Groupes quantiques

Introduction au point de vue formel

Alain Guichardet

École Polytechnique

Groupes quantiques

Introduction au point de vue formel

S A V O I R S   A C T U E L S

InterÉditions / CNRS Éditions

ISBN 2 7296 0564 9
ISBN 2-271-05272-6

À J. Dixmier qui m'a enseigné la rigueur

Table des matières

Introduction

La théorie des groupes quantiques est jeune, dynamique, et trouve sans cesse de nouvelles relations avec d'autres domaines : théorie quantique des champs, invariants de nœuds et de tresses, fonctions spéciales, représentations de groupes finis, ... On comprend aisément que les pères fondateurs et leurs successeurs directs aient préféré aller rapidement de l'avant plutôt que de s'astreindre à écrire en détail des démonstrations souvent fastidieuses, mais pas toujours faciles à reconstituer. Cet ouvrage ambitionne de remédier à cet état de fait, mais en restant dans un cadre restreint ; le chapitre V est consacré à une étude des groupes quantiques $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ vus comme des déformations formelles de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))$, c'est-à-dire du point de vue de Drinfeld, pour lesquels

1) on démontre que la définition usuelle par générateurs et relations conduit effectivement à une déformation formelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ (la démonstration est essentiellement équivalente à la construction d'une base à la Poincaré-Birkhoff-Witt),

2) on donne une présentation de leurs duaux restreints ou "algèbres de coordonnées sur $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$",

3) on écrit la "R-matrice universelle" dans le cas où $N = 1$, mais sans en faire la théorie. Le chapitre VI est d'un style un peu différent des précédents ; il est consacré à des travaux plus récents sur les déformations d'espaces homogènes, que l'on a systématiquement replacés dans le cadre des "algèbres de coordonnées sur $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$". Par contre il a semblé

utile de présenter de façon relativement extensive un assez grand nombre de préliminaires, comme :

• le "lemme diamant" (§ I.2), dont on fait par la suite un usage systématique pour construire des bases d'algèbres définies par générateurs et relations ;

• duaux restreints des algèbres (§ I.3), algèbres de fonctions représentatives sur les groupes discrets ou de Lie, et leurs présentations dans le cas des groupes classiques (§ II.2) ;

• algèbres de Hopf (§ II.1) et divers résultats de dualité entre ces algèbres et les groupes (§ II.3), destinés à motiver certaines notions relatives aux groupes quantiques, introduites ou non dans la suite de cet ouvrage ;

• diverses structures de Poisson sur les algèbres, cogèbres et bigèbres (§ II.5) qui apparaîtront au chapitre III comme dérivées de déformations formelles ; les structures ainsi obtenues sont couramment appelées "limites classiques" de ces déformations formelles ; l'un des problèmes centraux de la théorie consiste à "quantifier" une structure de Poisson donnée, c'est-à-dire à construire des déformations formelles l'admettant comme dérivée ;

• dans le cas d'une algèbre enveloppante, on obtient, par restriction à l'algèbre de Lie, la notion de bigèbre de Lie (§ II.5) ;

• équations de Yang-Baxter quantique et classique (§§ II.2, II.5, III.3) ;

• déformations formelles d'algèbres associatives, trivialité des déformations formelles des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie semi-simples, bijection entre représentations de l'algèbre déformée et de l'algèbre donnée (n° III.2.5), déformations formelles d'algèbres de Hopf et leurs duaux restreints (n° III.3.5).

Parmi les sujets d'étude qui auraient pu être abordés mais ne l'ont pas été, citons l'adaptation au cas des déformations formelles des notions d'involution et de norme sur une algèbre, qui pourrait conduire à l'étude des "formes réelles" des groupes quantiques ainsi qu'à l'assertion "le dual restreint de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est un groupe quantique compact". Le problème de la "fixation" ou "spécialisation" du paramètre n'a pas été abordé, sauf dans deux cas particulièrement simples : l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de Heisenberg, et le plan quantique de Manin ; pourtant un certain nombre de résultats (par exemple la bijection entre les représentations de l'algèbre déformée et de l'algèbre donnée) s'énoncent de la même façon dans les situations "déformation formelle" et "à paramètre fixé avec valeur générique du paramètre", et il serait intéressant de déduire les seconds des premiers. Remarquons aussi que nous n'avons pas abordé l'étude des quasi-algèbres de Hopf et autres quasi-structures.

Le lecteur aura compris que le point de vue adopté ici est essentiellement algébrique : les déformations formelles des algèbres de fonctions sur un groupe de Lie G n'apparaissent que par dualité à partir des déformations formelles de l'algèbre enveloppante : en particulier on ne fait pas une étude systématique d'objets géométriques comme les variétés de Poisson, les groupes de Lie-Poisson (voir cependant le § II.5.6), les $*$-produits, etc. Le lecteur désireux d'approfondir ses connaissances pourra consulter, parmi d'autres, les ouvrages [11] et [39].

Je tiens à remercier tout spécialement N. Andruskiewitsch, P. Cartier, B. Enriquez, D. Gurevich, Y. Kosmann-Schwarzbach, C. Moreno, M. Rosso, avec qui j'ai eu des conversations éclairantes en écrivant ce livre, ainsi que C. Kassel qui m'a permis de consulter son ouvrage *Quantum Groups* en cours de rédaction.

Chapitre I
Algèbres, présentations, duaux restreints

1. Notations générales

Sauf mention expresse du contraire, la lettre k désignera un corps commutatif et les k-algèbres associatives à unité seront appelées "algèbres". Les notations suivantes resteront valables lorsque k sera un anneau commutatif à unité.

Si V et W sont des k-modules, on écrira généralement $\mathrm{Hom}(V, W)$, $\mathrm{End}\, V$, V^*, $V \otimes W$ au lieu de $\mathrm{Hom}_k(V, W)$, $\mathrm{End}_k\, V$, $\mathrm{Hom}_k(V, k)$, $V \otimes_k W$. On note $\otimes V$ l'algèbre tensorielle de V sur k ; le produit dans cette algèbre sera noté tantôt ab, tantôt $a \otimes b$. Lorsque l'on aura deux applications linéaires $f_i : V_i \to W_i$, $i = 1, 2$, on écrira parfois $f_1 \times f_2$ au lieu de $f_1 \otimes f_2$ pour éviter toute confusion avec les produits tensoriels de représentations.

Si X est un ensemble, on note $\langle X \rangle$ le semi-groupe libre engendré par X et par l'élément neutre 1 ; ses éléments sont appelés *monômes* ; si V désigne le k-module libre de base X, $\langle X \rangle$ est une base de $\otimes V$, ce dernier espace étant aussi noté $k\langle X \rangle$ et appelé *algèbre associative libre construite sur* X ; $k\langle X \rangle$ est donc aussi l'ensemble des *polynômes non com-*

mutatifs par rapport aux éléments de X, tandis que $k[X]$ est l'ensemble des polynômes commutatifs.

Enfin $M(n, k)$ désigne l'algèbre des matrices à n lignes et n colonnes à coefficients dans k.

2. Présentations d'algèbres

Dans tout le § I.2, la lettre k désigne un anneau commutatif à unité.

2.1. Définition

On se donne un ensemble X et des éléments de $k\langle X\rangle$:

$$\xi^{(i)} = \lambda^{(i)}1 + \sum_{x} \lambda_x^{(i)} x + \sum_{x,y} \lambda_{x,y}^{(i)} xy + \cdots$$

où $x, y, \ldots$ parcourent X, i un certain ensemble I et $\lambda^{(i)}, \lambda_x^{(i)}, \lambda_{x,y}^{(i)}, \ldots \in k$. L'algèbre quotient de $k\langle X\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par ces éléments est appelée *algèbre définie par l'ensemble de générateurs X et les relations* $\xi^{(i)} = 0$.

2.2. Le lemme diamant

On se donne un ensemble X ; un *système de réductions* pour X est une famille $S = (\xi_i, \phi_i)_{i\in I}$, I ensemble quelconque, d'éléments de $\langle X\rangle \times k\langle X\rangle$.

A tout $i \in I$ et tous $a, b \in \langle X\rangle$, on associe la *réduction* $r_{a,i,b}$: opérateur k-linéaire dans $k\langle X\rangle$ transformant $a\xi_i b$ en $a\phi_i b$ et laissant fixes les autres éléments de la base $\langle X\rangle$.

Un monôme est dit *irréductible* s'il ne contient aucun ξ_i, c'est-à-dire s'il n'est pas de la forme $a\xi_i b$, $i \in I$, $a, b \in \langle X\rangle$.

Une *ambiguïté de recouvrement* est un quintuplet (i, j, a, b, c) tel que $i, j \in I$, $a, b, c \in \langle X\rangle - \{1\}$, $\xi_i = ab$, $\xi_j = bc$; elle est dite *résoluble* s'il existe des produits de réductions r' et r'' vérifiant $r'(\phi_i c) = r''(a\phi_j)$.

Une *ambiguïté d'inclusion* est un quintuplet (i, j, a, b, c) tel que $i, j \in I$, $i \neq j$, $a, b, c \in \langle X \rangle$, $\xi_i = b$, $\xi_j = abc$; elle est dite *résoluble* s'il existe des produits de réductions r' et r'' vérifiant $r'(a\phi_i c) = r''(\phi_j)$.

Le système de réductions S est dit *confluent* si toutes les ambiguïtés sont résolubles.

Théorème

On suppose vérifiées les deux conditions suivantes :

a) S est confluent,

b) il existe sur l'ensemble $\langle X \rangle$ une relation d'ordre (partiel) de monoïde, vérifiant la condition de chaîne descendante, et telle que pour tout i, ϕ_i soit une combinaison linéaire de monômes strictement inférieurs à ξ_i.

Alors

(i) Les monômes irréductibles forment une base de $k\langle X \rangle$ modulo l'idéal bilatère engendré par les éléments $\xi_i - \phi_i, i \in I$.

(ii) Soit ζ un élément de $k\langle X \rangle$; toute suite (ζ_n) obtenue par réductions successives à partir de ζ est stationnaire; son dernier élément est une combinaison linéaire de monômes irréductibles et est indépendant de la suite de réductions choisie.

Démonstration

Voir [5].

Remarque

Voici un moyen pratique de s'assurer que la condition b) est vérifiée. Ecrivons chaque ϕ_i comme une combinaison linéaire $\phi_i = \sum_\alpha \lambda_{i,\alpha}, \eta_{i,a}$ où $\lambda_{i,\alpha} \in k$ et $\eta_{i,\alpha} \in \langle X \rangle$. Soit n un entier > 0; munissons $\mathbf{N}^n$ de l'ordre lexicographique, *i.e.* on a $(m_1, \ldots, m_n) < (p_1, \ldots, p_n)$ si et seulement si $m_1 < p_1$ ou $m_1 = p_1$ et $m_2 < p_2$, etc. Supposons construite une application $F = (F_1, \ldots, F_n)$ de $\langle X \rangle$ dans $\mathbf{N}^n$ vérifiant la condition suivante :

b') si θ et ζ sont des éléments de $\langle X \rangle$ et si ζ se déduit de θ par remplacement d'un ξ_i par un $\eta_{i,\alpha}$, alors $F(\zeta)$ est strictement inférieur à $F(\theta)$.

Alors la condition b) est vérifiée en définissant la relation d'ordre $\theta > \zeta$ comme suit : il existe une suite $\theta = \theta_0, \ldots, \theta_p = \zeta$ telle que chaque θ_k se déduise de θ_{k-1} par remplacement d'un ξ_i par un $\eta_{i,\alpha}$.

Une application F vérifiant la condition b') sera dite *adaptée* au système de réductions.

2.3. Exemple

Supposons X totalement ordonné et prenons comme système de réductions S l'ensemble des éléments (yx, xy) où $x < y$; S est évidemment confluent ; prenons pour application $F : \langle X \rangle \to \mathbf{N}$ le *nombre d'inversions*, *i.e.* si $x_1 \cdots x_r$ est un monôme, $F(x_1 \cdots x_r)$ est le nombre de couples $i, j = 1, \ldots, r$ vérifiant $i < j$ et $x_j < x_i$; il est immédiat que F est adaptée. Le lemme diamant montre que l'algèbre obtenue admet pour base les monômes de la forme $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots$ avec $x_i \in X$ et $x_1 < x_2 < \cdots$; ce n'est autre que $k[X]$; on l'appelle *algèbre symétrique* du k-module libre V ayant pour base X et on la note aussi $S_k V$ ou SV. Résultat analogue pour *l'algèbre extérieure* $\wedge V$, mais ici $m_i = 1$.

2.4. Exemple

Notons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie ou non sur k qui est un k-module libre ; prenons pour X une base $(e_1, e_2, \ldots)$ de $\mathfrak{g}$; notons $\gamma_{i,j}^k$ les constantes de structure, définies par

$$[e_i, e_j] = \sum_k \gamma_{i,j}^k e_k.$$

Prenons pour système de réductions S l'ensemble des couples de la forme

$$(e_i e_j, e_j e_i + \sum_k \gamma_{i,j}^k e_k) \quad \text{où} \quad i > j.$$

Démontrons d'abord que S est confluent. On a à considérer les ambiguïtés de recouvrement $e_i e_j e_k$ avec $i > j > k$, mais pas d'ambiguïtés d'inclusion. Réduisant $e_i e_j e_k$ des deux façons possibles, *i.e.* en commençant par $e_i(e_j e_k)$ ou par $(e_i e_j) e_k$, on obtient deux expressions dont la différence est

$$\sum_q \sum_m (\gamma_{i,j}^m \gamma_{k,m}^q + \gamma_{j,k}^m \gamma_{i,m}^q + \gamma_{i,k}^m \gamma_{m,j}^q) e_q$$

et ceci est nul en vertu de l'identité de Jacobi.

Ensuite on peut définir $F : \langle X \rangle \to \mathbf{N}^2$ par

$$F_1(\theta) = \text{degré total de } \theta, \quad F_2(\theta) = \text{nombre d'inversions de } \theta;$$

pour tout produit $e_i e_j$ avec $i > j$, les $\eta_{i,\alpha}$ de la remarque ci-dessus sont $e_j e_i$ et certains éléments de X ; F est donc adaptée.

L'algèbre obtenue est appelée *algèbre enveloppante* de $\mathfrak{g}$ et notée $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; elle admet donc pour base les monômes de la forme $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots$ (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt).

2.5. Exemple

L'ensemble X est formé de trois éléments a, b, c ; S est formé des trois couples suivants : $(ba, ab - \lambda b)$, $(ca, ac + \lambda c)$, $(cb, bc - P(a))$ où $\lambda \in k$ et $P(a) \in k[a]$; il est facile de voir que S est confluent : il y a une seule ambiguïté de recouvrement (et pas d'ambiguïté d'inclusion), à savoir $(cb)a = c(ba)$; or $(cb)a$ se réduit successivement en $bca - P(a) \cdot a$, $bac + \lambda bc - P(a) \cdot a$, $abc - P(a) \cdot a$, et d'autre part $c(ba)$ se réduit successivement en $cab - \lambda cb$, acb, $abc - a \cdot P(a)$. Les divers $\eta_{i,\alpha}$ sont les suivants :

- pour l'élément $\xi_i = ba$: ab et b,
- pour $\xi_i = ca$: ac et c,
- pour $\xi_i = cb$: bc et certaines puissances de a.

Définissons $F : \langle X \rangle \to \mathbf{N}^3$ par

$$\begin{aligned} F_1(\theta) &= \text{degré total de } \theta \text{ par rapport à } b \text{ et } c \\ F_2(\theta) &= \text{degré total de } \theta \\ F_3(\theta) &= \text{nombre d'inversions de } \theta; \end{aligned}$$

F est adaptée. L'algèbre obtenue admet donc pour base les monômes $a^m b^n c^p$ où $m, n, p \in \mathbf{N}$; lorsque λ est non nul et que $P(a) = \mu a$ avec $\mu \neq 0$, c'est l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, k))$; le cas général nous servira au § IV.1.1 pour définir le *groupe quantique* $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2, k))$ par générateurs et relations.

2.6. Exemple

L'ensemble X est formé de quatre éléments a, b, c, d; S est formé des couples suivants : (ba, qab), (ca, qac), (cb, bc), (db, qbd), (dc, qcd), $(bc, qad - q1)$, $(da, q^2ad - (q^2 - 1)1)$ où q est un élément inversible fixé de k. On vérifie que S est confluent; les éléments $\eta_{i,\alpha}$ correspondant aux divers ξ_i sont les suivants : pour ba : ab; pour ca : ac; pour cb : bc; pour db : bd; pour dc : cd; pour bc : ad et 1; pour da : ad et 1. Définissons $F : \langle X \rangle \to \mathbf{N}^3$ comme à l'exemple précédent; F est adaptée. L'algèbre obtenue admet donc pour base les monômes $a^m b^n d^p$ et $a^m c^n d^p$; elle nous servira au §IV.3.4 dans l'étude du *dual restreint du groupe quantique* $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2, k))$.

3. Dual restreint d'une algèbre

Dans la suite du chapitre I, la lettre k désigne un corps commutatif.

3.1. Coefficients, formes linéaires représentatives

On appelle *antireprésentation* d'une algèbre A toute représentation de l'algèbre opposée A^{op}; A admet une représentation et une antireprésentation naturelles dans A^*, dites *régulières*, définies respectivement par $(a, \varphi) \to \varphi_a$ et $(a, \varphi) \to {}_a\varphi$ avec $\varphi_a(b) = \varphi(ba)$ et ${}_a\varphi(b) = \varphi(ab)$.

Soit (V, π) une représentation ou antireprésentation de A, $v \in V$, $\xi \in V^*$; on définit le *coefficient* $\Phi^\pi_{\xi,v} \in A^*$ par

$$\Phi^\pi_{\xi,v}(a) = \langle \xi, \pi(a) \cdot v \rangle .$$

Si V est de dimension finie et si (e_i) est une base de V et (e_i^*) la base duale, le coefficient $\Phi^\pi_{e_i^*,e_j}$ sera noté $\Phi^\pi_{i,j}$ ou encore $\pi_{i,j}$. Les coefficients des représentations de dimension finie sont aussi appelés *formes linéaires représentatives*, et forment un sous-espace vectoriel de A^* noté A^0 et appelé *dual restreint de A*.

Proposition 3.2

Pour un élément φ de A^* les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\varphi \in A^0$

(ii) φ *est un coefficient d'une antireprésentation de dimension finie*

(iii) les formes linéaires ${}_a\varphi$ *forment un sous-espace vectoriel de dimension finie*

(iv) les formes linéaires φ_a *forment un sous-espace vectoriel de dimension finie*

(v) $\operatorname{Ker}\varphi$ *contient un idéal à gauche de codimension finie*

(vi) $\operatorname{Ker}\varphi$ *contient un idéal à droite de codimension finie.*

Démonstration

On a (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) parce que $\langle \xi, \pi(a)\cdot v\rangle = \langle {}^t\pi(a)\cdot\xi, v\rangle$.

On a (i) $\Rightarrow$ (iv) parce que $(\Phi^{\pi}_{\xi,v})_a = \Phi^{\pi}_{\xi,\pi(a)v}$ et $(iv) \Rightarrow (i)$ parce que, pour tout $\varphi \in A^*$, $\varphi = \Phi^{\lambda}_{1,\varphi}$ où λ désigne la représentation régulière de A dans A^*.

Pour (iv) $\Rightarrow$ (vi), prendre $I = \bigcap_{a\in A} \operatorname{Ker}\varphi_a$.

Démontrons (vi) $\Rightarrow$ (iv); supposons que $\operatorname{Ker}\varphi$ contient un idéal à droite I de codimension finie; soit $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ une base de A modulo I; notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ les fonctions coordonnées sur cette base; alors, pour tout $a\in A$, on a

$$\varphi_a = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\alpha_i a)\cdot\lambda_i.$$

Les autres implications se démontrent de façon analogue.

3.3. Exemple

Prenons pour A l'algèbre $k[X]$ des polynômes à une indéterminée, d'éléments notés $a = \sum_n a_n X^n$; identifions A^* à $k^{\mathbf{N}}$ par la dualité $\langle\varphi, a\rangle = \sum_n \varphi_n a_n$. Alors φ appartient à A^0 si et seulement s'il existe un entier $r \geq 0$ et des éléments $\lambda^{(i)}$, $\mu^{(i)} \in A^*$, $i = 1,\ldots,r$ vérifiant $\varphi_{p+q} = \sum_{i=1}^{r} \lambda^{(i)}_p \mu^{(i)}_q$.

[La condition est trivialement suffisante; pour voir qu'elle est nécessaire, on note $(\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(r)})$ une base de l'espace des φ_a et on écrit, pour tout $a \in A$, $\varphi_a = \sum_{i=1}^{r} \lambda^{(i)}(a) \cdot \mu^{(i)}$.]

Si k est algébriquement clos, les conditions ci-dessus sont encore équivalentes à la suivante : φ est combinaison linéaire d'éléments ψ de la forme

$$\psi_n = \sum_{q=0}^{p} \lambda_q \binom{n}{q} \alpha^{n-q}$$

où $p \in \mathbf{N}$, $\alpha \in k$, $\lambda_q \in k$; en effet, d'après le théorème des "formes réduites" de Jordan, toute représentation de dimension finie de $k[X]$ est somme directe de représentations de la forme

$$X \to \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha \end{pmatrix}.$$

4. Algèbres de fonctions représentatives sur les groupes

4.1. Définitions

Soient G un groupe, (V, π) une représentation de dimension finie de G sur k, v un élément de V, ξ un élément de V^*; on définit le coefficient $\Phi^{\pi}_{\xi,v}$ comme étant la fonction sur G à valeurs dans k :

$$\Phi^{\pi}_{\xi,v}(g) = \langle \xi, \pi(g) \cdot v \rangle .$$

Ces fonctions sont aussi appelées *fonctions représentatives*; leur ensemble sera noté $\mathcal{R}(G)$. L'existence de sommes directes et produits tensoriels de représentations entraîne immédiatement que $\mathcal{R}(g)$ est une algèbre (commutative) pour le produit ordinaire des fonctions.

Notons kG l'algèbre du groupe G sur k ; c'est l'espace vectoriel ayant pour base des éléments notés ε_g, $g \in G$; la multiplication (*produit de convolution*) y est donnée par

$$\varepsilon_g \varepsilon_{g'} = \varepsilon_{gg'}$$

ou encore, en considérant les éléments de kG comme des fonctions sur G,

$$(ab)(g) = \sum_{g'g''=g} a(g')a(g'').$$

Les représentations de kG correspondent bijectivement à celles de G, donc $(kG)^0$ s'identifie à $\mathcal{R}(G)$; nous verrons plus loin (§ II.2.3) pourquoi $(kG)^0$ est une algèbre.

Si G est un groupe topologique et si $k = \mathbf{C}$, on note $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ la sous-algèbre de $\mathcal{R}(G)$ formée des coefficients des représentations de dimension finie continues ; c'est une *algèbre involutive*, c'est-à-dire stable par passage à la fonction complexe conjuguée.

4.2. Cas des groupes de Lie complexes ($k = \mathbf{C}$)

Si G est un groupe de Lie complexe, on note $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ la sous-algèbre de $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ formée des coefficients des représentations de dimension finie holomorphes.

Proposition

Si G est un groupe de Lie complexe semi-simple et connexe, et si ρ est une représentation holomorphe de dimension finie fidèle, ses coefficients ρ_{ij} engendrent l'algèbre $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$.

Démonstration

a) Notons K un sous-groupe compact maximal de G ; on sait (cf. [43], § 3.1.1) qu'en associant à toute représentation holomorphe de dimension finie de G sa restriction à K, on obtient une bijection entre représentations holomorphes de dimension finie de G et représentations continues de dimension finie de K ; il en résulte que les algèbres $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ et $\mathcal{R}_{\text{cont}}(K)$ sont isomorphes. Notant π la restriction de ρ à K, il suffit donc de prouver que les coefficients π_{ij} engendrent $\mathcal{R}_{\text{cont}}(K)$.

b) Le théorème de Stone-Weierstrass montre d'abord que la sous-algèbre engendrée par les π_{ij} et les $\overline{\pi_{ij}}$ est partout dense dans $\mathcal{R}_{\mathrm{cont}}(K)$; les $\overline{\pi_{ij}}$ sont les coefficients de la représentation $\overline{\pi}$ conjuguée de π ; comme π est unitarisable, $\overline{\pi}$ est équivalente à la contragrédiente π^c de π : $\pi^c(g) = {}^t\pi(g)^{-1}$; comme K est semi-simple et connexe, $\pi(g)$ est de déterminant 1 et les coefficients matriciels de ${}^t\pi(g)^{-1}$ sont des polynômes par rapport aux π_{ij}. Ceci montre que la sous-algèbre engendrée par les π_{ij} est partout dense dans $\mathcal{R}_{\mathrm{cont}}(K)$.

c) Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que toute représentation continue de dimension finie de K est contenue dans une puissance tensorielle de π. Supposons le contraire ; il existe alors une représentation irréductible τ qui n'est contenue dans aucune puissance tensorielle de π ; en vertu des relations d'orthogonalité (cf. [34], § IV.2.4), les coefficients de τ sont orthogonaux à tous les π_{ij}, et ceci contredit b).

4.3. Présentation de l'algèbre $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(SL(n, \mathbf{C}))$

Notons ρ la représentation naturelle de $G = SL(n, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^n$; la proposition précédente montre que $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ est l'algèbre engendrée par les coefficients ρ_{ij}. Notons $\mathbf{C}[(X_{ij})]$ l'algèbre des polynômes sur $\mathbf{C}$ par rapport aux n^2 indéterminées X_{ij} ; en associant à tout élément P de $\mathbf{C}[(X_{ij})]$ l'élément $P((\rho_{ij}))$ de $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$, on obtient un morphisme *surjectif* $F : \mathbf{C}[(X_{ij})] \to \mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$.

Notons enfin D l'élément “déterminant” de $\mathbf{C}[(X_{ij})]$:

$$D = \sum_{s \in S_n} (-1)^{I(s)} X_{1,s(1)} \cdots X_{n,s(n)}$$

où $I(s)$ désigne le nombre d'inversions de la permutation s.

Proposition

Le noyau de F est l'idéal de $\mathbf{C}[(X_{ij})]$ engendré par l'élément $D - 1$.

Démonstration

Il est clair que l'idéal I engendré par $D - 1$ est inclus dans $\operatorname{Ker} F$. Démontrons l'inclusion inverse. Soit P un élément de $\operatorname{Ker} F$; cela signifie que

$P((x_{ij}))$ est nul pour toute matrice (x_{ij}) de déterminant 1, donc que P s'annule sur la sous-variété de $\mathbf{C}^{n^2}$ définie par l'idéal I ; le Nullstellensatz de Hilbert (cf. [33], § X.2) affirme alors qu'une certaine puissance de P appartient à I, *i.e.* est divisible par $D-1$, et on doit déduire de là que P lui-même est divisible par $D-1$. Comme tout polynôme est un produit de polynômes irréductibles (cf. [33], § V.6), il suffit de montrer que $D-1$ est irréductible.

Supposons donc $D-1 = PQ$ et démontrons que P ou Q est scalaire. On peut écrire

$$\mathbf{C}[(X_{ij})] = \mathcal{A}[X_{11}, \ldots, X_{1n}]$$

où $\mathcal{A}$ est l'algèbre des polynômes par rapport aux variables X_{ij}, $i \neq 1$; sous cette forme, D est un polynôme homogène de degré 1 à coefficients dans $\mathcal{A}$. Notons P_0 et Q_0, éléments de $\mathcal{A}$, les termes de degré 0 de P et Q ; la relation $P_0Q_0 = -1$ entraîne que P_0 et Q_0 sont des scalaires α et β. Le facteur X_{11} apparaît avec le degré 1 dans P ou Q, disons par exemple dans P, mais non dans Q ; si un facteur X_{1i} apparaissait dans Q, le facteur $X_{11}X_{1i}$ apparaîtrait dans PQ, ce qui n'est pas le cas. Donc $Q = Q_0 = \beta$.

4.4. Remarque

Nous donnerons plus loin (§ II.2.5) des présentations des algèbres $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}$ pour les autres groupes simples complexes classiques.

Chapitre II
Algèbres de Hopf

Pour une étude plus complète des algèbres de Hopf, on pourra consulter le livre [1].

1. Définitions et premiers exemples

1.1. Retour sur les algèbres

Désignant toujours par k un corps commutatif, on va donner de diverses notions relatives aux k-algèbres une formulation nouvelle et utile dans la suite.

a) Une algèbre (non nécessairement associative) est un couple (A, μ) où A est un espace vectoriel et μ une application linéaire $A \otimes A \to A$;

b) A est associative si l'on a

$$\mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu) : A \otimes A \otimes A \to A;$$

c) A est commutative si $\mu \circ \sigma = \mu$ où σ désigne l'automorphisme de $A \otimes A$ défini par $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$;

d) la donnée d'un élément unité pour A équivaut à celle d'une application linéaire $i : k \to A$ vérifiant

$$\mu(a \otimes i(\lambda)) = \mu(i(\lambda) \otimes a) = \lambda a \qquad \forall\, \lambda \in k,\ a \in A.$$

Par ailleurs on munit $A \otimes A$ d'une structure d'algèbre en posant

$$(a_1 \otimes a_2) \cdot (b_1 \otimes b_2) = a_1 b_1 \otimes a_2 b_2;$$

en d'autres termes, l'application μ' relative à $A \otimes A$ est donnée par

$$\mu' = (\mu \otimes \mu) \circ \sigma_{23}$$

où σ_{23} est l'automorphisme de $A \otimes A \otimes A \otimes A$ défini par

$$\sigma_{23}(a_1 \otimes a_2 \otimes b_1 \otimes b_2) = a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2.$$

Sauf mention expresse du contraire, nous considérerons uniquement des algèbres associatives à unité.

1.2. Cogèbres

On obtient les notions relatives aux cogèbres en renversant le sens des flèches dans les définitions ci-dessus :

a) Une *cogèbre* est un couple (A, Δ) où A est un espace vectoriel et Δ une application linéaire $A \to A \otimes A$ appelée *comultiplication*; il sera commode d'écrire

$$\Delta(a) = \sum_i a'_i \otimes a''_i$$

malgré la non-unicité d'une telle décomposition ;

b) A est *coassociative* si l'on a

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta) \circ \Delta : A \to A \otimes A \otimes A$$

c) A est *cocommutative* si $\sigma \circ \Delta = \Delta$, c'est-à-dire si Δ envoie A dans l'ensemble des tenseurs symétriques ;

d) une *coünité* est un élément ε de A^* vérifiant

$$\sum_i \varepsilon(a_i') \cdot a_i'' = \sum \varepsilon(a_i'') \cdot a_i' = a \qquad \forall\, a \in A.$$

Sauf mention expresse du contraire, nous considérerons uniquement des cogèbres coassociatives à coünité. On laisse au lecteur le soin de définir les *morphismes de cogèbres.*

Exemple

Si (A, μ) est une algèbre, l'espace vectoriel dual A^* n'est pas en général une cogèbre pour l'opération duale de μ, car celle-ci envoie A^* dans l'espace $(A \otimes A)^*$ qui contient strictement $A^* \otimes A^*$ (sauf bien entendu si A est de dimension finie). Par contre le dual restreint A^0 de A est une cogèbre parce que, avec les notations du § I.3.1, on a

$$^t\mu(\Phi^\pi_{i,j}) = \sum_k \Phi^\pi_{i,k} \otimes \Phi^\pi_{k,j};$$

nous noterons Δ^0 cette comultiplication de A^0.

Prenons en particulier $A = M(n, k)$ et identifions $A^0 = A^*$ à A au moyen de la forme bilinéaire

$$(a, b) \to \mathrm{Tr}(^t a \cdot b) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij};$$

A devient une cogèbre avec la comultiplication Δ^0 définie par

$$\Delta^0(e_{ij}) = \sum_k e_{ik} \otimes e_{kj}$$

où les e_{ij} sont les unités matricielles de A; cette cogèbre admet la coünité $\varepsilon^0 = \mathrm{Tr}$, mais n'est pas une bigèbre au sens du § suivant.

1.3. Bigèbres

Une *bigèbre* est un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre et d'une structure de cogèbre compatibles en ce sens que Δ et ε doivent être des morphismes d'algèbres; la première condition signifie que

$$\Delta \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \Delta);$$

la seconde s'énonce en disant que ε est une *augmentation* de A. Le lecteur s'assurera sans peine qu'il revient au même d'imposer que μ et i soient des morphismes de cogèbres.

Les bigèbres sont donc des quintuplets $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon)$.

Exemple

Fixons un entier n et notons $k[(X_{ij})]$ l'algèbre des polynômes par rapport aux X_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Alors $k[(X_{ij})]$ est une bigèbre à coünité pour des opérations Δ et ε caractérisées par

$$\Delta(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}, \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij};$$

mais cette bigèbre n'admet pas d'antipode au sens du § suivant.

1.4. Antipodes

Définition

Une *antipode* d'une bigèbre $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon)$ est une application linéaire S de A dans elle-même vérifiant

$$\mu \circ (S \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta = \mu \circ (\mathrm{id}_A \otimes S) \circ \Delta = i \circ \varepsilon$$

i.e.

$$\sum_i S(a'_i) \cdot a''_i = \sum_i a'_i \cdot S(a''_i) = \varepsilon(a)1 \qquad \forall\, a \in A.$$

Lemme

Il existe au plus une antipode, et elle vérifie la relation $S(ab) = S(b)S(a)$, autrement dit est un antiendomorphisme d'algèbres.

Démonstration

a) Etant donné une algèbre (A, μ, i) et une cogèbre (C, Δ, ε), on définit une opération binaire $*$ sur l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ par

$$u * v = \mu \circ (u \otimes v) \circ \Delta;$$

il est immédiat que $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ devient ainsi une algèbre associative avec élément unité $i \circ \varepsilon$. En outre, lorsque $A = C$, un élément S de $\mathrm{End}_k(A)$ est une antipode si et seulement si

$$S * \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A * S = i \circ \varepsilon.$$

Ceci prouve l'unicité.

b) Pour démontrer la seconde assertion, on va démontrer l'égalité des deux applications f et g de $A \otimes A$ dans A définies par

$$f(a \otimes b) = S(b)S(a), \quad g(a \otimes b) = S(ab).$$

D'après a) il suffit de vérifier que

$$g * \mu = \mu * f = i \circ \varepsilon$$

ce qui est facile.

Remarque

L'antipode, si elle existe, n'est pas nécessairement bijective; mais on peut démontrer qu'elle l'est (et qu'elle est même de carré 1) si A est commutative ou cocommutative (cf. [1], theorem 2.1.4).

1.5. Algèbres de Hopf

On appelle *algèbre de Hopf* toute bigèbre munie d'une antipode; c'est donc un sextuplet $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon, S)$.

Lemme (quotients d'algèbres de Hopf)

Soit $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf, I un idéal bilatère de l'algèbre A vérifiant les conditions

$$\Delta(I) \subset A \otimes I + I \otimes A, \quad S(I) \subset I, \quad \varepsilon(I) = 0.$$

Les applications Δ, S, ε passent au quotient de sorte que A/I devient une algèbre de Hopf.

Démonstration

Il suffit de remarquer que l'on a

$$A/I \otimes A/I = (A \otimes A)/(A \otimes I + I \otimes A).$$

1.6. Exemple

Le corps k est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative pour les opération suivantes :

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \varepsilon = S = \mathrm{Id}_k\,.$$

1.7. Exemple

Si X est un ensemble, il existe sur $k\langle X\rangle$ une unique structure d'algèbre de Hopf (évidemment cocommutative) vérifiant

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad S(x) = -x, \quad \varepsilon(x) = 0 \qquad \forall\, x \in X.$$

Elle est donnée par

$$\Delta(x_1 \cdots x_n) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_p} x_{i_1} \cdots x_{i_p} \otimes x_{j_1} \cdots x_{j_{n-p}}$$

(où $j_1, \ldots, j_{n-p}$ sont les indices distincts de tous les i_k et rangés dans l'ordre croissant) et

$$S(x_1 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_1.$$

On vérifie immédiatement que l'idéal bilatère I de $k\langle X\rangle$ engendré par les éléments de la forme $xy - yx$ avec $x, y \in X$ satisfait aux conditions du lemme II.1.5, de sorte que l'algèbre symétrique $k[X]$ construite sur X est une algèbre de Hopf (commutative et cocommutative). Identifiant $k[X] \otimes k[X]$ à $k[X \cup X]$ où $\cup$ désigne la réunion disjointe, on peut écrire

$$\Delta(P)(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots) = P(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots) \qquad \forall\, P \in k[X].$$

1.8. Exemple

Soit G un groupe (discret), kG son algèbre de groupe (cf. § I.4.1) ; kG est une algèbre de Hopf cocommutative pour les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= \sum_{g \in G} a(g) \cdot \varepsilon_g \otimes \varepsilon_g \\ \varepsilon(a) &= \sum_{g \in G} a(g) \\ S(a)(g) &= a(g^{-1}). \end{aligned}$$

1.9. Exemple

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur k, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante (cf. § I.2.4) ; le lemme II.1.5 montre que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf cocommutative pour les opérations caractérisées par

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \varepsilon(X) = 0, \quad S(X) = -X$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$; ε et S sont appelés respectivement *augmentation canonique* et *antiautomorphisme principal* de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

2. Représentations et duaux restreints des algèbres de Hopf

2.1. Opérations sur les représentations des algèbres de Hopf

2.1.1. *Premières propriétés*

Remarquons d'abord que, si A est une algèbre, la seule opération que l'on puisse faire en toute généralité sur ses représentations est celle de somme directe. Par contre, si A est une algèbre de Hopf, on peut définir les produits tensoriels et les représentations contragrédientes de la façon suivante :

• si (V, π) et (W, ρ) sont deux représentations, on définit la représentation *produit tensoriel* $\pi \otimes \rho$ dans $V \otimes W$ par

$$(\pi \otimes \rho)(a) = \sum_i \pi(a_i') \otimes \pi(a_i''),$$

en bref $\pi \otimes \rho = (\pi \times \rho) \circ \Delta$;

• si (V, π) est une représentation, on définit la représentation *contragrédiente* π^c dans V^* par

$$\pi^c(a) = {}^t\pi(S(a)).$$

On dispose aussi d'une *représentation triviale* de dimension 1, à savoir ε.

Le produit tensoriel possède une propriété d'associativité :

$$(\pi \otimes \rho) \otimes \sigma = \pi \otimes (\rho \otimes \sigma)$$

qui résulte de la coassociativité de Δ.

