

# Physique des plasmas

## 2

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

Jean-Loup Delcroix  
*Université Paris-Sud, Orsay*  
*École Supérieure d'Électricité, Gif-sur-Yvette*

Abraham Bers  
*Department of Electrical Engineering*  
*and Computer Science (M.I.T.), Cambridge, États-Unis*  
*Plasma Fusion Center (M.I.T.), Cambridge, États-Unis*  
*Research Laboratory of Electronics (M.I.T.), Cambridge, États-Unis*

# Physique des plasmas

## 2

S A V O I R S   A C T U E L S

---

InterÉditions / CNRS Éditions

Dessin de couverture : représentation de la couronne solaire

© 1994, **InterEditions**, 7, rue de l'Estrapade, 75005 Paris  
et  
**CNRS Editions**, 20/22, rue Saint-Amand, 75015 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle).

Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. 43.26.95.35.

**ISBN 2-7296-0500-2**

**ISBN 2-271-05127-4**



# Table des matières

Avant-propos . . . . .	XXI
Notations . . . . .	XXV
<b>8 Équations cinétiques</b>	<b>1</b>
8.1 Introduction . . . . .	1
8.2 Équation de Liouville d'un gaz pur . . . . .	3
8.2.1 Densité dans l'espace des phases . . . . .	3
8.2.2 Équation de Liouville pour des variables conjuguées	5
8.2.3 Système sans interactions dépendant de la vitesse . .	6
8.2.4 Application aux plasmas . . . . .	7
8.3 Système d'équations de BBGKY . . . . .	9
8.3.1 Fonction de distribution et densité simples . . . . .	9
8.3.2 Fonction de distribution et densité doubles . . . . .	10
8.3.3 Fonctions de distribution et densités multiples . . . .	12
8.3.4 Système d'équations de BBGKY . . . . .	12
8.4 Équations cinétiques d'un gaz pur . . . . .	15
8.4.1 Équation de Liouville à une particule . . . . .	15
8.4.2 Équation de Vlasov . . . . .	16
8.4.3 Équation de Boltzmann . . . . .	17
8.4.4 Propriétés de l'équation de Boltzmann . . . . .	23
8.5 Équations cinétiques des mélanges . . . . .	27
8.5.1 Fonctions de distribution . . . . .	27
8.5.2 Équations cinétiques . . . . .	28
8.6 Théorie des gaz réactifs (effets des collisions inélastiques) .	29
8.6.1 Introduction des collisions inélastiques . . . . .	29
8.6.2 Collisions du type 12/34. Équation de Boltzmann . .	29
8.6.3 Collisions 12/14 et 12/114 avec $m_1 \ll m_2, m_4$ . . . .	31
8.7 Appendices . . . . .	32
A8-1 Particules chargées dans un champ électro-magnéti- que . . . . .	32

A8-2	Équation d'évolution de $f_1$ . . . . .	34
A8-3	Régime de fluide. Régime moléculaire . . . . .	36
A8-4	Notions sur la théorie cinétique des gaz réactifs . . . . .	37
8.8	Problèmes . . . . .	40
P8-1	Structure des corrélations à l'équilibre thermodynamique . . . . .	40
P8-2	Corrélations dans un plasma à l'équilibre thermodynamique . . . . .	41
P8-3	Invariants intégraux de l'équation de Boltzmann . . . . .	42
P8-4	Solution générale maxwellienne déplacée . . . . .	42
<b>9</b>	<b>Hydrodynamique et magnétohydrodynamique</b> . . . . .	<b>43</b>
9.1	Introduction . . . . .	43
9.2	Équations hydrodynamiques d'un gaz pur . . . . .	44
9.2.1	Définitions des grandeurs hydrodynamiques . . . . .	44
9.2.2	Équation de transport d'une grandeur $A(\vec{r}, \vec{w}, t)$ . . . . .	47
9.2.3	Propriétés des termes d'interaction $C(A)$ . . . . .	49
9.2.4	Les trois équations fondamentales de conservation . . . . .	50
9.2.5	Équation de transport des moments d'ordre 2 . . . . .	53
9.2.6	Fermeture du système des équations hydrodynamiques . . . . .	54
9.3	Hydrodynamique des mélanges gazeux et des plasmas . . . . .	57
9.3.1	Variables partielles et variables globales . . . . .	57
9.3.2	Propriétés des termes d'interaction . . . . .	59
9.3.3	Conservation de la masse et de l'électricité . . . . .	60
9.3.4	Conservation de la quantité de mouvement globale . . . . .	61
9.3.5	Loi d'Ohm généralisée . . . . .	62
9.4	Notions de magnétohydrodynamique . . . . .	65
9.4.1	Liquides conducteurs . . . . .	66
9.4.2	Gaz faiblement ionisés . . . . .	73
9.4.3	Gaz totalement ionisés . . . . .	75
9.5	Confinement et diamagnétisme . . . . .	77
9.5.1	Confinement magnétique d'un plasma . . . . .	77
9.5.2	Diamagnétisme d'un plasma . . . . .	79
9.5.3	Vitesses macroscopiques et vitesses de dérives des particules . . . . .	80
9.6	Effets des collisions inélastiques . . . . .	83
9.7	Appendices . . . . .	84
A9-1	Termes d'interaction dans les équations de transport . . . . .	84
A9-2	Équations de transport des moments d'ordre 2 . . . . .	92
A9-3	Compressions adiabatiques sans collisions . . . . .	93
A9-4	Loi d'Ohm dans les plasmas complexes . . . . .	97
9.8	Problèmes . . . . .	100

P9-1	Équation d'évolution de $U_P$ . . . . .	100
P9-2	Décomposition de $f_{12}$ en trois termes . . . . .	100
P9-3	Hydrodynamique des corrélations . . . . .	100
P9-4	Loi d'Ohm pour un plasma binaire . . . . .	101
P9-5	Courant de déplacement négligeable . . . . .	101
<b>10</b>	<b>Théorie cinétique de Vlasov-Landau</b> . . . . .	<b>103</b>
10.1	Introduction . . . . .	103
10.2	Modèle de Vlasov-Maxwell . . . . .	107
10.2.1	Réversibilité par rapport au temps . . . . .	108
10.2.2	Incompressibilité dans l'espace des phases . . . . .	108
10.2.3	Conservation de l'entropie . . . . .	118
10.2.4	Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement . . . . .	120
10.3	Dynamique électrostatique, linéarisée, à une dimension . . . . .	122
10.3.1	Solution des équations linéarisées par transformation de Fourier-Laplace . . . . .	123
10.3.2	Perturbations périodiques dans l'espace . . . . .	131
10.3.3	Excitation externe d'un plasma stable . . . . .	139
10.3.4	Modes naturels faiblement croissants ou décroissants . . . . .	145
10.3.5	Énergie d'onde et puissance dissipée dans l'effet Landau . . . . .	148
10.3.6	Ondes électrostatiques dans un plasma maxwellien . . . . .	155
10.4	Plasmas non magnétisés sans champ . . . . .	164
10.4.1	Formules générales . . . . .	164
10.4.2	Distributions d'équilibre isotropes . . . . .	166
10.5	Modes de van Kampen et Case . . . . .	175
10.6	Effets collisionnels . . . . .	180
10.6.1	Collisions dans la dynamique linéarisée . . . . .	180
10.6.2	Modèle simple de relaxation par collisions . . . . .	181
10.6.3	Modèle BGK de collisions . . . . .	182
10.6.4	Modèles de collisions du type Fokker-Planck . . . . .	183
10.7	Effets non linéaires . . . . .	188
10.7.1	Piégeage des particules . . . . .	189
10.7.2	Paquets d'ondes et diffusion quasi linéaire . . . . .	195
10.7.3	Couplages non linéaires onde-onde et onde-particules. Ondes non linéaires . . . . .	206
10.7.4	Échos d'ondes de plasma . . . . .	216
10.8	Appendice . . . . .	218
A10-1	Fonction de dispersion des plasmas . . . . .	218
10.9	Problèmes . . . . .	222
P10-1	Écoulement libre et équations hydrodynamiques . . . . .	222

P10-2	Écoulement libre avec des perturbations initiales générales . . . . .	223
P10-3	Distribution d'équilibre dans un plasma inhomogène	223
P10-4	Conservation non relativiste de l'énergie et de la quantité de mouvement . . . . .	224
P10-5	Solution par la méthode des caractéristiques . . . . .	224
P10-6	Plasma de Lorentz-Cauchy : susceptibilité . . . . .	224
P10-7	Plasma de Lorentz-Cauchy : réponse aux conditions initiales . . . . .	225
P10-8	Instabilité faisceau d'électrons-plasma : solutions ap- prochées . . . . .	225
P10-9	Flux d'énergie moyen pour les ondes . . . . .	225
P10-10	Développement asymptotique de la susceptibilité pour $v_p \gg v_{Te}$ . . . . .	226
P10-11	Champs dans les ondes longitudinales faiblement amorties . . . . .	226
P10-12	Coupage relativiste de l'amortissement de Landau .	226
P10-13	Propriétés des racines de la relation de dispersion des ondes de plasma électroniques . . . . .	227
P10-14	Tenseur de susceptibilité pour un plasma isotrope, non magnétisé . . . . .	227
P10-15	Épaisseur de peau collisionnelle . . . . .	228
P10-16	Analogie du champ électrique pour la résolution de la relation de dispersion de Vlasov . . . . .	228
P10-17	Orthogonalité des fonctions propres de Case . . . . .	228
P10-18	Modèle BGK de collisions : relation de dispersion .	229
P10-19	Relaxation dans le modèle de collisions de Lenard- Bernstein . . . . .	229
P10-20	Diffusion quasi linéaire dans l'approximation des phases aléatoires . . . . .	229
P10-21	Puissance dissipée dans un état stationnaire produit par la diffusion quasi linéaire et les collisions . . . . .	230
P10-22	Création de courant dans un plasma . . . . .	230
P10-23	Relations de Manley-Rowe pour les couplages cohérents onde-onde . . . . .	230
P10-24	Équations des ondes couplées dans l'approximation des phases aléatoires . . . . .	230
<b>11</b>	<b>Théorie cinétique des instabilités dans les plasmas non magnétisés</b>	<b>231</b>
11.1	Introduction . . . . .	231
11.2	Conditions de stabilité de Newcomb-Gardner . . . . .	232

11.2.1	Perturbations quelconques . . . . .	232
11.2.2	Perturbations électrostatiques . . . . .	236
11.3	Critères de Penrose (perturbations électrostatiques) . . . . .	241
11.3.1	Généralités . . . . .	241
11.3.2	Méthode de Nyquist . . . . .	242
11.3.3	Critères de Penrose . . . . .	244
11.3.4	Plasma équivalent à un faisceau . . . . .	248
11.3.5	Distributions unidimensionnelles à un minimum . . . . .	251
11.4	Théorie cinétique des instabilités électromagnétiques . . . . .	272
11.4.1	Discussion générale . . . . .	272
11.4.2	Distributions anisotropes symétriques perpendiculairement à $\vec{k}$ . . . . .	274
11.5	Problèmes . . . . .	283
P11-1	Non-unicité de l'équation de conservation de l'énergie de perturbation . . . . .	283
P11-2	Équation de conservation au second ordre par rapport aux champs . . . . .	283
P11-3	Équation de conservation de l'énergie de perturbation moyennée sur l'espace, pour des distributions isotropes . . . . .	283
P11-4	Conditions nécessaires et suffisantes de Penrose pour l'instabilité électrostatique . . . . .	284
P11-5	Ondes faiblement amorties sur un faisceau maxwellien d'électrons . . . . .	284
P11-6	Interaction faisceau d'électrons-plasma : faisceau chaud et plasma froid . . . . .	284
P11-7	Faisceaux d'électrons opposés maxwelliens . . . . .	284
P11-8	Conditions d'existence de modes indépendants transverses électromagnétiques et longitudinaux électrostatiques . . . . .	285
P11-9	Relation de dispersion électrostatique pour des distributions anisotropes . . . . .	285
P11-10	Modes TEM pour des distributions isotropes perpendiculairement à $\vec{k}$ . . . . .	285
P11-11	Modes TEM pour des distributions isotropes . . . . .	285
P11-12	Faisceaux opposés avec anisotropies de températures : relations de dispersion TEM . . . . .	285
P11-13	Instabilité de Weibel : effet de l'élargissement thermique dans la direction de $\vec{B}_1$ . . . . .	286

<b>12 Théorie cinétique des gaz faiblement ionisés</b>	<b>287</b>
12.1 Introduction . . . . .	287
12.2 Gaz de Lorentz électrons-neutres . . . . .	289
12.2.1 Couplages électrons-ions-neutres . . . . .	289
12.2.2 Modèle de Lorentz électrons-neutres . . . . .	290
12.3 Relaxation des anisotropies électroniques . . . . .	292
12.3.1 Définition des fréquences de relaxation . . . . .	292
12.3.2 Données théoriques sur les fréquences de relaxation . . . . .	295
12.3.3 Données expérimentales sur les fréquences de relaxation . . . . .	296
12.4 Conductivité sans échauffement des électrons . . . . .	297
12.4.1 Approximation des champs faibles . . . . .	297
12.4.2 Tenseur de conductivité électronique . . . . .	299
12.5 Échauffement du gaz d'électrons : effet Joule . . . . .	302
12.5.1 Expression de la partie isotrope de $f$ . . . . .	302
12.5.2 Effet Joule . . . . .	305
12.6 Refroidissement des électrons par collisions élastiques . . . . .	306
12.6.1 Modèle de Lorentz imparfait . . . . .	306
12.6.2 Relaxation de la partie isotrope de $f$ . . . . .	307
12.7 Équilibre effet Joule-refroidissement par collisions . . . . .	309
12.7.1 Méthode quasi linéaire. Formule de Margenau en HF . . . . .	309
12.7.2 Formule de Margenau pour les champs continus et BF . . . . .	311
12.7.3 Discussion de la formule de Margenau . . . . .	312
12.7.4 Mobilité électronique. Loi de similitude . . . . .	314
12.8 Diffusion libre des électrons . . . . .	315
12.8.1 Formules générales . . . . .	315
12.8.2 Détermination de $\alpha_o$ . . . . .	318
12.8.3 Flux et coefficients de diffusion . . . . .	321
12.8.4 Flux d'énergie et conductivité thermique . . . . .	323
12.9 Plasmas intermédiaires . . . . .	325
12.9.1 Définition des plasmas "intermédiaires" . . . . .	325
12.9.2 Théorie cinétique des plasmas intermédiaires . . . . .	329
12.10 Appendices . . . . .	330
A12-1 Anisotropies et hydrodynamique . . . . .	330
A12-2 Développement de l'équation de Boltzmann . . . . .	335
A12-3 Formule de Chapman et Cowling . . . . .	339
12.11 Problèmes . . . . .	340
P12-1 Règle de sélection pour le terme de diffusion . . . . .	340
P12-2 Terme de diffusion dans l'approximation linéaire . . . . .	340
P12-3 Règle de sélection pour les termes électriques . . . . .	340

P12-4	Terme électrique dans l'approximation linéaire . . .	341
P12-5	Terme magnétique . . . . .	341
P12-6	Effet Joule en présence d'un champ magnétique . . .	341
P12-7	Normalisation de la formule de Margenau . . . . .	341
P12-8	Champ critique en présence d'un champ magnétique	342
P12-9	Distribution de Druyvesteyn . . . . .	342
P12-10	Fréquences de collisions moyennes pour la mobilité et la diffusion . . . . .	342
P12-11	Plasmas intermédiaires : mobilité et température électroniques . . . . .	343
P12-12	Diffusion dans les plasmas intermédiaires . . . . .	343
<b>13</b>	<b>Théorie cinétique collisionnelle des plasmas</b>	<b>345</b>
13.1	Introduction . . . . .	345
13.2	Étude préliminaire des collisions électron-ion . . . . .	347
13.2.1	Relaxation électrons-ions. Coupure de Debye . . . . .	347
13.2.2	Coupure à la longueur de Debye . . . . .	348
13.3	Coefficients de transport dans l'espace des vitesses . . . . .	352
13.3.1	Définitions générales . . . . .	352
13.3.2	Collisions $e-i$ . Relations avec les fréquences de relaxation . . . . .	355
13.3.3	Collisions $a-b$ . Distribution maxwellienne dans la cible . . . . .	357
13.3.4	Coefficients de ralentissement dans un plasma . . . . .	359
13.3.5	Coefficients de dispersion angulaire dans un plasma.	361
13.4	Les temps de relaxation dans un plasma . . . . .	363
13.4.1	Définitions . . . . .	363
13.4.2	Temps de relaxation moyens dans un plasma . . . . .	364
13.4.3	Relation entre les deux fréquences fondamentales $\omega_p$ et $\nu_1$ . . . . .	366
13.5	Équation de Fokker-Planck . . . . .	367
13.6	Équations cinétiques des plasmas . . . . .	370
13.6.1	Forme générale pour les collisions lointaines . . . . .	371
13.6.2	Passage de l'équation de Liouville aux équations cinétiques . . . . .	372
13.7	Conductivité électrique . . . . .	378
13.7.1	Conductivité sans échauffement . . . . .	378
13.7.2	Échauffement et emballement des électrons . . . . .	381
13.8	Autres coefficients de transport . . . . .	385
13.9	Appendices . . . . .	387
A13-1	Coefficients de transport dans l'espace des vitesses .	387
A13-2	Équation de Landau . . . . .	394

A13-3	“Maxwellianisation” des électrons ou des ions par self-interaction . . . . .	395
A13-4	Écriture de l'équation de Landau sous la forme de Fokker-Planck . . . . .	398
13.10	Problèmes . . . . .	399
P13-1	Linéarisation de l'équation de Fokker-Planck . . . . .	399
P13-2	Conductivité électrique de Lorentz . . . . .	399
P13-3	Conductivité thermique de Lorentz . . . . .	399
<b>14</b>	<b>Plasmas et rayonnement</b> . . . . .	<b>401</b>
14.1	Introduction . . . . .	401
14.2	Émission de rayonnement par les électrons libres . . . . .	403
14.2.1	Champs d'une particule chargée (formules relativistes) . . . . .	403
14.2.2	Rayonnement d'une particule non relativiste ( $v \ll c$ ) . . . . .	406
14.3	Rayonnement cyclotron . . . . .	410
14.3.1	Puissance totale rayonnée . . . . .	410
14.3.2	Distribution spectrale et angulaire . . . . .	411
14.3.3	Discussion des approximations . . . . .	412
14.3.4	Corrections relativistes . . . . .	413
14.4	Bremsstrahlung électron-neutre . . . . .	413
14.4.1	Remarques préliminaires . . . . .	413
14.4.2	Bremsstrahlung électron-neutre . . . . .	414
14.5	Bremsstrahlung électron-ion ( $v \ll c$ ) . . . . .	418
14.5.1	Quelques quantités fondamentales . . . . .	418
14.5.2	Puissance totale rayonnée . . . . .	419
14.5.3	Dépendance spectrale . . . . .	421
14.5.4	Effets de dispersion . . . . .	426
14.5.5	Théorie quantique . . . . .	427
14.5.6	Longueurs d'absorption . . . . .	428
14.6	Description d'un champ de rayonnement dans le vide . . . . .	429
14.6.1	Intensité spécifique et distribution photonique . . . . .	429
14.6.2	Quantités macroscopiques associées au rayonnement . . . . .	433
14.6.3	Anisotropies de $I_\nu$ . Champs de rayonnement isotrope . . . . .	434
14.7	Description d'un champ de rayonnement dans un plasma . . . . .	437
14.7.1	Microchamps et macrochamps . . . . .	437
14.7.2	Ondes dans un plasma homogène . . . . .	438
14.7.3	Plasmas faiblement inhomogènes . . . . .	438
14.7.4	Grandeurs hydrodynamiques radiatives . . . . .	439
14.7.5	Plasma à l'équilibre thermodynamique . . . . .	439
14.8	Transfert radiatif dans un plasma . . . . .	440



14.8.1	L'équation de transfert . . . . .	440
14.8.2	Théorie cinétique et hydrodynamique des photons . . . . .	445
14.8.3	Analyse des termes collisionnels des photons . . . . .	448
14.8.4	Approximations physiques du transfert radiatif . . . . .	453
14.9	Classification des plasmas en hydrodynamique radiative . . . . .	457
14.9.1	Équation de Boltzmann pour les photons . . . . .	457
14.9.2	Densités d'énergie . . . . .	459
14.9.3	Longueurs d'interaction photon-électron . . . . .	460
14.9.4	Longueurs d'interaction des électrons . . . . .	461
14.9.5	Familles de plasmas . . . . .	462
14.10	Interactions laser-matière à très haut flux . . . . .	465
14.10.1	Propriétés des lasers de grande puissance . . . . .	465
14.10.2	Effets stimulés dans les interactions $h\nu-e$ . . . . .	465
14.10.3	Effets multiphotoniques sur les atomes . . . . .	466
14.10.4	Oscillation relativiste des électrons dans une onde . . . . .	466
14.10.5	Effets multiphotoniques sur les particules . . . . .	467
14.11	Appendices . . . . .	467
A14-1	Développement de $I_\nu$ en harmoniques sphériques . . . . .	467
14.12	Problèmes . . . . .	468
P14-1	Champs de convection . . . . .	468
P14-2	Refroidissement par rayonnement cyclotron . . . . .	469
P14-3	Pertes d'énergie dans les collisions $e-o$ . . . . .	469
P14-4	Bremsstrahlung électron-neutre . . . . .	470
P14-5	Opérateur de Lorentz pour $h\nu-e$ . . . . .	470
P14-6	Libre parcours moyen de Rosseland . . . . .	470
P14-7	Opérateur de Boltzmann avec effets stimulés . . . . .	470
	<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>473</b>
	<b>Crédits des figures</b> . . . . .	<b>488</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>489</b>

## Contenu du tome 1

<b>1</b>	<b>Gaz ionisés et plasmas</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1	Introduction . . . . .	1
1.1.1	Historique . . . . .	1
1.1.2	Plan du chapitre . . . . .	4
1.2	Gaz ionisés et plasmas . . . . .	5

1.2.1	Degré d'ionisation . . . . .	5
1.2.2	Ionisation thermique d'un gaz . . . . .	7
1.2.3	Plasmas hors d'équilibre thermique . . . . .	8
1.2.4	Densité et température des plasmas usuels . . . . .	9
1.2.5	Familles de gaz ionisés . . . . .	9
1.3	Oscillations de plasma . . . . .	11
1.3.1	Description qualitative . . . . .	11
1.3.2	Oscillations de charge d'espace électronique en volume . . . . .	13
1.3.3	Oscillations de gaine . . . . .	15
1.3.4	Impédance d'un plasma et ondes électromagnétiques . . . . .	17
1.4	Longueurs de Debye et de Landau . . . . .	20
1.4.1	Longueurs critiques d'interaction . . . . .	20
1.4.2	Gaines à la frontière d'un plasma . . . . .	24
1.4.3	Corrélations de position dans un plasma . . . . .	26
1.5	Plasmas sans interactions. Trajectoires des particules . . . . .	31
1.6	Plasmas avec interactions coulombiennes . . . . .	32
1.6.1	Classification des plasmas . . . . .	33
1.6.2	Collisions coulombiennes. Fréquences caractéristiques . . . . .	36
1.7	Ondes dans les plasmas . . . . .	40
1.7.1	Ondes planes dans un plasma . . . . .	40
1.7.2	Plasma sans champ magnétique. Fréquence de coupure . . . . .	41
1.7.3	Propagation parallèle à un champ magnétique . . . . .	43
1.7.4	Propagation oblique et transversale . . . . .	44
1.7.5	Classification des plasmas par rapport aux ondes . . . . .	46
1.8	Plasmas et rayonnement . . . . .	48
1.8.1	Émission de rayonnement par les plasmas . . . . .	48
1.8.2	Interactions entre photons et matière . . . . .	49
1.9	Gaz faiblement ionisés . . . . .	51
1.10	Fusion thermonucléaire contrôlée . . . . .	53
1.10.1	Réaction de fusion des noyaux légers . . . . .	53
1.10.2	Réacteurs nucléaires à fusion contrôlée . . . . .	56
1.10.3	Confinement magnétique d'un plasma . . . . .	58
1.10.4	Confinement inertiel d'un plasma . . . . .	61
1.11	Décharges électriques dans les gaz . . . . .	65
1.11.1	Décharges en courant continu à basse pression . . . . .	65
1.12	Problèmes . . . . .	75
P1-1	Distribution maxwellienne des vitesses . . . . .	75
P1-2	Distribution gaussienne et théorème de la limite centrale . . . . .	77
P1-3	Démonstration simple de l'équation de Saha . . . . .	77
P1-4	Gaines de plasma et sondes de Langmuir . . . . .	78

P1-5	Énergie potentielle d'un plasma . . . . .	81
P1-6	Grandeurs caractéristiques dans un plasma . . . . .	82
<b>2</b>	<b>Trajectoires dans un champ magnétique</b>	<b>83</b>
2.1	Introduction . . . . .	83
2.2	Champ magnétique uniforme constant . . . . .	85
2.2.1	Trajectoires hélicoïdales . . . . .	85
2.2.2	Moment magnétique orbital. Diamagnétisme du plasma . . . . .	89
2.2.3	Valeurs numériques . . . . .	92
2.3	Champs magnétique et électrique uniformes et constants . . . . .	93
2.3.1	Dérive électrique . . . . .	93
2.3.2	Dérives produites par un champ de gravité . . . . .	97
2.4	Champs magnétique uniforme constant et électrique oscillant . . . . .	99
2.4.1	Approximation du champ électrique uniforme . . . . .	99
2.4.2	Conductivité électrique. Résonance cyclotron . . . . .	100
2.5	Champ magnétique lentement variable. Orbites adiabatiques . . . . .	101
2.5.1	Approximation adiabatique . . . . .	101
2.5.2	Orbites adiabatiques . . . . .	103
2.6	Compression magnétique. Gel de $B$ . Invariance de $\mu$ . . . . .	104
2.6.1	Mouvement des tubes de force . . . . .	104
2.6.2	Gel du plasma dans les tubes de force . . . . .	105
2.6.3	Invariance de $\mu$ . Compression magnétique . . . . .	107
2.7	Champ magnétique statique non uniforme . . . . .	110
2.7.1	Orbites adiabatiques tracées sur les tubes de force . . . . .	110
2.7.2	Miroirs magnétiques . . . . .	112
2.8	Dérives . . . . .	115
2.8.1	Dérives électriques et dérives gravitationnelles . . . . .	115
2.8.2	Dérive de courbure magnétique . . . . .	115
2.8.3	Dérive de gradient de $B$ . . . . .	116
2.9	Invariants adiabatiques . . . . .	119
2.9.1	Pseudo-périodes et invariants adiabatiques . . . . .	119
2.10	Constantes exactes du mouvement . . . . .	122
2.10.1	Équations de Lagrange . . . . .	122
2.10.2	Champ statique à symétrie de révolution . . . . .	123
2.11	Appendices . . . . .	125
A2-1	Conductivité d'un plasma froid sans collisions . . . . .	125
A2-2	Résonance cyclotron . . . . .	127
A2-3	Propriétés du gradient d'un champ de vecteurs . . . . .	130
A2-4	Champ statique de révolution avec deux miroirs . . . . .	131
2.12	Problèmes . . . . .	138
P2-1	Calcul relativiste de la dérive électrique . . . . .	138

P2-2	Adiabaticité temporelle dans une compression magnétique . . . . .	138
P2-3	Calcul de la force de freinage dans un miroir magnétique . . . . .	139
P2-4	Calcul de la force (moyenne) de gradient . . . . .	139
P2-5	Dérive magnétique avec diamagnétisme . . . . .	139
P2-6	Puissance transmise par un champ alternatif à un plasma . . . . .	139
P2-7	Résonance cyclotron électronique . . . . .	140
P2-8	Deuxième invariant adiabatique . . . . .	140
<b>3</b>	<b>Collisions élastiques</b>	<b>141</b>
3.1	Introduction . . . . .	141
3.2	Théorie classique des collisions binaires élastiques . . . . .	142
3.2.1	Mouvement du centre de gravité et mouvement relatif	142
3.2.2	Propriétés du mouvement relatif . . . . .	145
3.2.3	Potentiels d'interaction dans un gaz ionisé . . . . .	149
3.2.4	Exemples de calcul de la déviation . . . . .	150
3.3	Section efficace différentielle angulaire . . . . .	153
3.3.1	Définition de la section efficace différentielle . . . . .	153
3.3.2	Section efficace et paramètre d'impact . . . . .	157
3.4	Sections efficaces en mécanique quantique . . . . .	159
3.4.1	Diffusion de l'onde de de Broglie par un centre fixe .	159
3.4.2	Ondes partielles ; déphasages . . . . .	160
3.4.3	Remarques . . . . .	161
3.4.4	Cas des particules identiques . . . . .	161
3.5	Sections efficaces intégrées . . . . .	162
3.5.1	Définitions . . . . .	162
3.5.2	Divergence coulombienne de $\sigma_1$ . Coupure de Debye .	164
3.5.3	Résultats expérimentaux . . . . .	169
3.6	Appendices . . . . .	173
A3-1	Système du laboratoire et système du centre de gravité	173
A3-2	Sections efficaces de transport et déphasages . . . . .	177
3.7	Problèmes . . . . .	180
P3-1	Collisions avec un potentiel attractif en $1/r^4$ . . . . .	180
P3-2	Section efficace pour l'échange d'énergie . . . . .	180
P3-3	Méthode des faisceaux mélangés . . . . .	180
<b>4</b>	<b>Collisions inélastiques</b>	<b>181</b>
4.1	Introduction . . . . .	181
4.2	Particules présentes dans un gaz ionisé. Niveaux d'énergie .	181
4.2.1	Niveaux d'énergie des atomes . . . . .	181

4.2.2	Niveaux d'énergie des molécules . . . . .	182
4.2.3	Ions négatifs . . . . .	186
4.3	Seuils de réaction . . . . .	188
4.3.1	Énergie de réaction . . . . .	188
4.3.2	Seuils de réaction . . . . .	188
4.3.3	Collisions binaires. Cas du système du laboratoire . . . . .	190
4.4	Principaux types de collisions inélastiques . . . . .	190
4.5	Collisions inélastiques binaires . . . . .	191
4.5.1	Section efficace totale . . . . .	191
4.5.2	Taux de réaction . . . . .	195
4.6	Collisions inélastiques ternaires . . . . .	197
4.7	Information sur les sections efficaces et les taux de réaction . . . . .	199
4.8	Problèmes . . . . .	200
P4-1	Constante de réaction pour deux distributions max- welliennes . . . . .	200
P4-2	Relation graphique entre les courbes de sections ef- ficaces inélastique et superélastique . . . . .	200
<b>5</b>	<b>Propriétés macroscopiques des gaz faiblement ionisés</b>	<b>201</b>
5.1	Introduction . . . . .	201
5.2	Mobilité et diffusion libre des électrons . . . . .	202
5.2.1	Équation de transport de la quantité de mouvement des électrons . . . . .	202
5.2.2	Mobilité des électrons . . . . .	203
5.2.3	Diffusion libre des électrons . . . . .	206
5.2.4	Relation d'Einstein. Température de diffusion . . . . .	207
5.3	Mobilité et diffusion libre des ions . . . . .	208
5.4	Modes propres et longueurs de diffusion d'une cavité . . . . .	213
5.4.1	Hypothèses générales . . . . .	213
5.4.2	Équations générales . . . . .	216
5.4.3	Évolution d'une post-décharge . . . . .	217
5.5	Décharge HF dans une cavité . . . . .	219
5.5.1	Régime transitoire . . . . .	219
5.5.2	Régime stationnaire . . . . .	220
5.6	Diffusion ambipolaire . . . . .	223
5.6.1	Comparaison des coefficients de transport des électrons et des ions . . . . .	223
5.6.2	Coefficient de diffusion ambipolaire dans un plasma contenant une seule espèce d'ions . . . . .	224
5.6.3	Détermination du coefficient de proportionnalité. Domaine de validité de la diffusion ambipolaire par- faite . . . . .	226

5.7	Colonnes de plasma contrôlées par diffusion . . . . .	229
5.7.1	Formules générales et règles de similitude . . . . .	229
5.7.2	Formules explicites pour une fréquence de collision constante . . . . .	232
5.8	Colonnes de plasma en régime de chute libre . . . . .	233
5.8.1	Limite du régime de Schottky vers les basses pressions	233
5.8.2	Régime de chute libre . . . . .	234
5.9	Recombinaison en volume. Attachement . . . . .	235
5.9.1	Généralités . . . . .	235
5.9.2	Comparaison des pertes par diffusion et par recom- binaison en volume . . . . .	236
5.9.3	Évolution de la densité dans un plasma en recombi- naison . . . . .	237
5.9.4	Attachement électronique . . . . .	238
5.10	Appendices . . . . .	239
A5-1	Modes propres et longueurs de diffusion de cavités cylindriques ou parallélépipédiques . . . . .	239
5.11	Problèmes . . . . .	241
P5-1	Création d'un plasma par un faisceau d'électrons . .	241
P5-2	Colonne positive (modèle simple) . . . . .	243
P5-3	Diffusion ambipolaire avec plusieurs espèces d'ions .	243

## 6 Faisceaux d'électrons : ondes et instabilités

	<b>électrostatiques</b>	<b>245</b>
6.1	Introduction . . . . .	245
6.2	Dynamique à une dimension . . . . .	247
6.2.1	Équations générales non linéaires . . . . .	247
6.2.2	Modes propres du faisceau . . . . .	248
6.3	Énergie et flux d'énergie associés aux ondes . . . . .	253
6.3.1	Énergie et modèle linéaire . . . . .	253
6.3.2	Énergie dans les ondes rapides et lentes . . . . .	254
6.3.3	Énergie associée aux ondes . . . . .	256
6.3.4	Conservation de l'énergie de perturbation . . . . .	257
6.4	Excitation et stabilité des ondes . . . . .	261
6.4.1	Grilles "dipolaires" . . . . .	261
6.4.2	Grilles séparées par une distance finie ; faisceaux de sections transversales finies . . . . .	264
6.5	Instabilité faisceau-milieu dissipatif . . . . .	267
6.5.1	Équation de dispersion . . . . .	268
6.5.2	Cas des faibles dissipations . . . . .	269
6.5.3	Conservation de l'énergie avec petite dissipation . .	274
6.5.4	Flux d'énergie dans l'amplificateur résistif . . . . .	276

6.6	Instabilité par couplage avec un milieu réactif . . . . .	277
6.6.1	Équation de dispersion . . . . .	277
6.6.2	Bilans d'énergie . . . . .	278
6.6.3	Milieux avec $\chi_L^M = \chi_L^M(\omega)$ . . . . .	280
6.7	Problèmes . . . . .	280
P6-1	Fonction de réponse longitudinale . . . . .	280
P6-2	Développement en série de l'énergie cinétique . . . . .	282
P6-3	Flux d'énergie cinétique de perturbation . . . . .	283
P6-4	Énergie dans un faisceau non homogène . . . . .	283
P6-5	Conditions aux limites pour des grilles dipolaires . . . . .	284
P6-6	Perturbations produites par des grilles dipolaires . . . . .	285
P6-7	Le klystron amplificateur . . . . .	285
P6-8	Couplage des perturbations au circuit extérieur . . . . .	287
P6-9	Valeurs propres pour la diode de Pierce . . . . .	288
P6-10	Stabilité de la diode de Pierce . . . . .	291
P6-11	Admittance de deux grilles avec charge d'espace quelconque . . . . .	291
P6-12	Admittance de deux grilles avec charge d'espace nulle . . . . .	293
P6-13	Stabilité avec dissipation interne . . . . .	294
P6-14	Conservation de l'énergie avec dissipation interne . . . . .	295
<b>7</b>	<b>Instabilités de courant dans les plasmas</b>	<b>297</b>
7.1	Introduction . . . . .	297
7.2	Instabilité faisceau-plasma . . . . .	299
7.2.1	Équation de dispersion . . . . .	299
7.2.2	Solutions du type $\omega(k_r)$ . . . . .	301
7.2.3	Solutions du type $k(\omega_r)$ . . . . .	305
7.2.4	Aspects non linéaires de l'instabilité . . . . .	308
7.3	Instabilités de courant dans un plasma . . . . .	309
7.3.1	Instabilité de Buneman . . . . .	309
7.3.2	Aspects non linéaires . . . . .	312
7.4	Instabilité électrostatique à deux courants . . . . .	313
7.4.1	Faisceaux d'électrons opposés . . . . .	313
7.4.2	Faisceaux parallèles . . . . .	315
7.4.3	Faisceaux opposés, avec mouvement des ions . . . . .	317
7.4.4	Aspects non linéaires . . . . .	317
7.5	Instabilités électromagnétiques . . . . .	320
7.5.1	Modèle relativiste des plasmas froids . . . . .	320
7.5.2	Dynamique non relativiste linéarisée . . . . .	322
7.5.3	Instabilité de Weibel non relativiste . . . . .	323
7.5.4	Modèle relativiste . . . . .	333
7.6	Problèmes . . . . .	340

P7-1	Instabilité faisceau-plasma : domaine d'instabilité . .	340
P7-2	Instabilité faisceau-plasma avec gradient de densité .	341
P7-3	Instabilité de Buneman : domaine d'instabilité . . .	342
P7-4	Instabilité de Buneman : taux de croissance maximum . . . . .	342
P7-5	Instabilité à faisceaux parallèles : amplification spatiale . . . . .	342
P7-6	Faisceaux opposés avec mouvement des ions . . . . .	342
P7-7	Dynamique relativiste électrostatique à une dimension . . . . .	343
P7-8	Conservation relativiste de l'énergie dans un plasma froid . . . . .	344
P7-9	Faisceaux opposés : champs électromagnétiques transversaux avec $\vec{E}_1 \perp \vec{v}_0$ . . . . .	344
P7-10	Instabilité de Weibel non relativiste : conservation de l'énergie de perturbation . . . . .	345
P7-11	Linéarisation de la quantité de mouvement relativiste . . . . .	345
P7-12	Instabilité de Weibel relativiste : énergie de perturbation . . . . .	345
P7-13	Ondes se propageant transversalement à un faisceau d'électrons . . . . .	346
P7-14	Ondes transverses à un faisceau d'électrons : analyse non relativiste . . . . .	347
P7-15	Ondes transverses à un faisceau d'électrons par changement de repère . . . . .	347
P7-16	Ondes transverses à un faisceau : énergie de perturbation . . . . .	348



# Avant-propos

Le présent traité (en deux volumes) résulte de l'expérience des auteurs dans l'enseignement de la physique des plasmas, à l'université de Paris-Sud et au Massachusetts Institute of Technology depuis une trentaine d'années. Il contient notamment la matière enseignée au D.E.A. de physique des gaz et des plasmas à l'université Paris-Sud. C'est un ouvrage d'enseignement à l'usage des professeurs et des étudiants. Mais il a été également conçu comme un ouvrage de référence pour les chercheurs et les ingénieurs sur les méthodes générales et les données de base de la physique des plasmas.

Le mot "plasma" y est pris dans son sens large de gaz ionisé. Il est en effet utile de décrire dans un même ouvrage à la fois la physique des "vrais" plasmas (gaz totalement ionisés), dont les principales applications sont en astrophysique et dans la fusion thermonucléaire, et celle des gaz faiblement ionisés dont les applications technologiques n'ont cessé de se diversifier depuis les premières études de décharges dans les gaz. En fait les deux domaines sont étroitement liés, tant du point de vue des concepts que des techniques expérimentales. Ils présentent d'ailleurs de nombreuses (et intéressantes) difficultés didactiques que nous avons essayé de surmonter :

- Un exposé cartésien et linéaire serait peu satisfaisant : il conduirait à ne présenter certains concepts fondamentaux qu'après plusieurs centaines de pages. C'est pourquoi le livre est organisé en trois vagues successives, en revenant ainsi plusieurs fois sur le même sujet mais à des niveaux de plus en plus approfondis.
  - Le chapitre 1 est une introduction générale à toute la physique des plasmas. Les notions fondamentales y sont présentées de façon qualitative, ou avec des calculs élémentaires. Il se situe au niveau du premier cycle des universités.
  - Les chapitres 2 (trajectoires dans un champ magnétique), 3 (collisions élastiques), 4 (collisions inélastiques), 5 (description macroscopique des gaz faiblement ionisés), 6 et 7 (description hydrodynamique des ondes sur les faisceaux d'électrons et des instabilités de courant dans les plasmas), se situent au niveau du second cycle des

universités. Les chapitres 1 à 7 forment le volume 1.

- Les chapitres 8 et 9 (équations générales de la théorie cinétique et de l'hydrodynamique), 10 et 11 (théorie de Vlasov-Landau et instabilités cinétiques dans les plasmas non collisionnels), 12 et 13 (théorie cinétique collisionnelle des gaz faiblement ionisés et des plasmas) et 14 (plasmas et rayonnements) se situent au niveau du troisième cycle des universités. Ils constituent le volume 2.
- Il faut éviter de noyer l'exposé dans des formalismes mathématiques trop lourds dont la physique serait absente. Mais on ne peut se contenter non plus d'exposés qualitatifs. Pour résoudre ce dilemme nous proposons :
  - un exposé en trois vagues comme on vient de le voir ;
  - l'étude approfondie (et mathématiquement rigoureuse) de quelques problèmes de base (équations cinétiques et hydrodynamiques, amortissement de Landau, ondes et instabilités dans les plasmas non magnétisés, modèle de Lorentz, équation de Fokker-Planck), en accompagnant les calculs de commentaires sur leur signification physique et leurs limitations ;
  - l'impression en petits caractères et/ou le renvoi de nombreux calculs dans des appendices ou des problèmes<sup>1</sup>.

Dans un tel ouvrage de référence sur les méthodes générales de la physique des plasmas, il a fallu laisser de côté de nombreux domaines considérés comme des applications : décharge dans les gaz, fusion thermonucléaire, ondes et instabilités dans les plasmas magnétisés... Pour pallier cette limitation nous offrons au lecteur :

- une présentation qualitative assez détaillée de certains sujets (ondes dans les plasmas, fusion nucléaire, décharges dans les gaz) au chapitre 1 ;
- une étude détaillée au niveau des méthodes de certains cas essentiels (ondes et instabilités hydrodynamiques dans les chapitres 6 et 7, ondes et instabilités cinétiques dans les chapitres 10 et 11) ;
- une bibliographie permettant d'aborder les développements récents.

En terminant il nous faut remercier les organismes et les personnes qui nous ont permis de mener cette œuvre à bien :

- nos établissements (U.P.S. et M.I.T.) qui ont très tôt encouragé les enseignements et les recherches en physique des plasmas ;
- l'École Supérieure d'Électricité qui nous a donné les moyens nécessaires à la mise au point finale de ce livre et le C.N.R.S. qui a aidé au financement ;

---

1. Les problèmes qui sont en fait des compléments du texte principal sont marqués d'un astérisque (\*).

– les nombreuses secrétaires telles que E. Claudon qui, dans l'ère pré-informatique, ont dactylographié des textes à distribuer aux étudiants, et les personnes, secrétaires (H. Budd, L. Doughty et A.M. Pozderec) ou informaticiens (F. Katsonis) qui nous ont aidés ensuite à faire la saisie informatique ;

– les nombreux collègues et étudiants qui nous ont fait des critiques constructives, et tout spécialement dans la phase finale C. Fabre qui au nom de l'éditeur a été un "referee" vigilant et nous a permis d'apporter de très nombreuses améliorations au texte définitif.

Jean-Loup Delcroix  
Abraham Bers

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Notations

Il est impossible dans un livre de la taille de celui-ci d'éviter les conflits de notations. Certains symboles peuvent donc désigner deux ou plusieurs grandeurs différentes en des endroits différents du texte. Un effort de rationalisation a cependant été fait. On a tout d'abord les règles générales suivantes :

- La nature *vectorielle* des grandeurs est notée comme suit :  $a$  désigne un scalaire,  $\vec{a}$  un vecteur,  $\bar{a}$  un tenseur du deuxième ordre et  $\bar{\bar{a}}$  un tenseur du troisième ordre.
- Les diverses *moyennes* introduites sont :  $\langle a \rangle$  pour une moyenne d'ensemble (cf. chapitre 8) ou, dans les ondes, une moyenne dans l'espace ou le temps (cf. chapitres 6 et 7) et  $\bar{a}$  pour une moyenne locale représentant une grandeur hydrodynamique (cf. chapitre 9).
- Dans l'étude des *perturbations*, l'indice inférieur 0 est affecté aux grandeurs dans l'état non perturbé, et l'indice inférieur 1 aux perturbations du premier ordre.
- Dans les mélanges gazeux (comme les plasmas) l'indice inférieur  $a$  ou  $s$  se rapporte à une espèce de particules ( $e$  pour les électrons,  $i$  pour les ions,  $o$  pour les neutres et  $\phi$  ou  $\nu$  pour les photons), et l'indice inférieur  $ab$  se rapporte aux interactions entre les particules  $a$  et  $b$ .
- Pour diverses grandeurs hydrodynamiques qui contiennent des composantes dues aux champs électromagnétiques, les indices inférieurs  $E$ ,  $M$ ,  $EM$  se rapportent aux champs électriques, magnétiques ou électromagnétiques.
- Le système d'*unités* utilisé dans toutes les formules théoriques est le système légal international (**SI**). Les applications numériques sont faites, soit dans celui-ci, soit dans le système (**CGS**), soit dans un système pratique dit (**eVcT**), où les seules grandeurs qui apparaissent littéralement sont la température en eV, la densité en  $\text{cm}^{-3}$ , et l'induction magnétique en Tesla. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, le système utilisé est indiqué en caractères gras comme ci-dessus.

Les notations le plus souvent adoptées pour désigner les diverses grandeurs sont rassemblées dans le tableau ci-dessous, où la dernière colonne renvoie à la section (sans parenthèses) ou la formule (entre parenthèses) dans laquelle chaque grandeur est définie :

$a_0$	rayon de la première orbite de Bohr (= $5.29 \cdot 10^{-11} \text{m}$ )	14.10
$\vec{A}$	potentiel vecteur	2.10
$\alpha$	coefficient de recombinaison en volume	5.9
$\alpha$	degré d'ionisation	1.2
$\alpha$	polarisabilité d'un atome	3.2
$\alpha_0$	partie isotrope d'une fonction de distribution	(12.20)
$\alpha_{\ell m}$	coefficients d'anisotropie d'une fonction de distribution	(12.20)
$B_{ov}$	fonction de Planck	(14.140)
$\vec{B}$	induction magnétique	1.5
$\beta = n\kappa T/p_M$	paramètre de confinement magnétique	9.5
$\beta = w/c$	paramètre relativiste	7.5
$\beta_{\ell m}$	coefficients d'anisotropie d'une fonction de distribution	(12.20)
$\vec{\Gamma} = n \vec{v}$	flux de particules	6.2
$dr$	élément de volume dans l'espace $\vec{r}$	8.2
$dw$	élément de volume dans l'espace $\vec{w}$	8.2
$\frac{dw}{de}$	distance moyenne entre électrons	1.6
$d\Omega$	élément d'angle solide	3.3
$d\Omega$	élément de l'espace des phases	8.2
$D$	densité dans l'espace des phases	8.2
$D$	diamètre d'interaction de deux sphères dures	3.2
$D_a$	coefficient de diffusion ambipolaire parfaite	(5.77)
$D_e$	coefficient de diffusion libre des électrons	5.2
$D_i$	coefficient de diffusion libre des ions	5.3
$D(\omega, \vec{k}) = 0$	équation de dispersion	1.7
$\bar{\delta}$	tenseur diagonal unitaire	
$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$	coefficient de déplacement dans l'espace des vitesses	13.3
$\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$	coefficient de diffusion dans l'espace des vitesses	13.3
$\langle \Delta w_{a\parallel} \rangle_b / \Delta t$	coefficient de ralentissement	13.3
$\langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t$	coefficient de dispersion angulaire	13.3
$e = -q_e$	charge de l'électron (= $1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ )	1.3
$\vec{E}$	champ électrique	1.3
$\eta$	viscosité	9.2
$\eta_\omega(\vec{s}, \vec{v})$	émissivité spectrale d'un électron	14.2
$f_1$ ou $f$	fonction de distribution simple	8.3
$\hat{f} = f/n$	fonction de distribution normalisée	10.3
$f_{12}$	fonction de distribution double	(8.40)
$F(w_k)$	fonction de distribution réduite à une dimension	(10.269)
$g_1(w, \vec{k})$	valeur initiale de la perturbation de $f$	(10.100)
$\vec{g}$	vitesse relative dans une collision	3.2
$\vec{G}$	densité de quantité de mouvement	(10.81)
$G_{ab}(\vec{w}_a)$	pseudo-potentiel de Rosenbluth (diffusion)	(13.50)
$\hat{G}_0(w_k)$	fonction caractéristique (critères de Penrose)	(11.34)
$H$	hamiltonien	8.2

$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$	champ magnétique	2.2
$H_{ab}(\vec{w}_a)$	pseudo-potentiel de Rosenbluth (ralentissement)	(13.49)
$H(\omega)$	fonction caractéristique (critères de Penrose)	(13.36)
$I$	terme de source de particules	9.2
$I_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t)$	intensité spectrale de rayonnement	(14.106)
$I(\omega/k_r)$	fonction caractéristique (critères de Penrose)	(11.33)
$j_\nu$	coefficient d'émission	14.8
$\vec{j}_\omega$	émissivité spectrale des électrons	14.5
$\vec{j}_{ab}$	flux dans l'espace des vitesses (collisions lointaines)	(13.84)
$J(f)$	intégrale de Boltzmann	(8.78)
$\vec{J}$	courant électrique	1.3
$J_\nu$	coefficient d'injection dans un petit faisceau lumineux	14.8
$\vec{k}$	vecteur d'onde	1.7
$k_i$	partie imaginaire de $k$	6.5
$k_r$	partie réelle de $k$	6.5
$K(\vec{k}, \omega)$ ou $\overline{K}$	permittivité	(11.119)
$K_L(k, \omega)$	permittivité longitudinale	(10.114)
$K_\nu$	coefficient d'extraction dans un petit faisceau lumineux	14.8
$\kappa$	constante de Boltzmann	1.2
$\kappa_\nu$	coefficient d'absorption apparent	14.8
$\kappa_{\nu a}$	coefficient d'absorption vrai	14.8
$\kappa_{\nu s}$	coefficient d'émission stimulée	14.8
$\mathcal{K}$	conductivité thermique	9.2
$\chi$	angle de déviation dans une collision	3.2
$\chi(k, \omega)$ ou $\overline{\chi}$	susceptibilité	(10.255)
$\chi_L(k, \omega)$	susceptibilité longitudinale	(6.24)
$\ell$	libre parcours moyen	8.4
$\ell_b$	longueur d'absorption par bremsstrahlung $e-i$	14.5
$\ell_c$	libre parcours moyen Compton	14.8
$l_R$	libre parcours moyen de Rosseland	(14.249)
$\ln$	logarithme népérien	3.5
$\ln \Lambda$	logarithme coulombien (collisions)	3.5
$\ln \Gamma$	logarithme coulombien (bremsstrahlung)	14.5
$\lambda_B$	longueur de de Broglie	3.5
$\lambda_D$	longueur de Debye électronique	(1.49)
$\lambda_s$	longueur d'écran exacte	(1.68)
$\Lambda_j$	longueur de diffusion du mode $j$	5.4
$\log$	logarithme décimal	1.6
$m$	masse d'une particule	1.5
$\mu$	masse réduite dans une collision	3.2
$\mu$ ou $\overline{\mu}$	mobilité	5.2
$\vec{\mu}$	moment magnétique orbital	(2.27)
$n_1$ ou $n$	densité simple	8.3
$n_{12}$	densité double	8.3
$n_{ab12}$	densité double (mélanges)	8.3
$N = kc/\omega$	indice de réfraction	1.3
$N$	nombre de particules d'un ensemble	8.2
$N_D$	nombre d'électrons dans la sphère de Debye	1.4
$N_r$	indice de réfraction des rayons lumineux	14.8
$\nu_{ei}$ ou $\nu_1$	fréquence de collision électron-ion	13.2

$\nu_{e0}$ ou $\nu_1$	fréquence de collision électron-neutre	12.3
$\nu_I$	fréquence d'ionisation	5.4
$\omega$	fréquence (angulaire)	1.3
$\omega_i$	partie imaginaire de $\omega$	6.5
$\omega_r$	partie réelle de $\omega$	6.5
$\omega_{pe}$	fréquence plasma électronique	1.3
$\omega_{pi}$	fréquence plasma ionique	1.3
$\omega_p$	fréquence plasma totale	1.3
$\Omega$	fréquence cyclotron	1.5
$\vec{\Omega}$	vecteur rotation cyclotron	(2.6)
$p$	pression	9.2
$p$	paramètre d'impact	3.2
$p_0$	paramètre d'impact critique	3.2
$p_i$	moment canonique	2.10
$\vec{P}$	échange de quantité de mouvement	9.2
$P(\vec{s}, t)$	puissance rayonnée par un électron	14.2
$\phi$	coordonnée d'azimut	2.2
$\phi$	potentiel électrostatique	2.10
$\bar{\pi}$	pression interparticulaire	(9.38)
$\bar{\Psi}$	pression cinétique	(9.4)
$q$	charge d'une particule	1.2
$\vec{q}$	vecteur flux de chaleur	(9.16)
$\bar{Q}$	tenseur flux de chaleur	(9.5)
$\vec{r}$	vecteur position	3.2
$\vec{r}$	vecteur position du mouvement relatif	3.2
$R(u)$	fonction de ralentissement par collisions	(13.63)
$\vec{r}_G$	vecteur position du centre de masse	3.2
$\vec{R}$	position du centre guide	2.2
$r_0$	longueur de Landau	(1.41)
$r_0$	rayon classique de l'électron ( $= 2.82 \cdot 10^{-15}$ m)	14.8
$\rho$	densité de charge d'espace	1.4
$\rho$	rayon d'orbite	2.2
$\rho$	résistivité	9.3
$\rho_m$	densité de masse	9.3
$s$	terme d'échange d'énergie par collisions	9.2
$S(u)$	fonction de dispersion angulaire par collisions	(13.65)
$\vec{S}$	flux d'énergie	9.2
$\vec{S}_K$	flux d'énergie cinétique	10.2
$S_\nu$	fonction source (transfert du rayonnement)	(14.180)
$\sigma$ ou $\bar{\sigma}$	conductivité électrique	1.5
$\sigma$	constante de Stefan ( $= 5.67 \cdot 10^{-8}$ W m <sup>-2</sup> K <sup>-4</sup> )	14.6
$\sigma(\chi, \phi)$	section efficace différentielle angulaire	(3.52)
$\sigma_0$	section efficace totale	(3.85)
$\sigma_1$	section efficace de transfert de quantité de mouvement	(3.87)
$\sigma_2$	deuxième section efficace de transport	13.2
$\sigma_I$	section efficace d'ionisation	5.4
$t$	temps	1.5
$t_D$	temps de relaxation de déflexion	13.4
$t_r$	temps de relaxation de ralentissement	13.4



$T$	température	1.2
$T_{ab}$	température de Boltzmann des niveaux $a$ et $b$	14.8
$T_\nu$	température de radiation	14.8
$\vec{T}$	flux de quantité de mouvement	(9.9)
$\tau_\nu$	taux d'occupation des états quantiques du rayonnement	14.6
$\theta_m$	angle au sommet dans une trajectoire de collision	3.2
$u$	énergie d'une particule	3.2
$u$ ou $u_K$	énergie cinétique d'une particule	3.2
$u_P$	énergie potentielle d'une particule	3.2
$U$	densité d'énergie	9.2
$U_E$	densité d'énergie électrostatique	10.2
$U_{EM}$	densité d'énergie électromagnétique	10.2
$U_k$	énergie d'onde	6.3
$U_K$	densité d'énergie cinétique	9.2
$U_M$	densité d'énergie magnétique	10.2
$U_P$	densité d'énergie potentielle	9.2
$\vec{v}$	vitesse de fluide	9.2
$\vec{v}$	vitesse d'une particule (chapitres 2 et 14)	2.1
$v_T = \sqrt{\kappa T/m}$	vitesse "thermique"	1.12
$v_t = \sqrt{2\kappa T/m}$	vitesse la plus probable	1.12
$v_p$ ou $v_\phi$	vitesse de phase	1.3
$v_g$	vitesse de groupe	6.2
$\vec{w}$	vitesse d'une particule	8.2
$\vec{V}$	vitesse de masse	9.3
$V_a$	vitesse d'Alfvén	(9.123)
$V_s$	vitesse du son	(1.114)
$x = \log n_e$	coordonnée pour la classification des plasmas (CGS)	1.6
$\vec{X}_{12}$	force d'interaction entre deux particules	3.2
$y = \log T_e$	coordonnée pour la classification des plasmas (K)	1.6
$z_\nu$	profondeur optique	14.8
$Z_i e$	charge d'un ion	1.4

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Chapitre 8

## Équations cinétiques

### 8.1 Introduction

Pour décrire l'état d'un gaz on peut adopter les méthodes de l'hydrodynamique, c'est-à-dire introduire un certain nombre de grandeurs macroscopiques telles que la densité, la vitesse du fluide, la pression, etc. On peut aussi, pour des études plus fines, tenir compte de la nature moléculaire du fluide, en introduisant des grandeurs telles que les fonctions de distribution des vitesses qui donnent une description microscopique classique du fluide. Dans ce chapitre et le suivant, nous définirons les quantités qui interviennent dans les deux méthodes, nous nous efforcerons de préciser leur signification physique, et nous établirons les relations qui existent entre la description microscopique et la description macroscopique.

La méthode suivie sera la méthode dite *régressive* [94]. Nous partons de la description la plus fine possible de l'état du fluide, c'est-à-dire de la densité  $D$  dans l'espace des phases, et nous établirons tout d'abord l'équation d'évolution de cette grandeur (équation de Liouville). Par une série d'intégrations qui correspondent chacune à la disparition d'une variable et à la perte de l'information correspondante sur l'état du système, nous établirons tout d'abord les équations "cinétiques", c'est-à-dire les équations d'évolution des fonctions de distributions simple  $f_1$ , double  $f_{12}$ ,... Enfin, en éliminant toute information détaillée sur les vitesses d'agitation thermique, nous établirons dans le chapitre 9 les équations de l'hydrodynamique, qui sont les équations d'évolution des moments de  $f_1$  c'est-à-dire de la densité  $n$ , de la vitesse de fluide  $\overline{\mathbf{v}}$ , du tenseur de pression cinétique  $\overline{\overline{\Psi}}$  et du tenseur de flux de chaleur  $\overline{\overline{Q}}$  (cf. section 9.2 pour les définitions de ces grandeurs).

A chaque étape de cette méthode régressive nous rencontrerons cependant une difficulté de principe : l'équation de Liouville est la seule qui donne une description "complète" de l'évolution du fluide. Le système des équations cinétiques (équations d'évolution de  $f_1, f_{12}, \dots$ ) est indéterminé si on l'arrête à un nombre fini d'équations. C'est seulement en considérant un système à un nombre très élevé d'équations cinétiques (nombre égal à celui des particules) qu'on peut reconstituer une description équivalente à celle fournie par l'équation de Liouville. Il en est de même pour le système des équations hydrodynamiques vis-à-vis de l'équation d'évolution de  $f_1$ . L'un des problèmes clefs qui sera discuté dans ce chapitre et le suivant sera donc celui des approximations physiques permettant de "fermer" le système des équations cinétiques ou celui des équations hydrodynamiques, c'est-à-dire d'arrêter chacun de ces systèmes à un nombre fini (faible) d'équations.

Nous avons d'autre part à distinguer deux cas: celui des gaz purs constitués d'une seule espèce de molécule (He, Ar,...), celui des mélanges gazeux constitués d'au moins deux espèces de particules (He + Ar, N<sub>2</sub> + O<sub>2</sub>,...). Les gaz partiellement ionisés ( $e + A^+ + A$ ) et les plasmas ( $e + A^+$ ) entrent dans cette deuxième catégorie. Dans le cas d'un gaz pur, l'évolution du fluide est décrite par une seule équation de Liouville ou par un seul système d'équations cinétiques ou hydrodynamiques. Dans le cas d'un mélange gazeux on peut écrire une équation de Liouville et un système d'équations cinétiques ou hydrodynamiques pour chaque espèce de particule contenue dans le mélange. On aura par exemple un système d'équations hydrodynamiques décrivant l'évolution des grandeurs partielles  $n_a, \vec{v}_a, \overline{\Psi}_a, \overline{\overline{Q}}_a$  relatives aux particules d'espèce  $a$ . Les systèmes relatifs à au moins deux espèces de particules différentes  $a$  et  $b$  sont couplés par des termes d'interaction  $a$ - $b$ . Dans certains cas ce couplage est si fort que les diverses espèces de particules évoluent solidairement. On dira alors qu'on a un comportement monofluide décrit par une seule série de grandeurs hydrodynamiques globales (densité totale, vitesse globale du fluide...). C'est la situation que l'on rencontre en général dans les gaz neutres à la pression atmosphérique ; par exemple pour décrire la propagation des ondes acoustiques dans l'atmosphère, il n'est pas nécessaire de distinguer la dynamique des molécules N<sub>2</sub> de celle des molécules O<sub>2</sub>. Dans d'autres cas, il est au contraire essentiel d'étudier séparément la dynamique des diverses espèces de particules. C'est en particulier le cas des plasmas où les électrons beaucoup plus légers que les autres espèces de particules sont en général assez découplés des particules lourdes. On dit alors qu'on a un comportement de fluide multiple et dans ce cas il n'est

pas possible de décrire le mouvement du fluide par des équations hydrodynamiques globales.

Un dernier problème concerne la nature des interactions entre particules. Dans les sections 8.2 à 8.5 et 9.2 nous supposons que ces interactions sont de type élastique (gaz non "réactifs"). La théorie ainsi développée s'applique bien dans les gaz rares aux températures pas trop élevées ( $T < 10^4$  K) et en général dans les plasmas complètement ionisés. Dans d'autres cas (gaz diatomiques, gaz partiellement ionisés) les collisions inélastiques entre particules jouent un rôle plus ou moins important ; on sera alors en général amené à utiliser une description hybride combinant l'hydrodynamique et la théorie cinétique, cette dernière étant essentielle pour le calcul des taux de réactions physico-chimiques ; les problèmes posés par cette théorie des gaz réactifs seront discutés dans les sections 8.6 et 9.6.

## 8.2 Équation de Liouville d'un gaz pur

### 8.2.1 Densité dans l'espace des phases

#### a) Définitions

Soit  $N$  le nombre des particules du système ; si le gaz est un corps pur, ce sont  $N$  molécules identiques que nous numérotions de 1 à  $N$ . Nous les considérons comme des particules ponctuelles : l'état de chacune d'entre elles est défini par un vecteur position  $\vec{r}$  et un vecteur vitesse  $\vec{w}$  (de ce fait nous négligeons les phénomènes de rotation et de vibration des molécules). L'état (ou phase) du système à un instant  $t$  est donc défini par la donnée de l'ensemble des vecteurs :

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N \quad (8.1)$$

$$\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N \quad (8.2)$$

Cet ensemble définit un point dans un espace à  $6N$  dimensions appelé espace de phase. La connaissance exacte de la phase est impossible pour des raisons pratiques (grande valeur de  $N$ ) et fondamentales (indéterminations quantiques). Nous nous contenterons donc au mieux de définir une densité de probabilité :

$$D(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N, t) \quad (8.3)$$

en appelant par définition :

$$D \underline{dr}_1 \underline{dr}_2 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \dots \underline{dw}_N \quad (8.4)$$

la probabilité que la phase du système soit à l'instant considéré à l'intérieur d'un élément de volume à  $6N$  dimensions

$$\underline{dr_1} \underline{dr_2} \dots \underline{dr_N} \underline{dw_1} \underline{dw_2} \dots \underline{dw_N} \quad (8.5)$$

situé au voisinage du point  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N$ .

En langage plus physique, la probabilité (8.4) est celle des états du système pour lesquels la particule 1 se trouve à l'intérieur d'un petit élément de volume de l'espace ordinaire :

$$\underline{dr_1} = dx_1 dy_1 dz_1 \quad (8.6)$$

et possède un vecteur vitesse dont l'extrémité se trouve à l'intérieur du petit élément de volume de l'espace des vitesses :

$$\underline{dw_1} = dw_{1x} dw_{1y} dw_{1z} \quad (8.7)$$

en même temps que la particule 2 se trouve à l'intérieur de l'élément de volume  $\underline{dr_2}$  avec un vecteur vitesse dont l'extrémité est dans  $\underline{dw_2}$ , et ainsi de suite, jusqu'à la particule  $N$ .

La probabilité totale de trouver le système dans un état quelconque étant égale à l'unité, on a :

$$\int D \underline{dr_1} \underline{dr_2} \dots \underline{dr_N} \underline{dw_1} \underline{dw_2} \dots \underline{dw_N} = 1 \quad (8.8)$$

Dans cette formule, les intégrations sur les variables  $\vec{r}$  sont étendues au volume  $V$  occupé par le gaz et celles sur les variables  $\vec{w}$  à la totalité de l'espace des vitesses.

La fonction  $D$  doit être symétrique par rapport à chacune des particules prises deux à deux : par suite de l'indiscernabilité des particules elle doit en effet rester inchangée quand on permute deux indices.

## b) Notion de corrélations

On dit qu'il n'y a pas de corrélations entre les particules quand la fonction  $D$  est un produit de  $N$  fonctions relatives chacune à l'une des particules, c'est-à-dire quand on a :

$$D = D_0(\vec{r}_1, \vec{w}_1, t) \cdot D_0(\vec{r}_2, \vec{w}_2, t) \dots D_0(\vec{r}_N, \vec{w}_N, t) \quad (8.9)$$

Toutes les fonctions individuelles ont été prises formellement identiques et notées  $D_0$  ; cette identité est imposée par l'indiscernabilité des particules. On dit au contraire qu'il y a des corrélations entre les particules quand la fonction  $D$  n'obéit pas à l'équation (8.9).

## 8.2.2 Équation de Liouville pour des variables conjuguées

Comme toutes les grandeurs cinétiques et hydrodynamiques dérivent de la densité en phase  $D$ , nous commençons par rappeler l'équation dite de Liouville, qui régit l'évolution de cette fonction.

En fait, celle-ci ne s'écrit simplement que si les variables décrivant l'état du système sont des variables canoniques conjuguées au sens de Hamilton. C'est pourquoi nous changeons d'abord légèrement la définition de la densité en phase de la façon suivante : désignons par  $q_1, q_2, \dots, q_{3N}$  ;  $p_1, p_2, \dots, p_{3N}$  une suite de variables scalaires conjuguées que nous écrivons en abrégé  $(q_i, p_i)$ , décrivant l'état du système, et par :

$$\mathcal{D}(q_i, p_i, t) d\Omega \quad (8.10)$$

avec :

$$d\Omega = dq_1 dq_2 \dots dq_{3N} dp_1 dp_2 \dots dp_{3N} \quad (8.11)$$

la probabilité que le point représentatif du système soit dans l'élément de volume  $d\Omega$  de ce nouvel espace des phases  $(q_i, p_i)$ .

Soit  $H(q_i, p_i)$  l'hamiltonien du système exprimé en fonction de ces variables canoniques. Les équations du mouvement de Hamilton-Jacobi s'écrivent :

$$dq_i / dt = \partial H / \partial p_i \quad (8.12)$$

$$dp_i / dt = -\partial H / \partial q_i \quad (8.13)$$

Supposons qu'à l'instant  $t$ , le système ait son point représentatif à l'intérieur d'un élément de volume  $d\Omega$  de l'espace des phases. Si on considère un point représentatif quelconque de  $d\Omega$ , il lui correspond une trajectoire parfaitement définie. À l'instant  $t'$  on peut considérer la nouvelle position qu'a pris chaque point représentatif en suivant sa trajectoire : l'ensemble de ces positions remplit un élément de volume  $d\Omega'$  de l'espace des phases. Par différentiation des équations de Hamilton-Jacobi (8.12), (8.13) on établit facilement (cf. par exemple [297]) le théorème de Liouville qui exprime la conservation du volume de l'espace des phases lors de l'évolution du système, soit :

$$d\Omega' = d\Omega \quad (8.14)$$

On peut alors remarquer que, puisque les points représentatifs de  $d\Omega$  se retrouvent dans  $d\Omega'$ , la probabilité de trouver le système dans  $d\Omega'$  à l'instant  $t'$  est égale à celle que l'on avait à l'instant  $t$  de la trouver dans  $d\Omega$ , soit :

$$\mathcal{D}(q'_i, p'_i, t') d\Omega' = \mathcal{D}(q_i, p_i, t) d\Omega \quad (8.15)$$

d'où, compte tenu de (8.14) :

$$\mathcal{D}(q'_i, p'_i, t') = \mathcal{D}(q_i, p_i, t) \quad (8.16)$$

On dit que  $\mathcal{D}$  se conserve en suivant le mouvement, ce qu'on écrit :

$$d\mathcal{D}/dt = 0 \quad (8.17)$$

ou plus explicitement en utilisant les dérivées partielles de  $\mathcal{D}$  à l'instant  $t$  :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{3N} \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial p_i} = 0 \quad (8.18)$$

### 8.2.3 Système sans interactions dépendant de la vitesse

On peut maintenant revenir aux variables  $\vec{r}_i$  et  $\vec{w}_i$  et écrire l'équation de Liouville relative à la fonction  $D$  usuelle. Pour commencer, on suppose que les vitesses des particules sont faibles devant la vitesse de la lumière, et que toutes les forces agissant sur elles sont indépendantes de la vitesse et dérivent de potentiels. On peut alors écrire l'hamiltonien du système sous la forme :

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \sum_i \varphi_i + \sum_{i < j} \varphi_{ij} \quad (8.19)$$

avec :

$$\vec{p}_i = m\vec{w}_i \quad (8.20)$$

$\varphi_i$  est l'énergie potentielle de la particule  $i$  du fait d'un champ de forces extérieures, et  $\varphi_{ij}$  l'énergie potentielle d'interaction des particules  $i$  et  $j$ <sup>1</sup>.

Par dérivation on obtient par exemple :

$$\frac{\partial H}{\partial p_{ix}} = w_{ix} = \frac{dx_i}{dt} \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x_i} = -X_{ix} - \sum_{j \neq i} X_{ijx} = -\frac{dp_{ix}}{dt} \quad (8.22)$$

en désignant par  $\vec{X}_i + \sum_{i \neq j} \vec{X}_{ij}$  la force totale agissant sur la particule  $i$ . Ces équations montrent que les variables  $x_i$  et  $mw_{ix}$  constituent un couple

1. Dans les gaz denses, il faudrait *a priori* introduire des termes d'interactions triples  $\varphi_{ijk}$ , quadruples  $\varphi_{ijkl}$ , etc., lorsque la densité est telle que les effets de modification de structure analogues à la liaison chimique deviennent importants, de sorte que l'on ait  $\varphi_{123} \neq \varphi_{12} + \varphi_{13} + \varphi_{23}$ .



de variables conjuguées. La densité  $D$  dans l'espace des phases  $(r_i, mw_i)$  obéit donc à l'équation de Liouville (8.18) ; mais d'autre part la probabilité de trouver le système dans un élément de volume de cet espace des phases peut s'écrire :

$$D \underline{dr_1} \underline{dr_2} \dots \underline{dr_N} \underline{dmw_1} \underline{dmw_2} \dots \underline{dmw_N} \quad (8.23)$$

ou encore :

$$D \underline{dr_1} \underline{dr_2} \dots \underline{dr_N} \underline{dw_1} \underline{dw_2} \dots \underline{dw_N} \quad (8.24)$$

en posant :

$$D(\vec{r}_i, \vec{w}_i, t) = m^{3N} \mathcal{D}(\vec{r}_i, m \vec{w}_i, t) \quad (8.25)$$

Il suffit donc finalement de multiplier l'équation (8.18) par  $m^{3N}$  pour obtenir l'équation de Liouville relative à  $D$ . En regroupant trois par trois les termes relatifs à une même particule  $i$ , on peut l'écrire sous la forme vectorielle :

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{w}_i \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{r}_i} + \sum_i \frac{\vec{X}_i + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{ij}}{m} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{w}_i} = 0 \quad (8.26)$$

les sommations étant maintenant étendues aux  $N$  particules.

Notons pour terminer que lorsque le gaz est en équilibre thermodynamique, on n'a pas besoin de cette équation. La mécanique statistique classique montre en effet (cf. par exemple [282]) que  $D$  est *a priori* connue et égale à :

$$D = \frac{\exp(-E/kT)}{\int \exp(-E/kT) d\Omega} \quad (8.27)$$

où  $E$  est l'énergie totale du système dans l'état de phase considéré. Il résulte de cette règle générale un certain nombre de propriétés particulières qui sont étudiées dans les problèmes P8-1 et P8-2.

## 8.2.4 Application aux plasmas

L'équation de Liouville (8.26) peut se généraliser à un gaz de particules chargées, mais il faut alors tenir compte des forces électromagnétiques qui dépendent des vitesses. Si les vitesses des particules sont faibles devant la vitesse de la lumière, la masse  $m$  reste constante et on peut montrer (cf. appendice A8-1) qu'il suffit d'introduire dans l'équation de Liouville la force électromagnétique totale  $\vec{X}_i + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{ij}$  appliquée à la particule  $i$  avec :

$$\vec{X}_i = q_i [\vec{E}_i + \vec{w}_i \times \vec{B}_i] \quad (8.28)$$

$$\vec{X}_{ij} = -\nabla_i \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \right] \quad (8.29)$$

où  $\vec{E}_i$  est le champ électrique macroscopique d'origine extérieure,  $\vec{B}_i$  le champ magnétique macroscopique self-consistent défini par l'équation :

$$\nabla \times \vec{B}/\mu_o = \vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial E}{\partial t} \quad (8.30)$$

et qui inclut l'effet des sources extérieures et celui des courants  $\vec{J}$  circulant dans le plasma. Le terme d'interaction électrostatique  $\sum_{j \neq i} \vec{X}_{ij}$  représente l'action sur la particule  $i$  du champ électrique "microscopique" exact créé au point  $i$  par l'ensemble des autres particules du plasma. Nous verrons dans la section 9.2 que ce champ est la somme d'un champ macroscopique qui en se combinant avec le champ d'origine extérieure obéit à l'équation :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_o \quad (8.31)$$

et d'un terme supplémentaire tenant compte de la structure particulière du plasma.

Il pourrait *a priori* paraître nécessaire de traiter  $\vec{B}$  comme  $\vec{E}$  et d'introduire le champ magnétique microscopique exact. On montre dans l'appendice A8-1 que cela n'introduit que des corrections d'ordre  $w^2/c^2$  négligeables dans les plasmas non relativistes. L'équation de Liouville (8.26) peut se généraliser à un gaz de particules chargées placées dans un champ magnétique. Si les vitesses des particules sont faibles devant la vitesse de la lumière, la masse  $m$  reste constante et on peut montrer (cf. appendice A8-1) qu'il suffit dans l'équation de Liouville d'introduire la force totale électromagnétique appliquée à la particule  $i$  écrite sous la forme :

$$\vec{X}_i + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{ij} = q_i [(\vec{E}_i + \vec{E}'_i + \vec{w}_i \times (\vec{B}_i + \vec{B}'_i))] \quad (8.32)$$

où  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$  sont les champs d'origine extérieure et  $\vec{E}'_i$  et  $\vec{B}'_i$  les champs produits par les charges d'espaces et les courants dans le plasma.

Pour faire une théorie relativiste exacte de l'équation de Liouville d'un système de particules chargées, il faudrait tenir compte des autres effets suivants :

- interaction magnétique entre les particules,
- durée de propagation finie des interactions (potentiels retardés),

- variation de la masse des particules avec la vitesse.

Pour le développement de cette théorie, nous renvoyons le lecteur à [96] et [97, p. 130].

## 8.3 Système d'équations de BBGKY<sup>2</sup>

### 8.3.1 Fonction de distribution et densité simples

La fonction  $D$  contient le maximum d'information que l'on puisse avoir sur le fluide ; en fait, on ne peut jamais atteindre ce maximum et l'on doit se contenter de fonctions décrivant moins finement l'état du fluide.

Cherchons donc, par une méthode dite régressive [94], la probabilité des états du système dans lesquels la particule 1 est à l'intérieur de l'élément de volume  $\underline{dr}_1$  et possède un vecteur vitesse dont l'extrémité est à l'intérieur de l'élément de volume  $\underline{dw}_1$ , les états des particules 2, 3, ...,  $N$  étant par contre absolument quelconques. On obtient évidemment cette probabilité en intégrant la probabilité élémentaire sur tous les espaces des positions  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  (limités au volume  $V$ ) et sur tous les espaces des vitesses  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_N$ , ce qui s'écrit :

$$\underline{dr}_1 \underline{dw}_1 \int D \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N \quad (8.33)$$

Il faut d'ailleurs noter que la numérotation des particules introduite pour définir  $D$  est artificielle et arbitraire, puisque les particules sont indiscernables. La probabilité pour qu'une autre particule 2, 3, ...,  $N$  se trouve dans le même domaine  $\underline{dr}_1, \underline{dw}_1$  est égale à celle calculée ci-dessus.

Il est donc souhaitable d'éliminer la numérotation choisie en définissant le nombre probable  $\langle dN \rangle_1$  de particules se trouvant à l'intérieur de l'élément de volume  $\underline{dr}_1$  avec un vecteur vitesse dont l'extrémité est à l'intérieur de l'élément de volume  $\underline{dw}_1$ . Ce nombre est égal à la probabilité (8.33), valable pour l'une quelconque des particules, multipliée par le nombre de particules, ce qu'on peut écrire :

$$\langle dN \rangle_1 = f_1 \underline{dr}_1 \underline{dw}_1 \quad (8.34)$$

en posant :

$$f_1 = N \int D \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N \quad (8.35)$$

---

2. BBGKY pour Born-Bogoliubov-Green-Kirkwood-Yvon est l'ordre alphabétique des auteurs, mais il se trouve que l'ordre historique est exactement inverse !

La fonction  $f_1$  est appelée fonction de distribution simple des vitesses. C'est la grandeur la plus généralement utilisée en théorie cinétique des fluides. On confond d'ailleurs souvent dans la formule (8.34) la valeur probable  $\langle dN \rangle_1$  avec la valeur réelle  $dN_1$  du nombre de particules situées dans  $\underline{dr}_1 \underline{dw}_1$ . Cette identification est raisonnable si le volume  $\underline{dr}_1 \underline{dw}_1$ , quoique physiquement petit, est encore assez grand pour que  $\langle dN \rangle_1$  soit grand. Si l'on néglige les fluctuations statistiques, on peut alors poser :

$$dN_1 = \langle dN \rangle_1 \quad (8.36)$$

*A priori*,  $f_1$  est une fonction de  $\vec{r}_1, \vec{w}_1$  et  $t$ . Si elle ne dépend pas effectivement de  $\vec{r}_1$  on dira que le gaz est *homogène*. D'autre part, la fonction de distribution simple peut être isotrope dans l'espace des vitesses, ou anisotrope. On dira qu'elle est *anisotrope* si elle dépend de l'orientation du vecteur  $\vec{w}$ . On dira qu'elle est *isotrope* si elle n'est fonction que de la valeur absolue de ce vecteur.

La fonction

$$n_1(\vec{r}_1, t) = \int f_1 \underline{dw}_1 \quad (8.37)$$

obtenue par intégration de  $f_1$  sur tout l'espace des vitesses est la densité simple ; elle permet de calculer le nombre probable  $\langle dN' \rangle_1$  de particules situées dans l'élément de volume  $\underline{dr}_1$  avec une vitesse quelconque, au moyen de la formule :

$$\langle dN' \rangle_1 = n_1 \underline{dr}_1 \quad (8.38)$$

### 8.3.2 Fonction de distribution et densité doubles

#### a) Définitions

Considérons maintenant deux éléments de volume  $\underline{dr}_1$  et  $\underline{dr}_2$  dans l'espace ordinaire, et deux éléments de volume  $\underline{dw}_1$  et  $\underline{dw}_2$  dans l'espace des vitesses, et cherchons le nombre probable de couples de particules tels que la première particule du couple soit située dans le volume  $\underline{dr}_1$  avec l'extrémité de son vecteur vitesse dans  $\underline{dw}_1$ , pendant que la deuxième est dans  $\underline{dr}_2$  avec l'extrémité de son vecteur vitesse dans  $\underline{dw}_2$ . Ce nombre probable  $\langle dN \rangle_{12}$  est égal à la probabilité que le système soit dans un état tel que deux particules déterminées, par exemple les particules 1 et 2 satisfassent aux conditions imposées, multipliée par le nombre de couples possibles, soit  $N(N-1)$  ; on peut donc écrire :

$$\langle dN \rangle_{12} = f_{12} \underline{dr}_1 \underline{dw}_1 \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \quad (8.39)$$

en posant :

$$f_{12} = N(N-1) \int D \underline{dr}_3 \underline{dw}_3 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N \quad (8.40)$$

Il est à noter que dans le décompte des couples possibles, on a compté deux fois chaque couple  $\alpha\beta$ , une première fois quand  $\alpha$  est en 1 et  $\beta$  en 2, une deuxième fois quand  $\alpha$  est en 2 et  $\beta$  en 1 ; cette définition est arbitraire mais raisonnable, comme on le verra par la suite, dans de nombreux problèmes où les deux points 1 et 2 jouent un rôle différent, le point 1 étant par exemple celui où est placé un observateur, et l'action en ce point de toutes les molécules situées aux points 2 étant considérée.

La fonction  $f_{12}$  est appelée fonction de distribution double. Par intégration sur les vitesses on définit la densité double :

$$n_{12} = \int f_{12} \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (8.41)$$

## b) Fonctions de distribution double et corrélations

S'il n'y a pas de corrélations, on a d'après (8.9), (8.35) et (8.40) :

$$f_{12} = \frac{N-1}{N} f_1 f_2 \quad (8.42)$$

$N$  étant supposé très élevé on a donc approximativement :

$$f_{12} \approx f_1 f_2 \quad (8.43)$$

de même :

$$n_{12} \approx n_1 n_2 \quad (8.44)$$

Si les égalités ci-dessus ne sont pas satisfaites, on dit qu'il y a des corrélations binaires ; on s'intéresse généralement surtout aux corrélations de position représentées par la non-identité de  $n_{12}$  et  $n_1 n_2$ . Elles s'établissent en fait à cause des forces d'interaction ; nous discuterons ce point ultérieurement. L'importance des corrélations deux à deux (écarts aux formules (8.43) ou (8.44)) est d'autant plus grande que les points 1 et 2 sont plus près l'un de l'autre. À titre d'exemple, la figure 8.1 représente l'allure des variations du rapport  $n_{12}/n_1 n_2$  en fonction de la distance  $r_{12}$  pour les molécules d'un liquide ; les oscillations de cette courbe représentent une tendance vers un certain ordre à courte distance ; la valeur zéro pour  $r_{12} = 0$  correspond aux violentes forces de répulsion entre molécules à très courte distance. Au contraire, à très grande distance, les corrélations sont négligeables. On peut appeler longueur de corrélation une longueur  $L_c$  telle

que pour  $r_{12} > L_c$  on ait  $n_{12} \approx n_1 n_2$ . Nous avons vu dans la section 1.4 que dans les plasmas, la courbe représentant  $n_{12}/n_1 n_2$  est monotone et que la longueur de Debye  $\lambda_s$  est la longueur de corrélation.

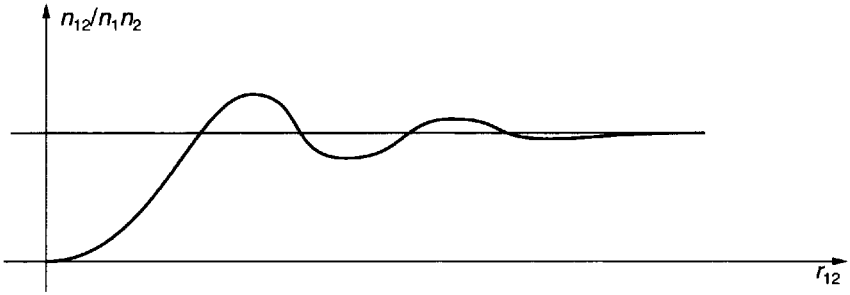


Figure 8.1 : Corrélations binaires de position dans un liquide.

### 8.3.3 Fonctions de distribution et densités multiples

Les définitions données ci-dessous se généralisent facilement. À partir de  $D$  on peut définir la fonction de distribution et la densité triples :

$$f_{123} = N(N-1)(N-2) \int D \underline{dr}_4 \underline{dw}_4 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N \quad (8.45)$$

$$n_{123} = \int f_{123} \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \underline{dw}_3 \quad (8.46)$$

les fonctions quadruples, etc. La dernière est :

$$f_{12\dots N} = N! D \quad (8.47)$$

### 8.3.4 Système d'équations de BBGKY

#### a) Équation d'évolution de $f_1$

En multipliant l'équation de Liouville (8.26) par  $N$  et en l'intégrant sur les variables  $\vec{r}_2, \vec{w}_2, \dots, \vec{r}_N, \vec{w}_N$  on obtient l'équation d'évolution de  $f_1$ . Ce calcul est développé dans l'appendice A8-2 et conduit au résultat suivant :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} + \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 = 0 \quad (8.48)$$

On peut pour discuter la signification des divers termes de cette équation la récrire sous la forme :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = -\vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} + \mathcal{B}(f_{12}) \quad (8.49)$$

avec :

$$\mathcal{B}(f_{12}) = - \int \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \quad (8.50)$$

Sous cette forme elle exprime que la variation, en un point donné du gaz, de la fonction de distribution est donnée en fonction du temps par la somme de trois termes :

- Le premier terme,  $-\vec{w}_1 \cdot \partial f_1 / \partial \vec{r}_1$ , exprime l'influence des phénomènes de diffusion ;  $\vec{w}_1$  est la vitesse des molécules et  $\partial f_1 / \partial \vec{r}_1$  est le gradient de la fonction de distribution dans l'espace des positions. Considérons la figure 8.2 où nous avons représenté un état de fluide dans lequel il existe des molécules dans la région qui a été hachurée, et aucune molécule dans le reste de l'enceinte. Du fait des vitesses des molécules représentées par des flèches sur cette même figure, cet état va évoluer, les molécules vont diffuser vers les régions vides, et au bout d'un certain temps le gaz tendra vers un état homogène. Le terme de diffusion écrit dans l'équation (8.49) est l'expression mathématique de ce phénomène ; il s'annule si la vitesse des molécules est nulle, ou si le gradient dans l'espace des positions est nul.

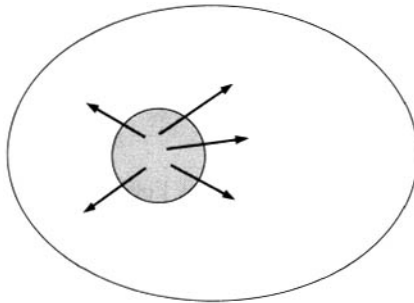


Figure 8.2 : Évolution de  $f_1$  par diffusion.

- Le deuxième terme,  $-(\vec{X}_1/m) \cdot \partial f_1 / \partial \vec{w}_1$ , exprime l'action des forces appliquées.  $\vec{X}_1/m$  est l'accélération qui est imposée aux molécules par des forces d'origine extérieure au gaz, c'est-à-dire le rapport de la force

extérieure agissant sur une molécule à la masse de celle-ci ; par exemple, si la seule force appliquée est la pesanteur,  $\vec{X}_1/m$  est un vecteur dirigé verticalement vers le bas et égal à l'accélération de la pesanteur. Si les molécules sont électriquement chargées (charge  $q$ ) et placées dans un champ électrique  $\vec{E}$ , on a :

$$\vec{X}_1/m = q\vec{E}/m \quad (8.51)$$

$\partial f_1/\partial \vec{w}_1$  est le gradient de la fonction  $f_1$  dans l'espace des vitesses ; sous l'action des forces imposées, les vitesses des molécules varient ; ces forces tendent donc à faire varier la fonction de distribution des vitesses. Le terme correspondant s'annule donc si  $\vec{X}_1$  est égal à zéro ; il s'annulerait si  $\partial f_1/\partial \vec{w}_1$  était nul, ce qui voudrait dire que dans l'espace des vitesses, les molécules seraient réparties uniformément ; l'action des forces extérieures aurait alors pour conséquence d'effectuer une translation des axes de cet espace ; ceci ne donnerait aucun changement à l'expression de  $f_1$  si  $f_1$  était indépendant du vecteur  $\vec{w}$ .

• Enfin, le troisième terme  $\mathcal{B}$  représente, de façon non explicite ici, l'influence des interactions entre particules.

## b) Équation d'évolution de $f_{12}$

En effectuant le même calcul, mais avec une intégration de moins, on peut obtenir (cf. [297], [98]) l'équation d'évolution suivante pour  $f_{12}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{12}}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}_1} + \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}_2} + \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} + \frac{\vec{X}_2 + \vec{X}_{21}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_2} \\ + \int \frac{\vec{X}_{13}}{m} \cdot \frac{\partial f_{123}}{\partial \vec{w}_1} d\vec{r}_3 d\vec{w}_3 + \int \frac{\vec{X}_{23}}{m} \cdot \frac{\partial f_{123}}{\partial \vec{w}_2} d\vec{r}_3 d\vec{w}_3 = 0 \end{aligned} \quad (8.52)$$

où les deux derniers termes représentent l'effet des interactions triples.

## c) Système d'équations de BBGKY. Méthodes de fermeture

Les équations (8.48) et (8.52) forment un système indéterminé ; la première ne permet de déterminer  $f_1$  que si on connaît  $f_{12}$  et la deuxième de déterminer  $f_{12}$  que si on connaît  $f_{123}$ . On pourrait écrire une équation d'évolution pour  $f_{123}$ , mais elle ferait apparaître  $f_{1234}$ , etc.

À partir de l'équation de Liouville, on obtient donc, par la méthode ci-dessus, dite méthode "régressive", un système de  $N$  équations plus simples, mais couplées de proche en proche ; ce système est appelé système



de Born-Bogolioubov-Green-Kirkwood-Yvon, ou plus simplement système BBGKY. Pour pouvoir l'utiliser pratiquement, il faut l'arrêter à un stade quelconque, en faisant une hypothèse simplificatrice sur l'une des fonctions de distribution, d'ordre plus ou moins élevé. On arrive ainsi à obtenir un système déterminé.

Les méthodes de fermeture les plus simples du système BBGKY. proposées par divers auteurs conduisent à donner des expressions approchées de  $\mathcal{B}(f_{12})$  dans lesquelles ne figure plus que la fonction de distribution  $f_1$  ; les diverses équations d'évolution ainsi obtenues correspondent à des approximations différentes et s'appellent :

- équation de Boltzmann sans second membre
- équation de Liouville à une particule (cf. section 8.4.1)
- équation de Vlasov (cf. section 8.4.2)
- équation de Boltzmann (cf. section 8.4.3)
- équation de Fokker-Planck (cf. chapitre 13)
- équation de Landau, Rosenbluth, Mac Donald et Judd (cf. chapitre 13)
- équation de Balescu (cf. chapitre 13)

Les plus importantes de ces équations sont l'équation de Boltzmann et l'équation de Vlasov : l'équation de Boltzmann s'applique aux gaz neutres ou faiblement ionisés (collisions binaires dominantes) et l'équation de Vlasov aux plasmas (interactions collectives dominantes). Les quatre suivantes sont des variantes plus sophistiquées de l'équation cinétique des plasmas qui tiennent compte des collisions coulombiennes en plus des interactions collectives décrites par l'approximation de Vlasov.

## 8.4 Équations cinétiques d'un gaz pur

### 8.4.1 Équation de Liouville à une particule

L'approximation la plus simple et la plus brutale que l'on peut faire dans (8.49) consiste à négliger purement et simplement les interactions entre particules. En faisant donc  $\mathcal{B}(f_{12}) = 0$  on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} = 0 \quad (8.53)$$

L'équation ainsi écrite est l'équation de Boltzmann sans second membre ; elle est d'ailleurs formellement identique à une équation de Liouville à une seule particule. Elle est utile pour décrire l'évolution d'un gaz de particules chargées dans un champ électromagnétique d'origine extérieure ; elle suppose évidemment que les particules sont en densité assez faible pour ne pas modifier ce champ extérieur ; elle ne fournit pas plus d'informations que l'étude générale des trajectoires des particules, mais elle permet de traiter statistiquement un grand nombre de trajectoires correspondant à des conditions initiales différentes. La distribution de ces conditions initiales est représentée par les valeurs de  $f_1(\vec{r}_1, \vec{w}_1)$  à l'instant initial.

L'équation de Boltzmann sans second membre est utilisée notamment dans les domaines suivants :

- trajectoires des particules dans la magnétosphère ;
- accélérateurs de particules, sources d'ions ;
- machines à plasma pour la fusion contrôlée (régimes à basse densité, problèmes d'injection).

### 8.4.2 Équation de Vlasov

Quand la densité des particules est telle que l'on ne peut plus négliger les interactions, l'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire consiste à négliger les corrélations entre particules. Dans  $\mathcal{B}(f_{12})$  on peut alors poser :

$$f_{12} = f_1 f_2 \quad (8.54)$$

Nous avons vu que cette approximation est toujours valable si les points 1 et 2 sont assez éloignés l'un de l'autre. D'après la discussion de la section 1.4 nous avons vu que dans les plasmas les interactions lointaines sont effectivement dominantes. L'introduction de la condition ci-dessus dans  $\mathcal{B}(f_{12})$  revient à ne tenir compte, dans la dynamique du plasma, que de ces interactions lointaines collectives.

En supposant de plus que le plasma est non relativiste on peut ne retenir dans  $\vec{X}_{12}$  que les interactions électrostatiques ;  $\vec{X}_{12}$  ne dépendant donc pas des vitesses on obtient en combinant (8.50) et (8.54) :

$$B(f_{12}) = -\frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \cdot \int n_2 \frac{\vec{X}_{12}}{m} d\vec{r}_2 = -\frac{q}{m} \vec{E}'_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \quad (8.55)$$

$\vec{E}'_1$  étant le champ de charge d'espace défini par la formule :

$$\vec{E}'_1 = \int n_2 \vec{X}_{12} d\vec{r}_2 \quad (8.56)$$

En reportant (8.56) dans (8.55), on obtient finalement :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + \frac{q}{m} [\vec{E}_1 + \vec{E}_1' + \vec{w}_1 \times \vec{B}_1] \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} = 0 \quad (8.57)$$

L'équation ainsi décrite est l'équation de Vlasov. Elle est formellement identique à l'équation de Boltzmann sans second membre, à condition d'inclure, dans les forces appliquées aux particules, les champs macroscopiques produits par le plasma ; elle permet donc d'étudier, de façon self-consistante, les mouvements collectifs d'un gaz de particules chargées relativement dense.

L'équation de Vlasov est l'équation cinétique fondamentale de la théorie des plasmas. Physiquement elle consiste à ne tenir compte, dans les interactions qui déterminent les trajectoires des particules, que des interactions collectives, c'est-à-dire de l'action sur chaque particule chargée du champ "moyen" de charge d'espace créé par les autres. Il faut bien souligner qu'une telle équation "self-consistante" est en fait non linéaire : bien que son écriture paraisse semblable à celle de l'équation de Boltzmann sans second membre, elle en diffère par le terme d'interaction  $\frac{1}{m} [\vec{E}_1' + \vec{w}_1 \times \vec{B}_1] \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1}$  qui est en fait quadratique par rapport à la fonction de distribution des vitesses, comme on le voit en tenant compte de l'expression qui définit  $\vec{E}_1'$ .

### 8.4.3 Équation de Boltzmann

Pour obtenir l'équation de Vlasov, nous avons réduit les phénomènes d'interaction entre particules à des champs collectifs produits par les charges d'espace et les courants. On peut au contraire faire l'hypothèse extrême inverse, que les phénomènes d'interaction sont des collisions binaires et brutales, et qu'entre deux collisions les particules ne sont soumises à aucune force et suivent une trajectoire rectiligne. Ce modèle est celui de la théorie cinétique classique des gaz neutres, et il a permis bien avant l'établissement du système BBGKY d'obtenir pour  $f_1$  l'équation d'évolution dite de Boltzmann ; les démonstrations élémentaires [95], [99] de cette équation ne mettent pas toujours en relief les approximations faites ; il est préférable en suivant Yvon [100] de rattacher l'équation de Boltzmann à l'équation générale (8.48) de la façon suivante :

- On suppose (hypothèse A) que la densité est assez faible vis-à-vis des forces d'interaction pour qu'on puisse négliger les termes d'interaction

triple : on écrira donc (8.52) sous la forme :

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}_1} + \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}_2} + \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} + \frac{\vec{X}_2 + \vec{X}_{21}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_2} = 0 \quad (8.58)$$

Remarquons que le système des deux équations (8.48) d'évolution de  $f_1$  et (8.58) dans laquelle  $f_{123}$  a disparu est maintenant parfaitement déterminé. On peut faire un pas de plus : moyennant certaines hypothèses complémentaires nous allons, à partir de la deuxième, exprimer  $\mathcal{B}(f_{12})$  en fonction de  $f_1$  et obtenir ainsi une équation cinétique déterminée ne faisant intervenir que la fonction de distribution simple.

