté le point (i) – l'équivalence faible – et avons indiqué qu'il était très bien

6. ... de masse négligeable, de sorte que le champ gravitationnel puisse toujours être ignoré, dans le système en chute libre. L'expérience apparaît ainsi comme une "particule-test"...

vérifié expérimentalement. Il subsiste, toutefois, des situations où il pourrait ne pas être valable. Ainsi, particules et antiparticules tombent-elles de la même manière au sein d'un champ de gravitation? La réponse (expérimentale) est positive, à une approximation convenable, en ce qui concerne les électrons et positrons [voir la discussion de M.G. Bowler (1976)], le système ${}^7 K_0 \bar{K}_0$ [M.L. Good (1961)], les neutrinos et antineutrinos ⁸ [S. Pakvasa, W.A. Simmons, T.J. Weiler (1988)]. De même, mesure-t-on (quoique de manière non concluante) l'universalité de la chute libre d'un électron [W.M. Fairbank, F.C. Witteborn, L.V. Knight (1968)] ou de neutrons [L. Koester (1976); V.F. Sears (1982)].

De manière générale, un comportement différent des particules et des antiparticules dans un champ de gravitation impliquerait une brisure de l'invariance par conjugaison de charge. Celle-ci est vérifiée expérimentalement à mieux que 5×10^{-6} près; il est donc raisonnable d'affirmer que les antiparticules obéissent au principe d'équivalence faible à probablement mieux que 10^{-4} près.

2. Une situation importante où l'équivalence faible pourrait ne pas être vérifiée concerne l'interaction gravitationnelle elle-même. En effet, les expériences du type Eötvös ne peuvent être utilisées à cet effet, en raison de la faiblesse même de ce genre d'interaction : elles fournissent $\eta_{\text{grav}} < 10^{+27}$! Aussi est-il nécessaire d'utiliser des objets très massifs, tels la Terre et la Lune dans le champ de gravitation du Soleil ou bien Mars et Jupiter dans ce même champ. Si η_{grav} désigne le "coefficient de violation" de l'équivalence faible par l'interaction gravitationnelle, donc si l'on pose

$$m_{\text{grav.}} = m_{\text{in.}} + \eta_{\text{grav.}} \frac{E_{\text{grav.}}}{c^2} \tag{7.15}$$

les équations du mouvement de la Terre et de la Lune, dans le champ de gravitation du Soleil, s'écriront

$$\begin{cases} \vec{\gamma}_T = -\frac{m_{GT}}{m_{IT}} G \frac{\vec{x}_T M_\odot}{|\vec{x}_T - \vec{x}_S|^3} - \frac{m_{GI}}{m_{IT}} G \frac{(\vec{x}_T - \vec{x}_L)}{|\vec{x}_T - \vec{x}_L|^3} m_{GL} \\ \vec{\gamma}_L = -\frac{m_{GL}}{m_{IL}} G \frac{\vec{x}_L M_\odot}{|\vec{x}_L - \vec{x}_S|^3} - \frac{m_{GL}}{m_{IL}} G \frac{(\vec{x}_L - \vec{x}_T)}{|\vec{x}_L - \vec{x}_L|^3} m_{GT} \end{cases} \tag{7.16}$$

où les indices T, L, S se rapportent, respectivement, à la Terre, la Lune et le Soleil (M_\odot désigne la masse grave active du Soleil). L'accélération relative Terre/Lune, due à la violation éventuelle de $m_I = m_G$, est alors donnée par

$$\vec{\gamma} \equiv \vec{\gamma}_L - \vec{\gamma}_T \text{ à l'ordre } \eta_{\text{grav}} \tag{7.17}$$

7. Il semble bien que l'argument de Good ne soit pas correct [T. Damour]; il est, en effet, basé sur l'utilisation du champ de gravitation classique ϕ , alors que seul $\nabla\phi$ possède un sens (alors que seul $\nabla\nabla\phi$ en a un en Relativité Générale).

8. Si les neutrinos considérés sont des neutrinos de Majorana, alors ce qui est testé est l'égalité de la chute libre des neutrinos droits et gauches.

$$\begin{aligned}
&= \eta_{\text{grav}} G \left[\frac{E_{\text{grav}}(\text{Terre})}{m_{\text{in.}}(\text{Terre})c^2} - \frac{E_{\text{grav}}(\text{Lune})}{m_{\text{in.}}(\text{Lune})c^2} \right] M_{\odot} \frac{(\vec{x}_S - \vec{x}_T)}{|\vec{x}_S - \vec{x}_T|^3} \\
&- \frac{(\vec{x}_L - \vec{x}_T)}{|\vec{x}_L - \vec{x}_T|^3} \times \eta_{\text{grav}} G \left[\frac{m_{\text{grav}}(\text{Terre})E_{\text{grav.}}(\text{Lune})}{m_{\text{in.}}(\text{Lune})c^2} + \frac{m_{\text{grav.}}(\text{Lune})E_{\text{grav.}}(\text{Terre})}{m_{\text{in.}}(\text{Terre})c^2} \right].
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Tandis que le second terme est une correction purement quantitative au mouvement relatif Terre/Lune, mouvement circulaire à une bonne approximation, le premier terme de l'équation (7.18) représente une modification *qualitative*; c'est cette modification qui donne lieu à ce qu'on appelle l'*effet Nordvedt* [K. Nordvedt (1968)]. Un calcul simple [C.M. Will (1981)] montre que la trajectoire de la Lune est alors légèrement "polarisée" vers le Soleil [Fig. 7.8]. Si l'on admet, par exemple, que la Terre et la Lune sont des sphères de densité uniforme, alors leur énergie gravitationnelle

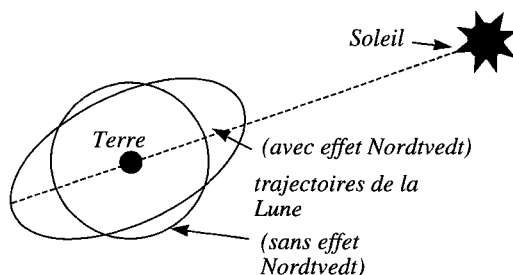


Figure 7.8 : L'effet Nordvedt. Si la Terre et la Lune ne "tombent" pas avec la même vitesse vers le Soleil, alors la trajectoire de la Lune est légèrement modifiée et est déformée dans la direction du Soleil (la déformation a été très fortement exagérée sur la figure).

$$E_{\text{grav.}} = -\frac{3}{5} \frac{Gm_{\text{grav.}}^2}{R}, \tag{7.19}$$

divisée par $m_{\text{in}}c^2$, vaut -4.6×10^{-10} pour la Terre et -2×10^{-11} pour la Lune; ce qui donne la déviation (en centimètres)

$$\delta r(t) \simeq 920 \eta_{\text{grav.}} \cos [(\omega_0 - \omega_s) t], \tag{7.20}$$

où ω_0 est la vitesse angulaire de la Lune autour de la Terre et ω_s la vitesse angulaire du Soleil autour de la Terre.

Les résultats de cette expérience donnent $\eta_{\text{grav.}} = .00 \pm .03$ [J.G. Willams *et al.* (1976)] et $\eta_{\text{grav.}} = .001 \pm .015$ [I.I. Shapiro, C.C. Counselman, R.W. King (1976)],

selon deux analyses indépendantes des mêmes données : autrement dit, les valeurs trouvées pour η_{grav} sont compatibles avec la valeur zéro. Ceci correspond à une égalité entre masses grave et inerte de la Lune de l'ordre de quelques 10^{-11} .

Il faut enfin souligner que ces mesures constituent des *expériences gravitationnelles* qui vont donc *au-delà* du principe d'équivalence fort énoncé plus haut; elles entrent plutôt dans le cadre du principe ultra-fort (voir plus loin).

Ajoutons encore l'idée récente avancée par T. Damour *et al.* (1991) d'utiliser les données fournies par les pulsars binaires PSR 1913+16, PSR 1953+29 et PSR 1855+09, pour mettre en évidence une éventuelle violation à un ordre supérieur, i.e. à l'ordre $[E_{\text{grav}}/mc^2]^2$.

3. Le point (ii) du principe d'équivalence affirme que, dans un référentiel en chute libre, donc localement inertiel, les expériences (non gravitationnelles) de physique sont indépendantes de vitesses *uniformes* imprimées à l'appareillage : il s'agit donc de l'invariance de Lorentz qui doit y être satisfaite. Nous avons déjà discuté rapidement, au chapitre 3, des vérifications expérimentales de la Relativité Restreinte et du cadre théorique dans lequel elles se situent, vérifications qui, presque toutes, sont de nature locale.

Le point (iii), enfin, exige que les lois de la physique soient les mêmes partout dans l'Univers et ce, à toute époque. L'invariance spatiale est testée par les expériences portant sur le décalage gravitationnel vers le rouge [R. V. Pound, G. A. Rebka (1960); R. V. Pound, J. L. Snider (1965)] ou la comparaison d'horloges transportées dans des avions ou des fusées [voir C. M. Will (1981) pour les détails]. Là encore le principe d'équivalence est bien vérifié (voir plus loin pour le décalage gravitationnel vers le rouge).

En ce qui concerne les lois de la physique, dont on exige la validité à toute époque, il n'est guère possible que d'en supposer fixe la forme et d'obtenir des limites supérieures à la variation des constantes qui y interviennent, telles la constante de structure fine e^2/hc , celle des interactions fortes, etc. En fait, si les constantes fondamentales de la physique variaient, même faiblement, au cours du temps, toutes sortes de phénomènes très divers seraient alors observés : les spectres atomiques ou nucléaires seraient modifiés, les propriétés de stabilité des noyaux, les rayons des planètes et leur évolution orbitale, la nucléosynthèse des éléments légers (cosmologie) et lourds (étoiles), etc., bref toutes sortes de phénomènes physiques, géophysiques ou astrophysiques en indiqueraient les conséquences. Un bon nombre de ces effets sont résumés et analysés brièvement par P. Sisterna et H. Vucetich (1990). Le tableau 7.2 fournit une idée de l'ordre de grandeur de la variation des constantes de couplage des quatre interactions fondamentales⁹ [voir également C. M. Will (1981), J. M. Irvine (1983)]. Nous allons donner un petit nombre d'exemples pour indiquer comment sont évalués ces chiffres dans quelques cas très simples. Notons, toutefois, que J. Bekenstein (1982) a critiqué ces résultats, arguant de la nécessité de modèles dynamiques pour l'évolution des constantes de la

9. Il est également nécessaire de considérer d'éventuelles variations temporelles d'autres grandeurs telles les masses de particules, etc.

physique. Il a donné un tel modèle pour les interactions électromagnétiques, basé sur des postulats naturels, et a conclu que les résultats précédents n'indiquaient qu'une constance marginale de $e^2/\hbar c$. Il a cependant montré que les expériences du type Eötvös permettaient de conclure à la constance spatiale et temporelle de $e^2/\hbar c$.

Grandeurs	Bornes supérieures sur les variations annuelles	Auteurs
G	10^{-11}	Damour <i>et al.</i> (1988)
e^2	10^{-14}	Davies (1972)
e^2	10^{-17}	Shlyakhter (1976)
g_{nucl}	10^{-18}	Shlyakhter (1976)
g_{nucl}	10^{-14}	Davies (1972)
g_{faible}	10^{-12}	Shlyakhter (1976)
g_{faible}	10^{-10}	Davies (1972)

Tableau 7.2 : Quelques ordres de grandeurs pour les bornes supérieures de la variation annuelle des constantes de couplage des interactions connues, en supposant dans chaque cas que seule la constante de couplage considérée varie au cours du temps. *Les chiffres de Shlyakhter sont basés sur l'analyse des données du réacteur nucléaire naturel d'Oklo [M. Maurette (1976); J.M. Irvine (1983); Y.V. Petrov (1977)].*

Donnons d'abord l'exemple d'une éventuelle variabilité de la constante de gravitation G et, à cette fin, considérons un objet de masse m en orbite circulaire (du moins pour obtenir un ordre de grandeur) autour d'un autre objet mais de masse M . Soit R le rayon de l'orbite; on aura donc

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}, \quad (7.21)$$

en équilibrant l'attraction gravitationnelle et la réaction centrifuge, où v est une constante. La période de la "planète" de masse m est alors

$$T = 2\pi \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$$

qui fournit donc, par dérivation, le taux de variation de T et de R , si G varie au cours du temps,

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{3}{2} \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{dG}{dt}. \quad (7.22)$$

Ainsi les orbites et les périodes des planètes auraient été différentes dans le passé, les dates des éclipses seraient changées, etc. [V. Canuto (1990)]. Toutes les mesures effectuées concluent, finalement, à une variation relative $|\dot{G}/G| < 10^{-11}$ par an, en supposant, bien entendu, que M (et les interactions qui y contribuent) ne varie pas avec le temps.

Prenons maintenant le cas de la constante de structure fine $\alpha \equiv e^2/\hbar c$. Celle-ci intervient proportionnellement à son carré dans la position des raies émises

par les atomes. Si l'on observe des objets très lointains¹⁰ comme les quasars [J.N. Bahcall, E.E. Salpeter (1965); J.N. Bahcall, W. Sargent, M. Schmidt (1967)] ou des radiogalaxies [J.N. Bahcall, M. Schmidt (1967)], la lumière émise l'a été il y a quelques milliards d'années. Aussi la comparaison des raies des quasars (ou de radiogalaxies lointaines) avec les raies observées en laboratoire permet-elle de trouver des limites pour la variation de la constante de structure fine α au cours du temps. Comme la fréquence d'une raie est proportionnelle à α^2 , on aura $\dot{\nu}/\nu = 2\dot{\alpha}/\alpha$ et l'on trouve $\dot{\alpha}/\alpha < 10^{-12}$ par an.

Un autre argument concernant la variabilité éventuelle de la constante de structure fine [P.J. Peebles et R.H. Dicke (1962); F.J. Dyson (1967); P.C.W. Davies (1972)], que l'on peut élaborer davantage, repose sur la remarque que deux isobares¹¹ ont une masse qui, *grosso modo*, diffère pratiquement par le terme coulombien qui intervient dans la formule de masse [Eq. (7.12)]

$$E_{\text{coul}} = .717 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \quad (\text{en MeV}), \quad (7.23)$$

laquelle est, implicitement, proportionnelle à e^2 . C'est pourquoi, dans une désintégration β (ou une capture β) entre deux isobares¹¹

$$\begin{cases} {}^A_Z X & \rightarrow {}^A_{Z+1} X + e + \bar{\nu}_e \\ {}^A_Z X & \rightarrow {}^A_{Z-1} X + e^+ + \nu_e, \end{cases} \quad (7.24)$$

l'énergie emportée par les leptons¹² dépend de la différence ΔE_{coul} ,

$$\Delta M = \Delta E_{\text{coul}} = .717 \frac{2Z-1}{A^{1/3}} (\text{MeV}). \quad (7.25)$$

Si, en outre, le temps de vie de l'élément ${}^A_Z X$ est suffisamment long pour que e^2 ait pu varier de manière appréciable sur un tel intervalle de temps, alors on aura

$$\frac{1}{\Delta M} \frac{\delta \Delta M}{\delta t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\delta \alpha}{\delta t}, \quad (7.26)$$

ce qui se traduira dans le temps de vie de ${}^A_Z X$ et donc dans les abondances relatives des deux isobares. De tels couples d'isobares existent et, notamment, le couple rhénium/osmium ($A=187$) dont P.J. Peebles et R.H. Dicke (1962) ont très tôt souligné l'intérêt car le temps de vie du rhénium est de l'ordre de 4×10^{11} ans; il est malheureusement très délicat à mesurer en laboratoire.

10. Cela, en admettant que le décalage spectral vers le rouge observé dans les quasars est d'origine cosmologique : ceci est généralement admis.

11. Noyaux qui possèdent le même nombre A de nucléons et qui diffèrent donc par leur nombre Z de protons (ou d'électrons).

12. Particules légères : $e, \nu_e, e^+, \bar{\nu}_e$, etc.

Cependant, les estimations les plus précises d'une variabilité éventuelle des diverses constantes de couplage [A.I. Shlyakhter (1976)] proviennent de l'étude des abondances isotopiques dans le "réacteur naturel" d'Oklo (Gabon). Il s'agit, en fait, d'une concentration fortuite d'uranium 235, suffisante pour que deux milliards d'années auparavant, elle se soit spontanément "allumée"; cela se traduit notamment par un pourcentage d'uranium 235 dans le minerai beaucoup plus faible que l'abondance normale sur Terre (.72%). L'abondance relative de deux isotopes du samarium (147 et 149), plus basse à Oklo qu'elle ne devrait, indique une irradiation par les neutrons produits dans la fission de l'uranium environ 1.8×10^9 années auparavant. Ceci fournit alors de manière extrêmement précise la valeur de la section efficace de capture résonante du neutron, du samarium 149, il y a 1.8×10^9 années, et permet donc la comparaison avec les valeurs mesurées aujourd'hui en laboratoire. Ceci conduit alors aux valeurs indiquées par A.I. Shlyakhter (1976). On trouvera un exposé clair et assez détaillé dans l'article de J.M. Irvine (1983).

Bien entendu, les valeurs numériques données précédemment supposent implicitement que les autres constantes de la physique ne varient pas non plus au cours du temps. Ainsi la constante de Planck, la masse de l'électron ou du proton, etc., sont supposées fixes [une étude de la variabilité du rapport de la masse du proton à celle de l'électron, effectuée à partir de l'analyse des raies d'absorption de quasars, a été réalisée par B.E.J. Pagels (1977)]. Une discussion rapide de la variabilité éventuelle de la masse peut être trouvée dans H.C. Ohanian (1976).

En conclusion, il n'existe à l'heure actuelle aucune indication d'une modification quelconque des lois de la physique au cours du temps et, dans une certaine mesure, avec la position dans l'espace : le principe d'équivalence est, finalement, bien vérifié dans chacune de ses hypothèses et de leurs conséquences.

4. L'importance du principe d'équivalence provient non seulement de ses bases expérimentales très diverses mais encore du fait qu'il implique, pratiquement, le recours à un espace-temps (localement) courbe à quatre dimensions muni d'une métrique $g_{\mu\nu}(x)$ traduisant l'existence d'un champ de gravitation. Insistons cependant sur le fait que ce principe n'indique rien sur les lois auxquelles doit obéir le tenseur métrique : un grand nombre de théories, dont la Relativité Générale d'Einstein, satisfont le principe d'équivalence et diffèrent par les équations vérifiées par le tenseur métrique et/ou les champs classiques additionnels supposés décrire la gravitation. En tout état de cause, la matière est toujours couplée au tenseur métrique, de telle sorte que dans un système *localement inertiel* (en chute libre), les lois de la physique (non gravitationnelle) sont les lois relativistes restreintes habituelles.

Nous pouvons donc, désormais, trouver les lois de la physique, en espace-temps courbe, à partir des lois relativistes usuelles : il suffira, généralement, de remplacer (mentalement) les indices lorentziens par des indices tensoriels afférents à des changements de coordonnées généraux sur la variété espace-temps V^4 et de remplacer les dérivées usuelles par des dérivées covariantes

$$(a) \partial_\mu \rightarrow (b) \nabla_\mu . \quad (7.27)$$

Par exemple, la conservation de l'énergie-impulsion deviendra

$$(7.28) \quad (a) \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow (b) \Delta^\mu T_{\mu\nu} = 0,$$

le terme de gauche étant manifestement covariant dans les seules transformations de Lorentz alors que l'équation de droite l'est dans des changements de systèmes de coordonnées très généraux sur V^4 . En conséquence, notons que les indices spatio-temporels des deux relations (7.28) sont très différents (ils concernent des transformations différentes) mais possèdent en commun la propriété de conserver la *signature* de la métrique. De la même manière [Eq. (7.27)], les équations de Maxwell s'obtiennent en espace courbe à partir des équations habituelles dans l'espace de Minkowski

$$(7.29) \quad (a) \left\{ \begin{array}{l} \partial^\mu T_{\mu\nu} = 4\pi J_\nu \\ \partial^\mu *F_{\mu\nu} = 0 \end{array} \right. \rightarrow (b) \left\{ \begin{array}{l} \Delta^\mu T_{\mu\nu} = 4\pi J_\nu \\ \Delta^\mu *F_{\mu\nu} = 0 \end{array} \right.$$

où le tenseur de Levi-Civita qui permet de passer de $F_{\mu\nu}$ à $*F_{\mu\nu}$ s'écrit maintenant

$$(7.30) \quad (a) \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow (b) \frac{\sqrt{|g|}}{1} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}.$$

Notons enfin l'importante différence qui existe entre les équations (7.28) et (7.29) d'une part, et les équations (3.135) et (3.133), d'autre part. En effet, alors que dans le cas de ces dernières, il est toujours possible de trouver un système de coordonnées où les équations analogues à (b) se réduisent *partout* aux équations analogues à (a), dans le cas des équations (7.28) et (7.29) cela n'est possible que *localement*, dans un référentiel en chute libre.

Enfin, il convient de faire très attention à la "règle" (7.27). En effet, lorsque les équations minikowskienes que l'on souhaite écrire en présence de gravitation comportent des dérivées secondes (voire d'ordre plus élevé), des ambiguïtés peuvent apparaître du fait de la *non-commutativité* des dérivées covariantes

$$(7.31) \quad [\Delta^\mu, \Delta^\nu] X^\alpha \neq 0.$$

Dans la pratique, cependant, on arrive généralement à lever ce genre d'ambiguïté [voir C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973) pour une discussion plus détaillée], un peu du même type que celui qui existe dans le processus de quantification d'un système mécanique classique.

La "règle" (7.27), avec les restrictions précédentes, s'appelle le *couplage minimal* : elle constitue, en effet, le minimum nécessaire pour (i) obtenir des équations covariantes dans les changements de systèmes de coordonnées arbitraires sur V^4 et (ii) coupler la matière à la gravitation *via* la géométrie de V^4 . Il suffirait

de rajouter à ∇_μ des termes dépendant de la courbure pour obtenir d'autres généralisations des équations minkowskiennes. Par exemple, l'équation

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} + \lambda J^\mu R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\nu \quad (7.32)$$

peut constituer une telle généralisation non minimale : en l'absence de gravitation le tenseur de courbure est identiquement nul et l'on retombe sur les équations de Maxwell habituelles après avoir choisi des coordonnées lorentziennes.

On voit donc que le principe d'équivalence ne fixe pas complètement le couplage de la matière et de la gravitation.

5. Pour conclure cette section, abordons rapidement le principe d'équivalence ultra-fort. Nous avons déjà noté plus haut que l'absence d'effet Nordvedt constitue déjà une indication sérieuse de la validité de ce principe en ce qui concerne l'égalité des masses grave et inerte : l'énergie gravitationnelle n'est pas différente des autres formes d'énergie pour ce qui est de sa contribution à la masse grave.

Une violation du principe d'équivalence ultra-fort se traduirait, par exemple, par la dépendance d'une expérience gravitationnelle *locale* de tout le contexte gravitationnel global, cosmologique, voire de l'existence éventuelle de champs à très longue portée. Si, au contraire, le principe est vérifié, cela signifie que les différents champs présents dans la Nature sont toujours couplés de la même manière, indépendante du lieu et du temps et avec des *couplages constants*, indépendamment de toute structure cosmologique. A cet égard, l'expérience de Hughes et Drever permet d'éliminer, avec une bonne approximation, de tels champs supplémentaires [C.M. Will (1981)].

Un exemple de violation de ce principe [V. Canuto et I. Goldman (1983); V. Canuto (1990)] peut être trouvé dans l'inéquivalence éventuelle des horloges usuelles (atomique, nucléaire, etc.) et gravitationnelle : un choix compatible avec le fait que la gravitation est la seule interaction importante à l'échelle cosmologique. Cette inéquivalence doit se traduire par un facteur d'échelle, dépendant du temps, entre les intervalles indiqués par une horloge gravitationnelle, soit ds_{grav} , et ceux marqués par une horloge atomique, soit ds_{at} :

$$ds_{\text{grav}} = \beta(t) ds_{\text{at}}. \quad (7.33)$$

avec $\beta(t_0) = 1$. Les données observationnelles (réflexions laser sur la Lune ou radar sur les planètes intérieures) ou géophysiques donnent $\dot{\beta}(t) < 10^{-11} \text{ an}^{-1}$.

La notion d'horloge gravitationnelle et celle d'horloge atomique évoquées ci-dessus nécessitent quelques explications. Nous nous limiterons ici à des cas très simples, suffisants pour illustrer notre propos. Une horloge atomique, d'abord, ne fait intervenir que des forces électromagnétiques et obéit, par conséquent, au principe d'équivalence fort. Un exemple grossier est constitué par une particule de charge q et de masse inerte m_{in} orbitant circulairement autour d'une charge Zq , donc telle que

$$m_{\text{in}} \frac{v^2}{R} = \frac{Zq^2}{R^2},$$

et donc de période

$$T_{\text{at}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3 m_{\text{in}}}{Zq^2}} .$$

Une horloge gravitationnelle, elle, fait intervenir des forces de gravitation, par l'intermédiaire de sa masse grave m_{grav} ,

$$m_{\text{grav}} = m_{\text{in}} + \eta \frac{E_{\text{grav}}}{c^2} .$$

(η : coefficient de violation du principe d'équivalence; E_{grav} : énergie gravitationnelle entrant en jeu). Une horloge gravitationnelle, similaire à la précédente (atomique), aura une période

$$T_{\text{grav}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_{\text{in}}}{m_{\text{grav}}} \frac{R^3}{GM}} .$$

Notons, au passage, que deux planètes ayant exactement les mêmes caractéristiques [m_{in}, R], orbitant en étant soumises à la même étoile centrale de masse M , et de compositions chimiques différentes – donc de masses graves passives m_g différentes – auraient des périodes orbitales différentes. . . Comparons maintenant le comportement, au même point, de deux horloges dont l'une est atomique et l'autre gravitationnelle (du type indiqué plus haut), en chute libre dans un champ de gravitation constant g . L'horloge atomique possède une vitesse de chute

$$v_{\text{at}} = gt ,$$

tandis que l'horloge gravitationnelle sera telle que

$$v_{\text{grav}} = \frac{m_{\text{grav}}}{m_{\text{in}}} gt = \left(1 + \eta \frac{E}{m_{\text{in}}}\right) gt .$$

Ces deux horloges posséderont donc une vitesse relative

$$v \equiv \frac{v_{\text{grav}} - v_{\text{at}}}{1 - v_{\text{grav}} \cdot v_{\text{at}}} = \eta \frac{E}{m_{\text{in}}} gt + O(\eta^2) ,$$

de sorte que, si les deux horloges avaient initialement la même période, par effet Doppler longitudinal, on aurait maintenant

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{grav}} &= v \Delta T_{\text{at}} + O(v^2) \\ &= \eta \frac{E}{m_{\text{in}}} gt \Delta T_{\text{at}} + O(\eta^2) . \end{aligned}$$

A cela, on peut ajouter que le coefficient η peut, lui aussi, dépendre du temps (à une plus grande échelle que celle marquée par les deux horloges; à une échelle cosmologique, par exemple); aussi, de manière générale, a-t-on bien une relation du type (7.33) ci-dessus.

Le décalage gravitationnel vers le rouge

Ayant admis que l'espace-temps en présence de gravitation peut être correctement représenté par une variété métrique $\{V^4, g_{\mu\nu}(x)\}$ à quatre dimensions, nous allons en examiner quelques conséquences dont la première est un effet de *dilatation du temps*, spécifiquement gravitationnel, qui se traduit notamment par un *rougissement* des photons [voir le chapitre 4 pour un raisonnement plus intuitif].

Considérons ce dernier effet [Fig. 7.9] et donc une transition atomique au point d'espace-temps 1 [$1 \equiv (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$] où règne un champ de gravitation $g_{\mu\nu}(1)$.

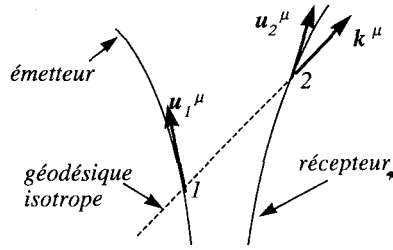


Figure 7.9 : Décalage gravitationnel vers le rouge.

Le photon émis par l'émetteur, de quadrivitesse $u^\mu(1)$, est émis avec le 4-vecteur d'onde $k^\mu(1)$ et observé en 2 par un observateur de quadrivitesse $u^\mu(2)$. En 2 règne le champ de gravitation $g_{\mu\nu}(2)$. L'énergie (de manière équivalente, la fréquence) du photon émis en 1 est

$$E(1) = k^\mu u_\mu|_1 \equiv \nu(1) \quad (7.34)$$

tandis que celle du photon observé en 2 est alors

$$E(2) = k^\mu u_\mu|_2 \equiv \nu(2); \quad (7.35)$$

$E(1)$ et $E(2)$ se réduisent bien, dans les systèmes au repos de l'émetteur et de l'observateur respectivement, aux fréquences $\nu(1)$ et $\nu(2)$. Si l'on appelle z le décalage spectral,

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}}, \quad (7.36)$$

alors on aura aussi

$$1 + z = \frac{[u^\mu k_\mu]_{\text{em}}}{[u^\mu k_\mu]_{\text{obs}}}. \quad (7.37)$$

Cette relation est tout à fait générale et s'applique dans de nombreux cas physiquement importants¹³. Nous allons nous limiter ici au cas d'un champ de gravitation *stationnaire*, c'est-à-dire tel qu'il existe un système de coordonnées dans lequel $\partial_t g_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = 0$; dans ces conditions, on peut toujours choisir des coordonnées telles que $g_{oi}(\vec{x}) = 0$.

L'équation (7.37) peut encore se réécrire sous la forme

$$1 + z = \frac{[u^0 k_0]_{\text{obs}}}{[u^0 k_0]_{\text{ém}}} \quad (7.38)$$

13. Elle peut être utilisée pour obtenir le décalage cosmologique ou la formule de l'effet Doppler habituelle [G.F.R. Ellis (1971)].

$$= \left(\frac{g_{00}(\text{ém})}{g_{00}(\text{obs})} \right)^{1/2} \frac{k_{0\text{ obs}}}{k_{0\text{ ém}}}, \quad (7.39)$$

compte tenu de ce que $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$, et donc de ce que

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (7.40)$$

dans un système de référence comobile. Comme, d'autre part, $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$, la composante zéro du 4-vecteur d'onde k_μ est conservée¹⁴ le long de la géodésique isotrope qui va de l'événement 1 à l'événement 2. Montrons-le rapidement. L'équation des géodésiques [voir aussi la section suivante] s'écrit

$$\frac{\nabla k_\mu}{d\xi} = 0 = \frac{dk_\mu}{d\xi} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha k_\alpha k^\beta = 0;$$

(ξ : paramètre affine) (7.41)

soit, en explicitant les symboles de Christoffel et en se limitant à la composante zéro de k_μ ,

$$\frac{dk_0}{d\xi} - \frac{1}{2} [\partial_\beta g_{0\alpha} + \partial_0 g_{\beta\alpha} - \partial_\alpha g_{0\beta}] = 0. \quad (7.42)$$

Compte tenu de ce que $g_{\mu\nu}$ est diagonal et que $\partial_0 g_{\beta\alpha} = 0$, il vient $dk_0 = 0$ et donc $k_{0\text{ obs}} = k_{0\text{ ém}}$. Finalement, le décalage spectral est donné par

$$1 + z = \left(\frac{g_{00}(\text{ém})}{g_{00}(\text{obs})} \right)^{1/2}. \quad (7.43)$$

Nous verrons, dans la section suivante, que pour des champs faibles, la relation précédente se réduit à celle obtenue de manière heuristique au chapitre 4; le décalage spectral z est donc, généralement, proportionnel au paramètre gravitationnel GM/Rc^2 . Les valeurs de ce paramètre¹⁵ – du moins pour les systèmes physiques connus avant les années soixante – laissaient penser que seules les naines blanches étaient susceptibles de donner lieu à un effet mesurable : $z \sim 2 \times 10^{-4}$, typiquement. La mesure a été effectuée [W.S. Adams (1925); J.L. Greenstein et V.L. Trimble (1967); G. Gatewood, J. Russel (1974); J.L. Greenstein *et al.* (1977); G. Gatewood,

14. Cette propriété est un cas particulier du théorème suivant [K.S. Thorne (1971)] : *Si le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, dans un système de coordonnées donné, ne dépend pas de la coordonnée x^β , alors la valeur numérique de la composante covariante β de la quadri-impulsion d'une particule massive ou d'un photon est conservée le long de sa trajectoire géodésique.* Démonstration : identique à celle qui suit.

15. Voir le tableau 4.1.

C. Gatewood (1978); J. Hershey (1978); H.L. Shipman (1979); G. Wegner (1980)] et les résultats sont *grosso modo* en accord avec les prédictions de la relativité. Toutefois, ces observations comportent de grandes incertitudes en raison du fait que les raies des naines blanches sont très souvent assez larges, de sorte qu'en mesurer un déplacement de l'ordre de 10^{-4} est extrêmement délicat.

Dans le Soleil, ce même problème existe nettement moins car les raies émises sont beaucoup plus fines. Par contre, l'effet à mesurer est d'ordre 2×10^{-6} ... Cependant, le principal problème n'est pas tant de mesurer un déplacement de raies que le fait que l'atmosphère du Soleil est sujette à des mouvements de convection aléatoires qui entraînent des effets Doppler inconnus sur les raies observées. Comme ces courants convectifs sont à peu près verticaux, et que la ligne visée est perpendiculaire à ces mouvements *au bord* du disque solaire, en observant les raies émises dans cette région, ces effets sont, en partie, éliminés. La mesure, effectuée à plusieurs reprises [F. Roddier, J.E. Blamont (1961); J. Brault (1963); J.L. Snider (1972) (1974)], confirme la valeur donnée par la relativité avec une précision de l'ordre de 5%.

Toutefois, la première mesure précise (environ 1%) du décalage spectral gravitationnel a été obtenue en laboratoire, donc sur Terre [R.V. Pound, G.A. Rebka (1960); R.V. Pound, J.L. Snider (1965)]. En effet, quoique le décalage spectral mesuré à deux niveaux différents [de l'ordre de 22 m dans l'expérience de R.V. Pound et G.A. Rebka (1960)] soit très faible ($\sim 10^{-15}$), il est possible de produire des raies extrêmement fines en utilisant l'effet Mössbauer¹⁶, des raies ayant des largeurs très proches de leur largeur naturelle¹⁷.

Par la suite, l'amélioration considérable de la stabilité des horloges (10^{-15} – 10^{-16} pendant des temps de 10 à 100 secondes) a permis leur comparaison à différentes altitudes : par exemple, la comparaison d'une horloge (maser à hydrogène)¹⁸ à terre et d'une horloge analogue placée à bord d'une fusée a confirmé la prédiction relativiste avec une précision supérieure à 2×10^{-4} [R.F.C. Vessot, M.W. Levine (1979); R.F.C. Vessot (1984)]. D'autres expériences vont toutes dans le même sens [C.M. Will (1981)].

Nous avons déjà indiqué l'importance théorique du décalage spectral d'origine gravitationnelle : il représente l'un des arguments les plus forts en faveur des théories métriques de la gravitation relativiste (dont la Relativité Générale). Mais il fournit également une "démonstration expérimentale" du point (iii) du principe d'équivalence fort, c'est-à-dire de la non-dépendance d'expériences (non gravitationnelles) du lieu et de l'époque où elles sont réalisées. Une dépendance éventuelle se traduirait par un décalage spectral [C.M. Will (1981)] de la forme

$$z = (1 + \alpha)\Delta U/c^2, \quad (7.44)$$

16. Il s'agit de l'émission (ou de l'absorption) d'un photon, *sans recul*, par un solide cristallin à basse température. Voir, par exemple, A. Abragam (1964).

17. Par exemple, la largeur de la raie γ produite lors d'une transition $^{67}\text{Ga} \rightarrow ^{67}\text{Zn}$, à 93 KeV, est $\Delta\nu/\nu \sim 5.2 \times 10^{-16}$.

18. Ce type d'horloge est décrit par R.F.C. Vessot (1974).

où ΔU est la différence de potentiel et où α est un "coefficient de violation" : l'expérience de R.F.C. Vessot et M.W. Levine (1979) donne alors $|\alpha| < 2 \times 10^{-4}$.

Mouvements géodésiques

Considérons une particule de masse m , suffisamment petite pour que son champ de gravitation puisse être considéré comme négligeable, en mouvement dans un espace-temps riemannien $\{V^4, g_{\mu\nu}\}$: il s'agit donc ici du mouvement d'une *particule-test* et aucune interaction autre que la gravité n'est envisagée à ce stade. Ce cas simple doit être préalablement étudié si l'on souhaite établir une relation entre le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et le potentiel de gravitation ϕ usuel, du moins à la limite des vitesses faibles et des champs peu intenses.

Dans un référentiel en chute libre, l'effet de la gravitation peut être annulé par un choix judicieux de coordonnées locales et la particule-test se meut selon un mouvement rectiligne et uniforme (localement) : le principe d'équivalence impose, en effet, que son mouvement soit, localement, celui qu'elle aurait dans l'espace de Minkowski. Elle décrit donc le plus long¹⁹ chemin spatio-temporel entre deux points, c'est-à-dire un arc de géodésique :

$$\delta \int ds = 0 \quad (7.45)$$

ou

$$\delta \int \left[g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\xi} \frac{dx^\nu}{d\xi} \right]^{1/2} d\xi = 0. \quad (7.46)$$

Cette dernière équation donne lieu exactement au même type d'équations d'Euler-Lagrange, pour la description des géodésiques, que dans le cas de la Relativité Restreinte écrite en coordonnées curvilignes [Chap. 3], c'est-à-dire

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (7.47)$$

où l'on a choisi $d\xi = ds$. Il existe cependant – rappelons-le – une différence importante entre ces deux cas. En Relativité Restreinte, on peut toujours trouver un système de coordonnées *global* tel que $g_{\mu\nu}$ se réduise à $\eta_{\mu\nu}$ et que $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \equiv 0$, donc tel que l'équation des géodésiques (7.47) se réduise à la relation usuelle

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = 0. \quad (7.48)$$

Par contre, dans le cas de la gravitation relativiste, cela n'est possible que *localement*. Bien plus, si l'introduction de coordonnées curvilignes dans le cas de

19. Au sens de la métrique $\eta_{\mu\nu}$. Il est facile de vérifier que le chemin décrit n'est pas le plus court : en effet, de A à B , séparés par un intervalle du genre temps, il est toujours possible de faire passer un chemin composé de deux droites isotropes.

la Relativité Restreinte est, généralement, un luxe inutile, il s'agit d'une nécessité absolue lorsque l'espace-temps est une variété courbe. En outre, alors que le tenseur $\eta_{\mu\nu}$ exprime seulement la structure du cône isotrope dans l'espace de Minkowski, $g_{\mu\nu}$ traduit aussi l'effet de la gravitation *via* le tenseur de courbure. Notons encore que l'équation des géodésiques (7.47) aurait pu, tout aussi bien, être déduite de l'équation localement minkowskienne (7.48), valable en vertu du principe d'équivalence, en passant à un système de coordonnées arbitraires sur l'espace-temps V^4 considéré [voir, à ce sujet, S. Weinberg (1972)].

Revenons maintenant à l'équation des géodésiques (7.47). On en interprète parfois le second terme comme étant une force de gravitation et, corollairement, le tenseur métrique comme un potentiel de gravitation, les $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ s'exprimant en fonction des dérivées des $g_{\mu\nu}$. En fait, cette interprétation, purement formelle, est basée sur la seule analogie de l'équation (7.47) avec l'équation de la dynamique relativiste (3.65), et méconnaît le caractère "cinématique" (géométrique) de la gravitation. Fixant les propriétés métriques de l'espace-temps, elle en détermine également les géodésiques. A cela s'ajoute le fait que, pour déterminer une force, il est nécessaire d'évaluer les déviations du mouvement *relativement à un mouvement libre*; or, précisément, ce qui joue ici le rôle du mouvement libre est le mouvement géodésique, propriété géométrique (cinématique) par excellence. En réalité, c'est plutôt l'ensemble $\{g_{\mu\nu}, \Gamma_{\alpha\beta}^\mu\}$ qui joue le rôle d'un potentiel de gravitation : nous verrons, dans la section suivante, que les "forces de gravitation" font intervenir les dérivées premières de cet ensemble, par l'intermédiaire du tenseur de courbure.

L'interprétation physique de l'équation des géodésiques (7.47) gagne en clarté lorsqu'on se place à l'*approximation newtonienne* : les vitesses considérées sont faibles devant la vitesse de la lumière,

$$\left| \frac{dx}{ds} \right| \ll c \frac{dt}{ds}; \quad (7.49)$$

et, de plus, le champ de gravitation est suffisamment peu intense pour que l'on puisse poser

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (7.50)$$

où $h_{\alpha\beta}$ n'est qu'une correction du premier ordre :

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad \text{et} \quad |h_{\alpha\beta}|^2 \ll |h_{\alpha\beta}|. \quad (7.51)$$

La première condition, l'équation (7.49), entraîne que l'équation des géodésiques se réduit à

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \sim 0, \quad (7.52)$$

tandis que la seconde – la linéarisation des termes contenant le tenseur métrique – fournit

$$\Gamma_{00}^{\mu} \sim \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} h_{00}, \quad (7.53)$$

où l'on a considéré le cas d'un champ de gravitation *stationnaire*, donc tel que $\partial_0^{(n)} h_{\alpha\beta} \equiv 0$, pour tout n . Dans ces conditions, l'équation des géodésiques se réduit à

$$\begin{cases} \frac{d^2 t}{ds^2} = 0 \\ \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00}. \end{cases} \quad (7.54)$$

Par identification avec l'équation newtonienne

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi, \quad (7.55)$$

où ϕ est le *potentiel de gravitation* habituel, on en déduit

$$h_{00} = 2\phi, \quad (7.56)$$

et, finalement,

$$g_{00} = 1 + 2\phi/c^2. \quad (7.57)$$

Ainsi, pour une masse M située à l'origine des coordonnées, on aura

$$g_{00} = 1 - 2 \frac{GM}{rc^2}. \quad (7.58)$$

Il est intéressant de remarquer qu'à l'approximation newtonienne, seul g_{00} intervient; c'est ce qui explique que l'on puisse *a priori* considérer un champ scalaire pour décrire la gravitation relativiste [G. Nordström (1912)]. Toutefois, une telle généralisation relativiste de la gravitation prédit, par exemple, un *retard* du périhélie de Mercure et non une avance. . .

Notons, enfin, le décalage spectral dans un champ de gravitation : l'équation (7.43) donne alors

$$z = \left(\frac{g_{00}(\text{ém})}{g_{00}(\text{obs})} \right)^{1/2} - 1 = \frac{\phi_{\text{ém}} - \phi_{\text{obs}}}{c^2}; \quad (7.59)$$

nous retrouvons ainsi les résultats intuitifs du chapitre 4.

La déviation géodésique

Pas plus que le mouvement inertiel dans l'espace de Minkowski, le mouvement géodésique dans l'espace-temps courbe de la gravitation $\{V^4, g_{\mu\nu}\}$ n'est décelable par un observateur qui lui est intrinsèquement attaché : là encore, "le mouvement

est comme rien". Aussi un observateur géodésique ne pourra-t-il mettre en évidence l'existence d'un champ de gravitation que par comparaison avec un mouvement voisin, par exemple géodésique. Précisons un peu cela. Dans l'espace de Minkowski, deux mouvements géodésiques [Fig. 7.10] sont définis par les relations

$$\begin{cases} x^\mu(s) = u^\mu s + x^\mu(0) \\ y^\mu(s') = w^\mu s' + y^\mu(0) \end{cases} \quad (7.60)$$

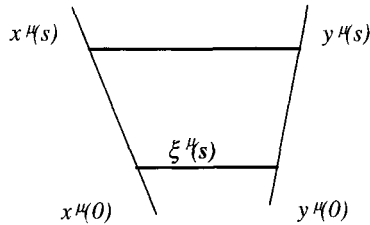


Figure 7.10. : La déviation géodésique dans l'espace de Minkowski. Cette déviation, ξ^μ , est une fonction linéaire du temps propre. Toute déviation à cette linéarité traduit l'existence d'une force.

de sorte que la déviation $\xi^\mu(s) \equiv x^\mu(s) - y^\mu(s)$ est une fonction linéaire du temps propre s ou, plus généralement, de tout paramètre affine $\alpha \equiv as + b$. Ainsi, toute déviation à cette linéarité traduit l'existence d'une force et donc le caractère non géodésique du mouvement de l'un ou l'autre – voire les deux – mouvement(s).

Considérons maintenant le cas d'un espace-temps riemannien $\{V^4, g_{\mu\nu}\}$, et soient deux géodésiques voisines décrites par $x^\mu(s)$ et $x^\mu(s) + \delta x^\mu(s)$, $\delta x^\mu(s)$ étant la *déviations géodésique* (s est le temps propre ou tout autre paramètre affine). On a alors [Fig. 7.11] :

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (7.61)$$

$$\frac{d^2 (x^\mu + \delta x^\mu)}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu (x + \delta x) \frac{d(x^\alpha + \delta x^\alpha)}{ds} \cdot \frac{d(x^\beta + \delta x^\beta)}{ds} = 0. \quad (7.62)$$

Limitons-nous au cas de déviations faibles, ce qui nous permettra de négliger les termes supérieurs au second ordre $(\delta x)^2$. En utilisant maintenant la forme précise des symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$, nous limitant au premier ordre en δx^α et soustrayant l'équation (7.61) de l'équation (7.62), il vient

$$\frac{\nabla^2}{ds^2} \delta x^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\alpha}{ds} \delta x^\beta \quad (7.63)$$

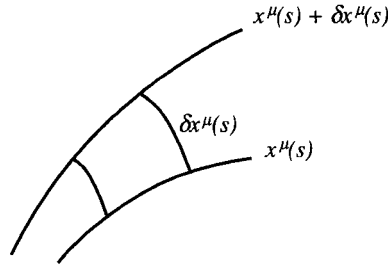


Figure 7.11 : La déviation géodésique dans un espace-temps riemannien.

qui est l'équation de la *déviaton géodésique*. Cette équation exprime la déviation *relative* de deux particules en chute libre dans un champ de gravitation. La présence du tenseur de Riemann-Christoffel traduit évidemment l'influence de la gravitation et indique qu'en principe les "forces de gravitation" (c'est-à-dire $R_{\mu\nu\alpha\beta}$) sont mesurables dès lors que l'on mesure la déviation géodésique. Le fait que le tenseur $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ apparaisse dans l'expression de la "force de gravitation" – i.e. dans le second membre de l'équation (7.63) – indique bien que l'ensemble $\{g_{\mu\nu}, \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda\}$, constitue plutôt des "potentiels de gravitation" : $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ s'obtient par dérivation de ces grandeurs. Dans le cas de l'espace de Minkowski, $R_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv 0$, et l'équation (7.63) se réduit à l'équation des géodésiques et, de plus, on peut toujours trouver un système de coordonnées tel que $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \equiv 0$; δx^μ est alors une fonction *linéaire* du paramètre affine s : toute déviation à cette linéarité traduit l'existence d'un champ de gravitation *via* $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ et ce, naturellement, en l'absence d'autres forces qui pourraient aussi produire une telle déviation.