Soit (V, π) une représentation ; on définit par récurrence ses *puissances tensorielles* :

$$\otimes^{m+1}\pi = \pi \otimes (\otimes^m \pi)$$

et on a

$$\otimes^{m+n}\pi = (\otimes^m \pi) \otimes (\otimes^n \pi);$$

notons $\otimes\pi$ la somme directe des $\otimes^m\pi$; on a la relation suivante entre $\otimes\pi$ et la structure d'algèbre de $\otimes V$:

$$(\otimes\pi)(a) \cdot x \otimes y = \sum_i ((\otimes\pi)(a_i') \cdot x) \otimes ((\otimes\pi)(a_i'') \cdot y);$$

on en déduit sans peine que, si W est un sous-espace vectoriel de $\otimes^2 V$, stable par $\otimes^2\pi$, l'idéal bilatère de $\otimes V$ engendré par W est stable par $\otimes\pi$.

Remarque

Plus généralement, on définit la notion d'*action* π d'une bigèbre A sur une algèbre B par la relation

$$\pi(a) \circ \mu_B = \mu_B \circ (\pi \otimes \pi)(a).$$

2.1.2. *Commutativité des produits tensoriels et R-matrices*

Etant donnés deux k-espaces vectoriels V et W, nous noterons $\sigma_{V,W}$ et nous appellerons *volte* l'isomorphisme $V \otimes W \to W \otimes V$ transformant tout tenseur de la forme $v \otimes w$ en $w \otimes v$.

Supposons maintenant que V et W portent des représentations π et ρ d'une algèbre de Hopf A ; il est faux en général que $\sigma_{V,W}$ entrelace $\pi \otimes \rho$ et $\rho \otimes \pi$ [c'est néanmoins vrai si A est cocommutative, car alors tout élément $\Delta(a)$ est somme de tenseurs de la forme $x \otimes y + y \otimes x$]. Mais supposons qu'il existe un élément R de $A \otimes A$ inversible et vérifiant la relation

$$(\text{II.1}) \qquad R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1} = \sigma_{A,A}(\Delta(a)) \qquad \forall\, a \in A;$$

alors l'application composée $\sigma_{V,W} \circ (\pi \times \rho)(R)$ est un isomorphisme $V \otimes W \to W \otimes V$ qui entrelace $\pi \otimes \rho$ et $\rho \otimes \pi$; on la notera $C_{V,W}$.

Supposons de plus que R vérifie les relations

$$\begin{array}{lrcl} (\text{II.2}) & (\Delta \otimes \mathrm{id}_A)(R) & = & R_{13}R_{23} \\ (\text{II.3}) & (\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(R) & = & R_{13}R_{12} \end{array}$$

où les $R_{i,j}$ sont définis comme suit : on écrit $R = \sum_i R'_i \otimes R''_i$ et on pose

$$\begin{aligned} R_{12} &= \sum_i R'_i \otimes R''_i \otimes 1 = R \otimes 1 \\ R_{23} &= \sum_i 1 \otimes R'_i \otimes R''_i = 1 \otimes R \\ R_{13} &= \sum_i R'_i \otimes 1 \otimes R''_i; \end{aligned}$$

alors les $C_{V,W}$ vérifient

$$\begin{array}{lrcl} (\text{II.4}) & C_{U,V\otimes W} & = & (\mathrm{id}_V \otimes C_{U,W}) \circ (C_{U,V} \otimes \mathrm{id}_W) \\ (\text{II.5}) & C_{U\otimes V,W} & = & (C_{U,W} \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_U \otimes C_{V,W}) \end{array}$$

Les éléments R satisfaisant les trois relations ci-dessus sont appelés *R-matrices universelles*; ils satisfont aussi la relation suivante, dite *équation de Yang-Baxter quantique* :

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

[pour le vérifier, on peut poser $T = R^{-1}$ et appliquer successivement les formules (3), (1), (3) à $T_{12}T_{13}T_{23}$].

Une algèbre de Hopf munie d'une R-matrice universelle est dite *quasi-triangulaire*; elle est dite *triangulaire* si de plus $\sigma_{A,A}(R)\cdot R = 1\otimes 1$.

Les relations (II.4) et (II.5) sont utilisées pour construire des invariants de tresses, lesquels ne sont intéressants que si l'on n'a pas identiquement

$$\sigma_{V,W}\circ\sigma_{W,V} = I$$

et donc pas

$$\sigma_{A,A}(R)\cdot R = 1\otimes 1.$$

L'un des principaux objets de la théorie des groupes quantiques est de construire des R-matrices universelles; nous en indiquerons une au § IV.4.

2.2. Dual restreint d'une algèbre de Hopf

Remarquons tout d'abord que, si A est une cogèbre, l'espace vectoriel dual A^* est une algèbre pour les opérations duales des opérations Δ et ε ; par contre, si A est une algèbre, nous avons vu au § II.1.2 que A^* n'est en général pas une cogèbre pour l'opération duale de μ.

Théorème

Si $(A,\mu,i,\Delta,\varepsilon,S)$ est une algèbre de Hopf, son dual restreint A^0 est une algèbre de Hopf pour les opérations duales de celles de A ; nous les noterons $\mu^0 = {}^t\Delta|_{A^0\otimes A^0}$, etc.

Démonstration

On va faire une partie des vérifications, laissant les autres au lecteur.

a) ${}^t\Delta$ envoie $A^0\otimes A^0$ dans A^0 parce que, avec les notations du § I.3.1, on a

$${}^t\Delta(\Phi^\pi_{\xi,v}\otimes\Phi^\rho_{\eta,w}) = \Phi^{\pi\otimes\rho}_{\xi\otimes\eta,v\otimes w}.$$

b) ${}^t\mu$ envoie A^0 dans $A^0\otimes A^0$ parce que l'on a

$${}^t\mu(\pi_{ij}) = \sum_k \pi_{ik}\otimes\pi_{kj}.$$

c)${}^tS$ envoie A^0 dans lui-même parce que

$${}^tS(\Phi^{\pi}_{\xi,v}) = \Phi^{\pi^c}_{v,\xi}.$$

On remarquera que l'élément unité de A^0 n'est autre que ε.

2.3. Exemple : cas de $A = kG$

Soit G un groupe (discret), kG son algèbre de groupe (cf. § I.4.1 et II.1.8) ; identifions $(kG)^0$ à $\mathcal{R}(G)$; il est facile de voir que la multiplication μ^0 n'est autre que la multiplication ordinaire des fonctions sur G, et que Δ^0, ε^0, S^0 sont donnés respectivement par

$$\Delta^0(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2)$$

(on a identifié les éléments de $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$ à des fonctions sur $G \times G$)

$$\begin{aligned} \varepsilon^0(f) &= f(e) \\ S^0(f)(g) &= f(g^{-1}). \end{aligned}$$

2.4. Duaux restreints des algèbres enveloppantes

On suppose ici que $k = \mathbf{C}$.

2.4.1. *Généralités*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante (cf. § I.2.4 et II.1.9), G le groupe de Lie connexe et simplement connexe correspondant; rappelons (cf. [43], Appendice 2.4) que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'ensemble des distributions sur G ayant pour support l'élément neutre e, le produit dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ devenant le produit de convolution des distributions; plus précisément, à tout $X \in \mathfrak{g}$ correspond la distribution $f \to \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\exp tX)$, et le produit de convolution de deux distributions u et v est la distribution associant à toute fonction test f la valeur de $u \otimes v$ sur la fonction $(g_1, g_2) \to f(g_1 g_2)$.

Par ailleurs, G étant connexe et simplement connexe, les représentations de dimension finie de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ correspondent bijectivement aux représentations holomorphes de dimension finie de G (cf. [34], § XI.1.4). Ceci étant, il est facile de vérifier que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ s'identifie à $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ et que les opérations μ^0, Δ^0, ε^0, S^0 sont données par les mêmes formules qu'au § II.2.3. En particulier nous avons démontré ce qui suit :

Proposition 2.4.2

L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ est isomorphe à l'ensemble $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ muni de la multiplication ordinaire des fonctions.

Corollaire 2.4.3

Prenons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ et notons $\rho_{i,j}$ les coefficients de la représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ provenant de la représentation naturelle de $\mathfrak{g}$. L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ est définie par les générateurs $\rho_{i,j}$ et les relations

$$\sum_{s \in S_n} (-1)^{I(s)} \rho_{1,s(1)} \cdots \rho_{n,s(n)} - 1 = 0$$

$$\rho_{i,j} \cdot \rho_{k,\ell} - \rho_{k,\ell} \cdot \rho_{i,j} = 0.$$

Cela résulte de I.4.3.

2.4.4. *Remarque*

Le corollaire ci-dessus reste vrai si l'on remplace le corps $\mathbf{C}$ par un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ; on a en effet, pour les représentations de dimension finie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, k)$ (resp. du groupe de Lie $SL(n, k)$), une classification tout à fait analogue à celle du cas où $k = \mathbf{C}$: voir par exemple [8], § VIII.7 (resp. [26], ch. XI).

2.4.5. *Remarque*

Posons $G = SL(n, \mathbf{C})$; on a vu au § I.4.3 que $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ est isomorphe à l'algèbre quotient de $\mathbf{C}[(X_{ij})]$ par l'idéal engendré par $D - 1$; on va décrire les opérations Δ^0, ε^0, S^0 de ce point de vue. Les deux premières s'obtiennent par passage au quotient à partir des opérations Δ' et ε' sur $\mathbf{C}[(X_{ij})]$ définies au § II.1.3 :

$$\Delta'(X_{ij}) = \sum_k X_{ik} \otimes X_{kj}, \qquad \varepsilon'(X_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Pour S^0 c'est un peu plus délicat : notons M_{ij} le cofacteur de X_{ij} dans la matrice de coefficients $X_{k\ell}$; on sait que

$$\sum_k M_{ik} X_{jk} = \sum_k M_{ki} X_{kj} = \delta_{ij} D;$$

ceci étant, S^0 s'obtient par passage au quotient à partir de l'opération S' donnée sur $\mathbf{C}[(X_{ij})]$ par

$$S'(X_{ij}) = M_{ji},$$

mais S' n'est pas une antipode.

2.4.6. *Cas de* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ est produit direct de $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ et de l'algèbre de Lie abélienne $\mathbf{C} \cdot Z$ où Z est la matrice identité. Le groupe de Lie simplement connexe correspondant est $SL(n, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}$, dont $GL(n, \mathbf{C})$ est le quotient *via* le morphisme p défini par $p(g, \lambda) = e^\lambda g$ pour $g \in SL(n, \mathbf{C})$, $\lambda \in \mathbf{C}$.

L'algèbre $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(GL(n, \mathbf{C}))$ est une sous-algèbre de $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(SL(n, \mathbf{C}) \times \mathbf{C})$. Notant ρ la représentation naturelle de $GL(n, \mathbf{C})$ ou de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^n$, on a un morphisme injectif évident de $\mathbf{C}[(X_{i,j})]$ dans $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(GL(n, \mathbf{C}))$; il en résulte un morphisme injectif de $\mathbf{C}[(X_{i,j})]$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C}))^0$, dont l'image est l'ensemble des coefficients des représentations qui sont des sommes directes de puissances tensorielles de ρ.

2.5. Présentations des algèbres $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}$ pour les groupes de Lie simples complexes classiques

Ayant traité au § I.4.3 le cas de $G = SL(n, \mathbf{C})$, nous prenons maintenant $G = SO(n, \mathbf{C})$ ou $Sp(n, \mathbf{C})$ et nous notons ρ sa représentation naturelle dans $\mathbf{C}^n$ ou $\mathbf{C}^{2n}$; G est caractérisé au sein de $SL(n, \mathbf{C})$ ou $SL(2n, \mathbf{C})$ par des conditions $P_{ij} = 0$ où les P_{ij} sont des polynômes de la forme

$$P_{ij} = \sum_{k,\ell} \varepsilon_{k\ell} X_{ik} X_{j\ell} - \varepsilon_{ij}$$

avec

- pour $G = SO(n, \mathbf{C})$: $i, j = 1, \ldots, n$ et $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$

- pour $G = Sp(n, \mathbf{C})$: $i, j = 1, \dots, 2n$ et

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + n \\ -1 & \text{si } j = i + n \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

En vertu de la proposition I.4.2 on a une application surjective F' de $\mathbf{C}[(X_{ij})]$ sur $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ associant à tout polynôme $P \in \mathbf{C}[(X_{ij})]$ l'élément $P((\rho_{ij}))$.

Proposition

Le noyau de F' est l'idéal I' engendré par $D - 1$ et les P_{ij}.

Démonstration

a) Posons $A = \mathbf{C}[(X_{ij})]$; utilisant le Nullstellensatz comme à la proposition I.4.3, on est ramené à prouver que, dans A/I', tout élément nilpotent est nul. Pour cela nous utiliserons le résultat suivant (cf. [1], corollaire 2.5.4) : dans une algèbre de Hopf commutative, tout élément nilpotent est nul. Il nous suffit donc de munir A/I' d'une structure d'algèbre de Hopf compatible avec sa structure d'algèbre. On a décrit au § II.2.4 une telle structure sur A/I ; il suffit donc de montrer que celle-ci passe au quotient, ou encore que les opérations Δ', ε', S' définies dans A passent au quotient par I'.

b) Cas de Δ' : il s'agit de vérifier que Δ' envoie les P_{ij} dans $I' \otimes A + A \otimes I'$; or on a

$$\begin{aligned} \Delta'(P_{ij}) &= \sum_{k,\ell} \varepsilon_{k\ell} \Delta'(X_{ik}) \Delta'(X_{j\ell}) - \varepsilon_{ij} 1 \otimes 1 \\ &= \sum_{k,\ell,m,n} \varepsilon_{k\ell} X_{im} X_{jn} \otimes X_{mk} X_{n\ell} - \varepsilon_{ij} 1 \otimes 1 \\ &= \sum_{m,n} X_{im} X_{jn} \otimes (P_{mn} + \varepsilon_{mn}) - \varepsilon_{ij} 1 \otimes 1 \\ &= \sum_{m,n} X_{im} X_{jn} \otimes P_{mn} + P_{ij} \otimes 1. \end{aligned}$$

c) Cas de ε' : on doit vérifier que $\varepsilon'(P_{ij}) = 0$, ce qui est évident.

d) Cas de S' : on doit montrer que S' envoie P_{ij} dans I' ; or

$$S'(P_{ij}) = \sum_{k,\ell} \varepsilon_{k\ell} M_{ki} M_{\ell j} - \varepsilon_{ij};$$

calculant maintenant modulo I' on a

$$\begin{aligned} S'(P_{ij}) &= \sum_{k,\ell} \Big(\sum_{m,n} \varepsilon_{mn} X_{km} X_{\ell n} \Big) M_{ki} M_{\ell j} - \varepsilon_{ij} \\ &= \sum_{k,\ell,m,n} e_{mn} X_{km} M_{ki} X_{\ell n} M_{\ell j} - \varepsilon_{ij} \\ &= \sum_{m,n} \varepsilon_{mn} \delta_{mi} \delta_{nj} - \varepsilon_{ij} = 0. \end{aligned}$$

3. Théorèmes de dualité

3.1. Généralités

Ces théorèmes ont essentiellement deux buts :

a) reconstituer un groupe G discret (resp. topologique, resp. de Lie complexe) à partir de l'algèbre de Hopf $\mathcal{R}(G)$ (resp. $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$, resp. $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$)

b) caractériser les algèbres de Hopf ainsi obtenues.

Pour cela on commence par associer à une algèbre de Hopf commutative $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon, S)$ un groupe $\mathcal{G}(A)$ défini comme suit : $\mathcal{G}(A)$ est l'ensemble des *caractères* de A, ou morphismes d'algèbres non nuls de A dans k ; il est clair qu'il est inclus dans le dual restreint A^0, et on vérifie sans peine, à l'aide des formules du § II.2.2, que c'est un groupe pour la loi de multiplication μ^0, l'élément neutre étant ε et l'inverse étant donné par S^0.

3.2. Remarque

(Pour plus de détails, voir [1], § 4.2.) On appelle *groupe algébrique affine* tout groupe $\mathcal{G}(A)$ où A est une algèbre de Hopf commutative de type fini ; dans ce cas, l'application associant à tout $a \in A$ la fonction sur $\mathcal{G}(A) : \chi \to \chi(a)$ est injective, de sorte que les éléments de A s'identifient à des fonctions sur $\mathcal{G}(A)$; ces fonctions sont dites *régulières* ou *polynomiales.*

3.3. Théorème de dualité pour les groupes finis

Théorème

(i) Si G est un groupe fini, $\mathcal{R}(G)$ est une algèbre de Hopf commutative, de dimension finie et semi-simple (i.e. isomorphe comme algèbre à une algèbre k^n), et $\mathcal{G}(\mathcal{R}(G))$ est isomorphe à G.

(ii) Si A est une algèbre de Hopf commutative, de dimension finie et semi-simple, $\mathcal{G}(A)$ est un groupe fini et $\mathcal{R}(\mathcal{G}(A))$ est isomorphe à A.

En bref les foncteurs contrevariants $\mathcal{R}$ et $\mathcal{G}$ établissent des antiéquivalences de catégories mutuellement réciproques entre la catégorie des groupes finis et celle des algèbres de Hopf commutatives, de dimension finie et semi-simples.

Démonstration

Voir [1], theorem 3.4.2.

3.4. Théorème de dualité pour les groupes de Lie réels compacts ($k = \mathbf{C}$)

3.4.1. *Préliminaires*

On démontre (cf. [9], theorem III.4.1) que tout groupe de Lie réel compact G admet une représentation de dimension finie fidèle ; soit ρ une telle représentation, ρ_{ij} ses coefficients ; on sait (voir démonstration de la proposition I.4.2) que les fonctions ρ_{ij} et $\overline{\rho_{ij}}$ engendrent l'algèbre $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$; remplaçant ρ par $\rho \oplus \overline{\rho}$, on peut donc supposer que *les ρ_{ij} engendrent l'algèbre $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$.*

Posons $A = \mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ et $\widetilde{G} = \mathcal{G}(A)$; munissons $\widetilde{G}$ de la topologie de la convergence simple sur les éléments de A ; notons $\widetilde{G}_{\text{herm}}$ le sous-groupe formé des caractères χ hermitiens, *i.e.* vérifiant $\chi(\overline{a}) = \overline{\chi(a)}\ \forall a \in A$.

On a un morphisme naturel $u : G \to \widetilde{G}_{\mathrm{herm}}$ défini par $u(g)(a) = a(g)$. Pour toute représentation de dimension finie (V, π) de G on définit une représentation $\widetilde{\pi}$ de $\widetilde{G}$ dans V par

$$\widetilde{\pi}(\chi)_{ij} = \chi(\pi_{ij}) \qquad \forall \chi \in \widetilde{G};$$

en effet, notant Δ la comultiplication de A, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\pi}(\chi_1\chi_2)_{ij} &= (\chi_1\chi_2)(\pi_{ij}) \\
&= (\chi_1 \otimes \chi_2)(\Delta(\pi_{ij})) \\
&= (\chi_1 \otimes \chi_2)\Big(\sum_k \pi_{ik} \otimes \pi_{kj}\Big) \\
&= \sum_k \chi_1(\pi_{ik})\chi_2(\pi_{kj}) \\
&= \sum_k \widetilde{\pi}(\chi_1)_{ik}\widetilde{\pi}(\chi_2)_{kj} \\
&= (\widetilde{\pi}(\chi_1)\widetilde{\pi}(\chi_2)_{ij}).
\end{aligned}$$

Il est clair que $\widetilde{\pi} \circ u = \pi$ et que $\widetilde{\pi}$ est fidèle si les π_{ij} engendrent A ; en particulier $\widetilde{\rho}$ est fidèle.

Théorème 3.4.2

(i) Le morphisme u est un isomorphisme topologique de G sur $\widetilde{G}_{\mathrm{herm}}$ (théorème de dualité de Tannaka-Krein).

(ii) Le groupe $\widetilde{G}$ admet une structure de groupe de Lie complexe caractérisée par le fait que toutes les représentations $\widetilde{\pi}$ définies ci-dessus sont holomorphes.

(iii) G est un sous-groupe compact maximal de $\widetilde{G}$, et l'algèbre de Lie de $\widetilde{G}$ est la complexifiée de celle de G.

(iv) Les algèbres de Hopf A et $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(\widetilde{G})$ sont isomorphes.

Démonstration

(i) Voir [9], theorem III.7.15.

(ii) La représentation $\widetilde{\rho}$ est un morphisme injectif de $\widetilde{G}$ dans un groupe $GL(n, \mathbf{C})$; on met sur $\widetilde{G}$ la structure complexe induite par celle de $GL(n, \mathbf{C})$; si π est une représentation de dimension finie de G, ses coefficients $\pi_{k\ell}$ sont des polynômes par rapport aux ρ_{ij}, donc les $\widetilde{\pi}_{k\ell}$ sont des polynômes par rapport aux $\widetilde{\rho}_{ij}$, et *a fortiori* des fonctions holomorphes. L'unicité de la structure complexe est évidente.

(iii) Voir [9], proposition III.8.3.

(iv) L'application $\pi_{ij} \to \widetilde{\pi}_{ij}$ est un morphisme injectif de $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ dans $\mathcal{R}_{\text{hol}}(\widetilde{G})$; elle est surjective car si τ est une représentation holomorphe de $\widetilde{G}$, et si π est sa restriction à G, τ et $\widetilde{\pi}$ ont même restriction à G, donc sont équivalentes (cf. [9], proposition III.8.6).

3.4.3. *Exemples*

a) Pour $G = U(1)$, A est l'algèbre $\mathbf{C}[X, X^{-1}]$ des polynômes de Laurent et $\widetilde{G}$ s'identifie à $\mathbf{C}^*$ par l'application qui, à tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$, fait correspondre le caractère "évaluation au point λ".

b) Pour $G = SU(n)$, d'après la proposition I.4.3, $\widetilde{G}$ est le groupe $SL(n, \mathbf{C})$ et A est l'algèbre $\mathbf{C}[(X_{ij})]/(D-1)$.

c) Pour $G = U(n)$, on démontre (cf. [9], proposition III.8.7) que $\widetilde{G}$ est le groupe $GL(n, \mathbf{C})$ et A est l'algèbre $\mathbf{C}[(X_{ij}), D^{-1}]$.

3.4.4. *Remarque*

Les groupes de Lie complexes de la forme $\widetilde{G}$ avec G réel compact sont appelés *réductifs* et caractérisés par les propriétés suivantes :

a) $\widetilde{G}$ admet une représentation holomorphe fidèle de dimension finie ;

b) toute représentation holomorphe de dimension finie de $\widetilde{G}$ est complètement réductible (cf. [25], § XVII.5).

3.5. Caractérisation des algèbres de Hopf $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$

(Ici $k = \mathbf{C}$.)

3.5.1. *Généralités*

Etant donné une algèbre de Hopf commutative A, on peut se demander à quelles conditions il existe un groupe de Lie réel compact G tel que A soit isomorphe à $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$. On connaît plusieurs types de conditions nécessaires et suffisantes : les unes reposent sur l'existence d'une certaine forme linéaire sur A traduisant la mesure de Haar de G (cf. [1], theorem 3.4.3; voir aussi ci-dessous la remarque II.4.14); d'autres sur l'existence d'une certaine décomposition de A en "blocs" reflétant les diverses représentations de G (cf. [24], theorem 30.28). On va donner ici un troisième type de conditions, utilisant la théorie de Gelfand des C^*-algèbres commutatives et qui semble bien adapté aux problèmes de déformations. Pour cela nous aurons besoin de la notion suivante :

3.5.2. *Définition*

On appelle *$*$-algèbre de Hopf* une algèbre de Hopf $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon, S)$ munie en outre d'une *involution* ou opération interne $a \to a^*$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
(\lambda a + \mu b)^* &= \overline{\lambda} a^* + \overline{\mu} b^* \\
(ab)^* &= b^* a^* \\
\Delta(a^*) &= \Delta(a)^* \\
\varepsilon(a^*) &= \overline{\varepsilon(a)} \\
S(S(a)^*)^* &= a \\
a^{**} &= a.
\end{aligned}$$

(L'involution de $A \otimes A$ est définie par $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$.)

On vérifie que l'algèbre de Hopf A^0 est aussi une $*$-algèbre de Hopf pour l'opération $\varphi \to \varphi^*$ avec

$$\langle \varphi^*, a \rangle = \overline{\langle \varphi, S(a)^* \rangle}.$$

3.5.3. *Retour à $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$*

Si G est un groupe de Lie réel compact, l'algèbre $A = \mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ est une $*$-algèbre de Hopf pour l'application $a \to a^*$ avec $a^*(g) = \overline{a(g)}$. En outre A est munie canoniquement d'une norme

$$||a|| = \sup_{g \in \mathbf{G}} |a(g)|$$

vérifiant évidemment

$$\begin{aligned} ||ab|| &\leq ||a|| \cdot ||b|| \\ ||1|| &= 1 \\ ||aa^*|| &= ||a||^2. \end{aligned}$$

Une norme sur une $*$-algèbre A vérifiant ces trois conditions est appelée *C^*-norme*, et la complétée de A est dite *C^*-algèbre.*

Choisissons maintenant une représentation fidèle de dimension finie ρ de G et notons ρ_{ij} ses coefficients ; on sait que

a) les ρ_{ij} engendrent l'$*$-algèbre A

b) $\Delta(\rho_{ij}) = \sum_k \rho_{ik} \otimes \rho_{kj}$

c) $\sum_k S(\rho_{ij}) \cdot \rho_{kj} = \sum_k \rho_{ik} \cdot S(\rho_{kj}) = \delta_{ij} 1$

d) $\varepsilon(\rho_{ij}) = \delta_{ij}$.

Théorème 3.5.4

Soit $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon, S, *)$ une $*$-algèbre de Hopf commutative munie d'une C^*-norme $||\ ||$; supposons qu'il existe un entier $n > 0$ et des éléments $a_{ij} \in A$, $i, j = 1, \ldots, n$, vérifiant les conditions analogues aux conditions a), ..., d) ci-dessus. Alors il existe un groupe de Lie réel compact G et un isomorphisme isométrique de A sur $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$.

Démonstration

Notons A' la C^*-algèbre (commutative) complétée de A, et G le spectre de Gelfand de A' ; rappelons que G est l'ensemble des caractères de A, *i.e.* des morphismes d'algèbres de A' dans $\mathbf{C}$, et que ceux-ci sont automatiquement continus (cf. [21], corollaire 1.8). Muni de la topologie de la convergence simple, G est compact (cf. [21], théorème 2.1) ; G est aussi un groupe topologique pour les opérations indiquées au § II.3.1. Rappelons que la *transformation de Gelfand* $T : A' \to C^0(G)$ est définie par $T(a)(g) = g(a)$ et est un isomorphisme isométrique de C^*-algèbres (cf. [21], théorème 7.1).

Reste à voir que G est un groupe de Lie et que T induit un isomorphisme d'$*$-algèbres de Hopf $A \to \mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$. Notons ρ l'application $G \to M(n, \mathbf{C})$ définie par $\rho(g)_{ij} = g(a_{ij})$; ρ est une représentation continue et, en outre, fidèle parce que les a_{ij} et a^*_{ij} engendrent l'algèbre A et que les caractères de A' sont automatiquement hermitiens (cf. [21], lemme 7.2). Ceci montre que G est un groupe de Lie. Ensuite les relations

$$T(a_{ij}) = \rho_{ij}, \qquad T(a^*_{ij}) = \overline{\rho_{ij}},$$

jointes au fait que les ρ_{ij} et $\overline{\rho_{ij}}$ engendrent l'algèbre $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$, entraînent que $T(A) = \mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$. Enfin il est immédiat que T est compatible avec les coproduits et les antipodes.

3.5.5. *L'algèbre $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ comme dual restreint de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*

On reprend les notations du § II.3.4 en supposant en outre G connexe et simplement connexe, et on note $\mathfrak{g}$ et $\tilde{\mathfrak{g}}$ les algèbres de Lie de G et $\widetilde{G}$; le théorème II.3.4.2 montre qu'on peut écrire $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ et que les algèbres de Hopf $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ et $\mathcal{R}_{\text{hol}}(\widetilde{G})$ sont isomorphes ; elles sont donc isomorphes à $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})^0$ d'après II.2.4.2.

Définissons un automorphisme antilinéaire involutif θ (*involution de Cartan*) de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par $\theta(X+iY) = X-iY$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$; il se prolonge en un automorphisme antilinéaire involutif de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$ encore noté θ ; par ailleurs l'automorphisme θ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ est la différentielle d'un unique automorphisme antiholomorphe involutif de $\widetilde{G}$, encore noté θ.

Théorème

(i) L'application $u \to u^* = \theta(S(u))$ *est une involution de l'algèbre de Hopf* $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

(ii) Via l'isomorphisme $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G) \to \mathcal{R}_{\text{hol}}(\tilde{G})$*, l'involution* $a \to a^* = \overline{a}$ *du § II.3.5.3 est transformée en l'application* $a \to \overline{a \circ \theta}$*, et on a*

$$\langle u, a^* \rangle = \overline{\langle S(u)^*, a \rangle} \qquad \forall\, u \in \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{g}}),\ a \in \mathcal{R}_{\text{hol}}(\tilde{G}).$$

(iii) La norme sur $\mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$ *définie au § II.3.5.3 est la borne supérieure des* C^**-semi-normes.*

Démonstration

(i) Vérification immédiate.

(ii) Première assertion : elle résulte de ce que, pour $a \in \mathcal{R}_{\text{hol}}(\tilde{G})$, on a $\overline{a \circ \theta}_{|G} = (a_{|G})^*$. Seconde assertion : on doit montrer que $\left\langle u, \overline{a \circ \theta} \right\rangle = \overline{\langle \theta(u), a \rangle}$ ou encore que $\langle u, a \circ \theta \rangle = \langle \theta(u), a \rangle$, ce qui est immédiat.

(iii) On doit montrer que, si N est une C^*-semi-norme sur $A = \mathcal{R}_{\text{cont}}(G)$, on a

$$N(f) \leq \sup_{g \in G} |f(g)| \qquad \forall\, f \in A.$$

Notons B la C^*-algèbre commutative séparée-complétée de A pour N, $\widehat{B}$ son spectre de Gelfand, Λ l'application canonique $A \to B$; en vertu de l'isomorphisme de C^*-algèbres $B = C^0(\widehat{B})$, pour tout $b \in B$ il existe $\chi \in \widehat{B}$ tel que $N(b) = |\chi(b)|$; $\chi \circ \Lambda$ est un caractère hermitien de A, donc (théorème II.3.4.2) de la forme $f \to f(g)$ pour un certain $g \in G$; par conséquent $N(f) = N(\Lambda(f)) = |f(g)|$.

3.6. Formes réelles des groupes de Lie complexes

3.6.1. *Généralités*

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, on appelle *forme réelle* de $\mathfrak{g}$ toute sous-algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0$. Les formes réelles sont aussi les sous-algèbres de Lie réelles obtenues de la façon suivante : on se donne un automorphisme antilinéaire involutif σ de $\mathfrak{g}$ et on pose

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}.$$

De la même façon une *forme réelle* d'un groupe de Lie complexe G est un sous-groupe de Lie réel G_0 obtenu comme suit : on se donne un automorphisme antiholomorphe involutif σ de G et on pose

$$G_0 = \{g \in G |\ \sigma(g) = g\}.$$

3.6.2. *Exemples : formes réelles de* $GL(n, \mathbf{C})$

a) Prenons $\sigma(g) = \overline{g}$ (matrice à coefficients complexes conjugués de ceux de g) ; alors $G_0 = GL(n, \mathbf{R})$.

b) Prenons maintenant $\sigma(g) = \varepsilon \cdot (g^*)^{-1} \cdot \varepsilon$ où g^* est l'adjointe de g et où ε est une matrice diagonale fixée : $\varepsilon = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$. Alors $G_0 = U(p, q)$ où p (resp. q) est le nombre de i tels que $\varepsilon_i = 1$ (resp. -1) ; en particulier pour $\varepsilon = I$ on obtient la *forme réelle compacte* $U(n)$. Plus généralement, dans la situation du § II.3.5.5, G est la forme réelle de $\widetilde{G}$ associée à l'automorphisme θ.

c) Prenons enfin, en supposant n pair, $n = 2m$, $\sigma(g) = JgJ^{-1}$ où J est la transformation antilinéaire de $\mathbf{C}^n$ définie comme suit :

$$(Jz)_p = \begin{cases} \overline{z_{p+m}} & \text{si } p = 1, \dots, m \\ -\overline{z_{p-m}} & \text{si } p = m+1, \dots, n; \end{cases}$$

alors $G_0 = SU^*(n)$.

On démontre (voir par exemple [23]) qu'on obtient ainsi toutes les formes réelles de $GL(n, \mathbf{C})$.

Proposition 3.6.3

Soit G un groupe de Lie complexe.

(i) Il existe une bijection naturelle entre les automorphismes antilinéaires involutifs de $\mathfrak{g}$ et les involutions de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

(ii) Il existe une bijection naturelle entre les automorphismes antiholomorphes involutifs de G et les involutions de l'algèbre de Hopf $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$.

(iii) Si G est connexe et simplement connexe, ces bijections sont compatibles avec, d'une part, le passage de G à $\mathfrak{g}$ par différentiation, et, d'autre part, l'isomorphisme entre $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$.

Démonstration

A tout automorphisme antilinéaire involutif τ de $\mathfrak{g}$, on associe l'involution de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ définie par $u^* = \tau(S(u))$. A tout automorphisme antiholomorphe involutif τ de G on associe l'involution de $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ définie par $a^*(g) = \overline{a(\tau(g))}$. Enfin (iii) est immédiat.

4. Groupes quantiques compacts

(On suppose dans ce paragraphe que $k = \mathbf{C}$.)

4.1. Définition

Le théorème II.3.5.4 motive la définition suivante, due à S. L. Woronowicz [44]) : un *groupe quantique compact* consiste en la donnée des objets suivants :

- une $*$-algèbre de Hopf $\mathcal{C}$
- une C^*-norme sur $\mathcal{C}$
- un entier $N > 0$
- des éléments $(u_{i,j})_{i,j=1,\ldots,N}$ de $\mathcal{C}$

soumis aux conditions suivantes :

a) la comultiplication Δ est continue lorsque l'on munit $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ de la norme $\xi \to \sup ||\pi(\xi)||$ où π d'écrit l'ensemble des $*$-représentations de $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ dont les restrictions à $\mathcal{C} \otimes 1$ et $1 \otimes \mathcal{C}$ sont continues (voir à ce sujet [41], ch. IV, § 4)

b) les $u_{i,j}$ engendrent l'$*$-algèbre $\mathcal{C}$

c) $\Delta(u_{i,j}) = \sum_k u_{i,k} \otimes u_{k,j}$

d) $\sum_k (S(u_{i,k}) \cdot u_{k,j} = \sum_k u_{i,k} \cdot S(u_{k,j}) = \delta_{i,j} 1$.

Le but principal du présent paragraphe est de construire des groupes quantiques compacts comme sous-algèbres des duaux restreints de certaines $*$-algèbres de Hopf. Nous démontrerons en particulier le résultat suivant, qui est à rapprocher du théorème II.3.5.5 (iii) :

Théorème 4.2 (cf. [3])

Soit A une $*$-algèbre de Hopf avec antipode S inversible, (V, ρ) une $*$-représentation de dimension finie de A, $\mathcal{C}$ la sous-$*$-algèbre de A^0 engendrée par les coefficients $\rho_{i,j}$ de ρ. Alors $\mathcal{C}$, munie de la borne supérieure des C^*-semi-normes, est un groupe quantique compact.

(On appelle *$*$-représentation* de A une représentation (V, ρ) telle que V soit muni d'un produit scalaire vérifiant

$$(\rho(a^*) \cdot v_1 | v_2) = (v_1 | \rho(a) \cdot v_2) \qquad \forall\, a \in A, \quad v_1, v_2 \in V.)$$

La seule chose à démontrer est le fait que la borne supérieure des C^*-semi-normes sur $\mathcal{C}$ est une *norme*, *i.e.* prend sur tout élément non nul de $\mathcal{C}$ une valeur finie et non nulle (nous y parviendrons au lemme II.4.13); en effet les conditions c) et d) sont faciles à vérifier; quant à a), il suffit de remarquer que, si φ est un morphisme d'$*$-algèbre de $\mathcal{C}$ dans une C^*-algèbre D, l'image réciproque par φ de la norme de D est une C^*-semi-norme, donc inférieure à la norme choisie.

4.3. Notations

On munira A^0 de la représentation régulière λ de A :

$$\langle \lambda(a)\varphi, b \rangle = \langle \varphi, ba \rangle \,.$$

Pour toute représentation (V, π) de A on posera

$$V_{(\varepsilon)} = \{ v \in V |\, \pi(a) \cdot v = \varepsilon(a) \cdot v \quad \forall\, a \in V \}$$

(espace des éléments *invariants* de V) et on notera Φ^π l'application linéaire $V \otimes V^* \to A^0$ définie par

$$\langle \Phi^\pi(v \otimes \xi), a \rangle = \langle \xi, \pi(a) \cdot v \rangle \,. \tag{II.6}$$

Lemme 4.4

On a $A^0_{(\varepsilon)} = k \cdot \varepsilon$.

Démonstration immédiate.

Lemme 4.5

Soit (V, π) *une représentation de dimension finie de* A.

(i) Φ^π *entrelace les représentations* $\pi \otimes \mathrm{id}_{V^*}$ *et* λ *;*

(ii) si π *est irréductible,* Φ^π *est injective;*

(iii) supposons π *somme directe de multiples de représentations irréductibles* τ_i *deux à deux inéquivalentes, soit*

$$\pi = \bigoplus_i \tau_i', \qquad \tau_i' = m_i \tau_i$$

$$V_\pi = \bigoplus_i m_i \cdot V_{\tau_i}.$$

Ecrivons

$$V_\pi \otimes V_\pi^* = \bigoplus_{i,j} m_i m_j \cdot V_{\tau_i} \otimes V_{\tau_j}^*.$$

Alors on a

$$\Phi^\pi(\omega) = \sum_i \Phi^{\tau_i'}(\omega_i) \qquad \forall\, \omega \in V_\pi \otimes V_\pi^*,$$

où ω_i *désigne la projection de* ω *sur* $m_1^2 V_{\tau_i} \otimes V_{\tau_i}^*$, *et*

$$\Phi^\pi(V_\pi \otimes V_\pi^*) = \bigoplus_i \Phi^{\tau_i}(V_{\tau_i} \otimes V_{\tau_i}^*).$$

Si de plus π *contient* ε *et si l'on prend* $\tau_0 = \varepsilon$, *la composante* $\Phi^\pi(\omega)_{(\varepsilon)}$ *de* $\Phi^\pi(\omega)$ *sur* $k \cdot \varepsilon$ *est égale à* $\Phi^{\tau_0'}(\omega_0)$.