• On suppose que les forces sont à court rayon d'action (hypothèse B), c'est-à-dire fortes pour  $r_{12}$  inférieur à une certaine valeur  $R$  et négligeables si  $r_{12} > R$  ;  $R$  est la portée des forces d'interaction. Dans ces conditions, l'intégrale  $\mathcal{B}(f_{12})$  peut être calculée en limitant le volume d'intégration sur la variable  $\vec{r}_2$  à une sphère  $S$  de rayon  $R$  centrée sur le point  $\vec{r}_1$ . Faisons donc le changement de variable

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (8.59)$$

L'équation (8.58) devient :

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}_1} + (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_1 + \vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} + \frac{\vec{X}_2 + \vec{X}_{21}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_2} = 0 \quad (8.60)$$

Multiplions-la par  $\underline{dr} \underline{dw}_2$  et intégrons pour  $\vec{r}$  sur le volume de la sphère d'interaction  $S$  et pour  $\vec{w}_2$  sur tout l'espace des vitesses. Le dernier terme donne un résultat nul à la seule condition que la force extérieure  $\vec{X}_2$  et la force d'interaction  $\vec{X}_{21}$  satisfassent à la condition (8.144).

• Dans l'avant-dernier terme on suppose que la force extérieure est assez faible pour que l'on ait à l'intérieur de la sphère d'interaction  $\vec{X}_1 \ll \vec{X}_{12}$  (hypothèse C). Cette hypothèse est physiquement très raisonnable : pendant une collision, il y a des forces d'interaction très intenses.

• On suppose enfin que les variations temporelles et spatiales de  $f_{12}$  sont assez lentes pour que les deux premiers termes soient négligeables devant le troisième. Plus précisément  $f_{12}$  dépend essentiellement du vecteur position relative  $\vec{r}$  et il est évident que si les points  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont à l'intérieur d'une sphère d'interaction, on a  $|\partial f_{12}/\partial \vec{r}| \sim f_{12}/R$  (variation très importante de  $f_{12}$  pour des changements de distance relative de l'ordre de la portée des forces). Nous sommes donc amenés, pour pouvoir négliger les deux

premiers termes, à poser :

$$\left| \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}_1} \right| R \ll f_{12} \quad (\text{hypothèse D}) \quad (8.61)$$

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial t} \tau \ll f_{12} \quad (\text{hypothèse E}) \quad (8.62)$$

où  $\tau = R|\vec{w}_2 - \vec{w}_1|^{-1}$  représente en ordre de grandeur la durée d'une interaction binaire. Autrement dit, les variations spatiales et temporelles de  $f_{12}$  doivent être lentes à l'échelle de la portée des forces et de la durée d'une collision. On obtient donc finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(f_{12}) &= \int_S \int_{\vec{w}_2} (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}} \underline{dr} \underline{dw}_2 \\ &= \int_S \int_{\vec{w}_2} \nabla \cdot (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) f_{12} \underline{dr} \underline{dw}_2 \end{aligned} \quad (8.63)$$

On peut encore transformer cette intégrale en une intégrale de surface étendue à la surface  $\Sigma$  de la sphère :

$$\mathcal{B}(f_{12}) = \int_{\Sigma} \int_{\vec{w}_2} (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n} f_{12} d\Sigma \underline{dw}_2 \quad (8.64)$$

$\vec{n}$  étant le vecteur unitaire porté par la normale sortante à  $\Sigma$ . Pour calculer cette intégrale, on effectue d'abord l'intégration sur la sphère  $\Sigma$  ;  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$  étant alors constant, on peut partager la surface en deux demi-sphères par le plan perpendiculaire à  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$  (Fig. 8.3). Sur la demi-sphère  $B$  le calcul porte sur deux particules qui viennent de se rencontrer. On pose donc :

$$\mathcal{B}(f_{12}) = \int (S_A + S_B) \underline{dr}_2 \quad (8.65)$$

avec :

$$S_A = \int_A (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n} f_{12} d\Sigma \quad (8.66)$$

$$S_B = \int_B (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n} f_{12} d\Sigma \quad (8.67)$$

Pour calculer  $S_A$  on fait l'hypothèse (hypothèse F) qu'au moment où une particule pénètre dans  $S$  il n'y a pas de corrélation, c'est-à-dire qu'on a :

$$f_{12} = f_1 f_2 \quad (8.68)$$

Montrons que cette hypothèse dite du "chaos moléculaire" suppose que le gaz étudié est en régime de fluide quasi continu (cf. appendice A8-3) défini par la condition :

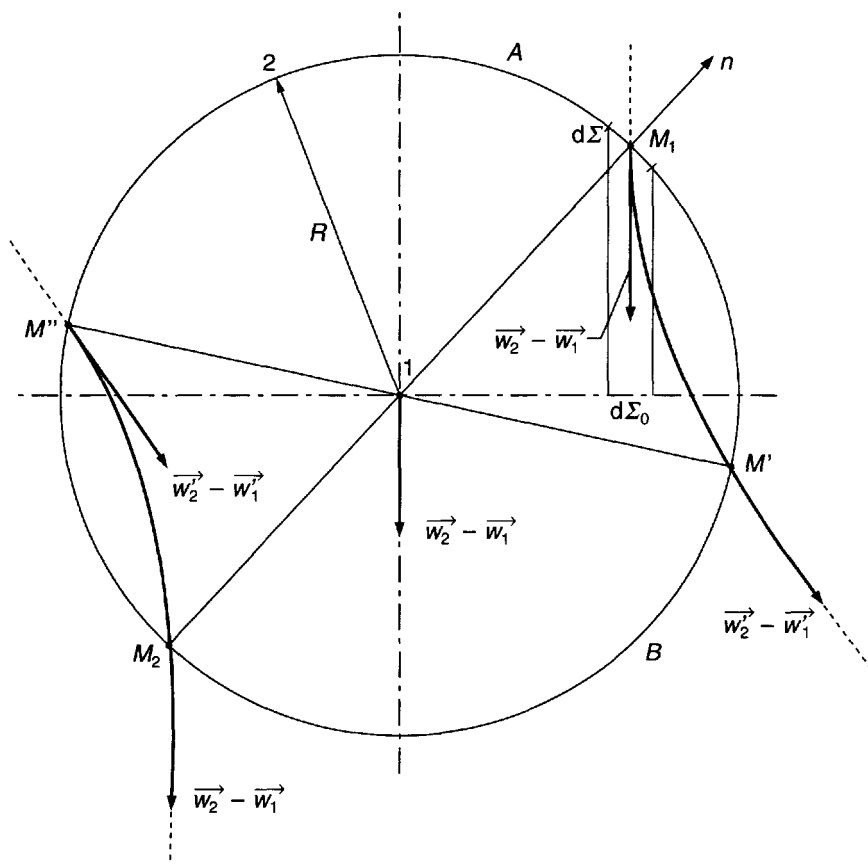


Figure 8.3 : Sphère d'interaction dans une collision.

$$\ell \ll h \quad (\text{hypothèse F}) \quad (8.69)$$

où  $\ell$  est le libre parcours moyen et  $h$  la longueur de gradient hydrodynamique. Pour le comprendre il suffit de se reporter à la figure 8.4 où sont représentées les trajectoires  $K_1 L_1 M_1$ ,  $K_2 L_2 M_2$  des deux particules 1 et 2 qui entrent en collision en  $M_1, M_2$  au voisinage du point  $\vec{r}_1$ . Les points  $L_1$  et  $L_2$ , points de sortie de leurs collisions précédentes, sont distants l'un de l'autre de  $L_1 L_2 \sim \ell \gg R$ . En ces points la règle de non-corrélation (8.43) s'applique. En passant de  $L_1, L_2$  à  $M_1, M_2$  la fonction de distribution  $f_{12}$  se conserve : en effet l'équation d'évolution de  $f_{12}$  s'écrit, si l'on néglige les interactions triples, sous la forme (8.58) qui est une équation de Liouville à

deux particules, et d'après le théorème de Liouville  $f_{12}$  se conserve le long des trajectoires dynamiques. Il faut donc, et il suffit, pour que la condition (8.43) s'applique aux points  $M_1$  et  $M_2$ , que le produit  $f_1 f_2$  ait peu varié sur une distance de l'ordre du libre parcours moyen  $\ell$ , ce qui s'exprime bien par l'hypothèse F annoncée.

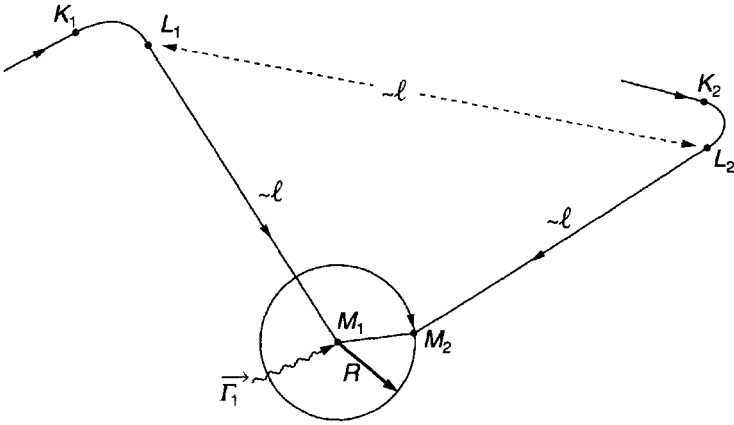


Figure 8.4 : Chaos moléculaire en régime de fluide quasi continu.

On peut donc dans les régimes de fluide quasi continu éliminer la densité double dans  $S_A$  en écrivant compte tenu de (8.43) :

$$S_A = \int_A (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n}_2 f_1 f_2 d\Sigma \quad (8.70)$$

Pour calculer  $S_B$  on ne peut évidemment pas utiliser (8.43) mais on peut s'y ramener moyennant quelques hypothèses supplémentaires. Remarquons tout d'abord que l'équation (8.58) d'évolution de  $f_{12}$ , écrite sans tenir compte des interactions triples, n'est autre qu'une équation de Liouville pour un système à deux particules. D'après le théorème de conservation de la densité en phase le long du mouvement, on peut affirmer que la fonction  $f_{12}$  a gardé pour les particules qui sortent sur  $B$  la valeur qu'elle avait quand elles ont pénétré dans la sphère  $S$ . Nous pouvons donc écrire pour tous les points de  $B$  :

$$f_{12} = f_1'' f_2'' \quad (8.71)$$

en désignant par  $f_1''$  et  $f_2''$  les valeurs correspondant aux points d'entrée  $M''$ . Le mouvement est représenté sur la figure 8.3 dans le plan de la trajectoire relative. Nous supposons maintenant que les forces d'interactions

sont des forces centrales indépendantes de la vitesse (hypothèse G) ; nous avons supposé par ailleurs que les forces extérieures sont négligeables pendant une collision (hypothèse C).

Dans ces conditions, l'ensemble des trajectoires relatives jouit des deux propriétés suivantes :

- la courbe transformée d'une trajectoire par une rotation quelconque est également une trajectoire ;
- une même trajectoire peut être décrite dans les deux sens moyennant l'inversion du vecteur vitesse.

La première propriété est évidente. La deuxième, qui l'est presque autant, résulte du fait que l'on peut inverser le sens du temps dans l'équation des trajectoires [cf. formule (3.22)]. En combinant ces deux propriétés, on peut associer à la trajectoire  $M''M_2$  la trajectoire  $M_1M'$  partant de  $M_1$  diamétralement opposé à  $M_2$  et se terminant en  $M'$  diamétralement opposé à  $M''$ , les vitesses en  $M_2$  et  $M''$  étant respectivement égales aux vitesses en  $M_1$  et  $M'$ . On suppose enfin que les fonctions de distribution simples varient peu en fonction de la position à l'échelle des dimensions de la sphère  $S$  : ceci est en fait une autre forme de l'hypothèse D.

On peut donc remplacer l'intégrale (8.67) en tenant compte de (8.71) et des remarques ci-dessus par l'expression :

$$S_B = \int_A -(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n} f'_1 f'_2 d\Sigma \quad (8.72)$$

en appelant maintenant  $f'_1$  et  $f'_2$  les expressions des fonctions de distribution relatives au "point de sortie"  $M'$  associé à  $M_1$ . Le signe moins vient du fait que les valeurs de  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1 \cdot \vec{n}$  en  $M_1$  et  $M_2$  sont opposées : en rapprochant les résultats (8.70) et (8.72) on obtient finalement l'équation :

$$\mathcal{B}(f_{12}) = \int_A (f_1 f_2 - f'_1 f'_2) (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n} d\Sigma \underline{dw}_2 \quad (8.73)$$

qu'on peut encore écrire sous la forme équivalente :

$$\mathcal{B}(f_{12}) = \int (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) g d\Sigma_o \underline{dw}_2 \quad (8.74)$$

où  $d\Sigma_o$  est la projection de  $d\Sigma$  sur le plan perpendiculaire à  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$ . Dans cette écriture, le terme d'interaction se présente sous la forme d'une intégrale étendue à toutes les particules qui vont faire une collision ;  $g$  désigne le module de la vitesse relative avant la collision et  $d\Sigma_o$  un élément de surface dans le plan perpendiculaire à la vitesse relative initiale  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$  ; on passe de (8.73) à (8.74) en remarquant que l'on a :

$$(\vec{w}_2 - \vec{w}_1) \cdot \vec{n} d\Sigma = -g d\Sigma_o \quad (8.75)$$



On peut d'ailleurs expliciter  $d\Sigma_o$  sous l'une des deux formes équivalentes :

$$d\Sigma_o = \sigma(\chi, \varphi) d\Omega = p dp d\varphi \quad (8.76)$$

en désignant par  $\sigma(\chi)d\Omega$  la section efficace différentielle de collision élastique (cf. section 3.3), par  $p$  le paramètre d'impact habituel et par  $\varphi$  un angle polaire dans le plan perpendiculaire à  $\vec{w}_2 - \vec{w}_1$ . On obtient finalement l'équation d'évolution de  $f_1$  sous la forme :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{w}_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} = J(f_1) \quad (8.77)$$

avec pour le terme de collisions  $J(f_1)$  l'une des deux expressions équivalentes :

$$J(f_1) = \int (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) g p dp d\varphi \underline{dw}_2 \quad (8.78)$$

$$J(f_1) = \int (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) g \sigma(\chi, \varphi) d\Omega \underline{dw}_2 \quad (8.79)$$

#### 8.4.4 Propriétés de l'équation de Boltzmann

Les hypothèses faites pour la démonstration de l'équation de Boltzmann montrent qu'il est raisonnable de l'utiliser quand les forces d'interaction sont à courte portée. Elle a été utilisée très largement pour étudier les propriétés des gaz neutres assez dilués. Nous verrons au chapitre 12 qu'elle permet également d'étudier, dans les gaz partiellement ionisés, les interactions électron-molécule et ion-molécule. Les propriétés générales de cette équation sont les suivantes :

- c'est une équation locale ;
- elle conserve les densités locales macroscopiques des particules, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique ;
- elle est non linéaire et décrit une évolution irréversible du gaz vers l'équilibre thermodynamique local.

##### a) Caractère local

On remarque que l'équation de Boltzmann est une équation locale en ce sens que pour décrire l'évolution de la fonction de distribution  $f_1(\vec{r}_1, \vec{w}_1, t)$  au point  $\vec{r}_1$ , son terme de collision (8.79) n'introduit que des valeurs de  $f_1$  au même point  $\vec{r}_1$  de l'espace ( $f'_1, f_2, f'_2$  sont des valeurs de  $f_1$  pour diverses valeurs du vecteur  $\vec{w}$ , mais toutes au même point  $\vec{r}_1$ ). Ce caractère local de l'équation s'est introduit quand on a négligé dans le calcul du paragraphe précédent les variations de  $f_1$  à l'intérieur de la sphère d'interaction. Tout se passe dans cette équation comme si le milieu était homogène. L'équation de Boltzmann ne peut donc pas décrire certains phénomènes associés aux variations spatiales

du milieu, tels que par exemple les effets hydrodynamiques de la pression interparticulaire [cf. formule (9.42)]. Dans les gaz dilués on peut cependant l'appliquer à des situations non homogènes à condition que les collisions restent assez importantes ; plus précisément, il faut que le libre parcours moyen des particules soit plus court que la longueur caractéristique des variations macroscopiques des propriétés du milieu. Dans ces conditions, les temps d'évolution par collisions de  $f_1$  sont beaucoup plus rapides que les temps d'évolution hydrodynamiques : il y a en quelque sorte découplage entre le processus rapide d'évolution locale de  $f_1$  et l'évolution hydrodynamique plus lente du milieu.

### b) Propriétés de conservation : invariants intégraux

Dans l'écriture des équations hydrodynamiques nous rencontrerons (cf. section 9.2) des termes de la forme :

$$C[A(\vec{w}_1)] \equiv \int A(\vec{w}_1) J(f_1) \underline{dw}_1 \quad (8.80)$$

qui représentent, dans l'équation de transport de la grandeur  $A$ , le terme de source dû aux collisions. On montre facilement que l'on a :

$$C[1] = 0 \quad (8.81)$$

$$C[m\vec{w}] = 0 \quad (8.82)$$

$$C[mw^2/2] = 0 \quad (8.83)$$

Pour cela on commence par établir, à partir des propriétés de symétrie et de réversibilité des collisions (cf. problème P8-3), la formule générale :

$$C[A(\vec{w}_1)] = \frac{1}{4} \int [A(\vec{w}_1) + A(\vec{w}_2) - A(\vec{w}'_1) - A(\vec{w}'_2)] J(f_1) \underline{dw}_1 \quad (8.84)$$

Cette formule montre que pour toute grandeur  $A(\vec{w})$  telle que la somme  $A(\vec{w}_1) + A(\vec{w}_2)$  se conserve dans une collision, l'intégrale de source macroscopique correspondante (8.80) est nulle. Le cas  $A = 1$  est trivial et les cas  $A = m\vec{w}$  et  $A = mw^2/2$  dérivent des lois fondamentales de la mécanique.

On dit que les fonctions  $1$ ,  $m\vec{w}$  et  $mw^2/2$  sont des invariants intégraux, ce qui s'exprime par les trois lois (8.81) à (8.83). On peut d'ailleurs montrer (cf. problème P8-3 ou [101]) que ce sont les seuls invariants intégraux en ce sens que tout invariant intégral scalaire  $\Psi(\vec{w})$  est une combinaison linéaire des trois invariants précédents, c'est-à-dire une fonction de la forme :

$$\Psi \equiv a + \vec{b} \cdot m\vec{w} + c \frac{mw^2}{2} \quad (8.85)$$

Remarquons que cette formule contient comme cas particulier les composantes  $w_x, w_y, w_z$  et que d'autre part, la formule (8.80) étant linéaire, on peut fabriquer une infinité d'invariants vectoriels (tel que  $m\vec{w}$ ) ou tensoriels, à la seule condition que toutes les composantes de ces vecteurs ou tenseurs soient des scalaires de la forme (8.85) (cf. problème P8-3).

### c) Non-linéarité et irréversibilité

Le caractère non linéaire du terme de collision de Boltzmann est évident sur la formule (8.79). À cette non-linéarité est associé un comportement irréversible du gaz : l'équation de Boltzmann tend à ramener l'état du fluide vers l'état d'équilibre thermodynamique décrit par une distribution maxwellienne.

Nous nous plaçons pour discuter cette irréversibilité dans le cas d'un gaz homogène ; en l'absence d'une force d'origine extérieure l'équation de Boltzmann s'y écrit :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = J(f_1) \quad (8.86)$$

On vérifie facilement que cette équation admet pour solution stationnaire toute fonction maxwellienne de la forme :

$$\mathcal{M} = A e^{-Bw^2} = n(m/2\pi kT)^{3/2} e^{-mw^2/2kT} \quad (8.87)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes arbitraires et où la deuxième écriture explicite  $A$  et  $B$  en fonction de la densité  $n$  et de la température cinétique  $T$ . En effet  $\mathcal{M}$  satisfait séparément aux deux conditions :

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = 0 \quad (8.88)$$

qui est évidente et :

$$J(\mathcal{M}) = 0 \quad (8.89)$$

Pour vérifier cette dernière condition, il suffit de remarquer que l'on a dans toute collision

$$w_1^2 + w_2^2 = w_1'^2 + w_2'^2 \quad (8.90)$$

d'où l'on déduit d'après les propriétés des exponentielles :

$$\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1' \mathcal{M}_2' \quad (8.91)$$

de sorte que d'après (8.84)  $J(\mathcal{M}_1)$  est bien nul quelle que soit  $\sigma(\chi)$ .

On peut d'ailleurs montrer (cf. problème P8-4) que la solution stationnaire la plus générale de (8.89) est une maxwellienne "déplacée", c'est-à-dire une fonction de la forme :

$$f = A e^{-B(\vec{w} - \vec{v})^2} \quad (8.92)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $\vec{v}$  sont trois constantes arbitraires ; elle se déduit donc de la maxwellienne (8.87) par un changement de repère quelconque.

Cela étant, on peut montrer que si l'état initial du gaz est une fonction homogène, arbitraire quelconque non maxwellienne, le gaz évolue sous l'effet des collisions (et en l'absence de force extérieure) vers un état d'équilibre maxwellien décrit par une fonction du type (8.92). Pour cela on introduit la fonction :

$$H = \int f \ln f \underline{dw} \quad (8.93)$$

L'équation de Boltzmann permet d'établir le théorème H, qui dit que la fonction H ne peut que décroître (ou être constante) lorsque le temps  $t$  croît, soit :

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \quad (8.94)$$

En effet on a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int f \ln f \underline{dw} \quad (8.95)$$

$$= \int J(f) \ln f \underline{dw} + \int J(f) \underline{dw} \quad (8.96)$$

Le deuxième terme s'annule à cause de la conservation de la densité (1 est un invariant intégral). On peut donc écrire compte tenu de (8.84) :

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \int \left[ (f_1 f_2 - f'_1 f'_2) \ln \frac{f_1 f_2}{f'_1 f'_2} \right] g \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \underline{dw_1} \underline{dw_2} \quad (8.97)$$

On vérifie immédiatement que le produit entre crochets est toujours positif et donc que l'on a bien  $\partial H / \partial t \leq 0$ .

Le théorème H décrit une évolution irréversible du gaz vers l'équilibre thermodynamique représenté par une solution stationnaire : si la fonction initiale n'est pas une solution stationnaire on a  $f_1 f_2 \neq f'_1 f'_2$  et par conséquent  $\partial H / \partial t < 0$ . Cette évolution ne peut s'arrêter que lorsque  $f$  est devenue maxwellienne car l'on a alors  $f_1 f_2 = f'_1 f'_2$  et par conséquent  $\partial H / \partial t = 0$ . Cet état d'équilibre n'est en fait atteint de manière exacte qu'au bout d'un temps infini ; on peut cependant, par diverses méthodes, définir un ou plusieurs temps de relaxation qui précisent la vitesse de cette évolution. Nous verrons dans la section 12.3 des exemples de calculs de ces temps de relaxation.

Notons que la fonction H est étroitement associée à l'entropie. La fonction

$$S = -H \quad (8.98)$$

peut être considérée comme la densité d'entropie [308, chapitre 6]. Le théorème H ne fait alors qu'exprimer la croissance de l'entropie dans l'évolution irréversible vers l'équilibre thermodynamique.

Les propriétés de non-linéarité et d'irréversibilité peuvent sembler en contradiction avec les lois fondamentales de la mécanique qui, comme on peut le voir sur l'équation de Liouville, s'expriment par des équations linéaires et réversibles par rapport au temps. Une importante littérature a été consacrée à la solution de ce paradoxe : elle a montré que l'irréversibilité est liée au caractère incomplet de l'information contenue dans  $f_1$ . On pourra se reporter à [98, p. 319] pour une introduction plus détaillée à ce problème.

## 8.5 Équations cinétiques des mélanges

### 8.5.1 Fonctions de distribution

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser les équations données dans les paragraphes précédents, de façon à les appliquer à un gaz constitué de plusieurs espèces de particules.

Supposons, par exemple, que le récipient enfermant le gaz contienne  $A$  particules de type  $a$  et  $B$  particules de type  $b$ . Désignons par  $d\Omega_a$ ,  $d\Omega_b$  les éléments de volume des espaces de phase à  $6A$  et  $6B$  dimensions, relatifs chacun à une seule espèce de particules. Par définition, nous désignons par  $d\Omega_a d\Omega_b$  la probabilité que le système ait son point représentatif à l'intérieur de l'élément de volume  $d\Omega_a d\Omega_b$ .

Les fonctions de distribution simples relatives aux particules de type  $s$  ( $s = a$  ou  $b$ ) sont définies par la formule :

$$f_{i1} = I \int D \frac{d\Omega_a d\Omega_b}{dr_{i1} dw_{i1}} \quad (8.99)$$

où  $I$  est le nombre total de particules de type  $i$ .

Les fonctions de distribution doubles relatives aux particules de type  $i$  et  $j$  ( $i$  et  $j = a$  ou  $b$ ) sont définies par les formules :

$$f_{ii12} = I(I-1) \int D \frac{d\Omega_a d\Omega_b}{dr_{i1} dw_{i1} dr_{i2} dw_{i2}} \quad (8.100)$$

$$f_{ij12} = IJ \int D \frac{d\Omega_a d\Omega_b}{dr_{i1} dw_{i1} dr_{j2} dw_{j2}} \quad (i \neq j) \quad (8.101)$$

Les densités simples et doubles s'en déduisent par intégration :

$$n_{i1} = \int f_{i1} dw_{i1} \quad (8.102)$$

$$n_{ij12} = \int f_{ij12} dw_{i1} dw_{j2} \quad (8.103)$$

$n_{ij12}$  est donc proportionnelle à la probabilité de trouver une particule de type  $i$  au point 1, et une particule de type  $j$  au point 2.

### 8.5.2 Équations cinétiques

L'écriture de l'équation de Liouville sous la forme (8.18) en fonction de variables conjuguées est évidemment valable même s'il y a plusieurs espèces de particules. Pour expliciter l'équation avec les variables  $\vec{r}$  et  $\vec{w}$  il suffit de grouper dans (8.26) les termes relatifs respectivement aux particules de type  $a$ , ou  $b$ . L'équation (8.26) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_i \vec{w}_{ai} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{r}_{ai}} + \sum_i \vec{w}_{bi} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{r}_{bi}} \\ + \sum_i \frac{\vec{X}_{ai} + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{aaij} + \sum_j \vec{X}_{abij}}{m_a} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{w}_{ai}} \\ + \sum_i \frac{\vec{X}_{ai} + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{aaij} + \sum_j \vec{X}_{abij}}{m_b} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{w}_{bi}} = 0 \end{aligned} \quad (8.104)$$

Dans ces formules  $X_{ai}$  désigne la force d'origine extérieure agissant sur une particule de type  $a$  placée au point  $i$  et  $X_{abij}$  désigne la force exercée par une particule de type  $b$  placée au point  $j$  sur une particule de type  $a$  placée au point  $i$ . En multipliant (8.104) par

$$A \frac{d\Omega_a d\Omega_b}{d\vec{r}_{a1} d\vec{w}_{a1}} \quad (8.105)$$

et en intégrant, on obtient, par des calculs analogues à ceux faits au paragraphe 8.4.4 a), l'équation d'évolution suivante pour  $f_{a1}$  :

$$\frac{\partial f_{a1}}{\partial t} + \vec{w}_{a1} \cdot \frac{\partial f_{a1}}{\partial \vec{r}_{a1}} + \frac{\vec{X}_{a1}}{m_a} \cdot \frac{\partial f_{a1}}{\partial \vec{w}_{a1}} = \mathcal{B}(f_{aa12}) + \mathcal{B}(f_{ab12}) \quad (8.106)$$

avec :

$$\mathcal{B}(f_{aa12}) = - \int \frac{\vec{X}_{aa12}}{m_a} \cdot \frac{\partial f_{aa12}}{\partial \vec{w}_{a1}} d\vec{r}_{a2} d\vec{w}_{a2} \quad (8.107)$$

$$\mathcal{B}(f_{ab12}) = - \int \frac{\vec{X}_{ab12}}{m_a} \cdot \frac{\partial f_{ab12}}{\partial \vec{w}_{a1}} d\vec{r}_{b2} d\vec{w}_{b2} \quad (8.108)$$

Par une intégration de moins on obtient l'équation de  $f_{ab12}$  (ou  $f_{aa12}$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ab12}}{\partial t} + \vec{w}_{a1} \cdot \frac{\partial f_{ab12}}{\partial \vec{r}_{a1}} + \vec{w}_{b2} \cdot \frac{\partial f_{ab12}}{\partial \vec{r}_{b2}} \\ + \frac{\vec{X}_{a1} + \vec{X}_{ab12}}{m_a} \cdot \frac{\partial f_{ab12}}{\partial \vec{w}_{a1}} + \frac{\vec{X}_{b2} + \vec{X}_{ba21}}{m_b} \cdot \frac{\partial f_{ab12}}{\partial \vec{w}_{b2}} \\ = T_{123}(f_{aba123}) + T_{13}(f_{abb123}) + T_{23}(f_{aba123}) + T_{23}(f_{abb123}) \end{aligned}$$

Les divers termes  $T$  sont des intégrales représentant les interactions triples analogues à celles qui figurent dans (8.40).

## 8.6 Théorie des gaz réactifs (effets des collisions inélastiques)

### 8.6.1 Introduction des collisions inélastiques

Dans tout le début de ce chapitre, nous avons considéré un gaz ou un plasma comme un ensemble dilué de particules, interagissant entre elles par des forces (ne dépendant en général que des positions) et n'effectuant de ce fait que des collisions élastiques. Or nous avons vu dans le chapitre 4 que les particules d'un gaz peuvent effectuer, dès que le gaz est un peu chaud, une grande variété de collisions de type inélastique. L'introduction des collisions inélastiques dans la théorie de ces gaz, ou plasmas réactifs, se fait en général au niveau de l'équation cinétique d'évolution de  $f_1$ , ou des équations hydrodynamiques. Au niveau de la théorie cinétique, nous ne considérerons que des collisions binaires, donc de la forme générale 12/34..., c'est-à-dire :

$$1 + 2 \Rightarrow 3 + 4 + \dots \quad (8.109)$$

On peut, pour cette famille de collisions, généraliser la notion de section efficace différentielle (cf. appendice A8-4).

### 8.6.2 Collisions du type 12/34. Équation de Boltzmann

Considérons maintenant le cas où la collision est binaire non seulement avant mais aussi après le choc, c'est-à-dire du type 12/34. Dans ce cas, la description des phénomènes dans le système du centre de gravité est particulièrement simple : dans ce système la quantité de mouvement totale est nulle avant comme après le choc ; avant la collision les deux particules sont animées (Fig. 8.5) de deux quantités de mouvement  $m_1 \vec{w}_1$  et  $m_2 \vec{w}_2$  égales et opposées, de sorte que les vitesses  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont opposées et leurs valeurs absolues dans le rapport inverse des masses correspondantes ; si l'on introduit le vecteur vitesse relative  $\vec{g}_{12}$  on peut encore écrire :

$$m_1 w_1 = m_2 w_2 = \mu_{12} g_{12} \quad (8.110)$$

où  $\mu_{12}$  est la masse réduite du système 12. Après la collision, la situation est analogue ; le nouveau vecteur vitesse relative est :

$$\vec{g}_{34} = \vec{w}'_3 - \vec{w}'_4 \quad (8.111)$$

et l'on a :

$$m_3 w'_3 = m_4 w'_4 = \mu_{34} g_{34} \quad (8.112)$$

L'effet de la collision a donc été de faire tourner le vecteur vitesse relative : si l'on prend comme axe le vecteur initial  $\vec{g}_{12}$ , la position du vecteur final  $\vec{g}_{34}$  est définie par les deux angles polaires  $\chi$  (déviation) et  $\varphi$  (azimut). Le module du vecteur vitesse relative a également changé puisque l'on a :

$$\frac{1}{2}\mu_{34}g_{34}^2 = \frac{1}{2}\mu_{12}g_{12}^2 + Q \quad (8.113)$$

Les angles polaires  $\chi$  et  $\varphi$  déterminent donc la configuration après la collision et l'on peut définir une section efficace différentielle :

$$\sigma_{12}^{34}(\chi, \varphi) d\Omega = \sigma_{12}^{34}(\chi, \varphi) \sin \chi d\chi d\varphi \quad (8.114)$$

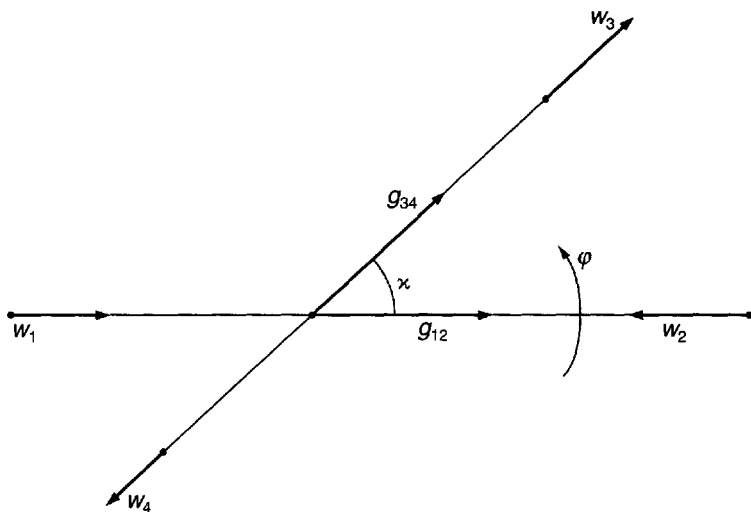


Figure 8.5 : Collision inélastique 12/34 : système du centre de gravité.

Ceci étant, on peut à partir de la formule (8.121) calculer le terme, dû aux collisions 12/34, qui apparaît au deuxième membre de l'équation cinétique d'évolution de  $f_1$ . Plus précisément, on peut écrire, en tenant compte à la fois des collisions 12/34 et de leurs inverses :

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)_{\text{coll } 12 \Rightarrow 34} \underline{dw_1} = \Gamma_1^+ \underline{dw_1} - \Gamma_1^- \underline{dw_1} \quad (8.115)$$

Dans cette formule  $\Gamma_1^- \underline{dw_1}$  représente le nombre de particules qui par unité de temps et de volume  $\underline{dr}$  sortent de l'élément volume  $\underline{dw_1}$  centré



sur  $\vec{w}_1$  du fait des collisions 12/34 ; on obtient donc ce terme en fixant  $\vec{w}_1$  dans (8.121) et en intégrant sur  $\chi$ ,  $\varphi$  et  $\vec{w}_2$  :

$$\Gamma_1^- = \int \int \int f_1(\vec{w}_1) f_2(\vec{w}_2) \sigma_{12}^{34}(g_{12}, \chi, \varphi) g_{12} \sin \chi d\chi d\varphi d\vec{w}_2 \quad (8.116)$$

Pour des valeurs données de  $\vec{w}_1$ ,  $\vec{w}_2$ ,  $\chi$  et  $\varphi$ , les particules 3 et 4 ont après la collision des vitesses  $\vec{w}_3$  et  $\vec{w}_4$  parfaitement déterminées.

Le terme  $\Gamma_1^+ d\vec{w}_1$  représente les particules 1 qui apparaissent dans  $d\vec{w}_1$  par la réaction inverse 34/12 : les collisions correspondantes sont inverses des collisions qui figurent dans (8.115) ; partant de deux particules 3 et 4 avec les vitesses initiales  $\vec{w}_3$  et  $\vec{w}_4$  on obtient après les déviations  $-\chi$ ,  $-\varphi$  deux particules 1, 2 de vitesses  $\vec{w}_1$ ,  $\vec{w}_2$  ; on peut donc écrire le nombre de particules qui passent de  $d\vec{w}'_3 d\vec{w}'_4$  dans  $d\vec{w}_1 d\vec{w}_2$  sous la forme :

$$\sigma_{34}^{12}(g'_{34}, -\chi, -\varphi) g'_{34} f_3(\vec{w}'_3) f_4(\vec{w}'_4) \sin \chi d\chi d\varphi d\vec{w}'_3 d\vec{w}'_4 \quad (8.117)$$

On admet généralement la relation dite de microréversibilité :

$$\sigma_{34}^{12}(g'_{34}, -\chi, -\varphi) g'_{34} d\vec{w}'_3 d\vec{w}'_4 = \sigma_{12}^{34}(g_{12}, \chi, \varphi) g_{12} d\vec{w}_1 d\vec{w}_2 \quad (8.118)$$

Les conditions de validité de cette relation ne sont pas faciles à préciser (cf. [285]) ; quoi qu'il en soit, si on l'admet on peut écrire :

$$\Gamma_1^+ = \int \int \int f_3(\vec{w}_3) f_4(\vec{w}_4) \sigma_{12}^{34}(g_{12}, \chi, \varphi) g_{12} \sin \chi d\chi d\varphi d\vec{w}_2 \quad (8.119)$$

d'où finalement de façon plus condensée :

$$\left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{\text{coll } 12=34} = \int \int \int (f'_3 f'_4 - f_1 f_2) g_{12} \sin \chi d\chi d\varphi d\vec{w}_2 \quad (8.120)$$

Dans cette formule  $f'_3$  et  $f'_4$  désignent les valeurs prises par  $f_3$  et  $f_4$  pour les vitesses finales  $\vec{w}'_3$  et  $\vec{w}'_4$  déterminées par les conditions initiales  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  et les valeurs de  $\chi$  et  $\varphi$ . La relation (8.120) généralise, en l'étendant aux collisions inélastiques, l'équation de Boltzmann (8.77) obtenue précédemment pour les collisions élastiques.

### 8.6.3 Collisions 12/14 et 12/114 avec $m_1 \ll m_2, m_4$

On rencontre souvent le cas où l'une seulement des particules en jeu est transformée (2  $\rightarrow$  4) cependant que l'autre particule 1 se retrouve dans le même état d'énergie interne. C'est par exemple le cas dans les réactions d'excitation par choc électronique,

ionique ou atomique. On doit alors modifier les résultats du paragraphe précédent pour tenir compte de l'indiscernabilité des particules. Un cas analogue est celui des collisions de type 12/114 dont le prototype est la collision ionisante  $e, A/e, A+, A$ . Remarquons enfin que l'électron étant beaucoup plus léger que l'atome cible  $A$ , on peut négliger dans l'analyse de ce type de collision la vitesse des particules lourdes  $A$  et  $A^+$  (modèle de Lorentz). Tous ces cas particuliers sont discutés dans l'appendice A8-4.

## 8.7 Appendices

### A8-1 Particules chargées dans un champ électromagnétique

#### a) Hamiltonien d'une particule

Un champ électromagnétique quelconque est défini par la donnée en tout point de son potentiel vecteur  $\vec{A}$  et de son potentiel scalaire  $\varphi$  ; les champs électrique et magnétique résultants s'écrivent :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \partial\vec{A}/\partial t \quad (8.121)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (8.122)$$

L'hamiltonien d'une particule de charge  $q$  dont la vitesse est faible devant la vitesse de la lumière peut s'écrire :

$$H = q\varphi + p^2/2m \quad (8.123)$$

avec :

$$\vec{p} = m\vec{w} \quad (8.124)$$

Mais  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$  ne sont pas des variables conjuguées. On montre dans les traités d'électromagnétisme [292] que les variables canoniquement conjuguées sont  $\vec{r}$  et :

$$\vec{p}' = \vec{p} + q\vec{A} \quad (8.125)$$

On peut donc écrire  $H$  formellement en fonction de  $\vec{r}$  et  $\vec{p}'$  :

$$H = q\varphi + \frac{(\vec{p}' - q\vec{A})^2}{2m} \quad (8.126)$$

#### b) Hamiltonien classique pour un gaz de particules (théorie simplifiée)

L'hamiltonien d'un système de particules chargées n'est pas très facile à écrire si l'on désire tenir compte de façon exacte des deux espèces d'interactions, électriques et magnétiques, entre particules chargées. On peut cependant faire une théorie simplifiée (semi-relativiste) en supposant le plasma assez froid pour que les vitesses des particules soient faibles devant la vitesse de la lumière (plasma non relativiste), et en tenant alors compte des interactions magnétiques qui sont un effet relativiste en  $w/c$ , mais en négligeant les effets relativistes en  $w^2/c^2$  (variation de la masse, potentiels retardés). Dans ces conditions les champs microscopiques exacts produits en un point de l'espace qu'on prend comme origine, par un ensemble de particules de charges  $q_j$ , de positions  $\vec{r}_j$ , de vitesses  $\vec{w}_j$ , sont donnés par les formules :

$$\vec{E}_m = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla_i \left[ \sum_j \frac{q_j}{r_j} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j q_j \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \quad (8.127)$$

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_o}{4\pi} \nabla_i \times \left[ \sum_j q_j \vec{w}_j / r_j \right] = \frac{\mu_o}{4\pi} \sum_j q_j \frac{\vec{r}_j \times \vec{w}_j}{r_j^3} \quad (8.128)$$

Ces champs microscopiques sont des fonctions très complexes qui ont des fluctuations spatiales et temporelles très rapides. Ils tendent vers l'infini toutes les fois que l'on s'approche de l'une des particules du gaz. Cependant nous avons vu dans la section 1.4 que les interactions statistiquement dominantes dans un plasma sont les interactions collectives lointaines bien représentées par des champs macroscopiques moyens  $\vec{E}_M$  et  $\vec{B}_M$  qui sont par définition les solutions des équations de Maxwell macroscopiques :

$$\nabla \cdot \vec{E}_M = \rho / \epsilon_o \quad (8.129)$$

$$\nabla \times \vec{B}_M = \mu_o \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_M}{\partial t} \quad (8.130)$$

où  $\rho$  et  $\vec{J}$  sont les densités de charge et de courant macroscopiques dans le plasma.

Il est d'autre part facile de vérifier sur les formules (8.127) et (8.128) que si l'on considère une paire de particules  $i$  et  $j$ , les forces d'interactions électriques et magnétiques

$$\vec{X}_{ijE} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} q_i q_j \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} \quad (8.131)$$

$$\vec{X}_{ijM} = \frac{\mu_o}{4\pi} q_i q_j \vec{w}_i \times \frac{\vec{r}_{ij} \times \vec{w}_j}{r_{ij}^3} \quad (8.132)$$

sont telles que l'on a en ordre de grandeur :

$$|\vec{X}_{ijM}| / |\vec{X}_{ijE}| \sim w^2 / c^2 \quad (8.133)$$

Il est donc raisonnable, dans l'analyse dynamique d'un plasma, de négliger les effets magnétiques au niveau des interactions binaires et de ne conserver que la force d'interaction électrique (8.131). Il ne faut cependant pas en conclure que l'on a le droit au niveau macroscopique de négliger les interactions magnétiques. Ce paradoxe tient au fait que dans les plasmas  $\rho$  est en général très faible, le plasma n'étant jamais très éloigné de l'état d'équilibre de neutralité électrique, tandis que l'on ne peut rien dire *a priori* sur l'ordre de grandeur des courants  $\vec{J}$  circulant dans le plasma.

En conclusion, on peut écrire l'hamiltonien d'un plasma dans le cadre de cette théorie semi-relativiste sous la forme :

$$H = \sum_i \frac{1}{2m_i} (\vec{p}_i - q_i \vec{A}_i)^2 + \sum_i q_i \varphi_i + \sum_{i < j} \sum \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_o r_{ij}} \quad (8.134)$$

avec :

$$\vec{p}_i = m_i \vec{w}_i + q_i \vec{A}_i \quad (8.135)$$

Dans ces formules,  $\varphi_i$  et  $\vec{A}_i$  sont les potentiels au point  $\vec{r}_i$  d'un champ électromagnétique macroscopique et le dernier terme représente les interactions électrostatiques entre particules. Soulignons d'autre part à nouveau que  $\varphi_i$  n'est dû qu'aux sources extérieures mais que le potentiel vecteur  $\vec{A}_i$  est celui du champ self-consistent  $\vec{B}_M$  tenant compte à la fois des sources extérieures et des courants  $\vec{J}$  circulant dans le plasma. Avec ces approximations, on vérifie facilement que comme au paragraphe précédent  $\vec{r}_i$  et  $\vec{p}_i$  sont des variables conjuguées.

### c) Équation de Liouville pour un système de particules chargées (théorie simplifiée)

On peut maintenant établir l'équation de Liouville pour la fonction  $D(\vec{r}_i, \vec{w}_i, t)$  d'un système de particules chargées en faisant les mêmes approximations qu'au paragraphe précédent. Tout d'abord, on montre (cf. [297, p. 171]) que l'on a comme précédemment :

$$D(\vec{r}_i, \vec{w}_i, t) = m^{3N} D(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t) \quad (8.136)$$

D'autre part l'équation d'évolution (8.18) de  $\mathcal{D}$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \vec{w}_i \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \vec{r}_i} + \sum_i \left( \vec{X}_i + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{ij} + q \frac{d\vec{A}_i}{dt} \right) \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \vec{p}_i} = 0 \quad (8.137)$$

En désignant par  $\vec{X}_i + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{ij}$  la force totale appliquée au point  $i$  :

$$\vec{X}_i + \sum_{j \neq i} \vec{X}_{ij} = q_i [(\vec{E}_i + \vec{w}_i \times \vec{B}_i) + \vec{E}_i^l] \quad (8.138)$$

où  $\vec{B}_i$  est le champ magnétique d'origine extérieure et

$$\vec{E}_i^l = -\nabla_i \sum_{j \neq i} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (8.139)$$

le champ électrostatique d'interaction agissant sur la particule  $i$ . Finalement, en effectuant le changement de variables  $\vec{r}_i, \vec{p}_i, \mathcal{D} \rightarrow \vec{r}_i, \vec{w}_i, D$ , on obtient l'équation d'évolution de  $D$  sous une forme identique à (8.26). Dans le cadre des approximations faites, nous avons donc montré que l'équation de Liouville d'un gaz de particules chargées s'écrit comme celle d'un gaz de particules neutres.

## A8-2 Équation d'évolution de $f_1$

Multiplions l'équation (8.26) par  $N \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N$  et intégrons sur l'espace de ces  $6(N-1)$  variables.

- Le premier terme donne  $\partial f_1 / \partial t$ .
- Dans le second terme, on a tout d'abord un terme  $\vec{w}_1 \cdot \partial D / \partial \vec{r}_1$  qui donne facilement  $\vec{w}_1 \cdot \partial f_1 / \partial \vec{r}_1$ , puis une somme de  $(N-1)$  termes qui donnent :

$$\sum_{i \neq 1} N \int \vec{w}_i \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{r}_i} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N \quad (8.140)$$

$$= N(N-1) \int \vec{w}_2 \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{r}_2} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N \quad (8.141)$$

$$= \int \vec{w}_2 \left( \int_V \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{r}_2} \underline{dr}_2 \right) \underline{dw}_2$$

L'intégrale mise entre parenthèses est nulle si l'on fait l'hypothèse raisonnable que  $f_{12}$  est nulle quand le point 2 est sur la limite du volume  $V$  contenant le gaz.

- Dans le terme dû aux forces extérieures, on a de même tout d'abord le terme  $i = 1$  qui donne facilement :

$$\frac{\vec{X}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{w}_1} \quad (8.142)$$

puis  $(N - 1)$  termes, qui donnent :

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq 1} \frac{N}{m} \int X_i \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{w}_i} \underline{dr_2} \underline{dw_2} \dots \underline{dr_N} \underline{dw_N} & \quad (8.143) \\ & = \frac{1}{m} \int \vec{X}_2 \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_2} \underline{dr_2} \underline{dw_2} \\ & = \frac{1}{m} \int \underline{dr_2} \left[ \int \left( X_{2x} \frac{\partial f_{12}}{\partial w_{2x}} + X_{2y} \frac{\partial f_{12}}{\partial w_{2y}} + X_{2z} \frac{\partial f_{12}}{\partial w_{2z}} \right) \underline{dw_2} \right] \end{aligned}$$

Pour montrer que ce terme est également nul, on fait l'hypothèse que la force extérieure  $\vec{X}$  est telle que :

$$\frac{\partial X_x}{\partial w_x} = \frac{\partial X_y}{\partial w_y} = \frac{\partial X_z}{\partial w_z} = 0 \quad (8.144)$$

Cette hypothèse très générale peut paraître arbitraire. En fait elle est satisfaite dans les deux cas suivants :

- La force qui agit sur les particules est indépendante de leur vitesse.
- Si elle dépend de leur vitesse, sa composante dans une certaine direction ne dépend que des composantes de la vitesse dans les deux directions perpendiculaires ; la force de Lorentz entre dans ce cas.

L'hypothèse (8.144) paraît donc réalisée dans tous les cas pratiques. Dans ces conditions, on peut effectuer par exemple l'intégrale sur  $dw_{2x}$  comme si  $X_{2x}$  était constant, et le fait que  $f_{12}$  est forcément nul quand  $w_{2x}$  tend vers  $\pm\infty$  nous permet d'affirmer que le premier terme de l'intégrale est nul ; il en est de même pour les deux autres.

- Reste le dernier terme de (8.26), celui qui est dû aux forces d'interactions ; il comprend tout d'abord  $(N - 1)$  termes obtenus en prenant  $i = 1$  et  $j$  quelconque ; ces termes donnent :

$$\sum_{j=2}^N \frac{N}{m} \int \vec{X}_{1j} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{w}_1} \underline{dr_2} \underline{dw_2} \dots \underline{dr_N} \underline{dw_N}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{N(N-1)}{m} \int \vec{X}_{12} \cdot \frac{\partial D}{\partial \vec{w}_1} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \dots \underline{dr}_N \underline{dw}_N \\
 &= \frac{1}{m} \int \vec{X}_{12} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2
 \end{aligned}$$

Si l'on suppose que les forces d'interaction ne dépendent pas de la vitesse, nous pouvons encore écrire ce résultat sous la forme :

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_1} \cdot \int \vec{X}_{12} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \quad (8.145)$$

On peut vérifier, moyennant un calcul analogue à celui que nous avons fait ci-dessus, que les termes correspondant à  $i \neq 1$  donnent une contribution nulle. En regroupant les divers résultats obtenus, on arrive finalement à l'équation d'évolution (8.35) pour la fonction  $f_1$ .

### A8-3 Régime de fluide. Régime moléculaire

De manière générale, il est intéressant, dans toute expérience faisant intervenir un gaz, de comparer les dimensions du récipient contenant le gaz avec le *libre parcours moyen* des molécules de ce gaz entre deux collisions. Ce libre parcours moyen est toujours donné par la formule :

$$\ell = A/n < \sigma > \quad (8.146)$$

où  $A$  est une constante sans dimension voisine de l'unité et  $< \sigma >$  une valeur moyenne de la section efficace totale de collision ; les valeurs exactes de  $< \sigma >$  et de  $A$  dépendent de la forme de la fonction de distribution  $f_1$  et de la nature des interactions moléculaires qui interviennent (si le gaz est assez froid, les collisions dominantes sont élastiques, mais  $\sigma$  peut avoir, comme nous l'avons vu, des lois de variations en fonction de  $g$  très différentes). Quoi qu'il en soit, ces diverses difficultés n'entraînent en général sur  $\ell$  qu'une incertitude d'un facteur 1 à 5. Dans ces conditions, si l'on appelle  $h$  une dimension caractéristique du récipient, on peut distinguer deux régimes très différents :

- Les *régimes de fluide quasi continu* correspondant au cas  $\ell \ll h$  ; l'allure des trajectoires des molécules est représentée sur la figure 8.6(a). On voit que les molécules subissent presque uniquement des collisions entre elles, et très rarement des collisions contre les parois. Les parois jouent un rôle relativement faible ; elles entourent un nuage de molécules qui interagissent essentiellement entre elles et qui semblent constituer un fluide quasi continu.

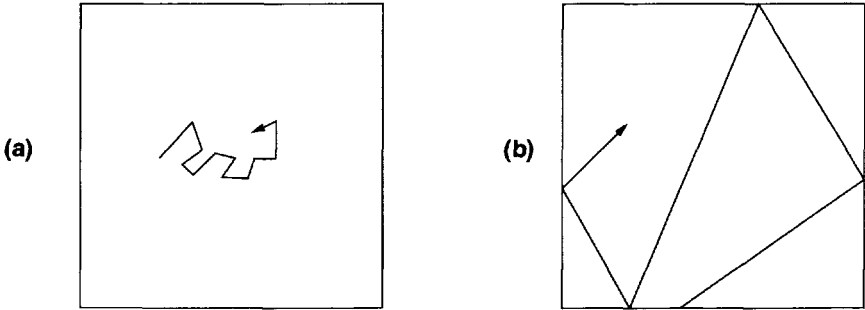


Figure 8.6 : Interactions gaz-récipient.

(a) Régime de fluide :  $l \ll h$ .

(b) Régime moléculaire :  $h \ll l$ .

$l$  libre parcours moyen,  $h$  dimension du récipient.

- Les *régimes moléculaires* correspondant au cas opposé  $h \ll l$  ; les trajectoires des particules ont l'aspect représenté sur la figure 9.8(b). On voit que les collisions entre deux molécules à l'intérieur de l'enceinte sont très rares. Les molécules vont essentiellement d'une paroi à l'autre ; l'action des parois pourra être prépondérante dans les propriétés du dispositif. D'autre part, on ne peut pas parler d'une masse de fluide située à l'intérieur de l'enceinte ; on dit que le dispositif fonctionne en régime moléculaire.

Pour pouvoir déterminer rapidement le cas dans lequel on se trouve en pratique, il est commode de se rappeler les ordres de grandeur des libres parcours moyens dans des conditions typiques : lorsque la pression est égale à  $10^{-4}$  torr, le libre parcours moyen est de l'ordre de un mètre ; on sera alors en général en régime moléculaire. Comme d'autre part le libre parcours moyen est inversement proportionnel à  $n$ , c'est-à-dire à la pression, on en déduit que, à la pression atmosphérique, les libres parcours moyens sont de l'ordre du dixième de micron, de sorte qu'on a en général à ce moment-là un régime de fluide quasi continu.

## A8-4 Notions sur la théorie cinétique des gaz réactifs

### a) Section efficace différentielle d'une collision 12/34...

Pour une collision de type déterminé, les particules qui apparaissent après la collision peuvent en général exister dans un nombre infini de configurations ; même si avant la collision les vitesses  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont déterminées, l'énergie cinétique  $T + Q$  disponible après la collision peut en effet être partagée *a priori* de façon variée entre les particules

3, 4, ... ; la répartition d'énergie dépend en général des directions des vitesses  $\vec{w}_3, \vec{w}_4, \dots$ . Dans les calculs de théorie cinétique il est nécessaire en principe de connaître la probabilité de chaque configuration  $(\vec{w}_3, \vec{w}_4, \dots)$  lorsque la configuration initiale  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$  est déterminée. Ceci peut se faire en introduisant la notion de section efficace différentielle de collision inélastique. Si l'on désigne symboliquement par  $C$  la configuration après la collision et par  $dC$  une variation possible de cette configuration, on définira une section efficace différentielle  $\sigma_{12}^{34} \dots (\vec{w}_1, \vec{w}_2, C) dC$  en considérant comme au paragraphe précédent deux faisceaux de particules 1 et 2 qui se croisent ; on compte maintenant le nombre de réactions 12/34... qui se produisent par seconde et par  $\text{cm}^3$  en laissant les particules 34... dans une configuration située dans un volume  $dC$  autour de  $C$  et l'on écrit ce nombre sous la forme :

$$\frac{dN}{drdt} = \sigma_{12}^{34} \dots (\vec{w}_1, \vec{w}_2, C) dC g_{12} f_1(\vec{w}_1) f_2(\vec{w}_2) dC \underline{dw_1 dw_2} \quad (8.147)$$

avec :

$$\vec{g}_{12} = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 \quad (8.148)$$

Si l'on change de repère en observant les deux faisceaux dans un autre système,  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  deviennent  $\vec{w}'_1$  et  $\vec{w}'_2$ ,  $C$  devient  $C'$  et l'on a :

$$\sigma_{12}^{34} \dots (\vec{w}_1, \vec{w}_2, C) dC = \sigma_{12}^{34} \dots (\vec{w}'_1, \vec{w}'_2, C') dC' \quad (8.149)$$

Il en résulte qu'en général  $\sigma_{12}^{34} \dots$  n'est pas le même dans les deux systèmes. Par contre la section efficace totale qui s'obtient en intégrant (8.149) est conservée.

## b) Cas des collisions 12/14

Comme nous l'avons fait remarquer dans la section 8.6, l'équation de Boltzmann (8.120) doit être modifiée lorsque les particules 1 et 3 sont identiques. Nous devons maintenant considérer pour le calcul de  $\Gamma_1^+$  et  $\Gamma_1^-$  deux catégories de collisions ayant chacune leurs inverses :

– les collisions  $w_1 w_2 / w'_1 w'_4$  et  $w'_1 w'_4 / w_1 w_2$

– les collisions  $w_1 w_4 / w'_1 w'_2$  et  $w'_1 w'_2 / w_1 w_4$

Les premières sont celles dont nous avons tenu compte au paragraphe précédent ; elles conduisent à un terme de Boltzmann qui se déduit simplement de (8.147) en y changeant l'indice 3 en 1. Les secondes sont celles où la particule 1 joue le rôle dévolu précédemment à la particule 3.

On obtient donc au total, avec les mêmes notions que précédemment :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{1234} &= \int \int \int (f'_1 f'_4 - f_1 f_2) g_{12} \sigma_{12}^{14}(g_{12}, \chi, \varphi) \sin \chi \, d\chi \, d\varphi \, \underline{dw_2} \\ &+ \int \int \int (f''_1 f''_2 - f_1 f_4) g_{14} \sigma_{14}^{12}(g_{14}, \chi, \varphi) \sin \chi \, d\chi \, d\varphi \, \underline{dw_4} \end{aligned} \quad (8.150)$$

$f''_1$  et  $f''_2$  désignent maintenant les valeurs prises par  $f_1$  et  $f_2$  pour les vitesses finales  $w''_1, w''_2$  correspondant après une collision 14/12 d'angles  $\chi$  et  $\varphi$  aux vitesses initiales  $w_1$  et  $w_4$ .

## c) Cas des collisions sur une particule lourde :

collisions 12/14 et 12/141 avec  $m_1 \ll m_2, m_4$

Dans un certain nombre de collisions il y a une seule particule lourde avant comme après la collision, les autres particules étant beaucoup plus légères. C'est le cas notamment



pour les réactions d'excitation et d'ionisation par choc électronique. On peut alors traiter ces collisions dans une première approximation en faisant l'hypothèse que la masse de la particule lourde est infinie et sa vitesse négligeable (modèle de Lorentz). On considère donc la particule lourde comme un centre d'interaction fixe. Le centre de gravité du système se confond avec ce point.

Le cas des collisions 12/14 avec  $m_1 \ll m_2, m_4$  se déduit directement de (8.150) en y remplaçant  $f_2$  et  $f_4$  par deux fonctions de Dirac  $n_2\delta(w_2^2)$  et  $n_4\delta(w_4^2)$  et en y remplaçant  $g_{12}$  et  $g_{14}$  par  $w_1$  ; on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} \Big|_{12=14} = & n_4 w_1 \int f_1' \sigma_{12}^{14}(w_1, \chi, \varphi) d\Omega - n_2 w_1 \sigma_{12}^{14}(w_1) f_1 \\ & + n_2 \frac{w_1''^2}{w_1} \int f_1'' \sigma_{12}^{14}(w_1'', \chi, \varphi) d\Omega - n_4 w_1 \sigma_{14}^{12}(w_1) f_1 \end{aligned} \quad (8.151)$$

où  $\sigma_{12}^{14}(w_1)$  et  $\sigma_{14}^{12}(w_1)$  sont les sections efficaces totales. Dans le calcul du troisième terme nous avons utilisé la relation de microréversibilité (8.118) ainsi que la relation :

$$\underline{dw_1''} = \frac{w_1''}{w_1} \underline{dw_1} \quad (8.152)$$

entre les deux éléments de volumes associés par la collision inélastique.

La signification physique des quatre termes de (8.151) peut être rendue plus claire au moyen du diagramme de la figure 8.7, tracé en supposant que la réaction 12/14 est endothermique. Sur ce diagramme on a représenté les quatre classes de collisions par des flèches verticales rangées de gauche à droite dans le même ordre que les termes de la formule (8.151) ; les flèches tournées vers le bas représentent des collisions inélastiques de première espèce, celles tournées vers le haut des collisions superélastiques ; à l'origine de chaque flèche on a indiqué la densité ( $n_2$  ou  $n_4$ ) à laquelle est proportionnel le nombre de collisions de ce type.

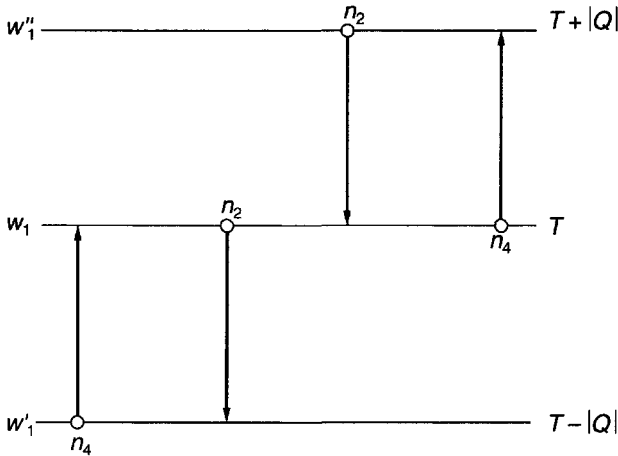


Figure 8.7 : Les quatre types de collision 12 – 14.

Le cas des collisions du type 12/141 avec toujours  $m_1 \ll m_2, m_4$ , dont le prototype est l'ionisation par choc électronique, ne peut pas être traité complètement car nous

ne savons pas comment décrire la collision inverse (recombinaison à trois corps) qui est une réaction ternaire. Nous nous contenterons d'étudier comment l'on peut définir une section efficace différentielle pour la réaction directe. Le schéma de la collision est représenté sur la figure 8.8 ;  $w'_1, w''_1$  et  $w'_4$  sont les vecteurs vitesses après la collision ; on peut considérer qu'ils constituent un ensemble de neuf inconnues scalaires ; ces neuf inconnues doivent satisfaire à un système de quatre équations scalaires (équation vectorielle de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie) ; il y a donc cinq inconnues indéterminées ; nous pourrions donc par exemple fixer les valeurs prises après la collision par le module de  $w'_1$  et les angles polaires  $\chi'_1, \varphi'_1, \chi''_1, \varphi''_1$  représentant les directions de  $w'_1$  et  $w''_1$  repérées par rapport à la vitesse initiale  $w_1$ . Pour des collisions ayant cette configuration finale on peut définir une section efficace différentielle :

$$\sigma(w_1, w'_1, \chi'_1, \varphi'_1, \chi''_1, \varphi''_1) dw'_1 d\Omega'_1 d\Omega''_1 \quad (8.153)$$

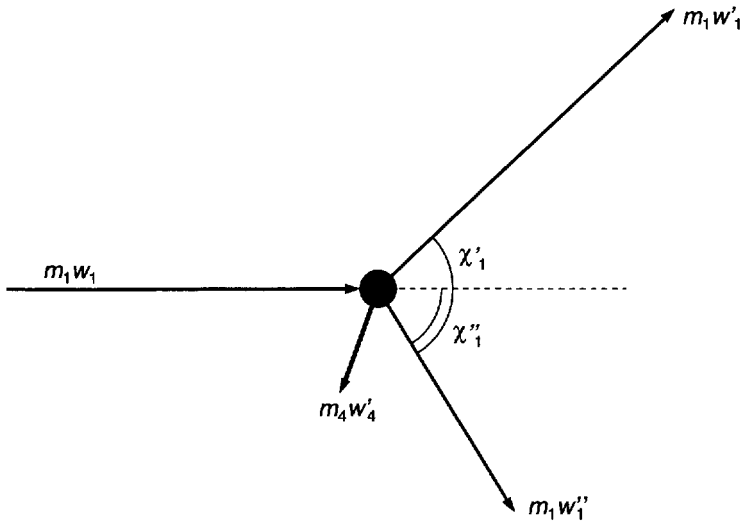


Figure 8.8 : Collision 12/141 avec  $m_1 \ll m_2, m_4$ .

Le module de  $w''_1$  est d'ailleurs parfaitement déterminé dans ces collisions : en effet l'énergie emmenée par la particule 4 est négligeable du fait de sa grande masse et l'on a :

$$\frac{1}{2} m_1 w'_1{}^2 + \frac{1}{2} m_1 w''_1{}^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1{}^2 + Q \quad (8.154)$$

## 8.8 Problèmes

### P8-1 Structure des corrélations à l'équilibre thermodynamique

On considère un gaz pur à l'équilibre à la température  $T$ .

- a) En admettant qu'il n'y a pas d'interaction dépendant de la vitesse entre les particules, montrer que la densité dans l'espace des phases est de la forme :

$$D(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) M(\vec{w}_1) M(\vec{w}_2) \dots M(\vec{w}_N) \quad (8.155)$$

où les fonctions  $M$  sont des maxwelliennes à la température  $T$ . En conclure qu'il y a des corrélations de position mais pas de corrélations de vitesse.

- b) Calculer  $f_1$  et  $n_1$ .  
 c) Calculer  $f_{12}$  et  $n_{12}$ .  
 d) Montrer qu'on a les relations suivantes :

$$kT \frac{\partial n_1}{\partial \vec{r}_1} = n_1 \vec{X}_1 + \int n_{12} \vec{X}_{12} \underline{dr}_2 \quad (8.156)$$

$$kT \frac{\partial n_{12}}{\partial \vec{r}_1} = n_{12} (\vec{X}_1 + \vec{X}_{12}) + \int n_{123} \vec{X}_{13} \underline{dr}_3 \quad (8.157)$$

$$kT \frac{\partial n_{12}}{\partial \vec{r}_2} = n_{12} (\vec{X}_2 + \vec{X}_{21}) + \int n_{123} \vec{X}_{23} \underline{dr}_3 \quad (8.158)$$

(relations de récurrence d'Yvon [94]).

## P8-2 \*Corrélations dans un plasma à l'équilibre thermodynamique

Le calcul classique de la longueur de Debye fait dans la section 1.4 n'est pas complètement convaincant car il traite le problème des corrélations dans un plasma en équilibre thermodynamique sans introduire la notion de densité double. On peut l'améliorer [105] en utilisant les relations de récurrence (8.157) et (8.158) du problème P8-1. On cherche donc à les résoudre en supposant que le plasma est homogène, isotrope, et n'est soumis à aucune force extérieure. Pour cela, il faut d'abord les rendre déterminées en faisant une hypothèse sur les corrélations triples ; on admettra (hypothèse de superposition de Kirkwood) que les corrélations triples se déduisent des corrélations doubles au moyen de la formule :

$$\frac{n_{ijk123}}{n_i n_j n_k} = \left( \frac{n_{ij12}}{n_i n_j} \right) \left( \frac{n_{jk23}}{n_j n_k} \right) \left( \frac{n_{ik13}}{n_i n_k} \right) \quad (8.159)$$

Cette hypothèse demanderait à être discutée (cf. [94], [297]).

- a) Linéariser le système en admettant que les corrélations sont faibles et en posant :

$$n_{ij12} = n_i n_j (1 + \epsilon_{ij12}) \quad (8.160)$$

et montrer que (8.157) devient :

$$kT \frac{\partial \epsilon_{ij12}}{\partial \vec{r}_1} = \vec{X}_{ij12} + \sum_k n_k \int \epsilon_{jk23} \vec{X}_{ik13} \underline{dr}_3 \quad (8.161)$$

- b) En se limitant au cas d'un plasma constitué d'électrons et d'une seule espèce d'ions de charge  $Ze$ , on peut prévoir qu'il existe quatre densités doubles  $n_{ii12}$ ,  $n_{ee12}$ ,  $n_{ie12}$  et  $n_{ei12}$ , et écrire à partir de l'équation ci-dessus un système de huit équations. En fait, par suite de l'homogénéité et de l'isotropie du plasma, on a :

$$n_{ie12} = n_{ei12} \quad (8.162)$$

c) En introduisant la force de Coulomb :

$$\overrightarrow{X_{ij12}} = Z_i Z_j e^2 \frac{\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_1'}}{r_{12}^3} \quad (8.163)$$

et en combinant des équations du type (8.161) montrer que l'on a

$$\epsilon_{ii12} = Z^2 \epsilon_{ee12} \quad (8.164)$$

$$\epsilon_{ie12} = -Z \epsilon_{ee12} \quad (8.165)$$

d) En déduire finalement les trois relations :

$$n_{ie12} = n_e n_i \{ (1 + Z(r_0/r) \exp -r/\lambda_s) \} \quad (8.166)$$

$$n_{ii12} = n_i^2 \{ (1 - Z^2(r_0/r) \exp -r/\lambda_s) \} \quad (8.167)$$

$$n_{ee12} = n_e^2 \{ (1 - (r_0/r) \exp -r/\lambda_s) \} \quad (8.168)$$

où  $r_0$  et  $\lambda_s$  sont donnés par les formules (1.41) et (1.68).

## P8-3 Invariants intégraux de l'équation de Boltzmann

a) Établir à partir des propriétés de symétrie et de réversibilité des collisions (cf. aussi [101]) la formule générale :

$$C[A(\overrightarrow{w_1})] = \frac{1}{4} \int [A(\overrightarrow{w_1}) + A(\overrightarrow{w_2}) - A(\overrightarrow{w_1'}) - A(\overrightarrow{w_2'})] J(f_1) \underline{dw_1} \quad (8.169)$$

b) Démontrer que l'invariant intégral scalaire le plus général est de la forme (8.85) :

$$\Psi \equiv a + \overrightarrow{b} \cdot m \overrightarrow{w} + c \frac{mw^2}{2} \quad (8.170)$$

c) Démontrer que l'invariant intégral le plus général est de la forme :

$$\overrightarrow{\Psi} = \overrightarrow{a} + \overline{\overline{b}} \cdot m \overrightarrow{w} + \overline{c} mw^2/2 \quad (8.171)$$

pour les vecteurs et de la forme :

$$\Psi = \overline{\overline{a}} + \overline{\overline{b}} \cdot m \overrightarrow{w} + \overline{\overline{c}} mw^2/2 \quad (8.172)$$

pour les tenseurs du deuxième ordre.

## P8-4 Solution générale maxwellienne déplacée

En partant de l'équation (8.85) montrer que la solution d'équilibre la plus générale de l'équation de Boltzmann dans un gaz homogène est la "maxwellienne déplacée" :

$$f(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{w}, t) = n \left( \frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} C \frac{\exp \frac{-m|\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}|^2}{2\kappa T}}{2\kappa T} \quad (8.173)$$

[Note : on considérera la quantité  $\ln f$ .]

# Chapitre 9

## Hydrodynamique et magnétohydrodynamique

### 9.1 Introduction

Dans ce chapitre nous établissons et discutons tout d'abord (section 9.2) les équations générales de l'hydrodynamique d'un gaz pur à partir des équations cinétiques. Nous appliquons donc la méthode régressive définie dans la section 8.1 en passant au niveau macroscopique. Dans la section 9.3 nous examinons ensuite l'application de ces équations aux cas des mélanges gazeux et des plasmas. Nous essayons de voir dans quelle mesure le comportement du milieu est multifluide ou monofluide. Nous voyons ainsi qu'un plasma placé dans un champ magnétique assez fort se comporte comme un monofluide gelé dans le champ magnétique : c'est la description magnétohydrodynamique (MHD) des plasmas, qui est bonne pour la dynamique de ceux-ci en basse fréquence. Nous faisons le recoupement, dans la section 9.4, de cette théorie avec la plus ancienne magnétohydrodynamique des liquides. Nous montrons enfin dans la section 9.5 qu'elle sert de base à l'analyse du confinement magnétique des plasmas, et que celui-ci est limité par les effets de diamagnétisme. Il l'est en pratique surtout par diverses instabilités dont les premières sont décrites par la MHD, mais nous n'aborderons pas ce problème qui sort du cadre de ce livre (cf. par exemple [328]).

Nous commencerons donc par établir et discuter dans la section 9.2 les équations hydrodynamiques d'un gaz pur (gaz à une seule composante) et dans la section 9.3 leur généralisation à un mélange gazeux, ce qui couvre en particulier le cas des plasmas.

Dans la section 9.4 nous examinerons dans quelles conditions un fluide multiple se comporte globalement comme un fluide unique. Cette question est, comme nous le verrons, liée à la description magnétohydrodynamique d'un fluide, dont nous discuterons les approximations. Une application très importante de la MHD est le confinement magnétique des plasmas dans les réacteurs à fusion contrôlée ; ce sera le sujet de la section 9.5.

Nous discuterons enfin succinctement, dans la section 9.6, les changements à introduire dans les équations hydrodynamiques pour décrire les gaz réactifs, où il y a entre les particules des collisions inélastiques.

## 9.2 Équations hydrodynamiques d'un gaz pur

### 9.2.1 Définitions des grandeurs hydrodynamiques

L'état microscopique d'un gaz pur est assez bien défini si l'on connaît la fonction de distribution simple<sup>1</sup> des vitesses  $f(\vec{r}, \vec{w}, t)$ . Dans de nombreux cas, il est difficile ou inutile de chercher à connaître cette fonction. On utilisera alors une description plus simple en introduisant les grandeurs macroscopiques suivantes :

- la densité :

$$n = \int f \, d\underline{w} \quad (9.1)$$

- la vitesse moyenne du fluide :

$$\vec{v} = \frac{1}{n} \int \vec{w} f \, d\underline{w} \quad (9.2)$$

- l'énergie cinétique moyenne des particules :

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} m w^2 f \, d\underline{w} \quad (9.3)$$

- le tenseur de pression cinétique :

$$\bar{\Psi} = m \int (\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v}) f \, d\underline{w} \quad (9.4)$$

où le produit  $(\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v})$  est tensoriel, à ne pas confondre avec le produit scalaire  $(\vec{w} - \vec{v}) \cdot (\vec{w} - \vec{v})$ .

---

1. À partir de maintenant nous omettrons en général l'indice 1 et désignerons simplement par  $f$  une fonction de distribution simple.

- le tenseur de flux d'énergie thermique :

$$\overline{\overline{Q}} = m \int (\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v}) f d\vec{w} \quad (9.5)$$

où  $(\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v})$  est encore un produit tensoriel. Dans ces diverses formules  $d\vec{w}$  est un élément de volume de l'espace des vitesses ; les intégrations sont étendues à tout cet espace et les moyennes considérées sont des fonctions de  $\vec{r}$  et de  $t$  en général.

Les grandeurs  $n, \vec{v}, \overline{\overline{\Psi}}, \overline{\overline{Q}}$  constituent (aux facteurs  $m$  ou  $1/n$  près) ce que l'on appelle les quatre premiers moments de la fonction de distribution simple. Ce sont les grandeurs classiques de l'hydrodynamique ; les deux premières ont un sens évident.

### a) Pression cinétique, flux de quantité de mouvement, densité d'énergie cinétique

La pression cinétique  $\overline{\overline{\Psi}}$  ne se confond pas exactement avec la pression sur une surface, définie dans les cours d'hydrostatique élémentaire. C'est en fait une mesure de l'agitation thermique du fluide.  $\overline{\overline{\Psi}}$  serait en effet nul si toutes des particules avaient une même vitesse  $\vec{v}$ , l'écart  $\vec{w} - \vec{v}$  étant alors nul. Nous verrons toutefois dans la section 9.2.5 que la divergence de  $\overline{\overline{\Psi}}$  se comporte comme une force par unité de volume ; cela justifie le nom de pression donné à  $\overline{\overline{\Psi}}$ . Plus précisément, nous montrerons que la pression totale est la somme de  $\overline{\overline{\Psi}}$  et du tenseur  $\overline{\overline{\pi}}$  de pression interparticulaire que nous introduirons dans la section 9.2.4.

Si le tenseur  $\overline{\overline{\Psi}}$  est diagonal unitaire, on dit que la pression cinétique est scalaire ou isotrope. Dans le cas général  $\overline{\overline{\Psi}}$  n'est pas diagonal unitaire et la pression est anisotrope.

D'un point de vue dimensionnel, la formule (9.4) montre que  $\overline{\overline{\Psi}}$  a les dimensions d'une densité d'énergie cinétique ou d'un flux de quantité de mouvement. Pour préciser ceci on peut tout d'abord écrire :

$$(\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v}) = \vec{w}\vec{w} - \vec{v}\vec{w} - \vec{w}\vec{v} + \vec{v}\vec{v} \quad (9.6)$$

d'où l'on déduit :

$$\overline{\overline{\Psi}} = m \int \vec{w}\vec{w} f d\vec{w} - nm\vec{v}\vec{v} \quad (9.7)$$

Les deux termes qui figurent au deuxième membre peuvent être considérés comme des flux de quantité de mouvement. La densité de quantité de

mouvement totale dans le gaz étant évidemment :

$$\vec{G} = m \int \vec{w} f \underline{dw} = n m \vec{v} \quad (9.8)$$

le tenseur

$$\overline{\overline{T}} = m \int \vec{w} \vec{w} f \underline{dw} \quad (9.9)$$

est le flux de quantité de mouvement. L'équation (9.7) permet de décomposer ce flux en deux termes selon la formule :

$$\overline{\overline{T}} = n m \vec{v} \vec{v} + \overline{\overline{\Psi}} \quad (9.10)$$

Le premier est le flux "convectif" de quantité de mouvement, et le deuxième  $\overline{\overline{\Psi}}$  est donc le supplément de flux de quantité de mouvement produit par l'agitation thermique.

En prenant la trace de l'équation ci-dessus on obtient une relation analogue concernant la densité d'énergie cinétique :

$$U_K = n \bar{u} = \frac{1}{2} n m v^2 + \frac{1}{2} \text{Trace } \overline{\overline{\Psi}} \quad (9.11)$$

dans laquelle  $1/2 n m v^2$  est la densité d'énergie de convection et  $1/2 \text{Trace } \overline{\overline{\Psi}}$  la contribution supplémentaire apportée par l'agitation thermique.

## b) Flux d'énergie cinétique et flux de chaleur

Le tenseur  $\overline{\overline{Q}}$  a les dimensions d'un flux d'énergie. Mais il extrapole dans une large mesure cette notion élémentaire. Pour préciser ceci, partons de l'identité :

$$\begin{aligned} (w-v)_x(w-v)_y(w-v)_z = \\ w_x w_y w_z - (v_x v_y w_z + v_x w_y v_z + w_x v_y v_z) + 2v_x v_y v_z \\ - [v_x(w-v)_y(w-v)_z + v_y(w-v)_z(w-v)_x + v_z(w-v)_x(w-v)_y] \end{aligned} \quad (9.12)$$

d'où l'on déduit par intégration :

$$m \int \vec{w} \vec{w} \vec{w} f \underline{dw} = n m \vec{v} \vec{v} \vec{v} + (\vec{v}, \overline{\overline{\Psi}}) + \overline{\overline{Q}} \quad (9.13)$$

en désignant par  $(\vec{v}, \overline{\overline{\Psi}})$  le produit "permutatif" défini par la relation :

$$(\vec{v}, \overline{\overline{\Psi}})_{xyz} = v_x \Psi_{yz} + v_y \Psi_{zx} + v_z \Psi_{xy} \quad (9.14)$$



On peut donc, comme pour  $\overline{\overline{\Psi}}$ , considérer que  $\overline{\overline{Q}}$  est la différence entre un flux d'“agitation” total [premier membre de (9.13)] et des flux d'“agitation” convectifs [termes en  $\vec{v} \vec{v} \vec{v}$  et  $\vec{v} \cdot \overline{\overline{\Psi}}$  dans (9.13)]. Nous employons ce mot “agitation” pour désigner une grandeur qui a les dimensions de l'énergie, mais le caractère tensoriel d'un flux de quantité de mouvement décrivant les anisotropies du milieu.

Il est généralement plus commode de considérer un vecteur flux de chaleur  $\vec{q}$  qui ne décrit que partiellement les anisotropies du flux d'“agitation”. Pour cela on prend la trace de  $\overline{\overline{Q}}$  sur deux indices ; autrement dit on pose :

$$q_i = \frac{1}{2} \sum_j Q_{ijj} \quad (9.15)$$

soit :

$$\vec{q} = \frac{m}{2} \int (\vec{w} - \vec{v}) |\vec{w} - \vec{v}|^2 f \underline{dw} \quad (9.16)$$

En faisant apparaître flux total et flux convectif on obtient compte tenu de (9.12) :

$$\frac{m}{2} \int \vec{w} w^2 f \underline{dw} = \frac{nm \vec{v} v^2}{2} + \vec{v} \cdot (\overline{\overline{\Psi}} + \frac{1}{2} \text{Trace} \overline{\overline{\Psi}}) + \vec{q} \quad (9.17)$$

L'intégrale qui figure au premier membre est le *flux total d'énergie cinétique* :

$$\vec{S}_K = \frac{m}{2} \int \vec{w} w^2 f \underline{dw} \quad (9.18)$$

En combinant les équations (9.13) et (9.17) on peut finalement écrire ce flux sous la forme :

$$\vec{S}_K = \vec{v} U_K + \vec{v} \cdot \overline{\overline{\Psi}} + \vec{q} \quad (9.19)$$

On peut donc considérer que le flux d'énergie cinétique total est la somme du flux  $\vec{v} U_K$  transporté convectivement par les particules du vecteur  $\vec{v} \cdot \overline{\overline{\Psi}}$  et du flux de chaleur proprement dit  $\vec{q}$ .

## 9.2.2 Équation de transport d'une grandeur

$$A(\vec{r}, \vec{w}, t)$$

Nous allons maintenant établir les équations d'évolution des diverses grandeurs hydrodynamiques. On les obtient en appliquant la méthode régressive (intégration sur  $\vec{w}$ ) à la première des équations cinétiques

(équation d'évolution de  $f_1$ ). Soit donc  $f(\vec{r}, \vec{w}, t)$  la fonction de distribution simple ; elle obéit à l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = - \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{int}} \quad (9.20)$$

où  $\vec{X}$  est la force extérieure agissant sur les particules. Le second membre représente les interactions entre particules.

Soit, de façon générale,  $A(\vec{r}, \vec{w}, t)$  une fonction du vecteur vitesse, du vecteur position et du temps. Multiplions l'équation ci-dessus par  $A$ , et effectuons une intégration sur tout l'espace des vitesses. Ce calcul est développé dans l'appendice A9-2 ; il conduit au résultat suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\bar{A}) - n \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} + \nabla \cdot n \overline{\vec{w} A} - n \overline{\vec{w} \cdot \nabla A} - n \frac{\overline{\vec{X}}}{m} \cdot \frac{\partial A}{\partial \vec{w}} = C(A) \quad (9.21)$$

dans lequel on a introduit la valeur moyenne  $\overline{A(\vec{r}, t)}$  de la grandeur  $A$  définie par l'équation :

$$\overline{A(\vec{r}, t)} = \frac{1}{n} \int A(\vec{r}, \vec{w}, t) f \, d\vec{w} \quad (9.22)$$

et le terme :

$$C(A) \equiv - \int A \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{int}} d\vec{w} \quad (9.23)$$

L'équation (9.21) est l'équation de transport de la grandeur  $A$ . En remplaçant  $A$  par diverses fonctions de plus en plus compliquées de la vitesse, nous obtiendrons une suite d'équations hydrodynamiques.

Lorsque  $A$  est fonction seulement de  $\vec{w}$  (mais non de  $\vec{r}$  ni de  $t$ ) l'équation de transport (9.21) s'écrit plus simplement :

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\bar{A}) + \nabla \cdot F(A) = n \frac{\overline{\vec{X}}}{m} \cdot \frac{\partial A}{\partial \vec{w}} + C(A) \quad (9.24)$$

avec :

$$F(A) = n \overline{\vec{w} A} \quad (9.25)$$

Sous cette forme on reconnaît une équation de conservation de la grandeur  $A$  :  $n\bar{A}$  et  $F(A)$  sont la densité et le flux de cette grandeur en un point du fluide. Les deux termes de "source" qui figurent au second membre représentent la création éventuelle d'une certaine quantité de cette grandeur par unité de temps et de volume respectivement par la force extérieure et par les interactions entre particules.

### 9.2.3 Propriétés des termes d'interaction $C(A)$

On peut expliciter les termes d'interaction en utilisant l'expression générale de  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{int}}$  fournie par la première équation (8.48) du système BBGKY.

On obtient ainsi pour  $C(A)$  au point de position  $\vec{r}_1$  :

$$C(A_1) = - \int A_1 \frac{\vec{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \vec{w}_1} \underline{dw_1} \underline{dr_2} \underline{dw_2} \quad (9.26)$$

Le calcul de ces intégrales d'interactions est développé dans l'appendice A9-1. Nous nous contentons ici de résumer des résultats selon les approximations faites au sujet de l'opérateur de collision.

#### a) Équation de Boltzmann

Dans ce cas on a :

$$C(1) = 0 \quad (9.27)$$

$$C(m\vec{w}) = 0 \quad (9.28)$$

$$C(mw^2/2) = 0 \quad (9.29)$$

et en général, comme nous l'avons vu dans la section 8.4,  $C(A) \neq 0$  pour toute autre fonction  $A$  qui n'est pas une combinaison de 1,  $\vec{w}$  et  $w^2$ .

#### b) Équation de Vlasov

Les calculs de l'appendice A9-1 donnent :

$$C(1) = 0 \quad (9.30)$$

$$C(m\vec{w}) = nq\vec{E}' \quad (9.31)$$

$$C(mw^2/2) = nq\vec{v} \cdot \vec{E}' \quad (9.32)$$

où  $\vec{E}'$  est le champ de charge d'espace donné au point 1 par la formule :

$$q\vec{E}'_1 = \int n_2 \vec{X}_{12} \underline{dr_2} \quad (9.33)$$

où  $\vec{X}_{12}$  est comme au chapitre 8 la force exercée par la particule 2 sur la particule 1. De manière générale on a :

$$C(A) = n \frac{q}{m} \vec{E}' \cdot \overline{\frac{\partial A}{\partial \vec{w}}} \quad (9.34)$$

On voit, comme il fallait s'y attendre, que dans ce modèle de Vlasov les interactions interviennent seulement dans les équations de transport à travers le champ de charge d'espace  $\vec{E}'$  : en comparant les formules (9.24) et (9.34) on voit qu'il suffit d'ajouter à la force d'origine extérieure  $\vec{X}$  la force  $q\vec{E}'$  produite par ce champ de charge d'espace.

### c) Cas général

En faisant comme seules hypothèses que les forces d'interactions  $\vec{X}_{12}$  ne dépendent pas des vitesses et que le gaz est faiblement inhomogène (longueurs caractéristiques des variations spatiales  $\gg$  portée des forces) on obtient :

$$C(1) = 0 \quad (9.35)$$

$$C(m\vec{w}) \equiv \vec{P} = -\nabla \cdot \bar{\pi} \quad (9.36)$$

$$C(mw^2/2) \equiv \vec{v} \cdot \vec{P} - \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad (9.37)$$

où  $\bar{\pi}$  est le tenseur de pression "interparticulaire" défini au point 1 par l'intégrale :

$$\bar{\pi}_1 = -\frac{1}{2} \int \vec{X}_{12} \vec{r}_{12} n_{12} d\vec{r}_2 \quad (9.38)$$

et  $\vec{\sigma}$  un certain flux d'énergie lié aux corrélations et défini par la formule (9.227) dans l'appendice A9-1.

## 9.2.4 Les trois équations fondamentales de conservation

### a) Conservation des particules

Posons tout d'abord dans l'équation (9.24)  $A \equiv 1$ . On obtient l'équation de conservation des particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \vec{v} = 0 \quad (9.39)$$

dans laquelle le terme  $C(1)$  s'est annulé comme il est montré dans l'appendice A9-1. Cette propriété est toujours vraie dans des gaz non réactifs que nous étudions dans tout le début de ce chapitre. Dans un gaz réactif, il y aurait des collisions inélastiques pouvant créer ou détruire des particules et on aurait alors au deuxième membre un terme de source positif ou négatif (cf. section 9.6).

**b) Conservation de la quantité de mouvement**

Posons maintenant dans (9.24)  $A \equiv m \vec{w}$ . On obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m \vec{v}) + \nabla \cdot n m \overline{\vec{w} \vec{w}} = n \overline{\vec{X}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{w}} (m \vec{w}) + C(m \vec{w}) \quad (9.40)$$

En tenant compte de (9.36) et de l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}} (m \vec{w}) = m \vec{\delta} \quad (9.41)$$

on obtient l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (n m \vec{v}) + \nabla \cdot n m \overline{\vec{w} \vec{w}} = n \overline{\vec{X}} - \nabla \cdot \overline{\vec{\pi}} \quad (9.42)$$

On y vérifie bien, comme nous l'avons vu au paragraphe 9.2.1 a), que le tenseur  $nm \overline{\vec{w} \vec{w}}$  est le flux de quantité de mouvement, et l'on voit apparaître au deuxième membre les deux termes de création de quantité de mouvement par les forces extérieures et les interactions.

On écrit souvent cette équation de conservation sous une forme légèrement différente en introduisant le tenseur de pression cinétique au lieu du flux  $nm \overline{\vec{w} \vec{w}}$  et en tenant compte de l'équation de conservation des particules. Le premier membre de (9.42) peut alors s'écrire :

$$n m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} (\nabla \cdot n m \vec{v}) + \nabla \cdot n m \vec{v} \vec{v} + \nabla \cdot \overline{\vec{\Psi}} \quad (9.43)$$

Compte tenu de l'identité :

$$\nabla \cdot n m \vec{v} \vec{v} \equiv \vec{v} (\nabla \cdot n m \vec{v}) + n m \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \quad (9.44)$$

on obtient donc :

$$n m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = n \overline{\vec{X}} - \nabla \cdot (\overline{\vec{\Psi}} + \overline{\vec{\pi}}) \quad (9.45)$$

Sous cette forme on peut considérer cette équation comme l'équation fondamentale de la dynamique appliquée à une masse de fluide  $nm$ . La quantité entre parenthèses est l'accélération de cette masse de fluide calculée en suivant son mouvement. Au deuxième membre figurent donc des forces appliquées ; en dehors du terme  $n \overline{\vec{X}}$  dû effectivement aux forces d'origine extérieure on voit que la quantité  $-\nabla \cdot (\overline{\vec{\Psi}} + \overline{\vec{\pi}})$  joue le rôle d'une force par unité de volume.

On voit donc que  $\overline{\Psi} + \overline{\pi}$  est la pression totale, somme d'une partie cinétique  $\overline{\Psi}$  ne dépendant que de l'agitation thermique et d'une correction  $\overline{\pi}$  faisant intervenir les interactions entre particules.  $\overline{\Psi}$  est la généralisation à un gaz anisotrope de la pression d'un gaz parfait et  $\overline{\pi}$  la généralisation des corrections de gaz réel dites de Van der Waals ou de pression interne.

### c) Conservation de l'énergie cinétique

Posons enfin  $A \equiv \frac{1}{2}mw^2$  dans l'équation (9.24) ; on obtient l'équation de conservation de l'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_K) + \nabla \cdot \overrightarrow{S}_K = n \overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{v} + C(\frac{1}{2}mw^2) \quad (9.46)$$

$\overrightarrow{S}_K$  est le vecteur flux d'énergie cinétique total défini au paragraphe 9.2.1 a). Au deuxième membre apparaissent deux termes de source : le premier est le travail moyen effectué par la force extérieure<sup>2</sup> ; le deuxième représente l'effet des interactions. On peut expliciter  $\overrightarrow{S}_K$  [cf. formule (9.19)] et  $C(\frac{1}{2}mw^2)$  en utilisant (9.37). L'équation de conservation de l'énergie cinétique s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_K) + \nabla \cdot (U_K \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overline{\Psi} + \overrightarrow{q}) = (n \overrightarrow{X} + \overrightarrow{P}) \cdot \overrightarrow{v} - \nabla \cdot \overrightarrow{\sigma} \quad (9.47)$$

Les deux termes  $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{P} = -\overrightarrow{v} \cdot \nabla \cdot \overline{\pi}$  et  $-\nabla \cdot \overrightarrow{\sigma}$  apparaissent dans cette équation comme des termes de source dus aux interactions. Ce sont donc des termes d'échange entre les deux formes d'énergie du gaz : énergie cinétique et énergie potentielle. On peut établir (cf. problème P9-1) pour cette deuxième forme d'énergie une équation de conservation qui s'écrit :

$$\frac{\partial U_P}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{S}_P = -\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{P} + \nabla \cdot \overrightarrow{\sigma} \quad (9.48)$$

où

$$U_{P1} = \frac{1}{2} \int \varphi_{12} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (9.49)$$

et

$$\overrightarrow{S}_{P1} = \frac{1}{2} \int \overrightarrow{w}_1 \varphi_{12} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (9.50)$$

---

2. Le signe valeur moyenne marqué sur  $\overrightarrow{X}$  est en fait inutile ; pour les forces indépendantes de la vitesse on a  $\overline{\overrightarrow{X}} = \overrightarrow{X}$  ; les seules forces dépendant de la vitesse sont les forces de Lorentz qui, étant perpendiculaires à  $\overrightarrow{w}$ , apportent une contribution nulle.

sont respectivement la densité et le flux d'énergie potentielle au point 1. En additionnant les deux équations (9.47) et (9.48) on obtient l'équation de transport de l'énergie interne totale :

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_K + U_P) + \nabla \cdot (\vec{S}_K + \vec{S}_P) = n \vec{X} \cdot \vec{v} \quad (9.51)$$

dans laquelle le seul terme source est celui dû au travail de la force extérieure.

## 9.2.5 Équation de transport des moments d'ordre 2

### a) Flux total de quantité de mouvement

Dans les plasmas et dans les gaz en écoulement à basse pression, il est souvent nécessaire de tenir compte des anisotropies de la pression. On est alors amené à écrire une équation de transport relative à un moment d'ordre 2. Il y a plusieurs façons de le faire : la méthode la plus simple consiste à poser dans l'équation (9.24) :

$$A \equiv m \vec{w} \vec{w} \quad (9.52)$$

On obtient alors après un calcul développé dans l'appendice A9-2 l'équation de transport du flux total de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(nm \vec{v} \vec{v} + \vec{\Psi}) + \nabla \cdot (nm \vec{v} \vec{v} \vec{v} + \vec{v}, \vec{\Psi} + \vec{\vec{Q}}) \\ = n(\vec{X} \vec{v} + \vec{v} \vec{X}) + (\vec{\Omega} \times \vec{T}) + (\vec{\Omega} \times \vec{T})^T \\ + \vec{P} \vec{v} + \vec{v} \vec{P} + \vec{S} \end{aligned} \quad (9.53)$$

où le produit "permutatif"  $(\vec{v}, \vec{\Psi})$  a été défini par la formule (9.13), où  $\vec{\vec{T}}$  est le tenseur flux de quantité de mouvement [cf. (9.10)], et où le produit  $\vec{\Omega} \times \vec{T}$  est défini dans l'appendice A9-1. En prenant la trace de cette équation on vérifie facilement qu'on retrouve l'équation de conservation de l'énergie cinétique (9.47).