Ajoutons enfin que c'est l'équation de la déviation géodésique qui sera utilisée dans les calculs concernant les expériences sur les ondes gravitationnelles [Chap. 8].

Le tenseur métrique à symétrie sphérique

Dans de nombreux problèmes concrets – système solaire, étoiles denses, cosmologie, etc. – on a affaire à des systèmes à symétrie sphérique. Cette invariance du système dans les *rotations spatiales* autour d'un point donné (le plus souvent pris comme origine des coordonnées spatiales) permet d'écrire le tenseur métrique sous une forme particulièrement simple dans un système de coordonnées adapté à cette symétrie. Dans un tel système de coordonnées, les tenseurs d'espace (par rapport aux rotations) les plus généraux que l'on puisse écrire *a priori* sont δ^{ij} et $x^i x^j$. Il s'ensuit que la métrique s'écrit nécessairement sous la forme

$$ds^2 = A(r, t)dt^2 - B(r, t)dt \frac{\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{r} - C(r, t)d\mathbf{x}^2 - D(r, t) \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{r^2}, \quad (7.64)$$

où r est la distance à l'origine, où l'on a posé $t \equiv x^0$ et où A, B, C et D sont des fonctions *arbitraires* de r et t , sans dimension. On a donc réduit de 10 à 4 le nombre de fonctions inconnues qui définissent le tenseur $g_{\mu\nu}$. On peut cependant éliminer encore deux des quatre fonctions A, B, C, D en exploitant l'invariance du ds^2 précédent dans les transformations de systèmes de coordonnées du type

$$\begin{cases} x^i &= f_1(t', r') x'^i \\ t &= f_2(t', r') \end{cases} \quad (7.65)$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions quelconques. Notons que ces transformations (7.65) préservent l'invariance par rotation, c'est-à-dire la forme (7.64) de la métrique. On trouve finalement (la démonstration est donnée plus loin) :

$$g_{\alpha\beta}(r, t) = \begin{matrix} & t & r & \theta & \varphi \\ \begin{matrix} t \\ r \\ \theta \\ \varphi \end{matrix} & \begin{pmatrix} e^{\nu(r,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (7.66)$$

où ν et λ sont deux fonctions arbitraires de t et r , où l'on a utilisé les coordonnées polaires usuelles et où l'on a effectué le changement de variables $t' \rightarrow t$ et $r' \rightarrow r$.

*Démonstration :*²⁰ Commençons par montrer que le terme non diagonal dans la métrique (7.64), soit g_{0i} , peut être annulé. Pour cela, cherchons une transformation du type (7.65) qui le permette. Comme elle ne doit affecter que la variable t , nous la chercherons sous la forme

$$\begin{cases} x^i &= x'^i \\ t &= h(t', r') \end{cases} \quad (7.67)$$

On a alors, en utilisant la loi de transformation du tenseur $g_{\mu\nu}$,

$$g'_{0i} = \frac{\partial h}{\partial t'} \cdot \left[\frac{\partial h}{\partial x'^i} g_{00} + g_{0i} \right], \quad (7.68)$$

de sorte que si l'on choisit h telle que

$$\frac{\partial h}{\partial x'^i} = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}, \quad (7.69)$$

on aura bien $g'_{0i} \equiv 0$. Cette dernière relation donne

$$\frac{\partial h}{\partial r'} = -\frac{B}{A}; \quad (7.70)$$

on peut donc toujours choisir $B \equiv 0$.

Montrons maintenant qu'on peut trouver un changement de variables (de coordonnées) tel que $C \equiv 1$. Une transformation du type

$$\begin{cases} t' &= t \\ x'^i &= k(r', t') x^i \end{cases} \quad (7.71)$$

20. Cf. J.L.Anderson (1967); voir aussi S. Mavridès (1973).

est appropriée. Rapportée dans l'expression (7.64) du tenseur métrique, on obtient (pour la partie spatiale)

$$g'_{ij} = C(t,r) \cdot k^2(r',t') \delta_{ij} + \text{terme en } x'^i \cdot x'^j . \quad (7.72)$$

Choissant maintenant $k=C^{-1/2}$, on aboutit au résultat souhaité. Il est facile de vérifier – il est indispensable de le faire – que cette nouvelle transformation ne rétablit pas un terme du type g_{0i} !

Utilisant les coordonnées polaires habituelles, la forme (7.66) donnée pour le tenseur métrique est immédiate. Cette forme de $g_{\alpha\beta}$ s'appelle la *forme standard* et les coordonnées correspondantes, les *coordonnées-standard*, ou encore les *coordonnées de Schwarzschild*. Il en existe bien d'autres, résultant de l'utilisation d'autres systèmes de coordonnées. Par exemple, on peut obtenir la *forme isotrope* de la métrique à symétrie sphérique, c'est-à-dire

$$ds^2 = E(r,t)dt^2 - G(r,t) \cdot [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] . \quad (7.73)$$

Ce sont, principalement, ces deux formes que nous utiliserons dans la suite. Dans le cas d'une métrique qui, de plus, est *statique* (i.e. dans laquelle les différentes fonctions arbitraires précédentes ne dépendent pas de la coordonnée t), on passe de la forme standard à la forme isotrope, à l'aide de la transformation [voir, par exemple, S. Weinberg (1972)]

$$r' = \exp. \int \left\{ 1 + \frac{r^2}{C} \left[D + \frac{B^2}{4r^2A} \right] \right\}^{1/2} \frac{dr}{r} . \quad (7.74)$$

Aperçu du formalisme PPN

Tout au long de ce chapitre, nous avons essentiellement donné des arguments en faveur d'un espace-temps courbe, énoncé le principe d'équivalence et indiqué aussi bien quelques-uns de ses fondements expérimentaux que certaines de ses implications théoriques. Cependant, il reste à préciser – c'est l'objet du prochain chapitre – à *quelles équations de champ* obéissent les potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$. Inutile de dire que ces équations, qui constituent un postulat supplémentaire, comportent un grand arbitraire et ce, malgré diverses contraintes physiques [Chap. 8] que l'on doit imposer.

L'un des procédés qui permettent de sélectionner, à partir des données expérimentales, des *classes* de théories acceptables parmi celles possibles, est constitué par le formalisme PPN (parametrized post-newtonian formalism) dont nous n'exposerons qu'une version simplifiée due à H.P. Robertson (1962), L.I. Schiff (1962) et R. Eddington (1922); le formalisme général est détaillé dans l'ouvrage de C.M. Will (1981) et, également, dans celui de Ch. W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler (1973).

De quoi s'agit-il et quelles sont les limitations du formalisme PPN? Il convient d'abord de remarquer que si la limite des vitesses faibles et des champs de gravitation peu intenses doit nécessairement conduire aux équations newtoniennes usuelles, les premiers effets non triviaux du caractère courbé de l'espace-temps doivent apparaître à l'ordre suivant (par exemple, en v^2/c^2), dit *approximation post-newtonienne*. C'est cette approximation – et éventuellement, les suivantes – que l'on va *paramétrer* pour tenir compte de l'infinie variété possible des équations que doivent satisfaire les composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Il est clair que ces effets pourront être mesurés dans des systèmes gravitationnels tel le système solaire (déflexion des rayons lumineux par le Soleil, avances du périhélie des planètes, etc.) pour lequel le paramètre gravitationnel est faible ($GM/Rc^2 < 10^{-6}$) mais pas dans le cas du pulsar binaire PSR 1913+16 qui émet des ondes gravitationnelles (pour lesquelles $v = c$, ce qui les exclut largement du formalisme PPN).

Nous allons illustrer ce formalisme dans le cas simple d'un système à symétrie sphérique, tel le Soleil, et nous écrirons la métrique sous la forme isotrope (7.73). Si l'on identifie²¹ la coordonnée radiale r à la distance usuelle, on se rend facilement compte que la seule grandeur non dimensionnelle que l'on puisse former dans ce contexte à partir de G , M_\odot , c et r est de la forme $GM_\odot/rc^2 \equiv \chi$. Comme r varie de 7×10^{10} cm (rayon du Soleil) à l'infini, la variable χ est toujours inférieure à 10^{-6} . Il est donc légitime²² de chercher à développer les potentiels gravitationnels g_{00} et g_{ii} [ou, si l'on préfère, les fonctions $E(r)$ et $G(r)$ de la métrique (7.73) supposée statique] en série entière de χ , les $g_{\mu\nu}$ étant sans dimension :

$$ds^2 = c^2 \left[1 - 2\alpha \frac{GM_\odot}{rc^2} + 2\beta \left(\frac{GM_\odot}{rc^2} \right)^2 + \dots \right] dt^2 - \left[1 - 2\gamma \frac{GM_\odot}{rc^2} + \dots \right] dx^2, \quad (7.75)$$

où nous avons rétabli les facteurs c . Nous avons implicitement supposé que l'espace-temps est plat lorsqu'on se situe loin de la masse M_\odot qui courbe l'espace-temps : celui-ci est, asymptotiquement, un espace de Minkowski. Ceci explique pourquoi, dans le développement (7.75) de la métrique, celui-ci commence par 1. Notons encore que le paramètre χ peut être interprété comme étant du type v^2/c^2 , où v^2 est une vitesse caractéristique (e.g. la vitesse d'une planète sur son orbite); il s'agit donc bien d'un développement relativiste. Ainsi les différentes théories de la gravitation relativiste diffèrent les unes des autres par les valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Revenons au développement (7.75) et supposons que nous nous arrêtons au premier ordre en χ dans g_{ii} :

21. Cette identification ne va pas de soi (elle est d'ailleurs incorrecte) et nécessite une discussion délicate que nous omettrons.

22. C'est une hypothèse faible physiquement, mais forte mathématiquement.

$$g_{ii} \sim 1 - 2\gamma \frac{v^2}{c^2}. \quad (7.76)$$

Pour que les deux termes de la métrique soient du même ordre, il est alors nécessaire de développer g_{00} à l'ordre deux en χ . En effet, comme

$$c^2 dt^2 = c^2 \frac{dt^2}{dx^2} dx^2 = \frac{c^2}{v^2} dx^2, \quad (7.77)$$

il est nécessaire que l'on ait

$$g_{00} \sim 1 - 2\alpha \frac{v^2}{c^2} + 2\beta \frac{v^4}{c^4}, \quad (7.78)$$

afin que

$$c^2 \frac{v^4}{c^4} dt^2 \sim \frac{v^2}{c^2} dx^2, \quad (7.79)$$

en ordre de grandeur.

On voit donc que, dans la plupart des applications pratiques, les résultats prévus par les différentes théories ne dépendront que des paramètres (α, β, γ) et non des formes précises des équations de champ. Finalement, les données d'observation permettront d'obtenir des limites sur les valeurs possibles de ces paramètres, et donc d'éliminer les théories qui prévoient des valeurs autres. Ainsi, la Relativité Générale d'Einstein [Chap. 8] conduit à la métrique suivante, la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{GM_{\odot}}{2rc^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{GM_{\odot}}{2rc^2}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{GM_{\odot}}{2rc^2}\right)^4 \cdot [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2] \quad (7.80)$$

et donc à $\alpha = \beta = \gamma = 1$, valeurs compatibles avec toutes les mesures actuelles.

Ajoutons, pour terminer, que si l'on admet que la gravitation est correctement décrite par une théorie métrique, α n'apparaît pas alors comme un véritable paramètre, car il peut toujours entrer dans la définition de la masse. En effet, l'approximation newtonienne de (7.80) donne

$$\Gamma_{00}^i = -\alpha \frac{M_{\odot} G}{r^2}, \quad (7.81)$$

qui n'est autre que la force gravitationnelle newtonienne. Il s'ensuit que l'on peut toujours choisir $\alpha = 1$ (définition de la masse M_{\odot}).

Incidemment, le décalage spectral d'origine gravitationnel mesuré, par exemple dans l'expérience de Pound et Rebka, ne fournit aucune indication sur les paramètres β et α : il confirme simplement le caractère métrique des théories relativistes de la gravitation.

Les tests classiques

Les tests classiques de la Relativité Générale sont au nombre de quatre : le décalage spectral vers le rouge, la courbure des rayons lumineux au voisinage des masses importantes, l'avance du périhélie des planètes et enfin le décalage temporel des signaux radar à l'intérieur du système solaire [I.I. Shapiro (1964, 1968); I.I. Shapiro *et al.* (1971)]. Dans le système solaire, la variable GM_{\odot}/rc^2 est toujours très petite, de sorte que l'approximation post-newtonienne est tout à fait suffisante pour estimer ces effets. Aussi nous contenterons-nous de les évaluer dans le formalisme PPN présenté plus haut : ceci est évidemment valable pour toutes les théories métriques de la gravitation, comme la Relativité Générale, et permettra d'obtenir des estimations pour les paramètres PPN. Nous avons déjà discuté le décalage spectral vers le rouge, aussi nous limiterons-nous aux autres tests classiques.

En outre, comme nous avons déjà discuté le décalage spectral vers le rouge d'origine gravitationnelle, nous nous limiterons ici au calcul de la déflexion des rayons lumineux au voisinage de masses importantes, reléguant en exercice l'évaluation du retard des échos radar et renvoyant le lecteur à l'un des manuels cités pour ce qui concerne l'avance du périhélie des planètes [e.g. S. Weinberg (1972)]. Nous mentionnerons cependant les résultats obtenus en fonction des paramètres PPN et nous choisirons dans la suite $\alpha = 1$, conformément aux remarques effectuées à la fin de la section précédente.

1. Commençons par l'avance du périhélie des planètes. On peut alors, soit comme l'avait fait Einstein, considérer les termes apportés par la relativité comme de petites perturbations aux équations classiques, soit résoudre l'équation des géodésiques correspondant à la métrique (7.75). On trouve ainsi

$$\delta \Psi = \frac{2\pi GM_{\odot}}{(1-e^2)a} (2 - \beta + 2\gamma), \quad (7.82)$$

où $\delta\psi$ est l'avance du périhélie, exprimée en radians par révolution, où e est l'excentricité de l'orbite planétaire et a la longueur de son demi-grand axe. S'agissant de Mercure²³, la Relativité Générale ($\alpha = \beta = \gamma = 1$) prédit une avance de 43.03 secondes d'arc par siècle, très proche des $43.11 \pm .45$ observées. Cependant, un éventuel aplatissement du Soleil (donnant lieu à un moment quadrupolaire) peut également donner lieu à une avance du périhélie de Mercure [Ex. 9 du Chap. 1]. Ainsi, si la mesure de R.H. Dicke et H.M. Goldenberg (1967) (1974) [R.H. Dicke (1974)] selon laquelle le diamètre polaire du Soleil était plus faible que son diamètre équatorial d'environ $(5.0 \pm .7) \times 10^{-5}$ et si cet aplatissement reflétait effectivement la répartition de la masse à l'intérieur alors, le moment quadrupolaire²⁴ résultant induirait une avance du périhélie de Mercure d'environ 3.4 secondes d'arc par siècle, ce qui provoquerait un écart d'à peu près 8 %

23. Pour Mercure, qui effectue 415 révolutions par siècle, l'excentricité de l'orbite est $e = .2056$ et son demi-grand axe $a = 57.91 \times 10^{11}$ cm.

24. Voir la discussion de S. Weinberg (1972) et C.M. Will (1981).

entre la Relativité Générale et l'observation. Ajoutons enfin que l'interférométrie à grande base permet l'obtention de la déflexion de signaux radio émis par divers objets astrophysiques et fournit $\gamma = 1.0002 \pm 0.002$ [D.S. Robertson *et al.* (1991)].

2. Venons-en maintenant au retard d'échos radar renvoyés par des planètes. Lorsqu'on envoie, depuis la Terre, un signal radar sur une planète donnée, celui-ci ne se propage pas en ligne droite – comme dans un espace euclidien – mais dans un espace courbe, correspondant aux sections spatiales de l'espace-temps [Fig. 7.12] de métrique

$$d\sigma^2 \equiv -ds^2 = \left[1 + 2\gamma \frac{GM_\odot}{r} \right] \cdot [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (7.83)$$

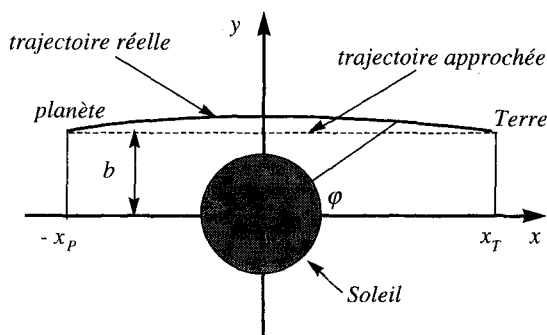


Figure 7.12 : Géométrie du système Terre–Soleil–Planète–Faisceau radar, dans le plan de l'écliptique, lorsque la Terre, le Soleil et la Planète sont en conjonction supérieure. En pointillés, la trajectoire du faisceau radar si l'espace était euclidien. La courbure du faisceau a été fortement exagérée et peut, en fait, être assimilée à deux segments de droite.

Dans le système de coordonnées PPN considéré, l'intervalle de *temps-coordonnée* Δt entre l'émission du signal et sa réception sur Terre, après réflexion sur une planète donnée, est fourni par la relation

$$\frac{1}{2} \Delta t \sim x_T + x_P + (1 + \gamma) GM_\odot \ln \left(\frac{4x_T x_P}{b^2} \right), \quad (7.84)$$

où x_T est la distance Terre–Soleil, où x_P est la distance Planète–Soleil et où b est le paramètre d'impact du faisceau radar : en pratique, $b \neq R_\odot$; l'effet le plus marqué a lieu lors de la conjonction supérieure Planète–Soleil–Terre. Notons que $b/x_T \ll 1$ et $b/x_P \ll 1$. En fait, ce n'est pas Δt qui constitue la grandeur observable mais plutôt l'intervalle de *temps propre* correspondant, $\Delta\tau$, pour l'observateur terrestre ($\Delta\tau^2 \equiv ds^2 = g_{00} dt^2 - 0$), c'est-à-dire

$$\Delta\tau = (\sqrt{g_{00}})_{\text{Terre}} \Delta t = \left(1 - 2 \frac{GM_\odot}{\sqrt{x_T^2 + b^2}} \right) \Delta t. \quad (7.85)$$

La relation (7.84) correspond uniquement au cas de la figure 7.12; le cas général peut être trouvé dans S. Weinberg (1972). Le premier terme de cette relation est le terme habituel correspondant à l'aller et retour du signal radar à la vitesse de la lumière $c = 1$, tandis que le second constitue l'effet relativiste proprement dit, dû à la courbure de l'espace au voisinage du Soleil.

La relation (7.84) peut être obtenue²⁵ en remarquant qu'un photon, un rayon lumineux ou une impulsion radar se propage selon une géodésique de longueur nulle $ds^2=0$; c'est-à-dire, en utilisant la métrique PPN (7.75),

$$\left(1 - \frac{2GM_{\odot}}{r}\right) dt^2 \simeq \left(1 + 2\gamma \frac{GM_{\odot}}{r}\right) \cdot [dr^2 + r^2 d\varphi^2]. \quad (7.86)$$

Pour obtenir Δt , il suffit alors d'intégrer dt : dr et $d\varphi$ sont transformés en éléments d'intégration en dx en notant que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{r}. \quad (7.87)$$

En outre, comme le faisceau radar est très peu courbé, $y \ll b$. Avec

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad (7.88)$$

il vient alors

$$dt \sim \left(1 + (1+\gamma) \frac{GM_{\odot}}{\sqrt{x^2 + b^2}}\right) dx. \quad (7.89)$$

Intégrant maintenant cette relation entre x_P et x_T et ne conservant que les termes de plus bas ordre en b/x_T et b/x_P , la relation (7.84) s'obtient immédiatement.

Pour une réflexion radar sur Mercure – la durée du trajet est d'environ 20 minutes – le retard attendu, dans le cas de la Relativité Générale, pour laquelle $\gamma = 1$, est de l'ordre de $240 \mu\text{s}$, et est donc tout à fait mesurable. L'expérience est, cependant, non seulement délicate à mettre en œuvre (en particulier, compte tenu de la faiblesse de l'écho) mais encore extrêmement complexe²⁶ à analyser tant les corrections théoriques et les sources d'erreur sont nombreuses et difficiles à évaluer. Notons encore que le mouvement de la Terre doit être pris en compte : en effet, l'orbite terrestre étant quasiment circulaire, ce qui donne $v^2 \sim GM_{\odot}/r$, et le facteur de dilatation des durées $\sqrt{1 - v^2}$ donne alors lieu à un facteur $3/2$, au lieu de 2 dans la correction (7.85). Ainsi, dans les relations (7.84) et (7.85), les grandeurs x_T , x_P et b ne sont pas suffisamment déterminées (environ 1.5 km, pour obtenir une précision de $10 \mu\text{s}$ sur $\Delta\tau$). De même, la réflexion du faisceau radar sur Mercure, ou sur toute autre planète, s'effectue sur une surface notable²⁷ (et non en un point), ce qui induit une dispersion dans le temps d'arrivée de l'écho radar. Une autre difficulté provient du fait que la couronne solaire est un milieu dispersif dont les caractéristiques varient beaucoup au cours du temps. Ces quelques éléments

25. Voir M.G. Bowler (1976) ou N. Straumann (1984).

26. Un aperçu simple est donné dans S. Weinberg (1972). Voir également la discussion théorique de I.I. Shapiro (1966), D.K. Ross et L.I. Schiff (1966).

27. Les propriétés réfléchissantes de la surface de Mercure sont déterminées, expérimentalement, lorsque Mercure, le Soleil et la Terre sont en conjonction inférieure, ce qui permet d'éliminer le retard dû à la gravitation relativiste.

indiquent, à l'évidence, la difficulté et la complexité de ce type d'expérience, de son substrat théorique et de son analyse afin d'en extraire des résultats physiquement significatifs.

L'expérience a été effectuée sur Mercure et Vénus [Fig. 7.13] [I.I. Shapiro (1968); I.I. Shapiro *et al.* (1971)] puis sur les satellites Mariner VI et VII qui présentent l'avantage d'éviter les problèmes liés à la topographie des surfaces de planètes mais ont l'inconvénient d'être très sensibles à toutes sortes de perturbations non gravitationnelles, comme le vent solaire et la pression de radiation [J.D. Anderson *et al.* (1975)]. De même, la mission Viking a permis de déposer sur Mars deux "transpondeurs" (le signal émis à une fréquence donnée est réfléchi à une autre fréquence, ce qui permet d'éliminer les effets de la réflexion d'une large zone de la planète) qui ont permis d'améliorer substantiellement les résultats [R.D. Reasenberg *et al.* (1979)]. Une nouvelle analyse des données [R. Hellings *et al.* (1983)] a finalement donné

$$\gamma = 1 - (.7 \pm 1.7) \times 10^{-3}, \quad (7.90)$$

ainsi qu'une valeur²⁸ pour le paramètre β

$$\beta = 1 - (2.9 \pm 3.1) \times 10^{-3}, \quad (7.91)$$

confirmant les valeurs obtenues par la Relativité Générale [Chap. 8]; toutefois, il semble que ces chiffres soient assez optimistes. Aussi nous limiterons-nous prudemment aux valeurs données par R.D. Reasenberg *et al.* (1979), c'est-à-dire $\gamma = 1.0002 \pm 0.002$.

3. Le dernier test classique (le premier, historiquement) concerne la déflexion des rayons lumineux au voisinage du Soleil. Cet effet, mesuré pour la première fois lors de l'éclipse de 1919, devait assurer le triomphe de la Relativité Générale. Concernant l'astrophysique, cet effet est particulièrement intéressant car il donne lieu aux *mirages gravitationnels* [voir section suivante], bien observés aujourd'hui, et dont on espère extraire un certain nombre de données sur les galaxies ou la cosmologie.

La trajectoire d'un rayon lumineux dans un champ de gravitation peut être obtenue soit à partir de l'équation des géodésiques, soit à partir du fait que, le long du rayon, $ds^2 = 0$. Nous utiliserons cette dernière relation qui, jointe à la métrique (7.75), donne

$$\frac{dt}{dr} = 1 + (1 + \gamma) \frac{GM_{\odot}}{r} + O\left(\left[\frac{GM_{\odot}}{r}\right]^2\right). \quad (7.92)$$

Cette relation montre que tout se passe comme si la vitesse de la lumière n'était pas constante dans un champ de gravitation. Celui-ci induit un indice de réfraction

28. Dans la relation simple (7.84) seul le paramètre γ apparaît. Néanmoins, bien d'autres paramètres interviennent dans une analyse approfondie des résultats expérimentaux et, notamment, β .

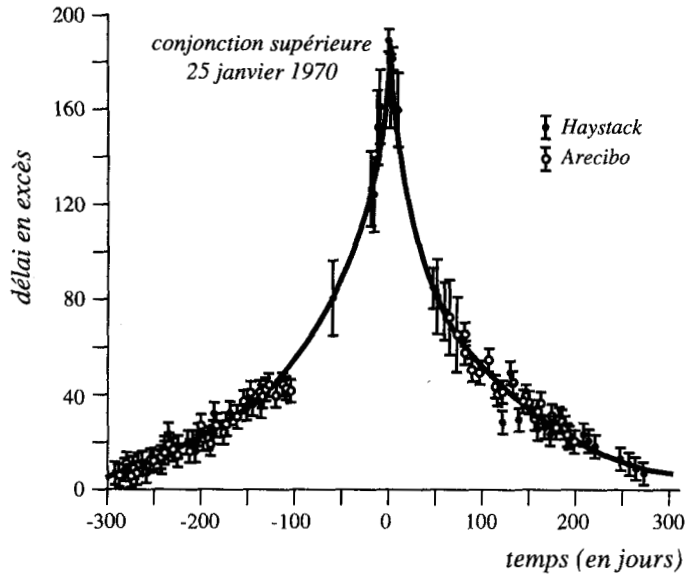


Figure 7.13 : Résultats des expériences de réflexion radar sur Vénus [d'après I.I. Shapiro et al. (1971)].

$$n(r) = \frac{c}{v(r)} = \frac{1}{v(r)} = \text{Eq.}(7.92) . \quad (7.93)$$

Aussi le *principe de Fermat*

$$\delta \int n(r) d\xi = 0 \quad (7.94)$$

($d\xi$ est l'élément de longueur euclidienne le long du rayon lumineux) permet-il de déterminer le chemin optique de la lumière, en utilisant les équations de Lagrange [Appendice C] correspondant à (7.94), c'est-à-dire

$$\frac{d}{d\xi} \left(n(r) \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \right) = \nabla n(r) . \quad (7.95)$$

[M. Born et E. Wolf (1975)]. La variation angulaire cherchée pour le rayon lumineux n'est autre que la différence entre les directions des asymptotes, c'est-à-dire

$$\delta \equiv \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \Big|_{+\infty} - \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \Big|_{-\infty} \right\} \cdot \mathbf{e}_2 \quad (7.96)$$

(\mathbf{e}_2 est un vecteur unitaire porté par Oy).

Si l'on intègre l'équation (7.95) le long de la trajectoire non perturbée $y = b$, on ne commet guère qu'une erreur du second ordre; si, de plus, on tient compte de ce

qu'à l'infini où la métrique (7.75) est minkowskienne, $n(r) = 1$, alors on obtient [Fig. 7.14] successivement

$$\delta \equiv \mathbf{e}_2 \cdot \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \Big|_{+\infty} - \frac{d\mathbf{x}}{d\xi} \Big|_{-\infty} \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}_2 \cdot \nabla n(r) d\xi \quad (7.97)$$

$$\sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dr} n(r) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2}{r} dx \quad (7.98)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} n'[(x^2 + y^2)^{1/2}] \frac{b}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dx . \quad (7.99)$$

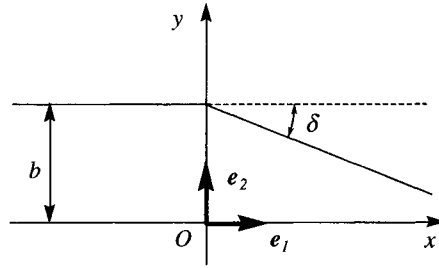


Figure 7.14 : Déviation des rayons lumineux.

En insérant maintenant l'expression (7.93) de $n(r)$ dans cette dernière équation, il vient, tous calculs faits :

$$\delta = (1 + \gamma) 2 \frac{GM_{\odot}}{b} . \quad (7.100)$$

Pour $b = R_{\odot}$, la déviation est

$$\delta = \frac{(1 + \gamma)}{2} 1.75'' .$$

La Relativité Générale prédit ainsi une déviation de $1.75''$ des rayons lumineux frôlant le Soleil.

La déduction précédente repose sur l'utilisation du théorème de Fermat en Relativité Générale. Celui-ci pourrait, cependant, ne pas être valable; en fait, il peut être démontré simplement [voir, par exemple, M.A. Tonnelat (1964); N. Straumann (1984); etc.]; il s'écrit sous la forme

$$\delta \int dt = 0, \quad (7.101)$$

et n'est vrai que pour les champs statiques.

On trouvera, par ailleurs, une démonstration de la relation (7.100) invariante dans les changements de coordonnées à l'approximation PPN dans C.M. Will (1981) [voir également les remarques de S. Weinberg (1972)].

Il reste un dernier point à éclaircir : pourquoi le calcul approximatif effectué dans le cadre de la Relativité Restreinte, au chapitre 4, fournit-il la moitié du résultat donné par la Relativité Générale? Citons C.M. Will (1981), très clair dans l'explication physique de cette "anomalie" : ces calculs "sont corrects . . . Mais leur résultat est une déflexion de la lumière relativement à des lignes droites locales, définies, par exemple, par des règles rigides; cependant, en raison de la courbure spatiale autour du Soleil, courbure déterminée par le paramètre PPN γ , les lignes droites locales sont elles-mêmes courbées par rapport aux lignes droites asymptotiques, i.e. loin du Soleil, exactement de manière à donner le facteur $\gamma/2$ restant. Le premier facteur $1/2$ est valable dans toute théorie métrique tandis que le second $\gamma/2$ varie d'une théorie à l'autre. Il s'ensuit que les calculs qui tendent à déduire la déflexion (complète) de la lumière sur la seule base du principe d'équivalence sont incorrects [voir L.I. Schiff (1960) et la critique de W. Rindler (1968)]."

Venons-en maintenant à l'observation de cet effet, mesuré pour la première fois en 1919 par F.W. Dyson, A.S. Eddington et C. Davidson, et à maintes reprises depuis. La mesure consiste, essentiellement, à comparer la photographie d'étoiles, au voisinage du Soleil lors d'une éclipse totale, à la photographie de la même région du ciel à une autre période de l'année – par exemple, six mois avant – et à évaluer, après de nombreuses et délicates corrections, les diverses déviations. Les dernières mesures ont été effectuées en Mauritanie et au Texas en 1973. La figure 7.15 fournit un résumé de quelques mesures réalisées²⁹.

Parmi les sources d'erreur difficilement réductibles, l'atmosphère solaire joue un rôle important; aussi a-t-on pensé à effectuer des mesures de déflexion de la lumière frôlant Jupiter, qui ne présente pas ce genre d'inconvénient. Pour $\gamma = 1$ (cas de la Relativité Générale), la déviation est d'environ $0.02''$, ce qui est trop faible pour pouvoir être mesuré sur Terre; par contre, le satellite astrométrique Hipparcos – s'il fonctionne correctement – devrait pouvoir permettre une telle mesure puisqu'en principe, il devrait être capable de déterminer les positions d'étoiles avec une précision de 2×10^{-3} secondes d'arc . . .

Cependant, les progrès des techniques interférométriques à grande base, dans le domaine radio, devraient permettre d'atteindre une précision de quelques 10^{-4} secondes d'arc. L'expérience a été effectuée dès 1969 [D.O. Muhleman *et al.* (1970)] et fournit actuellement les valeurs les plus précises du paramètre γ données par les mesures de déflexion de la lumière³⁰ : chaque année, les quasars 3C273, 3C279 et 3C48 (qui sont de très puissantes radio-sources) passent très près du Soleil; du moins, vus depuis la Terre.

Plus encore que la lumière visible, les ondes radio sont sensibles à la dispersion due à la couronne solaire (et aussi à l'ionosphère terrestre) qui induit également une déflexion dont il est nécessaire de tenir compte.

29. On trouvera une liste des diverses mesures effectuées dans L. Bertotti *et al.* (1962).

30. Voir la revue de E.B. Fomalont et R.A. Sramek (1977).

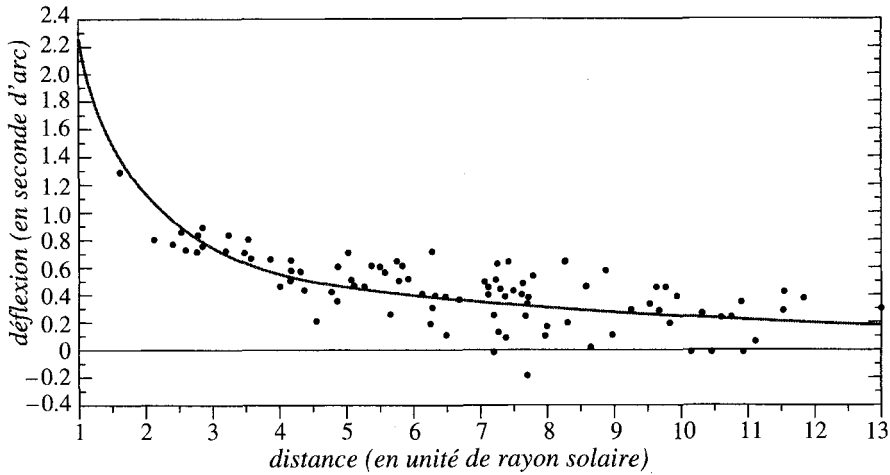


Figure 7.15 : Résultats des mesures de déflexion de la lumière au voisinage du Soleil [d'après E.F. Freundlich (1960); reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur].

Les mirages gravitationnels³¹

Les mirages gravitationnels³², dont le premier a été observé par D. Walsh, R. Carswell et R. Weymann en 1979, ont une longue histoire qui débute avec l'idée de la déflexion de la lumière par les masses importantes en Relativité Générale. Il semble bien que l'idée de "lentille gravitationnelle" [Fig. 7.16] soit due à O. Lodge (1919) et que le premier calcul ait été réalisé par A. Einstein (1936) sur la base d'une suggestion de R.W. Mandl (1935). Par la suite, un grand nombre de calculs et de développements divers devaient être effectués.

Les mirages gravitationnels sont basés sur les propriétés très particulières des *lentilles gravitationnelles* qui autorisent la formation d'*images multiples* d'un même objet ponctuel. Mais il ne s'agit pas là du seul effet possible. D'une part, ces images manifestent une *amplification* de la luminosité apparente de la source et, d'autre part, les signaux observés dans les diverses images présentent un *décalage temporel*, caractéristique de la source, du défecteur et des distances relatives de ces derniers et de l'observateur. Le principal intérêt des mirages gravitationnels – outre la confirmation de la Gravitation Relativiste d'Einstein – est qu'ils permettent, en principe, de déterminer les paramètres cosmologiques liés à l'expansion de l'Univers (constante de Hubble H_0) et à sa courbure spatiale (paramètre de décélération q_0) [S. Refsdal (1964) (1966)]. Nous allons examiner ces diverses

31. Cette expression a été introduite par J. Schneider. On parle également de "lentilles gravitationnelles".

32. On trouvera un bref historique dans J.M. Barnothy (1989). Voir également S. Liebes (1964), C. Vanderriest (1984) (1986) et P. Schneider (1992). On consultera aussi F. Link (1969).

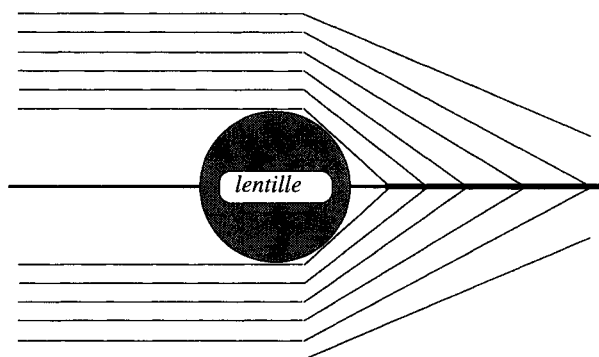


Figure 7.16 : Lentille gravitationnelle. Contrairement à une lentille optique ordinaire pour laquelle les rayons lumineux provenant de l'infini se concentrent au foyer, la lentille gravitationnelle ne possède pas de distance focale : les rayons lumineux provenant, parallèlement, de l'infini se concentrent sur une demi-droite. En outre, la lentille gravitationnelle est parfaitement achromatique.

propriétés dans le cas simple d'une source S ponctuelle et d'un déflecteur D , ponctuel également [Fig. 7.17], l'extension à des sources et des déflecteurs étendus ne présentant pas de complications autre que de calcul. Notons, à cet égard, qu'une "optique géométrique" gravitationnelle³³ peut toujours être édifiée à partir du "principe de Fermat" indiqué précédemment.

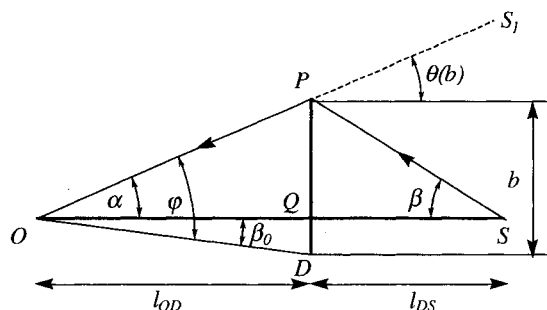


Figure 7.17 : Géométrie de la déflexion de la lumière émise par la source S , par le déflecteur D , et observée en O . b est le paramètre d'impact, l_{OD} et l_{DS} sont les distances relatives observateur/déflecteur et déflecteur/source, respectivement. Les grandeurs observables, en principe, sont l_{OD} , l_{DS} et $\varphi \equiv \beta_0 + \alpha$. Notons que tous les angles indiqués sont, dans la pratique, extrêmement petits : la courbe pointillée est la trajectoire réelle d'un photon émis par la source et diffère très peu du trajet SPO . $\theta(b)$ est la déviation du rayon lumineux; S_1 est l'image de S vue par O . Remarquons que S n'est pas directement observable.

33. L'approximation de l'optique géométrique est évidemment valable ici, les distances mises en jeu étant toujours nettement plus importantes que les longueurs d'onde considérées (y compris les dimensions du déflecteur et de la source).

1. Commençons par écrire à quelle condition l'observateur O pourra voir des images multiples de S et, à cette fin, écrivons qu'un rayon lumineux atteint O après déflexion par D , de masse M . Le triangle OPS nous donne la relation ³⁴

$$\theta(b) = \alpha + \beta = \frac{4GM}{b}. \tag{7.102}$$

Tous les angles considérés étant très petits ³⁵, leurs sinus et tangente leur sont assimilables et l'on a

$$\frac{PQ}{\ell_{OD}} = \alpha \quad , \quad \frac{PQ}{\ell_{DS}} = \beta \quad , \quad PQ = PD - QD \quad , \quad QD = \ell_{OD}\beta_0; \tag{7.103}$$

la relation (7.102) donne alors

$$\frac{4GM}{b} = (b - \beta_0\ell_{OD}) \cdot \left(\frac{1}{\ell_{OD}} + \frac{1}{\ell_{DS}} \right), \tag{7.104}$$

qui se traduit par le diagramme de la figure 7.18.

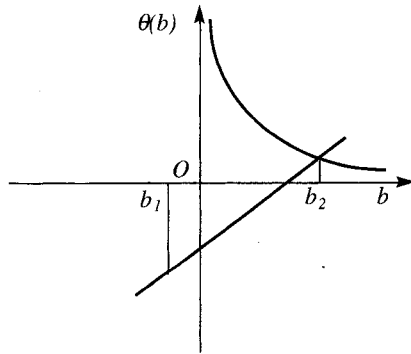


Figure 7.18 : Condition pour qu'un rayon lumineux issu de S soit observé. Dans le cas d'une source et d'un déflecteur ponctuels, il y a toujours deux solutions, donc deux images de la source.

Cette figure indique, dans le cas d'une source et d'un déflecteur ponctuels, qu'il existe toujours deux images de la source, de part et d'autre de l'axe source/observateur [une solution de l'équation (7.104) est positive et l'autre négative], l'une proche et l'autre éloignée. Lorsque la source, le déflecteur et l'observateur sont alignés, les deux solutions sont égales et de signes opposés; c'est pourquoi la symétrie du problème, par rapport à cet axe, fait que l'image de la source est un anneau, l'anneau de Chwolson/Einstein [O. Chwolson (1924), A. Einstein (1936)].

34. Nous nous placerons dans le cas de la Relativité Générale, pour laquelle $\gamma=1$ et donc $2 \cdot (1+\gamma)=4$.
 35. Au plus de l'ordre de quelques secondes d'arc.

De manière générale, la source n'est jamais directement observable et seules le sont ses images. Les autres grandeurs accessibles à l'observation sont : la position dans le ciel et la distance du déflecteur, la distance de la source et les écarts angulaires $\varphi_i \equiv \alpha_i + \beta_0$ ($i = 1, 2$) entre le déflecteur et les images S_i . Compte tenu de ce que

$$b_i = (\alpha_i + \beta_0) \ell_{OD} = \varphi_i \ell_{OD} \quad (7.105)$$

la relation (7.104) fournit

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{4GM}{\ell_{OD} \ell_{OS}} \cdot \ell_{DS}, \quad (7.106)$$

qui permet, théoriquement, d'évaluer la masse du déflecteur en termes des grandeurs observables. On trouverait également une autre relation donnant l'angle β_0 , c'est-à-dire la position angulaire de la source.

Dans la pratique, les seuls objets quasi ponctuels que l'on connaisse sont les quasars et les seules masses déflectrices susceptibles de donner des effets observables sont des galaxies [F. Zwicky (1937)]. Cependant, les uns et les autres sont des objets cosmologiques dont la distance n'est connue qu'au travers de la loi de Hubble

$$\ell = H_0^{-1} z \quad (7.107)$$

où H_0 est une constante qui vaut entre 50 et 100 kilomètres par seconde et par mégaparsec³⁶ et où z est le décalage spectral. Aussi, en termes de grandeurs observables, la relation (7.106), par exemple, s'écrit-elle alors

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{4GM}{z_D \cdot z_S} H_0 (z_S - z_D), \quad (7.108)$$

où z_S et z_D sont les décalages spectraux de la source et de la galaxie déflectrice, respectivement. Cette dernière relation permet donc – si la masse M est connue – de déterminer la constante de Hubble H_0 . En fait, z_S n'est accessible que parce que les images S_1 et S_2 possèdent *le même* décalage spectral :

$$z_{S_1} = z_{S_2} = z_S; \quad (7.109)$$

cette dernière propriété permet, évidemment, de rechercher des candidats mirages gravitationnels.

En réalité, la situation est encore un peu plus compliquée car la loi de Hubble sous la forme (7.107) ne s'applique qu'à des distances proches et doit, en fait, être corrigée par la courbure spatiale de l'Univers, laquelle introduit un nouveau paramètre inconnu, q_0 , le facteur de décélération.

Bien plus, la galaxie déflectrice n'est aucunement ponctuelle et la déflexion de la lumière à la distance b est de la forme

36. 1 Pc = 3.26 années-lumière.

$$\theta(b) = \frac{4GM(b)}{b}, \tag{7.110}$$

où $M(b)$ est la masse contenue dans une sphère de rayon b . Il s'ensuit que la condition (7.104) est modifiée et, par conséquent, la figure 7.18. Pour une galaxie elliptique, la densité de masse est souvent approchée par la fonction [G. de Vaucouleurs (1948)]

$$\rho(b) = \rho_0 e^{-(b/r_0)^{1/4}}, \tag{7.111}$$

ou une fonction en $b^{1/4}$, etc. Dans ce cas, au lieu de l'hyperbole équilatère de la figure (7.18), on a une courbe plus compliquée [Fig. 7.19] et l'on a alors la possibilité d'avoir une ou trois images (éventuellement dégénérées). Plus généralement, on peut obtenir un grand nombre d'images mais toujours en nombre impair [W.L. Burke (1981)].

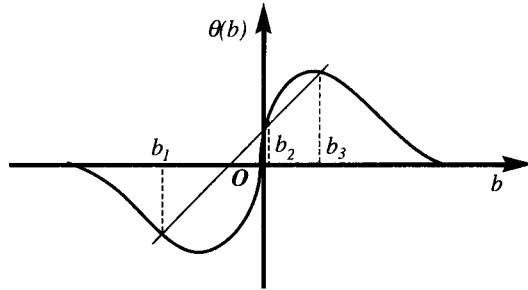


Figure 7.19 : La courbe $\theta(b)-b$ dans le cas d'un déflecteur étendu (de densité de masse $\sim b^{1/4}$). On a maintenant affaire à une ou trois images, éventuellement dégénérées.

Quelles formes peuvent avoir les mirages gravitationnels? Un cas simple [S. Liebes (1964)] est illustré sur la figure 7.20 où l'on a indiqué les diverses possibilités compte tenu des positions relatives de la source et du déflecteur. Pour des galaxies déflectrices de forme plus complexe, on peut obtenir une grande variété d'images possibles, étudiées dans la littérature.