Démonstration

Les assertions (i) et (iii) étant faciles, démontrons (ii). Notons (e_n) une base de V_π et (e_n^*) la base duale; tout $\omega \in V_\pi \otimes V_\pi^*$ s'écrit

$$\omega = \sum_{m,n} \alpha_{m,n} e_m \otimes e_n^*$$

et on a, pour tout $a \in A$:

$$\langle \Phi^\pi(\omega), a \rangle = \sum_{m,n} \alpha_{m,n} \cdot \pi(a)_{n,m};$$

de plus, lorsque a varie dans A, les $\pi(a)_{n,m}$ décrivent l'ensemble de toutes les matrices (théorème de Burnside).

Lemme 4.6

Soit (V,π) une représentation de dimension finie de A, (e_n) une base de V, θ l'élément $\sum_n e_n \otimes e_n^*$ de $V \otimes V^*$. On a

(i) $\qquad (\pi \otimes \pi^c)(a) \cdot \theta = \varepsilon(a) \cdot \theta \quad \forall\, a \in A;$

(ii) $\qquad \sum_{m,n} \Phi^{\pi}_{e_m^*, e_n} \cdot \Phi^{\pi^c}_{e_m, e_n^*} = \dim \pi \cdot \varepsilon.$

Démonstration

(i) Ecrivons $\Delta(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i''$ pour tout $a \in A$; pour tous indices p et q on a

$$\begin{aligned}
\Big\langle (\pi \otimes \pi^c)(a) \cdot \theta, e_p^* \otimes e_q \Big\rangle &= \sum_n \sum_i \Big\langle \pi(a_i') \cdot e_n \otimes \pi^c(a_i'') \cdot e_n^*, e_p^* \otimes e_q \Big\rangle \\
&= \sum_n \sum_i \Big\langle \pi(a_i') \cdot e_n, e_p^* \Big\rangle \cdot \langle e_n^*, \pi(S(a_i'')) \cdot e_q \rangle \\
&= \sum_n \sum_i \pi(a_i')_{p,n} \cdot \pi(S(a_i''))_{n,q} \\
&= \pi\Big(\sum_i a_i' S(a_i'')\Big)_{p,q} \\
&= \pi(\varepsilon(a))_{p,q} = \varepsilon(a) \cdot \delta_{p,q} \\
&= \varepsilon(a) \cdot \Big\langle \theta, e_p^* \otimes e_q \Big\rangle .
\end{aligned}$$

(ii) On a

$$\begin{aligned}
\Big\langle \sum_{m,n} \Phi^{\pi}_{e_m^*, e_n} \cdot \Phi^{\pi^c}_{e_m, e_n^*}, a \Big\rangle &= \Big\langle \sum_{m,n} \Phi^{\pi \otimes \pi^c}_{e_m^* \otimes e_m, e_n \otimes e_n^*}, a \Big\rangle \\
&= \langle (\pi \otimes \pi^c)(a) \cdot \theta, \theta \rangle = \varepsilon(a) \cdot \dim \pi .
\end{aligned}$$

Lemme 4.7

Considérons deux représentations de dimension finie de A : (V,π) et (W,ρ) ; soit T l'isomorphisme usuel $W \otimes V^* \to \mathrm{Hom}(V,W)$:

$$T(w \otimes \xi)(v) = \langle v, \xi \rangle \cdot w,$$

et σ la représentation $\rho \otimes \pi^c$ transportée dans $\mathrm{Hom}(V,W)$. Alors

$$(\mathrm{Hom}(V,W))_{(\varepsilon)} = \mathrm{Hom}_A(V,W).$$

Démonstration

On vérifie aisément que

$$\text{(II.7)} \quad \sigma(a)\cdot f = \sum_i \rho(a_i')\circ f\circ \pi(S(a_i'')) \qquad \forall\, a\in A,\ f\in \operatorname{Hom}(V,W).$$

Si $f\in \operatorname{Hom}_A(V,W)$ on aura

$$\sigma(a)\cdot f = \rho\Big(\sum_i a_i' S(a_i'')\Big)\circ f = \varepsilon(a)\cdot f.$$

Supposons maintenant que f appartient à $(\operatorname{Hom}_A(V,W))_{(\varepsilon)}$ et montrons que l'on a $\rho(a)\circ f = f\circ \pi(a)$.

On a

$$\begin{aligned}
\rho(a)\circ f &= \rho\Big(\sum_i a_i''\cdot \varepsilon(a_i')\Big)\circ f\\
&= \rho\Big(\sum_i a_i''\cdot \varepsilon(S^{-1}(a_i'))\Big)\circ f \qquad (\text{car } \varepsilon\circ S=\varepsilon)\\
&= \sum_i \rho(a_i'')\circ \varepsilon(S^{-1}(a_i'))\cdot f;
\end{aligned}$$

utilisant (II.7) en y remplaçant a par $S^{-1}(a_i')$ on obtient

$$\rho(a)\circ f = \sum_i \rho(a_i'')\circ \rho\Big(\sum_j (S^{-1}(a_i'))_j'\Big)\circ f\circ \pi(S(S^{-1}(a_i'))_j'');$$

comme S^{-1} est un antiendomorphisme de cogèbre, on a

$$\sum_j (S^{-1}(a_i'))_j'\otimes (S^{-1}(a_i'))_j'' = \sum_j S^{-1}((a_i')_j'')\otimes S^{-1}((a_i')_j')$$

donc

$$\begin{aligned}
\rho(a)\circ f &= \sum_{i,j} \rho(a_i'')\circ \rho(S^{-1}((a_i')_j''))\circ f\circ \pi((a_i'')_j')\\
&= \sum_{i,j} \rho(a_i''\cdot S^{-1}((a_i')_j''))\circ f\circ \pi((a_i')_j').
\end{aligned}$$

Par coassociativité de Δ puis permutation des facteurs, on a

$$\sum_{i,j} a_i''\otimes (a_i')_j''\otimes (a_i')_j' = \sum_{i,k} (a_i'')_k''\otimes (a_i'')_k'\otimes a_i'$$

d'où

$$\rho(a) \circ f = \sum_{i,k} \rho((a_i'')_k'' \cdot S^{-1}((a_i'')_k')) \circ f \circ \pi(a_i');$$

comme S^{-1} est une antipode pour A munie de la multiplication opposée et de la même comultiplication, on obtient

$$\begin{aligned} \rho(a) \circ f &= \sum_i \rho(\varepsilon(a_i'') \cdot 1) \circ f \circ \pi(a_i') \\ &= f \circ \pi\Big(\sum_i \varepsilon(a_i'') \cdot a_i'\Big) = f \circ \pi(a). \end{aligned}$$

Corollaire 4.8

Supposons π et ρ irréductibles. Alors

$$(W \otimes V^*)_{(\varepsilon)} = \begin{cases} 0 & \textit{si } \pi \textit{ et } \rho \textit{ sont inéquivalentes} \\ k \cdot \theta & \textit{si } V = W,\ \pi = \rho. \end{cases}$$

4.9. Représentations conjuguées et $*$-représentations

Etant donnée une représentation de dimension finie (V, π) de A, on note $\overline{V}$ l'espace vectoriel conjugué de V avec un isomorphisme antilinéaire $V \to \overline{V}$ noté $v \to \overline{v}$; on définit une représentation $\overline{\pi}$ de A dans $\overline{V}$, dite *conjuguée* de π, par

$$\overline{\pi}(a) \cdot \overline{v} = \overline{\pi(S(a)^* \cdot v)};$$

on a alors

$$(\Phi^\pi(\omega))^* = \Phi^{\overline{\pi}}(\overline{\omega}) \qquad \forall\, \omega \in V \otimes V^*.$$

Supposons maintenant que π est une $*$-représentation pour un produit scalaire $(\ |\ )$ sur V ; alors $\overline{\pi}$ est équivalente à π^c *via* l'isomorphisme

$$\Lambda : \overline{V} \to V^*, \quad \langle \Lambda(v), w \rangle = (w|v);$$

nous identifierons V^* à $\overline{V}$ au moyen de Λ, de sorte que nous aurons les formules suivantes :

$$\langle \Phi^\pi(v \otimes \overline{w}), a \rangle = (\pi(a) \cdot v | w)$$

$$\theta = \sum_n e_n \otimes \overline{e}_n \quad \text{si } (e_n) \text{ est une base orthonormée de } V$$

$$\sum_{m,n} \Phi^\pi_{\overline{e}_m, e_n} \cdot \Phi^{\overline{\pi}}_{e_m, \overline{e}_n} = \dim \pi \cdot \varepsilon \tag{II.8}$$

4.10. Construction d'une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}$

On reprend les notations du théorème II.4.2 ; remplaçant éventuellement ρ par $\rho \oplus \overline{\rho}$, on peut supposer ρ équivalente à $\overline{\rho}$; alors $\mathcal{C}$ est la sous-algèbre de A^0 engendrée par les coefficients de ρ, c'est-à-dire l'ensemble des coefficients de la représentation $\otimes\rho = \bigoplus_n \otimes^n \rho$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des représentations irréductibles contenues dans $\otimes\rho$; il est formé d'$*$-représentations et est stable par l'opération de conjugaison ; enfin on a

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{\pi \in \mathcal{E}} \Phi^\pi(V_\pi \otimes \overline{V_\pi}) \quad \text{(cf. lemme II.4.5).}$$

Pour tout élément φ de $\mathcal{C}$, la composante de φ sur $A^0_{(\varepsilon)}$ est de la forme $\mu(\varphi) \cdot \varepsilon$ où μ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$. Nous allons démontrer que μ est positive et fidèle (*i.e.* que $\mu(\varphi\varphi^*) > 0$ si $\varphi \neq 0$), puis construire une $*$-représentation de $\mathcal{C}$ qui fournira une C^*-norme sur $\mathcal{C}$.

Lemme 4.11
On a $\mu(\varphi\varphi^*) > 0$ pour tout $\varphi \neq 0$.

Démonstration
On peut écrire

$$\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{\pi \in \mathcal{E}} \Phi^\pi(\omega_\pi) \quad \text{avec } \omega_\pi \in V_\pi \otimes \overline{V_\pi} \\
\varphi^* &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \Phi^{\overline{\sigma}}(\overline{\omega_\sigma}) \\
\varphi\varphi^* &= \sum_{\pi, \sigma \in \mathcal{E}} \Phi^{\pi \otimes \overline{\sigma}}(\omega_\pi \otimes \overline{\omega_\sigma}).
\end{aligned}$$

Fixons π et σ et décomposons $\pi \otimes \overline{\sigma}$ en représentations isotypiques comme au lemme II.4.5 :

$$\pi \otimes \overline{\sigma} = \bigoplus_i \tau'_i, \qquad \tau'_i = m_i \tau_i$$

avec $\tau_0 = \varepsilon$ (mais m_0 peut être nul). On a

$$(\Phi^{\pi \otimes \overline{\sigma}}(\omega_\pi \otimes \overline{\omega_\sigma}))_{(\varepsilon)} = \Phi^{\tau'_0}((\omega_\pi \otimes \overline{\omega_\sigma})_0);$$

le corollaire II.4.8 montre que

- si $\pi \neq \sigma$, $(V_\pi \otimes \overline{V_\sigma})_{(\varepsilon)} = 0$
- si $\pi = \sigma$, $(V_\pi \otimes \overline{V_\pi})_{(\varepsilon)} = k \cdot \theta$.

Par suite

$$(\varphi\varphi^*)_{(\varepsilon)} = \sum_{\pi \in \mathcal{E}} \Phi^{\pi\otimes\overline{\pi}}((\omega_\pi \otimes \overline{\omega_\pi})_0);$$

écrivant

$$\omega_\pi = \sum_{m,n} \lambda_{m,n} e_m \otimes \overline{e}_n,$$

on obtient

$$\omega_\pi \otimes \overline{\omega_\pi} = \sum_{m,n,p,q} \lambda_{m,n}\overline{\lambda_{p,q}}(e_m \otimes \overline{e}_p) \otimes (\overline{e}_n \otimes e_q)$$

$$\begin{aligned}(\omega_\pi \otimes \overline{\omega_\pi})_0 &= (\omega_\pi \otimes \overline{\omega_\pi} | \theta \otimes \overline{\theta}) \cdot \theta \otimes \overline{\theta} \\ &= \sum_{m,n} |\lambda_{m,n}|^2 \cdot \theta \otimes \overline{\theta};\end{aligned}$$

Ensuite (lemme II.4.6)

$$\Phi^{\pi\otimes\overline{\pi}}(\theta \otimes \overline{\theta}) = \dim \pi \cdot \varepsilon$$

d'où finalement

$$\mu(\varphi\varphi^*) = (\varphi\varphi^*)_{(\varepsilon)} = \sum_{\pi \in \mathcal{E}} \dim \pi \cdot \sum_{m,n} |\lambda_{m,n}|^2$$

et ceci est strictement positif puisque φ est non nul.

Lemme 4.12

Soit H un espace préhilbertien séparé avec produit scalaire $(\ |\ )$, χ un morphisme d'algèbres de $\mathcal{C}$ dans $\operatorname{End} H$ *vérifiant*

$$(\chi(\varphi) \cdot x | y) = (x | \chi(\varphi^*) \cdot y) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C},\ x, y \in H.$$

Alors $\chi(\varphi)$ est borné et sa norme est majorée par un scalaire $k(\varphi)$ indépendant de H et de χ.

Démonstration

Par linéarité on peut supposer que φ est de la forme $\varphi = \Phi^{\overline{\pi}}_{e_m,\overline{e}_n}$; alors, pour tout $x \in H$ on a

$$\begin{aligned}
||\chi(\varphi)||^2 &= (\chi(\varphi^*\varphi)\cdot x|x) \\
&= (\chi(\Phi^{\pi}_{\overline{e}_m,e_n}\Phi^{\overline{\pi}}_{e_m,\overline{e}_n})\cdot x|x) \\
&\leq \sum_{p,q}(\chi(\Phi^{\pi}_{\overline{e}_p,e_q}\Phi^{\overline{\pi}}_{e_p,\overline{e}_q})\cdot x|x) \\
&= \dim\pi\cdot||x||^2 \quad \text{(cf. formule (II.8))}
\end{aligned}$$

d'où

$$||\chi(\varphi)|| \leq (\dim\pi)^{1/2}.$$

Lemme 4.13

Notons N la borne supérieure des C^*-semi-normes sur $\mathcal{C}$. Alors, pour tout φ non nul, $N(\varphi)$ est fini et non nul.

Démonstration

Montrons d'abord que $N(\varphi)$ est fini. Notons ν une C^*-semi-norme, $\overline{\mathcal{C}}$ la C^*-algèbre séparée complétée ; réalisant $\overline{\mathcal{C}}$ comme algèbre d'opérateurs dans un espace hilbertien H, on obtient une représentation χ de $\mathcal{C}$ dans H vérifiant les hypothèses du lemme précédent ; donc

$$\nu(\varphi) = ||\chi(\varphi)|| \leq k(\varphi).$$

Montrons maintenant que $N(\varphi)$ est non nul. Munissons $\mathcal{C}$ du produit scalaire $(\varphi_1|\varphi_2) = \mu(\varphi_2^*\varphi_1)$, qui est non dégénéré d'après le lemme II.4.11 ; définissons une représentation χ de $\mathcal{C}$ dans elle-même par $\chi(\varphi)\cdot\psi = \varphi\cdot\psi$; les hypothèses du lemme précédent sont satisfaites et $\varphi \longrightarrow ||\chi(\varphi)||$ est une C^*-norme.

4.14. Remarque

La forme linéaire μ sur $\mathcal{C}$ est invariante à gauche et à droite en ce sens que, pour toute autre forme linéaire ν, on a $\nu\cdot\mu = \mu\cdot\nu = \nu(\varepsilon)\cdot\mu$, *i.e.*

$$(\nu\otimes\mu)(\Delta(\varphi)) = (\mu\otimes\nu)(\Delta(\varphi)) = \nu(\varepsilon)\cdot\mu(\varphi) \qquad \forall\,\varphi\in\mathcal{C}$$

[on le vérifie sans peine en se ramenant au cas où φ est un coefficient d'une représentation irréductible].

On sait (cf. [1], théorème 3.3.10) qu'il existe, à un scalaire près, au plus une forme linéaire invariante à gauche; comme $\mu(\varepsilon) = 1$, μ peut être appelée la *mesure de Haar normalisée* sur $\mathcal{C}$.

5. Structures de Poisson

(Ici k est de nouveau un corps quelconque.)

5.1. Algèbres poissoniennes

Définition

Soit (A, μ, i) une algèbre commutative; un *crochet de Poisson* sur A est une application linéaire, notée $\{\,,\,\}$, de $A \otimes A$ vers A, vérifiant les conditions suivantes :

- identité de Jacobi, qui peut s'écrire

$$\sum_{s \in C_3} \{\,,\,\} \circ (\{\,,\,\} \otimes \mathrm{id}_A) \circ s = 0 \tag{II.9}$$

  où C_3 désigne le groupe des permutations circulaires de l'ensemble à trois éléments

- antisymétrie :

$$\{\,,\,\} \circ (\sigma + \mathrm{id}_{A \otimes A}) = 0 \tag{II.10}$$

- règle de Leibniz :

$$\{\,,\,\} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \mu) = \mu \circ (\{\,,\,\} \otimes \mathrm{id}_A) \circ (\mathrm{id}_A \otimes \sigma + \mathrm{id}_{A \otimes A \otimes A}) \tag{II.11}$$

  c'est-à-dire

$$\{a, bc\} = \{a, c\}b + \{a, b\}c \qquad \forall\, a, b, c \in A.$$

On dit alors que A est une *algèbre poissonienne*.

Exemple

L'algèbre poissonienne la plus classique est celle des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$ munie de l'opération

$$\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}.$$

5.2. Cogèbres copoissoniennes

C'est la notion duale de celle d'algèbre poissonienne : on se donne une cogèbre cocommutative (A, Δ, ε) et un *cocrochet de Poisson* $\varphi : A \to A \otimes A$ vérifiant

$$\text{(II.9)}' \qquad \sum_{s \in C_3} s \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_A) \circ \varphi = 0$$

$$\text{(II.10)}' \qquad \varphi(A) \subset \wedge^2 A$$

$$\text{(II.11)}' \qquad (\mathrm{id}_A \otimes \Delta) \circ \varphi = (\mathrm{id}_A \otimes \sigma + \mathrm{id}_{A \otimes A \otimes A}) \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_A) \circ \Delta.$$

5.3. Bigèbres poissoniennes

Une *bigèbre poissonienne* est une bigèbre commutative munie d'un crochet de Poisson vérifiant la condition suivante de compatibilité avec la comultiplication :

$$\text{(II.12)} \qquad \Delta \circ \{\,,\,\} = (\mu \otimes \{\,,\,\} + \{\,,\,\} \otimes \mu) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \Delta)$$

i.e.

$$\Delta(\{a,b\}) = \sum_{i,j} (a_i' b_j' \otimes \{a_i'', b_j''\}) + (\{a_i', b_j'\} \otimes a_i'' b_j'').$$

5.4. Bigèbres copoissoniennes

5.4.1. *Généralités*

Par dualité, une *bigèbre copoissonienne* est une bigèbre cocommutative munie d'un cocrochet de Poisson φ vérifiant

$$\varphi \circ \mu = (\mu \otimes \mu) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \varphi + \varphi \otimes \Delta),$$

i.e.

$$\varphi(ab) = \Delta(a) \cdot \varphi(b) + \varphi(a) \cdot \Delta(b),$$

condition encore équivalente à la suivante :

$$\text{(II.12)}' \qquad \varphi \in Z^1(A, \wedge^2 A)$$

où $\wedge^2 A$ est considéré comme un A-bimodule au moyen de l'application $\Delta : A \to S^2 A$ et où Z^1 est tel que défini au § III.2.5.1.

5.4.2. *Notations*

On notera P l'ensemble des éléments *primitifs* de A, ou éléments a tels que $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Par ailleurs, si $X = \sum_i x'_i \otimes x''_i$ est un élément de $\otimes^2 A$, on pose

$$\begin{aligned} X_{12} &= \sum_i x'_i \otimes x''_i \otimes 1 \\ X_{13} &= \sum_i x'_i \otimes 1 \otimes x''_i \\ X_{23} &= \sum_i 1 \otimes x'_i \otimes x''_i \end{aligned}$$

et on définit le *crochet de Schouten* $[\![X, X]\!]$ par

$$[\![X, X]\!] = [X_{12}, X_{13}] + [X_{12}, X_{23}] + [X_{13}, X_{23}];$$

on vérifie facilement que, si $X \in \wedge^2 A$, alors $[\![X, X]\!] \in \wedge^3 A$. On dit que X satisfait l'*équation de Yang-Baxter classique* (resp. *classique modifiée*) si $[\![X, X]\!]$ est nul (resp. invariant par A, *i.e.* si $[(\Delta \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta(a)), [\![X, X]\!]] = 0$ pour tout $a \in A$).

Proposition 5.4.3

Soit (A, μ, Δ) une bigèbre cocommutative.

(i) Toute application $\varphi : A \to A \otimes A$ vérifiant (II.11)' envoie P dans $P \otimes P$.

(ii) Soit X un élément de $\wedge^2 P$; définissons $\varphi : A \to \wedge^2 A$ par $\varphi(a) = [\Delta(a), X]$. Alors

(ii)$_a$ φ vérifie (II.12)'.

(ii)$_b$ $\varphi|_P$ vérifie (II.11)'.

(ii)$_c$ $\varphi|_P$ vérifie (II.9)' si et seulement si $[\![X,X]\!]$ est invariant par P.

(iii) Supposons A engendrée en tant qu'algèbre par P. Alors (A,μ,Δ,φ) est une bigèbre copoissonienne si et seulement si X satisfait l'équation de Yang-Baxter classique modifiée.

Démonstration

(i) Notons $(e_i)_{i\in I}$ une base de P et complétons-la en une base $(e_j)_{j\in J}$ de A, avec $I\subset J$. Prenons $a\in P$ et écrivons $\varphi(a)$ sous la forme $\varphi(a)=\sum_{j\in J} e_j\otimes u_j$ avec $u_j\in A$. (II.11)' s'écrit, sachant que $\varphi(1)=0$:

$$\sum_{j\in J} e_j\otimes\Delta(u_j)=\sum_{j\in J} e_j\otimes(u_j\otimes 1+1\otimes u_j),$$

ce qui prouve que $u_j\in P$; u_j est de la forme $\sum_{i\in I}\lambda_{j,i}e_i$; on a

$$\varphi(a)=\sum_{i,j}\lambda_{j,i}e_j\otimes e_i;$$

enfin l'antisymétrie de $\varphi(a)$ implique $\varphi(a)\in\wedge^2P$.

(ii) Calculs directs, simples pour (ii)$_a$, plus longs pour les autres; pour (ii)$_c$, on vérifie que, pour tout $a\in P$, on a

$$\sum_{s\in C_3} s\cdot(\varphi\otimes\mathrm{id}_A)(\varphi(a))=-[(\Delta\otimes\mathrm{id}_A)(\Delta(a)),[\![X,X]\!]].$$

(iii) Condition nécessaire : φ vérifie (II.9)', donc aussi $\varphi|_P$; $[\![X,X]\!]$ est invariant par P, donc par A.

Condition suffisante : on vérifie que si (II.9)' et (II.11)' sont vraies pour deux éléments a et b de A, elle sont encore vraies pour ab.

5.5. Cas des algèbres enveloppantes

Soit φ un cocrochet de Poisson sur une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; d'après ce qui précède, la restriction δ de φ à $\mathfrak{g}$ vérifie

(II.12)" $\qquad\qquad \delta\in Z^1(\mathfrak{g},\wedge^2\mathfrak{g})$

où $\wedge^2\mathfrak{g}$ est considéré comme un $\mathfrak{g}$-module *via* la représentation adjointe et où Z^1 est tel que défini au § III.2.5.1. Par ailleurs (II.9)' implique

$$\text{(II.9)''} \qquad \sum_{s\in C_3} s\circ(\delta\otimes\mathrm{id}_{\mathfrak{g}})\circ\delta = 0.$$

(Par contre (II.11)' ne donne aucune relation nouvelle.)

Si en outre δ est le cobord d'un élément r de $\wedge^2\mathfrak{g}$, la proposition II.5.4.3 montre que l'élément $[\![r,r]\!]$ de $\wedge^3\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{g}$-invariant, ce que l'on écrit

$$[\![r,r]\!] \in (\wedge^3\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}.$$

Notons $[\ ,\ ]^*$ l'application ${}^t\delta : \wedge^2\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ transposée de δ ; alors (II.9)" signifie exactement que $[\ ,\ ]^*$ vérifie l'identité de Jacobi, donc que $\mathfrak{g}^*$ est une algèbre de Lie.

On appelle *bigèbre de Lie* une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ munie d'un 1-cocycle δ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\wedge^2\mathfrak{g}$ vérifiant (II.9)". Enfin on vérifie qu'on obtient ainsi une bijection entre structures de bigèbre copoissonienne sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et structures de bigèbre de Lie sur $\mathfrak{g}$ (cf. [16]).

Remarque

Supposons k algébriquement clos et de caractéristique nulle, et $\mathfrak{g}$ simple ; notons B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, *i.e.* la forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$B(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,X\cdot\mathrm{ad}\,Y).$$

On démontre (cf. [30]) que l'espace $(\wedge^3\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ est de dimension 1 et engendré par la forme trilinéaire $(X,Y,Z)\to B([X,Y],Z)$. Il en résulte que $(\wedge^3\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ est de dimension 1 et engendré par l'élément

$$r_0 = \sum_{i,j,k}\sum_{p,q} b^{i,p}b^{j,q}\gamma^k_{p,q}e_i\otimes e_j\otimes e_k$$

où l'on a noté (e_i) une base de $\mathfrak{g}$, $\gamma^k_{p,q}$ les constantes de structure de $\mathfrak{g}$, et b^{ij} les coefficents de l'inverse de la matrice $(B(e_i,e_j))$.

Par exemple pour $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,k)$ on trouve $r_0 = H \wedge X \wedge Y$ où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.6. Remarque

Supposons $k = \mathbf{C}$ et notons G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$; identifions $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ à $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ (cf. § II.2.4.2); soit φ vérifiant (II.9)' à (II.12)'; en vertu du lemme ci-dessous, la transposée de φ envoie le produit tensoriel $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0 \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$; notons $\{\ ,\ \}$ cette application; c'est un crochet de Poisson sur $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ vérifiant l'analogue de (II.12). Il existe pour tout $x \in G$ un unique élément ξ_x de $\wedge^2 T_x(G)$ tel que

$$\{f_1, f_2\}(x) = \langle \xi_x, df_1 \wedge df_2 \rangle\,;$$

la condition (II.12) équivaut à la relation

$$\xi_{xy} = L_x(\xi_y) + R_y(\xi_x)$$

où L_x et R_y désignent respectivement la translation à gauche suivant x et à droite suivant y. On dit alors que G est un *groupe de Lie-Poisson.*

Posons, pour tout $x \in G$

$$\eta(x) = R_x^{-1}(\xi_x) \in \wedge^2\mathfrak{g};$$

alors $\eta \in Z^1(G, \wedge^2\mathfrak{g})$. Enfin on vérifie que le δ du § II.5.5 n'est autre que la différentielle de η, *i.e.*

$$\delta(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \eta(\exp tX) \qquad \forall\, X \in \mathfrak{g}.$$

Supposons en particulier que δ soit le cobord d'un élément r de $\wedge^2\mathfrak{g}$, *i.e.* que

$$\delta(X) = \operatorname{ad} X \cdot r \qquad \forall\, X \in \mathfrak{g};$$

alors η est le cobord de r en ce sens que

$$\eta(x) = \mathrm{Ad}x \cdot r - r \qquad \forall\, x \in G$$

d'où il résulte que

$$\xi_x = L_x \cdot r - R_x \cdot r.$$

Lemme

Soit $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon, \varphi)$ *une bigèbre copoissonienne; alors* ${}^t\varphi$ *envoie* $A^0 \otimes A^0$ *dans* A^0.

Démonstration

Soient u et v des éléments de A^0 ; on peut les écrire comme des coefficients de représentations de dimension finie de A, soit $u = \pi_{i,j}$, $v = \rho_{k,\ell}$; posant $\lambda = {}^t\varphi(u \otimes v)$, on doit montrer que les translatées à droite λ_b de λ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie de A^*. On a, pour $a \in A$,

$$\langle \lambda_b, a \rangle = \langle \lambda, ab \rangle = \langle u \otimes v, \varphi(a) \cdot \Delta(b) + \Delta(a) \cdot \varphi(b) \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle u \otimes v, \varphi(a) \cdot \Delta(b) \rangle = \\
&= \Big\langle \Delta^0(u \otimes v), \varphi(a) \otimes \Delta(b) \Big\rangle \\
&= \Big\langle \sigma_{23}(\Delta^0(u) \otimes \Delta^0(v)), \varphi(a) \otimes \Delta(b) \Big\rangle \\
&= \Big\langle \sigma_{23}\Big(\sum_{m,n} \pi_{i,m} \otimes \pi_{m,j} \otimes \pi_{k,n} \otimes \pi_{n,\ell}\Big), \varphi(a) \cdot \otimes \Delta(b) \Big\rangle \\
&= \sum_{m,n} \langle \pi_{i,m} \otimes \pi_{k,n}, \varphi(a) \rangle \cdot \langle \pi_{m,j} \otimes \pi_{n,\ell}, \Delta(b) \rangle \, ;
\end{aligned}$$

ainsi $\langle u \otimes v, \varphi(\cdot) \cdot \Delta(b) \rangle$ est une combinaison linéaire des formes linéaires $(\pi_{i,m} \otimes \pi_{k,n}) \circ \varphi$, qui sont indépendantes de b.

Raisonnement analogue pour $\langle u \otimes v, \Delta(a) \cdot \varphi(b) \rangle$.

Chapitre III
Déformations formelles

La théorie exposée dans ce chapitre est due, pour l'essentiel, à M. Gerstenhaber et ses collaborateurs; voir par exemple [18] et [19].

1. Les espaces $X[\![h]\!]$

1.1. Généralités

1.1.1. *Définitions*

Etant donné un corps k, on notera $k[\![h]\!]$ ou $\widetilde{k}$ l'algèbre des séries formelles à une indéterminée h sur k; c'est une k-algèbre commutative, intègre et locale, *i.e.* elle admet un unique idéal maximal, à savoir $h\widetilde{k}$; on la munira de la topologie h-adique, pour laquelle les sous-espaces $h^n\widetilde{k}$ forment une base de voisinages de 0; elle est alors séparée et complète.

Si maintenant X est un k-espace vectoriel, on note $X[\![h]\!]$ ou $\widetilde{X}$ l'espace des séries formelles à coefficients dans X, et on le munit aussi de la topologie h-adique; c'est un $\widetilde{k}$-module pour l'action

$$\left(\sum_p \lambda_p h^p, \sum_q x_q h^q\right) \to \sum_n \left(\sum_{p+q=n} \lambda_p x_q\right) \cdot h^n$$

où $\lambda_p \in k$ et $x_q \in X$.

Il est clair que $\widetilde{X}$ est la limite projective des espaces $\widetilde{X}_n = \widetilde{X}/h^{n+1} \cdot \widetilde{X}$ et que $\widetilde{X}_n$ est un $\widetilde{k}$-module isomorphe à $X \otimes_k \widetilde{k}_n$.

Lemme 1.1.2

(i) Le $\widetilde{k}$-morphisme $f : X \otimes_k \widetilde{k} \to \widetilde{X}$ défini par $f(x \otimes \lambda) = \lambda x$ est injectif.

(ii) f est surjectif si et seulement si X est de dimension finie.

(iii) Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de X, les éléments de $\widetilde{X}$ sont exactement les séries $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ où λ_i parcourt $\widetilde{k}$ et tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I; on exprime parfois cela en disant que (e_i) est une "base topologique" de $\widetilde{X}$.

Démonstration

(i) Tout élément de $X \otimes_k \widetilde{k}$ est de la forme $\xi = \sum_{i \in J} e_i \otimes \lambda_i$ où J est une partie finie de I et $\lambda_i \in \widetilde{k}$, soit $\lambda_i = \sum_q \lambda_{i,q} h^q$; alors

$$f(\xi) = \sum_q \left(\sum_{i \in J} \lambda_{i,q} e_i \right) h^q$$

et l'assertion (i) en résulte immédiatement.

(ii) Tout élément de $\widetilde{X}$ est de la forme $\eta = \sum_q \left(\sum_{i \in J_q} \alpha_{q,i} e_i \right) h^q$ où les J_q sont des parties finies de I et $\alpha_{q,i} \in k$; et un tel élément appartient à $X \otimes_k \widetilde{k}$ si et seulement si la réunion des J_q est finie.

(iii) Posons

$$Z_i = \{ q \in \mathbf{N} \mid i \in J_q \}$$

puis

$$\lambda_i = \sum_{q \in Z_i} \alpha_{q,i} h^q ;$$

il est facile de voir que λ_i tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I ; de plus $\eta = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$. La réciproque résulte du fait qu'une telle famille $(\lambda_i e_i)$ est sommable.

Lemme 1.1.3

Un $\widetilde{k}$-module V est de la forme $\widetilde{X}$ si et seulement s'il est séparé, complet et sans torsion (i.e. l'annulateur dans $\widetilde{k}$ d'un élément non nul de $\widetilde{X}$ est réduit à 0), ou encore si et seulement si les conditions $v \in V$, $hv = 0$ impliquent $v = 0$.

Démonstration

Il est clair que $\widetilde{X}$ possède ces propriétés ; pour démontrer la réciproque, on choisit un sous-k-espace vectoriel X supplémentaire de hV et on écrit

$$V = X \oplus hV = X \oplus h\dot{X} \oplus h^2 V, \quad \text{etc.}$$

1.2. $\widetilde{k}$-morphismes

Lemme 1.2.1

(i) Considérons deux k-espaces vectoriels X et Y et soit $\mathrm{Hom}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ l'espace des $\widetilde{k}$-morphismes de $\widetilde{X}$ dans $\widetilde{Y}$. Il existe un $\widetilde{k}$-isomorphisme de $\widetilde{\mathrm{Hom}(X,Y)}$ sur $\mathrm{Hom}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$ défini par

$$\sum_n u_n h^n \to \widetilde{u}$$

avec

$$\widetilde{u}\left(\sum_p x_p h^p\right) = \sum_n \left(\sum_{p+q=n} u_p(x_q)\right) \cdot h^n.$$

Nous écrirons $\widetilde{u} = (u_n)$.

(ii) Si $\widetilde{v} = (v_n) \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{k}}(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})$, le composé $\widetilde{w} = \widetilde{v} \circ \widetilde{u}$ est donné par

$$w_n = \sum_{p+q=n} v_p \circ u_q.$$

(iii) Si $X = Y$ (auquel cas on écrit $\mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X})$ au lieu de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X}, \widetilde{X})$), un élément $\widetilde{u}$ de $\mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X})$ *est inversible si et seulement si u_0 l'est.*

Démonstration

Faisons d'abord la remarque importante que tout $\widetilde{k}$-morphisme est *automatiquement continu* pour les topologies h-adiques.

(i) Il est immédiat que l'application $\widetilde{u}$ ainsi définie est un $\widetilde{k}$-morphisme et que l'application $\sum_n u_n h^n \to \widetilde{u}$ est un $\widetilde{k}$-morphisme injectif; montrons qu'il est surjectif. Soit v un élément de $\mathrm{Hom}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})$; pour tout $x \in X$, $v(x)$ s'écrit $\sum_n v_n(x) \cdot h^n$ où les v_n appartiennent à $\mathrm{Hom}(X, Y)$; si maintenant un élément ξ de $\widetilde{X}$ est une somme finie $\sum_n \xi_n \cdot h^n$, on a

$$v(\xi) = \sum_n v(\xi_n) \cdot h^n = \sum_n \left(\sum_{p+q=n} v_p(\xi_q) \right) \cdot h^n,$$

et ceci reste vrai pour tout $\xi \in \widetilde{X}$ à cause de la continuité de v.

(ii) et (iii) sont immédiats.

1.2.2. *Sommes directes de $\widetilde{k}$-morphismes*

Donnons-nous un ensemble I et, pour tout $i \in I$, deux k-espaces vectoriels $X^{(i)}, Y^{(i)}$ et un $\widetilde{k}$-morphisme $\widetilde{u}^{(i)} : \widetilde{X^{(i)}} \to \widetilde{Y^{(i)}}$; on va définir un $\widetilde{k}$-morphisme $\widetilde{u} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ où X (resp. Y) est la somme directe des $X^{(i)}$ (resp. $Y^{(i)}$). Chaque $\widetilde{u}^{(i)}$ correspond à une famille d'applications linéaires $u_n^{(i)} : X^{(i)} \to Y^{(i)}$. Soit $\sum_p x_p h^p$ un élément de $\widetilde{X}$; on peut écrire $x_p = \sum_{i \in I_p} x_p^{(i)}$ où chaque I_p est une partie finie de I. On pose alors

$$\widetilde{u}\Bigl(\sum_p x_p h^p\Bigr) = \sum_n \Bigl(\sum_{i \in I} \sum_{p+q=n} u_q^{(i)}(x_p^{(i)})\Bigr) \cdot h^n$$

et ceci a bien un sens car, n étant fixé, $\sum_{p+q=n} u_q^{(i)}(x_p^{(i)})$ n'est non nul que si i appartient à la réunion des I_p pour $p = 0, \dots, n$.

Définition

Le $\widetilde{k}$-morphisme défini ci-dessus sera noté $\bigoplus_{i \in I} \widetilde{u}^{(i)}$.

1.3. Produits tensoriels

Lemme 1.3.1

Etant donné trois espaces vectoriels X, Y, Z, l'espace des applications $\widetilde{k}$-bilinéaires de $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$ dans $\widetilde{Z}$ s'identifie à celui des $\widetilde{k}$-morphismes de $X \widetilde{\otimes} Y$ dans $\widetilde{Z}$, c'est-à-dire à l'ensemble des suites (u_n) où chaque u_n est une application k-bilinéaire de $X \times Y$ dans Z ; à une telle suite (u_n) correspond l'application $\widetilde{u} : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to \widetilde{Z}$ suivante :

$$\widetilde{u}(\sum_p x_p h^p, \sum_q y_q h^q) = \sum_n (\sum_{p+q+r=n} u_r(x_p, y_q)) \cdot h^n.$$

La démonstration est tout à fait analogue à celle du lemme III.1.2.1.