### b) Pression et température cinétique

Pour faire apparaître plus directement  $\vec{\vec{\Psi}}$  on peut aussi poser dans l'équation de transport générale :

$$A \equiv m(\vec{w} - \vec{v})(\vec{w} - \vec{v}) \quad (9.54)$$

A étant maintenant fonction de  $\vec{r}$  et  $t$  à travers  $\vec{v}$ , il faut partir de l'équation générale (9.21). Le calcul développé dans l'appendice A9-3 conduit à l'équation :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \vec{\vec{\Psi}} + (\vec{\vec{\Psi}} \cdot \nabla \vec{v})^T + (\vec{\vec{\Psi}} \cdot \vec{\vec{\Psi}} \vec{v})^T + \nabla \cdot \vec{\vec{Q}} \\ = (\vec{\Omega} \times \vec{\vec{\Psi}}) + (\vec{\Omega} \times \vec{\vec{\Psi}})^T + \vec{S} \end{aligned} \quad (9.55)$$

En prenant la trace (divisée par 2) de cette équation on obtient l'équation de transport de la chaleur :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + (\nabla \cdot \vec{v}) \right] (n\bar{u} - \frac{1}{2}nmv^2) + \vec{\vec{\Psi}} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \cdot \vec{q} = s \quad (9.56)$$

On peut transformer légèrement cette équation en tenant compte de l'équation de conservation des particules qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla n + n \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (9.57)$$

d'où l'on tire :

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dt} \quad (9.58)$$

En portant cette valeur de  $\nabla \cdot \vec{v}$  dans (9.55) et en divisant le tout par  $n$  on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{\Psi}}{n} \right) + \left( \frac{\overline{\Psi}}{n} \cdot \nabla \vec{v} \right) + \left( \frac{\overline{\Psi}}{n} \cdot \nabla \vec{v} \right)^T + \nabla \cdot \frac{\overline{Q}}{n} = (\Omega \times \frac{\overline{\Psi}}{n}) + (\Omega \times \frac{\overline{\Psi}}{n})^T + \frac{\overline{S}}{n} \quad (9.59)$$

qui peut être considérée comme l'équation de transport du tenseur  $\overline{\Psi}/n$  des températures cinétiques.

## 9.2.6 Fermeture du système des équations hydrodynamiques

Les équations (9.39), (9.45) et (9.55) permettent de faire une étude macroscopique de l'évolution d'un gaz. Cependant elles forment un système indéterminé : l'équation d'évolution de  $n$  contient  $\vec{v}$ , l'équation d'évolution de  $\vec{v}$  contient  $\overline{\Psi}$ , l'équation d'évolution de  $\overline{\Psi}$  contient  $\overline{Q}$ , etc. Pour pouvoir utiliser pratiquement ce système, il faut le fermer en faisant une hypothèse simplificatrice sur l'un des moments hydrodynamiques.

### a) Méthodes de fermeture dans les plasmas

$\alpha$ ) **Faisceaux ordonnés et plasmas froids** On peut tout d'abord supposer  $\overline{\Psi} = 0$ , c'est-à-dire négliger l'agitation thermique. Les équations (9.36) et (9.45) forment alors un système déterminé définissant les variables  $n$  et  $\vec{v}$ . Cette approximation est utilisée de façon courante en électronique pour étudier les propriétés des faisceaux de particules parfaitement ordonnés. Dans les plasmas cette méthode est également utilisée dans un certain nombre de problèmes sous le nom d'approximation des plasmas froids. Dans la théorie des ondes on montre (cf. [351], [352], [354]) que c'est une approximation satisfaisante pour étudier les petites perturbations se propageant dans un plasma avec une vitesse de phase beaucoup plus grande que les vitesses d'agitation thermique des particules du plasma.

$\beta$ ) **Écoulements adiabatiques** Dans les gaz neutres il est en général absolument nécessaire de tenir compte de l'agitation thermique ; de même, dans les plasmas il y a de nombreux cas où l'approximation des plasmas froids est insuffisante ; on peut alors faire un pas de plus et utiliser



l'équation (9.55) ou (9.59), et fermer le système en imposant la condition :

$$\nabla \cdot \overline{\overline{Q}} = 0 \quad (9.60)$$

On définit ainsi une classe de mouvements qu'on peut appeler écoulements adiabatiques. Cette approximation a été discutée par Buneman [106]. Elle permet notamment de faire une étude systématique des ondes de faible amplitude susceptibles de se propager dans un plasma (cf. [351], [352], [354]).

On peut d'ailleurs montrer, comme cela est fait dans l'appendice A9-3, que la condition d'adiabaticité ci-dessus recoupe la condition :

$$p/n^\gamma = \text{Cte} \quad (9.61)$$

que l'on utilise dans les descriptions élémentaires pour décrire l'écoulement adiabatique d'un gaz parfait. Il est montré dans cet appendice que l'on peut généraliser la formule (9.61) en introduisant le tenseur de pression cinétique et que le coefficient  $\gamma$  prend les valeurs 5/3, 2 ou 3 selon que la variation de pression est scalaire, à symétrie azimutale ou monodimensionnelle.

## b) Méthodes de fermeture dans les gaz collisionnels

**α) Approximation d'Euler** De nombreuses autres méthodes de fermeture du système des équations hydrodynamiques ont été proposées. Elles correspondent à diverses méthodes approchées de solution de l'équation d'évolution de  $f$ . Dans l'hydrodynamique classique des gaz neutres on suppose en général que les collisions sont très importantes et que la fonction de distribution des vitesses est en chaque point presque maxwellienne. Pour pouvoir représenter le mouvement du fluide on peut alors supposer que la fonction de distribution simple des vitesses est, en tout point du gaz, une *maxwellienne déplacée*, c'est-à-dire de la forme :

$$f(\vec{r}, \vec{w}, t) = n \left( \frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m|\vec{w} - \vec{v}|^2}{2\kappa T}} \quad (9.62)$$

étant entendu que dans cette formule les quantités  $n$ ,  $\vec{v}$  et  $T$  sont à priori fonctions de  $\vec{r}$  et de  $t$ . En prenant les moments de  $f$  on vérifie facilement que  $n$  et  $\vec{v}$  sont bien les valeurs locales de la densité et de la vitesse de fluide, que la pression cinétique se réduit au scalaire :

$$\Psi = n\kappa T \quad (9.63)$$

et que le vecteur flux de chaleur  $\vec{q}$  est identiquement nul. Dans ces conditions on obtient un système fermé d'équations hydrodynamiques en

écrivant les trois équations de conservation des particules, de la quantité de mouvement et de l'énergie, soit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \vec{v} = 0 \quad (9.64)$$

$$n m \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = n \overline{\vec{X}} - \nabla \cdot (n \kappa T + \overline{\pi}) \quad (9.65)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla + (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \left( \frac{3}{2} n \kappa T \right) + n k T \nabla \cdot \vec{v} = -\nabla \cdot \overline{\sigma} \quad (9.66)$$

Pour écrire l'équation d'énergie nous sommes partis de la forme (9.56) (équation de transport de la chaleur). On peut remarquer que pour rendre le système ci-dessus complètement déterminé il faut encore expliciter les termes d'interaction  $\overline{\pi}$  et  $\overline{\sigma}$  qui y figurent. En fait on admet en général qu'ils sont négligeables, avec en particulier :

$$\overline{\pi} \ll n k T \quad (9.67)$$

autrement dit on se place dans le cadre du modèle des gaz parfaits. Dans le cas d'un gaz imparfait il faudrait écrire une équation d'évolution de  $\overline{\pi}$  et cela est un problème compliqué lié à l'hydrodynamique des corrélations (cf. problème P9-3).

On peut enfin, en tenant compte de (9.58), récrire l'équation (9.66) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Psi / n^{5/3}) = 0 \quad (9.68)$$

On voit donc que l'approximation d'Euler contient implicitement, comme il fallait s'y attendre puisque  $\overline{q} = 0$ , l'hypothèse de fermeture adiabatique avec  $\gamma = 5/3$ .

**$\beta$ ) Approximation de Navier-Stokes** L'approximation d'Euler revient à négliger le flux de chaleur et les effets de pression anisotrope qui peuvent être liés à la viscosité du gaz. On peut pousser le développement au voisinage de l'équilibre thermodynamique à un ordre de perturbation plus élevé. On obtient ainsi l'approximation de Navier-Stokes dans laquelle le flux de chaleur et le tenseur de pression cinétiques sont donnés par les formules :

$$\overline{q} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial \vec{r}} \quad (9.69)$$

$$\overline{\Psi} = n \kappa T \overline{\delta} - 2\eta \left( \overline{\Lambda} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \vec{v} \overline{\delta} \right) \quad (9.70)$$

où  $\kappa$  est le coefficient de conductibilité thermique,  $\eta$  celui de viscosité et  $\overline{\Lambda}$  le tenseur des gradients de vitesse symétrisé :

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{2}[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T] \quad (9.71)$$

où l'exposant  $(\nabla \vec{v})^T$  est le tenseur transposé de  $\nabla \vec{v}$ . Ces équations ont été initialement écrites en introduisant de façon phénoménologique, dans les équations de l'hydrodynamique, des termes permettant de représenter les propriétés de viscosité et de conductivité thermique des gaz telles qu'elles avaient été découvertes dans des expériences simples. Ce n'est qu'au début de ce siècle que les méthodes de la théorie cinétique ont été assez élaborées pour permettre une démonstration théorique des équations de Navier-Stokes. Le lecteur pourra se reporter pour un exposé assez simple de ces théories à [101]. L'application au cas des gaz faiblement ionisés et des plasmas est développée au chapitre 12.

## 9.3 Hydrodynamique des mélanges gazeux et des plasmas

### 9.3.1 Variables partielles et variables globales

Nous avons établi au paragraphe précédent les équations hydrodynamiques d'un gaz pur non réactif. Considérons maintenant un mélange gazeux constitué de diverses espèces de particules  $a, b, c, \dots$ . Du point de vue macroscopique l'état de l'ensemble des particules d'espèce  $a$  peut être caractérisé par la donnée des grandeurs hydrodynamiques partielles  $n_a, \vec{v}_a, \overline{\Psi}_a$  ou  $U_{K_a}, \overline{Q}_a$  (ou  $\vec{q}_a$ ). Les interactions élastiques entre particules de même espèce se traduisent par les grandeurs :

$\overline{\pi}_{aa}$  pression partielle interparticulaire,

$U_{Pa}$  densité partielle d'énergie potentielle,

et pour les particules d'espèces différentes par les termes :

$\vec{P}_{ab}$  échange de quantité de mouvement,

$s_{ab}$  échange d'énergie cinétique.

Pour tenter de décrire le comportement d'ensemble du mélange gazeux on peut aussi introduire des variables globales dont les principales sont les suivantes :

$$\text{masse spécifique} \quad \rho_m = \sum_a n_a m_a$$

$$\text{densité de charge électrique} \quad \rho = \sum_a n_a q_a$$

$$\begin{aligned}
\text{flux de masse} \quad J_m &= \sum_a n_a m_a \vec{v}_a \\
\text{densité de courant électrique} \quad J &= \sum_a n_a q_a \vec{v}_a \\
\text{pression cinétique} \quad \overline{\overline{\Psi}} &= \sum_a \Psi_a \\
\text{pression interparticulaire} \quad \overline{\overline{\pi}} &= \sum_a \overline{\overline{\pi_{aa}}} + \sum_{a>b} \sum \overline{\overline{\pi_{ab}}} \\
\text{densité d'énergie cinétique} \quad U_K &= \sum_a U_{K_a} \\
\text{vecteur flux de chaleur} \quad \vec{q} &= \sum_a \vec{q}_a
\end{aligned}$$

On introduit enfin le vecteur vitesse de masse  $\vec{V}$  défini par :

$$\vec{J}_m = \rho_m \vec{V} \quad (9.72)$$

Les sommations des formules ci-dessus sont étendues à toutes les espèces de particules matérielles contenues dans le mélange (nous laissons pour l'instant de côté les photons sur lesquels nous reviendrons au chapitre 14).

Le nombre de variables globales ainsi introduites n'est égal au nombre de variables partielles que dans le cas d'un mélange ne contenant que deux espèces de particules. Dans un mélange contenant plus de deux espèces, l'information contenue dans les variables globales est moindre que celle fournie par l'ensemble des variables partielles. C'est pourquoi l'utilisation des grandeurs macroscopiques globales est surtout utile dans les mélanges binaires et en particulier dans les plasmas constitués d'électrons et d'une seule espèce d'ions.

De manière générale les théorèmes généraux de conservation de la mécanique et de l'électromagnétisme permettent d'ailleurs de prévoir l'existence de quatre équations globales où s'éliminent certains termes d'interaction :

- l'équation de conservation de la masse,
- l'équation de conservation de la charge,
- l'équation de transport de la quantité de mouvement,
- l'équation de transport de l'énergie.

Une dernière équation très utile mais d'une analyse plus délicate est l'équation de transport du courant électrique, appelée aussi loi d'Ohm généralisée.

### 9.3.2 Propriétés des termes d'interaction

#### a) Règles de réciprocité

On admet souvent que les quantités  $\overrightarrow{P}_{ab}$  et  $s_{ab}$  satisfont aux règles de réciprocité :

$$\overrightarrow{P}_{ab} = -\overrightarrow{P}_{ba} \quad (9.73)$$

$$s_{ab} = -s_{ba} \quad (9.74)$$

Rappelons que  $\overrightarrow{P}_{ab}$  représente la quantité de mouvement communiquée par unité de temps aux particules  $a$  contenues dans un petit élément de volume  $\underline{dr}$ , par l'ensemble de toutes les particules  $b$ .

Si les forces d'interaction sont à courte portée, les particules  $b$  qui interagissent sont celles contenues dans le même élément de volume que les particules  $a$ .  $\overrightarrow{P}_{ba}$  est de même la quantité de mouvement communiquée par unité de temps aux particules  $b$  situées dans  $\underline{dr}$  par les particules  $a$  situées dans ce même volume. La situation est analogue pour  $s_{ab}$  et l'on voit que les règles de réciprocité ci-dessus sont la conséquence directe des théorèmes de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie dans une collision binaire élastique. Le raisonnement ci-dessus est essentiellement basé sur le fait que le terme de collision de l'équation cinétique qui sert à calculer  $\overrightarrow{P}_{ab}$  et  $s_{ab}$  est un terme local du type de l'intégrale de Boltzmann où n'interviennent que les fonctions de distribution simples au même point de l'espace.

Cependant de façon générale les termes  $\overrightarrow{P}_{ab}$  et  $s_{ab}$  doivent se calculer au moyen des expressions exactes de BBGKY. Ces expressions étant non locales, il peut bien se faire que dans un gaz où il y a des gradients spatiaux, les règles de réciprocité soient inexactes. Cette question est étudiée en détail dans l'appendice A9-1. On y montre que les lois de réciprocité ne sont qu'une première approximation et que l'on a de façon générale :

$$\overrightarrow{P}_{ab} + \overrightarrow{P}_{ba} = -\nabla \cdot \overline{\overline{\pi_{ab}}} \quad (9.75)$$

$$s_{ab} + s_{ba} = -\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma_{ab}}} \quad (9.76)$$

ce qui redonne dans le cas  $b \equiv a$  :

$$\overrightarrow{P}_{aa} = -\nabla \cdot \overline{\overline{\pi_{aa}}} \quad (9.77)$$

$$s_{aa} = -\nabla \cdot \overline{\overline{\sigma_{aa}}} \quad (9.78)$$

Les expressions de  $\overline{\overline{\pi_{ab}}}$ ,  $\overline{\overline{\sigma_{ab}}}$ ,  $\overline{\overline{\pi_{aa}}}$ ,  $\overline{\overline{\sigma_{aa}}}$  sont données dans les formules (9.223), (9.227), (9.225) et (9.228). Ceci étant, dans les gaz dilués il s'agit de petits termes correctifs ; on pourra dans "l'approximation des gaz parfaits" les négliger. Dans les plasmas, il faudra cependant en général garder la contribution de Vlasov qui y figure.

### b) Expressions approchées de $\vec{P}_{ab}$ et $s_{ab}$

Dans les milieux où les fonctions de distribution sont presque isotropes, il est raisonnable d'admettre que le terme de friction  $\vec{P}_{ab}$  est proportionnel à  $\vec{v}_b - \vec{v}_a$  et le terme d'échange d'énergie  $s_{ab}$  proportionnel à  $T_b - T_a$ , c'est-à-dire de poser :

$$\vec{P}_{ab} = -A_{ab}(\vec{v}_a - \vec{v}_b) \quad (9.79)$$

$$s_{ab} = -B_{ab} \kappa (T_a - T_b) \quad (9.80)$$

où  $\kappa$  est la constante de Boltzmann, ce qu'on peut écrire compte tenu des dimensions des deux membres :

$$\vec{P}_{ab} = -n_a m_a \nu_{1ab} (\vec{v}_a - \vec{v}_b) \quad (9.81)$$

$$s_{ab} = -n_a \nu_{2ab} \kappa (T_a - T_b) \quad (9.82)$$

Les deux grandeurs  $\nu_{1ab}$  et  $\nu_{2ab}$  sont les fréquences de collision pour l'échange de quantité de mouvement et d'énergie cinétique. Dans le cadre de l'hypothèse de réciprocité discutée au paragraphe précédent, ces fréquences doivent obéir aux règles de réciprocité :

$$n_a m_a \nu_{1ab} = n_b m_b \nu_{1ba} \quad (9.83)$$

$$n_a \nu_{2ab} = n_b \nu_{2ba} \quad (9.84)$$

### 9.3.3 Conservation de la masse et de l'électricité

Partons des équations de conservation relatives à chaque espèce de particules :

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} + \nabla \cdot n_a \vec{v}_a = I_a \quad (9.85)$$

Nous avons vu que s'il n'y a que des collisions élastiques  $I_a$  est forcément nul. Dans le cas plus général il peut y avoir des collisions inélastiques qui créent ou détruisent des particules d'espèce  $a$  et alors  $I_a$  peut ne pas être nul.

En multipliant l'équation ci-dessus par  $m_a$  et en ajoutant toutes les équations analogues, puis en faisant la même chose avec le facteur  $q_a$ , on obtient les deux équations de conservation de la masse et de l'électricité :

$$\partial \rho_m / \partial t + \nabla \cdot \rho_m \vec{V} = 0 \quad (9.86)$$

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (9.87)$$

Les deuxièmes membres sont nuls même s'il y a création ou disparition de particules ( $I_a \neq 0$ ). Ces réactions se font en effet avec conservation de la masse et de la charge globale.

### 9.3.4 Conservation de la quantité de mouvement globale

Nous partons des équations de transport de la quantité de mouvement pour chaque espèce de particule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(n_a m_a \vec{v}_a) + \nabla \cdot (n_a m_a \vec{v}_a \vec{v}_a + \overline{\overline{\Psi}}_a) \\ = n_a q_a (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) - n_a m_a \nabla \varphi - \nabla \cdot \overline{\overline{\pi}}_{aa} + \sum_{b \neq a} \overline{P}_{ab} \end{aligned} \quad (9.88)$$

Par addition de toutes les équations de ce type on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \vec{V}) + \sum_a \nabla \cdot n_a m_a \vec{v}_a \vec{v}_a = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} - \rho_m \nabla \varphi - \nabla \cdot (\overline{\overline{\Psi}} + \overline{\overline{\pi}}) \quad (9.89)$$

On voit que cette équation de transport de la quantité de mouvement globale prend une forme assez simple dans laquelle on voit apparaître au deuxième membre l'ensemble des forces appliquées à une unité de volume du fluide. On remarque aussi que la tentative de l'exprimer en fonction des variables globales n'a pas complètement réussi. Ceci étant, on peut simplifier cette équation quand on étudie des mouvements où les fonctions de distribution des vitesses restent presque isotropes (*mouvements subsoniques*) ; les termes de convection  $n_a m_a \vec{v}_a \vec{v}_a$  sont alors négligeables devant les termes d'agitation thermique  $\overline{\overline{\Psi}}_a$  ; au même degré d'approximation on peut d'autre part linéariser le terme  $\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \vec{V})$  en considérant  $\vec{V}$  comme un infiniment petit et en remarquant que  $\frac{\partial}{\partial t}$  est d'après (9.86) également un terme du premier ordre ; on peut donc négliger le produit  $\frac{\partial \rho_m}{\partial t} \vec{V}$  et écrire l'équation ci-dessus sous la forme :

$$\rho_m \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} - \rho_m \nabla \varphi - \nabla \cdot (\overline{\overline{\Psi}} + \overline{\overline{\pi}}) \quad (9.90)$$

On retrouve ainsi par cette voie l'équation fondamentale usuelle de l'hydrodynamique des fluides incompressibles. Dans la plupart des cas nous l'utiliserons en supposant que la pression totale  $\overline{\overline{\Psi}} + \overline{\overline{\pi}}$  se réduit à sa composante cinétique  $\overline{\overline{\Psi}}$  (approximation des gaz parfaits).

### 9.3.5 Loi d'Ohm généralisée

#### a) Démonstration de la loi d'Ohm

$\alpha$ ) **Équation d'évolution de  $\vec{J}$**  Partons toujours des équations (9.88) mais multiplions-les par  $q_a/m_a$  avant de les additionner ; il vient alors :

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \sum_a \nabla \cdot n_a q_a \vec{v}_a \vec{v}_a = \quad (9.91)$$

$$\begin{aligned} & \sum_a \frac{n_a q_a^2}{m_a} (\vec{E} + \vec{v}_a \times \vec{B}) \\ & - \rho \nabla \varphi - \sum_a \frac{q_a}{m_a} \nabla \cdot (\overline{\Psi}_a + \overline{\pi}_{aa}) + \sum_{a \neq b} \sum \sum \frac{q_a}{m_a} \overline{P}_{ab} \end{aligned} \quad (9.92)$$

Cette équation ne présente évidemment d'intérêt que si le gaz est au moins partiellement ionisé (sinon  $\vec{J}$  serait nul). Dans ces conditions on peut vérifier que les électrons apportent la contribution dominante dans tous les termes. Pour cela nous nous placerons dans le cas le plus courant suivant :

- écoulements subsoniques (distributions presque isotropes),
- gaz parfait (termes  $\overline{\pi}_{aa}$  négligeables),
- gaz électriquement neutre ( $\rho = 0$ ).

On peut alors l'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{n_e q_e^2}{m_e} (\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B}) - \frac{q_e}{m_e} \nabla \cdot \overline{\Psi}_e + \frac{q_e}{m_e} \sum_{b \neq e} \overline{P}_{eb} \quad (9.93)$$

$\beta$ ) **Loi d'Ohm dans un plasma binaire** Conformément aux remarques générales faites au début de ce chapitre, le cas d'un plasma binaire ne contenant que des électrons et une seule espèce d'ions est plus simple. De fait, on peut alors exprimer l'équation (9.92) en fonction des variables globales (cf. problème P9-4).

Cette écriture symétrique est cependant trompeuse car nous venons de voir que les électrons apportent une contribution dominante. Nous nous contenterons donc de remarquer que dans un plasma binaire neutre, on a d'après la relation de définition de  $J$  :

$$\vec{J} = n_e q_e (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \quad (9.94)$$



d'où, compte tenu de (9.94) et (9.101) :

$$\vec{v}_e = \vec{V} + \frac{\vec{J}}{n_e q_e} \frac{n_i m_i}{n_e m_e + n_i m_i} \approx \vec{V} + \frac{\vec{J}}{n_e q_e} \quad (9.95)$$

On peut d'autre part, en rapprochant les formules (9.81) et (9.94), relier  $\vec{P}_{ei}$  à la variable globale  $\vec{J}$  en écrivant :

$$\vec{P}_{ei} = -n_e m_e \nu_1 \frac{\vec{J}}{n_e q_e} = -\frac{m_e}{q_e} \nu_{1ei} \vec{J} \quad (9.96)$$

ou encore :

$$\vec{P}_{ei} = -n_e q_e \bar{\rho} \vec{J} \quad (9.97)$$

Cette relation peut se justifier, de façon assez générale, dans la théorie microscopique des plasmas faiblement perturbés en remarquant que les composantes de  $\vec{P}_{ei}$  et de  $\vec{J}$  sont toutes des grandeurs du premier ordre par rapport à l'intensité de la perturbation ; il existe donc une relation linéaire entre ces diverses composantes, ce qu'on exprime par la formule ci-dessus.  $\bar{\rho}$  s'appelle la résistivité du plasma. Le raisonnement que nous venons de faire montre que :

-  $\bar{\rho}$  est en général un tenseur : les vecteurs  $\vec{P}_{ei}$  et  $\vec{J}$  ne sont pas a priori colinéaires, comme nous l'avons supposé dans (9.81), si le milieu est anisotrope ;

-  $\bar{\rho}$  n'est défini que pour une structure de perturbation donnée ; en particulier il dépend du champ magnétique régnant dans le plasma.

En reportant les expressions (9.95) et (9.97) dans (9.93) et en multipliant le tout par  $m_e/n_e q_e^2$  nous obtenons finalement :

$$\frac{m_e}{n_e q_e^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} + \frac{\vec{J}}{n_e q_e} \times \vec{B} - \frac{1}{n_e q_e} \nabla \cdot \overline{\Psi}_e - \bar{\rho} \cdot \vec{J} \quad (9.98)$$

Si  $\partial \vec{J} / \partial t$ ,  $\vec{B}$  et  $\nabla \cdot \overline{\Psi}_e$  sont nuls (courant stationnaire dans un plasma uniforme, sans champ magnétique),  $\bar{\rho}$  devient scalaire et cette équation se réduit à la loi d'Ohm :

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (9.99)$$

$\rho$  étant alors l'inverse de la conductivité et s'exprimant [cf. (9.96) et (9.97)] à partir de la fréquence de collision  $\nu_1$  par la formule :

$$\rho = \frac{m_e}{n_e q_e^2} \nu_{1ei} \quad (9.100)$$

L'équation (9.98) peut donc être considérée comme une généralisation de la loi d'Ohm, tenant compte comme nous le verrons au paragraphe 9.3.5b) des effets dus à l'inertie des électrons, au champ magnétique et au gradient de pression électronique.

**$\gamma$ ) Loi d'Ohm dans les plasmas multiples et dans les gaz partiellement ionisés** La loi d'Ohm (9.98) peut aussi s'écrire dans un plasma complètement ionisé comportant plusieurs espèces d'ions et dans un gaz partiellement ionisé. Ces deux cas sont discutés dans l'appendice A9-4.

### b) Champs de force électromotrice et fréquences caractéristiques

Nous allons maintenant discuter les propriétés des plasmas décrites par la loi d'Ohm en nous limitant, pour simplifier l'étude, au cas des plasmas binaires. Pour cela nous introduisons dans la formule (9.98) l'expression (9.100) de  $\rho$  en fonction de  $\nu_{1ei}$  ; en regroupant alors au premier membre les termes contenant  $\vec{J}$ , on peut finalement écrire la loi d'Ohm généralisée dans un plasma binaire sous la forme :

$$\frac{m_e}{n_e q_e^2} \left[ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \vec{\Omega}_e \times \vec{J} + \overline{\nu_{1ei}} \cdot \vec{J} \right] = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{n_e q_e} \nabla \cdot \overline{\Psi}_e \quad (9.101)$$

où  $\vec{\Omega}_e$  est le vecteur rotation gyromagnétique des électrons :

$$\vec{\Omega}_e = -\frac{q_e}{m_e} \vec{B} \quad (9.102)$$

Il est intéressant de considérer l'équation (9.101) comme contenant au deuxième membre trois champs de force électromotrice et au premier membre la réponse du plasma.

Les champs de force électromotrice qui peuvent être considérés comme produisant le courant sont :

- le champ électrique  $\vec{E}$ ,
- le champ électrique d'induction  $\vec{V} \times \vec{B}$ ,
- le terme de diffusion  $-1/n_e q_e \nabla \cdot \overline{\Psi}_e$ .

Dans l'électrodynamique classique des corps conducteurs en mouvement, on a l'habitude de ne considérer que les deux premiers termes ; on néglige les courants de diffusion ; ceci tient au fait que la densité des électrons libres dans le corps conducteur y est très élevée et pratiquement constante ; cette approximation n'est déjà plus valable dans le cas des semi-conducteurs. De même, dans les plasmas, les courants de diffusion sont en général importants.

La réponse du plasma dépend de trois fréquences caractéristiques du mouvement considéré :

- la fréquence caractéristique  $\omega$  de la perturbation considérée comme définie par  $\partial/\partial t \sim \omega$ ,
- la fréquence gyromagnétique des électrons  $\Omega_e$ ,
- la fréquence moyenne de collisions des électrons avec les ions  $\nu_{1ei}$ .

L'équation (9.101) permet d'ailleurs de donner une signification physique simple à  $\nu_{1ei}$  : supposons en effet que les trois champs de force électromotrice soient nuls ( $\vec{E} = \vec{B} = 0$ , plasma homogène,  $\nabla \cdot \vec{\Psi}_e = 0$ ). On peut alors vérifier que  $\nu_{1ei}$  est un scalaire et que (9.101) se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nu_{1ei} \vec{J} = 0 \quad (9.103)$$

qui s'intègre pour donner :

$$\vec{J}(t) = \vec{J}(0) \exp(-\nu_{1ei}t) \quad (9.104)$$

Autrement dit, si à l'instant initial  $t = 0$  il existe dans le plasma un courant  $\vec{J}(0)$  dû par exemple à une action extérieure qui cesse brutalement à cet instant, ce courant décroît ensuite exponentiellement vers la valeur zéro ; on dit qu'il relaxe, et que  $\nu_{1ei}$  est la fréquence de relaxation du courant.

## 9.4 Notions de magnétohydrodynamique

Les deux équations globales (équation de l'hydrodynamique et loi d'Ohm) sont souvent utilisées en faisant des approximations simplificatrices dites de la magnétohydrodynamique (MHD). En fait celle-ci était initialement l'étude des propriétés des *liquides conducteurs* (mercure, alliage sodium-potassium) en mouvement dans un champ magnétique. Dans certaines conditions (perturbations lentes, plasmas denses) les propriétés des *gaz ionisés* en mouvement dans un champ magnétique peuvent être décrites par les mêmes équations. Mais cette assimilation n'est jamais que partiellement vraie ; il vaudrait mieux garder dans la terminologie la distinction entre la magnétohydrodynamique et la *magnétoplasmodynamique*. Cela explique que selon les problèmes traités et les auteurs, les approximations faites peuvent porter sur divers points que nous passons en revue dans ce paragraphe.

En physique des plasmas, la MHD s'applique dans deux domaines :

- Propagation des ondes de basses fréquences en présence d'un fort champ magnétique, et plus spécialement développement d'*instabilités* dites MHD dans un plasma confiné magnétiquement (cf. section 1.10).
- *Conversion d'énergie MHD* : cette filière étudiée dans les années 60, à peu près abandonnée aujourd'hui [304], se proposait d'améliorer le rendement des centrales thermiques à charbon ou pétrole en se libérant du cycle de Carnot. Les gaz de combustion se détendent dans une tuyère (conversion d'énergie thermique en énergie cinétique) puis traversent à la vitesse  $\vec{V}$  dans la direction  $Oz$  un canal MHD où il y a un fort champ magnétique transverse  $\vec{B}$  dans la direction  $Ox$  ; le champ d'induction  $\vec{E} = \vec{V} \times \vec{B}$  qui est dans la direction  $Oy$  permet de recueillir un courant sur des électrodes parallèles au plan  $\vec{V}, \vec{B}$  (conversion d'énergie cinétique en énergie électrique). Pour que ce système marche il faut ensemercer le gaz chaud produit par la combustion (avec éventuellement un échangeur pour utiliser dans le canal MHD un gaz inerte tel que l'argon) avec un métal alcalin pour le rendre suffisamment conducteur. La grosse difficulté technologique est alors la réalisation d'électrodes ayant une durée de vie raisonnable dans un tel environnement.

### 9.4.1 Liquides conducteurs

#### a) Équations générales

Dans un liquide conducteur la MHD est consacrée à l'étude des interactions entre le champ de vitesse  $\vec{V}$  et le champ d'induction magnétique  $\vec{B}$ , qui décrivent le mouvement du fluide conducteur dans un champ magnétique. Elle est donc régie par un système d'équations couplées obtenu à partir des équations de Maxwell et des équations de l'hydrodynamique. Les premières s'écrivent ici sous forme simplifiée :

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.105)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (9.106)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.107)$$

où  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{J}$  sont le champ électrique, l'induction magnétique et la densité de courant. Les simplifications faites sont justifiées par le fait que, d'abord,

les liquides considérés ne sont pas magnétiques ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ) ; qu'ensuite le courant de polarisation diélectrique et le courant de déplacement de Maxwell sont négligeables devant le courant de conduction  $\vec{J}$ . D'autre part,  $\vec{J}$  est relié aux champs appliqués par la loi d'Ohm relative à un conducteur en mouvement dans un champ magnétique :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \quad (9.108)$$

Dans cette relation, le champ d'induction  $V \times \vec{B}$  s'ajoute au champ électrique  $\vec{E}$  produit dans le repère fixe ; la conductivité électrique  $\sigma$  est supposée scalaire et non modifiée par la présence du champ  $\vec{B}$  (l'effet Hall est négligeable dans les métaux). Les équations générales de l'hydrodynamique s'écrivent, d'autre part, également sous forme simplifiée :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (9.109)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{V} \quad (9.110)$$

où  $\rho$ ,  $p$ ,  $\eta$  sont la masse spécifique, la pression et la viscosité du liquide. Les équations ainsi écrites sont valables pour un fluide incompressible, visqueux et homogène ( $\rho$  et  $\eta$  constants).

### b) Convection et diffusion du champ magnétique

En éliminant entre les équations (9.105) à (9.108) les variables auxiliaires  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \lambda \nabla^2 \vec{B} \quad (9.111)$$

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \quad (9.112)$$

L'équation (9.111) met en évidence le couplage entre le champ  $\vec{B}$  et le champ de vitesse  $\vec{V}$  ; si l'on suppose connu  $\vec{V}$ , c'est-à-dire le mouvement du fluide, elle décrit l'évolution de  $\vec{B}$  ; c'est ce qu'on peut appeler avec Lundquist l'aspect cinématique de la MHD. Les deux termes qui figurent au deuxième membre de l'équation (9.111) décrivent deux mécanismes différents qui font évoluer  $\vec{B}$  en un point donné : le premier dépend de la

vitesse du fluide, le deuxième est proportionnel à sa résistivité. Pour des raisons qui vont être développées, on peut les appeler :

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) &= \text{terme de convection,} \\ \lambda \nabla^2 \vec{B} &= \text{terme de diffusion.}\end{aligned}$$

Supposons tout d'abord le deuxième terme nul, de sorte que l'équation d'évolution de  $\vec{B}$  se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \quad (9.113)$$

Ce cas limite s'obtient en considérant un fluide de conductivité électrique  $\sigma$  infinie ; pour que  $\vec{J}$  et  $\vec{B}$  restent finis, on doit alors avoir :

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \quad (9.114)$$

Des deux équations (9.113) et (9.114) on peut déduire (cf. [108, p. 34]) que le champ magnétique est entraîné par la matière ; mathématiquement, cela s'exprime par deux *théorèmes de convection de  $\vec{B}$*  représentés sur la figure 9.1(a) : sur ce schéma,  $C$  représente un contour fermé tracé à un certain instant  $t$  dans le fluide et  $MP$  une ligne de force de  $\vec{B}$ . À un instant ultérieur  $t'$ , les éléments du fluide se sont déplacés : ceux de la ligne  $MP$  décrivent une ligne  $M'P'$ . Les deux théorèmes de convection de  $\vec{B}$  permettent d'affirmer que le flux du champ magnétique  $\Phi(C')$  à travers  $C'$  est égal au flux initial  $\Phi(C)$  à travers  $C$  et que la ligne  $M'P'$  se confond comme  $MP$  avec une ligne de force de  $\vec{B}$ . Ces deux résultats ont été énoncés clairement par l'astrophysicien suédois Alfvén, en 1942, qui les a résumés en disant que le champ magnétique et la matière constituent deux fluides gelés l'un dans l'autre. Remarquons que nous avons déjà obtenu ce résultat au chapitre 2 pour un plasma, à partir de la théorie des orbites adiabatiques.

Considérons maintenant le cas limite opposé où le deuxième mécanisme d'évolution de  $\vec{B}$  est dominant, de sorte que l'équation d'évolution de  $\vec{B}$  se réduit à :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \vec{B} \quad (9.115)$$

Sous cette forme, on reconnaît l'analogie vectorielle de l'équation classique de la diffusion [cf. (5.35)] :  $\lambda$  est le coefficient de diffusion de  $\vec{B}$ . L'équation

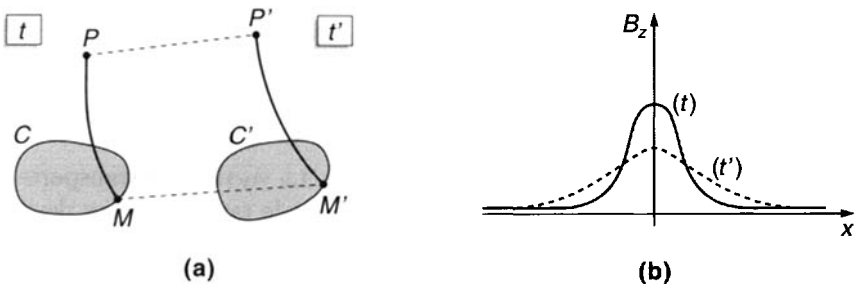


Figure 9.1 : Convection et diffusion du champ magnétique dans un fluide.

(a) Convection par un fluide infiniment conducteur.

(b) Diffusion à travers un fluide résistif.

Champ dirigé suivant  $Oz$  et dépendant seulement de  $x$ , avec  $t' > t$ .

(9.115) exprime le fait que toute perturbation locale de  $\vec{B}$  tend à s'atténuer par diffusion selon le schéma indiqué sur la figure 9.1(b). La vitesse de diffusion est d'autant plus faible que la conductivité électrique du fluide est plus grande, parce que les courants de Foucault s'opposent aux variations de  $\vec{B}$ . En un temps de l'ordre de  $t$ , la distance de diffusion est de l'ordre de  $(\lambda t)^{\frac{1}{2}}$  ; la pénétration d'un champ alternatif de pulsation  $\omega$  est limitée à une couche dont l'épaisseur est de l'ordre de  $(\lambda/\omega)^{\frac{1}{2}}$  : c'est l'effet de peau. Remarquons, enfin, que les phénomènes de diffusion décrits précédemment sont indépendants de  $\vec{V}$  qui ne figure plus dans l'équation (9.115) : dans ce cas limite, il n'y a plus aucune convection de  $\vec{B}$  par la matière.

En pratique, convection et diffusion se superposent toujours plus ou moins et il est intéressant d'établir un critère caractérisant l'importance relative de ces deux mécanismes. L'analyse dimensionnelle de l'équation (9.111) le permet ; désignons par  $l$  une longueur qui caractérise l'échelle de l'écoulement considéré (distance sur laquelle  $\vec{V}$  ou  $\vec{B}$  varie notablement) : on voit alors que le terme de convection est d'ordre  $VB/l$  et celui de diffusion d'ordre  $\lambda B/l^2$ . On peut donc former le nombre sans dimension :

$$R_B = Vl/\lambda = \mu_0\sigma V l \approx \frac{\text{convection de } \vec{B}}{\text{diffusion de } \vec{B}} \quad (9.116)$$

appelé *nombre de Reynolds magnétique*.

Il y a une importante analogie entre l'équation (9.111) de transport de  $\vec{B}$  et l'équation qui décrit dans un fluide incompressible, non conducteur

mais visqueux, l'évolution de la grandeur  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$  qu'on peut appeler la vorticité. Celle-ci s'écrit en effet (cf. [281, p. 65]) :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla(\vec{V} \times \vec{\omega}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \quad (9.117)$$

où  $\nu = \eta/\rho$  est la viscosité cinematique du fluide. La vorticité se transporte donc également par convection et par diffusion et le rapport de ces deux effets est caractérisé par le nombre de Reynolds usuel :

$$R_\omega = Vl/\nu = l/l_\omega \approx \frac{\text{convection de } \vec{\omega}}{\text{diffusion de } \vec{\omega}} \quad (9.118)$$

avec  $l_\omega = V/\nu$ . Le parallélisme entre les grandeurs relatives à  $\vec{\omega}$  et  $\vec{B}$  est souligné dans le tableau 9.1. Pour un fluide donné, on peut former le

Symbole	Expression	Dénomination	Valeur (Hg)
$\lambda$	$(\mu_0\sigma)^{-1}$	coeff. diffusion de $\vec{B}$	0.76
$\nu$	$\eta/\rho$	coeff. diffusion de $\vec{\omega}$	$1.14 \cdot 10^{-7}$
$P$	$\nu/\lambda = \mu_0\sigma\eta/\rho$	Prandtl magnétique	$1.5 \cdot 10^{-7}$
$V_a$	$B/(\mu_0\rho)^{1/2}$	vitesse d'Alfvén	$7.6 B$
$R_B$	$l/l_B = \mu_0\sigma V l$	Reynolds magnétique	$1.31 V l$
$R_\omega$	$l/l_\omega = \frac{\rho V l}{\eta}$	Reynolds	$8.7 \cdot 10^6 V l$

Tableau 9.1 : Magnétohydrodynamique des liquides.

Coefficients de diffusion, vitesses et nombres caractéristiques (unités SI).

rapport :

$$P = R_B/R_\omega = \nu/\lambda \approx \frac{\text{diffusion de } \vec{\omega}}{\text{diffusion de } \vec{B}} \quad (9.119)$$

appelé nombre de Prandtl magnétique. En pratique, pour tous les conducteurs liquides, on a  $P \ll 1$  : les champs magnétiques diffusent et s'amortissent beaucoup plus vite que la vorticité.

### c) Pression et tension magnétique

Dans l'équation fondamentale de la dynamique (9.110), le terme  $\vec{J} \times \vec{B}$  représente la force électromagnétique appliquée à une unité de volume du



fluide. En tenant compte de l'équation de Maxwell-Ampère (9.106) on peut montrer [292] que cette force est la divergence d'un tenseur, c'est-à-dire que l'on a :

$$\vec{J} \times \vec{B} = \nabla \cdot \overline{\overline{T}} = -\nabla \cdot \overline{\overline{\Pi}} \quad (9.120)$$

où  $\overline{\overline{T}}$  est le tenseur des efforts magnétiques (tractions) et  $\overline{\overline{\Pi}}$ , son opposé, celui des pressions magnétiques. En analysant ces tenseurs, on montre que le champ  $\vec{B}$  exerce sur la matière (Fig. 9.2) une pression isotrope, appelée pression magnétique :

$$p_M = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (9.121)$$

et une force de traction dirigée selon les lignes de force (tension magnétique) :

$$T_M = \frac{B^2}{\mu_0} \quad (9.122)$$

Lorsque le champ  $\vec{B}$  est uniforme, la résultante des forces appliquées à un élément de volume du fluide est nulle [cf. (9.120) et Fig. 9.2(a)].

Dans un champ non uniforme,  $p_M$  et  $T_M$  varient d'un point à un autre et les lignes de force sont en général courbes. La force résultante  $\vec{J} \times \vec{B}$  n'est plus alors nulle en général ; on peut vérifier qu'elle est perpendiculaire à  $\vec{B}$  et l'analyser [Fig. 9.2(b)] en deux composantes : l'une est due au gradient transverse de la pression magnétique ; l'autre, dirigée selon le rayon de courbure  $R$  de la ligne de force moyenne et égale à  $B^2/\mu_0 R$ , est la résultante des forces de traction. On peut vérifier que, lorsque  $\vec{J} = 0$ , la structure du champ est telle ( $\nabla \times \vec{B} = 0$ ) que ces deux composantes se compensent, de sorte que la force résultante est effectivement nulle.

#### d) Ondes d'Alfvén

Lorsqu'un fluide assez conducteur est placé dans un champ magnétique statique  $\vec{B}$ , la propagation des ondes électromagnétiques de basse fréquence s'y fait avec entraînement de la matière par convection : de telles ondes sont appelées magnétohydrodynamiques (ou parfois hydromagnétiques). Le cas le plus simple est celui d'ondes planes sinusoïdales se propageant dans un fluide homogène, parallèlement à un champ uniforme  $\vec{B}_0$  ; si la matière et le champ magnétique sont gelés l'un dans l'autre, on a alors les ondes d'Alfvén transversales dont la structure est représentée sur la figure 9.3. Elles peuvent être décrites en considérant les tubes de force comme des cordes vibrantes tendues par la tension magnétique  $T_M$  et chargées

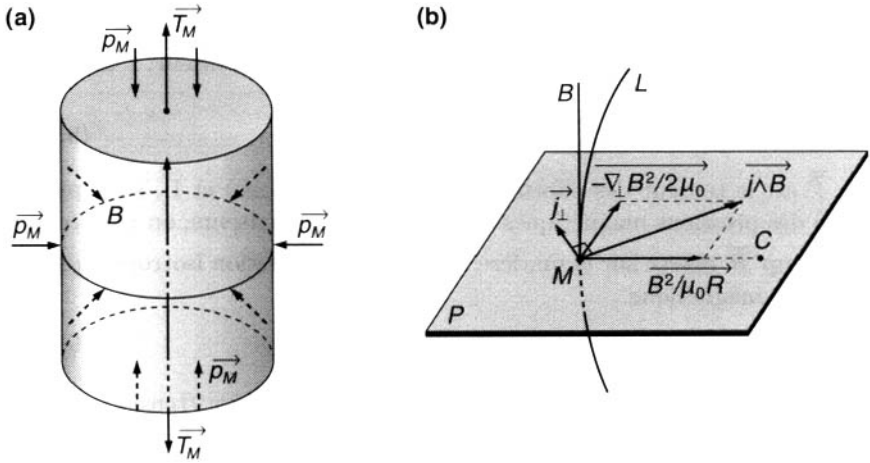


Figure 9.2 : Pression  $p_M$  et tension  $T_M$  magnétiques.  $p_M$  et  $T_M$  sont des forces par unité de surface.

(a) Champ uniforme : résultante des forces nulle sur un élément de volume.

(b) Champ non uniforme : force appliquée à un élément de volume.

$L$  ligne de force moyenne,  $P$  plan perpendiculaire à  $L$ .

$C$  centre de courbure de la ligne de force,  $MC = R$  rayon de courbure de  $L$ .

par la matière entraînée par convection. La vitesse de propagation de ces ondes est alors donnée par la formule classique des cordes vibrantes :

$$V_a = (T_M/\rho)^{1/2} = \frac{B_0}{(mu_0\rho)^{1/2}} \quad (9.123)$$

$V_a$  est la vitesse d'Alfvén ; elle est indépendante de la fréquence. Les ondes d'Alfvén, comme les ondes sonores, sont sans dispersion dans le domaine des basses fréquences. En fait, leur existence suppose une forte interaction champ-matière ; le nombre de Reynolds magnétique qui caractérise cette interaction s'écrit ici :

$$R_B \Rightarrow L = \frac{2\pi\sigma B_0^2}{\rho\omega} \quad (9.124)$$

où  $L$  est appelé nombre de Lundquist. Pour que les ondes d'Alfvén se propagent sans dispersion ni amortissement notable, il faut que le champ  $B_0$  et la conductivité  $\sigma$  soient assez forts.

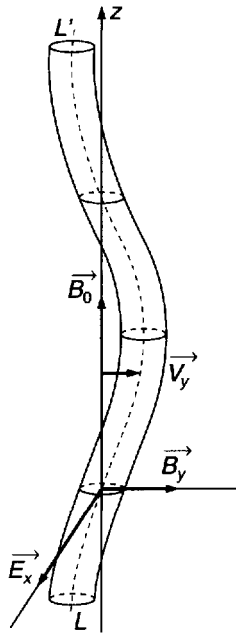


Figure 9.3 : Onde d'Alfvén.

Propagation parallèle à un champ statique uniforme  $\vec{B}_0$ .

$LL'$  ligne de force déformée par l'onde.

$E_x$ ,  $B_y$ ,  $V_y$  composantes oscillantes de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{V}$  liées à l'onde.

### 9.4.2 Gaz faiblement ionisés

Les propriétés hydrodynamiques d'un gaz faiblement ionisé sont essentiellement celles du gaz neutre. D'autre part, les forces électromagnétiques appliquées aux particules chargées sont transmises localement aux particules neutres par les collisions électron-neutre et ion-neutre qui sont très fréquentes si la pression n'est pas trop basse. Dans ces conditions, on peut, si l'on se limite à l'étude d'écoulements ne variant pas trop vite dans le temps ou dans l'espace (basses fréquences, grandes longueurs d'ondes), transposer les équations de la MHD aux gaz faiblement ionisés. Cependant, pour tenir compte de la compressibilité du gaz, il faut écrire le système complet des équations hydrodynamiques.

Les équations électromagnétiques de la MHD se transposent sans grandes modifications aux gaz faiblement ionisés. La condition pour que le courant de déplacement soit négligeable s'écrit :

$$\omega = 2\pi f \ll \frac{\omega_p^2}{\nu_{eo}} \quad (9.125)$$

soit :

$$f \ll 10^{-1} n_e p^{-1} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{torr} \quad (9.126)$$

Cette condition étant généralement satisfaite, la seule modification à apporter aux équations électromagnétiques concerne la loi d'Ohm qui s'écrit maintenant :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - \frac{\Omega_e \tau_e}{B} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{\Omega_e \tau_e \Omega_i \tau_{io}}{B^2} (J \times B) \times B \quad (9.127)$$

où  $\Omega_e$  et  $\Omega_i$  sont les fréquences gyromagnétiques des électrons et des ions,  $\tau_e = (\nu_{eo} + \nu_{ei})^{-1}$  la "période de collision" des électrons,  $\tau_{io} = \frac{1}{\nu_{io}}$  la période de collision ion-neutre. Les deux termes supplémentaires qui figurent dans cette formule décrivent deux phénomènes nouveaux qui étaient négligeables dans les liquides : l'effet Hall et le "glissement" des ions par rapport aux neutres. L'importance de ces deux phénomènes est mesurée par les valeurs du paramètre  $\Omega_e \tau_e$  appelé paramètre de Hall et du paramètre correspondant  $\Omega_i \tau_{io}$ .

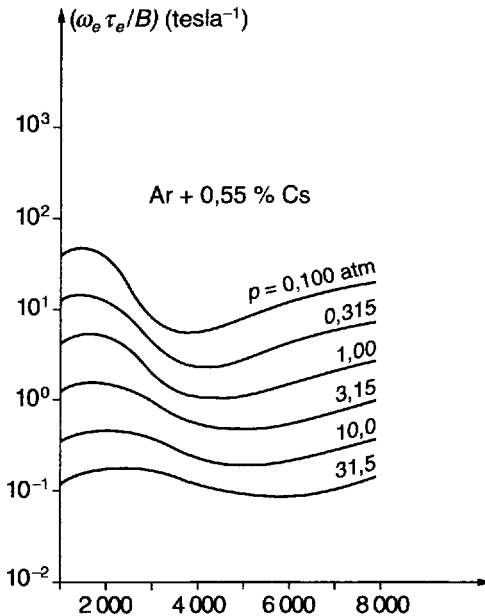


Figure 9.4 : Paramètre de Hall dans un mélange argon-césium (d'après [304]).

La figure 9.4 donne à titre d'exemple les valeurs de  $\Omega_e \tau_e$  dans un mélange type argon-césium utilisé dans les convertisseurs d'énergie MHD. On y voit que, pour une pression de 1 atm, l'effet Hall commence à être important ( $\Omega_e \tau_e \sim 1$ ) pour des champs

de 0.1 T (1000 gauss). Le tableau 9.2 permet finalement de comparer les propriétés magnétohydrodynamiques d'un gaz faiblement ionisé typique et d'un métal liquide tel que le mercure.

	Mercure	Gaz faiblement ionisé	Gaz fortement ionisé
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$1.35 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^{-1}$	1.7
$\sigma$ (mho/m)	$10^6$	$10^2$	$1.5 \cdot 10^9$
$\eta$ (N.s/m <sup>2</sup> )	$1.5 \cdot 10^{-3}$	$10^{-4}$	$8 \cdot 10^3$
$\lambda$ (m <sup>2</sup> /s)	$8 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^{-4}$
$\nu$ (m <sup>2</sup> /s)	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^2$
$P$	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$10^6$
$R_B$	$1.3Vl$	$1.3 \cdot 10^{-4}Vl$	$2 \cdot 10^3Vl$

Tableau 9.2 : Propriétés magnétohydrodynamiques de trois fluides.

Gaz faiblement ionisé : convertisseur MHD

Ar + 0.5% de Cs,  $p = 1$  atm,  $T \sim 2300$  K.

Gaz fortement ionisé : plasma de fusion contrôlée.

hydrogène,  $n_e = 10^{28}$  m<sup>-3</sup>,  $T = 10^8$  K.

$l$  est la longueur caractéristique et  $V$  la vitesse du fluide (unités SI).

### 9.4.3 Gaz totalement ionisés

Dans un gaz faiblement ionisé, les électrons et les ions sont localement couplés au gaz de particules neutres par les collisions, de sorte que le mélange de ces trois espèces de particules se comporte du point de vue hydrodynamique comme un fluide pur dont la vitesse  $\vec{V}$  est essentiellement celle des particules neutres. Dans un gaz complètement ionisé, celles-ci ont complètement disparu, et en général les collisions électron-ion jouent un rôle assez faible dans la dynamique du milieu : il semble donc *a priori* que l'on devrait, en général, pour décrire le mouvement du plasma, utiliser une théorie à deux fluides dans laquelle les densités, vitesses et pressions partielles des électrons et des ions évoluent séparément. Considérons, cependant, un plasma placé dans un champ magnétique assez fort ; les collisions sont négligeables si l'on a :

$$\Omega_e \tau_e \gg 1 \quad \Omega_i \tau_i \gg 1 \quad (9.128)$$

Dans ces conditions, si le champ  $\vec{B}$  est à variations spatiales et temporelles suffisamment lentes, les trajectoires individuelles des particules sont en première approximation des hélices dirigées suivant les lignes de force magnétiques. Si, maintenant, on superpose au champ  $\vec{B}$  un faible champ  $\vec{E}$ , nous avons vu (cf. chapitre 2) que ces hélices dérivent lentement dans la direction perpendiculaire à  $\vec{B}$  ; il en résulte que les deux espèces de particules sont animées de la même vitesse macroscopique, dite vitesse de dérive électrique :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_i = \vec{V} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (9.129)$$

Autrement dit, le champ  $\vec{B}$  lui-même introduit un synchronisme entre les deux espèces de particules ; on peut donc traiter le plasma comme un fluide unique. D'autre part, la relation (9.129) peut aussi s'écrire :

$$E + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \quad (9.130)$$

qui est la forme limite que prend la loi d'Ohm (9.98) lorsque la conductivité électrique  $\sigma$  tend vers l'infini. On peut enfin montrer (cf. problème P9-5) que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction si l'on a :

$$\omega_p^2 \gg \Omega_e \Omega_i \quad (9.131)$$

ce qu'on peut aussi écrire en  $\text{cm}^{-3} \cdot \text{gauss}^{-2}$  :

$$\frac{n_e}{B^2} \gg 54(Z/A) \quad (9.132)$$

où  $Ze$  et  $A$  sont la charge électrique et la masse atomique des ions du plasma. En résumé, si le champ magnétique est assez fort, donc si la condition (9.128) est remplie, si la fréquence des perturbations est assez basse  $\omega \ll \Omega_i$  et le plasma assez dense, donc si la condition (9.132) est remplie, alors ce plasma se comporte comme un fluide unique satisfaisant aux approximations de la MHD. La forme que prend la loi d'Ohm montre de plus que le nombre de Reynolds magnétique est très élevé et que, par conséquent, la convection de  $\vec{B}$  par le plasma l'emporte sur la diffusion. C'est cette dernière propriété qui détermine les très nombreuses applications des idées de la MHD en géophysique, en astrophysique et dans les plasmas de laboratoires.

## 9.5 Confinement et diamagnétisme

### 9.5.1 Confinement magnétique d'un plasma

Supposons maintenant que la force de gravitation soit négligeable devant les forces électromagnétiques. On peut en général faire cette hypothèse, quand on étudie des plasmas de faibles dimensions produits à la surface de la Terre ; en effet, si  $a$  désigne une dimension caractéristique d'un tel plasma, la pression de celui-ci varie de façon notable sur une distance de l'ordre de  $a$  ; si  $a$  est bien plus petit que le rayon terrestre, les variations du potentiel de gravitation sont faibles sur cette même distance. D'après (9.90) les variations de pression du plasma ne peuvent alors être créées que par le terme  $\vec{J} \times \vec{B}$  ; si donc on néglige les effets de gravitation, les équations (9.90) et (9.98) s'écrivent en régime stationnaire :

$$\nabla \cdot \bar{\Psi} = \vec{J} \times \vec{B} \quad (9.133)$$

$$\vec{E} + \left( \vec{V} + \frac{\vec{J}}{n_e q_e} \right) \times \vec{B} - \frac{1}{n_e q_e} \nabla \cdot \bar{\Psi}_e = \rho \vec{J} \quad (9.134)$$

On peut discuter de façon simple ces équations en supposant de plus que les pressions sont scalaires ; (9.133) s'écrit alors :

$$\nabla p = \vec{J} \times \vec{B} \quad (9.135)$$

On a d'ailleurs, d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (9.136)$$

Ces deux équations servent de base à la théorie simplifiée du confinement d'un plasma par un champ magnétique. On dit qu'un plasma est confiné quand il occupe une région fermée de l'espace ; en dehors de cette région, sa pression est nulle. On peut considérer la famille des surfaces isobariques du plasma, définies par la condition  $p = \lambda$ ,  $\lambda$  étant un paramètre variable. Le vecteur  $\nabla p$  est en tout point dirigé suivant la surface normale à la surface isobarique passant par ce point ; la formule (9.135) montre alors que les vecteurs  $\vec{J}$  et  $\vec{B}$  sont dans le plan tangent à cette surface. Autrement dit, *les lignes de forces magnétiques et les lignes de courant sont tracées sur les surfaces isobariques*. L'étude des propriétés des plasmas confinés selon ce schéma constitue un chapitre particulier de la physique des plasmas que nous n'étudions pas en détail, bien qu'il soit très important pour l'étude théorique des réacteurs à fusion contrôlée. Nous renvoyons

pour cela le lecteur à [110, chapitres 7 et 12] qui contient de nombreuses références à la littérature originale. On y démontre notamment que les surfaces isobares sont topologiquement analogues à des tores [Fig. 9.5(a)] et qu'il existe une surface singulière, réduite à une courbe. Celle-ci correspond à un maximum de la pression ; c'est une ligne de force singulière appelée *axe magnétique* du système.

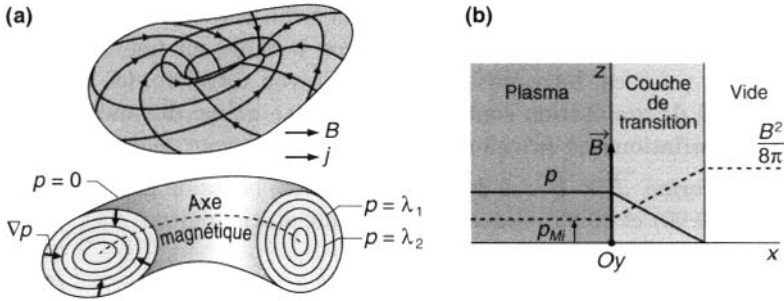


Figure 9.5 : Confinement magnétique d'un plasma.

(a) Topologie toroïdale.

(b) Diamagnétisme du plasma.

Il est intéressant de préciser la relation reliant la pression et le champ magnétique dans un exemple idéal simple, celui d'un confinement unidimensionnel par un champ magnétique à lignes, de forces parallèles. Supposons donc que  $\vec{B}$  est en tout point parallèle à  $Oz$ , que le plasma et le champ magnétique s'étendent jusqu'à l'infini dans les directions  $Oy$  et  $Oz$  et que leurs propriétés ne dépendent que de  $x$  [Fig. 9.5(b)]. Par combinaison de (9.135) et (9.136) on obtient :

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \nabla \vec{B} - \frac{1}{2\mu_0} \nabla B^2 \quad (9.137)$$

Dans le cas étudié ici on a  $\vec{B} \cdot \nabla \vec{B} \equiv 0$ , d'où par intégration de (9.137) :

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{Cte} \quad (9.138)$$

Cette formule montre que  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  joue le rôle d'une pression : c'est la pression magnétique que nous avons introduite au paragraphe 9.4.1 c). Dans l'exemple simple étudié ici, le confinement magnétique du plasma s'exprime



par le fait que la somme de la pression du plasma et de la pression magnétique reste constante. On a représenté cela sur la figure 9.5(b), en traçant en trait plein la courbe représentant les variations de  $p$  avec  $x$ , et en trait pointillé la courbe représentant les variations de  $B^2/2\mu_0$ .

### 9.5.2 Diamagnétisme d'un plasma

La formule (9.138) montre que si  $p$  croît,  $B$  diminue : le plasma se comporte donc comme un milieu diamagnétique. On peut d'ailleurs obtenir facilement un critère pour évaluer l'importance de ce diamagnétisme. À cet effet, considérons à nouveau le schéma de la figure 9.5(b) : à l'extérieur du plasma le champ magnétique est  $B = B_0$ , à l'intérieur  $B = B_1$  ; pour que l'on ait  $B_1 \approx B_0$  il faut et il suffit d'après (9.138) que l'on ait  $p_1 \ll B_0^2/2\mu_0$ ,  $p_1$  étant la pression cinétique à l'intérieur du plasma ; on a d'ailleurs alors aussi  $p_1 \ll B_1^2/2\mu_0$ . On peut donc dire que le *diamagnétisme du plasma est négligeable si l'on a en tout point* :

$$p \ll \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (9.139)$$

Si au contraire  $p$  devient de l'ordre de  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  le diamagnétisme du plasma est important.

Il est, d'ailleurs, intéressant de relier directement le diamagnétisme aux propriétés des trajectoires individuelles des particules. Nous avons vu en effet au chapitre 2 que chaque particule du plasma possède si on néglige les collisions un moment magnétique :

$$\mu = \frac{1}{2}mw_{\perp}^2/B \quad (9.140)$$

et que ce moment est dirigé dans le sens inverse à  $\vec{B}$ . Rappelons toutefois que la formule (9.140) n'a de sens que si la condition d'adiabaticité spatiale est satisfaite ( $\delta B/B \ll 1$  pour  $\delta x = 1$  rayon d'orbite). Cela étant, nous pouvons calculer le moment magnétique  $M_{ez}$  par unité de volume du gaz d'électrons en effectuant sur la fonction de distribution des électrons  $f_e$  l'intégration :

$$\begin{aligned} M_{ez} &= -\frac{1}{B} \int \frac{1}{2} m_e w_{e\perp}^2 f(\vec{w}_e) \underline{dw}_e \\ &= -\frac{1}{B} \int \frac{1}{2} m_e (w_{ex}^2 + w_{ey}^2) f(\vec{w}_e) \underline{dw}_e \end{aligned} \quad (9.141)$$

Si la fonction de distribution est presque isotrope, la pression cinétique  $p_e$  des électrons est presque scalaire, on a  $v_e \ll w_e$  et (9.141) peut s'écrire

d'après la définition de cette pression :

$$\vec{M}_e = -\frac{p_e}{B} \vec{e}_z \quad (9.142)$$

Les ions produisant une contribution analogue, le moment magnétique total par unité de volume est donc :

$$\vec{M} = -\frac{p}{B} \vec{e}_z \quad (9.143)$$

Dans l'intérieur du plasma  $\vec{M}$  est constant ; une polarisation magnétique constante ne correspond à aucun courant électrique macroscopique et  $\vec{B}$  est aussi constant ; par contre, dans la couche de transition,  $\vec{M}$  est variable et il lui correspond une densité de courant :

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (9.144)$$

Nous verrons au paragraphe suivant que  $\vec{J}_M$  n'est qu'une partie du courant total  $\vec{J}$ .

### 9.5.3 Vitesses macroscopiques et vitesses de dérives des particules

Il est intéressant de remarquer que les vitesses macroscopiques déduites des équations macroscopiques ne coïncident pas en général avec les vitesses de dérives des particules individuelles établies au chapitre 2. Pour le voir, on considère un régime quasi statique où les collisions sont négligeables. Les équations de transport de la quantité de mouvement donnent par exemple pour les électrons :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{e\parallel} + \frac{\vec{E} \times B}{B^2} - \frac{1}{n_e q_e} \frac{(\nabla \cdot \vec{\Psi}_e) \times \vec{B}}{B^2} \quad (9.145)$$

où  $\vec{v}_{e\parallel}$  est un vecteur arbitraire parallèle à  $\vec{B}$ . Si le milieu est homogène  $\nabla \cdot \vec{\Psi} = 0$  et la composante transversale de la vitesse macroscopique ainsi trouvée coïncide avec la vitesse de dérive purement électrique obtenue au chapitre 2.

Par contre, si le milieu n'est pas homogène, la vitesse macroscopique (9.145) ne coïncide pas avec la vitesse de dérive des particules individuelles. Ce résultat apparemment paradoxal s'explique de la façon suivante : la vitesse de dérive  $\vec{w}_D$  d'une particule est la vitesse de son centre de rotation. Si l'on considère tous les centres de rotation qui sont à un instant donné dans un petit élément de volume  $d\vec{r}$ , on peut calculer une valeur moyenne  $\vec{v}$  de leurs vitesses  $\vec{w}_D$ . Cette moyenne est différente de la vitesse macroscopique  $\vec{v}$  ; en effet  $\vec{v}$  est la moyenne des vitesses instantanées des particules qui sont elles-mêmes dans l'élément de volume  $d\vec{r}$ . Ce groupe de particules ne correspond pas aux centres de rotation situés dans  $d\vec{r}$  : en fait, si  $d\vec{r}$  est assez petit, leurs centres de rotation sont tous autour de ce volume, comme indiqué schématiquement

sur la figure 9.6(b). La discussion détaillée des relations entre  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  a été donnée par divers auteurs (cf. [109], [110], [111]). À titre d'exemple nous étudions un exemple simple unidimensionnel en faisant comme au paragraphe précédent l'hypothèse que les lignes de forces de  $\vec{B}$  sont en tout point parallèles à l'axe  $Oz$ . Pour simplifier nous supposons également  $\vec{E} = 0$  et nous n'écrivons pas les vitesses parallèles à  $\vec{B}$ , qui ne posent d'ailleurs aucune difficulté. Nous supposons enfin que les pressions sont scalaires. Dans ces conditions on a, par exemple pour les électrons, d'après (9.145) et (2.147) :

$$\vec{v}_e = \frac{1}{n_e q_e} \frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{B^2} \quad (9.146)$$

$$\overrightarrow{w}_{De} = \frac{m_e w_{e\perp 2}}{4q_e} \frac{\vec{B} \times \nabla B^2}{B^4} \quad (9.147)$$

d'où l'on déduit en effectuant dans (9.147) la moyenne sur l'espace des vitesses :

$$\vec{v}'_e = \frac{p_e}{2n_e q_e} \frac{\vec{B} \times \nabla B^2}{B^4} \quad (9.148)$$

Si l'on exprime ces formules en termes de courant électrique, il est facile de voir que le courant total transporté par les électrons  $\vec{J}_e$  est la somme d'un courant de dérive  $\overrightarrow{J}_{De}$  et du courant de diamagnétisme  $\overrightarrow{J}_{Me}$ . On a en effet, d'après (9.146), (9.148) et (9.142) :

$$\vec{J}_e = n_e q_e \vec{v}_e = \frac{\vec{B} \times \nabla p_e}{B^2} = \frac{1}{B} \frac{dp_e}{dx} \vec{e}_y \quad (9.149)$$

$$\overrightarrow{J}_{De} = n_e q_e \vec{v}'_e = p_e \frac{\vec{B} \times \nabla B}{B^3} = \frac{p_e}{B^2} \frac{dp_e}{dx} \vec{e}_y \quad (9.150)$$

$$\overrightarrow{J}_{Me} = \nabla \times \overrightarrow{M}_e = -\nabla \times \frac{p_e}{B} \vec{e}_z = \frac{d}{dx} (p_e/B) \vec{e}_y \quad (9.151)$$

sur lesquelles on vérifie immédiatement la relation annoncée :

$$\vec{J}_e = \overrightarrow{J}_{De} + \overrightarrow{J}_{Me} \quad (9.152)$$

Une formule analogue existant pour les ions, il est à noter que les relations (9.149) à (9.152) s'appliquent aussi aux courants et pressions totales produits par les deux espèces de particules ensemble. Il est intéressant, pour illustrer ces formules, d'étudier les trois cas particuliers suivants :

- $\alpha$ ) *Champ magnétique uniforme, plasma non homogène* : on a alors  $\overrightarrow{w}_{De} = \vec{v}'_e = 0$  et  $\vec{v}_e \neq 0$ . Le courant de dérive est nul et le courant total se confond avec le courant de diamagnétisme. D'après la discussion du paragraphe précédent, ce cas ne peut se produire que si le plasma est assez peu dense pour que la condition (9.140) soit satisfaite. Il est représenté sur la figure 9.6(a) qui montre comment un gradient de pression peut engendrer une vitesse macroscopique perpendiculaire aux lignes de forces bien que les centres de rotation des particules individuelles n'aient pas de vitesse de dérive. Les orbites représentées sont celles qui sont sur la droite  $AA'$  dans un plan perpendiculaire à  $\vec{B}$ . Le nombre de particules décrivant l'une de ces orbites est représenté par l'épaisseur du trait ; il y a plus de particules dans la région gauche de la figure, et il est clair qu'en un point quelconque  $M$  de la droite  $AA'$ , il y a plus de particules se dirigeant vers le haut que vers le bas ; d'où l'apparition d'une vitesse macroscopique  $\vec{v}_e$ .

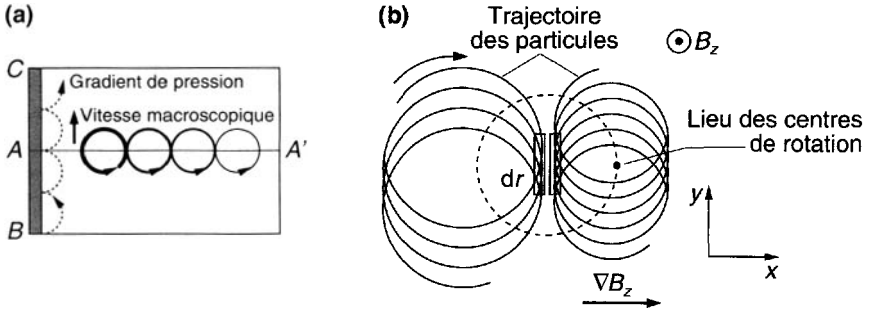


Figure 9.6 : Courant macroscopique et vitesse de dérive.

(a) Plasma inhomogène, champ magnétique uniforme.

(b) Plasma homogène, champ magnétique non uniforme.

- $\beta$ ) *Champ magnétique non uniforme et plasma homogène* : on a, au contraire,  $\vec{w}_{De} = 0$  et  $\vec{v}_e = 0$ . Les formules (9.150) et (9.151) montrent que le courant total est nul parce que le courant de diamagnétisme annule le courant de dérive. Cette compensation est représentée sur la figure 9.6(b) : les particules dérivent individuellement vers le haut comme prévu par la formule (9.147). Mais au point considéré il y a plus de particules effectuant leur mouvement de rotation vers le bas que de particules l'effectuant vers le haut ; en effet les premières sont vers la gauche de la figure dans la région des plus faibles champs magnétiques leurs rayons d'orbites sont donc plus grands et leurs centres de rotation occupent un plus grand volume.
- $\gamma$ ) *Champ magnétique et pression reliés par la relation de confinement* (9.138) : on a alors, d'après les relations (9.149), (9.150) et (9.151) :

$$\vec{J} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} \vec{e}_y \quad (9.153)$$

$$\vec{J}_D = \frac{p}{B^2} \frac{dB}{dx} \vec{e}_y \quad (9.154)$$

$$\vec{J}_M = -\left(\frac{p}{B^2} + \frac{1}{\mu_0}\right) \frac{dB}{dx} \vec{e}_y \quad (9.155)$$

On voit que le courant diamagnétique et le courant de dérive sont de signes contraires ; de plus le courant de diamagnétisme est supérieur au courant de dérive, de sorte que le courant total est de même signe que le courant de diamagnétisme et de sens contraire au courant de dérive. L'ordre de grandeur relatif de ces trois courants dépend d'ailleurs uniquement du rapport de la pression cinétique à la pression magnétique au point considéré :

- si l'on a  $p \ll B^2/2\mu_0$ , on a  $\vec{J} \approx \vec{J}_M$ ,  $J_D \ll J$  ; à la limite, quand  $p$  tend vers zéro on retrouve la situation décrite ci-dessus dans le cas  $\alpha$ ) et sur la figure 9.6(a) ;

- si l'on a  $p \gg B^2/2\mu_0$ , on a  $\vec{J} \approx -\vec{J}_M$ ,  $J \ll J_D$  ; cette situation est maintenant analogue au cas limite  $\beta$ ) décrit ci-dessus.

Ce deuxième cas limite peut être également obtenu si l'on considère un *plasma en équilibre thermodynamique dans un champ magnétique non homogène*. On

peut montrer que l'existence d'un champ magnétique statique quelconque ne modifie pas les propriétés de cet équilibre thermodynamique. La fonction de distribution des vitesses de chaque espèce de particules y est maxwellienne, donc isotrope, et les vitesses macroscopiques sont nulles. Bien entendu, si partant d'un état où  $B = 0$ , on applique à un plasma un champ magnétique, les effets d'induction qui en résultent produisent un régime variable dans lequel apparaissent des courants ; quand  $\vec{B}$  se sera stabilisé il faudra un certain temps pour que le plasma relaxe vers l'équilibre thermodynamique par l'effet des collisions. L'existence et l'établissement de cet équilibre ne peuvent pas s'étudier en toute rigueur sans préciser la nature du récipient complètement clos dans lequel le plasma est enfermé.

Dans le même ordre de questions, il faut bien remarquer qu'il y a une certaine part d'arbitraire dans les hypothèses  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$  faites ci-dessus (pressions scalaires, plasma isotherme). On ne peut pas lever cet arbitraire dans le seul cadre des équations macroscopiques ; cela tient, comme nous l'avons déjà souvent remarqué, au fait que ces équations forment un système incomplet et qu'elles ne déterminent pas les pressions.

## 9.6 Effets des collisions inélastiques

Lorsqu'il y a des collisions inélastiques, celles-ci ont pour résultat de créer et de faire disparaître des particules. Dans les équations hydrodynamiques des particules d'espèce  $a$ , cela se traduit par une modification des termes de source de particules  $I_a$ , de quantité de mouvement  $P_a$  et d'énergie  $s_a$ .

Le calcul de  $I_a$  est immédiat, car cette quantité n'est autre que la somme algébrique de tous les taux de réactions où intervient une particule d'espèce  $a$ . Chacun d'entre eux se calcule par une formule du type (4.27), et on l'affecte du signe + ou - selon que la réaction produit ou détruit une particule d'espèce  $a$ . Il faut cependant noter que les collisions de type 12/14 (dont le prototype est l'excitation par collision électronique  $e, A, e, A^*$ ) ne changent pas le nombre des particules d'espèce 1. Elles n'apportent aucune contribution au terme  $I$  de celles-ci ; elles contribuent par contre aux échanges d'énergie et de quantité de mouvement.

Le calcul de  $P_a$  et  $s_a$  est plus compliqué. On ne peut en effet évaluer ces grandeurs qu'au moyen de l'équation de Boltzmann, à condition de connaître la section efficace différentielle du processus considéré. Le lecteur pourra se rendre compte des difficultés de cette approche en consultant par exemple [299, chapitre 2]. Il y a cependant un cas simple : c'est le calcul de la perte d'énergie  $s$  des électrons par excitation (ou désexcitation) d'atomes ou de molécules. Ces derniers, étant de masse beaucoup plus grande, peuvent être traités comme des diffuseurs fixes qui ne prennent aucune énergie

de recul dans la collision. Le terme  $s_e$  se déduit alors simplement du taux de réaction par la relation :

$$s_e = I_e Q \quad (9.156)$$

où  $Q$  est l'énergie de réaction (cf. section 4.3).

## 9.7 Appendices

### A9-1 Termes d'interaction dans les équations de transport

#### a) Formules générales

L'équation de transport (9.21) de la grandeur  $A$  fait apparaître le terme d'interaction :

$$C[A(w_1)] = - \int A_1 \frac{\overrightarrow{X}_{12}}{m} \cdot \frac{\partial f_{12}}{\partial \overrightarrow{w}_1} \underline{dw_1} \underline{dr_2} \underline{dw_2} \quad (9.157)$$

Dans cet appendice nous allons calculer les divers termes de ce type que l'on rencontre dans les équations de transport usuelles. Nous les écrivons pour alléger les notations :

$$\begin{aligned} I &\equiv C(1) \\ \overrightarrow{P} &\equiv C(m \overrightarrow{w}) \\ \overline{\overline{R}} &\equiv C(m \overrightarrow{w} \overrightarrow{w}) \\ r &= C(m w^2 / 2) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\overline{\overline{R}}) \\ \overline{\overline{S}} &= C[m(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v})(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v})] \\ s &= C[m |\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}|^2 / 2] = \frac{1}{2} \text{Tr}(\overline{\overline{S}}) \end{aligned}$$

Dans le calcul de ces intégrales, on admet que les forces d'interaction  $\overrightarrow{X}_{12}$  ne dépendent pas des vitesses mais seulement des positions.

Dans le cas des gaz neutres, cela revient à considérer l'interaction entre deux atomes ou molécules comme un phénomène quasi statique décrit par une déformation adiabatique des deux atomes (ou molécules) interagissant. Cette hypothèse tomberait en défaut si la vitesse relative des deux atomes (ou molécules) devenait comparable aux vitesses orbitales électroniques à l'intérieur des deux atomes (ou molécules). Un calcul d'ordre de grandeur montre facilement que ceci correspond à des énergies relatives de l'ordre de  $\frac{M}{m_e} Ry$  ( $M$  masse moléculaire,  $m_e$  masse des molécules,  $Ry = 13,5$  eV) soit de l'ordre de  $10^5$  eV.

Dans le cas des plasmas, nous avons vu dans la section 3.2 que les forces d'interaction électromagnétiques entre deux particules chargées (qui dépendent des vitesses) sont d'ordre  $w^2/c^2$  par rapport aux forces d'interaction électrostatiques. Dans les plasmas non relativistes ces forces sont donc négligeables.

Dans ces conditions, la formule (9.157) peut s'écrire aussi :

$$C(A_1) = - \int A_1 \left( \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{w}_1} \cdot \int \frac{\overrightarrow{X}_{12}}{m} f_{12} \underline{dr_2} \underline{dw_2} \right) \underline{dw_1} \quad (9.158)$$

soit, en intégrant par partie (le terme tout intégré étant nul pour toute forme raisonnable de  $f_{12}$ ) :

$$C(A_1) = \int \left( \int \frac{\overrightarrow{X}_{12}}{m} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \right) \cdot \frac{\partial A_1}{\partial \overrightarrow{w}_1} \underline{dw}_1 \quad (9.159)$$

Dans cette formule,  $\frac{\partial A}{\partial \overrightarrow{w}}$  est une grandeur tensorielle d'un ordre supérieur d'une unité à celui de  $A$ , avec les cas particuliers suivants :

$$A = 1 \quad \frac{\partial A}{\partial \overrightarrow{w}} = 0 \quad (9.160)$$

$$A = \overrightarrow{w} \quad \frac{\partial A}{\partial \overrightarrow{w}} = \overline{\overline{\delta}}$$

$$A = \overrightarrow{w} \overrightarrow{w} \quad \frac{\partial A}{\partial \overrightarrow{w}} = \overline{\overline{\delta}} \overrightarrow{w} + (\overline{\overline{\delta}} \overrightarrow{w})^T \quad (9.161)$$

où le signe  $T$  désigne la transposition des deux derniers indices du tenseur, de sorte que le terme  $ij k$  du deuxième membre de cette dernière équation s'écrit explicitement :

$$\delta_{ij} w_k + \delta_{ik} w_j \quad (9.162)$$

En reportant (9.160) à (9.161) dans (9.159) on obtient les expressions générales :

$$I = 0 \quad (9.163)$$

$$\overrightarrow{P} = \int \overrightarrow{X}_{12} n_{12} \underline{dr}_2 \quad (9.164)$$

$$\overline{\overline{R}} = \int (\overrightarrow{X}_{12} \overrightarrow{w}_1 + \overrightarrow{w}_1 \overrightarrow{X}_{12}) f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \underline{dw}_1 \quad (9.165)$$

Les trois autres termes de collisions s'en déduisent facilement ensuite car l'on a :

$$r = \frac{1}{2} \text{Tr}(\overline{\overline{R}}) = \int \overrightarrow{w}_1 \cdot \overrightarrow{X}_{12} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \underline{dw}_1 \quad (9.166)$$

et en développant le produit  $(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v})(\overrightarrow{w} - \overrightarrow{v})$  :

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{R}} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{P} + \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{v}) \quad (9.167)$$

$$s = r - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{P} \quad (9.168)$$

Remarque : On trouve donc que  $I$  est toujours nul. Ceci est satisfaisant puisque les seules collisions prises en compte sont les collisions élastiques qui conservent le nombre des particules. Ce résultat n'est cependant pas totalement évident ; en effet le théorème de conservation des particules par les collisions élastiques s'applique au système global constitué par une certaine masse de gaz. Compte tenu du caractère non local du terme de collision général inclus dans l'expression (9.157), cette conservation globale pourrait ne pas impliquer la règle locale  $I = 0$ . Nous allons d'ailleurs voir aux paragraphes suivants que, pour la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie, les termes locaux ne sont pas nuls dans un système non homogène (effets de gradients).

## b) Effets des corrélations

**α) Structure des corrélations** Nous écrivons maintenant la fonction de distribution double sous la forme :

$$f_{12} = f_1 f_2 + f'_{12} + f''_{12} \quad (9.169)$$

$$f'_{12} = f_1 f_2 g_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (9.170)$$

$$f''_{12} = f''_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2) \quad (9.171)$$

Sous cette forme on a séparé dans  $f_{12}$  trois termes de natures physiques différentes :

- le terme non corrélé  $f_1 f_2$  ;
- le terme  $f'_{12}$  qui présente des corrélations spatiales exprimées par la fonction  $g_{12}$  mais pas de corrélations de vitesse ;
- le terme  $f''_{12}$  qui représente d'éventuelles corrélations de position dépendant des vitesses.

Dans le calcul des termes d'interaction on pose de même :

$$\vec{P} = \vec{P}^v + \vec{P}' + \vec{P}'' \quad (9.172)$$

$$\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{R}}^v + \overline{\overline{R}}' + \overline{\overline{R}}'' \quad (9.173)$$

en affectant du signe "v" les contributions du type Vlasov amenées par le terme  $f_1 f_2$ , du signe "prime" les contributions apportées par  $f'_{12}$  et du signe "seconde" celles apportées par  $f''_{12}$ .

Dans un gaz en équilibre thermodynamique on peut montrer (cf. problème P9-2) que si les forces d'interactions ne dépendent pas des vitesses, la fonction de distribution double ne présente que les deux premiers termes ; il n'y a donc que des corrélations de position indépendantes des vitesses. Dans un gaz hors équilibre on ne peut pas *a priori* exclure l'existence de corrélations de position dépendant des vitesses, c'est-à-dire l'existence d'un terme  $f''_{12}$ .

Ceci étant, la décomposition de  $f_{12}$  en deux termes selon ce schéma n'est pas univoque ; elle peut même se faire *a priori* d'une infinité de manières puisqu'on dispose des deux fonctions  $f'_{12}$  et  $f''_{12}$  pour représenter la seule fonction  $f_{12}$ . On peut donc imposer une condition supplémentaire pour rendre univoque la décomposition de  $f_{12}$ . Il est possible de le faire en décidant que  $f'_{12}$  ne contribue pas à la densité double  $n_{12}$  (cf. problème P9-2).

**$\beta$ ) Calculs des termes de corrélations dans  $C(A_1)$**  Les contributions du type Vlasov ont été calculées dans la section 9.2.4. Calculons maintenant l'effet des corrélations ; en reportant les formules (9.169) à (9.171) dans (9.164) et (9.165) on obtient facilement :

$$\vec{P}_1 = n_1 \int \vec{X}_{12} n_2 g_{12} \underline{dr}_2 \quad (9.174)$$

$$P'' = 0 \quad (9.175)$$

$$\overline{\overline{R}}'_1 = \vec{P}_1 \vec{w}_1 + \vec{w}_1 \vec{P}_1 \quad (9.176)$$

$$\overline{\overline{R}}''_1 = \int (\vec{X}_{12} \vec{w}_1 + \vec{w}_1 \vec{X}_{12}) f''_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_2 \underline{dw}_1$$

et par conséquent d'après (9.167 et 9.168) :

$$\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{R}}'' \quad (9.177)$$

$$s = r'' \quad (9.178)$$



avec :

$$r_1'' = \int \overline{w_1} \cdot \overline{X_{12}} f_{12}'' \underline{dr_2} \underline{dw_2} \underline{dw_1} \quad (9.179)$$

On voit que seules les corrélations de positions contribuent à  $\overrightarrow{P_1}$ , et qu'elles s'éliminent par contre dans  $\overline{S}$  et  $\overline{s}$ .

Dans un gaz homogène, isotrope, l'intégrale  $\overrightarrow{P_1}$  est nulle par raison de symétrie.

Dans le cas général d'un gaz non homogène,  $\overrightarrow{P_1}$  n'est pas nul (l'action des particules 2 situées "à gauche" du point 1 peut l'emporter sur l'action de celles situées "à droite"). Nous montrerons ci-dessous que si les forces d'interactions sont des forces centrales dérivant d'un potentiel,  $\overrightarrow{P_1}$  et  $r_1''$  dérivent eux-mêmes de potentiels macroscopiques, c'est-à-dire que l'on a :

$$\overrightarrow{P_1} = -\nabla \cdot \overline{\pi_1} \quad (9.180)$$

$$r_1'' = -\nabla \cdot \overline{\sigma_1} \quad (9.181)$$

et nous trouverons les expressions de  $\overline{\pi_1}$  (qu'on appelle la pression interparticulaire) et de  $\overline{\sigma_1}$ .

### c) Cas des mélanges

Les calculs précédents ont été faits dans le cas d'un gaz pur. Dans le cas des mélanges ils se transposent tels quels aux interactions *aa* entre particules de mêmes espèces. Par contre il peut apparaître des effets nouveaux pour des interactions de type *ab* entre des particules *a* et des particules *b* d'espèces différentes. Reprenons donc rapidement les calculs pour ces interactions *ab*.

**α) Expressions générales des termes  $C_{ab}$**  Considérant maintenant une fonction :

$$A_{a1} = A(\overline{r_{a1}}, \overline{w_{a1}}, t) \quad (9.182)$$

le terme d'interaction *ab* au point  $\overline{r_1}$  relatif à cette grandeur peut s'écrire :

$$C_{ab1}(A_{a1}) = \int \left( \int \frac{\overline{X_{ab12}}}{m} f_{ab12} \underline{dr_{b2}} \underline{dw_{b2}} \right) \cdot \frac{\partial A_{a1}}{\partial \overline{w_{a1}}} \underline{dw_{a1}} \quad (9.183)$$

et l'on en déduit comme précédemment les expressions :

$$I_{ab1} = 0 \quad (9.184)$$

$$\overrightarrow{P_{ab1}} = \int \overline{X_{ab12}} n_{ab12} \underline{dr_{b2}} \quad (9.185)$$

$$\overline{R_{ab1}} = \int (\overline{X_{ab12}} \overline{w_{a1}} + \overline{w_{a1}} \overline{X_{ab12}}) f_{ab12} \underline{dr_{b2}} \underline{dw_{b2}} \underline{dw_{a1}} \quad (9.186)$$

$$r_{ab1} = \int \overline{w_{a1}} \cdot \overline{X_{ab12}} f_{ab12} \underline{dr_{b2}} \underline{dw_{b2}} \underline{dw_{a1}} \quad (9.187)$$

$$\overline{S_{ab1}} = \overline{R_{ab}} - (\overline{v_a} \overrightarrow{P_{ab}} + \overrightarrow{P_{ab}} \overline{v_a}) \quad (9.188)$$

$$s_{ab1} = r_{ab} - \overline{v_a} \cdot \overrightarrow{P_{ab}}$$

**β) Effet des corrélations** Comme pour un gaz pur, on analyse la fonction de distribution double  $f_{ab12}$  en trois composantes en posant :

$$f_{ab12} = f_{a1}f_{b2} + f'_{ab12} + f''_{ab12} \quad (9.189)$$

$$f'_{ab12} = f_{a1}f_{a2}(1 + g_{ab12}) \quad (9.190)$$

$$n_{ab12} = n'_{ab12} = n_{a1}n_{b2}(1 + g_{ab12}) \quad (9.191)$$

$$n''_{ab12} = 0 \quad (9.192)$$

où  $g_{ab12}$  ne dépend que des positions et  $f''_{ab12}$  est où un terme éventuel dépendant à la fois des positions et des vitesses. Cette décomposition de  $f_{ab12}$  en trois termes conduit à séparer aussi chacune des quantités  $\overrightarrow{P_{ab}}$  et  $\overline{\overline{R_{ab}}}$  en trois termes, les termes de Vlasov et les termes :

$$\overrightarrow{P'_{ab1}} = n_{a1} \int \overrightarrow{X_{ab12}} n_{b2} g_{ab12} \underline{dr}_{b2}$$

$$\overrightarrow{P''_{ab1}} = 0$$

$$\overrightarrow{R'_{ab1}} = \overrightarrow{P'_{ab1}} \overrightarrow{v_{a1}} + \overline{\overline{a_1}} \overrightarrow{P'_{ab1}}$$

$$\overrightarrow{R'_{ab1}} = \int (\overrightarrow{X_{ab12}} \overrightarrow{w_{a1}} + \overline{\overline{w_{a1}}} \overrightarrow{X_{ab12}}) f''_{ab12} \underline{dr}_{b2} \underline{dw}_{b2} \underline{dw}_{a1}$$

$$\overline{\overline{S_{ab1}}} = \overline{\overline{R'_{ab1}}}$$

$$s_{ab1} = r''_{ab1}$$

Cependant on ne peut pas de façon générale aller plus loin :  $\overrightarrow{P'_{ab1}}$  et  $s_{ab1}$  ne dérivent pas en général de potentiels. Pour pouvoir expliciter  $\overrightarrow{P'_{ab1}}$  et  $s_{ab1}$  il faut se placer dans un cadre analogue à celui des équations de Navier-Stokes : il faut supposer que l'on est près de l'équilibre thermodynamique. On obtient alors :

$$\overrightarrow{P'_{ab1}} = -n_{a1} m_a (\overline{v_{a1}} - \overline{v_{b1}}) \nu_{1ab1} \quad (9.193)$$

$$s_{ab1} = -n_{a1} \kappa (T_{a1} - T_{b1}) \nu'_{2ab1} \quad (9.194)$$

où  $\nu_{1ab1}$  et  $\nu'_{2ab1}$  sont les fréquences de collisions efficaces au point 1 respectivement pour l'échange de quantité de mouvement et l'échange d'énergie. Notons enfin qu'il existe entre les termes  $C_{ab}$  et  $C_{ba}$  des lois de réciprocité que nous allons discuter au paragraphe suivant.

#### d) Propriétés de réciprocité des termes $C_{ab}$ . Cas des gaz faiblement inhomogènes

**α) Formules générales (interactions à portée finie)** Nous avons vu au paragraphe précédent que les termes d'échange de quantité de mouvement et d'énergie par interaction entre les particules d'espèces  $a$  et  $b$  s'écrivent de façon générale :

$$\overrightarrow{P_{ab1}} = \int \overrightarrow{X_{ab12}} n_{ab12} \underline{dr}_2 \quad (9.195)$$

$$s_{ab1} = \int \vec{w}_1 \cdot \vec{X}_{ab12} f''_{ab12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \tag{9.196}$$

où l'on a supposé les forces d'interactions  $\vec{X}_{ab12}$  indépendantes des vitesses et désigné par  $f''_{ab12}$  la partie de la fonction de distribution double représentant les corrélations de position dépendant des vitesses. Les intégrales représentant l'action réciproque des particules  $a$  sur les particules  $b$  s'écrivent de même :

$$\vec{P}_{ba1} = \int \vec{X}_{ba12} n_{ba12} \underline{dr}_2 \tag{9.197}$$

$$s_{ba1} = \int \vec{w}_1 \cdot \vec{X}_{ba12} f''_{ba12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \tag{9.198}$$

Nous supposons dans cet appendice que les forces d'interaction ont une portée finie  $R$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$\vec{X}_{ab12} = 0 \text{ pour } r_{12} \geq R \tag{9.199}$$

Les intégrales ci-dessus peuvent donc être limitées à la sphère d'interaction définie par la condition (9.199).

Pour analyser les propriétés de  $\vec{P}_{ab1}$  et  $s_{ab1}$  nous partageons cette sphère en deux demi-sphères  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  par un plan diamétral arbitraire [Fig. 9.7(a)]. À tout point 2 de la sphère  $\Sigma$  on peut associer un point 3 situé dans  $\Sigma'$  et diamétralement opposé de 2 par rapport au centre 1 de la sphère d'interaction. On peut donc partager chacune des

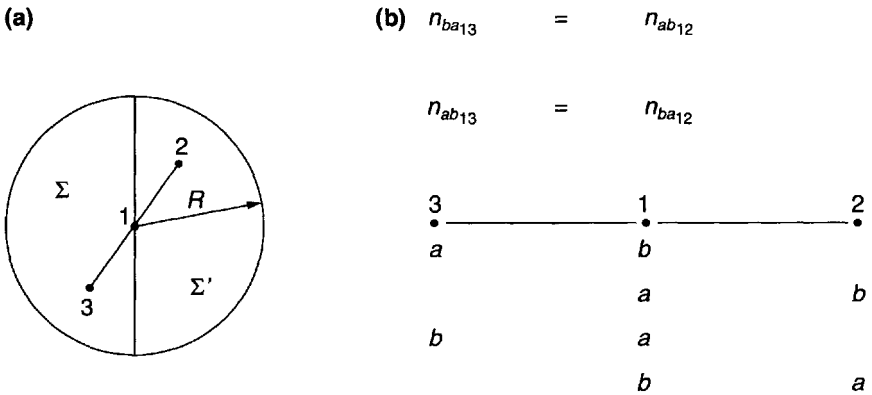


Figure 9.7 : Propriétés de symétrie des termes d'interaction.

(a) Partage de la sphère d'interaction en deux demi-sphères.

(b) Invariance par translation des densités doubles dans un gaz homogène.

intégrales (9.195) à (9.198) en deux termes, l'un portant sur  $\Sigma$  et l'autre sur  $\Sigma'$ . On a par exemple pour  $\vec{P}_{ab1}$  et  $\vec{P}_{ba1}$  :

$$\vec{P}_{ab1} = \int_{\Sigma} \vec{X}_{ab12} n_{ab12} \underline{dr}_2 + \int_{\Sigma'} \vec{X}_{ab13} n_{ab13} \underline{dr}_3 \tag{9.200}$$

$$\vec{P}_{ba1} = \int_{\Sigma} \vec{X}_{ba12} n_{ba12} \underline{dr}_2 + \int_{\Sigma'} \vec{X}_{ba13} n_{ba13} \underline{dr}_3 \quad (9.201)$$

Compte tenu des relations :

$$\vec{X}_{ab12} = \vec{X}_{ba12} = -\vec{X}_{ab13} = -\vec{X}_{ba13} \quad (9.202)$$

et :

$$\underline{dr}_3 = \underline{dr}_2 \quad (9.203)$$

les équations (9.200) et (9.201) peuvent s'écrire aussi :

$$\vec{P}_{ab1} = \int_{\Sigma} \vec{X}_{ab12} (n_{ab12} - n_{ab13}) \underline{dr}_2 \quad (9.204)$$

$$\vec{P}_{ba1} = \int_{\Sigma} \vec{X}_{ab12} (n_{ba12} - n_{ba13}) \underline{dr}_2 \quad (9.205)$$

Le même calcul effectué pour  $s_{ab}$  donne :

$$s_{ab1} = \int_{\Sigma} \int_{\vec{w}_1} \int_{\vec{w}_2} \vec{w}_1 \cdot \vec{X}_{ab12} (f''_{ab12} - f''_{ab13}) \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (9.206)$$

$$s_{ba1} = \int_{\Sigma} \int_{\vec{w}_1} \int_{\vec{w}_2} \vec{w}_1 \cdot \vec{X}_{ab12} (f''_{ba12} - f''_{ba13}) \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (9.207)$$

**$\beta$ ) Cas des gaz isotropes** Dans un gaz isotrope les densités doubles sont invariants par rotation du point 2 autour du point 1 ; on a alors :

$$n_{ab12} = n_{ab13} \quad (9.208)$$

$$n_{ba12} = n_{ba13} \quad (9.209)$$

Il en résulte d'après (9.204) et (9.205) que l'on a :

$$\vec{P}_{ab1} = \vec{P}_{ba1} = 0 \quad (9.210)$$

Le même raisonnement ne peut pas se faire pour  $s_{ab}$  qui fait intervenir  $f''_{ab12}$ . Cette fonction dépend des vitesses, plus précisément de la vitesse relative :

$$g_{12} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 \quad (9.211)$$

et exprime le fait que dans la sphère d'interaction les corrélations dépendent de  $\vec{g}_{12}$ , comme nous l'avons d'ailleurs bien vu dans l'établissement de l'intégrale de Boltzmann (cf. section 8.4.3). Il en résulte que même si le gaz est isotrope on n'a pas pour  $f''_{ab12}$  de règle d'invariance vis-à-vis d'une rotation de 2 autour de 1 et que l'on a en général :

$$s_{ab1} \neq 0 \quad (9.212)$$

$$s_{ba1} \neq 0 \quad (9.213)$$

**$\gamma$ ) Cas des gaz homogènes** De manière générale les densités doubles peuvent être considérées comme des fonctions de  $\vec{r}_1$  et du vecteur position relative  $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Cependant dans un gaz homogène les propriétés du fluide ne dépendent pas de la position ;  $n_{ab12}$  ne doit plus être alors fonction que du vecteur  $\vec{r}_{12}$ . En d'autres termes, les densités doubles  $n_{ab12}$  doivent être invariants par translation.