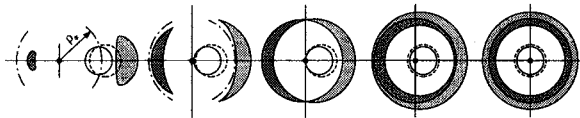


Figure 7.20 : Forme des mirages gravitationnels dans le cas de deux images S_1 et S_2 pour diverses positions relatives de la source et du déflecteur. Le point noir représente la lentille. Le cercle pointillé représente l'étoile occultée vue de l'étoile occultante. Le cercle en trait continu représente l'étoile occultée vue de la Terre, en l'absence de lentille [d'après F. Link (1969) Fig. 7.9; reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur, © Springer-Verlag].

2. Le second effet qui intervient dans les mirages gravitationnels, et qui permet d'assurer que deux (ou plusieurs) objets de même décalage spectral constituent bien un mirage, est le décalage temporel entre les signaux provenant de diverses images.

Cet effet est dû à ce que, d'une part, les rayons lumineux provenant (en apparence) des diverses images parcourent des trajets optiques différents (SP_1O et SP_2O , où 1 et 2 désignent les deux trajets; [cf. Fig. 7.17]) et, d'autre part, les champs gravitationnels subis le long de ces trajets sont différents.

Pour l'évaluer, il suffit de partir du fait qu'un photon parcourt une géodésique isotrope $ds^2 = 0$, et donc que

$$[1 - 2G\phi(r)]dt^2 - [1 - 2G\phi(r)]^{-1} d\mathbf{x}^2 = 0 \quad (7.112)$$

[$\phi(r)$ est le potentiel newtonien ordinaire de la galaxie déflectrice], qui donne

$$dt \sim [1 - 2G\phi(r)]dl, \quad (7.113)$$

et, finalement,

$$\Delta T = \int_{\Delta(\text{trajet})} dt \quad (7.114)$$

$$= \int_{\Delta(\text{trajet})} dl - 2G \int_{\Delta(\text{trajet})} \phi(r) dl. \quad (7.115)$$

Le premier terme du membre de droite de cette relation est la différence des chemins optiques, tandis que le second reflète le fait que la géométrie spatiale de la zone parcourue par les photons n'est pas euclidienne. Bien entendu, le potentiel $\phi(r)$ dépend de la répartition de la masse de la galaxie déflectrice et, éventuellement, d'autres masses présentes à proximité des rayons lumineux. Ce premier terme s'évalue sans difficulté :

$$\begin{aligned} \Delta T_1 &= SP_1 + P_1O - SP_2 - P_2O \\ &\sim \frac{z_S z_D}{H_0(z_S - z_D)} (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2 - 2\beta_0), \end{aligned} \quad (7.116)$$

et, typiquement, est de l'ordre de l'année. Le second terme nécessite la donnée de la répartition des masses dans le déflecteur; toutefois, pour une masse concentrée en un point, le calcul est exactement le même – le phénomène physique sous-jacent étant identique – que dans le cas du retard des échos radar dans le système solaire. On trouve ainsi ³⁷

37. En fait, dans le cadre de la cosmologie, le terme ΔT_2 doit être corrigé par un facteur $(1+z_D)$ et aussi par d'autres termes.

$$\Delta T_2 = 4GM \ell n \frac{b_2}{b_1} = 4GM \ell n \frac{\varphi_2}{\varphi_1} . \quad (7.117)$$

Les deux contributions, ΔT_1 et ΔT_2 , sont du même ordre de grandeur, ainsi que l'ont noté J.H. Cooke et R. Kantowski (1975).

3. Le troisième effet – l'amplification de l'intensité des images – permet d'obtenir des données supplémentaires sur le système source-défecteur et son environnement cosmologique. Il résulte de la conservation du nombre de photons, ou encore, de la conservation du flux lumineux. On peut, en effet, montrer [voir, par exemple, R.K. Sachs (1961)] qu'étant donné un faisceau de géodésiques isotropes issues d'un point donné, et si l'on appelle $d\Sigma$ une ³⁸ 2-surface orthogonale au 3-vecteur d'onde, alors la grandeur ³⁹ $I d\Sigma$ (où I est l'intensité à l'endroit où l'on se place dans le faisceau) vérifie

$$I d\Sigma|_1 = I d\Sigma|_2 = \text{const.} \quad (7.118)$$

et est indépendante de la vitesse de l'observateur. Il s'ensuit que le rapport des luminosités est donné par

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{d\Sigma_2}{d\Sigma_1} . \quad (7.119)$$

Pour calculer l'amplification de la lumière, dans le cas d'une lentille gravitationnelle, nous utiliserons la méthode de S. Refsdal (1964) sous la forme donnée par E.E. Clark (1972). Considérons donc un pinceau lumineux émis par Σ dans l'angle solide $d\Omega$; il découpe une aire $d\Sigma_D$ dans le plan Π_D orthogonal à l'axe source-observateur à la distance ℓ_{OD} [Fig. 7.21] et contenant, par conséquent, le déflecteur. Si le déflecteur était absent, ce pinceau lumineux découperait dans le plan-image Π_0 une surface élémentaire $d\Sigma_0$ et l'on aurait

$$\frac{d\Sigma_0}{d\Sigma_D} = \left(\frac{\ell_{OD} + \ell_{DS}}{\ell_{SD}} \right)^2 \equiv n^2 . \quad (7.120)$$

En réalité, le pinceau lumineux est défléchi et, dans le plan Π_0 , il découpe une aire élémentaire $d\Sigma_1$, correspondant à l'image S_1 (non indiquée sur la figure 7.21) de la source S . Il existe, bien entendu, une configuration analogue pour l'autre image de la source. Notons qu'en raison de la symétrie du problème, $d\chi_0 = d\chi_D \equiv d\chi$. On aura ainsi

$$d\Sigma_D = b db d\chi \quad (7.121)$$

$$d\Sigma_1 = r dr d\chi \quad (7.122)$$

38. Cela dépend du choix de l'axe temporel.

39. $I=A^2$, où A est l'amplitude électromagnétique.

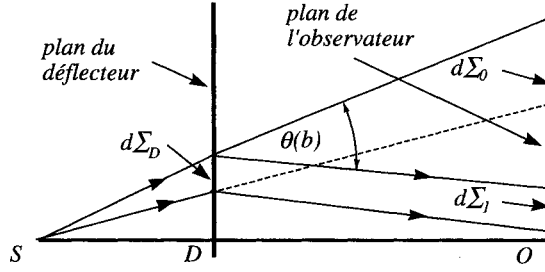


Figure 7.21 : Géométrie de l'amplification des images. [d'après E.E. Clark (1972)].

r est défini par $r \equiv \beta_0 n \ell_{OD}$; r est alors donné par l'équation de la lentille (7.104), qui s'écrit encore

$$r = nb - \ell_{OD} \theta(b) . \quad (7.123)$$

Dans ces conditions,

$$\frac{d\Sigma_1}{d\Sigma_D} = \frac{r}{b} \cdot \frac{dr}{db} , \quad (7.124)$$

et, compte tenu de la relation (7.120), on obtient l'amplification de l'image L_1/L_0 :

$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma_1} = n^2 \frac{b}{r} \left(\frac{dr}{db} \right)^{-1} , \quad (7.125)$$

qui s'écrit, en différenciant l'équation (7.123)

$$\frac{L_1}{L_0} = n^2 \frac{b}{r} \frac{1}{n - \ell_{OD} \frac{d\theta(b)}{db}} \Bigg|_{\substack{b=b_1 \\ r=r_1}} . \quad (7.126)$$

Naturellement, il existe une relation analogue pour l'image S_2 et, en utilisant les données géométriques de la figure 7.17, il vient [pour le détail du calcul, voir S. Refsdal (1964)] :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{4} \left(2 + \frac{\varphi}{\beta_0} + \frac{\beta_0}{\varphi} \right) L_0 \\ L_2 = \frac{1}{4} \left(-2 + \frac{\varphi}{\beta_0} + \frac{\beta_0}{\varphi} \right) L_0 , \end{cases} \quad (7.127)$$

(où φ est la séparation angulaire des deux images) de sorte que la luminosité totale $L_{\text{tot}} \equiv L_1 + L_2$ est donnée par

$$L_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{\beta_0} + \frac{\beta_0}{\varphi} \right) L_0 , \quad (7.128)$$

la différence des luminosités des deux images étant égale à L_0 . De même, le rapport des luminosités des deux images est donné par

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2^2}. \quad (7.129)$$

Lorsque la source, le défecteur et l'observateur sont très bien alignés, i.e. lorsque $\beta_0 \sim 0$, $L_{\text{tot.}}$ peut prendre des valeurs très importantes.

4. Ce qui précède est tout à fait élémentaire et les situations réelles sont beaucoup plus compliquées : source et défecteurs étendus donnant lieu à des images multiples et de formes complexes; défecteurs transparents ou non, possédant ou non des symétries, etc. Notons aussi que ces considérations s'appliquent également aux *ondes gravitationnelles* [Chap. 8]. En outre, toutes sortes d'études de cosmologie utilisent les (ou tiennent compte des) propriétés des lentilles ou mirages gravitationnels. Aussi existe-t-il à l'heure actuelle une littérature tout à fait abondante (plusieurs centaines d'articles!) sur le sujet, dont un nombre croissant consacrés à des observations ou à des problèmes observationnels.

EXERCICES

1. A partir des équations des géodésiques (7.61) et (7.62) pour deux mouvements voisins, démontrer l'équation de la déviation géodésique (7.63).

2. Vérifier que la métrique la plus générale à symétrie sphérique écrite sous la forme (7.64) s'obtient effectivement à partir des seuls tenseurs spatiaux disponibles δ^{ij} et $x^i x^j$.

3. (i) Montrer que la métrique PPN, donnée plus haut sous forme isotrope (7.75), en coordonnées standard s'écrit sous la forme

$$ds^2 = \left[1 - 2\alpha \frac{GM}{r} + 2(\beta - \alpha\gamma) \frac{G^2 M^2}{r^2} + \dots \right] dt^2 \\ - \left[1 + 2\gamma \frac{GM}{r} + \dots \right] dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2].$$

(ii) Calculer alors les symboles de Christoffel correspondants et écrire les équations des géodésiques.

(iii) Calculer le tenseur de Riemann à l'approximation considérée puis celui d'Einstein.

4. En Relativité Restreinte, le lagrangien d'un champ scalaire ψ est donné par

$$L = \frac{1}{2} \{ (\partial\psi)^2 - V(\psi) \},$$

où $V(\psi)$ est une fonction donnée de ψ .

(i) Ecrire les équations du mouvement.

(ii) Comment s'écrivent-elles en présence d'un champ de gravitation si ψ est couplé "minimalement" à la gravitation?

(iii) Donner un exemple simple de couplage non minimal.

5. Soit la métrique

$$ds^2 = (1+2\phi)dt^2 - (1-2\phi)dx^2,$$

définie sur V^4 . ϕ est une fonction telle que $|\phi| \ll 1$. Ecrire l'équation des géodésiques. Calculer les composantes du tenseur de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$.

6. Vérifier que l'équation de Maxwell $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu$ implique la conservation du quadricourant : $\nabla_\mu J^\mu = 0$.

7. On considère l'équation satisfaite par le 4-potentiel A^μ dans l'espace de Minkowski

$$\square A^\mu - \partial_\lambda{}^\mu A^\lambda = 4\pi J^\mu .$$

Les équations suivantes

$$\begin{cases} \nabla_\lambda \nabla^\lambda A^\mu - \nabla_\lambda \nabla^\mu A^\lambda = 4\pi J^\mu \\ \nabla_\lambda \nabla^\lambda A^\mu - \nabla_\lambda \nabla^\mu A^\lambda - R^\mu{}_\lambda A^\lambda = 4\pi J^\mu \end{cases}$$

en sont-elles des généralisations dans $\{V^4, g_{\mu\nu}\}$? Peut-on les obtenir à partir de la règle de couplage minimal? Qu'en est-il de l'invariance de jauge?

8. On considère l'équation

$$\nabla_\mu J^\mu = \lambda R ,$$

où λ est une constante et R le scalaire de Ricci. J^μ est un quadricourant de particules.

(i) A quelle équation l'équation précédente se réduit-elle en l'absence de gravitation? En est-elle la généralisation que fournirait le "couplage minimal"?

(ii) Peut-on, sur la base d'arguments physiques, affirmer que $\lambda=0$?

9. Démontrer le théorème de la note 14.

10. A partir de la relation (7.82) qui fournit l'avance du périhélie d'une planète (par révolution), trouver un encadrement pour le paramètre PPN γ , en se reportant aux données d'observations fournies au chapitre 1.

11. On se propose de calculer, au premier ordre des perturbations, l'avance du périhélie d'une planète, dont la trajectoire non perturbée obéit à l'équation de la dynamique

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{GmM_\odot}{r^2} e_r . \quad (1)$$

Première partie :

(i) Montrer que

$$\frac{de_\theta}{d\theta} = -e_r \quad (2)$$

et que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{GmM_\odot}{J} \frac{de_\theta}{dt} \quad (3)$$

où

$$J = mr^2 \frac{d\theta}{dt} . \quad (4)$$

(ii) En déduire que l'on a l'intégrale première

$$v = \frac{GmM_\odot}{J} (e_\theta + e) . \quad (5)$$

où e est un vecteur constant.

(iii) Vérifier que

$$e = \frac{1}{Gm^2 M_\odot} k \Lambda [p \wedge L - Gm^2 M_\odot e_r] \quad (6)$$

où \mathbf{k} est le vecteur unitaire orthogonal au plan du mouvement.

(iv) On se propose maintenant de montrer que $|e|$ est l'excentricité de l'ellipse et que sa direction est celle de son petit axe. On appellera φ l'angle entre e_r et r . En considérant le produit scalaire $m\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}$ et en utilisant l'équation d'une ellipse en coordonnées polaires (r, θ) ,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}, \quad (7)$$

vérifier les résultats indiqués et que $\varphi = \theta + \pi/2$.

Deuxième partie : On se propose maintenant de calculer l'avance du périhélie de la planète, soit φ , due à la force perturbatrice, centrale,

$$\delta F = \frac{GmM_\odot}{r} g(r) e_r. \quad (8)$$

(i) Montrer que

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} g(r) e_r, \quad (9)$$

et en déduire que

$$e \cdot \frac{d\mathbf{e}}{dt} = -\frac{dr}{dt} \frac{J^2 g(r)}{Gm^2 M_\odot r^2}. \quad (10)$$

(ii) Montrer que la grandeur

$$\frac{1}{2} e^2 + \int^r \frac{J^2 g(r')}{Gm^2 M_\odot r'^2} dr' \quad (11)$$

est conservée.

(iii) Montrer que

$$e \wedge \frac{d\mathbf{e}}{dt} = e^2 \psi \mathbf{k}, \quad (12)$$

et déduire de (9) que

$$\frac{d\psi}{dt} = \left[\frac{J^2}{Gm^2 M_\odot r} - 1 \right] \frac{g(r)}{e} \frac{d\theta}{dt}. \quad (13)$$

(iv) Par intégration de cette dernière relation, puis en considérant uniquement le premier ordre des perturbations, montrer que l'avance $\Delta\psi$ du périhélie d'une planète sur une révolution est donnée par

$$\Delta\psi \simeq \frac{2}{e} \int_0^\pi g[r(\theta)] \cos \theta d\theta. \quad (14)$$

(v) *Application :* $g(r) = 3J^2/m^2 c^2 r^2$. [Réf. : B. Davies (1982)].

12. Calculer le retard Δt d'un écho radar sur une planète en utilisant la métrique PPN sous la forme standard. Comparer (et discuter) avec le résultat calculé avec la forme isotrope.

13. Pourquoi la comparaison des mesures d'écho radar sur une planète lorsque les systèmes Terre-Soleil-Planète sont en conjonction inférieure ou supérieure permet-elle d'éliminer les incertitudes sur les propriétés réflectrices de la surface de la planète?

14. A partir du principe de Fermat, écrit sous la forme

$$\delta \int n(r) d\xi = 0,$$

(i) Montrer que les trajectoires des rayons lumineux obéissent à

$$\frac{d}{d\xi} \left(n(r) \frac{dx}{d\xi} \right) = \nabla n(r);$$

(ii) en déduire la déviation des rayons lumineux si $n(r)$ est donné par les relations (7.93) et (7.95).

15. Dans un plasma – tel celui de la couronne solaire – une onde électromagnétique (transverse) se propage selon la relation de dispersion

$$\omega^2 - k^2 = \omega_p^2,$$

où la fréquence plasma ω_p est donnée par

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\rho e^2}{m}$$

(ρ : densité électronique).

(i) Calculer l'indice du plasma [rapport de la vitesse de la lumière à la vitesse de phase] en fonction de ω et ρ .

(ii) En utilisant le principe de Fermat [Ex. 14], montrer que, si ρ est une fonction de r , alors une onde lumineuse est déviée par le plasma. Préciser à quelle(s) condition(s) sur $\rho(r)$.

(iii) Calculer cette déviation dans le cas du Soleil, pour des ondes radio. On donne, pour $r > 2.5R_\odot$,

$$\rho(r) = \frac{10^8}{(r/R_\odot)^6} + \frac{10^6}{(r/R_\odot)^2}$$

(ρ est exprimée en électrons par centimètres cubes).

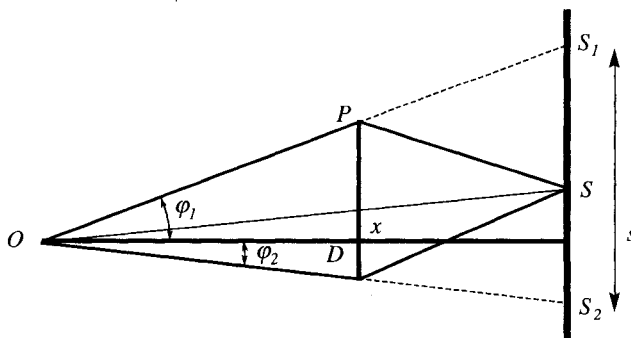


Figure 7.22 : Exercice 19.

16. Dans le cas d'une lentille gravitationnelle ponctuelle et d'une source également ponctuelle, déterminer la position angulaire β_0 de la source en fonction des grandeurs observables.

17. Pourquoi, dans un mirage gravitationnel, la source et ses images possèdent-elles le même décalage spectral?

18. Démontrer les relations (7.127)–(7.129) qui caractérisent l'amplification lumineuse dans les mirages gravitationnels.

19. Dans ce problème, on se propose de montrer que les deux images d'une source située derrière un déflecteur ponctuel peuvent avoir une vitesse apparente supérieure à celle de la lumière (les notations employées sont celles utilisées dans ce chapitre). On suppose que la source se meut orthogonalement à l'axe OD , à la vitesse v . On appellera x la distance de l'axe OS à l'axe OD . On appellera s la distance entre les deux images S_1 et S_2 [Fig. 7.22].

(i) Montrer que $s=(l_{OD}+l_{DS})(\varphi_1+\varphi_2)$ et exprimer cette grandeur en fonction de x, l_{OD}, l_{OS} et du rayon gravitationnel de la lentille. Montrer que l'on a aussi

$$x = \frac{l_{OD}+l_{DS}}{l_{OD}} vt.$$

(ii) Calculer alors la vitesse relative $\frac{ds}{dt}$ d'éloignement des images S_1 et S_2 et en déduire que, si $l_{DS} \gg l_{OD}$, alors $|\frac{ds}{dt}|$ peut être arbitrairement grand [Réf. : L. Kh. Ingel' (1975)].

20. A partir de la métrique la plus générale à symétrie sphérique (7.66), i.e. à partir de

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

(i) Montrer que les composantes non nulles du tenseur de Riemann s'écrivent

$$\begin{cases} R^0_{101} = -\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{4}\nu'^2 \\ R^0_{202} = -\frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} \\ R^0_{303} = -\frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda}\lambda'\sin^2\theta \end{cases} \quad \begin{cases} R^1_{212} = \frac{1}{2}r\nu'e^{-\lambda} \\ R^1_{313} = \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda}\sin^2\theta \\ R^2_{323} = (1-e^{-\lambda})\sin^2\theta \end{cases}$$

(ainsi que les équations obtenues à l'aide des permutations convenables des indices).

(ii) En déduire que les composantes non nulles du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ sont données par

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{\nu-\lambda} \cdot \left[-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} \right] \\ R_{11} &= \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} &= e^{-\lambda} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda') \right] - 1 \\ R_{33} &= \{ e^{-\lambda} [1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda')] - 1 \} \sin^2\theta. \end{aligned}$$

(iii) Vérifier que le scalaire de courbure est donné par

$$R = e^{-\lambda} \left[-\nu'' + \frac{1}{2}\nu'\lambda' - \frac{1}{2}\nu'^2 + \frac{2}{r}(\lambda' - \nu') - \frac{2}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2}.$$

21. Soient deux observateurs $\{\mathbf{K}\}$ et $\{\mathbf{K}'\}$, respectivement inertiel et uniformément accéléré dans \mathcal{M}^2 . Leurs trajectoires d'univers sont

$$x = a \quad (\text{pour } \{\mathbf{K}\}) \quad \text{et} \quad t^2 - x^2 = -a^2 \quad (\text{pour } \{\mathbf{K}'\}).$$

(i) Tracer un diagramme d'espace-temps dans le système de coordonnées inertielles liées à $\{\mathbf{K}\}$.

(ii) $\{\mathbf{K}\}$ envoie des signaux électromagnétiques vers $\{\mathbf{K}'\}$. Vérifier qu'au-delà d'un temps t_0 , que l'on déterminera, $\{\mathbf{K}'\}$ ne peut plus recevoir les signaux émis par $\{\mathbf{K}\}$. Montrer qu'avant un temps t_1 , que l'on déterminera, $\{\mathbf{K}\}$ ignore l'existence de $\{\mathbf{K}'\}$. Ainsi l'horizon de $\{\mathbf{K}\}$ relativement à $\{\mathbf{K}'\}$ est défini par t_0 et t_1 .

(iii) On considère maintenant le système de coordonnées (ξ, χ)

$$t = \xi \operatorname{sh} \chi, \quad x = \xi \operatorname{ch} \chi$$

(coordonnées de Rindler). Comment s'écrivent, dans ce système, (a) la métrique, (b) l'équation de $\{\mathbf{K}'\}$, (c) l'équation de $\{\mathbf{K}\}$?

(iv) Comment s'écrit l'équation du cône de lumière dans ce système de coordonnées?

(v) Calculer le décalage spectral des signaux électromagnétiques émis par $\{\mathbf{K}'\}$ et reçus par $\{\mathbf{K}\}$.

CHAPITRE 8

La gravitation relativiste d'Einstein (Relativité Générale)

Dans les chapitres précédents, nous avons vu que les modifications introduites par la relativité à la théorie de la gravitation, essentiellement *via* la célèbre relation $E = mc^2$ [Chap. 4], se traduisaient principalement par la quasi-nécessité d'adopter un espace-temps *courbe*, également conséquence du principe d'équivalence [Chap. 6 et 7]. Cependant, ce principe ne précise pas du tout ce que sont les équations auxquelles obéissent les dix composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$; tout au plus la relation $E = mc^2$ suggère-t-elle que ces équations sont nécessairement *non linéaires* [Chap. 4]. Dans ce chapitre, nous étudierons les équations les plus simples, compatibles avec l'observation, et montrerons d'où elles sont issues : il s'agit des équations d'Einstein, dont l'étude (ainsi que celle des espaces-temps auxquels elles conduisent) est la Relativité Générale. Nous en déduirons également quelques conséquences élémentaires importantes pour l'Astrophysique Relativiste.

En fait, si la courbure de l'espace-temps exprime, au travers de l'existence d'un tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ non trivialement réductible à $\eta_{\mu\nu}$, les effets de la gravitation sur les différents phénomènes physiques, cela n'exclut nullement l'existence d'autres champs à longue portée qui pourraient également jouer un rôle. Un exemple notable est constitué par la théorie de C. Brans et R.H. Dicke (1961) dans laquelle un champ scalaire coexiste avec le tenseur métrique. En dernier ressort, cependant, l'existence de tels champs devrait être déterminée ou, à tout le moins, limitée [C. Will (1981)], par un recours à l'expérience ou à l'observation; en l'état actuel des choses, il semble bien que le seul tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ suffise à rendre compte des faits d'observation disponibles et que la Relativité Générale d'Einstein constitue "la" bonne théorie de la gravitation relativiste.

Notons encore que des arguments simples permettent d'éliminer des théories relativistes de la gravitation basées uniquement sur l'usage de champ scalaire ou

vectorel. D'abord, la généralisation relativiste la plus simple de l'équation de Poisson, pour un champ de gravitation *scalaire*, s'écrit

$$\square\Phi = 4\pi G \times (\text{densité de masse}). \quad (8.1)$$

Comme dans le cas relativiste la densité de masse (ou d'énergie *et* d'impulsion, grandeurs inséparables) est représentée par le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$. Le seul scalaire ayant la dimension d'une densité d'énergie que l'on puisse construire à partir de ce tenseur est sa trace, de sorte que l'équation (8.1) s'écrit nécessairement sous la forme

$$\square\Phi = 4\pi GT^{\mu}_{\mu}. \quad (8.2)$$

Bien que cette équation généralise l'équation de Poisson de manière relativiste, elle doit être rejetée car (jointe aux équations du mouvement appropriées) elle conduit à un *retard* du périhélie de Mercure, sans parler d'un ordre de grandeur incorrect pour cet effet. Bien plus, elle ne permet pas de coupler la gravitation et l'électromagnétisme car $T^{\mu}_{\mu \text{em}} = 0$: dans un tel modèle, il ne peut donc y avoir ni décalage spectral d'origine gravitationnel, ni déflexion de la lumière au voisinage de masses importantes. Naturellement, ces arguments n'excluent pas que des modifications sophistiquées (et sans doute quelque peu artificielles) ne puissent pallier ces inconvénients. Quant à une gravitation relativiste basée sur un champ vectoriel, on l'élimine sur la base du fait que deux particules massives se repousseraient au lieu de s'attirer... Naturellement, une combinaison de ces trois sortes de champ (tensoriel, vectoriel, scalaire) peut parfaitement être en accord avec l'observation et de tels modèles ont été étudiés.

Quoi qu'il en soit, nous nous limiterons ici à la théorie d'Einstein où la gravitation courbe l'espace-temps et où le tenseur métrique constitue le seul champ possible pour la décrire.

Les équations d'Einstein

Avant d'obtenir ces équations, il faut insister sur le fait qu'elles constituent un *postulat* supplémentaire, largement indépendant du principe d'équivalence et que nous pourrions donc parfaitement poser *a priori*. Toutefois, pour naturel que soit ce postulat, il vaut mieux en indiquer et discuter les sources ainsi que les contraintes qui y conduisent.

Nous exigeons d'abord que les équations de la gravitation se réduisent à l'équation de Poisson, à la limite newtonienne des faibles vitesses et des champs de gravitation peu intenses. Il s'agit là d'une contrainte minimale qui peut être réalisée en imposant que les équations relativistes soient – tout comme les newtoniennes – *du second ordre* pour ce qui est des dérivées du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et, de plus, que ces dérivées secondes y apparaissent *linéairement*. Ces deux hypothèses doivent

conduire à l'équation de Poisson mais, si elles peuvent constituer des conditions suffisantes pour y parvenir, elles ne sont absolument pas nécessaires. Il s'agit donc essentiellement ici de considérer les hypothèses *les plus simples*. On peut cependant arguer du fait que si l'on souhaite pouvoir formuler un problème de Cauchy pour le champ de gravitation dans les termes usuels¹, alors seules des dérivées du second ordre (et aussi du premier ordre, bien évidemment) doivent intervenir dans les équations relativistes. Quant à la linéarité en les dérivées secondes de $g_{\mu\nu}$, c'est évidemment le moyen le plus simple d'obtenir l'équation (linéaire) de Poisson, compte tenu de ce que $g_{00} \sim 1 - 2\Phi/c^2$ à l'approximation newtonienne.

La seconde idée que nous devons mettre en œuvre est l'intuition fondamentale d'Einstein qui se traduit par l'"équation" (relativiste)

$$\text{Courbure} = \text{Matière} . \quad (8.3)$$

Toutefois, la courbure se traduit par le tenseur du quatrième ordre de Riemann-Christoffel $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ tandis que la présence de matière, elle, s'exprime au moyen du tenseur du second ordre $T_{\mu\nu}$, le tenseur énergie-impulsion. Aussi n'est-ce que par l'intermédiaire de contractions de $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ que l'équation (8.3) pourra être réalisée et l'on écrira formellement

$$K_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (8.4)$$

où $K_{\mu\nu}$ est un tenseur (à déterminer) construit à partir du tenseur de Riemann-Christoffel et du tenseur métrique. Naturellement, les équations (8.3) ou (8.4) satisfont bien les critères précédents puisque, rappelons-le, $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ est le seul tenseur (du quatrième ordre) qui soit linéaire en les dérivées secondes du tenseur métrique (et leurs contractions avec ce dernier tenseur). Le tenseur $K_{\mu\nu}$ doit être *symétrique* dans l'échange $\mu \longleftrightarrow \nu$ et sa forme la plus générale est donc

$$K_{\mu\nu} = a R_{\mu\nu} + b R g_{\mu\nu} + a \lambda g_{\mu\nu} , \quad (8.5)$$

où a , b et λ sont des constantes, pour le moment arbitraires. Pour les déterminer, il faut se rappeler que le tenseur énergie-impulsion est conservatif,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 , \quad (8.6)$$

et donc que $K_{\mu\nu}$ doit l'être également et ce, quel que soit $T_{\mu\nu}$

$$\nabla_{\mu} K^{\mu\nu} = 0 . \quad (8.7)$$

1. On souhaite pouvoir trouver le champ de gravitation $g_{\mu\nu}$ au point x de la variété d'espace-temps connaissant les dérivées $\partial_{\lambda} g_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$ au "temps t ", c'est-à-dire sur une 3-surface du genre espace. Ceci implique que les équations à résoudre soient - s'il s'agit d'équations aux dérivées partielles - du second ordre.

Utilisant maintenant la relation (3.131) et les identités de Bianchi (6.58), c'est-à-dire

$$\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0 \quad (8.8)$$

et

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu\alpha\beta} + \nabla_\beta R_{\mu\nu\lambda\alpha} + \nabla_\alpha R_{\mu\nu\beta\lambda} = 0 \quad (8.9)$$

respectivement, la relation (8.7) s'écrit

$$\nabla_\mu K^\mu{}_\nu = \left(\frac{a}{2} + b\right) \nabla_\nu R = 0, \quad (8.10)$$

qui implique que $b = -a/2$, car $\nabla_\nu R$ ne peut être nul partout (sauf dans le cas de l'espace de Minkowski, non courbe). Le tenseur $K_{\mu\nu}$ a donc la forme

$$K_{\mu\nu} = a[G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}] \quad (8.11)$$

avec

$$G_{\mu\nu} = a \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] \quad (8.12)$$

où $G_{\mu\nu}$ est le *tenseur d'Einstein*. Finalement, la seule équation que l'on puisse écrire compte tenu des contraintes précédentes a la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{a} T_{\mu\nu} \quad (8.13)$$

et constitue l'équation d'Einstein, lorsque $a = 1$. La constante λ est appelée *constante cosmologique* et n'a été introduite par Einstein que dans le but d'obtenir un Univers statique [R. Hakim (1992)].

Il reste encore à vérifier que l'équation (8.13), avec $\lambda = 0$ et $a = 1$, se réduit bien à l'équation de Poisson à la limite newtonienne. La limite des champs de gravitation faibles implique que, dans le membre de gauche de l'équation (8.13), on ne retienne que les termes *linéaires* dans la déviation $h_{\mu\nu}$ du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ relativement à $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \text{ et } \|h_{\mu\nu}\| \ll 1, \quad (8.14)$$

ainsi qu'une linéarisation analogue pour les dérivées.

La limite des vitesses faibles affecte le membre de droite de l'équation (8.13), puisque $T_{\mu\nu}$ décrit l'état de la matière, y compris son mouvement. Par exemple, si nous considérons un "schéma fluide parfait", c'est-à-dire un tenseur énergie-impulsion de la forme

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (8.15)$$

le rapport T_{ii}/T_{00} sera donné par

$$\left| \frac{T_{ii}}{T_{00}} \right| = \left| \frac{(\rho + P) u_i u_i - P g_{ii}}{(\rho + P) u_0 u_0 - P g_{00}} \right|. \quad (8.16)$$

Toutefois, comme $P/c^2 \ll \rho$, l'équation (8.16) se réécrit

$$\left| \frac{T_{ii}}{T_{00}} \right| = \left| v_i^2 - \frac{P}{\rho} \frac{g_{ii}}{g_{00}} \right|. \quad (8.17)$$

compte tenu de ce que $u_0 = g_{00} u^0$ (en supposant, ce qui est vrai pour une métrique statique dans un système de coordonnées adaptées, $g_{0i} = 0$) et de ce que $v_i \equiv u_i/u_0$. D'autre part, le rapport g_{ii}/g_{00} est d'ordre unité, compte tenu de l'approximation des champs faibles (8.14) et comme $P \ll \rho c^2$, le rapport (8.17) est d'ordre v^2/c^2 et est finalement négligeable. De manière générale, à l'approximation newtonienne, les composantes spatiales du tenseur énergie-impulsion sont négligeables, comparées à la composante temporelle :

$$|T_{ij}| \ll T_{00} = \rho; \quad (8.18)$$

en d'autres termes, l'équivalent énergétique des tensions est très inférieur à la densité d'énergie ρ .

Dans ces conditions, prenant la trace de l'équation (8.13), il vient

$$-R + 4\lambda = \frac{8\pi G}{a} T^\mu{}_\mu \quad (8.19)$$

$$\sim \frac{8\pi G}{a} T^0{}_0, \quad (8.20)$$

de sorte qu'à l'approximation newtonienne, la relation (8.13) écrite pour les composantes zéro donne alors

$$R_{00} \approx +\lambda g_{00} + \frac{4\pi G}{a} T_{00}, \quad (8.21)$$

où l'on a tenu compte de ce que $T_{00} = g_{00} T^0{}_0$, toujours dans le cas d'une métrique statique et en négligeant les T^{ij} . Utilisant maintenant le fait que

$$R_{00} \approx +\partial_i \Gamma^i_{00} \quad (8.22)$$

(que l'on obtient aisément en linéarisant l'expression de R_{00} et en utilisant encore le caractère statique de la métrique), on obtient [cf. Eq. (7.53)]

$$\Gamma^i_{00} \approx \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \simeq +\lambda(h_{00} + 1) + \frac{4\pi G}{a}\rho, \quad (8.23)$$

ou encore [avec $h_{00} = +2\phi$ où ϕ est le potentiel newtonien; cf. Eq. (7.57)]

$$\nabla^2 \phi = \lambda(1 + 2\phi) + \frac{4\pi G}{a}\rho, \quad (8.24)$$

qui est bien l'équation de Poisson dès lors que $\lambda = 0$ et $a = 1$.

Une forme utile des équations d'Einstein est la suivante :

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right], \quad (8.25)$$

obtenue en remplaçant la courbure scalaire R , dans l'équation (8.13), par son expression (8.19), avec $\lambda = 0$ et $a = 1$.

A ce stade, il faut remarquer que, si les équations d'Einstein (8.13) ou (8.25) sont au nombre de 10 pour les 10 inconnues que sont les composantes $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique, les quatre relations (identités de Bianchi contractées)

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0, \quad (8.26)$$

qui découlent des relations (8.12) et des identités de Bianchi, sont automatiquement satisfaites, ce qui ne laisse subsister que six équations indépendantes. Il existe donc *a priori* quatre équations de moins que nécessaire. En fait, l'indétermination partielle des $g_{\mu\nu}$ correspond à l'arbitraire des choix de systèmes de coordonnées : des coordonnées étant spécifiées – quatre conditions étant donc imposées – les équations d'Einstein permettront effectivement la détermination du tenseur métrique. Encore faudra-t-il préciser soigneusement les conditions initiales et les conditions aux limites utilisées.

En conclusion, la géométrie locale de l'espace-temps n'est pas déterminée *a priori* mais est causée par la répartition et le mouvement de la matière. Réciproquement, ces derniers sont influencés par la géométrie locale de l'espace-temps. En ce sens, la Gravitation Relativiste d'Einstein est une théorie complète, du moins quant aux propriétés locales de l'espace-temps : ce dernier devient un élément dynamique *per se* et cesse d'être une arène inerte où se déroulent les divers phénomènes physiques; bien au contraire, ceux-ci modifient l'espace-temps. A cela, il convient, malgré tout, d'apporter une nuance importante, car les conditions aux limites (par exemple à l'infini) ne sont absolument pas définies par la Relativité Générale *seule* : toute hypothèse *globale* est de nature cosmologique.

Revenons pour clore cette section à la *constante cosmologique* λ , constante que nous avons prise égale à zéro. Nous avons déjà indiqué qu'Einstein l'avait introduite afin d'obtenir une solution cosmologique *statique* (c'est-à-dire sans expansion ni contraction – à une époque où la découverte de l'expansion de l'Univers par Hubble n'avait pas encore été effectuée) et donc conformément aux idées de son temps sur

la notion d'espace. En réalité, un terme cosmologique avait déjà été introduit dans la gravitation newtonienne par H. Seeliger (1895, 1896) et C. Neumann (1896) avec les mêmes motivations qu'Einstein [voir H. Bondi (1961)] et la seule contrainte à laquelle ce terme devait être astreint est que sa contribution au mouvement des planètes – voire des galaxies dans un amas – fût négligeable. Les estimations actuelles [A.D. Dolgov et Ya. B. Zeldovich (1981)] fournissent $\lambda < 10^{-57} \text{ cm}^{-2}$, cette petitesse extrême posant elle-même problème [Ya. B. Zeldovich (1983) et S. Weinberg (1981)]. Notons enfin que si l'on fait passer le terme cosmologique $\lambda g_{\mu\nu}$ dans le membre de droite de l'équation d'Einstein (8.13), avec $a = 1$, ce terme peut être interprété comme étant le tenseur énergie-impulsion du vide puisqu'en l'absence de matière (i.e. lorsque $T_{\mu\nu} \equiv 0$) il subsiste et est conservatif [cf. Eq. (8.8)].

Autres déductions des équations d'Einstein

Il existe de nombreuses déductions des équations d'Einstein, toutes plus ou moins équivalentes, mais qui éclairent la théorie sur tel ou tel point particulier. Il en existe d'autres aussi qui, dans leur esprit et leurs bases physiques, sont cependant très différentes. Il est d'autant plus remarquable qu'on obtienne les équations d'Einstein, dans chaque cas presque à coup sûr. Comme, d'autre part, toutes les indications expérimentales ou observationnelles [C.M. Will (1981)] connues à ce jour confirment la théorie d'Einstein plutôt que la plupart des nombreuses théories concurrentes, il semble bien que la Relativité Générale recèle quelque propriété fondamentale de la matière, encore mal comprise.

Dans cette section, nous donnerons des indications sur deux exemples très différents de déduction des équations d'Einstein, l'une due à D. Hilbert (1915), dont les hypothèses de base sont les mêmes que celles utilisées précédemment, et l'autre due à plusieurs auteurs et basée sur l'analogie formelle entre les équations des particules de masse nulle et de spin 2 et les équations d'Einstein linéarisées.

1. Commençons par l'approche de D. Hilbert (1915), une approche *variationnelle* qui, quoique basée sur les mêmes hypothèses² que ci-dessus, est intéressante à bien des égards. Considérons donc un système physique quelconque, composé de particules et/ou de champs non quantiques, caractérisé par un lagrangien $\mathcal{L}_{\text{mat.}}$ et obéissant, en l'absence de gravitation, aux équations d'Euler-Lagrange habituelles [Appendice C]. Soit maintenant $\mathcal{L}_{\text{grav.}}$ le lagrangien, pour le moment indéterminé, de la gravitation, c'est-à-dire celui qui doit donner lieu à des équations satisfaites par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Au passage, notons que si $\mathcal{L}_{\text{grav.}}$ ne dépend pas *a priori* de l'état de la matière, par contre $\mathcal{L}_{\text{mat.}}$ est fonction des propriétés locales de l'espace-temps *via* le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$: $\mathcal{L}_{\text{mat.}}$ contient donc le couplage entre matière et gravitation, de sorte que nous poserons, comme un principe, la validité du principe variationnel suivant :

2. Pour les relations entre Hilbert et Einstein et la découverte des équations relativistes de la gravitation, voir J. Mehra (1974).

$$\delta S = 0 = \delta \int \sqrt{|g|} d^4x [\mathcal{L}_{\text{grav.}} + \mathcal{L}_{\text{mat.}}] . \quad (8.27)$$

Dans cette dernière expression, le facteur $\sqrt{|g|}$ a été introduit de manière que l'élément d'intégration soit invariant dans les changements de système de coordonnées [Appendice B] :

$$\sqrt{|g|} d^4x = \sqrt{|g'|} d^4x' . \quad (8.28)$$

Déterminons maintenant le lagrangien $\mathcal{L}_{\text{grav.}}$, compte tenu de ce que l'on souhaite obtenir des équations linéaires en les dérivées secondes du tenseur métrique et qui se réduisent à l'équation de Poisson à l'approximation non relativiste. La première hypothèse conduit immédiatement au lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{grav.}} = \text{const.} \times [R - 2\Lambda] , \quad (8.29)$$

R étant le seul scalaire possible construit à partir de $g_{\mu\nu}$ et $R_{\mu\nu\alpha\beta}$, linéaire en $\partial_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}$: Λ est une constante pour le moment arbitraire mais qui apparaîtra comme étant la constante cosmologique. La constante multiplicative dans l'expression (8.29) est déterminée par la nécessité de retrouver l'équation de Poisson à la limite newtonienne.

Les équations de la gravitation relativiste peuvent maintenant être obtenues à l'aide du principe variationnel (8.27) [voir, par exemple, J.L. Anderson (1967); S. Weinberg (1972); Ch. W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973)]. Il faut cependant noter que $\mathcal{L}_{\text{grav.}}$ est du second ordre (en les dérivées du champ de gravitation) et l'on ne peut donc appliquer telles quelles les équations d'Euler-Lagrange habituelles données dans l'appendice C. Elles doivent donc être généralisées. On peut, toutefois, utiliser une procédure plus simple³ qui consiste à faire varier indépendamment $g_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ (qui apparaît implicitement dans R), la variation par rapport aux Γ fournissant leur expression en termes des $g_{\mu\nu}$ et $\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}$. À l'aide des relations

$$\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (8.30)$$

$$\delta g^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (8.31)$$

on obtient alors les équations

$$\text{const.} \times \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} \right] = \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{mat.}}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{\text{mat.}} , \quad (8.32)$$

3. Cette méthode est due à A. Palatini (1919). Son analogue en mécanique, électromagnétisme, etc., est discuté dans Ch. W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973), pages 493 et suivantes.

qui constituent bien les équations d'Einstein si la constante apparaissant dans le membre de gauche est prise égale à $(8\pi G)^{-1}$ et si le tenseur énergie-impulsion de la matière est identifié à

$$T_{mat.}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{mat.}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{mat.} . \quad (8.33)$$

Cela n'est évidemment possible que si le tenseur (8.33) est conservatif et s'il ne diffère du tenseur énergie-impulsion canonique [Appendice C] que par des termes à divergence (covariante) nulle. Cela se démontre sans difficulté particulière [voir les références citées plus haut]. La relation (8.33) possède l'avantage de fournir un tenseur énergie-impulsion *symétrique*, ce qui n'est, en général, pas le cas du tenseur canonique [F. Belinfante (1940); L. Rosenfeld (1940)] : l'invariance du lagrangien $\mathcal{L}_{mat.}$ dans des changements de coordonnées infinitésimaux

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \quad (8.34)$$

conduit à la conservation du tenseur énergie-impulsion de la matière :

$$\nabla_{\mu} T_{mat.}^{\mu\nu} = 0.$$

2. Une autre approche, due originellement à S.N. Gupta (1954) (1957) (1962), et perfectionnée par la suite [R.H. Kraichnan (1955); W. Thirring (1961); R.P. Feynman (1962); S. Weinberg (1965); S. Deser (1970) (1971)], est radicalement différente⁴. Elle est basée sur le fait qu'en physique quantique, un champ de spin 2 est représenté par un tenseur symétrique, d'ordre 2 et sans trace. Aussi l'idée d'interpréter le champ $g_{\mu\nu}$ comme étant directement lié à un champ classique (*i.e.* non quantique) de spin 2 est-elle très naturelle. Cependant, plutôt que de partir directement des équations du champ de spin 2 [M. Fierz, W. Pauli (1939)], nous suivons les démarches de R.P. Feynman (1962) et S. Deser (1971), dont nous n'indiquerons, malgré tout, que les principales étapes.

Considérons donc un champ tensoriel classique $h_{\mu\nu}$, symétrique, et écrivons le lagrangien le plus général auquel il obéit, compte tenu du fait qu'il est nécessairement composé de combinaisons quadratiques des dérivées premières $\partial_{\lambda} h_{\alpha\beta}$: nous souhaitons obtenir des équations du second ordre qui soient linéaires. Le fait qu'il s'agisse d'un champ de masse nulle impose que ce lagrangien ne contienne pas de terme quadratique en $h_{\alpha\beta}$. Ce lagrangien s'écrit alors, de manière tout à fait générale, sous la forme⁵

$$L = a \partial_{\sigma} h_{\mu\nu} \cdot \partial^{\sigma} h^{\mu\nu} + b \partial_{\nu} h^{\mu\nu} \cdot \partial_{\sigma} h_{\mu}{}^{\sigma} + c \partial_{\nu} h^{\mu\nu} \cdot \partial_{\mu} h_{\sigma}{}^{\sigma} + d \partial_{\mu} h_{\sigma}{}^{\sigma} \cdot \partial^{\mu} h_{\sigma}{}^{\sigma} - \chi h_{\mu\nu} T_{mat.}^{\mu\nu} , \quad (8.35)$$

4. L'un des meilleurs exposés est, sans doute, celui de R.P. Feynman (1962), un texte malheureusement difficile à trouver; voir aussi S. Deser (1971).