Proposition 1.3.2

Pour tout couple de k-espaces vectoriels X et Y, on a

$$X \widetilde{\otimes} Y = \varprojlim (\widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{Y})/h^{n+1} \cdot (\widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{Y}).$$

La démonstration utilisera le lemme suivant :

Lemme

Si A est une k-algèbre commutative, X un A-module et I un idéal de A, il existe un isomorphisme canonique $X/I \cdot X \to X \otimes_A A/I$.

Démonstration du lemme

On sait (voir par exemple [33], ch. XVI, prop. 2.6) que la suite exacte

$$0 \to I \xrightarrow{u} A \xrightarrow{v} A/I \to 0$$

induit une suite exacte

$$X \otimes_A I \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes u} X \otimes_A A \xrightarrow{\mathrm{Id} \otimes v} X \otimes_A A/I \to 0;$$

si l'on identifie $X \otimes_A A$ à X, l'application $\mathrm{Id} \otimes u$ s'écrit $(\mathrm{Id} \otimes u)(x \otimes i) = ix$, donc

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} \otimes v) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} \otimes u) = I \cdot X.$$

Démonstration de la proposition

Ecrivons pour simplifier $\widetilde{k}_n = \widetilde{k}/h^{n+1}\widetilde{k}$; on a

$$\begin{aligned}
(\widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{Y})/h^{n+1} \cdot (\widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{Y}) = &\\
&= \widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{Y} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{k}_n \quad \text{(d'après le lemme)}\\
&= (\widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{k}_n) \otimes_{\widetilde{k}_n} (\widetilde{Y} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{k}_n) \quad \text{(associativité de } \otimes)\\
&= (\widetilde{X}/h^{n+1}\widetilde{X}) \otimes_{\widetilde{k}_n} (\widetilde{Y}/h^{n+1}\widetilde{Y}) \quad \text{(d'après le lemme)}\\
&= (X \otimes \widetilde{k}_n) \otimes_{\widetilde{k}_n} (Y \otimes \widetilde{k}_n)\\
&= X \otimes Y \otimes \widetilde{k}_n\\
&= (X \widetilde{\otimes} Y)/h^{n+1}(X \widetilde{\otimes} Y).
\end{aligned}$$

1.3.3. *Remarque*

La proposition précédente dit que $X \widetilde{\otimes} Y$ est le séparé-complété de $\widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{Y}$ pour la topologie h-adique ; l'application canonique $f : \widetilde{X} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{Y} \to X \widetilde{\otimes} Y$ est donnée par

$$f(\sum_p x_p h^p \otimes_{\widetilde{k}} \sum_q y_q h^q) = \sum_n (\sum_{p+q=n} x_p \otimes y_q) \cdot h^n ;$$

il est facile de voir que f est bijective si X ou Y est de dimension finie ; on peut démontrer que f n'est surjective que si X ou Y est de dimension finie. Par contre j'ignore si f est toujours injective.

1.3.4. *Produits tensoriels de $\widetilde{k}$-morphismes*

Soient $X^{(i)}, Y^{(i)}$, $i = 1, 2$, des k-espaces vectoriels, $\widetilde{u}^{(i)} = (u_n^{(i)})$ des $\widetilde{k}$-morphismes $\widetilde{X^{(i)}} \to \widetilde{Y^i}$; on notera $\widetilde{u}^{(1)} \otimes \widetilde{u}^{(2)}$ le $\widetilde{k}$-morphisme

$$X^{(1)} \widetilde{\otimes} X^{(2)} \to Y^{(1)} \widetilde{\otimes} Y^{(2)}$$

associé à la suite $n \to \sum_{p+q=n} u_p^{(1)} \otimes u_q^{(2)}$; on a donc

$$(\widetilde{u}^{(1)} \otimes \widetilde{u}^{(2)})\Big(\sum_p \xi_p h^p\Big) = \sum_n \Big(\sum_{p+q+r=n} (u_p^{(1)} \otimes u_q^{(2)})(\xi_r)\Big) \cdot h^n.$$

1.4. Structure d'algèbre canonique sur $\widetilde{A}$

Si A est une k-algèbre, la formule

$$\sum_p a_p h^p \cdot \sum_q b_q h^q = \sum_n \Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q \Big) \cdot h^n$$

définit sur $\widetilde{A}$ une structure de $\widetilde{k}$-algèbre dite *canonique*; son élément unité est celui de A. Si X est un k-espace vectoriel, l'isomorphisme $\mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X}) \to \widetilde{\mathrm{End}}\, X$ est compatible avec les deux structures d'algèbres.

2. Déformations formelles d'algèbres associatives

2.1. Définitions et premières propriétés

On appelle *déformation formelle* d'une k-algèbre (A, μ, i) une structure $\widetilde{\mu}$ de $\widetilde{k}$-algèbre sur le $\widetilde{k}$-module $\widetilde{A}$ telle que l'application canonique de $\widetilde{A}/h\widetilde{A}$ sur A soit un isomorphisme d'algèbres. D'après le lemme III.1.3.1, ceci revient à se donner une suite d'applications k-bilinéaires $\mu_n : A \times A \to A$ et on a alors

$$\widetilde{\mu}(\sum_p a_p h^p, \sum_q b_q h^q) = \sum_n (\sum_{p+q+r=n} \mu_r(a_p, b_q)) \cdot h^n.$$

L'isomorphisme $\widetilde{A}/h\widetilde{A} = A$ se traduit par

$$\mu_0 = \mu; \tag{III.1}$$

l'associativité signifie que les deux applications évidentes $\widetilde{A} \times \widetilde{A} \times \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ sont identiques et se traduit par les relations

$$\sum_{p+q=n} (\mu_p(\mu_q(a,b),c) - \mu_p(a, \mu_q(b,c))) = 0 \quad \forall\, n \geq 1 \tag{III.2$_n$}$$

soit encore

$$\begin{aligned} a \cdot \mu_n(b,c) - \mu_n(ab,c) + \mu_n(a,bc) - \mu_n(a,b) \cdot c = \\ - \sum_{p=1}^{n-1} (\mu_p(a, \mu_{n-p}(b,c)) - \mu_p(\mu_{n-p}(a,b),c)) \end{aligned} \tag{III.3$_n$}$$

pour $n \geq 2$ et, pour $n = 1$,

$$a \cdot \mu_1(b,c) - \mu_1(ab,c) + \mu_1(a,bc) - \mu_1(a,b) \cdot c = 0. \tag{III.3$_1$}$$

On appelle *déformation formelle constante* la structure d'algèbre canonique du § III.1.4, *i.e.* définie par $\mu_n = 0$ pour $n \geq 1$.

Deux déformations formelles $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ et $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu}')$ sont dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $\widetilde{u}$ de $\widetilde{k}$-algèbres de l'une sur l'autre induisant l'identité sur $\widetilde{A}/h\widetilde{A}$; d'après le lemme III.1.2.1 cela signifie qu'il existe des éléments $u_n \in \operatorname{End} A$ vérifiant

$$u_0 = \mathrm{Id}_A$$

et

$$\sum_{p+q+r=n} \mu_p(u_q(a), u_r(b)) - \sum_{p+q=n} u_p(\mu'_q(a,b)) = 0. \tag{III.4}$$

On appelle *déformation formelle triviale* toute déformation formelle équivalente à la déformation formelle constante.

Lemme 2.2

Une déformation formelle $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ est triviale si et seulement si la suite exacte d'algèbres

$$0 \to h\widetilde{A} \to \widetilde{A} \to A \to 0$$

est scindée.

Démonstration

Notant π l'application canonique $\widetilde{A} \to A$, la condition de l'énoncé signifie qu'il existe un morphisme d'algèbres $s : A \to \widetilde{A}$ vérifiant $\pi \circ s = \mathrm{Id}_A$, c'est-à-dire une suite d'applications linéaires $s_n : A \to A$ vérifiant $s_0 = \mathrm{Id}_A$ et

$$s_n(ab) = \sum_{p+q+r=n} \mu_p(s_q(a), s_r(b))$$

mais ceci est exactement la condition (III.4) avec $\mu'_q = 0 \; \forall\, q > 0$.

2.3. Elément unité d'une déformation formelle

Proposition

(i) L'élément unité 1 de A est aussi élément unité pour une déformation formelle $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ si et seulement si l'on a

$$\mu_n(a,1) = \mu_n(1,a) = 0 \quad \forall\, n > 0,\ a \in A. \tag{III.5}$$

L'analogue de l'application $i : k \to A$ est alors l'application $\widetilde{i} : \widetilde{k} \to \widetilde{A}$ définie par

$$\widetilde{i}(\sum_n \lambda_n h^n) = \sum_n \lambda_n 1 \cdot h^n.$$

(ii) Dans la situation de (i), tout élément inversible de A est aussi inversible dans $\widetilde{A}$.

(iii) Toute déformation formelle $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ est équivalente à une déformation formelle $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu}')$ ayant même élément unité que A.

Démonstration

(i) est immédiat.

(ii) Soit a un élément inversible de A; définissons des éléments $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ de $\mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{A}) = \widetilde{\mathrm{End}\, A}$ par

$$\widetilde{u}(\widetilde{x}) = \widetilde{\mu}(a, \widetilde{x}), \widetilde{v}(\widetilde{x}) = \widetilde{\mu}(\widetilde{x}, a);$$

ces éléments sont inversibles parce que leurs composantes u_0 et v_0 le sont.

Démonstration de (iii)

a) Récrivons la formule (III.4) en supposant $u_p = 0$ pour $p = 1, \ldots, n-1$; on obtient

$$\mu'_n(a,b) = u_n(ab) - a \cdot u_n(b) - u_n(a) \cdot b + \mu_n(a,b). \tag{III.6}$$

b) Prenant successivement $b = c = 1$, puis $a = b = 1$ dans (III.2), on obtient

$$\mu_n(a,1) = a \cdot \mu_n(1,1), \quad \mu_n(1,a) = \mu_n(1,1) \cdot a. \tag{III.7}$$

c) Transformons $\widetilde{\mu}$ par un isomorphisme $\widetilde{u}$ vérifiant

$$u_1(1) = \mu_1(1,1), \quad u_n = 0 \quad \forall\, n > 1;$$

(III.6) et (III.7) entraînent

$$\mu_1'(a,1) = -a \cdot \mu_1(1,1) + a \cdot \mu_1(1,1) = 0$$

et de même

$$\mu_1'(1,a) = 0.$$

d) Procédant par récurrence, supposons que $\mu_n(a,1) = \mu_n(1,a) = 0$ pour $n = 1, \ldots, m-1$; transformons $\widetilde{\mu}$ par un isomorphisme $\widetilde{u}$ vérifiant

$$u_m(1) = \mu_m(1,1), \quad u_n = 0 \quad \forall\, n \neq m;$$

(III.6) et (III.7) entraînent $\mu_n'(a,1) = \mu_n'(1,a) = 0$ pour $n = 1, \ldots, m$.

e) Il suffit enfin de remarquer que le produit $(1 + u_n h^n) \cdots (1 + u_1 h)$ converge lorsque n tend vers l'infini.

Dans la suite *nous supposerons toujours que l'élément unité* 1 *de* A *est aussi élément unité pour* $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$.

2.4. Représentations des déformations formelles d'algèbres associatives

2.4.1. *Définitions*

Soit $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ une déformation formelle; nous appellerons *représentation* de $\widetilde{A}$ tout couple $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ où V est un k-espace vectoriel et $\widetilde{\pi}$ un $\widetilde{k}$-morphisme multiplicatif de $\widetilde{A}$ dans $\mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{V}) = \widetilde{\mathrm{End}\,V}$; d'après le lemme III.1.2.1, il revient au même de se donner des $\pi_n \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{End}\,V)$ vérifiant

$$\sum_{p+q=n} (\pi_p(\mu_q(a,b)) - \pi_q(a) \cdot \pi_q(b)) = 0;$$

en particulier π_0 est une représentation (au sens ordinaire) de A dans V.

Nous dirons que $\widetilde{V}$ est un $\widetilde{A}$-*module*; nous dirons enfin que $\widetilde{\pi}$ est de *rang fini* n si V est de dimension finie n.

2.4.2. *Sommes directes*

On peut définir la *somme directe* d'une famille quelconque $(\widetilde{V^{(i)}}, \widetilde{\pi^{(i)}})$ de représentations de $\widetilde{A}$: c'est la représentation de $\widetilde{A}$ dans $\oplus\widetilde{V^{(i)}}$ donnée par

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{a}) = \oplus(\widetilde{\pi^{(i)}}(\widetilde{a}))$$

où le second membre a un sens grâce au § III.1.2.2.

2.4.3. *Equivalence*

On dira que deux représentations $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ et $(\widetilde{W}, \widetilde{\rho})$ sont *équivalentes* s'il existe un $\widetilde{k}$-isomorphisme $\widetilde{u} : \widetilde{V} \to \widetilde{W}$ transformant $\widetilde{\pi}$ en $\widetilde{\rho}$; c'est-à-dire s'il existe des $u_n \in \operatorname{Hom}(V, W)$ tels que u_0 soit bijectif et que

$$\sum_{p+q=n} (u_p \circ \pi_q(a) - \rho_q(a) \circ u_p) = 0.$$

2.5. Utilisation du langage cohomologique

2.5.1. *Généralités*

Considérons une k-algèbre A et un A-bimodule X ; pour tout entier $n \geq 1$ notons $C^n(A, X)$ l'espace des n-cochaînes (ou applications n-linéaires f de A^n dans X) et d^n l'application $C^n(A, X) \to C^{n+1}(A, X)$ définie par

$$\begin{aligned} d^n f(a_1, \ldots, a_{n+1}) &= a_1 \cdot f(a_2, \ldots, a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) \cdot a_{n+1}. \end{aligned}$$

On vérifie que $d^{n+1} \circ d^n = 0$; on pose

$$\begin{aligned} Z^n(A, X) &= \operatorname{Ker} d^n && \text{(ensemble des } n\text{-}cocycles\text{)} \\ B^n(A, X) &= \operatorname{Im} d^{n-1} && \text{(ensemble des } n\text{-}cobords\text{, nul pour } n = 0\text{);} \end{aligned}$$

on a donc $B^n(A, X) \subset Z^n(A, X)$. L'espace $Z^n(A, X)/B^n(A, X)$ est noté $H^n(A, X)$ et appelé n-ième-*groupe de cohomologie de Hochschild de* A *à coefficients dans* X (pour plus de détails, voir par exemple [10], § IX. 4).

Ceci étant, la formule (III.3) se récrit comme suit :

$$\text{(III.8)} \qquad d^2\mu_n(a,b,c) = -\sum_{p=1}^{n-1}(\mu_p(a,\mu_{n-p}(b,c)) - \mu_p(\mu_{n-p}(a,b),c))$$

où l'on a considéré A comme un A-bimodule. En particulier μ_1 est un 2-cocycle. On peut de même interpréter la formule (III.4) de la façon suivante :

$$\text{(III.9)} \quad d^1u_m(a,b) = -\sum_{p=0}^{m-1} u_p(\mu_{m-p}(a,b)) - \sum_{p=1}^{m-1} u_p(a)\cdot u_{m-p}(b) - \sum_{n=1}^{m}\sum_{p=0}^{m-n} \mu'_n(u_p(a), u_{m-n-p}(b)),$$

En particulier

$$\text{(III.10)} \qquad (d^1u_1)(a,b) = \mu_1(a,b) - \mu'_1(a,b).$$

2.5.2. *Construction de déformations formelles par étapes*

Etant donné un 2-cocycle $\varphi \in Z^2(A,A)$, on peut chercher à construire une déformation formelle $\widetilde{\mu}$ telle que $\mu_1 = \varphi$; considérons la 3-cochaîne

$$\psi(a,b,c) = \varphi(\varphi(a,b),c) - \varphi(a,\varphi(b,c));$$

on vérifie que ψ est un 3-cocycle; la formule (III.8) avec $n = 2$ montre que ψ doit être un cobord, ce qu'on exprime en disant qu'il y a une *obstruction dans* $H^3(A,A)$. Si ψ est un cobord, on peut déterminer μ_2 (à un 2-cocycle près); pour déterminer μ_3 on se heurte de nouveau à une obstruction dans $H^3(A,A)$, et ainsi de suite.

Théorème 2.5.3

Si $H^2(A,A) = 0$, toute déformation formelle $(\widetilde{A},\widetilde{\mu})$ de A est triviale.

Démonstration

a) Montrons d'abord, sans supposer $H^2(A,A) = 0$, que si $\mu_1 = \cdots = \mu_{n-1} = 0$ et si μ_n (qui est un 2-cocycle) est un cobord, il existe $\widetilde{\mu}'$ équivalente à $\widetilde{\mu}$ et vérifiant $\widetilde{\mu}'_1 = \cdots = \mu'_n = 0$. Il existe par hypothèse $f \in \operatorname{End} A$ tel que

$$\mu_n(a,b) = a\cdot f(b) - f(ab) + f(a)\cdot b$$

Définissons $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v} \in \mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{A})$ par

$$u_q = \begin{cases} f^{q/n} & \text{si } q \text{ est un multiple de } n \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

$$v_q = \begin{cases} -f & \text{si } q = n \\ 0 & \text{dans le cas contraire;} \end{cases}$$

on vérifie que $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ sont mutuellement réciproques. Définissons $\widetilde{\mu}'$ par

$$\widetilde{\mu}'(a,b) = \widetilde{u}(\widetilde{\mu}(\widetilde{v}(a), \widetilde{v}(b)));$$

on vérifie que

$$\widetilde{\mu}'(a,b) = ab + (\mu_n(a,b) - a \cdot f(b) + f(ab) - f(a) \cdot b)h^n \quad \text{mod. } h^{n+1}.$$

b) En vertu de la partie a) il existe un automorphisme de $\widetilde{A}$ de la forme $I - hf_1$ transformant $\widetilde{\mu}$ en $\widetilde{\mu}^{(1)}$ tel que $\mu_1^{(1)} = 0$; puis un automorphisme de la forme $I - h^2 f_2$ transformant $\widetilde{\mu}^{(1)}$ en $\widetilde{\mu}^{(2)}$ tel que $\mu_{(1)}^{(2)} = \mu_2^{(2)} = 0$; et ainsi de suite. Il suffit alors de remarquer que le produit $(I - h^p f_p) \cdots (I - hf_1)$ est convergent lorsque p tend vers l'infini.

2.5.4. *Exemple*

Le théorème s'applique en particulier aux algèbres de matrices $M(n,k)$.

Théorème 2.5.5

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple sur un corps k de caractéristique nulle, toute déformation formelle de son algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est triviale.

Nous en donnerons deux démonstrations ; elles font toutes deux intervenir la cohomologie des algèbres de Lie, dont nous rappelons la définition. Etant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et un $\mathfrak{g}$-module X, on pose

$$C^n(\mathfrak{g}, X) = \mathrm{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}, X) \quad \text{(espace des } n\text{-cochaînes);}$$

on définit des applications linéaires $d^n : C^n(\mathfrak{g}, X) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, X)$ par

$$\begin{aligned} d^n f(X_1, \ldots, X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \cdot X_i f(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \cdot f([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{n+1}) \end{aligned}$$

où le symbole $\hat{\cdot}$ signifie qu'on omet la lettre correspondante; alors $d^{n+1} \circ d^n = 0$ et on pose

$$\begin{aligned} Z^n(\mathfrak{g}, X) &= \operatorname{Ker} d^n \quad \text{(ensemble des } n\text{-cocycles)} \\ B^n(\mathfrak{g}, X) &= \operatorname{Im} d^{n-1} \quad \text{(ensemble des } n\text{-cobords, nul si } n = 0) \\ H^n(\mathfrak{g}, X) &= Z^n(\mathfrak{g}, X)/B^n(\mathfrak{g}, X). \end{aligned}$$

Première démonstration du théorème

Il suffit de montrer que $H^2(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = 0$. Considérons $\mathcal{U}$ comme un $\mathfrak{g}$-module pour l'action $(X, u) \to Xu - uX$ (action adjointe); on sait (voir par exemple [10], chapitre XIII, théorème 5.1) que $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = H^n(\mathfrak{g}, \mathcal{U})$; mais $H^n(\mathfrak{g}, \mathcal{U})$ est nul en vertu du lemme ci-dessous.

Deuxième démonstration du théorème

a) Soit $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ une déformation formelle de $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. D'après le lemme III.2.2, il suffit de montrer que la suite exacte d'algèbres

$$0 \to h\widetilde{\mathcal{U}} \to \widetilde{\mathcal{U}} \xrightarrow{\pi} \mathcal{U} \to 0$$

est scindée, ou encore, en vertu de la propriété universelle de l'algèbre enveloppante, que la suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \to h\widetilde{\mathcal{U}} \to \pi^{-1}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$$

est scindée.

b) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, notons $\rho(X)$ l'opérateur $\widetilde{k}$-linéaire dans $\widetilde{\mathcal{U}}$ défini par $\rho(X) = \operatorname{ad}_{\widetilde{\mathcal{U}}}(X)$, c'est-à-dire

$$\rho(X) \cdot \widetilde{u} = \widetilde{\mu}(X, \widetilde{u}) - \widetilde{\mu}(\widetilde{u}, X) \quad \forall \widetilde{u} \in \widetilde{\mathcal{U}},$$

ou encore

$$(\rho(X) \cdot \widetilde{u})_n = \sum_{p+q=n} (\mu_p(X, u_q) - \mu_p(u_q, X)).$$

Cet opérateur conserve chaque idéal $h^m\widetilde{\mathcal{U}}$ et définit un opérateur $\rho_m(X)$ dans $h^m\widetilde{\mathcal{U}}/h^{m+1}\widetilde{\mathcal{U}}$ donné par

$$\rho_m(X) \cdot v = X \cdot v - v \cdot X;$$

autrement dit, ρ_m n'est autre que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre $h^m\widetilde{\mathcal{U}}/h^{m+1}\widetilde{\mathcal{U}}$ identifiée à $\mathcal{U}$ (par contre ρ n'est pas une représentation !).

On notera π_m l'application canonique $h^m\widetilde{\mathcal{U}} \to h^m\widetilde{\mathcal{U}}/h^{m+1}\widetilde{\mathcal{U}}$.

c) La flèche $\pi^{-1}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g}$ admet un inverse à gauche $\widetilde{k}$-linéaire s évident : $s(X) = X$, mais ce n'est pas un morphisme d'algèbres de Lie; posons

$$f(X,Y) = s([X,Y]_{\mathfrak{g}}) - [s(X), s(Y)]_{\widetilde{\mathcal{U}}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g};$$

on vérifie facilement que l'on a $f(X,Y) \in h\widetilde{\mathcal{U}}$ et

$$\begin{aligned}\rho(X)\cdot f(Y,Z) - \rho(Y)\cdot f(X,Z) + \rho(Z)\cdot f(X,Y) &= \\ = f([X,Y]_{\mathfrak{g}}, Z) - f([X,Z]_{\mathfrak{g}}, Y) &+ f([Y,Z]_{\mathfrak{g}}, X).\end{aligned}$$

Composant avec π_1, ceci montre que $\pi_1 \circ f \in Z^2(\mathfrak{g}, h\widetilde{\mathcal{U}}/h^2\widetilde{\mathcal{U}})$; en vertu du lemme ci-dessous, il existe une application linéaire $g_1^0 : \mathfrak{g} \to h\widetilde{\mathcal{U}}/h^2\widetilde{\mathcal{U}}$ telle que

$$\pi_1(f(X,Y)) = \rho_1(X)\cdot g_1^0(Y) - \rho_1(Y)\cdot g_1^0(X) - g_1^0([X,Y]_{\mathfrak{g}});$$

relevons g_1^0 en une application linéaire $g_1 : \mathfrak{g} \to h\widetilde{\mathcal{U}}$; on aura

$$f(X,Y) = \rho(X)\cdot g_1(Y) - \rho(Y)\cdot g_1(X) - g_1([X,Y]_{\mathfrak{g}}) \quad \text{modulo } h^2\widetilde{\mathcal{U}}.$$

Posant $t_1 = s + g_1$, on a

$$t_1([X,Y]_{\mathfrak{g}}) - [t_1(X), t_1(Y)]_{\widetilde{\mathcal{U}}} = 0 \quad \text{modulo } h^2\widetilde{\mathcal{U}}.$$

d) Procédant avec t_1 comme plus haut avec s, on construit $g_2 : \mathfrak{g} \to h^2\widetilde{\mathcal{U}}$ tel que $t_2 = t_1 + g_2$ vérifie

$$t_2([X,Y]_{\mathfrak{g}}) - [t_2(X), t_2(Y)]_{\widetilde{\mathcal{U}}} = 0 \quad \text{modulo } h^3\widetilde{\mathcal{U}};$$

et ainsi de suite; la suite des t_n est convergente parce que la série $\sum g_n$ l'est; sa limite a la propriété désirée.

Lemme

Si k est de caractéristique nulle, on a $H^2(\mathfrak{g}, \mathcal{U}(\mathfrak{g})) = 0, \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ étant muni de la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$.

Démonstration

On sait (cf. [12], §2.3.3) que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est somme directe de $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie, et d'autre part ([20], chapitre II, proposition 11.3) que $H^2(\mathfrak{g}, E)$ est nul pour un tel module E ; enfin il est facile de voir que ceci reste vrai pour les sommes directes.

2.5.6. *Représentations des déformations formelles constantes d'algèbres associatives*

D'après III.2.4.1, si μ_n est nul pour tout $n > 0$, une représentation $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ de $\widetilde{A}$ équivaut à une suite d'applications $\pi_n : A \to \operatorname{End} V$ vérifiant

$$\pi_n(ab) - \sum_{p+q=n} \pi_p(a) \cdot \pi_q(b) = 0,$$

soit encore, en considérant $\operatorname{End} V$ comme un A-bimodule pour les actions

$$a \cdot u = \pi_0(a) \circ u, \quad u \cdot a = u \circ \pi_0(a),$$

$$d^1\pi_n(a, b) = - \sum_{p=1}^{n-1} \pi_p(a) \cdot \pi_{n-p}(b);$$

en particulier π_1 est un 1-cocycle.

On dira que $\widetilde{\pi}$ est une *déformation formelle* de la représentation π_0 de A dans V. On a en particulier la *déformation formelle constante* définie par $\pi_n = 0 \ \forall n > 0$; une déformation formelle $\widetilde{\pi}$ sera dite *triviale* si elle est équivalente (au sens du § III.2.4.3) à la déformation formelle constante ayant même π_0, avec en outre $u_0 = \mathrm{Id}_V$; cela signifie donc que

$$d^0u_n(a) = \sum_{p=0}^{n-1} u_p \circ \pi_{n-p}(a);$$

en particulier $\pi_1 = d^0u_1$.

Théorème

Soit $\widetilde{A}$ la déformation formelle constante de A, $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ une représentation de $\widetilde{A}$. Si $H^1(A, \operatorname{End} V) = 0$, $\widetilde{\pi}$ est une déformation formelle triviale de π_0.

Démonstration

Par récurrence ; on a un $u_1 \in \operatorname{End} V$ vérifiant $\pi_1 = d^0 u_1$; on transforme $\widetilde{\pi}$ par l'automorphisme $\mathrm{Id}_V + hu_1$; etc.

2.5.7. *Représentations des déformations formelles des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples*

Notons $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur k, $\mathcal{U}$ son algèbre enveloppante, $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ une déformation formelle de $\mathcal{U}$, $\operatorname{Rep}(\mathcal{U})$ (resp. $\operatorname{Rep}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$) l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de dimension finie de $\mathcal{U}$ (resp. de rang fini de $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$).

Théorème

On suppose k de caractéristique nulle.

(i) En associant à toute représentation $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ de rang fini de $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ sa composante de degré 0, on obtient une bijection de $\operatorname{Rep}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ *sur* $\operatorname{Rep}(\mathcal{U})$ *qui respecte les sommes directes et les inclusions.*

(ii) π_0 est irréductible si et seulement si tout sous-$\widetilde{\mathcal{U}}$-module fermé non nul de $\widetilde{V}$ est de la forme $h^m \widetilde{V}$ où $m \in \mathbf{N}$ (et en particulier isomorphe à $\widetilde{V}$). Dans ces conditions nous dirons que $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ est minimale.

(iii) Toute représentation de rang fini de $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ est somme directe de représentations minimales.

Démonstration

a) Notons $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}')$ la déformation formelle constante de $\mathcal{U}$; en vertu du théorème III.2.5.5, il existe un automorphisme $\widetilde{\phi}$ du $\widetilde{k}$-module $\widetilde{\mathcal{U}}$ transformant $\widetilde{\mu}$ en $\widetilde{\mu}'$ et en outre vérifiant $\phi_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}}$. L'application $\widetilde{\pi} \to \widetilde{\pi} \circ \widetilde{\phi}$ est une bijection de $\operatorname{Rep}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ sur $\operatorname{Rep}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}')$ qui respecte évidemment les sommes directes et les inclusions ; de plus $\widetilde{\pi}$ et $\widetilde{\pi} \circ \widetilde{\phi}$ ont même composante de degré 0. On peut donc supposer que $\mu_n = 0 \ \forall\, n > 0$.

b) L'application qui, à toute représentation de dimension finie de $\mathcal{U}$, associe sa déformation formelle constante est évidemment injective et respecte les sommes directes et les inclusions ; pour prouver qu'elle est surjective, il suffit (cf. théorème III.2.5.6) de montrer que $H^1(\mathcal{U}, \operatorname{End} V)$ est nul pour tout $\mathcal{U}$-module V de dimension finie ; or $H^1(\mathcal{U}, \operatorname{End} V) =$

$H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{End} V)$ qui est nul (voir par exemple [20], chapitre II, proposition 11.2). Ceci démontre (i).

c) Pour démontrer (ii), on peut supposer que $\pi_n = 0\ \forall n > 0$. Il est immédiat que si π_0 est réductible, $\widetilde{V}$ n'est pas minimal. Réciproquement supposons π_0 irréductible et considérons un sous $\widetilde{\mathcal{U}}$-module fermé non nul Z de $\widetilde{V}$; notons r le plus petit entier positif ou nul pour lequel l'ensemble Z_r des z_r avec $\widetilde{z} \in Z$ est non nul ; la formule

$$\widetilde{\pi}(\widetilde{a}) \cdot \widetilde{z} = \sum_n \Big(\sum_{p+q=n} \pi_0(a_p) \cdot z_q \Big) h^n \quad \forall \widetilde{a} = (a_p) \in \widetilde{\mathcal{U}}$$

montre que Z_r est π_0-invariant, donc égal à V. On va montrer que Z contient $h^r\widetilde{V}$, l'inclusion inverse étant évidente. Soit donc $\widetilde{x}$ un élément de $h^r\widetilde{V}$; il existe un élément $\widetilde{z}^{(0)}$ de Z vérifiant $z_r^{(0)} = x_r$, puis un élément $\widetilde{z}^{(1)}$ de Z vérifiant $z_r^{(1)} = x_{r+1} - z_{r+1}^{(0)}$; on construit de proche en proche des éléments $\widetilde{z}^{(k)}$ de Z vérifiant

$$z_r^{(k)} = x_{r+k} - z_{r+k}^{(0)} - z_{r+k-1}^{(1)} - \cdots - z_{r+1}^{(k-1)};$$

alors l'élément $\widetilde{z} = \sum_{k \geq 0} \widetilde{z}^{(k)} \cdot h^k$ appartient à Z et, par ailleurs, est égal à x. Ceci démontre (ii). Enfin (iii) résulte de l'assertion analogue pour $\mathcal{U}$.

2.5.8. *Dérivées des déformations formelles. Structures de Poisson*

La formule (III.10) montre que, si $\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\mu}'$ sont deux déformations formelles équivalentes, les classes dans $H^2(A, A)$ des 2-cocycles μ_1 et μ_1' sont égales ; cette classe sera appelée *dérivée de la déformation formelle*, ou plutôt, de sa *classe d'équivalence.*

Supposons maintenant A *commutative* et k de caractéristique distincte de 2. Remarquons d'abord que, si f est un élément antisymétrique de $Z^2(A, A)$, on a

$$f(a, bc) = b \cdot f(a, c) + c \cdot f(a, b);$$

en effet la relation $d^2 f = 0$ entraîne

$$\begin{aligned} f(a, bc) &= -a \cdot f(b, c) + f(ab, c) + f(a, b) \cdot c \\ f(a, cb) &= -a \cdot f(c, b) + f(ac, b) + f(a, c) \cdot b \\ f(ba, c) - f(b, ac) &= b \cdot f(a, c) - f(b, a) \cdot c; \end{aligned}$$

additionnant ces trois relations en tenant compte de la commutativité de A et de l'antisymétrie de f, on obtient le résultat cherché.

Considérons maintenant une déformation formelle $\widetilde{\mu} = (\mu_n)$ de A et posons

$$\{a,b\} = \mu_1(a,b) - \mu_1(b,a);$$

ce qui précède montre que l'on a

$$\{a,bc\} = b \cdot \{a,c\} + c \cdot \{a,b\}; \tag{III.11}$$

par ailleurs la relation $(\mathrm{III.2})_2$ entraîne que $\{\ ,\ \}$ satisfait l'identité de Jacobi

$$\{\{a,b\},c\} + \{\{b,c\},a\} + \{\{c,a\},b\} = 0. \tag{III.12}$$

Ceci montre que $\{\ ,\ \}$ est un crochet de Poisson et que A devient une *algèbre poissonienne* (cf. § II.5.1) ; on dit que la déformation formelle $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ est une *quantification* de cette algèbre poissonienne.

Exemple

Prenons $A = C^\infty(\mathbf{R}^2)$ avec la multiplication ordinaire notée μ ; notons P l'opérateur linéaire dans $A \otimes A$ suivant :

$$P = \frac{\partial}{\partial x_1} \otimes \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \otimes \frac{\partial}{\partial x_1};$$

posons

$$\mu_n = \frac{1}{n!} = \mu \circ P^n,$$

c'est-à-dire encore

$$\widetilde{\mu}(a,b) = \mu(e^{hP}(a \otimes b))$$

On vérifie que

$$P^n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} \binom{n}{p} \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^p \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^{n-p} \otimes \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{n-p} \Big(\frac{\partial}{\partial x_2}\Big)^p$$

et il en résulte facilement que $\widetilde{\mu}$ est effectivement une déformation formelle. Le crochet de Poisson associé (identique ici à μ_1) est le crochet de Poisson usuel. Cette déformation formelle est intimement liée au *$*$-produit de Moyal* (voir par exemple [4], I, § 3).

2.6. Construction de déformations formelles d'algèbres par générateurs et relations

2.6.1. *Notations*

On note

- X un ensemble
- V le k-espace vectoriel de base X
- $W = \otimes V = k\langle X\rangle$ l'algèbre tensorielle de V
- $(\xi_i, f_i^{(0)})_{i\in I}$ un système de réductions avec $\xi_i \in \langle X\rangle$, $f_i^{(0)} \in W$ (cf. § I.2.2)
- $K^{(0)}$ l'idéal bilatère de W engendré par les éléments $\xi_i - f_i^{(0)}$
- $A^{(0)}$ l'algèbre quotient $W/K^{(0)}$
- $\widetilde{W}$ la $\widetilde{k}$-algèbre topologique obtenue en munissant $\widetilde{W}$ de sa structure d'algèbre canonique (cf. § III.1.4)
- pour tout $i \in I$, $f_i = \sum_q f_i^{(q)} h^q$ un élément de $\widetilde{W}$ où $f_i^{(q)} \in W$ et $f_i^{(0)}$ a le même sens que plus haut
- K l'idéal bilatère fermé de $\widetilde{W}$ engendré par les $\xi_i - f_i$
- A l'algèbre quotient $\widetilde{W}/K$
- pour tout entier $n \geq 0$, $\widetilde{W_n} = \widetilde{W}/h^{n+1}\cdot\widetilde{W}$, $\widetilde{k_n} = \widetilde{k}/h^{n+1}\cdot\widetilde{k}$
- π_n le morphisme canonique $\widetilde{W} \to \widetilde{W}_n$
- $f_{i,n} = \pi_n(f_i)$
- S_n le système de réductions dans $\widetilde{W}_n$ formé des éléments $(\xi_i, f_{i,n})$ (on prend ici comme anneau de base $\widetilde{k}_n$).

Théorème 2.6.2

On suppose que pour tout $n > 0$ le système de réductions S_n satisfait aux hypothèses du lemme diamant. Alors A est isomorphe à $\widetilde{A^{(0)}}$ en tant que $\widetilde{k}$-module, autrement dit A est une déformation formelle de $A^{(0)}$. De plus l'élément unité de $A^{(0)}$ est aussi élément unité de A.

Démonstration

a) L'algèbre $\widetilde{W}$ est limite projective des $\widetilde{W}_n$ et $\widetilde{A^{(0)}}$ est limite projective des $\widetilde{A^{(0)}}/h^{n+1}\cdot\widetilde{A^{(0)}}$; A est limite projective des $\widetilde{W}_n/\pi_n(K)$ (propriété classique des systèmes projectifs) ; il suffit donc de montrer que $\widetilde{W}_n/\pi_n(K)$ et $\widetilde{A^{(0)}}/h^{n+1}\cdot\widetilde{A^{(0)}}$ sont isomorphes en tant que $\tilde{k}$-modules.

b) On a

$$\widetilde{W}_n = W \otimes \tilde{k}_n, \quad \widetilde{A^{(0)}}/h^{n+1}\cdot\widetilde{A^{(0)}} = A^{(0)} \otimes \tilde{k}_n;$$

on est donc ramené à démontrer que

$$(W \otimes \tilde{k}_n)/\pi_n(K) = A^{(0)} \otimes \tilde{k}_n.$$

c) Il est clair que $\pi_n(K)$ est l'idéal bilatère de $\widetilde{W}_n$ engendré par les $\xi_i - f_{i,n}$; le $\tilde{k}_n$-module $\widetilde{W}_n$ admet pour base l'ensemble $\langle X\rangle$; en vertu du lemme diamant, on obtient une base de $\widetilde{W}_n/\pi_n(K)$ en prenant les monômes irréductibles, *i.e.* ne contenant aucun des x_i. Le théorème résulte alors du fait que ces éléments forment aussi une base de $A^{(0)} \otimes \tilde{k}_n$.