En effectuant la translation qui transporte le vecteur  $\overrightarrow{31}$  sur le vecteur  $\overrightarrow{12}$  [Fig. 9.7(b)] on obtient les relations :

$$n_{ba13} = n_{ab12} \quad (9.214)$$

$$n_{ab13} = n_{ba12} \quad (9.215)$$

En reportant ces relations dans les expressions (9.204) et (9.204) on voit que  $\overrightarrow{P_{ab}}$  et  $\overrightarrow{P_{ba}}$  obéissent à la loi de réciprocité :

$$\overrightarrow{P_{ab1}} + \overrightarrow{P_{ba1}} = 0 \quad (9.216)$$

Pour  $s_{ab}$  on remarque que de manière générale  $f''_{ab12}$  peut être considérée comme une fonction de  $\overrightarrow{r_1}$ ,  $\overrightarrow{w_1}$ ,  $\overrightarrow{r_{12}}$  et  $\overrightarrow{g_{12}}$ . Cependant dans un gaz homogène elle n'est plus fonction que de  $\overrightarrow{r_{12}}$ ,  $\overrightarrow{w_1}$  et  $\overrightarrow{g_{12}}$ . Pour des valeurs données des vitesses,  $f''_{ab12}$  obéit donc aux mêmes règles d'invariance que  $n_{ab12}$  vis-à-vis des translations. Et l'on en déduit par un calcul analogue à celui fait pour  $\overrightarrow{P_{ab}}$  que l'on a la règle de réciprocité :

$$s_{ab1} + s_{ba1} = 0 \quad (9.217)$$

### δ) Cas des gaz faiblement inhomogènes

**Calcul de  $\overrightarrow{P_{ab}}$**  Dans un gaz non homogène les densités doubles ne sont pas invariantes par translation. Cependant, dans les régimes fluides usuels, l'inhomogénéité est faible à l'échelle de la sphère d'interaction. En effectuant la translation représentée sur la figure 9.7(b) on obtient alors en considérant  $n_{ab12}$  comme une fonction de  $\overrightarrow{r_1}$  et de  $\overrightarrow{r_{12}}$  :

$$n_{ba13} = n_{ab12} - \overrightarrow{r_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_1}} n_{ab12} \quad (9.218)$$

$$n_{ab13} = n_{ba12} - \overrightarrow{r_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_1}} n_{ba12} \quad (9.219)$$

D'où l'on déduit à partir de (9.204) et (9.205) :

$$\overrightarrow{P_{ab1}} + \overrightarrow{P_{ba1}} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{X_{ab12}} \left[ \overrightarrow{r_{12}} \cdot \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_1}} (n_{ab12} + n_{ba12}) \right] d\overrightarrow{r_2} \quad (9.220)$$

soit encore, puisque  $\overrightarrow{r_1}$  et  $\overrightarrow{r_{12}}$  sont des variables indépendantes :

$$\overrightarrow{P_{ab1}} + \overrightarrow{P_{ba1}} = \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{r_1}} \cdot \int_{\Sigma} \overrightarrow{X_{ab12}} \overrightarrow{r_{12}} (n_{ab12} + n_{ba12}) d\overrightarrow{r_2} \quad (9.221)$$

On voit donc finalement que la somme  $\overrightarrow{P_{ab}} + \overrightarrow{P_{ba}}$  dérive d'un potentiel, c'est-à-dire que l'on a :

$$\overrightarrow{P_{ab}} + \overrightarrow{P_{ba}} = -\nabla \cdot \overline{\overline{\pi_{ab}}} \quad (9.222)$$

L'expression du tenseur de pression interparticulaire  $\overline{\overline{\pi_{ab}}}$  est fournie par la formule (9.221). On peut l'écrire sous une forme légèrement différente en remarquant que le plan séparant la sphère d'interaction en deux moitiés est arbitraire. On aurait donc obtenu le même résultat en faisant l'intégrale sur  $\Sigma'$  au lieu de  $\Sigma$  ; pour éliminer cette séparation artificielle on peut donc écrire :

$$\overline{\overline{\pi_{ab1}}} = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma + \Sigma'} \overrightarrow{X_{ab12}} \overrightarrow{r_{12}} (n_{ab12} + n_{ba12}) d\overrightarrow{r_2} \quad (9.223)$$

où l'intégrale porte maintenant sur la totalité du volume de la sphère d'interaction.

Les calculs précédents se transposent facilement au cas où  $a$  et  $b$  sont identiques et l'on trouve ainsi pour un gaz pur :

$$\begin{aligned} \text{dans un gaz homogène} & \quad \overrightarrow{P_{aa}} = 0 \\ \text{dans un gaz faiblement inhomogène} & \quad \overrightarrow{P_{aa}} = -\nabla \cdot \overline{\overline{\pi_{aa}}} \end{aligned} \quad (9.224)$$

avec :

$$\overline{\overline{\pi_{aa1}}} = -\frac{1}{2} \int \overrightarrow{X_{aa12}} \overrightarrow{r_{12}} n_{12} \underline{dr_2} \quad (9.225)$$

**Calcul de  $s_{ab}$**  On obtient par un calcul analogue à celui de  $\overrightarrow{P_{ab}}$  :

$$s_{ab} + s_{ba} = -\nabla \cdot \overrightarrow{\sigma_{ab}} \quad (9.226)$$

avec :

$$\overrightarrow{\sigma_{ab}} = -\frac{1}{2} \int \overrightarrow{r_{12}} (\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{X_{ab12}}) (f''_{ab12} + f''_{ba12}) \underline{dr_2} \underline{dw_1} \underline{dw_2} \quad (9.227)$$

où l'on a comme pour  $\overline{\overline{\pi_{ab}}}$  à effectuer l'intégrale sur la totalité  $\Sigma + \Sigma'$  de la sphère d'interaction ; et dans un gaz pur :

$$s_{aa} = -\nabla \cdot \overrightarrow{\sigma_{aa}} \quad (9.228)$$

avec :

$$\overrightarrow{\sigma_{ab}} = -\frac{1}{2} \int \overrightarrow{r_{12}} (\overrightarrow{w_1} \cdot \overrightarrow{X_{12}}) f''_{12} \underline{dr_2} \underline{dw_1} \underline{dw_2} \quad (9.229)$$

## A9-2 Équations de transport des moments d'ordre 2

### a) Transport du flux de quantité de mouvement

En posant  $A \equiv m \overrightarrow{w} \overrightarrow{w}$  dans (9.24) on obtient :

$$\frac{\partial \overline{\overline{T}}}{\partial t} + \nabla \cdot n m \overrightarrow{w} \overrightarrow{w} \overrightarrow{w} = n (\overrightarrow{X} \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w} \overrightarrow{X}) + \overline{\overline{R}} \quad (9.230)$$

avec :

$$\overline{\overline{R}} = C(m \overrightarrow{w} \overrightarrow{w}) \quad (9.231)$$

Pour calculer le terme de force extérieure, nous décomposons celle-ci en une composante  $\overrightarrow{X}$  indépendante de la vitesse qui donne une contribution :

$$n(\overrightarrow{X} \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \overrightarrow{X}) \quad (9.232)$$

et éventuellement une composante  $\overrightarrow{X}$  dépendant de  $\overrightarrow{w}$  ; cette deuxième composante n'existe que pour un gaz de particules chargées placées dans un champ magnétique  $\overrightarrow{B}$  ; on a alors :

$$\overrightarrow{X} = q \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{B} = m \overrightarrow{\Omega}_b \times \overrightarrow{w} \quad (9.233)$$

où

$$\overrightarrow{\Omega}_b = -\frac{q}{m} \overrightarrow{B} \quad (9.234)$$

est le vecteur rotation gyromagnétique. En reportant cette expression de  $\vec{X}$  à la place de  $\vec{X}$  dans le deuxième membre de (9.230) on obtient une contribution qui peut s'écrire :

$$(\vec{\Omega}_b \times \vec{T}) + (\vec{\Omega}_b \times \vec{T})^T \tag{9.235}$$

Dans cette formule  $\vec{\Omega}_b \times \vec{T}$  désigne le produit rotatif défini pour un vecteur  $\vec{A}$  et un tenseur  $\vec{T}$  par la formule :

$$\vec{A} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} A_y T_{zx} - A_z T_{yx} & A_y T_{zy} - A_z T_{yy} & A_y T_{zz} - A_z T_{yz} \\ A_z T_{xx} - A_x T_{zx} & A_z T_{xy} - A_x T_{zy} & A_z T_{xz} - A_x T_{zz} \\ A_x T_{yx} - A_y T_{xx} & A_x T_{yy} - A_y T_{xy} & A_x T_{yz} - A_y T_{xz} \end{vmatrix} \tag{9.236}$$

et l'exposant  $T$  désigne l'opération de transposition ( $\vec{S}^T$  est le tenseur dérivé de  $\vec{S}$  par symétrie par rapport à la diagonale principale). En rapprochant les formules (9.232) et (9.235) de (9.167) et en explicitant le premier membre de (9.230) à partir des formules (9.10) et (9.12) on obtient finalement la formule (9.53).

### b) Transport de la pression cinétique

Posons dans (9.21)  $A \equiv m (\vec{w} - \vec{v}) (\vec{w} - \vec{v})$ . Pour effectuer les calculs de moyenne on remarque que tous les termes tels que  $\partial A / \partial t$  qui contiennent  $\vec{w} - \vec{v}$  au premier degré ont une moyenne nulle puisque  $\vec{w} = \vec{v}$ . En utilisant systématiquement cette remarque on trouve pour les divers termes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} \tag{9.237}$$

$$-n \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0 \tag{9.238}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot n \vec{w} A &= \nabla \cdot (\vec{v} \vec{\Psi} + \vec{Q}) \\ &= \vec{v} \cdot \nabla \vec{\Psi} + \vec{\Psi} \cdot \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{Q} \end{aligned} \tag{9.239}$$

$$-n \vec{w} \cdot \nabla A = (\vec{\Psi} \cdot \vec{v}) + (\vec{\Psi} \cdot \vec{v})^T \tag{9.240}$$

$$n \frac{\vec{X}}{m} \cdot \frac{\partial A}{\partial \vec{w}} = (\vec{\Omega} \times \vec{\Psi}) + (\vec{\Omega} \times \vec{\Psi})^T \equiv \vec{M}$$

Dans le calcul de ce dernier terme on vérifie facilement que toute force indépendante de la vitesse donne un résultat nul et nous n'avons donc conservé que la contribution apportée éventuellement par la force de Lorentz. En rapprochant les divers termes ci-dessus on peut donc finalement écrire l'équation d'évolution de  $\vec{\Psi}$  sous la forme (9.55).

## A9-3 Compressions adiabatiques sans collisions

### a) Équations générales

Commençons par expliciter les six composantes de l'équation en supposant  $\nabla \cdot \vec{Q} = 0$  (écoulements adiabatiques) et en négligeant les termes d'interaction ; on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{xx}}{n} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \Psi_{xx} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Psi_{yx} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Psi_{2x} \right) = \frac{M_{xx}}{n} \quad (9.241)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{yy}}{n} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \Psi_{xy} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \Psi_{yy} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \Psi_{2y} \right) = \frac{M_{yy}}{n} \quad (9.242)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{zz}}{n} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} \Psi_{xz} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \Psi_{yz} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Psi_{2z} \right) = \frac{M_{zz}}{n} \quad (9.243)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{xy}}{n} \right) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \frac{\Psi_{xy}}{n} \\ & + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\Psi_{yy}}{n} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\Psi_{xx}}{n} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{\Psi_{xy}}{n} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\Psi_{xx}}{n} = \frac{M_{xy}}{n} \end{aligned} \quad (9.244)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{yz}}{n} \right) + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \frac{\Psi_{yz}}{n} \\ & + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{\Psi_{zz}}{n} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\Psi_{yy}}{n} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\Psi_{zz}}{n} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\Psi_{xy}}{n} = \frac{M_{yz}}{n} \end{aligned} \quad (9.245)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{zx}}{n} \right) + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \frac{\Psi_{zx}}{n} \\ & + \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\Psi_{xx}}{n} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\Psi_{zz}}{n} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\Psi_{yx}}{n} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\Psi_{yz}}{n} = \frac{M_{zx}}{n} \end{aligned} \quad (9.246)$$

avec d'après

$$M_{zz} = \frac{2q}{m} (B_z \Psi_{xy} - B_y \Psi_{zx}) \quad (9.247)$$

$$M_{yy} = \frac{2q}{m} (B_x \Psi_{yz} - B_z \Psi_{xy}) \quad (9.248)$$

$$M_{zz} = \frac{2q}{m} (B_y \Psi_{zx} - B_x \Psi_{yz}) \quad (9.249)$$

$$M_{xy} = \frac{q}{m} \left[ B_z (\Psi_{yy} - \Psi_{xx}) + B_x \Psi_{zx} - B_y \Psi_{yz} \right] \quad (9.250)$$

$$M_{yz} = \frac{q}{m} \left[ B_x (\Psi_{zz} - \Psi_{yy}) + B_y \Psi_{xy} - B_z \Psi_{zx} \right] \quad (9.251)$$

$$M_{zx} = \frac{q}{m} \left[ B_y (\Psi_{xx} - \Psi_{zz}) + B_z \Psi_{yz} - B_x \Psi_{xy} \right] \quad (9.252)$$

Pour écrire ces équations on a donc supposé qu'on avait affaire à un gaz de particules chargées placées dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . Ces formules peuvent s'appliquer au cas d'un gaz neutre en annulant  $q$  et par suite tous les termes  $M$ . Si au contraire on a  $q \neq 0$ , les équations écrites sont celles relatives à une composante d'un plasma (électrons ou une espèce d'ion). Cependant il faut bien noter que nous n'avons écrit aucun terme d'interaction. Or nous avons vu [cf. paragraphe A9-1c]) que les termes  $\overline{S_{ab}}$  relatifs à deux espèces différentes  $a$  et  $b$  ne sont pas nuls *a priori*. L'application des équations ci-dessus à une composante d'un plasma suppose donc la pression assez basse pour que les termes d'interaction soient effectivement négligeables.



### b) Compression parallèle à un champ magnétique

Les formules ci-dessus se simplifient beaucoup si l'écoulement possède des propriétés de symétrie. Nous étudions tout d'abord le cas très simple représenté schématiquement sur la figure ?? et défini par les conditions suivantes :

- le milieu "comprimé" est l'une des composantes d'un plasma ; celui-ci est assez dilué pour qu'on puisse négliger les collisions entre particules ;
- $\vec{B}$  uniforme est dirigé suivant  $Oz$  ;
- on a une distribution des vitesses ayant en tout point la symétrie de révolution autour de  $\vec{B}$  ;
- les propriétés de l'écoulement sont indépendantes de  $x$  et  $y$ .

Ces conditions permettent de poser, dans le système des équations (9.241) à (9.246) :

$$B_x = B_y = 0 \tag{9.253}$$

$$v_x = v_y = 0 \tag{9.254}$$

$$\Psi_{xy} = \Psi_{yz} = \Psi_{zx} = 0 \tag{9.255}$$

$$\Psi_{xx} = \Psi_{yy} = \Psi_{\perp} \neq \Psi_{zz} = \Psi_{\parallel} \tag{9.256}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \tag{9.257}$$

On en déduit que toutes les composantes de  $M$  sont nulles et que les équations (9.241), (9.244), (9.245) et (9.246) sont automatiquement satisfaites. D'autre part, (9.242) et (9.243) sont équivalentes et il nous reste finalement les équations (9.241) et (9.243) qui s'écrivent simplement :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{\perp}}{n} \right) = 0 \tag{9.258}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{\parallel}}{n} \right) + 2(\nabla \cdot \vec{v}) \frac{\Psi_{\parallel}}{n} = 0 \tag{9.259}$$

Compte tenu de (9.57) cette dernière équation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{\parallel}}{n^3} \right) = 0 \tag{9.260}$$

On voit donc que le type de compression étudié obéit à des lois de compressions analogues à la loi d'adiabaticité classique  $p/n^{\gamma} = \text{Cte}$ . Plus précisément on a, en suivant le mouvement des particules :

$$\Psi_{\perp}/n = \text{Cte} \tag{9.261}$$

$$\Psi_{\parallel}/n^3 = \text{Cte} \tag{9.262}$$

ce qu'on exprime souvent en disant que dans une compression unidimensionnelle parallèle à un champ magnétique, le rapport d'adiabaticité  $\gamma$  est égal à 3 pour la pression longitudinale et à 1 pour la pression transversale. On peut aussi définir une température transversale et une température longitudinale par les deux relations :

$$\Psi_{\parallel} = n\kappa T_{\parallel}, \quad \Psi_{\perp} = n\kappa T_{\perp} \tag{9.263}$$

Dans ce type de compression on a  $T_{\perp} = \text{Cte}$ ,  $T_{\parallel} = n^2$  ; du point de vue de la température transverse, la transformation est isotherme ; les variations de  $\Psi_{\perp}$  sont seulement dues aux variations de  $n$ . Au contraire dans la direction parallèle, il y a variation de température, et la variation de  $\Psi_{\parallel}$  est le résultat combiné de la variation de densité et de la variation de  $T_{\parallel}$ .

La charge des particules n'intervient nulle part dans ce calcul. Rien n'empêche donc de supposer que les deux (ou plusieurs) espèces de particules contenues dans le plasma sont comprimées de façon semblable ; dans ces conditions il est permis de supposer, comme nous l'avons fait, qu'aucun champ de charge d'espace ne vient coupler les deux espèces de particules.

Remarquons enfin que l'absence de collisions et la présence d'un champ magnétique parallèle  $Oz$  nous assurent de la réalité physique de l'écoulement imaginé puisque dans ces conditions les particules ne peuvent pas diffuser perpendiculairement à  $\vec{B}$ . Dans le cas d'un gaz neutre cette situation ne se présente pas, et il est impossible d'obtenir un écoulement ayant les symétries supposées.

### c) Compressions cylindriques perpendiculaires au champ magnétique

Une deuxième famille de compressions dans lesquelles les équations générales se simplifient s'obtient en posant :

$$v_z = 0 \quad (9.264)$$

$$\partial/\partial z = 0 \quad (9.265)$$

$$\Psi_{xz} = \Psi_{yz} = 0 \quad (9.266)$$

On vérifie alors facilement que (9.245) et (9.246) sont satisfaites identiquement. Les quatre équations deviennent :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{zz}}{n} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} \Psi_{zz} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Psi_{xy} \right) = \frac{2q}{nm} B_z \Psi_{xy} \quad (9.267)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{yy}}{n} \right) + \frac{2}{n} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \Psi_{xy} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \Psi_{yy} \right) = - \frac{2q}{nm} B_z \Psi_{xy} \quad (9.268)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{zz}}{n} \right) = 0 \quad (9.269)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\Psi_{xy}}{n} \right) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \frac{\Psi_{xy}}{n} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\Psi_{yy}}{n} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\Psi_{xx}}{n} = \frac{q}{nm} B_z (\Psi_{yy} - \Psi_{zz}) \quad (9.270)$$

On peut imposer dans ces équations les conditions de symétrie :

$$\Psi_{zz} = \Psi_{yy} = \Psi_{\perp} \quad (9.271)$$

$$\Psi_{xy} = 0 \quad (9.272)$$

Il est facile de vérifier sur les équations (9.267) à (9.269) que ces conditions correspondent forcément à des écoulements dont le vecteur vitesse satisfait aux relations :

$$\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (9.273)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (9.274)$$

La première de ces relations correspond à deux compressions unidimensionnelles identiques, l'une parallèle à  $Ox$ , l'autre parallèle à  $Oy$ . La deuxième correspond à une rotation arbitraire autour de  $Oz$ . Quand les relations (9.271) à (9.274) sont satisfaites, l'équation (9.270) est automatiquement satisfaite ; (9.268) et (9.269) conduisent facilement aux conditions :

$$\Psi_{\parallel}/n = \text{Cte} \quad (9.275)$$

$$\Psi_{\perp}/n^2 = \text{Cte} \quad (9.276)$$

Le rapport d'adiabaticité est maintenant égal à deux pour la composante de pression perpendiculaire à  $\vec{B}$ , cependant que pour  $\Psi_{\parallel}$  la compression est isotherme,  $\gamma = 1$ .

Dans les gaz neutres, on peut faire les mêmes remarques qu'au paragraphe précédent en ce qui concerne la réalité physique de telles compressions bidimensionnelles. Dans les plasmas, nous avons vu au contraire (cf. paragraphe IV.A) que ce type de compression peut s'obtenir par l'action d'un champ magnétique variable. Si le plasma est assez dilué, la compression est décrite par la théorie des orbites adiabatiques (où le mot adiabatique a le sens défini au chapitre 5, différents de celui que nous employons maintenant). Les diverses espèces de particules chargées sont comprimées solidairement, en suivant la règle de piégeage du plasma dans les tubes de force, et il n'apparaît aucun champ électrique de charge d'espace. Dans ces conditions, les relations (9.275) et (9.276) s'appliquent séparément aux électrons et aux ions (aussi bien d'ailleurs qu'à la pression totale).

### d) Compressions sphériques

On peut enfin étudier les propriétés de compression, dans lesquelles on a par hypothèse :

$$\Psi_{xx} = \Psi_{yy} = \Psi_{zz} = p \quad (9.277)$$

$$\Psi_{xx} = \Psi_{yy} = \Psi_{zz} = p \quad (9.278)$$

Les équations (9.241) à (9.246) imposent alors l'écoulement les conditions :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (9.279)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 \quad (9.280)$$

qui correspondent à une superposition de trois compressions unidimensionnelles et d'une rotation quelconque. Ces conditions étant remplies, on obtient facilement par addition des équations (9.241), (9.242) et (9.243) et par intégration :

$$p/n^{5/3} = \text{Cte} \quad (9.281)$$

Alors que les deux types de compression précédentes s'appliquaient surtout aux plasmas dilués placés dans un champ magnétique, la formule ci-dessus s'applique plutôt aux plasmas denses et aux gaz neutres ; mais ce sont alors les collisions qui maintiennent une pression scalaire à chaque instant du phénomène de compression (ou de détente) et la méthode de fermeture des équations hydrodynamiques que nous utilisons ici n'est pas valable *a priori*.

## A9-4 Loi d'Ohm dans les plasmas complexes

### a) Plasmas complètement ionisés à plusieurs espèces d'ions

Considérons le cas d'un plasma contenant plusieurs espèces d'ions mais pas de molécules neutres : pour retrouver dans ce cas la loi d'Ohm sous la forme (9.98) nous voyons par comparaison avec la formule (9.93) qu'il faut pouvoir écrire :

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{J}}{n_e q_e} + \vec{V} \quad (9.282)$$

Or, d'après la définition de  $\vec{J}$ , on a :

$$\vec{J} = n_e q_e \vec{v}_e + \sum n_i q_i \vec{v}_i \quad (9.283)$$

d'où, compte tenu de la condition de neutralité :

$$\vec{v}_e = \frac{\vec{J}}{n_e q_e} + \vec{V}' \quad (9.284)$$

avec :

$$\vec{V}' = \frac{\sum n_i q_i \vec{v}_i}{\sum n_i q_i} \quad (9.285)$$

cependant que l'on a par définition de  $\vec{V}$  :

$$\vec{V} = \frac{n_e m_e \vec{v}_e + \sum n_i m_i \vec{v}_i}{n_e m_e + \sum n_i m_i} \quad (9.286)$$

En général on a :

$$n_e m_e \vec{v}_e \ll \sum n_i m_i \vec{v}_i \quad (9.287)$$

d'où

$$\vec{V} = \frac{\sum n_i m_i \vec{v}_i}{\sum n_i m_i} \quad (9.288)$$

$\vec{V}$  et  $\vec{V}'$  sont alors deux moyennes pondérées des vitesses ioniques, mais  $\vec{V}$  est pondérée par les densités de masses et  $\vec{V}'$  par les densités de charges. Pour que ces deux vitesses soient égales il faut donc en général que tous les  $\vec{v}_i$  soient égaux, ce qu'on peut écrire :

$$\vec{v}_i = \vec{V} \quad (9.289)$$

On voit donc que dans un plasma multiple la loi d'Ohm n'est valable sous sa forme classique (9.93) que si, en plus des conditions générales de la section 9.3.5, le mouvement du fluide satisfait aux conditions plus restrictives (9.287) et surtout (9.289). Cette dernière condition, qu'on peut appeler condition de synchronisme des diverses espèces d'ions, a en somme pour effet de ramener le plasma multiple à un plasma binaire. Le synchronisme peut être produit par le champ magnétique : si l'on étudie des perturbations de fréquence caractéristique  $\omega \ll \Omega_{bi}$  ( $\Omega_{bi}$ , fréquences cyclotroniques des ions) et de grande longueur d'onde, on a alors, pour tous les  $\vec{v}_i$  :

$$\vec{v}_i = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (9.290)$$

La condition  $\omega \ll \Omega_{be}$  étant *a fortiori* satisfaite, on a alors  $\vec{v}_e = \vec{v}_i$  et la condition (9.287) est satisfaite automatiquement. Le genre de mouvement que nous venons de décrire rapidement est celui qui se produit dans les ondes magnétohydrodynamiques [cf. paragraphe 9.4.1d)].

Le terme de résistivité, de son côté, ne donne aucune difficulté ; la formule se généralise simplement en :

$$\sum \vec{P}_{ei} = -n_e q_e \bar{\rho} \cdot \vec{J} \quad (9.291)$$

## b) Gaz partiellement ionisés

Il est intéressant, pour terminer, d'étudier la forme que prend la loi d'Ohm dans un gaz non complètement ionisé. Pour simplifier l'étude, nous nous limiterons ici au cas d'un gaz ternaire contenant des électrons, une seule espèce d'ions, et une seule espèce

de neutres. Nous affecterons respectivement des indices  $e, i, o$  les grandeurs relatives à ces trois espèces de particules. Comme les neutres n'ont pas de charge ( $q_0 = 0$ ), ils n'interviennent pas directement dans l'équation (9.92), et une partie des calculs faits pour les plasmas binaires dans la section 9.3.5 se transforme directement ; on vérifie facilement que (9.92) s'écrit maintenant en négligeant les termes de pression interparticulaire :

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot n_e q_e \vec{v}_e \vec{v}_e + \nabla \cdot n_i q_i \vec{v}_i \vec{v}_i = \quad (9.292)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{q_e}{m_e} + \frac{q_i}{m_i} \right) \rho - \frac{q_e q_i}{m_e m_i} (\rho_m - \rho_{mo}) \right] \vec{E} \\ & + \left[ \left( \frac{q_e}{m_e} + \frac{q_i}{m_i} \right) \vec{J} - \frac{q_e q_i}{m_e m_i} (\vec{J}_m - \vec{J}_{mo}) \right] \times \vec{B} \\ & + \frac{q_e}{m_e} (\vec{P}_{ei} + \vec{P}_{eo}) + \frac{q_i}{m_i} (\vec{P}_{ie} + \vec{P}_{io}) \end{aligned} \quad (9.293)$$

où  $\rho_{mo}$  et  $\vec{J}_{mo}$  sont les composantes de la densité de masse et du flux de masse dues aux molécules neutres. Si l'on suppose que le plasma est électriquement neutre, on peut écrire :

$$- \frac{q_e q_i}{m_e m_i} (\rho_m - \rho_{mo}) = - \frac{n_e q_e^2}{m_e} \frac{n_i q_i}{n_e q_e} \frac{\rho_m - \rho_{mo}}{n_i m_i} = \frac{n_e q_e^2}{m_e} \quad (9.294)$$

$$- \frac{q_e q_i}{m_e m_i} (\vec{J}_m - \vec{J}_{mo}) \approx - \frac{n_e q_e^2}{m_e} \frac{n_i q_i}{n_e q_e} \frac{n_e m_e \vec{v}_e + n_i m_i \vec{v}_i}{n_e m_e + n_i m_i} = \frac{n_e q_e^2}{m_e} \vec{V}_q \quad (9.295)$$

où  $\vec{V}_q$  désigne la vitesse moyenne de masse des seules particules chargées.

On peut, d'autre part, faire les mêmes hypothèses qu'aux paragraphes précédents (quasi-isotropie, faible densité, voisinage de l'équilibre thermodynamique) et admettre l'inégalité :

$$\frac{q_e}{m_e} (\vec{P}_{ei} + \vec{P}_{eo}) \gg \frac{q_i}{m_i} (\vec{P}_{ie} + \vec{P}_{io}) \quad (9.296)$$

On met alors finalement l'équation (9.293) sous la forme :

$$\frac{m_e}{n_e q_e^2} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \vec{E} + \vec{V}_q \times \vec{B} + \frac{\vec{J}}{n_e q_e} \times \vec{B} - \frac{1}{n_e q_e} \nabla \cdot \overline{\Psi}_e - \bar{\rho} \cdot \vec{J} \quad (9.297)$$

à condition de poser maintenant :

$$\vec{P}_{ei} + \vec{P}_{eo} = -n_e q_e - \bar{\rho} \cdot \vec{J} \quad (9.298)$$

On retrouve donc la loi d'Ohm sous sa forme précédente à ceci près que la vitesse de masse globale du fluide est remplacée par la vitesse de masse  $\vec{V}_q$  des particules chargées ; ceci se comprendra si l'on remarque que le terme  $\vec{V}_q \times \vec{B}$  représente le champ électrique d'induction vu par les particules chargées. En pratique,  $\vec{V}_q$  peut être égal ou non à  $\vec{V}$  ; cela dépend du degré d'ionisation et de l'importance des collisions des particules chargées avec les neutres dans le mouvement que l'on considère.

## 9.8 Problèmes

### P9-1 Équation d'évolution de $U_P$

La densité d'énergie potentielle au point 1 dans un gaz pur est :

$$U_{P1} = \frac{1}{2} \int \varphi_{12} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (9.299)$$

a) En multipliant la deuxième équation de BBGKY par  $\varphi_{12}/2$  et en intégrant sur  $\vec{w}_1, \vec{w}_2$  et  $\vec{r}_2$ , établir l'équation d'évolution de  $U_P$  :

$$\frac{\partial U_P}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}_P = s_P \quad (9.300)$$

où  $U_P$ ,  $\vec{S}_P$  et  $s_P$  sont respectivement la densité, le flux et le terme source d'énergie potentielle.

b) Montrer que l'on a au point 1 du gaz :

$$U_{P1} = \frac{1}{2} \int \varphi_{12} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (9.301)$$

$$\vec{S}_{P1} = \frac{1}{2} \int \vec{w}_1 \varphi_{12} f_{12} \underline{dr}_2 \underline{dw}_1 \underline{dw}_2 \quad (9.302)$$

$$s_P = -\vec{v} \cdot \vec{P} + \nabla \cdot \vec{\sigma} \quad (9.303)$$

où  $\vec{P}$  et  $\vec{\sigma}$  sont respectivement la densité et le flux d'énergie potentielle au point 1 définis par les formules (9.164) et (9.228).

### P9-2 Décomposition de $f_{12}$ en trois termes

La décomposition de  $f_{12}$  en trois termes selon la formule (9.169) n'étant pas univoque, montrer qu'on peut la rendre univoque en décidant que  $f_{12}''$  ne contribue pas à la densité double  $n_{12}$ .

Dans le cas d'un gaz en équilibre thermodynamique, montrer à partir des résultats du problème P8-1 que dans l'expression (9.169) de  $f_{12}$  le troisième terme est nul.

### P9-3 \*Hydrodynamique des corrélations

Les grandeurs hydrodynamiques  $n$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{\Psi}$ ,  $\vec{Q}$  définies dans ce chapitre sont des moments de la fonction de distribution simple  $f_1$ . Ils suffisent pour décrire les gaz parfaits où les énergies d'interaction entre particules sont négligeables. Dans l'hydrodynamique des gaz réels (et des plasmas), il faut à priori introduire des grandeurs hydrodynamiques d'un type nouveau en appliquant la méthode régressive à  $f_{12}$ . C'est un sujet complexe qui a été peu étudié [102], [103], sauf dans les plasmas dans le modèle de Vlasov. Mais ce cas est singulier puisque les interactions y sont décrites de façon simple par le champ self-consistent en négligeant les corrélations. Le but de ce problème est de fournir une introduction à l' "hydrodynamique" des corrélations.

On fera l'hypothèse essentielle que la force d'interaction entre deux particules ne dépend pas des vitesses.

a) On introduit les densités doubles (bilocales)  $n_{12}$ ,  $\vec{Y}_{12}$  et  $u_{12}$ , de particules, de force et d'énergie d'interaction. Écrire les expressions générales de ces grandeurs en fonction de  $f_{12}$  et de la force  $\vec{X}_{12}$  ou du potentiel d'interaction entre deux particules  $\varphi_{12}$ .

b) Comme dans le problème P9-2 on peut décomposer  $f_{12}$  en trois termes :

$$f_{12} = f_V + f_r + f_w \tag{9.304}$$

avec :

$$f_V \equiv f_{Vlasov} = f_1 f_2 \tag{9.305}$$

$$f_r \equiv f_{\text{corrélations de position}} = f_1 f_2 g_{12} \tag{9.306}$$

$$f_w \equiv f_{\text{corrélations de vitesse}} \tag{9.307}$$

et poser de même pour toute grandeur  $A$  calculée à partir de  $f_{12}$  :

$$A = A_V + A_r + A_w \tag{9.308}$$

Calculer ces trois composantes pour  $n_{12}$ ,  $\vec{Y}_{12}$  et  $u_{12}$ .

c) Établir les trois équations d'évolutions de  $n_{12}$ ,  $\vec{Y}_{12}$  et  $u_{12}$ .

Note : dans la première on introduira les deux grandeurs monolocales  $\overrightarrow{v-12}$  et  $\overrightarrow{v-21}$  définies par :

$$n_{12} \overrightarrow{v_{12}} = \int \overrightarrow{w_1} f_{12} \underline{dw_1} \underline{dw_2} \tag{9.309}$$

$$n_{12} \overrightarrow{v_{21}} = \int \overrightarrow{w_2} f_{12} \underline{dw_1} \underline{dw_2} \tag{9.310}$$

### P9-4 Loi d'Ohm pour un plasma binaire

Dans le cas d'un plasma binaire électrons-ions (avec une seule espèce d'ions), il y a équivalence complète entre les variables globales et partielles introduites au paragraphe 9.3.1. Montrer que la loi d'Ohm peut alors s'écrire de façon exacte sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot n_e q_e \overrightarrow{v_e} \overrightarrow{v_e} + \nabla \cdot n_i q_i \overrightarrow{v_i} \overrightarrow{v_i} = \tag{9.311}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{q_e}{m_e} + \frac{q_i}{m_i} \right) \sigma - \frac{q_e q_i}{m_e m_i} \rho \right] \vec{E} \\ & + \left[ \left( \frac{q_e}{m_e} + \frac{q_i}{m_i} \right) \vec{J} - \frac{q_e q_i}{m_e m_i} \rho \vec{V} \right] \times \vec{B} \\ & - \nabla \cdot (\vec{\Psi} + \vec{s}) + \frac{q_e}{m_e} \vec{P}_{ei} + \frac{q_i}{m_i} \vec{P}_{ie} \end{aligned} \tag{9.312}$$

On pourrait d'ailleurs écrire aussi le premier membre avec les variables globales en exprimant  $\overrightarrow{v_e}$  et  $\overrightarrow{v_i}$  en fonction de  $\vec{V}$  et  $\vec{J}$ .

### P9-5 Courant de déplacement négligeable

On considère un plasma sans collisions plongé dans un fort champ magnétique statique  $\vec{B}_0$ , et l'on suppose qu'il est soumis localement à une perturbation harmonique de fréquence  $\omega$ . On prend pour axe  $Oz$  la direction de  $\vec{B}_0$ .

- a) Rappeler comment s'écrit le tenseur de conductivité du plasma.
- b) Écrire l'équation de Maxwell-Ampère, et ses projection sur les trois axes en fonction des composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{xy}$  du tenseur de conductivité.
- c) En supposant  $\omega \ll \Omega_i$  calculer  $\sigma_{xx}$ .
- d) Montrer que les conditions pour que le courant de déplacement soit négligeable peuvent s'écrire :  $|\sigma_{xx}| \gg \varepsilon_0\omega$  et  $|\sigma_{xy}| \gg \varepsilon_0\omega$ . En déduire la condition (9.132).



# Chapitre 10

## Théorie cinétique de Vlasov-Landau

### 10.1 Introduction

Une description hydrodynamique des ondes et des oscillations dans un plasma est souvent incorrecte. Une telle description suppose en effet que toutes les particules chargées du plasma interagissent de manière identique avec les champs électromagnétiques self-consistants. Dans un plasma non magnétisé ce modèle est valable si les vitesses de phase des ondes sont bien plus grandes que les vitesses d'agitation thermique des particules. Or, les ondes électrostatiques sont des ondes lentes, leur vitesse de phase est bien plus petite que la vitesse de la lumière, et dans les plasmas chauds elle peut être voisine de celle d'un nombre significatif de particules. Pour celles-ci, baptisées particules "résonnantes" (ou synchrones), l'interaction onde-particule est très différente de celle décrite par les équations hydrodynamiques. Une description correcte de l'interaction doit alors être basée sur l'analyse de l'évolution des fonctions de distribution des vitesses des particules.

On doit donc utiliser les équations cinétiques du plasma ([321], [322], [327]). Celles-ci contiennent en général (cf. section 8.4) des effets de corrélations (ou de collisions), mais pour un plasma chaud et dilué dans lequel on a  $n\lambda_D^3 \gg 1$ , ceux-ci peuvent être séparés de l'effet principal collectif d'interaction des particules avec les champs électromagnétiques self-consistants. Nous avons vu au chapitre 1 que dans de nombreux cas pratiques (plasmas cinétiques classiques), les effets de collisions n'interviennent que sur des échelles de temps bien plus longues que celle des phénomènes collectifs ( $\nu_1 \ll \omega_p$ ). On peut alors utiliser pour décrire

ceux-ci l'équation cinétique "d'ordre zéro" (cf. section 8.4) qui néglige les corrélations, c'est-à-dire l'équation de Vlasov [126] dont la forme non relativiste s'écrit :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{w}} = 0 \quad (10.1)$$

où  $f_s = f_s(\vec{w}, \vec{r}, t)$  est la fonction de distribution des particules d'espèce  $s$ , de masse  $m_s$  et de charge  $q_s$ . Il y a une équation de Vlasov de la forme (10.1) pour chacune des espèces de particules contenues dans le plasma. Leur résolution permet en principe d'exprimer les fonctions de distributions à partir des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  et d'en déduire les densités de charge :

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_s q_s \int f_s d\vec{w} \quad (10.2)$$

et de courant :

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_s q_s \int \vec{w} f_s d\vec{w} \quad (10.3)$$

où  $s$  désigne une espèce de particules, c'est-à-dire les électrons ou les ions. En reportant ces grandeurs dans les équations de Maxwell, on obtient le système complet self-consistant des équations dynamiques cinétiques du plasma. Les équations de Maxwell peuvent d'ailleurs s'écrire :

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10.4)$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{J} = \vec{J}_{\text{ext}} \quad ; \quad \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} - \rho = \rho_{\text{ext}} \quad (10.5)$$

où  $\vec{J}_{\text{ext}}$  et  $\rho_{\text{ext}}$  sont des densités et des courants produits par des "sources externes", qu'il est commode d'introduire pour étudier la réponse du plasma à des excitations extérieures. Avant d'analyser ce modèle de plasma, faisons deux remarques : négliger les collisions dans (10.1) n'est pas toujours justifié, bien que celles-ci soient rares ; des collisions même peu fréquentes peuvent changer de manière notable certains phénomènes ; nous le soulignerons quand ce sera le cas. D'autre part nous avons choisi de décrire le comportement du plasma par une équation de Vlasov non relativiste (10.1), complétée par les équations de Maxwell qui sont relativistes. Un tel mélange d'équations relativistes et non relativistes peut conduire à des résultats faux. Cependant, nous ne considérerons que des plasmas

eux-mêmes non relativistes ( $\bar{w} \ll c$ ), et en général des ondes purement électrostatiques ( $\vec{B} = 0$ ). Pour ces situations l'équation (10.1) est correcte.

On voit sur le dernier terme de (10.1) que les équations du modèle de Vlasov-Maxwell sont non linéaires et donc en général difficiles à résoudre analytiquement. Mais d'autre part le système non linéaire (10.1)-(10.5) a des propriétés générales importantes qui doivent être satisfaites par toutes ses solutions. Nous les analyserons dans la section 10.2.

Dans la section 10.3 qui est le corps principal de ce chapitre, nous étudierons la solution des équations du système, pour de *petites perturbations*, de sorte que l'on est ramené à un système d'équations aux dérivées partielles *linéaires*. C'est la base de la théorie linéaire des ondes et des instabilités dans un plasma. Nous verrons en particulier que les ondes électrostatiques linéaires sont affectées d'un *amortissement non collisionnel*, découvert théoriquement par L. D. Landau en 1946 [112], et généralement appelé *amortissement de Landau*. L'équation de Vlasov étant réversible comme on le verra dans la section 10.2, ce résultat est pour le moins surprenant, sinon suspect quant à sa signification physique. L'amortissement d'une onde est en effet un phénomène irréversible, auquel on s'attend en présence de collisions ; en l'absence de collisions, il apparut à sa découverte comme un peu paradoxal. Pour résoudre ce paradoxe, il faut faire une analyse soignée de la dynamique du plasma sur plusieurs échelles de temps (et/ou d'espace) et tenir compte des collisions et des effets non linéaires. Cette approche est générale dans toute l'étude cinétique des plasmas décrits par les équations de Vlasov-Maxwell. C'est ainsi que le problème particulier des oscillations de plasma électroniques (le problème de Landau) est devenu l'une des pierres angulaires dans l'édifice de la physique moderne des plasmas. De plus, les techniques mathématiques de traitement du problème de Landau (transformation de Fourier-Laplace, intégration sur un contour dans le plan complexe, prolongement analytique, intégrales singulières) sont aussi d'intérêt général dans l'analyse de nombreux phénomènes dans les plasmas décrits par l'équation de Vlasov. Le problème de Landau correspond à la situation physique la plus simple d'utilisation de ces techniques ; d'où son intérêt pédagogique essentiel pour aborder l'étude des effets cinétiques non collisionnels dans les plasmas.

Nous commencerons l'étude du problème de Landau, dans le cas simple d'une dynamique à une dimension, comme si les particules étaient guidées dans leur mouvement par un champ magnétique extérieur uniforme d'intensité infinie. Le seul champ qui intervient dans la dynamique est alors le champ électrique dans la direction du mouvement. C'est un champ électrostatique pur. Avec ces simplifications géométriques, le problème linéaire

de Poisson-Vlasov sera résolu dans tous ses détails. La physique de l'amortissement non collisionnel de Landau sera ensuite analysée à partir des équations de conservation de l'énergie de perturbation. Cela donne un cadre physiquement et mathématiquement cohérent pour comprendre les phénomènes prédits par la théorie linéaire. Cependant, comme l'amortissement non collisionnel linéaire apparaît de manière asymptotique, et comme les particules résonnantes (ou synchrones, c'est-à-dire se déplaçant à une vitesse égale à la vitesse de phase de l'onde) ont un comportement séculaire singulier, on doit établir le domaine de validité de l'analyse en étudiant les collisions et les effets non linéaires. Ces derniers deviennent particulièrement importants quand il y a plusieurs ondes (par exemple des paquets d'ondes). Ils ont conduit à des développements récents concernant la stochasticité intrinsèque de la dynamique des particules chargées dans des ondes cohérentes, et aussi à la théorie de la diffusion quasi linéaire dont l'importance est universelle dans les plasmas sans collisions.

Après l'analyse détaillée de l'interaction onde-particule dans le problème de Landau, nous décrivons les propriétés des oscillations de plasma électronique et des ondes acoustiques ioniques dans un plasma maxwellien. Nous étudierons aussi bien les ondes faiblement amorties que les modes ayant une fréquence complexe arbitraire. Pour ce faire nous introduirons la fonction de dispersion des plasmas et nous discuterons ses propriétés. Nous décrivons aussi et analyserons les expériences qui ont permis d'identifier ces ondes, de vérifier leur description de Vlasov et de mettre en évidence leur amortissement de Landau.

Dans la section 10.4 nous traiterons en trois dimensions les ondes électrostatiques et électromagnétiques dans un *plasma non magnétisé*. Cela nous permettra de voir les solutions de petite amplitude les plus simples du système complet (10.1)-(10.5) dans l'espace à six dimensions ( $\vec{r}$ ,  $\vec{w}$ ) et de faire la distinction entre les fonctions de distribution d'équilibre isotropes et anisotropes. Ces dernières conduisent à des instabilités linéaires qui seront étudiées dans le chapitre 11. Cette étude cinétique des ondes dans un plasma non magnétisé est d'ailleurs une introduction utile à tout le domaine beaucoup plus large et riche, mais que nous laissons de côté dans ce livre, des ondes dans les plasmas en présence d'un champ magnétique extérieur.

Une approche mathématique complètement différente des ondes électrostatiques de petite amplitude dans un plasma a été trouvée par N. G. van Kampen en 1955 [128] et K. M. Case en 1959 [129]. Cette technique des modes normaux des équations intégrales singulières fait intervenir un spectre continu de modes *non amortis*. Elle apporte un point de vue complémentaire important dans l'étude de ce problème. Nous la décrivons brièvement dans la section 10.5.

Les sections 10.6 et 10.7 enfin terminent ce chapitre par une introduction aux effets collisionnels et non linéaires, en permettant notamment de mieux comprendre l'amortissement de Landau dans le contexte d'une description plus complète de la dynamique d'un plasma. Quelques sujets importants y sont ainsi brièvement évoqués :

- la comparaison entre une description simple des collisions et leur analyse par l'équation de Fokker-Planck (cf. chapitre 13) ;
- le piégeage dans une onde d'amplitude finie ;
- les effets quasi linéaires en présence d'un grand nombre d'ondes, dans l'approximation des phases aléatoires, ou par l'étude de la stochastité induite (dynamique chaotique) ;
- les interactions non linéaires onde-onde et onde-particules ;
- les ondes solitaires non linéaires et les solitons ;
- les effets d'écho d'ondes de plasma.

Nous inviterons évidemment les lecteurs intéressés à poursuivre l'étude de ces sujets dans des publications plus approfondies.

## 10.2 Modèle de Vlasov-Maxwell

Le système d'équations de Vlasov-Maxwell est l'un des modèles les plus utiles pour décrire de nombreuses propriétés des plasmas. Avant d'en étudier en détail des solutions spécifiques, il est important d'en établir quelques propriétés générales. Rappelons que l'équation de Vlasov est une équation analogue à l'équation de Liouville à une particule, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = 0, \quad (10.6)$$

où  $\vec{a}$  est le vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}), \quad (10.7)$$

Les équations de Maxwell (10.4) et (10.5) relient de manière self-consistante les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  aux moments appropriés de la fonction de distribution  $f$ . On a ainsi un système d'équations mathématiquement complet. Nous allons montrer qu'il a les propriétés suivantes :

- Les solutions du système sont réversibles par rapport au temps.
- Le mouvement dans l'espace  $(\vec{r}, \vec{w})$  est celui d'un fluide incompressible.
- L'entropie est conservée.
- L'énergie et la quantité de mouvement totale (champs + particules) sont conservées.

### 10.2.1 Réversibilité par rapport au temps

La réversibilité par rapport au temps résulte directement du fait que la transformation :

$$t \rightarrow -t \quad (10.8)$$

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} \quad (10.9)$$

$$\vec{w} \rightarrow -\vec{w} \quad (10.10)$$

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E} \quad (10.11)$$

$$\vec{B} \rightarrow -\vec{B} \quad (10.12)$$

laisse invariantes les équations (10.1) à (10.5). Cela veut dire que le plasma évoluant à partir d'un état initial, si à un instant quelconque on renverse les vitesses (ce qui inverse le champ  $\vec{B}$  qu'elles produisent), et si de plus on inverse tous les champs et courants extérieurs  $\vec{B}_{\text{ext}}$  et  $\vec{J}_{\text{ext}}$ , alors le système revient à l'état initial en suivant le trajet inverse. Il n'y a aucune tendance de la fonction de distribution à relaxer en direction de l'équilibre thermodynamique, comme ce serait le cas en présence de collisions. La dynamique du système de Vlasov est réversible et conserve l'information. On peut relier ce point à la conservation de l'entropie qui sera analysée dans la suite de cette section. Une autre conséquence est que dans un système infini l'évolution du système de Vlasov est entièrement définie par les conditions initiales. Dans un système borné il faut aussi préciser les conditions aux limites.

### 10.2.2 Incompressibilité dans l'espace des phases

#### a) Théorème de Liouville

Considérons (Fig. 10.1) l'évolution de petits éléments de volume de l'espace des phases. Ces éléments se déplacent et changent de forme avec le temps.

Bien que dans la réalité chaque élément contienne un grand nombre de particules, on le considère dans le modèle de Vlasov comme un fluide continu. Cela revient à considérer l'équation de Vlasov comme une version lissée de l'équation de Klimontovich qui décrit l'évolution du champ microscopique créé par des charges ponctuelles (cf. paragraphe 14.7.1 et [321], [322], [327]). Chacun des points de l'espace des phases suit une trajectoire qui est celle d'une particule réelle placée au même point et se déplaçant sous l'action des champs électriques et magnétiques produits par les distributions lissées (de Vlasov) de charge et de courant.

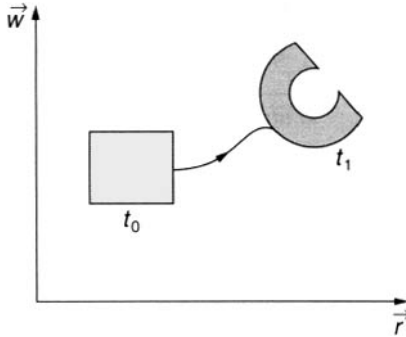


Figure 10.1 : Mouvement des éléments de volume de l'espace des phases.

Comme les équations du mouvement définissent les orbites de manière univoque à partir des conditions initiales, les points contenus dans un certain élément de volume de l'espace des phases ne peuvent pas en traverser la surface (sinon cela impliquerait que deux points différents viennent se confondre, et en renversant le temps on aurait une évolution non univoque). Par conséquent *le nombre de particules contenu dans un élément de volume est conservé pendant son mouvement*. Pour un élément de volume  $\underline{dr} \underline{dw}$  et sur un intervalle de temps  $dt$  infiniment petits on a donc :

$$f(\vec{r}, \vec{w}, t) \underline{dr} \underline{dw} = f(\vec{r}', \vec{w}', t') \underline{dr}' \underline{dw}' \quad (10.13)$$

où  $\underline{dr}' \underline{dw}'$  est le nouvel élément de volume de l'espace des phases, le point  $\vec{r}, \vec{w}$  s'étant déplacé, à l'instant  $t' = t + dt$ , au point  $\vec{r}', \vec{w}'$  donné par :

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{w} dt \quad (10.14)$$

$$\vec{w}' = \vec{w} + \vec{a} dt \quad (10.15)$$

Le nouvel élément de volume est  $d\vec{r}' d\vec{w}' = J d\vec{r} d\vec{w}$  où  $J$  est le jacobien de la transformation ci-dessus, c'est-à-dire le déterminant :

$$J = \frac{\partial^6(\vec{r}', \vec{w}')}{\partial^6(\vec{r}, \vec{w})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \vec{r}} & \frac{\partial \vec{r}'}{\partial \vec{w}} \\ \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{r}} & \frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} \end{vmatrix} \quad (10.16)$$

Les éléments de ce déterminant sont donnés eux-mêmes par :

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \vec{r}} = \bar{\delta} \quad (10.17)$$

$$\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \vec{w}} = \bar{\delta} dt \quad (10.18)$$

$$\frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{r}} dt \quad (10.19)$$

$$\frac{\partial \vec{w}'}{\partial \vec{w}} = \bar{\delta} + \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{w}} dt \quad (10.20)$$

où l'on s'est limité aux termes nécessaires pour calculer  $J$  au premier ordre en  $dt$ , et compte tenu du fait que l'on a  $\partial w_i / \partial r_j = 0$  puisque  $\vec{r}'$  et  $\vec{w}'$  sont des variables indépendantes. On obtient ainsi au premier ordre en  $dt$  :

$$d\vec{r}' d\vec{w}' = \left[ 1 + dt \left( \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \vec{a} \right) \right] d\vec{r} d\vec{w} \quad (10.21)$$

soit :

$$J = 1 + dt \left( \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \vec{a} \right) = 1 \quad (10.22)$$

puisque, comme nous l'avons déjà vu dans l'appendice A 8-2, la force de Lorentz obéit à la condition  $(\partial / \partial \vec{w}) \cdot \vec{X} = 0$ . Le résultat  $J = 1$  exprime le fait que *l'écoulement dans l'espace des phases est celui d'un fluide incompressible* : le volume d'un élément de l'espace des phases se conserve pendant son évolution dynamique. C'est un cas particulier du théorème de Liouville de conservation du volume de l'espace des phases (incompressibilité), qui s'applique en mécanique classique à tout système non dissipatif décrit par des équations canoniques de Hamilton (cf. section 8.2).



Remarquons que l'équation de Vlasov peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\vec{w} f) + \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot (\vec{a} f) = 0 \quad (10.23)$$

Dans un espace des phases à six dimensions  $\vec{R}_6 \equiv (\vec{r}, \vec{w})$  on peut définir le vecteur flux à six dimensions  $\vec{\Gamma}_6 \equiv (\vec{w}, \vec{a})$  et l'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{R}_6} \cdot (\vec{\Gamma}_6 f) \quad (10.24)$$

qui est une généralisation à six dimensions de l'équation hydrodynamique de conservation de la densité. L'équation de Vlasov est donc une équation de conservation de la densité des particules dans l'espace des phases. Le mouvement incompressible sous l'effet des champs lissés self-consistants, décrit dans l'espace des phases par l'équation de Vlasov, peut en général devenir très complexe comme on le voit sur la figure 10.2. Bien que cet élément puisse ainsi changer considérablement de forme, son volume doit rester constant. Notons cependant que la densité spatiale ordinaire  $n = \int f d\vec{w}$  peut dans ces conditions varier de manière compliquée lorsque  $f$  évolue.

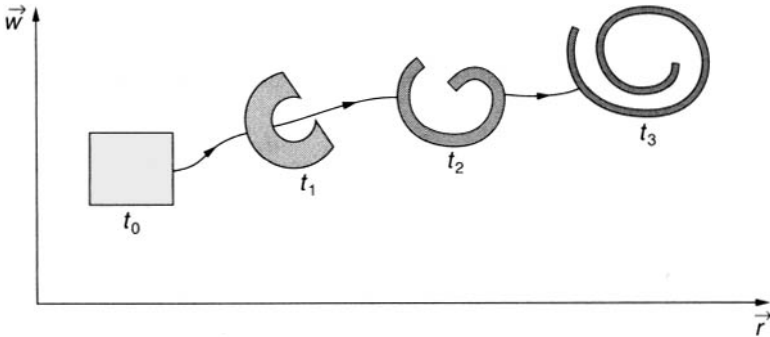


Figure 10.2 : Conservation du volume dans l'espace des phases.

L'opérateur qui agit sur  $f$  dans (10.6) peut aussi s'interpréter comme la dérivée totale le long d'une orbite de particule, en écrivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{w}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} \\ &\equiv \frac{D}{Dt} f = 0 \end{aligned} \quad (10.25)$$

Les équations (10.25) (Fig. 10.2) et (10.6) fournissent deux représentations différentes d'un plasma de Vlasov. La figure 10.2 représente le mouvement des particules individuelles dans l'espace des phases : on se fixe sur les particules et on les suit dans leur mouvement. C'est ce qu'on appelle une représentation *lagrangienne*. L'équation (10.6) considère au contraire un élément fixe de l'espace des phases et établit le bilan des particules qui entrent et sortent de cet élément. C'est ce qu'on appelle une représentation *eulérienne*. Il y a aussi une formulation mathématique d'une représentation lagrangienne ; on l'obtient en interprétant l'équation (10.25), comme nous le verrons au paragraphe ci-dessous. Les analyses basées sur les trajectoires de particules sont plutôt lagrangiennes, mais la formulation mathématique eulérienne est plus simple. Il y a quelques cas où les avantages des deux représentations s'inversent, la formulation eulérienne décrivant mieux les concepts et la méthode lagrangienne donnant des calculs plus simples. En pratique, il faut se familiariser avec les deux formalismes. Nous allons maintenant décrire deux conséquences importantes de l'incompressibilité.

### b) Conservation de $f$ le long des orbites des particules

L'équation (10.25) exprime cette conservation, et cela permet en principe de résoudre l'équation de Vlasov par la méthode dite des caractéristiques : (10.6) étant une équation aux dérivées partielles du premier ordre linéaire et homogène, sa solution par la *méthode des caractéristiques* (méthode de Lagrange) consiste à considérer le système associé d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z} = \frac{dw_x}{a_x} = \frac{dw_y}{a_y} = \frac{dw_z}{a_z} \quad (10.26)$$

qui définit un réseau de courbes caractéristiques dans l'espace à sept dimensions  $\vec{r}, \vec{w}, t$ . On peut considérer l'espace  $\vec{r}, \vec{w}, t$  comme paramétré par une variable  $\tau$  qui varie le long de chaque orbite comme on l'a représenté sur la figure 10.3, de sorte que l'on a  $f[\vec{r}(\tau), \vec{w}(\tau), t(\tau)] \equiv f(\tau)$  et :

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial t(\tau)} \frac{dt(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}(\tau)} \cdot \frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial \vec{w}(\tau)} \cdot \frac{d\vec{w}(\tau)}{d\tau} \quad (10.27)$$

En posant :

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} = 1 \quad (10.28)$$

$$\frac{d\vec{r}(\tau)}{d\tau} = \vec{w}(\tau) \quad (10.29)$$

$$\frac{d\vec{w}(\tau)}{d\tau} = \frac{q}{m} \left\{ \vec{E}[\vec{r}(\tau), t(\tau)] + \vec{w}(\tau) \times \vec{B}[\vec{r}(\tau), t(\tau)] \right\} \quad (10.30)$$

on obtient pour l'équation de Vlasov :

$$\frac{df}{d\tau} = 0 \quad (10.31)$$

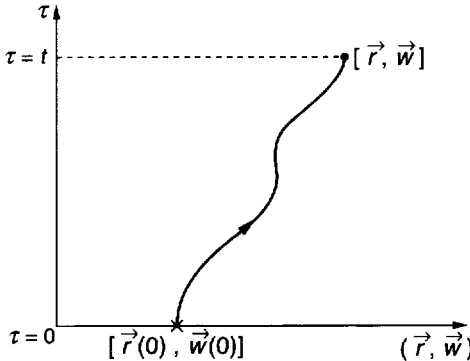


Figure 10.3 : Orbits dans l'espace des phases.

Les équations (10.28)–(10.30) montrent que les caractéristiques sont les trajectoires des particules individuelles dans le champ électromagnétique. Si on se donne pour condition initiale :

$$f(\vec{r}, \vec{w}, t = 0) = g_0(\vec{r}, \vec{w}) \quad (10.32)$$

la solution de l'équation de Vlasov est la solution de (10.31) avec les conditions finales :

$$\vec{r}(\tau = t) = \vec{r} \quad (10.33)$$

$$\vec{w}(\tau = t) = \vec{w} \quad (10.34)$$

et les conditions initiales :

$$f(\tau = 0) = g_0[\vec{r}(0), \vec{w}(0)] \quad (10.35)$$

Mais on a d'après (10.31) :

$$f(\tau) = f(\tau = 0) \quad (10.36)$$

et donc la fonction de distribution se conserve le long des caractéristiques, soit :

$$f(\vec{r}, \vec{w}, t) = f(\tau = t) = g_0[\vec{r}(0), \vec{w}(0)] \quad (10.37)$$

où  $\overrightarrow{r(0)}$  et  $\overrightarrow{w(0)}$  s'obtiennent en résolvant le système (10.28)–(10.30). Cela est en général très difficile ; mais en principe les orbites exactes [c'est-à-dire les solutions du système (10.28)–(10.30)] donnent la solution exacte de l'équation de Vlasov à partir des conditions initiales pour  $f$ .

### c) Écoulement libre et modes balistiques

Il y a comme nous l'avons déjà souvent souligné une différence essentielle entre la description hydrodynamique d'un plasma et sa description cinétique par l'équation de Vlasov : les grandeurs hydrodynamiques ne sont fonction que de  $\overrightarrow{r}$  et  $t$ , alors que la fonction de distribution contient aussi la variable  $\overrightarrow{w}$ . Toute l'information sur la distribution des vitesses disparaît dans la description hydrodynamique. On doit donc s'attendre à trouver dans la description cinétique des modes qui n'apparaissent pas dans la description hydrodynamique. Nous allons le montrer sur un exemple simple.

Considérons un gaz de particules neutres et sa description cinétique en négligeant les collisions (gaz à basse pression). En se limitant à un écoulement unidimensionnel on peut poser  $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{e}_x$ ,  $\overrightarrow{w} = w\overrightarrow{e}_x$  et écrire l'équation d'évolution de la fonction de distribution des vitesses  $f(x, w, t)$  sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + w \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (10.38)$$

la densité de particules étant :

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} f dw \quad (10.39)$$

En résolvant (10.38) par la méthode des caractéristiques, on trouve :

$$w(\tau) = w \quad (10.40)$$

$$x(\tau) = x - w(t - \tau) \quad (10.41)$$

et donc :

$$\begin{aligned} f(w, x, t) &= f[w(0), x(0)] \\ &= f(w, x - wt) \end{aligned} \quad (10.42)$$

Posons maintenant  $f(w, x, t) = f_0(w) + f_1(w, x, t)$ , où  $f_1$  est une perturbation de la fonction d'équilibre uniforme  $f_0(w)$ . Supposons que la fonction d'équilibre  $f_0(w)$  soit une fonction continue de  $w$  (par exemple une maxwellienne), de densité :

$$n_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0 dw \quad (10.43)$$

et considérons deux perturbations  $f_1$  de types différents, l'une continue en  $w$ , et l'autre présentant une singularité. La perturbation de densité est :

$$n_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dw \quad (10.44)$$

La fonction  $f_1$  obéit aussi à (10.38) et sa solution est (10.42).

- Dans le premier cas (perturbations régulières), posons :

$$f_1(w, x, t = 0) = \epsilon f_0(w) \cos k_0 x \quad (10.45)$$

en supposant pour simplifier  $|\epsilon| \ll 1$ . On a alors :

$$f_1(w, x, t) = \epsilon f_0(w) \cos(k_0 x - k_0 w t) \quad (10.46)$$

Pour une maxwellienne :

$$f_0(w) = \frac{n_0}{\sqrt{\pi v_t}} \exp -w^2/v_t^2 \quad (10.47)$$

on peut montrer (cf. Problème P10-1) que l'on a :

$$n_1(x, t) = \epsilon n_0 \cos k_0 x \exp \left( -\frac{k_0^2 v_t^2}{4} t \right) \quad (10.48)$$

c'est-à-dire une perturbation de densité qui s'amortit rapidement dans le temps bien qu'il n'y ait pas de collisions. Dans une description hydrodynamique on ne trouverait pas ce résultat (cf. problème P10-1). L'amortissement rapide de la perturbation de densité se comprend si l'on examine l'évolution de la fonction  $f_1$  donnée par (10.46) et représentée sur la figure 10.4. On voit que, bien que l'évolution de  $f_1$  soit réversible, elle est très complexe : lorsque le temps croît  $f_1$  acquiert une structure fine en  $w$ , et de ce fait son intégrale sur  $w$  qui représente la densité décroît rapidement. Comme on le voit sur (10.46), cette décroissance est due à un *mélange de phase* en  $w$  pour n'importe quelle valeur de  $x$ . Le temps caractéristique de ce mélange de phase est ici  $2/(k_0 v_t)$ , la largeur caractéristique en  $w$  de la perturbation étant  $v_t$  et  $k_0$  le nombre d'onde (cf. problème P10-2 pour un cas plus général).

- Pour étudier les perturbations singulières posons :

$$f_1(w, x, t = 0) = \epsilon n_0 \delta(w - v_0) \cos k_0 x \quad (10.49)$$

c'est-à-dire que la perturbation n'existe que pour les particules de vitesses  $w = v_0$  (perturbation du type "faisceau"). D'après (10.42) on a alors :

$$f_1(w, x, t) = \epsilon n_0 \delta(w - v_0) \cos k_0(x - w t) \quad (10.50)$$

et la perturbation de densité est :

$$n_1(x, t) = \epsilon n_0 \cos k_0(x - v_0 t) \quad (10.51)$$

Elle ne s'amortit pas et persiste indéfiniment. On peut la considérer comme un mode naturel (mode *balistique*) de nombre d'onde  $k_0$  et de fréquence  $k_0 v_0$ . Comme  $v_0$  peut prendre toutes les valeurs de  $w$  contenues dans  $f_0(w)$  qui est une fonction continue de  $w$ , les modes balistiques constituent un spectre continu. Ils ne peuvent évidemment pas être trouvés par une théorie hydrodynamique.

## d) $f$ est une fonction des constantes du mouvement

Les équations des trajectoires des particules dans des champs électromagnétiques donnés s'écrivent :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \quad (10.52)$$

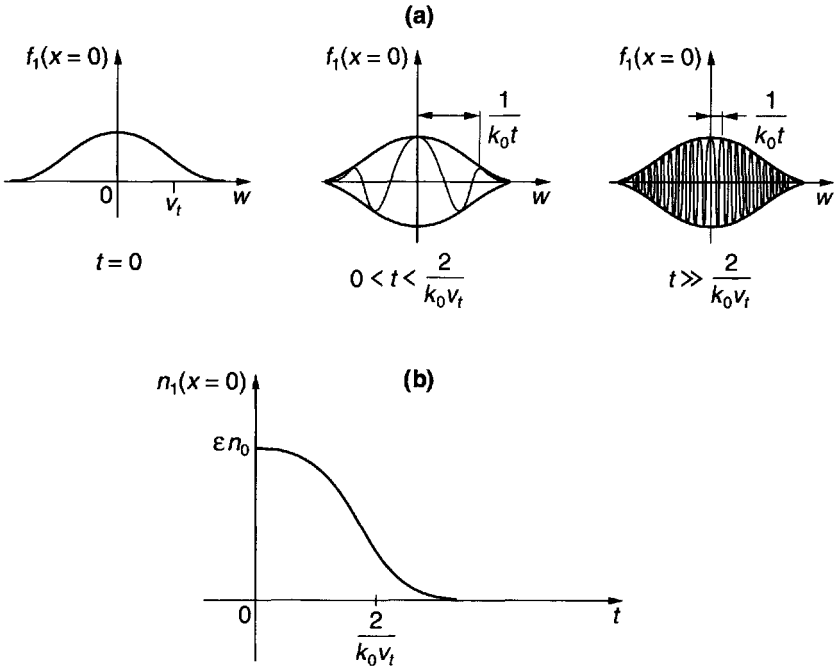


Figure 10.4 : Perturbation (régulière) d'un gaz non collisionnel.

Modèle unidimensionnel, perturbation  $f_1(t=0) \approx \cos k_0 x$ .

(a) évolution temporelle de  $f_1$ .

(b) évolution temporelle de la perturbation de densité.

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{q}{m} [\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{w} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \quad (10.53)$$

où les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  peuvent être la somme de champs d'origine extérieure et des champs self-consistants produits par le plasma. La solution générale de ces équations est de la forme :

$$\vec{r} = \vec{r}(c_1, \dots, c_6, t) \quad (10.54)$$

$$\vec{w} = \vec{w}(c_1, \dots, c_6, t) \quad (10.55)$$

où  $c_1, \dots, c_6$  sont les six constantes d'intégration. En résolvant ces deux équations, on obtient de manière inverse :

$$c_i = c_i(\vec{r}, \vec{w}, t) \quad i = 1 \dots 6 \quad (10.56)$$

quantités qui sont les six constantes du mouvement de l'orbite qui passe à l'instant  $t$  au point  $\vec{r}$  avec la vitesse  $\vec{w}$ . Posons :

$$f(\vec{r}, \vec{w}, t) = F(c_1, \dots, c_6) \quad (10.57)$$

où  $F$  est une fonction arbitraire des constantes du mouvement (10.56). On a :

$$\frac{Df}{Dt} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial c_i} \frac{Dc_i}{Dt} = 0 \quad (10.58)$$

puisque d'après (10.54) et (10.55)  $c_i$  est constante sur l'orbite d'une particule, et donc :

$$\frac{Dc_i}{Dt} = 0 \quad (10.59)$$

En résumé, les orbites dans l'espace des phases, avec sur chacune le temps comme paramètre, sont les courbes caractéristiques de l'équation de Vlasov, pour des champs électromagnétiques donnés, et la solution générale de l'équation de Vlasov peut s'écrire sous la forme d'une fonction arbitraire des invariants des orbites (les constantes du mouvement d'une particule). En pratique, il peut être difficile de déterminer les orbites (10.54) et (10.55), mais relativement facile de trouver les constantes du mouvement pour certains cas d'équilibre stationnaire. Dans de tels cas l'écriture de  $f$  sous la forme (10.57) fournit des solutions utiles (mais non générales) de l'équation de Vlasov. En voici des exemples :

- *Plasma homogène en équilibre sans champs* :  $\vec{E} = \vec{B} = 0$ . L'énergie  $mw^2/2$  et la quantité de mouvement  $m\vec{w}$  sont des constantes du mouvement. Par conséquent toute fonction

$$f = f(w_x, w_y, w_z) = f(\vec{w}) \quad (10.60)$$

est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov.

- *Plasma en équilibre dans un champ électrique*  $\vec{E}(\vec{r})$  avec  $\vec{B} = 0$ . Si l'on a par exemple  $\vec{E} = \vec{e}_x E(x) = -\vec{e}_x (d\phi/dx)$ , les constantes du

mouvement sont  $[(mw_x^2)/2 + q\phi(x)]$  et les quantités de mouvement  $mw_y$  et  $mw_z$  et toute fonction

$$f = f \left[ \frac{mw_x^2}{2} + q\phi(x), w_y, w_z \right] \quad (10.61)$$

est alors une fonction de distribution d'équilibre.

- *Plasma homogène en équilibre dans un champ magnétique constant*  $\vec{B}$  avec  $\vec{E} = 0$ . En prenant comme axe  $Oz$  la direction de  $\vec{B}$ , les invariants du mouvement sont la quantité de mouvement  $mw_z = mw_{\parallel}$  parallèle à  $\vec{B}$  et l'énergie cinétique transverse  $m(w_x^2 + w_y^2) = mw_{\perp}^2$ . Toute fonction

$$f = f(w_{\parallel}, w_{\perp}) \quad (10.62)$$

est une solution d'équilibre de l'équation de Vlasov pour un plasma placé dans un champ magnétique uniforme en l'absence de champ électrique.

- *Champs magnétiques présentant certaines symétries.* L'étude des trajectoires faite par les équations de Lagrange (cf. section 2.10) montre alors que certaines composantes de la quantité de mouvement et/ou du moment cinétique généralisés sont des constantes du mouvement. La fonction de distribution peut alors s'écrire sous la forme d'une fonction arbitraire de ces constantes du mouvement (cf. problème P10-3).

Remarquons enfin que les invariants adiabatiques des orbites étudiés dans la section 2.5 sont des constantes approximatives du mouvement. Ces invariants sont très utiles pour écrire des fonctions de distribution approchées dans les équilibres d'un plasma dans des champs magnétiques de structure plus complexe, tels qu'on les rencontre dans les dispositifs de confinement des plasmas (machines à miroirs, tokamaks, stellarators, etc.) ou en astrophysique.

### 10.2.3 Conservation de l'entropie

En mécanique statistique classique l'entropie d'un système hors d'équilibre est donné par la formule :

$$S = - \int f \ln f \, \underline{dr} \, \underline{dw} \quad (10.63)$$

Le postulat de base de la mécanique statistique est que le macro-état, représenté ici par la fonction de distribution simple  $f$ , évolue de manière



à rendre maximum l'entropie  $S$ . On suppose en général que de petits événements aléatoires font errer de manière ergodique le micro-état (c'est-à-dire les positions des particules individuelles dans l'espace des phases) : il y a des mouvements aléatoires des particules dans l'espace des phases. Cette marche aléatoire est en général le résultat des collisions. On peut alors montrer que  $dS/dt \geq 0$  (théorème H de Boltzmann) et que les collisions conduisent à un état asymptotique dans lequel  $dS/dt = 0$  et où la fonction de distribution  $f$  est maxwellienne (cf. paragraphe 8.5.4).

Quand l'évolution de la fonction de distribution  $f$  est décrite par l'équation de Vlasov, on obtient en dérivant (10.63) et en tenant compte de (10.6) :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= - \int \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \ln f \frac{\partial f}{\partial t} \right] \underline{dr} \underline{dw} \\ &= \int \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot (\vec{w} f \ln f) + \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot (\vec{a} f \ln f) \right] \underline{dr} \underline{dw} \\ &= \int \underline{dw} \oint d\vec{S}_r \cdot \vec{w} f \ln f + \int \underline{dr} \oint d\vec{S}_w \cdot \vec{a} f \ln f \quad (10.64) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété d'incompressibilité. Si l'on suppose que  $f$  tend assez vite vers zéro lorsque  $\vec{w} \rightarrow \infty$ , le dernier terme s'annule. Le premier terme est également nul pour un système borné contenant un nombre fini de particules, de sorte que  $f(\vec{r} \rightarrow \infty) = 0$  (il s'annule aussi quand on a des conditions aux limites périodiques). L'équation de Vlasov conduit donc à :

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad (10.65)$$

On remarque que la dernière forme de (10.64) représente le flux d'entropie à travers les frontières du système dans l'espace ordinaire et dans l'espace des vitesses. Dans la mesure où les conditions aux limites du système interdisent tout échange d'entropie avec le monde extérieur, l'entropie est conservée dans le modèle de plasma de Vlasov.

Le résultat (10.65) a un corollaire simple : *la fonction de distribution  $f$  reste toujours positive* (sinon, avec  $f < 0$ , l'entropie serait complexe). Comme  $f$  est une densité de probabilité, il était important qu'elle reste toujours positive, ce qui n'est pas immédiatement évident à partir de l'équation (10.63).

### 10.2.4 Conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement

Nous terminons cette étude des propriétés générales du modèle de Vlasov-Maxwell en établissant une équation de conservation de l'énergie sous une forme qui fait apparaître de manière explicite la fonction de distribution. Pour cela il est commode de récrire l'équation de Vlasov sous une forme relativiste exacte. Posons donc :

$$f = f(\vec{p}, \vec{r}, t) \quad (10.66)$$

où  $\vec{p} = \gamma m \vec{w}$  est le vecteur quantité de mouvement d'une particule, avec  $\gamma = (1 - w^2/c^2)^{-1/2} = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$ ,  $m$  étant la masse au repos. L'équation de Vlasov relativiste s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (10.67)$$

avec :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \quad (10.68)$$

et :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}) \quad (10.69)$$

L'énergie relativiste totale d'une particule est :

$$\mathcal{E} = mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{mc^2}} \quad (10.70)$$

et l'on a donc :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{p}} = \vec{w} \quad (10.71)$$

On peut déduire de (10.67) l'équation de transport de l'énergie totale relativiste (multiplication par  $\mathcal{E}$  et intégration sur  $\vec{p}$ ). On obtient, compte tenu de (10.68)–(10.71) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{E} f \underline{dp} + \nabla \cdot \int \vec{w} \mathcal{E} f \underline{dp} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (10.72)$$

où

$$\int \mathcal{E} f \underline{dp} = n \langle \mathcal{E} \rangle = U_P \quad (10.73)$$

est la densité d'énergie relativiste des particules, et

$$\int \vec{w} \mathcal{E} f \underline{dp} = n \langle \mathcal{E} \vec{w} \rangle = \vec{S}_P \quad (10.74)$$

leur flux d'énergie relativiste. La version non relativiste de (10.72) est discutée dans le problème P10-4.

Le membre de droite de (10.72) est la densité de puissance apportée par les champs électromagnétiques. On peut le récrire en faisant apparaître une densité et un flux d'énergie en utilisant le théorème de Poynting. Pour établir celui-ci il est commode d'introduire le vecteur  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ , les équations de Maxwell s'écrivant alors :

$$\nabla \times \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (10.75)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{J} = \vec{J}_{\text{ext}} \quad (10.76)$$

où  $\vec{J}$  est le courant dû aux particules chargées du plasma, et  $\vec{J}_{\text{ext}}$  est un courant produit par des sources extérieures (c'est-à-dire contrôlé indépendamment). L'équation de Poynting qui relie  $\vec{E} \cdot \vec{J}$  à la densité et au flux d'énergie électromagnétique s'obtient en effectuant le produit scalaire de (10.75) par  $\vec{H}$ , de (10.76) par  $-\vec{E}$  et en ajoutant les résultats, soit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) + \nabla \cdot \vec{E} \times \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{J} = -\vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{ext}} \quad (10.77)$$

où

$$\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} = U_E + U_M \equiv U_{EM} \quad (10.78)$$

est la densité d'énergie électromagnétique, et

$$\vec{E} \times \vec{H} \equiv \vec{S}_{EM} \quad (10.79)$$

est le flux d'énergie électromagnétique (vecteur de Poynting) tandis que  $-\vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{ext}}$  est la densité de puissance apportée par les sources extérieures.

En combinant (10.72) et (10.77) pour éliminer  $(\vec{E} \cdot \vec{J})$  on obtient l'équation de conservation de l'énergie dans le modèle de Vlasov-Maxwell :

$$\frac{\partial}{\partial t} (U_{EM} + U_P) + \nabla \cdot (\vec{S}_{EM} + \vec{S}_P) = -\vec{E} \cdot \vec{J}_{\text{ext}} \quad (10.80)$$

Remarquons que  $U_{EM}$  et  $U_P$  sont deux quantités essentiellement positives. En l'absence de sources extérieures les seuls échanges d'énergie se font entre les particules et les champs électromagnétiques. Le flux d'énergie qui sort d'un volume donné (ou y entre) peut être dû aux champs, aux particules ou aux deux.

L'établissement d'une équation de conservation de la quantité de mouvement est aussi direct mais un peu plus compliqué (cf. problème P10-4) ; on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{G}_{EM} + \vec{G}_P) + \nabla \cdot (\vec{T}_{EM} + \vec{T}_P) = - \left( \rho_{\text{ext}} \vec{E} + \vec{J}_{\text{ext}} \times \vec{B} \right) \quad (10.81)$$

où

$$\vec{G}_{EM} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} \quad (10.82)$$

$$\vec{G}_P = \int \vec{p} f d\underline{p} = n \langle \vec{p} \rangle \quad (10.83)$$

sont les densités de quantités de mouvement des champs et de la matière, et

$$\vec{T}_{EM} = \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2} \right) \vec{\delta} - (\varepsilon_0 \vec{E} \vec{E} + \mu_0 \vec{H} \vec{H}) \quad (10.84)$$

$$\vec{T}_P = \int \vec{w} \vec{p} f d\underline{p} = n \langle \vec{w} \vec{p} \rangle \quad (10.85)$$

les flux de quantité de mouvement correspondants. Le membre de droite de l'équation (10.81) est la densité de force exercée par les sources d'origine extérieure.

### 10.3 Dynamique électrostatique, linéarisée, à une dimension

La résolution du système des équations de Vlasov-Maxwell est en général très difficile. C'est pourquoi dans un premier temps nous allons réduire l'espace des phases à une dimension tant en position qu'en vitesse, en nous limitant d'ailleurs à des équations dynamiques non relativistes. Cela réduit aussi les équations de Maxwell à leur forme électrostatique très simple. Physiquement cela revient à considérer un plasma dans lequel le mouvement des particules est restreint à une direction, celle d'un fort champ magnétique d'origine extérieure.

Soit  $x$  la coordonnée dans le système à une dimension étudié. En posant  $\vec{w} = w\vec{e}_x$ ,  $\vec{E} = E\vec{e}_x$ , et  $\vec{B} = 0$  on a d'après (10.1)–(10.5) :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + w \frac{\partial f_s}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E \frac{\partial f_s}{\partial w} = 0 \quad (10.86)$$

$$\rho = \sum_s q_s \int_{-\infty}^{+\infty} f_s dw \quad (10.87)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} - \rho = \rho_{\text{ext}}. \quad (10.88)$$

Ces équations sont aussi non linéaires à cause du dernier terme de (10.86) et donc en général difficiles à résoudre. Dans ces conditions, nous les résolvons pour des perturbations de petite amplitude d'un état d'équilibre homogène, neutre, et sans champ, comme cela fut fait pour la première fois par L. D. Landau [112].<sup>1</sup> Quelques années plus tard N. G. Van Kampen [128] a résolu le même problème par une technique complètement différente (celle des modes normaux des équations intégrales singulières) reprise ensuite, développée et assise par K. M. Case [129]. Les méthodes de Landau et Van Kampen conduisent au même résultat pour la résolution du problème aux valeurs initiales. Chacune a ses avantages propres du point de vue mathématique ou physique. Nous développons d'abord en détail celle de Landau, car elle est plus directe, et a été appliquée de manière beaucoup plus large dans la description des ondes linéaires et des instabilités dans les plasmas.

### 10.3.1 Solution des équations linéarisées par transformation de Fourier-Laplace

On suppose que dans l'état d'équilibre, le plasma est constitué d'électrons et d'ions de densités uniformes et constantes  $n_{e0}$  et  $n_{i0}$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{e0} dw = n_{e0} \quad (10.89)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{i0} dw = n_{i0} \quad (10.90)$$

---

1. Nous considérons un plasma infiniment magnétisé (c'est-à-dire où  $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0\vec{e}_x$  avec  $B_0 \rightarrow \infty$ ) alors que Landau traitait des ondes linéaires électrostatiques dans un plasma non magnétisé ; mais la solution de ce problème peut aussi se ramener à un problème équivalent à une dimension (cf. section 10.4).

où les indices 0 se rapportent à l'état d'équilibre, et  $f_0 = f_0(w)$ . Supposant l'état d'équilibre électriquement neutre, on a  $n_{e0} = Z_i n_{i0}$ , où  $Z_i$  est la charge d'un ion, et l'on a en l'absence de source externe  $E_0 = 0$ . Donc, d'après (10.86),  $f_{s0}(w)$ , peut donc être une fonction arbitraire de  $w$ . On voit que cela veut dire, en particulier, que les fonctions de distributions non perturbées ne sont pas forcément des maxwelliennes d'équilibre thermodynamique, et que par conséquent elles peuvent être *a priori* stables ou instables vis-à-vis des perturbations.

Pour des perturbations de petite amplitude, on pose pour chaque espèce de particules :

$$f_s = f_{s0} + f_{s1}(w, x, t) \quad ; \quad |f_{s1}| \ll f_{s0} \quad (10.91)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t) \quad ; \quad |\rho_1| \ll |\rho_0| \quad (10.92)$$

En posant  $E = E_1(x, t)$ , on obtient à partir de (10.86)–(10.88) les équations linéarisées :

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + w \frac{\partial f_{s1}}{\partial x} + \frac{q}{m} E_1 \frac{df_{s0}}{dw} = 0 \quad (10.93)$$

$$\rho_1 = \sum_s q_s \int_{-\infty}^{\infty} f_{s1} dw \quad (10.94)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x} - \rho_1 = \rho_{\text{ext}} \quad (10.95)$$

où la source externe est supposée de petite amplitude.

### a) Transformation de Fourier-Laplace

$\alpha$ ) **Formules générales** On résout maintenant les équations (10.93)–(10.95) comme suit : on transforme par Fourier-Laplace<sup>2</sup> les champs de perturbation dépendant de l'espace et du temps, de sorte que (10.93)–(10.95), devenues algébriques, se résolvent facilement. Les dépendances spatio-temporelles des champs sont ensuite obtenues en inversant la transformation de Fourier-Laplace. Pour effectuer ces calculs, il faudra définir avec soin les transformées, leurs domaines de convergence absolue, et les contours d'intégration dans les transformations inverses. Ainsi, par exemple, les transformées de  $E_1(x, t)$  et  $f_{s1}(w, x, t)$  sont :

$$E_1(k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} E_1(x, t), \quad (10.96)$$

---

2. La transformation de Fourier spatiale des fonctions est considérée ici dans sa forme générale d'une transformation de Fourier *complexe*.

$$f_{s1}(w, k, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} f_{s1}(w, x, t) \quad (10.97)$$

où les domaines de convergence absolue (DCA) des fonctions transformées sont représentés sur la figure 10.5 .

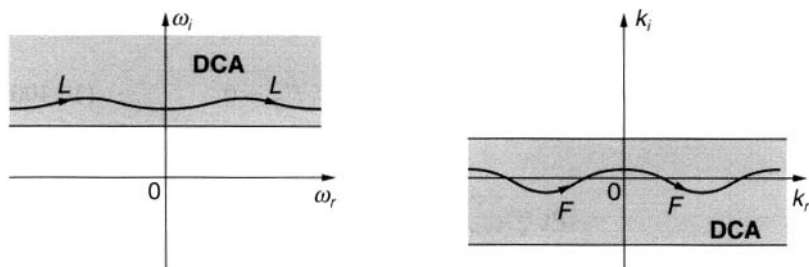


Figure 10.5 : Domaines de convergence absolue (DCA) dans les plans complexes  $\omega$  et  $k$ .

$L$  est un contour de Laplace dans le plan  $\omega$ .  $F$  est un contour de Fourier dans le plan  $k$ .

Les transformées inverses correspondantes sont :

$$E_1(x, t) = \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_F \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} E_1(k, \omega) \quad (10.98)$$

$$f_{s1}(w, x, t) = \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_F \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} f_{s1}(w, k, \omega) \quad (10.99)$$

où les contours  $L$  et  $F$  sont dans les domaines respectifs de convergence absolue (DCA) comme représenté sur la figure 10.5. Des transformations analogues sont effectuées pour  $\rho_{ext}$ . Le choix des DCA est basé sur le *principe de causalité*. Ainsi, comme on suppose que tous les champs sont nuls pour  $t < 0$ , le DCA dans le plan complexe  $\omega$  est une fraction du demi-plan supérieur<sup>3</sup> ; en général il est au-dessus de l'axe  $\omega$  réel pour permettre

3. On peut vérifier directement sur (10.96) que les DCA ont bien l'allure représentée sur la figure 10.5. Pour  $L$  par exemple, il suffit pour cela d'examiner le comportement pour  $t \rightarrow \infty$  du facteur  $e^{i\omega t}$  : il est clair qu'il tend vers l'infini pour toute valeur négative de  $\Im(\omega)$ .

les éventuels champs croissants (instables). Dans le plan  $k$  le DCA est une bande contenant l'axe  $k$  réel, car à partir d'une excitation initiale localisée les perturbations ne peuvent se propager qu'avec une vitesse finie et ont donc forcément une extension finie en  $x$ . Le DCA en forme de bande dans le plan  $k$  permet des champs décroissant exponentiellement lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ ; il contient l'axe réel pour permettre de représenter des champs de module intégrable<sup>4</sup> en  $x$ . Le principe de causalité permet en fait de relier entre eux les deux DCA dans les plans  $\omega$  et  $k$  [60].

**$\beta$ ) Solution dans l'espace  $(k, \omega)$**  Les transformées de Fourier-Laplace de (10.93)-(10.95) sont :

$$-i(\omega - kw)f_{s1} - g_{s1}(w, k) + \frac{q_s}{m_s} E_1 f'_{s0} = 0 \quad (10.100)$$

$$\rho_1 = \sum_s q_s \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s1} dw \quad (10.101)$$

$$ik\epsilon_0 E_1 - \rho_1 = \rho_{\text{ext}} \quad (10.102)$$

En effectuant la transformation de Laplace de (10.93) on a tenu compte des valeurs initiales des fonctions de distribution qui ont été écrites dans (10.100) après la transformation de Fourier dans l'espace sous la forme  $f_{s1}(w, k, t = 0) \equiv g_{s1}(w, k)$ . Notons aussi que l'on a utilisé les mêmes notations pour les grandeurs fonction de l'espace et du temps et pour leurs transformées de Fourier-Laplace (il ne devrait pas y avoir de confusion, puisque les transformées sont des quantités complexes). Ainsi, dans (10.100)-(10.102),  $f_{s1} = f_{s1}(w, k, \omega)$ ,  $E_1 = E_1(k, \omega)$ , et  $\rho_1 = \rho_1(k, \omega)$ ;  $k$  et  $\omega$  sont dans leurs DCA respectifs. Nous écrirons par ailleurs à partir de maintenant ( $df_{s0}/dw$ ) avec la notation  $f'_{s0}$ .

Les équations (10.100)-(10.102) sont algébriques et on en déduit facilement les expressions des champs en fonction des excitations  $\rho_{\text{ext}}$  et  $g_{s1}$ . A partir de (10.100) on trouve, en notant que  $k$  et  $\omega$  sont dans leur DCA<sup>5</sup> :

4. Plus généralement, la représentation des champs croissant exponentiellement dans l'espace peut requérir un certain DCA pour  $x > 0$  et un autre DCA pour  $x < 0$ . Ceux-ci pourraient être un demi-plan supérieur ou inférieur dans le plan  $k$ ; si ces DCA se recoupent, la bande de recouvrement est le DCA pour toute valeur de  $x$ .

5. (10.93) peut aussi être résolue par la méthode des caractéristiques introduite au paragraphe 10.2.2 a) ; en effectuant ensuite la transformation de Fourier-Laplace, on obtient le même résultat (10.103) (cf. problème P10-5).



$$f_{s1} = -i \frac{q_s}{m_s} \frac{f'_{s0} E_1}{(\omega - kw)} + i \frac{g_{s1}}{(\omega - kw)} \quad (10.103)$$

d'où :

$$\rho_1 = \sum_s -i \frac{q_s^2}{m_s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_{s0} dw}{\omega - kw} E_1 + \sum_s i q_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{s1} dw}{(\omega - kw)} \quad (10.104)$$

On voit qu'il y a deux parties dans la densité de charge  $\rho_1$ , une qui dépend du champ électrique  $E_1$  que nous appelons la densité de charge "collective" :

$$\rho_{\text{coll}} = \sum_s -i \frac{q_s^2}{m_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{s0} dw}{(\omega - kw)} E_1 \quad (10.105)$$

et l'autre qui dépend des conditions initiales  $g_{s1}$  des fonctions de distributions perturbées :

$$\rho_{\text{in}} = \sum_s i q_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{s1} dw}{(\omega - kw)} \quad (10.106)$$

En portant (10.104)–(10.106) dans l'équation de Poisson (10.102) on obtient :

$$\begin{aligned} ik\epsilon_0 E_1 - \rho_{\text{coll}} &= \rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{in}} \\ &\equiv \rho_{\text{exc}} \end{aligned} \quad (10.107)$$

où les diverses excitations ont été combinées en une densité de charge d'excitation  $\rho_{\text{exc}}$ . Compte tenu de (10.105) qui exprime  $\rho_{\text{coll}}$  en fonction de  $E_1$ , on peut résoudre (10.107) par rapport à  $E_1$  en fonction de  $\rho_{\text{exc}}$  ; sa transformée de Fourier inverse détermine le champ électrique  $E_1(x, t)$  pour des densités de charge externe données, et des conditions initiales imposées aux fonctions de distributions perturbées. Avant d'écrire cela explicitement, il est commode d'introduire diverses fonctions de réponse ("interne" et "externe").

## b) Fonctions de réponse linéaires dans l'espace $(k, \omega)$

La dynamique des perturbations du plasma décrite par l'équation de Vlasov linéarisée fait correspondre à un champ électrique donné  $E_1$  une densité de charge collective (10.105). Cela permet de définir une fonction de réponse interne, la *susceptibilité longitudinale*  $\chi_L(k, \omega)$ , par la formule :

$$\rho_{\text{coll}} = -ik\epsilon_0 \chi_L E_1 \quad (10.108)$$

avec, d'après (10.105) :

$$\chi_L(k, \omega) = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}'_{s0} dw}{(\omega - kw)} \quad (10.109)$$

où l'on a introduit pour chaque espèce une fréquence plasma  $\omega_{ps} = (q_s^2 n_{s0} / m \epsilon_0)^{1/2}$  et une fonction de distribution normalisée :

$$\hat{f}_{s0}(w) = \frac{f_{s0}(w)}{n_{s0}} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{s0} dw = 1 \quad (10.110)$$

Comme chaque espèce de particule du plasma contribue indépendamment à la densité, (10.109) peut s'écrire :

$$\chi_L(k, \omega) = \sum_s \chi_{Ls}(k, \omega) \quad (10.111)$$

où la susceptibilité longitudinale de chaque espèce est simplement :

$$\chi_{Ls}(k, \omega) = \frac{\omega_{ps}^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}'_{s0} dw}{(\omega - kw)} \quad (10.112)$$

On note qu'à ce stade, elle est définie seulement dans les DCA des plans complexes  $\omega$  et  $k$ .

En portant maintenant (10.108) dans (10.107), qui décrit les champs électriques engendrés par des excitations extérieures, on a :

$$\begin{aligned} K_L(k, \omega) E_1 &= \frac{\rho_{\text{exc}}}{ik\epsilon_0} \\ &\equiv E_{\text{exc}} \end{aligned} \quad (10.113)$$

où

$$\begin{aligned} K_L(k, \omega) &= 1 + \chi_L(k, \omega) \\ &= 1 + \sum_s \chi_{Ls}(k, \omega) \end{aligned} \quad (10.114)$$

est la *permittivité longitudinale* du plasma. Par commodité de notation (et pour s'y reconnaître dans les unités) on a introduit le champ électrique d'excitation  $E_{\text{exc}}$  à la place de  $(\rho_{\text{exc}} / ik\epsilon_0)$ .

Finalement, il est commode d'introduire la *fonction de réponse longitudinale* du plasma  $\mathcal{R}_L(k, \omega)$ , encore une fonction de réponse externe qui donne la partie collective de la densité de charge associée à une excitation

extérieure donnée. En posant  $E_{\text{coll}} \equiv \rho_{\text{coll}}/ik\epsilon_0$ , et en utilisant (10.107), (10.113), on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L(k, \omega) &\equiv \frac{\rho_{\text{coll}}}{\rho_{\text{exc}}} = \frac{E_{\text{coll}}}{E_{\text{exc}}} \\ &= \frac{-\chi_L(k, \omega)}{K_L(k, \omega)} = \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} - 1 \right] \end{aligned} \quad (10.115)$$

En fonction de  $\mathcal{R}_L$  la réponse en champ électrique dans (10.113) est :

$$E_1 = [1 + \mathcal{R}_L(k, \omega)]E_{\text{exc}} \quad (10.116)$$

(Pour la fonction de réponse longitudinale du modèle plasmas froids voir problème P6-1.)

### c) Réponses naturelles. Relation de dispersion

Les modes longitudinaux naturels sont ceux pour lesquels  $E_1 \neq 0$  pour  $E_{\text{exc}} = 0$  ; leurs nombre d'onde et fréquence complexes sont reliés par la relation de dispersion  $D_L(k, \omega) = 0$ . A partir de (10.113) on trouve donc :

$$D_L(k, \omega) = K_L(k, \omega) = 0 \quad (10.117)$$

La relation de dispersion est une contrainte imposée entre  $k$  et  $\omega$  :

$$\omega(k) \text{ ou } k(\omega)$$

Les champs d'onde complexes avec une dépendance spatio-temporelle en  $\exp(ikx - i\omega t)$ , qui satisfont la contrainte de la relation de dispersion, sont appelés les modes naturels.