5. Notons que, dans les équations qui suivent, les indices tensoriels sont *tous* des indices lorentziens.

où χ est une constante, pour le moment, arbitraire et où (a, b, c, d) sont des constantes à déterminer⁶. Dans cette équation, $T_{\text{mat.}}^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion de la matière et le dernier terme constitue le seul couplage possible conduisant à des équations linéaires; le tenseur $T_{\text{mat.}}^{\mu\nu}$ doit évidemment être conservatif. Les équations du mouvement s'écrivent alors [Appendice C] :

$$2a\Box h_{\alpha\beta} + b\partial_{\sigma(\alpha}h_{\beta)}^{\sigma} + c\{\partial_{\alpha\beta}h_{\sigma}^{\sigma} + \eta_{\alpha\beta}\partial_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\} + 2d\eta_{\alpha\beta}\Box h_{\sigma}^{\sigma} = \chi T_{\alpha\beta\text{mat.}} \quad (8.36)$$

Les coefficients (a, b, c, d) sont maintenant déterminés en imposant que le membre de gauche de cette dernière équation soit invariant de jauge (voir plus loin). Un choix possible est alors $a = 1/2$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -1/2$. Tout autre choix fournit une constante multiplicative que l'on peut toujours absorber dans χ . On peut donc écrire, finalement,

$$\Box h_{\alpha\beta} - \partial_{\sigma(\alpha}h_{\beta)}^{\sigma} + \{\partial_{\alpha\beta}h + \eta_{\alpha\beta}\partial_{\mu\nu}h^{\mu\nu}\} - \eta_{\alpha\beta}\Box h = \chi T_{\alpha\beta\text{mat.}} \quad (8.37)$$

où l'on a posé $h \equiv h_{\sigma}^{\sigma}$. A l'aide du changement

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (8.38)$$

l'équation (8.37) se réécrit sous la forme

$$\Box \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^{\alpha}\partial_{(\mu}\bar{h}_{\nu)\alpha} + \eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha\beta}\bar{h}_{\alpha\beta} = \chi T_{\mu\nu\text{mat.}} \quad (8.39)$$

Les équations (8.37) ou (8.39) sont, en fait, essentiellement identiques aux équations d'Einstein linéarisées (voir plus loin); elles ne sont, cependant, pas physiquement correctes puisqu'elles ne contiennent pas la contribution du champ de gravitation $h_{\mu\nu}$ lui-même à l'énergie-impulsion. Il convient donc d'obtenir cette contribution – qui sera nécessairement non linéaire en $h_{\mu\nu}$ et $\partial_{\lambda}h_{\mu\nu}$ – et de la rajouter dans le membre de droite de l'équation (8.37) ou (8.38). Si l'on appelle $N^{\mu\nu}$ cette contribution, elle devra être telle que

$$\partial_{\mu}[T_{\text{mat.}}^{\mu\nu} + N^{\mu\nu}] = 0 \quad (8.40)$$

6. *A priori*, on pourrait rajouter au lagrangien un terme du type $\partial_{\sigma}h^{\mu\nu}\partial_{\nu}h^{\sigma\mu}$; cependant, un tel terme peut dans l'intégrale d'action, à l'aide d'une intégration par partie, être réduit en un terme du type $\partial_{\nu}h_{\mu}^{\nu}\partial_{\sigma}h^{\mu\sigma}$.

et l'on aura également

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\alpha \partial_{(\mu} \bar{h}_{\nu)\alpha} + \eta_{\mu\nu} \partial^{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta} = \chi \{T_{\mu\nu \text{mat.}} + N_{\mu\nu}(\bar{h}_{\rho\sigma})\}. \quad (8.41)$$

Le tenseur $N_{\mu\nu}$ peut être obtenu à partir du lagrangien (8.35) et apparaît alors comme quadratique relativement aux $\partial_\lambda h_{\mu\nu}$. L'équation (8.41) apparaîtra alors comme bilinéaire et elle devra être déduite d'un lagrangien cubique, etc. Ce processus itératif conduit, en fin de compte, à un $N_{\mu\nu}$ qui, ajouté au membre de gauche de l'équation (8.41), donne exactement les équations d'Einstein. Ce processus est assez compliqué en pratique mais, grâce à une technique habile, il se trouve que l'on obtient le résultat exact seulement au bout d'une itération [S. Deser (1970) (1971)].

La solution de Schwarzschild

La première des solutions exactes des équations d'Einstein est due à K. Schwarzschild (1916) et joue un rôle ⁷ particulièrement important dans la vérification de la Relativité Générale au sein du système solaire (les fameux "tests classiques"). Elle constitue, en effet, le pendant relativiste du potentiel newtonien $\phi(r) = -GM/r$: il s'agit donc d'une solution statique, à symétrie sphérique, minkowskienne à l'infini, d'une particule située à l'origine ⁸.

En coordonnées standard, la métrique de Schwarzschild s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)} dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (8.42)$$

et nous allons la déduire d'abord de manière purement intuitive, sans qu'il faille, naturellement, prendre cette déduction trop au sérieux; nous l'obtiendrons ensuite à partir des équations d'Einstein.

1. Considérons donc une masse M , située à l'origine des coordonnées $r = 0$, et soit une particule-test en mouvement dans le champ de gravitation dû à la masse M , et située à la distance r . Du fait de la symétrie sphérique du système, il existe certainement des trajectoires circulaires pour la particule-test, qui vérifient au moins approximativement $v^2 = GM/r$; de manière générale, nous poserons

$$v^2 = a \frac{GM}{r}, \quad (8.43)$$

7. L'histoire détaillée de la solution de Schwarzschild peut être trouvée dans le travail de J. Eisenstaedt (1982).

8. Strictement parlant, cette solution est une solution de l'espace vide [$T_{\mu\nu}=0$] presque partout et la variété d'espace-temps dont elle est la métrique est choisie comme étant $V^4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times S^2$; \mathbf{R} correspond au temps, \mathbf{R}^+ à la coordonnée radiale moins l'origine $r=0$, et S^2 est la sphère usuelle (voir plus bas).

où a est une constante à déterminer par la suite ($a = 2$ pour des trajectoires newtoniennes paraboliques). Un observateur, lié à la masse M et mesurant un intervalle de temps dt et un intervalle de distance dr dans un référentiel lié à la particule-test, trouvera un intervalle de temps dt' dilaté avec le facteur habituel

$$dt = \frac{dt'}{\sqrt{1-v^2}} \quad (\text{à } dr' = 0) \quad (8.44)$$

et un intervalle de longueur dr' contracté comme

$$dr = dr' \sqrt{1-v^2} \quad (\text{à } dt' = 0). \quad (8.45)$$

Compte tenu de ce que, dans son système de coordonnées locales $\{t', r'\}$, l'observateur lié à la particule-test admet la métrique lorentzienne (on suppose qu'il est très loin de la masse M)

$$ds^2 = dt'^2 - dr'^2, \quad (8.46)$$

en reportant les relations (8.44) et (8.45) et en remplaçant v par son expression (8.43), il vient

$$ds^2 = \left(1 - a \frac{GM}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - a \frac{GM}{r}\right)} dr^2; \quad (8.47)$$

il reste maintenant à déterminer le coefficient a , ce qui ne présente pas de difficulté si l'on se souvient qu'à l'approximation newtonienne, on doit avoir $g_{00} \simeq 1 + 2\phi$; il vient donc immédiatement $a = 2$ et (8.47) est bien la solution de Schwarzschild avec $d\theta = d\varphi = 0$. Inutile de préciser que cette "démonstration" est tout à fait approximative. Elle présente seulement l'avantage d'exhiber directement deux phénomènes liés à la métrique (8.42) : la modification des étalons de temps et de longueur.

2. Revenons maintenant à la solution de Schwarzschild (8.42) et discutons-la un peu. Plaçons-nous d'abord à $t = \text{const.}$, i.e. à $dt = 0$, donc sur une 3-surface du genre espace, à métrique définie positive donnée par

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - 2\frac{GM}{r}} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (8.48)$$

Ces 3-surfaces du genre espace, orthogonales aux lignes de temps, sont évidemment toutes identiques⁹ quel que soit l'instant t considéré. Elles possèdent également la symétrie sphérique. Les 2-surfaces qui y sont contenues, et d'équation $r = \text{const.}$, sont des 2-sphères usuelles ainsi que l'indique leur métrique

$$d\tilde{\sigma}^2 = r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (8.49)$$

9. Cette circonstance est générale pour les espaces-temps statiques.

de surface $S = 4\pi r^2$; ceci constitue d'ailleurs la seule interprétation un peu concrète de la coordonnée radiale r . Notons, cependant, que la métrique (8.48) ne définit que la *structure locale* des 3-surfaces $t = \text{const.}$ et ne dit rien quant à leurs propriétés *globales*¹⁰, leur topologie. Cette circonstance est tout à fait générale en relativité : les équations d'Einstein déterminent les propriétés locales de la variété espace-temps mais non ses propriétés globales qui doivent être imposées *a priori*.

Pour avoir une idée plus précise des 3-surfaces $t = \text{const.}$, nous allons en obtenir une représentation par une 2-surface de \mathbb{R}^3 , correspondant à la métrique (8.48) avec $\theta = \pi/2$. Cette 2-surface admettra alors la métrique

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\varphi^2, \tag{8.50}$$

et peut être considérée comme étant constituée par une surface de révolution, d'axe Ow , engendrée par une parabole $w = w(r)$:

$$w^2(r) = 8GM \cdot [r - 2GM]. \tag{8.51}$$

Cette 2-surface est le parabolôide de L. Flamm (1916). Il s'agit donc d'un plongement de cette 2-surface dans un espace euclidien à trois dimensions; mais si x et y correspondent bien aux coordonnées de Schwarzschild, w n'a pas de sens particulier. Il convient également de noter que seuls ont un sens les points de cette 2-surface et non pas tous les points de l'espace \mathbb{R}^3 dans lequel elle est plongée¹¹ [Fig. 8.1].

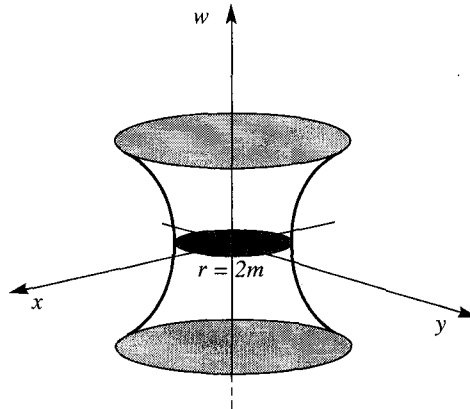


Figure 8.1 : Représentation des 3-surfaces $t = \text{const.}$ par le parabolôide de Flamm.

Une seconde remarque est liée au comportement à grande distance de la métrique de Schwarzschild : lorsque $r \rightarrow \infty$, on a

$$\lim_{r \rightarrow \infty} ds_{\text{Schw.}}^2 = ds_{\text{Minkowski}}^2; \tag{8.52}$$

10. Par exemple, si l'on identifie deux points diamétralement opposés de la sphère usuelle S^2 , on obtient le plan projectif P^2 , qui admet la *même* métrique mais n'est pas orientable.

11. L'utilisation du parabolôide de Flamm est discutée dans W. Rindler (1977).

autrement dit, l'espace-temps de Schwarzschild est *asymptotiquement plat*. Toutefois, lorsqu'on diminue r , on atteint une valeur critique, le *rayon de Schwarzschild* (ou rayon gravitationnel),

$$R_G = 2GM/c^2, \quad (8.53)$$

où la métrique (8.42) devient singulière. S'agit-il d'une véritable singularité de l'espace-temps ou bien, plus simplement, du système de coordonnées? Le calcul du tenseur de courbure montre que celui-ci ne présente aucune singularité – reste fini – pour $r \geq R_G$. Nous avons donc bien affaire à une singularité du système de coordonnées, lequel ne permet pas de décrire *tout* l'espace-temps mais seulement une partie de celui-ci. Il nous faudra donc étendre ce système de manière à pouvoir le décrire en totalité. Néanmoins, les coordonnées de Schwarzschild n'étant pas complètement dénuées de tout sens physique, il doit bien se produire un phénomène particulier en $r = R_G$. En effet, la 3-surface $r = R_G$ scinde l'espace en deux régions, l'une inobservable et l'autre observable; cette surface s'appelle l'*horizon de Schwarzschild* et joue un rôle important dans l'étude des *trous noirs*.

Toujours à propos des coordonnées, à $t = \text{const.}$, la taille d'un objet est définie (à $d\theta = d\varphi = 0$) par

$$d\ell^2 = -ds^2 = \frac{dr^2}{1 - 2\frac{GM}{r}}, \quad (8.54)$$

qui indique le lien entre la coordonnée radiale r et la distance ℓ :

$$\ell = \int_0^r \frac{dr}{\left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)^{1/2}} = r^{1/2} \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right)^{1/2} + 2GM \log \left\{ [r - 2GM]^{1/2} + r^{1/2} \right\}; \quad (8.55)$$

cette dernière expression, pour une longueur caractérisée par les coordonnées radiales r_1 et r_2 , peut être approchée par

$$\ell \sim (r_2 - r_1) + GM \log \left(\frac{r_2}{r_1} \right), \quad (8.56)$$

le second terme montrant l'effet de la courbure de l'espace. Naturellement, lorsque r_1 est très peu différent de r_2 , la distance mesurée ℓ est elle-même très peu différente de $r_2 - r_1$.

De manière analogue, le temps mesuré (à $dr = d\theta = d\varphi = 0$) est donné par

$$d\tau^2 = ds^2 = \left(1 - 2\frac{GM}{r}\right) dt^2 \quad (8.57)$$

et se réduit bien au temps d'un observateur inertiel habituel, au repos par rapport à la masse M , à l'infini.

Un dernier commentaire, enfin sur la métrique de Schwarzschild. Dans la réalité, la masse M n'est pas ponctuelle mais est répartie à l'intérieur d'un certain rayon R : pour le Soleil, par exemple, $R_{\odot} = .7 \times 10^{11}$ cm tandis que $R_G = 1.5 \times 10^5$ cm; en général, comme dans le cas du Soleil, on a $R_G \ll R$ de sorte que la solution (8.42) des équations d'Einstein n'est réellement valable que pour $r > R$, c'est-à-dire en dehors de l'étoile considérée : il s'agit donc d'une solution *extérieure*, une solution du vide, que l'on devra *raccorder* à la solution intérieure de l'étoile.

3. Donnons maintenant un aperçu rapide de la démonstration qui conduit à la métrique (8.42). Les seuls symboles de Christoffel ¹² *non nuls* sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}\nu' & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}\nu'e^{\nu-\lambda} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\lambda' & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda} & \Gamma_{33}^1 &= -e^{-\lambda}r^2\sin^2\theta \\ \Gamma_{12}^2 &= 1/r & \Gamma_{23}^3 &= \cotg\theta & \Gamma_{13}^3 &= 1/r \end{aligned} \quad (8.58)$$

de sorte que les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ sont

$$R_{00} = -e^{(\nu-\lambda)} \cdot \left[\frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}\nu'^2 + \nu'/r \right] \quad (8.59)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2}\nu'' - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{4}\nu'^2 - \lambda'/r \quad (8.60)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} \left[1 + \frac{1}{2}r(\nu' - \lambda') \right] - 1 \quad (8.61)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2\theta \quad (8.62)$$

où l'on a utilisé la forme (7.66) pour la métrique. On vérifie alors que les équations d'Einstein se réduisent à $R_{\mu\nu} = 0$.

Les deux premières équations fournissent immédiatement $\nu' = -\lambda'$ qui s'intègre en $\nu = \lambda + \text{const.}$; on peut cependant *choisir* cette constante comme étant nulle, au prix d'un changement d'échelle pour la coordonnée temporelle t . L'équation (8.61) donne alors

$$e^{\nu} \cdot [1 + r\nu'] = 1, \quad (8.63)$$

12. On a, en outre, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3$ et $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu}$.

qui, en posant $b \equiv \exp . \nu$, se réécrit

$$b + rb' = 1 \quad (8.64)$$

et s'intègre donc immédiatement pour donner

$$b(r) = 1 - \frac{\text{const.}}{r}, \quad (8.65)$$

où la constante d'intégration est identifiée en revenant à l'approximation newtonienne : on obtient ainsi $\text{const.} = 2GM/c^2$. Il reste encore à vérifier que la métrique (8.42) obéit bien aux équations d'Einstein $R_{\mu\nu} = 0$, séparément; nous avons, en effet, utilisé seulement la *somme* de (8.59) et de (8.60). Notons enfin que nous n'avons pas eu à imposer que l'espace-temps soit asymptotiquement plat; cela est apparu comme une conséquence de la solution. Bien plus, G.D. Birkhoff (1923) a montré que la métrique de Schwarzschild découle, outre des équations d'Einstein, de la seule *symétrie sphérique* et de l'absence de matière. Cette propriété constitue le fameux *théorème de Birkhoff* (1923). Autrement dit, la géométrie locale de toute région d'espace-temps à symétrie sphérique et dépourvue de matière (i.e. $T_{\mu\nu} \equiv 0$) est nécessairement la géométrie de Schwarzschild. Ce théorème¹³ justifie donc notre assertion selon laquelle la géométrie *extérieure* d'une étoile à symétrie sphérique est la géométrie de Schwarzschild.

4. La géométrie *interne* d'une étoile à symétrie sphérique en équilibre hydrostatique est caractérisée par la métrique la plus générale (7.66), que nous pouvons toujours réécrire sous la forme

$$ds^2 = [1 + 2\phi(r)] dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - 2\frac{GM(r)}{r}\right)} - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta . d\varphi^2], \quad (8.66)$$

où $\phi(r)$ et $M(r)$ sont deux fonctions à déterminer : elles constituent seulement une réécriture des composantes $g_{00}(r)$ et $g_{rr}(r)$ et, à ce stade, ne présentent rien de particulier. A l'approximation newtonienne, $\phi(r)$ se réduit au potentiel newtonien habituel; d'où le nom de *potentiel de gravitation* attribué à $\phi(r)$. L'insertion de la forme (8.66) de la métrique dans les équations d'Einstein fournit un système d'équations couplées – les équations de *Tolman–Oppenheimer–Volkov* – [pour $M(r)$ et $\phi(r)$] liées à la densité d'énergie ρ et à la pression P de la matière dans l'étoile. La fonction $M(r)$ apparaît alors comme étant la *masse* située dans une sphère de rayon inférieur à r :

$$M(r) = 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \rho(r'). \quad (8.67)$$

13. La démonstration du théorème de Birkhoff se trouve dans tous les manuels de Relativité Générale et est très semblable à (et aussi simple que) celle qui conduit à la solution de Schwarzschild donnée plus haut.

Notons encore que l'expression (8.66) est valable pour $r \leq R$, où R est le rayon de l'étoile, qu'en ce point, on doit avoir

$$\phi(R) = -GM/R, \quad M \equiv M(R) \tag{8.68}$$

et que la métrique (8.66) est ainsi raccordée¹⁴ à la métrique de Schwarzschild extérieure à l'étoile. En outre, à l'origine $r = 0$, la masse ne joue plus aucun rôle (tout comme dans le cas newtonien) et l'espace-temps doit y être localement minkowskien, c'est-à-dire : $\phi(0) = 0$ et $M(0) = 0$. Nous reviendrons plus sérieusement sur ces questions dans un autre volume.

La géométrie locale des espaces de Friedman

L'une des applications essentielles de la Gravitation Relativiste est constituée par la cosmologie, qui a longtemps été "un espace de liberté pour penser la Relativité Générale" [J. Eisenstaedt (1987)] et qui, dans ses versions les plus simples, est basée sur le *principe cosmologique*.

Ce principe affirme d'abord l'*existence d'un temps universel*; la variété d'espace-temps V^4 peut alors être toujours décomposée en une partie temporelle et une partie purement spatiale V^3

$$V^4 = \mathbf{R} \times V^3. \tag{8.69}$$

Aussi, dans un système de coordonnées adaptées à la structure précédente, peut-on écrire la métrique sous la forme générale

$$ds^2 = dt^2 - d\eta^2, \tag{8.70}$$

où $d\eta^2$ est la métrique de la variété spatiale V^3 . La coordonnée t , comme on le remarque sur cette dernière expression, correspond donc au temps mesuré, au temps propre d'un "observateur fondamental" dont, par définition, la ligne d'univers est orthogonale aux variétés spatiales V^3 [Fig. 8.2].

Le principe cosmologique¹⁵ affirme, en outre, que les variétés V^3 sont *homogènes et isotropes* (ce qui signifie, *grosso modo*, "nous n'occupons pas une place privilégiée dans l'Univers" et "l'Univers, à grande échelle, apparaît comme étant homogène" ou encore "l'Univers a sensiblement le même aspect dans toutes les directions"). L'isotropie des sections spatiales V^3 entraîne que leur métrique $d\eta^2$ s'écrit sous la forme (isotrope)

$$d\eta^2 = B(t, r) dx^2, \tag{8.71}$$

14. Le raccordement de deux métriques est un problème délicat et, de fait, il existe plusieurs méthodes possibles.

15. Un exposé simple, techniquement, où sont bien discutés les tenants et les aboutissants de ce principe, peut être trouvé dans E.R. Harrison (1981); voir aussi G.F.R. Ellis (1973).

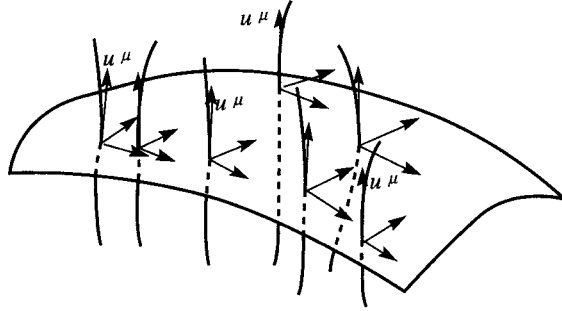


Figure 8.2 : Observateurs fondamentaux dans un univers de Friedman.

où la fonction $B(t, r)$ est nécessairement de la forme

$$B(t, r) = R^2(t) F^2(r), \quad (8.72)$$

où $R(t)$ et $F(r)$ sont deux fonctions pour le moment inconnues.

La démonstration de ce que la fonction $B(t, r)$ possède nécessairement la forme (8.72) peut être effectuée de manière heuristique, de la façon suivante. Considérons à t_0 donné un triangle quelconque ABC et soit $A'B'C'$ le triangle analogue au temps t (résultant de l'évolution du triangle originel : ainsi AA' , BB' et CC' sont respectivement sur les mêmes lignes d'univers d'"observateurs fondamentaux") [Fig. 8.3].

En vertu de l'homogénéité et de l'isotropie, les deux triangles doivent être semblables : aucun point et aucune direction ne doivent être privilégiés. En outre, le coefficient de similitude doit être indépendant, et des triangles choisis, et de la position des triangles dans l'espace ; il ne peut donc dépendre que du temps. Les g_{ij} doivent donc avoir la même forme à des instants différents, à un facteur conforme dépendant du temps près.

La fonction $F(r)$ est ensuite déterminée en constatant que l'homogénéité et l'isotropie des sections spatiales V^3 implique qu'il s'agisse d'hypersurfaces à courbure constante et l'on trouve

$$F^2(r) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \text{ [avec } k = \pm 1, 0], \quad (8.73)$$

de sorte que, finalement, la métrique cosmologique (ou métrique de Friedman–Robertson–Walker) s'écrit

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \frac{dx^2}{\left(1 + \frac{k}{4}r^2\right)^2} \quad (8.74)$$

en coordonnées isotropes, et

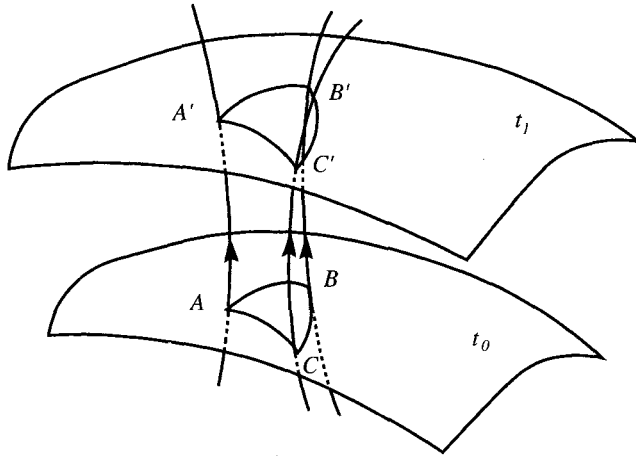


Figure 8.3 : L'homogénéité et l'isotropie des sections spatiales implique la similitude de couples de triangles (ABC) et $(A'B'C')$ arbitraires, le coefficient de similitude dépendant alors du temps.

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \right\} \quad (8.75)$$

en coordonnées du type de Schwarzschild. Notons que, pour $k = 0$, $R^{-2}(t)d\eta^2$ est la métrique euclidienne usuelle; pour $k = +1$, $R^{-2}(t)d\eta^2$ est la métrique d'une 3-sphère S^3 , tandis que pour $k = -1$, $R^{-2}(t)d\eta^2$ est celle d'un espace hyperbolique H^3 [voir, par exemple, N. Efimov (1981) ou D. Hilbert et S. Cohn-Vossen (1952)].

Quant au facteur d'échelle ¹⁶ $R(t)$, il est facilement déterminé ¹⁷ en introduisant la forme (8.74) de la métrique cosmologique dans les équations d'Einstein (ou dans toute autre équation de la gravitation relativiste). Notons enfin que la forme de la métrique de Friedman-Roberston-Walker ne dépend que des hypothèses contenues dans le principe cosmologique (qui est, avant tout, un principe d'invariance) et non pas de la validité des équations d'Einstein ou d'autres équations : seule l'évolution du facteur d'échelle $R(t)$ en dépend.

Notons, cependant, que si la matière est décrite par un tenseur énergie-impulsion du type "fluide parfait", donc de la forme

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} , \quad (8.76)$$

où ρ et P sont, respectivement, la densité d'énergie et la pression du "fluide cosmique", alors la relation de conservation $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ entraîne la contrainte

16. Parfois improprement appelé le "rayon de l'Univers".

17. Voir, par exemple, E.R. Harrison (1981).

$$PdR^3(t) + d[\rho R^3(t)] = 0, \quad (8.77)$$

qui s'interprète comme étant la relation thermodynamique

$$TdS = 0 = PdV + dU, \quad (8.78)$$

où S est l'entropie et U l'énergie interne du fluide cosmique.

Donnons maintenant une démonstration moins intuitive des formes (8.74) et (8.75) de la métrique cosmologique. Le premier postulat contenu dans le principe cosmologique est constitué par l'hypothèse de l'existence d'un temps universel. Cependant, alors qu'une telle hypothèse est implicite dans toute la physique (et partant, dans la cosmologie) newtonienne, il s'agit réellement d'un postulat indépendant – étudié par H. Weyl dès 1923 – en Relativité Générale. Il n'existe pas, en général, de feuilletage de l'espace-temps par des familles d'hypersurfaces du genre espace orthogonales à une congruence de lignes du genre temps données. Il est nécessaire que ces lignes correspondent à des mouvements irrotationnels et sans distorsion.

Considérons donc des observateurs attachés à des galaxies, sans mouvements propres, et soient u^μ les quadrivitesses de ces dernières, donc tangentes à leurs lignes d'univers [Fig. 8.2]. Un observateur-type décrit donc une géodésique du genre temps, et l'on a

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0. \quad (8.79)$$

Dans un repère comobile, i.e. celui de l'un quelconque de ces observateurs, on a

$$\frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu = (1, \mathbf{0}), \quad (8.80)$$

et l'équation des géodésiques (7.47) s'écrit alors

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 u^\alpha u^\beta = 0 \quad (8.81)$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i u^\alpha u^\beta = 0, \quad (8.82)$$

équations qui se réduisent respectivement aux deux suivantes :

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^0 = 0 = \frac{1}{2}g^{00} [\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}] \\ \Gamma_{00}^i = 0 = \frac{1}{2}g^{ij} [\partial_0 g_{0j} + \partial_0 g_{j0} - \partial_j g_{00}] \end{cases} \quad (8.83)$$

(qui expriment que les "molécules" du fluide cosmique sont en chute libre dans l'Univers), dont on tire immédiatement

$$\begin{cases} \partial_0 g_{00} = 0 \\ \partial_i g_{00} = 0 . \end{cases} \quad (8.84)$$

Comme la métrique la plus générale invariante par rotation, écrite sous la forme dite "isotrope", est donnée par [Chap. 7]

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 - B(t, r)dx^2 , \quad (8.85)$$

où $A(t, r)$ et $B(t, r)$ sont des fonctions positives arbitraires, les deux équations (8.84) précédentes indiquent que g_{00} ne dépend ni de t ni de r et, par conséquent, la métrique (8.85) peut se réécrire

$$ds^2 = dt^2 - B(t, r)dx^2 , \quad (8.86)$$

où l'on a choisi la coordonnée t de façon que $g_{00} = 1$ (choix d'une unité de t); t est alors le temps propre des observateurs fondamentaux liés à u^μ [Fig. 8.2].

Un tel système de coordonnées est dit *synchrone*. Les surfaces $t = \text{const.}$ correspondent à $dt = 0$; sur ces surfaces, les distances sont mesurées à l'aide de la famille de métriques (qui dépendent du paramètre t)

$$d\sigma^2 \equiv -ds^2 = B(t, r) dx^2 . \quad (8.87)$$

Ces surfaces sont des surfaces d'homogénéité, orthogonales aux lignes d'univers du fluide cosmique, dont nous n'avons pas encore montré l'existence.

A cette fin, nous effectuerons une décomposition du champ de quadrivitesse du fluide cosmique, analogue à celle du cas newtonien [S. Mavridès (1973)]. Posant [voir, par exemple, J.L. Anderson (1967)]

$$\omega_{\mu\nu} = [\nabla_\rho u_\lambda - \nabla_\lambda u_\rho] \Delta^\lambda{}_\nu \Delta^\rho{}_\mu \quad (8.88)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = [\nabla_\lambda u_\rho + \nabla_\lambda u_\rho - \frac{1}{3}\theta g_{\lambda\rho}] \Delta^\lambda{}_\nu \Delta^\rho{}_\mu \quad (8.89)$$

$$\theta = \nabla_\mu u^\mu , \quad (8.90)$$

où $\Delta_{\mu\nu}$ est le projecteur sur le 3-espace orthogonal à u^μ

$$\Delta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu , \quad (8.91)$$

la variation du quadrivecteur u^μ , lorsque les coordonnées spatiales sur la surface $t = \text{const.}$ ont varié d'une quantité δx^i , est donnée par

$$\delta u^\mu = \delta x^\nu \left[\omega_\nu{}^\mu + \sigma_\nu{}^\mu + \frac{1}{3}\theta g_{\mu\nu} \right] , \quad (8.92)$$

où les variations de u et x sont astreintes à la surface $t = \text{const.}$ Les divers termes de cette équation s'interprètent exactement de la même manière que dans le cas newtonien. Ecrivons donc que le fluide cosmique est sans rotation

$$\omega_{\mu\nu} = 0 = [\partial_\rho u_\lambda - \partial_\lambda u_\rho] \Delta^\lambda{}_\nu \Delta^\rho{}_\mu, \quad (8.93)$$

ce qui s'écrit encore

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (8.94)$$

ou encore $\partial_{[i} u_{j]} = 0$.

En d'autres termes, le 3-vecteur \mathbf{u} est irrotationnel et est donc le gradient d'une fonction $\phi(\mathbf{x}, t)$. Cette propriété est également vraie pour u^μ qui est donc orthogonal à une famille de surfaces du genre espace. Les lignes d'univers de ce champ de 4-vecteurs sont évidemment caractérisées par des équations du type $x^i = \text{const.}$

Revenons à la métrique cosmologique; elle a été obtenue pour la première fois par A. Friedman (1922, 1924) mais ce sont H.P. Robertson (1935, 1936) et A.G. Walker (1936) qui ont, les premiers, démontré que cette métrique résultait uniquement du principe cosmologique en tant que principe de symétrie et, par conséquent, était tout à fait indépendante des équations d'Einstein. On pourra trouver cette démonstration mathématique, par exemple, dans l'ouvrage de S. Weinberg (1972). Ici, nous exposerons une déduction, analogue dans son essence bien que formellement différente, qui consistera à simplifier et expliciter de plus en plus la forme générale (8.85) [que nous avons déjà réduite à (8.86)] en utilisant l'homogénéité et l'isotropie des surfaces $t = \text{const.}$ quand nous en aurons effectivement besoin et non de manière aussi systématique que dans une démonstration mathématique [L.P. Eisenhart (1966)].

Ecrivons donc que le mouvement de la matière s'effectue sans distorsion des lignes d'univers moyennes qu'elle suit. On aura donc

$$\sigma_{\mu\nu} = 0, \quad (8.95)$$

ou encore

$$\left[\nabla_\lambda u_\rho + \nabla_\rho u_\lambda - \frac{1}{3} \theta g_{\lambda\rho} \right] \Delta^\lambda{}_\nu \Delta^\rho{}_\mu = 0. \quad (8.96)$$

Dans un repère synchrone, cette équation s'écrit explicitement

$$\partial_0 g_{ij} = \frac{1}{3} \theta g_{ij}. \quad (8.97)$$

Cependant, l'homogénéité des sections spatiales implique que le scalaire de dilatation θ ne peut dépendre que du temps. En effet, deux géodésiques du genre temps, orthogonales aux surfaces $t = \text{const.}$, considérées à deux instants différents

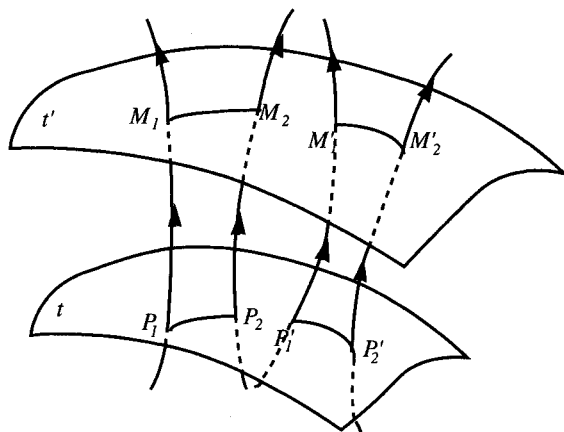


Figure 8.4 : Si $d(P_1, P_2) = d(P'_1, P'_2)$ au temps t , alors $d(M_1, M_2) = d(M'_1, M'_2)$ au temps t' et ce quels que soient les couples de points (P_1, P_2) et (P'_1, P'_2) .

[Fig. 8.4], doivent s'écarter l'une de l'autre d'une même quantité, pour une même distance initiale; donc $\theta = \theta(t)$.

L'équation (8.97) s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t, r) = -\theta(t) B(t, r), \tag{8.98}$$

qui ne peut avoir de solution que si $B(t, r)$ est de la forme générale

$$B(t, r) = R^2(t) F^2(r); \tag{8.99}$$

ce qui permet d'écrire (8.87) sous la forme

$$d\sigma^2 = R^2(t) F^2(r) dx^2. \tag{8.100}$$

Il reste maintenant à obtenir explicitement la fonction $F(r)$. A cette fin, nous utiliserons l'homogénéité et l'isotropie des sections spatiales qui sont nécessairement des 3-surfaces à courbure constante. A partir du seul tenseur spatial dont on dispose¹⁸, c'est-à-dire

$$\gamma_{ij} = F^2(r) \delta_{ij}, \tag{8.101}$$

les seuls tenseurs possédant les propriétés de symétrie du tenseur de courbure que l'on puisse former s'écrivent

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K [g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}], \tag{8.102}$$

18. L'isotropie de l'espace entraîne qu'il n'existe, dans un référentiel synchrone, aucune direction privilégiée.

où K est une constante arbitraire. Utilisant maintenant l'expression explicite de ${}^{(3)}R_{ijkl}$, le tenseur de Riemann pour une 3-variété

$${}^{(3)}R_{ijkl} = \gamma_{in} [\partial_k \Gamma_{jl}^n - \partial_l \Gamma_{jk}^n + \Gamma_{mk}^n \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{ml}^n \Gamma_{jk}^m] , \quad (8.103)$$

on obtient alors les deux équations différentielles suivantes :

$$-\frac{1}{r} \left[\frac{F'}{rF} \right]' + \left[\frac{F'}{rF} \right]^2 = 0 \quad (8.104)$$

$$2 \left[\frac{F'}{F} \right] + \left[\frac{F'}{F} \right]^2 + KF^2 = 0 \quad (8.105)$$

Tandis que la première équation admet les solutions

$$F(r) = \frac{a}{br^2 + c} , \quad (8.106)$$

où a , b et c sont des constantes arbitraires, la seconde impose seulement la contrainte

$$K = 4 \frac{bc}{a} . \quad (8.107)$$

Finalement, en absorbant un facteur c/a dans le facteur d'échelle $R(t)$, en posant

$$k = \frac{1}{4} \text{sgn.} (b/c) \quad (8.108)$$

et en redéfinissant la coordonnée r , $(b/c)r^2 \rightarrow r^2$, il vient

$$d\sigma^2 = R^2(t) \frac{dx^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2} , \quad (8.109)$$

de sorte que la métrique d'espace-temps s'écrit bien

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \frac{dx^2}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2} . \quad (8.110)$$

Les différents cas, $k = 0, \pm 1$, correspondent à des sections spatiales euclidiennes ($k = 0$), à courbure (spatiale) positive ($k = +1$) ou négative ($k = -1$). L'indice topologique k s'appelle l'*indice de courbure*. Comme on peut le voir par comparaison avec la métrique de la sphère à trois dimensions, la géométrie spatiale est celle d'un *espace fermé* lorsque $k = +1$; par contre, lorsque $k = 0$ ou -1 , la *géométrie spatiale peut être soit celle d'un espace ouvert, soit celle d'un espace fermé*. L'affirmation courante, selon laquelle l'Univers est ouvert dès lors que $k = 0$ ou -1 est incorrecte : un espace à courbure constante nulle, voire négative,

peut parfaitement être fermé [voir, par exemple, M. Lachièze-Rey et J.-P. Luminet (1994)].

Autres métriques d'intérêt astrophysique

L'effondrement gravitationnel d'une étoile vers un trou noir de masse M , de charge Q et de moment cinétique J fait apparaître l'intérêt de la métrique suivante :

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} \left[dt - \frac{J}{M} \sin^2 \theta d\varphi \right]^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[\left(r^2 + \frac{J^2}{M^2} \right) d\varphi - \frac{J}{M} dt \right]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (8.111)$$

où l'on a posé

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + \frac{J^2}{M^2} + Q^2 \quad (8.112a)$$

$$\rho^2 = r^2 + \frac{J^2}{M^2} \cos^2 \theta. \quad (8.112b)$$

La métrique (8.111) est la *métrique de Kerr–Newman*, dont les propriétés sont clairement résumées dans N. Straumann (1984) [voir aussi Ch. W. Misner *et al.* (1973)], et qui contient des cas particuliers trouvés précédemment [$Q = J = 0$ (solution de Schwarzschild); $Q = 0$ (solution de Kerr); $J = 0$ (solution de Reissner–Nordström)].

Une autre classe de métriques, d'intérêt cosmologique cette fois, est constituée par des modèles homogènes mais *anisotropes*, tels ceux de la forme

$$ds^2 = dt^2 - X^2(t)dx^2 - Y^2(t)dy^2 - Z^2(t)dz^2, \quad (8.113)$$

où $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ sont trois fonctions du temps représentant, respectivement, l'expansion de l'Univers dans les directions x , y et z . Cette expression caractérise les *modèles de Bianchi de type I*. Un cas particulier intéressant, la *solution de Kasner* (1921), est donné par

$$X(t) = X_0 t^{p_1}, \quad Y(t) = Y_0 t^{p_2}, \quad Z(t) = Z_0 t^{p_3}, \quad (8.114)$$

avec

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (8.115)$$

Cette solution représente un modèle d'*univers en expansion* (un élément de volume dV croît avec le temps comme $\sqrt{|g|}d^3x = td^3x$) de manière *anisotrope*,

une ou plusieurs dimensions se contractant tandis que les autres se dilatent. Ces modèles homogènes et anisotropes sont étudiés en détail dans l'ouvrage de M.P. Ryan et L.C. Shepley (1975); une étude moins générale de ces univers mais portant davantage sur la solution de Kasner en relation avec le modèle du "mixmaster" [Ch. W. Misner (1969)] peut également être trouvée dans Ch. W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973).

Les équations d'Einstein linéarisées

Dans de très nombreux cas la variété d'espace-temps V^4 est connue ainsi que sa métrique $g_{\mu\nu}^{(0)}$ et l'on se pose le problème de connaître les "petites" perturbations $h_{\mu\nu}$ à la métrique, qu'elles soient induites par de "petites" perturbations du tenseur énergie-impulsion ou non :

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \\ |h_{\mu\nu}| &\ll |g_{\mu\nu}^{(0)}|, |h_{\mu\nu}|^2 \ll |h_{\mu\nu}|. \end{cases} \quad (8.116)$$

Aussi l'équation à laquelle obéit la "petite" perturbation $h_{\mu\nu}$ est-telle l'équation d'Einstein *linéarisée*, du moins si l'on néglige les termes¹⁹ en $O(|h_{\mu\nu}|^2)$. Le premier problème que nous rencontrons alors est le suivant : les décompositions précédentes du tenseur métrique sont-elles valables *dans tout système de coordonnées*? Autrement dit, si l'on effectue un tel changement, le nouveau $h_{\mu\nu}$ est-il encore "petit"? En général, il n'en est rien et si l'on souhaite que $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^{(0)}|$ et $|h_{\mu\nu}|^2 \ll |h_{\mu\nu}|$ restent valables, il est nécessaire de limiter les changements de coordonnées admissibles. Dans cette section, nous nous bornerons au cas où la métrique $g_{\mu\nu}^{(0)}$ est la métrique de l'espace de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (8.117)$$

Le second problème rencontré concerne la question de l'élévation et de l'abaissement des indices : il est clair que, pour respecter la cohérence de l'approximation linéaire utilisée, *il est nécessaire d'élever et d'abaisser les indices à l'aide du tenseur métrique* $\eta_{\mu\nu}$; aussi les diverses grandeurs comportant des indices sont-elles des tenseurs par rapport aux transformations de Lorentz et non relativement aux changements de systèmes de coordonnées généraux. Notons cependant une différence d'importance concernant le tenseur $g^{\mu\nu}$, inverse du tenseur $g_{\mu\nu}$. On aura

$$g^{\mu\nu} \neq \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} \quad (8.118)$$

19. Ainsi que les dérivées; par exemple, $|\partial_\mu h_{\alpha\beta}| \gg |\partial_\mu h_{\alpha\beta}|^2$, etc.

et, surtout,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h_{\alpha\beta}^2), \quad (8.119)$$

avec

$$h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (8.120)$$

Dans ces conditions, et avec ces conventions, les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$, le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ s'écrivent, respectivement,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} \cdot [\partial_{\alpha} h_{\beta\lambda} + \partial_{\beta} h_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda} h_{\alpha\beta}] \quad (8.121)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu\nu} h - \partial_{\mu\alpha} h_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu\alpha} h_{\mu}^{\alpha} + \square h_{\mu\nu}] \quad (8.122)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\partial_{\mu\nu} h - \partial_{\mu\alpha} h_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\nu\alpha} h_{\mu}^{\alpha} + \square h_{\mu\nu}] - \eta_{\mu\nu} [\square h - \partial_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}]. \quad (8.123)$$

Cette dernière équation peut être simplifiée en posant

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (8.124)$$

où h est la trace du tenseur $h_{\mu\nu}$

$$h \equiv h^{\mu}_{\mu} = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \quad (8.125)$$

et l'on trouve

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} - \partial_{\alpha(\mu} \bar{h}_{\nu)}^{\alpha} \right\}. \quad (8.126)$$

Finalement, les équations d'Einstein linéarisées s'écrivent

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial_{\alpha\beta} \bar{h}^{\alpha\beta} - \partial_{\alpha(\mu} \bar{h}_{\nu)}^{\alpha} = 16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (8.127)$$

Notons qu'afin que cette dernière équation soit cohérente, il est nécessaire que le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ soit lui-même de l'ordre de grandeur de $h_{\mu\nu}$. Il s'ensuit immédiatement que la relation de conservation $\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$ se réduit à la relation lorentzienne $\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$. Comme $G_{\mu\nu}$ est à divergence nulle, le membre de gauche de l'équation (8.126) est aussi à divergence nulle (identités de Bianchi linéarisées), ce qui entraîne $\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$. Ces quatre relations fournissent des

conditions relatives aux changements de coordonnées, que nous allons examiner maintenant.

A cette fin, considérons un changement de coordonnées du type général

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \varepsilon^\mu(x) = x'^\mu \quad (8.128)$$

où $\varepsilon^\mu(x)$ est une fonction arbitraire mais assujettie à ce que $h'_{\mu\nu}$ reste une grandeur "petite", c'est-à-dire à ce que les relations (8.116) soient encore valables. La transformation (8.128) s'écrit, pour un 4-vecteur A^μ

$$\begin{aligned} A^{\mu'} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu \\ &= [\eta^{\mu'}{}_\mu + \partial_\mu \varepsilon^{\mu'}(x)] A^\mu ; \end{aligned} \quad (8.129)$$

de même, la déviation $h_{\mu\nu}$ au tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ s'écrit, dans ce nouveau système de coordonnées,

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} , \quad (8.130)$$

de sorte que si $h'_{\mu\nu}$ et $h_{\mu\nu}$ doivent être petits, tel doit aussi être le cas des dérivées $\partial_\mu \varepsilon_\nu(x)$: tous les changements de systèmes de coordonnées ne conservent pas la "petitesse" de $h_{\mu\nu}$. Les transformations (8.128) sont appelées des *transformations de jauge* en raison d'une situation tout à fait analogue dans le cas électromagnétique²⁰.

Le tenseur $\bar{h}_{\mu\nu}$, dans une transformation de jauge, se transforme comme

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_{(\mu} \varepsilon_{\nu)} + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \varepsilon^\alpha . \quad (8.131)$$

A ce point, rappelons que *tous* les indices correspondent à des indices lorentziens et que, par conséquent, l'invariance de Lorentz est manifeste tout au long de ces considérations.

L'équation (8.127) est analogue à l'équation de Maxwell (5.24) pour les potentiels électromagnétiques; elle est, en outre, invariante dans les changements de jauge – de coordonnées – (8.128). La condition²¹

$$\partial_\alpha \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 , \quad (8.132)$$

dite *condition de Lorentz*, permet de restreindre les changements de coordonnées admissibles. En effet, imposer cette condition de jauge donne immédiatement

$$\partial_\lambda \bar{h}'^{\mu\lambda} = \partial_\lambda \bar{h}^{\mu\lambda} - \square \varepsilon^\mu = 0 , \quad (8.133)$$

20. Voir, par exemple, S. Weinberg (1972) p. 257; Ch. W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973), p. 440, etc.