Remarque

Le choix de la famille (ξ_i, f_i) permet, au moins théoriquement, de déterminer les applications μ_n du § III.2.1 ; en effet fixons une indexation des monômes irréductibles dans $\widetilde{W}_0$, soit (η_λ) où λ parcourt un certain ensemble Λ ; les monômes irréductibles dans $\widetilde{W}_{(n)}$ sont alors les $\eta_\lambda.h^q$, $q = 0, 1, \ldots, n$. Soient $\lambda, \rho \in \Lambda$; alors $\mu_n(\eta_\lambda, \eta_\rho)$ est le coefficient de h^n dans l'élément de $\widetilde{W}_n$ obtenu par réductions successives à partir du monôme $\eta_\lambda \cdot \eta_\rho$ (cf. théorème I.2.2 (ii)).

2.6.3. *Exemple : une déformation formelle de Sk^3*

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de k^3 ; l'algèbre $A = Sk^3$ est définie par les générateurs e_i et les relations $e_ie_j - e_je_i = 0$. On souhaite définir une déformation formelle de A par les mêmes générateurs, mais avec les relations

$$e_1e_2 - e_2e_1 - he_3 = e_1e_3 - e_3e_1 = e_2e_3 - e_3e_2 = 0;$$

on applique le théorème III.2.6.2 avec $X = \{e_1, e_2, e_3\}$ et le système de réductions dans $\widetilde{W}_n$, $n \geq 1$, formé des éléments

$$(e_2e_1,\ e_1e_2 - he_3),\ (e_3e_1, e_1e_3),\ (e_3e_2, e_2e_3);$$

conformément à la remarque I.2.2, on définit $F : \langle X \rangle \to \mathbf{N}^2$ par $F_1(\theta) =$ degré total de θ et $F_2(\theta) =$ nombre d'inversions de θ. Toutes les hypothèses du théorème III.2.6.2 sont vérifiées, et on a bien une déformation formelle $\widetilde{\mu}$ de A; si on prend pour base de A les monômes $e_1^{m_1}e_2^{m_2}e_3^{m_3}$, alors

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mu}(e_i, e_j) &= e_ie_j \quad \text{si } i \leq j \text{ ou si } i = 3\\
\widetilde{\mu}(e_2, e_1) &= e_1e_2 - he_3, \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

2.6.4. *Remarque (fixation du paramètre)*

On peut vérifier que, dans la situation de l'exemple précédent, pour tous éléments a, b de A, $\widetilde{\mu}(a, b)$ est un polynôme par rapport à h à coefficients dans A; cette circonstance permet, pour tout élément h_0 de k, de définir une nouvelle multiplication dans A, à savoir $(a, b) \to \sum_n \mu_n(a, b)h_0^n$. Si de plus h_0 est non nul, l'algèbre obtenue est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de Heisenberg.

2.7. Le plan quantique de Manin

2.7.1. *Définition*

On note (e_1, e_2) la base canonique de k^2; l'algèbre $A = Sk^2$ est définie par les générateurs e_i et la relation $e_1e_2 - e_2e_1 = 0$. On souhaite définir une déformation formelle $\widetilde{\mu}$ de A par les mêmes générateurs mais avec la relation

$$e_2e_1 - e^he_1e_2 = 0;$$

on applique le théorème III.2.6.2 avec $X = \{e_1, e_2\}$ et, dans chaque $\widetilde{W}_n$, le système de réductions formé de l'unique élément $\left(e_2e_1, \sum_{p=0}^n \frac{h^p}{p!}e_1e_2\right)$; on définit $F : \langle X \rangle \to \mathbf{N}$ par le nombre d'inversions; les hypothèses du théorème III.2.6.2 sont vérifiées et on a bien une déformation formelle $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ de A avec $\widetilde{A} = \widetilde{\otimes k^2}/K$; nous noterons S_hk^2 cette algèbre et $S_h^mk^2$

sa partie homogène de degré $m \geq 0$. Si l'on prend pour base de A les monômes $e_1^{m_1} e_2^{m_2}$, on a

$$\widetilde{\mu}(e_1^{m_1} e_2^{m_2}, e_1^{n_1} e_2^{n_2}) = e^{hm_2 n_1} e_1^{m_1+n_1} . e_2^{m_2+n_2}.$$

Supposons un instant que $k = \mathbf{C}$; cette relation montre que, pour tous $a, b \in A$, $\widetilde{\mu}(a,b)$ est, par rapport à h, une série convergente de rayon de convergence infini ; on peut donc définir, pour tout $h_0 \in \mathbf{C}$, une nouvelle multiplication dans A par $(a,b) \to \sum_n \mu_n(a,b) h^{n_0}$. On pose traditionnellement $q = e^{h_0}$ et on note $S_q k^2$ la nouvelle algèbre obtenue. Une application immédiate du lemme diamant montre que $S_q k^2$ est *l'algèbre définie par les générateurs* e_1, e_2 et la relation

$$e_2 e_1 - q e_1 e_2 = 0.$$

Si maintenant k est un corps quelconque et q un élément non nul de k, on peut encore définir $S_q k^2$ de la même façon.

2.7.2. *Formule du binôme dans* $S_h k^2$

Notons maintenant q l'élément e^h de $\widetilde{k}$. On pose, pour tout entier $n > 0$:

$$\begin{aligned}
(n)_q &= \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1} \\
(0)_q &= 0 \\
(n)_q^! &= (1)_q (2)_q \cdots (n_q);
\end{aligned}$$

puis, pour $m \geq n$:

$$\binom{m}{n}_q = \frac{(m)_q^!}{(n)_q^! (m-n)_q^!}$$

(expression dont le lecteur s'assurera aisément qu'elle a bien un sens). Ces éléments, appelés *q-coefficients du binôme*, satisfont à la *relation de Pascal* :

$$\binom{m}{n}_q = \binom{m-1}{n-1}_q + q^n \binom{m-1}{n}_q,$$

d'où l'on déduit par récurrence que ce sont des polynômes par rapport à q (appelés *polynômes de Gauss*).

Enfin on montre que

$$(e_1 + e_2)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n}_q e_1^n e_2^{m-n}$$

en vérifiant que les coefficients des divers monômes $e_1^n e_2^{m-n}$ satisfont à la relation de Pascal.

2.7.3. *Décomposition de* $\widetilde{\otimes^2 k^2}$

L'espace $\widetilde{\otimes^2 k^2}$ admet pour base les éléments $e_i \otimes e_j$ que nous noterons e_{ij} ; posons $\wedge_h^2 k^2 = \widetilde{k} \cdot (q \cdot e_{12} - e_{21})$ de sorte que $S_h^2 k^2 = \widetilde{\otimes^2 k^2} / \wedge_h^2 k^2$; le sous-espace de $\widetilde{\otimes^2 k^2}$ de base e_{11}, e_{22}, $e_{12} + q e_{21}$ est un supplémentaire de $\wedge_h^2 k^2$, ce qui permet d'écrire

$$\widetilde{\otimes^2 k^2} = S_h^2 k^2 \oplus \wedge_h^2 k^2.$$

3. Déformations formelles de cogèbres, bigèbres, algèbres de Hopf

3.1. Déformations formelles de cogèbres

On appelle *déformation formelle* d'une k-cogèbre (A, Δ) (non nécessairement à coünité) tout $\widetilde{k}$-morphisme $\widetilde{\Delta} : \widetilde{A} \to A \widetilde{\otimes} A$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) les applications $(\widetilde{\Delta} \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{A}}) \circ \widetilde{\Delta}$ et $\mathrm{Id}_{\widetilde{A}} \otimes \widetilde{\Delta}$ de $\widetilde{A}$ vers $(A \otimes A \otimes A)^{\sim}$ sont identiques (pour la définition des produits tensoriels $\widetilde{\Delta} \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{A}}$ et $\mathrm{Id}_{\widetilde{A}} \otimes \widetilde{\Delta}$, voir § III.1.3.4).

(ii) l'application $\widetilde{A}/h \cdot \widetilde{A} \to A \widetilde{\otimes} A / h \cdot A \widetilde{\otimes} A$ déduite de $\widetilde{\Delta}$ est identique à Δ.

D'après le lemme III.1.2.1, ceci équivaut à la donnée d'une suite d'applications k-linéaires $\Delta_n : A \otimes A$ vérifiant ce qui suit :

$$\sum_{p+q=n} (\Delta_p \otimes \mathrm{Id}_A - \mathrm{Id}_A \otimes \Delta_p) \circ \Delta_q = 0 \tag{III.13}$$

(III.14) $$\Delta_0 = \Delta.$$

On laisse au lecteur le soin de définir les notions de déformations formelles de cogèbres *équivalentes, constantes, triviales.*

3.2. Déformations formelles de bigèbres

Remarquons d'abord que, si $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ est une déformation formelle d'une algèbre A, $A \widetilde{\otimes} A$ admet une structure d'algèbre naturelle :

$$\widetilde{\mu}^{(2)} = (A \otimes A \otimes A \otimes A)\widetilde{\ } \to A \widetilde{\otimes} A$$

définie comme suit :

$$\widetilde{\mu}^{(2)} = (\widetilde{\mu} \otimes \widetilde{\mu}) \circ \widetilde{\sigma_{23}}$$

où $\widetilde{\sigma_{23}}$ est le prolongement naturel de σ_{23} à $(A \otimes A \otimes A \otimes A)\widetilde{\ }$; en d'autres termes $\widetilde{\mu}^{(2)}$ a des composantes $\mu_n^{(2)} : A \otimes A \otimes A \otimes A \to A \otimes A$ données par

$$\mu_n^{(2)} = \sum_{p+q=n} (\mu_p \otimes \mu_q) \circ \sigma_{23}.$$

Considérons maintenant une bigèbre $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon)$. Une *déformation formelle* de $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon)$ est formée d'une déformation formelle $\widetilde{\mu}$ de μ et d'une déformation formelle $\widetilde{\Delta}$ de Δ, compatibles en ce sens que $\widetilde{\Delta}$ doit être un morphisme d'algèbres, ce qui se traduit par

(III.15)$_n$ $$\sum_{p+q=n} \Delta_p \circ \mu_p = \sum_{p+q+r+s=n} (\mu_p \otimes \mu_q) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta_r \otimes \Delta_s).$$

On dit que $\widetilde{A}$ *admet la même coünité que* A si l'on a

$$(\widetilde{\varepsilon} \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{A}}) \circ \widetilde{\Delta} = (\mathrm{Id}_{\widetilde{A}} \otimes \widetilde{\varepsilon}) \circ \widetilde{\Delta} = \mathrm{Id}_{\widetilde{A}}$$

où

$$\widetilde{\varepsilon}\Big(\sum_n a_n h^n\Big) = \sum_n \varepsilon(a_n) \cdot h^n;$$

c'est-à-dire encore

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_n = (\mathrm{Id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta_n = 0 \quad \forall\, n > 0.$$

Il est facile d'adapter la notion d'équivalence du § III.2.1 au cas des bigèbres, et on a le résultat suivant :

Lemme 3.3

Toute déformation formelle de $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon)$ est équivalente à une déformation formelle admettant les mêmes unité et coünité que A.

Démonstration

Voir [19].

Dans la suite, *nous supposerons toujours que $\widetilde{A}$ admet les mêmes unité et coünité que A.*

Remarque

On trouvera dans [19] une théorie cohomologique pour les bigèbres analogue à celle exposée au § III.2.4 dans le cas des algèbres.

3.4. Déformations formelles d'algèbres de Hopf

Théorème 3.4.1

Si une bigèbre A est une algèbre de Hopf avec antipode S, toute déformation formelle de A est équivalente à une autre déformation formelle qui est une algèbre de Hopf en ce sens qu'il existe un élément $\widetilde{S}$ de $\mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{A})$ vérifiant

$$\widetilde{\mu} \circ (\widetilde{S} \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{A}}) \circ \widetilde{\Delta} = \widetilde{\mu} \circ (\mathrm{Id}_{\widetilde{A}} \otimes \widetilde{S}) \circ \widetilde{\Delta} = \widetilde{\imath} \circ \widetilde{\varepsilon}.$$

En d'autres termes il existe une suite d'éléments $S_n \in \mathrm{End}\, A$ vérifiant :

$$\text{(III.16)} \quad \sum_{p+q+r=n} \mu_p \circ (S_q \otimes \mathrm{Id}_A) \circ \Delta_r = \sum_{p+q+r=n} \mu_p \circ (\mathrm{Id}_A \otimes S_q) \circ \Delta_r = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{(III.17)} \qquad S_0 = S.$$

Démonstration

On peut supposer que $\widetilde{A}$ admet les mêmes unité et coünité que A. Reprenant la méthode du lemme II.1.4, considérons l'algèbre $\mathrm{End}\, A$ munie du produit

$$u * v = \mu \circ (u \otimes v) \circ \Delta;$$

de la même façon $\mathrm{End}_{\widetilde{k}}(\widetilde{A})$ est une algèbre pour le produit analogue avec des "tildes", et c'est une déformation formelle de $\mathrm{End}\, A$; on vérifie que $i \circ \varepsilon$ est encore unité pour cette déformation formelle; enfin $\mathrm{Id}_{\widetilde{A}}$ est inversible dans $\widetilde{\mathrm{End}\, A}$ parce que Id_A l'est dans $\mathrm{End}\, A$ (cf. proposition III.2.3).

3.4.2. *Produits tensoriels et contragrédientes de représentations de déformations formelles d'algèbres de Hopf*

Considérons deux représentations $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$, $(\widetilde{W}, \widetilde{\rho})$ de $\widetilde{A}$ au sens du § III.2.4.1 ; notons $\widetilde{\sigma}$ la composée des trois applications suivantes :

1) $\widetilde{\Delta} : \widetilde{A} \to A \widetilde{\otimes} A$

2) $\widetilde{\pi} \times \widetilde{\rho} : A \widetilde{\otimes} A \to (\mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, W)\tilde{}$ (c'est ce qu'on a noté $\widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\rho}$ au § III.1.3.4)

3) l'application $(\mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, W)\tilde{} \to \mathrm{End}(V \otimes W)\tilde{}$ obtenue en prolongeant de façon évidente l'application usuelle

$$\mathrm{End}\, V \otimes \mathrm{End}\, W \to \mathrm{End}(V \otimes W).$$

Alors $\widetilde{\sigma}$ est une représentation de $\widetilde{A}$, ayant pour composantes

$$\sigma_n = \sum_{p+q+r=n} (\pi_p \times \rho_q) \circ \Delta_r;$$

$\widetilde{\sigma}$ sera notée $\widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\rho}$. On a en particulier

$$(\widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\rho})_0 = (\pi_0 \times \rho_0) \circ \Delta_0 = \pi_0 \otimes \rho_0.$$

Considérons maintenant une représentation $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ de $\widetilde{A}$; on peut, de façon analogue à ce qui a été fait au § II.2.1, définir les puissances tensorielles $\otimes^m \widetilde{\pi}$, puis, en utilisant le § III.2.3, leur somme directe $\otimes \widetilde{\pi}$, représentation opérant dans $\widetilde{\otimes V}$; on a encore

$$\otimes^{m+n} \widetilde{\pi} = (\otimes^m \widetilde{\pi}) \otimes (\otimes^n \widetilde{\pi}),$$

d'où l'on déduit que, si E est un sous-$\widetilde{k}$-module de $\widetilde{\otimes^2 V}$, stable par $\otimes^2 \widetilde{\pi}$, l'idéal bilatère fermé de $\widetilde{\otimes V}$ engendré par E est stable par $\otimes \widetilde{\pi}$.

Enfin il est facile de définir la contragrédiente d'une représentation $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$: c'est la représentation dans l'espace $\mathrm{Hom}_{\widetilde{k}}(\widetilde{V}, \widetilde{k}) = \widetilde{V^*}$ donnée par

$$\widetilde{\pi}^c(\widetilde{a}) = {}^t\widetilde{\pi}(\widetilde{S}(\widetilde{a}));$$

ses composantes sont données par

$$(\widetilde{\pi}^c)_n(a) = \sum_{p+q=n} {}^t\pi_p(S_q(a));$$

en particulier

$$(\widetilde{\pi}^c)_0 = (\pi_0)^c.$$

Théorème 3.4.3

On suppose k de caractéristique nulle. Soit $\mathcal{U}$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple, $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}, i, \widetilde{D}, \varepsilon, \widetilde{S})$ une déformation formelle de l'algèbre de Hopf $\mathcal{U}$. La bijection $\mathrm{Rep}(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}) \to \mathrm{Rep}(\mathcal{U})$ établie au théorème III.2.5.7 respecte les produits tensoriels et les contragrédientes.

Démonstration

Cela résulte immédiatement des formules donnant $(\widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\rho})_0$ et $(\widetilde{\pi}^c)_0$.

3.4.4. *Construction de déformations formelles d'algèbres de Hopf par générateurs et relations*

On reprend les notations et les hypothèses du théorème III.2.6.2; on souhaite définir dans A une structure d'algèbre de Hopf, *i.e.* des opérations Δ, ε, S en donnant leurs valeurs sur les éléments de l'ensemble X.

Commençons par Δ. On se donne donc, pour tout $x \in X$, un élément $\Delta_0(x)$ de $(A_0 \otimes A_0)\widetilde{\ }$; l'application Δ_0 se prolonge en un morphisme de k-algèbres $W \to (A_0 \otimes A_0)\widetilde{\ }$, puis en un morphisme de $\widetilde{k}$-algèbres $\widetilde{\Delta}_0 : \widetilde{W} \to (A_0 \otimes A_0)\widetilde{\ }$; pour que celui-ci passe au quotient en un morphisme $\Delta : \widetilde{A_0} \to (A_0 \otimes A_0)\widetilde{\ }$, il suffit que l'on ait

$$\widetilde{\Delta_0}(\xi_i - f_i) = 0 \qquad \forall\, i \in I; \tag{III.18}$$

enfin pour que Δ soit coassociatif, il suffit que

$$(\Delta \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{A_0}})(\Delta_0(x)) = (\mathrm{Id}_{\widetilde{A_0}} \otimes \Delta)(\Delta_0(x)) \qquad \forall x \in X. \tag{III.19}$$

On procède de même pour ε : on se donne des $\varepsilon_0(x) \in \widetilde{k}$; on en déduit un morphisme $\widetilde{\varepsilon_0} : \widetilde{W} \to \widetilde{k}$, qui définit $\varepsilon : \widetilde{A_0} \to \widetilde{k}$ pourvu que l'on ait

$$\widetilde{\varepsilon_0}(\xi_i - f_i) = 0; \tag{III.20}$$

la condition de coünité s'écrit

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{A_0}})(\Delta_0(x)) = (\mathrm{Id}_{\widetilde{A_0}} \otimes \varepsilon)(\Delta_0(x)) = x. \tag{III.21}$$

Enfin pour S : on se donne $S_0 : X \to \widetilde{A_0}$ qu'on prolonge en un antimorphisme $\widetilde{S_0} : \widetilde{W} \to \widetilde{A_0}$ qui doit vérifier :

$$\widetilde{S_0}(\xi_i - f_i) = 0 \tag{III.22}$$

$$\mu\Big((S \otimes \mathrm{Id}_{\widetilde{A_0}})(\Delta_0(x))\Big) = \mu\Big((\mathrm{Id}_{\widetilde{A_0}} \otimes S)(\Delta_0(x))\Big) = \varepsilon_0(x) \cdot 1 \tag{III.23}$$

où μ désigne la multiplication dans $\widetilde{A_0}$.

3.5. Dual restreint d'une déformation formelle d'une algèbre de Lie semi-simple

3.5.1. *Dual restreint d'une déformation formelle d'une algèbre*

Soit $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ une déformation formelle d'une algèbre A : posons

$$\widetilde{A}^* = \mathrm{Hom}_{\widetilde{k}}(\widetilde{X}, \widetilde{k}) = \widetilde{A^*};$$

si $(\widetilde{V}, \widetilde{\mu})$ est une représentation de $\widetilde{A}$, il est naturel d'appeler *coefficients* de $(\widetilde{V}, \widetilde{\pi})$ les éléments de $\widetilde{A}^*$ de la forme

$$\Phi^{\widetilde{\pi}}_{\widetilde{\xi},\widetilde{v}} : \widetilde{a} \to \Big\langle \widetilde{\xi}, \widetilde{\pi}(\widetilde{a}) \cdot \widetilde{v} \Big\rangle = \sum_n \sum_{p+q+r+s=n} \langle \xi_p, \pi_q(a_r) v_s \rangle\, h^n$$

où $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$, $\widetilde{\xi} \in \widetilde{V^*}$. On notera $\widetilde{A}^0$ l'ensemble des coefficients de représentations de rang fini, et on appellera *dual restreint* de $\widetilde{A}$ l'adhérence $\overline{\widetilde{A}^0}$ de $\widetilde{A}^0$ dans $\widetilde{A^*}$; c'est évidemment un sous-$\widetilde{k}$-module de $\widetilde{A^*}$.

3.5.2. *Cas des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples*

Soit $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ semi-simple sur k de caractéristique nulle; comme toute déformation formelle de $\mathcal{U}$ est triviale (théorème III.2.5.5) et comme les duaux restreints de deux déformations formelles équivalentes sont isomorphes, on peut supposer que $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ est la déformation formelle constante; comme, de plus, toute représentation de rang fini $\widetilde{\pi}$ de $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$ est équivalente à une représentation vérifiant $\pi_n = 0 \; \forall n > 0$ (théorème III.2.5.7), on peut ne considérer que des représentations de ce type. Alors les composantes de $\Phi^{\widetilde{\pi}}_{\widetilde{\xi},\widetilde{v}}$ sont données par

$$(\Phi^{\widetilde{\pi}}_{\widetilde{\xi},\widetilde{v}})_n = \sum_{p+q=n} \Phi^{\pi_0}_{\xi_p, v_q}$$

et on voit que ce sont des éléments de $\mathcal{U}^0$; on en déduit sans peine que $\overline{\widetilde{\mathcal{U}}^0}$ est égal à $\widetilde{\mathcal{U}^0}$. De plus il est immédiat que, en notant μ et Δ (resp. μ^0 et Δ^0) les opérations dans $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}^0$), on a les propriétés suivantes :

- la multiplication $\widetilde{\mu}^0$ dans $\overline{\widetilde{\mathcal{U}}^0}$ (et même dans $\widetilde{\mathcal{U}}^*$) a des composantes $\mu^0_n : \mathcal{U}^0 \times \mathcal{U}^0 \to \mathcal{U}^0$ données par

$$\mu^0_n(\varphi, \psi) = (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta_n;$$

  en particulier $\mu^0_0 = \mu^0$;

- la comultiplication $\widetilde{\Delta}^0$ dans $\overline{\widetilde{\mathcal{U}}^0}$ a des composantes : $\Delta^0_n : \mathcal{U}^0 \to \mathcal{U}^0 \otimes \mathcal{U}^0$ données par

$$\Delta^0_n = \begin{cases} \Delta^0 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

En résumé nous avons démontré ce qui suit :

Théorème

Le dual restreint $\overline{\widetilde{\mathcal{U}}^0}$ d'une déformation formelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ semi-simple, est, en tant que bigèbre, une déformation formelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ et en outre triviale en tant que cogèbre.

Par contre, comme nous le verrons au chapitre IV, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ peut admettre des déformations formelles d'algèbre de Hopf dont le dual restreint soit, en tant qu'algèbre, une déformation formelle non triviale de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$.

3.6. Dérivées des déformations formelles de bigèbres cocommutatives

Nous avons vu au § III.2.5.8 que, si $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ est une déformation formelle d'une algèbre commutative (A, μ), l'application

$$\{\ ,\ \} = \mu_1 - \mu_1 \circ \sigma$$

est un crochet de Poisson. De façon duale on a le résultat suivant : si $(\widetilde{A}, \widetilde{\Delta})$ est une déformation formelle d'une cogèbre cocommutative (A, Δ), l'application $\varphi = \Delta_1 - \sigma \circ \Delta_1$ est un cocrochet de Poisson (cf. § II.5.2).

Considérons maintenant une déformation formelle d'une bigèbre cocommutative; on va avoir une relation reliant φ, Δ et μ; en effet la formule $(\mathrm{III}.15)_1$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}\Delta_1 \circ \mu + \Delta \circ \mu_1 - (\mu \otimes \mu) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta_1 \otimes \Delta + \Delta \otimes \Delta_1) &= \\ = (\mu_1 \otimes \mu + \mu \otimes \mu_1) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \Delta).\end{aligned}$$

Comme A est cocommutative, $\Delta \circ \mu_1$ envoie $A \otimes A$ dans $S^2 A$; montrons qu'il en est de même pour $(\mu_1 \otimes \mu + \mu \otimes \mu_1) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \Delta)$. Prenons un élément $a \otimes b$ de $A \otimes A$; on écrit

$$\Delta(a) = \sum_i \alpha_i \otimes \alpha_i, \quad \Delta(b) = \sum_j \beta_j \otimes \beta_j$$

avec $\alpha_i, \beta_j \in A$, et on en déduit facilement que

$$(\mu_1 \otimes \mu + \mu \otimes \mu_1) \circ \sigma_{23} \circ (\Delta \otimes \Delta)(a \otimes b) \in S^2 A.$$

On vérifie ensuite que

$$\varphi(ab) - \Delta(a) \cdot \varphi(b) - \varphi(a) \cdot \Delta(b) = 0$$

[calcul facile en écrivant

$$\Delta_1(a) = \sum_k a'_k \otimes a''_k, \quad \Delta_1(b) = \sum_\ell b'_\ell \otimes b''_\ell].$$

On a donc établi le résultat suivant :

Proposition

Soit $(A, \mu, i, \Delta, \varepsilon)$ une bigèbre cocommutative, $(\widetilde{\mu}, \widetilde{\Delta})$ une déformation formelle de cette bigèbre au sens du § III.3.2; l'application $\varphi = \Delta_1 - \sigma \circ \Delta_1$ munit A d'une structure de bigèbre copoissonienne au sens du § II.5. En particulier, si A est une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, la restriction δ de φ à $\mathfrak{g}$ munit $\mathfrak{g}$ d'une structure de bigèbre de Lie.

3.7. Equations de Yang-Baxter quantique et classique

Notons encore $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\Delta})$ une déformation formelle d'une bigèbre cocommutative et posons $\varphi = \Delta_1 - \sigma \circ \Delta_1$. Donnons-nous en outre un élément $\widetilde{R} = (R_n)$ de $A \widehat{\otimes} A$ vérifiant des conditions analogues aux conditions (II.1), (II.2), (II.3), à savoir

$$\sum_{p+q+r+s=n} (\mu_p \otimes \mu_q)(\sigma_{23}(R_r \otimes \Delta_s(a) - \sigma(\Delta_s(a)) \otimes R_r)) = 0 \tag{III.24}$$

$$\sum_{p+q=n} ((\Delta_p \otimes \mathrm{Id})(R_q) - R_{p;13}R_{q;23}) = 0 \tag{III.25}$$

$$\sum_{p+q=n} ((\mathrm{Id} \otimes \Delta_p)(R_q) - R_{p;13}R_{q;12}) = 0; \tag{III.26}$$

supposons en outre que $R_0 = 1 \otimes 1$. Alors (III.24) avec $n = 1$ implique

$$\varphi(a) = [\Delta(a), R_1];$$

posant $r = \frac{1}{2}(R_1 - \sigma(R_1)) \in \wedge^2 A$, on en déduit que

$$\varphi(a) = [\Delta(a), r]. \tag{III.27}$$

Par ailleurs R_1 appartient à $P \otimes P$ où P désigne l'ensemble des éléments primitifs de A; pour le voir, on choisit des bases (e_i) et (e_j) comme à la proposition II.5.4.3 et on écrit (III.25) et (III.26) avec $n = 1$.

Ensuite on montre, comme au § II.2.1.2, que $\widetilde{R}$ satisfait l'analogue de l'équation de Yang-Baxter quantique, à savoir

$$\sum_{p+q+r=n} (R_{p;12}R_{q;13}R_{r;23} - R_{r;23}R_{q;13}R_{p;12}) = 0;$$

écrivant ceci avec $n = 2$, on obtient

$$[R_{1;12}, R_{1;13}] + [R_{1;12}, R_{1;23}] + [R_{1;13}, R_{1;23}] = 0;$$

autrement dit, R_1 *satisfait l'équation de Yang-Baxter classique.*

Proposition

On suppose que A est une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Alors r appartient à $\wedge^2\mathfrak{g}$, admet $\delta = \varphi_{|\mathfrak{g}}$ comme cobord, et satisfait l'équation de Yang-Baxter classique modifiée.

Démonstration

La première assertion résulte de ce que $R_1 \in P \otimes P$ et $P = \mathfrak{g}$; la seconde de (III.27); enfin la troisième a été démontrée au § II.5.5.

Chapitre IV
Le groupe quantique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$

On suppose dans tout ce chapitre que le corps k est de caractéristique nulle et algébriquement clos.

1. Déformation formelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))$

1.1. L'algèbre associative $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$

Remarquons d'abord que, si x est un élément d'une algèbre A, l'expression $\dfrac{\operatorname{sh}(hx/2)}{\operatorname{sh}(h/2)}$ définit un élément de $\widetilde{A}$ qui peut s'écrire

$$\frac{\operatorname{sh}(hx/2)}{\operatorname{sh}(h/2)} = \sum_q P_q(x) \cdot h^q$$

où chaque P_q est un polynôme à coefficients rationnels, nul pour q impair, et vérifiant $P_0(x) = x$ et $P_q(0) = 0$.

Rappelons par ailleurs que l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,k)$ admet pour base les éléments

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\text{(IV.1)} \qquad [H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y, \quad [X,Y] = H.$$

Son algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))$, que nous noterons aussi $\mathcal{U}$, est définie par les générateurs H, X, Y et les relations (IV.1) ; elle admet pour base les monômes $H^m \cdot X^n \cdot Y^p$ (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt).

Reprenant la méthode exposée au § III.2.6, on souhaite définir une déformation formelle par les générateurs H, X, Y et les relations

$$\text{(IV.2)} \qquad [H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y, \quad [X,Y] = \frac{\mathrm{sh}(hH/2)}{\mathrm{sh}(h/2)};$$

l'ensemble X du § III.2.6 est donc formé de H, X, Y ; l'ensemble I a trois éléments et on prend

$$\xi_1 = XH, \quad f_1 = HX - 2X, \quad f_1^{(q)} = \begin{cases} -2X & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

$$\xi_2 = YH, \quad f_2 = HY + 2Y, \quad f_2^{(q)} = \begin{cases} 2Y & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

$$\xi_3 = YX, \quad f_3 = XY - \frac{\mathrm{sh}(hH/2)}{\mathrm{sh}(h/2)}, \quad f_3^{(q)} = \begin{cases} XY - P_0(H) & \text{si } q = 0 \\ -P_q(H) & \text{si } q > 0 \end{cases}$$

Nous avons vu au § I.2.5 que les hypothèses du théorème III.2.6.2 sont satisfaites; celui-ci montre donc que l'on définit bien une déformation formelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))$, *i.e.* une structure de $\tilde{k}$-algèbre sur $\widetilde{\mathcal{U}}$; on la note traditionnellement $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ ou, plus simplement, $\mathcal{U}_h$.

Le théorème III.2.5.5 montre que cette déformation formelle est triviale ; mais l'isomorphisme entre celle-ci et la déformation formelle constante ne semble pas facile à décrire explicitement (cf. [17], p. 334).

1.2. L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$

Nous allons utiliser la méthode du § III.3.4.4. Posons

$$\Delta_0(H) \;=\; H \otimes 1 + 1 \otimes H$$

$$\begin{aligned}
\Delta_0(X) &= X \otimes e^{hH/4} + e^{-hH/4} \otimes X \\
\Delta_0(Y) &= Y \otimes e^{hH/4} + e^{-hH/4} \otimes Y \\
\varepsilon_0(H) &= \varepsilon_0(X) = \varepsilon_0(Y) = 0 \\
S_0(H) &= -H \\
S_0(X) &= -e^{h/2}X \\
S_0(Y) &= -e^{-h/2}Y;
\end{aligned}$$

on doit vérifier les relations (III.18) à (III.23). Pour cela il sera commode d'introduire les éléments

$$\begin{aligned}
q_0 &= e^{h/4} \quad \text{et} \quad q = q_0^2 \in \widetilde{k} \\
K_0 &= e^{hH/4} \quad \text{et} \quad K = K_0^2 \in \mathcal{U}_h;
\end{aligned}$$

on a

(IV.3) $$K_0 \cdot X \cdot K_0^{-1} = qX$$

(IV.4) $$K_0 \cdot Y \cdot K_0^{-1} = q^{-1}Y$$

(IV.5) $$[X,Y] = (K - K^{-1})/(q - q^{-1}).$$

1) Vérifions (III.18) pour $i = 1$ ou 2 (on prend $i = 1$) : on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta_0}(XH - HX + 2X) &= (X \otimes K + K^{-1} \otimes X) \cdot (H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
&\quad -(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \cdot (X \otimes K + K^{-1} \otimes X) \\
&\quad +2(X \otimes K + K^{-1} \otimes X) \\
&= [X,H] \otimes K + K^{-1} \otimes [X,H] + X \otimes [K,H] \\
&\quad +[K^{-1},H] \otimes X + 2(X \otimes K + K^{-1} \otimes X) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

2) Pour $i = 3$: analogue en remarquant que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta_0}(K_0) &= e^{h(H\otimes 1 + 1 \otimes H)/4} \\
&= (e^{hH/4} \otimes 1) \cdot (1 \otimes e^{hH/4}) \\
&= K_0 \otimes K_0
\end{aligned}$$

et

$$\widetilde{\Delta_0}\left(\frac{\operatorname{sh}(hH/2)}{\operatorname{sh}(h/2)}\right) = (K \otimes K - K^{-1} \otimes K^{-1})/(q - q^{-1}).$$

3) Vérification de (III.19), (III.20), (III.21) : immédiate en remarquant que $\varepsilon(K_0^{\pm 1}) = 1$.

4) Vérifions (III.22) pour $i = 3$: on a

$$\widetilde{S_0}(YX - XY + \frac{\operatorname{sh}(hH/2)}{\operatorname{sh}(h/2)}) =$$

$$= S_0(X).S_0(Y) - S_0(Y)\cdot S_0(X) + \frac{\operatorname{sh}(hS_0(H)/2)}{\operatorname{sh}(h/2)}$$

$$= XY - YX - \frac{\operatorname{sh}(hH/2)}{\operatorname{sh}(h/2)} = 0.$$

5) La vérification de (III.23) est immédiate.

On a donc muni $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$ d'une *déformation formelle de l'algèbre de Hopf* $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))$.

Notations définitives

Nous noterons $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\varepsilon}$, $\widetilde{S}$ les opérations relatives à $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$, de sorte que les formules du début du présent paragraphe deviennent

$$\widetilde{\Delta}(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, \quad \text{etc.}$$

Formule explicite pour $\widetilde{\Delta}$

On vérifie par récurrence sur les degrés que l'on a

$$\widetilde{\Delta}(Y^{m_1}H^{m_2}X^{m_3}) = \sum_{n_1=0}^{m_1}\sum_{n_2=0}^{m_2}\sum_{n_3=0}^{m_3} \begin{bmatrix} m_1 \\ n_1 \end{bmatrix}_q \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m_3 \\ n_3 \end{bmatrix}_q \times$$
$$Y^{m_1-n_1}H^{m_2-n_2}K_0^{-n_1-n_3}X^{m_3-n_3} \otimes Y^{n_1}H^{n_2}K_0^{m_1-n_1+m_3-n_3}X^{n_3}$$

où les éléments $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} [n]_q &= \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{1-n} \\ &= q^{1-n}(n)_{q^2} \end{aligned}$$

$$[n]_q^! = [1]_q[2]_q\cdots[n]_q$$

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[m]_q^!}{[n]_q^![m-n]_q^!}$$

2. Représentations de rang fini de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$

2.1. Classification des représentations irréductibles de rang fini

Nous savons déjà (théorème III.2.5.7) qu'on obtient une bijection de $\mathrm{Rep}(\mathcal{U}_h)$ sur $\mathrm{Rep}(\mathcal{U})$ en associant à toute représentation de rang fini de $\mathcal{U}_h$ sa composante de degré 0, que cette bijection respecte les sommes directes, fait correspondre aux représentations minimales de $\mathcal{U}_h$ les représentations irréductibles de $\mathcal{U}$ et enfin que toute représentation de rang fini de $\mathcal{U}_h$ est somme directe de représentations minimales. On va donner ici une description un peu plus explicite de ces représentations minimales.

Rappelons d'abord la structure des représentations irréductibles de dimension finie de $\mathcal{U}$, c'est-à-dire de $\mathfrak{sl}(2,k)$. Pour tout entier $m \geq 0$ il existe une unique représentation irréductible de $\mathfrak{sl}(2,k)$ de dimension $m+1$, que nous noterons ρ_m et qu'on peut décrire comme suit, dans une base convenable $(v_0, \ldots, v_m)$ de k^{m+1} :

$$\begin{aligned}
\rho_m(H) \cdot v_n &= (m-2n) \cdot v_n \\
\rho_m(X) \cdot v_n &= (m-n+1) \cdot v_{n-1} \\
\rho_m(Y) \cdot v_n &= (n+1) \cdot v_{n+1}.
\end{aligned}$$

Théorème (cf. [27], [36])

(i) Pour tout entier $m \geq 0$ les formules suivantes définissent une représentation minimale de rang $m+1$ de $\mathcal{U}_h$:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho_m}(H) \cdot v_n &= (m-2n) \cdot v_n \\
\widetilde{\rho_m}(X) \cdot v_n &= \frac{q^{m-n+1} - q^{-m+n-1}}{q - q^{-1}} \cdot v_{n-1} \\
\widetilde{\rho_m}(Y) \cdot v_n &= \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q - q^{-1}} \cdot v_{n+1}.
\end{aligned}$$

(ii) Toute représentation minimale de rang fini de $\mathcal{U}_h$ est équivalente à l'une des $\widetilde{\rho_m}$.

Démonstration

Il suffit de vérifier que ces formules définissent une représentation de $\mathcal{U}_h$, *i.e.* sont compatibles avec les relations (IV.2), car il est clair que la composante de degré 0 de $\widetilde{\rho_m}$ sera identique à ρ_m ; la vérification ne présente pas de difficultés.