### d) Réponses forcées. Fonction de Green

Nous nous limitons au cas des plasmas homogènes et laissons donc de côté le problème plus pratique (et plus compliqué) d'une excitation externe considéré comme un problème avec condition aux limites. Une bonne étude de ce cas se trouve dans l'article original de Landau [112], et dans la référence plus récente [127] où l'analyse théorique est reliée de manière très intéressante à diverses expériences.

Pour une excitation donnée, le champ électrique est déterminé par (10.113) ou (10.116), soit :

$$\begin{aligned} E_1(k, \omega) &= \frac{E_{\text{exc}}(k, \omega)}{K_L(k, \omega)} \\ &= [1 + \mathcal{R}_L(k, \omega)] E_{\text{exc}}(k, \omega) \end{aligned} \quad (10.118)$$

La première égalité dans (10.118) montre que, comme dans un diélectrique ordinaire, la permittivité  $K_L(k, \omega)$  tend à “écranter” le champ d’excitation extérieure  $E_{\text{exc}}$ . Mais la permittivité d’un plasma n’est pas une constante, elle est en général fonction de  $k$  et  $\omega$  ; on dit que le plasma est un milieu dispersif, temporellement et spatialement.  $K_L(k, \omega)$  agit comme un “écran dynamique” vis-à-vis du champ d’excitation. La seconde égalité dans (10.118) montre explicitement que le champ dans le plasma est la somme du champ d’excitation imposé et du champ collectif.

La variation spatio-temporelle du champ électrique s’obtient en effectuant sur (10.118) une transformation de Fourier-Laplace inverse.

$$\begin{aligned} E_1(x, t) &= \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_F \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{E_{\text{exc}}(k, \omega)}{K_L(k, \omega)} \\ &= E_{\text{exc}}(x, t) + \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_F \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \mathcal{R}_L(k, \omega) E_{\text{exc}}(k, \omega) \end{aligned} \quad (10.119)$$

On peut aussi introduire la fonction de Green du champ électrique,  $G_L(x, t)$ , c’est-à-dire le champ électrique résultant de  $E_{\text{exc}}(x, t) = \delta(x)\delta(t) \leftrightarrow E_{\text{exc}}(k, \omega) = 1$  où  $\delta(x)$  et  $\delta(t)$  sont des fonctions impulsion de Dirac. On a alors :

$$G_L(k, \omega) = \frac{1}{K_L(k, \omega)} = 1 + \mathcal{R}_L(k, \omega) \quad (10.120)$$

$$\begin{aligned} G_L(x, t) &= \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_F \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{1}{K_L(k, \omega)} \\ &= \delta(x)\delta(t) + \mathcal{R}_L(x, t) \end{aligned} \quad (10.121)$$

et

$$\mathcal{R}_L(x, t) = \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_F \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{-\chi_L(k, \omega)}{K_L(k, \omega)} \quad (10.122)$$

On voit que les singularités de la fonction de Green dans les plans complexes  $k$  et  $\omega$  sont données par la relation de dispersion (10.117). Une fois

connue la fonction de Green, le champ électrique produit par une excitation quelconque se calcule par convolution :

$$\begin{aligned} E_1(x, t) &= \int dx' \int dt' G(x - x', t - t') E_{\text{exc}}(x', t') & (10.123) \\ &= E_{\text{exc}}(x, t) + \int dx' \int dt' \mathcal{R}_L(x - x', t - t') E_{\text{exc}}(x', t') \end{aligned}$$

Nous avons ainsi terminé la résolution formelle du problème de Landau à une dimension. Etant données les fonctions de distributions à l'équilibre  $f_{s0}(w)$  de chaque espèce de particule et les conditions initiales de perturbation  $g_{s1}(w, k)$  et/ou  $\rho_{\text{ext}}$ , le champ électrique de perturbation est donné par (10.119) ou de manière équivalente par (10.148)–(10.123). Les perturbations  $f_{s1}$ , et  $\rho_{\text{ext}}$  des fonctions de distributions et de la densité de charge s'obtiennent à partir de (10.103) et (10.104) après inversion de la transformation de Fourier-Laplace. Pour calculer l'une quelconque de ces grandeurs, il faut donc faire trois sortes d'intégrations : des intégrations sur  $w$  pour trouver les susceptibilités (10.112) et les densités de charge initiales (10.106) ; des intégrations dans les plans complexes  $k$  et  $\omega$  selon les formules (10.119) et/ou (10.121)–(10.123) d'inversion de la transformation de Fourier-Laplace. Pour simplifier cette démarche on considère d'abord des perturbations périodiques dans l'espace ; cela permet d'étudier la stabilité ou l'instabilité linéaire d'un plasma défini par un choix quelconque des fonctions de distribution d'équilibre.

### 10.3.2 Perturbations périodiques dans l'espace

#### a) Calcul formel de la fonction de Green

Comme on l'a vu dans la section 6.5, il suffit pour déterminer la stabilité ou l'instabilité d'un état d'équilibre uniforme de déterminer l'évolution asymptotique dans le temps des perturbations périodiques dans l'espace. Considérant donc une telle perturbation, on pose :

$$E_{\text{exc}}(x, t) = e^{ik_r x} E_{\text{exc}}(t; k_r) \quad (10.124)$$

où  $k_r$  est le nombre d'ondes réel (définissant la périodicité spatiale) de la perturbation et  $E_{\text{exc}}(t; k_r)$  le champ dépendant arbitrairement du temps d'excitation à cette valeur de  $k_r$ . La transformation de Fourier-Laplace de (10.124) donne :

$$E_{\text{exc}}(k, \omega) = 2\pi\delta(k - k_r) E_{\text{exc}}(\omega; k_r) \quad (10.125)$$

et (10.119) devient donc :

$$E_1(x, t) = e^{ik_r x} E_1(t; k_r) \quad (10.126)$$

où

$$E_1(t; k_r) = \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{E_{\text{exc}}(\omega; k_r)}{K_L(k_r, \omega)} \quad (10.127)$$

On a donc éliminé l'intégration dans le plan complexe  $k$ . On voit d'ailleurs que  $\exp(ik_r x)$  est un mode propre de la dynamique linéaire du plasma, en ce sens qu'une excitation de la forme (10.124) produit une réponse (10.126) ayant la même dépendance spatiale. Une superposition de ces modes (c'est-à-dire une intégrale de Fourier) permet de représenter toute fonction de  $r$  intégrable et de comportement non pathologique. La simplification que nous avons faite nous limite donc à des champs ayant une structure spatiale de ce type. Cela exclut par exemple les champs croissant exponentiellement dans l'espace (cf. [60] pour de tels cas).

Étudions donc l'évolution temporelle des champs produits par une excitation spatialement périodique. La fonction de Green d'un champ électrique de perturbation de la forme  $E_{\text{exc}}(t; k_r) = \delta(t) \leftrightarrow E_{\text{exc}}(\omega; k_r) = 1$  est :

$$G(t; k_r) = \delta(t) + \mathcal{R}(t; k_r) \quad (10.128)$$

avec :

$$\mathcal{R}_L(t; k_r) = \int_L \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \frac{-\chi_L(k_r, \omega)}{1 + \chi_L(k_r, \omega)} \quad (10.129)$$

où l'intégration est faite dans le DCA du plan  $\omega$  le long du contour ouvert  $L$  (cf. Fig. 10.5) où  $\chi_L(k_r, \omega)$ , donné par (10.111) et (10.112), est bien définie.

Une intégrale telle que celle qui apparaît dans (10.129) peut se calculer en fermant tout d'abord autant que possible le contour  $L$  par l'arc  $|\omega| \rightarrow \infty$ , puis en appliquant le théorème de Cauchy et la formule des résidus autour des singularités encloses par le contour d'intégration. Il faut évidemment que la fermeture du contour le long de l'arc  $|\omega| \rightarrow \infty$  amène une contribution nulle à l'intégrale. Or l'intégrand de (10.129) contient deux termes : l'exponentielle  $\exp(-i\omega t)$  qui possède une singularité essentielle pour  $|\omega| \rightarrow \infty$  ; et  $\mathcal{R}_L(k_r, \omega)$  qui, jusqu'à maintenant, n'est définie que pour les valeurs de  $\omega$  situées dans le DCA, c'est-à-dire  $\omega_i > 0$ .

Considérons donc tout d'abord la fermeture du contour  $L$  par un arc situé dans le demi-plan  $\omega$  supérieur, c'est-à-dire pour  $|\omega| \rightarrow \infty$  avec  $\omega_i > 0$ . La contribution de la singularité essentielle sera nulle si nous fermons de cette manière le contour  $L$  pour  $t < 0$ . De plus, d'après le lemme de Jordan,  $\mathcal{R}_L(k_r, |\omega| \rightarrow \infty)$  avec  $\omega_i > 0$  doit s'annuler au moins aussi vite que  $(1/\omega)$ . Cela dépend des propriétés de  $\chi_{L_s}(k_r, \omega)$  donné par (10.112). En développant l'intégrand de (10.112) pour les grandes valeurs de  $\omega$  et en intégrant par parties on trouve :

$$\begin{aligned} \chi_{Ls}(k_r, |\omega| \rightarrow \infty; \omega_i > 0) \\ \sim \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[ \hat{f}_{s0} \left( 1 + \frac{k_r}{\omega} w + \dots \right) \right]_{w=-\infty}^{w=+\infty} \right. \\ \left. - \frac{k_r}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{s0} \left( 1 + \frac{k_r}{\omega} 2w + \dots \right) dw \right\} \end{aligned} \quad (10.130)$$

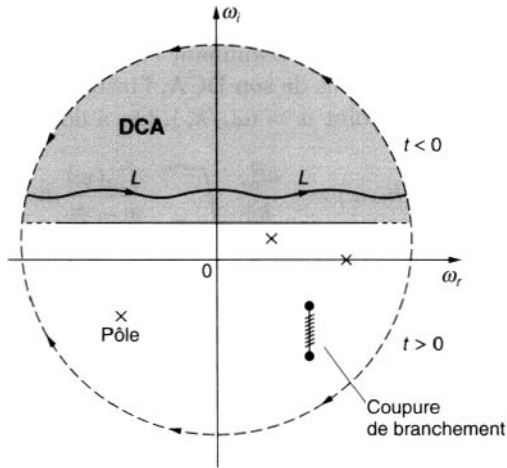


Figure 10.6 : Fermeture du contour  $L$  pour le calcul de l'intégrale (10.129).

Pour des fonctions de distribution à l'équilibre,  $\hat{f}_{s0}(w)$ , qui s'annulent suffisamment vite pour  $w \rightarrow \pm\infty$ , et qui sont intégrables (conditions qui sont toujours physiquement satisfaites),  $\chi_{Ls}(k_r, |\omega| \rightarrow \infty; \omega_i > 0)$  tend vers zéro comme  $(1/\omega^2)$ , et donc, pour  $t < 0$ , le contour  $L$  peut entourer tout le DCA dans le plan  $\omega$  comme on le voit sur la figure 10.6. Le principe de causalité impose d'ailleurs qu'il n'y ait pas de réponse du plasma avant l'application de l'excitation (à  $t = 0$ ). Il ne peut donc pas y avoir dans le DCA de singularité de l'intégrand de (10.129). Il en résulte qu'il n'y a pas de zéro de  $K_L(k_r, \omega)$  lorsque  $\omega$  est dans son DCA, de sorte que finalement pour  $t < 0$  (10.129) s'annule et l'on a :

$$\mathcal{R}_L(t < 0; k_r) = 0 \quad (10.131)$$

Pour  $t > 0$ , la singularité essentielle de  $\exp(-i\omega t)$  pour  $|\omega| \rightarrow \infty$  imposerait que l'on ferme le contour par un arc dans le demi-plan  $\omega$  inférieur. Mais, à ce stade, la susceptibilité n'est pas définie en dehors

de son DCA. Même si on peut montrer que la fermeture du contour  $L$  pour  $t > 0$  peut se faire par un demi-cercle tracé à l'infini dans le demi-plan inférieur avec  $|\omega| \rightarrow \infty$ , comme représenté sur la figure 10.6, le calcul de l'intégrale (10.129) demande malgré tout que l'on connaisse les singularités de l'intégrand en dessous du DCA. Pour les trouver, il nous faut finalement effectuer un prolongement analytique de  $\chi_L(k_r, \omega)$  donné par (10.109)-(10.112), dans tout le plan complexe  $|\omega| \rightarrow \infty$ .

### b) Prolongement analytique de $\chi_L(k_r, \omega)$

$\alpha$ ) **Contours de Landau** En examinant l'intégrand de (10.112) on voit que lorsque  $\omega$  passe en dessous de son DCA, l'intégrale a une discontinuité sur l'axe réel pour  $\omega$  au point  $w = (\omega_r/k_r)$ . On a donc :

$$\chi_{L_s}(k_r, \omega) = -\frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}'_{s0}(w)}{w - \frac{\omega}{k_r}} dw \quad (10.132)$$

qui est définie pour toute valeur de  $k_r$  si  $\omega$  est dans son DCA mais a une ligne de discontinuité sur l'axe réel du plan  $\omega$  (sauf évidemment si  $\hat{f}'_{s0}(w) = 0$ ). Ce comportement discontinu peut être évité en considérant l'intégration dans (10.132) comme effectuée dans le plan complexe  $w$  et en déformant convenablement le contour de l'axe réel de ce plan lorsque  $\omega$  descend en dessous de son DCA. Cela est représenté sur la figure 10.7 où l'on voit que pour  $k_r > 0$  la déformation correcte du contour est vers le demi-plan  $w$  inférieur, le long de  $\Gamma_+$  ; tandis que pour  $k_r < 0$  la déformation est à faire vers le demi-plan supérieur le long de  $\Gamma_-$  ; on appelle  $\Gamma_-$  et  $\Gamma_+$  des *contours de Landau*, parce que c'est Landau qui montra le premier la nécessité de telles déformations dans son analyse des perturbations dans un plasma non magnétisé [112] (cf. section 10.4). Le prolongement analytique de  $\chi_L(k_r, \omega)$  dans tout le plan complexe  $\omega$  fait donc apparaître en général deux fonctions de susceptibilité :

$$\chi_{L_s}(k_r > 0, \omega) = -\frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \int_{\Gamma_-} \frac{\hat{f}'_{s0}(w)}{w - \frac{\omega}{k_r}} dw \quad (10.133)$$

et

$$\chi_{L_s}(k_r < 0, \omega) = -\frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \int_{\Gamma_+} \frac{\hat{f}'_{s0}(w)}{w - \frac{\omega}{k_r}} dw \quad (10.134)$$

qui sont valables dans tout le plan  $\omega$ .

$\beta$ ) **Exemple d'une distribution de Lorentz-Cauchy** A titre d'exemple, on peut examiner le cas où  $\hat{f}_{s0}(w)$  est une fonction de Lorentz-Cauchy (ou de résonance)



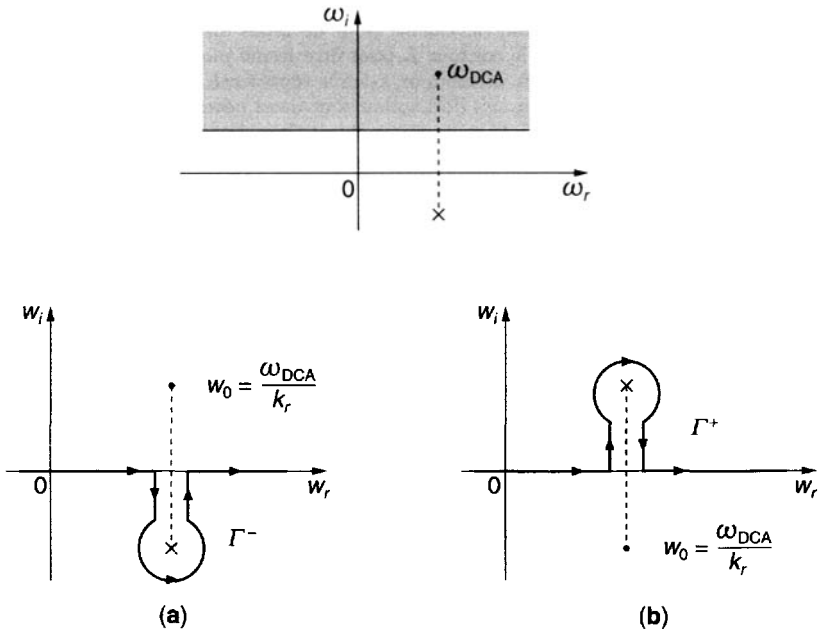


Figure 10.7 : Déformation du contour dans le plan  $w$  pour le prolongement analytique de  $\chi_L(k_r, \omega)$ .

- (a) pour  $k_r > 0$ .
- (b) pour  $k_r < 0$ .

simple :

$$\hat{f}_{s0} = \frac{a/\pi}{w^2 + a^2} \tag{10.135}$$

Les intégrations dans (10.133) et (10.117) peuvent alors se faire facilement (cf. problème P10-6) et on trouve :

$$\chi_{Ls}(k_r > 0, \omega) = \frac{-\omega_{ps}^2}{(\omega + ik_r a)^2} \tag{10.136}$$

et

$$\chi_{Ls}(k_r < 0, \omega) = \frac{-\omega_{ps}^2}{(\omega - ik_r a)^2} \tag{10.137}$$

que l'on peut évidemment regrouper en une seule expression :

$$\chi_{Ls}(k_r, \omega) = \frac{-\omega_{ps}^2}{(\omega + i|k_r|a)^2} \tag{10.138}$$

valable pour n'importe quelle valeur de  $k_r$  réel et  $\omega$  complexe. On voit que cette susceptibilité n'est pas une fonction analytique de  $k_r$ ! Les intégrations dans le plan complexe  $k$  devraient tenir compte de ce point (cf. [127] et problème P10-6). Pour les distributions

de Lorentz-Cauchy, on voit de plus sur (10.138) que  $\chi_{L_s}(k_r, |\omega| \rightarrow \infty) \sim (1/\omega^2)$  pour  $\omega_i > 0$  et  $\omega_i < 0$ . Et donc, quand on calcule pour de telles distributions la réponse (10.129) du plasma pour  $t > 0$ , le contour  $L$  peut être fermé par le demi-cercle infini ( $|\omega| \rightarrow \infty$ ) tracé dans le demi-plan  $\omega$  inférieur, comme représenté sur la figure 10.6. On peut aussi remarquer que les contours de Landau sont aussi nécessaires pour effectuer le prolongement analytique de l'intégrale qui apparaît dans le calcul de la densité de charge (10.106) due aux conditions initiales (cf. problème P10-7).

La fonction de distribution de Lorentz-Cauchy (10.135) n'est pas, en fait, une représentation physiquement satisfaisante des distributions réelles : elle contient trop de particules de grande vitesse, et conduit à un moment du deuxième ordre (l'énergie moyenne d'une particule) infini. C'est néanmoins une représentation utile dans un domaine limité, c'est-à-dire pour  $|w| < a$ . Des fonctions "de résonance d'ordre supérieur", peuvent fournir une meilleure approximation des fonctions de distributions réelles.

**$\gamma$ ) Partie principale. Formules de Plemelj** Comme autre exemple, considérons le cas mathématiquement spécial, mais physiquement habituel, d'une fonction de distribution d'équilibre  $f_0(w)$  analytique pour toute valeur finie de  $w$ . L'intégrale singulière qui figure dans (10.132) est de la forme :

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}'_0}{w - w_0} dw \quad ; \quad w_0 \equiv \frac{\omega}{k_r} \quad (10.139)$$

qui doit être aussi considérée dans le plan complexe  $w$ , comme représenté sur la figure 10.7. Lorsque  $\omega$  descend dans le demi-plan inférieur, on a :

1. Pour  $k_r > 0$  [Fig. 10.7(a)] :

$$\int_{\Gamma_-} \frac{\hat{f}'_0}{w - w_0} dw = I + i2\pi \hat{f}'_0(w_0) . \quad (10.140)$$

2. Pour  $k_r < 0$  [Fig. 10.7(b)] :

$$\int_{\Gamma_+} \frac{\hat{f}'_0}{w - w_0} dw = I - i2\pi \hat{f}'_0(w_0) . \quad (10.141)$$

On peut maintenant introduire la notion de *partie principale d'une intégrale dans le plan complexe*, en utilisant les contours représentés sur la figure 10.8. En posant  $\hat{f}'_0/(w - w_0) \equiv F$  on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \left[ \int_{C_-} F dw + \int_{C_+} F dw \right] \equiv P \int F dw \quad (10.142)$$

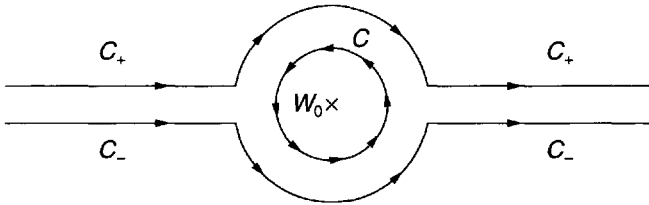


Figure 10.8 : Contours pour le calcul de la partie principale dans le plan complexe.

C'est la généralisation au plan complexe de la formule classique de définition de la partie principale d'une intégrale. On a, de plus :

$$\int_{C_-} F dw - \int_{C_+} F dw \equiv \oint_C F dw = i2\pi \hat{f}'_0(w_0) \quad (10.143)$$

En remarquant que les contours  $\Gamma_-$  et  $\Gamma_+$  peuvent être déformés respectivement en  $C_-$  et  $C_+$  on trouve à partir de (10.142) et (10.143) :

$$\int_{\Gamma_-} F dw = \int_{C_-} F dw = P \int F dw + i\pi \hat{f}'_0(w_0) \quad (10.144)$$

et

$$\int_{\Gamma_+} F dw = \int_{C_+} F dw = P \int F dw - i\pi \hat{f}'_0(w_0) \quad (10.145)$$

Dans le cas où  $w_0$  est réel, c'est-à-dire  $w_0 = (\omega_r/k_r) \equiv w_{0r}$ , on a ainsi établi les formules opérationnelles dites de Plemelj pour les intégrales singulières [273], [274], soit :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{w - w_{0r} \pm i\epsilon} = P \frac{1}{w - w_{0r}} \mp i\pi \delta(w - w_{0r}) \quad (10.146)$$

où  $P$  désigne la partie principale et  $\delta$  la fonction impulsionnelle de Dirac.

**$\delta$ ) Expression de  $\chi_{Ls}$**  Ainsi, en utilisant (10.144) et (10.145), et remarquant que le signe du second terme dans ces deux équations est celui de  $k_r$ , c'est-à-dire  $(k_r/|k_r|)$ , on peut récrire le prolongement analytique de (10.132) donné par (10.133) et (10.117) en une seule formule :

$$\chi_{Ls}(k_r, \omega) = -\frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \left[ P \int \frac{\hat{f}'_{s0} dw}{(w - \frac{\omega}{k_r})} + \frac{k_r}{|k_r|} i\pi \hat{f}'_{s0} \left( w = \frac{\omega}{k_r} \right) \right] \quad (10.147)$$

On peut maintenant trouver les singularités de l'intégrand de (10.129) qui déterminent la fonction de Green pour  $t > 0$  ; ce sont les zéros de  $K_L(k_r, \omega)$ , c'est-à-dire les *solutions de l'équation de dispersion* :

$$\begin{aligned} D_L(k_r, \omega) &\equiv K_L(k_r, \omega) \\ &= 1 + \sum_s \chi_{Ls}(k_r, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (10.148)$$

où  $\chi_{Ls}(k_r, \omega)$  est donné par (10.147). Il se peut, cependant, que la fermeture du contour  $L$  pour  $|\omega| \rightarrow \infty$  dans le demi-plan complexe  $\omega$  inférieur soit impossible. Ainsi, pour une maxwellienne, on ne peut pas calculer l'intégrale dans (10.129) pour  $t > 0$  par une intégration de contour dans le demi-plan  $\omega$  inférieur, comme représenté sur la figure 10.6. Malgré cela, la fonction de Green asymptotique dans le temps, qui est la grandeur intéressante pour la stabilité, peut, elle, être déterminée.

### b) Fonction de Green asymptotique dans le temps pour les perturbations périodiques dans l'espace

Ayant fait le prolongement analytique de  $K_L$ , on peut maintenant trouver les singularités de  $K_L^{-1}$  au-dessous de  $L$ . On peut ensuite en déduire facilement la valeur asymptotique dans le temps de (10.128), par la déformation permise du contour  $L$  vers  $\omega_i \rightarrow -\infty$ , représentée sur la figure 10.9 .

En désignant par  $\omega_m(k_r) = \omega_{mr}(k_r) + i\omega_{mi}(k_r)$  la singularité de  $K_L^{-1}(k_r, \omega)$  qui a la valeur maximum de  $\omega_i(k_r) = \omega_{mi}(k_r)$ , on a :

$$G(x, t \rightarrow \infty) \sim e^{ik_r x} e^{-i\omega_{mr}(k_r)t} e^{\omega_{mi}(k_r)t} \quad (10.149)$$

Donc :

1. si  $\omega_{mi}(k_r) < 0$  pour toutes les valeurs de  $k_r$ , les perturbations s'amortissent avec le temps, on a *stabilité* ;
2. si  $\omega_{mi}(k_r) = 0$ , les perturbations sont oscillatoires, on a une *onde pure* ;
3. si  $\omega_{mi}(k_r) > 0$  pour une certaine valeur de  $k_r$ , les perturbations croissent avec le temps, on a *instabilité*.

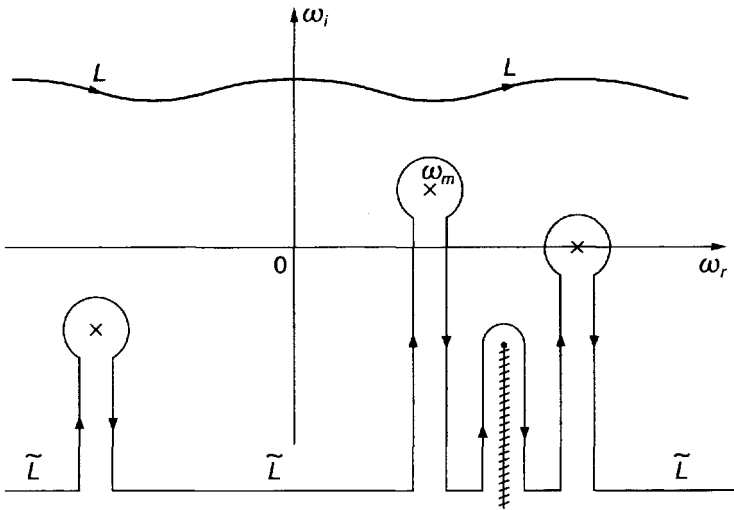


Figure 10.9 : Déformation de  $L$  en  $\tilde{L}$  pour l'évaluation asymptotique de l'intégrale (10.129).

On remarque que les singularités de la fonction de Green sont les solutions de la relation de dispersion (10.148), c'est-à-dire les réponses naturelles  $\omega(k_r)$  du système pour un nombre d'onde  $k$  réel [cf. paragraphe 10.3.1.b)].

De manière plus générale, dans les plasmas homogènes linéairement instables (c'est-à-dire pour lesquels la condition 3 ci-dessus est satisfaite), la limite asymptotique temporelle (10.121) de la fonction de Green permet de faire une distinction entre les instabilités *absolues* et *convectives* ; il faut pour cela considérer la fonction de Green pour des perturbations spatiales localisées et son calcul par (10.121) exige que sa transformée soit définie pour  $k$  et  $\omega$  tous deux complexes (pour plus de détails cf. [60]).

### 10.3.3 Excitation externe d'un plasma stable

#### a) État stationnaire

Pour mieux apprécier la signification physique de la susceptibilité (10.147), supposons que les modes naturels, donnés par (10.148), soient tels que  $\omega_{mi}(k_r) < 0$ , c'est-à-dire stables. Considérons, pour un tel plasma, une source externe de fréquence réelle  $\omega_{re}$ , c'est-à-dire  $E_{exc}(t; k_r) \sim \exp(-i\omega_{re}t)$ . On a alors :

$$E_1(k_r, \omega) = \frac{E_{\text{exc}}(k_r, \omega)}{K_L(k_r, \omega)} \sim \frac{1}{(\omega - \omega_{re})K_L(k_r, \omega)} \quad (10.150)$$

et ses singularités dans le plan  $\omega$  ont l'allure représentée sur la figure 10.10. Dans l'inversion de la transformation de Laplace (10.150), la déformation du contour de Laplace  $L$  vers  $\tilde{L}$  donne pour l'expression asymptotique dans le temps du champ :

$$E_1(x, t \rightarrow \infty) \sim \frac{e^{ik_r x} e^{-i\omega_{re} t}}{K_L(k_r, \omega_{re})} \quad (10.151)$$

c'est-à-dire un *champ périodique en  $x$  et  $t$*  à la fréquence  $\omega_{re}$  de la source. Dans cet état stationnaire, il est intéressant d'examiner le bilan moyen dans le temps de puissance entre la source externe et le plasma stable.

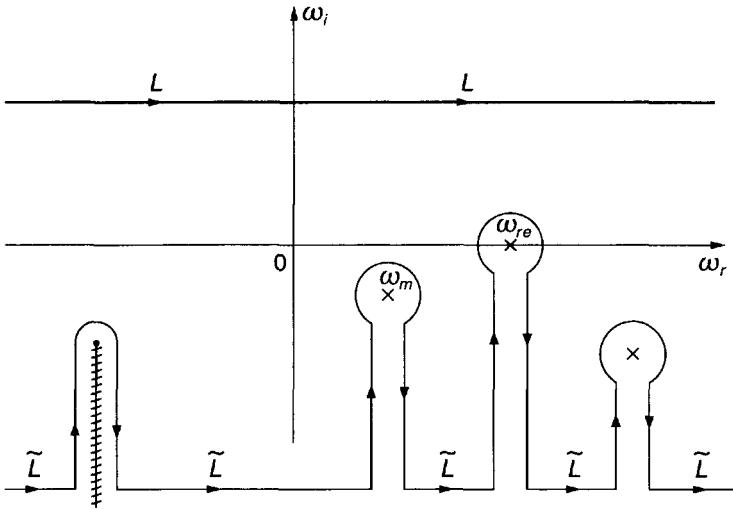


Figure 10.10 : Singularités et déformation de  $L$  en  $\tilde{L}$  pour calculer le champ (10.150) dans un plasma stable ( $\omega_{mi} < 0$ ) excité par une source à la fréquence  $\omega_{re}$ .

## b) Équation d'énergie

L'équation de *conservation de l'énergie de perturbation* se déduit facilement de l'équation de Maxwell-Ampère écrite pour les champs électrostatiques à une dimension considérés ici :

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial t} + J_1 = -J_{\text{ext}} \quad (10.152)$$

où l'on a représenté la source extérieure par une densité de courant :  $J_{\text{ext}} \equiv -\epsilon_0(\partial E_{\text{ext}}/\partial t)$ . En multipliant (10.152) par  $E_1$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 \right) + E_1 J_1 = -E_1 J_{\text{ext}} \quad (10.153)$$

où nous reconnaissons en  $(\epsilon_0 E_1^2/2) \equiv U_E$  la densité (instantanée et locale) d'énergie de perturbation du champ électrique et en  $-E_1 J_{\text{ext}}$  la densité de puissance (instantanée et locale) fournie au plasma par la source externe.

La relation (10.153) entre  $J_1$  et  $E_1$  est non locale dans l'espace comme dans le temps. Il en résulte qu'on ne peut pas en général l'écrire sous la forme d'une équation de conservation locale et instantanée. On peut montrer cependant [361] que dans un milieu *faiblement dissipatif*, et pour des champs monochromatiques dont l'amplitude varie lentement (c'est-à-dire des champs quasi monochromatiques),  $E_1 \sim \mathcal{E}(x_s, t_s) \exp(ik_r x - i\omega_r t)$ , la moyenne (prise sur les variations rapides représentées par  $k_r$  et  $\omega_r$ ) de  $E_1 J_1$  donne :

$$\langle E_1 J_1 \rangle = \frac{\partial \langle U_K \rangle}{\partial t_s} + \frac{\partial \langle S_K \rangle}{\partial x_s} + \langle p \rangle \quad (10.154)$$

où  $U_K$ ,  $S_K$  et  $p$  sont respectivement la densité d'énergie de perturbation, le flux d'énergie de perturbation présents, et la densité de puissance dissipée dans le milieu plasma. Pour les champs périodiques dans l'espace et le temps  $E_1 \sim \exp(ik_r x - i\omega_r t)$  du régime stationnaire imposé par la source extérieure, la moyenne de (10.153) donne compte tenu de (10.154) :

$$\langle E_1 J_1 \rangle = \langle p \rangle = \langle p_{\text{ext}} \rangle \quad (10.155)$$

où les crochets  $\langle \rangle$  représentent des moyennes dans le temps (ou l'espace). On peut aussi écrire la puissance moyenne  $\langle p \rangle$  dissipée dans le plasma, en fonction des transformées  $E_1(k_r, \omega_{re})$  et  $J_1(k_r, \omega_{re})$  des champs complexes, qui sont reliées entre elles par les fonctions de réponse (susceptibilité ou conductivité). On a ainsi :

$$J_1 = \sigma_L(k_r, \omega_{re}) E_1 \quad (10.156)$$

où la conductivité longitudinale est d'ailleurs reliée (du fait de l'équation de conservation de la charge) à la susceptibilité par la relation

$$\sigma_L(k_r, \omega_{re}) = -i\omega_{re}\epsilon_0 \chi_L(k_r, \omega_{re}) \quad (10.157)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} E_1 J_1^*\right) \\ &= \frac{1}{2} |E_1|^2 \operatorname{Re}[\sigma_L(k_r, \omega_{re})] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} |E_1|^2 \omega_{re} \operatorname{Im}[\chi_L(k_r, \omega_{re})] \end{aligned} \quad (10.158)$$

Remarquons que la condition de dissipation faible implique  $|\langle p \rangle| \ll |\omega_{re}\langle U \rangle|$ , où  $\langle U \rangle = \langle U_E \rangle + \langle U_K \rangle$  est la densité totale moyenne d'énergie de perturbation que nous trouverons dans la section 10.3.5 ; il en résulte aussi que l'on a :  $|\operatorname{Re}\sigma_L(k_r, \omega_{re})| \ll |\operatorname{Im}\sigma_L(k_r, \omega_{re})|$  et  $|\operatorname{Im}\chi_L(k_r, \omega_{re})| \ll |\operatorname{Re}\chi_L(k_r, \omega_{re})|$ .

En examinant (10.155) on voit que si la puissance moyenne  $\langle p \rangle$  dissipée par le milieu est positive, la source externe doit en régime stationnaire fournir cette même puissance au milieu ; on dit alors que celui-ci a une *dissipation passive*. Si au contraire  $\langle p \rangle < 0$ , le milieu est capable de fournir une puissance moyenne au système externe ; on dit alors que le milieu a une *dissipation active*. Cela veut dire que tout en étant dans un état d'équilibre stable, comme nous l'avons supposé, ce n'est pas l'équilibre thermodynamique, et il possède de l'énergie libre qui se manifeste par cette dissipation négative d'énergie de perturbation.

### c) Puissance moyenne dissipée

Evaluons maintenant et interprétons (10.158) dans le cas de la dynamique électrostatique à une dimension, dans un plasma avec des fonctions de distributions  $f_{s0}(w)$  arbitraires. Partant de (10.147) avec  $\omega = \omega_{re}$ , on peut introduire une *fonction de distribution d'équilibre pondérée* (par la fréquence plasma) :

$$\hat{\varphi}_0(w) \equiv \sum_s \omega_{ps}^2 \hat{f}_{s0}(w) \quad (10.159)$$

La susceptibilité longitudinale peut alors s'écrire :

$$\chi_L(k_r, \omega_{re}) = -\frac{1}{k_r^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}'_0(w) dw}{w - \frac{\omega_{re}}{k_r}} - i \frac{\pi}{|k_r| k_r} \hat{\varphi}'_0 \left( w = \frac{\omega_{re}}{k_r} \right) \quad (10.160)$$



et d'après (10.158) la densité de la puissance moyenne dissipée est :

$$\langle p \rangle = \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \frac{\pi}{|k_r|} \left[ -\frac{\omega_{re}}{k_r} \hat{\varphi}'_0 \left( w = \frac{\omega_{re}}{k} \right) \right] \quad (10.161)$$

On remarque que la susceptibilité pour  $k$  et  $\omega$  réels est complexe, à cause des contours de Landau qui en donnent un prolongement analytique pour  $\omega$  réel. La partie imaginaire de  $\chi_L(k_r, \omega_{re})$ , qui résulte de ce prolongement analytique correct, montre que le plasma possède une dissipation électrodynamique – appelée *dissipation de Landau*. Comme celle-ci résulte d'une description de la dynamique du plasma à partir de l'équation de Vlasov qui néglige les collisions, on dit aussi souvent qu'il s'agit d'une *dissipation non collisionnelle*. Cela peut paraître à première vue une contradiction, et nous devons clarifier la nature et le sens physique de cette dissipation, mais on doit souligner dès maintenant qu'elle n'intervient que dans la dynamique de perturbation du plasma.

Sur la formule (10.161) on voit que pour  $(\omega_{re}/k_r) > 0$ , un plasma stable a une dissipation passive ( $\langle p \rangle > 0$ ) pourvu que  $\hat{\varphi}'_0(w = \omega_{re}/k_r) < 0$ , et une dissipation active ( $\langle p \rangle < 0$ ) si  $\hat{\varphi}'_0(w = \omega_{re}/k_r) > 0$ . L'interprétation physique de ces deux cas est décrite sur les figures 10.11 (a) et (b) respectivement ; elle fait intervenir l'interaction d'une onde extérieure imposée de vitesse de phase  $(\omega_{re}/k_r)$  et des particules du plasma, donnée par  $\hat{\varphi}_0(w)$ , qui sont en résonance de phase avec l'onde, c'est-à-dire telles que  $w \approx (\omega_{re}/k_r)$ , et que nous désignerons plus brièvement par le terme de particules résonnantes. On peut y distinguer deux groupes : celles qui ont une vitesse  $w \equiv w_-$ , légèrement inférieure (de manière différentielle) à celle de l'onde, et celles qui ont une vitesse  $w \equiv w_+$  légèrement supérieure (de manière différentielle) à celle de l'onde. Comme on le voit sur la figure 10.11(c) les particules de vitesse  $w_-$  sont poussées par l'onde, et gagnent de l'énergie et de la quantité de mouvement à partir de l'onde. Au contraire, les particules de vitesse  $w_+$  poussent l'onde et lui transfèrent de l'énergie et de la quantité de mouvement. Pour la fonction de distribution pondérée représentée sur la figure 10.11(a)  $\hat{\varphi}'_0(w = \omega_{re}/k_r) < 0$ , et il y a donc autour de  $(\omega_{re}/k_r)$  plus de particules prenant de l'énergie à l'onde que de particules lui en transférant ; l'onde fournit donc de la puissance au plasma et la *dissipation du type Landau est positive*. C'est le contraire qui se produit pour la fonction de distribution représentée sur la figure 10.11(b) pour laquelle on a une *dissipation de Landau négative*. Nous verrons au chapitre 11 qu'une dissipation de Landau négative peut conduire à une instabilité.

Bien qu'à ce stade nous ne voulions pas discuter en détail les effets non linéaires, les conséquences de ceux-ci sont physiquement évidentes à partir de la description des

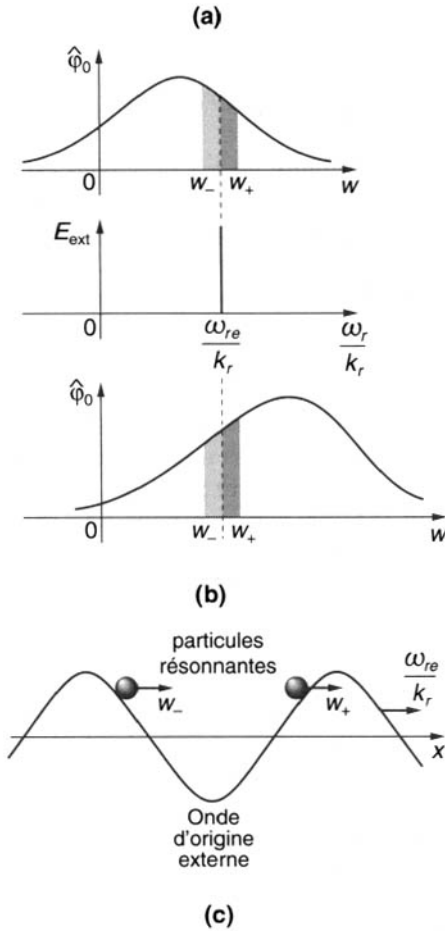


Figure 10.11 : Interactions onde-particules résonnantes pour les plasmas stables dans un champ extérieur.

- (a) Dissipation passive.
- (b) Dissipation active.
- (c) Interaction onde-particules résonnantes.

interactions ondes-particules qui vient d'être faite. Ainsi, il est clair que les particules de vitesse  $w_-$  qui sont poussées par l'onde vont s'accélérer et devenir au bout d'un certain temps des particules de vitesse  $w_+$  qui poussent l'onde ; de même les particules de vitesse  $w_+$  qui poussent l'onde vont être freinées et devenir au bout d'un certain temps des particules de vitesses  $w_-$  poussées par l'onde.

En d'autres termes, pour une onde d'amplitude finie, les particules résonnantes *rebondissent* dans le puits de potentiel de l'onde au bout d'un certain temps, et l'échange d'énergie global entre l'onde et les particules résonnantes s'annule. Une onde d'amplitude finie est donc sujette à l'amortissement de Landau seulement sur un intervalle de temps plus court que le temps de rebondissement des particules. Dans la dynamique linéaire stricte où les champs de perturbation sont supposés d'amplitude infiniment petite, le temps de rebondissement [cf. paragraphe 10.7.1(a)] est infini, et le schéma de l'amortissement s'applique. Mais par ailleurs aux échelles de temps longues, on ne peut évidemment pas négliger les collisions ; si elles se produisent sur une échelle de temps plus courte que le temps de rebondissement, elles tendent à restaurer l'amortissement de Landau même dans une onde d'amplitude finie [cf. paragraphe 10.7.1(b)]. Il y a enfin un autre effet non linéaire évident dans l'interaction onde-particules résonnantes : puisque les particules  $w_-$  sont accélérées et les particules  $w_+$  freinées, la fonction de distribution  $\hat{\varphi}_0$  au voisinage de  $w = (\omega_{re}/k_r)$  tend à former un plateau, de sorte que  $\hat{\varphi}'_0(w = \omega_{re}/k_r)$  s'annule et la dissipation d'énergie disparaît. Cette modification de la fonction de distribution près de la vitesse synchrone à l'onde est ce qu'on appelle l'effet *quasi linéaire* de formation de plateau [cf. paragraphe 10.7.2]. Là aussi, les collisions vont intervenir, empêcher la formation d'un plateau en régime permanent et restaurer l'amortissement de Landau avec une fonction de distribution modifiée [cf. paragraphe 10.7.2(c)]. C'est en fait le scénario usuel dans le chauffage d'un plasma et/ou la génération de courant continu par les champs d'une onde électromagnétique produite par une source extérieure. Les détails des effets non linéaires, de l'effet de rebondissement et de la formation quasi linéaire d'un plateau seront repris dans la section 10.7.

Revenons maintenant à la dynamique linéaire du plasma en remarquant que nous avons depuis le début de cette section supposé le plasma stable. Pour le vérifier, il faut revenir aux modes naturels donnés par (10.148) sous la forme  $\omega(k_r) = \omega_r(k_r) + i \omega_i(k_r)$ , et étudier le signe de  $\omega_{mi}(k_r)$  [cf. paragraphe 10.3.2 b)]. En général on ne peut le faire que numériquement, mais dans le cas très intéressant où le mode naturel  $\omega_m(k_r)$  est faiblement croissant ou décroissant, c'est-à-dire  $|\omega_{mi}(k_r)| \ll |\omega_{mr}(k_r)|$ , des expressions analytiques explicites de  $\omega_{mi}(k_r)$  peuvent s'obtenir comme nous allons le voir pour une fonction  $\hat{\varphi}_0(w)$  arbitraire.

### 10.3.4 Modes naturels faiblement croissants ou décroissants

De manière générale supposons qu'on recherche des solutions  $D(k_r, \omega) = 0$ , c'est-à-dire les  $\omega(k_r)$ , dans lesquelles on ait :

$$|\omega_i(k_r)| \ll |\omega_r(k_r)| . \quad (10.162)$$

Un développement en série de Taylor de  $D(k_r, \omega)$  donne :

$$\begin{aligned} D(k_r, \omega_r + i\omega_i) &= D(k_r, \omega_r) + \left. \frac{\partial D}{\partial \omega} \right|_{\omega_i=0} i\omega_i + \dots \\ &= D_r(k_r, \omega_r) + iD_i(k_r, \omega_r) \\ &\quad + \left[ \left. \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0} + i \left. \frac{\partial D_i}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0} \right] i\omega_i + \dots \end{aligned} \quad (10.163)$$

Dans les descriptions cinétiques des ondes  $D_r(k_r, \omega_r)$  et  $D_i(k_r, \omega_r)$  ne sont pas nulles, ni leurs dérivées par rapport à  $\omega_r$ . Donc, au premier ordre en  $\omega_i$ ,  $D(k_r, \omega) = 0$  conduit à :

$$D_r(k_r, \omega_r) - \omega_i \left. \frac{\partial D_i}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0} = 0 \quad (10.164)$$

et

$$D_i(k_r, \omega_r) + \omega_i \left. \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0} = 0 \quad (10.165)$$

Et  $\omega_r(k_r)$  est fourni par :

$$D_r(k_r, \omega_r) \left. \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0} + D_i(k_r, \omega_r) \left. \frac{\partial D_i}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0} = 0 \quad (10.166)$$

et

$$\omega_i(k_r) = \frac{-D_i(k_r, \omega_r)}{\left. \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0}} = \frac{D_r(k_r, \omega_r)}{\left. \frac{\partial D_i}{\partial \omega_r} \right|_{\omega_i=0}} \quad (10.167)$$

Dans les cas les plus courants on trouve  $|D_i(k_r, \omega_r)|$  petit, de sorte que le second terme de (10.166) est d'ordre supérieur dans le développement, et  $|\omega_i(k_r)|$  est du même ordre que  $|D_i(k_r, \omega_r)|$ , ce qui rend d'ordre supérieur le second terme de (10.164). Et  $D(k_r, \omega) = 0$  donne donc de manière approchée :

$$D_r(k_r, \omega_r) = 0 \rightarrow \omega_r(k_r) \quad (10.168)$$

et

$$\omega_i(k_r) = \left. \frac{-D_i(k_r, \omega_r)}{\left( \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right)} \right|_{D_r=0} \quad (10.169)$$

Les équations (10.168) et (10.169) sont souvent utiles pour trouver de manière approchée les modes faiblement amortis ou instables à partir d'une relation de dispersion  $D(k_r, \omega) = 0$ . En fait leur validité n'est pas générale ;

les hypothèses et les approximations faites pour les obtenir doivent être examinées soigneusement pour s'assurer qu'on peut les utiliser (cf. problème P10-8).

Cela étant, à partir de (10.148) et (10.147), on a :

$$\begin{aligned} D_r(k_r, \omega_r) &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}'_{s0} dw}{(w - \frac{\omega_r}{k_r})} \\ &= 1 - \frac{1}{k_r^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}'_0 dw}{w - \frac{\omega_r}{k_r}} \end{aligned} \quad (10.170)$$

et

$$\begin{aligned} D_i(k_r, \omega_r) &= \sum_s -\frac{k_r}{|k_r|} \pi \frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \hat{f}'_{0s} \left( w = \frac{\omega_r}{k_r} \right) \\ &= -\frac{\pi}{|k_r|k_r} \hat{\varphi}'_0 \left( w = \frac{\omega_r}{k_r} \right) \end{aligned} \quad (10.171)$$

où l'on a introduit la fonction de distribution pondérée  $\hat{\varphi}'_0(w)$  définie en (10.159). A partir de (10.168) et de la définition de la vitesse de groupe :

$$v_g \equiv \frac{d\omega_r}{dk_r} = \frac{-(\partial D_r / \partial k_r)}{(\partial D_r / \partial \omega_r)} \Big|_{D_r=0} \quad (10.172)$$

on obtient :

$$\left( \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right)_{D_r=0} = -\frac{1}{v_g} \left( \frac{\partial D_r}{\partial k_r} \right)_{D_r=0} . \quad (10.173)$$

On peut aussi montrer directement à partir de (10.170) que :

$$\left( \frac{\partial D_r}{\partial k_r} \right)_{D_r=0} = \frac{2}{k_r} - \frac{\omega_r}{k_r} \left( \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right)_{D_r=0} . \quad (10.174)$$

d'où :

$$\left( \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right)_{D_r=0} = \frac{2/k_r}{v_p - v_g} ; \quad v_p \equiv \frac{\omega_r}{k_r} . \quad (10.175)$$

En portant (10.171) et (10.175) dans (10.169) on obtient finalement :

$$\omega_i(k_r) = \frac{\pi}{2|k_r|} (v_p - v_g) \hat{\varphi}'_0(w = v_p) \quad (10.176)$$

qui est valable dans la mesure où  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$  ; on a supposé ici que la partie réelle de la fréquence  $\omega_r(k_r)$  avait été obtenue à partir de (10.168) et (10.170).

On voit que pour un ensemble donné de fonctions de distributions d'équilibre  $f_{s0}(w)$ , l'instabilité ( $\omega_i > 0$ ) ou l'amortissement ( $\omega_i < 0$ ) dépendent du *signe de la dérivée de la fonction de distribution pondérée à la vitesse de synchronisme* avec la phase de l'onde et des valeurs relatives des vitesses de phase et de groupe de l'onde. Physiquement, le premier paramètre représente la différence entre le nombre de particules qui vont plus vite ou moins vite que l'onde ; il est donc relié à la puissance dissipée par effet Landau. Le deuxième est relié comme nous allons le voir au signe de l'énergie d'onde (onde à énergie positive ou négative).

### 10.3.5 Énergie d'onde et puissance dissipée dans l'effet Landau

L'analyse précédente montre que l'amortissement ou l'amplification faible des ondes sont dus à l'interaction de l'onde avec les particules synchrones de vitesse  $w = (\omega_r/k_r)$ , [cf. (10.176)]. Un mode naturel  $\omega_r(k_r)$  est lui-même produit par les oscillations self-consistantes de toutes les autres particules [cf. la partie principale de (10.170) qui exclut les particules résonnantes]. Pour les ondes de petite amplitude, il est donc commode de considérer un *système conservatif* à une seule onde formé par *toutes les particules de la fonction de distribution sauf les particules résonnantes*. Le champ électrique d'une onde non amortie y est self-consistant avec la dynamique des particules non résonnantes. Dans ce système conservatif on a une densité  $\langle U \rangle$  moyenne et un flux moyen  $\langle S \rangle$  d'énergie de perturbation, comme on l'a vu en (10.153) et (10.154) avec ici  $\langle p \rangle = 0$ . Mais d'autre part l'interaction du champ  $E_1$  de l'onde non amortie et des particules résonnantes doit introduire une dissipation moyenne d'énergie  $\langle p \rangle$ .

En suivant la même méthode d'analyse de la perturbation qu'au paragraphe 6.5.3 on a donc :

$$\omega_i(k_r) = \frac{-p_k}{2U_k} . \quad (10.177)$$

et :

$$k_i(\omega_r) = \frac{p_k}{2S_k} \quad (10.178)$$

où  $p_k$  est la (petite) densité moyenne de puissance dissipée pour les champs non amortis du mode naturel, et  $U_k$ ,  $S_k$  sont les densités et flux moyens d'énergie dans le mode naturel non amorti. Rappelons que (10.177) et (10.178) se rapportent à des champs de types différents ; (10.177) suppose  $|\omega_i(k_r)| \ll |\omega_r(k_r)|$  et (10.178) correspond à  $|k_i(\omega_r)| \ll |k_r(\omega_r)|$ . En l'absence de dissipation on a pour le mode naturel :

$$S_k = v_g U_k \quad (10.179)$$

où  $v_g$ , la vitesse de groupe, est aussi la vitesse d'énergie. On a donc :

$$k_i(\omega_r) = \frac{-\omega_i(k_r)}{v_g} \tag{10.180}$$

et il suffit donc de calculer  $\omega_i(k_r)$ . Nous allons maintenant calculer  $U_k$ ,  $S_k$  et  $p_k$ .

**a) Modèle multifaisceaux de Dawson pour  $K_L(k, \omega)$**

Pour séparer les particules résonnantes et non résonnantes on peut considérer la fonction de distribution d'équilibre comme la limite continue d'un ensemble discret de fonctions de Dirac [113] (Fig. 10.12). Pour simplifier nous nous limitons dans ce qui suit au cas d'une seule fonction de distribution  $f_0(w)$ . Alors, on peut la discrétiser en posant de manière générale :

$$f_0(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(v_b)\delta(w - v_b) dv_b \tag{10.181}$$

Comme on le voit sur la figure 10.12, cela donne une représentation de  $f_0(w)$  comme constituée d'un grand nombre de petits faisceaux ayant chacun une distribution de plasma froid :

$$f_b(w) = n_b\delta(w - v_b) \tag{10.182}$$

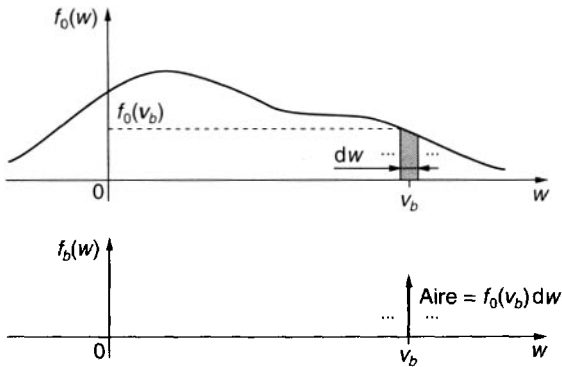


Figure 10.12 : Simulation d'une fonction de distribution continue,  $f_0(w)$ , par un ensemble de faisceaux élémentaires  $f_b(w)$ .

avec

$$n_b = n_o \hat{f}_0(w = v_b) dw \quad (10.183)$$

Pour un faisceau froid, la susceptibilité électrostatique (longitudinale) est [cf. (6.24)] :

$$\chi_{Lb}(k, \omega) = \frac{-\omega_b^2}{(\omega - kv_b)^2} \quad (10.184)$$

avec  $\omega_b^2 = (e^2 n_b / m \epsilon_0)$ . La permittivité longitudinale pour la fonction de distribution  $f_0(w)$  assimilée à un ensemble de petits faisceaux est donc :

$$K_L(k, \omega) = 1 + \sum_b \frac{-\omega_b^2}{(\omega - kv_b)^2} = 0 \quad (10.185)$$

A la limite continue,  $v_b \rightarrow w$  et  $n_b \rightarrow n_o \hat{f}_0(w) dw$ , on obtient :

$$\begin{aligned} K_L(k, \omega) &= 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{\hat{f}_0(w) dw}{(w - \frac{\omega}{k})^2} \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{\hat{f}'_0(w) dw}{w - \frac{\omega}{k}} \end{aligned} \quad (10.186)$$

où  $\omega$  et  $k$  doivent être pris dans leurs DCA respectifs, et où la dernière intégrale a été obtenue après une intégration par parties. C'est exactement le résultat obtenu plus haut, (10.112) et (10.114) pour une seule espèce de particule, par une méthode complètement différente, la résolution par transformation de Fourier-Laplace des équations de Vlasov-Poisson.

Pour les ondes faiblement amorties, on a vu dans la section 10.3.4 que la relation de dispersion est déterminée par (10.170), soit :

$$D_r(k_r, \omega_r) \equiv K_{Lr}(k_r, \omega_r) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k_r^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}'_0 dw}{(w - \frac{\omega_r}{k_r})} = 0 \quad (10.187)$$

On peut maintenant interpréter (10.187) comme la limite continue du modèle multifaisceaux qui (en prenant la partie principale de l'intégrale) exclut les particules résonnantes autour de  $w = (\omega_r / k_r)$ .

## b) Densité d'énergie des ondes dans un plasma

Dans l'étude de la dynamique linéarisée des ondes sur un faisceau d'électrons, on a trouvé [cf. (6.53)] que la densité d'énergie moyenne dans l'espace ou le temps est donnée par :

$$U = \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{4} \left[ 1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega_r - k_r v_b)^2} - \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \frac{\omega_b^2}{(\omega_r - k_r v_b)^2} \right] \quad (10.188)$$



où l'on réécrit (6.53) sous la forme (10.188) pour faciliter le passage à la limite continue.

En appliquant ce résultat à un petit faisceau, et en passant à la limite continue dans laquelle on représente la fonction de distribution d'équilibre d'un plasma d'électrons  $f_0(w)$  par un ensemble de petits faisceaux non résonnants, on trouve pour la densité moyenne d'énergie associée à une onde de petite amplitude dans ce plasma :

$$U = \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{4} \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{k_r^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}'_0 dw}{w - \frac{\omega_r}{k_r}} + \omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \left( -\frac{\omega_p^2}{k_r^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}'_0 dw}{w - \frac{\omega_r}{k_r}} \right) \right] \quad (10.189)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{4} |E_1|^2 \frac{\partial}{\partial \omega_r} (\omega_r K_{Lr}) \quad (10.190)$$

La dernière expression dans (10.190) est d'une validité beaucoup plus générale car elle s'applique aussi aux ondes électrostatiques dans un plasma placé dans un champ magnétique à condition de prendre la valeur appropriée de la permittivité longitudinale  $K_L$  (cf. par exemple [361]). Pour un diélectrique dispersif ordinaire (10.190) a été écrit pour la première fois par L. Brillouin ([114], [115]).

On peut maintenant appliquer (10.189) aux ondes  $(k_r, \omega_r)$  satisfaisant la relation de dispersion (10.187). En utilisant (10.172)–(10.175) on trouve à partir de (10.187) et (10.189)

$$U_k = \left( \frac{v_p}{v_p - v_g} \right) \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \quad (10.191)$$

qui a la même forme que pour les ondes dans un faisceau froid [cf. (6.64)], à ceci près que dans le plasma  $v_p \equiv (\omega_r/k_r)$  et  $v_g \equiv (d\omega_r/dk_r)$  doivent être déterminés à partir de (10.187). On peut montrer (cf. problème P10-9) que le flux d'énergie moyen dans la direction  $x$  est donné par :

$$S_k = v_g U_k \quad (10.192)$$

### c) Échange d'énergie onde-électrons résonnants

Dans l'esprit de la méthode de perturbation décrite ci-dessus on considère maintenant la dynamique (de perturbation) des petits faisceaux résonnants dans les champs *imposés* par l'onde non amortie *produite par les faisceaux non résonnants*. Le champ électrique de l'onde étant  $E_1(x, t) = E_{10} \sin(k_r x - \omega_r t)$ , le courant induit dans un faisceau est :

$$J_{b1} = -e(n_b v_1 + v_b n_1) \quad (10.193)$$

où  $v_1(x, t)$  et  $n_1(x, t)$  sont respectivement les perturbations de vitesse et de densité produites par  $E_1(x, t)$ . La densité moyenne de puissance échangée avec l'onde est alors :

$$p_k = \int \langle E_1 J_{b1} \rangle \hat{f}_0(w) dw \quad (10.194)$$

où il est entendu qu'on a fait le passage à la limite  $n_b \rightarrow n_0 \hat{f}_0(w) dw$  et  $v_b \rightarrow w$ . (Notons que l'on considère la limite d'une distribution continue de  $w$  parce que la vitesse de phase de l'onde est en général arbitraire.) On voit sur (10.194) que la phase relative de  $E_1$  et  $J_{b1}$  est importante. On doit donc déterminer  $J_{b1}$  avec des conditions initiales appropriées, puis calculer la moyenne spatiale  $\langle E_1 J_{b1} \rangle$  de  $E_1 J_{b1}$ , et finalement prendre la limite asymptotique dans le temps de l'intégrale dans (10.194) pour obtenir une valeur  $p_k$  indépendante des conditions initiales.

Partant des équations linéarisées d'un petit faisceau froid, on a donc d'abord :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_b \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{e}{m} E_{10} \sin(k_r x - \omega_r t) \quad \text{pour } t \geq 0 \quad (10.195)$$

$$= 0 \quad \text{pour } t < 0 \quad (10.196)$$

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + v_b \frac{\partial n_1}{\partial x} = -n_b \frac{\partial v_1}{\partial x} \quad (10.197)$$

avec les conditions initiales :  $v_1(x, t = 0) = 0$  et  $n_1(x, t = 0) = 0$ . La résolution de ces équations est facile et donne :

$$v_1(x, t) = \frac{-eE_{10}}{m} \frac{\cos(k_r x - \omega_r t) - \cos k_r(x - v_b t)}{\omega_r - k_r v_b} \quad (10.198)$$

$$n_1(x, t) = \frac{-eE_{10}}{m} n_b k_r \times \frac{\cos(k_r x - \omega_r t) - \cos k_r(x - v_b t) - (\omega_r - k_r v_b)t \sin k_r(x - v_b t)}{(\omega_r - k_r v_b)^2} \quad (10.199)$$

On remarque que le dernier terme de (10.199) est *séculaire*, c'est-à-dire croissant linéairement avec le temps ; cela vient du fait que dans (10.195), le terme d'excitation (le membre de droite) a la même variation périodique que la solution de l'équation homogène : c'est un terme d'excitation résonnante. C'est lui qui conduit à l'échange d'énergie.

On voit donc que la réponse des particules résonnantes est plutôt singulière et semble remettre en question toute analyse linéaire de leur dynamique. En fait, la moyenne de  $E_1 J_{b1}$  n'a pas de divergence et on trouve :

$$\langle E_1 J_{b1} \rangle = \frac{\epsilon_0 E_{10}^2}{2} \omega_b^2 \left[ v_b \frac{d}{dv_b} \left( \frac{\sin(\omega_r - k_r v_b)t}{\omega_r - k_r v_b} \right) + \frac{\sin(\omega_r - k_r v_b)t}{\omega_r - k_r v_b} \right] \quad (10.200)$$

et avec (10.194) :

$$p_k = -\frac{\epsilon_0 E_{10}^2}{2} \omega_p^2 \int w \frac{d\hat{f}_0}{dw} \frac{\sin(\omega_r - k_r w)t}{\omega_r - k_r w} dw \quad (10.201)$$

On voit que (10.201) dépend du temps et contient pour toute valeur finie  $t$  une contribution significative de chacune des deux espèces de particules (résonnantes et non résonnantes). Mais lorsque  $t \rightarrow \infty$ , seules les particules résonnantes contribuent à l'intégrale (Fig. 10.13).

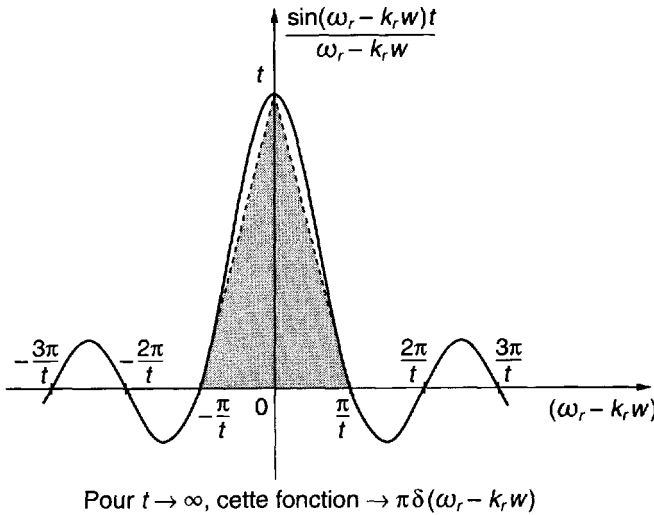


Figure 10.13 : Limite asymptotique temporelle de l'intégrand de la puissance dissipée, équation (10.201). La surface  $S$  du triangle ombré est la même que celle sous toute la courbe depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$ .

De manière asymptotique dans le temps on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin(\omega_r - k_r w)t}{(\omega_r - k_r w)} \right) \rightarrow \pi \delta(\omega_r - k_r w) = \frac{\pi}{|k_r|} \delta\left(w - \frac{\omega_r}{k_r}\right) \quad (10.202)$$

et finalement :

$$p_k = -\frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \pi \frac{\omega_p^2}{|k_r|} \frac{\omega_r}{k_r} \frac{df_0}{dw} \Bigg|_{w=(\omega_r/k_r)} \quad (10.203)$$

Pour un plasma avec plusieurs espèces de particules cela donne :

$$p_k = \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \frac{\pi}{|k_r|} [-v_p \varphi'_0(w = v_p)] \quad (10.204)$$

à comparer au résultat (10.161) obtenu pour une onde externe imposée. En utilisant la description (10.168)–(10.171) d'un mode naturel faiblement amorti, on trouve donc :

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{2} \omega_r \epsilon_0 K_{Li}(k_r, \omega_r) |E_1|^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega_r \epsilon_0 \chi_{Li}(k_r, \omega_r) |E_1|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{Lr}(k_r, \omega_r) |E_1|^2 \end{aligned} \quad (10.205)$$

avec  $K_{Li}(k_r, \omega_r)$  donné par (10.171).

#### d) Amortissement de Landau et énergie d'onde

En portant (10.191) et (10.203) dans (10.177) on trouve :

$$\omega_i(k_r) = \frac{\pi}{2} (v_p - v_g) \frac{\omega_p^2}{|k_r|} \frac{df_0}{dw} \Bigg|_{w=v_p} \quad (10.206)$$

qui est identique au résultat de (10.176) appliqué à un plasma constitué d'une seule espèce de particules.

On peut voir que  $\omega_i(k_r)$  donné par (10.169) ou (10.177) donne :

$$U_k = \frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{4} \left( \omega_r \frac{\partial K_{Lr}}{\partial \omega_r} \right)_{K_{Lr}=0} \quad (10.207)$$

qui résulte aussi de (10.190) calculé pour  $K_{Lr} = 0$ .

Pour conclure cette section, il faut noter que l'amortissement de Landau a été obtenu dans la limite asymptotique temporelle. Cela rend évidemment discutable l'omission des collisions. Cela impose aussi de considérer les effets aux temps longs des conditions initiales comme on l'a fait au paragraphe 10.2.1. Nous y reviendrons et reconsidérerons le processus de linéarisation pour les particules résonnantes. Mais auparavant, nous allons terminer l'étude de la dynamique unidimensionnelle de perturbation d'un plasma non collisionnel par l'analyse des modes naturels dans un plasma maxwellien.

### 10.3.6 Ondes électrostatiques dans un plasma maxwellien

Quand les fonctions de distribution d'équilibre des particules du plasma sont maxwelliennes on peut obtenir des expressions analytiques explicites de la relation de dispersion des ondes faiblement amorties (dans un plasma maxwellien toutes les ondes sont évidemment stables). Les ondes électrostatiques dans un plasma non magnétisé peuvent être séparées en deux familles : les ondes de haute fréquence (près de  $\omega_{pe}$ ), appelées ondes de plasma électroniques (ou oscillations de plasma, ou ondes de Langmuir, ou ondes de Bohm et Gross) dans lesquelles le mouvement des ions est négligeable ; les ondes de basse fréquence (en dessous de  $\omega_{pi}$ ), appelées ondes acoustiques ioniques (ou pseudosonores). Même quand l'amortissement de Landau de ces ondes est fort, on peut écrire leur relation de dispersion au moyen de fonctions spéciales qui ont été tabulées en détail.

#### a) Ondes de plasma électroniques faiblement amorties

Dans le domaine des hautes fréquences ( $\omega \sim \omega_{pe}$ ), on peut négliger le mouvement des ions, et on a seulement besoin de considérer la fonction de distribution à l'équilibre  $\hat{f}_{0e}$  des électrons. Pour une maxwellienne à une dimension, on a :

$$\hat{f}_{0e} = \frac{\exp[-w^2/2v_{Te}^2]}{v_{Te}\sqrt{2\pi}} \quad (10.208)$$

avec  $v_{Te} = (\kappa T_e/m_e)^{1/2}$ , et l'on voit sur (10.206) que  $|\omega_i|$  décroît (exponentiellement) lorsque la vitesse de phase de l'onde  $v_p = (\omega_r/k_r)$  devient bien plus grande que la vitesse thermique  $v_{Te}$  des électrons. Ainsi, en intégrant par parties (10.170) avec  $s = e$ , puis en développant en série de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} D_r(k_r, \omega_r) &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k_r^2} P \int \frac{\hat{f}_{0e}}{(w - \frac{\omega_r}{k_r})^2} dw \\ &\approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} \int \left[ 1 + \frac{2w}{v_p} + \frac{3w^2}{v_p^2} + \dots \right] \hat{f}_{0e} dw \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} \left[ 1 + \frac{2\bar{w}}{v_p} + \frac{3\bar{w}^2}{v_p^2} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (10.209)$$

où  $\bar{w}$  et  $\bar{w}^2$  désignent des moyennes prises sur la fonction de distribution  $\hat{f}_{0e}$ . On peut voir que la série obtenue ci-dessus n'est qu'une série asymptotique (cf. problème P10-10). En utilisant pour  $\hat{f}_{0e}$  l'expression (10.208)

on a  $\bar{w} = 0$ ,  $\overline{w^2} = v_{Te}^2$ ,  $\overline{w^3} = 0$ , de sorte que, à l'ordre  $\overline{w^3}/v_p^3$  :

$$D_r(k_r, \omega_r) \approx 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_r^2} \left[ 1 + \frac{3v_{Te}^2 k_r^2}{\omega_r^2} \right] \quad (10.210)$$

et la relation de dispersion approchée  $D_r(k_r, \omega_r) = 0$  s'écrit :

$$\omega_r^2 \approx \omega_{pe}^2 (1 + 3k_r^2 \lambda_{De}^2) \quad (10.211)$$

où  $\lambda_{De} \equiv v_{Te}/\omega_{pe}$  est la longueur de Debye électronique.

Le champ associé à ces ondes est le champ électrostatique qui dérive d'un potentiel :  $E_1 \equiv -(\partial\phi_1/\partial x)$  ou avec les transformées :  $E_1 = -ik_r\phi_1$  ; les densités de particules chargées sont reliées à  $E_1$  par les susceptibilités. On peut ainsi montrer (cf. problème P10-11) que la densité électronique oscille en opposition de phase avec  $\phi_1$ ,  $(n_{e1}/n_{e0}) \approx -(k_r\lambda_{De})^2(e\phi_1/\kappa T_e)$ , tandis que la densité ionique, qui est négligeable devant celle des électrons, oscille en phase avec  $\phi_1$  :  $(n_{i1}/n_{i0}) = -Z_i(m_e/m_i)(n_{e1}/n_{e0})$ . C'est essentiellement la densité électronique qui produit le champ self-consistant  $E_1$ . Ces résultats approchés sont les mêmes que ceux qu'on obtiendrait par la théorie des plasmas froids. L'équation de dispersion est cependant modifiée de manière importante par les effets d'agitation thermique.

De (10.211) on déduit la vitesse de phase :

$$v_p = \frac{\omega_r}{k_r} \approx \pm \frac{v_{Te}}{k_r\lambda_{De}} \left( 1 + \frac{3}{2}k_r^2\lambda_{De}^2 \right) \approx \pm \frac{v_{Te}}{k_r\lambda_{De}} \quad (10.212)$$

qui montre que  $|v_p| \gg v_{Te}$  suppose  $|k_r\lambda_{De}| \ll 1$ . On peut aussi calculer la vitesse de groupe à partir de (10.211), soit :

$$v_g = \frac{d\omega_r}{dk_r} \approx 3(k_r\lambda_{De})^2 \left( \frac{\omega_r}{k_r} \right) \quad (10.213)$$

qui est, on le voit, bien plus petite que la vitesse de phase ; on voit aussi [cf. (10.191)] que ces ondes ont, comme on s'y attendait, une énergie positive. Sur (10.212) et (10.213) on remarque enfin que :

$$v_p v_g \approx 3v_{Te}^2$$

En portant (10.208), (10.212) et (10.213) dans (10.176) on trouve le taux d'amortissement :

$$\begin{aligned} \omega_i(k_r) &\approx -|\omega_r| \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left( 1 - 6 \frac{v_{Te}^2}{v_p^2} \right) \left| \frac{v_p}{v_{Te}} \right|^3 \exp \left( \frac{-v_p^2}{2v_{Te}^2} \right) \\ &\approx -e^{-3/2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\exp(-1/2k_r^2\lambda_{De}^2)}{|k_r\lambda_{De}|^3} \omega_{pe} \end{aligned} \quad (10.214)$$

C'est l'amortissement de Landau<sup>6</sup>. Si l'on définit une onde faiblement amortie comme ayant au moins cinq périodes d'oscillation pendant la constante de temps d'amortissement, soit  $|\omega_i| \leq \omega_r/50$ , la condition d'amortissement faible (10.211) et (10.214) des ondes de plasma électroniques est  $v_p \geq 4v_{Te}$  ou  $k_r \lambda_{De} \leq 0.3$  ; ce qui donne alors  $v_g \leq (3v_{Te}/4) \ll v_p$ .

La relation de dispersion des ondes de plasmas électroniques est représentée sur la figure 10.14. La région des ondes faiblement amorties, correspondant à (10.211) et (10.214), est dessinée en trait plein. On y voit que la gamme de fréquence couverte est assez étroite, de  $\omega_r = \omega_p$  à environ  $\omega_r = 1.2\omega_p$ . Les arcs représentés en tireté sont ceux où  $\omega_i(k_r)$  et  $\omega_r(k_r)$  deviennent comparables. Ils sont déduits de la relation de dispersion exacte qui sera établie plus loin au paragraphe c).

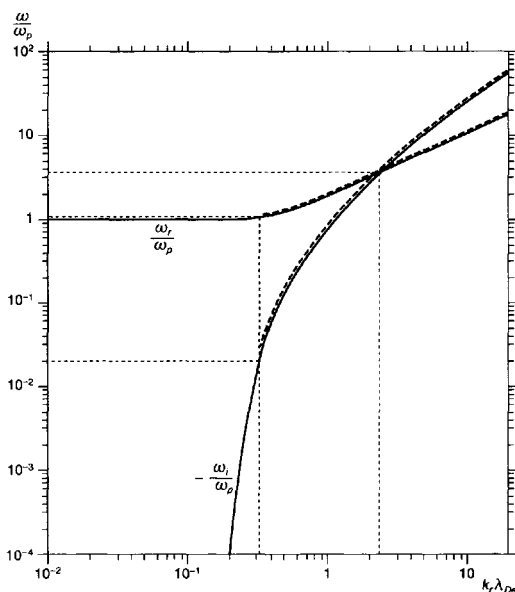


Figure 10.14 : Relation de dispersion  $\omega(k_r)$  pour les oscillations de plasma électroniques.

Il faut bien voir que notre analyse de ces ondes est basée sur l'équation de Vlasov non relativiste (10.93) et une maxwellienne non relativiste (10.208) comme fonction de distribution à l'équilibre. Cette fonction de distribution contient des particules sans aucun sens physique de vitesse supérieure à la vitesse de la lumière. Et donc, l'interaction onde-particules, qui est responsable de l'amortissement de Landau donné par

6. Le facteur  $e^{-3/2} \approx 0.22$  avait été omis dans l'article original de L. D. Landau ; il a été introduit par J. D. Jackson [116].

(10.214), est une fonction continue et finie (quoique fortement décroissante) de la vitesse de phase (c'est-à-dire de la vitesse des particules résonnantes) quelle que soit sa valeur comparée à la vitesse de la lumière. On conçoit physiquement qu'une théorie relativiste du problème va montrer que *l'amortissement de Landau est identiquement nul pour les vitesses de phase supérieures à la vitesse de la lumière* ; une fonction de distribution  $\hat{f}_0$  relativiste correcte n'a en effet aucune particule de vitesse supérieure à  $c$  et donc une onde de vitesse de phase supérieure à  $c$  n'est en résonance avec aucune particule du plasma (cf. problème P10-12).

Les oscillations de plasma électroniques et leur amortissement de Landau ont été étudiés expérimentalement ([118], [119]). Les mesures fournissent le taux d'amortissement *spatial*  $k_i$  pour une onde de fréquence réelle fixe  $\omega_r$ . Pour  $|k_i| \ll |k_r|$ , on a vu en (10.180) que  $\omega_i(k_r) = -v_g k_i(\omega_r)$ , pourvu que  $|\omega_i(k_r)| \ll |\omega_r(k_r)|$ , et on peut donc en déduire  $\omega_i(k_r)$ .

Certaines expériences ont été faites sur un plasma de dimensions transversales finies. La relation de dispersion pour  $k_r$  inférieur à l'inverse de la dimension transversale est alors très différente de (10.211). Les mesures de l'amortissement de Landau ont été cependant faites dans des conditions où (10.211) était une bonne approximation. Nous arrêtons ici cette discussion des effets de dimensions transversales finies et renvoyons pour plus de détails le lecteur à [118] et [119].

## b) Ondes ioniques faiblement amorties

Aux basses fréquences, il faut tenir compte du mouvement des ions. Quand les deux fonctions de distribution à l'équilibre des électrons et des ions sont des maxwelliennes à une dimension,  $\hat{f}_{0e}$  est donné par (10.208) et

$$\hat{f}_{0i} = \frac{\exp[-w^2/2v_{Ti}^2]}{v_{Ti}\sqrt{2\pi}} \quad (10.215)$$

avec  $v_{Ti} = (\kappa T_i/m_i)^{1/2}$ . Sur (10.176) on voit qu'un amortissement faible est maintenant possible pour  $v_{Ti} \ll (\omega_r/k_r) \ll v_{Te}$  pourvu que  $T_e \gg T_i$ . En calculant la partie réelle de la susceptibilité électronique pour  $(\omega_r/k_r) \ll v_{Te}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[X_{Le}(k_r, \omega_r)] &= -\frac{\omega_{pe}^2}{k_r^2} P \int \frac{\hat{f}'_{0e}}{w - \frac{\omega_r}{k_r}} dw \\ &\approx \frac{\omega_{pe}^2}{k_r^2 v_{Te}^2} = \frac{1}{k_r^2 \lambda_{De}^2} \end{aligned} \quad (10.216)$$

La partie réelle de la susceptibilité ionique pour  $(\omega_r/k_r) \gg v_{Ti}$  peut aussi s'écrire de manière approchée :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}X_{Li}(k_r, \omega_r) &= -\frac{\omega_{pi}^2}{k_r^2} P \int \frac{\hat{f}'_{0i}}{w - \frac{\omega_r}{k_r}} dw \\ &\approx -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} \left( 1 + 3 \frac{k_r^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} \right) \end{aligned} \quad (10.217)$$



où la dernière expression, obtenue par un développement comme dans (10.209), est à l'ordre  $(\bar{w}_i/v_p)^3$ . En utilisant (10.216) et (10.217) la partie réelle de la relation de dispersion (10.148) devient approximativement :

$$D_r(k_r, \omega_r) \approx 1 + \frac{1}{k_r^2 \lambda_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_r^2} \left( 1 + 3 \frac{k_r^2 v_{Ti}^2}{\omega_r^2} \right) \quad (10.218)$$

En égalant cette expression à zéro on obtient une équation de dispersion approchée pour les basses fréquences, valable pour  $v_{Ti} \ll v_p \ll v_{Te}$  et avec  $T_e \gg T_i$ , soit :

$$\omega_r^2 \approx \frac{k_r^2 c_s^2}{(1 + k_r^2 \lambda_{De}^2)} \left[ 1 + \frac{3T_i}{Z_i T_e} (1 + k_r^2 \lambda_{De}^2) \right] \quad (10.219)$$

où  $c_s = (Z_i \kappa T_e / m_i)^{1/2}$  est la *vitesse acoustique ionique*. En calculant dans les mêmes conditions la partie imaginaire des susceptibilités on obtient à partir de (10.171) :

$$D_i(k_r, \omega_r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_r}{|k_r|^3} \left[ \frac{\omega_{pe}^2}{v_{Te}^3} + \frac{\omega_{pi}^2}{v_{Ti}^3} \exp\left(\frac{-\omega_r^2}{2k_r^2 v_{Ti}^2}\right) \right] \quad (10.220)$$

et finalement, compte tenu de (10.169) :

$$\frac{\omega_i(k_r)}{|\omega_r|} \approx \frac{-\sqrt{\pi/8}}{(1 + k_r^2 \lambda_{De}^2)^{3/2}} \left[ \left( \frac{Z_i m_e}{m_i} \right)^{1/2} + e^{-3/2} \left( \frac{Z_i T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{-Z_i T_e / 2T_i}{1 + k_r^2 \lambda_{De}^2}\right) \right] \quad (10.221)$$

Ce résultat peut aussi s'obtenir directement à partir de la formule (10.176). En examinant ces deux dernières équations on voit que le premier terme est dû à l'amortissement de Landau électronique, qui dans la limite  $(\omega_r/k_r) \ll v_{Te}$  devient constant ; le deuxième terme est dû à l'amortissement de Landau ionique qui dans la limite  $(\omega_r/k_r) \gg v_{Ti}$  décroît exponentiellement, et d'après la relation de dispersion cela semble supposer  $Z_i T_e \gg T_i$ . La relation de dispersion (10.219) a deux limites importantes, de propriétés très différentes, selon la valeur de  $(k_r \lambda_{De})$  comparée à l'unité.

**α) Ondes de plasma ioniques** Pour  $k_r^2 \lambda_{De}^2 \gg 1$ , mais  $\underline{k_r^2 \lambda_{Di}^2} \ll 1$ , (10.219) et (10.221) deviennent :

$$\omega_r^2 \approx \omega_{pi}^2 (1 + 3k_r^2 \lambda_{Di}^2) \quad (10.222)$$

$$\frac{\omega_i(k_r)}{|\omega_r|} \approx \frac{-\sqrt{\pi/8}}{|k_r \lambda_{De}|^3} \left[ \left( \frac{Z_i m_e}{m_i} \right)^{1/2} + \left( \frac{Z_i T_e}{T_i} \right)^{3/2} e^{-3/2} \exp \left( \frac{-1}{2k_r^2 \lambda_{Di}^2} \right) \right] \quad (10.223)$$

On voit que  $\omega_r(k_r)$  dans (10.222) a la dispersion d'une onde de plasma ionique, semblable à l'onde (10.211) de plasma électronique trouvée pour  $(\omega_r/k_r) \gg v_{Te}$ . Cependant, pour obtenir un amortissement faible ( $|\omega_i| < |\omega_r|/50$ ) de cette onde de plasma ionique, il faut maintenant  $k_r \lambda_{Di} < 0.3$ , ce qui avec la condition  $k_r \lambda_{De} \gg 1$  impose des valeurs beaucoup plus grandes de  $(T_e/T_i)$ ; par exemple,  $k_r \lambda_{De} = 3$  demande  $T_e > 100 T_i$ ,  $k_r \lambda_{De} = 5$  demande  $T_e > 300 T_i$ , et  $k_r \lambda_{De} = 10$  impose  $T_e > 800 T_i$ . Des plasmas avec de pareils écarts de températures sont plutôt rares.

**$\beta$ ) Ondes acoustiques ioniques** Pour  $k_r^2 \lambda_{De}^2 \ll 1$  (10.219) et (10.221) se réduisent à :

$$\omega_r^2 \approx k_r^2 c_s^2 \left( 1 + \frac{3T_i}{Z_i T_e} - k_r^2 \lambda_{De}^2 \right) \quad (10.224)$$

$$\frac{\omega_i}{|\omega_r|} \approx -\sqrt{\pi/8} \left[ \left( \frac{Z_i m_e}{m_i} \right)^{1/2} + e^{-3/2} \left( \frac{Z_i T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{-Z_i T_e}{2T_i} \right) \right] \quad (10.225)$$

Ce sont les ondes acoustiques ioniques (ou pseudo-sonores) essentiellement non dispersives. Si les ions sont des protons ( $Z_i = 1$ ), les termes d'amortissement de Landau électronique et ionique deviennent égaux pour  $(T_e/T_i) \approx 12$ . Pour  $(T_e/T_i) > 15$ , l'amortissement de Landau ionique est négligeable et les ondes acoustiques ioniques sont faiblement amorties ( $|\omega_i| < |\omega_r|/50$ ) seulement par les électrons.

Les champs de ces ondes de basses fréquence acoustiques ioniques sont très différents de ceux des oscillations de plasmas électroniques de haute fréquence (cf. problème P10-11). Comme  $v_p \ll v_{Te}$ , la réponse (10.216) des électrons donne  $(n_{e1}/n_{e0}) \approx (e\phi_1/\kappa T_e)$  qui est une relation d'équilibre quasi statique, appelée parfois réponse "adiabatique" des électrons. L'oscillation de densité des ions est d'ailleurs en phase avec celle du potentiel  $\phi_1$  de l'onde. Elle est comparable (très légèrement supérieure) à celle de la densité électronique; on a en effet  $(n_{i1}/n_{i0}) \approx (1 + k_r^2 \lambda_{De}^2)(e\phi_1/\kappa T_e)$ , de sorte que l'onde acoustique ionique est quasi neutre. Le champ électrique  $E_1$  y est produit de manière self-consistante par la légère différence entre les densités électronique et ionique.

Pour les plasmas les plus courants, où les températures électroniques et ioniques sont différentes avec  $15 < (T_e/T_i) < 100$ , les seules ondes de basses fréquences faiblement amorties sont les ondes acoustiques ioniques

(10.224) et (10.225) avec  $k_r \lambda_{De} \ll 1$  :

$$\omega_r \approx \pm k_r c_s \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{T_i}{Z_i T_e} - \frac{1}{2} k_r^2 \lambda_{De}^2 \right) \quad (10.226)$$

$$\frac{\omega_i}{|\omega_r|} \approx -\sqrt{\pi/8} \left( \frac{Z_i m_e}{m_i} \right)^{1/2} \quad (10.227)$$

La relation de dispersion de ces ondes est représenté sur la figure 10.15.

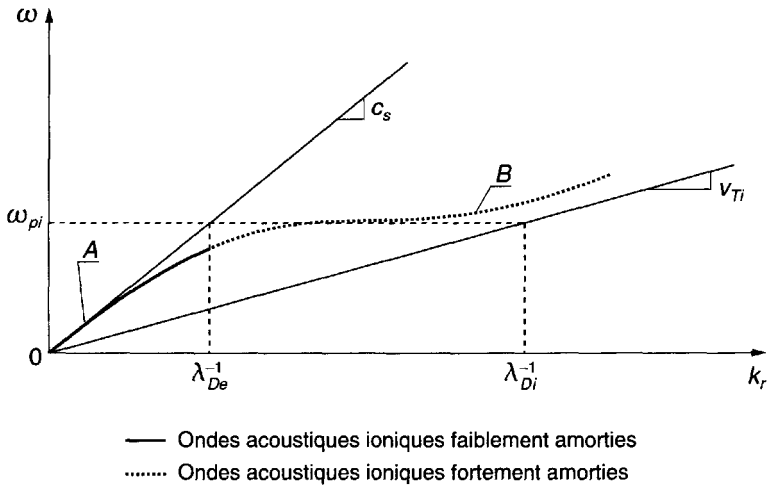


Figure 10.15 : Ondes électrostatiques de basse fréquence.

$$15 < (Z_i T_e / T_i) < 100$$

A Ondes acoustiques ioniques faiblement amorties.

B Ondes acoustiques et ondes de plasma ioniques fortement amorties.

L'existence d'ondes acoustiques ioniques faiblement amorties a été vérifiée expérimentalement [121]. Là aussi, les expériences ont été faites dans l'espace, c'est-à-dire en excitant localement le plasma par une source monochromatique de fréquence  $\omega = \omega_r$ . Les mesures fournissent  $k = k_r + ik_i$  pour  $\omega_r$  donné. Il y a eu une grande controverse quand ces expériences ont montré, spécialement dans les cas où l'on a  $k_i \sim k_r$ , une décroissance non exponentielle des ondes aux grandes distances. Cela a été expliqué par une analyse théorique plus détaillée des expériences ([122], [123]). On a montré que l'excitation locale du plasma produisait, en plus des modes naturels, des modes balistiques qui dépendent fortement des caractéristiques précises de la structure d'excitation localisée. Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur aux références [124] et [127].

### c) Modes naturels avec une fréquence complexe $\omega(k_r)$ quelconque

De manière générale, quand la fonction de distribution d'équilibre est une maxwellienne, la susceptibilité (10.132) et son prolongement analytique pour des valeurs complexes arbitraires de  $\omega$  peuvent s'exprimer avec des fonctions spéciales bien connues et tabulées. écrivons donc maintenant la maxwellienne normalisée à une dimension sous la forme :

$$\hat{f}_{s0}(w) = \frac{\exp(-w^2/v_{ts}^2)}{v_{ts}\sqrt{\pi}} \quad (10.228)$$

avec  $v_{ts}^2 = 2(\kappa T_s/m_s) = 2v_{Ts}^2$ . La susceptibilité (10.132) s'écrit alors :

$$\chi_{Ls}(k_r, \omega) = -\frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \frac{d}{d\left(\frac{\omega}{k_r}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_{s0}dw}{w - \frac{\omega}{k_r}} \quad (10.229)$$

où nous avons utilisé le fait qu'il s'agit d'une intégrale de convolution ; rappelons que  $\omega$  est dans le DCA ( $\omega_i > 0$ ). En posant  $(w/v_{ts}) = x$  et  $(\omega/k_r v_{ts}) = \zeta_s$ , cela peut s'écrire :

$$\chi_{Ls} = -\frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2 v_{ts}^2} \frac{d}{d\zeta_s} \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta_s} dx \right] \quad (10.230)$$

où  $\zeta_{si} > 0$  pour  $k_r > 0$ , et  $\zeta_{si} < 0$  pour  $k_r < 0$ . L'intégrale ci-dessus est la transformée de Hilbert d'une gaussienne et, comme  $\omega_i > 0$ , nous définissons les deux fonctions :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta_s} dx = \begin{cases} Z_+(\zeta_s), & \text{pour } k_r > 0 \\ Z_-(\zeta_s), & \text{pour } k_r < 0 \end{cases} \quad (10.231)$$

Leur prolongement analytique dans tout le plan complexe  $\omega$  s'obtient au moyen des contours de Landau représentés sur la figure 10.7 [cf. (10.133) et (10.117)], soit :

$$Z_{\pm}(\zeta_s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_{\mp}} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta_s} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta_s} dx \pm i2\sqrt{\pi} e^{-\zeta_s^2} \quad (10.232)$$

qui peut se relier à la fonction erreur [268] par la formule :

$$Z_{\pm}(\zeta_s) = i\sqrt{\pi} e^{-\zeta_s^2} [\pm 1 + \text{erf}(i\zeta_s)] \quad (10.233)$$

valable dans tout le plan complexe  $\zeta_s$ . On peut enfin relier cela à une fonction très utilisée en physique des plasmas. Posons  $\zeta_s = (\omega/|k_r|v_{ts})$  ; alors pour  $k_r > 0$   $\zeta_s = \zeta_s$  et pour  $k_r < 0$   $\zeta_s = -\zeta_s$ , et comme  $\text{erf}(-i\zeta_s) = -\text{erf}(i\zeta_s)$ , on a :

$$\begin{aligned} Z_{\pm}(\zeta_s) &= (\text{sgn } k_r) i\sqrt{\pi} e^{-\zeta_s^2} [1 + \text{erf}(i\zeta_s)] \\ &\equiv (\text{sgn } k_r) Z(\zeta_s) \end{aligned} \quad (10.234)$$

où  $(\text{sgn } k_r) = k_r/|k_r|$  est le signe de  $k_r$ .  $Z(\zeta_s)$  est ce qu'on appelle la *fonction de dispersion des plasmas* ; elle est tabulée et discutée en [117].<sup>7</sup> Quelques-unes de ses propriétés importantes sont données dans l'appendice A10-1. D'après la relation ci-dessus la susceptibilité devient :

$$\chi_{Ls} = \frac{-Z'(\zeta_s)}{2k_r^2 \lambda_{De}^2} = \frac{1}{k_r^2 \lambda_{De}^2} [1 + \zeta_s Z(\zeta_s)] \quad (10.235)$$

7. Une autre fonction utile et tabulée est la fonction erreur complexe  $W(\zeta)$  [270] ;  $Z(\zeta) = i\sqrt{\pi}W(\zeta)$ .

où le symbole prime sur la fonction  $Z$  désigne la dérivée par rapport à l'argument qui peut elle-même s'exprimer en fonction de  $Z$  (cf. appendice A10-1). Il faut remarquer que  $Z(\zeta_s)$  est une fonction non analytique de  $k_r$ , puisque  $\zeta_s = (\omega/|k_r|v_{t,s})$ . La transformation de Fourier inverse requiert donc l'usage de  $Z_{\pm}(\zeta_s)$ . Cela serait évidemment vrai de manière plus générale si nous avions supposé  $k$  complexe ([60], [127]).

Dans le domaine des hautes fréquences, en négligeant le mouvement des ions, on obtient pour l'équation de dispersion des modes électrostatiques :

$$\begin{aligned} D_L(k_r, \omega) &\cong K_{Le}(k_r, \omega) = 1 + \chi_{Le}(k_r, \omega) \\ &= 1 - \frac{1}{2k_r^2 \lambda_{De}^2} Z'(\zeta_e) \\ &= 1 + \frac{1}{k_r^2 \lambda_{De}^2} [1 + \zeta_e Z(\zeta_e)] = 0 \end{aligned} \quad (10.236)$$

En revenant au cas des ondes faiblement amorties, on a  $|\zeta_e| \gg 1$  et l'on peut utiliser le développement asymptotique de la fonction  $Z$  (cf. appendice A10-1) et (10.236) redonne (10.211) et (10.214) pour les solutions  $\omega(k_r)$ . Cependant, de manière plus générale,  $Z(\zeta)$  est une fonction entière de  $\zeta$  qui ne se réduit pas à un polynôme. Et donc  $Z$  peut prendre n'importe quelle valeur complexe finie (sauf éventuellement une seule valeur), pour un nombre infini de valeurs de son argument  $\zeta$  (théorème de Picard [271], [272]). Donc pour toute valeur de  $k_r$  (sauf peut-être une), on a un nombre infini de racines de l'équation (10.236); la valeur exceptionnelle de  $k_r$  est  $k_r = 0$  pour laquelle on a les racines  $\omega = \pm \omega_{pe}$  [125]; (cf. aussi [273], [127]).

A partir des propriétés de la fonction  $Z$  données dans l'appendice A10-1, on peut montrer (cf. problème P10-13) que toutes les solutions de (10.236) ont  $\text{Im} \zeta_e < 0$  (comme on doit s'y attendre dans un plasma stable), que si  $\zeta_e$  est une racine  $-\zeta_e^*$  l'est aussi, et enfin que toutes les racines sont simples, comme nous l'avons déjà souligné plus tôt [cf. paragraphe 10.3.2a)]. La fonction  $Z$  a une singularité essentielle à l'infini dans le demi-plan complexe  $\omega$  inférieur.

Quand on tient compte du mouvement des ions dans un plasma maxwellien électrons-ions, la relation de dispersion des modes électrostatiques s'écrit :

$$\begin{aligned} D_L(k_r, \omega) &= K_L(k_r, \omega) = 1 + \chi_{Le}(k_r, \omega) + \chi_{Li}(k_r, \omega) \\ &= 1 - \frac{Z'(\zeta_e)}{2k_r^2 \lambda_{De}^2} - \frac{Z'(\zeta_i)}{2k_r^2 \lambda_{Di}^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2k_r^2 \lambda_{De}^2} \left[ Z'(\zeta_e) + \frac{Z_i T_e}{T_i} Z'(\zeta_i) \right] = 0 \end{aligned} \quad (10.237)$$

Pour  $|\zeta_e| \gg 1$  et  $|\zeta_i| \gg 1$ , ce qui permet d'utiliser le développement asymptotique de  $Z'(\zeta_e)$  et  $Z'(\zeta_i)$ , (10.237) redonne les oscillations de plasma électroniques faiblement amorties avec de petites corrections dues aux ions. Pour  $|\zeta_e| \ll 1$  et  $|\zeta_i| \gg 1$ , on peut utiliser le développement en série de  $Z'(\zeta_e)$  et le développement asymptotique de  $Z'(\zeta_i)$ ; (10.237) conduit à la relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques de basses fréquences faiblement amorties (10.224) et (10.225) pourvu que l'on ait  $T_e \gg T_i$  et  $k_r \lambda_{De} \ll 1$ . Une analyse numérique de (10.237) pour  $T_e \gg T_i$  et pour  $T_e \approx T_i$  (quand les ondes de basses fréquences sont fortement amorties) est donnée dans [120]. Elle fait apparaître la multiplicité des racines.