21. Cette condition de jauge est parfois appelée "jauge de De Donder" ou encore "jauge harmonique".

qui conduit à $\square \varepsilon^\mu = 0$. Cette condition est caractéristique des *coordonnées harmoniques* : les coordonnées harmoniques préservent la condition de Lorentz (8.132).

Avec cette condition de jauge, les équations d'Einstein linéarisées s'écrivent maintenant

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad (8.134)$$

dont la solution générale est de la forme

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, x) = 4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (8.135)$$

qui est tout à fait similaire à la solution *retardée* des équations pour le 4-potential électromagnétique²² en fonction du 4-courant. De manière analogue à ce dernier cas, la relation (8.135) explicite la propagation de l'action gravitationnelle d'un point de la source \mathbf{x}' au point \mathbf{x} et ce, à la vitesse de la lumière $c = 1$.

L'intérêt des équations d'Einstein linéarisées est multiple. D'abord, elles permettent des calculs simples et des interprétations physiques assez directes lorsque les effets de la gravitation constituent de petites corrections à l'espace plat de la Relativité Restreinte, ce qui est bien le cas du système solaire. Ensuite, l'équation (8.134), avec $T_{\mu\nu} \equiv 0$, montre l'existence d'un *rayonnement gravitationnel* pouvant se propager même en l'absence de source :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (8.136)$$

Autrement dit, même dans le vide, le champ de gravitation peut ne pas être identiquement nul ; l'équation d'Einstein $G_{\mu\nu} = 0$ possède des solutions différentes de $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Ondes et rayonnement gravitationnels

La théorie d'Einstein linéarisée précédente nous montre que de petites perturbations gravitationnelles peuvent se propager à la vitesse de la lumière dans un espace-temps de Minkowski. En fait, on peut également montrer que de petites perturbations peuvent se propager sur un espace courbe quelconque [voir, par exemple, A. Papapetrou (1974) ou Ch. W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler (1973)], ce qui est illustré sur la figure 8.5.

Ici, nous nous limiterons aux petites perturbations de l'espace de Minkowski, ce qui fournira un aperçu suffisant²³

22. Voir, par exemple, A.O. Barut (1964) ou C. Itzykson, J.P. Zuber (1980), etc.

23. Une première approche, très simple, peut être trouvée dans P.C.W. Davies (1980); un exposé plus avancé est celui de K. Thorne (1983) tandis qu'une revue générale assortie d'une impressionnante

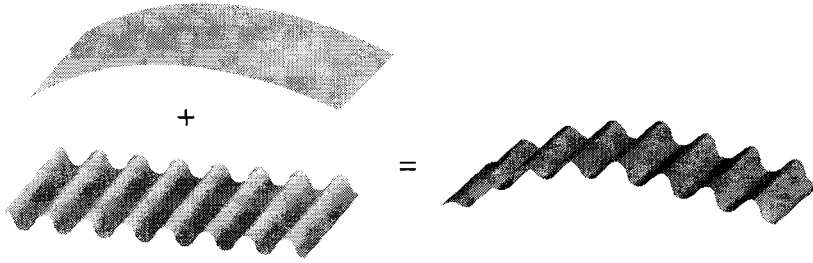


Figure 8.5 : Une onde gravitationnelle peut être considérée comme une petite perturbation se propageant sur la variété d'espace-temps.

L'importance des ondes et du rayonnement gravitationnels en astrophysique provient du fait que presque tout phénomène physique peut, à des degrés divers, en être la source : il n'y a pas de matière qui soit neutre gravitationnellement; l'effondrement gravitationnel d'une étoile, ou même le mouvement d'une planète autour d'un soleil, donnent lieu à des émissions d'ondes gravitationnelles. D'ores et déjà, le pulsar double PSR 1913+16 fournit la preuve de l'existence de telles ondes : les deux pulsars spiralent l'un vers l'autre en perdant de l'énergie émise sous forme de rayonnement gravitationnel, correspondant à celle calculée à l'aide de la Relativité Générale. Bien que les ondes gravitationnelles n'aient pas encore été observées en laboratoire – leur amplitude est extraordinairement faible –, d'actives recherches expérimentales sont réalisées un peu partout dans le monde depuis plus d'un quart de siècle [J. Weber (1960) (1961) (1969)] et l'on pense pouvoir les détecter dans un avenir relativement proche. Ceci ouvrira alors la voie à une véritable Astronomie des Ondes Gravitationnelles nous permettant d'avoir accès aux tout premiers instants de l'Univers ou d'obtenir des informations sur toutes sortes de phénomènes invisibles autrement.

1. Considérons donc la relation (8.136) assortie de la condition de jauge (8.132)

$$\begin{cases} \square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \\ \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \end{cases} \quad (8.137)$$

qui caractérise la propagation d'ondes de gravitation libres se propageant dans l'espace de Minkowski. Les ondes planes, du type

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{-ik \cdot x} + A_{\mu\nu}^* e^{ik \cdot x}, \quad (8.138)$$

sont solutions du système (8.137) pourvu que les amplitudes $A_{\mu\nu}$, qui sont d'ailleurs des tenseurs (de Lorentz) symétriques, soient telles que

bibliographie est due à K. Thorne (1989); on pourra également consulter N. Deruelle, T. Piran (1983) pour toutes sortes de problèmes et de recherches liés aux ondes gravitationnelles, ainsi que B. Carter et J.B. Hartle (1987).

$$\begin{cases} k^2 A_{\mu\nu} = 0, (a) \\ k_\mu A^{\mu\nu} = 0 (b). \end{cases} \quad (8.139)$$

Le tenseur $A_{\mu\nu}$, étant symétrique, possède *a priori* dix composantes indépendantes; cependant, les quatre conditions de jauge fournissent quatre contraintes supplémentaires, réduisant ainsi le nombre de composantes indépendantes à six. Mais, d'autre part, l'invariance dans les transformations de jauge

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x) \quad (8.140)$$

(quatre conditions) les réduit finalement à deux. Montrons-le rapidement. Remarquons d'abord que si l'on souhaite préserver le caractère d'onde plane à $\bar{h}_{\mu\nu}$, les fonctions $\varepsilon^\mu(x)$ se réduisent nécessairement à

$$\varepsilon^\mu(x) = i \xi^\mu e^{-ik \cdot x} - i \xi^{\mu*} e^{ik \cdot x}, \quad (8.141)$$

compte tenu de la relation $\square \varepsilon^\mu(x) = 0$ [cf. Eq. (8.133)] où les ξ^ν sont des fonctions infinitésimales de k . La transformation de jauge (8.140) donne alors [cf. Eq. (8.131)] :

$$A_{\mu\nu} \rightarrow A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} + k_{(\mu} \xi_{\nu)} - \eta_{\mu\nu} k_\alpha \xi^\alpha \quad (8.142)$$

mais, comme $A'_{\mu\nu}$ satisfait encore la condition de jauge, on aura également

$$0 = k_\mu A'^{\mu\nu} = k^2 \xi^\nu = 0, \quad (8.143)$$

qui n'est guère qu'une autre expression de $\square \varepsilon^\mu(x) = 0$. Nous allons maintenant utiliser ces diverses propriétés pour montrer explicitement comment le nombre de composantes indépendantes du tenseur $A_{\mu\nu}$ peut être réduit à deux dans le cas d'une onde plane se propageant dans la direction $0z$, c'est-à-dire, telle que son vecteur d'onde s'écrive, avec $k \equiv |\mathbf{k}|$,

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad \text{ou} \quad k_\mu = (k, 0, 0, -k); \quad (8.144)$$

Ceci ne restreint évidemment pas la généralité de la démonstration puisqu'il est toujours possible de trouver un système de coordonnées tel que (8.144) soit vrai. Dans ces conditions, et compte tenu de la relation (8.139b), on aura

$$A_{\mu 0} = A_{\mu 3} \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \quad (8.145)$$

La transformation (8.142) donnera alors

$$\begin{cases} A'^{00} = A^{00} + k(\xi^0 + \xi^3) \\ A'^{01} = A^{01} + k\xi^1 \\ A'^{02} = A^{02} + k\xi^2 \end{cases} \quad \begin{cases} A'^{11} = A^{11} + k(\xi^0 - \xi^3) \\ A'^{12} = A^{12} \\ A'^{22} = A^{22} + k(\xi^0 - \xi^3). \end{cases} \quad (8.146)$$

Ce système linéaire comporte six équations pour seulement quatre inconnues ($\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$) que nous voulons déterminer afin de pouvoir simplifier la forme de $A_{\mu\nu}$ (notons que $A_{\mu\nu}$ et $A'_{\mu\nu}$ représentent la même situation physique). Ce système montre que la composante A_{12} n'est pas affectée par une transformation de jauge, aussi convient-il de la considérer comme l'une des composantes indépendantes de $A_{\mu\nu}$; il montre, en outre, que la combinaison $A^{11} + A^{22}$ possède également cette propriété

$$A'^{11} + A'^{22} = A^{11} + A^{22}; \quad (8.147)$$

enfin ξ^1 et ξ^2 sont déterminés univoquement :

$$k\xi^1 = A'^{01} - A^{01}, \quad k\xi^2 = A'^{02} - A^{02}. \quad (8.148)$$

Finalement, on peut toujours choisir le 4-vecteur ξ^μ de manière que

$$A'^{00} = A'^{01} = A'^{02} = 0 = A'^{11} + A'^{22}. \quad (8.149)$$

Dans cette jauge, le tenseur $A_{\mu\nu}$ s'écrit finalement

$$\|A_{\mu\nu}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{12} & -A^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (8.150)$$

tandis que le tenseur $\bar{h}_{\mu\nu}$ se met sous la forme

$$h_{\mu\nu} = \text{Re} \{ [\alpha e_{\mu\nu}(+) + \beta e_{\mu\nu}(\times)] e^{ik \cdot x} \}, \quad (8.151)$$

où α et β sont deux fonctions complexes arbitraires de k , tandis que $e_{\mu\nu}(+)$ et $e_{\mu\nu}(\times)$ sont les deux matrices de polarisation suivantes :

$$\|e_{\mu\nu}(+)\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (8.152)$$

$$\|e_{\mu\nu}(\times)\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (8.153)$$

La jauge précédente est généralement appelée ("jauge TT" pour "Transverse-Traceless").

2. Les deux modes possibles (8.152) et (8.153) de polarisation d'une onde gravitationnelle doivent maintenant être interprétés physiquement en examinant

l'effet d'une telle onde sur des particules-test. En réalité, un tel effet, sur une particule-test donnée, ne peut être apprécié que *par rapport à une autre* particule-test. Il convient donc d'écrire l'équation de la déviation géodésique pour la distance entre deux telles particules dans un système de coordonnées dans lequel $h_{\mu\nu}$ obéisse à la jauge TT.

Une approche plus simple [J. Foster, J.D. Nightingale (1979)] consiste à considérer une particule-test à l'origine des coordonnées et l'autre en $\{\eta^\mu=(0,\eta)\}$, les deux particules étant initialement - i.e. avant le passage de l'onde - au repos. Elles sont alors séparées par la distance

$$\begin{aligned} \ell &= |g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu|^{1/2} \\ &= [(\delta_{ij}-h_{ij})\eta^i\eta^j]^{1/2}, \end{aligned} \tag{8.154}$$

qui, à l'aide du changement de coordonnées

$$\eta^i \rightarrow \kappa^i = \eta^i + \frac{1}{2} h_j^i \eta^j, \tag{8.155}$$

se réécrit sous la forme

$$\ell = [\delta_{ij}\kappa^i\kappa^j]^{1/2} + o(\|h_{ij}\|^2), \tag{8.156}$$

ce qui indique que le vecteur κ peut être considéré comme un vecteur-position dans l'espace usuel.

Lorsque le vecteur κ est parallèle à l'axe des z , on a $\kappa^3 = \eta^3$ car $h_j^3 = 0$ [cf. Eq. (8.150)] : si l'axe des deux particules-test est parallèle à la direction de propagation de l'onde, alors leur distance n'est pas affectée par son passage; *une onde gravitationnelle est purement transverse.*

Si l'on choisit maintenant les deux particules dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, c'est-à-dire κ^i donné par

$$\|\kappa^i\| = \|\eta^i\| - \frac{1}{2}\alpha \cos[k(t-z)] \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \eta^i \tag{8.157}$$

pour le mode de polarisation + (α est donc considéré comme étant réel et positif par souci de simplicité), et par

$$\|\kappa^i\| = \|\eta^i\| - \frac{1}{2}\alpha \cos[k(t-z)] \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \eta^i \tag{8.158}$$

pour le mode noté X, on s'aperçoit que le mouvement des deux particules est donné par la figure 8.6.

Si l'on appelle η^μ le quadrivecteur qui joint l'une à l'autre les particules-test, l'équation de la déviation géodésique, à laquelle obéit η^μ , peut se mettre sous la forme suivante (après linéarisation) :

$$\frac{d^2\eta^\mu}{d\tau^2} = R^\mu{}_{00j}\eta_o^j, \tag{8.159}$$

en se plaçant dans le repère au repos de la particule-test située à l'origine [donc $u^\mu = (1, 0)$] et en remarquant que $\Gamma_{00}^\mu = 0$. L'équation (8.159) se réduit alors à la suivante (à des termes du second ordre près) :

$$\frac{d^2 \eta^i}{d\tau^2} \sim R^i{}_{00j} \eta_0^j, \quad (8.160)$$

qui se réécrit sous la forme

$$\frac{d^2 \eta^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_j^i}{\partial t^2} \eta_0^j \quad (8.161)$$

où l'on a utilisé le tenseur de Riemann linéarisé exprimée dans la jauge TT. Si l'on considère une onde gravitationnelle se propageant dans la direction des $z > 0$, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} h_{11} = -h_{22} = \Phi_+(t-z) \\ h_{12} = h_{21} = \Phi_\times(t-z), \end{cases} \quad (8.162)$$

on constate immédiatement qu'il n'y a pas d'oscillation parallèlement à la direction Oz : $h_j^3 = 0$ et l'on a alors $\ddot{\eta}^3 = 0$. Les ondes gravitationnelles sont bien des *ondes transverses*. En outre, l'équation (8.161) admet alors les solutions (approximées)

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \Phi_+(t-z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} \quad (8.163)$$

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \Phi_\times(t-z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} \quad (8.164)$$

obtenues par intégration approximative de l'équation (8.161) en supposant que les deux particules-test sont au repos avant passage de l'onde et séparées de η_0^i ; ces deux dernières relations, particularisées aux cas d'ondes planes périodiques, montrent l'effet physique sur des particules-test de ces deux modes de polarisation possibles [Fig. 8.6].

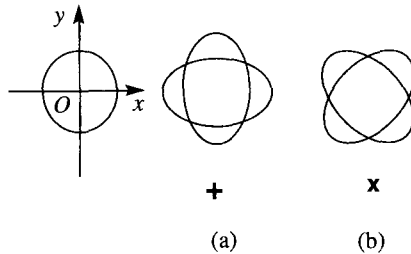


Figure 8.6 : Les deux modes d'oscillation d'une onde gravitationnelle sont illustrés par les variations des distances à l'origine (où se trouve une particule-test) d'un anneau fictif de particules-test [mode + : (a) ; mode x : (b)].

3. La discussion précédente suggère une possibilité de détection d'éventuelles ondes gravitationnelles : il suffit, en principe, de disposer de deux particules-test et de mesurer leur mouvement relatif. Cela peut être effectué de bien des manières et nous évoquerons pour commencer l'*antenne gravitationnelle* de J. Weber (1961), (1968), (1980), c'est-à-dire un *système résonant* [Fig. 8.7]. Dans la pratique, il est clair que l'on n'utilise pas de système tel que celui de la figure 8.7. mais toutes sortes de systèmes oscillants comme, par exemple, l'antenne de J. Weber, constituée d'un lourd cylindre métallique dont les modes d'oscillations peuvent être excités par le passage d'ondes gravitationnelles.

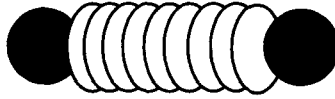


Figure 8.7 : Détecteur résonant. Deux particules de masse m , liées par un ressort, forment une antenne gravitationnelle.

Limitons-nous donc à l'antenne simplifiée de la figure 8.7. Remarquons d'abord que lorsque l'onde gravitationnelle se propage parallèlement à l'axe des deux masses, l'antenne ne réagit pas, compte tenu du fait qu'il s'agit d'ondes transverses. L'antenne apparaît donc comme étant *directionnelle*, le maximum de réaction étant obtenu lorsque l'onde se propage perpendiculairement à l'axe des deux masses. Nous nous restreindrons à ce dernier cas.

Avec les notations déjà utilisées plus haut, l'équation de la déviation géodésique (des deux masses l'une par rapport à l'autre) s'écrit

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta \eta^i + \gamma \frac{d}{dt} \delta \eta^i + \omega_0^2 \delta \eta^i \sim -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_j^i \cdot \eta_0^j + 0(h^2) \quad (8.165)$$

où ω_0 est la fréquence de résonance de l'antenne et où γ est le coefficient d'amortissement du système. Dans cette équation, $\delta \eta^i$ est la variation de la distance entre les deux masses, lors du passage de l'onde, tandis que η_0^i représente cette même distance *avant* ce passage : comme $\eta^i = \eta_0^i + \delta \eta^i$ et que $\delta \eta^i$ est du premier ordre en h , nous avons négligé les termes du second ordre dans le membre de droite de l'équation (8.165). Cette équation est écrite dans un système de coordonnées (en jauge TT) locales de l'une des deux masses et l'on consultera Ch. Misner, K. Thorne et J.A. Wheeler (1973) pour une discussion plus approfondie.

Considérons, à titre d'exemple, le cas d'une onde plane se propageant le long de l'axe Oz (l'antenne étant orientée ainsi qu'il est indiqué sur la figure 8.8) ayant la polarisation + et la fréquence ω :

$$\begin{cases} h_{11} = -h_{22} = A_+ e^{-i\omega(t-z)} \\ h_{12} = h_{21} = 0. \end{cases} \quad (8.166)$$

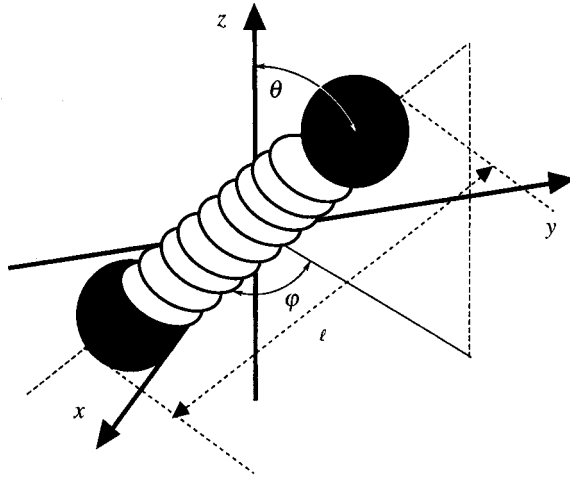


Figure 8.8 : Géométrie de l'antenne résonnante de la figure 8.7. L'onde se propage selon l'axe des z.

Introduisant la forme (8.166) dans l'équation de l'oscillateur harmonique forcé que constitue l'antenne, soit dans (8.165), et considérant uniquement le déplacement $\delta\eta$ dans l'axe des deux masses, il vient

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta\eta + \gamma\frac{d}{dt}\delta\eta + \omega_0^2\delta\eta = -\frac{1}{2}\omega^2\ell A_+ e^{-i\omega t} \sin^2\theta \cos 2\varphi, \quad (8.167)$$

dont l'amplitude de la solution stationnaire s'écrit

$$\delta\eta(\omega) = \frac{\frac{1}{2}\omega^2\ell A_+ \sin^2\theta \cos 2\varphi}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}. \quad (8.168)$$

Ainsi – et comme dans tout circuit oscillant ordinaire – selon la largeur de bande de l'antenne gravitationnelle on détectera soit un signal très piqué autour de la fréquence de résonance ω_0 (cas d'un grand “facteur de qualité” $Q \equiv \omega_0/2\gamma$), soit, au contraire, et avec une amplitude moindre, tout un spectre de fréquences possibles. En pratique, l'utilisation d'une antenne gravitationnelle avec tel ou tel facteur de qualité dépend beaucoup de la nature (aléatoire ou non, piquée ou non, etc.) du signal que l'on entend détecter [voir Ch. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler (1973) ou K. Thorne (1980) (1989), par exemple].

Le premier détecteur construit sur ce principe est celui de J. Weber (1960) qui consiste en une “barre” – un cylindre – d'aluminium d'environ 1.5 tonne dont les modes de vibration sont excités par le passage de l'onde [Fig. 8.9], et dont la déformation est mesurée à l'aide d'un transducteur²⁴ quelconque. L'oscillation du

24. C'est-à-dire, à l'aide d'un système permettant de transformer des déformations mécaniques en signaux électriques. Il peut s'agir ici de céramiques piézoélectriques, de condensateurs, etc.

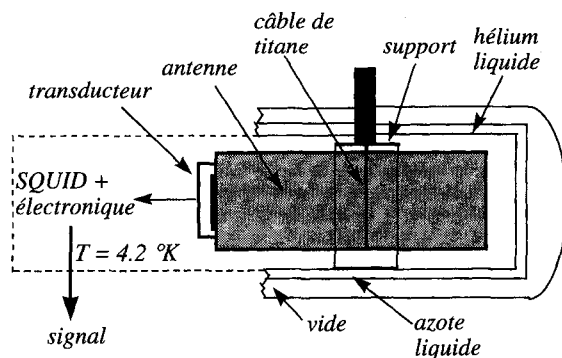


Figure 8.9 : Schéma de principe du détecteur de Weber. Un lourd cylindre d'aluminium est suspendu à l'aide d'un câble et ses oscillations éventuelles sous l'effet d'ondes gravitationnelles sont mesurées à l'aide d'un transducteur; le tout est enfermé – du moins dans les dernières versions (Rome) – dans une enceinte refroidie à très basse température [d'après E. Amaldi et al. (1986); reproduit avec l'aimable autorisation de la Società Italiana de Fisica].

cylindre dans son mode fondamental est alors assimilable à celle d'un oscillateur harmonique.

Ces mesures sont extrêmement délicates à mettre en œuvre, eu égard à la faiblesse des énergies mises en jeu par le passage d'une onde gravitationnelle (pour une onde très intense, telle qu'elle se produit lors d'une explosion de supernova au centre de la Galaxie, une énergie typique est de l'ordre de 10^{-25} J; l'amplitude de l'onde est elle-même de l'ordre de 10^{-18} et le déplacement $\delta\eta$ inférieur de plusieurs ordres de grandeur à la taille d'un proton!). Les très faibles amplitudes des variations de longueur de la barre de Weber exigent des mesures très soignées des signaux fournis par les transducteurs et des analyses complexes pour l'extraction du signal de tout le bruit existant (bruit thermique dans le cylindre²⁵, bruit de l'électronique, etc.). Pour diminuer ces incertitudes²⁶ diverses, il faut refroidir l'antenne [voir, par exemple, E. Amaldi *et al.* (1986)] le plus possible (en pratique, à la température de l'hélium liquide, soit $\sim 4^\circ\text{K}$) et/ou utiliser un monocristal de grande taille.

Quoi qu'il en soit de ces divers perfectionnements, on atteint assez vite la "limite quantique" : les énergies mises en jeu par le passage d'une onde gravitationnelle sont si faibles que le changement dans l'énergie de la barre est de l'ordre de celle de quelques phonons! Si E_{grav} désigne l'énergie cédée par l'onde au détecteur, on doit avoir $E_{\text{grav}} > \omega_0$. Cette énergie est de l'ordre de

$$E_{\text{grav}} \sim \frac{1}{2} M v^2, \quad (8.169)$$

25. A la température ambiante, le mouvement de la barre dû au bruit thermique est de l'ordre de $x_{\text{bruit}} \sim (2k_B T / M \omega_0^2)^{1/2} \sim 10^{-14} \text{ cm}$ et l'énergie correspondante est de l'ordre de 10^{-23} J ...

26. Voir, par exemple, les articles de V.B. Braginsky, J. Weber, W.M. Fairbank, W.M. Fairbank *et al.*, dans B. Bertotti (1974); voir aussi F. Everitt (1975).

où M est la masse de l'antenne et v la vitesse induite par l'onde, c'est-à-dire

$$v \sim \omega h \ell. \quad (8.170)$$

On a donc finalement

$$h_{\min} > (\ell^2 \omega_0 M)^{-1/2}. \quad (8.171)$$

Pour une antenne perfectionnée, on doit avoir $h_{\min} > 10^{-21}$. En fait, cette limite quantique n'est peut-être pas infranchissable car, en dernière analyse, une variable quantique peut toujours être mesurée avec une précision arbitrairement grande à condition que, simultanément, la variable conjuguée le soit avec une précision arbitrairement faible : c'est ce que nous enseignent les relations d'incertitude.

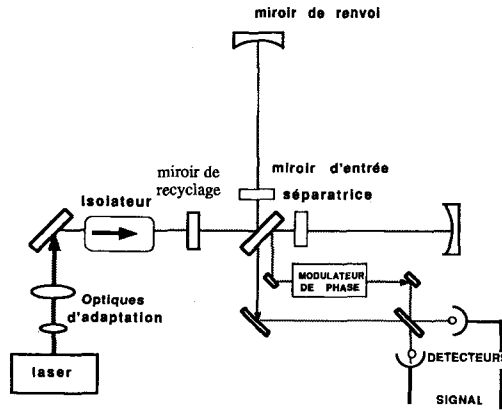


Figure 8.10 : L'interféromètre de Michelson utilisé comme détecteur d'ondes gravitationnelles. Afin d'obtenir un effet important, il convient de disposer de bras de grande longueur : ceci est obtenu à l'aide de réflexions multiples [d'après J.-Y. Vinet et al. (1990); reproduit avec l'aimable autorisation de l'éditeur et de l'auteur].

Un autre type de détecteur d'ondes gravitationnelles, à l'étude à l'heure actuelle, est constitué par un grand interféromètre (Michelson ou Fabry-Perrot). Celui-ci est formé [cas d'un Michelson; Fig. 8.10] de trois miroirs dont deux sont liés : deux des miroirs sont liés à des masses importantes, librement suspendues, et sont situés aux extrémités des deux bras du Michelson [cf. Chap. 1]; un miroir semi-transparent, habituel dans ce genre d'appareillage est destiné à réfléchir (et à laisser passer) un faisceau de lumière cohérente émis par un laser. Entre les deux faisceaux existe alors une différence de chemin optique et leur recombinaison donne lieu à des franges d'interférence décalées dans un détecteur. Lorsqu'une onde gravitationnelle passe au travers de l'appareil, en général l'un des bras se contracte tandis que l'autre se dilate, modifiant ainsi le chemin optique des faisceaux et déplaçant par conséquent les franges. Cependant, compte tenu de la petitesse extrême des déplacements des miroirs, il est nécessaire de disposer de bras très longs (par exemple, afin de

pouvoir détecter une onde de fréquence 1 kHz, la longueur des bras nécessaires est de l'ordre de 100 km). Cela est atteint à l'aide de réflexions multiples sur des miroirs secondaires et l'on est ramené à des distances réelles de l'ordre du kilomètre.

4. Examinons maintenant comment les ondes gravitationnelles peuvent être émises et avec quelle amplitude. Considérons donc de la matière caractérisée par le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, suffisamment concentrée pour qu'à l'infini l'espace-temps soit minkowskien et suffisamment peu dense pour que les équations d'Einstein linéarisées soient valables. Dans ces conditions, l'équation (8.134), écrite en jauge de Lorentz

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 16\pi G T_{\mu\nu}, \quad (8.134)$$

et sa solution *retardée* (qui ne comporte donc que des ondes sortantes)

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = 4G \int d^3x' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (8.135)$$

sont utilisables. Strictement parlant, il faudrait ajouter à $T_{\mu\nu}$ la contribution des ondes gravitationnelles elles-mêmes mais, eu égard à sa petitesse, nous n'en tiendrons pas compte ici.

Si l'on désigne par $r \equiv |\mathbf{x}|$ la distance à l'origine, et si la matière y est sensiblement concentrée, la solution (8.135) peut être approchée par

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, r) \sim \frac{4G}{r} \int d^3x' T_{\mu\nu}(t - r, \mathbf{x}') \quad (8.172)$$

loin de la source, c'est-à-dire dans la *zone d'onde*. Remarquons d'abord que $\bar{h}_{0\mu}$ ne dépend pas du temps et ne saurait donc contribuer aux ondes gravitationnelles : en effet, en raison de la conservation du tenseur énergie-impulsion, on a [Chap. 3]

$$\begin{aligned} \int d\Sigma_\mu T^{\mu\nu} &= \text{const.} \\ &= \int d^3x' T^{0\mu}. \end{aligned}$$

Il est donc possible de se limiter à la partie *spatiale* de $\bar{h}_{\mu\nu}$, soit \bar{h}_{ij} . Utilisant maintenant la relation de conservation $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, détaillée sous la forme

$$\partial_0 T^{00} + \partial_k T^{0k} = 0 \quad (8.173a)$$

$$\partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = 0, \quad (8.173b)$$

on trouve, après quelques calculs,

$$\bar{h}_{ij}(t, r) = \frac{2G}{r} \frac{d^2}{dt^2} \int d^3x \rho(t - r, \mathbf{x}) x_i x_j \quad (8.174)$$

où ρ est la densité de masse de la source ($\rho \equiv T_{00}$) et où l'on a supposé que les mouvements au sein de cette dernière sont des mouvements lents. Cette hypothèse revient (i) à ne pas considérer la contribution de l'énergie due aux mouvements internes et (ii) à ne considérer que la contribution de la densité de masse de la source. Ainsi ρ est la densité de masse propre. La relation (8.174) a été obtenue pour la première fois en 1918 par A. Einstein.

La relation (8.174) peut être démontrée comme suit [J. Foster, J.D. Nightingale (1989)]. Partant de l'identité

$$\int d^3x \partial_k [T^{ik} x^j] = \int d^3x \partial_k T^{ik} x^j + \int d^3x T^{ij}, \quad (8.175)$$

dont le membre de gauche est nul (utilisation du théorème de Gauss et du fait que la source est spatialement limitée) et utilisant la relation de conservation (8.173b), il vient

$$\int d^3x T^{ij} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int d^3x (T^{io} x^j + T^{jo} x^i). \quad (8.176)$$

D'autre part, le théorème de Gauss nous donne encore

$$\int d^3x \partial_k [T^{ok} x^i x^j] = 0, \quad (8.177)$$

de sorte que le membre de droite de la relation (8.176) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int d^3x (T^{oi} x^j + T^{oj} x^i) = \frac{d^2}{dt^2} \int d^3x T^{00} x^i x^j, \quad (8.178)$$

où l'on a également utilisé la relation de conservation (8.173a). D'où, finalement, la relation (8.174).

L'expression (8.174) pour \bar{h}_{ij} fait intervenir la dérivée (temporelle) seconde de ce qui apparaît comme le moment d'ordre deux – c'est-à-dire le *moment quadrupolaire* – de la distribution de masse de la source. Examinons cela d'un peu plus près en comparant avec le cas des ondes électromagnétiques usuelles qui, elles, font intervenir la dérivée seconde du moment *dipolaire* de la distribution de charge de la source. Remarquons d'abord que le passage de la loi de Coulomb à la loi d'attraction universelle peut être effectué à l'aide de la substitution $e^2 \rightarrow -m^2$, de sorte que si la puissance électromagnétique rayonnée [J.D. Jackson (1962)] est

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3} e^2 \gamma^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d} \right)^2, \quad (8.179)$$

où γ est leur accélération totale et \mathbf{d} le moment dipolaire

$$\mathbf{d} = \sum_{\ell} e \mathbf{x}_{\ell}, \quad (8.180)$$

on pourrait s'attendre que la puissance rayonnée par une source gravitationnelle soit tout à fait similaire. En fait, il n'en est rien car si l'on examine le moment dipolaire d'une distribution de masse, soit

$$\mathbf{d} = \sum_{\ell} m_{\ell} \mathbf{x}_{\ell}, \quad (8.181)$$

on s'aperçoit facilement que $\ddot{\mathbf{d}} = 0$! En effet,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{d} = \sum_{\ell} m_{\ell} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_{\ell} = \text{impulsion totale} = \text{const.},$$

dont la dérivée est nulle. On s'apercevrait, de même, que l'analogue gravitationnel du rayonnement dipolaire magnétique de l'électromagnétisme est également nul, en raison de la conservation du moment angulaire de la source [Ch. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler (1973)]. Le rayonnement gravitationnel est donc au moins quadrupolaire : ainsi une source à symétrie sphérique, même non statique, ne peut émettre de rayonnement gravitationnel.

5. Des considérations précédentes, il résulte que presque tout phénomène physique produit des ondes gravitationnelles ! Cependant, on s'attend à une production notable seulement dans le cas d'objets astrophysiques : explosions de supernovae, systèmes binaires, collisions d'objets stellaires, etc. En fait, les estimations que l'on peut effectuer sur la production d'ondes gravitationnelles, dans le cadre de tel ou tel phénomène, reposent essentiellement sur des *modèles* purement théoriques des objets astrophysiques considérés. Par exemple, on admet qu'une étoile à neutrons se forme par implosion²⁷ du cœur d'une supernova, par ailleurs en explosion ; cela exige des modèles spécifiques dans lesquels interviennent toutes sortes de phénomènes physiques dont la description théorique n'est pas toujours assurée (équation d'état de la matière dense, etc.), et qui n'ont pas encore conduit tout à fait à la simulation de la formation d'étoiles à neutrons. Tout ceci est discuté en détail²⁸ par K. Thorne (1989).

La figure 8.11, inspirée de K. Thorne (1980), donne une idée des amplitudes auxquelles on peut s'attendre – sur la base de modèles astrophysiques plus ou moins acceptés à l'heure actuelle – pour diverses fréquences d'ondes gravitationnelles. Parmi les phénomènes considérés, on trouve (i) divers phénomènes explosifs [supernovae, tremblements du cœur d'étoiles à neutrons, effondrement²⁸ gravitationnel d'une étoile en un trou noir, effondrement d'un système binaire, etc.], (ii) des systèmes périodiques (systèmes binaires, rotation d'étoiles à neutrons ou de naines blanches déformées, etc.), (iii) un fond aléatoire d'ondes gravitationnelles primordiales (i.e. créées avec l'Univers lui-même) ou formées lors de l'effondrement gravitationnel d'éventuelles étoiles de population²⁹ III. Des diagrammes plus détaillés, selon les phénomènes considérés, peuvent être trouvés dans K. Thorne (1989) et dans les références citées par cet auteur.

Un ordre de grandeur de l'amplitude d'une onde gravitationnelle, de fréquence ω , peut être obtenu en considérant la relation (8.174). En effet, on a à peu près :

$$h \sim \frac{2G}{r} \omega^2 M R^2 \varepsilon, \quad (8.182)$$

27. L'effondrement du cœur doit être asymétrique.

28. Un exposé simple peut être trouvé dans M. Tinto (1988).

29. Supposées s'être formées avant les galaxies.

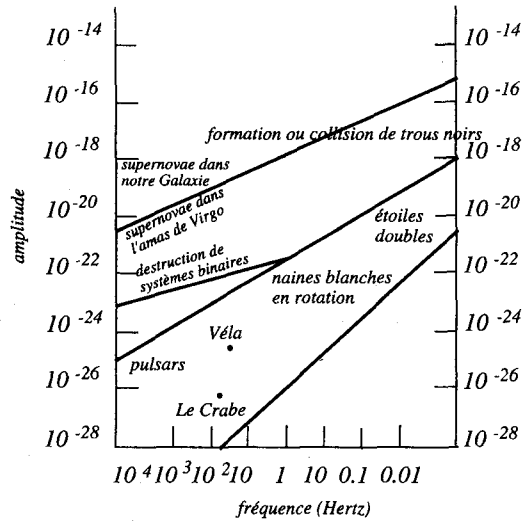


Figure 8.11 : Estimations des amplitudes des ondes gravitationnelles en fonction de leurs fréquences pour divers processus astrophysiques [d'après K. Thorne (1980)].

où, pour une onde plane de fréquence ω , la dérivée temporelle seconde donne lieu au facteur ω^2 , où R est la taille de la source et M sa masse. Le facteur ε traduit l'asymétrie de la source. Toutefois, $\omega R \sim v$ est une vitesse caractéristique des mouvements internes de la source et comme

$$v^2 \sim 2 \frac{GM}{R}, \quad (8.183)$$

on aura l'estimation (grossière) suivante [M. Tinto (1988)] :

$$h \sim \varepsilon \left(\frac{R_{\text{Sch.}}}{R} \right) \cdot \left(\frac{R_{\text{Sch.}}}{r} \right) \sim \varepsilon \left(\frac{R_{\text{Sch.}}}{r} \right) \cdot \left(\frac{v}{c} \right)^2. \quad (8.184)$$

Cette relation montre clairement à quelles conditions doivent obéir les sources d'ondes gravitationnelles pour pouvoir constituer des émetteurs efficaces : leurs tailles doivent être aussi proches que possible de leur rayon de Schwarzschild ($R \gtrsim R_{\text{Sch.}}$); elles doivent être très relativistes et enfin être aussi asymétriques que possible.

6. Concrètement, la meilleure preuve actuelle de l'existence des ondes gravitationnelles ne provient pas de leur éventuelle détection mais plutôt de l'étude du pulsar double PSR 1913+16 [J.H. Taylor, J.M. Weisberg (1982) (1989)] : celle-ci a atteint un tel degré de précision que la perte d'énergie du système due à l'émission des ondes gravitationnelles peut être évaluée et comparée à celle donnée par la formule d'Einstein (1918). Nous allons en donner ici un aperçu rudimentaire, une idée plus précise étant fournie ailleurs [voir, par exemple, K. Thorne (1989)]. Il est

clair que cette déduction n'est pas suffisamment correcte pour que cette formule puisse être utilisée valablement dans le cas de ce pulsar.

La première question qui se pose est celle de l'énergie des ondes gravitationnelles émises. Compte tenu des équations du champ (8.137) auxquelles obéissent les composantes $\bar{h}_{\mu\nu}$ (toujours en jauge TT), le tenseur énergie-impulsion correspondant est nécessairement [Appendice C] proportionnel à ³⁰

$$T_{\alpha\beta}^{\text{onde}} \propto \frac{1}{2} \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \cdot \partial_\beta \bar{h}^{\mu\nu}, \quad (8.185)$$

où, pour des raisons dimensionnelles, la constante de proportionnalité est nécessairement en G^{-1} . Cette relation montre que l'énergie contenue dans une onde gravitationnelle est *a priori* du second ordre; elle est donc négligée dans la théorie linéarisée. Les équations d'Einstein écrites au second ordre pour des ondes libres,

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} = 0, \quad (8.186)$$

montrent que $G_{\mu\nu}^{(2)}$ peut être considéré comme $-16\pi G$ fois le tenseur énergie-impulsion de l'onde gravitationnelle linéaire. On trouve finalement [voir, par exemple, S. Weinberg (1972)] :

$$T_{\text{onde}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \cdot \partial^\beta \bar{h}^{\mu\nu}, \quad (8.187)$$

qui se réécrit sous la forme

$$T_{\text{onde}}^{\alpha\beta} = \frac{k^\alpha k^\beta}{16\pi G} [|\alpha|^2 + |\beta|^2] \quad (8.188)$$

dans le cas d'une onde plane de vecteur d'onde k^α , du type (8.151).

A ce stade, il est important de remarquer que les expressions précédentes (8.185) et (8.186), pour $T_{\text{onde}}^{\mu\nu}$, n'ont pas de sens physique direct; en effet, l'énergie gravitationnelle ³¹ ne saurait être localisée et se trouve répartie *a priori* sur tout l'espace-temps : il n'y a pas de force gravitationnelle exercée en un point! Aussi doit-on remplacer les relations précédentes par des *moyennes* prises sur quelques longueurs d'onde; ainsi, la relation (8.186) doit se lire

$$T_{\text{onde}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} \langle \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} \cdot \partial^\beta \bar{h}^{\mu\nu} \rangle. \quad (8.189)$$

La densité d'énergie [ou le flux d'énergie (i.e. l'énergie par unité de temps et de surface) à un facteur c près] s'écrit finalement, pour une onde plane se propageant selon l'axe des x ,

30. Nous avons négligé le terme en $\eta_{\alpha\beta}L$; ce terme est, en effet, nul pour des superpositions d'ondes planes obéissant aux équations du mouvement.

31. Nous avons vu plus haut qu'une onde gravitationnelle excite les modes d'oscillation d'un détecteur : elle lui communique donc de l'énergie et de l'impulsion. Une onde gravitationnelle possède donc malgré tout un contenu énergétique.

$$T_{\text{onde}}^{01} = \frac{1}{16\pi G} \left[\left(\frac{d}{dt} h_{23} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{d}{dt} h_{22} - \frac{d}{dt} h_{33} \right)^2 \right]. \quad (8.190)$$

En utilisant maintenant l'expression approchée des h_{ij} donnée par la relation (8.172) ou (8.174) et en intégrant le flux d'énergie sur une surface entourant la source, on obtient³² [voir, par exemple, S.L. Shapiro et S.A. Teukolsky (1983)] la puissance rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{G}{45} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \cdot \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3}, \quad (8.191)$$

où Q_{ij} est le moment quadrupolaire défini par

$$Q_{ij} \equiv \int d^3 \rho(x) [3x_i x_j - x^2 \delta_{ij}]. \quad (8.192)$$

C'est la formule d'Einstein (1918) dont on trouvera les détails de la démonstration, par exemple, dans L. Landau et E. Lifschitz, etc. La relation (8.190) montre que pour un système oscillant, de fréquence ω , cette puissance est en ω^6 .

Un exemple utile d'émetteur d'ondes gravitationnelles³² est constitué par un système binaire, tel le pulsar double PSR 1913+16. Ici, nous nous limiterons à deux étoiles ponctuelles, de masses m_1 et m_2 , en orbite circulaire l'une autour de l'autre. On a donc affaire à un système possédant un moment quadrupolaire dépendant du temps, émettant par conséquent des ondes gravitationnelles. Il s'ensuit que les deux étoiles spiraleront lentement l'une vers l'autre pour finir par s'effondrer l'une sur l'autre. Examinons cela d'un peu plus près. Si ℓ_1 et ℓ_2 désignent les distances des deux étoiles à leur centre de gravité situé à l'origine, les parties dépendant du temps des différentes composantes du moment quadrupolaire s'obtiennent sans difficulté à partir des équations des trajectoires des deux étoiles,

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 = \ell \cos \omega t \\ y_1 = -y_2 = \ell \sin \omega t \end{cases} \quad (8.193)$$

où ℓ est leur distance et où ω est la vitesse angulaire

$$\omega = \left(\frac{GM}{\ell^3} \right)^{1/2} \quad (8.194)$$

32. La démonstration n'est valable que pour un système comportant des tensions peu importantes, faiblement autogravitant, et dont les vitesses sont petites comparées à celle de la lumière. En outre, même étendue à des sources qui ne satisfont pas à ces conditions, il subsiste de délicats problèmes dans l'application de ces relations au pulsar binaire PSR 1913+16, compte tenu de ce que $GM/Rc^2 \sim 2$. [Nous sommes redevables de ces remarques à MM. L. Blanchet et T. Damour dont on pourra consulter, par ailleurs, l'article paru dans N. Deruelle et T. Piran (1983).]

($M = m_1 + m_2$) qui résulte de l'égalité entre l'attraction gravitationnelle et la force centrifuge dans le cas de mouvements circulaires. On trouve alors

$$\begin{cases} Q_{11} = -Q_{22} = \frac{3}{2} \mu \ell^2 \cos 2\omega t + \text{const.} \\ Q_{12} = Q_{21} = \frac{3}{2} \mu \ell^2 \sin 2\omega t + \text{const.} \end{cases} \quad (8.195)$$

où μ est la masse réduite

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.196)$$

Insérant maintenant l'expression (8.195), après l'avoir dérivée trois fois, dans la relation (8.191), il vient

$$\left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{M^3 \mu^2}{\ell^5}, \quad (8.197)$$

où nous avons rétabli les facteurs c . Compte tenu de ce que la période de rotation $T = 2\pi/\omega$ est donnée par l'équation (8.194), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} &= \frac{3}{2} \frac{1}{\ell} \frac{d\ell}{dt} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{96}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{M^2 \mu}{\ell^4}, \end{aligned} \quad (8.198)$$

où l'on a utilisé le fait que l'énergie du système est

$$E = -\frac{1}{2} \frac{G\mu M}{\ell}. \quad (8.199)$$

Intégrant l'équation différentielle pour $\ell(t)$ [Eq. (8.198)], on constate que lorsque t tends vers t_0 , $\ell(t)$ tends vers zéro – il y a donc “coalescence” des deux étoiles – et l'on trouve

$$t_0 = \frac{5}{256} \frac{c^5}{G^3} \frac{\ell_0^4}{M^2 \mu}, \quad (8.200)$$

où ℓ_0 est la distance initiale des deux étoiles. Appliquée aux données du pulsar double PSR 1913+16, la relation (8.198) est plus ou moins vérifiée; une fois corrigée de l'excentricité de la trajectoire, elle le devient tout à fait! Ce seul fait *démontre l'existence des ondes gravitationnelles*.

EXERCICES

1. On considère les équations d'Einstein dans un espace-temps à 2+1 dimensions. Combien le tenseur de Riemann ${}^{(3)}R_{ijkl}$ possède-t-il de composantes indépendantes? Combien en possède la contraction ${}^{(3)}R_{ij}$? En déduire qu'un espace-temps à 2+1 dimensions tel que ${}^{(3)}R_{ij}=0$ est nécessairement plat.

2. Montrer que les équations d'Einstein peuvent se mettre sous la forme :

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right].$$

3. Ecrire puis résoudre, en coordonnées de Schwarzschild, les équations d'Einstein avec le terme cosmologique, dans le vide. On trouve

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3} \lambda r^2 \right) dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3} \lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Evaluer l'avance du périhélie d'une planète à l'aide de cette métrique. Sachant que l'avance du périhélie de Mercure est de $43.11'' \pm 45''$, quelles limites peut-on obtenir sur λ ?