On a en particulier

$$\widetilde{\rho_1}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\rho_1}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\rho_1}(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On constate sur les formules ci-dessus que, comme dans le cas classique, l'opérateur $\widetilde{\rho_m}(H)$ est diagonalisable ; ses valeurs propres $m - 2n$, $n = 0, 1, \ldots, m$, sont appelées *poids* de la représentation ; le plus grand, à savoir m, est appelé *poids dominant.*

Remarque

Il peut sembler artificiel d'exhiber sans explications les formules du théorème ci-dessus ; en fait elles s'introduisent naturellement pourvu qu'on veuille bien admettre (ce qui n'est pas évident !) que, pour toute représentation de rang fini (V, π), l'opérateur $\pi(H)$ admet au moins un vecteur propre w avec valeur propre $\lambda \in \widetilde{k}$; en effet, partant de là, on peut reprendre le raisonnement classique : appliquant à w une puissance convenable de $\pi(X)$, on obtient un vecteur w_0 de plus haut poids, *i.e.* annulé par $\pi(X)$, avec une valeur propre $\lambda_0 \in \widetilde{k}$; les vecteurs $w_n = \pi(Y)^n \cdot w_0$ sont des vecteurs propres pour $\pi(H)$, nuls pour n suffisamment grand ; enfin, multipliant chaque w_n par un scalaire convenable, on obtient des v_n répondant à la question.

2.2. Produits tensoriels de représentations de rang fini de $\mathcal{U}_h$

Le théorème III.3.4.3 montre que ces produits tensoriels sont donnés par les mêmes formules que pour $\mathfrak{sl}(2,k)$; on peut aussi le voir de la façon suivante : on a

$$(\widetilde{\rho_{m'}} \otimes \widetilde{\rho_{m''}}(H) = \widetilde{\rho_{m'}}(H) \otimes 1 + 1 \otimes \widetilde{\rho_{m''}}(H);$$

ceci montre que les poids de $\widetilde{\rho_{m'}} \otimes \widetilde{\rho_{m''}}$ sont les nombres $m' + m'' - 2(n' + n'')$ où $n' = 0, 1, \ldots, m'$ et $n'' = 0, 1, \ldots, m''$; on en déduit, exactement comme dans le cas classique, que

$$\widetilde{\rho_{m'}} \otimes \widetilde{\rho_{m''}} = \oplus \widetilde{\rho_m}, \quad m = |m' - m''|, |m' - m''| + 2, \ldots, m' + m''$$

(formules de Clebsch-Gordan).

2.3. Les représentations $\widetilde{\rho_m}$ comme puissances symétriques de $\widetilde{\rho_1}$

Calculons d'abord les images de H, X, Y par $\otimes^2 \widetilde{\rho_1}$ dans la base $(v_{00}, v_{01}, v_{10}, v_{11})$ où l'on a posé $v_{ij} = v_i \otimes v_j$. On a facilement

$$(\otimes^2 \widetilde{\rho_1})(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

ensuite, remarquant que

$$\widetilde{\rho_1}(K_0) = \begin{pmatrix} q_0 & 0 \\ 0 & q_0^{-1} \end{pmatrix},$$

on trouve

$$(\otimes^2 \widetilde{\rho}_1)(X) = \begin{pmatrix} 0 & q_0^{-1} & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_0^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & q_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\otimes^2 \widetilde{\rho}_1)(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_0^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^{-1} & q_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'élément $v_{10} - qv_{01}$ est annulé par ces trois opérateurs; il en résulte, d'une part que le sous-espace $\wedge_h^2 k^2 = \widetilde{k}(v_{10} - qv_{01})$, déjà considéré au § III.2.8, est stable par $\otimes^2 \widetilde{\rho_1}$, la sous-représentation correspondante n'étant autre que la coünité $\underset{\sim}{\varepsilon}$; et, d'autre part, d'après le § III.3.4.2, que l'idéal bilatère fermé K de $\widetilde{\otimes k^2}$ engendré par $v_{10} - qv_{01}$ est stable par $\otimes \widetilde{\rho_1}$; on obtient de cette façon une représentation dans l'algèbre $S_h k^2 = \widetilde{\otimes k^2}/K$; nous noterons $S\widetilde{\rho_1}$ cette représentation et $S^m \widetilde{\rho_1}$ la sous-représentation dans $S_h^m k^2$.

Proposition

Les représentations $S^m\widetilde{\rho_1}$ et $\widetilde{\rho}_m$ sont équivalentes.

Démonstration

Une récurrence facile montre que $\otimes^m\widetilde{\rho_1}$ contient la représentation $\widetilde{\rho_m}$; d'autre part $S_h^m k^2$ est le quotient de $\widetilde{\otimes^m k^2}$ par le sous-module engendré par les éléments de la forme

$$\xi = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} \otimes (v_{10} - qv_{01}) \otimes v_{i_{k+1}} \otimes \cdots \otimes v_{i_{m-2}}$$

où $k = 0, 1, \ldots, m-2$, $i_j = 0, 1$; comme $v_{10} - qv_{01}$ est de poids 0, celui de ξ est au plus égal à $m-2$; ceci montre que $S^m\widetilde{\rho_1}$ contient $\widetilde{\rho_m}$; comme ces deux représentations ont même rang, elles sont identiques.

3. Dual restreint de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$

3.1. Généralités

On a vu au § III.3.5.2 que l'algèbre $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ est une déformation formelle de $\mathcal{U}^0$; on va ici en donner une présentation au sens du § III.2.6.

Toute représentation de rang fini de $\mathcal{U}_h$ est contenue dans une puissance tensorielle de $\widetilde{\rho_1}$ parce que la propriété analogue est vraie pour $\mathcal{U}$; par suite les coefficients de $\widetilde{\rho_1}$, que nous noterons $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$, $\widetilde{d}$, engendrent topologiquement l'algèbre $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$; si donc on note W la k-algèbre tensorielle construite sur quatre éléments abstraits notés a', b', c', d' (pour éviter les confusions), le morphisme d'algèbres naturel $F : \widetilde{W} \to \overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ défini par $F(a') = \widetilde{a}$, etc. est surjectif. On va déterminer son noyau $\operatorname{Ker} F$; rappelons que $\overline{(\mathcal{U}_h)^0} = \widetilde{\mathcal{U}}^0$ en tant que $\widetilde{k}$-module.

3.2. Construction d'éléments de $\operatorname{Ker} F$

On a vu au § IV.2.2 que le sous-espace $\widetilde{k}\cdot(v_{10} - qv_{01})$ de $\widetilde{\otimes^2 k^2}$ est stable par $(\otimes^2\widetilde{\rho_1})(u)$ pour tout $u \in \mathcal{U}_h$; des calculs analogues montrent que le sous-espace $\widetilde{k}\cdot v_{00} \oplus \widetilde{k}\cdot v_{11} \oplus \widetilde{k}\cdot(qv_{10} + v_{01})$ l'est aussi ; par suite $(\otimes^2\widetilde{\rho_1})(u)$ commute à l'opérateur T dans $\widetilde{\otimes^2 k^2}$ égal à $-q^{-1}$ sur le premier sous-espace et à q sur le second ; la matrice de T dans la base $(v_{00}, v_{01}, v_{10}, v_{11})$

est la suivante :

$$T = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q-q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}.$$

Celle de $\otimes^2\widetilde{\rho_1}(u)$ est, par définition des produits dans $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$:

$$(\otimes^2\widetilde{\rho_1})(u) = \begin{pmatrix} (\tilde a\tilde a)(u) & (\tilde a\tilde b)(u) & (\tilde b\tilde a)(u) & (\tilde b\tilde b)(u) \\ (\tilde a\tilde c)(u) & (\tilde a\tilde d)(u) & (\tilde b\tilde c)(u) & (\tilde b\tilde d)(u) \\ (\tilde c\tilde a)(u) & (\tilde c\tilde b)(u) & (\tilde d\tilde a)(u) & (\tilde d\tilde b)(u) \\ (\tilde c\tilde c)(u) & (\tilde c\tilde d)(u) & (\tilde d\tilde c)(u) & (\tilde d\tilde d)(u) \end{pmatrix}.$$

Ecrivant la commutation de ces deux matrices, on obtient les six relations suivantes dans $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$:

$$\tilde b\tilde a = q\tilde a\tilde b, \quad \tilde c\tilde a = q\tilde a\tilde c, \quad \tilde c\tilde b = \tilde b\tilde c, \quad \tilde d\tilde b = q\tilde b\tilde d, \quad \tilde d\tilde c = q\tilde c\tilde d,$$

$$\tilde d\tilde a - \tilde a\tilde d = (q-q^{-1})\tilde b\tilde c.$$

Par ailleurs le fait que

$$(\otimes^2\widetilde{\rho_1})(u)\cdot(v_{10}-qv_{01}) = \tilde\varepsilon(u)\cdot(v_{10}-qv_{01})$$

fournit une septième relation :

$$\tilde d\tilde a - q\tilde b\tilde c = \tilde\varepsilon.$$

Autrement dit $\operatorname{Ker} F$ contient les sept éléments suivants :

$$b'a' - qa'b', \quad c'a' - qa'c', \quad c'b' - b'c', \quad d'b' - qb'd', \quad d'c' - qc'd',$$

$$d'a' - a'd' - (q-q^{-1})b'c', \quad d'a' - qb'c' - \varepsilon'.$$

Théorème 3.3 (cf. [16])

Le noyau de F *est l'idéal bilatère fermé* K *engendré par les sept éléments ci-dessus.*

Démonstration

On doit prouver que le morphisme $G : \widetilde{W/K} \to \widetilde{\mathcal{U}^0}$ déduit de F est injectif. L'idéal K est aussi engendré par les éléments

$$b'a' - qa'b', \quad c'a' - qa'c', \quad c'b' - b'c', \quad d'b' - qb'd', \quad d'c' - qc'd',$$
$$b'c' - (qa'd' - q\varepsilon'), \quad d'a' - (q^2a'd' - (q^2 - 1)\varepsilon');$$

nous savons (cf. § I.2.6) que les hypothèses du lemme diamant sont satisfaites par le système de réductions

$$(b'a', qa'b'), \ldots, (d'a', q^2a'd' - (q^2 - 1)\varepsilon');$$

appliquant alors le théorème III.2.6.2, on voit que $\widetilde{W/K}$ est isomorphe, en tant que $\widetilde{k}$– module, à $\widetilde{W/K_0}$ où K_0 est l'idéal bilatère de W engendré par les éléments $b'a' - a'b', \ldots, d'a' - a'd'$. Vu comme application $\widetilde{W/K_0} \to \widetilde{\mathcal{U}}^0$, G admet des composantes G_n; G_0 est injective (et même bijective) en vertu de la présentation usuelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k))^0$; et cela entraîne immédiatement que G elle-même est injective.

4. R-matrice universelle pour $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(2,k))$

(Cf. [16].)

On pose

$$R = \sum_{m \geq 0} \frac{(q - q^{-1})^m}{[m]_q^!} q^{-m(m+1)/2} e^{h(H \otimes H + m \cdot H \otimes 1 - m \cdot 1 \otimes H)/4} X^m \otimes Y^m;$$

cette série est convergente dans $(\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k)) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2,k)))\,[\![h]\!]$ parce que $(q - q^{-1})^m$ appartient à $h^m\widetilde{k}$.

Nous admettrons que cet élément R satisfait bien les conditions (II.1) à (II.3) du § II.2.1.2.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'endomorphisme

$$C_{\widetilde{k}^2, \widetilde{k}^2} = \sigma_{\widetilde{k}^2, \widetilde{k}^2} \circ (\widetilde{\rho} \times \widetilde{\rho})(R)$$

de $\widetilde{\otimes^2 k^2}$ est égal à $q_0^{-1} \cdot T$ où T a le sens donné au § IV.3.3.

Par ailleurs, avec les notations du § III.3.7, on a

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4} H \otimes H + X \otimes Y \\ r &= \frac{1}{2}(X \otimes Y - Y \otimes X) \\ [\![r]\!] &= \frac{1}{2} H \wedge X \wedge Y. \end{aligned}$$

Chapitre V
Le groupe quantique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$

On suppose dans tout ce chapitre que le corps k est algébriquement clos et de caractéristique nulle.

1. Déformation formelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))$

1.1. Rappels sur $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))$

1.1.1. *Notations*

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N+1,k)$ est l'ensemble des matrices à $N+1$ lignes et $N+1$ colonnes de trace nulle ; on notera $E_{i,j}$ $(i,j = 1,\ldots,N+1)$ les unités matricielles de $M(N+1,k)$, *i.e.* de coefficients $(E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$. On note $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan formée des matrices diagonales, qui admet pour base les éléments

$$H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, \qquad i = 1,\ldots,N.$$

Il est clair que l'on a

$$[H_i, H_j] = 0.$$

On note Δ^+ l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{g}$; ses éléments, notés α, β, γ, etc., sont des formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ qui correspondent bijectivement aux intervalles $[i,j]$ inclus dans l'ensemble $\{1,2,\ldots,N\}$, de la façon suivante : à l'intervalle $\alpha = [i,j]$ correspond la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ définie par

$$\langle \alpha, Z \rangle = z_i - z_{j+1}$$

pour tout $Z = \sum_{i=1}^{N+1} z_i E_{i,i} \in \mathfrak{h}$.

Si $\alpha = [i,j]$, on pose

$$\ell(\alpha) = j - i + 1, \quad o(\alpha) = i, \quad e(\alpha) = j.$$

On définit sur Δ^+ une relation d'ordre comme suit : $\alpha < \beta$ si $o(\alpha) < o(\beta)$ ou si $o(\alpha) = o(\beta)$ et $e(\alpha) < e(\beta)$; on a donc

$$[1] < [1,2] < \cdots < [1,N] < [2] < [2,3] < \cdots [N].$$

On pose en outre

$$X_\alpha = E_{i,j+1}, \quad Y_\alpha = E_{j+1,i}$$

et on a

$$[Z, X_\alpha] = \langle \alpha, \quad Z \rangle X_\alpha, [Z, Y_\alpha] = - \langle \alpha, Z \rangle Y_\alpha.$$

On écrit X_i au lieu de $X_{[i]}$ et Y_i au lieu de $Y_{[i]}$.

Posant

$$a_{i,j} = \langle [j], H_i \rangle = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2 \end{cases}$$

on a donc

$$\begin{aligned} [H_i, X_j] &= a_{i,j} X_j \\ [H_i, Y_j] &= -a_{i,j} Y_j. \end{aligned}$$

(La matrice $(a_{i,j})$ est appelée *matrice de Cartan* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(N+1,k)$.)

Notons aussi les relations

$$
\begin{aligned}
[X_\alpha, X_\beta] &= \begin{cases} X_{\alpha\cup\beta} & \text{si } o(\beta) = e(\alpha)+1 \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \\
[Y_\alpha, Y_\beta] &= \begin{cases} Y_{\alpha\cup\beta} & \text{si } o(\beta) = e(\alpha)+1 \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \\
[X_i, Y_j] &= \delta_{i,j} H_i.
\end{aligned}
$$

Par contre les crochets $[X_\alpha, Y_\beta]$ sont plus difficiles à écrire, et ce phénomène se retrouvera plus loin dans le cas de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$. Notons enfin que les X_α et Y_α se déduisent des X_i et Y_i par les formules de récurrence

$$
\begin{aligned}
X_{[i,j]} &= [X_i, X_{[i+1,j]}] \\
Y_{[i,j]} &= [Y_i, Y_{[i+1,j]}].
\end{aligned}
$$

1.1.2. *Première présentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble formé des H_i, X_α et Y_α. Par définition des algèbres enveloppantes, on a

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = k\langle\mathcal{F}\rangle / {}^0J$$

où ${}^0J$ est l'idéal bilatère de $k\langle\mathcal{F}\rangle$ engendré par tous les éléments de la forme $\xi\eta - \eta\xi - [\xi,\eta]_\mathfrak{g}$ avec $\xi, \eta \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire les éléments suivants :

$$
\begin{aligned}
{}^0\xi^{(1)}_{i,j} &= H_iH_j - H_jH_i \qquad \text{où } i<j \\
{}^0\xi^{(2)}_{i,\alpha} &= H_iX_\alpha - X_\alpha H_i - \langle\alpha, H_i\rangle X_\alpha \\
{}^0\xi^{(3)}_{i,\alpha} &= H_iY_\alpha - Y_\alpha H_i + \langle\alpha, H_i\rangle Y_\alpha \\
{}^0\xi^{(4)}_{\alpha,\beta} &= X_\alpha Y_\beta - Y_\beta X_\alpha - [X_\alpha, Y_\beta]_\mathfrak{g} \\
{}^0\xi^{(5)}_{\alpha,\beta} &= X_\alpha X_\beta - X_\beta X_\alpha - \begin{cases} X_{\alpha\cup\beta} & \text{si } o(\beta) = e(\alpha)+1 \\ 0 & \text{dans le cas contraire} \end{cases} \\
{}^0\xi^{(7)}_{\alpha,\beta} &= Y_\alpha Y_\beta - Y_\beta Y_\alpha - \begin{cases} Y_{\alpha\cup\beta} & \text{si } o(\beta) = e(\alpha)+1 \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lemme 1.1.3

L'idéal ${}^0J$ *est égal à l'idéal bilatère de* $k\langle\mathcal{F}\rangle$ *engendré par les éléments suivants :*

$$\begin{aligned}
{}^0\xi_{i,j}^{(1)} &= H_iH_j - H_jH_i \qquad \text{où } i<j \\
{}^0\xi_{i,j}^{(2)} &= H_iX_j - X_jH_i - a_{i,j}X_j \\
{}^0\xi_{i,j}^{(3)} &= H_iY_j - Y_jH_i + a_{i,j}Y_j \\
{}^0\xi_{i,j}^{(4)} &= X_iY_j - Y_jX_i - \delta_{i,j}H_i \\
{}^0\xi_{i,j}^{(5)} &= X_iX_j - X_jX_i \qquad \text{où } i \le j-2 \\
{}^0\xi_{i,j}^{(6)} &= X_i^2X_j - 2X_iX_jX_i + X_jX_i^2 \qquad \text{où } |i-j|=1 \\
{}^0\xi_{i,j}^{(7)} &= Y_iY_j - Y_jY_i \qquad \text{où } i \le j-2 \\
{}^0\xi_{i,j}^{(8)} &= Y_i^2Y_j - 2Y_iY_jY_i + Y_jY_i^2 \qquad \text{où } |i-j|=1
\end{aligned}$$

et par les éléments intervenant dans la définition des X_α *et* Y_α *à partir des* X_i *et* Y_i*, à savoir*

$$\begin{aligned}
{}^0\xi_{i,j}^{(9)} &= X_iX_{[i+1,j]} - X_{[i+1,j]}X_i - X_{[i,j]} \\
{}^0\xi_{i,j}^{(10)} &= Y_iY_{[i+1,j]} - Y_{[i+1,j]}Y_i - Y_{[i,j]}.
\end{aligned}$$

N.B. Les relations ${}^0\xi_{i,j}^{(5)}=0$ à ${}^0\xi_{i,j}^{(8)}=0$ sont appelées *relations de Serre.*

Démonstration

Notons ${}^0J'$ l'idéal bilatère engendré par les éléments ci-dessus.

a) On a ${}^0J' \subset {}^0J$: montrons par exemple que ${}^0\xi_{i,j}^{(6)} \in {}^0J$. Calculant modulo ${}^0J$, on a, pour $j=i+1$:

$$\begin{aligned}
{}^0\xi_{i,j}^{(6)} &= X_i(X_iX_j - X_jX_i) - (X_iX_j - X_jX_i)X_i \\
&= X_iX_{[i,j]} - X_{[i,j]}X_i = 0.
\end{aligned}$$

b) On a ${}^0J \subset {}^0J'$: on doit vérifier que ${}^0\xi_{i,\alpha}^{(2)}, \ldots, {}^0\xi_{\alpha,\beta}^{(7)} \in {}^0J'$. Or, calculant modulo ${}^0J'$, on a

$$\begin{aligned}
X_{[i,j]} &= X_iX_{[i+1,j]} - X_{[i+1,j]}X_i \\
Y_{[i,j]} &= Y_iY_{[i+1,j]} - Y_{[i+1,j]}Y_i
\end{aligned}$$

et on en déduit les résultats désirés par récurrence sur $\ell(\alpha)$ et $\ell(\beta)$.

1.1.4. *Autre présentation de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble formé des H_i, X_i, Y_i et ${}^0I$ l'idéal bilatère de $k\langle\mathcal{E}\rangle$ engendré par les éléments ${}^0\xi_{i,j}^{(1)}, \ldots, {}^0\xi_{i,j}^{(8)}$.

Proposition

L'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *est canoniquement isomorphe à* $k\langle\mathcal{E}\rangle/{}^0I$.

Démonstration

Notons provisoirement $\overline{H}_i$, $\overline{X}_\alpha$, $\overline{Y}_\alpha$ les éléments de $\mathcal{F}$. Notons Φ le morphisme

$$k\langle\mathcal{E}\rangle \longrightarrow k\langle\mathcal{F}\rangle$$

transformant H_i en $\overline{H}_i$, etc. ; U et V les morphismes canoniques

$$k\langle\mathcal{E}\rangle \longrightarrow k\langle\mathcal{E}\rangle/{}^0I$$

et

$$k\langle\mathcal{F}\rangle \longrightarrow k\langle\mathcal{F}\rangle/{}^0J.$$

Comme $\Phi({}^0I) \subset {}^0J$, Φ passe au quotient en un morphisme

$$\Psi : k\langle\mathcal{E}\rangle/{}^0I \longrightarrow k\langle\mathcal{F}\rangle/{}^0J;$$

Ψ est surjectif car

$$k\langle\mathcal{F}\rangle = \Psi(k\langle\mathcal{E}\rangle) + {}^0J.$$

Prolongeons U en un morphisme

$$U' : k\langle\mathcal{F}\rangle \longrightarrow k\langle\mathcal{E}\rangle/{}^0I$$

par $U'(\overline{X}_\alpha) = U(X_\alpha)$, etc. ; U' est nul sur ${}^0J$, donc définit un morphisme

$$k\langle\mathcal{F}\rangle/{}^0J \longrightarrow k\langle\mathcal{E}\rangle/{}^0I,$$

qui est inverse à gauche de Ψ, lequel est donc injectif.

1.1.5. *Base et décomposition triangulaire de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$

Notons $\mathcal{E}^+$ (resp. $\mathcal{E}^0$, resp. $\mathcal{E}^-$) l'ensemble des X_i (resp. H_i, resp. Y_i), I^+ (resp. I^0, resp. I^-) l'idéal bilatère de $k\langle\mathcal{E}^+\rangle$ (resp. $k\langle\mathcal{E}^0\rangle$, resp. $k\langle\mathcal{E}^-\rangle$) engendré par les éléments ${}^0\xi^{(5)}_{i,j}$ et ${}^0\xi^{(6)}_{i,j}$ (resp. ${}^0\xi^{(1)}_{i,j}$, resp. ${}^0\xi^{(7)}_{i,j}$ et ${}^0\xi^{(8)}_{i,j}$). Disons qu'un élément de $\langle\mathcal{F}\rangle$ est un *monôme ordonné* s'il est de la forme

$$Y_{\alpha_1}\cdots Y_{\alpha_m}\cdot H_{i_1}\cdots H_{i_n}X_{\beta_1}\cdots X_{\beta_p}$$

avec

$$\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_m, i_1\geq\cdots\geq i_n,\quad \beta_1\geq\cdots\geq\beta_p.$$

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt permet d'affirmer que

- les monômes ordonnés ci-dessus forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$
- les monômes ordonnés par rapport aux H_i forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$
- les monômes ordonnés par rapport aux X_α (resp. Y_α) forment une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+)$ (resp. $\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)$) où $\mathfrak{n}^+$ (resp. $\mathfrak{n}^-$) est l'algèbre de Lie formée des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) strictes.

Il en résulte que l'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})=\mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{h})\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{n}^+).$$

1.2. Définition et structure de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ (voir [28])

1.2.1. *Généralités*

Définition

L'algèbre $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est le quotient de $\widetilde{k\langle\mathcal{E}\rangle}$, où $\mathcal{E}$ est défini comme au § V.1.1.4, par l'idéal bilatère fermé K engendré par les éléments suivants :

$$\begin{aligned}
\xi^{(1)}_{i,j} &= H_iH_j-H_jH_i \qquad \text{où } i<j\\
\xi^{(2)}_{i,j} &= H_iX_j-X_jH_i-a_{i,j}X_j\\
\xi^{(3)}_{i,j} &= H_iY_j-Y_jH_i+a_{i,j}Y_j\\
\xi^{(4)}_{i,j} &= X_iY_j-Y_jX_i-\delta_{i,j}\frac{\mathrm{sh}(hH_i/2)}{\mathrm{sh}(h/2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{i,j}^{(5)} &= X_iX_j - X_jX_i \qquad \text{où } i \leq j-2 \\
\xi_{i,j}^{(6)} &= X_i^2X_j - (q+q^{-1})X_iX_jX_i + X_jX_i^2 \qquad \text{où } |i-j| = 1 \\
\xi_{i,j}^{(7)} &= Y_iY_j - Y_jY_i \qquad \text{où } i \leq j-2 \\
\xi_{i,j}^{(8)} &= Y_i^2Y_j - (q+q^{-1})Y_iY_jY_i + Y_jY_i^2 \qquad \text{où } |i-j| = 1.
\end{aligned}$$

On va démontrer que $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est isomorphe, en tant que $\widetilde{k}$-module, à $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$, donner une présentation de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ analogue à celle du § V.1.1.2 et construire une base (topologique dans le contexte actuel) de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ analogue à celle du § V.1.1.5.

Pour montrer que $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est isomorphe à $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$, il suffit de construire des isomorphismes de $\widetilde{k}_n$-modules

$$\Phi_n : (\widetilde{k\langle\mathcal{E}\rangle})_n / \pi_n(K) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{U}(g)})_n$$

(où π_n est le morphisme canonique $\widetilde{k\langle\mathcal{E}\rangle} \to (\widetilde{k\langle\mathcal{E}\rangle})_n$) compatibles avec les deux systèmes projectifs.

En tant que $\widetilde{k}_n$-algèbre, $(\widetilde{k\langle\mathcal{E}\rangle})_n$ est le quotient de $\widetilde{k}_n\langle\mathcal{E}\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par les analogues des éléments $\xi_{i,j}^{(p)}$ ci-dessus, mais ici $h^{n+1} = 0$; de même $(\widetilde{\mathcal{U}(g)})_n$ est le quotient de $\widetilde{k}_n\langle\mathcal{E}\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par les mêmes éléments où l'on fait $h = 0$. On va donner une présentation de $(\widetilde{k\langle\mathcal{E}\rangle})_n$ ainsi qu'une base de cet espace, indépendantes de h; il sera alors facile de vérifier que les isomorphismes Φ_n associés à ces bases sont compatibles avec les systèmes projectifs.

1.2.2. *Notations*

Dans la suite du § V.1.2 on écrit k au lieu de $\widetilde{k}_n$, de sorte que k est un *anneau commutatif*, h un élément nilpotent de k, $q_0 = e^{h/4}$, $q = e^{h/2}$.

On note I l'idéal bilatère de $k\langle\mathcal{E}\rangle$ engendré par les éléments $\xi_{i,j}^{(p)}$ ci-dessus. On définit $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{E}^0$, $\mathcal{E}^-$, I^+, I^0, I^- comme au § V.1.1.5, en remplaçant bien entendu ${}^0\xi_{i,j}^{(p)}$ par $\xi_{i,j}^{(p)}$.

1.2.3. *Plan de la démonstration*

Notre démonstration suivra de très près celle de [37]. Dans un premier temps, on va ignorer les relations de Serre déformées, à savoir $\xi_{i,j}^{(p)} = 0$ pour $p = 5, \ldots, 8$, établir la décomposition triangulaire

$$k\langle\mathcal{E}\rangle/I = (k\langle\mathcal{E}^-\rangle/I^-) \otimes (k\langle\mathcal{E}^0\rangle/I^0) \otimes (k\left\langle\mathcal{E}^+\right\rangle/I^+)$$

et remarquer (ce qui est immédiat) que les monômes ordonnés par rapport aux H_i forment une base de $k\langle\mathcal{E}^0\rangle/I^0$. Ensuite on définira des éléments $X_\alpha \in k\langle\mathcal{E}^+\rangle$ et $Y_\alpha \in k\langle\mathcal{E}^-\rangle$ qui permettront de donner d'autres présentations et des bases pour $k\langle\mathcal{E}^+\rangle/I^+$ et $k\langle\mathcal{E}^-\rangle/I^-$. On en déduira enfin une base et une nouvelle présentation de $k\langle\mathcal{E}\rangle/I$.

Pour la première étape, on notera I' l'idéal bilatère de $k\langle\mathcal{E}\rangle$ engendré par les éléments $\xi_{i,j}^{(p)}$ avec $p = 1, \ldots, 4$.

Lemme 1.2.4

Il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels

$$k\langle\mathcal{E}\rangle/I' \longrightarrow (k\langle\mathcal{E}^-\rangle) \otimes (k\langle\mathcal{E}^0\rangle/I^0) \otimes (k\langle\mathcal{E}^+\rangle)$$

transformant tout élément

$$(Y_{i_1}\cdots Y_{i_m}H_{j_1}\cdots H_{j_n}X_{k_1}\cdots X_{k_p} \text{ modulo } I')$$

en

$$(Y_{i_1}\cdots Y_{i_m}) \otimes (H_{j_1}\cdots H_{j_n} \text{ modulo } I^0) \otimes (X_{k_1}\cdots X_{k_p}).$$

Démonstration

Notons S' le système de réductions dans $k\langle\mathcal{E}\rangle$ formé des couples suivants :

$$\begin{array}{ll}(H_iH_j, H_jH_i) & \text{où } i<j \\ (X_iH_j, H_jX_i - a_{i,j}X_i) & \\ (H_iY_j, Y_jH_i - a_{i,j}Y_j) & \\ (X_iY_j, Y_jX_i + \delta_{i,j}\dfrac{\mathrm{sh}(hH_i/2)}{\mathrm{sh}(h/2)}). & \end{array}$$

Il est facile de vérifier qu'il est confluent; de plus on peut prendre l'application adaptée F de $\langle\mathcal{E}\rangle$ dans $\mathbf{N}^3$ définie comme suit : pour tout $M \in \langle\mathcal{E}\rangle$,

$$\begin{aligned} F_1(M) &= \text{degré total de } M \text{ par rapport aux } X_i \text{ et } Y_i \\ F_2(M) &= \text{degré total de } M \\ F_3(M) &= \text{nombre d'inversions par rapport à l'ordre suivant :} \\ &\qquad Y_i > H_{j_1} > H_{j_2} > X_k \text{ dès que } j_1 < j_2. \end{aligned}$$

Le lemme diamant montre alors que $k\langle\mathcal{E}\rangle/I'$ admet pour base les monômes de la forme

$$Y_{i_1}\cdots Y_{i_m}H_{j_1}\cdots H_{j_n}X_{k_1}\cdots X_{k_p} \quad \text{avec} \quad j_1 \geq \cdots \geq j_n.$$

Lemme 1.2.5

Il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels

$$k\langle\mathcal{E}\rangle/I \longrightarrow (k\langle\mathcal{E}^-\rangle/I^-)\otimes(k\langle\mathcal{E}^0\rangle/I^0)\otimes(k\langle\mathcal{E}^+\rangle/I^+)$$

transformant tout élément

$$(Y_{i_1}\cdots Y_{i_m}H_{j_1}\cdots H_{j_n}X_{k_1}\cdots X_{k_p} \text{ modulo } I)$$

en

$$(Y_{i_1}\cdots Y_{i_m} \text{ mod. } I^-)\otimes(H_{j_1}\cdots H_{j_n} \text{ mod. } I^0)\otimes(X_{k_1}\cdots X_{k_p} \text{ mod. } I^+).$$

Démonstration

Notant π l'application canonique $k\langle\mathcal{E}\rangle \to k\langle\mathcal{E}\rangle/I'$, on a

$$k\langle\mathcal{E}\rangle/I = (k\langle\mathcal{E}\rangle/I')/\pi(I)$$

et on doit montrer que

$$\begin{aligned} \pi(I) &= I^-\otimes(k\langle\mathcal{E}^0\rangle/I^0)\otimes(k\langle\mathcal{E}^+\rangle) \\ &+ (k\langle\mathcal{E}^-\rangle)\otimes(k\langle\mathcal{E}^0\rangle/I^0)\otimes I^+. \end{aligned}$$

Posant $A = k\langle\mathcal{E}\rangle/I'$, il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} \pi(\xi_{i,j}^{(p)}H_k) &\in A\cdot\pi(\xi_{i,j}^{(p)}) \\ \pi(\xi_{i,j}^{(p)}Y_k) &\in A\cdot\pi(\xi_{i,j}^{(p)}) \end{aligned}$$

pour $p = 5, 6$, et

$$\begin{array}{rcl} \pi(H_k \xi_{i,j}^{(p)}) & \in & \pi(\xi_{i,j}^{(p)}) \cdot A \\ \pi(X_k \xi_{i,j}^{(p)}) & \in & \pi(\xi_{i,j}^{(p)}) \cdot A \end{array}$$

pour $p = 7, 8$. Examinons par exemple les deux premières relations ; un calcul direct montre que, modulo I', on a

$$\xi_{i,j}^{(p)} H_k = H_k \xi_{i,j}^{(p)} + \mathrm{cte} \cdot \xi_{i,j}^{(p)}$$

et

$$\xi_{i,j}^{(p)} Y_k = Y_k \xi_{i,j}^{(p)}.$$

1.2.6. *Définition d'éléments $X_\alpha \in k\langle \mathcal{E}^+ \rangle$*

Les objets α, $\ell(\alpha)$, $o(\alpha)$, $e(\alpha)$ ont le même sens qu'au § V.1.1.1. On définit les X_α par récurrence sur $\ell(\alpha)$ comme suit :

$$\begin{array}{rcl} X_{[i]} & = & X_i \\ X_{[i,j]} & = & q_0^{-1} X_i X_{[i+1,j]} - q_0 X_{[i+1,j]} X_i \quad \text{si } i < j. \end{array}$$

On note $\mathcal{F}^+$ l'ensemble des X_α.

Lemme 1.2.7

L'idéal I^+ est identique à l'idéal bilatère de $k\langle \mathcal{E}^+ \rangle$ engendré par les éléments suivants, pour $\alpha < \beta$:

$$X_\alpha X_\beta - (\lambda_{\alpha,\beta} X_\beta X_\alpha + \mu_{\alpha,\beta} X_{\alpha \cup \beta} + \nu_{\alpha,\beta} X_{\alpha \cap \beta} X_{\alpha \cup \beta})$$

où les scalaires $\lambda_{\alpha,\beta}$, $\mu_{\alpha,\beta}$, $\nu_{\alpha,\beta}$ sont donnés par le tableau ci-dessous.

position relative de α et β	valeur de $\lambda_{\alpha,\beta}$	valeur de $\mu_{\alpha,\beta}$	valeur de $\nu_{\alpha,\beta}$
$e(\alpha)+1 < o(\beta)$	1	0	0
$e(\alpha)+1 = o(\beta)$	q	q_0	0
$o(\alpha) < o(\beta) \leq e(\alpha) < e(\beta)$	1	0	$q^{-1}-q$
$o(\alpha) < o(\beta) \leq e(\alpha) = e(\beta)$	q^{-1}	0	0
$o(\alpha) < o(\beta) \leq e(\beta) < e(\alpha)$	1	0	0
$o(\alpha) = o(\beta) \leq e(\alpha) < e(\beta)$	q^{-1}	0	0

Démonstration

Par récurrence sur $\ell(\alpha)$ et $\ell(\beta)$.

Lemme 1.2.8

L'algèbre $k\langle\mathcal{E}^+\rangle/I^+$ est isomorphe à $k\langle\mathcal{F}^+\rangle/J^+$ où J^+ est l'idéal bilatère de $k\langle\mathcal{F}^+\rangle$ engendré par les éléments indiqués au lemme V.1.2.7.

Démonstration

Comme à la proposition V.1.1.4.

Lemme 1.2.9

Les monômes de la forme $X_{\alpha_1}\cdots X_{\alpha_m}$ où $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m$ forment une base de $k\langle\mathcal{F}^+\rangle/J^+$.

Démonstration

Considérons le système de réductions S^+ dans $k\langle\mathcal{F}^+\rangle$ formé des couples

$$(X_\alpha X_\beta, \lambda_{\alpha,\beta}X_\beta X_\alpha + \mu_{\alpha,\beta}X_{\alpha\cup\beta} + \nu_{\alpha,\beta}X_{\alpha\cap\beta}X_{\alpha\cup\beta}).$$

On vérifie, par des calculs longs mais sans difficulté, qu'il est confluent. Définissons une application F de $\langle\mathcal{F}^+\rangle$ dans $\mathbf{N}^{N(N+1)/2+1}$ de la façon suivante : pour tout monôme $M \in \langle\mathcal{F}^+\rangle$ et tout α, notons $d_\alpha(M)$ le degré de M par rapport à α; notons $I(M)$ le nombre d'inversions de M par rapport à l'ordre indiqué; posons

$$F(M) = (d_{[1]}(M), d_{[1,2]}(M), \ldots, d_{[1,N]}(M), d_{[2]}(M), \ldots, d_{[N]}(M), I(M)).$$

Alors $F(M)$ diminue strictement si, dans le monôme M, on remplace un produit $X_\alpha X_\beta$ par $\lambda_{\alpha,\beta}X_\beta X_\alpha$ ou $\mu_{\alpha,\beta}X_{\alpha\cup\beta}$ ou $\nu_{\alpha,\beta}X_{\alpha\cap\beta}X_{\alpha\cup\beta}$.

Le lemme résulte alors du lemme diamant.

Proposition 1.2.10 (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt généralisé, cf. [37])

Le quotient $k\langle\mathcal{E}\rangle/I$ admet pour base les monômes de la forme

$$Y_{\alpha_1}\cdots Y_{\alpha_m}\cdot H_{i_1}\cdots H_{i_n}\cdot X_{\beta_1}\cdots X_{\beta_p}$$

avec

$$\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m, \quad i_1 \geq \cdots \geq i_n, \quad \beta_1 \geq \cdots \geq \beta_p.$$

Démonstration

Cela résulte du lemme V.1.2.5, du lemme V.1.2.9 et du résultat analogue pour $\mathcal{E}^-$.

Corollaire 1.2.11

L'algèbre $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ est isomorphe, en tant que $\widetilde{k}$-module, à $\widetilde{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$.

1.2.12. *Autre présentation de $k\langle\mathcal{E}\rangle/I$*

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des H_i, X_α et Y_α.