## 10.4 Plasmas non magnétisés sans champ

### 10.4.1 Formules générales

Étudions maintenant la dynamique non collisionnelle d'un plasma dans un espace à trois dimensions pour les positions et trois dimensions pour les vitesses. On suppose que la fonction de distribution  $f_s(\vec{w}, \vec{r}, t)$  de chaque espèce de particule (de masse  $m_s$ , de charge  $q_s$ ) obéit à l'équation de Vlasov (10.1) et que les champs électromagnétiques  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  sont décrits par les équations de Maxwell (10.4) et (10.5).

Dans un plasma non magnétisé sans champ électrique, on suppose qu'il n'y a pas de champ d'origine extérieure et que le plasma est globalement neutre en charge :

$$\rho_0 = \sum_s q_s n_{s0} \int \hat{f}_{s0} d\vec{w} = 0 \quad (10.238)$$

et en courant :

$$\vec{J}_0 = \sum_s q_s n_{s0} \int \vec{w} \hat{f}_{s0} d\vec{w} = 0 \quad (10.239)$$

où  $n_{s0}$  est la densité, et  $\hat{f}_{s0}$  la fonction de distribution normalisée d'équilibre des particules d'espèce  $s$ . On suppose enfin que dans son état d'équilibre le plasma est homogène, de sorte que  $\hat{f}_{s0} = \hat{f}_{s0}(\vec{w})$  est une fonction arbitraire de  $\vec{w}$ .

Les petites perturbations de cet état d'équilibre obéissent aux équations linéarisées : une équation de Vlasov pour les perturbations  $f_{s1}$  des fonctions de distribution de chaque espèce de particule, soit :

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_{s1}}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s n_{s0}}{m_s} \left( \vec{E}_1 + \vec{w} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial \hat{f}_{s0}}{\partial \vec{w}} = 0 \quad (10.240)$$

et les équations de Maxwell pour les champs du premier ordre  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$  :

$$\nabla \times \vec{E}_1 + \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = 0 \quad (10.241)$$

$$\nabla \times \vec{B}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \mu_0 \vec{J}_1 = 0 \quad (10.242)$$

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E}_1 - \rho_1 = 0 \quad (10.243)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (10.244)$$

où la densité de courant du premier ordre est :

$$\vec{J}_1 = \sum_s q_s \int \vec{w} f_{s1} d\vec{w} = 0 \quad (10.245)$$

et la densité de charge du premier ordre :

$$\rho_1 = \sum_s q_s \int f_{s1} d\vec{w} = 0 \quad (10.246)$$

Ces deux grandeurs sont évidemment reliées par l'équation de conservation de la charge.

Comme nous ne nous intéresserons qu'aux modes naturels de petite amplitude, nous avons négligé tout champ d'excitation d'origine extérieure. Dans le même esprit nous négligeons les conditions initiales et nous supposons que toutes les grandeurs du premier ordre varient comme  $\exp(i \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ . On peut donc transformer le système (10.240)–(10.244) et écrire le système d'équations algébriques :

$$f_{s1} = \frac{-iq_s n_{s0}/m_s}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} \left( \vec{E}_1 + \vec{w} \times \vec{B}_1 \right) \cdot \frac{\partial f_{s0}}{\partial \vec{w}} \quad (10.247)$$

$$\vec{k} \times \vec{E}_1 - \omega \vec{B}_1 = 0 \quad (10.248)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_1 + \frac{\omega}{c^2} \vec{E}_1 + i\mu_0 \vec{J}_1 = 0 \quad (10.249)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_1 - \rho_1/i\varepsilon_0 = 0 \quad (10.250)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (10.251)$$

où (10.247) est la solution de (10.240) transformée et  $\rho_1$  et  $\vec{J}_1$  sont donnés par les mêmes formules (10.245) et (10.246) que précédemment pour les champs complexes. Le système (10.247)–(10.251) peut être résolu facilement ; en portant l'expression (10.247) de  $f_{s1}$  dans la forme complexe de (10.245) on exprime  $\vec{J}_1$  en fonction de  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$ . En reportant cette expression dans (10.249) on obtient avec (10.248) un système algébrique linéaire homogène pour déterminer les champs. En égalant à zéro le déterminant du système on obtient l'équation de dispersion  $D(\vec{k}, \omega) = 0$  dont les solutions sont les modes linéaires naturels du plasma.

Nous étudierons dans le chapitre 11 la stabilité de ces modes pour diverses formes des fonctions de distribution d'équilibre  $f_{s0}$ . Dans la suite du

présent chapitre nous nous limiterons à l'étude des fonctions de distribution d'équilibre *isotropes*, c'est-à-dire du type  $\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w^2)$ . Comme nous le verrons au chapitre 11, dans des plasmas non magnétisés et sans champ électrique de telles fonctions de distribution isotropes conduisent à des modes naturels stables, et donc de tels équilibres sont linéairement stables.

### 10.4.2 Distributions d'équilibre isotropes

Quand les distributions d'équilibre sont isotropes, soit :

$$\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w^2) \equiv \hat{f}_{s0}^{(i)} \quad (10.252)$$

on a :

$$\frac{\partial \hat{f}_{s0}^{(i)}}{\partial \vec{w}} = \frac{\partial \hat{f}_{s0}^{(i)}}{\partial w^2} 2\vec{w} \quad (10.253)$$

et (10.247) se réduit à :

$$\begin{aligned} f_{s1} &= \frac{-iq_s n_{s0}/m_s}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} \frac{\partial \hat{f}_{s0}^{(i)}}{\partial \vec{w}} \cdot \vec{E}_1 \\ &= \frac{-iq_s n_{s0}/m_s}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} \frac{\partial \hat{f}_{s0}^{(i)}}{\partial w^2} 2\vec{w} \cdot \vec{E}_1 \end{aligned} \quad (10.254)$$

qui ne dépend pas de  $\vec{B}_1$ . En portant ce résultat dans la forme complexe de (10.245) on voit que  $\vec{J}_1$  est relié à  $\vec{E}_1$  par un tenseur du deuxième ordre, soit :

$$\vec{J}_1 = \vec{\sigma}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_1 = -i\omega\varepsilon_0 \vec{\chi}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_1 \quad (10.255)$$

où  $\vec{\sigma}$  est le tenseur de conductivité et  $\vec{\chi}$  le tenseur de susceptibilité. Nous utiliserons plutôt  $\vec{\chi}$  qui d'après (10.245) (10.254) et (10.255) a pour composantes :

$$\begin{aligned} \chi_{ij} &= \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \int \frac{2w_i w_j}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} \frac{\partial \hat{f}_{s0}^{(i)}}{\partial w^2} dw \\ &= \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \int \frac{w_i \partial \hat{f}_{s0}^{(i)} / \partial w_j}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} dw \end{aligned} \quad (10.256)$$

On montre facilement (cf. problème P10-14) que, par suite de l'isotropie,  $\vec{\chi}$  n'a que deux composantes  $\chi_L(k, \omega)$  et  $\chi_T(k, \omega)$ , ce qui donne :

$$\vec{\chi} \cdot \vec{E}_1 = \chi_T \vec{E}_{1T} + \chi_L \vec{E}_{1L} \quad (10.257)$$



où  $\vec{E}_{1L}$  et  $\vec{E}_{1T}$  sont les deux composantes de  $\vec{E}_1$  respectivement parallèle et perpendiculaire à  $\vec{k}$ . Cela est normal puisqu'on ne peut construire à partir de  $\vec{k}$  que deux tenseurs symétriques indépendants, à savoir  $\vec{k} \vec{k}$  et  $\bar{\delta}$ . On a donc en général pour un milieu isotrope :

$$\bar{\chi} = \frac{\vec{k} \vec{k}}{k^2} \chi_L(k, \omega) + \left( \bar{\delta} - \frac{\vec{k} \vec{k}}{k^2} \right) \chi_T(k, \omega) \quad (10.258)$$

avec dans le présent cas (cf. problème 10.14) :

$$\chi_L = \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot (\partial \hat{f}_{s0}^{(i)} / \partial \vec{w})}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} d\vec{w} \quad (10.259)$$

$$\chi_T = \sum_s \frac{-\omega_{ps}^2}{\omega} \int \frac{\hat{f}_{s0}^{(i)}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} d\vec{w} \quad (10.260)$$

En revenant aux équations de Maxwell, on obtient, compte tenu de (10.255), (10.257), (10.248) et (10.249) :

$$\vec{k} \times \vec{E}_{1T} - \omega \vec{B}_1 = 0 \quad (10.261)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_1 + \frac{\omega}{c^2} (K_L \vec{E}_{1L} + K_T \vec{E}_{1T}) \quad (10.262)$$

où :

$$K_L = 1 + \chi_L(k, \omega) \quad (10.263)$$

$$K_T = 1 + \chi_T(k, \omega) \quad (10.264)$$

sont les permittivités longitudinale et transversale du plasma. D'après (10.261) et (10.262) on voit que les modes transversaux (champs perpendiculaires à  $\vec{k}$ ) et longitudinaux (champs parallèles à  $\vec{k}$ ) peuvent être séparés.

### a) Ondes transverses électromagnétiques

Pour ces modes on a  $\vec{E}_{1L} = 0$  et donc il n'y a aucune perturbation de charge ( $\rho_1 = 0$ ) et les deux champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$  sont perpendiculaires à  $\vec{k}$ , comme représenté sur la figure 10.16. L'équation (10.262) se réduit à :

$$\vec{k} \times \vec{B}_1 + \frac{\omega}{c^2} K_T \vec{E}_{1T} = 0 \quad (10.265)$$

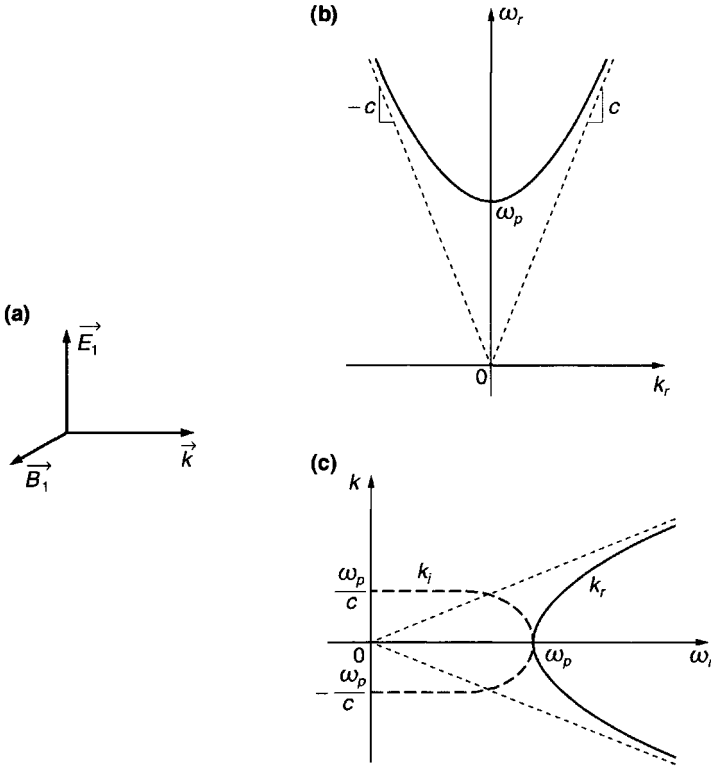


Figure 10.16 : Ondes transverses électromagnétiques.

(a) Disposition des champs.

(b) Relation de dispersion pour un plasma froid :  $\omega(k_r)$ .

(c) Relation de dispersion pour un plasma froid :  $k(\omega_r)$ .

En éliminant  $\vec{B}_1$  entre (10.261) et (10.265) on obtient l'équation homogène :

$$\frac{\omega^2}{c^2}(N^2 - K_T)\vec{E}_{1T} = 0 \tag{10.266}$$

avec  $N \equiv ck/\omega$ . Les solutions non nulles ( $\vec{E}_{1T} \neq 0$ ) doivent donc satisfaire la relation de dispersion :

$$D_T(k, \omega) = N^2 - K_T(k, \omega) = 0 \tag{10.267}$$

Comme  $\vec{E}_{1T}$  peut avoir en général deux composantes indépendantes perpendiculaires à  $\vec{k}$ , les ondes électromagnétiques transversales peuvent avoir n'importe quelle polarisation elliptique ou rectiligne.

D'après (10.260) et (10.253) la relation de dispersion (10.267) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{c^2 k^2}{\omega^2} &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \int \frac{\hat{f}_{s0}^{(i)}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} d\vec{w} \\ &= 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega} \int \frac{\hat{F}_{s0}^{(i)}}{\omega - k w_k} d w_k \end{aligned} \quad (10.268)$$

où l'on a introduit les fonctions de distribution réduites à une dimension :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{s0}^{(i)}(w_k) &= \int \hat{f}_{s0}^{(i)}(w^2) d^2 w_{k\perp} \\ &= \int \hat{f}_{s0}^{(i)} \delta \left( w_k - \frac{\vec{k} \cdot \vec{w}}{k} \right) d\vec{w} \end{aligned} \quad (10.269)$$

le vecteur vitesse  $\vec{w}$  ayant été séparé en deux composantes, l'une  $\vec{w}_k = (\vec{k}/k)w_k$  parallèle, et l'autre  $\vec{w}_{k\perp} = \vec{k} \times (\vec{w} \times \vec{k})/k^2$  perpendiculaire à  $\vec{k}$  (Fig. 10.17).

Dans la limite des plasmas froids on a  $f_{s0}^{(i)} = \delta(\vec{w})$  et l'équation (10.268) redonne la relation de dispersion bien connue des ondes électromagnétiques :

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (10.270)$$

soit :

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (10.271)$$

Pour les valeurs  $k = k_r$  de  $k$  cela donne aussi  $\omega$  réel et  $\omega > \omega_p$ , c'est-à-dire une onde stable progressive pure [Fig. 10.16(b)]. Ces ondes ont une vitesse de phase supérieure à la vitesse de la lumière,  $(\omega_r/k_r) > c$ , et ne peuvent donc être en synchronisme avec aucune particule dans un plasma de température quelconque. L'introduction d'une distribution maxwellienne non relativiste ferait apparaître dans (10.268) un faux amortissement de Landau.

On peut aussi résoudre en  $k$  l'équation (10.271) pour une valeur réelle de la fréquence  $\omega = \omega_r$ . Le nombre d'onde est alors réel pour  $\omega_r > \omega_p$ ,

ce qui correspond à une onde progressive pure, et imaginaire pour  $\omega_r < \omega_p$ , ce qui décrit une onde évanescence [Fig. 10.16(c)]. Pour  $\omega_r = 0$  on obtient ainsi ce qu'on appelle l'épaisseur de l'effet de peau (profondeur de pénétration) dans un plasma froid sans collisions pour les ondes de basses fréquences :

$$[k_i(\omega = 0)]^{-1} = \frac{c}{\omega_p} \quad (10.272)$$

On peut obtenir la correction à cette formule dans un plasma chaud en évaluant (10.268) pour un plasma maxwellien puisqu'en pratique on peut se limiter à  $|\omega/kv_{te}| \ll 1$ . En utilisant un développement limité de la fonction de dispersion des plasmas, on obtient alors (cf. problème P10-15) :

$$k \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/6} \left(\frac{c}{v_{te}} \frac{\omega_r}{\omega_{pe}}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_{pe}}{c}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \quad (10.273)$$

La profondeur de pénétration sans collisions varie donc comme  $(k_i)^{-1} \approx (\omega_r)^{-1/3}$ . C'est ce qu'on appelle l'*effet de peau anormal*, par opposition à l'effet de peau collisionnel normal qui varie comme  $(k_i)^{-1} \approx (\omega_r)^{-1/2}$  (cf. problème P10-15).

## b) Ondes longitudinales électrostatiques

Pour ces modes on a  $\vec{E}_{1T} = 0 = \vec{B}_1$ , le champ électrique est parallèle à  $\vec{k}$ , et il y a donc une perturbation  $\rho_1$  de la densité. Les équations linéarisées (10.240) et (10.243) s'écrivent simplement :

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_{s1}}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} \vec{E}_1 \cdot \frac{\partial \hat{f}_{s0}}{\partial \vec{w}} = 0 \quad (10.274)$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \vec{E}_1 - \sum_s q_s \int f_{s1} d\vec{w} = \rho_{\text{ext}} \quad (10.275)$$

compte tenu de (10.246) et en ajoutant  $\rho_{\text{ext}}$ . On peut comparer ces équations des perturbations électrostatiques dans un plasma non magnétisé aux équations à une dimension (10.93)–(10.95) résolues en détail dans la section 10.3.

En supposant nulles les conditions initiales et en admettant une dépendance spatio-temporelle en  $\exp i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)$ , avec pour ces ondes électrostatiques  $\vec{k}_r \parallel \vec{E}_1$ , on a :

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{k}_r}{k_r} E_1 \quad \text{avec} \quad k_r^2 \equiv \vec{k}_r \cdot \vec{k}_r \quad (10.276)$$

En suivant la même démarche que dans les équations (10.100)–(10.109) on trouve :

$$ik_r \varepsilon_0 K_L(k_r, \omega) E_1 = \rho_{\text{ext}} \quad (10.277)$$

avec :

$$K_L(k_r, \omega) = 1 + \sum_s \chi_{Ls}(k_r, \omega) \quad (10.278)$$

et :

$$\chi_{Ls} = \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot (\partial \hat{f}_{s0}^{(i)} / \partial \vec{w})}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} d\vec{w} \quad (10.279)$$

comme on l'a trouvé en (10.259). Puisque  $\vec{w}$  et  $\vec{k}_r$  ont des directions relatives arbitraires (Fig. 10.17), il est à nouveau commode de séparer  $\vec{w}$  en deux composantes, l'une parallèle, et l'autre (à deux dimensions) perpendiculaire à  $\vec{k}_r$ , et d'introduire les fonctions de distributions réduites :

$$\hat{F}_{s0}(w_k) = \int \hat{f}_{s0}(\vec{w}) d^2 w_{k\perp} = \int \hat{f}_{s0} \delta\left(w_k - \frac{\vec{k} \cdot \vec{w}}{k}\right) d\vec{w} \quad (10.280)$$

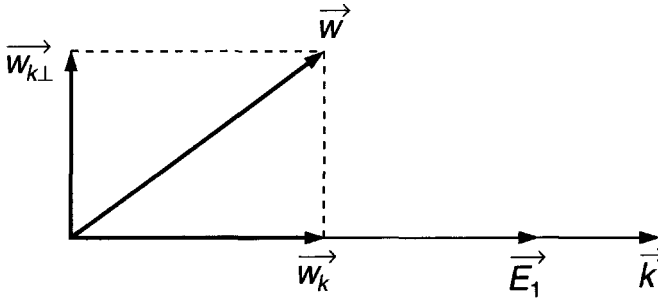


Figure 10.17 : Séparation du vecteur vitesse  $\vec{w}$  en deux composantes  $\vec{w}_k$  parallèle et  $\vec{w}_{k\perp}$  perpendiculaire à  $\vec{k}_r$ .  $\vec{E}_1$  est parallèle à  $\vec{k}_r$  dans les ondes électrostatiques.

En effectuant dans (10.279) les intégrations sur les deux composantes de  $\vec{w}_{k\perp}$  on obtient :

$$\chi_{Ls} = -\frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\hat{F}_{s0}^{(i)} / dw_k}{w_k - (\omega/k_r)} \quad (10.281)$$

On remarque que (10.281) a la même forme que l'équation unidimensionnelle (10.132), à condition de remplacer dans cette dernière  $k_r$  par le module du vecteur  $\vec{k}_r$  [cf. (10.276)],  $\hat{f}_{s0}$  par  $\hat{F}_{s0}$ , et  $w$  par  $w_k$ . Moyennant ces substitutions, tous les résultats précédents de la section 10.3 se généralisent facilement au cas des ondes électrostatiques dans un plasma.

Tout d'abord, comme  $k_r$  est ici une quantité positive, le prolongement analytique de (10.281) fait intervenir un seul contour de Landau, comme on le voit sur la figure 10.18, qui est le même que le contour de Landau  $\Gamma_-$  de la figure 10.7. Donc pour toute valeur complexe de  $\omega$  on a :

$$\chi_{Ls} = -\frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int_{\Gamma} \frac{\hat{F}'_{s0}(w_k)}{w_k - \frac{\omega}{k_r}} dw_k \quad (10.282)$$

où le symbole prime représente la dérivation par rapport à  $w_k$ . Pour toute

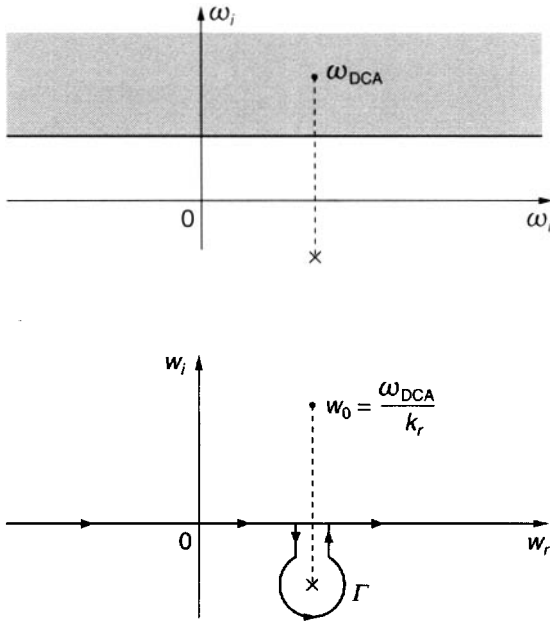


Figure 10.18 : Contour de Landau  $\Gamma$  pour le prolongement analytique de  $\chi_L(k_r, \omega)$ .

fonction  $\hat{F}_{s0}$  analytique en  $w_k$  on a :

$$\chi_L(k_r, \omega) = -\frac{1}{k_r^2} P \int \frac{\hat{\Phi}'_0(w_k)}{w_k - \frac{\omega}{k_r}} dw_k - i \frac{\pi}{k_r^2} \hat{\Phi}'_0 \left( w_k = \frac{\omega}{k_r} \right) \quad (10.283)$$

où l'on a introduit la fonction de distribution d'équilibre totale (pondérée par le carré de la fréquence plasma) :

$$\hat{\Phi}_0(w_k) \equiv \sum_s \omega_{ps}^2 \hat{F}_{s0}(w_k) \quad (10.284)$$

La relation de dispersion des modes électrostatiques est la même que (10.148),  $k_r$  étant maintenant le module de  $\vec{k}_r$ . Ses solutions donnent  $\omega(k_r) = \omega_r(k_r) + i\omega_i(k_r)$  avec, pour les distributions d'équilibre isotropes étudiées ici,  $\omega_i(k_r) < 0$ , ce qui correspond à des modes propres stables. Une excitation extérieure à la fréquence réelle  $\omega_{re}$  conduira à un régime permanent à cette même fréquence. D'après (10.158), où  $k_r$  est le module de  $\vec{k}_r$  et (10.283), la densité moyenne de puissance dissipée par un (faible) amortissement de Landau est :

$$\langle p \rangle = \frac{\varepsilon_0 |E_1|^2}{2} \frac{\pi}{k_r^2} \left[ -\omega_{re} \hat{\Phi}'_0 \left( w_k = \frac{\omega_{re}}{k_r} \right) \right] \quad (10.285)$$

Nous montrerons au chapitre 11 qu'il existe une classe importante de distributions d'équilibre anisotropes pour lesquelles on peut encore séparer les modes naturels en ondes transverses électromagnétiques et ondes longitudinales électrostatiques. Les ondes électromagnétiques transverses ont une relation de dispersion très différente de (10.267), mais la relation de dispersion des modes électrostatiques longitudinaux est identique à (10.148) à condition de considérer toujours  $k_r$  comme le module de  $\vec{k}_r$ . Les ondes électrostatiques dans un plasma anisotrope peuvent être instables. Pour des ondes à faible taux de croissance ou de décroissance, c'est-à-dire  $|\omega_i(k_r)| \ll |\omega_r(k_r)|$ , on trouve par un calcul analogue à celui de la section 10.3.4 que  $\omega_r$  est donnée par :

$$D_{Lr}(k_r, \omega_r) = 1 - \frac{1}{k_r^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}'_0 dw_k}{w_k - \frac{\omega_r}{k_r}} \quad (10.286)$$

Pour un module donné de  $k_r$ , la vitesse de phase est donc :

$$v_p = \frac{\omega_r}{k_r} \quad (10.287)$$

La vitesse de groupe est en général un vecteur :

$$\vec{v}_g \equiv \frac{\partial \omega_r}{\partial \vec{k}_r} = \left[ \frac{-(\partial D_r / \partial \vec{k}_r)}{(\partial D_r / \partial \omega_r)} \right]_{D_r=0} \quad (10.288)$$

dont la direction peut être très différente de celle de  $\vec{k}_r$ . Dans un plasma non magnétisé, comme  $\omega(\vec{k}_r) = \omega(k_r)$  on a :

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega_r}{\partial k_r} \frac{\vec{k}_r}{k_r} \equiv v_g \frac{\vec{k}_r}{k_r} \quad (10.289)$$

La vitesse de groupe est alors parallèle à  $\vec{k}_r$ . Le faible taux d'amortissement ou de croissance du mode propre devient :

$$\omega_i(k_r) = \frac{\pi}{2} \frac{v_p - v_g}{k_r} \Phi'_0(w_k = v_p) \quad (10.290)$$

où  $v_p$  et  $v_g$  sont définis par (10.287) et (10.289).

Enfin pour un plasma maxwellien électrons-ions on a :

$$f_{s0} = \frac{\exp -w^2 / 2v_{Ts}^2}{(v_{Ts} \sqrt{2\pi})^3} \quad (10.291)$$

avec  $s = e$  ou  $i$   $w^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$  et  $v_{Ts} = (\kappa T_s / m_s)^{1/2}$ . Les fonctions de distribution réduites sont données par (10.280) qui est la maxwellienne à une dimension (10.208) ou (10.215) avec  $w^2$  remplacé par  $w_k^2$ . Les résultats de la section 10.3.6 où  $k_r$  est le module de  $\vec{k}_r$  se transposent donc directement au cas d'un plasma non magnétisé. Ainsi pour  $\omega$  complexe arbitraire la relation de dispersion n'est autre que (10.236).

Pour conclure cet exposé de la solution de Landau du problème des ondes électrostatiques dans un plasma uniforme, non magnétisé et sans champ d'origine extérieure, il faut remarquer que nous nous sommes focalisés sur les modes avec  $k$  réel et  $\omega$  complexe, qui correspondent à l'étude d'un problème à valeurs initiales dans un plasma infiniment étendu. Pour un plasma stable, il est aussi intéressant de considérer le problème avec conditions aux limites d'un plasma excité avec une fréquence réelle. Cela fait intervenir les modes avec  $k$  complexe et  $\omega$  réel et l'analyse des conditions aux limites. La deuxième partie de la publication de Landau [112] est consacrée à ce problème de l'excitation des ondes de plasma électroniques. Nous y renvoyons les lecteurs intéressés et n'en donnons pas ici les détails



mathématiques. Il faut aussi noter que la définition de conditions aux limites imposées à la fonction de distribution, fait apparaître des subtilités qui compliquent encore la solution de ce problème [130]. Pour le problème analogue de l'excitation d'ondes acoustiques ioniques à partir d'une source localisée, le lecteur peut consulter [121], [124] et [127].

Nous passons maintenant à l'étude des modes normaux de van Kampen-Case au sens de la théorie des distributions.

## 10.5 Modes de van Kampen et Case

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de la section 10.3, N. G. van Kampen [128] et K. M. Case [129] ont introduit une technique mathématique différente de celle de L. D. Landau [112] pour résoudre le problème aux valeurs initiales du système des équations de Vlasov-Poisson linéarisées pour les perturbations électrostatiques. Alors que Landau s'était servi de la technique des transformations de Fourier-Laplace, décrite en détail dans les sections 10.3 et 10.4, van Kampen et Case ont utilisé une méthode de développement en modes normaux périodiques dans l'espace et le temps basée sur la théorie des distributions. Avant d'exposer cette méthode de résolution, ce que nous ne ferons que brièvement, il peut être utile d'en décrire la base physique.

Pour simplifier, dans cette section nous n'étudions que les perturbations électrostatiques dans un plasma homogène non magnétisé et sans champ électrique d'origine externe [cf. section 10.4.1 b)] et la dynamique linéarisée de la fonction de distribution d'une seule espèce de particules. En supposant une dépendance spatiale en  $\exp(i\vec{k}_r \cdot \vec{r})$ , en partant de (10.276), (10.280) et de la décomposition de  $\vec{w}$  représentée sur la figure 10.17, les équations de base (10.274) et (10.275) peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + ik_r w_k F_1 + \frac{qn_0}{m} \frac{d\hat{F}_0}{dw_k} E_1 = 0 \tag{10.292}$$

$$ik_r \epsilon_0 E_1 - q \int_{-\infty}^{+\infty} F_1 dw_k = 0 \tag{10.293}$$

où, en intégrant la transformée de (10.274), l'on a introduit la fonction de distribution perturbée réduite :

$$F_1(w_k, k_r, t) = \int f_1(\vec{w}, k_r, t) \underline{dw_{k\perp}} \equiv F_1 \tag{10.294}$$

Ces équations doivent être résolues avec la condition initiale (réduite) :

$$F_1(w_k, k_r, t = 0) \equiv G_1(w_k, k_r) \tag{10.295}$$

Rappelons qu'en effectuant une transformation de Laplace sur (10.292) on trouve [cf. (10.106) pour la dynamique à une dimension] que cette condition initiale engendre une densité de particules :

$$n_{\text{in}}(k_r, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{iG_1(w_k, k_r)}{(\omega - k_r w_k)} dw_k \quad (10.296)$$

En prenant la direction de  $\vec{k}_r$  selon  $Ox$ , la transformée inverse de  $n$  est :

$$n_{\text{in}}(x, t) = e^{ik_r x} \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(w_k, k_r) e^{-ik_r w_k t} dw_k \quad (10.297)$$

Pour toute distribution  $F_0(w_k)$ , fonction continue de  $w_k$ , on peut imposer une condition initiale pour une vitesse  $w_k = u$ , c'est-à-dire une *condition initiale du genre faisceau* :

$$G_1 \sim \delta(w_k - u) \quad (10.298)$$

où  $\delta()$  est la fonction de Dirac. On en déduit :

$$n_{\text{in}}(x, t) \sim e^{ik_r x} e^{ik_r u t} \quad (10.299)$$

qui est ce qu'on peut appeler un *mode à une particule*. On voit que pour un  $k_r$  donné,  $\omega_k = k_r u$  est *réel*. De plus, comme  $u$  peut prendre toute valeur de vitesse de particule dans la fonction de distribution continue d'équilibre  $F_0(w_k)$ , ces modes forment un *spectre continu*. (Nous l'avons déjà remarqué dans la théorie cinétique des écoulements libres faite au paragraphe 10.2.(c).) Enfin, puisqu'ils peuvent être produits par de telles conditions initiales indépendantes, ce sont nécessairement des *modes normaux*. Les équations linéarisées de Vlasov-Poisson ont donc un *spectre continu de modes normaux* avec des *fréquences réelles* pour les *nombre d'onde réels*. (Quand on tient compte de la densité collective et du champ self-consistant, il y a évidemment aussi en général un spectre discret de modes normaux.)

A première vue il s'agit ici d'une solution très différente de celle de Landau, mais en fait c'est la même solution exprimée d'une manière différente. Pour le voir, considérons par exemple une distribution d'équilibre maxwellienne. Dans la méthode de Landau on a fait un prolongement analytique de  $n_{\text{in}}(k_r, \omega)$  et  $\chi_L(k_r, \omega)$  en déformant le contour dans le plan  $w_k$  (Fig. 10.18). Mais on peut aussi voir que l'axe réel  $\omega$  est une ligne de discontinuité—une ligne de branchement. Quand les solutions du problème aux valeurs initiales sont exprimées en relation avec cette discontinuité on trouve, pour la maxwellienne  $F_0$ , qu'il n'y a aucun mode dans les deux demi-plans inférieur ou supérieur du plan  $\omega$  ; tous les modes sont dans un continuum sur l'axe réel (cf. problème P10-16). Les solutions de Landau ne se trouvent qu'en déformant la ligne de branchement dans le

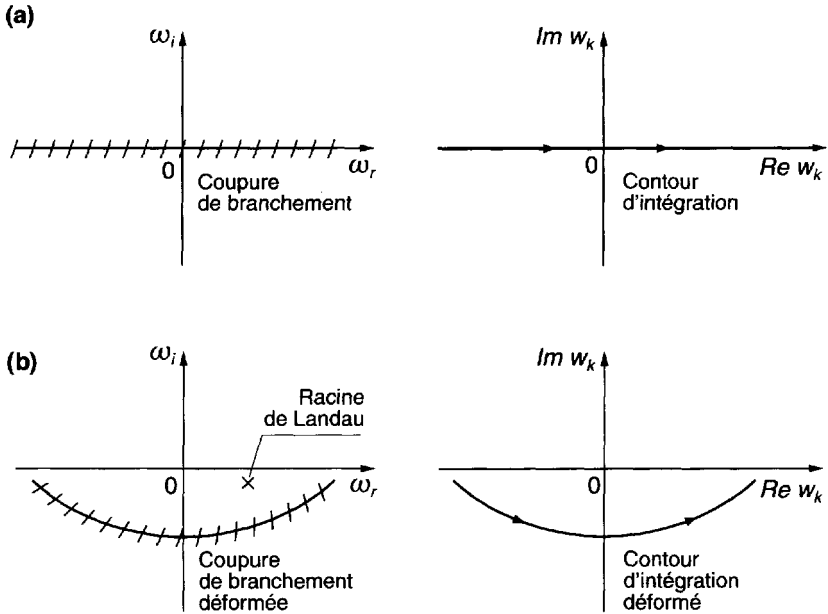


Figure 10.19 : Relations entre les méthodes de Landau et de van Kampen. (a) Ligne de branchement sur l'axe  $\omega_r$  quand le contour d'intégration est le long de l'axe réel  $w_k$ . (b) Déformation de la ligne de branchement dans le demi-plan inférieur  $\omega$ , faisant apparaître la solution de Landau.

demi-plan inférieur  $\omega$ , comme représenté sur la figure 10.19. Nous donnons maintenant une présentation rapide des solutions mathématiques de van Kampen et Case.

Éliminons d'abord  $E_1$  entre (10.292) et (10.293) pour obtenir l'équation intégrale donnant  $F_1$  :

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + ik_r w_k F_1 + ik_r H \int_{-\infty}^{+\infty} F_1 dw_k = 0 \tag{10.300}$$

où l'on a posé :

$$- \frac{\omega_p^2}{k_r^2} \frac{d\hat{F}_0}{dw_k} \equiv H(w_k, k_r) \tag{10.301}$$

et (10.300) doit être résolue avec la condition initiale (10.295). En faisant l'hypothèse de van Kampen que  $F_1$  peut s'exprimer en termes de modes normaux de la forme :

$$\begin{aligned} F_1(w_k, k_r, t) &= F_1(w_k, k_r; \omega_r) e^{-i\omega_r t} \\ &\equiv F_{1\omega} e^{-i\omega_r t} = F_{1\omega} e^{-ik_r v_p t} \end{aligned} \tag{10.302}$$

où  $v_p = (\omega_r/k_r)$  est une valeur propre et  $F_{1\omega}$  une fonction propre, (10.300) devient :

$$(w_k - v_p)F_{1\omega} = -H \int_{-\infty}^{+\infty} F_{1\omega} dw_k \quad (10.303)$$

En normalisant les fonctions propres  $F_{1\omega}$  par la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{1\omega} dw_k = 1 \quad (10.304)$$

cela devient

$$(w_k - v_p)F_{1\omega} = -H \quad (10.305)$$

La solution de (10.305) doit être prise au sens de la théorie des distributions ([273], [274], [275]), de sorte que :

$$F_{1\omega} = I(k_r, v_p) \delta(v_p - w_k) + H P \frac{1}{(v_p - w_k)} \quad (10.306)$$

où les intensités  $I$  des fonctions de Dirac  $\delta(v_p - w_k)$  sont déterminées par la condition de normalisation (10.304), c'est-à-dire :

$$I(k_r, v_p) = 1 + P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(w_k, k_r)}{w_k - v_p} dw_k \quad (10.307)$$

A chaque valeur propre réelle  $v_p$  correspond une intensité  $I$  ; ainsi les valeurs propres réelles  $v_p$  sont dans le spectre continu et le continuum correspondant des fonctions propres (singulières) est donné par (10.306). On voit que le membre de droite de (10.307) semble (trompeusement) relié à la fonction de dispersion usuelle (10.278), avec (10.279), que nous avons obtenue par la transformation de Laplace. Cependant, comme l'axe  $v_p$  réel est une coupure de branchement, le membre de droite de (10.307) pour  $v_p$  complexe, soit  $v_p = \xi$ , est une fonction analytique par intervalles [273], [274] dans le plan  $\xi$  coupé le long de l'axe réel, et pour une distribution d'équilibre maxwellienne il ne s'annule ni pour  $\xi_i > 0$  ni pour  $\xi_i < 0$  (cf. problème P10-16). Ainsi, pour une maxwellienne  $F_0(w_k)$ , van Kampen a montré que toutes les valeurs propres  $v_p$  sont réelles et dans un continuum, les fonctions propres correspondantes étant données par (10.306) et (10.307). La solution générale pour la fonction de distribution perturbée est alors :

$$F_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_r, v_p) F_{1\omega} e^{-ik_r v_p t} dv_p \quad (10.308)$$

où le coefficient  $C(k_r, v_p)$  du développement dans le continuum est déterminé par la condition initiale (10.295). Nous ne décrivons ici ni la détermination de  $C$  ni la discussion du caractère complet de (10.308), renvoyant pour cela le lecteur aux publications originales [128] et [276] ; la seconde contient aussi la solution en modes normaux singuliers pour les ondes transverses dans un plasma isotrope, sans champs d'origine externe.

K. M. Case [129] a généralisé l'approche de van Kampen sur deux points importants. Il s'affranchit de l'hypothèse d'une distribution d'équilibre maxwellienne (ou isotrope), et en introduisant un problème adjoint, établit les relations d'orthogonalité pour l'ensemble complet des modes normaux. Nous ne donnons qu'un bref résumé de ses résultats et signalons quelques applications.

En supposant  $F_0(w_k)$  arbitraire, on trouve qu'en plus du spectre continu, il y a aussi un spectre discret.

– Dans le spectre continu il y a :

- des valeurs propres réelles  $v_p$  qui ne sont pas des zéros de  $H$  : elles sont associées aux fonctions propres singulières (10.306) comme précédemment ;
- des valeurs propres réelles  $v_p$  qui sont des zéros de  $H$  mais pas de  $I$  : leurs fonctions propres sont :

$$F_{1\omega} = I \delta(v_p - w_k) + \frac{H}{v_p - w_k} \tag{10.309}$$

où le second terme est maintenant une distribution régulière (qu'on suppose localement intégrable), et  $I$  est toujours donné par (10.307) mais avec une intégrale où l'on n'a pas besoin de partie principale.

– Dans le spectre discret il y a :

- des valeurs propres réelles  $v_p$  qui sont des zéros de  $H$  et  $I$  : elles sont associées à la suite discrète de fonctions propres :

$$F_{1\omega_n} = \frac{H}{v_{pn} - w_k} ; \quad n = 1, 2, \dots \tag{10.310}$$

En normalisant (10.304), les valeurs propres sont données par les zéros de la relation de dispersion :

$$1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H}{w_k - v_p} dw_k = 0 \tag{10.311}$$

- des valeurs propres complexes  $v_{pn}$  avec une suite discrète de fonctions propres de la même forme que (10.310), les valeurs propres étant les zéros complexes de la relation de dispersion (10.311).

Comme les valeurs propres complexes sont conjuguées deux à deux, il leur correspond des modes instables.

Case a remarqué aussi que les fonctions propres définies ci-dessus ne forment pas un ensemble orthogonal et qu'il faut donc construire un problème adjoint dont les fonctions propres soient orthogonales à celles déjà trouvées. L'équation adjointe est :

$$\frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial t} + ik_r w_k \tilde{F}_1 + ik_r \int_{-\infty}^{+\infty} H \tilde{F}_1 dw_k = 0 \tag{10.312}$$

En posant :

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_{1\omega} e^{-ik_r v_p t} \tag{10.313}$$

et en imposant pour la normalisation des fonctions propres adjointes la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H \tilde{F}_{1\omega} dw_k = 1 \tag{10.314}$$

on peut démontrer la relation d'orthogonalité (cf. problème P10-17) :

$$(\tilde{v}_p - v_p) \int_{-\infty}^{+\infty} F_{1\omega} \tilde{F}_{1\omega} dw_k = 0 \tag{10.315}$$

Le système adjoint a aussi des spectres continu et discret, le premier avec des valeurs propres réelles et le second en général à la fois des valeurs propres réelles et complexes. Pour plus de détails on consultera les publications originales [129] et [131].

La solution générale pour la fonction de distribution perturbée peut donc s'écrire sous la forme :

$$F_1 = \sum_M C_n(k_r, v_{pn}) F_{1\omega_n} e^{-ikv_{pn}t} + \int_{-\infty}^{+\infty} C(k_r, v_p) F_{1\omega} e^{-ikv_p t} dv_p \quad (10.316)$$

où les coefficients du développement sont déterminés par la condition initiale (10.295) ; pour leur solution explicite on consultera [129] et [131].

La méthode des modes normaux de van Kampen-Case fut ensuite rapidement utilisée pour faire un calcul complet de l'impédance d'un condensateur plan rempli de plasma [132]. Mais d'un point de vue fondamental théoriquement plus important, le système linéarisé de Vlasov-Poisson et son adjoint, établis par Case, forment un système (pseudo) hermitien dont on peut déduire des lois de conservation [133]. Celles-ci, ainsi que le développement de l'approximation de WKB pour les modes de van Kampen-Case [134], ont été récemment appliqués au problème de la conversion cinétique de mode dans les plasmas non homogènes [135].

Après cette brève description de la méthode de van Kampen-Case à la solution du problème cinétique, sans collisions, linéarisé, nous terminons ce chapitre par un coup d'œil sur les effets des collisions et une description de la dynamique non linéaire d'un plasma.

## 10.6 Effets collisionnels

### 10.6.1 Collisions dans la dynamique linéarisée

La description de Vlasov néglige les effets des collisions sur la fonction de distribution simple. Effectivement, nous avons déjà plusieurs fois remarqué que dans les plasmas chauds du type cinétique classique, les fréquences de collisions coulombiennes sont beaucoup plus petites que la fréquence plasma :  $(\nu/\omega_p) \sim (n_0 \lambda_{De}^3)^{-1} \ll 1$ . On peut donc, dans la dynamique de haute fréquence, considérer l'effet des collisions coulombiennes comme une perturbation. Cela ne veut pas dire qu'elles ne jouent aucun rôle. Et de fait, l'étude de la dynamique stationnaire aux temps longs des plasmas stables doit évidemment tenir compte des collisions. Cela doit d'ailleurs être fait soigneusement, car comme on l'a vu, la dynamique des ondes dépend des valeurs relatives de leur vitesse de phase et des vitesses des particules chargées (interaction résonnante vs. non résonnante) et les fréquences de collisions sont en général aussi fonction des vitesses des particules. La théorie cinétique des ondes en tenant compte des collisions de manière détaillée est un sujet complexe, qui sort du cadre de ce livre. Nous nous contenterons ici d'utiliser des modèles heuristiques très simples, pour étudier

succinctement les effets des collisions élastiques sur la dynamique des ondes de haute fréquence.

Les méthodes de description cinétique d'un plasma prenant en compte les effets de collisions ont été introduites dans le chapitre 8. Nous nous intéressons ici principalement aux collisions élastiques coulombiennes (cf. chapitre 3). La théorie cinétique collisionnelle des plasmas sera discutée plus en détail au chapitre 13. Nous utilisons ici quelques modèles très simplifiés pour découvrir les principaux effets des collisions sur la dynamique linéarisée.

La forme générale de l'équation cinétique pour la fonction de distribution simple  $f_s(\vec{w}, \vec{r}, t)$  n'est autre que (10.1) mais avec au membre de droite, au lieu de zéro, le taux de changement de  $f_s$  dû aux collisions [écrit symboliquement  $(\partial f_s / \partial t)_{\text{coll}}$ ]. En général (cf. chapitres 8 et 13),  $(\partial f_s / \partial t)_{\text{coll}}$  est un opérateur compliqué, non linéaire, qui fait intervenir les fonctions de distribution de toutes les espèces de particules dans le plasma.

## 10.6.2 Modèle simple de relaxation par collisions

Dans le modèle ad hoc le plus simple de l'effet des collisions, on suppose que la fonction de distribution perturbée relaxe par collisions avec un taux  $\nu$  qui est une fréquence effective de collisions. Ainsi, par exemple, l'équation linéarisée à une dimension pour la fonction de distribution perturbée (10.93) devient :

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + w \frac{\partial f_{s1}}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E_1 \frac{df_{s0}}{dw} = -\nu_s f_{s1} \quad (10.317)$$

Par transformation de Fourier-Laplace, et en négligeant pour simplifier les conditions initiales, on trouve :

$$f_{s1} = \frac{-iq_s}{m_s} \frac{f'_{s0}(w)}{\omega + i\nu_s - kw} E_1 \quad (10.318)$$

[à comparer avec (10.103)] et la susceptibilité longitudinale (10.108) s'écrit :

$$\chi_{Ls}(k, \omega) = \frac{\omega_{ps}^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{s0} dw}{\omega + i\nu_s - kw} \quad (10.319)$$

[à comparer avec (10.109)]. En comparant ainsi ces résultats à ceux de la théorie non collisionnelle de Vlasov, on voit qu'ils sont identiques à condition de remplacer dans les résultats de Vlasov  $\omega$  par  $\omega + i\nu_s$ . Mais alors, l'intégrale dans (10.319) n'est plus singulière pour  $k$  et  $\omega$  réels. Quand  $\nu_s \rightarrow 0$  on peut appliquer les formules de Plemelj (10.146)

et obtenir immédiatement le résultat (10.147) pour  $\chi_{L_s}$ . Le passage à l'amortissement non collisionnel (près de  $w = \omega_r/k_r$ ) dépend du fait que la largeur en  $w$  de l'intégrand est déterminée par la largeur du dénominateur résonnant ( $\Delta w \approx \nu_s/k_r$ ) ou par celle de  $\hat{f}'_{s0}$ , qui pour une maxwellienne est ( $\Delta w \approx v_{ts}$ ). L'amortissement de Landau s'obtient quand la première est négligeable :  $(\nu_s/k_r) \ll v_{ts}$ , c'est-à-dire quand le libre parcours moyen des particules (distance moyenne parcourue entre collisions),  $v_{ts}/\nu_s$ , est beaucoup plus grand que la longueur d'onde du champ ( $2\pi/k_r$ ). Cela se comprend bien physiquement : pour que l'interaction onde-particule soit dominante même en présence de collisions, il faut non seulement que les collisions se produisent sur une échelle de temps beaucoup plus longue que le temps d'interaction onde-particule ( $1/\nu_s \gg 1/|\gamma_L|$ , où  $\gamma_L$  est le taux d'amortissement ou d'amplification de Landau), mais aussi que les particules parcourent plusieurs longueurs d'onde avant de faire une collision ( $v_{ts}/\nu_s \gg 1/k_r$ ).

Bien que le modèle simple de relaxation (10.317) supprime les intégrales singulières du cas non collisionnel, ce n'est pas un bon modèle physique pour décrire les effets de collisions. En particulier le terme collisionnel du membre de droite de (10.317) ne conserve pas la densité des particules, ce qui est un défaut rédhibitoire pour représenter les collisions élastiques.

### 10.6.3 Modèle BGK de collisions

On peut y remédier en adoptant le modèle de collisions dit BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) [136] qui exprime la relaxation vers une distribution locale d'équilibre. En supposant une fréquence de relaxation  $\nu_s$  constante, l'équation cinétique linéarisée, à une dimension, devient :

$$\frac{\partial f_{s1}}{\partial t} + w \frac{\partial f_{s1}}{\partial x} + \frac{q_s}{m_s} E_1 \frac{df_{s0}}{dw} = -\nu_s (f_{s1} - n_{s1} \hat{f}_0) \quad (10.320)$$

avec  $n_{s1} = \int f_{s1} dw$ . Par transformation de Fourier-Laplace, et en négligeant les conditions initiales, on trouve :

$$f_{s1} = \frac{-iq_s}{m_s} \frac{f'_{s0}(w)}{\omega + i\nu_s - kw} E_1 + i\nu_s \frac{\hat{f}_{s0}(w)}{\omega + i\nu_s - kw} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{s1} dw \quad (10.321)$$

et

$$\chi_{L_s}(k, \omega) = \frac{\frac{\omega_{ps}^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}'_{s0} dw}{\omega + i\nu_s - kw}}{1 - i\nu_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_{s0} dw}{\omega + i\nu_s - kw}} \quad (10.322)$$



Pour une maxwellienne d'équilibre  $f_0$ , il est relativement facile de montrer (cf. problème P10-18) que dans la limite des grandes longueurs d'onde ( $k_r v_t \ll \omega_r$ ) et pour un faible taux de collisions ( $\nu_s \ll \omega_r$ ) la solution de la relation de dispersion pour les ondes de plasma électroniques donne approximativement (10.211) pour  $\omega_r(k_r)$  et :

$$\omega_i(k_r) \approx -\frac{\nu_s}{2} - \gamma_{LD}(k_r) \quad (10.323)$$

où  $\gamma_{LD}$  est le taux d'amortissement de Landau électronique donné par (10.214) et  $\nu_s \equiv \nu_e$  est une fréquence de relaxation effective des électrons qui n'est pas donnée par le modèle BGK mais doit être déterminée par une analyse des processus collisionnels. On voit ainsi que l'effet des collisions est négligeable seulement si  $\nu_s \ll 2\gamma_{LD}$ . Pour les ondes acoustiques ioniques faiblement amorties, comme on a  $v_{Ti} \ll v_p \ll v_{Te}$ , la comparaison entre l'amortissement collisionnel effectif et l'amortissement de Landau est très différente pour les électrons et les ions (cf. problème P10-18).

La difficulté du modèle BGK est que la fréquence de relaxation n'y est pas définie à partir d'une analyse fine des collisions élastiques. Comme modèle pour les collisions "dures", il peut s'appliquer aux collisions électron-neutre ou ion-neutre, car  $\nu_s$  peut alors souvent être une constante, mais en général c'est une fonction  $\nu_s(w)$  de  $w$  (cf. chapitre 3). On peut tenir compte globalement de cette variation dans le modèle BGK, et le résultat (10.323) pour les grandes longueurs d'onde est simplement modifié en changeant  $\nu_s$  en  $\int \nu_s(w) f_0(w) dw$ .

## 10.6.4 Modèles de collisions du type Fokker-Planck

Cependant, dans le cas de collisions coulombiennes, où  $\nu_s(w)$  varie rapidement avec  $w$  (cf. chapitres 3 et 13), le modèle BGK ne représente pas correctement le fait que dans un plasma cinétique classique l'effet des collisions est produit par l'accumulation d'un grand nombre de collisions lointaines à faible angle de déviation. On peut établir un modèle BGK pour un plasma électrons-ions [136b], mais il n'est pas valable quand il y a des forts gradients dans les fonctions de distribution des particules. Il faut donc en général utiliser un opérateur du type Fokker-Planck. Pour un plasma totalement ionisé celui-ci peut s'obtenir à partir du système BBGKY, comme on le verra dans le chapitre 13. La forme générale de l'équation cinétique, en présence de champs électrostatiques, est alors :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s}{m_s} \vec{E} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{w}} = \sum_{s'} C(f_s, f_{s'}) \quad (10.324)$$

où le deuxième membre fait apparaître des termes de collision du type Fokker-Planck, soit :

$$C(f_s, f_{s'}) = -\frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left( \vec{F} f_s - \overline{\overline{D}} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \vec{w}} \right) \quad (10.325)$$

$\vec{F}$  est le vecteur force de frottement dans l'espace des vitesses et  $\overline{\overline{D}}$  le tenseur de diffusion dans ce même espace. Tous les deux sont des fonctions des  $f_{s'}$  où  $s'$  désigne une espèce de particule chargée du plasma (y compris  $s$ ). Cet opérateur conserve les particules, la quantité de mouvement, et l'énergie. Il fait aussi évoluer  $f_s$  en accroissant l'entropie, avec une maxwellienne comme solution stationnaire pour  $f_s$ . Nous l'étudierons plus en détail au chapitre 13. Nous nous contentons ici d'utiliser des formes simplifiées de  $C$  pour mettre en évidence les effets des collisions coulombiennes sur la dynamique cinétique linéarisée que nous avons étudiée dans le présent chapitre.

Un modèle à une dimension très simplifié et utile a été établi par A. A. Vedenov [137], en supposant que la fonction de distribution est maxwellienne dans un plan perpendiculaire à une direction caractérisant le problème étudié (par exemple, celle d'un champ magnétique externe intense). En particulier, pour la dynamique linéarisée des particules résonnantes, qui ont des vitesses élevées  $w \gg v_{Te}$  et dont le nombre est petit, l'opérateur de collision peut être linéarisé et l'on obtient :

$$C_\ell = \frac{\partial}{\partial w} \left[ \nu(w) \left( w f_e + v_{Te}^2 \frac{\partial f_e}{\partial w} \right) \right] \quad (10.326)$$

où  $v_{Te}^2 = (\kappa T_e / m_e)$  et

$$\nu(w) = (2 + Z_i) \nu_0 \frac{v_{Te}^3}{w^3} \quad (10.327)$$

avec

$$\nu_0 = 4\pi \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{\ln \Lambda}{m_e^2} \frac{n_{e0}}{v_{Te}^3} = \frac{\ln \Lambda}{4\pi} \frac{\omega_{pe}}{(n\lambda_{De}^3)} \quad (10.328)$$

où l'on a écrit l'opérateur de collision linéarisé (10.326) pour des électrons de grande énergie (dans la queue de la fonction de distribution électronique) faisant des collisions avec les électrons et les ions du corps d'une maxwellienne. Bien que  $C_\ell$  conserve les particules, il ne conserve plus ni la quantité de mouvement ni l'énergie ; il conduit cependant à une maxwellienne stationnaire avec une énergie moyenne des électrons égale à  $(\kappa T_e / 2)$ . Le premier terme de (10.326) représente un frottement effectif (à une dimension) et le second terme une diffusion effective (à une dimension) ;  $\nu(w)$  est une combinaison des fréquences de collisions

électron-électron et électron-ion avec la dépendance typique en  $(1/w^3)$  des collisions coulombiennes (cf. chapitre 3).

Un autre modèle du type Fokker-Planck (encore plus simplifié) a été introduit par A. Lenard et I. B. Bernstein [138], mais d'une manière ad hoc pour étudier le problème de Landau en présence de collisions coulombiennes. Dans ce modèle la fréquence de collisions est supposée constante,  $\nu(w) \rightarrow \nu_e$  (à ne pas confondre avec  $\nu_e$  du modèle BGK), de sorte que :

$$C_{LB} = \nu_e \frac{\partial}{\partial w} \left( w f_e + v_{Te}^2 \frac{\partial f_e}{\partial w} \right) \quad (10.329)$$

Ce terme de collision ad hoc conserve les particules, mais conduit à une décroissance de la quantité de mouvement moyenne des particules et à une relaxation de leur énergie à une même fréquence caractéristique donnée par la constante  $\nu_e$  ; il fait aussi relaxer la fonction de distribution vers une maxwellienne avec la même fréquence (cf. problème P10-19). Bien que physiquement ces diverses fréquences dussent être différentes (cf. chapitre 13), le modèle (10.329) est utile pour mettre en évidence la différence entre les collisions coulombiennes et les collisions ordinaires ("dures") dans le problème de Landau. Considérons donc l'équation cinétique à une dimension, linéarisée, avec the terme de collision (10.329) :

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + w \frac{\partial f_{e1}}{\partial x} + \frac{-en_0}{m_e} E_1 \frac{df_{e0}}{dw} = \nu_e \frac{\partial}{\partial w} \left( w f_{e1} + v_{Te}^2 \frac{\partial f_{e1}}{\partial w} \right) \quad (10.330)$$

Par transformation de Fourier-Laplace et en négligeant les conditions initiales, on obtient :

$$-i(\omega - k_r w + i\nu_e) f_{e1} - \nu_e w \frac{\partial f_{e1}}{\partial w} - D_e \frac{\partial^2 f_{e1}}{\partial w^2} = \frac{en_0}{m_e} E_1 \hat{f}'_{e0} \quad (10.331)$$

où l'on a désigné par  $v_{Te}^2 \nu_e \equiv D_e$  le coefficient de diffusion effectif dans l'espace des vitesses. Cette équation différentielle peut en principe être résolue [138]. Cependant, pour les électrons résonnants  $w \approx v_p \gg v_{Te}$  et dans la limite presque non collisionnelle où le libre parcours moyen ( $v_{Te}/\nu_e$ ) des électrons est beaucoup plus grand que la longueur d'onde ( $2\pi/k_r$ ), l'effet dominant des collisions coulombiennes est dû à la dérivée d'ordre le plus élevé, c'est-à-dire au terme de diffusion.

En négligeant donc les termes proportionnels à  $\nu_e$  et en supposant que  $\hat{f}'_{e0}$  est presque constante pour  $w \approx v_p$ , la solution approchée pour  $f_{e1}$  est :

$$f_{e1} \approx \frac{en_0}{m_e} R(w, k_r, \omega) \hat{f}'_{e0}(w) E_1 \quad (10.332)$$

où

$$R = \int_0^\infty d\tau \exp \left[ i(\omega - k_r w)\tau - \frac{1}{3} k_r^2 D_e \tau^3 \right] \quad (10.333)$$

est une fonction de diffusion résonnante pour  $w$  voisin de  $(\omega_r/k_r) \equiv v_p$ . On voit que pour  $\nu_e \rightarrow 0$ , et donc  $D_e \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow i/(\omega - k_r w)$  qui est la fonction de résonance non collisionnelle. D'après (10.332) la susceptibilité électronique longitudinale est :

$$\chi_{Le}(k_r, \omega) = -\frac{\omega_{pe}^2}{k_r} \int_{-\infty}^{+\infty} iRf'_{e0} dw \quad (10.334)$$

Pour toute valeur finie de  $D_e$ , elle est convergente pour tout  $\omega$  complexe. En fait, en examinant (10.333), on voit que  $R(w)$  est une fonction analytique de  $w$  de sorte que l'intégrale sur  $w$  dans (10.334) peut être effectuée sur l'axe réel  $w$  même pour  $\omega = \omega_r$ .

Rappelons que la dissipation non collisionnelle (de Landau) se déduit de  $\text{Im}[\chi_{Le}(k_r, \omega_r)]$ . On peut donc examiner  $R(w, k_r, \omega_r) \equiv R(w, v_p)$  pour déterminer quelle est la valeur de la fréquence de collisions qui fait paraître la dissipation de Landau. Les parties réelle et imaginaire de  $R(w, v_p)$  sont représentées sur la figure 10.20. Le maximum de  $\text{Re}[R(w, v_p)]$  se produit pour  $w = v_p$  et est donné par :

$$\begin{aligned} \text{Re}[R(w = v_p)] &= \int_0^{\infty} d\tau \exp\left(-\frac{1}{3}k_r^2 D_e \tau^3\right) \\ &= \frac{\Gamma(1/3)}{3} \left(\frac{3}{k_r^2 D_e}\right)^{1/3} \end{aligned} \quad (10.335)$$

avec  $\Gamma(1/3) \approx 2.68$ . La largeur en  $w$  de  $R(w, v_p)$  peut être estimée à partir du fait que l'intégrand de (10.333) décroît dans un temps caractéristique  $(k_r^2 D_e/3)^{-1/3} \equiv \tau_{rd}$ . Donc, pour  $k_r(\Delta w) = k_r|w - v_p| > (1/\tau_{rd})$ , l'intégrand est rapidement oscillant et  $R \rightarrow 0$ . Ainsi la largeur de  $R$  sur laquelle il est appréciable, de sorte que  $\text{Re}[R(w, v_p)]$  soit pratiquement constant, est approximativement :

$$\Delta w \approx \frac{1}{k_r \tau_{rd}} = \left(\frac{1}{3} \frac{D_e}{k_r}\right)^{1/3} \quad (10.336)$$

Ainsi, lorsque  $D_e \rightarrow 0$  la hauteur, donnée par (10.335), croît comme  $(1/D_e)^{1/3}$  tandis que la largeur, donnée par (10.336), décroît comme  $(D_e)^{1/3}$  ; on peut donc soupçonner que la surface au-dessous de  $\text{Re}[R(w, v_p)]$  reste constante. Il est effectivement facile de montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(w) dw = \frac{\pi}{|k_r|} \quad (10.337)$$

et on peut en conclure que :

$$\lim_{D_e \rightarrow 0} \text{Re}[R(w, v_p)] = \frac{\pi}{|k_r|} \delta(w - v_p) \quad (10.338)$$

On voit que ce résultat est identique à la partie réelle de la fonction de résonance non collisionnelle pour  $\omega = \omega_r$ . Et donc, tant que la largeur de  $\text{Re}[R(w, v_p)]$  est faible comparée à l'échelle de longueur de  $f'_0(w = v_p)$ , c'est-à-dire  $(\Delta w) \ll \nu_{te}$ , (10.334) donne approximativement :

$$\text{Im}[\chi_{Le}(k_r, \omega_r)] = -\frac{k_r}{|k_r|} \pi \frac{\omega_{pe}^2}{k_r^2} f'_{e0}(w = v_p) \quad (10.339)$$

qui est identique au résultat non collisionnel (10.160).<sup>8</sup> Ainsi, d'après (10.336), la con-

8. On voit que  $\text{Im}[R(w, v_p)]$  diffère très peu du résultat non collisionnel  $[Pi/(\omega_r - k_r w)]$  sauf dans un intervalle  $\Delta w$ , donné par (10.336), autour de  $w = v_p$ . Pour  $v_p \gg \nu_{te}$  et  $(\Delta w) \ll \nu_{te}$  cela a un effet négligeable sur  $\text{Re}[\chi_{Le}(k_r, \omega_r)]$  qui est donc pratiquement donné par (10.160). Les propriétés de dispersion des ondes de plasma électroniques données par (10.211) ne sont donc pratiquement pas modifiées par un faible taux de collisions.

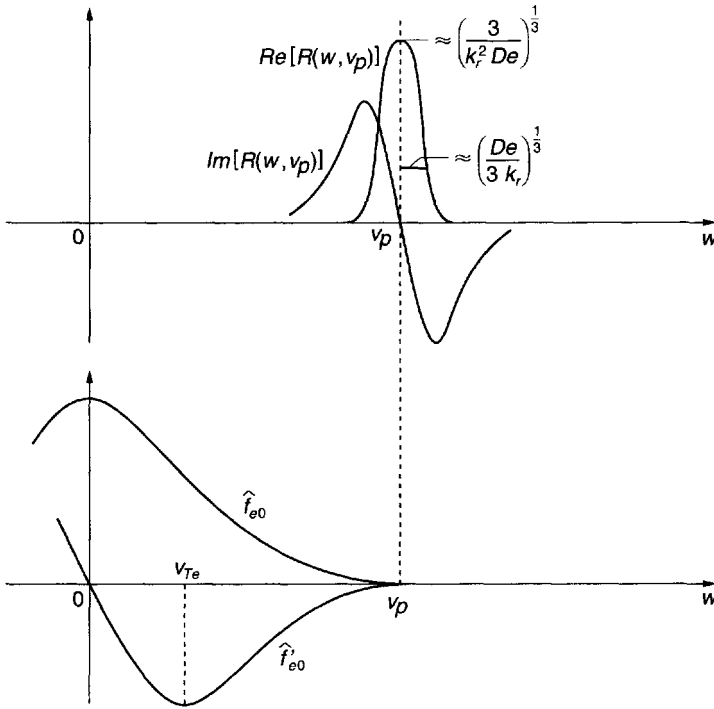


Figure 10.20 : Fonction  $R(w, v_p)$  de diffusion résonante en relation avec  $\hat{f}'_{e0}(w)$ .

dition de collisions assez rares pour que la dissipation de Landau se produise est

$$\left(\frac{\nu_e/3}{k_r v_{te}}\right)^{1/3} \ll 1 \quad (10.340)$$

qui est bien plus sévère que la condition  $(k_r v_{te}/\nu_e) \gg 1$  obtenue par le modèle simple de relaxation par collisions. On voit que  $\tau_{rd} = (k_r^2 De/3)^{-1/3}$  est le temps pendant lequel une particule donnée reste résonante avec l'onde avant que la diffusion, due aux collisions coulombiennes, détruise la résonance. Par le même processus de diffusion, pendant qu'une particule sort de la résonance, une autre y entre et l'amortissement de Landau continue. Comme le temps où une particule peut rester résonante est seulement  $\tau_{rd}$ , l'amplitude de la perturbation de la distribution des particules résonnantes reste finie et proportionnelle à  $\tau_{rd}$ . Dans le cas non collisionnel la fonction de distribution perturbée divergeait à la résonance parce que les particules restaient indéfiniment résonnantes. Ainsi avec des collisions même rares il y a moins de raisons de douter de la validité de la théorie linéaire des perturbations de petite amplitude.

Dans une analyse de perturbation des ondes de plasma électroniques à une dimension dans un plasma maxwellien, faiblement amorties tant par les collisions que par effet Landau on obtient (pour  $v_p \gg v_{te}$ ) :

$$\omega_i(k_r) \approx -\gamma_{LD}(k_r) - \frac{\nu_e}{2} \quad (10.341)$$

avec d'après (10.327)  $\nu_e \approx \nu(w = v_p) = (2 + Z_i)\nu_0 v_{Te}^3 / v_p^3$  et  $\gamma_{LD}$  donné par (10.214).

On peut remarquer qu'en se focalisant sur la dynamique à une dimension, on semble avoir masqué un des plus importants effets des collisions coulombiennes, à savoir la diffusion angulaire—l'effet cumulatif des collisions lointaines décrit par le terme (10.325) de diffusion dans l'espace des vitesses. Ainsi, bien que  $Z_i \nu_0 (v_{Te}/w)^3 \equiv \nu_s^{e/i}$  dans (10.327) soit une fréquence effective de freinage des électrons rapides par collisions électron-ion, la fréquence des déviations angulaires ( $\Delta\theta$ ) électron-ion est

$$\nu_{ei}(w, \Delta\theta) = \frac{2\nu_s^{e/i}}{\sin^2 \Delta\theta} \equiv \frac{\nu_{\perp}^{e/i}}{\sin^2 \Delta\theta} \quad (10.342)$$

Comme le domaine de résonance onde-particule est assez petit dans l'espace des vitesses, une collision à faible déviation est suffisante pour y faire entrer ou en faire sortir les particules. La fréquence de collision pour ce recyclage des particules est approximativement  $\nu_{\perp}^{e/i} / (\Delta\theta)^2$  qui est beaucoup grand que  $\nu_{\perp}^{e/i}$  et peut entrer en compétition avec  $(1/\tau_{rd})$  de l'analyse à une dimension. Comme nous le verrons, cela a aussi des conséquences importantes pour les effets non linéaires de piégeage des particules résonnantes dans l'onde.

Remarquons enfin que pour les ondes acoustiques ioniques il est beaucoup plus compliqué d'analyser les effets des collisions coulombiennes avec les opérateurs de Fokker-Planck. Les deux types de collisions électron-ion et ion-ion sont importants et de manières très différentes. On pourra pour s'en rendre compte consulter [139], [124], [140], [141], et voir que le rôle des collisions électron-ion n'a été clarifié que récemment, dans la dernière de ces références.

## 10.7 Effets non linéaires

La théorie cinétique des ondes que nous avons développée était basée sur l'équation de Vlasov linéarisée. Bien qu'une telle linéarisation puisse toujours être justifiée pour des perturbations d'amplitudes infinitésimales, les limitations de cette théorie linéaire ne peuvent se comprendre qu'en considérant, afin d'en évaluer l'importance, les effets non linéaires négligés jusqu'ici. La dynamique non linéaire des plasmas est un vaste sujet, qui dépasse aussi le cadre de ce livre ; nous ne ferons donc qu'aborder dans la section 10.7 l'étude des phénomènes non linéaires les plus importants dans les plasmas, en renvoyant le lecteur à l'abondante littérature sur ce sujet qui constitue à l'heure actuelle un domaine de recherche très actif.

## 10.7.1 Piégeage des particules

### a) Modèle non collisionnel

Dans une onde électrostatique d'amplitude finie (non nulle) l'interaction résonnante onde-particule fait apparaître le phénomène non linéaire de piégeage. On y a déjà fait allusion dans la section 10.3.3 où nous avons donné une image physique de la dissipation non collisionnelle de Landau pour les perturbations de petite amplitude.

La physique du piégeage peut se comprendre en considérant le mouvement à une dimension d'un électron dans une onde électrostatique donnée :  $E_x(x, t) = E \sin(k_r x - \omega_r t)$ . En l'absence de collisions, les équations du mouvement d'un électron sont alors :

$$\frac{dx}{dt} = w \quad (10.343)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-e}{m_e} E \sin(k_r x - \omega_r t) \quad (10.344)$$

Elles peuvent être intégrées exactement en termes de fonctions elliptiques de Jacobi [142], mais nous n'utiliserons pas ici ces solutions. Les résultats essentiels peuvent être décrits plus simplement en se référant à la figure 10.21 : considérons cette interaction onde-particule dans un repère se déplaçant à la vitesse de phase de l'onde  $v_p = (\omega_r/k_r)$ . Dans celui-ci la position de l'électron est  $x' = x - v_p t$  et sa vitesse  $w' = w - v_p$  ; le champ électrique électrostatique peut s'exprimer à partir du potentiel,  $E_x = -\partial\Phi/\partial x'$ , où  $\Phi = \phi \cos k_r x'$  avec  $\phi = (E/k_r)$ . Dans l'interaction onde-particule l'énergie totale de la particule doit rester constante. C'est la somme des énergies cinétique,  $m(w')^2/2$ , et potentielle,  $-e\phi(\cos k_r x' - 1)$ , où l'on a placé le zéro (minimum) d'énergie potentielle à l'abscisse  $x' = 0 \bmod 2\pi$ . La conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$-e\phi(\cos k_r x' - 1) + \frac{m(w')^2}{2} = 0 \quad (10.345)$$

Les orbites électroniques dans l'espace des phases ( $w', x'$ ) se rangent donc en deux classes séparées par le cas critique où l'énergie cinétique de l'électron est égale à l'énergie potentielle maximum :

$$\frac{1}{2}m(w')^2 = 2e\phi \quad (10.346)$$

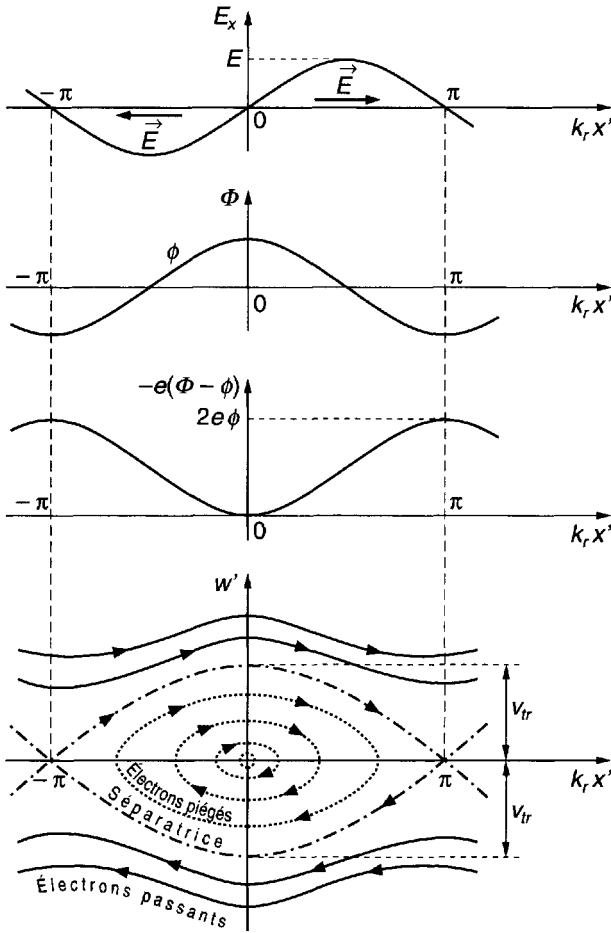


Figure 10.21 : Représentation dans le repère de l'onde.

- (a) Champ électrostatique  $\vec{E}$ .
- (b) Potentiel  $\Phi$ .
- (c) Énergie potentielle de l'électron.
- (d) Orbites dans l'espace de phase.

c'est-à-dire dans le repère du laboratoire :

$$(w - v_p)^2 = 4 \frac{e}{m} \phi \equiv v_{tr}^2 \quad (10.347)$$



qui définit ce qu'on appelle la *vitesse de piégeage*  $v_{tr}$  :

$$v_{tr} = 2\sqrt{\frac{e\phi}{m_e}} = 2\sqrt{\frac{e}{m_e} \frac{E}{k_r}} \quad (10.348)$$

Les électrons dont l'énergie cinétique dans le repère de l'onde dépasse l'énergie potentielle maximum due à l'onde sont les *électrons passants* ; ils naviguent sur le potentiel de l'onde, et leurs orbites sont continues dans l'espace des phases. Au contraire, les électrons dont l'énergie cinétique est inférieure à l'énergie potentielle maximum sont les *électrons piégés* ; ils oscillent autour des minima de potentiel de l'onde, et leurs orbites dans l'espace de phase sont fermées (au voisinage de ces minima). Les électrons satisfaisant la condition (10.346) suivent dans l'espace des phases une orbite critique qu'on appelle la *séparatrice* ; ils sont plutôt singuliers car il leur faut un temps infini pour faire un tour d'orbite ; ces orbites critiques de transition sont extrêmement sensibles aux perturbations.<sup>9</sup>

Les solutions de (10.343) et (10.344) pour les cas extrêmes de ces deux classes de particules, c'est-à-dire les électrons passant rapidement ou profondément piégés (correspondant respectivement aux électrons non résonnants et résonnants), sont assez faciles à trouver et très révélatrices de la nature très différente de leurs dynamiques. En l'absence du champ un électron de position et de vitesse initiales  $x_0$  et  $w_0$  décrirait une orbite libre donnée simplement par  $x(t) = x_0 + w_0 t$ . En présence du champ de l'onde on peut poser :

$$x(t) = x_0 + w_0 t + \xi(t) \quad (10.349)$$

où  $\xi(t)$  est la perturbation de position. En portant cette expression dans (10.344), et en supposant que l'électron est passant rapidement, c'est-à-dire  $|(w - v_p)t| \gg |\xi|$ , on trouve :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} \approx \frac{-eE}{m_e} \sin(k_r x_0 - \omega'_r t) \quad (10.350)$$

où  $\omega'_r = \omega_r - k_r w_0$  est la fréquence de l'onde (déplacée par effet Doppler) vue par l'électron de vitesse  $w_0$ . On voit ainsi que les électrons passant rapidement (non résonnants) ont une équation du mouvement linéaire ; la perturbation de vitesse  $|d\xi/dt| = |eE/m_e \omega'_r|$  est proportionnelle à l'amplitude du champ électrique—la même que celle qu'on trouverait dans une description hydrodynamique linéarisée. Au contraire, pour les électrons profondément piégés (résonnants), c'est-à-dire  $w_0 - v_p \approx 0$ , qui se trouvent

9. Les orbites fermées dans l'espace des phases sont centrées sur des points *elliptiques* qui sont *stables* vis-à-vis des perturbations. Les séparatrices se coupent à des points *hyperboliques* qui sont *instables* vis-à-vis des perturbations.

près de  $k_r x_0 \approx 0 \pmod{2\pi}$ , on trouve :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} \approx \frac{-eE}{m} \sin k_r \xi \quad (10.351)$$

qui est l'équation d'un oscillateur non linéaire. Pour  $|k_r \xi| \ll 1$  cet oscillateur est pratiquement linéaire avec une fréquence :

$$\omega_B = \sqrt{k_r \frac{eE}{m_e}} = k_r \sqrt{\frac{e\phi}{m}} = \frac{1}{2} k_r v_{tr} \quad (10.352)$$

qui dépend de la racine carrée de l'amplitude du champ électrique ou du potentiel de l'onde. Cette fréquence à laquelle les électrons profondément piégés oscillent dans le potentiel de l'onde est appelée la *fréquence de rebondissement*.<sup>10</sup> Contrairement à ceux qui passent rapidement, les électrons piégés (résonnants) ont une perturbation de vitesse  $|d\xi/dt| \propto E^{1/2}$ . Ainsi, la dynamique non linéaire des électrons résonnants n'est pas analysable par le développement habituel en série de Taylor (par rapport aux amplitudes des champs), qui sous-tend la dynamique de petite amplitude.

Comme l'amortissement de Landau fait intervenir la dynamique linéaire des particules résonnantes, on se rend compte maintenant qu'il ne peut se produire que sur une échelle de temps plus courte que le temps de rebondissement ( $2\pi/\omega_B \equiv \tau_B$ ). (Remarquons que d'après (10.352) on a  $\tau_B \propto E^{-1/2}$ , de sorte que ce temps devient plus long pour les champs de petite amplitude.)

Une résolution non linéaire exacte des équations de Vlasov-Poisson pour une seule onde dans un plasma maxwellien a été faite [143]. Elle montre que pour des amplitudes de champ telles que l'on ait  $\tau_B < \tau_{LD} \equiv 2\pi/|\gamma_{LD}|$ , où  $\gamma_{LD}$  est donné par (10.214), une perturbation initiale (régulière) dans le plasma n'a pas d'amortissement de Landau, mais qu'après la phase rapide de mélange des conditions initiales, son enveloppe oscille à la fréquence de rebondissement. Dans l'autre cas extrême, quand  $\tau_{LD} \ll \tau_B$ , les champs subissent un amortissement de Landau (après la phase rapide de mélange des conditions initiales) pendant un intervalle de temps comparable à  $\tau_B$  ; après quoi les champs qui restent vont avoir une enveloppe oscillant à la fréquence de rebondissement. Ces deux situations sont représentées schématiquement sur la figure 10.22.

10. On doit remarquer que le potentiel sinusoïdal de l'onde au voisinage de son minimum est bien représenté par une loi quadratique, même pour des valeurs bien au-dessus du minimum tant qu'on ne s'approche pas trop du maximum. Or dans un potentiel parabolique, les particules de n'importe quelle énergie oscillent avec la même fréquence. Ainsi  $\omega_B$  donné par (10.352) est aussi de manière approchée la fréquence de rebondissement pour la majorité des électrons piégés, et pas seulement celle de ceux qui sont profondément piégés.

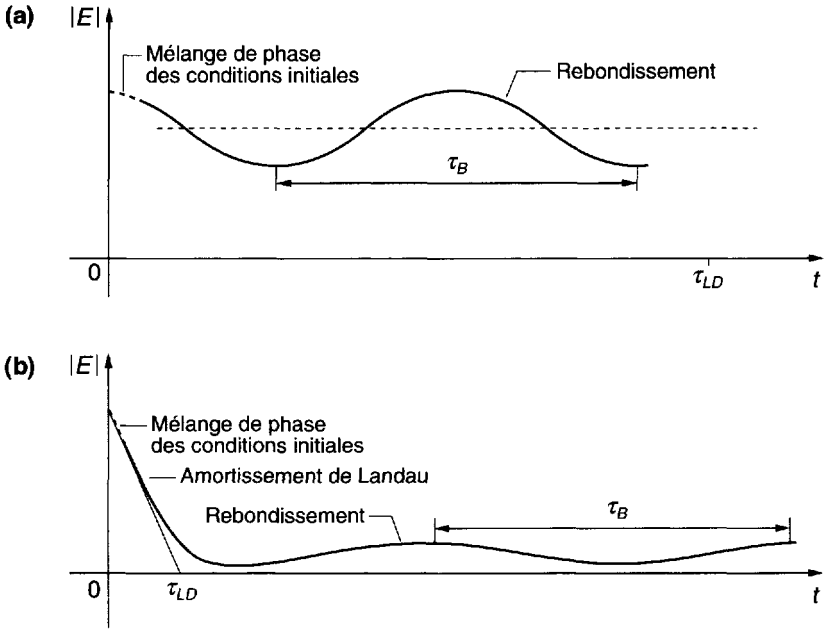


Figure 10.22 : Solutions non linéaires pour une onde électrostatique [143]. Enveloppe du champ  $E$

(a) pour  $\tau_B < \tau_{LD}$ , et (b) pour  $\tau_{LD} \ll \tau_B$ .

Nous concluons de ce qui précède que l'amortissement de Landau apparaît effectivement dans la solution non linéaire self-consistante pour une onde stable dans un plasma, pour des amplitudes telles que l'on ait  $\tau_B \gg \tau_{LD}$ .<sup>11</sup> D'après (10.352) et (10.214), cela peut s'écrire :

$$\left( \frac{e\phi}{\kappa T_e} \right)^{1/2} \ll \left( \frac{v_p}{v_{Te}} \right)^4 \exp \left( \frac{-v_p^2}{2v_{Te}^2} \right) \quad (10.353)$$

Pour les ondes très faiblement amorties ( $v_p^2 \gg v_{Te}^2$ ) cette condition est très difficile à satisfaire sans que les amplitudes des champs nécessaires ne deviennent de l'ordre de grandeur d'un signal de bruit. Une onde linéaire instable, dans laquelle le taux de croissance dépasse l'amortissement de Landau et qui commence à croître à partir

11. On peut remarquer que dans la procédure de linéarisation qui conduit à (10.93) on a négligé  $|\partial f_1 / \partial w|$  devant  $|df_0 / dw|$ . Quand cela est évalué pour la solution linéaire pour  $f_1$ , et pour les particules résonnantes  $w = v_p$ , on trouve la même condition, c'est-à-dire  $\omega_B^2 \ll \gamma_{LD}^2$  pour la validité de la linéarisation.

du bruit, va ultérieurement atteindre une amplitude pour laquelle il y a piégeage, et cela peut constituer un mécanisme efficace de saturation non linéaire quand il y a des interactions onde-particule presque résonnantes pour l'onde instable (voir les exemples discutés dans les chapitres 7 et 11).

### b) Effets des collisions

La prise en compte de l'effet des collisions allège considérablement la condition (10.353). Comme on l'a vu dans la section 10.6.1, en présence de collisions coulombiennes un électron reste résonnant avec l'onde (c'est-à-dire piégé) seulement pendant un intervalle de temps plus petit que le temps de relaxation par diffusion  $\tau_{rd} = (k_r^2 D_e / 3)^{-1/3}$ . Par conséquent, pour  $\tau_{rd} \ll \tau_B$  on peut penser que les électrons résonnants vont diffuser par collisions avant d'être piégés (mais qu'ils sont remplacés par d'autres électrons), et que donc l'amortissement de Landau linéaire continuera, tant que la condition (10.340) sera aussi satisfaite. D'après (10.352) la condition  $\tau_{rd} \ll \tau_B$  peut s'écrire :

$$\left( \frac{e\phi}{\kappa T_e} \right)^{1/2} \ll \frac{2\pi}{(3k_r v_{Te} / \nu_e)^{1/3}} \quad (10.354)$$

ce qui, avec (10.340), est beaucoup moins restrictif que (10.353).

On peut aussi penser que le dépiégeage collisionnel des électrons se produit principalement par dispersion angulaire et pour  $v_{tr} \ll v_p$  l'angle de diffusion pour le dépiégeage est  $\Delta\theta \geq \sqrt{2}(v_{tr}/v_p)^{1/2}$  qui est bien plus petit que  $90^\circ$ . Par conséquent, la fréquence de collisions effective pour le dépiégeage par dispersion angulaire est :

$$\nu_{eff} \approx \nu_\perp \left( \frac{\pi/2}{\Delta\theta} \right)^2 \approx \nu_\perp \left( \frac{v_p}{v_{tr}} \right) \quad (10.355)$$

où  $\nu_\perp \approx (1 + Z_i) 2\nu_0 (v_{Te}/v_p)^3$  est la fréquence totale électron-électron et électron-ion pour la dispersion angulaire à  $90^\circ$ . La condition pour que la dispersion angulaire empêche le piégeage est donc  $\omega_B \ll \nu_{eff}$ . Avec (10.352) et (10.355) cela donne :

$$\frac{e\phi}{\kappa T_e} \ll \frac{(v_p/v_{Te})}{2k_r v_{Te} / \nu_\perp} \quad (10.356)$$

qui est encore moins sévère que (10.354).

En tenant compte à la fois des effets collisionnels et non linéaires, on a donc enfin placé l'amortissement de Landau linéaire dans sa vraie perspective et établi solidement sa validité.

La résolution non linéaire de (10.330) avec  $\nu_e = 3\nu_0(v_{Te}/v_p)^3$ , c'est-à-dire  $Z_i = 1$ , et pour le champ électrique *donné* d'une onde sinusoïdale, de vitesse de phase  $v_p \gg v_{Te}$ , a été faite dans [144]. Pour les grandes amplitudes, telles que l'inégalité (10.354) soit renversée, la fonction de distribution au voisinage de la vitesse de phase de l'onde devient plus plate que la maxwellienne, de sorte que le taux d'amortissement  $\gamma$  de l'onde (imposée) est beaucoup plus faible que celui de l'amortissement de Landau  $\gamma_{LD}$  de la maxwellienne. Nous n'entrerons pas dans les détails de la solution de ce problème non linéaire et donnons seulement le résultat (avec nos notations) :

$$\frac{\gamma}{\gamma_{LD}} \approx \frac{8\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{v_{Te}}{v_{tr}} \right)^2 \frac{\nu_e}{\omega_B} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \frac{(\nu_e/k_r v_{Te})}{(\epsilon\phi/kT_e)^{3/2}} \quad (10.357)$$

## 10.7.2 Paquets d'ondes et diffusion quasi linéaire

Dans la théorie linéaire, la propagation d'un paquet d'ondes, formé d'un grand nombre d'ondes (Fig. 10.23), peut être facilement traitée par superposition. Dans la théorie non linéaire le principe de superposition ne s'applique plus. Le traitement des interactions résonnantes onde-particule au second ordre par rapport aux amplitudes des champs, où les champs sont ceux de la théorie linéaire, conduit à la théorie dite *quasi linéaire* de cette interaction. Le principal résultat est qu'en présence d'un paquet d'ondes les particules résonnantes subissent une *diffusion dans l'espace des vitesses*. La théorie quasi linéaire des plasmas [145] a été développée initialement pour l'étude de la saturation des instabilités linéaires et elle supposait ab initio que les ondes avaient des phases aléatoires. Dans ces conditions on peut comprendre la diffusion quasi linéaire qui en résulte dans l'espace des vitesses. Cependant, la diffusion quasi linéaire peut aussi se produire pour des ondes ayant des phases cohérentes et elle est donc utile pour comprendre le chauffage des plasmas et la production en leur sein de courants par des sources externes cohérentes de puissance RF. Dans ce cas, l'apparition de la diffusion exige l'action d'un mécanisme de décorrélation qui peut être fourni par des collisions (lointaines) ou, de manière plus intéressante, quand les collisions sont rares, par une stochasticité intrinsèque dans la dynamique non linéaire. Nous allons décrire brièvement la diffusion quasi linéaire à une dimension dans chacun de ces deux cas et renvoyons pour plus de détails le lecteur à la littérature spécialisée.

### a) Approximation des phases aléatoires

Quand les ondes du paquet ont des phases aléatoires l'interaction résonnante ( $\omega = v_p$ ) onde-particule peut être considérée comme produisant un changement de la vitesse quadratique moyenne des particules. Ce changement se produit pendant le temps où les particules résonnantes

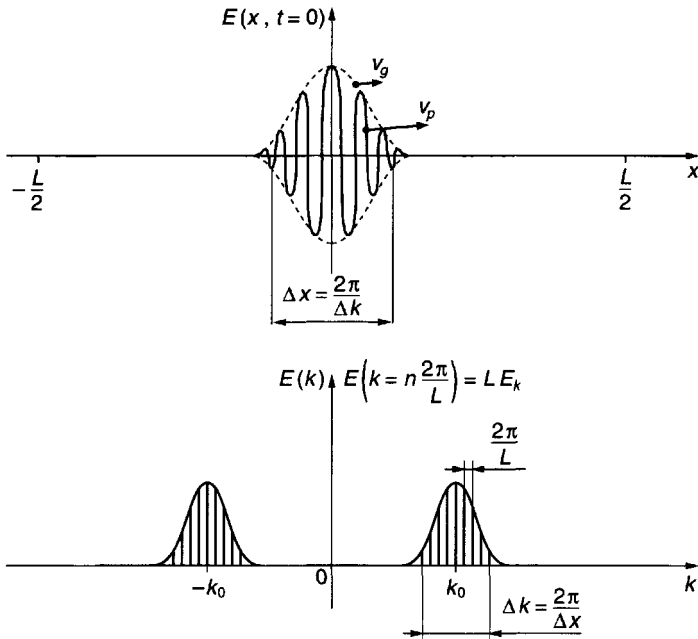


Figure 10.23 : Paquet d'ondes cohérentes.

Champ  $E(x, t = 0)$  et son spectre  $E(k)$  quand  $E$  est continu ou spectre de raies  $E_k$  quand le champ est périodique de période  $L$ .

interagissent avec le paquet d'ondes (cf. Fig. 10.23), soit :

$$\frac{2\pi/\Delta k}{|v_g - w|} \equiv \tau_{ac} \quad (10.358)$$

qui est le *temps d'autocorrélation* du champ vu par la particule résonnante. En supposant que pendant ce temps le changement de la vitesse quadratique moyenne est proportionnel à la moyenne quadratique du champ électrique, comme dans la théorie linéaire, on obtient :

$$\langle (\Delta w)^2 \rangle = \left( \frac{q}{m} \right)^2 \langle E^2 \rangle \tau_{ac}^2 \quad (10.359)$$

où le symbole  $\langle \rangle$  représente une moyenne spatiale. Si le temps entre deux "collisions" d'une particule et du paquet d'ondes est  $\langle \Delta t \rangle$ , on peut définir un coefficient de diffusion des particules dans l'espace des vitesses, soit :  $D = \langle (\Delta w)^2 \rangle / 2 \langle \Delta t \rangle$ . Pour un paquet d'ondes aléatoire le temps de "collision" est essentiellement  $\Delta t = \tau_{ac}$ . Par conséquent, on obtient une diffusion

des particules résonnantes dans l'espace des vitesses donné par :

$$D_{QL}(w) \equiv \frac{\langle (\Delta w)^2 \rangle}{2\tau_{ac}} = \pi \left( \frac{q}{m} \right)^2 \frac{\langle E^2 \rangle / \Delta k}{|v_g - w|} \quad (10.360)$$

pour  $w = v_p$ . Le même résultat peut aussi s'obtenir en calculant (de manière quasi linéaire) le changement de la vitesse quadratique moyenne par un ensemble d'ondes de phases aléatoires (cf. problème P10-20). Pour que ce résultat soit valable on doit évidemment avoir :

$$\tau_{ac} \ll \tau_B \quad (10.361)$$

c'est-à-dire que durant ce temps d'interaction les particules résonnantes ne doivent pas être piégées. En calculant  $\tau_B = 2\pi/\omega_B$  pour un champ électrique quadratique moyen dans (10.352) on trouve que (10.361) exige soit un spectre suffisamment large soit une moyenne quadratique du champ suffisamment petite.

Par suite de cette diffusion dans l'espace des vitesses la distribution moyennée dans l'espace des particules évolue selon l'équation :

$$\left( \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \right)_{QL} = \frac{\partial}{\partial w} D_{QL} \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial w} \quad (10.362)$$

L'échelle de temps de cette évolution  $\tau_{q\ell} \approx (\Delta w)^2 / D_{QL}$  doit être assez longue pour que l'on ait  $\tau_{ac} \ll \tau_{q\ell}$ , et les champs électriques des ondes sont donnés par les équations de Vlasov-Poisson linéarisées, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial t} |E_k(t)|^2 = 2\gamma_k |E_k(t)|^2 \quad (10.363)$$

où  $\gamma_k$  est l'amortissement ou le taux de croissance linéaire (10.176) du champ spectral. Clairement, on doit aussi imposer  $\tau_{ac} \ll 1/\gamma_k$ . Donc  $D_{QL}$ ,  $\gamma_k$ , et  $E_k$  deviennent des fonctions lentement variables du temps et (10.362) et (10.363) décrivent leur évolution quasi linéaire.

L'exposé heuristique et qualitatif de la théorie quasi linéaire à une dimension que l'on vient de faire peut être amélioré par une étude plus approfondie ([145], [146]) du système non linéaire des équations de Vlasov-Poisson moyennant les approximations décrites ci-dessus. On trouve ainsi, non seulement une diffusion résonnante, que l'on a décrite ci-dessus, mais aussi une diffusion non résonnante (pour cette distinction on renvoie le lecteur à [147]).

On trouve que la diffusion résonnante quasi linéaire est décrite par le coefficient :

$$D_{QL} = \pi \left( \frac{q}{m} \right)^2 \sum_{k \neq 0} |E_k|^2 \delta(\omega_k - kw) \quad (10.364)$$

où l'on a supposé  $E(x, t) = \sum_k E_k(t) \exp(ikx)$ , et exprimé la moyenne spatiale  $\langle \rangle$  dans (10.362) par la formule  $(1/L \int_{-L/2}^{L/2} dx)$  (cf. aussi problème P10-20).

On peut montrer que la description quasi linéaire conserve les particules, la quantité de mouvement totale, et l'énergie totale. Une conséquence de la diffusion quasi linéaire donnée par (10.362) est que la fonction de distribution dans la région résonnante va asymptotiquement dans le temps devenir plate et donc  $\gamma_k \rightarrow 0$ . Donc dans le cas à une dimension, les ondes instables résonnantes cessent de croître et les ondes stables de s'amortir. Pour les cas en deux et trois dimensions l'évolution quasi linéaire n'est pas si simple et nous renvoyons le lecteur à [148].

## b) Ondes cohérentes et dynamique chaotique

Pour les paquets d'ondes cohérentes, l'interaction non linéaire onde-particule est beaucoup plus complexe.

On peut s'en rendre compte en considérant le mouvement dans deux ondes électrostatiques à une dimension d'une particule chargée qui est en résonance de phase avec l'une des deux. Contrairement au cas d'une seule onde de la section 10.6.2 [(10.343), 10.344] qui est intégrable et donne des trajectoires bien définies dans l'espace de phase (Fig. 10.21), le cas de deux ondes est un problème non intégrable et le mouvement dans les diverses régions de l'espace des phases peut devenir *chaotique*<sup>12</sup> quand on fait varier les paramètres (amplitudes des ondes et vitesses de phase) [151].

Un problème plus simple et donc plus instructif est le mouvement d'une particule chargée dans un ensemble infini d'ondes électrostatiques, ayant toutes même amplitude  $E$  et même nombre d'onde  $k_r$ , et de vitesses de phase en progression arithmétique, c'est-à-dire avec  $v_{pn} = nv_p = n(\omega_r/k_r)$ ,  $n = \text{entier}$ . Les équations du mouvement sont alors :

$$\frac{dx}{dt} = w \quad (10.365)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{qE}{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(k_r x - n\omega_r t) \\ &= V \sin k_r x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (10.366)$$

---

12. La dynamique chaotique dans un système conservatif (Hamiltonien) sans bruit, comme celui que nous considérons, se caractérise par des trajectoires dans l'espace de phase qui sont extrêmement sensibles aux conditions initiales : deux points initialement voisins dans l'espace de phase divergent exponentiellement avec le temps. (Pour plus de détails cf. [149].) Tandis que les trajectoires intégrables dans le cas d'une seule onde sont des lignes (Fig. 10.21) et donc de dimension (de Hausdorff)  $d_H = 1$ , la trajectoire chaotique dans le cas de deux ondes recouvre pratiquement une surface ( $1 < d_H < 2$ ) de l'espace de phase. On doit remarquer qu'une telle dynamique chaotique (envisagée pour la première fois par Poincaré [150]) est due à la non-linéarité intrinsèque du système et non pas à une quelconque force externe stochastique. La dynamique chaotique que l'on décrit ici est ce qu'on appelle une *stochasticité intrinsèque*.



où l'on a posé :

$$(qE/m)T \equiv V \quad (10.367)$$

et  $T = 2\pi/\omega_r$  est la période fondamentale. Comme ce problème est aussi non intégrable sa solution ne peut s'obtenir que par une intégration numérique complétée quand c'est possible par une analyse mathématique des résultats. Avant de décrire les résultats numériques (l'analyse mathématique sort du cadre de ce livre) considérons l'évolution dynamique de manière qualitative et physique.