4. (i) Calculer le tenseur de Riemann pour la métrique à symétrie sphérique la plus générale et (ii) en déduire que, dans le cas de la métrique de Schwarzschild écrite en coordonnées standard, ce tenseur n'est pas singulier au point $r=2GM$.

5. A l'aide du théorème de Birkhoff, montrer qu'une particule-test située à l'intérieur d'une sphère creuse ne subit pas d'action gravitationnelle.

6. La géométrie d'une étoile à symétrie sphérique est décrite par la métrique

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

et la matière est supposée isentropique (i.e. $dS=0$). Le tenseur énergie-impulsion du fluide qui la compose est de la forme "fluide parfait"

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P) u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu}.$$

(i) Montrer que la conservation de $T^{\mu\nu}$, soit $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, entraîne

$$d[\rho/n] = -P d[1/n],$$

où n est la densité de baryons qui composent l'étoile (notons que $\nabla_\mu J^\mu = 0$), c'est-à-dire encore

$$d\rho = \frac{\rho + P}{n} dn.$$

(ii) Ecrire explicitement l'équation d'Euler décrivant le fluide [on trouve

$$(\rho + P) u^\nu \nabla_\mu u_\nu + \nabla_\mu P + u^\nu \nabla_\nu P u_\mu = 0].$$

(iii) Dans le cas d'une étoile statique, montrer que l'on a alors

$$\frac{dP(r)}{dr} = -[\rho(r) + P(r)] \frac{\partial}{\partial r} \phi(r).$$

7. Montrer que, dans un Univers de Friedman, la conservation du tenseur énergie-impulsion, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, entraîne

$$d(\rho R^3) + P dR^3 = 0.$$

8. Montrer que, dans un repère synchrone, $\sigma_{\mu\nu} = 0$ entraîne

$$\partial_0 g_{ij} = \frac{1}{3} g_{ij} \partial_\mu u^\mu.$$

9. On considère l'espace de Minkowski \mathcal{M}^4 avec sa métrique habituelle

$$ds^2 = dt^2 - dx^2.$$

(i) Ecrire cette métrique dans le système de coordonnées hyperboliques $(\tau, r, \theta, \varphi)$ où $t = \tau \operatorname{ch} \chi$, $r = \tau \operatorname{sh} \chi$ avec $r/t = \operatorname{th} \chi$ et $t^2 - r^2 = \tau^2$.

(ii) Identifier alors la métrique obtenue à une métrique d'espace de Friedman avec un facteur d'échelle $R(\tau) = \tau$ ($\tau > 0$). Quelles sont les lignes d'univers des galaxies? Trouver les trajectoires des photons.

(iii) Quelle est la courbure de cet espace-temps (univers de Milne)? A quel tenseur énergie-impulsion correspond-il?

10. Soit $A_{\mu\nu}$ l'amplitude d'une onde gravitationnelle $\bar{h}_{\mu\nu}$,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \operatorname{Re} A_{\mu\nu} e^{ik \cdot x},$$

considérée dans la jauge TT (on supposera que l'onde se propage le long de l'axe des z) et soit $R(\chi)$ une rotation d'angle χ autour de l'axe des z . Ecrire explicitement $R(\chi)$ puis trouver la forme du tenseur $A_{\mu\nu}$ après cette transformation.

11. Montrer que dans la jauge TT on a $\Gamma_{00}^\mu = 0$ et $\Gamma_{0\nu}^\mu = \frac{1}{2} h_{\nu}^\mu$.

12. Ecrire l'équation des géodésiques pour une particule-test soumise à l'action d'une onde gravitationnelle dans la jauge TT. Quelles conclusions peut-on en tirer?

13. Démontrer les relations (8.159) à (8.161).

14. Calculer l'effet d'une onde gravitationnelle de fréquence ω , de polarisation transverse (\times) et se propageant dans la direction $z > 0$, sur l'antenne dont la géométrie est fournie par la figure 8.8.

15. Démontrer la relation (8.174) selon le schéma (8.175) – (8.177) [on utilisera les relations de conservation (8.173) et le théorème de Gauss].

16. Montrer que le tenseur $T_{onde}^{\mu\nu}$ [Eq. (8.187)] est invariant de jauge.

17. Calculer le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ au second ordre en h et ∂h . En déduire la forme de $T_{\mu\nu}^{onde}$ [S. Weinberg (1972)].

APPENDICE A

Généralités sur les tenseurs

Au cours du chapitre 3, nous avons “défini” les tenseurs de manière empirique, sans leur donner un sens mathématique précis. Nous avons aussi insisté sur les positions exactes des indices et sur les notations utilisées. Celles-ci sont tout à fait cohérentes et l’on s’en rend compte immédiatement lorsque l’on interprète les tenseurs d’un point de vue un peu plus mathématique.

On trouvera un exposé plus détaillé de ce qui suit sur les tenseurs dans divers ouvrages ¹.

Dans cet appendice, nous rappellerons rapidement la notion de *dual* d’un espace vectoriel puis donnerons une définition mathématique pour les tenseurs et, notamment, pour les tenseurs *affines*; enfin nous indiquerons quelques critères de tensorialité.

Dual d’un espace vectoriel

Soit \mathbf{E} un espace vectoriel sur C quelconque (R^n, C^n, \mathcal{M} , etc.). Une *forme linéaire* sur \mathbf{E} est une application linéaire de \mathbf{E} dans C .

Exemples :

(1) $f^i(x) = x^i$ est une forme linéaire sur C^n .

(2) Soit \mathbf{E} l’espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0, 1]$. Les applications suivantes sont des formes linéaires :

$$x(t) \longrightarrow x(t_0) \text{ avec } t_0 \in [0, 1]$$

$$x(t) \longrightarrow \int x(t) dt.$$

(3) Soit $\mathbf{E} = C^n$ et $A \in \mathcal{L}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ une application linéaire de \mathbf{E} dans lui-même. Alors $Tr.A$ est une forme linéaire.

(4) Soit \mathbf{E} l’espace vectoriel des suites numériques convergentes. L’application qui à une suite $\{s_n\}$ fait correspondre sa limite s est une forme linéaire.

1. Voir, par exemple, A. Lichnerowicz, *Algèbre et analyse linéaires* (Masson, Paris, 1970); A. Lichnerowicz, *Éléments de calcul tensoriel* (Gabay, Paris, 1987).

Définition : L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbf{E}, C)$ des formes linéaires sur \mathbf{E} est appelé l'espace dual de \mathbf{E} et on le note \mathbf{E}^* . Si $\dim. \mathbf{E} = n$ alors $\dim. \mathbf{E}^* = n$.

Soit maintenant $\{e_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ une base de \mathbf{E} supposé de dimension n . Soient maintenant les formes linéaires $e^{*1}, e^{*2}, \dots, e^{*n}$ définies par

$$e^{*i}(e_j) = \delta^i_j$$

[on remarquera que pour chaque x de \mathbf{E} , $e^{*i}(x) = x^i$, où x^i est la composante contravariante de x dans la base des $\{e^i\}$]; on démontre alors facilement que les $\{e^{*i}\}$ constituent une base de \mathbf{E}^* , la base duale de $\{e_i\}$.

Soient $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ deux bases de \mathbf{E} et soit \mathcal{R} la matrice de passage :

$$e'_i = R_i^j e_j ;$$

si x est un vecteur de \mathbf{E} , on a $x = x^i e_i = x'^j e'_j$, ce qui entraîne immédiatement

$$x^i = R_j^i x'^j .$$

Autrement dit, les composantes contravariantes de x dans la nouvelle base s'obtiennent à l'aide de la matrice \mathcal{R}^{-1} .

Lorsque $\dim.\mathbf{E} = n$, il est aisé de démontrer que toute forme linéaire sur \mathbf{E} , supposé muni d'un produit scalaire noté \langle, \rangle , peut s'écrire sous la forme

$$y^*(x) = \langle y, x \rangle ,$$

où x, y sont des éléments de \mathbf{E} et où y^* est un élément de \mathbf{E}^* , associé de manière univoque à y .

Produits tensoriels d'espaces vectoriels

Soient deux espaces vectoriels \mathbf{E} et \mathbf{F} de dimensions finies : $\dim.\mathbf{E}=n$ et $\dim.\mathbf{F}=m$. Nous allons définir un espace vectoriel à mn dimensions, noté $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$, en munissant $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ d'une structure *ad hoc*. Au couple (x,y) avec x dans \mathbf{E} et y dans \mathbf{F} , nous ferons correspondre un élément de $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$, noté $x \otimes y$, la correspondance jouissant des propriétés suivantes :

$$(i) \quad x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$

(et ce, quels que soient les vecteurs, x, x_1, x_2 , de \mathbf{E} et y, y_1, y_2 de \mathbf{F});

$$(ii) \quad \alpha(x \otimes y) = \alpha x \otimes y = x \otimes \alpha y ;$$

(iii) si $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$ sont des bases de \mathbf{E} et \mathbf{F} respectivement, alors les nm éléments.

$$e_i \otimes f_j \equiv \varepsilon_{ij}$$

forment une base $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$.

On peut donc écrire

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = x^i y^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j = x^i y^j \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} ;$$

ainsi les $x^i y^j$ sont les *composantes contravariantes* du tenseur $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ dans la base $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$. Bien entendu, on peut effectuer également le produit tensoriel d'un espace vectoriel par le dual d'un autre espace vectoriel. Ainsi, en considérant les espaces vectoriels $\mathbf{E}, \mathbf{E}^*, \mathbf{F}$ et \mathbf{F}^* on pourra former les produits tensoriels suivants :

$$\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{F}^*, \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}^*, \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{F}, \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*, \dots$$

dont les éléments auront respectivement les formes générales

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j$$

$$\mathbf{T}' = T'^i{}_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^{*j}$$

$$\mathbf{T}'' = T''_{ij} \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{f}^{*j}$$

$$\mathbf{T}''' = T'''^{ij} \mathbf{e}^{*i} \otimes \mathbf{f}_j$$

$$\mathbf{T}'''' = T''''^i{}_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^{*j}$$

.....

On conçoit donc mieux ce qu'exprime la position des indices d'un tenseur d'ordre 2.

Ayant défini le produit de deux espaces vectoriels, il est maintenant possible de former des produits tensoriels comportant un nombre arbitraire d'espaces vectoriels. Par exemple, \mathbf{E}, \mathbf{F} et \mathbf{G} étant trois espaces vectoriels, de dimension finie, on peut former $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}$ puis $(\mathbf{E} \otimes \mathbf{F}) \otimes \mathbf{G}$ qui est par construction $\mathbf{E} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$. Les éléments de cet espace vectoriel sont les tenseurs d'ordre 3 et sont de la forme

$$\mathbf{T} = T^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j \otimes \mathbf{g}_k .$$

Un *tenseur affine* attaché à un espace vectoriel \mathbf{E} est un élément de l'espace vectoriel

$$\underbrace{\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}}_{p \text{ fois}} \otimes \underbrace{\mathbf{E}^* \otimes \mathbf{E}^* \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^*}_{q \text{ fois}} \equiv T ;$$

ce sera un tenseur d'ordre $p + q$ qui sera p fois contravariant et q fois covariant. Dans la suite, nous nous limiterons aux tenseurs affines : en Relativité Restreinte nous ne considérons que les tenseurs affines sur l'espace de Minkowski \mathcal{M} . En outre, on a $\dim. \mathbf{T} = n^{p+q}$.

Critères de tensorialité

Etudions maintenant les *changements de base* pour les composantes d'un tenseur affine ; soient $T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$ ces composantes : le tenseur considéré est donc un élément

de $\mathbf{E}^{\otimes p}$. Soient $\{\mathbf{e}_i\}$ et $\{\mathbf{e}'_i\}$ deux bases différentes de \mathbf{E} et soit \mathcal{R} la matrice de passage, d'éléments R_i^j

$$\mathbf{e}'_i = R_i^j \mathbf{e}_j$$

La base de $\mathbf{E}^{\otimes p}$, soit $\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}\}$, va devenir

$$\mathbf{e}'_{i_1} \otimes \mathbf{e}'_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}'_{i_p} = R_{i_1}^{j_1} R_{i_2}^{j_2} \dots R_{i_p}^{j_p} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \mathbf{e}_{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_p}$$

qui peut encore s'écrire

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_{i_1 i_2 \dots i_p} = R_{i_1}^{j_1} R_{i_2}^{j_2} \dots R_{i_p}^{j_p} \boldsymbol{\varepsilon}_{j_1 j_2 \dots j_p}$$

où les notations sont évidentes. Dans ces conditions, l'expression du tenseur \mathbf{T} dans les deux bases $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1 i_2 \dots i_p}\}$ et $\{\boldsymbol{\varepsilon}'_{i_1 i_2 \dots i_p}\}$ conduit à

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \boldsymbol{\varepsilon}_{i_1 i_2 \dots i_p} \\ &= T'^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} \boldsymbol{\varepsilon}'_{i_1 i_2 \dots i_p} \end{aligned}$$

et finalement à

$$T'^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} = (R^{-1})_{\mu_1}^{\nu_1} (R^{-1})_{\mu_2}^{\nu_2} \dots (R^{-1})_{\mu_p}^{\nu_p} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} .$$

Introduisons la notation

$$(R^{-1})_{\mu}^{\nu} \equiv R^{\mu}_{\nu} ;$$

la loi de transformation des composantes contravariantes du tenseur \mathbf{T} se réécrit sous la forme plus simple

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = R^{\mu_1}_{\nu_1} R^{\mu_2}_{\nu_2} \dots R^{\mu_p}_{\nu_p} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} .$$

Quant aux composantes covariantes, on montre facilement qu'elles se transforment comme

$$T'_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} = R_{\mu_1}^{\nu_1} R_{\mu_2}^{\nu_2} \dots R_{\mu_p}^{\nu_p} T_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} ;$$

ainsi les composantes mixtes – i.e. contra- et covariantes – d'un tenseur s'écriront

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} = R^{\mu_1}_{\alpha_1} R^{\mu_2}_{\alpha_2} \dots R_{\nu_1}^{\beta_1} R_{\nu_2}^{\beta_2} \dots T^{\alpha_1 \alpha_2 \dots}_{\beta_1 \beta_2 \dots} .$$

Une notation très utile est la suivante : on pose

$$T'^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} \equiv T'^{\mu'_1 \mu'_2 \dots}_{\nu'_1 \nu'_2 \dots}$$

$$(R^{-1})^{\mu}_{\alpha} \equiv R^{\mu'}_{\alpha}$$

$$R_{\mu}^{\alpha} \equiv R^{\mu}_{\alpha'} ;$$

avec ces conventions, on a

$$R^\mu_{\alpha'} R^{\alpha'}_{\nu} = \delta^\mu_{\nu}$$

et

$$R^{\mu'}_{\alpha} R^{\alpha}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$$

La loi de transformation des composantes mixtes d'un tenseur – d'ordre 2, à titre d'exemple – s'écrira

$$T^{\mu'}_{\nu'} = R^{\mu'}_{\alpha} R^{\beta}_{\nu'} T^{\alpha}_{\beta}$$

En résumé, les indices primés correspondent aux composantes de \mathbf{T} dans la nouvelle base.

On obtient alors sans problème [A. Lichnerowicz (1970)] les critères de tensorialités suivants.

Théorème : *Pour qu'un système de m^q quantités $T^{i_1 i_2 \dots i_q}$ attachées à une base $\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q}\}$ de l'espace $\mathbf{E}^{\otimes q}$ ($\dim. \mathbf{E} = m$) puisse être considéré comme le système des composantes contravariantes d'un tenseur déterminé, il faut et il suffit que, dans un changement de base quelconque, ce système se transforme selon les lois données plus haut.*

Corollaire : *Pour qu'un système de m^q quantités $T^{i_1 i_2 \dots i_q}$ attachées à une base $\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_q}\}$ de l'espace $\mathbf{E}^{\otimes q}$ ($\dim. \mathbf{E} = m$) puisse être considéré comme le système des composantes contravariantes d'un tenseur déterminé, il faut et il suffit que, quels que soient les vecteurs $\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{x}_{(2)}, \dots, \mathbf{x}_{(q)}$ de \mathbf{E} , la grandeur $T^{i_1 i_2 \dots i_q} x_{(1)i_1} x_{(2)i_2} \dots x_{(q)i_q}$ reste invariante par changement de base.*

Formes différentielles extérieures

Dans cet appendice, nous nous limiterons, de manière pragmatique, à des notions tout à fait élémentaires destinées à être utilisées dans l'intégration de diverses grandeurs physiques (courants, tenseur énergie-impulsion, etc.). Néanmoins, les formes différentielles sont d'usage général dans toutes sortes de problèmes physiques allant de la thermodynamique à la mécanique, en passant par l'électromagnétisme, sans oublier la mécanique des fluides. Le lecteur pourra trouver utile de consulter d'autres ouvrages, plus approfondis, et notamment ceux de H. Flanders (1963), A. Lichnerowicz (1970) et B. Schutz (1985).

Donnons d'abord une idée simple de cette notion et, à cette fin, plaçons-nous dans \mathbf{R}^3 dont nous repérerons les points à l'aide de coordonnées $\{x^i\}_{i=1,2,3}$. Soit un champ de vecteurs, de composantes A^i ; un champ de tenseurs, de composantes T^{ij} , et enfin, un autre champ de tenseurs de composantes Q^{ijk} . Considérons maintenant les intégrales suivantes ¹ :

$$I = \int_C A_i dx^i, \quad (\text{B.1})$$

$$J = \int_S T_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.2})$$

$$K = \int_V Q_{ijk} dx^i dx^j dx^k. \quad (\text{B.3})$$

La première intégrale, I , est une intégrale curviligne étendue à la courbe C et son intégrant,

$$\omega = A_i dx^i, \quad (\text{B.4})$$

1. Nous ne nous préoccupons pas, à ce stade, de la position des divers indices.

est une *forme différentielle de degré 1*. L'intégrale J est une intégrale de surface étendue à S . Toutefois, une intégrale de surface générale dans \mathbf{R}^3 se présente toujours sous la forme

$$\int_S P dx dy + Q dy dz + R dx dz ; \quad (\text{B.5})$$

cela signifie, d'une part, que l'on doit avoir (en un sens à préciser)

$$dx dx = dy dy = dz dz = 0 , \quad (\text{B.6})$$

et, d'autre part, que les termes du type $dy dx$, etc. doivent s'exprimer en fonction des termes $dx dy$, etc.

Pour préciser un peu cela, considérons deux coordonnées ξ^1 et ξ^2 sur la surface S ; cette dernière sera donc décrite paramétriquement ainsi :

$$x = x(\xi^1, \xi^2), \quad y = y(\xi^1, \xi^2), \quad z = z(\xi^1, \xi^2), \quad (\text{B.7})$$

de sorte que l'intégrale (B.5) se réécrit sous la forme

$$\int A_{12} d\xi^1 d\xi^2 , \quad (\text{B.8})$$

où A_{12} est une fonction de ξ^1 et ξ^2 obtenue à partir de (B.7) et de P, Q, R , et où l'intégrale (B.8) est étendue à un domaine de \mathbf{R}^2 . L'intégrand $d\xi^1 d\xi^2$ de cette dernière intégrale représente un élément de surface dans \mathbf{R}^2 [Fig. B.1], *orienté*. Autrement dit, si e_1 et e_2 représentent des vecteurs de base (tangents aux lignes coordonnées ξ^1 et ξ^2), on aura

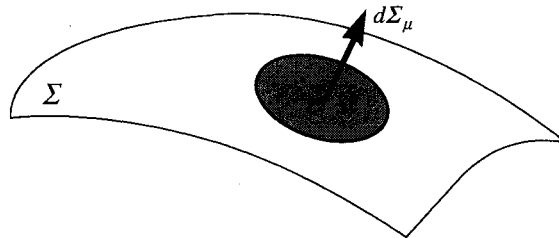


Figure B.1 : Élément de surface orienté dans \mathbf{R}^2 .

$$dS = e_1 d\xi^1 \wedge e_2 d\xi^2 = e_1 \wedge e_2 d\xi^1 d\xi^2 \quad (\text{B.9})$$

où \wedge désigne le produit vectoriel usuel dans \mathbf{R}^3 . Il s'ensuit que si l'on échange les rôles des vecteurs $e_1 d\xi^1$ et $e_2 d\xi^2$, dS change de signe mais non de module; en outre, cette propriété est, par construction, invariante dans les changements de coordonnées sur la surface S . On conçoit finalement qu'il faille poser

$$d\xi^1 d\xi^2 = -d\xi^2 d\xi^1, \quad (\text{B.10})$$

ce qui est, évidemment, compatible avec la propriété (B.6). Dans ces conditions, l'intégrale (B.8) se réécrit sous la forme

$$\int A_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j, \quad (\text{B.11})$$

où l'on a utilisé la notation

$$d\xi^i d\xi^j \equiv d\xi^i \wedge d\xi^j, \quad (\text{B.12})$$

et où A_{ij} apparaît maintenant comme étant nécessairement un *tenseur antisymétrique*. De même, l'intégrale J se réécrit sous la forme

$$J = \int_S T_{ij} dx^i \wedge dx^j. \quad (\text{B.13})$$

Revenons maintenant à la forme générale (B.5) que l'on a l'habitude d'écrire comme

$$\int_S \vec{V} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{B.14})$$

où \vec{V} est un vecteur de \mathbf{R}^3 de composantes (P, Q, R) . Comme dS_i peut toujours s'écrire comme

$$dS_i = \frac{1}{2!} \varepsilon_{ijk} d\xi^j \wedge d\xi^k, \quad (\text{B.15})$$

il est clair que l'expression (B.11) se met également sous la forme (B.14) en posant

$$A_{jk} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} V^i; \quad (\text{B.16})$$

cela n'est possible que parce que A_{jk} est un tenseur antisymétrique de \mathbf{R}^3 .

Notons enfin que si l'on effectue un changement de coordonnées du type

$$\xi^1 \longleftrightarrow \xi^2, \quad (\text{B.17})$$

qui change l'orientation de la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, alors dS_i ne change pas de signe (le pseudo-tenseur ε_{ijk} change de signe ainsi que $d\xi^i \wedge d\xi^j$) et la forme différentielle (de degré deux) qu'est l'intégrand est invariante.

Qu'en est-il de l'intégrand de (B.3)? Compte tenu des remarques précédentes, on peut l'écrire

$$Q_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k. \quad (\text{B.18})$$

Or l'élément différentiel $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$ est totalement antisymétrique en les indices (i, j, k) . Si l'on veut obtenir un scalaire pour K , il est alors nécessaire que Q_{ijk} soit proportionnel au pseudo-tenseur ε_{ijk} :

$$Q_{ijk} = \varphi \varepsilon_{ijk}. \quad (\text{B.19})$$

Finalement, la forme différentielle (de degré trois) (B.18) est proportionnelle à l'élément de volume

$$\varepsilon_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k = 2 d^3x. \quad (\text{B.20})$$

Remarquons au passage qu'à partir d'une forme différentielle de degré zéro (c'est-à-dire, à partir d'une fonction scalaire f), on peut par différentiation obtenir une forme de degré un, comme par exemple

$$\alpha = df = \partial_i f \cdot dx^i \quad (\text{B.21})$$

Nous allons développer ces notions ci-dessous de manière pragmatique et, en particulier, l'*algèbre extérieure* définie ici par les propriétés du "produit vectoriel" \wedge dans \mathbf{R}^3 , et définie plus loin dans le cas de \mathbf{R}^n .

Algèbre extérieure

Considérons un espace vectoriel E sur \mathbf{R} à n dimensions et le produit tensoriel $E^{\otimes p}$. Nous allons construire l'espace $E^{\wedge p}$ des p -vecteurs : nous poserons $E^{\wedge 0} \equiv \mathbf{R}$ et $E^{\wedge 1} \equiv E$. Le *produit extérieur* \wedge de deux vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y} quelconques de E jouira, par définition, des propriétés suivantes :

$$(i) \quad \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = -\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}$$

$$(ii) \quad \mathbf{x} \wedge \mathbf{x} = 0$$

$$(iii) \quad (\lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2) \wedge \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{y}) + \mu(\mathbf{x}_2 \wedge \mathbf{y})$$

$$(iv) \quad \mathbf{x} \wedge (\lambda' \mathbf{y}_1 + \mu' \mathbf{y}_2) = \lambda'(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}_1) + \mu'(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}_2).$$

En termes de composantes, avec

$$\mathbf{x} = e_i x^i, \quad \mathbf{y} = e_i y^i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (\text{B.23})$$

on aura donc

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{x}^i \mathbf{y}^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \quad (\text{B.24})$$

$$= \sum_{i < j} (x^i y^j - x^j y^i) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j . \quad (\text{B.25})$$

L'espace $E^{\wedge 2}$ sera alors défini comme étant l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires du type

$$\sum \alpha_{ij} \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j .$$

La relation (B.25) indique alors que $E^{\wedge 2}$ est identique à l'espace vectoriel des tenseurs antisymétriques d'ordre deux.

De même, $E^{\wedge p}$ est défini de manière similaire et est identique aux tenseurs antisymétriques d'ordre p : sa dimension est donc C_n^p et une base est donnée par

$$\mathbf{e}_{i_1 i_2 \dots i_p} \equiv \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} ,$$

avec $i_1 < i_2 < \dots < i_p$.

Considérons maintenant les espaces $E^{\wedge p}$ et $E^{\wedge q}$. Si $\alpha \in E^{\wedge p}$ et $\beta \in E^{\wedge q}$, on pourra définir $\alpha \wedge \beta \in E^{\wedge(p+q)}$ (qui sera 0 ssi $p + q > n$) qui possédera les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \alpha \wedge \beta \quad \text{est distributif par rapport à l'addition} \\ (ii) \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \quad (\text{associativité}) \\ (iii) \quad \beta \wedge \alpha = (-)^{pq} \alpha \wedge \beta . \end{array} \right. \quad (\text{B.26})$$

Le produit extérieur \wedge fait donc passer de l'espace $E^{\wedge p} \times E^{\wedge q}$ à l'espace $E^{\wedge(p+q)}$. Une opération linéaire A de E dans lui-même transforme un élément $\alpha \in E^{\wedge p}$

$$\alpha = \alpha^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} \quad (\text{B.27})$$

en un élément

$$\alpha' = \alpha^{i_1 i_2 \dots i_p} A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_p}^{j_p} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_p} , \quad (\text{B.28})$$

où les indices (j_1, j_2, \dots, j_p) des A_i^j doivent être antisymétrisés :

$$\begin{aligned} A_{i_j}^{j_1} \cdot A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_2}^{j_p} \mathbf{e}_{j_1} \wedge \mathbf{e}_{j_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_p} = \\ \det A \cdot \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_p} . \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Le passage de (B.27) à (B.28) est effectué à l'aide du changement de base $e_i \rightarrow A_i^j e_j$.

Formes différentielles

1. Dans \mathbf{R}^n , considérons l'élément infinitésimal dx^i ($i = 1, 2, \dots, n$) et un covecteur $A_i(x)$. Par définition, la grandeur

$$\omega = A_i dx^i \quad (\text{B.30})$$

est une *forme différentielle de degré un*, les dx^i formant une base pour l'espace vectoriel formé par les ω : $dx^i \equiv e^i$. On peut donc étudier l'algèbre extérieure des formes différentielles et former, par exemple à partir de deux formes analogues à la précédente, la forme de degré deux suivante :

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= A_i^{(1)} dx^i \wedge A_j^{(2)} dx^j \\ &= A_i^{(1)} \cdot A_j^{(2)} dx^i \wedge dx^j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ &= \frac{1}{2} [A_i^{(1)} A_j^{(2)} - A_i^{(2)} A_j^{(1)}] dx^i \wedge dx^j. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

De manière générale, une forme différentielle de degré p ($p \leq n$) s'écrira sous la forme

$$\alpha = A_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (\text{B.32})$$

où $A_{i_1 i_2 \dots i_p}$ est un tenseur antisymétrique.

2. Etudions l'effet d'un changement de système de coordonnées dans \mathbf{R}^n ; on a

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \equiv A_{i'} dx^{i'} \quad (\text{B.33})$$

de sorte que la forme ω (B.30) s'écrit maintenant

$$\omega = A_i dx^i = A_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} = A_{i'} dx^{i'} \quad (\text{B.34})$$

et la forme générale α (B.31)

$$\begin{aligned}\alpha &= A_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= A_{i'_1 i'_2 \dots i'_p} dx^{i'_1} \wedge dx^{i'_2} \wedge \dots \wedge dx^{i'_p}.\end{aligned}\tag{B.35}$$

Ces dernières relations montrent par identification que

$$A_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} A_i$$

et que

$$A_{i'_1 i'_2 \dots i'_p} = \frac{\partial x^{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x^{i'_1 i'_2 \dots i'_p}} A_{i_1 i_2 \dots i_p}\tag{B.36}$$

où l'on a posé

$$\frac{\partial x^{i_1 i_2 \dots i_p}}{\partial x^{i'_1 i'_2 \dots i'_p}} \equiv \det \left[\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_\ell}} \right],\tag{B.37}$$

qui représente le *jacobien* de la transformation $\{x\} \rightarrow \{x'\}$. Il faut, en effet, se souvenir que, dans le passage de la base $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ à la base $dx^{i'_1} \wedge \dots \wedge dx^{i'_p}$, il faut en *antisymétriser* le coefficient, ce qui donne lieu au déterminant indiqué plus haut.

Considérons, à titre d'exemple, le cas de \mathbf{R}^2 rapporté aux coordonnées cartésiennes (x, y) et la forme différentielle de degré deux

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{2!} \varepsilon_{ij} dx^i \wedge dx^j \\ &= dx \wedge dy,\end{aligned}\tag{B.38}$$

c'est-à-dire l'élément de "volume" usuel dans \mathbf{R}^2 . Passons en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta \equiv x \\ x^2 = r \sin \theta \equiv y \end{cases};\tag{B.39}$$

on a donc

$$\begin{cases} dx^1 = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta \\ dx^2 = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta \end{cases},\tag{B.40}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
dx \wedge dy &= (dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta) \wedge (dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta) \\
&= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \sin^2 \theta d\theta \wedge dr \\
&= r dr \wedge d\theta = r dr \cdot d\theta,
\end{aligned} \tag{B.41}$$

où l'on a utilisé les propriétés d'antisymétrie du produit extérieur.

3. Considérons dans \mathbf{R}^3 une surface S définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x = x(\xi^1, \xi^2) \\ y = y(\xi^1, \xi^2) \\ z = z(\xi^1, \xi^2) \end{cases} \tag{B.42}$$

et une forme différentielle quelconque, par exemple

$$\omega = A dx \wedge dy + B dx \wedge dz + C dy \wedge dz, \tag{B.43}$$

où A , B et C sont trois fonctions de (x, y, z) . Si l'on astreint le point (x, y, z) à se trouver *sur* la surface S , la forme ω se réduit à

$$\begin{aligned}
\omega &= A [x(\xi^1, \xi^2), y(\xi^1, \xi^2), z(\xi^1, \xi^2)] \times \\
&\times \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial x}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right\} \wedge \left\{ \frac{\partial y}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial y}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ A [x(\xi^1, \xi^2), y(\xi^1, \xi^2), z(\xi^1, \xi^2)] \cdot \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi^1} \frac{\partial y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi^1} \frac{\partial x}{\partial \xi^2} \right\} + \dots \right\} \times \\
&\times d\xi^1 \wedge d\xi^2 \equiv \phi(\xi^1, \xi^2) d\xi^1 \wedge d\xi^2.
\end{aligned} \tag{B.45}$$

Cette dernière forme est dite *induite* par ω sur S . Considérons un autre exemple, celui où la forme ω est de degré 3 :

$$\omega = \psi(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz. \tag{B.46}$$

Lorsque le point (x, y, z) est astreint à être sur S , ω devient

$$\begin{aligned}
\omega &= \psi [x(\xi^1, \xi^2), y(\xi^1, \xi^2), z(\xi^1, \xi^2)] \times \\
&\left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial x}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right\} \wedge \left\{ \frac{\partial y}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial y}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right\} \wedge \\
&\wedge \left\{ \frac{\partial z}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial z}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right\} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{B.47}$$

résultat que l'on aurait pu prévoir. Supposons maintenant que ω soit une forme de degré un :

$$\omega = A_i(x, y, z) dx^i . \quad (\text{B.48})$$

On aura, de la même manière que ci-dessus :

$$\omega = A_i [x(\xi^1, \xi^2), y(\xi^1, \xi^2), z(\xi^1, \xi^2)] \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^2} d\xi^2 \right\} . \quad (\text{B.49})$$

Ce résultat se transpose aisément au cas d'une surface à p dimensions plongée dans \mathbf{R}^n , pour des formes de degré inférieur ou égal à p .

Forme “élément de volume” – Formes duales

1. Considérons, dans \mathbf{R}^n rapporté à des coordonnées quelconques $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, la forme de degré n

$$\omega = \phi(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n . \quad (\text{B.50})$$

Dans un autre système de coordonnées $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$, elle s'écrira

$$\omega = \psi(y^1, y^2, \dots, y^n) dy^1 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n , \quad (\text{B.51})$$

où les fonctions $\phi(x)$ et $\psi(y)$ sont liées par

$$\phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = \psi(y^1, y^2, \dots, y^n) \det. \left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] . \quad (\text{B.52})$$

Comme, d'autre part, le tenseur métrique g_{ij} se transforme selon

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial x^\ell}{\partial y^j} g_{k\ell} , \quad (\text{B.53})$$

on a également

$$|g'| = \left[\det. \frac{\partial x^k}{\partial y^\ell} \right]^2 \cdot |g| . \quad (\text{B.54})$$

Il s'ensuit que la forme différentielle

$$\eta \equiv \sqrt{|g|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{B.55})$$

conserve la même forme dans tout changement de coordonnées (qui conserve l'orientation des lignes-coordonnées). La forme précédente se réduit visiblement à l'élément de volume usuel $dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ en coordonnées cartésiennes.

La forme "élément de volume" η peut se réécrire, de manière manifestement covariante, à l'aide du (pseudo-) tenseur totalement antisymétrique $\sqrt{|g|}\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ défini par

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ forme une permutation} \\ & \text{paire de } (1, 2, \dots, n) ; \\ -1 & \text{s'il s'agit d'une permutation impaire;} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

On a ainsi l'expression manifestement covariante cherchée pour η :

$$\eta = \frac{1}{n!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} . \quad (\text{B.57})$$

2. Considérons maintenant une surface S , à p dimensions, plongée dans \mathbf{R}^n . Comment construire un *élément de surface*, valable *a priori*, quelle que soit S ? D'abord, il doit s'agir d'une forme différentielle de degré p , donc de la forme $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$. A cela, il faut ajouter que l'ordre des dx^i doit être indifférent. Enfin, le seul tenseur totalement antisymétrique dont nous disposons est $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \sqrt{|g|}$. Il s'ensuit que la seule forme de degré p qui réponde à ces exigences est proportionnelle à

$$d\Sigma_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n} = \frac{1}{p!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} . \quad (\text{B.58})$$

Dans \mathbf{R}^3 , pour une surface ordinaire, à deux dimensions, cette forme différentielle s'écrit, en coordonnées cartésiennes,

$$d\Sigma_i = \frac{1}{2!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijk} dx^j \wedge dx^k , \quad (\text{B.59})$$

ou encore

$$\begin{cases} d\Sigma_1 & = dy \wedge dz \\ d\Sigma_2 & = dx \wedge dz \\ d\Sigma_3 & = dx \wedge dy. \end{cases} \quad (\text{B.60})$$

Ainsi, dans \mathbf{R}^3 , $d\Sigma_i$ se réduit bien à l'élément de surface habituel. Pour être plus spécifique, prenons le cas d'une sphère de rayon 1 et adoptons comme coordonnées les variables x et y . On aura

$$z = \pm [1 - x^2 - y^2]^{1/2} ,$$

et si l'on considère, par exemple, l'hémisphère nord (signe +), on aura

$$dz = \frac{-1}{[1 - x^2 - y^2]^{1/2}} \{x dx + y dy\}$$

qui, introduit dans les expressions précédentes des $d\Sigma_i$, donnera

$$\begin{aligned} d\Sigma_1 &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \wedge dy \\ d\Sigma_2 &= \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \wedge dy \\ d\Sigma_3 &= \frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \wedge dy . \end{aligned}$$

Nous avons réécrit z dans l'expression de $d\Sigma_3$ afin que la symétrie des $d\Sigma_i$ apparaisse plus clairement. On écrira donc, finalement, pour la sphère,

$$d\Sigma_i = n^i \sqrt{g_s} dx \wedge dy ,$$

où n^i est la normale-unité à la surface et où g_s est le déterminant de la métrique sur S , c'est-à-dire

$$g_s = \frac{1}{1-x^2-y^2} > 0 .$$

3. Considérons dans \mathbf{R}^n une forme de degré p

$$\omega = \frac{1}{p!} A_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (\text{B.61})$$

où $A_{i_1 i_2 \dots i_p}$ est totalement antisymétrique et où les indices prennent toutes les valeurs possibles de 1 à n . A cette forme différentielle, nous allons faire correspondre une forme de degré $(n-p)$, dite *forme duale*, définie par

$$*\omega \equiv \frac{1}{p!} \sqrt{|g|} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \quad (\text{B.62})$$

où les indices sont relevés, comme toujours, à l'aide du tenseur métrique g^{ij} :

$$A^{i_1 i_2 \dots i_p} = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \dots g^{i_p j_p} A_{j_1 j_2 \dots j_p} . \quad (\text{B.63})$$

Si l'on définit le *produit scalaire de deux formes différentielles* de même degré p par

$$\langle \alpha, \beta \rangle \equiv \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \beta^{i_1 i_2 \dots i_p} , \quad (\text{B.64})$$

il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$$\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle \eta \quad (\text{B.65})$$

$$\langle *\alpha, *\beta \rangle = \text{signe}(g) \langle \alpha, \beta \rangle \quad (\text{B.66})$$

$$\langle \alpha \wedge \beta, \eta \rangle = \langle *\alpha, \beta \rangle \quad [d^0(\alpha) = n-p, d^0(\alpha) = p] . \quad (\text{B.67})$$

Si α est de degré p , comme $^*\alpha$ est de degré $n - p$, il s'ensuit que $^{**}\alpha$ est également une forme de degré p . Compte tenu des propriétés des pseudo-tenseurs de Levi-Civita $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$, on peut montrer que

$$^{**}\alpha = (-1)^{p(n-p)} \text{signe}(g)\alpha. \quad (\text{B.68})$$

Par exemple, si $n = 4$ et $p = 2$, la forme

$$F = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{B.69})$$

admet pour forme duale

$$^*F = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (\text{B.70})$$

et l'on a

$$^{**}F = -F. \quad (\text{B.71})$$

Dérivation des formes différentielles

1. Nous avons déjà considéré un exemple simple de dérivation, celui d'une forme différentielle de degré 0, c'est-à-dire le cas d'une fonction scalaire : la dérivation donne alors une forme de degré 1. Nous allons maintenant définir une opération d qui, à une forme de degré p , fait correspondre une forme de degré $p + 1$. Cette opération d jouit des propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta \quad [d^0(\alpha) = d^0(\beta)] \\ \text{(ii)} \quad d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \quad [d^0(\alpha) = p] \\ \text{(iii)} \quad d(d\alpha) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{B.72})$$

La première propriété est la *linéarité* de la dérivation, tandis que la seconde constitue l'analogie de la règle de Leibniz, compte tenu de la propriété (B.26) qui doit être préservée. La dernière propriété peut être considérée comme une condition de cohérence avec le fait que dans \mathbf{R}^n les formes de degré $n + 1$ sont identiquement nulles. Considérons, en effet, une forme du type

$$\omega = \Phi(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (\text{B.73})$$

On aura

$$d\omega = d\Phi \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n + \Phi \sum_{i=1}^{i=n} dx^1 \wedge \dots \wedge d^2x^i \wedge \dots \wedge dx^n . \quad (\text{B.74})$$

Comme, d'une part, $d\omega \equiv 0$, et d'autre part $d\Phi \wedge dx^1 \wedge \dots = 0$, il s'ensuit que

$$\sum_{i=1}^{i=n} dx^1 \wedge \dots \wedge d^2x^i \wedge \dots \wedge dx^n \equiv 0 ; \quad (\text{B.75})$$

ceci devant être vrai pour chaque n , on en déduit qu'il est nécessaire d'imposer $d(dx^i) = 0$, quel que soit i . Par conséquent, il est facile de vérifier que $d(d\alpha) = 0$. Cette propriété s'appelle le *lemme de Poincaré*.

Les trois conditions ci-dessus sont donc très naturelles et l'on peut démontrer que l'opération d existe et est unique [H. Flanders (1963)]. On vérifie aisément que

$$d(\Phi d\omega) = d\Phi \wedge d\omega , \quad (\text{B.76})$$

et, pour une forme $\omega = A_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$, que

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{1}{p!} \partial_k A_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= (p+1) \partial_{[k} A_{i_1 i_2 \dots i_p]} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} . \end{aligned} \quad (\text{B.77})$$

Considérons à titre d'exemple dans \mathcal{M}^n la forme de degré un

$$\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu ,$$

et prenons $d\mathcal{A}$. On a alors

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \partial_\nu A_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu \\ &= 2\partial_{[\nu} A_{\mu]} dx^\nu \wedge dx^\mu . \end{aligned}$$

3. Considérons une forme différentielle ω telle que

$$\omega = d\alpha . \quad (\text{B.78})$$

Par définition de l'opération d , on a $d\omega = 0$. ω est une *forme fermée*. Une forme différentielle ω du type précédent est dite *exacte*. La question qui se pose est alors la suivante : une forme ω fermée, donc telle que $d\omega = 0$, est-elle exacte? Autrement dit, a-t-on $\omega = d\alpha$? En fait, la réponse est positive mais *localement* [H. Flanders

(1963)]. En outre, la forme α n'est visiblement pas unique puisque toute forme différentielle α' , telle que

$$\alpha' = \alpha + d\gamma \quad (\gamma : \text{forme arbitraire}), \quad (\text{B.79})$$

est également solution.

3. On appelle *codérivation* δ l'opération définie par

$$\delta \equiv *d^* . \quad (\text{B.80})$$

Elle vérifie $\delta^2 = 0$, comme on peut le voir directement.

Forme différentielle des équations de Maxwell

Considérons les formes suivantes ² :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{B.81})$$

$$\mathcal{J} = J_\mu dx^\mu , \quad (\text{B.82})$$

et appliquons l'opération d à la forme \mathcal{F} ; il vient

$$d\mathcal{F} = \frac{1}{2!} \partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} dx^\lambda \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0 ; \quad (\text{B.83})$$

on a, en effet, $\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$, en vertu des équations de Maxwell. D'autre part, on a également

$$*\mathcal{F} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad (\text{B.84})$$

de sorte que, après quelques calculs, il vient

$$d^*\mathcal{F} = 4\pi*\mathcal{J} , \quad (\text{B.85})$$

en utilisant le second groupe d'équations de Maxwell; ou encore, en prenant le dual de cette dernière relation,

$$*d^*\mathcal{F} \equiv \delta\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J} . \quad (\text{B.86})$$

Ainsi, les équations de Maxwell sont équivalentes aux relations suivantes entre formes différentielles :

2. On trouvera davantage de détails dans Ch. Misner, K. Thorne, J. Wheeler (1973).

$$\begin{cases} d\mathcal{F} = 0 \\ \delta\mathcal{F} = 4\pi\mathcal{J} . \end{cases} \quad (\text{B.87})$$

Ainsi la forme \mathcal{F} est une forme *fermée*. Elle est donc localement une forme *exacte* : il existe une forme \mathcal{A} telle que

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} . \quad (\text{B.88})$$

\mathcal{F} étant une forme de degré 2, \mathcal{A} est une forme de degré 1 :

$$\mathcal{A} = A_\mu dx^\mu \quad (\text{B.89})$$

et l'on a donc

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2!} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA_\nu \wedge dx^\nu \quad (\text{B.90})$$

$$= \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] dx^\mu \wedge dx^\nu , \quad (\text{B.91})$$

c'est-à-dire $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. On constate également que la non-unicité de la forme \mathcal{A} exprime les propriétés de jauge des 4-potentiels. Ainsi, lorsque \mathcal{A} et \mathcal{A}' donnent lieu au même champ \mathcal{F} alors $\mathcal{A} - \mathcal{A}' = d\phi$, où ϕ est une fonction scalaire. La forme \mathcal{A} obéira alors à la relation

$$\delta d\mathcal{A} = 4\pi\mathcal{J} . \quad (\text{B.92})$$

Intégration des formes différentielles Théorème de Stokes

Plaçons-nous toujours dans \mathbf{R}^n et considérons une forme différentielle ω de degré $p \leq n$. Il est clair qu'une telle forme ne peut être intégrée que sur une surface S^q , de dimension $q \leq p$, de \mathbf{R}^n ; le symbole

$$\int_{S^q} \omega \equiv I , \quad (\text{B.93})$$

possède le sens suivant : (i) la forme ω est d'abord astreinte à S^q , ce qui en fait une forme de degré q ; (ii) S^q est décomposé en parties disjointes décrite chacune par des coordonnées bien définies; (iii) enfin, sur chacune de ces parties – soit Σ l'une d'entre elles – on a

$$I_{\Sigma} \equiv \int_{\Sigma \subset S^q} f(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^q) d\xi^1 d\xi^2 \dots d\xi^q \quad (\text{B.94})$$

où $\{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^q\}$ est un système de coordonnées qui décrit Σ . Bien évidemment I , ou I_{Σ} , ne dépend pas des coordonnées – des variables – choisies.