Proposition

L'algèbre $k\langle\mathcal{E}\rangle/I$ est isomorphe au quotient de $k\langle\mathcal{F}\rangle$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $\xi_{i,j}^{(1)}, \xi_{i,j}^{(2)}, \xi_{i,j}^{(3)}, \xi_{i,j}^{(4)}$, les éléments introduits au lemme V.1.2.7, et leurs analogues pour $\mathcal{F}^-$.

Démonstration

Comme à la proposition V.1.1.4.

2. Les algèbres de Hopf $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ et $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$

2.1. L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$

De façon analogue à ce qui a été fait au chapitre précédent dans le cas où $N=1$, on définit des opérations $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\varepsilon}$, $\widetilde{S}$ dans $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ par

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\Delta}(H_i) & = & H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i \\ \widetilde{\Delta}(X_i) & = & X_i \otimes e^{hH_i/4} + e^{-hH_i/4} \otimes X_i \\ \widetilde{\Delta}(Y_i) & = & Y_i \otimes e^{hH_i/4} + e^{-hH_i/4} \otimes Y_i \\ \widetilde{\varepsilon}(H_i) & = & \widetilde{\varepsilon}(X_i) = \widetilde{\varepsilon}(Y_i) = 0 \\ \widetilde{S}(H_i) & = & -H_i \\ \widetilde{S}(X_i) & = & -qX_i \\ \widetilde{S}(Y_i) & = & -q^{-1}Y_i; \end{array}$$

on vérifie qu'on obtient bien ainsi une algèbre de Hopf; enfin on pose

$$K_{i,0} = e^{hH_i/4}, \quad K_i = K_{i,0}^2.$$

N.B. On trouvera dans [37] une formule donnant une R-matrice universelle pour $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$.

2.2. L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$

En ce qui concerne l'algèbre $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$, on reprend la notation Z introduite au § II.2.4.6 dans le cas où $k = \mathbf{C}$; $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ est donc définie par les générateurs H_i, X_i, Y_i, Z avec les relations du lemme V.1.1.3 et en outre

$$[Z,H_i] = [Z,X_i] = [Z,Y_i] = 0.$$

L'algèbre $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ est définie comme quotient de l'algèbre associative libre $(k\langle (H_i),(X_i),(Y_i),Z\rangle)[\![h]\!]$ par l'idéal bilatère fermé engendré par les éléments $\xi_{i,j}^{(p)}$ du § V.1.2.1 ainsi que $[Z,H_i]$, $[Z,X_i]$, $[Z,Y_i]$. On démontre, comme dans le cas de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$, que $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ est une déformation formelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(N+1,k))$.

La comultiplication de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ se prolonge à $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ en posant
$$\widetilde{\Delta}(Z) = Z\otimes 1 + 1\otimes Z.$$

3. Dual restreint de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$

3.1. Préliminaires

On notera ρ la représentation naturelle de $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ dans k^{N+1}, $\rho_{i,j}$ ses coefficients, ρ_m la m-ième puissance tensorielle de ρ, $\widetilde{\rho}$ et $\widetilde{\rho_m}$ les représentations de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ qui correspondent à ρ et ρ_m par le théorème III.2.5.7. Les coefficients $\widetilde{\rho_{ij}}$ de $\widetilde{\rho}$ engendrent topologiquement le dual restreint de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$, isomorphe à $(\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))^0)[\![h]\!]$ (cf. § III.3.5.2). Notant W la k-algèbre associative libre construite sur des générateurs notés (pour éviter des confusions) ρ'_{ij}, on a donc un morphisme surjectif
$$\begin{array}{rcl} F:\widetilde{W} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{U}^0} \\ \rho'_{ij} & \longmapsto & \widetilde{\rho}_{ij}. \end{array}$$

On va déterminer le noyau de F.

Remarquons d'abord que l'on a
$$\widetilde{\rho}(H_i) = E_{i,i} - E_{i+1,i+1},\quad \widetilde{\rho}(X_i) = E_{i,i+1},\quad \widetilde{\rho}(Y_i) = E_{i+1,i};$$
$\widetilde{\rho}$ se prolonge en une représentation de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ en posant $\widetilde{\rho}(Z) = I$; on peut alors définir $\widetilde{\rho_m}$ en tant que représentation de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ comme m-ième puissance tensorielle de $\widetilde{\rho}$.

Lemme 3.2

La représentation $\widetilde{\rho_2}$ de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ conserve le sous-$\widetilde{k}$-module $S_h^2\widetilde{k}^{N+1}$ (resp. $\wedge_h^2\widetilde{k}^{N+1}$) engendré par les éléments de la forme $e_j\otimes e_j$ et $q_0^{-1}e_j\otimes e_k + q_0 e_k\otimes e_j$ où $j<k$ (resp. par les éléments $q_0 e_j\otimes e_k - q_0^{-1}e_k\otimes e_j$ où $j<k$).

Démonstration

On le vérifie pour les opérateurs $\widetilde{\rho_2}(H_i, X_i, Y_i, Z)$ sans difficulté.

Lemme 3.3

Posons

$$\xi = \sum_{s\in S_{N+1}} (-q^{-1})^{I(s)} e_{s(1)} \otimes e_{s(2)} \otimes \cdots \otimes e_{s(N+1)} \in \otimes^{N+1}\widetilde{k}^{N+1}$$

où $I(s)$ désigne le nombre d'inversions de la permutation s. Alors le sous-$\widetilde{k}$-module $\widetilde{k}\xi$ est conservé par $\widetilde{\rho_{N+1}}(\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k)))$ et la restriction à $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ de la sous-représentation correspondante est égale à la coünité de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$.

Démonstration

Calcul direct.

3.4. Notation

On note $\mathrm{dét}_q$ la représentation de dimension 1 de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ dans $\widetilde{k}\xi$ et on l'appelle *déterminant quantique*; $\mathrm{dét}_q$ est aussi le coefficient $\Phi^{\widetilde{\rho_{N+1}}}_{e_i^*\otimes\cdots\otimes e_{N+1}^*,\xi}$ de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$.

Remarquons que l'on a aussi $\mathrm{dét}_q = \gamma\Phi^{\mathrm{dét}_q}_{\xi^*,\xi}$ où γ est l'inverse de l'élément $\sum_{s\in S_{N+1}}(-q^{-1})^{I(s)}$ de $\widetilde{k}$.

Lemme 3.5

Le noyau de F contient les éléments suivants :

$$\begin{array}{ll}
\rho'_{ik}\rho'_{ij} - q\rho'_{ij}\rho'_{ik} & \text{avec } j<k \\
\rho'_{jk}\rho'_{ik} - q\rho'_{ik}\rho'_{jk} & \text{avec } i<j \\
\rho'_{ij}\rho'_{k\ell} - \rho'_{k\ell}\rho'_{ij} & \text{avec } k<i, j<\ell \\
\rho'_{ij}\rho'_{k\ell} - (\rho'_{k\ell}\rho'_{ij} + (q-q^{-1})\rho'_{kj}\rho'_{i\ell}) & \text{avec } k<i, \ell<j \\
D' - \varepsilon' &
\end{array}$$

où ε' est l'élément unité de $\widetilde{W}$ et où

$$D' = \sum_{s\in S_{N+1}} (-q^{-1})^{I(s)} \rho'_{1,s(1)} \cdots \rho'_{N+1,s(N+1)}.$$

Démonstration

On obtient les éléments des quatre premiers types en écrivant que $\widetilde{\rho_2}$ commute avec l'endomorphisme T de $\otimes^2\widetilde{k}^{N+1}$ égal à q sur $S_h^2\widetilde{k}^{N+1}$ et à $-q^{-1}$ sur $\wedge_h^2\widetilde{k}^{N+1}$; et le cinquième en écrivant que le coefficient $\Phi^{\widetilde{\rho_{N+1}}}_{e_1^*\otimes\cdots\otimes e_{N+1}^*,\xi}$ de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ est égal à ε.

3.6. Intermède

On va maintenant démontrer que $\operatorname{Ker} F$ est égal à l'idéal bilatère fermé K de $\widetilde{W}$ engendré par les éléments ci-dessus. Pour cela on procédera en deux temps : dans un premier temps on utilisera le lemme diamant pour décrire le quotient $\widetilde{W}/K'$, où K' est l'idéal bilatère fermé engendré par les éléments des quatre premiers types; ensuite on divisera par $D' - \varepsilon'$.

On utilisera les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
K'_0 &= \text{ensemble des composantes de degré 0 des éléments de } K' \\
&= \text{idéal bilatère de } W \text{ engendré par les éléments } \rho'_{ij}\rho'_{k\ell} - \rho'_{k\ell}\rho'_{ij} \\
V &= W/K'_0 = k[(\rho'_{ij})] \\
\pi &= \text{morphisme canonique } \widetilde{W} \to \widetilde{W}/K'.
\end{aligned}$$

Lemme 3.7

Le quotient $\widetilde{W}/K'$ est une déformation formelle de V, i.e. est isomorphe, en tant que $\widetilde{k}$-module, à $\widetilde{V}$.

Démonstration

On procède comme au théorème III.2.6.2, en prenant le système de réductions dans $\widetilde{W}$ formé des couples $(\rho'_{ik}\rho'_{ij}, q\rho'_{ij}\rho'_{ik})$ avec $j < k$, etc.

On vérifie qu'il est confluent et on prend comme application adaptée $\langle(\rho'_{ij})\rangle \to \mathbf{N}$ le nombre d'inversions.

3.8. Notations

On écrira $\widetilde{V}$ au lieu de $\widetilde{W}/K'$; on posera

$$\begin{aligned} L &= \text{idéal bilatère fermé de } \widetilde{V} \text{ engendré par} \\ &\quad\ \text{l'élément } \widetilde{\alpha} = \pi(D' - \varepsilon') \\ L_0 &= \text{ensemble des composantes de degré 0 de } L \\ &= \text{idéal bilatère de } V \text{ engendré par } D - \varepsilon, \text{ où } \varepsilon \text{ est} \\ &\quad\ \text{l'élément unité de } V \text{ et } D \text{ le déterminant usuel.} \end{aligned}$$

On doit montrer que l'application

$$H : \widetilde{V}/L \longrightarrow (\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))^0)\,[\![h]\!]$$

déduite de F est injective.

Lemme 3.9
On a $V/L_0 = \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))^0$.

Démonstration
Ce n'est autre que la présentation usuelle de l'algèbre $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))^0$.

Lemme 3.10
L'élément $\widetilde{\alpha}$ *est central dans* $\widetilde{V}$.

Démonstration
Considérons $\widetilde{\rho}$ comme une représentation de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ comme indiqué au § V.3.1 ; alors F peut être considérée comme une application de $\widetilde{W}$ dans $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))^0$, qui est nulle sur K' d'après le lemme V.3.2, donc définit une application

$$F' : \widetilde{W}/K' \longrightarrow \mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))^0,$$

laquelle est injective en vertu du lemme V.3.7 et du fait que sa composante de degré 0 est injective. L'image de D' par F' n'est autre que dét_q ; notre assertion résultera donc du résultat suivant :

Lemme 3.11
Le déterminant quantique est un élément central de l'algèbre $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))^0$.

Démonstration

On doit vérifier que pour toute représentation de rang fini (E,τ) de $\mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$, tout $x \in E$ et tout $f \in E^*$, on a

$$\Phi^{\pi}_{f,x} \cdot \mathrm{dét}_q = \mathrm{dét}_q \cdot \Phi^{\pi}_{f,x}$$

ou encore (cf. § V.3.4)

$$\Phi^{\pi}_{f,x} \cdot \Phi^{\mathrm{dét}_q}_{\xi^*,\xi} = \Phi^{\mathrm{dét}_q}_{\xi^*,\xi} \cdot \Phi^{\pi}_{f,x}$$

ou enfin

$$\Phi^{\pi\otimes\mathrm{dét}_q}_{f\otimes\xi^*,x\otimes\xi} = \Phi^{\mathrm{dét}_q\otimes\pi}_{\xi^*\otimes f,\xi\otimes x}.$$

Notons σ la volte $E \otimes \widetilde{k}\xi \to \widetilde{k}\xi \otimes E$; il est clair que σ transforme $f \otimes \xi^*$ en $\xi^* \otimes f$ et $x \otimes \xi$ en $\xi \otimes x$; il nous suffit donc de vérifier que σ entrelace les représentations $\pi \otimes \mathrm{dét}_q$ et $\mathrm{dét}_q \otimes \pi$, c'est-à-dire que

$$\sigma((\pi \otimes \mathrm{dét}_q)(u) \cdot (x \otimes \xi)) = (\mathrm{dét}_q \otimes \pi)(u) \cdot (\xi \otimes x)$$

pour tous $u \in \mathcal{U}_h(\mathfrak{gl}(N+1,k))$ et $x \in E$; il suffit en fait de le vérifier pour $u = H_i, X_i, Y_i, Z$. Pour H_i et Z c'est immédiat puisque $\Delta(H_i)$ et $\Delta(Z)$ sont symétriques ; pour X_i et Y_i le calcul est facile en remarquant que

$$\mathrm{dét}_q(X_i) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{dét}_q(K_{i,0}) = \exp(\mathrm{dét}_q(hH_i/4)) = 1.$$

Lemme 3.12

L'idéal L est aussi l'idéal à gauche de $\widetilde{V}$ engendré (algébriquement) par $\widetilde{\alpha}$.

Démonstration

En vertu du lemme précédent, $\widetilde{\alpha}$ est central ; de plus sa composante de degré 0 : $\alpha_0 = D - \varepsilon$, est un élément régulier (*i.e.* non diviseur de zéro) dans V. On doit montrer que l'idéal à gauche $\widetilde{V} \cdot \widetilde{\alpha}$ est fermé. Soit donc $\widetilde{v}^{(i)}$ une suite d'éléments de $\widetilde{V} \cdot \widetilde{\alpha}$ convergeant vers un élément $\widetilde{v}$ de $\widetilde{V}$; on doit construire $\widetilde{y} \in \widetilde{V}$ vérifiant $\widetilde{v} = \widetilde{y}\widetilde{\alpha}$.

Pour tout i, $\widetilde{v}^{(i)}$ est de la forme $\widetilde{x}^{(i)} \cdot \widetilde{\alpha}$, *i.e.*

$$v_n^{(i)} = \sum_{p+q+r=n} \mu_p(x_q^{(i)}, \alpha_r)$$

où $\widetilde{\mu} = (\mu_p)$ désigne la multiplication dans $\widetilde{V}$. Il existe i_0 tel que

$$v_0 = v_0^{(i)} = x_0^{(i)} \cdot \alpha_0 \qquad \forall\, i \geq i_0;$$

α_0 étant régulier, ceci implique

$$x_0^{(i)} = x_0^{(i_0)} \qquad \forall\, i \geq i_0;$$

on pose $y_0 = x_0^{(i_0)}$. Ensuite il existe $i_1 \geq i_0$ tel que

$$v_1 = v_1^{(i)} = \mu_1(x_0^{(i_0)}, \alpha_0) + x_1^{(i)} \cdot \alpha_0 + x_0^{(i_0)} \cdot \alpha_1 \qquad \forall\, i \geq i_1;$$

ceci implique

$$x_1^{(i)} = x_1^{(i_1)} \qquad \forall\, i \geq i_1;$$

on pose $y_1 = x_1^{(i_1)}$. Et ainsi de suite.

Lemme 3.13

Les conditions $\widetilde{v} \in \widetilde{V}$ *et* $h\widetilde{v} \in L$ *impliquent* $\widetilde{v} \in L$.

Démonstration

On peut écrire $h\widetilde{v} = \widetilde{y}\widetilde{\alpha}$ avec $\widetilde{y} \in \widetilde{V}$; alors $y_0\alpha_0 = 0$; comme α_0 est régulier, $y_0 = 0$ et ceci entraîne l'assertion.

Lemme 3.14

L'application $H : \widetilde{V}/L \to (\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k))^0)[\![h]\!]$ *est injective.*

Démonstration

Le $\widetilde{k}$-module $\widetilde{V}/L$ est séparé et complet pour la topologie h-adique; l'action de h est injective d'après le lemme précédent; on sait alors (lemme III.1.1.3) que $\widetilde{V}/L$ est de la forme $\widetilde{X}$ où X est un k-espace vectoriel. L'application H peut s'écrire

$$H(\widetilde{x}) = \sum_n \sum_{p+q=n} H_p(x_q) \cdot h^n$$

où $H_p \in \operatorname{Hom}_k(X, \mathcal{U}(\mathfrak{sl}(N+1,k)))$; identifiant X avec V/L_0, le lemme V.3.9 montre que H_0 est injectif, et cela implique que H_0 l'est aussi.

Au total nous avons démontré ce qui suit :

Théorème 3.15 (voir aussi [2], [35])

Le dual restreint du groupe quantique $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1,k))$ *est le quotient de l'algèbre* $(k\left\langle(\rho'_{ij})\right\rangle)[\![h]\!]$ *par l'idéal bilatère fermé engendré par les éléments énumérés au lemme V.3.5.*

Chapitre VI
Déformations d'espaces homogènes

1. Introduction

De nombreux travaux ont été consacrés ces dernières années aux quantifications d'espaces homogènes de groupe de Lie; voir par exemple [14], [15], [22], [13]; la situation est, en gros, la suivante : on se donne une variété de la forme $M = G/A$, où G est un groupe de Lie et A un sous-groupe fermé, et une algèbre de fonctions $\mathcal{A}$ sur M, et on cherche à construire des déformations de $\mathcal{A}$; si on s'est donné en outre le terme d'ordre 1 antisymétrisé de la déformation (c'est un crochet de Poisson $\{\,,\,\}$ sur $\mathcal{A}$), on dit que l'on "quantifie le crochet $\{\,,\,\}$".

Dans le présent chapitre on suppose que $G = SL(N, \mathbf{C})$ et on se propose de replacer ces diverses constructions dans le cadre de la déformation formelle de $\mathcal{U}^0$ constituée par $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$, dual restreint de $\mathcal{U}_h$. Plus précisément on rappelle (proposition II.2.4.2) que $\mathcal{U}^0$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$; on considère alors l'algèbre $\mathcal{A}$ ci-dessus comme une sous-algèbre B de $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ et on se demande si la déformation formelle $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ de $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ induit une déformation formelle de B. Pour cela il est nécessaire que B soit stable par le crochet de Poisson, dit "de Sklyanin-Drinfeld", obtenu par la méthode indiquée au § III.2.5.8 ; cette condition est étudiée en détail au § 3 et la déformabilité de B au § 6. Le § 2 est consacré à l'étude des divers types de sous-algèbres B considérés dans ce travail : algèbre des fonctions polynômes sur l'orbite d'un vecteur v d'une représentation de dimension finie (V, π) de G (algèbre notée $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V, \pi, v)$), algèbre des fonctions polynômes sur G invariantes à droite par un sous-groupe A de G ou une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ (algèbres notées respectivement $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(A)}$ et $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$).

Les §§ 4 et 5 contiennent divers rappels sur les bigèbres et sur les algèbres $\mathcal{U}_h = \mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ et leurs duaux restreints $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$.

2. Généralités sur $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ et ses sous-algèbres

2.1. Définitions et notations relatives à $SL(N, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{sl}(N, \mathbf{C})$

On reprend les notations du § V.1.1.1 en ce qui concerne $\mathfrak{g}$, $E_{i,j}$, $\mathfrak{h}$, H_i, Δ^+, X_i, Y_i. Par contre on écrira X^0_α et Y^0_α au lieu de X_α et Y_α, réservant ces dernières notations aux éléments de $\mathcal{U}_h$ définis au § V.1.2.6.

On dira qu'une matrice diagonale $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_N)$ est *rangée* si les conditions $i < j < k$ et $x_i = x_k$ impliquent $x_i = x_j$.

On notera $\mathfrak{b}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_+$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. triangulaires supérieures strictes) ; définitions analogues pour $\mathfrak{b}_-, \mathfrak{n}_-$ et pour les sous-groupes correspondants B_+, B_-, N_+, N_-.

On note $Z_\mathfrak{g}(X)$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ d'un élément X.

Pour toute partition $N = N_1 + \cdots + N_r$ de N, on note $\mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r}$ l'ensemble des matrices de $\mathfrak{g}$ qui sont diagonales par blocs, i.e. de la forme $X = \operatorname{diag}(X_1, \ldots, X_r)$ avec $X_i \in \mathfrak{gl}(N_i, \mathbf{C})$, et $\mathfrak{g}'_{N_1,\ldots,N_r}$ l'ensemble de celles pour lesquelles X_i appartient à $\mathfrak{sl}(N_i, \mathbf{C})$. Les sous-algèbres $\mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r}$ sont exactement les centralisateurs des matrices diagonales rangées. On définit de même les sous-groupes $G_{N_1,\ldots,N_r}$ $G'_{N_1,\ldots,N_r}$.

On rappelle que toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{b}_+$ est de la forme $\mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r} + \mathfrak{b}_+$; ces sous-algèbres sont dites *paraboliques standard.*

2.2. Définitions et notations relatives à $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$

On rappelle que l'algèbre $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ est engendrée par les coefficients $\rho_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots, N$, de la représentation naturelle de G dans $\mathbf{C}^N$.

Pour tout couple (i,j) on pose

$$\widehat{\rho_{i,j}}(g) = \det((g_{k,\ell})_{k\neq i,\ell\neq j})$$

de sorte que l'on a

$$(g^{-1})_{i,j} = (-1)^{i-j}\widehat{\rho_{j,i}}(g).$$

2.3. Actions L et R de G et $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$

Elles sont définies par

$$(L(a)\cdot\varphi)(g) = \varphi(ga),\ (R(a)\cdot\varphi)(g) = \varphi(ag)$$

$$(L(X)\cdot\varphi)(g) = \frac{d}{dt}\varphi(g\cdot\exp tX)\Big|_{t=0},\ (R(X)\cdot\varphi)(g) = \frac{d}{dt}\varphi(\exp tX\cdot g)\Big|_{t=0}$$

pour tous $a, g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$, $\varphi \in \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$.

Pour toute partie A de G ou $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$, on pose

$$\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(A)} = \{\varphi \in \mathcal{R}_{\text{hol}}(G) \mid L(a)\cdot\varphi = \varphi \quad \forall\, a \in A\}$$

$$\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})} = \{\varphi \in \mathcal{R}_{\text{hol}}(G) \mid L(X)\cdot\varphi = 0 \quad \forall\, X \in \mathfrak{a}\};$$

ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$.

2.4. Quelques formules

Pour $i \neq j$ on a

$$(L(E_{i,j})\cdot\varphi)(g) = \sum_k g_{k,i}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial g_{k,j}}$$

d'où

(VI.1) $$L(E_{i,j})\cdot\rho_{k,\ell} = \delta_{j,\ell}\rho_{k,i}$$

Pour tout i on a

$$(L(H_i)\cdot\varphi)(g) = \sum_k \left(g_{k,i}\frac{\partial\varphi}{\partial g_{k,i}} - g_{k,i+1}\frac{\partial\varphi}{\partial g_{k,i+1}}\right)$$

d'où

(VI.2) $$L(H_i)\cdot\rho_{k,\ell} = (\delta_{\ell,i} - \delta_{\ell,i+1})\cdot\rho_{k,\ell}.$$

Coefficients de la représentation adjointe

On posera, pour simplifier les notations

$$\Phi_{i,j;k,\ell}(g) = \langle E^*_{i,j}, Ad\, g \cdot E_{k,\ell}\rangle = (g \cdot E_{k,\ell} \cdot g^{-1})_{i,j}$$

soit encore

$$\Phi_{i,j;k,\ell} = (-1)^{j-\ell} \rho_{i,k}\, \widehat{\rho_{j,\ell}} \tag{VI.3}$$

et on a

$$L(E_{m,n}) \cdot \Phi_{i,j;k,\ell} = \delta_{n,k}\Phi_{i,j;m,\ell} - \delta_{m,\ell}\Phi_{i,j;k,n}\,. \tag{VI.4}$$

2.5. Algèbres de fonctions sur des orbites

Considérons une représentation de dimension finie (V,π) de G et un vecteur non nul de V ; notons

- G_V (resp. $\mathfrak{g}_v$) le stabilisateur de v dans G (resp. dans $\mathfrak{g}$)
- Φ^π_v l'application $\xi \to \Phi^\pi_{\xi,v}$ de V^* dans $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$, entrelacement entre la représentation contragrédiente de π et la représentation régulière gauche dans $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$
- $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V,\pi,v)$ la sous-algèbre de $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ engendrée par $\Phi^\pi_v(V^*)$.

L'algèbre $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V,\pi,v)$ est l'image de l'algèbre tensorielle $\otimes V^*$ par l'application qui, à tout $\xi = \oplus\xi_n$ où $\xi_n \in \otimes^n V^*$, associe la fonction

$$g \to \sum_n \langle \xi_n, \otimes^n(\pi(g)\cdot v)\rangle;$$

elle s'identifie naturellement à l'algèbre des fonctions sur l'orbite $\pi(G)\cdot v$ qui sont des restrictions de polynômes sur V.

Il est clair que l'on a

$$\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V,\pi,v) \subset \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(G_v)} \subset \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(\mathfrak{g}_v)}$$

et que les deux derniers ensembles sont égaux si G_V est connexe ; on trouvera dans [7] une condition nécessaire et suffisante pour que les deux premiers soient égaux ; nous ne l'utiliserons pas, mais nous rencontrerons au § 3.6 un exemple (communiqué par D. Luna) où ils ne le sont pas.

2.6. Cas de la représentation adjointe

Si (V,π) est la représentation adjointe, on a toujours $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V,\pi,v) = \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(G_V)}$ (cf. [29], corollaire 1 du théorème 3 et [31]). De plus, l'orbite Ad $G \cdot v$ est fermée si et seulement si v est semi-simple (i.e. si et seulement si Ad $G \cdot v$ contient une matrice diagonale) et, dans ce cas, le stabilisateur G_v est connexe (cf. [29], lemme 5 et page 367).

2.7. Cas des vecteurs dominants

2.7.1. *Définitions*

On notera $\mathcal{P}$ l'ensemble des *poids dominants* de G, ou formes linéaires sur $\mathfrak{h}$ de la forme $\sum_{i=1}^{n-1} n_i H_i^*$ où $n_i \in \mathbf{N}$ et où (H_i^*) désigne la base duale de celle des H_i.

On rappelle que les représentations holomorphes irréductibles de dimension finie de G sont en correspondance bijective avec $\mathcal{P}$, à chaque $\lambda \in \mathcal{P}$ correspondant une représentation irréductible (V_λ,π_λ) et un *vecteur dominant* v_λ caractérisé (à un scalaire près) par les relations

$$\begin{array}{rcll} \pi_\lambda(X)\cdot v_\lambda & = & \langle\lambda, X\rangle \cdot v_\lambda & \forall X \in \mathfrak{h} \\ \pi_\lambda(X)\cdot v_\lambda & = & 0 & \forall X \in \mathfrak{n}_+. \end{array}$$

2.7.2. *Rappel de quelques propriétés des vecteurs dominants* (cf. [42], [6])

a) L'orbite $\pi_\lambda(G)\cdot v_\lambda$ est un cône dont l'adhérence s'obtient en lui ajoutant le point 0.

b) Le stabilisateur G_{v_λ} se décrit comme suit : λ est la différentielle d'un caractère χ_λ du groupe $H = \exp\mathfrak{h}$, que l'on prolonge à B_+ par 1 sur N_+ ; le stabilisateur dans G de la droite $\mathbf{C}\cdot v_\lambda$ est un sous-groupe parabolique standard P_λ, ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdot & \cdot & A_{1,r} \\ 0 & A_{2,2} & \cdot & \cdot & A_{2,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & A_{r,r} \end{pmatrix}$$

où $A_{i,i} \in GL(N_i, \mathbf{C})$ et $\prod$ dét $A_{i,i} = 1$. L'action de P_λ dans $\mathbf{C} \cdot v_\lambda$ est un caractère prolongeant χ_λ ; alors G_{v_λ} est le noyau de ce caractère, et est le produit de $G'_{N_1,\ldots,N_r}$, de N_+ et d'un sous-groupe H_0 de H.

On a de même

$$\mathfrak{g}_{v_\lambda} = \mathfrak{g}'_{N_1,\ldots,N_r} + \mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h}_0.$$

c) Notons $(e_1, \ldots, e_N)$ la base canonique de $\mathbf{C}^N$; pour tout $n = 1, \ldots, N$ l'élément $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$ est un vecteur dominant de $\Lambda^n \mathbf{C}^N$; le stabilisateur dans G de la droite $\mathbf{C} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in GL(n, \mathbf{C})$; le stabilisateur de $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$ est l'ensemble des matrices de cette forme, avec en plus dét$A = 1$; enfin le stabilisateur de $\bigoplus_{n=1}^{N} e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_n$ est réduit à N_+.

d) Prenons $V_\lambda = \mathfrak{g}$, $\pi_\lambda = Ad$, $v_\lambda = E_{1,N}$, $\lambda = H_1^* + \cdots + H_{N-1}^*$. Alors G_{v_λ} est l'ensemble des matrices g vérifiant

$$g_{1,1} = g_{N,N}, \quad g_{i,1} = 0 \quad \forall i > 1, \quad g_{N,j} = 0 \quad \forall j < N;$$

il est connexe si $N \geq 3$.

2.7.3. *Sous-algèbres $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V_\lambda, \pi_\lambda, v_\lambda)$*

On a toujours $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V_\lambda, \pi_\lambda, v_\lambda) = \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(G_{v_\lambda})}$ (cf. [42]). Par ailleurs, comme l'application $\Phi_{v_\lambda}^{\pi_\lambda}$ entrelace la représentation contragrédiente de π_λ et la représentation régulière gauche dans $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$, les sous-espaces $E_\lambda = \text{Im}(\Phi_{v_\lambda}^{\pi_\lambda})$ sont linéairement indépendants; leur somme directe est égale à $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(N_+)}$ (cf. [32]).

On a aussi $E_\lambda \cdot E_\mu \subset E_{\lambda+\mu}$ pour la multiplication $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$ (cela résulte du fait que le sous-module de $V_\lambda \otimes V_\mu$ engendré par $v_\lambda \otimes v_\mu$ est isomorphe à $V_{\lambda+\mu}$ par un isomorphisme qui transforme $v_\lambda \otimes v_\mu$ en $v_{\lambda+\mu}$) ; en particulier l'algèbre $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V_\lambda, \pi_\lambda, v_\lambda)$ est la sous-algèbre graduée, somme directe des $E_{n \cdot \lambda}$, $n \in \mathbf{N}$.

On démontre (cf. [32]) que cette algèbre est *quadratique*, i.e. que le noyau du morphisme canonique $\otimes V_\lambda^* \to \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V_\lambda, \pi_\lambda, v_\lambda)$ est l'idéal bilatère engendré par ses éléments homogènes de degré 2.

2.8. Cas du groupe $G = SL(2, \mathbf{C})$

2.8.1. *Représentations irréductibles*

Il sera commode de modifier légèrement les notations du § IV.2.1. Ici l'ensemble $\mathcal{P}$ des poids dominants s'identifie à $\mathbf{N}$; on notera π_m la représentation irréductible de dimension $m+1$, réalisée dans l'espace V_m des polynômes homogènes de degré m en deux variables complexes x et y par

$$\left(\pi_m \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f\right)(x,y) = f(ax+cy, bx+dy).$$

On prend dans V_m la base suivante :

$$v_k(x,y) = \binom{m}{k} x^k y^{m-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, m$$

et le vecteur dominant v_m ; le stabilisateur G_{v_m} est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ avec $a^m = 1$. On a

$$\begin{aligned}
&\pi_m(H) \cdot v_k = (2k-m) v_k \\
&\pi_m(X) \cdot v_k = (k+1) v_{k+1} \ \ (0 \text{ si } k = m) \\
&\pi_m(Y) \cdot v_k = (m-k+1) v_{k-1} \ \ (0 \text{ si } k = 0) \\
&\langle v_k^*, \pi_m \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \cdot v_m \rangle = a^k c^{m-k}.
\end{aligned}$$

L'algèbre$\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V_m, \pi_m, v_m)$ est l'ensemble des polynômes par rapport à a et c composés de monômes dont le degré est un multiple de m. Il est facile d'en donner une présentation : elle est engendrée par les monômes $x_k = a^k c^{m-k}$, et elle est le quotient de l'algèbre associative libre $\mathbf{C} \cdot \langle x_0, \ldots, x_m \rangle$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments suivants :

$$\text{(VI.5)} \qquad \begin{cases} x_j x_i - x_i x_j \ \text{ pour } \ 0 \leq i < j \leq m \\ x_i x_j - x_0 x_{i+j} \ \text{ pour } \ 0 < i \leq j < m,\ i+j \leq m \\ x_i x_j - x_m x_{i+j-m} \ \text{ pour } \ 0 < i \leq j < m,\ i+j \geq m. \end{cases}$$

Ceci donne aussi les équations de l'orbite $\pi_m(G) \cdot v_m$ et, par ailleurs, montre que le noyau du morphisme $\otimes V_m^* \to \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V_m, \pi_m, v_m)$ est engendré par l'orthogonal dans $\otimes^2 V_m^*$ du sous-module de $\otimes^2 V_m$ engendré par $\otimes^2 v_m$.

2.8.2. *Cas de la représentation adjointe*

On prend ici $m = 2$, $v = v_1 = H$; l'algèbre $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)(\mathfrak{g}, Ad, v) = \mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)^{L(\mathfrak{h})}$ admet pour base les monômes $a^{m+n}b^m d^n$ avec $m, n \in \mathbf{N}$ et $a^m c^p d^{m+p}$ avec $m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}^*$. Il est facile d'en donner une présentation : elle est engendrée par les monômes $\alpha = ab$, $\beta = ad$, $\gamma = cd$ et elle est le quotient de $\mathbf{C} \cdot \langle \alpha, b, \gamma \rangle$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments suivants :

$$\text{(VI.6)} \qquad \begin{cases} \beta\alpha - \alpha\beta \\ \gamma\alpha - \alpha\gamma \\ \gamma\beta - \beta\gamma \\ \alpha\gamma - (\beta^2 - \beta). \end{cases}$$

Ceci donne l'équation de l'orbite $Ad\, G. \cdot v$, à savoir $x_1^2 - x_0 x_2 = 1$, et, par ailleurs, montre que le noyau du morphisme canonique $\otimes\mathfrak{g}^* \to \mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)(\mathfrak{g}, Ad, v)$ est engendré par $\wedge^2\mathfrak{g}^*$ et par l'élément $C - 1$ où C est le *Casimir déployé* :

$$C = v_1^* \otimes v_1^* - \frac{1}{2}(v_0^* \otimes v_2^* + v_2^* \otimes v_0^*).$$

3. Sous-algèbres de Poisson de $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$

3.1. La r-matrice classique

On appelle ainsi l'élément r de $\wedge^2\mathfrak{g}$ défini par

$$r = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta +} X_\alpha^0 \wedge Y_\alpha^0 = \frac{1}{2} \sum_{i<j} E_{i,j} \wedge E_{j,i}$$

(on a posé $u \wedge v = u \otimes v - v \otimes u$).
(Cet élément r s'obtient, par le procédé indiqué au § III.3.7, à partir d'une R-matrice quantique $\widetilde{R}$ dont on trouvera une forme explicite dans [37].)
Le 1-cocycle δ associé à r :

$$\delta(X) = (ad \otimes ad)(X) \cdot r$$

est donné par

$$\text{(VI.7)}\quad \delta(E_{i,j}) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } i = j \\ \frac{1}{2}E_{i,j} \wedge (E_{i,i} - E_{j,j}) - 2 \sum\limits_{i<k<j} E_{i,k} \wedge E_{k,j} \text{ si } i < j \\ \frac{1}{2}E_{i,j} \wedge (E_{j,j} - E_{i,i}) + 2 \sum\limits_{j<k<i} E_{i,k} \wedge E_{k,j} \text{ si } i > j. \end{cases}$$

3.2. Définition d'une deuxième relation d'ordre sur Δ^+

Nous utiliserons plus loin la relation d'ordre suivante, distincte de celle du § V.1.1.1 : étant donné des éléments α et α' de Δ^+ correspondant à des couples (i, j) et (i', j'), on écrira $\alpha \leq \alpha'$ si $i' \leq i$ et $j' \geq j$. La formule (VI.7) montre que $\delta(X_\alpha^0)$ est une somme de tenseurs $u_n \otimes v_n$ où, pour chaque n, u_n ou v_n est de la forme $X_{\alpha'}$ avec $\alpha' \leq \alpha$.

On a une propriété analogue pour $\delta(Y_\alpha^0)$.

3.3. Crochet de Poisson sur $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$

Pour $\varphi, \psi \in \mathcal{R}_{hol}(G)$ on pose

$$\{\varphi, \psi\} = \mu^0(((L \times L)(r) - (R \times R)(r)).(\varphi \otimes \psi))$$

où μ^0 désigne la multiplication $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G) \otimes \mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G) \to \mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$. On obtient ainsi un crochet de Poisson, dit de *Sklyanin-Drinfeld*, qui munit $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ d'une structure d'algèbre de Poisson : cela résulte du fait que l'application $\{\ ,\ \}$ s'obtient aussi par transposition à partir de l'application

$$\mathcal{U} \to \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} : u \to [\Delta(u), r].$$

(Voir aussi ci-dessous § 5.7.)

3.4. Stabilité par crochet de Poisson des sous-algèbres de la forme $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$

Lemme 3.4.1

On a, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)$ et $X \in \mathfrak{g}$

$$L(X)\cdot\{\varphi, \psi\} = \{L(X)\cdot\varphi, \psi\} + \{\varphi, L(X)\cdot\psi\} + \{\mu^0((L \times L)(\delta(X))\cdot(\varphi \otimes \psi)).$$

La démonstration est un simple calcul.

Proposition 3.4.2

Si $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, pour que $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$ soit stable par crochet de Poisson :

(i) *Il faut et il suffit que l'on ait*

$$\mu^0((L \times L)(\delta(X)) \cdot (\varphi \otimes \psi)) = 0 \tag{VI.8}$$

pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$, $X \in \mathfrak{a}$.

(ii) *Il suffit que l'on ait*

$$\delta(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{g}$$

et cette condition est aussi nécessaire si $\mathfrak{a}$ est le stabilisateur d'un vecteur d'une représentation de dimension finie.

(iii) *Il suffit que $\mathfrak{a}$ admette une base B formée de certains H_i, de certains X_α et de certains Y_α tels que*

$$\begin{aligned} X_\alpha \in B,\ \alpha' \leq \alpha \quad &\Rightarrow \quad X_{\alpha'} \in B \\ Y_\alpha \in B,\ \alpha' \leq \alpha \quad &\Rightarrow \quad Y_{\alpha'} \in B. \end{aligned}$$

(L'assertion (ii) est due à Semenov-Tian-Shanski [38].)