En regardant la première égalité dans (10.366) et en supposant  $E$  suffisamment petit, on peut représenter l'interaction de chaque onde avec les particules qui sont près de la résonance de phase, comme indiqué sur la figure 10.21. La situation totale est alors celle décrite de manière approchée sur la figure 10.24 qui montre les raies spectrales associées à chaque composante du champ multi-onde, et les trajectoires des particules dans l'espace de phase. Pour une amplitude non nulle du champ  $E$ , chaque composante du champ a une largeur de piégeage donnée par  $2v_{tr}$ , où  $v_{tr}$  est donnée par (10.348), et définit la trajectoire séparatrice au voisinage de la vitesse de phase pour cette composante du champ. Ainsi, en l'absence de collisions, et pour des amplitudes des champs assez petites pour que les séparatrices soient bien isolées, c'est-à-dire  $2v_{tr} \ll v_p$ , on peut penser que les particules, qui sont près de la résonance de phase avec une composante particulière du champ, ont une trajectoire piégée au voisinage de la vitesse de phase de celle-ci. évidemment, la présence de toutes les autres composantes perturbe ce mouvement piégé, comme d'ailleurs les trajectoires passantes, mais on peut penser que la nature piégée ou passante des orbites n'est pas modifiée si les champs ont des amplitudes suffisamment petites. La trajectoire séparatrice fait exception, car comme on l'a vu dans la section 10.6.2, elle est très sensible aux perturbations. Pour les petites amplitudes de champs on trouve donc que, même si les trajectoires dans l'espace de phase au voisinage de la vitesse de phase de chaque composante du champ sont différentes des trajectoires produites par une seule onde (cf. Fig. 10.21), on a encore (en une dimension) des trajectoires bien définies piégées ou passantes, et seule la trajectoire séparatrice devient chaotique ; en particulier, les trajectoires proches de la résonance et de vitesses de phase voisines ne se mélangent pas.

Quand l'amplitude du champ croît on peut imaginer que de plus en plus de trajectoires dans l'espace de phase deviennent chaotiques. Qualitativement, on peut penser que lorsque l'amplitude du champ croît jusqu'à une valeur telle que les séparatrices voisines se chevauchent, c'est-à-dire :

$$2v_{tr} \geq v_p \quad (10.368)$$

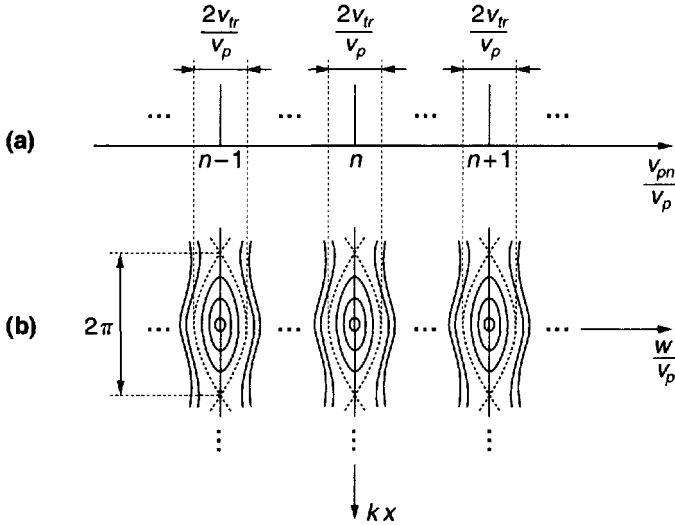


Figure 10.24 : Particules chargées dans un système de plusieurs ondes électrostatiques cohérentes.

- (a) Spectre de Fourier dû à un champ  $E$  multi-onde, à une dimension, dans (10.366).  
 (b) Trajectoires correspondantes des particules chargées dans l'espace de phase.

la plupart des trajectoires deviennent chaotiques et peuvent errer dans tout l'espace de phase. La condition (10.368) est connue sous le nom de *condition de Chirikov de recouvrement des résonances* [152]. Pour des champs dépassant la valeur donnée par (10.368) une particule chargée, partant avec presque n'importe quelle condition initiale, a une trajectoire qui au bout d'un temps assez long couvre pratiquement tout l'espace de phase inclus par les ondes. Ainsi, asymptotiquement dans le temps, les particules vont être distribuées sur tout l'espace de phase des ondes. Dans ces conditions les diverses interactions onde-particule peuvent être considérées comme désordonnées, et on s'attend à ce que la dynamique des particules devienne pratiquement diffusive, comme dans l'approximation des phases aléatoires de la théorie quasi linéaire.

La description qualitative ci-dessus est dans une large mesure confirmée par les calculs numériques des trajectoires exactes de ce problème. Ces calculs, qui doivent être faits avec une précision suffisante, sont grandement facilités par le fait que le nombre infini d'ondes peut s'exprimer comme indiqué par la seconde égalité dans (10.366). Cela montre que le problème est équivalent à celui d'un oscillateur excité périodiquement

par une impulsion (un "coup"), ce qui peut se représenter par un schéma simple. En intégrant (10.365) et (10.366) depuis juste avant un coup  $(nT - \epsilon)$  jusque juste avant le coup suivant  $[(n+1)T - \epsilon]$ , et en introduisant des normalisations convenables,  $k_r x_n = \theta_n$ ,  $2\pi(w_n/v_p) = I_n$  et :

$$2\pi(V/v_p) = K \quad (10.369)$$

on obtient :

$$I_{n+1} = I_n + K \sin \theta_n \quad (10.370)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \quad (10.371)$$

Ces équations constituent ce qui est connu comme "l'application standard" ou "application de Chirikov-Taylor" [153] ; ce schéma est un des principaux paradigmes utiles pour décrire la dynamique chaotique dans les systèmes hamiltoniens. Il faut noter qu'il représente la dynamique non linéaire complète d'un ensemble infini d'interactions onde-particule définies par (10.365) et (10.366). Comme c'est un schéma discret, périodique en  $\theta$  et  $I$ , il est relativement facile de calculer avec grande précision l'évolution dans l'espace de phase  $(I, \theta)$  à partir de n'importe quelles conditions initiales et en fonction de  $K$ . Cela est représenté sur la figure 10.25 pour quelques valeurs typiques de  $K$  qui illustrent quelques aspects importants de cette dynamique.

Pour  $K = 0$  [Fig. 10.25(a)] l'application représente un cas intégrable et l'espace de phase itéré est formé de points <sup>13</sup> sur des lignes droites à  $I$  constant ; d'après (10.370) avec  $K = 0$  on voit que  $I$  est une constante du mouvement. Sur chacune de ces lignes droites, les conditions initiales  $(I_0, \theta_0)$  donnent  $\theta_n = \theta_0 + nI_0 \bmod 2\pi$  de sorte que, si  $I_0/2\pi$  est un nombre rationnel, le point initial sur la ligne revient sur lui-même après un nombre fini d'itérations, ce qui correspond à une trajectoire périodique sur ce qu'on appelle un tore résonnant ; et si  $I_0/2\pi$  est un nombre irrationnel la ligne va se remplir de manière dense quand l'itération continue, ce qui correspond à une trajectoire aperiodique sur ce qu'on appelle un tore non résonnant.

Pour les faibles valeurs de  $K$  [Fig. 10.25(b)] on voit que certaines conditions initiales conduisent à des courbes fermées de  $\theta = 0$  à  $\theta = 2\pi \bmod 2\pi$ , dites *courbes invariantes*. Elles représentent des trajectoires tracées sur des tores déformés (non circulaires) qui résultent de la perturbation des tores non résonnants  $K = 0$ . Ces tores déformés sont appelés *tores de KAM* <sup>14</sup> et si une trajectoire est sur un tel tore, elle y reste ; ces trajectoires sont dites *régulières*. D'autre part, si on perturbe la carte des trajectoires périodiques elle éclate en un ensemble de points alternativement elliptiques et hyperboliques (cf. Fig. 10.21) ; une structure en îlot se forme au voisinage de chaque point elliptique et les mouvements piégés dans les îlots sont séparés des courbes invariantes par une séparatrice qui passe par les points hyperboliques. Les tores résonnants se brisent donc en un ensemble de tores internes. Les îlots représentent de nouvelles courbes invariantes qui résultent de trajectoires qui sont régulières. Cependant, le mouvement au

13. On voit que la trajectoire réelle dans l'espace de phase peut être visualisée comme tracée sur un tore dont la section poloidale a un rayon  $I$ , et où  $\theta$  est l'angle poloidal. Le schéma de la figure 10.25 représente l'intersection des trajectoires avec un plan perpendiculaire au tore et à une valeur fixe de l'angle toroidal. Sur cette surface, qu'on appelle une *section de Poincaré*, un point désigne une traversée par la trajectoire tracée sur la surface toroidale. Toute l'information dynamique est contenue dans les points de la section de Poincaré. On voit qu'une ligne continue de  $\theta = 0$  à  $\theta = 2\pi$  sur la section de Poincaré représente une trajectoire continue sans point double, qui remplit de manière dense une surface toroidale.

14. D'après A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold, et J. Moser qui ont montré les premiers que dans les systèmes hamiltoniens intégrables, pour des perturbations assez faibles il y a toujours une fraction finie de l'espace de phase qui contient des trajectoires régulières. Pour plus de détails cf. [149].

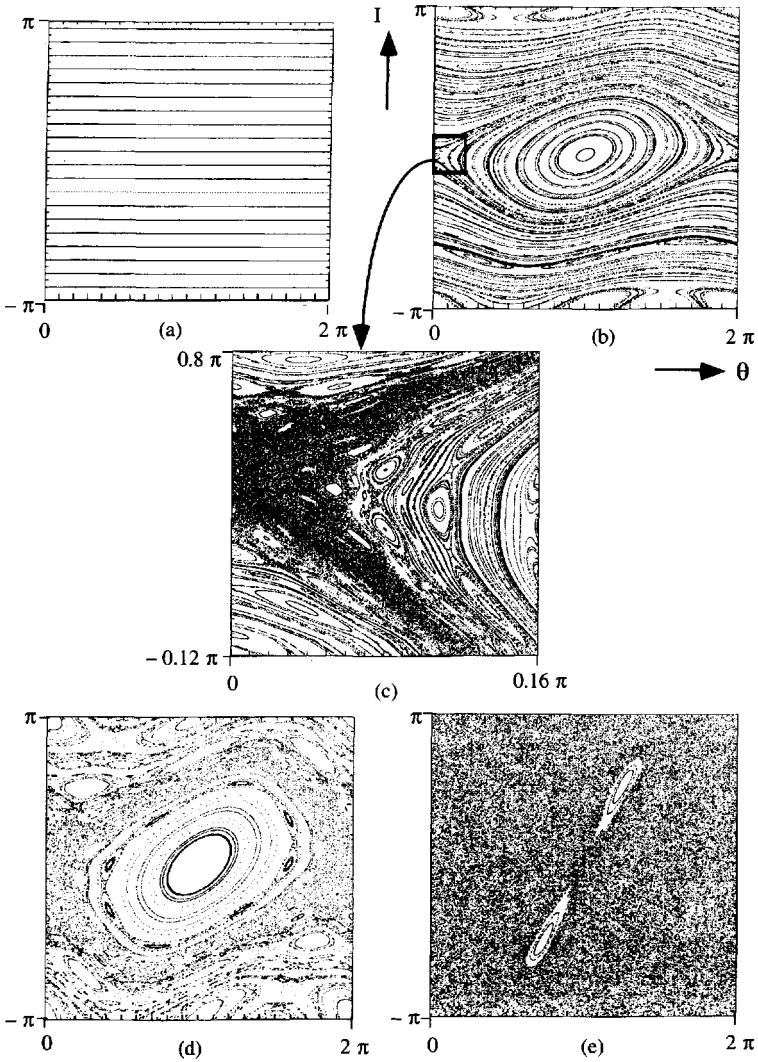


Figure 10.25 : Application standard pour diverses valeurs de  $K$ .  
 (a)  $K = 0$  ; (b)  $K = 0.5$  ; (c)  $K = 0.5$  près d'un point hyperbolique ;  
 (d)  $K = 1.0$  ; (e)  $K = 4.5$ .  
 Calculs effectués par Dr. A. K. Ram, Plasma Fusion Center, M.I.T.

voisinage des séparatrices est chaotique : un état initial sur une telle trajectoire va errer stochastiquement et remplir de manière dense une surface plutôt qu'une ligne. Cela se voit bien sur la figure. 10.25(c) qui est un agrandissement de la région du point hyperbolique de l'îlot principal de la figure 10.25(b). On y distingue aussi clairement tout un ensemble d'îlots emboîtés qui résultent de la destruction des tores résonnants qui existaient pour des valeurs plus faibles de  $K$ .

Lorsque  $K$  croît la dynamique que l'on a décrite se répète —de manière semblable— et une partie de plus en plus grande de l'espace de phase est recouverte de trajectoires chaotiques. Cependant, tant qu'il reste des courbes invariantes (tores de KAM) de  $\theta = 0$  à  $\theta = 2\pi \bmod 2\pi$ , les régions chaotiques restent confinées entre ces courbes invariantes et les trajectoires chaotiques ne peuvent pas errer dans tout l'espace de phase.

Pour  $K = 1$  [Fig. 10.25(d)], il n'y a plus de tores de KAM<sup>15</sup> et un état qui est initialement dans une région chaotique peut errer dans tout l'espace de phase. Mais, comme on peut le voir, une très grande partie de l'espace de phase est encore couverte par des chaînes de structures en îlot et les états qui en partent initialement suivent des trajectoires régulières. Quand  $K$  croît encore de plus en plus de chaînes d'îlots disparaissent et se transforment en régions de trajectoires chaotiques.

A partir de la définition (10.369) de  $K$ , et de celle (10.367) de  $V$ , on trouve que  $K = (2\pi\omega_B/\omega)^2$  et d'après (10.352) la condition de Chirikov de recoupement des résonances (10.368) s'écrit simplement :

$$K \geq \frac{\pi^2}{4} \approx 2.47 \quad (10.372)$$

Effectivement, pour de telles valeurs de  $K$  la plus grande partie (mais pas la totalité) de l'espace de phase est chaotique [cf., par exemple, Fig. 10.25(e)] et les chaînes d'îlots qui restent n'occupent qu'une petite portion de l'espace de phase total. La plupart des états initiaux se trouvent maintenant dans une région chaotique, et leurs orbites vont ultérieurement couvrir, de manière dense et ergodique, tout l'espace de phase sauf les petites régions qui contiennent des îlots. Dans ces conditions on peut de manière approchée admettre que la dynamique des particules dans l'espace des phases est diffusive. Pour les grandes valeurs de  $K$  il ressort de (10.370) que le changement de  $I(\Delta I_n \equiv I_{n+1} - I_n)$  est lui aussi grand (pour la plupart des  $\theta_n$ ). Par conséquent, d'après (10.371) le changement de  $\theta_n \bmod 2\pi$  va devenir imprévisible dans la région chaotique de l'espace de phase. En considérant  $\theta_n$  comme aléatoire et sans corrélations entre les différents  $n$  (c'est-à-dire les instants différents), la diffusion de  $I$  est :

$$\begin{aligned} D(I) &\equiv \frac{\langle (\Delta I_n)^2 \rangle}{2} = \frac{K^2}{2} \langle \sin^2 \theta_n \rangle \\ &= \frac{K^2}{4} \end{aligned} \quad (10.373)$$

où le symbole  $\langle \rangle$  désigne une moyenne temporelle, et comme on suppose  $\theta_n$  aléatoire, on a  $\langle \sin^2 \theta_n \rangle = 1/2$ . En revenant aux variables non normalisées on obtient pour la diffusion dans l'espace des vitesses :

$$D(w) \equiv \frac{\langle [\Delta w(T)]^2 \rangle}{2T} = \frac{1}{T} \frac{K^2}{4} \left( \frac{v_p}{2\pi} \right)^2 = \frac{\left( \frac{q}{m} \frac{E}{\sqrt{2}} T \right)^2}{2T} = D_{QL} \quad (10.374)$$

qui est identique au coefficient de diffusion quasi linéaire calculé dans l'approximation

15. La disparition de la dernière courbe invariante se produit en fait pour des valeurs de  $K$  juste au-dessous de 1,  $K = 0.97 \dots$  [154].

des phases aléatoires (10.358)–(10.360) avec maintenant  $\langle E^2 \rangle = E^2/2$  et  $\tau_{ac} = T$ .<sup>16</sup> Le résultat intéressant est que la dynamique chaotique qui résulte de l'interaction non linéaire des particules chargées avec des ondes cohérentes peut conduire à la même diffusion quasi linéaire que l'interaction des particules chargées avec des ondes ayant des phases aléatoires.

En pratique les spectres des champs cohérents dans un plasma (produits par exemple par une excitation extérieure) sont des spectres de raies d'extension finie en vitesse de phase, comme représenté sur la figure 10.23. Des calculs numériques et analytiques [156] montrent que la dynamique des particules devient diffusive dans un intervalle fini de vitesses de phase pourvu que la condition de Chirikov de recouvrement des résonances (10.368) soit satisfaite entre les spectres de raies voisins qui forment le paquet d'ondes. Évidemment, comme le spectre total est d'étendue finie, la diffusion va se produire seulement dans la partie de l'espace des vitesses des particules qui est couverte par le spectre des vitesses de phase et où (10.368) est satisfaite entre les raies voisines contenues dans le spectre. On trouve alors que le coefficient de diffusion est approximativement celui donné par la théorie quasi linéaire [cf. (10.360) et (10.364)] et cela tant que les pas aléatoires produits dans l'espace des vitesses par la dynamique chaotique, sont plus petits que l'étendue totale du spectre ayant le recouvrement de Chirikov. Il faut d'ailleurs remarquer que les paquets d'ondes cohérents ont en général une extension spatiale finie  $\ell \equiv (2\pi/\Delta k)$  alors que les "collisions" périodiques d'une particule avec le paquet d'ondes se produisent à des distances  $L$  plus grandes (cf. Fig. 10.23). Le coefficient de diffusion est donc réduit d'un facteur  $(\ell/L)$ .

### c) État stationnaire produit par la diffusion quasi linéaire et les collisions

Nous terminons cette section sur les effets quasi linéaires en remarquant qu'aux temps longs il faut aussi considérer l'effet des collisions. Un équilibre entre la diffusion quasi linéaire et les collisions peut produire des états stationnaires intéressants de la fonction de distribution des particules. On peut ainsi bâtir des modèles utiles du chauffage et de la production de courant dans un plasma par des champs électromagnétiques appliqués de l'extérieur et produisant dans celui-ci des ondes de plasma appropriées, dans un domaine choisi de vitesses de phase. On peut en effet écrire, symboliquement, pour la fonction de distribution  $\langle f \rangle$  moyennée dans l'espace, l'équation :

$$\frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} = \left( \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \right)_{\text{coll}} + \left( \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} \right)_{QL} \quad (10.375)$$

et un état stationnaire est obtenu quand  $(\partial \langle f \rangle / \partial t) = 0$ .

Pour le cas unidimensionnel des électrons dans des champs dont les vitesses de phase sont résonnantes avec les électrons de grande énergie ( $v_p \gg v_{te}$ ), on obtient, en utilisant le terme de collision Fokker-Planck (10.326) de Vedenov, et (10.362) pour le terme quasi linéaire, l'équation stationnaire suivante pour  $\langle f \rangle \equiv f_e(w)$  :

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[ \nu(w) \left( w f_e + v_{te}^2 \frac{\partial f_e}{\partial w} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial w} D_{QL}(w) \frac{\partial f_e}{\partial w} = 0 \quad (10.376)$$

16. Des calculs numériques de la diffusion à partir de l'application standard montrent que pour  $K$  très grand (beaucoup plus que (10.372) supposé par Chirikov)  $D \approx D_{QL}$ . Cependant, pour des valeurs de  $K$  qui dépassent seulement de peu la valeur de Chirikov,  $D$  peut différer de  $D_{QL}$  de près de  $\pm 50\%$  ; cela est dû à l'effet des corrélations résiduelles, et on renvoie le lecteur à [155] où ces effets ont été analysés.

où  $\nu(w)$  est donné par (10.327) et  $D_{QL}(w)$  est l'expression 10.364. De (10.376) on déduit :

$$\frac{\partial f_e}{\partial w} = \frac{-\nu w f_e}{\nu v_{Te}^2 + D_{QL}} \quad (10.377)$$

résultat dû à Vedenov [137]. Pour  $D_{QL} = 0$  cela donne pour  $f_e$  une maxwellienne. Pour  $D_{QL} \neq 0$  on voit que la pente de  $f_e$ , dans la région des grandes vitesses en résonance avec les champs, est plus faible que celle de la maxwellienne  $f_e$  et donc que l'amortissement de Landau de ces champs est réduit. Si on considère  $D_{QL}$  comme produit par des champs dans le plasma résultant d'une excitation externe, l'état stationnaire décrit par (10.376) correspond à un gain d'énergie et de quantité de mouvement par amortissement de Landau des électrons de haute énergie en résonance de phase, tandis que ces électrons de grande énergie transfèrent par collisions de l'énergie et de la quantité de mouvement aux électrons moyens et aux ions. La densité moyenne de puissance dissipée peut donc se calculer à partir de :

$$\begin{aligned} p &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{mw^2}{2} \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{\text{coll}} dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mw^2}{2} \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{QL} dw \\ &= -m \int_{-\infty}^{+\infty} w D_{QL} \frac{\partial f_e}{\partial w} dw \quad (10.378) \end{aligned}$$

où la dernière expression s'obtient en utilisant pour  $(\partial f_e / \partial t)_{QL}$  le second terme de (10.376) et en effectuant une intégration par parties. On peut montrer (cf. problème P10-21) que (10.378) n'est autre que l'expression habituelle de la puissance dissipée (10.203) intégrée sur le spectre des ondes. La densité de courant électronique produite dans le plasma est :

$$J = -e \int_{-\infty}^{+\infty} w f_e dw \quad (10.379)$$

Dans (10.378) et (10.379)  $f_e$  doit évidemment être la solution stationnaire définie par (10.377).

N. J. Fisch a ainsi découvert qu'avec un  $D_{QL}$  suffisamment grand dans leur spectre, des ondes progressives unidirectionnelles peuvent engendrer un courant électronique significatif dans un plasma, avec une puissance d'origine externe relativement modeste. Un tel courant peut donc être utilisé pour le confinement stationnaire de plasmas dans un tokamak<sup>17</sup> [157]. Pour le voir simplement, considérons la solution de (10.377) soit :

$$f_e(w) = C \exp \int^w \frac{-w' \nu(w')}{v_{Te}^2 \nu(w') + D_{QL}(w')} dw' \quad (10.380)$$

Pour  $D_{QL} \gg v_{Te}^2 \nu$  la fonction de distribution dans la région de résonance (soit  $w_1 \leq w \leq w_2$ , avec  $w_1 \gtrsim 3.5 v_{Te}$ ) est pratiquement plate et se confond

17. Le tokamak est une machine à plasma pour la fusion contrôlée. Nous l'avons décrite rapidement dans la section 1.10. Rappelons qu'en plus du champ magnétique principal toroïdal, il faut aussi qu'il y ait un champ magnétique poloidal (beaucoup plus faible, mais très important pour le confinement) produit par un courant toroïdal dans le plasma.

avec la maxwellienne pour  $w \approx w_1$ . On peut ainsi, à partir de (10.378) et (10.379), calculer la puissance dissipée et le courant engendré (cf. problème P10-22). évidemment, un calcul plus réaliste doit être fait dans l'espace des vitesses à deux dimensions, ce qui est beaucoup plus complexe et ne peut se faire que numériquement [158].

A ce jour (cf. tableau 1.2), les expériences, avec des ondes hybrides basses uni-directionnelles excitées à partir de l'extérieur du plasma<sup>18</sup> pour créer un courant dans un tokamak ont produit jusqu'à  $2 \times 10^6$  A [159]. Ce mode de "current drive" exige encore beaucoup trop de puissance, et pose d'autres problèmes de sorte que la route vers un tokamak fonctionnant en régime permanent n'est pas encore évidente. On a cependant trouvé que ce mode de production de courant dans un plasma de tokamak est utile pour modifier le profil de courant dans le plasma et supprimer ainsi certaines instabilités.

### 10.7.3 Couplages non linéaires onde-onde et onde-particules. Ondes non linéaires

La théorie quasi linéaire des paragraphes précédents décrit à l'ordre non linéaire le plus bas, l'évolution due aux interactions résonnantes onde-particule de la fonction de distribution des particules. On suppose que les ondes sont données par la théorie linéaire, mais que la partie résonnante de la fonction de distribution des particules est modifiée par une diffusion dans l'espace des vitesses qui est quadratique par rapport à l'amplitudes des champs. Cependant, au second ordre par rapport aux champs la description des ondes dans un plasma peut aussi être différente de la description linéaire.

#### a) Couplage d'ondes cohérentes

La forme la plus simple d'une telle modification non linéaire des ondes est le *couplage résonnant d'ondes cohérentes*. Au second ordre, il consiste en un couplage de deux ondes à une troisième. Par couplage résonnant on désigne, parmi tous les couplages conservatifs possibles de ce type, les processus dominants, qui satisfont les conditions :

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3 \quad (10.381)$$

---

18. Le terme ondes hybrides basses pour la production de courant dans les tokamaks est utilisé de manière imprécise pour désigner des ondes de plasma électroniques quasi électrostatiques se propageant à un certain angle du champ magnétique qui confine le plasma (cf. section 1.7). Pour les plasmas de tokamak ce sont des ondes dans la gamme des microondes (1-10 GHz) qui peuvent être excitées (à la frontière du plasma) par des réseaux de guides d'onde alimentés par des générateurs externes.



$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 \quad (10.382)$$

où les  $\vec{k}_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) sont réels et les  $\omega_n = \omega_n(\vec{k}_n)$  aussi réels et donnés par la relation de dispersions linéaire  $D(\vec{k}, \omega) = 0$  des ondes faiblement amorties ou croissantes (c'est-à-dire  $D = 0 \rightarrow \omega(\vec{k}_n) = \omega_n(\vec{k}_n) - i\nu_n(\vec{k}_n)$ ) avec  $|\nu_n| \ll |\omega_n|$ . Rappelons que dans la théorie linéaire, chaque onde  $\omega(\vec{k})$  peut être excitée indépendamment de toutes les autres ondes possibles. Cependant, de manière non linéaire, l'excitation d'une onde peut conduire à transférer son énergie à d'autres ondes avec lesquelles elle est résonnante au sens de (10.381) et (10.382). La description la plus simple d'un tel couplage non linéaire se trouve en supposant que la faible non-linéarité produit une variation lente (dans l'espace et le temps) des amplitudes des champs linéaires, en faisant ensuite une itération dans les équations dynamiques non linéaires (hydrodynamiques ou cinétiques) et en calculant les amplitudes lentement variables non linéaires jusqu'au second ordre ; cf. par exemple [160], [161] et [361]. Pour des couplages non linéaires conservatifs on obtient ainsi [361], [162] :

$$L_1 a_1 = p_1 K a_2 a_3 \quad (10.383)$$

$$L_2 a_2 = -p_2 K^* a_1 a_3^* \quad (10.384)$$

$$L_3 a_3 = -p_3 K^* a_1 a_2^* \quad (10.385)$$

où  $L_n$  est l'opérateur de variation lente (agissant sur les paquets d'ondes) :

$$L_n = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_{gn} \cdot \nabla + \nu_n \quad (10.386)$$

où  $\vec{v}_{gn}$  est la vitesse de groupe et  $\nu_n$  le faible taux d'amortissement ou de croissance du mode linéaire ; les  $a_n \equiv a_n(\vec{r}, t)$  sont les amplitudes lentement variables des champs, normalisées par commodité à des densités d'action, en posant  $|a_n|^2 = |\langle U \rangle_n| / \omega_n \equiv n_{kn}$  où  $\langle U \rangle_n$  est la densité moyenne d'énergie d'onde. Sans perte de généralité, on a aussi supposé  $\omega_n$  positive et  $p_n = \text{sgn}(\langle U \rangle_n)$ , c'est-à-dire  $+1$  pour une onde d'énergie positive et  $-1$  pour une onde d'énergie négative ;  $K$  est la constante de couplage non linéaire pour une non-linéarité conservative du second ordre : elle est en général fonction des polarisations des ondes qui sont couplées.

Pour un plasma non magnétisé, homogène et isotrope les conditions de résonance peuvent être satisfaites dans le couplage entre les ondes transverses électromagnétiques (*em*), et les ondes électrostatiques [oscillations de plasma électroniques (*pe*), et acoustiques ioniques (*ai*)] , mais aussi dans le couplage entre trois ondes électrostatiques [(*pe*) et (*ai*)]. Cela

est représenté sur la figure 10.26 pour le cas unidimensionnel. On voit qu'en une dimension les conditions de résonance sont satisfaites quand les trois ondes, sur leurs relations de dispersion linéaires  $\omega_n(k_n)$ , se trouvent aux sommets d'un parallélogramme dont un sommet est à l'origine. Plus généralement, en deux dimensions, les relations de dispersion pour les ondes  $em$  et  $pe$  sont des paraboloides de révolution autour de l'axe  $\omega$  et les ondes  $ai$  sont pratiquement sur une surface conique. Bien sûr, l'hypothèse d'un faible amortissement restreint l'étendue en  $k$  des ondes  $pe$  et  $ai$  de sorte que leur amortissement de Landau soit petit. On voit aussi que les formes des surfaces de dispersion  $em$  et  $pe$  excluent la possibilité que les ondes soient toutes trois  $em$  ou  $pe$  et satisfassent les conditions de résonance ; cela est par contre possible pour la partie de grande longueur d'onde de la relation de dispersion des ondes  $ai$ . Enfin, tous les triplets d'ondes qui satisfont les conditions de résonance ne sont pas nécessairement couplés car pour certaines directions de propagation et polarisations des ondes la constante  $K$  de couplage non linéaire peut être nulle.

Il y a une grande variété de situations physiques de couplages d'ondes non linéaires pour lesquelles (10.383)–(10.385) ont été résolues ([361], [162], [163]). En particulier, ces équations donnent la description la plus simple des *instabilités paramétriques* qui jouent un rôle important dans les interactions laser-plasma pour la fusion par confinement inertiel (cf. par exemple [164]). Beaucoup des interactions non linéaires peuvent être découvertes à partir des équations de conservation du type Manley-Rowe satisfaites par (10.383)–(10.385). Ainsi, pour tout  $\nu_n = 0$  on peut montrer (problème P10-23) que l'on a :

$$\frac{d}{dt}(p_1 N_{k1} + p_2 N_{k2}) = 0 \quad (10.387)$$

et :

$$\frac{d}{dt}(p_1 N_{k1} + p_3 N_{k3}) = 0 \quad (10.388)$$

où  $N_{kn} = \int n_{kn} d^3r$  est l'action totale, et où l'on a supposé que la densité d'action est nulle à l'infini, c'est-à-dire  $N_{kn}(\vec{r} \rightarrow \infty, t) = |a_n(\vec{r} \rightarrow \infty, t)|^2 = 0$ . De (10.387) et (10.388) il résulte que dans l'interaction entre trois ondes d'énergie positive, si seule l'onde de haute fréquence est initialement excitée, elle va transférer son action aux deux ondes de basse fréquence, et cela est donc réversible dans les interactions continues, infiniment étendues. D'autre part, si l'onde de haute fréquence est d'énergie négative les trois ondes peuvent croître indéfiniment (c'est ce qu'on appelle une *instabilité explosive* car elle peut se produire au bout d'un temps fini, cf. par exemple [165]). Dans l'espace et le temps, et pour des paquets d'ondes bornés, ces interactions avec transfert d'action ont des seuils précis

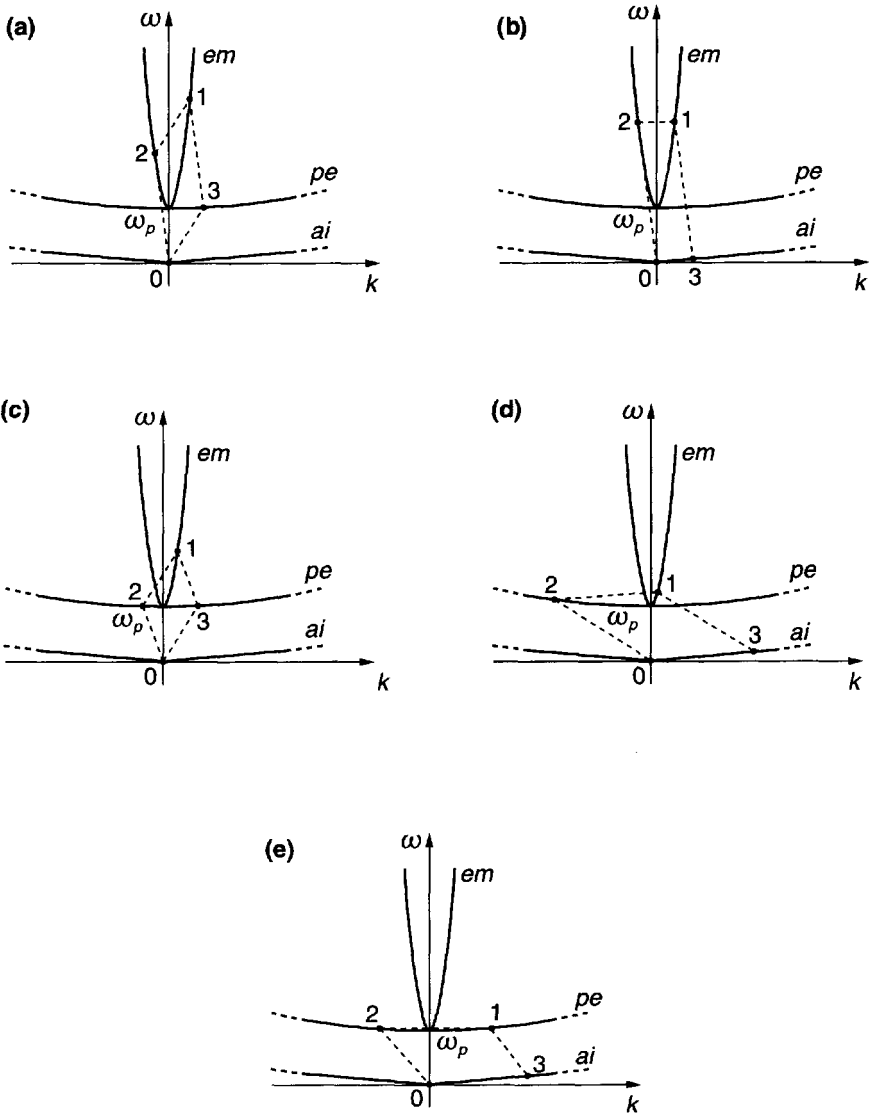


Figure 10.26 : Couplage résonnant à trois ondes.

Triplets possibles d'ondes satisfaisant les conditions de résonance (10.381) et (10.382) de couplage non linéaire.

qui font apparaître un échange de *soliton* entre les paquets d'ondes ; les solutions exactes de (10.383)–(10.385) peuvent s'obtenir par les techniques de résolution des problèmes inverses ([166], [162]).

Quand l'onde de haute fréquence est instable ( $\nu_1 < 0$ ), et les deux autres amorties ( $\nu_2 > 0, \nu_3 > 0$ ), toutes trois étant d'énergie positive, les solutions de (10.383)–(10.385) peuvent évoluer vers le chaos. Quand la propagation spatiale peut être négligée (c'est-à-dire  $\vec{v}_g \cdot \nabla a_n = 0$ ) le déphasage ( $\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 \neq 0$ ) peut saturer l'instabilité et l'interaction à trois ondes suit une route vers le chaos avec doublement de la période [167]. Quand on tient compte de la propagation spatiale l'instabilité dans l'onde de haute fréquence est couplée vers les courtes longueurs d'onde, et l'état saturé de l'interaction à trois ondes fait apparaître un *chaos spatio-temporel* [168].

### b) Couplages d'ondes dans la limite des phases aléatoires

Dans l'*approximation des phases aléatoires*, où l'on suppose que les phases des ondes sont distribuées aléatoirement, l'interaction à trois ondes a une description statistique. C'est aussi habituellement le cas dans l'interaction entre un grand nombre d'ondes excitées, comme cela a été expliqué pour la première fois dans [169]. L'interaction d'un seul triplet de telles ondes est donnée dans [170], [161] sous la forme (problème P10-24) :

$$L_1 n_{k1} = p_1 |K_1|^2 (p_1 n_{k2} n_{k3} - p_2 n_{k1} n_{k3} - p_3 n_{k1} n_{k2}) \quad (10.389)$$

$$L_2 n_{k2} = -p_2 |K_2|^2 (p_1 n_{k2} n_{k3} - p_2 n_{k1} n_{k3} - p_3 n_{k1} n_{k2}) \quad (10.390)$$

$$L_3 n_{k3} = -p_3 |K_3|^2 (p_1 n_{k2} n_{k3} - p_2 n_{k1} n_{k3} - p_3 n_{k1} n_{k2}) \quad (10.391)$$

avec  $|K_1|^2 = 4\pi |K|^2 / |v_{g2} - v_{g3}|$ ,  $|K_2|^2 = 4\pi |K|^2 / |v_{g3} - v_{g1}|$ , et  $|K_3|^2 = 4\pi |K|^2 / |v_{g1} - v_{g2}|$ . Ces équations font apparaître un équilibre non couplé quand :

$$p_1 n_{k2} n_{k3} - p_2 n_{k1} n_{k3} - p_3 n_{k1} n_{k2} = 0 \quad (10.392)$$

En additionnant la première équation intégrée (sur l'espace) et la seconde, puis la première et la troisième, on obtient les relations de conservation :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_1 N_{k1}}{|K_1|^2} + \frac{p_2 N_{k2}}{|K_2|^2} \right) = 0 \quad (10.393)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p_1 N_{k1}}{|K_1|^2} + \frac{p_3 N_{k3}}{|K_3|^2} \right) = 0 \quad (10.394)$$

Si toutes les ondes sont d'énergie positive, donc si la densité d'action du mode de plus haute fréquence n'est pas nulle, tandis que les deux autres le

sont, une partie de l'action est transférée *irréversiblement* aux deux modes de basse fréquence. D'autre part si l'onde de plus haute fréquence est à énergie négative et les deux autres à énergie positive on retombe sur une instabilité explosive. (Pour plus de détails, voir les références données ci-dessus.)

### c) Amortissement de Landau non linéaire. Turbulence faible

Deux ondes peuvent aussi interagir de manière non linéaire avec les particules moyennant la condition de résonance :

$$\omega_1 - \omega_2 = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{w} \quad (10.395)$$

qui est semblable à celle pour la résonance habituelle onde-particule qui conduit à l'amortissement de Landau linéaire, sauf qu'ici l'onde  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2, \omega_1 - \omega_2)$  est une onde virtuelle (qui ne satisfait pas la relation de dispersion linéaire—elle existe seulement à cause de la non linéarité) qui sert d'intermédiaire dans l'interaction. Cette interaction non linéaire permet à l'onde  $(\vec{k}_1, \omega_1)$  de transférer son énergie et sa quantité de mouvement à une autre onde  $(\vec{k}_2, \omega_2)$  et aux particules du plasma satisfaisant (10.395). Ce phénomène est analogue à la diffusion Compton. L'interaction peut se produire avec des ondes cohérentes [171] ou de phases aléatoires ([145], [172], [160]) ; dans le premier cas elle est naturellement limitée par le piégeage des particules. En une dimension elle est décrite ([161], [173]) par les équations :

$$L_1 n_{k1} = -C n_{k1} n_{k2} \quad (10.396)$$

$$L_2 n_{k2} = C n_{k2} n_{k1} \quad (10.397)$$

où  $C$ , la constante de couplage non linéaire pour ce processus, est proportionnelle à la valeur de  $(\partial F_0 / \partial w)$  pour  $w = (\omega_1 - \omega_2) / (k_1 - k_2)$ , avec ici  $L_n = (\partial / \partial t) + v_{gn} (\partial / \partial x) + 2\nu_n$ ,  $n = 1, 2$ . Si l'onde 1 est instable ( $\nu_1 < 0$ ) et l'onde 2 amortie ( $\nu_2 > 0$ ) ces équations conduisent à une saturation de l'instabilité. On voit aussi que ces équations sont identiques, aux constantes de couplage près, à celle d'un couplage à trois ondes d'énergie positive dans l'approximation des phases aléatoires, (10.389)–(10.391), quand le mode 3 est si fortement amorti que sa densité d'action ne prend jamais une amplitude significative et peut donc être négligée. Par conséquent, un tel couplage onde-onde (quasi modal) peut aussi conduire à la saturation de l'onde instable de plus haute fréquence.

La hiérarchie des interactions non linéaires onde-onde et onde-particule qui vient d'être présentée brièvement peut s'étendre aux ordres supérieurs (par exemple, interactions à quatre ondes, etc.). On a espéré obtenir ainsi, particulièrement dans

l'approximation des phases aléatoires, une description générale de ce qu'on appelle la *turbulence faible* des plasmas [172]. Certains aspects de cette hiérarchie (par exemple, la théorie quasi linéaire) se sont effectivement révélés très utiles dans divers problèmes. Malheureusement, on a trouvé que la turbulence faible n'était pas un cadre général valable pour analyser les états non linéaires observés dans les plasmas à la suite de l'évolution des instabilités. La présence de structures cohérentes dans l'espace de phase des particules et dans les ondes a nécessité des modifications de l'approximation des phases aléatoires dans la description de la hiérarchie des interactions non linéaires. Ces structures cohérentes et la dynamique chaotique compliquent encore le paysage. Et de fait, la turbulence des plasmas reste un sujet encore mal connu.

#### d) Ondes non linéaires. Solitons et cavitons

Pour certaines amplitudes des champs, les *ondes cohérentes* peuvent être modifiées de manière significative sans couplage avec d'autres ondes, et au-delà de ce que prévoient les couplages d'ondes simples. On ne mentionnera ici que deux situations de ce genre, l'une associée aux ondes acoustiques ioniques et l'autre aux oscillations de plasma électroniques et aux ondes acoustiques ioniques. Elles sont décrites par une théorie hydrodynamique des ondes où l'amortissement de Landau peut être négligé.

Les équations hydrodynamiques non linéaires qui décrivent les ondes acoustiques ioniques (équations adiabatiques pour les électrons, et de plasma froid pour les ions) font apparaître des structures d'onde du type *impulsion solitaire* et des ondes de choc [174]. Ainsi, dans un système de coordonnées se déplaçant avec la vitesse  $V$  de l'impulsion solitaire, c'est-à-dire  $x' = (x - Vt)$ , on trouve que le potentiel obéit à une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx'_D} \right)^2 = e^\phi + \left( \frac{V}{c_s} \right) \left[ \left( \frac{V}{c_s} \right)^2 - 2\phi \right]^{1/2} - \left( 1 + \frac{V}{c_s} \right) \quad (10.398)$$

avec  $x'_D = (x'/\lambda_{De})$  et  $\phi = (e\Phi/\kappa T_e)$ . Le plan de coordonnées  $(d\phi/dx'_D) \equiv \phi'$  et  $\phi$  et la solution solitaire sont représentés sur la figure 10.27(a). Le maximum du potentiel  $\Phi = \Phi_m$  se produit pour une vitesse donnée par :

$$2 \left( \frac{V}{c_s} \right)^2 = \frac{1 - \exp \phi_m}{\exp \phi_m - \phi_m - 1} \quad (10.399)$$

où  $\phi_m = e\Phi_m/\kappa T_e$ . Pour  $\Phi_m \rightarrow 0$  cela donne  $V = c_s$ , comme on s'y attendait. Lorsque  $\Phi_m$  croît,  $V$  croît aussi, mais pour que l'impulsion solitaire reste univaluée  $e\Phi_m$  ne doit pas dépasser  $(m_i V^2/2)$  ce qui donne  $\phi_m \approx 1.3$  et  $V \approx 1.6c_s$ . Au-delà de cette valeur, la vitesse des ions devient multivaluée et les ions reviennent en arrière, ce qui produit un choc —dit *choc acoustique ionique non collisionnel*.

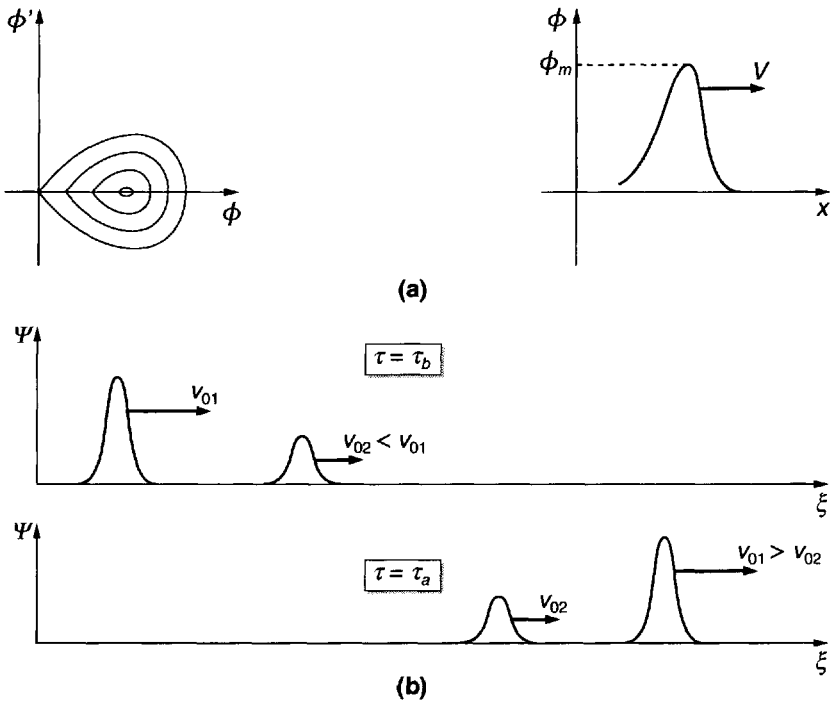


Figure 10.27 : Impulsions solitaires et solitons.

(a) Plan de phase du potentiel acoustique ionique et forme de l'impulsion solitaire acoustique ionique.

(b) Solitons KdV avant collision ( $\tau = \tau_b$ ), et après collision ( $\tau = \tau_a$ ).

Entre le régime linéaire et le régime de choc, c'est-à-dire pour  $\phi_m \ll 1$ , le potentiel obéit à l'équation non linéaire aux dérivées partielles de Kortweg-de Vries (KdV) ([175], [161]) :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi^3} = 0 \tag{10.400}$$

où  $\Psi = \epsilon \phi_1$  est le potentiel normalisé du premier ordre (en  $\epsilon$ ), et les variables lentes de l'analyse à plusieurs échelles sont  $\tau = \epsilon^{3/2} \omega_{pi} t$  et  $\xi = \epsilon^{1/2} [(x/\lambda_{De}) - \omega_{pi} t]$ . Cette équation est intégrable par les techniques de résolution des problèmes inverses [176]. Toute condition initiale qui est une

fonction localisée en  $\xi$  a des solutions asymptotiques du type *solitons* ou ondes dispersives (“rayonnement”). Un soliton unique est de la forme :

$$\Psi = 3v_0 \operatorname{sech}^2 \left[ \left( \frac{v_0}{2} \right)^{1/2} (\xi - v_0 \tau) \right] \quad (10.401)$$

où  $v_0 = (V/c_s) - 1$  est l'excès du nombre de Mach ( $V/c_s$ ) sur l'unité. La vitesse du soliton dépend de son amplitude, et des solitons d'amplitudes différentes peuvent donc entrer en collision. Les solitons ont l'importante propriété que dans une collision avec un autre soliton ils gardent leur forme [Fig. 10.27(b)]; les autres impulsions solitaires n'ont pas en général cette propriété. De manière générale les solitons sont le résultat d'un équilibre entre une faible non-linéarité [le second terme dans (10.400)] et une faible dispersion [le troisième terme dans (10.400)].

Décrivons maintenant le modèle non linéaire de Zakharov [177] pour le couplage des oscillations de plasma électroniques et des ondes acoustiques ioniques. Le point de départ de cette analyse non linéaire consiste à remarquer qu'il y a une échelle des temps courts, qui caractérise l'évolution électronique du plasma, et une échelle des temps longs, sur laquelle se met en place la dynamique acoustique ionique. A cause de la non-linéarité des équations hydrodynamiques, on suppose que les champs variants rapidement à l'échelle des temps courts du plasma électronique ont une amplitude lentement variable (dans l'espace et le temps), qui évolue à l'échelle de temps lente de la variation de densité ; les champs à variation lente de l'onde acoustique ionique sont modifiés par la force non linéaire moyennée sur l'échelle des temps courts—la force dite *pondéromotrice*. En une dimension, on obtient ainsi [178] le système d'équations non linéaires couplées :

$$i2\omega_{pe} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - 3v_{te}^2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} \approx -\omega_{pe}^2 \frac{n_s}{n_0} \mathcal{E} \quad (10.402)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) n_s \approx \frac{\epsilon_0}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |\mathcal{E}|^2 \quad (10.403)$$

où  $\mathcal{E}(x, t)$  est l'amplitude lentement variable du champ électrique à l'échelle des temps courts (onde de plasma électronique),  $n_s(x, t)$  est la fluctuation de densité à l'échelle des temps longs (ondes acoustiques ioniques) où l'on a admis la quasi-neutralité  $n_{es} = n_{is} = n_s$ , et  $c_s^2 = \kappa(T_e + 3T_i)/m_i$ . Les membres de gauche de (10.402) et (10.403) sont facilement identifiés comme les opérateurs linéaires donnant les ondes de plasma électroniques et les ondes acoustiques ioniques. Les membres de droite de ces équations viennent respectivement de la non-linéarité de courant et de la force pondéromotrice.



En variables normalisées (10.402) et (10.403) prennent les formes particulièrement simples :

$$i \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = NF \quad (10.404)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} |F|^2 \quad (10.405)$$

où  $F = (\sqrt{3}/2T)(m_i/m_e)^{1/2}(\epsilon_0 \mathcal{E}^2/4n\kappa T_e)^{1/2}$ ,  $T = (T_e + 3T_i)/T_e$ ,  $n = (3/4T)(m_i/m_e)(n_s/n_0)$ ,  $\tau = (2T/3)(m_e/m_i)\omega_{pe}t$  et  $\xi = (2T^{1/2}/3)(m_e/m_i)^{1/2}(x/\lambda_{De})$ .

La solution non linéaire la plus simple s'obtient pour une densité stationnaire, c'est-à-dire  $\partial^2 N/\partial \tau^2 = 0$ . On a alors :

$$N = -|F|^2 \quad (10.406)$$

et :

$$i \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + |F|^2 F = 0 \quad (10.407)$$

qui est l'équation de Schrödinger non linéaire (NLS). Cette équation peut aussi être résolue par les techniques de résolution des problèmes inverses. Sa seule solution stationnaire du type soliton est :

$$F(\xi, \tau) = (2\Omega)^{1/2} \operatorname{sech}(\Omega^{1/2}\xi) e^{i\Omega\tau} \quad (10.408)$$

qui est un *soliton enveloppe* du champ de l'onde de plasma électronique — appelé aussi un *soliton de Langmuir*. Associé à ce soliton de champ, il y a, d'après (10.406), une dépression de densité—un *caviton*, creusé par la force pondéromotrice (Fig. 10.28). En trois dimensions, le caviton piège une plus grande partie de l'énergie du champ électrique, augmentant ainsi la force pondéromotrice, qui à son tour creuse une plus grande dépression de densité, etc., tout cela conduisant à ce qu'on appelle un *effondrement* ; celui-ci est limité ultérieurement par les effets cinétiques des électrons traversant ces structures de champ électrique et absorbant leur énergie. L'état d'un plasma dans lequel il apparaît des cavitons et des effondrements de phases aléatoires a été baptisé *turbulence forte de Langmuir*. Bien que de telles structures aient été observées dans des simulations numériques et dans certaines expériences d'interaction faisceau-plasma (cf. chapitres 7 et 11), elles ne sont pas du tout universelles.

Il est intéressant de remarquer que les équations de Zakharov qui expriment le couplage non linéaire des ondes de plasma électroniques et des ondes acoustiques ioniques doivent évidemment contenir les interactions non linéaires à trois ondes, de deux ondes de plasma électroniques et d'une onde

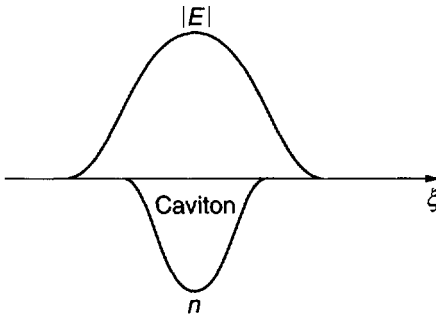


Figure 10.28 : Soliton stationnaire NLS du champ  $\vec{E}$  et caviton associé de dépression de la densité.

acoustique ionique décrits au paragraphe 10.7.3(a), [Fig. 10.26(e)]. On peut de plus montrer que les équations de Zakharov contiennent aussi les interactions paramétriques de trois ondes (deux ondes de plasma électroniques et une onde acoustique ionique) déclenchées par une onde de pompe du type plasma électronique, c'est-à-dire les interactions à quatre ondes [178]. Ainsi, en plus des interactions à trois ondes, l'instabilité dite *instabilité paramétrique oscillante à deux courants* [179] peut aussi se déduire de (10.402) et (10.403).

### 10.7.4 Échos d'ondes de plasma

Nous terminons ce bref exposé d'introduction aux effets non linéaires en décrivant un phénomène qui montre comment, dans un plasma sans collisions, la non-linéarité permet de retrouver l'information que la théorie linéaire décrit comme perdue dans l'amortissement de Landau. Rappelons que d'après les propriétés générales des équations de Vlasov-Maxwell (section 10.2), la réversibilité par rapport au temps (paragraphe 10.2.1) et la conservation de l'entropie (paragraphe 10.2.3) assurent qu'il n'y a pas perte d'information dans ce modèle non collisionnel de la dynamique d'un plasma. Et pourtant la version linéarisée de ce modèle a prédit l'amortissement de Landau des champs. Bien qu'il soit clair que la description linéarisée est à la fois très utile et incomplète, il est intéressant de voir comment la non-linéarité récupère l'information apparemment perdue dans l'amortissement de Landau linéaire.

Considérons un plasma stable à une dimension, uniforme, non collisionnel, excité de l'extérieur à  $t = 0$ , avec une perturbation de la densité de

charge, périodique de nombre d'onde  $k_r = k_1$ , c'est-à-dire dans la notation de la section 10.3 :

$$\rho_{\text{ext } a} = \rho_{a0} e^{ik_1 x} \delta(t) \quad (10.409)$$

La réponse linéaire du plasma est donnée par (10.118), de sorte que le champ électrique linéaire est :

$$E_1(x, \omega) = \frac{E_{a0}}{K_L(k_1, \omega)} e^{ik_1 x} \quad (10.410)$$

avec  $E_{a0} = \rho_{a0}/ik_1\epsilon_0$ . Comme on suppose le plasma stable, toutes les racines de  $K_L(k_1, \omega) = 0$ , donnant  $\omega(k_1)$ , se trouvent dans le demi-plan complexe  $\omega$  inférieur et l'on a donc :

$$E_1(x, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (10.411)$$

comme on s'y attend pour l'amortissement de Landau linéaire. D'autre part, la fonction de distribution linéaire est donnée par (10.103), et avec (10.410) on trouve :

$$f_1(w, x, \omega) = \frac{-iq}{m} \frac{f'_0(w)}{(\omega - k_1 w)} \frac{E_{a0}}{K_L(k_1, \omega)} e^{ik_1 x} \quad (10.412)$$

où l'on a supposé nulles les conditions initiales sur  $f_1$ . Par conséquent, asymptotiquement dans le temps, on trouve :

$$f_1(w, x, t \rightarrow \infty) = F_a(w) e^{ik_1 x} e^{-ik_1 \omega t} \quad (10.413)$$

qui ne tend pas vers zéro, mais reste oscillatoire et avec une structure fine en  $w$ , comme on l'a vu dans la description la plus simple des écoulements libres [paragraphe 10.2.2(c)]. Cette structure fine conduit aussi à  $n_1(x, t \rightarrow \infty) = 0$ .

Considérons maintenant un instant  $\tau \gg (\gamma_{LD})^{-1}$ , où  $\gamma_{LD}$  est le taux d'amortissement de Landau du zéro le plus élevé de  $K_L$  dans le plan complexe  $\omega$  [par exemple,  $\gamma_{LD} = -\omega_i$  donné par (10.214)]. A un tel instant on a  $E_1 \approx 0$  et  $n_1 \approx 0$ , mais  $f_1$  est oscillante. Appliquons alors une autre perturbation de la densité de charge, périodique dans l'espace et de nombre d'onde  $k_r = k_2$  :

$$\rho_{\text{ext } b} = \rho_{b0} e^{ik_2 x} \delta(t - \tau) \quad (10.414)$$

D'après la théorie linéaire, après un temps  $(t - \tau) \gg \gamma_{LD}^{-1}$  on aura à nouveau  $E_1 \approx 0$  et  $n_1 \approx 0$ , mais  $f_1$  sera la superposition linéaire de (10.413) et de :

$$f_1 = F_b(w) e^{ik_2 x} e^{-ik_2 \omega (t - \tau)} \quad (10.415)$$

Cependant, dans une analyse non linéaire de (10.86)–(10.88) on trouve que la fonction de distribution du second ordre a des termes qui sont le produit de (10.413) et (10.415), c'est-à-dire :

$$f_2 \sim F_a(w)F_b(w) \exp\{i(k_1 + k_2)x - i(k_1 + k_2)wt + ik_2w\tau\} \quad (10.416)$$

Pour une analyse détaillée, nous renvoyons le lecteur à [180]. D'après (10.415) il est clair que pour  $t = k_2\tau/(k_2 + k_1)$ , qui est plus grand que  $\tau$  pour  $k_1 < 0$ , le terme de mélange de phases disparaît et une densité finie du second ordre,  $n_2$  et un champ  $E_2$  vont apparaître avec un nombre d'onde  $k_3 = k_2 - |k_1|$ , comme représenté schématiquement sur la figure 10.29(a).

On peut aussi produire des échos de plasma dans l'espace [Fig. 10.29(b)], et aussi des échos d'ordres supérieurs, qui sont beaucoup plus faciles à observer expérimentalement<sup>19</sup>, [181]. Ainsi, en excitant de l'extérieur le plasma à  $x = 0$  avec une source de fréquence  $\omega_1$  et à  $x = L$  avec une source de fréquence  $\omega_2$ , où  $L$  est plus grand que la distance d'amortissement de Landau du mode excité à la fréquence  $\omega_1$ , on produit un écho à la fréquence  $\omega_3 = \omega_2 - \omega_1$  qui apparaît en aval de  $L$  à une distance  $L' = (\omega_2/\omega_3)L$ . La réversibilité non linéaire de l'amortissement non collisionnel linéaire est ainsi mise en évidence.

## 10.8 Appendice

### A10-1 Fonction de dispersion des plasmas [117]

Cette fonction est définie comme la transformée de Hilbert d'une gaussienne :

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta} dx \quad \text{pour } \zeta_i > 0 \quad (10.417)$$

Elle satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dZ}{d\zeta} = -2[1 + \zeta Z(\zeta)] \quad (10.418)$$

comme on le voit facilement à partir de (10.417).

#### a) Prolongement analytique

D'après la définition (10.417),  $Z(\zeta)$  est une fonction analytique de  $\zeta$  dans le demi-plan supérieur. Son prolongement analytique dans le demi-plan inférieur est donné par :

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta} dx + i2\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2} \quad \text{pour } \zeta_i < 0 \quad (10.419)$$

---

19. Les observations expérimentales d'échos spatiaux dans un plasma sont cependant très sensibles aux effets de collisions car les expériences doivent être faites dans un plasma stationnaire.

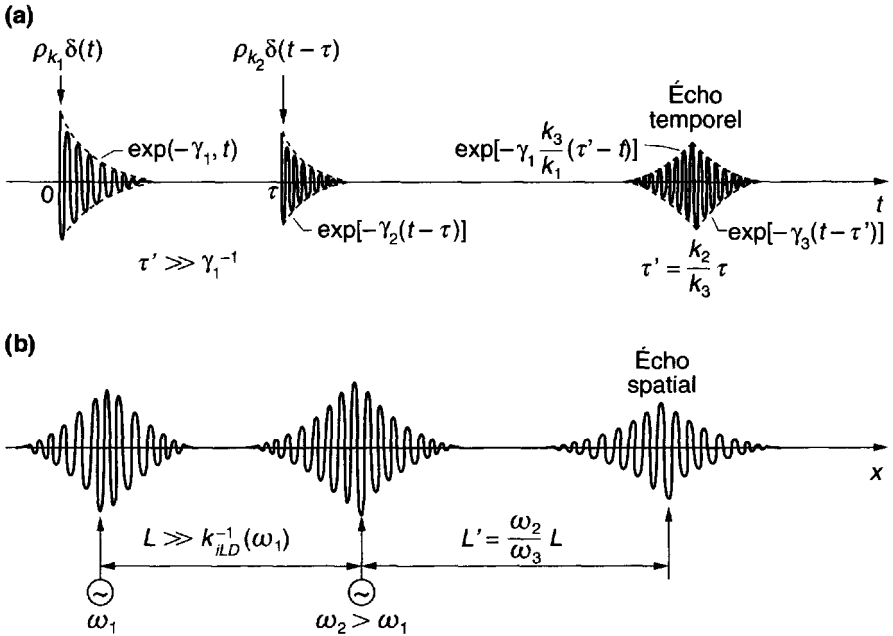


Figure 10.29 : (a) Écho temporel de plasma. (b) Écho spatial de plasma.  $\gamma_j = -\omega_i(k_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$  sont les taux d'amortissement en Landau.

ou, avec le contour de Landau  $\Gamma$  représenté sur la figure 10.18 :

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} \frac{e^{-x^2}}{x - \zeta} dx \tag{10.420}$$

qui est valable dans tout le plan complexe  $\zeta$ .

Pour calculer la fonction de dispersion des plasmas pour toute valeur de  $\zeta$ , il est commode de l'exprimer autrement. En remarquant que

$$\int_0^{+\infty} e^{i(\zeta-x)s} ds = \frac{-1}{i(\zeta-x)} \text{ pour } \zeta_i > 0 \tag{10.421}$$

on peut récrire (10.417) sous la forme :

$$Z(\zeta) = i \int_0^{+\infty} e^{-s^2/4} e^{i\zeta s} ds \tag{10.422}$$

qui est proportionnelle (à une constante complexe près) à la transformée de Laplace d'une gaussienne. En calculant le carré de l'exposant et en changeant de variables, on trouve que ce résultat peut aussi s'écrire :

$$Z(\zeta) = i2e^{-\zeta^2} \int_{-\infty}^{i\zeta} e^{-t^2} dt = i\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2} [1 + \text{erf}(i\zeta)] \tag{10.423}$$

où

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (10.424)$$

est la fonction erreur [268]. On peut montrer par prolongement analytique que l'expression (non singulière) (10.423) qui est valable, au départ, pour  $\zeta$  dans le demi-plan supérieur, est valable pour tout  $\zeta$  complexe.

## b) Propriétés et valeurs spéciales

On peut démontrer les relations de symétrie suivantes :

$$Z(-\zeta) = -Z(\zeta) + i2\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2} \quad (10.425)$$

$$Z(\zeta^*) = Z(\zeta^*) - i2\sqrt{\pi}e^{-(\zeta^*)^2} \quad (10.426)$$

et par conséquent :

$$Z(-\zeta) = -[Z(\zeta^*)]^* \quad (10.427)$$

$$Z(\zeta^*) = -[Z(-\zeta)]^* \quad (10.428)$$

En posant  $\zeta = \zeta_r + i\zeta_i$ , on trouve pour  $\zeta_i = 0$  :

$$\begin{aligned} Z(\zeta_r) &= i\sqrt{\pi}e^{-\zeta_r^2} [1 + \operatorname{erf}(i\zeta_r)] \\ &= -2e^{-\zeta_r^2} \int_0^{\zeta_r} e^{t^2} dt + i\sqrt{\pi}e^{-\zeta_r^2} \end{aligned} \quad (10.429)$$

Les deux fonctions  $Z(\zeta_r)$  et  $Z'(i\zeta_i)$  sont représentées sur la figure 10.30. Pour  $\zeta_r = 0$  on a :

$$Z(i\zeta_i) = i\sqrt{\pi}e^{\zeta_i^2} [1 - \operatorname{erf}(\zeta_i)] \quad (10.430)$$

On voit que  $Z(\zeta = 0) = i\sqrt{\pi}$ , et  $Z'(\zeta = 0) = -2$ .

## c) Développement pour les petits arguments

Pour  $|\zeta| \ll 1$  on a un développement convergent en série de puissances :

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\pi}e^{-\zeta^2} - 2\zeta \left[ 1 - 2\frac{\zeta^2}{3} + 4\frac{\zeta^4}{15} - 8\frac{\zeta^6}{105} + \dots \right] \quad (10.431)$$

## d) Développement pour les grands arguments

Pour  $|\zeta| \gg 1$  on a la série asymptotique :

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\pi}\sigma e^{-\zeta^2} - \frac{1}{\zeta} \left[ 1 + \frac{1}{2\zeta^2} + \frac{3}{4\zeta^4} + \frac{15}{8\zeta^6} + \dots \right] \quad (10.432)$$

avec :

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{if } \zeta_i > 1/|\zeta_r| \\ 1 & \text{if } |\zeta_i| < 1/|\zeta_r| \\ 2 & \text{if } -\zeta_i > 1/|\zeta_r| \end{cases} \quad (10.433)$$

Pour des calculs plus détaillés de  $Z(\zeta)$  voir l'appendice A dans la publication de G. R. Smith, *Phys. Fluids*, 27, 1499 (1984). Des tables de valeurs de  $Z(\zeta)$  sont données en [117].

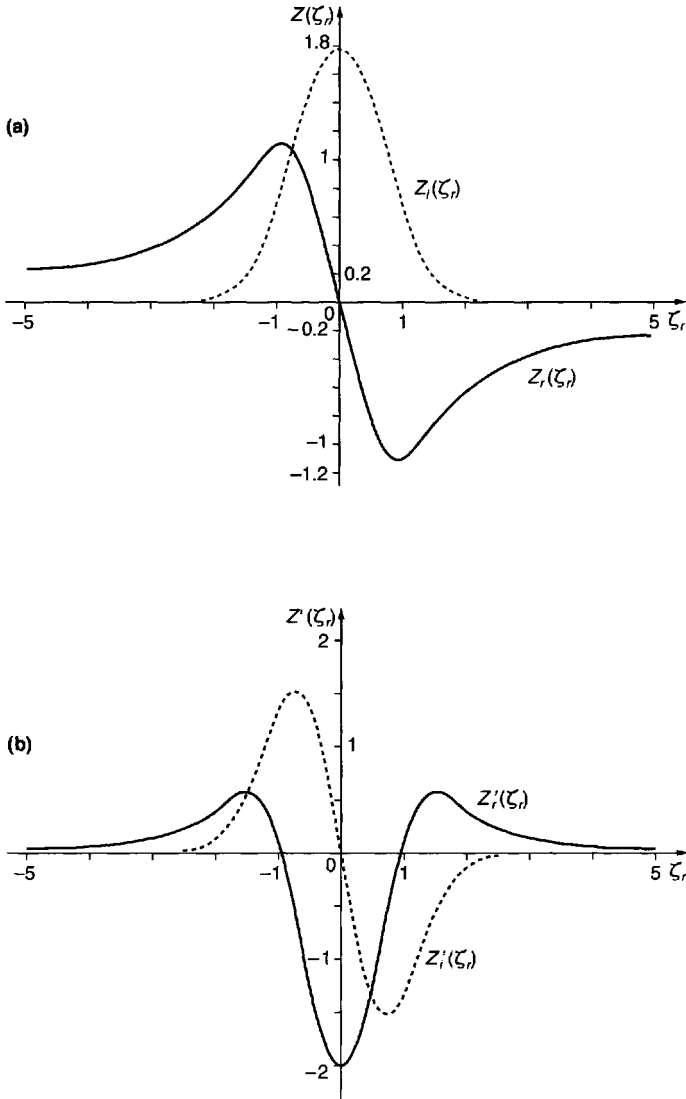


Figure 10.30 : Fonction de dispersion des plasmas.

(a)  $Z(\zeta_r)$  pour les valeurs réelles de l'argument  $\zeta = \zeta_r$ .

(b)  $Z'(\zeta_r)$  pour les valeurs réelles de l'argument  $\zeta = \zeta_r$ .

### e) Formes approchées

Diverses formes approchées, avec des domaines de validité limités, peuvent s'obtenir en remplaçant la fonction gaussienne dans l'intégrand de  $Z(\zeta)$  par diverses fonctions en forme de cloche. On peut ainsi arriver à l'approximation dite à *deux pôles* [182] ou à l'approximation à *trois pôles* [183]. Le lecteur peut consulter ces références pour voir les formes explicites de ces approximations et leurs limitations.

## 10.9 Problèmes

### P10-1 Écoulement libre et équations hydrodynamiques

Considérons l'équation de l'écoulement libre non collisionnel (ou balistique) pour la fonction de distribution à une dimension ( $\vec{w} = \hat{x}w$ ,  $\vec{r} = \hat{x}x$ ) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + w \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (10.434)$$

où  $f = f(w, x, t)$ .

- a) On suppose que la fonction de distribution initiale est une maxwellienne avec une perturbation périodique dans l'espace :

$$f(w, x, t = 0) = f_M(w)[1 + \epsilon \cos kx] \quad (10.435)$$

où  $\epsilon$  et  $k$  décrivent, respectivement, l'amplitude et la période de la perturbation,

$$f_M(w) = \frac{n_0}{v_t \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2v_t^2}\right) \quad (10.436)$$

où  $n_0$  est la densité des particules pour  $\epsilon = 0$ , et  $v_t = (\kappa T/m)^{1/2}$  est la vitesse thermique. Déterminer la densité des particules  $n(x, t)$  qui en résulte.

- b) On considère la perturbation de densité  $[n(x, t) - n_0]$  obtenue en (a) ; elle décroît dans le temps ; représenter graphiquement sa variation et montrer sa durée de vie typique,  $\tau$ .
- c) Montrer que l'équation (10.434) pour  $f$  de l'écoulement libre non collisionnel conserve l'énergie et l'entropie et que par conséquent il ne peut pas y avoir de perte de l'information contenue, par exemple, dans les conditions initiales. Et pourtant, les résultats de la partie (a) montrent que la perturbation de densité s'amortit. Comment cela se produit-il ?
- d) Montrer que les équations des deux premiers moments dans l'espace des vitesses de (10.434), fermées par l'hypothèse d'une pression scalaire  $p$  avec une équation d'état  $p = Cn^\gamma$  ne font apparaître aucun amortissement de la perturbation initiale de densité. [Pour montrer cela, linéariser les équations de moment au voisinage d'un équilibre simple  $n_0 = \text{constante}$ ,  $p_0 = \text{constante}$ , et  $v_0 = 0$  et résoudre pour  $n_1(x, t)$  donné  $n_1(x, t = 0) = \epsilon n_0 \cos kx$  et  $v_1(x, t = 0) = 0$ .] Pourquoi en est-il ainsi ?
- e) A partir des résultats des parties (c) et (d) on voit que l'amortissement de la densité trouvé dans (a) est un effet cinétique, non collisionnel. Expliquer physiquement comment cette sorte d'amortissement se produit pour la la densité hydrodynamique.



## P10-2 Écoulement libre avec des perturbations initiales générales

On considère à nouveau l'équation de l'écoulement libre non collisionnel (10.434), mais maintenant pour une distribution initiale :

$$f(w, x, t = 0) = f_0(w) + g(w, x) \tag{10.437}$$

ayant une perturbation spatiale arbitraire de vitesse donnée par  $g(w, x)$  superposé à une fonction de distribution  $f_0(w)$  uniforme arbitraire.

- a) Résoudre (10.434) par transformation de Fourier-Laplace, avec la condition initiale donnée par (10.437), et déterminer la transformée dans l'espace des vecteurs  $\vec{k}$ , de la perturbation de densité des particules en fonction du temps ; montrer qu'elle est donnée par :

$$n_1(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w, k) e^{-ikwt} dw \tag{10.438}$$

- b) Déterminer la décroissance dans le temps des diverses composantes spectrales de la variation spatiale de la perturbation initiale, quand la forme de celle-ci dans l'espace des vitesses est régulière et localisée, par exemple donné par :

$$g(w, k) = G(k) \exp \left[ \frac{-w^2}{(\Delta w)^2} \right] \tag{10.439}$$

où  $(\Delta w)$  est la largeur typique de  $g$  dans l'espace des vitesses et  $G(k)$  le spectre de variation spatiale de  $g$ .

- c) Trouver la perturbation de densité pour une perturbation initiale singulière en  $w$  (c'est-à-dire du type faisceau), par exemple :

$$g(w, k) = G(k) \delta(w - v_0) \tag{10.440}$$

et remarquer qu'elle ne disparaît pas. On peut appeler cela un "mode à une seule particule". Remarquer alors que pour des conditions initiales sur  $f$  suffisamment régulières, la perturbation de densité disparaît par "mélange de phases" (expliquer ce terme) ; cela est souvent utilisé comme un argument pour négliger les conditions initiales. Cependant, des conditions initiales singulières sur  $f$  conduisent à une perturbation de densité persistante et ne peuvent donc être négligées pour déterminer la réponse d'un plasma.

## P10-3 Distribution d'équilibre dans un plasma inhomogène

On considère un plasma inhomogène confiné avec  $\vec{B}_0 = \hat{z} B_0(x)$  et  $n_0 = n_0(x)$ .

- a) A partir des trajectoires des particules dans un champ magnétique (Chapitre 2), montrer que les constantes du mouvement sont :

$$c_1 = w_x^2 + w_y^2 \equiv w_\perp^2 \tag{10.441}$$

$$c_2 = w_z \tag{10.442}$$

et

$$c_3 = w_y + \frac{q}{m} \int^x B_0(x') dx' \equiv P_y / m \tag{10.443}$$

où  $P_y$  est la quantité de mouvement canonique (généralisée) dans la direction  $y$ .

- b) Écrire la distribution d'équilibre  $f_0(x, w)$  comme une fonction des trois constantes (10.441)–(10.443) et montrer qu'elle satisfait l'équation de Vlasov.
- c) Si les échelles de longueur  $L_B$  et  $L_n$  des variations du champ magnétique et de la densité sont toutes deux beaucoup plus grandes que les rayons de Larmor des particules, montrer que l'on a :

$$f_0 \approx F_0(w_\perp^2 w_z) \left[ 1 - \frac{1}{L_n} \left( \frac{w_y}{\omega} + x \right) \right] \quad (10.444)$$

où  $\Omega = qB_0(x=0)/m$  est la fréquence cyclotron.

## P10-4 Conservation non relativiste de l'énergie et de la quantité de mouvement

En partant de l'équation de Vlasov non relativiste (10.1) et des équations de Maxwell, établir la forme non relativiste de (10.72)–(10.74), (10.80), et (10.81)–(10.85).

## P10-5 Solution par la méthode des caractéristiques

L'équation de Vlasov linéarisée en une dimension (10.93), résolue par transformation de Fourier-Laplace, donne (10.103) pour la fonction de distribution  $f_{s1}(w, k, \omega)$ . Une méthode plus générale de résolution de (10.93) est celle des caractéristiques (brièvement exposée dans le paragraphe 10.2.2 b)) ; elle est particulièrement utile dans les plasmas inhomogènes.

- a) Montrer par la méthode de caractéristiques que (10.93) peut s'écrire :

$$\frac{df_{s1}(w', x', t')}{dt'} = -\frac{q_s}{m_s} E_1(x', t') \frac{df_{s0}(w')}{dw'} \quad (10.445)$$

d'où par intégration de  $t' = 0$  à  $t' = t$  :

$$f_{s1}(w, x, t) = f_{s1}(w', x', t' = 0) - \frac{q_s}{m_s} \int_0^t E_1(x', t') \frac{df_{s0}(w')}{dw'} dt' \quad (10.446)$$

- b) En négligeant les conditions aux limites pour  $x = \pm\infty$ , introduire les composantes de Fourier spatiales des champs  $f_{s1}$  et  $E_1$ , et avec les (orbites) caractéristiques trouvées en (a), trouver la transformée de Laplace de (10.446). Montrer ainsi qu'on arrive au même résultat que dans (10.103).

*Note* : Après l'introduction des composantes de Fourier spatiales des champs, il est utile de voir que le second terme dans le membre de droite de l'équation (10.446) pour  $f_{s1}(w, k, t)$  est une intégrale de convolution ; on utilisera donc la formule de transformation de Laplace d'une convolution.

## P10-6 Plasma de Lorentz-Cauchy : susceptibilité

Montrer que pour une distribution d'équilibre normalisée à une dimension (10.135) de Lorentz-Cauchy, la susceptibilité est donnée par (10.136)–(10.138). [Effectuer en détail les intégrations de contour indiquées dans (10.133) et (10.134).]

### P10-7 Plasma de Lorentz-Cauchy : réponse aux conditions initiales

La susceptibilité électronique longitudinale linéaire d'un plasma (avec un fond neutralisant d'ions supposés immobiles), pour une distribution d'équilibre de Lorentz-Cauchy, est donnée par (10.138) :

$$\chi_L(k_r, \omega) = \frac{-\omega_p^2}{(\omega + i|k_r|a)^2} \tag{10.447}$$

valable pour tout  $k_r$  ( $k$  réel) et tout  $\omega$  complexe.

a) Supposer qu'à  $t = 0$  la perturbation de la fonction de distribution est donnée par :

$$f_1(w, x, t = 0) = \epsilon n_0 v_t \hat{f}'_{0L}(w) e^{ik_r x} \tag{10.448}$$

où  $|\epsilon| \ll 1$  et  $\hat{f}'_{0L}$  est la dérivée de la fonction de distribution normalisée de Lorentz-Cauchy. Déterminer le champ électrique  $E_1(x, t)$  dans le plasma, qui résulte de cette excitation initiale. Comparer cela au champ de réponse collective de la fonction de Green, c'est-à-dire  $E_{coll}(x, t)$  pour un champ externe d'excitation  $E_{exc}(x, t) = e^{ik_r x} \delta(t)$ . Pour une excitation externe arbitraire, peut-on négliger aux temps longs l'effet de la condition initiale donnée ?

b) On considère maintenant la condition initiale :

$$f_1(w, x, t = 0) = \epsilon n_0 \delta(w - v_0) e^{ik_r x} \tag{10.449}$$

Déterminer le champ électrique aux temps longs qui en résulte dans le plasma, et comparer au champ de réponse collective pour une excitation externe arbitraire.

c) Pour quels types de conditions initiales de la perturbation de la fonction de distribution le champ de réponse collective est-il dominant aux temps longs ?

d) Déterminer le champ électrique  $E_1(x, t)$  pour  $f_1(w, x, t = 0) = \delta'(w) \cos k_r x$ . Remarquer que par suite de la non-analyticité de  $\chi_L$  en  $k_r$ , on doit définir deux fonctions de réponse distinctes pour  $k_r > 0$  et  $k_r < 0$  pour pouvoir effectuer correctement la transformation de Fourier inverse en  $k$  (cf. par exemple [127]).

### P10-8 Instabilité faisceau d'électrons-plasma : solutions approchées

a) Montrer que pour la relation de dispersion (7.10) du système faisceau d'électrons-plasma, le taux de croissance ne peut pas s'obtenir avec (10.169), bien que l'on ait  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ . Expliquer pourquoi.

b) Peut-on étendre l'analyse de la section 10.3.4 de sorte que le taux de croissance (7.10) soit obtenu correctement ?

### P10-9 Flux d'énergie moyen pour les ondes

Pour les champs périodiques dans l'espace et le temps, la moyenne de petite amplitude du flux d'énergie de perturbation dans un faisceau d'électrons à une dimension de densité  $n_0$  et de vitesse  $v_0$  est donnée par (6.63) :

$$\langle S \rangle = \frac{mv_0}{2} \operatorname{Re}(v_1 \Gamma_1^*) \tag{10.450}$$

où  $\Gamma_1 = n_0 v_1 + n_1 v_0$  est la perturbation du flux de particules.

- a) Montrer, par la méthode multifaisceaux de Dawson pour représenter un plasma électronique avec une distribution d'équilibre  $\hat{f}_0(w)$ , que la moyenne de petite amplitude du flux d'énergie dans la dynamique à une dimension de ce plasma est donnée par :

$$\langle S \rangle = -\frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{2} \frac{\omega_p^2}{k_r^2} \frac{\omega_r}{k_r} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \hat{f}_0(w)}{\left(w - \frac{\omega_r}{k_r}\right)^3} dw \quad (10.451)$$

- b) A partir de la partie réelle de la permittivité  $K_{Lr} \equiv \text{Re}[K_L(k_r, \omega_r)]$  pour un plasma électronique à une dimension avec une distribution d'équilibre  $\hat{f}_0(w)$   $f_0(w)$ , montrer que le résultat de la partie (a), c'est-à-dire l'équation (10.451), peut aussi s'écrire :

$$\langle S \rangle = -\frac{\epsilon_0 |E_1|^2}{4} \omega_r \frac{\partial K_{Lr}}{\partial k_r} \quad (10.452)$$

ce qui, soit dit en passant, est un résultat général de l'électrodynamique des milieux continus, pour la moyenne du flux d'énergie en champs électrostatiques [361].

## P10-10 Développement asymptotique de la susceptibilité pour $v_p \gg v_{Te}$

Montrer que bien que le développement en série de Taylor de l'intégrand dans (10.170) pour  $|v_p| \gg |w|$  soit une série convergente, la série obtenue pour l'intégrale, donnée en (10.209), est seulement une série asymptotique.

Note : pour la maxwellienne (10.208), utiliser la formule 3.461-2, p. 337 de [266], pour calculer

$$\frac{w^{2n+2}/v_p^{2n+2}}{w^{2n}/v_p^{2n}}$$

et montrer ainsi que pour toute valeur élevée de  $(v_p/v_{Te})$  il y a toujours une valeur de  $n$  au-delà de laquelle la série diverge.

## P10-11 Champs dans les ondes longitudinales faiblement amorties

- a) A partir de la susceptibilité électronique approchée qui apparaît dans (10.210), et en se rappelant comment elle relie la densité de charge au champ électrique (10.108), déterminer la relation entre  $(n_{1e}/n_{0e})$  et  $(e\Phi_1/\kappa T_e)$  ; déterminer de même  $(n_{i1}/n_{i0})$  en fonction de  $(e\Phi_1/\kappa T_e)$  et tracer les courbes de  $E_1$  et  $(e\Phi_1/\kappa T_e)$ ,  $(n_{1e}/n_{e0})$  et  $(n_{i1}/n_{i0})$  en fonction de  $x$ , à  $t$  donné, et montrer précisément les relations de phase entre ces quantités.
- b) Répéter la partie (a) pour les ondes acoustiques ioniques, avec la susceptibilité donnée par (10.216) et (10.217). Calculer  $(n_{i1}/n_{i0})$  soigneusement pour mettre en évidence la quasi-neutralité de l'onde acoustique ionique.

## P10-12 Coupure relativiste de l'amortissement de Landau

La fonction de distribution maxwellienne relativiste est [277] :

$$\hat{f}_{RM} = C \exp \left[ -\frac{(\gamma - 1)}{\epsilon_T} \right] \quad (10.453)$$

avec  $\gamma^2 = 1 + (p/mc)^2$ ,  $\varepsilon_T = \kappa T/mc^2$ , et  $C^{-1} = 4\pi(mc)^3 \varepsilon_T^2 K_2(\varepsilon_T^{-2}) \exp(\varepsilon_T^{-2})$ ,  $K_2$  étant la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce et d'ordre deux.

- a) Montrer que dans (10.453) il n'y a pas de particules de vitesse plus grande que  $c$ .
- b) A partir de la relation de dispersion des ondes de plasma électroniques (10.211) montrer que le nombre d'onde réel pour que la vitesse de phase soit égale à  $c$  est

$$k_{rc}^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2} \left( 1 + 3 \frac{\kappa T}{mc^2} \right) \tag{10.454}$$

- c) Avec la fonction de distribution relativiste (10.453), montrer que l'amortissement de Landau s'annule exponentiellement lorsque  $k_r$  descend vers la valeur  $k_{rc}$  donnée par (10.454).
- d) Obtenir ces résultats en résolvant de manière approchée l'équation de Vlasov relativiste linéarisée (cf. [184]).

### P10-13 Propriétés des racines de la relation de dispersion des ondes de plasma électroniques

A partir des propriétés de la fonction  $Z$  données dans l'appendice A10-1, montrer que les solutions de la relation de dispersion (10.236) ont les propriétés suivantes :

- a) Toutes les solutions ont  $\omega_i(k_r) < 0$ .
- b) Si  $\omega(k_r)$  est solution,  $-\omega^*(k_r)$  l'est aussi.
- c) Toutes les solutions sont des zéros simples.

### P10-14 Tenseur de susceptibilité pour un plasma isotrope, non magnétisé

En partant des composantes du tenseur de susceptibilité données par (10.256), montrer que celui-ci est :

$$\vec{\chi}(\vec{k}_r, \omega) = \begin{pmatrix} \chi_T & 0 & 0 \\ 0 & \chi_T & 0 \\ 0 & 0 & \chi_L \end{pmatrix} \tag{10.455}$$

avec :

$$\chi_T(k_r, \omega) = -\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}_0(w_L)}{\omega - k_r w_L} dw_L \tag{10.456}$$

$$\chi_L(k_r, \omega) = \frac{1}{k_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{d\hat{\Phi}_0}{dw_L}}{\omega - k_r w_L} dw_L \tag{10.457}$$

et :

$$\hat{\Phi}_0(w_L) = \sum_s \omega_{ps}^2 \int \hat{f}_{s0}(w^2) \underline{dw}_T \tag{10.458}$$

où l'une des coordonnées ( $L$ ) est prise suivant  $\vec{k}_r$  et les deux autres ( $T$ ) perpendiculaires à  $\vec{k}_r$ . (N.B.:  $k_r$  est le module de  $\vec{k}_r$ .)

Montrer que  $\chi_T$  peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\chi_T(k_r, \omega) = \frac{1}{2\omega k_r^2} \int \frac{\vec{k}_r \times (\vec{w} \times \vec{k}_r) \cdot \frac{\partial \hat{\Phi}_0}{\partial \vec{w}}}{\omega - \vec{k}_r \cdot \vec{w}} \underline{dw} \tag{10.459}$$

qui est indépendante du système de coordonnées choisi.

### P10-15 Épaisseur de peau collisionnelle

- a) Montrer que si on tient compte des collisions électron-neutre la relation de dispersion de l'onde transverse (10.270) devient :

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + i\nu_{en})} \quad (10.460)$$

où  $\nu_{en}$  est la fréquence de collisions électron-neutre, et où l'on a négligé le mouvement des ions.

- b) Dans la limite  $\omega_r \rightarrow 0$  déterminer à partir de (10.460) la profondeur de pénétration  $(k_i)^{-1}$  d'une onde transverse. C'est l'épaisseur de peau collisionnelle. La comparer à l'épaisseur de peau (10.272) dans un plasma sans collisions, et à l'épaisseur de peau non collisionnelle anormale (10.273). Dans quelles conditions chacune d'entre elles est-elle physiquement dominante?

### P10-16 Analogie du champ électrique pour la résolution de la relation de dispersion de Vlasov

- a) On considère la relation de dispersion électrostatique de Vlasov au sens de van Kampen-Case, c'est-à-dire pour tout  $k = k_r$  réel et avec l'intégration sur  $w_k$  le long de l'axe réel. Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$k_r^2 = -\omega_p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{F}'_0(x/k_r)}{\omega - x} dx \quad (10.461)$$

où l'on a simplement posé  $k_r w_k = x$ .

- b) Rappelons que dans la théorie du potentiel des distributions de charge statique, une distribution continue de charges linéaires perpendiculaire au plan  $x-y$ , et réparties le long de l'axe  $Ox$  avec la densité de charge linéaire  $\lambda(x)$ , produit un champ électrique dans le plan  $x-y$  qu'on peut représenter dans le plan complexe  $z$ ,  $z = x + iy$  par la formule :

$$E_x - iE_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(x)}{z - x} dx \quad (10.462)$$

Par conséquent, on voit que la résolution de (10.461) pour  $\omega$  complexe est équivalente à l'introduction d'une distribution de charges linéaires sur l'axe réel  $Ox$  avec la densité  $\lambda(x) = -2\pi\epsilon_0\omega_p^2\hat{F}'_0(x/k_r)$  et à la recherche des positions dans le plan complexe  $z$  où  $E_x$  est réel et positif, avec  $E_y = 0$ .

- c) Pour une maxwellienne  $\hat{F}_0$ , tracer le champ électrique analogue dans le plan  $x-y$  et en déduire qu'il n'y a pas de solutions  $\omega$  dans les deux demi-plans inférieur et supérieur du plan complexe. Toutes les solutions doivent être sur l'axe réel et elles forment un spectre continu.
- d) Montrer, par la même méthode d'analogie, que si la distribution maxwellienne est coupée pour  $v > c$ , alors il y a aussi des solutions discrètes avec  $\omega$  réel.

### P10-17 Orthogonalité des fonctions propres de Case

Montrer que les fonctions propres de l'équation intégrale (10.300) et de son adjointe (10.312) satisfont la relation d'orthogonalité (10.315).

Note : multiplier (10.305) par  $F_{1\omega}$ , et l'équation équivalente de (10.312)-(10.314) par  $F_{1\omega}$ , et intégrer leur différence sur  $w_k$ .

### P10-18 Modèle BGK de collisions : relation de dispersion

a) En partant de la susceptibilité longitudinale (10.322) déduite de l'équation électrostatique de Vlasov à une dimension avec des collisions, représentées par le modèle BGK (Bhatnagar, Gross, Krook), montrer que pour une distribution maxwellienne la susceptibilité longitudinale est donnée par :

$$\chi_L(k, \omega) = \frac{-(\omega_p^2/k^2 v_t^2) Z'(\zeta)}{1 + i(\nu/kv_t) Z(\zeta)} \tag{10.463}$$

où  $v_t^2 = 2\kappa T/m$ ,  $\zeta = (\omega + i\nu)/|k|v_t$ ,  $Z(\zeta)$  est la fonction de dispersion des plasmas, et  $Z'(\zeta)$  sa dérivée—définies toutes deux dans l'appendice A10-1.

b) Pour un faible taux de collisions, déterminer la relation de dispersion pour les ondes de plasma électroniques et les ondes acoustiques ioniques faiblement amorties, et pour chaque onde montrer comment l'effet des collisions intervient à côté de l'amortissement de Landau.

### P10-19 Relaxation dans le modèle de collisions de Lenard-Bernstein

Montrer que le modèle de collisions (10.329) satisfait la conservation des particules mais ni la conservation de la quantité de mouvement ni celle de l'énergie. Montrer ainsi qu'il donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w \rangle = -\nu_e \langle w \rangle \tag{10.464}$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle w^2 \rangle = -2\nu_e \langle w^2 - v_{te}^2 \rangle \tag{10.465}$$

### P10-20 Diffusion quasi linéaire dans l'approximation des phases aléatoires

On considère l'action d'un grand nombre d'ondes électrostatiques sur le mouvement à une dimension d'une particule. Le mouvement non perturbé est donné par  $x = x_0 + w_0 t$  et la perturbation de vitesse par :

$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{q}{m} \sum_k E_k \exp[i(kx - \omega_k t)] \tag{10.466}$$

a) En portant le mouvement non perturbé pour  $x$  dans (10.466), calculer  $w_1^2$  et sa moyenne sur les positions initiales (phases)  $x_0$ . Montrer ainsi que l'on a :

$$\langle w_1^2 \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} w_1^2 dx = \sum_k (q/m)^2 |E_k|^2 \left\{ \frac{\sin[(kw_0 - \omega_k)t/2]}{(kw_0 - \omega_k)/2} \right\}^2 \tag{10.467}$$

b) Le coefficient de diffusion est défini comme :

$$D = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta \langle \Delta w^2 \rangle}{2\delta t} \tag{10.468}$$

où  $\langle \Delta w^2 \rangle = \langle w^2 - w_0^2 \rangle = \langle w_1^2 \rangle$ . Montrer en utilisant le résultat de la partie (a) que :

$$D = \pi \left( \frac{q}{m} \right)^2 \sum_k |E_k|^2 \delta(kw - \omega_k) \quad (10.469)$$

### P10-21 Puissance dissipée dans un état stationnaire produit par la diffusion quasi linéaire et les collisions

En se servant de  $D_{QL}$  déterminé dans le problème P10-20, montrer que (10.378) est identique à (10.203) sommé sur le spectre des ondes.

### P10-22 Création de courant dans un plasma [157]

a) Montrer que pour des champs dans un plasma tels que  $D_{QL}$  puisse être prise comme une constante  $D_0$  pour  $w_1 \leq w \leq w_2$  avec  $w_1 \geq 3.5v_{Te}$  et  $(D_0/v_{Te}^2\nu_0) \gg 1$ , où  $\nu_0$  est donné par (10.328), la solution (10.380) pour  $f_e$  dans la région de résonance est pratiquement plate et a une valeur approximativement égale à  $\hat{f}_M(w_1)$ .

b) A partir du résultat de la partie (a) montrer que la densité de courant créée est :

$$J \approx -en v_{Te}^2 \hat{f}_M(w_1) \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2v_{Te}^2} \right) \quad (10.470)$$

et la puissance dissipée :

$$p \approx n_0 m v_{Te}^3 \nu_0 (Z_i + 2) \hat{f}_M(w_1) \ln \frac{w_2}{w_1} \quad (10.471)$$

On voit que, dans la mesure où  $D_0$  est donné par l'expression de la partie (a), ces résultats sont indépendants de l'amplitude du champ de l'onde. Expliquer pourquoi.

### P10-23 Relations de Manley-Rowe pour les couplages cohérents onde-onde

a) En partant des équations (10.383)–(10.385) couplées non linéairement pour trois ondes cohérentes, établir les équations (10.387) et (10.388) de conservation de l'action.

b) Généraliser ces résultats à quatre ondes couplées non linéairement.

### P10-24 Équations des ondes couplées dans l'approximation des phases aléatoires

a) En partant des équations (10.383)–(10.385) pour le couplage non linéaire de trois ondes cohérentes, introduire un déphasage dans les conditions de résonance ( $\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 = \delta\omega$ ,  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3 = \delta\vec{k}$ ) et étudier le cas de nombreuses ondes (au même ordre de non-linéarité) et avec des phases aléatoires. En déterminant par itérations les amplitudes et en faisant la moyenne sur leurs phases, montrer que l'on obtient (10.389)–(10.391). (Consulter les références [160] et [161].)

b) Démontrer les équations de conservation (10.393) et (10.394) et montrer l'irréversibilité de l'interaction à trois ondes d'énergie positive.



# Chapitre 11

## Théorie cinétique des instabilités dans les plasmas non magnétisés

### 11.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié par la théorie cinétique de Vlasov-Landau les perturbations qui peuvent se produire dans des plasmas en équilibre, homogènes, non magnétisés et sans champ électrique. Nous nous sommes alors limités aux équilibres stables. En particulier, les fonctions de distribution d'équilibre ont été supposées isotropes, et nous avons concentré notre étude sur les ondes naturelles linéaires dans ces plasmas et admis que pour de telles fonctions de distribution celles-ci étaient stables.

Dans ce chapitre nous recherchons d'abord de manière plus générale quels sont les types de fonctions de distribution qui sont stables. C'est le sujet de la section 11.2 où les conditions de Newcomb-Gardner suffisantes pour la stabilité sont démontrées. Puis, dans la section 11.3, les conditions nécessaires et suffisantes de Penrose pour l'instabilité (et la stabilité) des modes électrostatiques sont établies. A titre d'exemples on étudie les mêmes instabilités électrostatiques que dans le chapitre 7, à ceci près que maintenant, avec la théorie cinétique, on peut trouver les effets que les élargissements thermiques dans les fonctions de distribution des particules ont sur les diverses instabilités. Le chapitre se termine (section 11.4) par la théorie cinétique des instabilités électromagnétiques. En particulier, la théorie des instabilités de Weibel dans deux faisceaux opposés, traitée par

le modèle des plasmas froids dans la section 7.5, est étendue par la théorie cinétique aux plasmas ayant simplement une anisotropie de température.