Un important théorème est le *théorème de Stokes*. Soit ω une forme différentielle et soit \mathcal{V} un volume de \mathbf{R}^n et $\partial\mathcal{V}$ le bord de \mathcal{V} : $\dim[\partial\mathcal{V}] = \dim[\mathcal{V}] - 1$. Le théorème de Stokes est la relation

$$\int_{\mathcal{V}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{V}} \omega. \quad (\text{B.95})$$

Par exemple, dans \mathbf{R}^3 , si \mathcal{V} est un volume fini, limité par une surface $S \equiv \partial\mathcal{V}$, on aura

$$\int_{\mathcal{V}} d[\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j] = \int_S \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad (\text{B.96})$$

ou encore

$$\int_{\mathcal{V}} \partial_{[k} \omega_{ij]} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = \int_S \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j; \quad (\text{B.97})$$

ω_{ij} étant totalement antisymétrique, on peut lui associer un vecteur A_k [où i, j et k forment une permutation circulaire de $\{1, 2, 3\}$], de sorte que la relation précédente prend la forme familière

$$\int_{\mathcal{V}} d\vec{v} \cdot \vec{A} d^3x = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}. \quad (\text{B.98})$$

Dans l'espace de Minkowski, la forme $\omega = J^{\mu} d\Sigma_{\mu}$ donne

$$\int_{\mathcal{V}} d[J^{\mu} d\Sigma_{\mu}] = \int_{\partial\mathcal{V}} J^{\mu} d\Sigma_{\mu}, \quad (\text{B.99})$$

formule analogue à la précédente dans \mathbf{R}^3 , et qui s'écrit encore

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla_{\mu} J^{\mu} \eta = \int_{\partial\mathcal{V}} J^{\mu} d\Sigma_{\mu}. \quad (\text{B.100})$$

Forme variationnelle des équations de champ

Les équations habituelles du mouvement d'une particule, ou d'un système de particules, peuvent être déduites d'un *principe variationnel* [principe de moindre action conduisant, suivant les variables adoptées, soit aux équations de Lagrange, soit aux équations d'Hamilton; cf. H. Goldstein (1980) ou L. Landau et E. Lifschitz, *Mécanique*], aussi bien dans le cas newtonien que dans le cas relativiste [A.O. Barut (1965) ou J.L. Anderson (1967)] avec, dans ce dernier cas, quelques subtilités concernant la *contrainte* $u_\mu u^\mu = 1$ [G. Kalman (1961); A. Peres, N. Rosen (1960)].

De la même manière, les équations satisfaites par des *champs* (des systèmes continus possédant, par conséquent, une infinité de degrés de liberté) de quelque nature tensorielle que ce soit, peuvent très souvent être déduites d'un principe variationnel; c'est le cas des équations de l'électromagnétisme, par exemple, mais pas celui de l'équation de la chaleur.

De façon générale, pour décrire un mouvement de particule ou l'évolution d'un champ, il existe de nombreux procédés analytiques; il n'y a d'ailleurs *a priori* aucune raison de se limiter à des équations différentielles ou aux équations aux dérivées partielles du second ordre.

L'avantage principal d'un formalisme variationnel, c'est qu'il permet, d'une part, de trouver assez facilement les *grandeurs conservées* dans le mouvement (i.e., les intégrales premières) et, d'autre part, d'exploiter directement les symétries du problème physique considéré, ces deux aspects étant liés comme nous allons le voir. En fait, nous n'introduirons ici un tel formalisme que parce qu'il permet de définir simplement l'énergie et l'impulsion d'un champ.

Considérons donc un champ φ , de composantes $\varphi_{\alpha\beta}$ (les points désignent des indices tensoriels arbitraires), et soit $\mathcal{L}[\varphi(x), \partial\varphi(x)]$ la *densité lagrangienne*, liée à l'action totale S du champ par

$$S = \int d^4x \mathcal{L}[\varphi(x), \partial\varphi(x)], \quad (\text{C.1})$$

où l'intégrale est étendue à un volume d'espace-temps compris entre deux surfaces du genre espace données quelconques. Ecrivons maintenant que l'intégrale d'action est minimum pour les champs existant réellement dans la Nature; soit $\delta S = 0$, ou encore

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L}[\varphi(x), \partial\varphi(x)] = 0. \quad (\text{C.2})$$

En introduisant la variation *locale*

$$\delta\varphi(x) = \varphi'(x) - \varphi(x) \quad (\text{C.3})$$

entre deux champs infiniment voisins φ et φ' , il vient successivement

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \{ \mathcal{L}(\varphi + \delta\varphi, \partial\varphi + \delta\partial\varphi) - \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) \} \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \partial_\mu(\delta\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Notons qu'il y a sommation sur les indices implicites contenus dans les φ , $\partial/\partial(\partial_\mu\varphi)$, etc. Nous avons encore utilisé la relation $\partial\delta\varphi = \delta\partial\varphi$ qui se démontre facilement. Intégrant par parties le dernier terme de l'équation (C.4), on obtient

$$\int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] \delta\varphi + \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} \delta\varphi \right] \right\} = 0 \quad (\text{C.5})$$

où l'on a utilisé le fait que les variations de $\delta\varphi$ sont *supposées* nulles aux limites du domaine d'intégration : le terme tout intégré provient de l'intégration du dernier terme de l'équation (C.5) à l'aide du théorème de Stokes

$$\int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} \delta\varphi \right] = \int_\Sigma d\Sigma_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} \delta\varphi,$$

où le terme de droite est nul puisque $\delta\varphi = 0$ sur la surface d'intégration. Comme cette dernière équation doit être nulle quel que soit le domaine d'intégration et, surtout, quelle que soit la variation $\delta\varphi$, on en déduit les équations satisfaites par φ ; ce sont les équations d'Euler-Lagrange, qui s'écrivent

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0. \quad (\text{C.6})$$

A titre d'exemple, considérons le cas du champ scalaire, dont le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{scal.}} = \frac{1}{2} [\partial_\mu\varphi \cdot \partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2] + 4\pi J\varphi; \quad (\text{C.7})$$

les équations d'Euler–Lagrange s'écrivent alors

$$[\square + m^2]\varphi = 4\pi J ; \quad (\text{C.8})$$

c'est l'équation de Klein–Gordon couplée à la source¹ J . On vérifie, de même, que les équations de Maxwell, écrites sous la forme (5.24), peuvent être retrouvées à partir du lagrangien

$$\mathcal{L}_{\text{em}}[A] = -\frac{1}{4}(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \cdot (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) \quad (\text{C.9})$$

$$= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} ; \quad (\text{C.10})$$

ce lagrangien est invariant dans les transformations de jauge.

Venons-en maintenant aux symétries d'espace–temps, et plus spécialement, à l'invariance de la physique dans les translations spatio–temporelles (homogénéité de l'espace et uniformité du temps). En effet, l'énergie et l'impulsion d'un système physique – classique ou quantique, relativiste ou non, constitué de particules et/ou de champs – sont définies comme étant les constantes du mouvement associées à ces symétries : l'énergie à l'uniformité du temps, l'impulsion à l'homogénéité de l'espace. Imposons donc l'invariance de l'action S dans des translations infinitésimales d'espace–temps :

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu . \quad (\text{C.11})$$

Il est clair que si les limites d'intégration de l'action ne font pas également l'objet d'une variation, le système ne sera pas invariant dans la transformation (C.11), non plus que dans d'autres variations spatio–temporelles (transformations de Lorentz, dilatations). Ceci peut être effectué [A.O. Barut (1965)] mais il est plus simple de raisonner comme C. Itzykson et J.P. Zuber (1980) qui introduisent dans l'équation (C.11) une variation ε^μ qui dépend du point d'espace–temps $\varepsilon^\mu = \varepsilon^\mu(x)$. Dans ces conditions, les variations de $\phi(x)$ et $\partial_\mu\phi(x)$ s'écrivent respectivement

$$\delta\phi(x) = \varepsilon^\mu(x) \partial_\mu\phi(x) \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} \delta\partial_\mu\phi(x) &= \partial_\mu\phi(x + \varepsilon) - \partial_\mu\phi(x) \\ &= \partial_\mu [\varepsilon^\nu(x) \partial_\nu\phi(x)] \\ &= \varepsilon^\nu(x) \partial_{\mu\nu}\phi(x) + \partial_\nu\phi(x) \cdot \partial_\mu\varepsilon^\nu(x) . \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

1. Le facteur 4π est purement conventionnel.

Reportant maintenant ces deux dernières relations dans la variation de l'intégrale d'action et intégrant par parties le terme en $\partial_\mu \varepsilon^\nu(x)$, il vient

$$\delta S = \int d^4x \varepsilon^\nu(x) \left\{ \partial_\nu L - \partial_\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right] \right\} = 0, \quad (\text{C.14})$$

qui doit être vraie quelle que soit la fonction $\varepsilon^\nu(x)$. Il s'ensuit que la grandeur

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} L \quad (\text{C.15})$$

est conservée, i.e. que

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{C.16})$$

Ce tenseur est le *tenseur impulsion-énergie*² du champ φ . Il représente, en quelque sorte, une densité d'impulsion et d'énergie du champ. La grandeur *globale* associée, soit P^μ , est l'énergie-impulsion totale contenue dans le champ φ . En effet, P^μ se conserve au cours du temps ou, ce qui revient au même, possède la même valeur quelle que soit la surface du genre espace sur laquelle on l'évalue. Montrons-le en utilisant le théorème de Stokes; nous avons

$$P^\mu(\Sigma) = \int_\Sigma d\Sigma_\nu T^{\mu\nu} \quad (\text{C.17})$$

et nous voulons montrer que, précisément, $P^\mu(\Sigma)$ est indépendant de Σ , ou encore que

$$\frac{\delta}{\delta\Sigma} P^\mu(\Sigma) = 0. \quad (\text{C.18})$$

Autrement dit, si nous modifions d'une quantité $\delta\Sigma$ la surface Σ , nous souhaitons montrer que

$$P^\mu(\Sigma + \delta\Sigma) = P^\mu(\Sigma).$$

Ecrivons donc cette dernière relation de manière explicite et intégrons $T^{\mu\nu}$ sur la surface du genre espace définie par Σ et $\Sigma + \delta\Sigma$ [Fig. C.1]. Le théorème de Stokes nous donne alors

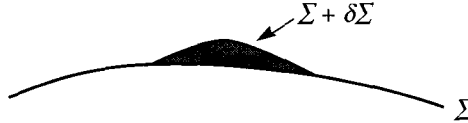


Figure C.1 : Grandeurs conservatives. Elles sont indépendantes de la surface sur laquelle on intègre la densité correspondante. Pour le voir, il suffit d'appliquer le théorème de Stokes au volume compris entre les surfaces (arbitraires) Σ et $\Sigma + \delta\Sigma$.

2. Ou encore tenseur d'énergie-impulsion : les deux termes sont synonymes.

$$\int d\Sigma_\nu T^{\mu\nu} = \int d^4x \partial_\nu T^{\mu\nu} \quad (\text{C.19})$$

(le domaine d'intégration de ces deux intégrales est indiqué en grisé sur la figure). Comme la dernière intégrale est nulle [cf. Eq. (C.16)], il en découle que la première l'est aussi et donc que les intégrales de surfaces étendues à Σ et à $\Sigma + \delta\Sigma$ sont égales.

En général, le tenseur énergie-impulsion *canonique* (c'est-à-dire celui qui est calculé à l'aide d'un lagrangien) *n'est pas symétrique*; toutefois, on peut toujours le rendre symétrique en lui ajoutant un terme de divergence nulle [A.O. Barut (1965)]. En effet, de même que le lagrangien d'un système mécanique est défini à une dérivée totale près (c'est-à-dire à une dérivée le long du mouvement près), le lagrangien d'un champ est défini à des termes de divergence nulle près. Pour s'en rendre compte, il suffit d'ajouter un tel terme à un lagrangien arbitraire : dans le processus de variation de l'action, nous avons utilisé une intégration par parties; ici, on obtiendra des termes tout intégrés, qui seront nuls en vertu de l'hypothèse de variations nulles des champs φ aux bornes du domaine d'intégration.

Considérons deux exemples de tenseurs impulsion-énergie, le cas du champ scalaire et celui du temps électromagnétique. On obtient respectivement :

$$T_{\mu\nu\text{scal}} = \partial_\mu\varphi \cdot \partial_\nu\varphi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} [(\partial\varphi)^2 - m^2\varphi + 8\pi J\varphi] \quad (\text{C.20})$$

$$T_{\mu\nu\text{em}} = F_\mu^\lambda \cdot F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} \cdot F^{\lambda\sigma} .$$

Le calcul explicite de $T_{00\text{em}}$ donne

$$T_{00\text{em}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2], \quad (\text{C.21})$$

qui n'est autre que l'expression habituelle de la densité d'énergie électromagnétique, tandis que T^{0i} est donné par

$$T^{0i} = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})^i; \quad (\text{C.22})$$

c'est le vecteur de Poynting.

Notion de variété

La notion de variété, et plus précisément celle de variété différentiable, est fondamentale en Relativité Générale. Cette notion généralise celle de surface, plongée dans un espace euclidien ou pseudo-euclidien; bien plus, elle s'applique à toutes sortes d'autres objets mathématiques, comme les groupes continus (groupes de Lie) – tels le groupe des rotations ou le groupe de Lorentz – comme l'espace de phase d'un système mécanique composé de N particules (c'est-à-dire l'espace des $\{q^i, p_i\}_{i=1,2,\dots,N}$ où les q^i sont des coordonnées généralisées et où les p_i sont les moments canoniquement conjugués), etc.

Avant de définir ce qu'est une variété et d'en énoncer les principales propriétés, il convient d'acquérir quelque intuition dans des cas simples, tel celui de la sphère usuelle S^2 , plongée dans \mathbf{R}^3 . Considérons donc une sphère, de rayon unité, définie paramétriquement par les relations

$$\begin{cases} x = \cos \varphi \cdot \sin \theta \\ y = \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = \cos \theta. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Un point courant de la sphère S^2 va donc être déterminé par la donnée des deux coordonnées (θ, φ) et les relations (D.1) vont constituer une application de S^2 dans \mathbf{R}^3 , c'est-à-dire un plongement de la sphère dans l'espace euclidien. On peut, toutefois, considérer cela un peu différemment : à un point de S^2 , on associe les coordonnées (θ, φ) , c'est-à-dire un point d'un espace \mathbf{R}^2 [Fig. D.1]. Examinons cela d'un peu plus près. Quelles sont les coordonnées du pôle nord de la sphère? Il est aisé de vérifier que ce point a pour coordonnées $(0, \varphi)$ où φ est *arbitraire*! Autrement dit, le pôle nord est représenté non pas par un point du plan (θ, φ) , mais par un segment de droite. A cette première anomalie du système de coordonnées s'en ajoute une seconde. Considérons, en effet, un point quelconque du méridien $\varphi = 0$, soit un point de coordonnées $(0, \varphi)$: il peut également être représenté par le point $(2\pi, \theta)$ dans l'espace \mathbf{R}^2 des couples (θ, φ) . Si l'on souhaite obtenir une représentation de S^2 dans \mathbf{R}^2 , il est nécessaire d'éliminer ces pathologies, et donc d'exclure les frontières qui posent problème. Il s'ensuit qu'une partie seulement

de la sphère – S^2 privée d'un demi-grand cercle allant d'un pôle à l'autre – est représentée correctement dans un ensemble *ouvert* (en l'occurrence, un rectangle privé de ses côtés) de \mathbf{R}^2 : à un point de S^2 correspond un, et un seul, point de cet ouvert, et réciproquement.

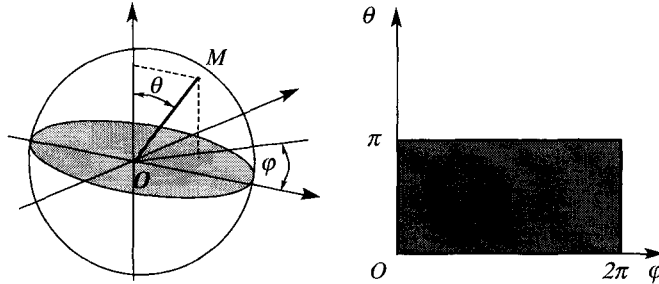


Figure D.1 : Représentation de la sphère S^2 dans \mathbf{R}^2 . Quoique les coordonnées sphériques (θ, φ) soient telles que $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, il est nécessaire de limiter les variations de θ et φ de manière à exclure les bornes. Faut de quoi, un point du méridien $\varphi=0$ serait représenté par deux points de \mathbf{R}^2 et le pôle nord (resp. le pôle sud) par un segment de droite. Dans ces conditions, seule une partie de la sphère est représentée par ce système de coordonnées, et elle l'est dans un ouvert de \mathbf{R}^2 : le rectangle indiqué sur la figure, frontière exclue.

Une telle représentation (c'est-à-dire la donnée d'un ensemble ouvert de S^2 et de l'application dans \mathbf{R}^2) constitue une *carte locale* de la sphère, carte incomplète comme nous venons de le voir : une partie ouverte de la sphère (celle indiquée plus haut) est correctement représentée dans un rectangle ouvert de \mathbf{R}^2 .

Si nous voulons représenter toute la sphère, il nous faudra disposer d'une autre carte : on peut, par exemple, utiliser des coordonnées polaires différentes, qui ne permettront pas de représenter un autre demi-grand cercle [Fig. D.2] sans intersection avec le premier. L'ensemble de ces deux cartes permettra de décrire toute la sphère : c'est ce qu'on appelle d'ordinaire un *atlas*. Bien entendu, les deux systèmes de coordonnées doivent donner des résultats cohérents dans les régions de S^2 où ils sont tous deux définis.

A ce stade, on pourrait arguer de ce que nous n'avons pas choisi un "bon" système de coordonnées, aussi étudions-nous, à titre d'exemple, d'autres systèmes de coordonnées. Considérons donc la carte locale constituée par la demi-sphère ouverte

$$|x| < 1, |y| < 1, z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (\text{D.2})$$

et l'application de S^2 dans \mathbf{R}^2 définie par les coordonnées (x, y) . Dans \mathbf{R}^2 , l'image de la demi-sphère est constituée par le disque ouvert

$$x^2 + y^2 < 1 \quad (\text{D.3})$$

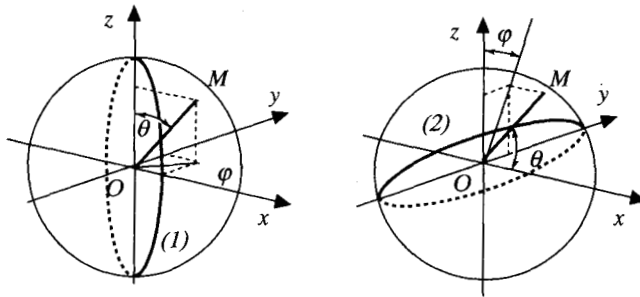


Figure D.2 : A l'aide des coordonnées polaires usuelles on représente la sphère S^2 privée du méridien notée (1). A l'aide d'un autre système de coordonnées polaires (celui indiqué sur la figure correspond au choix de l'axe Ox comme "axe des z "), on décrit S^2 privée du méridien notée (2) : ce second système de coordonnées permet donc de décrire également les points de (1).

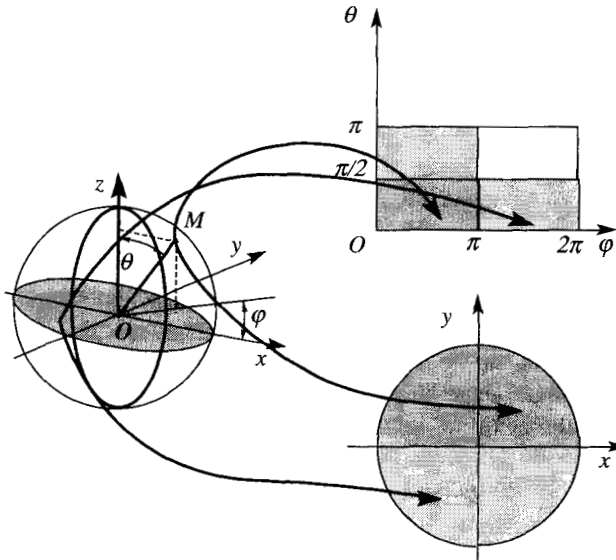


Figure D.3 : Comparaison de deux cartes locales sur la sphère S^2 . Les coordonnées polaires permettent de représenter la sphère dans l'ouvert V_1 de \mathbb{R}^2 (application Ψ_1) et les coordonnées (x,y) dans l'ouvert V_2 de \mathbb{R}^2 . Les régions communes de S^2 sont représentées par les régions plus foncées dans V_1 et V_2 .

[Fig. D.3]. Pour recouvrir complètement la sphère, il est nécessaire de disposer d'autres cartes locales. On peut, par exemple, utiliser, outre la relation (D.2), les ouverts

$$(i) x > 0, (ii) y > 0, \tag{D.4}$$

qui constituent autant de demi-sphères (ouvertes), et auxquels il faut adjoindre $S^2 - (D.2) - (D.4)$ (ouvert). Cet exemple montre qu'un atlas de la sphère ne peut être constitué que de plusieurs cartes : on peut, en effet, démontrer qu'il faut au moins deux cartes pour représenter – pour recouvrir – complètement la sphère. Cette circonstance est tout à fait générale et, étant donnée une surface quelconque, il n'existe pas *a priori* de système de coordonnées qui en permette la description *in extenso*.

Il est intéressant de comparer deux systèmes de coordonnées : dans une région commune de S^2 , ils doivent donner des résultats semblables; autrement dit, dans l'intersection de deux cartes locales, on doit pouvoir passer d'un système à l'autre.

A cet égard, la figure D.3 illustre le cas où la première carte locale, soit $\{\mathcal{V}_1, \Psi_1\}$, est constituée par la demi-sphère ouverte $y > 0$ et les coordonnées polaires (θ, φ) astreintes à $0 < (\theta, \varphi) < \pi$, tandis que la seconde carte locale, i.e. $\{\mathcal{V}_2, \Psi_2\}$, est constituée par la demi-sphère ouverte $z > 0$ et les projections (x, y) . Naturellement, dans l'intersection de ces deux demi-sphères (i.e. dans le quart de sphère $y, z > 0$), les deux systèmes de coordonnées sont liés par

$$\begin{cases} x = \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y = \sin \theta \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (D.5)$$

où θ et φ sont astreints cette fois à

$$\begin{cases} 0 < \theta < \pi/2 \\ 0 < \varphi < \pi. \end{cases} \quad (D.6)$$

Les diverses applications de S^2 dans \mathbf{R}^2 , qui servent à définir des cartes locales, doivent également posséder une importante propriété : étant donnés deux points voisins de S^2 , on souhaite obtenir deux points représentatifs voisins dans \mathbf{R}^2 ; réciproquement, deux points voisins de la carte doivent représenter deux points voisins de S^2 . Autrement dit, l'application Ψ de S^2 dans \mathbf{R}^2 doit être continue ainsi que son inverse : à un ouvert quelconque de \mathbf{R}^2 correspond un ouvert de S^2 et réciproquement; Ψ est un *homéomorphisme*.

Variétés différentiables

L'exemple précédent est instructif à bien des égards et peut être généralisé à des surfaces de dimension quelconque plongées dans \mathbf{R}^n . Toutefois, la notion de variété va au-delà de ce cas : une variété est définie *intrinsèquement*, indépendamment d'un plongement éventuel dans un \mathbf{R}^n ; c'est un objet mathématique en soi. Ainsi, une variété quelconque diffère d'un espace vectoriel sur de nombreux points : il n'y a ni origine, ni multiplication par un scalaire, ni addition, ni notion de parallélisme à distance, ni même de champ de vecteurs constant. La structure linéaire d'un espace vectoriel est perdue au bénéfice des changements de coordonnées curvilignes et de la covariance qui y est attachée.

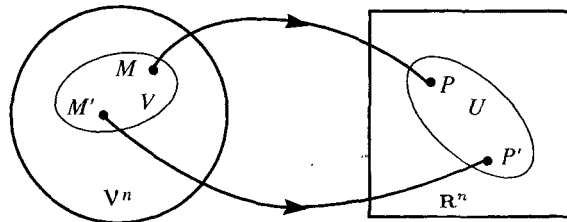


Figure D.4 : Notion de variété. A un point M du sous-ensemble ouvert V de la variété \mathcal{V}^n correspond un point P de \mathbf{R}^n ; à l'ouvert V correspond l'ouvert U de \mathbf{R}^n et réciproquement. Si M et M' sont des points voisins de U dans \mathbf{R}^n , leurs homologues P et P' , dans \mathbf{R}^n , sont également voisins et réciproquement.

On appellera variété à n dimensions \mathcal{V}^n un ensemble localement homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^n . Autrement dit, un élément d'une partie ouverte quelconque d'une variété à n dimensions est représenté par un point de \mathbf{R}^n (i.e. par n paramètres), élément d'un sous-ensemble ouvert; réciproquement, à un élément d'un ouvert quelconque de \mathbf{R}^n correspond un, et un seul, point d'un ouvert de la variété; en outre, cette correspondance est bicontinue [Fig. D.4]. Intuitivement, cela signifie encore que \mathcal{V}^n est localement "du même type" que \mathbf{R}^n ; \mathcal{V}^n possède la même topologie – la même notion de continuité – que \mathbf{R}^n . Les nombres $\xi^1(M), \xi^2(M), \dots, \xi^n(M)$ sont les *coordonnées* de M . Comme précédemment, la donnée d'un ouvert V de \mathcal{V}^n et d'une application Ψ , injective et bicontinue (un homéomorphisme), $\{V, \Psi\}$, s'appelle une *carte*. De même, la donnée d'une famille dénombrable d'ouverts V_i de \mathcal{V}^n qui recouvre la variété et d'homéomorphismes Ψ_i , c'est-à-dire la donnée d'une famille dénombrable de *cartes locales* $\{V_i, \Psi_i\}$, s'appelle un *atlas*.

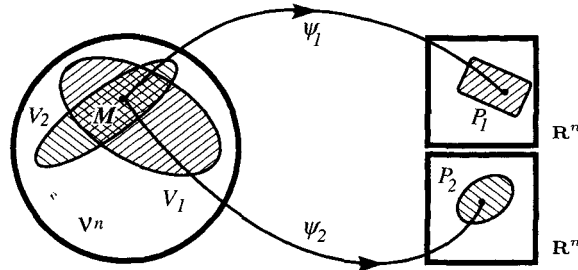


Figure D.5 : Les deux ouverts V_1 et V_2 de \mathcal{V}^n ont une intersection non vide. Un point de l'intersection est alors représenté de deux manières différentes dans \mathbf{R}^n : Ψ_1 donne lieu aux coordonnées $\{\xi^i\}$ et Ψ_2 aux coordonnées $\{\eta^i\}$ du même point M .

Etant données deux cartes locales $\{V_1, \Psi_1\}$ et $\{V_2, \Psi_2\}$, où V_1 et V_2 possèdent des points communs, il est clair que ceux-ci vont avoir deux représentations possibles – deux systèmes de coordonnées différents – dans \mathbf{R}^n [Fig. D.5]. Si l'on appelle respectivement $\{\xi^i\}$ et $\{\eta^i\}$ les coordonnées d'un point M , commun à V_1 et V_2 , le passage de l'un à l'autre système s'effectuera à l'aide de la transformation

[Fig. D.6] suivante φ :

$$\varphi = \Psi_2 \circ \Psi_1^{-1}. \quad (\text{D.7})$$

Soit, en effet, un point P de V_1 , représentant un point M de V^n : $P_1 = \Psi_1(M)$. Dans V_2 , le point représentatif de M , soit P_2 , est $\Psi_2(M)$: $P_2 = \Psi_2(M)$. Si φ est le *changement de système de coordonnées* cherché, c'est-à-dire tel que $P_2 = \varphi(P_1)$, il est clair que l'on a $\Psi_2(M) = \varphi[\Psi_1(M)]$, d'où découle la relation (D.7).

Une variété différentiable est alors une variété telle que toutes les applications possibles¹ $\varphi_{ij} = \Psi_j \circ \Psi_i^{-1}$ soient différentiables. Pratiquement, cela signifie que les changements de coordonnées constituent des fonctions différentiables. De ces définitions découle le fait que l'on puisse, par exemple, y définir des formes différentielles, une notion d'intégration, etc.

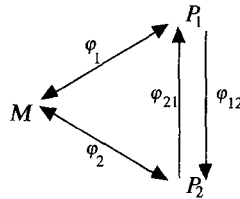


Figure D.6 : Le changement de coordonnées Ψ_2 correspond au diagramme ci-dessus, c'est-à-dire à $\varphi = \Psi_2 \circ \Psi_1^{-1}$.

1. Bien entendu, $\varphi_{ii} = I$, l'application identique.

Références

- E.A. Abbott**, *Flat Land, A Romance of Many Dimensions* [Barnes and Noble; New York (1963)].
- A. Abragam**, *L'Effet Mössbauer* [Gordon and Breach; New York (1964)].
- W.S. Adams**, *The Relativity Displacement of the Spectral Lines in the Companion of Sirius* [Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **11**, 382, 1925; and Observatory, **49**, 88, 1925].
- E.G. Adelberger, B.R. Heckel, G. Smith, Y. Su, H.E. Swanson**, *Eötvös Experiments, Lunar Ranging and the Strong Equivalence Principle* [Nature **347**, 261, 1990].
- E.G. Adelberger, C.W. Stubbs, B.R. Heckel, Y. Su, H.E. Swanson, G. Smith, J.H. Gundlach**, *Testing the Equivalence Principle in the Field of the Earth : Particle Physics at Masses below $1\mu\text{eV}$?* [Phys. Rev. **D42**, 3267, 1990].
- T. Alväger, F.J.M. Farley, J. Kjellman, I. Wallin**, *Test of the Second Postulate of Special Relativity in the GeV Region*, [Phys. Lett. **12**, 260, 1964].
- E. Amaldi, C. Cosmelli, G.V. Pallotino, G. Pizzella, R. Rapagnani, F. Ricci**, *Preliminary Results on the Operation of a 2270 Kg Cryogenic Gravitational – Wave Antenna with a Resonant Capacitive Transducer and a d.c. SQUID Amplifier* [Nuovo Cim. **9C**, 829, 1986].
- J.L. Anderson**, *Principles of Relativity Physics* [Academic Press; New York (1967)].
- J.D. Anderson, P.B. Esposito, W. Martin, C.L. Thornton, D.O. Muhleman**, *Experimental Test of General Relativity Using Time–Delay Data from Mariner 6 and Mariner 7* [Ap. J. **200**, 221, 1975].
- J.N. Bahcall, W. Sargent, M. Schmidt**, *An Analysis of the Absorption Spectrum of 3C191* [Ap. J. **149**, 11, 1967].
- J.N. Bahcall, M. Schmidt**, *Does the Fine–Structure Constant Vary with Cosmic Time?* [Phys. Rev. Letts. **19**, 1294, 1967].
- J.M. Barnothy**, *History of Gravitational Lenses and the Phenomena they Produce*, in *Gravitational Lenses* [J.M. Moran, J.N. Hewitt, K.Y. Lo, Eds.; Springer; Berlin (1989)].
- A.O. Barut**, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields* [McMillan; New York (1964)].
- J. Bayley, K. Borer, F. Combley, H. Drum, F. Farley, J. Field, W. Flegel, P. Hatterstey, F. Krienen, F. Lange, E. Picasso, W. von Rüden**, *The Anomalous Magnetic Moment of Positive and Negative Muons* [Phys. Letts. **68B**, 191, 1977].
- J.W. Beams**, *Finding a Better Value for G* [Phys. Today, May 1971].
- J. Bekenstein**, *Fine–structure constant : is it really a constant?* [Phys. Rev. **D25**, 1527, 1982].
- J.D. Bekenstein**, *The Missing Light Puzzle : A Hint about Gravitation?*, in *Proceedings of the 2nd Canadian Conference on General Relativity and Relativity Astrophysics* [A. Coley, C. Dyer, T. Tupper, Eds.; World Scientific; Singapour (1988)].
- L. Bel**, *Rigid Motion Invariance of Newtonian and Einstein's Theories of General Relativity*, in *Recent Developments in Gravitation* [E. Verdaguer, J. Garriga, J. Céspedes, Eds.; World Scientific; Singapour (1990)].

- F. Belinfante**, *On the Current and the Density of the Electric Charge, the Energy, the Linear Momentum, and the Angular Momentum of Arbitrary Fields* [Physica 7, 449, 1940].
- B. Bertotti**, *Gravitazione Sperimentale* [Ecole d'été de Varenna (1972); Academic Press; New York (1974)].
- B. Bertotti, D. Brill, R. Krotkov**, *Experiments on Gravitation*, in *Gravitation : An Introduction to Current Research* [L. Witten Ed.; J. Wiley; New York (1962)].
- J.E. Blamont, F. Roddier**, *Precise Observations of the Profile of the Franckhoffer Strontium Resonance Line. Evidence for the Gravitational Redshift on the Sun* [Phys. Rev. Letts. 7, 437, 1961].
- D. Bohm**, *The Special Theory of Relativity* [W.A. Benjamin; New York (1965)].
- H. Bondi**, *Cosmology* [Cambridge University Press; Cambridge (1960)].
- H. Bondi**, *Some Special Solutions of the Einstein Equations, part I : Special Relativity*, in *Lectures on General Relativity* [A. Trautman, H. Bondi, F.A.E. Pirani, Eds.; Prentice Hall; Englewood Cliffs (1965)].
- M. Born, E. Wolf**, *Principles of Optics* [Pergamon Press; Oxford (1975)].
- R.R. Bourassa, R. Kantowski**, *The Theory of Gravitational Lenses* [Ap. J. 195, 13, 1975].
- R.R. Bourassa, R. Kantowski, T.D. Norton**, *The Spheroidal Gravitational Lens* [Ap. J. 185, 747, 1975].
- M.G. Bowler**, *Gravitation and Relativity* [Pergamon Press; Oxford (1976)].
- V.B. Braginsky, V.I. Panov**, *Verification of the Equivalence of Inertial and Gravitational Mass* [Soviet Phys. J.E.T.P. 34, 463, 1972].
- C. Brans, R.H. Dicke**, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation* [Phys. Rev. 124, 925, 1961].
- J. Brault**, *Gravitational Redshift of Solar Lines* [Bull. Am. Phys. Soc. 8, 28, 1963].
- K. Brecher**, *Is the Speed of Light Independent of the Velocity of the Source ?* [Phys. Rev. Letts. 39, 1051, 1977].
- A. Brillet, J.L. Hall**, *Improved Laser Test of the Isotropy of Space* [Phys. Rev. Letts. 42, 549, 1979].
- A. Brillet, J.L. Hall**, *An Improved Test of the Isotropy of Space Using Laser Techniques*, in *Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* [R. Ruffini Ed.; North Holland; Amsterdam (1982)].
- B.C. Brown, G.E. Masek, T. Maung, E.S. Miller, H. Ruderman, W. Vernon**, *Experimental Comparison of the Velocities of eV (Visible) and GeV Electromagnetic Radiation* [Phys. Rev. Letts. 30, 763, 1973].
- W. Buchel**, (trad. I.M. Freeman) *Why is Space three-dimensional ?* [Am. J. Phys. 37, 1222, 1969].
- M. Bunge**, *Mach's Critique of Newtonian Mechanics* [Am. J. Phys. 34, 585, 1966].
- W.L. Burke**, *Multiple Gravitational Imaging by Distributed Masses* [Ap. J. 244, L1, 1981].
- E. Byckling, K. Kajantie**, *Particle Kinematics* [J. Wiley; New York (1973)].
- V. Canuto**, *Atomic and Gravitational Clocks* [Int. J. Theor. Phys. 28, 1005, 1990].
- V. Canuto, I. Goldmann**, *Atomic and Gravitational Clocks* [Nature 296, 709, 1982].
- V. Canuto, I. Goldmann**, *The Strong Equivalence Principle and its Violation*, in *Early Evolution of the Universe and its Present Structure*, in *IAU Symposium n° 104* [G.O. Abell, G. Chincarini, Eds.; Reidel; Dordrecht (1982)].

- V. Canuto, I. Goldman**, *Astrophysical Consequences of a Violation of the Strong Equivalence Principle* [Nature **304**, 311, 1983].
- B. Carter**, *Mathematical Foundations of the Theory of Relativistic Stellar and Black Hole Configuration*, in *1986 Cargèse Summer School Gravitation in Astrophysics* [B. Carter, J.B. Hartle, Eds.; Plenum Press; New York (1987)].
- B. Carter**, *Outer Curvature and Conformal Geometry and Embedding* [J. Geom. Phys. **8**, 53, 1992].
- J.P. Cedarholm, G.F. Bland, B.L. Havens, C.H. Townes**, *New Experimental Test of Special Relativity* [Phys. Rev. Letts. **1**, 342, 1958].
- T.E. Chupp, R.J. Hoare, R.A. Loveman, E.R. Obeiza, J.M. Richardson, M.E. Wagshul**, *Results of a New Test of Local Lorentz Invariance : A Search for Mass Anisotropy in ^{21}Ne* [Phys. Rev. Letts. **63**, 1541, 1989].
- E.E. Clarck**, *The Uniform Transparent Gravitational Lens* [Month. Not. R. Astr. Soc. **158**, 233, 1972].
- G.M. Clemence**, *The Relativity Effect in Planetary Motions* [Rev. Mod. Phys. **19**, 361, 1947].
- B. Cohen**, *Les Origines de la Physique Moderne* [Petite Bibliothèque Payot n° 21; Paris (1960)].
- J.H. Cooke, R. Kantowski**, *Time Delays for Multiple Imaged Quasars* [Ap. J. **195**, L11, 1975].
- J.L. Coolidge**, *A History of Geometrical Methods* [Dover; New York (1963)].
- T. Damour**, *Strong Field Effects in General Relativity* [Helv. Acta Phys. **59**, 292, 1986].
- T. Damour, G.W. Gibbons, J.H. Taylor**, *Limits on the Variability of G Using Binary–Pulsar Data* [Phys. Rev. Letts. **61**, 1151, 1988].
- T. Damour, G. Schäfer**, *New Tests of the Strong Equivalence Principle Using Binary–Pulsar Data* [Phys. Rev. Letts. **66**, 2549, 1991].
- B. Davies**, *Elementary Theory of Perihelion Precession* [Am. J. Phys. **51**, 909, 1983].
- P.C.W. Davies**, *Time Variation of the Coupling Constants* [J. Phys. **A5**, 1296, 1972].
- P.C.W. Davies**, *The Search for Gravity Waves* [Cambridge University Press; Cambridge (1980)].
- N. Deruelle, T. Piran Eds.**, *Gravitational Radiation in NATO Advanced Institute Les Houches* (1982) [North Holland; Amsterdam (1983)].
- S. Deser**, *Self–Interaction and Gauge Invariance* [Gen. Relat. Grav. **1**, 9, 1970].
- S. Deser**, *The Gravitational Field* [Lectures notes; Orsay (1971)].
- W. De Sitter**, *Phys. Z.* **14**, 429, 1267, 1913 [cité par K. Brecher (1977)].
- R.H. Dicke**, *The Eötvös Experiment* [Scientific Am., p. 84, dec. 1961].
- R.H. Dicke**, *The Theoretical Significance of Experimental Relativity* [Gordon and Breach; New York (1965)].
- R.H. Dicke**, *The Oblateness of the Sun and Relativity* [Science **184**, 419, 1974].
- R.H. Dicke, H.M. Goldenberg**, *Solar Oblateness and General Relativity* [Phys. Rev. Letts. **18**, 313, 1967].
- R.H. Dicke, H.M. Goldenberg**, *The Oblateness of the Sun* [Ap. J. Sup. **27**, 131, 1974].
- A.D. Dolgov, Ya. B. Zeldovich**, *Cosmology and Elementary Particles* [Rev. Mod. Phys. **53**, 1, 1981].
- R.W.P. Drever**, *A Search for Anisotropy of Inertial Mass Using a Full Precession Technique* [Phil. Mag. **6**, 683, 1961].
- F.J. Dyson**, *Time Variation of the Charge of the Proton* [Phys. Rev. Letts. **19**, 1291, 1967].

- D.H. Eckart, C. Jekeli, A.R. Lazarewicz, A.J. Romaides, R. Sands**, *Tower Gravity Experiment : Evidence for Non Newtonian Gravity* [Phys. Rev. Letts. **60**, 2567, 1988].
- R. Eddington**, *The Mathematical Theory of Relativity* [Chelsea; Londres (1922)].
- N. Efimov**, *Géométrie Supérieure* [Mir; Moscou (1981)].
- J. Ehlers**, *General Relativity and Kinetic Theory*, in *General Relativity and Cosmology* Varenna Course 1969 [R.K. Sachs, Ed.; Academic Press; New York (1971)].
- J. Ehlers**, *The Nature and Structure of Spacetime in The Physicist's Conception of Nature* [J. Mehra Ed.; Reidel; Dordrecht (1973)].
- A. Einstein**, *Zur Allgemein Relativitätstheorie* [Preuss. Akad. Wissen., Berlin 778, 1915].
- A. Einstein**, *Zur Allgemeinen Relativitätstheorie* [Preuss. Akad. Wissen., Berlin 799, 1915].
- A. Einstein**, *Lens-Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field* [Science **84**, 506, 1936].
- L.P. Eisenhart**, *Riemannian Geometry* [Dover; New York (1966)].
- J. Eisenstaedt**, *Histoire et Singularités de la Solution de Schwarzschild (1915-1923)* [Arch. Hist. Exact. Sci. **27**, 157, 1982].
- J. Eisenstaedt**, *La Relativité Générale à l'Etiage (1925-1955)* [Arch. Hist. Ex. Sci. **35**, 115, 1986].
- J. Eisenstaedt**, *Trajectoires et Impasses de la Solution de Schwarzschild* [Arch. Hist. Exact Sci. **37**, 275, 1988].
- J. Eisenstaedt**, *Cosmology : A Space for Thought on General Relativity*, in *Foundations of Big Bang Cosmology* [F.W Meyerstein Ed.; World Scientific; Singapour (1989)].
- G.F.R. Ellis**, *Relativistic Cosmology*, in *General Relativity and Cosmology, Varenna course 1969* [R.K. Sachs Ed.; Academic Press; New York (1971)].
- G.F.R. Ellis**, *Cosmology and Verifiability* [Boston Colloquium for the Philosophy of Science; Nov. 1973].
- R. Eötvös**, *Über die Anziehung der Erde auf Verschiedene Substanzen* [Math. Naturwiss. Ber. aus. Ungarn **8**, 65, 1889].
- R. Eötvös, D. Pekár, E. Fekete**, *Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität* [Annalen d. Phys. **68**, 11, 1922].
- F. Everitt**, *Gravitation, Relativity and Precise Experimentation*, in *Proceedings of the Second Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* [R. Ruffini Ed.; North Holland; Amsterdam (1975)].
- S. Feuer**, *Eisntein et le Conflit des Générations* [Complexe; Bruxelles (1978)].
- R.P. Feynman**, *Lectures on Gravitation* [Cal. Tech. 1962-1963; lecture notes by F.B. Morinigo, W.G. Wagner].
- M. Fierz, W. Pauli**, *Relativistic Wave Equations of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field* [Proc. Roy. Soc. **A173**, 211, 1939].
- L. Flamm**, *Beitrage zur Einsteinschen Gravitationstheorie* [Physik. Zeit. **17**, 448, 1916].
- H. Flanders**, *Differential Forms* [Academic Press; New York (1963)].
- V. Fock**, *The Theory of Space-Time and Gravitation* [Pergamon; Oxford (1966)].
- E.B. Fomalont, R.A. Sramek**, *The Deflection of Radio Waves by the Sun* [Comm. Astrophys. **7**, 19, 1977].
- J. Foster, J.D. Nightingale**, *A Short Course in General Relativity* [Longman; Londres (1979)].

- J.G. Fox**, *Experimental Evidence for the Second Postulate of Special Relativity* [Am. J. Phys. **30**, 297, 1962].
- J.G. Fox**, *Evidence against Emission Theories* [Am. J. Phys. **33**, 1, 1965].
- Th. Frankel**, *Gravitational Curvature* [Freeman; San Francisco (1979)].
- E.F. Freundlich, H. von Klüwer, A. von Brunn**, *The Determination of Einstein's Light Deflection in the Gravitational Field of the Sun* [Vistas in Astronomy **3**, 47, 1960].
- A. Friedman**, *Über die Krümmung des Raumes* [Zeits. Phys. **10**, 377, 1922].
- A. Friedman**, *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes* [Zeits. Phys. **21**, 326, 1924].
- Galileo Galilei**, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* [Traduction de R. Fréreau et F. de Gandt; Le Seuil; Paris (1992)].
- G. Gatewood, C. Gatewood**, *A Study of Sirius* [Ap. J. **225**, 191, 1978].
- G. Gatewood, J. Russel**, *Astrometric Determination of the Gravitational Redshift of Van Maanen 2 (EG5)* [A. J. **79**, 815, 1974].
- G.T. Gillies**, *The Newtonian Gravitational Constant : an Index of Measurements, Rapport du Bureau International des Poids et Mesures BITM-83/1 ; Sèvres 1983* [Metrologia **24** Sup., I, 1987].
- H. Goldstein**, *Classical Mechanics* [Addison-Wesley; Reading (1980)].
- M.L. Good**, K_0 and the Equivalence Principle [Phys. Rev. **121**, 311, 1961].
- J.L. Greenstein, A. Boksenberg, R. Carswell, K. Shortridge**, *The Rotation and Gravitational Redshift of White Dwarfs* [Ap. J. **212**, 186, 1977].
- J.L. Greenstein, J.B. Oke, H.L. Shipman**, *Effective Temperature, Radius, and Gravitational Redshift of Sirius B* [Ap. J. **169**, 563, 1971].
- J.L. Greenstein, V. Trimble**, *The Einstein Redshift of White Dwarfs* [Ap. J. **149**, 283, 1967].
- S.R. de Groot, W.A. Van Leeuwen, Ch. G. Van Weert**, *Relativistic Kinetic Theory* [North Holland; Amsterdam (1980)].
- D.J. Grove, J.G. Fox**, *e/m for 385 MeV Protons* [Phys. Rev. **90**, 378, 1953].
- S.N. Gupta**, *Gravitation and Electromagnetism* [Phys. Rev. **96**, 1683, 1954].
- S.N. Gupta**, *Einstein's and Other Theories of Gravitation* [Rev. Mod. Phys. **29**, 337, 1957].
- S.N. Gupta**, *Quantum Theory of Gravitation*, in *Recent Developments in General Relativity* [Pergamon Press; New York (1962)].
- Z.G.T. Gviragossian, G.B. Rothbart, M.R. Yearian, R.A. Gearheart, J.J. Murray**, *Relative Velocity Measurements of Electrons and Gamma Rays at 15 GeV* [Phys. Rev. Letts. **34**, 355, 1975].
- R. Hagedorn**, *Relativistic Kinematics* [W.A. Benjamin; New York (1964)].
- R. Hakim**, *La Science et l'Univers* [Syros; Paris (1992)].
- E.R. Harrison**, *Cosmology, the Science of the Universe* [Cambridge University Press; Cambridge (1981)].
- M.P. Haugan, C.M. Will**, *Weak Interactions and Eötvös Experiments* [Phys. Rev. Letts. **37**, 1, 1976].
- P.M. Haugan, C.M. Will**, *Modern Tests of Special Relativity* [Phys. Today, May 1987, p. 69].
- P. Havas**, *Four-Dimensional Formulation of Newtonian Mechanics and their Relations in the Special and General Theory of Relativity* [Rev. Mod. Phys. **36**, 938, 1964].