Démonstration

(i) résulte du lemme.

(ii) Suffisance : immédiat.

(iii) résulte de là et de (VI.7).

(ii) Nécessité : supposons qu'il existe $X \in \mathfrak{a}$ tel que $\delta(X)$ n'appartienne pas à $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{a}$ soit le stabilisateur G_v d'un vecteur v d'une représentation (V, π) ; notons E un supplémentaire de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ et écrivons $\delta(X) = \xi + \eta$ avec

$$\xi \in \wedge^2\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \otimes E + E \otimes \mathfrak{a}, \quad \eta \in \wedge^2 E,\ \eta \neq 0.$$

Notons p l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $T_v(\pi(G).v)$, espace tangent en v à son orbite; $(p \otimes p)(\eta)$ est un élément non nul de $\wedge^2 T_v(\pi(G) \cdot v)$; il existe donc des polynômes P et Q sur V tels que $\langle (p \otimes p)(\eta), P \otimes Q \rangle \neq 0$; posons

$$\varphi(g) = P(\pi(g) \cdot v),\ \psi(g) = Q(\pi(g) \cdot v);$$

alors φ et ψ appartiennent à $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$ et la fonction

$$\mu^0((L \times L)(\delta(X)) \cdot (\varphi \otimes \psi)) = \mu^0((L \times L)(\eta) \cdot (\varphi \otimes \psi))$$

prend au point I la valeur non nulle $\langle (p \otimes p)(\eta), P \otimes Q \rangle$.

3.4.3. *Exemples*

La sous-algèbre $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$ est stable par crochet de Poisson si $G = SL(2, \mathbf{C})$ ou si $\mathfrak{a}$ est de l'un des types suivants :

a) $\mathfrak{a}$ est de codimension 1 ;

b) $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r}$ ou $\mathfrak{g}'_{N_1,\ldots,N_r}$ (rappelons que les sous-algèbres $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r}$ sont exactement les centralisateurs des matrices diagonales rangées) ;

c) $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_+$ ou $\mathfrak{n}_-$;

d) $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{v_\lambda}$;

e) $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{g}}(E_{p,q})$ avec $p \neq q$;

f) $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{g}}(E_{1,2} + E_{2,3})$ et $G = SL(3, \mathbf{C})$.

Démonstration

a) est immédiat ; pour $G = SL(2, \mathbf{C})$, il suffit de considérer le cas où $\dim \mathfrak{a} = 1$, qui est immédiat.

Pour les cas b), c) et d), on utilise la proposition 3.4.2 (iii) ; pour le cas e), on utilise la proposition 3.4.2 (ii) et la description suivante de $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a} = \{X \in \mathfrak{g} \mid x_{i,p} = 0 \ \forall\, i \neq p,\ x_{q,j} = 0 \ \forall\, j \neq q,\ x_{p,p} = x_{q,q}\}.$$

Enfin le cas f) est analogue.

3.4.4. *Exemples*

La sous-algèbre $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$ n'est pas stable par crochet de Poisson si $\mathfrak{a}$ est l'un des types suivants :

g) $\mathfrak{a}$ est le centralisateur d'une matrice diagonale non rangée $H = \operatorname{diag}(h_1, \ldots, h_N)$;

h) $\mathfrak{a}$ est le centralisateur d'une matrice de Jordan $X = \sum\limits_{i=1}^{N-1} E_{i,i+1}$ et $N \geq 4$.

Démonstration

Cas g) : $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $x_{i,j} = 0$ si $h_i \neq h_j$; il existe p et q vérifiant

$$p+1 < q,\ h_p = h_q,\ h_r \neq h_p \text{ si } p < r < q;$$

d'après (VI.7), on a, modulo $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{g}$:

$$\delta(E_{p,q}) = -2 \sum_{p<r<q} E_{p,r} \wedge E_{r,q} \neq 0.$$

Cas h) : $\mathfrak{a}$ admet pour base $\xi_1, \ldots, \xi_{N-1}$ où $\xi_j = \sum\limits_{i=1}^{N-j} E_{i,i+j}$; prenant pour base d'un supplémentaire E de $\mathfrak{a}$ les éléments H_i, $E_{i,j}$ avec $i > j$ et $E_{i,j}$ avec $1 \leq i < j \leq N-1$, on voit facilement que $\delta(E_{1,N})$ a une composante non nulle dans $\wedge^2 E$.

3.5. Stabilité par crochet de Poisson des sous-algèbres de la forme $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(A)}$

Lemme 3.5.1

Soit A un sous-groupe fermé de G, $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie; on suppose

a) *que $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(\mathfrak{a})}$ est stable par crochet de Poisson*

b) *que A est engendré par sa composante neutre et par un sous-groupe A_0 de $H = \exp \mathfrak{h}$.*

Alors $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(A)}$ est stable par crochet de Poisson.

Démonstration

Cela résulte de la formule suivante (à rapprocher de celle du lemme 3.4.1) :

$$\begin{aligned} L(a) \cdot \{\varphi, \psi\} &= \{L(a) \cdot \varphi, L(a)\psi\} \\ &+ \mu^0((L \times L)((Ad \otimes Ad)(a) \cdot r - r) \cdot (L(a) \cdot \varphi \otimes L(a) \cdot \psi)) \end{aligned}$$

et du fait que, si $a \in H$, $(Ad \otimes Ad)(a) \cdot r = r$.

Proposition 3.5.2

Si A est de la forme G_{v_λ}, $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(A)}$ est stable par crochet de Poisson.

Cela résulte du lemme et du fait que $A = G'_{N_1,\ldots,N_r} \cdot N_+ \cdot H_0$ où $G'_{N_1,\ldots,N_r}$ et N_+ sont connexes.

3.6. Une sous-algèbre de la forme $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V, \pi, v)$ non stable par crochet de Poisson

On utilise les notations du § 2.8 avec $m = 3$, i.e. $G = SL(2, \mathbf{C})$, $V = V_3$, $\pi = \pi_3$, et on prend $v = v_2 = 3x^2y$. On a donc

$$\pi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot v = 3c^2dv_0 + c(3bc+2)v_1 + a(3bc+1)v_2 + 3a^2bv_3.$$

Le stabilisateur G_v est trivial, donc $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(G_v)} = \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$. La sous-algèbre $B = \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V, \pi, v)$ est engendrée par les quatre éléments suivants : $\varphi_0 = a^2b$, $\varphi_1 = a(3bc+1)$, $\varphi_2 = c(3bc+2)$, $\varphi_3 = c^2d$. On va vérifier que $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ n'appartient pas à B, ce qui montrera aussi que $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V, \pi, v)$ n'est pas égale à $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)^{L(G_v)}$.

On a $r = \frac{1}{2} X \wedge Y$ et

$$\{\varphi_0, \varphi_1\} = \mu^0((L \times L)(r) \cdot (\varphi_0 \otimes \varphi_1)) - \mu^0((R \times R)(r) \cdot (\varphi_0 \otimes \varphi_1));$$

le deuxième terme du second membre appartient à B parce que toute algèbre de la forme $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V, \pi, v)$ est invariante par les opérateurs $R(Z)$, $Z \in \mathfrak{g}$. Il suffit donc de montrer que le premier n'appartient pas à B. On a facilement

$$\mu^0((L \times L)(r) \cdot (\varphi_0 \otimes \varphi_1)) = 2a^3b.$$

Si cet élément appartient à B, on peut écrire, sous la condition $ad - bc = 1$,

$$a^3b = \sum_{m,n,p,q} \lambda_{m,n,p,q} \varphi_0^m \varphi_1^n \varphi_2^p \varphi_3^q;$$

lorsque $a \neq 0$ et $b = 1$, ceci s'écrit

$$a^3 = \sum_{m,n,p,q} \lambda_{m,n,p,q} a^{2m+n-q} c^{p+2q} (3c+1)^n (3c+2)^p (c+1)^q;$$

le second membre devant rester borné lorsque $c \to \infty$, le nombre

$$\sup\{n + 2p + 3q \mid \lambda_{m,n,p,q} \neq 0\}$$

est nul ; alors

$$a^3 = \sum_m \lambda_{m,0,0,0} a^{2m}$$

ce qui est absurde.

4. Quelques propriétés des bigèbres

Soit A une bigèbre complexe avec multiplication μ, unité 1, comultiplication Δ et coünité ε ; et soit μ_0 la multiplication du dual restreint A^0 de A ; nous écrirons aussi $\varphi\psi$ au lieu de $\mu^0(\varphi \otimes \psi)$.

Pour tout $a \in A$, on définit des opérateurs linéaires $L(a)$ et $R(a)$ dans A^0 par

$$\begin{aligned} \langle L(a) \cdot \varphi, b \rangle &= \langle \varphi, ba \rangle \\ \langle R(a) \cdot \varphi, b \rangle &= \langle \varphi, ab \rangle; \end{aligned}$$

ce sont des dérivations (resp. automorphismes) si a est primitif (resp. de type groupe, i.e. $\Delta(a) = a \otimes a$). Lorsque $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on retrouve les opérateurs L et R définis au § 2.3.

On a

$$L(a) \cdot \varphi\psi = \mu^0((L \times L)(\Delta(a)) \cdot (\varphi \otimes \psi)). \tag{VI.9}$$

Pour toute partie E de A on pose

$$(A^0)^{L(E)} = \{\varphi \in A^0 \mid L(a) \cdot \varphi = 0 \ \forall\, a \in E\}.$$

Le résultat suivant est immédiat :

Lemme

(i) *Pour que $(A^0)^{L(E)}$ soit une sous-algèbre de A^0, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\mu^0(((L \times L)(\Delta(a)) \cdot (\varphi \otimes \psi)) = 0 \qquad \forall\, \varphi, \psi \in (A^0)^{L(E)}\ , \ a \in E.$$

(ii) *Ceci a lieu en particulier si*

$$\Delta(E) \subset AE \otimes A + A \otimes AE.$$

5. Retour sur $\mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$

5.1. Généralités

L'algèbre $\mathcal{U}_h = \mathcal{U}_h(\mathfrak{g})$ étant définie comme au § V.1.2.1, on sait qu'il existe d'une part des isomorphismes de $\widetilde{\mathbf{C}}$-modules $\mathcal{U}_h \to \widetilde{\mathcal{U}}$ (cf. § V.1.2) et, d'autre part, des isomorphismes de $\widetilde{\mathbb{C}}$-algèbres $\mathcal{U}_h \to \widetilde{\mathcal{U}}$ où $\widetilde{\mathcal{U}}$ est muni de la déformation formelle constante de la multiplication de $\mathcal{U}$ (cf. théorème III.2.5.5) ; certaines des constructions qui suivent dépendent du choix de l'un ou l'autre de ces isomorphismes. Pour simplifier l'exposé, nous introduirons les terminologies suivantes.

5.2. Définitions

Nous appellerons *réalisation* d'un $\widetilde{\mathbb{C}}$-module V tout isomorphisme de $\widetilde{\mathbb{C}}$-modules $V \to \widetilde{V/hV}$ induisant l'identité au niveau de V/hV ; il en existe si et seulement si V est séparé, complet et sans torsion (lemme III.1.1.3).

Nous appellerons *trivialisation* d'une $\widetilde{\mathbb{C}}$-algèbre V toute réalisation de V transformant la multiplication de V en la déformation formelle constante de la multiplication de V/hV.

La réalisation de $\mathcal{U}_h$ construite au § V.1.2 dépend du choix de bases dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_h$; elle va nous permettre de considérer $\mathfrak{g}$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}_h$.

Proposition 5.3

Il existe des trivialisations $\Lambda : \mathcal{U}_h \to \widetilde{\mathcal{U}}$ ayant les propriétés suivantes :

(i) $\Lambda(H) = H \quad \forall\, H \in \mathfrak{h}$,

(ii) Λ ne modifie pas la coünité ε.

La démonstration utilise le lemme suivant, qui nous servira aussi plus loin.

Lemme 5.4

Soit (A, μ) une algèbre complexe, B et C des sous-algèbres de A vérifiant $B \subset C$ et $H^1(B, A/C) = 0$; $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ une déformation formelle de (A, μ) telle que $\widetilde{B}$ soit une sous-algèbre de $\widetilde{A}$; $\widetilde{T}$ un automorphisme du $\widetilde{\mathbb{C}}$-module $\widetilde{A}$ transformant $\widetilde{\mu}$ en la déformation formelle constante $\widetilde{\mu}'$ de μ avec $T_0 = \mathrm{id}_A$. Alors il existe un élément inversible $\widetilde{\alpha}$ de $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu}')$ tel que l'on ait $\alpha_0 = 1$ et $\mathrm{Ad}\,\widetilde{\alpha} \cdot (\widetilde{T}(\widetilde{B})) \subset \widetilde{C}$.

Démonstration

Notons π l'application canonique $A \to A/C$. On a par définition, pour $a_1, a_2 \in A$ et $n \in \mathbf{N}$

$$\sum_{p+q=n} (T_p(\mu_q(a_1, a_2)) - T_p(a_1).T_q(a_2)) = 0.$$

Prenant $n = 1$, on voit que $(\pi \circ T_1)|_B \in Z^1(B, A/C)$; il existe donc $\alpha_1 \in A$ tel que

$$T_1(b) - b\alpha_1 + \alpha_1 b \in C \qquad \forall\, b \in B.$$

On a alors

$$((1 + \alpha_1 h) \cdot \widetilde{T}(b) \cdot (1 + \alpha_1 h)^{-1} = T_1(b) - b\alpha_1 + \alpha_1 b \in C.$$

On peut donc supposer que $\widetilde{T}(b)_1 \in C$ pour tout $b \in B$. Alors $(\pi \circ T_2)|_B \in Z^1(B, A/C)$, et ainsi de suite.

5.5. Notation

Pour toute partie X d'une algèbre A, nous noterons $H^0(X, A)$ le centralisateur de X dans A.

5.6. Démonstration de la proposition

(i) On applique le lemme avec $A = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $B = \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, $H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{g}))$; on a bien $H^1(B, A/C) = 0$ parce que B est commutative et que A/C ne contient pas le B-module trivial. On prend pour $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu})$ la réalisation indiquée ci-dessus de $\mathcal{U}_h$. Le lemme montre qu'il existe une trivialisation Λ vérifiant $\Lambda(\mathfrak{h}) \subset (H^0(\mathcal{U}(\mathfrak{h}), \mathcal{U}(\mathfrak{g})))^{\sim}$; enfin on peut déduire de là que $\Lambda(H) = H \ \ \forall\, H \in \mathfrak{h}$ (cf. [17], proposition 4.3).

(ii) Ce résultat (non publié) m'a été communiqué par M. Gerstenhaber.

5.7. Dual restreint de $\mathcal{U}_h$

Le dual restreint $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ de $\mathcal{U}_h$ a été défini au § III.3.5.1 ; rappelons qu'on en obtient une réalisation de la façon suivante : on choisit une trivialisation de $\mathcal{U}_h$, soit $\Lambda : \mathcal{U}_h \to (\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}')$ où $\widetilde{\mu}'$ désigne la déformation formelle constante de la multiplication de $\mathcal{U}$; l'inverse de la transposée de Λ induit un isomorphisme de $\widetilde{\mathbf{C}}$-modules

$$\Psi : \overline{(\mathcal{U}_h)^0} \longrightarrow \overline{(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}')^0};$$

ensuite, utilisant le fait que toute représentation de rang fini de $(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}')$ est équivalente à la déformation formelle de sa composante de degré 0 (cf. § III.2.5.7), on voit facilement que $\overline{(\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu}')^0} = \widetilde{\mathcal{U}^0}$.

Enfin, si l'on note $\widetilde{\mu^0} = (\mu_n^0)_{n\in\mathbf{N}}$ la multiplication de $\widetilde{\mathcal{U}^0}$ transportée par Ψ de celle de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$, le crochet de Poisson $\mu_1^0 - \mu_1^0 \circ \sigma$ est identique à celui du § 3.3 : cela résulte de ce que l'élément r est construit à partir d'une R-matrice quantique associée à la déformation formelle de $\mathcal{U}^0$ (cf. § 3.1).

6. Déformations de sous-algèbres de $\mathcal{U}^0$

6.1. Généralités

Définition

Etant donnée une sous-algèbre B_0 de $\mathcal{U}^0 = \mathcal{R}_{\text{hol}}(G)$, nous dirons qu'une sous-algèbre B de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ est une *déformation formelle de B_0 au sein de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$* s'il existe une réalisation $\Psi : \overline{(\mathcal{U}_h)^0} \to \widetilde{\mathcal{U}^0}$ transformant B en l'ensemble $\widetilde{B_0}$ des éléments $\widetilde{\varphi} = (\varphi_n)$ tels que $\varphi_n \in B_0$ pour tout n.

Le résultat final du § 5.7 montre que, pour qu'il existe une telle sous-algèbre B, *il est nécessaire que B_0 soit stable par crochet de Poisson.*

Nous examinerons d'abord le cas où B_0 est de la forme $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$; le candidat naturel pour B est alors $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(\mathfrak{a})}$, expression qui a bien un sens puisque nous avons plongé, au § 5.2, $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{U}_h$ en tant que sous-espace vectoriel ; mais l'ensemble $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(\mathfrak{a})}$ n'est pas nécessairement une sous-algèbre de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ ni une déformation formelle de $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$.

Nous examinerons ensuite le cas des sous-algèbres B_0 de la forme $(\mathcal{U}^0)^{L(A)}$, et celui des sous-algèbres $\mathcal{R}_{\text{hol}}(G)(V, \pi, v)$, dans certains cas particuliers.

6.2. Cas des sous-algèbres de la forme $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$

On a d'abord le résultat suivant, analogue au lemme du § 4 :

Lemme 6.2.1

Pour que $((\overline{\mathcal{U}_h})^0)^{L(\mathfrak{a})}$ *soit une sous-algèbre de* $\overline{(\mathcal{U}_h)}^0$, *il suffit que l'on ait*

$$\Delta(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{U}_h \cdot \mathfrak{a} \otimes \mathcal{U}_h + \mathcal{U}_h \otimes \mathcal{U}_h \cdot \mathfrak{a}.$$

Lemme 6.2.2.

Pour tout $\alpha \in \Delta^+$, $\Delta(X_\alpha)$ *(resp.* $\Delta(Y_\alpha)$*) est somme de tenseurs de la forme* $u \otimes v$ *où* u *ou* v *est divisible à droite par un* $X_{\alpha'}$ *(resp.* $Y_{\alpha'}$*) avec* $\alpha' \leq \alpha$ *pour la relation d'ordre définie au § 3.2*

Démonstration

Par récurrence sur la longueur de α.

Corollaire 6.2.3

L'ensemble $((\overline{\mathcal{U}_h})^0)^{L(\mathfrak{a})}$ *est une sous-algèbre de* $\overline{(\mathcal{U}_h)}^0$ *si* $\mathfrak{a}$ *est de l'un des types suivants :*

a) $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r}$ *ou* $\mathfrak{g}'_{N_1,\ldots,N_r}$;

b) $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_+$ *ou* $\mathfrak{n}_-$;

c) $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{v_\lambda}$.

6.2.4. *Remarque*

L'ensemble $((\overline{\mathcal{U}_h})^0)^{L(\mathfrak{a})}$ n'est pas une sous-algèbre lorsque $G = SL(2, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{a} = \mathbf{C} \cdot (H - X + Y)$, bien que $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$ soit stable par crochet de Poisson (cf. § 3.4.3). En effet, en utilisant les formules (VI.1), (VI.2) et (VI.9), on voit que $L(H - X + Y)(a + b)$ et $L(H - X + Y)(c + d)$ sont nuls, mais que

$$L(H - X + Y) \cdot ((a + b)(c + d)) = (2 - q_0 - q_0^{-1})(ac - bd) \neq 0.$$

Lemme 6.2.5

Soit $\Lambda : \mathcal{U}_h \to \widetilde{\mathcal{U}}$ *une trivialisation de* $\mathcal{U}_h$ *telle que l'on ait* $\Lambda(\mathfrak{a}) \subset \widetilde{\mathcal{U}\mathfrak{a}}$. *Alors, notant* Ψ *l'inverse de la transposée de* Λ, *on a*

$$\Psi\left(((\overline{\mathcal{U}_h})^0)^{L(\mathfrak{a})}\right) = ((\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})})^{\sim}.$$

Démonstration

On a, par transport de structure,

$$\Psi\left(((\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(\mathfrak{a})}\right) = (\widetilde{\mathcal{U}^0})^{L(\Lambda(\mathfrak{a}))}$$

et l'on doit donc montrer qu'un élément $\widetilde{f} = (f_n)$ de $\widetilde{\mathcal{U}^0}$ est annulé par $L(\Lambda(\mathfrak{a}))$ si et seulement si tous les f_n sont annulés par $L(\mathfrak{a})$. On va démontrer la nécessité, la suffisance sera alors immédiate. Pour tout $\widetilde{u} = (u_n) \in \widetilde{\mathcal{U}}$ et tout $a \in \mathfrak{a}$ on a

$$\langle \widetilde{f}, \widetilde{u} \cdot \Lambda(a)\rangle = 0$$

i.e. pour tout n :

$$\sum_{p+q+r=n} \langle f_p, u_q \cdot \Lambda(a)_r\rangle = 0$$

(on rappelle que la multiplication de $\widetilde{\mathcal{U}}$ est la déformation formelle constante de celle de $\mathcal{U}$) ; prenant en particulier $u \in \mathcal{U}$, i.e. $u_q = 0 \;\forall q > 0$, on a

$$\sum_{p+r=n} \langle f_p, u \cdot \Lambda(a)_r\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N},\; u \in \mathcal{U},\; a \in \mathfrak{a}.$$

Prenant $n = 0$, comme $\Lambda(a)_0 = a$, on voit que f_0 est annulé par $L(\mathfrak{a})$; prenant ensuite $n = 1$, comme $\Lambda(a)_1 \in \mathcal{U}\mathfrak{a}$, on voit immédiatement que f_1 est annulé par $L(\mathfrak{a})$; et ainsi de suite.

Théorème 6.2.6

L'ensemble $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(\mathfrak{a})}$ est une sous-algèbre de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ et une déformation formelle de $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$ au sein de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ si $\mathfrak{a}$ est de l'un des types considérés au corollaire 6.2.3.

Démonstration

Cas a). Considérons d'abord le cas de $\mathfrak{g}'_{N_1,\dots,N_r}$ que nous noterons $\mathfrak{g}'$; on applique le lemme 6.2.5 en construisant d'abord une trivialisation Λ envoyant $\mathfrak{g}'$ dans $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}')^+)^\sim$(on a noté $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')^+$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ sans terme constant). Pour cela on part de la réalisation $\mathcal{U}_h \to \widetilde{\mathcal{U}}$ construite au § V.1.2, qu'on note R; ici $\widetilde{\mathcal{U}}$ est muni d'une certaine multiplication $\widetilde{\mu}$ et il est facile de voir que $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}'))^\sim$ en est une sous-algèbre. On applique ensuite le lemme 5.4 avec $(\widetilde{A}, \widetilde{\mu}) = (\widetilde{\mathcal{U}}, \widetilde{\mu})$, $B = C =$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ et en prenant pour $\widetilde{T}$ la composée de R^{-1} avec une trivialisation Π de $\mathcal{U}_h$ ayant les propriétés de la proposition 5.3. Posant alors $\Lambda = Ad\,\widetilde{\alpha}\circ\Pi$, on a bien $\Lambda(\mathfrak{g}') \subset (\mathcal{U}(\mathfrak{g}')^+)^\sim$.

Considérons maintenant le cas de $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r}$; $\mathfrak{a}$ est somme directe de $\mathfrak{g}'$ et d'une sous-algèbre $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{h}$ commutant avec $\mathfrak{g}'$, ce que nous écrirons $\mathfrak{h}_0 \subset H^0(\mathfrak{g}',\mathcal{U})$. Posons $\widetilde{S} = Ad\,\widetilde{\alpha}\circ\widetilde{T}$; on vérifie facilement que

$$\widetilde{S}(\mathfrak{h}_0) \subset \left(H^0(\mathfrak{g}',\mathcal{U}(\mathfrak{g}))\right)^\sim;$$

on peut alors appliquer le lemme 5.4. avec

$$\begin{aligned} A &= H^0(\mathfrak{g}',\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \\ B &= \mathcal{U}(\mathfrak{h}_0) \\ C &= H^0(\mathfrak{h}_0, H^0(\mathfrak{g}',\mathcal{U}(\mathfrak{g}))) \\ \widetilde{T} &= \widetilde{S}; \end{aligned}$$

il existe donc $\widetilde{\beta} \in (H^0(\mathfrak{g}',\mathcal{U}(\mathfrak{g})))^\sim$ vérifiant $\beta_0 = 1$ et

$$(Ad\,\widetilde{\beta})\cdot(\widetilde{S}(\mathfrak{h}_0)) \subset (H^0(\mathfrak{h}_0, H^0(\mathfrak{g}',\mathcal{U}(\mathfrak{g}))))^\sim$$

alors $Ad\,\widetilde{\beta}\circ\widetilde{S}$ envoie $\mathfrak{h}_0$ dans $(\mathcal{U}(\mathfrak{h}_0))^\sim$ (cf. [17], proposition 4.3) et $\mathfrak{g}'$ dans $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}'))^\sim$ parce que $\widetilde{\beta}$ commute à cet ensemble.

Cas b). On utilise le lemme 6.2.5 en prenant une trivialisation Λ vérifiant $\Lambda(H) = H$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$; on doit donc prouver que $\Lambda(\mathfrak{n}_+)$ est inclus dans $(\mathcal{U}\cdot\mathfrak{n}_+)^\sim$. Pour tout $\alpha \in \Delta^+$, $\Lambda(X_\alpha)$ est une combinaison linéaire sur $\widetilde{\mathbf{C}}$ de monômes ordonnés (dans $\mathcal{U}$)

$$\xi = Y^0_{\alpha_1}\cdots Y^0_{\alpha_m}\cdot H_{i_1}\cdots H_{i_n}\cdot X^0_{\beta_1}\ldots X^0_{\beta_p}$$

(cf. § V.1.1.5). Ecrivant

$$\Lambda([H,X_\alpha]) = [\Lambda(H),\Lambda(X_\alpha)]$$

où les crochets de gauche et de droite sont calculés respectivement dans $\mathcal{U}_h$ et dans $\widetilde{\mathcal{U}}$, on s'aperçoit que chacun des ξ ci-dessus non nuls contient au moins un X_β.

Cas c). Il résulte des cas précédents et du fait que

$$\mathfrak{g}_{v_\lambda} = \mathfrak{g}'_{N_1,\ldots,N_r} + \mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h}_0.$$

6.2.7. *Exemple*

On prend $G = SL(2, \mathbf{C})$, $\mathfrak{a} = Z_{\mathfrak{g}}(H) = \mathbf{C} \cdot H$; l'algèbre $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$ est engendrée par les coefficients $\Phi^{\pi_2}_{v_k^*, v_1}$ où π_2' est la représentation de $\mathcal{U}_h$ correspondant à π_2. Pour cela on construit une application $T : V_2 \to V_1 \otimes V_1$ entrelaçant les représentations π_2' et $\pi_1' \otimes \pi_1'$ de $\mathcal{U}_h$:

$$T(v_2) = e_0 \otimes e_0,\ T(v_1) = q_0 e_1 \otimes e_0 + q_0^{-1}\, e_0 \otimes e_1,\ T(v_0) = e_1 \otimes e_1$$

où (e_0, e_1) est la base canonique de $\mathbf{C}^2$; on en déduit que

$$\begin{aligned}
\Phi^{\pi_2}_{v_2^*, v_1} &= q_0(q + q^{-1})ab \\
\Phi^{\pi_2}_{v_1^*, v_1} &= (q^2 + 1)ad - q^2\varepsilon \\
\Phi^{\pi_2}_{v_0^*, v_1} &= q_0(q + q^{-1})cd.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, utilisant la base de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ formée des éléments $a^m b^n d^p$ et $a^m c^n d^p$ et le fait que H est primitif, on vérifie sans peine que l'algèbre $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(\mathfrak{a})}$ est aussi engendrée par les éléments ab, ad, cd. Enfin, on peut démontrer que les relations (VI.6) se déforment comme suit :

$$\begin{array}{l}
\beta\alpha - q^2\alpha\beta + (q^2 - 1)\alpha \\
\gamma\alpha - q^4\alpha\gamma + q(q^2 - 1)(\beta - \varepsilon) \\
\gamma\beta - q^2\beta\gamma + (q^2 - 1)\gamma \\
\alpha\gamma - q^1(\beta^2 - \beta).
\end{array}$$

6.2.8. *Remarque*

Les déformations formelles des sous-algèbres de la forme $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$ avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{N_1,\ldots,N_r}$ ont été étudiées dans [14].

6.3. Cas des sous-algèbres de la forme $(\mathcal{U}^0)^{L(A)}$

Théorème 6.3.1

Soit A un sous-groupe de Lie de G, $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie. On suppose

a) *que $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(\mathfrak{a})}$ et une sous-algèbre de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ est une déformation formelle de $(\mathcal{U}^0)^{L(\mathfrak{a})}$ au sein de $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$*

b) *que A est engendré par sa composante neutre et par un sous-groupe A_0 de $H = \exp \mathfrak{h}$.*

Alors
(i) A_0 *opère naturellement par automorphismes dans* $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$
(ii) $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(a)} \cap (\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(A)}$ *est une sous-algèbre de* $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ *et une déformation formelle de* $(\mathcal{U}^0)^{L(A)}$ *au sein de* $\overline{(\mathcal{U}_h)^0}$ *; nous la noterons* $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(A)}$.

Démonstration

(i) Soit Λ une trivialisation induisant l'identité sur $\mathfrak{h}$; définissons Ψ comme au § 5.7 ; pour tout $\varphi \in \overline{(\mathcal{U}_h)^0}$, $\Psi(\varphi)$ a des composantes $\Psi(\varphi)_n$ dans $\mathcal{U}^0$ et on a

$$\Psi(L(X)\cdot\varphi)_n = L(X)\cdot\Psi(\varphi)_n \qquad \forall\, X \in \mathfrak{h}.$$

Ceci montre que la série $\exp L(X)\cdot\varphi$ converge ; on peut la noter $L(a)\cdot\varphi$ en posant $a = \exp X$; $L(a)$ est un automorphisme puisque $L(X)$ est une dérivation.

(ii) est maintenant immédiat.

6.3.2. *Exemples*

Le théorème précédent s'applique en particulier au cas où A est de la forme G_{v_λ} (cf. § 2.7.2) ; mais dans ce cas on peut construire la déformation formelle de l'algèbre $(\mathcal{U}^0)^{L(A)}$ d'une autre façon, comme déformation formelle de $\mathcal{R}_{\mathrm{hol}}(G)(V_\lambda, \pi_\lambda, v_\lambda)$ (c'est le point de vue adopté dans [40], où l'on conjecture aussi que l'algèbre déformée est quadratique). En effet, notons $(V'_\lambda, \pi'_\lambda)$ la représentation de $\mathcal{U}_h$ corresponant à (V_λ, π_λ) ; V'_λ contient un unique (à un facteur près) vecteur dominant v'_λ ; notons

$$\Phi^{\pi'_\lambda}_{v'_\lambda} : \widetilde{V^*_\lambda} \to \overline{(\mathcal{U}_h)^0} \quad \text{et} \quad E'_\lambda = \operatorname{Im}\Phi^{\pi'_\lambda}_{v'_\lambda}$$

les objets analogues à $\Phi^{\pi_\lambda}_{v_\lambda}$ et E_λ définis au § 2.7.3 ; on a encore $E'_\lambda \cdot E'_\mu \subset E'_{\lambda+\mu}$, de sorte que la sous-algèbre $\mathcal{A}_\lambda$ fermée engendrée par E'_λ est l'adhérence de la somme directe des $E'_{n.\lambda}$. On va prouver que $\mathcal{A}_\lambda = (\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(A)}$. Les raisonnements faits au § 6.2.6 montrent qu'il existe une trivialisation $\Lambda : \mathcal{U}_h \to \widetilde{\mathcal{U}}$ telle que l'inverse de sa transposée envoie $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(A)}$ sur $((\mathcal{U}^0)^{L(A)})\tilde{}$; nous identifierons $\mathcal{U}_h$ à $\widetilde{\mathcal{U}}$. Par ailleurs, puisque toute représentation de rang fini de $\widetilde{\mathcal{U}}$ est équivalente à la déformation formelle constante de sa composante de degré 0, on peut supposer que π'_λ est la déformation formelle constante de π_λ et que $v'_\lambda = v_\lambda$; alors $E'_\lambda = \widetilde{E_\lambda}$ et

$$\mathcal{A}_\lambda = (\mathcal{F}(G)(V_\lambda, \pi_\lambda, v_\lambda))^{\sim} = ((\mathcal{U}^0)^{L(A)})^{\sim} = (\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(A)}.$$

6.3.3. *Exemple*

Lorsque π_λ est la représentation naturelle de $SL(N, \mathbf{C})$ dans $\mathbf{C}^N$ et que v_λ est le premier vecteur de base de $\mathbf{C}^N$, $(\overline{(\mathcal{U}_h)^0})^{L(A)}$ est engendrée par $\rho_{1,1}, \rho_{2,1}, \ldots, \rho_{N,1}$ avec les relations $\rho_{j,1}\rho_{i,1} - q\rho_{i,1}\rho_{j,1}$ pour $i < j$; c'est l'*espace quantique de Manin.*

6.3.4. *Exemple*

Prenons $G = SL(2, \mathbf{C})$ et utilisons les notations du § 2.8. On peut démontrer que les relations (VI.5) se déforment comme suit :

$$\begin{cases} x_j x_i - q^{(j-i)m} x_i x_j \text{ pour } 0 \le i < j \le m \\ x_i x_j - q^{i(m-j)} x_0 x_{i+j} \text{ pour } 0 < i \le j < m,\ i+j \le m \\ x_i x_j - q^{i(m-j)} x_m x_{i+j-m} \text{ pour } 0 < i \le j < m,\ i+j \ge m. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge University Press, 1977.

[2] H. H. Andersen, P. Polo, W. Kexin, *Representations of Quantum Algebras*, Invent. Math. **104** (1991), 1–59.

[3] N. Andruskiewitsch, *Some Exceptional Compact Matrix Pseudogroups*, Bull. Soc. Math. France **120** (1992), 297–325.

[4] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization, I, II*, Ann. Physics **111** (1978), 61–110 et 111–151.

[5] G. M. Bergman, *The Diamond Lemma for Ring Theory*, Adv. in Math. **29** (1978), 178–218.

[6] A. Bialynicki-Birula, *On homogeneous affine spaces of linear algebraic groups*, Amer. J. Math. **85** (1963), 577–582.

[7] W. Borho, H. Kraft, *Uber Bahnen und deren Deformationen bei linearen Aktionen reduktiver Gruppen*, Comment. Math. Helv. **54** (1979), 61–104.

[8] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie, chapitres VII et VIII*, Masson.

[9] T. Bröcker, T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups*, Graduate Texts in Math. n° 98, Springer, 1985.

[10] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[11] V. Chari, A. N. Pressley, *A guide to Quantum groups*, Cambridge University Press, 1994.

[12] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974.

[13] J. Donin, D. Gurevich, *Quasi-Hopf algebras and R-matrix structures in line bundles over flag manifolds*, Selecta Math. **12** (1993), 37–48.

[14] J. Donin, D. Gurevich, *Some Poisson structures associated to Drinfeld-Jimbo R-matrices and their quantization*, à paraître.

[15] J. Donin, D. Gurevich, *Braiding of the Lie algebra* $\mathfrak{sl}(2)$, à paraître.

[16] V. G. Drinfeld, *Quantum Groups*, Proc. ICM, Berkeley **1** (1986), 798–820.

[17] V. G. Drinfeld, *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 321–342.

[18] M. Gerstenhaber, *On the Deformations of Rings and Algebras*, Annals of Math. **79** (1964), 59–103.

[19] M. Gerstenhaber, S. D. Schack, *Bialgebra Cohomology, Deformations and Quantum Groups*, Contemporary Math. **134** (1992), 51–92.

[20] A. Guichardet, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Cedic-Nathan, 1980.

[21] A. Guichardet, *Leçons sur certaines algèbres topologiques, Partie 3*, Gordon and Breach, 1967.

[22] D. Gurevich, *Braided vector fields over quantum orbits*, à paraître.

[23] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1962.

[24] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, II*, Grundlehren n° 152, Springer, 1970.

[25] G. Hochschild, *The structure of Lie groups*, Holden-Day, 1965.

[26] J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Math. n° 21, Springer.

[27] M. Jimbo, *A q-difference Analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter Equation*, Letters Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[28] M. Jimbo, *A q-analogue of $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke Algebra and the Yang-Baxter Equation*, Letters Math. Phys. **11** (1986), 247–252.

[29] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **86** (1963), 327–402.

[30] J. L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France **78** (1950), 65–127.

[31] H. Kraft, C. Procesi, *Closures of conjugacy classes of matrices are normal*, Invent. Math. **53** (1979), 227–247.

[32] G. Lancaster, J. Towber, *Representation functors and flag algebras for the classical groups I*, J. Algebra **59** (1979), 16–38.

[33] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.

[34] M. Naïmark, A. Stern, *Théorie des Représentations des Groupes*, MIR, Moscou, 1979.

[35] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 193–225.

[36] M. Rosso, *Finite Dimensional Representations of the Quantum Analogue of the Enveloping Algebra of a Complex Simple Lie Algebra*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 581–593.

[37] M. Rosso, *Analogue of PBW-theorem and the Universal R-matrix for $\mathcal{U}_h(\mathfrak{sl}(N+1))$*, Comm. Math. Phys. **124** (1989), 307–318.

[38] M. A. Semenov-Tian-Shanski, *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. RIMS, Kyoto **21**, 1237–1260.

[39] S. Shnider, S. Sternberg, *Quantum groups*, International Press, 1994.

[40] Ya. S. Soibelman, *On the quantum flag manifold*, Funct. Anal. and its Appl. **26** (1993), 225–227.

[41] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, Springer, 1979.

[42] E. B. Vinberg, V. L. Popov, *Sur une classe de variétés affines quasi-homogènes*, Izvestia Akad. Nauk. **36** (1972), 749–764 (en russe).

[43] G. Warner, *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups, I*, Springer, 1972.

[44] S. L. Woronowicz, *Compact Matrix Pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 613–665.

Index terminologique

Index des notations