- R.W. Hellings, P.J. Adams, J.D. Anderson, M.S. Keesey, E.L. Lau, E.M. Standish, V.M. Canuto, I. Goldman**, *Experimental Test of the Variability of G Using Viking Lander Ranging Data* [Phys. Rev. Letts. **51**, 1609, 1983].
- J. Hershey**, *Astrometric Study of the Sproul Plate Series on Van Maanen's Star, Including Gravitational Redshift* [A. J. **83**, 197, 1978].
- D. Hilbert**, *Die Grundlagen der Physik* [Nachr. Gesell. Wissensch., Göttingen 395, 1915].
- D. Hilbert, S. Cohn-Vossen**, *Geometry and the Imagination* [Chelsea; Londres (1952)].
- B. Hoffmann**, *Albert Einstein, Créateur et Rebelle* [Le Seuil; Paris (1975)].
- S.C. Holding, F.D. Stacey, G.J. Tuck**, *Gravity in Mines – An Investigation of Newton's Law* [Phys. Rev. **D33**, 3487, 1986].
- J.P. Hsu**, *Analysis of Weak Interactions and Eötvös Experiments* [Phys. Rev. **D17**, 3164, 1978].
- V.W. Hughes, H.G. Robinson, V. Beltran-Lopez**, *Upper Limits for the Anisotropy of Inertial Mass from Nuclear Resonance Experiments* [Phys. Rev. Letts. **4**, 342, 1960].
- R.A. Hulse, J.H. Taylor**, *Discovery of a Pulsar in a Binary System* [Ap. J. **195**, L51, 1975].
- L. Kh. Ingel'**, *Gravitational Lenses and Velocities faster than Light* [Sov. Astron. Letts. **1**, 54, 1975].
- J.M. Irvine**, *The Constancy of the Laws of Physics in the Light of Prehistoric Nuclear Reactors* [Contemp. Phys. **24**, 427, 1983].
- G.R. Isaak, D.C. Champeney, A.M. Khan**, *An "Ether Drift" Experiment Based on the Mössbauer Effect* [Phys. Letts. **7**, 241, 1963].
- C. Itzykson, J.P. Zuber**, *Quantum Field Theory* [McGraw-Hill; New York (1980)].
- J.D. Jackson**, *Classical Electrodynamics* [Wiley; New York (1962)].
- M. Jammer**, *Concepts of Space* [Harvard University Press; Cambridge (Mass.) (1954)].
- M. Jammer**, *Concepts of Mass* [Harvard University Press; Cambridge (Mass.) (1961)].
- M. Jammer**, *Some Foundational Problems in the Special Theory of Relativity*, in *Problems in the Foundations of Physics 1977 Varenna Summer School* [Toraldo di Francia Ed.; North Holland, Amsterdam (1979)].
- G. Kalman**, *Lagrangian Formalism in Relativistic Dynamics* [Phys. Rev. **123**, 384, 1961].
- R.J. Kennedy, E.M. Thorndike**, *Experimental Establishment of the Relativity of Time* [Phys. Rev. **42**, 400, 1932].
- C.W. Kilmister**, *General Theory of Relativity* [Pergamon Press; Oxford (1973)].
- L. Koester**, *Verification of the Equivalence of Gravitational and Inertial Mass for the Neutron* [Phys. Rev. **D14**, 907, 1976].
- R.H. Kraichnan**, *Special-Relativistic Derivation of Generally Covariant Gravitation Theory* [Phys. Rev. **98**, 1118, 1955].
- L.B. Kreuzer**, *Experimental Measurement of Equivalence of Active and Passive Gravitational Mass* [Phys. Rev. **169**, 1007, 1968].
- K. Kuroda, H. Hirakawa**, *Experimental Test of the Law of Gravitation* [Phys. Rev. **D32**, 342, 1985].
- M. Lachièze-Rey, J.-P. Luminet**, *A Primer in Cosmic Topology* [Physics Reports (à paraître)].
- S.K. Lamoreaux, J.P. Jacobs, B.R. Heckel, J.F. Raab, E.N. Fortson**, *New Limits on Spatial Anisotropy from Optically Pumped ^{201}Hg and ^{199}Hg* [Phys. Rev. Letts. **57**, 3125, 1986].
- L. Landau, E. Lifchitz**, *Mécanique* [Mir; Moscou].

- L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique Quantique* [Mir; Moscou].
- M. Le Bellac, J.M. Lévy-Leblond, *Galilean Electromagnetism* [Nuovo Cim. **14B**, 217, 1973].
- J. Leite-Lopes, *Théorie Relativiste de la Gravitation* [Masson; Paris (1993)].
- J.M. Lévy-Leblond, Thèse non publiée [Orsay (1965)].
- J.M. Lévy-Leblond, *Mécanique Quantique des Forces de Gravitation et Stabilité de la Matière* [J. Phys. (Paris), Colloque C3; **30**, 43, 1969 (Suppl.)].
- A. Lichnerowicz, *Algèbre et Analyse Linéaires* [Masson; Paris (1970)].
- A. Lichnerowicz, *Éléments de Calcul Tensoriel* [Gabay; Paris (1987)].
- S. Liebes, *Gravitational Lenses* [Phys. Rev. **133B**, 835, 1964].
- A.P. Lightman, W.H. Press, R.H. Price, S.A. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation* [Princeton University Press; Princeton (1975)].
- F. Link, *Eclipse Phenomena in Astronomy* [Springer; Berlin (1969)].
- D.R. Long, *Why do we Believe Newtonian Gravitation at Laboratory Dimensions?* [Phys. Rev. **D9**, 850, 1974].
- D.R. Long, *Experimental Determination of the Gravitational Inverse Square Law* [Nature **260**, 417, 1976].
- M.J. Longo, *Tests of Relativity from SN1987A* [Phys. Rev. **D36**, 3276, 1987].
- H. Mandelberg, L. Witten, *Experimental Verification of the Relativistic Doppler Effect* [J. Opt. Soc. Am. **52**, 529, 1962].
- R.W. Mandl, Lettre à A. Einstein [inédit (1935)].
- R. Mansouri, R.U. Sexl, *A Test Theory of Special Relativity : I Simultaneity and Clock Synchronization* [Gen. Rel. Grav. **8**, 497, 1977].
- R. Mansouri, R.U. Sexl, *A Test Theory of Special Relativity : II First Order Tests* [Gen. Rel. Grav. **8**, 515, 1977].
- R. Mansouri, R.U. Sexl, *A Test Theory of Special Relativity : III Second-Order Tests* [Gen. Rel. Grav. **8**, 809, 1977].
- M. Maurette, *Fossil Nuclear Reactors* [Ann. Rev. Nucl. Sci. **26**, 319, 1976].
- S. Mavridès, *L'Univers Relativiste* [Masson; Paris (1973)].
- J. Mehra, *Einstein, Hilbert and the Theory of Gravitation* [Reidel; Dordrecht (1974)].
- H. Minkowski, *Space and Time*, in *The Principle of Relativity* [Dover; New York (1923)].
- N. Mio, K. Tsubono, H. Hirakawa, *Experimental Test of the Law of Gravitation at Small Distances* [Phys. Rev. **D36**, 2321, 1987].
- Ch. W. Misner, *Mixmaster Universe* [Phys. Rev. Letts. **22**, 1071, 1969].
- C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation* [Freeman; San Francisco (1973)].
- J.M. Moran, J.N. Hewitt, K.Y. Lo, Eds.; *Gravitational Lenses* [Springer; Berlin (1989)].
- D.O. Muhleman, R.D. Ekers, E.B. Fomalont, *Radio Interferometric Test of the General Relativistic Light Bending near the Sun* [Phys. Rev. Letts. **24**, 1377, 1970].
- E. Namer, *L'Affaire Galilée* [Julliard; Paris (1975)].
- C. Neumann, *Über des Newtonische Prinzip der Fernwirkung* [Leipzig (1896)].

- D. Newman, G.W. Ford, A. Rich, E. Sweetman**, *Precision Experimental Verification of Special Relativity* [Phys. Rev. Letts. **40**, 1355, 1978].
- E. Newman, J.N. Goldberg**, *Measurements of Distance in General Relativity* [Phys. Rev. **114**, 1391, 1959].
- G. Nordström**, *Zur Theorie der Gravitation vom Standpunkt des Relativitäts Prinzips* [Annalen d. Phys. **42**, 533, 1913].
- K. Nordvedt**, *Equivalence Principle for Massive Bodies I Phenomenology* [Phys. Rev. **169**, 1014, 1968]; *II Theory* [Phys. Rev. **169**, 1017, 1968].
- K. Nordvedt**, *Testing Relativity with Laser Ranging to the Moon* [Phys. Rev. **170**, 1186, 1968].
- J.E. Norvath, H. Vucetich**, *Oklo Phenomenon and the Principle of Equivalence* [Phys. Rev. **D37**, 931, 1988].
- B.E.J. Pagels**, *On the Limits to Past Variability of the Proton–Electron Mass Ratio Set by Quasar Absorption Line Redshifts* [M.N.R.A.S. **179**, 81P, 1977].
- A. Pais**, *Albert Einstein, la vie et l'œuvre* [InterEditions; Paris (1993)].
- S. Paksava, W.A. Simmons, T.J. Weiler**, *Test of Equivalence Principle for Neutrinos and Antineutrinos* [Phys. Rev. **D39**, 1761, 1989].
- A. Palatini**, *Deduzione Invariantiva delle Equazioni Gravitazionali dal Principio di Hamilton* [Rendic. Circ. Mat., Palermo **43**, 203, 1919].
- V.I. Panov, V.N. Frontov**, *The Cavendish Experiment at Large Distance* [Soviet Phys. J.E.T.P. **50**, 852, 1980].
- A. Papapetrou**, *Lectures in General Relativity* [Reidel; Dordrecht (1974)].
- J.A. Peacock**, *Review of Gravitational–Lens Theory*, in *Quasars and Gravitational Lenses* [Proceedings of the 24th Liège International Astrophysical Colloquium (1983)].
- P.J. Peebles, R.H. Dicke**, *Cosmology and the Radioactive Decay Ages of Terrestrial Rocks and Meteorites* [Phys. Rev. **128**, 2006, 1962].
- A. Peres**, *Constancy of the Fundamental Electric Charge* [Phys. Rev. Letts. **19**, 1293, 1967].
- A. Peres, N. Rosen**, *Covariant Formalism for Particle Dynamics* [Nuovo Cim., **18**, 144, 1960].
- H. Poincaré**, *La Science et l'Hypothèse* [Flammarion; Paris (1968)].
- D.M. Popper**, *Redshift in the Spectrum of 40 Eridani B* [Ap. J. **120**, 316, 1954].
- R.V. Pound, G.A. Rebka**, *Apparent Weight of Photons* [Phys. Rev. Letts. **4**, 337, 1960].
- R.V. Pound, J.L. Snider**, *Effect of Gravity on Gamma Radiation* [Phys. Rev. **B140**, 788, 1965].
- J.D. Prestage, J.J. Bollinger, W.M. Itano, D.J. Wineland**, *Limits for Spatial Anisotropy by Use of Nuclear–Spin–Polarized $^9\text{Be}^+$ Ions* [Phys. Rev. Letts. **54**, 2387, 1985].
- R.D. Reasenberg, I.I. Shapiro, P.E. Mac Neil, R.B. Goldstein, J.C. Breidenthal, J.C. Brenkle, D.L. Cain, T.M. Kaufman, T.A. Komarek, A.I. Zygielbaum**, *Viking Relativity Experiment : Verification of Signal Retardation by Solar Gravity* [Ap. J. **234**, L219, 1979].
- E. Recami, R. Mignani**, *Classical Theory of Tachyons* [Riv. Nuovo Cim. **4**, 209, 1974].
- S. Refsdal**, *The Gravitational Lens Effect* [Month Not. R. Astr. Soc. **128**, 295, 1964].
- S. Refsdal**, *On the Possibility of Determining Hubble's Parameter and the Masses of Galaxies from the Gravitational Lens Effect* [Month. Not. R. Astr. Soc. **128**, 307, 1964].
- S. Refsdal**, *On the Possibility of Testing Cosmological Theories from the Gravitational Lens Effect* [Month. Not. R. Astr. Soc. **132**, 101, 1966].

- H. Reichenbach**, *The Philosophy of Space and Time* [Dover; New York (1958)].
- W. Rindler**, *Counter-Example to the Lenz–Schiff Argument* [Am. J. Phys. **36**, 540, 1968].
- W. Rindler**, *Essential Relativity* [Springer–Verlag; Berlin (1977)].
- H.P. Roberston**, *Relativistic Cosmology* [Rev. Mod. Phys. **5**, 62, 1933].
- H.P. Roberston**, *Kinematics and World–Structure* [Ap. J. **82**, 284, 1935].
- H.P. Roberston**, *Kinematics and World–Structure* [Ap. J. **83**, 187, 1936].
- H.P. Roberston**, *Postulate versus Observation in the Special Theory of Relativity* [Rev. Mod. Phys. **21**, 378, 1949].
- D.S. Robertson, W.E. Carter, W.H. Dillinger**, *New Measurements of Solar Gravitational Deflection of Radio Signals Using VLBI* [Nature **349**, 768, 1991].
- H.P. Roberston, T.W. Noonan**, *Relativity and Cosmology* [W.B. Saunders; Philadelphie (1968)].
- P. Roll, R. Krotkov, R.H. Dicke**, *The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass* [Phys. Rev. **26**, 442, 1964].
- P. Roll, R. Krotkov, R. Dicke**, *The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass* [Ann. Phys. (N.Y.) **26**, 442, 1964].
- R.D. Rose, H.M. Parker, R.A. Lowry, A.R. Kuhlthau, J.W. Beams**, *Determination of the Gravitational Constant G* [Phys. Rev. Letts. **23**, 655, 1969].
- L. Rosenfeld**, *Sur le Tenseur Impulsion–Energie* [Mém. Acad. Roy. Belg. Sci. **18**, n^o 6, 1940].
- D.K. Ross, L.I. Schiff**, *Analysis of the Proposed Planetary Radar Reflection Experiment* [Phys. Rev. **141**, 1215, 1966].
- V.N. Rudenko**, *Relativistic Experiments in Gravitational Fields* [Soviet Phys. Usp. **21**, 893, 1978].
- M.P. Ryan, L.C. Shepley**, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* [Princeton University Press; Princeton (1975)].
- J. Rzewuski**, *Field Theory* [Polish Scientific Publishers; Varsovie (1958)].
- R.K. Sachs**, *Gravitational Waves in General Relativity, VI The Outgoing Radiation Condition* [Proc. Roy. Soc. **A264**, 309, 1961].
- M.P. Savedoff**, [Nature **178**, 688, 1956].
- L.I. Schiff**, *Sign of the Gravitational Mass of a Positron* [Phys. Rev. Letts. **1**, 254, 1958].
- L.I. Schiff**, *On Experimental Tests of the General Theory of Relativity* [Am. J. Phys. **28**, 340, 1960].
- L.I. Schiff**, *Comparison of Theory and Observation in General Relativity*, in *Relativity Theory and Astrophysics, Vol. 1* [J. Ehlers, Ed.; Am. Math. Soc. Publ.; Providence (1967)].
- L.I. Schiff, J.M. Weisberg**, *Sign of the Gravitational Mass of a Positron* [Phys. Rev. Letts. **1**, 254, 1958].
- A. Schild**, *Lectures on General Relativity*, in *Relativity Theory and Astrophysics, Vol. 1* [J. Ehlers, Ed.; Am. Math. Soc. Publ.; Providence (1967)].
- P. Schneider**, *Gravitational Lenses* [Springer; Berlin (1992)].
- B. Schutz**, *Gravitational Waves on the Back of an Enveloppe* [Am. J. **52**, 412, 1984].
- B. Schutz**, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* [Cambridge University Press; Cambridge (1985)].
- B. Schutz**, *A First Course in General Relativity* [Cambridge University Press; Cambridge (1988)].

- J. Schwartz, M. Mc Guinness**, *Einstein pour débutants* [F. Maspéro; Paris (1980)].
- V.F. Sears**, *On the Verification of the Universality of Free Fall by Neutron Gravity Refractometry* [Phys. Rev. **D25**, 2023, 1982].
- H. Seeliger**, *Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz* [Astron. Nachrich. **137**, 9, 1894].
- R. Sexl, H. Sexl**, *White Dwarfs and Black Holes (an introduction to relativistic astrophysics)* [Academic Press; New York (1979)].
- I.I. Shapiro**, *Fourth Test of General Relativity* [Phys. Rev. Letts. **13**, 789, 1964].
- I.I. Shapiro**, *Testing General Relativity with Radar* [Phys. Rev. **141**, 1219, 1966].
- I.I. Shapiro**, *Fourth Test of General Relativity : Preliminary Results* [Phys. Rev. Letts. **20**, 1265, 1968].
- I.I. Shapiro, M.E. Ash, R.P. Ingalls, W.B. Smith, D.B. Campbell, R.B. Dyce, R.F. Jurgens, G.H. Pettengill**, *Fourth Test of General Relativity : New Radar Results* [Phys. Rev. Letts. **26**, 1132, 1971].
- I.I. Shapiro, C.C. Counselman, R.W. King**, *Verification of the Principle of Equivalence for Massive Bodies* [Phys. Rev. Letts. **36**, 555, 1976].
- I.I. Shapiro, Ross-Schiff**, *Analysis of a Proposed Test of General Relativity : a Critique* [Phys. Rev. **145**, 1005, 1966].
- I.I. Shapiro, W.B. Smith, M.B. Ash**, *Gravitation Constant : Experimental Bounds on its Time Variation* [Phys. Rev. Letts. **26**, 27, 1971].
- S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky**, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars* [Wiley; New York (1983)].
- H.L. Shipman**, *Masses and Radii of White Dwarf Stars. III Results for 110 Hydrogen-Rich and 28 Helium-Rich Stars* [Ap. J. **228**, 240, 1979].
- A.I. Shlyachter**, *Direct Test of the Constancy of Fundamental Nuclear Constants* [Nature **264**, 340, 1976].
- P. Sisterna, H. Vucetich**, *Time Variation of Fundamental Constants : Bounds from Geophysical and Astronomical Data* [Phys. Rev. **D41**, 1034, 1990].
- J.L. Snider**, *New Measurement of the Solar Gravitational Redshift* [Phys. Rev. Letts. **28**, 853, 1972].
- J.L. Snider**, *Comments on Two Recent Measurements of the Solar Gravitational Redshift* [Solar Phys. **36**, 233, 1974].
- R. Spero, J.K. Hoskins, R. Newman, J. Pellam, J. Schulz**, *Tests of the Gravitational Inverse-square Law at Laboratory Distances* [Phys. Rev. Letts. **44**, 1645, 1980].
- F.D. Stacey, G.J. Tuck**, *Geophysical Evidence for Non-Newtonian Gravity* [Nature **292**, 230, 1981].
- F.D. Stacey, G.J. Tuck, S.C. Holding, A.R. Maher, D. Morris**, *Constraint on the Planetary Scale Value of the Newtonian Gravitational Constant from the Gravity Profile within a Mine* [Phys. Rev. **D23**, 1683, 1981].
- N. Straumann**, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* [Springer-Verlag; Berlin (1984)].
- J.L. Synge**, *The Relativistic Gas* [North Holland; Amsterdam (1957)].
- J.L. Synge**, *Relativity : The Special Theory* [North Holland; Amsterdam (1958)].
- J.H. Taylor, L.A. Fowler, P.M. McCulloch**, *Measurements of General Relativistic Effects in the Binary Pulsar PSR 1913 + 16* [Nature **277**, 437, 1979].
- J.H. Taylor, J.M. Weisberg**, *A New Test of General Relativity : Gravitational Radiation and the Binary Pulsar PSR 1913+16* [Ap. J. **253**, 908, 1982].
- J.H. Taylor, J.M. Weisberg**, *Further Experimental Tests of Relativistic Gravity Using the Binary Pulsar PSR 1913+16* [Ap. J. **345**, 434, 1989].

- E.F. Taylor, J.A. Wheeler**, *Spacetime Physics* [W.H. Freeman; San Francisco (1966)].
- W. Thirring**, *An Alternative Approach to the Theory of Gravitation* [Ann. Phys. (N.Y.) **16**, 96, 1961].
- K.S. Thorne**, *Relativistic Stars, Black Holes and Gravitational Waves*, in *General Relativity and Cosmology Varenna Course 1969* [R.K. Sachs, Ed.; Academic Press; New York (1971)].
- K.S. Thorne**, *Gravitational-wave research : Current status and future prospect* [Rev. Mod. Phys. **52**, 285, 1980].
- K.S. Thorne**, *The Theory of Gravitational Radiation : an Introductory Review*, in *Rayonnement Gravitationnel* {[NATO Advanced Institute; Les Houches (1982); N. Deruelle, T. Piran, Eds.]; North Holland; Amsterdam (1983)}.
- K.S. Thorne**, *Gravitational Radiation*, in *300 Years of Gravitation* [S.W. Hawking, W. Israël, Eds.; Cambridge University Press; Cambridge (1989)].
- M. Tinto**, *The Search for Gravitational Waves* [Am. J. Phys. **56**, 1066, 1988].
- M.A. Tonnelat**, *Les Vérifications Expérimentales de la Relativité Générale* [Masson; Paris (1964)].
- M.A. Tonnelat**, *Histoire du Principe de Relativité* [Flammarion; Paris (1971)].
- Ph. Tourrenc**, *Relativité et Gravitation* [A. Colin; Paris (1992)].
- A. Trautman**, *Sur la Théorie Newtonienne de la Gravitation* [C.R.A.S. **257**, 617, 1963].
- A.D. Tubbs, A.M. Wolfe**, *Evidence for Large-Scale Uniformity of Physical Laws* [Ap. J. **236**, L105, 1980].
- L. Valentin**, *Physique subatomique : Noyaux et Particules* [Hermann; Paris (1975)].
- C. Vanderriest**, *Close-up on Gravitational Lensing : the Gravitational Mirages*, in *Gravitation, Geometry and Relativistic Physics* [Lab. "Gravitation et Cosmologie", Ed.; Springer; Berlin (1984)].
- C. Vanderriest**, *Les mirages gravitationnels : un outil de choix pour sonder l'Univers* [l'Astronomie, Janvier 1986].
- R.S. Van Dyck, P.B. Schwinberg, H.G. Dehmelt**, *Precise Measurements of Axial, Magnetron, Cyclotron, and Spin-Cyclotron-Beat Frequencies on an Isolated 1MeV Electron* [Phys. Rev. Letts. **38**, 310, 1977].
- T.C. Van Flandern**, *Is the Gravitational Constant Changing?* [Astrophys. J., **248**, 813, 1981].
- G. de Vaucouleurs**, *Sur une analogie de structure remarquable entre les nébuleuses elliptiques et les amas de nébuleuses extragalactiques* [C.R.A.S. **227**, 1948].
- R.F.C. Vessot**, *Lectures on Frequency Stability and Clocks and on the Gravitational Redshift Experiment*, in *Experimental Gravitation Varenna Course 1972* [B. Bertotti, Ed.; Academic Press; New York (1974)].
- R.F.C. Vessot**, *Tests of Gravitation and Relativity* [Contemp. Phys. **25**, 355, 1984].
- R.F.C. Vessot, M.W. Levine**, *A Test of the Equivalence Principle using a Space-Borne Clock* [Gen. Rel. Grav. **10**, 181, 1979].
- J.Y. Vinet, C. Man**, *Un Interféromètre Géant pour Détecter les Ondes Gravitationnelles* [Le Courrier du CNRS n°76 Sup., p. 29, 1991].
- R.M. Wald**, *General Relativity* [University of Chicago Press; Chicago (1984)].
- A.G. Walker**, *On Milne's Theory of World Structure* [Proc. London Math. Soc. **42**, 90, 1936].
- D. Walsh, R.F. Carswell, R.J. Weymann**, *0957 + 61 A,B : Twin Quasistellar Objects or Gravitational Lens?* [Nature **279**, 381, 1979].
- A.H. Wapstra, G.J. Nijgh**, *The Ratio of Gravitational to Kinetic Mass for the Constituents of Matter* [Physica **21**, 796, 1955].

- J. Weber**, *Detection and Generation of Gravitational Waves* [Phys. Rev. **117**, 306, 1960].
- J. Weber**, *General Relativity and Gravitational Waves* [Wiley; New York (1961)].
- J. Weber**, *Evidence for Discovery of Gravitational Radiation* [Phys. Rev. Letts. **22**, 1320, 1969].
- G. Wegner**, *A New Gravitational Redshift for the White Dwarf σ^2 Eri B* [Astron. J. **85**, 1255, 1980].
- S. Weinberg**, *Photons and Gravitons in Perturbation Theory : Derivation of Maxwell's and Einstein's Equations* [Phys. Rev. **B138**, 988, 1965].
- S. Weinberg**, *Gravitation and Cosmology* [J. Wiley; New York (1972)].
- S. Weinberg**, *Les Trois Premières Minutes de l'Univers* [Le Seuil; Paris (1978)].
- S. Weinberg**, *The Cosmological Constant Problem* [Rev. Mod. Phys. **61**, 1, 1989].
- V.F. Weisskopf**, *The Visual Appearance of Rapidly Moving Objects* [Phys. Today, **13**, n^o 9, 24, 1960].
- J.C. Wesley, A. Rich**, *High-Field $g-2$ Measurement*, [Phys. Rev. **A4**, 1341, 1971].
- C.M. Will**, *Active Mass in Relativistic Gravity : Theoretical Interpretation of the Kreuzer Experiment* [Astrophys. J. **204**, 224, 1976].
- C.M. Will**, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* [Cambridge University Press; Cambridge (1981)].
- C.M. Will**, *The Confrontation between General Relativity and Experiment : an Update* [Phys. Report **113**, 345, 1984].
- J.G. Williams, R.H. Dicke, P.L. Bender, C.O. Alley, W.E. Carter, D.G. Currie, D.H. Eckhardt, J.E. Faller, W.M. Kaula, J.D. Mulholland, H.H. Plotkin, S.K. Poultney, P.J. Shelus, E.C. Silverberg, W.S. Sinclair, M.A. Slade, and D.T. Wilkinson**, *New Test of the Equivalence Principle from Lunar Laser Ranging*. [Phys. Rev. Letts. **36**, 551, 1976].
- F.C. Witteborn, W.M. Fairbanks**, *Experiments to Determine the Force of Gravity on Single Electrons and Positrons* [Nature **220**, 436, 1968].
- A.M. Wolfe, R.L. Brown, M.S. Roberts**, *Limits on the Variation of Fundamental Atomic Quantities over Cosmic Time Scales* [Phys. Rev. Letts. **37**, 179, 1976].
- P.W. Worden, F. Everitt**, *Tests of the Equivalence of Gravitational and Inertial Mass Based on Cryogenic Techniques*, in *Experimental Gravitation, Varenna Course 1972* [B. Bertotti, Ed.; Academic Press, New York (1974)].
- I.M. Yaglom**, *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis* [Springer; Berlin (1979)].
- H.T. Yu, W.T. Ni, C.C. Hu, F.H. Liu, C.H. Yang, W.N. Liu**, *An Experimental Determination of the Gravitational Constant at Distances around Ten Meters* [Chinese J. Phys. **16**, 201, 1978].
- H.T. Yu, W.T. Ni, C.C. Hu, F.H. Liu, C.H. Yang, W.N. Liu**, *Experimental Determination of the Gravitational Forces at Separations around Ten Meters* [Phys. Rev. **D20**, 1813, 1979].
- E.C. Zeeman**, *Causality Implies the Lorentz Group* [J. Math. Phys. **5**, 190, 1964].
- Ya. B. Zeldovich, I.D. Novikov**, *Relativistic Astrophysics (Vol.2) : The structure and Evolution of the Universe* [The University of Chicago Press; Chicago (1983)].
- F. Zwicky**, *Nebulae as Gravitational Lenses* [Phys. Rev. **51**, 290, 1937].
- F. Zwicky**, *On the Probability of Detecting Nebulae Which Act as Gravitational Lenses* [Phys. Rev. **51**, 679, 1937].

Constantes physiques[†]

(unités en CGS sauf indication contraire)

$$c = 2.99792458 \cdot 10^{10}$$

$$\hbar = 1.05457266 \cdot 10^{-27} = 6.582122 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$$

$$k_{\text{Boltz}} = 1.3806513 \cdot 10^{-16} = 8.617344 \cdot 10^{-11} \text{ MeV/K}$$

$$e = 4.8032068 \cdot 10^{-10}$$

$$\alpha = e^2/\hbar c = 137.0359895^{-1}$$

$$G = 6.67259 \cdot 10^{-8}$$

$$g = 980.665$$

$$m_{\text{électron}} = 0.91093897 \cdot 10^{-27} = 0.51099906 \text{ MeV} = 5.92989 \cdot 10^9 \text{ K}$$

$$m_{\text{proton}} = 1.6726231 \cdot 10^{-24} = 938.27231 \text{ MeV} = 1.0888184 \cdot 10^{13} \text{ K}$$

$$m_{\text{neutron}} = 1.6749286 \cdot 10^{-24} = 939.56563 \text{ MeV} = 1.0903193 \cdot 10^{13} \text{ K}$$

$$m_{\pi^\pm} = 2.488018 \cdot 10^{-25} = 139.5675 \text{ MeV}$$

$$m_{\pi^0} = 2.406129 \cdot 10^{-25} = 134.9739 \text{ MeV}$$

$$\lambda_{\text{célectron}} = 3.86159323 \cdot 10^{-11}$$

$$\lambda_{\text{célectron}}^{-3} = 1.73660252 \cdot 10^{31}$$

$$\lambda_{\text{Cproton}} = 2.10308937 \cdot 10^{-14}$$

$$\lambda_{\text{Cproton}}^{-3} = 1.07504542 \cdot 10^{41}$$

$$\lambda_{\text{Cneutron}} = 2.10019445 \cdot 10^{-14}$$

$$\lambda_{\text{Cneutron}}^{-3} = 1.0794971 \cdot 10^{41}$$

$$\lambda_{\text{C}\pi^\pm} = 1.413847 \cdot 10^{-13}$$

$$\lambda_{\text{C}\pi^0} = 1.461964 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{MeV} = 1.60217733 \cdot 10^{-6} = 5.0677289 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-1} = 1.16045 \cdot 10^{10} \text{ K}$$

$$\text{gramme} = 5.6095862 \cdot 10^{26} \text{ MeV}$$

$$\text{fermi}^{-1} = 197.32705 \text{ MeV}$$

$$\text{seconde}^{-1} = 1.5192669 \cdot 10^{21} \text{ MeV}$$

$$\text{Ry} = 1/2 \alpha^2 m_e c^2 = 2.1798741 \cdot 10^{-11} = 13.6056981 \text{ eV}$$

$$r_e \text{ (rayon classique de l'électron)} = e^2/m_e c^2 = 2.81794092 \cdot 10^{-13}$$

$$\sigma_T \text{ (section efficace de Thompson)} = 8\pi/3 r_e^2 = 0.66524616 \cdot 10^{-24}$$

[†] Compilation de H. Sivak.

$$a_0 \text{ (rayon de Bohr)} = \hbar^2/m_e e^2 = 0.529177249 \cdot 10^{-8}$$

$$\mu_B \text{ (magnéton de Bohr)} = e\hbar/2m_e c = 9.2740154 \cdot 10^{-21}$$

$$\mu_N \text{ (magnéton nucléaire)} = e\hbar/2m_p c = 5.0507866 \cdot 10^{-24}$$

$$N_A \text{ (nombre d'Avogadro)} = 6.0221367 \cdot 10^{23}$$

$$\begin{aligned} \sigma \text{ (constante de Stefan-Boltzmann)} &= \pi^2 k_B^4/60\hbar^3 c^2 = 5.670399 \cdot 10^{-5} \\ &= 6.418014 \cdot 10^{41} \text{ J/cm}^2 \text{ s MeV}^3 \end{aligned}$$

Unités absolues

$$\text{énergie} = \sqrt{\hbar c^5/G} = 1.95633 \cdot 10^{16}$$

$$\text{temps} = \sqrt{\hbar G/c^5} = 5.39056 \cdot 10^{-44}$$

$$\text{longueur} = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.61605 \cdot 10^{-33}$$

$$\text{masse} = \sqrt{\hbar c/G} = 2.17671 \cdot 10^{-5}$$

Astrophysique

$$H_0 \text{ (constante de Hubble)} = 100h_0 \text{ km/s Mpc} = (0.97781 \cdot 10^{10} \text{ a})^{-1} h_0$$

(0.4 < h₀ < 1)

$$t_0 \text{ (âge de l'Univers)} = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ a}$$

$$\rho_0 \text{ (densité critique)} = 1.87882 \cdot 10^{-29} h_0^2$$

$$\rho_{\text{local}} \text{ (densité locale)} = 0.3 \text{ MeV/cm}^3 \approx 3 \cdot 10^4 \rho_c$$

$$m_{\text{stellaire}} = 3.676 \cdot 10^{33}$$

$$m_{\text{Soleil}} = 1.989 \cdot 10^{33}$$

$$m_{\text{Terre}} = 5.977 \cdot 10^{27}$$

$$m_{\text{Lune}} = 7.35 \cdot 10^{25}$$

$$r_{\text{Soleil}} = 6.9598 \cdot 10^5 \text{ km}$$

$$r_{\text{Terre}} = 6.37817 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$r_{\text{Lune}} = 1.738 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$\text{parsec} = 3.0856775806 \cdot 10^{18} = 3.2615 \text{ a l}$$

$$\text{a l (année-lumière)} = 0.946 \cdot 10^{18}$$

Index

- Abaissement des indices 76, 234
- Aberration 81-84
- Achromatique 196
- Action à distance 4, 19
- Addition
 - de quadrivecteurs 79
 - des vitesses 51, 67, 71
- Ailleurs 57
- Algèbre extérieure 266-268
- Amas 13
 - local 13
- Amplification 195, 201-203
- Amplitude 238, 247
- Angle 3, 47, 68
 - hyperbolique 52, 54
- Anisotropie 15, 233
- Antenne gravitationnelle 243-247
- Antichrone 50
- Aplatissement 9, 30, 31
- Approximation 180, 213
 - non relativiste 90
 - post-newtonienne 186
- Arago 37
- Arguments (espace courbe) 149-152
- Aristote 14
- Ascenseur d'Einstein 23

- Base 73, 93
- Brown 26
- Bruno 9
- Buridan 10, 14

- Cassini 33
- Causalité 3, 55-62, 67, 85, 86
- Cavendish 25, 26
- Chemin optique 38, 39
- Cinématique 84
- Cinquième force 29
- Comobile 228
- Condition
 - de jauge 239, 240, 255
 - de Lorentz 121, 236, 239
- Cône
 - de lumière 46, 49, 71, 152
 - isotrope 46, 49, 71
- Conservation 118, 123, 217, 254
- Constante
 - cosmologique 212, 214, 215, 254
 - de gravitation 24-30, 170
- Constantes universelles 171
- Continuum 143
- Contraction 80
- Convention de sommation d'Einstein 74
- Coordonnées 140, 141
 - changement de 94-96
 - curvilignes 93-102
 - de Rindler 207
 - de Schwarzschild 185
 - isotropes 185, 226
 - polaires relativistes 103, 255
 - polaires (sphériques) 103
- Copernic 12
- Cosmologie 58, 66

- Coulomb 25
 Couplage minimal 172-174, 203, 204
 Courbe 85, 136
 Courbes de rotation 32
 Courbure 129-133, 136, 211, 231
 de Gauss 137, 138, 143
 des rayons lumineux 108, 109
 extrinsèque 138
 intrinsèque 138, 139, 143, 145
 moyenne 137
 Covariance 73, 78, 81
 Critères de tensorialité 259-261
 Cylindre 65, 66
- DAlembertien 79
 Décalage
 spectral 107, 175
 temporel 195, 200, 201
 Défecteur 196-203
 Déflexion 188-203
 Densité
 de charge 116
 d'énergie 251, 252
 de masse 116
 Dérivée 79, 80
 covariante 98, 149
 Descartes 33
 Détection (ondes gravit.) 243-255
 Déviation géodésique 132, 144, 181-183, 241, 243
 Dieu 9
 Différentielle absolue 100
 Dilatation 175-179
 Dissipation 124, 127
 Distance 2-7, 62-64, 141
 Distribution
 de Fermi–Dirac relativiste 127
 de Maxwell–Boltzmann relativiste 126
 Droite
 du genre espace 52, 53
 du genre temps 3, 11, 52, 53
 Dynamique 13-15, 89
- Effet Doppler 34, 81-84, 176
 longitudinal 70
 transverse 70
 Effet Nordtvedt 168
 Einstein 44, 197, 248
 Electromagnétisme 119-121
 Electrons 167
 Élément de surface 116-118, 124
 Energie 164-166
 Entropie 228
 Eötvös 30, 156-160, 164
 Epicycle 30, 31
 Equation
 de continuité 119, 125
 d'état 124, 126
 de Klein–Gordon 281
 des ondes 82
 Equations
 de champ 279-283
 d'Einstein 210-215, 254
 d'Einstein linéarisées 234-237
 de Maxwell 35, 119-121, 173, 174, 204,
 276-277
 de Tolman–Oppenheimer–Volkov 69, 224, 254
 du mouvement 280
 Equilibre hydrostatique 69, 224
 Espace
 absolu 23
 de Minkowski 43-72
 dual 257
 Espace–temps 45
 newtonien 1-4
 Etalon 2, 140
 Ether 7, 10, 36, 37, 63
 Etoiles 69
 à neutrons 249
 Euclidien 2
 Excentricité 67
- Facteur d'échelle 227
 Feuilletage 59, 60, 61, 228
 Fitzgerald 43, 63

- Fizeau 37
- Fluide
 - cosmique 228
 - parfait 123, 124
- Flux 116
- Force 13-18, 40, 92, 93
- Forme
 - différentielle 116, 263-278
 - duale 271-274
 - linéaire 271-274
 - variationnelle 279-283
- Fréquence 107, 108
- Fresnel 37
- Futur 3, 46, 56, 57

- Galaxie 12, 13, 32, 228
- Galilée 11, 16, 18, 33
- Gedankenexperiment 60, 155
- Genre (d'un quadrivecteur) 76
- Géodésiques 101, 102, 104, 179
- Géométrie locale 221, 225
- Gravitation 18
- Groupe 40
 - conforme 49
 - de Galilée 35, 13
 - de Lorentz 48-51, 73

- Homogénéité 2, 17, 89, 225, 230
- Hooke 19
- Horizon 58, 207, 222
- Horloge 2, 5, 11, 152, 174, 175, 178
- Huyghens 9, 20
- Hydrodynamique 123, 124
- Hypersurface 141
 - du genre espace 59, 60

- Identité de Bianchi 146, 212, 214
- Images multiples 195-199
- Indice 74
 - contravariant 74
 - covariant 75
 - de courbure 232

- Inertie 14
- Instantané 19
- Invariance 15, 48, 49, 79, 255
- Isotropie 2, 15, 17, 185, 225, 226, 230, 231

- Jauge TT 240, 243, 255
- Jupiter 33-37

- Kasner 233
- Kepler 18, 19
- Kronecker 15

- Lagrangien 216, 217, 279-283
- Lentille gravitationnelle (voir *Mirage*)
- Leverrier 30
- Levi-Civita 81, 103, 173
- Ligne d'univers 85, 228
- Limite quantique 245, 246
- Local 1, 22, 64, 172, 173, 179
- Loi d'Ohm 125, 126
- Lois de Kepler 18
- Longueur d'onde 68
- Lorentz 43, 63
- Lune 20, 30, 42, 60, 61, 167, 168

- Mach 7, 9, 20
- Mars 30, 191
- Masse 164
 - au repos 90, 91
 - grave (pesante) 20-22
 - grave (pesante) active 20-22, 167
 - grave (pesante) passive 20-22
 - inerte (ou d'inertie) 14
- Matière 2
 - noire, cachée, invisible 32
- Maxwell 7, 9, 36
- Mercure 30, 31, 41, 110, 188, 190, 191, 254
- Mersenne 33
- Métrique 46, 47, 142
 - à symétrie sphérique 183-185
 - de Friedman 226, 227
 - de Friedman–Robertson–Walker 226, 227

- de Kerr-Newman 233
- de Schwarzschild 187
- (pseudo-) 45, 46, 75
- Michell 25
- Michelson 10, 37-39
- Milgrom 32
- Minkowski 43-72
- Mirage gravitationnel 191, 195-203, 206, 207
- Modèles de Bianchi 233
- Moment quadropolaire 41, 42, 188, 248, 249
- Mouvement
 - inertiel 10-13
 - libre 10-13, 17
- Naines blanches 108, 177
- Nappes 46, 56
- Newcomb 30
- Newton 7, 8, 9, 10, 14, 19, 24
- Non linéaire 112
- Objets géométriques 4, 11, 45, 47
- Observateur 93
 - fondamental 228
- Occultation 33-37
- Oklo 172
- Onde gravitationnelle 237-253
- Ordre
 - de grandeur 110, 170
 - partiel 58
 - total 58
- Orientation 55
- Orthochrone 50
- Orthogonalité 55
- Paraboloïde de Flamm 221
- Paramétrage 85-87
- Paramètre gravitationnel 105, 106, 186
- Paramètres PPN 185-187, 189, 194, 203, 204
- Particule libre 180
- Particule-test 166, 219, 241, 243
- Passé 3, 46, 56, 57
- Périhélie 30, 31, 41, 42, 110, 188, 204, 254
- Permutations 81
- Philoponos 21
- Photon 107
- Planète 20, 105
- Plasma 206
- Plongement 138
- Poincaré 43, 44
- Polarisation 240, 241
- Potentiel 29, 214
- Potentiels de gravitation 24, 181, 214, 224
- Poynting 283
- Pression 123, 124, 213
- Principe
 - cosmologique 225
 - d'action et de réaction 10, 18, 20
 - d'équivalence 155-207
 - d'équivalence d'Einstein 166
 - d'équivalence faible 22, 155, 162
 - d'équivalence fort 155, 169
 - d'équivalence ultra-fort 155, 174
 - de Fermat 192, 196, 205
 - de relativité 15, 16, 17, 44, 45
 - d'inertie 4, 10-13
- Produit
 - scalaire 75
 - tensoriel 258, 259
- Projecteur 102, 103
- Pseudosphère 47, 104
- PSR 1913+16 106, 186, 238, 250, 252, 253
- Ptolémée 9, 31
- Quadri-accélération 87
- Quadricourant 115-119
- Quadri-force 92
- Quadri-potentiel 120, 121, 126
- Quadrivecteur 78, 96
- Quadrivitesse 86, 87, 228, 229
- Quasars 13, 171, 172
- Radar 189
- Rang 80

- Rayon
 - de Schwarzschild 222, 250
 - gravitationnel 222
- Rayonnement 237-253
- Référentiel galiléen 10-12
- Règle 2, 8, 11, 139, 140
- Relations d'incertitude 246
- Relativité 13-18
- Renversement du temps 12, 50
- Repère 94
 - galiléen 10, 11
- Retard temporel 200, 201
- Richer 20
- Riemann 140
- Römer 33-37
- Rotation 230

- Sanders 32
- Scalaire 146
- Schéma fluide parfait 123, 212, 254
- Seeliger 32
- Simultanéité 4-7, 55-62, 67
- Soleil 9, 12, 160, 178, 186, 189, 194
- Solution
 - de Kasner 233
 - de Kerr-Newman 233
 - de Reissner–Nordström 233
 - de Schwarzschild 219-225
- Sphère 40
- Spin 2 217
- STEP 163, 164
- Structure 3
 - affine 10
 - causale 3, 48, 58
 - globale 64-66, 221
 - métrique 4
- Superamas 13
- Supernova 249
- Surface du genre espace 59, 60, 71
- Surfaces à deux dimensions 133-139, 220, 221
- Symboles
 - de Christoffel 100, 103, 104, 153, 154, 177,
 - 223, 235
 - de connexion 98, 99, 154
- Symétrique 81
 - sphérique 183, 184, 207, 219, 224, 254
- Symétrisation 217, 283
- Synchrone 229, 230, 231, 254
- Synchronisation 5, 67, 68
- Système
 - de coordonnées 10-13
 - de référence 10-13
 - d'inertie 10-13, 45
 - inertiel 10-13, 45

- Temps
 - absolu 3, 8, 9
 - propre 87, 88, 189
 - universel 3, 225
- Tenseur 80
 - antisymétrique 102, 103, 119
 - de courbure 145, 153
 - d'Einstein 146, 212
 - de Ricci 146, 207, 223, 235
 - de Riemann 143-145, 153, 183, 211, 253
 - dual 120
 - énergie–impulsion 117, 122, 125, 217,
 - 251, 255, 282
 - métrique 75, 95, 135, 183
 - (symétrie du) 217
- Terre 25, 31, 34, 60, 61, 160, 167, 189
- Tests 66, 69
 - classiques 188-195
- Tétrade 73
- Théorème
 - de Birkhoff 224
 - de «platitude» 148
 - de Ricci 101
 - de Stokes 118, 277, 278
- Topologie 64-66
- Transformations
 - conformes 49
 - de Galilée 9, 11, 12, 40, 52
 - de jauge 121, 126, 236

de Lorentz 44, 68, 70, 77
Transport parallèle 131, 144
Transposition 81
Transverse–Traceless (TT) 240, 241
Trou noir 222, 249
Tycho Brahé 18

Uniformité du temps 2, 89
Unités 12, 40, 87
Univers 57, 58

Variation 42, 216, 229, 280
Variété 285-290
 riemannienne 147
Vénus 30, 31, 191
Vide 126
Vierbein 73
Violation 164
Vitesse 4, 5, 51
Voigt 44