## 11.2 Conditions de stabilité de Newcomb-Gardner

### 11.2.1 Perturbations quelconques

On a vu au chapitre 10 (section 10.2.4 et problème P10-4) que l'équation de Vlasov non relativiste, accompagnée des équations de Maxwell, conduit à l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu_0}{2} H^2 + \sum_s \int \frac{m_s}{2} w^2 f_s d\mathbf{w} \right) + \nabla \cdot \left( \vec{E} \times \vec{H} + \sum_s \int \frac{m_s w^2}{2} \vec{w} f_s d\mathbf{w} \right) = 0 \quad (11.1)$$

Considérons maintenant un plasma en équilibre, homogène et stationnaire, neutre en charge et courant, avec  $\vec{E}_0 = 0$  ; nous admettons ici qu'il peut y avoir un champ magnétique uniforme d'origine extérieure  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$ , bien que dans la suite de ce chapitre nous n'étudions plus que des plasmas non magnétisés. La fonction de distribution à l'équilibre pour chaque espèce est  $f_{s0} = f_{s0}(\vec{w})$ . Si le plasma est perturbé, l'équation de conservation de l'énergie s'écrit par comparaison avec l'état d'équilibre :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu_0}{2} (H^2 - H_0^2) + \sum_s \int \frac{m_s w^2}{2} (f_s - f_{s0}) d\mathbf{w} \right] + \nabla \cdot \left[ \vec{E} \times \vec{H} + \sum_s \int \frac{m_s w^2}{2} \vec{w} (f_s - f_{s0}) d\mathbf{w} \right] = 0 \quad (11.2)$$

Si l'on suppose une dépendance spatiale périodique pour toutes les perturbations (pas forcément de petite amplitude), l'intégrale, sur une période spatiale (ou un nombre quelconque de périodes), du terme de divergence dans (11.2) est nulle, de sorte qu'on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu_0}{2} (H^2 - H_0^2) + \sum_s \int \frac{m_s w^2}{2} (f_s - f_{s0}) d\mathbf{w} \right] d\mathbf{r} = 0 \quad (11.3)$$

Notons que si l'on suppose que toutes les perturbations sont nulles à l'infini, l'intégrale sur  $\vec{r}$  peut être étendue à tout l'espace. Cette équation exprime la conservation de la différence en énergie moyenne (ou totale) entre l'état du plasma perturbé et son état d'équilibre, c'est-à-dire  $(d/dt)(U - U_0) = 0$ , avec  $U = U_{EM} + U_K$  et  $U_0 = U_{M0} + U_{K0}$ . Cependant, (11.3) n'est pas unique, car on peut montrer (cf. problème P11-1) que toute fonction régulière et différentiable  $M(f_s)$  des fonctions de distribution  $f_s$ , où  $f_s$  obéit à l'équation de Vlasov, satisfait aussi :

$$\frac{d}{dt} \int M(f_s) \underline{dr} \underline{dw} = 0 \tag{11.4}$$

[On a vu au chapitre 10 (section 10.2.3) que l'entropie  $(-f_s \ln f_s)$  est une telle fonction  $M(f_s)$  qui satisfait (11.4)]. Une équation de conservation de forme plus générale est donc :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu_0}{2} (H^2 - H_0^2) \right] \underline{dr} \right. \\ & \left. + \sum_s \int \left[ \frac{m_s w^2}{2} (f_s - f_{s0}) + M(f_s) - M(f_{s0}) \right] \underline{dR} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{11.5}$$

avec  $\underline{dR} = \underline{dr} \underline{dw}$ .

On peut maintenant développer en série de perturbation les quantités  $(\vec{E}, \vec{B}, f_s)$ , et évaluer chaque terme de (11.5) au second ordre (cf. problème P11-2) ; on obtient ainsi l'équation de conservation au second ordre :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \int \left( \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 + \frac{\mu_0}{2} H_1^2 \right) \underline{dr} \right. \\ & \left. + \sum_s \int \left[ \left( \frac{m_s w^2}{2} + M'_0 \right) (f_{s1} + f_{s2}) + \frac{1}{2} f_{s1}^2 M''_0 \right] \underline{dR} \right\} = 0 \end{aligned} \tag{11.6}$$

où  $M'_0 = (dM/df_s)_{f_s=f_{s0}} \equiv M'(f_{s0})$  et  $M''_0 = (d^2M/df_s^2)_{f_s=f_{s0}} \equiv M''(f_{s0})$ . Finalement, pour obtenir une équation de conservation au second ordre qui contienne seulement les champs du premier ordre, posons :

$$M'_0(f_{s0}) = -\frac{m_s}{2} w^2 \tag{11.7}$$

de sorte que (11.6) devient :

$$\frac{d}{dt} \left[ \int \left( \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 + \frac{\mu_0}{2} H_1^2 \right) \underline{dr} + \sum_s \int \frac{1}{2} f_{s1}^2 M''(f_{s0}) \underline{dR} \right] = 0 \tag{11.8}$$

C'est l'équation de conservation que nous cherchions ; elle dépend seulement des champs du premier ordre et donne les propriétés globales de la dynamique linéaire du plasma.

D'après (11.8) il est évident que pour la stabilité linéaire des perturbations périodiques dans l'espace on doit avoir :

$$M''(f_{s0}) \geq 0 \tag{11.9}$$

C'est en fait le cas si  $f_{s0}$  est une fonction monotone décroissante de  $w^2$  (ou constante), car pour  $f_{s0} = f_{s0}(w^2)$  (11.7) donne :

$$M''(f_{s0}) = -\frac{m_s/2}{(df_{s0}/dw^2)} \tag{11.10}$$

Une *condition suffisante* de *stabilité linéaire* (ou de stabilité marginale) d'un plasma neutre homogène, dans un champ  $\vec{B}_0$  uniforme, est donc que chaque espèce ( $s$ ) de particules du plasma ait une distribution de vitesses *isotrope* :

$$f_{s0}(\vec{w}) = f_{s0}(w^2) \tag{11.11}$$

et *monotone décroissante* (ou constante)

$$\frac{df_{s0}(w^2)}{dw^2} \leq 0 \text{ pour tout } w^2 \tag{11.12}$$

Ces conditions représentées sur la figure 11.1 sont les conditions de stabilité de Newcomb-Gardner ([185], [186], [187] et [188]). Remarquons aussi que pour  $f_{s0} = f_{s0}(w^2)$ , et d'après (11.7), l'énergie de perturbation est :

$$U = \int \left[ \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 + \frac{\mu_0}{2} H_1^2 + \sum_s \int \left( \frac{-m_s/4}{df_{s0}/dw^2} \right) f_{s1}^2 dw \right] dr \tag{11.13}$$

qui peut aussi se déduire des équations de Vlasov-Maxwell linéarisées (cf. problème P11-3).

On peut comprendre qualitativement les raisons physiques de ces conditions suffisantes de stabilité. Une fonction de distribution isotrope des vitesses est une fonction de l'énergie totale ( $mw^2/2$ ) des particules. Quand elle est décroissante, les particules de grande énergie sont moins nombreuses que celles de basse énergie. Le plasma de Vlasov est alors [du fait des deux conditions (11.11) et (11.12) ci-dessus] dans un "état d'énergie minimum" à condition qu'il soit aussi uniforme dans l'espace. (Rappelons que le modèle de Vlasov néglige les collisions et s'applique sur des échelles de temps courts par rapport au temps caractéristique de collision.

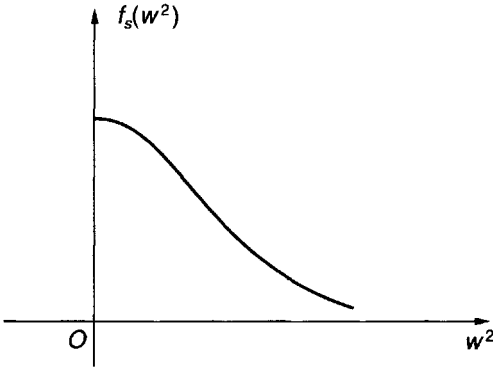


Figure 11.1 : Distribution isotrope  $f_s(\vec{w}) = f_s(w^2)$ , monotone décroissante. Une telle distribution est stable (stabilité de Newcomb-Gardner) pour les perturbations électrostatiques.

Sur l'échelle des temps plus longs que le temps de collisions, la distribution tend vers la maxwellienne d'équilibre thermodynamique, qui est aussi évidemment isotrope et monotone décroissante.)

Des instabilités ne peuvent naître dans un plasma uniforme non collisionnel que si la fonction de distribution des particules correspond à un état de plus "haute énergie", c'est-à-dire s'il y a de l'énergie libre disponible. Les perturbations d'un tel état peuvent alors être instables. La conséquence des instabilités est un changement de la distribution vers un état d'énergie plus basse. L'énergie libre disponible entre l'état initial et l'état final est la source des champs instables, et ceux-ci vont ensuite modifier la fonction de distribution des particules. En général, dans une distribution anisotrope, les instabilités sont alimentées par l'excès d'énergie dans certaines directions. Dans une distribution isotrope, mais non monotone décroissante, les instabilités croissent à cause des excès de populations aux hautes énergies comparées aux populations à basse énergie : situation analogue à l'inversion de population qu'on trouve dans les masers et les lasers.

On peut étendre les conditions suffisantes de stabilité aux plasmas non uniformes. Comme  $f_{s0}$  peut être de manière générale une fonction d'une combinaison linéaire des constantes du mouvement, la condition suffisante de stabilité demande que  $f_{s0}$  soit une fonction monotone décroissante de cette combinaison linéaire des constantes du mouvement. Gardner a montré de plus que même pour des perturbations d'amplitude arbitraire (11.11) et (11.12) sont des conditions suffisantes de stabilité.

Remarquons enfin que pour un plasma uniforme dans un champ magnétique constant  $\vec{B}_0$ , les constantes du mouvement sont l'énergie  $m_s w_\perp^2/2$  perpendiculaire à  $\vec{B}_0$  et la quantité de mouvement  $mw_\parallel$  parallèle à  $\vec{B}_0$ . En général on a  $f_{s0} = f_{s0}(w_\perp^2, w_\parallel)$  qui peut ne pas satisfaire (11.11) et (11.12), et donc être instable.

### 11.2.2 Perturbations électrostatiques

Pour les plasmas de Vlasov spatialement uniformes et non magnétisés, qui nous intéressent dans ce chapitre, nous allons maintenant donner une démonstration directe des conditions de stabilité de Newcomb-Gardner pour les perturbations électrostatiques. Puis nous montrerons que pour de telles perturbations les conditions de stabilité peuvent en fait être moins strictes que dans le cas général.

La relation de dispersion pour les perturbations électrostatiques s'obtient en égalant à zéro la fonction diélectrique longitudinale (cf. section 10.4.2 (b)):

$$D_L(k, \omega) = K_L(k, \omega) = 0 \tag{11.14}$$

où

$$K_L(k, \omega) = 1 + \chi_L(k, \omega) \tag{11.15}$$

avec :

$$\chi_L(k, \omega) = \frac{1}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot \partial \hat{\varphi}_0 / \partial \vec{w}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} d\vec{w} \tag{11.16}$$

où  $\hat{\varphi}_0$  est la fonction de distribution d'équilibre pondérée (10.159). On rappelle que la susceptibilité (11.16) est définie pour  $\vec{k} = \vec{k}_r$  réel et  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  complexe avec  $\omega_i > 0$ . Les solutions de (11.14),  $\omega = \omega(k_r)$ , pour lesquelles on a  $\omega_i(k_r) > 0$  conduisent à une instabilité des perturbations électrostatiques.

En séparant (11.14)–(11.16) en parties réelle et imaginaire on obtient :

$$1 + \frac{1}{k_r^2} \int \vec{k}_r \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}_0}{\partial \vec{w}} \frac{\omega_r - \vec{k}_r \cdot \vec{w}}{(\omega_r - \vec{k}_r \cdot \vec{w})^2 + \omega_i^2} d\vec{w} = 0 \tag{11.17}$$

et

$$\frac{1}{k_r^2} \int \vec{k}_r \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}_0}{\partial \vec{w}} \frac{1}{(\omega_r - \vec{k}_r \cdot \vec{w})^2 + \omega_i^2} d\vec{w} = 0 \tag{11.18}$$

Les intégrales ci-dessus ne sont pas singulières puisqu'on a supposé  $\omega_i \neq 0$ . En portant (11.18) dans (11.17) on obtient finalement :

$$1 - \frac{1}{k_r^2} \int \vec{k}_r \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}_0}{\partial \vec{w}} \frac{\vec{k}_r \cdot \vec{w}}{(\omega_r - \vec{k}_r \cdot \vec{w})^2 + \omega_i^2} d\vec{w} = 0 \quad (11.19)$$

Pour des distributions isotropes de chaque espèce de particules,  $\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w^2)$  et l'on a :

$$\vec{k}_r \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}_0(\vec{w})}{\partial \vec{w}} = 2\vec{k}_r \cdot \vec{w} \frac{d\hat{\varphi}_0(w^2)}{dw^2} \quad (11.20)$$

Si de plus ces distributions isotropes sont aussi monotones décroissantes (ou constantes) en fonction de  $w^2$ , c'est-à-dire  $(d\hat{\varphi}_0/dw^2) \leq 0$  quel que soit  $w^2$ , alors (11.19) est une somme de termes positifs et ne peut donc s'annuler. La solution imaginée avec  $\omega_i > 0$  ne peut pas exister. On a donc montré que, si l'on impose aux fonctions de distribution les conditions de Newcomb-Gardner (11.11) et (11.12) alors le plasma est stable,  $\omega_i < 0$  (ou marginalement stable,  $\omega_i = 0$ ) pour les perturbations électrostatiques. [On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'imposer les conditions de Newcomb-Gardner séparément à la fonction de distribution de chaque espèce mais seulement à leur somme pondérée  $\hat{\varphi}_0(\vec{w})$ .] On va voir dans le paragraphe ci-dessous que ces conditions suffisantes ne sont pas nécessaires (cf. aussi [189, chapitre 2]).

### a) Distributions isotropes

Considérons maintenant un plasma uniforme, non magnétisé, décrit par le modèle de Vlasov et dans lequel la distribution des vitesses de chaque espèce de particules est isotrope, c'est-à-dire :

$$\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w^2) \equiv \hat{f}_{s0}^{(i)} \quad (11.21)$$

mais pas forcément monotone décroissante avec  $w^2$ . En se limitant comme ci-dessus aux perturbations électrostatiques décrites par (11.19) et (11.20) (cf. Fig. 11.2) on a :

$$1 - \frac{1}{k_r^2} \int \frac{2(\vec{k}_r \cdot \vec{w})^2 (d\hat{\varphi}_0^{(i)}/dw^2)}{(\omega_r - \vec{k}_r \cdot \vec{w})^2 + \omega_i^2} d\vec{w} = 0 \quad (11.22)$$

En introduisant la fonction de distribution réduite des vitesses parallèles

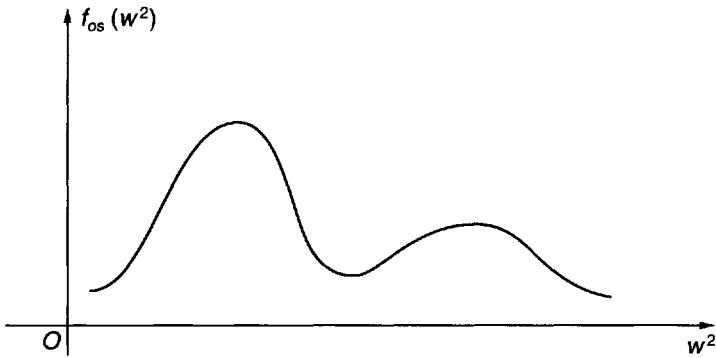


Figure 11.2 : Distribution isotrope  $f_s(\vec{w}) = f_s(w^2)$  mais non monotone décroissante avec  $w^2$ , stable pour les perturbations électrostatiques dans un plasma uniforme et non magnétisé.

à  $\vec{k}_r$ , (11.22) devient :

$$1 - 2 \int \frac{w_k^2 (d\hat{\Phi}_0^{(i)} / dw_k^2)}{(\omega_r - k_r w_k)^2 + \omega_i^2} dw_k = 0 \tag{11.23}$$

où  $\hat{\Phi}_0^{(i)}(w_k^2)$  est la fonction de distribution d'équilibre pondérée réduite donnée par (10.269) écrite pour des fonctions de distribution isotropes. On voit que le signe du second terme dépend seulement du signe de  $(d\hat{\Phi}_0^{(i)} / dw_k^2)$ . Celui-ci se détermine en calculant l'intégrale (10.269) en coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses. On a :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_0^{(i)}(w_k^2) &= 2\pi \int_0^{+\infty} dw w^2 \int_0^\pi d\theta \sin \theta \delta(w_k - w \cos \theta) \hat{\varphi}_0^{(i)}(w^2) \\ &= \pi \int_{w_k^2}^{+\infty} \hat{\varphi}_0^{(i)}(w^2) dw^2 \end{aligned} \tag{11.24}$$

où  $\theta$  est l'angle polaire entre  $\vec{k}_r$  et  $\vec{w}$ . D'où :

$$\frac{d\hat{\Phi}_0^{(i)}}{dw_k^2} = -\pi \hat{\varphi}_0^{(i)}(w_k^2) \leq 0 \tag{11.25}$$

puisque  $\hat{\varphi}_0^{(i)}(w_k^2) \geq 0$  quel que soit  $w_k^2$ . On voit que (11.23) est une somme de termes positifs qui ne peut pas s'annuler. La solution imaginée de la relation de dispersion avec  $\omega_i > 0$  ne peut donc pas exister.



Nous avons donc montré que dans un plasma uniforme et non magnétisé, les perturbations électrostatiques sont stables (ou marginalement stables) quand les distributions de vitesses des particules sont *simplement isotropes* ; il n'est pas nécessaire qu'elles soient aussi décroissantes avec l'énergie. Dans ces conditions la densité moyenne d'énergie de perturbation, intégrée dans l'espace, peut d'ailleurs être négative (cf. problème P11-3).

Par contre, la condition de stabilité (11.25) n'est pas valable pour un plasma dans un champ magnétique ; par exemple, une fonction de distribution des électrons monotone décroissante avec une queue vers les hautes énergies dans la direction de  $\vec{B}_0$  [comme celle des électrons découplés produits par un champ électrique continu parallèle à  $\vec{B}_0$  (cf. section 13.7)] peut être instable pour les perturbations électrostatiques se propageant dans une direction faisant un angle avec  $\vec{B}_0$  [189, section 9.5].

## b) Plasmas anisotropes

Examinons enfin un plasma de Vlasov uniforme, non magnétisé dans lequel les distributions de vitesses sont anisotropes. Pour des perturbations électrostatiques nous cherchons à déterminer les conditions que doivent remplir les fonctions de distribution pour que les perturbations ne soient pas instables.

Pour une fonction de distribution d'équilibre arbitraire  $\hat{f}_{s0}(\vec{w})$ , chaque fonction de distribution réduite est donnée par (10.280) et leur somme pondérée (par le carré de la fréquence plasma) est donnée par (10.284). Ainsi (11.19), une fois intégrée sur les deux coordonnées de vitesse perpendiculaire à  $\vec{k}_r$ , devient :

$$1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w_k (d\hat{\Phi}_0/dw_k)}{(\omega_r - k_r w_k)^2 + \omega_i^2} dw_k = 0 \quad (11.26)$$

et donc si l'on a pour tout  $w_k$  :

$$w_k \frac{d\hat{\Phi}_0}{dw_k} \leq 0 \quad (11.27)$$

(11.26) ne peut pas être satisfaite et il ne peut pas y avoir de solutions instables,  $\omega_i > 0$ , pour les perturbations électrostatiques. Comme la direction de  $\vec{k}_r$  peut être arbitraire, la condition de stabilité (11.27) impose que la fonction de distribution pondérée des particules soit monotone décroissante (ou constante) dans toutes les directions possibles de  $\vec{w}$ . Dans ces conditions les perturbations électrostatiques sont stables (ou marginalement stables) même si la fonction de distribution pondérée est anisotrope (cf. Fig. 11.3).

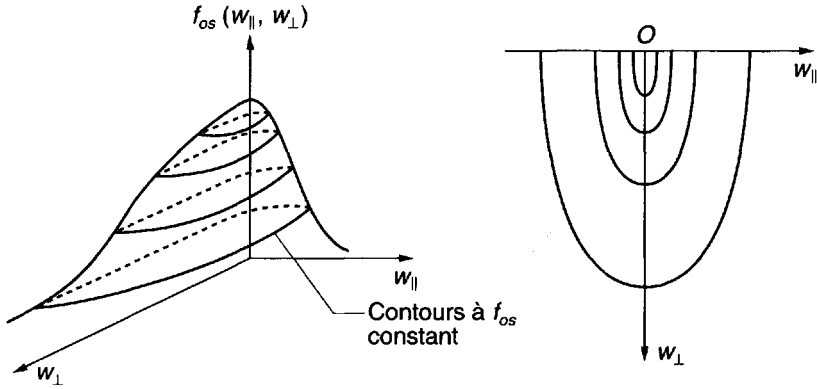


Figure 11.3 : Distribution anisotrope  $f_0(\vec{w}) = f_0(w_{\parallel}^2, w_{\perp}^2)$ , monotone décroissante avec  $w_{\parallel}$  et  $w_{\perp}$ , stable pour les perturbations électrostatiques dans un plasma uniforme et non magnétisé.

A titre d'exemple, considérons des fonctions de distribution anisotropes qui dépendent seulement du carré des composantes de la vitesse :

$$\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w_x^2, w_y^2, w_z^2) \tag{11.28}$$

Les conditions de stabilité pour les perturbations électrostatiques s'obtiennent à partir de (11.19), soit :

$$\frac{\partial \hat{f}_{s0}}{\partial w_i^2} \leq 0, \quad i = x, y, z \tag{11.29}$$

Une telle fonction de distribution anisotrope est donc stable pour les perturbations électrostatiques pourvu qu'elle soit monotone décroissante (ou constante) en fonction de chacun des carrés des composantes de la vitesse. Un exemple est la bi-maxwellienne :

$$\hat{f}_0(\vec{w}) = \left( \frac{m}{2\pi\kappa T_{\perp}} \right) \left( \frac{m}{2\pi\kappa T_z} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-m(w_x^2 + w_y^2)}{2\kappa T_{\perp}} - \frac{mw_z^2}{2\kappa T_z} \right] \tag{11.30}$$

où  $T_z$  et  $T_{\perp}$  sont les températures cinétiques parallèle et perpendiculaire à  $z$ .

Remarquons cependant que les conditions (11.27) ou (11.29) ne sont pas suffisantes pour assurer la stabilité totale même dans un plasma non magnétisé. Nous montrerons en effet au paragraphe 11.4.2, que les perturbations électromagnétiques transverses dans un plasma uniforme, non magnétisé, ayant une distribution bi-maxwellienne (11.30) peuvent être instables. Notons enfin que pour un plasma dans un champ magnétique les conditions (11.27) ou (11.29) n'assurent la stabilité ni pour les perturbations électrostatiques ni pour les perturbations électromagnétiques. Un plasma

anisotrope dans un champ magnétique est donc le plus souvent instable ([189, Part 2], [190]).

## 11.3 Critères de Penrose (perturbations électrostatiques)

### 11.3.1 Généralités

Contrairement à la section précédente, nous allons maintenant rechercher des conditions d'*instabilité*. Pour les perturbations électrostatiques dans un plasma uniforme et non magnétisé, de telles conditions nécessaires et suffisantes ont été obtenue pour la première fois par O. Penrose [191].

Partons de la relation de dispersion (11.14)–(11.16) des perturbations électrostatiques dans un plasma uniforme et non magnétisé. En introduisant la fonction de distribution réduite (10.280) on a :

$$1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{F}'_{s0}(w_k)}{w_k - \frac{\omega}{k_r}} dw_k = 0 \quad (11.31)$$

où l'on rappelle que le vecteur d'onde  $\vec{k} = \vec{k}_r$  est supposé réel,  $k_r$  est le module de  $\vec{k}_r$ ,  $\omega$  est complexe avec  $\omega_i > 0$ ,  $w_k$  est la vitesse parallèle à  $\vec{k}_r$ , et le symbole prime désigne la dérivée par rapport à  $w_k$ .

Pour établir les formes de fonctions de distribution des vitesses qui donnent des ondes instables, c'est-à-dire  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  avec  $\omega_i > 0$ , il est commode de considérer (11.31) comme dépendant d'un paramètre : soit  $k_r$ , soit l'un des  $\omega_{ps}^2$  (par exemple  $\omega_{p0}^2$ , c'est-à-dire la densité de l'espèce 0 de particule).

Dans le premier cas il est commode d'introduire la fonction de distribution (10.284) pondérée (par le carré de la fréquence plasma) et la relation de dispersion (11.31) devient :

$$1 - \frac{1}{k_r^2} I \left( \frac{\omega}{k_r} \right) = 0 \quad (11.32)$$

où

$$I \left( \frac{\omega}{k_r} \right) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}'_0(w_k)}{w_k - \frac{\omega}{k_r}} dw_k \quad (11.33)$$

Dans le second cas, où l'on fixe  $k_r$ , on introduit la fonction :

$$\hat{G}_0(w_k) \equiv \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega_{p0}^2} \frac{1}{k_r^2} \hat{F}_{s0}(w_k) = \frac{\hat{\Phi}_0(w_k)}{(\omega_{p0} k_r)^2} \quad (11.34)$$

et la relation de dispersion prend la forme :

$$1 - \omega_{p0}^2 H(\omega) = 0 \tag{11.35}$$

avec :

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}'_0(w_k)}{w_k - \frac{\omega}{k_r}} dw_k \tag{11.36}$$

Si une onde électrostatique à croissance exponentielle se propage parallèlement à  $\vec{k}_r$ , alors (11.32) et (11.35) ont une solution avec  $\omega_i > 0$ , et cela veut dire que  $I(\varphi)$  avec  $\varphi \equiv (\omega/k_r)$ , et  $H(\omega)$  prennent des valeurs positives réelles quelque part dans les demi-plans complexes supérieurs  $\varphi$  ou  $\omega$ , respectivement. Réciproquement, si dans le premier cas  $I(\varphi)$  prend une valeur réelle positive pour  $\varphi = \varphi_0$  avec  $\varphi_{0i} > 0$ , alors la relation de dispersion (11.32) est satisfaite par  $k_r = [I(\varphi_0)]^{1/2}$  et  $\omega = k_r \varphi_0$  ; dans le second cas, si  $H(\omega)$  prend une valeur réelle positive pour  $\omega = \omega_0$  avec  $\omega_{0i} > 0$ , alors la relation de dispersion (11.35) est satisfaite en choisissant  $\omega_{p0}^2 = H^{-1}(\omega_0)$ . Dans ce qui suit nous analysons plus en détail le second cas ; par analogie les résultats peuvent être transposés au premier cas.

### 11.3.2 Méthode de Nyquist

Pour préciser les conditions d'instabilité il est commode d'utiliser une technique de transformation conforme utilisée pour la première fois par Nyquist dans l'étude des instabilités dans des systèmes à contre-réaction [192]. Pour la relation de dispersion (11.35), elle consiste à transformer le demi-plan complexe  $\omega$  supérieur en une partie du plan complexe  $H$  ; alors, si une partie quelconque du demi-plan complexe  $\omega$  supérieur se retrouve sur le demi-axe réel positif du plan complexe  $H$ , une condition nécessaire d'instabilité est satisfaite. C'est ce qui est représenté sur la figure 11.4.

En particulier, considérons le demi-cercle infini entourant le demi-plan complexe  $\omega$  supérieur. On peut montrer que si  $\hat{G}_0(w_k)$  est continu par intervalles et si  $\hat{G}_0(w_k \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ , ce qui est vrai pour toute fonction de distribution physiquement acceptable, on a  $H(|\omega| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  comme  $(1/|\omega|^2)$ . L'arc semi-circulaire à l'infini du demi-plan  $\omega$  supérieur se transforme donc en l'origine du plan  $H$ . Le transformé du demi-plan  $\omega$  supérieur dans le plan  $H$  est donc le domaine du plan  $H$  entouré par le transformé de l'axe réel  $\omega$  (plus précisément,  $\omega = \omega_r + i\epsilon$ ) dans le plan  $H$ . D'après les propriétés des transformations conformes, quand  $\omega_r$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ , le transformé du demi-plan  $\omega$  supérieur dans le plan  $H$  est à gauche du transformé de l'axe réel  $\omega$  dans le plan  $H$ . Cela est représenté sur la figure 11.5, où l'on voit qu'il faut faire attention pour déduire du transformé de l'axe réel  $\omega$  la surface qui est la transformée du demi-plan  $\omega$  supérieur.

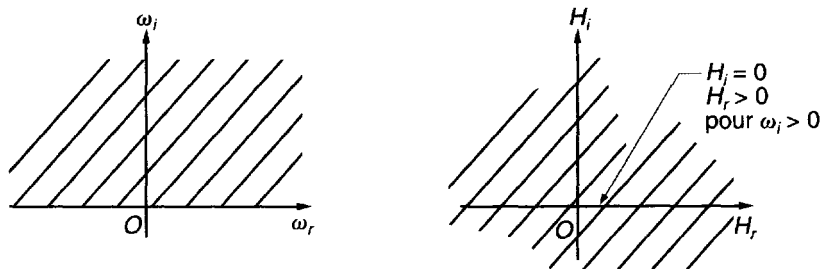


Figure 11.4 : Transformation conforme du demi-plan complexe  $\omega$  supérieur dans le plan complexe  $H$ .

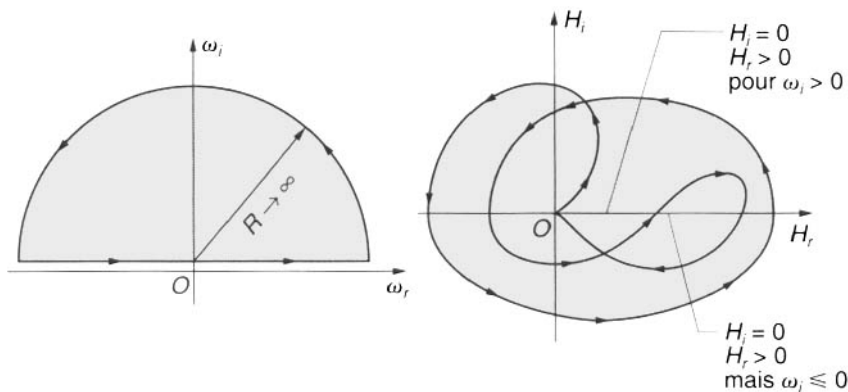


Figure 11.5 : Transformation conforme du demi-plan complexe  $\omega$  supérieur dans le plan complexe  $H$ .

A titre d'exemple simple, considérons la relation de dispersion des perturbations électrostatiques dans un plasma maxwellien d'électrons [cf. paragraphe 10.3.4(c)]. On a alors  $\omega_{p0}^2 = \omega_{pe}^2$  et :

$$H(\omega_r) = \frac{1}{k_r^2 v_{te}^2} Z' \left( \frac{\omega_r}{k_r v_{te}} \right) \tag{11.37}$$

En utilisant les propriétés de la fonction de dispersion des plasmas  $Z(\zeta_r)$ , et de sa dérivée  $Z'(\zeta_r)$ , décrites dans l'appendice A10-1, on trouve la transformée de (11.37) dans le plan complexe  $H$  représentée sur la figure 11.6. On voit qu'il n'y a aucune partie du transformé du demi-plan complexe  $\omega$  supérieur venant sur le demi-axe réel positif  $H$ . Il n'y a donc dans ce cas, comme il fallait s'y attendre, aucune instabilité.

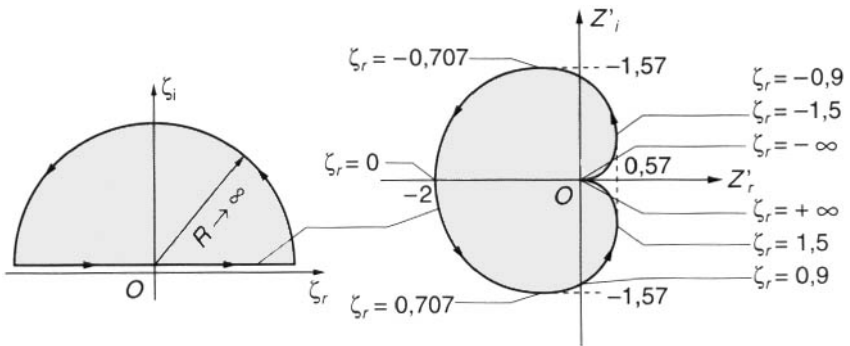


Figure 11.6 : Transformation conforme du demi-plan complexe  $\zeta$  supérieur dans le plan complexe de la fonction de dispersion des plasmas  $Z'(\zeta)$ . On rappelle que  $\zeta \equiv (\omega/k_r v_{te})$ .

### 11.3.3 Critères de Penrose

Plus généralement, considérons des fonctions de distribution arbitraires avec la seule restriction que  $\hat{F}_{s0}(w_k)$  et ses deux premières dérivées soient continues au moins par intervalles, de carré intégrable, et de comportement non singulier pour  $w_k = \pm\infty$ . Alors, par application des formules de

Plemelj (10.146) le long de l'axe réel  $\omega$  ( $\omega_r + i\epsilon$ ), on obtient :

$$H(\omega_r) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}'_0(w_k)}{w_k - \frac{\omega_r}{k_r}} dw_k + i\pi \hat{G}'_0 \left( w_k = \frac{\omega_r}{k_r} \right) \quad (11.38)$$

Comme  $H(\omega_r)$  est bornée et continue, le transformé de l'axe réel  $\omega$  dans le plan  $H$  est une courbe continue et bornée  $\Gamma_r$ , qui commence et se termine à l'origine  $H = 0$ , puisque  $H(\omega_r = \pm\infty) = 0$ . De plus, comme on l'a déjà vu, le demi-plan  $\omega$  supérieur se transforme en l'intérieur de cette courbe  $\Gamma_r$ . Par conséquent,  $H(\omega)$  prend des valeurs positives réelles quelque part dans le demi-plan  $\omega$  supérieur si et seulement si la courbe  $\Gamma_r$  traverse l'axe réel  $H$  positif. De plus, puisque lorsque  $\omega_r$  croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $\Gamma_r$  fait le tour de sa surface intérieure en tournant dans le sens positif,  $\Gamma_r$  doit à sa plus grande valeur de traversée de l'axe réel  $H$  se déplacer vers le haut, c'est-à-dire de  $H_i < 0$  vers  $H_i > 0$ . Deux formes typiques de  $\Gamma_r$  sont représentées sur la figure 11.7.  $H(\omega)$  prend donc des valeurs positives réelles dans le demi-plan  $\omega$  supérieur si et seulement si il y a un point où  $H_r(\omega_r)$  est positif et  $H_i(\omega_r)$  change de signe de moins à plus lorsque  $\omega_r$  croît. D'après (11.38), cela exige qu'il y ait une vitesse de phase critique  $(\omega_r/k_r)_c \equiv v_{pc}$  pour laquelle  $\hat{G}'_0(w_k = v_{pc}) = 0$  et  $\hat{G}''_0(w_k = v_{pc}) > 0$ , c'est-à-dire correspondant à un minimum de  $\hat{G}_0(w_k)$  ; telles sont donc les conditions nécessaires d'instabilité. Comme  $\omega_{p0}^2$  est un paramètre arbitraire réel positif,  $H_r > 0$  pour  $v_{pc}$  est donc une condition suffisante d'instabilité. De (11.38) on déduit :

$$\begin{aligned} H_r(\omega_r) &= P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}'_0(w_k)}{w_k - \frac{\omega_r}{k_r}} dw_k \\ &= P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}_0(w_k) - \hat{G}_0(\omega_r/k_r)}{\left(w_k - \frac{\omega_r}{k_r}\right)^2} dw_k \end{aligned} \quad (11.39)$$

où la dernière intégrale résulte d'une intégration par parties.

Une analyse semblable peut être faite pour le cas où l'on fait varier  $k_r$ . On part de (11.33) et l'on trouve :

$$I \left( \frac{\omega_r}{k_r} \right) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}'_0(w_k)}{w_k - \frac{\omega_r}{k_r}} dw_k + i\pi \hat{\Phi}'_0 \left( w_k = \frac{\omega_r}{k_r} \right) \quad (11.40)$$

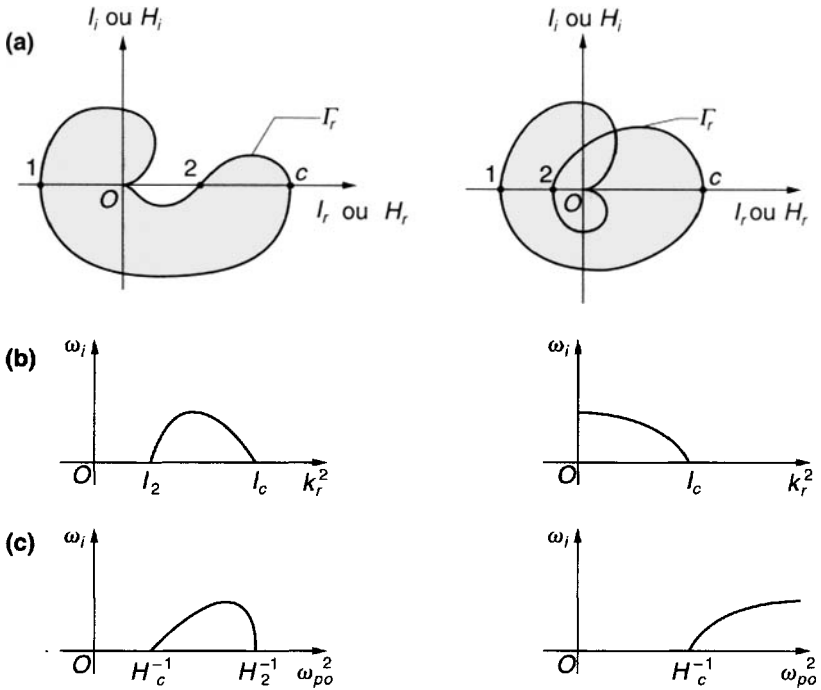


Figure 11.7 : Transformés conformes typiques pour les instabilités électrostatiques.

(a) Axe réel des fréquences  $\Rightarrow \Gamma_r$ .

Demi-plan complexe  $\omega$  supérieur  $\Rightarrow$  régions hachurées des plans  $I$  ou  $H$ .

(b) et (c) Variations du taux de croissance en fonction des paramètres.

d'où :

$$\begin{aligned}
 I_r \left( \frac{\omega_r}{k_r} \right) &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\Phi}'_0(w_k)}{w_k - \frac{\omega_r}{k_r}} dw_k \\
 &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\Phi}_0(w_k) - \hat{\Phi}_0(\omega_r/k_r)}{\left( w_k - \frac{\omega_r}{k_r} \right)^2} dw_k \quad (11.41)
 \end{aligned}$$

En résumé, les conditions de Penrose (nécessaires et suffisantes) pour l'existence d'ondes électrostatiques à croissance exponentielle dans un plasma uniforme et non magnétisé sont les suivantes :



Il y a un minimum de  $\hat{G}_0(w_k)$  pour  $w_k = v_{pc}$ , c'est-à-dire :

$$(i) \quad \hat{G}'_0(v_{pc}) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{G}''_0(v_{pc}) > 0 \quad (11.42)$$

tel que

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}'_0(w_k)}{w_k - v_{pc}} dw_k > 0 \quad (11.43)$$

ou de manière équivalente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}_0(w_k) - \hat{G}_0(v_{pc})}{(w_k - v_{pc})^2} dw_k > 0 \quad (11.44)$$

Remarquons que la valeur principale dans (11.43), (11.44) n'est plus nécessaire car  $\hat{G}_0(w_k)$  est minimum pour  $w_k = v_{pc}$ . Les formes équivalentes de ces conditions d'instabilité quand  $k_r$  est pris comme paramètre s'écrivent :

Il y a un minimum de  $\hat{\Phi}_0(w_k)$  pour  $w_k = v_{pc}$ , c'est-à-dire :

$$(i) \quad \hat{\Phi}'_0(v_{pc}) = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}''_0(v_{pc}) > 0 \quad (11.45)$$

tel que

$$(ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}'_0(w_k)}{w_k - v_{pc}} dw_k > 0 \quad (11.46)$$

ou de manière équivalente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}_0(w_k) - \hat{\Phi}_0(v_{pc})}{(w_k - v_{pc})^2} dw_k > 0 \quad (11.47)$$

A partir de ces conditions nécessaires et suffisantes, on peut aussi déterminer les intervalles des paramètres ( $\omega_{p0}^2$  ou  $k_r^2$ ) qui conduisent à l'instabilité ; cela est aussi représenté sur la figure 11.7. Remarquons à nouveau que dans les deux conditions d'instabilité, (11.42) et (11.43) ou (11.45) et (11.46),

- (i) est une condition nécessaire mais non suffisante d'instabilité ;
- (ii) est une condition suffisante d'instabilité  
(cf. problème P11-4).

On peut d'ailleurs voir que les critères de Penrose, et la technique de Nyquist elle-même, sont basés sur un théorème bien connu sur le nombre de zéros et de pôles d'une fonction de variable complexe dans un domaine donné. Ce théorème dit que si une fonction  $D = g(z)$  a  $N$  zéros (chacun étant compté autant de fois que son ordre) et  $P$

pôles (comptés de la même manière) à l'intérieur d'un contour fermé  $C$  dans le plan complexe  $z$ , on a :

$$\frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{(dg/dz)}{g(z)} dz = N - P \tag{11.48}$$

Si la fonction  $D = g(z)$  n'a que des zéros dans ce domaine, on a :

$$\frac{1}{i2\pi} \oint_C \frac{(dg/dz)}{g(z)} dz = N \tag{11.49}$$

D'après les règles des transformations conformes, le contour  $C$  dans le plan complexe  $z$  détermine un contour équivalent dans le plan complexe  $D$  et (11.49) peut être réécrit :

$$\frac{1}{i2\pi} \oint_{\Lambda} \frac{dD}{D} = N \tag{11.50}$$

où  $\Lambda$  est un contour fermé dans le plan  $D$  correspondant au contour  $C$  dans le plan  $z$ . D'après les propriétés de la fonction logarithme, on peut donc conclure que  $N$  dans (11.50) doit être égal au nombre de tours faits autour de l'origine par le contour  $\Lambda$  dans le plan  $D$ . On voit que cela donne une méthode générale pour trouver le nombre de zéros d'une fonction dans un domaine donné de sa variable.

Pour le cas présent, on peut appliquer les résultats ci-dessus à la fonction de dispersion

$$D = 1 - \frac{1}{k_r^2} I\left(\frac{\omega}{k_r}\right) \equiv J(\varphi) \tag{11.51}$$

ou :

$$D = 1 - \omega_{po}^2 H(\omega) \equiv K(\omega) \tag{11.52}$$

Si l'on suppose que les fonctions de distribution ont un comportement normal, les fonctions  $I(\varphi)$ , (11.33), et  $H(\omega)$ , (11.36), sont analytiques dans les demi-plans complexes supérieurs  $\varphi$  et  $\omega$ , respectivement. L'équation (11.49) s'applique donc avec  $g(z)$  remplacé par  $J(\varphi)$  ou  $K(\omega)$ . De (11.50)–(11.52) on peut alors facilement déduire les critères d'instabilité de Penrose.

Signalons enfin qu'on peut montrer qu'un plasma homogène et non magnétisé est stable vis-à-vis des perturbations électrostatiques, si les conditions de Penrose (11.42), (11.43) ou (11.45), (11.46) n'y sont pas satisfaites. A titre d'exercice on peut ainsi démontrer la stabilité pour les cas étudiés dans la section 11.2. Nous allons maintenant appliquer les critères de Penrose à des plasmas divers dont les fonctions de distribution conduisent après réduction au cas limite des plasmas froids à certaines des instabilités étudiées au chapitre 7.

### 11.3.4 Plasma équivalent à un faisceau

Nous étudions d'abord les plasmas dont la fonction de distribution pondérée (10.284) est celle d'un faisceau, avec comme cas particulier celui d'un faisceau d'électrons ayant une certaine agitation thermique autour de sa vitesse moyenne ; les résultats seront à comparer au cas du faisceau d'électrons froid étudié au chapitre 6.

Considérons donc un plasma dans lequel  $\hat{\Phi}_0(w_k)$ , et par suite  $\hat{G}_0(w_k)$ , ont seulement un maximum et décroissent vers zéro suffisamment vite lorsque  $w_k \rightarrow \pm\infty$ . Un tel plasma peut être considéré comme “équivalent à un faisceau unidimensionnel”, (cf. Fig. 11.8). En regardant  $\hat{G}_0(w_k)$ , on voit que  $\hat{G}'_0(w_k \rightarrow +\infty) \rightarrow 0^-$  et  $\hat{G}'_0(w_k \rightarrow -\infty) \rightarrow 0^+$ . Par conséquent, dans l'intervalle  $-\infty < w_k < +\infty$ ,  $\hat{G}'_0(w_k)$  a un nombre impair de zéros. Si donc, comme nous le supposons ici,  $\hat{G}_0(w_k)$  a un seul maximum, pour  $w_k = w_0$ , alors  $\hat{G}'_0(w_0) = 0$  mais  $\hat{G}''_0(w_0) < 0$ . La condition de Penrose (11.42) n'est donc pas satisfaite et un tel plasma est stable pour les perturbations électrostatiques.

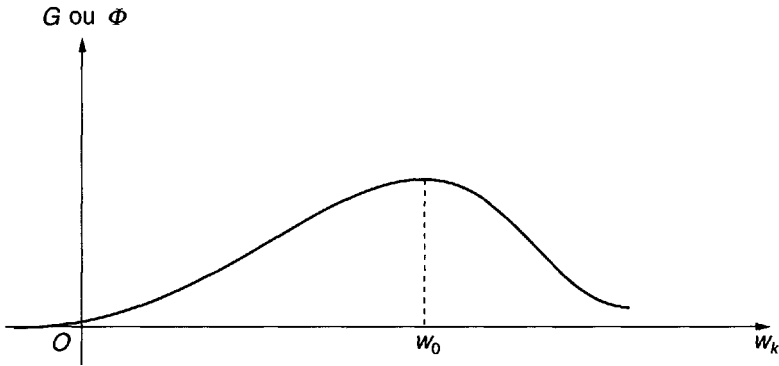


Figure 11.8 : Plasma avec fonction de distribution équivalente à un faisceau ; stable d'après les critères de Penrose.

Un exemple intéressant d'un tel plasma stable est fourni par un faisceau d'électrons unidimensionnel ayant une dispersion thermique finie des vitesses autour de sa vitesse moyenne et supposé neutralisé par un fond continu d'ions positifs immobiles. Dans le cas spécial d'un faisceau maxwellien d'électrons (cf. Fig. 11.9), on peut étudier en détail la relation de dispersion. Posons donc :

$$\hat{f}_{e0} = \frac{1}{v_{te}\pi^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(w - v_0)^2}{v_{te}^2} \right] \tag{11.53}$$

où  $v_{te}^2 = 2\kappa T_e/m_e$  et en supposant  $v_0 \ll c$ . Dans la limite  $v_{te} \rightarrow 0$  on a  $\hat{f}_{e0} \rightarrow \delta(w - v_0)$  qui est précisément le cas du faisceau froid d'électrons de la section 6.2. La relation de dispersion des perturbations électrostatiques dans le faisceau d'électrons (11.53) s'obtient par les méthodes du paragraphe 10.3.4. On trouve ainsi :

$$K_L(k_r, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k_r^2 v_{te}^2} Z' \left( \frac{\omega - k_r v_0}{|k_r| v_{te}} \right) = 0 \tag{11.54}$$

qui n'est autre que la relation de dispersion des oscillations de plasma électroniques [cf. (10.236)] déplacée par effet Doppler. En supposant qu'on a un faisceau assez bien

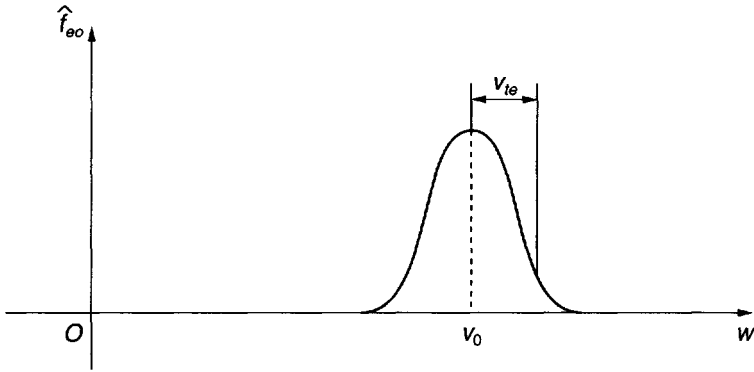


Figure 11.9 : Fonction de distribution pour un faisceau maxwellien d'électrons ; stable vis-à-vis des perturbations électrostatiques (Penrose).

défini, c'est-à-dire  $v_0 \gg v_{te}$ , on peut facilement trouver les solutions de (11.54) pour  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ . Cela suppose  $k_r \lambda_{De} < 0.3$  et on a alors :

$$\omega_r \approx k_r v_0 \pm \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k_r^2 \lambda_{De}^2\right) \quad (11.55)$$

avec  $\omega_i$  donné par (10.214). Puisque  $\omega_i < 0$ , ces ondes sont stables.

Leur stabilité peut aussi se comprendre à partir de la formule générale (10.206) pour  $\omega_i$ , et de la conservation de l'énergie. On voit que pour l'onde rapide, en supposant  $k_r > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \omega_r &\approx k_r v_0 + \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k_r^2 \lambda_{De}^2\right) \\ \frac{\omega_r}{k_r} &> \frac{d\omega_r}{dk_r} \approx v_0 \end{aligned} \quad (11.56)$$

et

$$f'_{e0} \left( w = \frac{\omega_r}{k_r} \right) < 0$$

de sorte que (10.206) donne  $\omega_i < 0$ . C'est une onde d'énergie positive [cf. (10.191)] avec une dissipation positive, donc stable. Pour l'onde lente, en prenant aussi  $k_r > 0$ ,

$$\begin{aligned} \omega_r &\approx k_r v_0 - \omega_p \left(1 + \frac{3}{2} k_r^2 \lambda_{De}^2\right) \\ \frac{\omega_r}{k_r} &< \frac{d\omega_r}{dk_r} \approx v_0 \end{aligned} \quad (11.57)$$

et

$$f'_{e0} \left( w = \frac{\omega_r}{k_r} \right) > 0$$

de sorte qu'à nouveau (10.206) donne  $\omega_i < 0$ . C'est maintenant une onde d'énergie négative [cf. (10.191)] avec une dissipation négative, qui est donc aussi stable.

On a vu au chapitre 10 que dans un plasma maxwellien stationnaire d'électrons, des ondes faiblement amorties ne peuvent exister qu'au

dessous d'une fréquence maximum égale environ à  $1.2\omega_{pe}$  (cf. Fig. 10.14). Au contraire, sur un faisceau maxwellien d'électrons assez bien défini, la fréquence maximum des ondes faiblement amorties est  $\omega_r \approx 0.3(v_0/v_t)\omega_{pe}$  (cf. problème P11-5) qui peut être beaucoup plus grande que  $\omega_{pe}$ . C'est un résultat important qui rend de tels faisceaux utiles pour la réalisation de générateurs ou d'amplificateurs de très hautes fréquences (ondes centimétriques ou millimétriques). A ce sujet, il faut remarquer que les faisceaux d'électrons sont habituellement produits par accélération d'électrons émis par une cathode chaude. De tels faisceaux n'ont pas en général une distribution maxwellienne de vitesses autour de leur vitesse moyenne ; leur distribution est peut-être plus proche d'une demi-maxwellienne avec la discontinuité à la vitesse nulle un peu lissée. En tout cas, c'est une distribution avec une seule bosse de vitesse, et donc d'après les critères de Penrose, stable pour les perturbations électrostatiques, tout au moins si l'on peut négliger le mouvement des ions. Nous discuterons ultérieurement des effets dus à la dynamique des ions.

### 11.3.5 Distributions unidimensionnelles à un minimum

#### a) Discussion générale

Considérons maintenant un plasma dans lequel  $\hat{\Phi}_0(w_k)$ , et donc  $\hat{G}_0(w_k)$ , ont un minimum (cf. par exemple Fig. 11.10). Dans ce cas le plasma peut être instable ou non, selon le signe de (11.39) ou (11.41) au minimum  $v_{pc}$ .

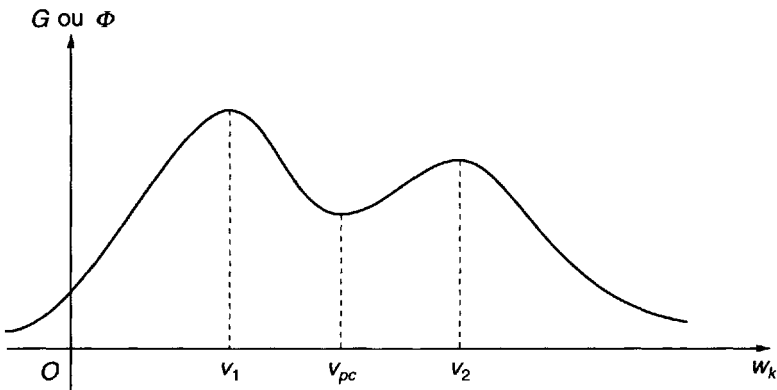


Figure 11.10 : Plasma dont la distribution réduite à une dimension a un seul minimum en  $w_k$  ; peut être instable d'après les critères de Penrose.

Le cas le plus simple est celui où  $\hat{G}_0(w_k = v_{pc}) = 0$  (cf. par exemple Fig. 11.11). Puisque sur l'un des côtés de  $w_k = v_{pc}$ ,  $\hat{G}_0(w_k)$  prend des

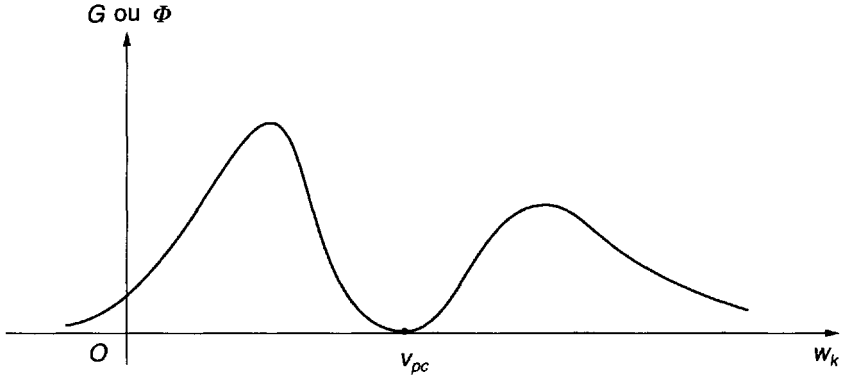


Figure 11.11 : Mêmes conditions que sur la figure 11.10 sauf qu'au minimum  $w_k = v_{pe}$ , on a  $\hat{G}_0 = 0$  ( $\hat{\Phi} = 0$ ) ; instable d'après les critères de Penrose.

valeurs positives, l'intégrale (11.44) doit être positive, et le plasma est instable. Ce résultat couvre les cas limites des plasmas à deux ou plusieurs faisceaux dans lesquels  $\hat{G}_0(w_k)$  est une combinaison linéaire de fonctions de Dirac, c'est-à-dire d'écoulements de plasmas froids. Ces cas ont été étudiés au chapitre 7, et on a vu dans le détail qu'ils sont tous instables pour les perturbations électrostatiques.

Dans le cas plus général d'une distribution "à deux courants", ayant l'allure représentée sur la figure 11.10, où il y a un maximum principal à  $v_1$  et un maximum secondaire à  $v_2$ , on peut démontrer immédiatement, par exemple à partir de (11.41) que  $I_r(v_1) < 0$  et  $I_r(v_{pc}) > I_r(v_2)$ . La condition d'instabilité de Penrose (11.47) est précisément  $I_r(v_{pc}) > 0$ . Quand elle est satisfaite, il y a deux situations possibles, selon la hauteur du maximum secondaire de  $\hat{\Phi}_0$  en  $v_2$  :

1. pour  $I_r(v_2) > 0$ , il y a instabilité quand :

$$I_r(v_2) < k_r^2 < I_r(v_{pc}) \tag{11.58}$$

2. pour  $I_r(v_2) < 0$ , il y a instabilité quand

$$0 < k_r^2 < I_r(v_{pc}) \tag{11.59}$$

Ces résultats sont représentés sur les figures 11.7(a) et (b). On voit que si les paramètres du plasma varient de sorte que  $\hat{\Phi}_0(w_k)$  passe de la forme stable à la forme instable, dans le cas 1 l'apparition d'un minimum dans  $\hat{\Phi}_0(w_k)$  est suffisante pour l'instabilité. Au contraire, dans cas 2 il faut de plus que le minimum soit assez profond pourqu'il y ait instabilité. On voit donc à nouveau que l'existence d'un minimum dans  $\hat{\Phi}_0(w_k)$  n'est pas toujours une condition suffisante d'instabilité.

En partant de (11.39) et (11.44) des résultats analogues peuvent être obtenus pour le domaine de valeurs de  $\omega_{p0}^2$  donnant lieu à instabilité quand  $H_r(\omega_r = k_r v_{pc}) > 0$  :

1. pour  $H_r(\omega_r = k_r v_2) > 0$ , il y a instabilité quand

$$H_r^{-1}(\omega_r = k_r v_{pc}) < \omega_{p0}^2 < H_r^{-1}(\omega_r = k_r v_2) \tag{11.60}$$

2. pour  $H_r(\omega_r = k_r v_2) < 0$ , il y a instabilité quand

$$H_r^{-1}(\omega_r = k_r v_2) < \omega_{p0}^2 < \infty \tag{11.61}$$

Cela est aussi représenté sur la figure 11.7.

Dans de nombreuses situations physiques, la figure 11.10 peut être modélisée par la superposition de deux maxwelliennes à une dimension, par exemple :

$$\hat{\Phi}_0(w_k) = \frac{\omega_{p1}^2}{v_{t1}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(w_k - v_1)^2}{v_{t1}^2}\right] + \frac{\omega_{p2}^2}{v_{t2}\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(w_k - v_2)^2}{v_{t2}^2}\right] \tag{11.62}$$

Il est alors commode de prendre comme origine des coordonnées de vitesse la vitesse de l'un des maxima, par exemple  $w - v_1 \equiv u$ , et d'introduire la vitesse relative :

$$v_2 - v_1 = v_0$$

En normalisant maintenant la nouvelle variable de vitesse ( $v/v_{t2}$ )  $\equiv \hat{u}$ , et en posant ( $v_0/v_{t2}$ )  $\equiv \hat{v}_0$  et  $[\Phi(\hat{u})v_{t2}\sqrt{\pi}/\omega_2^2] \equiv \hat{\Phi}(\hat{u})$ , on obtient :

$$\hat{\Phi}(\hat{u}) = \exp[-(\hat{u} - \hat{v}_0)^2] + \hat{N}\hat{T}^{1/2} \exp(-\hat{T}\hat{u}^2) \tag{11.63}$$

où  $\hat{N} \equiv (\omega_{p1}^2/\omega_{p2}^2)$  et  $\hat{T} \equiv (v_{t2}/v_{t1})^2$ . Les conditions de Penrose font donc intervenir trois paramètres :  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{N}$  et  $\hat{T}$ . On les utilise souvent sous les formes (11.45) et (11.46) pour déterminer les domaines de valeurs des paramètres où il y a stabilité ou instabilité. Pour cela on calcule d'abord la vitesse critique  $\hat{u}_c \equiv (v_{pc} - v_1)/v_{t2}$  à partir de  $\hat{\Phi}'(\hat{u} = \hat{u}_c) = 0$  et  $\hat{\Phi}''(\hat{u} = \hat{u}_c) > 0$ . On en déduit ensuite la frontière d'instabilité dans l'espace des paramètres à partir de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\Phi}(\hat{u}) - \hat{\Phi}(\hat{u}_c)}{(\hat{u} - \hat{u}_c)^2} d\hat{u} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \tag{11.64}$$

Comme il y a trois paramètres, la frontière de seuil [correspondant à l'égalité dans (11.64)] est en général une surface dans l'espace  $(\hat{v}, \hat{N}, \hat{T})$ . Si l'on fixe l'un des trois

paramètres, on obtient une courbe de seuil dans l'espace à deux dimensions des deux autres. Cela est illustré dans les paragraphes qui suivent.

Ces résultats sont suffisants pour une analyse assez complète de stabilité des systèmes à deux faisceaux avec élargissement thermique des distributions de chaque faisceau. Pour obtenir des résultats plus complets, comme par exemple le taux maximum de croissance des instabilités en fonction des paramètres, il faut résoudre directement la relation de dispersion du système.

### **b) Instabilité faisceau d'électrons-plasma**

Dans la section 7.2, nous avons étudié cette instabilité dans l'approximation des plasmas et faisceaux d'électrons froids unidimensionnels, dans laquelle la fonction de distribution des électrons du plasma est une fonction de Dirac centrée à  $w = 0$  et celle des électrons du faisceau une fonction de Dirac centrée sur la vitesse du faisceau  $w = v_0$ . Nous avons supposé les ions immobiles, et cela était justifié par le fait que les fréquences intéressantes (par exemple les taux de croissance) sont bien plus élevées que les fréquences caractéristiques de la dynamique des ions, comme la fréquence de plasma ionique.

Nous allons maintenant analyser cette instabilité quand les électrons du plasma et ceux du faisceau ont une agitation thermique qui élargit les fonctions de distribution ([191], [193], [194]). Supposons des formes maxwelliennes :

$$\hat{\Phi}_0(w) = \omega_p^2 \frac{\exp(-w^2/v_{tp}^2)}{v_{tp}\sqrt{\pi}} + \omega_b^2 \frac{\exp[-(w - v_0)^2/v_{tb}^2]}{v_{tb}\sqrt{\pi}} \quad (11.65)$$

où  $\omega_p^2 = (e^2 n_{p0}/m_e \epsilon_0)$  est la fréquence plasma des électrons du plasma,  $\omega_b^2 = (e^2 n_{b0}/m_e \epsilon_0)$  celle des électrons du faisceau,  $v_{tp} = (2\kappa T_p/m_e)^{1/2}$  et  $v_{tb} = (2\kappa T_b/m_e)^{1/2}$ , où  $T_p$  et  $T_b$  sont les températures électroniques respectives du plasma et du faisceau.

Les conditions de Penrose (11.45) et (11.46) permettent de déterminer les domaines des paramètres sans dimension ( $n_{b0}/n_{p0}$ ),  $(T_b/T_p)$  et  $(v_0/v_{tp})$  pour lesquels il y a stabilité ou instabilité. Le résultat d'un tel calcul numérique est montré sur la figure 11.12 [195]. Dans les conditions usuelles (faisceaux non relativistes) la densité du plasma est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à celle du faisceau, tandis que la température du faisceau est souvent inférieure, ou au plus comparable, à celle du plasma. Dans ces circonstances on voit sur la figure 11.12 que si la vitesse moyenne du faisceau est égale à quelques fois la vitesse thermique du plasma, le système est instable.

Il semble d'autre part qu'il y ait d'autres régimes d'instabilité, moins évidents quand on a simultanément  $T_b \ll T_p$  et  $v_0 \ll v_{tp}$ . La courbe de seuil entre les pointillés sur la figure 11.12 correspond à un un passage à



l'instabilité quand le minimum de  $\hat{\Phi}_0$  devient suffisamment profond. [cf. la discussion suivant l'équation (11.59).]

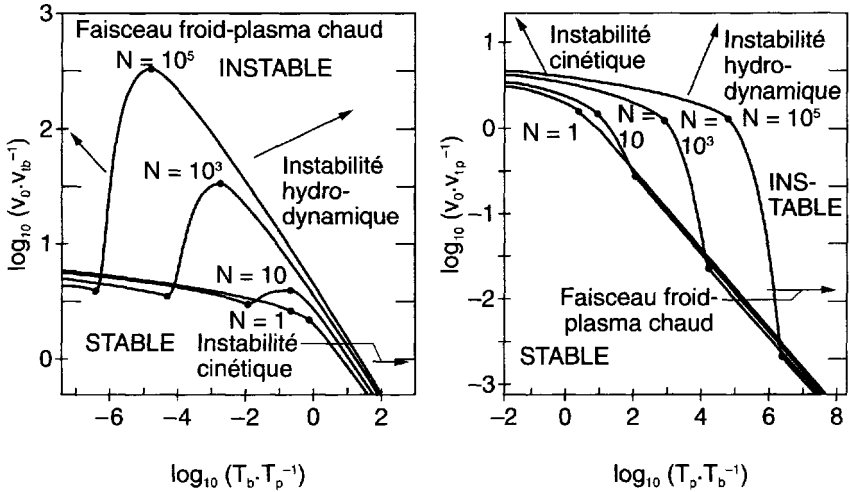


Figure 11.12 : Instabilité faisceau d'électrons-plasma [195]. Courbes de stabilité-instabilité de Penrose pour diverses valeurs de  $N = n_{p0}/n_{b0}$ . Divers régimes d'instabilité physiquement différents.

Pour y voir plus clair sur la nature de l'instabilité dans les différentes gammes de paramètres, nous revenons à une étude de la relation de dispersion pour des distributions maxwelliennes des électrons du faisceau et du plasma. Cela se fait en égalant à zéro la constante diélectrique longitudinale du système :

$$K_L(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k_r^2 v_{tp}^2} Z' \left( \frac{\omega}{|k_r| v_{tp}} \right) - \frac{\omega_b^2}{k_r^2 v_{tb}^2} Z' \left( \frac{\omega - k_r v_0}{|k_r| v_{tb}} \right) = 0 \quad (11.66)$$

où  $Z'$  est la dérivée de la fonction de dispersion des plasmas [cf. paragraphe 10.3.4(c)].

La résolution générale de (11.66) est très difficile. Mais, dans diverses situations particulières de l'interaction faisceau-plasma, on a des relations de dispersion approchées qui sont des formes limites de cette équation et qui peuvent être résolues. Elles correspondent à des instabilités physiquement distinctes.

$\alpha$ ) **Instabilité hydrodynamique faisceau froid-plasma** A partir de la valeur asymptotique de la fonction  $Z'$  pour les grandes valeurs de l'argument (cf. Appendice A10-1), on peut établir les conditions pour lesquelles l'interaction est assez bien décrite par le modèle hydrodynamique de la section 7.2. Il faut pour cela que l'on ait :

$$\left| \frac{\omega}{k_r v_{tp}} \right| \gg 1 \quad (11.67)$$

et

$$\left| \frac{\omega - k_r v_0}{k_r v_{tb}} \right| \gg 1 \quad (11.68)$$

Pour le mode le plus instable (7.19), (11.67) et (11.68) deviennent :

$$\frac{v_0}{v_{tp}} \gg 1 \quad (11.69)$$

et

$$\frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left( \frac{n_{b0}}{n_{p0}} \right)^{1/3} \frac{v_0}{v_{tb}} \gg 1 \quad (11.70)$$

La dernière condition est visiblement la plus stricte. On voit que l'instabilité est proche de sa forme hydrodynamique quand on a :

$$v_{tp} \ll \frac{\omega_r}{k_r} \ll (v_0 - v_{tb}) \quad (11.71)$$

et quand les fonctions de distribution du plasma et du faisceau sont toutes deux assez pointues et bien séparées l'une de l'autre, comme sur la figure 11.13.

$\beta$ ) **Instabilité cinétique résonnante faisceau chaud-plasma froid**  
Il apparaît une autre limite de l'instabilité quand

$$v_0 \gg v_{tp} \quad (11.72)$$

mais avec :

$$\frac{v_{tb}}{v_0} \gg \left( \frac{n_{b0}}{n_{p0}} \right)^{1/3} \quad (11.73)$$

Dans ce cas l'élargissement thermique fini de la fonction de distribution du faisceau devient important et il faut utiliser la description cinétique (Vlasov) de la susceptibilité du faisceau. Cependant, le plasma de son côté

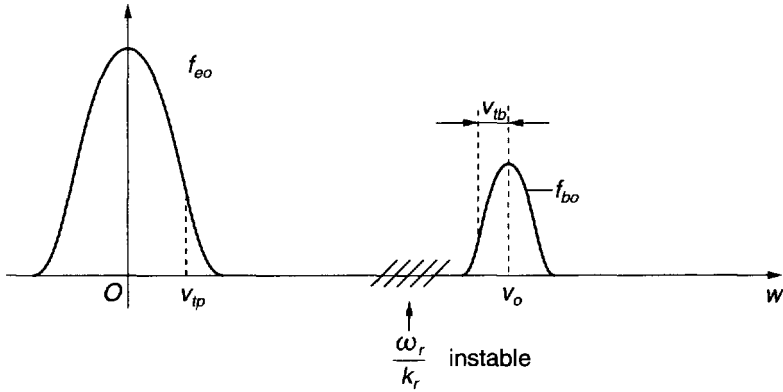


Figure 11.13 : Système faisceau d'électrons-plasma avec élargissements thermiques faibles. Instabilité quasi hydrodynamique (proche du modèle des plasmas froids).

peut encore être considéré comme "froid". On obtient ainsi pour  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$  la relation de dispersion approchée :

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_b^2}{k_r^2} \left[ P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}'_{b0} dw}{w - \frac{\omega_r}{k_r}} + \frac{k_r}{|k_r|} i\pi \hat{f}'_{b0}(w = \frac{\omega_r}{k_r}) \right] = 0 \quad (11.74)$$

Pour  $n_{b0} \ll n_{p0}$  cela donne :

$$\omega_r \approx \omega_p \quad (11.75)$$

et :

$$\frac{\omega_i}{\omega_p} \approx \frac{\pi \omega_b^2}{2 k_r^2} \hat{f}'_{b0}(w = \frac{\omega_p}{k_r}) \quad (11.76)$$

Le taux de croissance maximum se produit quand  $k_r$  est tel que  $(\omega_p/k_r) = v_0 - v_{tb}$ , ce qui donne :

$$\frac{\omega_{i \max}}{\omega_p} \approx \sqrt{\pi/2e} \left( \frac{n_{b0}}{n_{p0}} \right) \left( \frac{v_0}{v_{tb}} \right)^2, \quad (e = 2.718\dots) \quad (11.77)$$

Sur (11.72)–(11.77) on voit que cette instabilité est très différente de l'instabilité hydrodynamique. Elle demande une description cinétique du faisceau et dépend de l'interaction résonnante (instable) de l'onde et des particules du faisceau (cf. Fig. 11.14) ; on l'appelle souvent l'instabilité

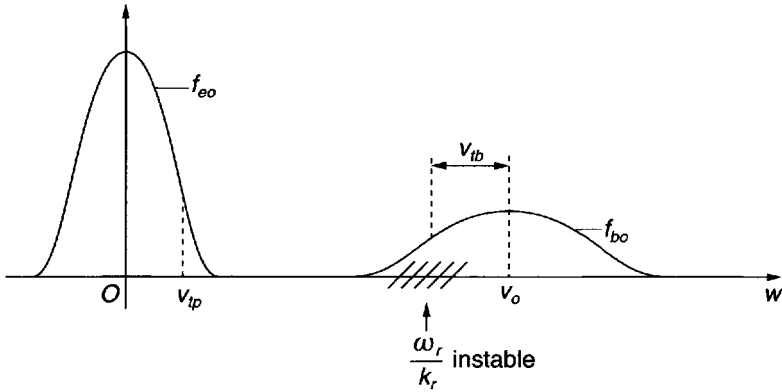


Figure 11.14 : Faisceau d'électrons chaud-plasma froid ; instabilité cinétique.

*cinétique, résonnante faisceau chaud-plasma froid.* On voit que son taux de croissance (11.77) est bien plus petit que celui (7.19) de l'instabilité hydrodynamique faisceau-plasma . Du point de vue énergétique elle est aussi très différente de l'instabilité hydrodynamique. Sur (11.74) et sa solution (11.76) et (11.77) pour  $n_{b0} \ll n_{p0}$  on voit que l'onde est déterminée essentiellement par le plasma et que c'est une onde d'énergie positive ; le faisceau la perturbe et, en amenant une dissipation négative (amortissement anti-Landau) pour les vitesses de phase inférieures à  $v_0$ , rend l'onde de plasma instable.

Dans l'évolution non linéaire la plus simple (appelée quasi linéaire) de cette instabilité cinétique, les champs instables diffusent les particules du faisceau au voisinage des vitesses de phase instables, de sorte que la fonction de distribution du faisceau tend à s'aplatir à cet endroit et, d'après (11.76), l'instabilité disparaît. En pratique, le piégeage des particules, qui caractérise l'évolution non linéaire de l'instabilité hydrodynamique faisceau-plasma, peut aussi intervenir dans l'évolution de l'instabilité cinétique et cela complique la situation. D'ailleurs, la dynamique des ions ne peut plus être négligée car des ondes de haute fréquence de grande amplitude peuvent exciter de manière non linéaire des ondes de bien plus basse fréquence. Ainsi, dans l'évolution non linéaire, il y a plusieurs mécanismes en compétition qui peuvent intervenir et décider du sort final de l'instabilité. Une telle analyse sort du cadre de ce chapitre et le lecteur intéressé est invité à consulter la littérature récente très abondante sur ce sujet, donnée à la fin de cette section.

**$\gamma$ ) Faisceau chaud-plasma chaud "avec une bosse dans la queue"**  
 Si maintenant on suppose que la température du plasma augmente, l'effet

anti-Landau produit par la température du faisceau entre en conflit avec l'amortissement de Landau créé par le plasma et il peut y avoir une condition de seuil de l'instabilité cinétique. Cette situation est représentée sur la figure 11.15, et l'on voit que la physique du seuil décrite ci-dessus est directement reliée aux conditions de Penrose. La relation de dispersion pour

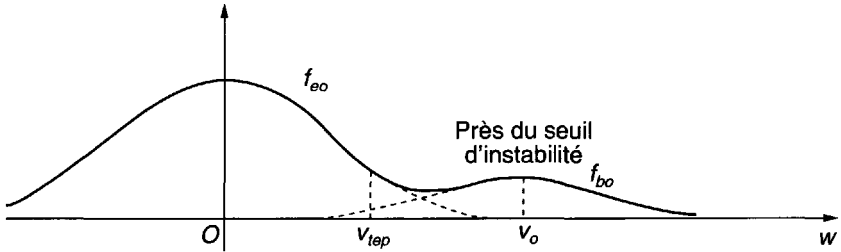


Figure 11.15 : Faisceau d'électrons chaud-plasma chaud : instabilité cinétique produite par une bosse dans la queue.

$|\omega_i| \ll |\omega_r|$  s'écrit maintenant de manière approchée :

$$1 - \frac{\omega_p^2}{k_r^2} \left[ P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}'_{p0} dw}{w - \frac{\omega}{k_r}} + \frac{k_r}{|k_r|} i\pi \hat{f}'_{p0}(w = \frac{\omega}{k_r}) \right] - \frac{\omega_b^2}{k_r^2} \left[ P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}'_{b0} dw}{w - \frac{\omega}{k_r}} + \frac{k_r}{|k_r|} i\pi \hat{f}'_{b0}(w = \frac{\omega}{k_r}) \right] = 0 \quad (11.78)$$

Pour  $n_{b0} \ll n_{p0}$  on trouve alors :

$$\omega_r^2 \approx \omega_p^2 (1 + 3k_r^2 \lambda_{De}^2) \quad (11.79)$$

et le seuil approché d'instabilité devient :

$$\frac{n_{b0}}{n_{p0}} \left( \frac{v_0}{v_{tp}} \right)^2 > \left( \frac{v_0}{v_{tp}} \right)^3 \exp \left( \frac{-v_0^2}{2v_{tp}^2} \right) \quad (11.80)$$

c'est-à-dire que le taux de croissance maximum de l'instabilité cinétique (11.77) dépasse le taux d'amortissement de Landau (10.214) produit par la température finie des électrons du plasma.

δ) **Instabilité cinétique faisceau froid-plasma chaud** Enfin, une autre interaction apparaît dans un système faisceau d'électrons-plasma quand :

$$v_{tb} \ll v_0 \ll v_{tp} \tag{11.81}$$

Cette situation, qui peut être baptisée "plasma chaud- faisceau froid" est représentée sur la figure 11.16. La relation de dispersion approchée s'écrit

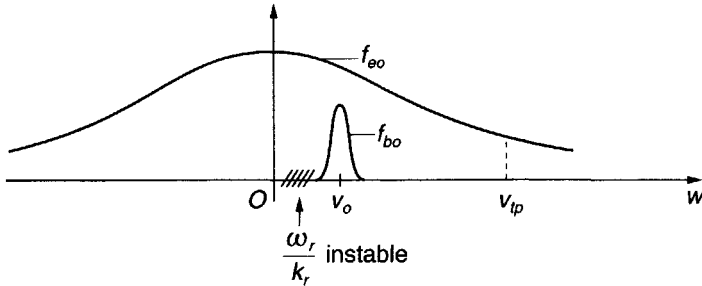


Figure 11.16 : Faisceau froid-plasma chaud ; instabilité cinétique résonnante.

alors :

$$1 - \frac{\omega_b^2}{(\omega - k_r v_0)^2} + \frac{2\omega_p^2}{k_r^2 v_{tp}^2} \left( 1 + i\sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_r| v_{tp}} \right) = 0 \tag{11.82}$$

La susceptibilité du faisceau est ici écrite dans l'approximation des plasmas froids, tandis que la susceptibilité du plasma est prise dans la limite adiabatique pour les électrons,  $|\omega| \ll k_r v_{tp}$ , comme on l'a fait dans la section 10.3.4(b) pour l'étude des ondes acoustiques ioniques, à cela près qu'on néglige ici le mouvement des ions. Avec la partie réelle de (11.82) on trouve les ondes de faisceaux habituelles modifiées ici par le plasma :

$$(\omega_r - k_r v_0)^2 = \omega_b^2 \frac{k_r^2 \lambda_{De}^2}{1 + k_r^2 \lambda_{De}^2} \tag{11.83}$$

La partie imaginaire de la susceptibilité électronique du plasma dans (11.82) représente une dissipation positive par ses particules résonnantes.

Ainsi, en choisissant la solution de (11.83) qui est une onde d'énergie négative, on trouve son taux de croissance :

$$\frac{\omega_i}{\omega_r} \approx \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left( \frac{n_{b0}}{n_{p0}} \right)^{1/2} (1 + k_r^2 \lambda_{De}^2)^{-3/2} \quad (11.84)$$

D'après l'énergétique de cette interaction on peut la baptiser *instabilité cinétique à dissipation positive* pour la distinguer de l'instabilité cinétique à dissipation négative qui correspond aux conditions (11.72) et (11.73). On pourrait aussi appeler l'instabilité associée à la condition (11.81) une *instabilité cinétique, résonnante plasma chaud-faisceau froid*, pour souligner le fait que les aspects cinétiques de l'interaction sont liés aux particules résonnantes du plasma.

On voit aussi sur (11.84) que pour  $k_r \lambda_{De} \gg 1$  l'instabilité faisceau-plasma devient très faible. Dans ce cas la présence des ions devient importante et ne peut plus être négligée. En fait, pour  $k_r \lambda_{De} \gg 1$  le faisceau est découplé des électrons du plasma mais peut exciter de fortes instabilités ioniques dans ce dernier. Dans ces circonstances très spéciales (électrons du plasma très chauds) il peut y avoir un chauffage turbulent des ions par un faisceau d'électrons ([196], [193]). Ce mode de chauffage s'est révélé difficile à réaliser en laboratoire, mais il est possible qu'il joue un rôle important dans les plasmas géophysiques et astrophysiques.

Pour conclure ces paragraphes sur l'instabilité linéaire faisceau d'électrons-plasma, il faut citer les nombreuses études faites sur la transition entre les régimes hydrodynamique et cinétique ([197], [198], [199]); les deux premières références étudient aussi les solutions importantes avec  $k(\omega_r)$  complexe. Comme en régime cinétique, cette instabilité est convective [195]. Mais en régime cinétique les collisions peuvent jouer un rôle important pour détruire l'instabilité [200], [198] (cf. aussi problème P11-6).

L'évolution non linéaire de l'instabilité faisceau d'électrons-plasma en régime hydrodynamique a été brièvement décrite au paragraphe 7.2.4. En régime cinétique la saturation de l'instabilité est parfois beaucoup plus simple. Dans le cas "bosse dans la queue", les effets quasi linéaires (cf. par exemple [201]) aplatissent, en principe, la fonction de distribution dans l'intervalle de nombres d'onde instables et réduisent ainsi le taux de croissance à zéro. Mais les amplitudes finies produisent toujours deux effets importants : piégeage des particules, dont la théorie quasi linéaire ne tient pas compte, et couplage non linéaire d'énergie au mouvement des ions [202] (cf. aussi [203], [204]). Ces deux effets ont été aussi brièvement décrits décrits dans la section 7.2.4.

### c) Instabilités de courant électron-ion

Nous étudions maintenant la théorie cinétique des instabilités de courant dans un plasma neutre où les électrons sont en mouvement relatif par rapport aux ions. Nous avons déjà analysé cette situation dans l'approximation des plasmas froids dans la section 7.3, et décrit l'instabilité dite de Pierce-Budker-Buneman. Nous allons maintenant tenir compte des effets thermiques des électrons et des ions ([120], [205]).

Déterminons tout d'abord, au moyen des conditions de Penrose, les domaines de variation des paramètres du plasma qui conduisent à la limite stabilité-instabilité. On suppose que les fonctions de distributions des vitesses des électrons et des ions sont maxwelliennes, et on se place dans un repère de coordonnées où les ions ont une vitesse moyenne nulle. On a donc :

$$\hat{\Phi}_0(w) = \omega_{pi}^2 \frac{\exp(-w^2/v_{ti}^2)}{v_{ti}\sqrt{\pi}} + \omega_{pe}^2 \frac{\exp[-(w - v_0)^2/v_{te}^2]}{v_{te}\sqrt{\pi}} \quad (11.85)$$

où  $\omega_{pi}^2 = (Z_i^2 e^2 n_{i0}/m_i \epsilon_0)$  et  $\omega_{pe}^2 = (e^2 n_{e0}/m_e \epsilon_0)$  sont les fréquences de plasma ionique et électronique. On a aussi posé  $v_{ti} = (2\kappa T_i/m_i)^{1/2}$  et  $v_{te} = (2\kappa T_e/m_e)^{1/2}$  où  $T_i$  et  $T_e$  sont les températures ioniques et électroniques, et  $v_0$  la vitesse relative des électrons par rapport aux ions. On a enfin  $Z_i n_{i0} = n_{e0}$  puisque le plasma est neutre à l'équilibre.

Les trois paramètres (sans dimension) qui décrivent le plasma dans la condition de seuil de Penrose sont donc  $(Z_i m_i/m_e)$ ,  $(v_0/v_{te})$  et  $(T_e/T_i)$ . La figure 11.17 montre les résultats d'une analyse numérique ([190], [195]) de la condition de seuil de Penrose pour un plasma d'hydrogène, c'est-à-dire  $Z_i = 1$  et  $(m_i/m_e) = 1836$ . On y voit que près du seuil il y a trois régimes distincts d'instabilité. Notons à nouveau que dans le régime entre les pointillés la transition à l'instabilité se produit quand le minimum de  $\hat{\Phi}_0$  devient assez marqué [cf. la discussion suivant l'équation (11.59)].

Pour  $(v_0/v_{te}) > 1$  et  $(T_e/T_i) \ll 1$  on s'attend à retrouver la très forte instabilité hydrodynamique de Pierce-Buneman étudiée dans la section 7.3. Pour  $(v_0/v_{te}) \leq 1$  et  $T_e \sim T_i$  l'instabilité de Pierce-Buneman devient cinétique. Enfin, pour  $T_e \gg T_i$  l'onde acoustique ionique devient bien définie, mais un glissement même petit des électrons ( $v_0 \ll v_{te}$ ) peut la rendre instable. Pour analyser ces régimes plus en détail nous allons chercher les solutions de la relation de dispersion des ondes électrostatiques dans divers cas limites. Pour des fonctions de distribution maxwellienne pour les ions et maxwellienne déplacée pour les électrons, la relation de dispersion unidimensionnelle est donnée par :

$$K_L(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k_r^2 v_{te}^2} Z' \left( \frac{\omega - k_r v_0}{|k_r| v_{te}} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{k_r^2 v_{ti}^2} Z' \left( \frac{\omega}{|k_r| v_{ti}} \right) = 0 \quad (11.86)$$

où  $Z'$  est la dérivée de la fonction de dispersion des plasmas définie au paragraphe 10.3.6(c).



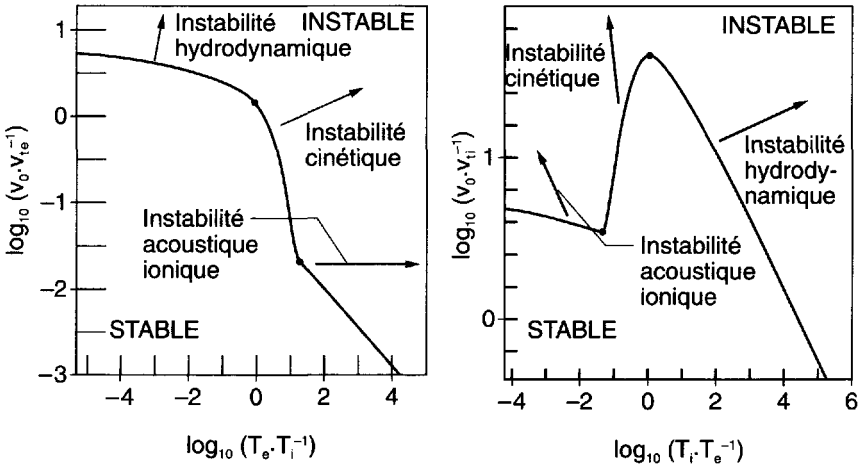


Figure 11.17 : Instabilités de courant électron-ion dans un plasma [195].  
 Courbes de Penrose de limite stabilité-instabilité.  
 $Z_i = 1$ ;  $m_i/m_e = 1836$ .  
 Différents régimes d'instabilité physiquement distincts.

**α) Régime hydrodynamique de Pierce-Buneman.** Pour retrouver l'instabilité hydrodynamique de Pierce-Buneman il faut que les modules de la variable dans les deux fonctions  $Z'$  dans (11.86) soient bien plus grands que l'unité. Avec les résultats du mode hydrodynamique le plus instable (7.35), ces conditions deviennent :

$$\frac{v_0}{v_{te}} \gg 1 \tag{11.87}$$

et

$$\frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left( \frac{Z_i m_e}{m_i} \right)^{1/3} \frac{v_0}{v_{ti}} \gg 1 \tag{11.88}$$

Quand  $T_i \gg T_e$ , la seconde condition devient plus sévère car elle impose  $(v_0/v_{te}) \gg (T_i/T_e)^{1/2}$ . Comme on peut s'y attendre pour une instabilité hydrodynamique, l'intervalle des vitesses de phase instables est donné approximativement par :

$$v_{ti} \ll \frac{\omega_r}{k_r} \ll (v_0 - v_{te}) \tag{11.89}$$

comme on le voit sur la figure 11.18(a).

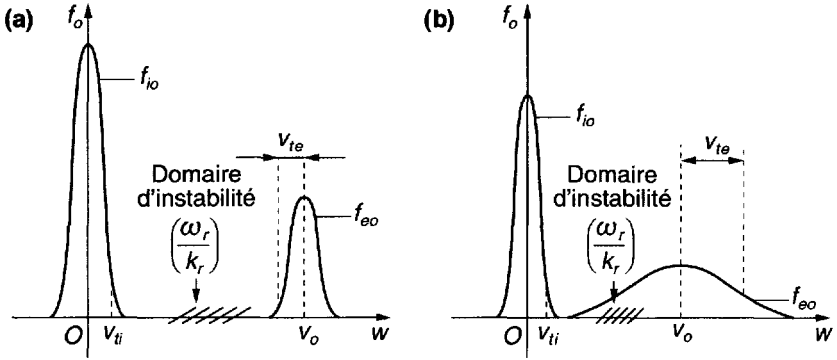


Figure 11.18 : Instabilité de courant électron-ion (Pierce-Buneman).  
 (a) Description hydrodynamique.  
 (b) Description cinétique.

**β) Régime cinétique.** Lorsque la température électronique croît, l'instabilité de Pierce-Buneman entre dans un régime cinétique. Cela est représenté sur la figure 11.18(b). On y voit que la fonction de distribution des électrons produit une dissipation négative (par l'effet anti-Landau des particules synchrones) pour l'onde d'énergie positive qui est portée essentiellement par les ions froids et les électrons chauds. La relation de dispersion approchée dans ce régime, et pour  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ , est donnée par :

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{k_r^2} \left[ P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}'_{e0}}{w - \frac{\omega_r}{k_r}} + \frac{k_r}{|k_r|} i\pi \hat{f}'_{e0} \left( w = \frac{\omega_r}{k_r} \right) \right] = 0 \quad (11.90)$$

On ne peut pas négliger ici le second terme comme on l'avait fait dans (11.74). Les ondes les plus instables se produisent maintenant pour

$$(\omega_r/k_r) \approx (v_o - v_{te})$$

et leurs fréquences sont proches de la fréquence plasma ionique ou en-dessous, entrant ainsi dans le domaine de l'onde acoustique ionique.

$\gamma$ ) **Régime acoustique ionique.** Si la température électronique croît encore, les ondes acoustiques ioniques peuvent être rendues instables par la vitesse de dérive électronique, même si celle-ci est plus petite que la vitesse thermique électronique [120]. Une telle situation est assez courante et cela justifie une analyse plus détaillée. Réexaminons donc les conditions de Penrose pour ce cas. Cela est fait graphiquement sur la figure 11.19 où l'on voit que l'instabilité peut exister pour :

$$v_{ti} \ll \frac{\omega_r}{k_r} < v_0 \ll v_{te} \quad (11.91)$$

On peut récrire la relation de dispersion (11.86) sous la forme :

$$\frac{k_r^2 v_{te}^2}{\omega_{pe}^2} = Z' \left( \frac{\omega - k_r v_0}{|k_r| v_{te}} \right) + Z_i \frac{T_e}{T_i} Z' \left( \frac{\omega}{|k_r| v_{ti}} \right) \equiv L(\omega) \quad (11.92)$$

où  $L(\omega)$  est une fonction commode pour l'étude de l'instabilité de Penrose. Dans les conditions de (11.91) on a, pour la partie réelle de  $L(\omega = \omega_r)$  :

$$L_r \approx -2 + Z_i \frac{T_e}{T_i} \operatorname{Re} \left[ Z' \left( \frac{\omega_r}{|k_r| v_{ti}} \right) \right] \quad (11.93)$$

Le seuil d'instabilité,  $L_r = 0$  se produit donc quand  $\operatorname{Re} Z'(\zeta_r)$  est maximum, c'est-à-dire pour  $(\omega_r/k_r v_{ti}) \approx 1.5$  avec  $(\operatorname{Re} Z')_{\max} \approx 0.57$  (cf. Appendice A10-1). D'où la condition approchée de seuil :

$$-2 + 0.57 Z_i \frac{T_e}{T_i} \approx L_r \geq 0 \quad (11.94)$$

et compte tenu de (11.92) :

$$Z_i \frac{T_e}{T_i} \geq 3.5(1 + k_r^2 \lambda_{De}^2) \quad (11.95)$$

Pour  $(k_r \lambda_{De})^2 \ll 1$ ,  $(Z_i T_e/T_i) > 3.5$  tombe dans le domaine où les ondes acoustiques ioniques commencent à pouvoir se propager en l'absence de courant [cf. paragraphe 10.3.4(b)]. On voit aussi que la condition la plus à gauche dans (11.91), qui permet de négliger l'amortissement de Landau ionique, impose au moins  $v_0 > 4 v_{ti}$ . On trouve ainsi la condition approchée suivante pour la vitesse de glissement :

$$v_0 > c_s \equiv \sqrt{Z_i T_e / m_i}$$

c'est-à-dire que la vitesse de glissement doit dépasser la vitesse du son ionique, qui est évidemment aussi la vitesse de phase des ondes faiblement croissantes près du seuil.

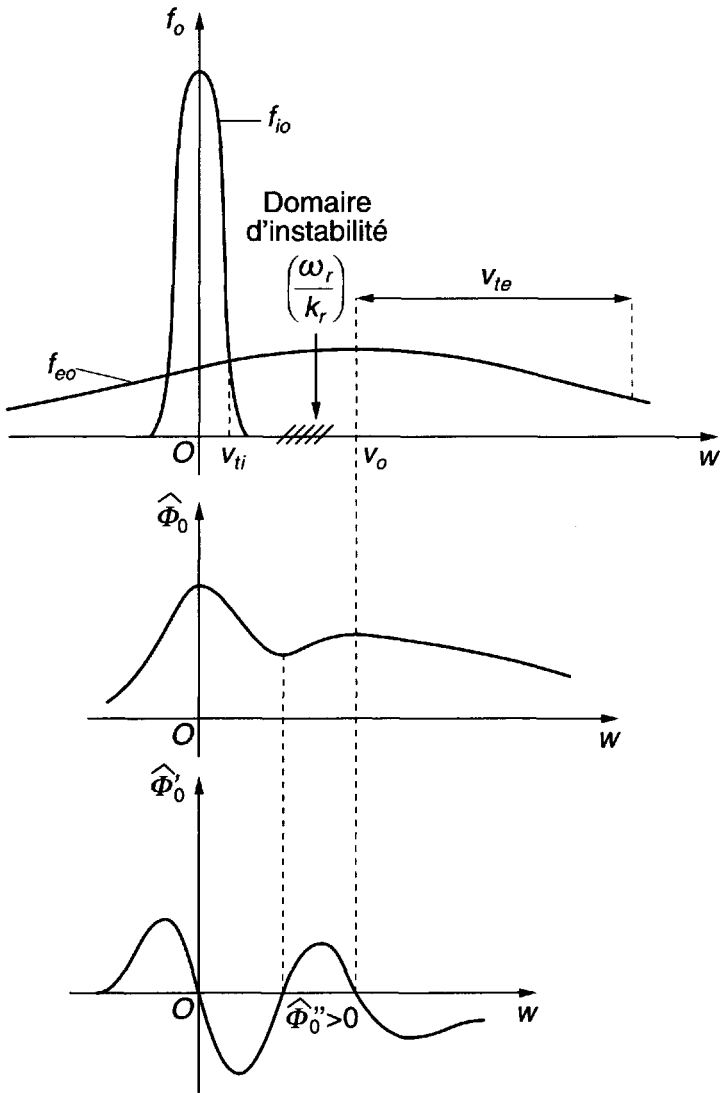


Figure 11.19 : Instabilité acoustique ionique de courant dans un plasma neutre.

- (a) Fonctions de distribution des électrons et des ions.
- (b) Fonction de distribution pondérée.
- (c) Dérivée de la fonction de distribution pondérée.

On peut aussi déterminer le domaine des densités instables (11.60), (11.61) [ou des nombres d'onde (11.58), (11.59)]. D'après (11.92) et (11.93) il est clair qu'on doit avoir pour qu'il y ait instabilité

$$(k_r^2 v_{te}^2 / \omega_{pe}^2) < -2 + (Z_i T_e / T_i) \text{Re}[Z'(\omega / |k_r| v_{ti})]$$

Mais d'autre part, pour

$$|\omega| / k_r \approx v_0 \gg v_{ti}$$

on a :

$$L_r \approx -2 + (Z_i T_e / T_i) (v_{ti} / v_0)^2$$

et on peut s'attendre à l'instabilité jusqu'à  $k_r = 0$  quand  $L_r$  devient négatif. Autrement dit, le domaine d'instabilité est donné par :

$$\frac{Z_i T_e}{T_i} \frac{v_{ti}^2}{v_0^2} - 2 < \frac{k_r^2 v_{te}^2}{\omega_{pe}^2} < \frac{Z_i T_e}{T_i} \text{Re} \left[ Z' \left( \frac{\omega}{|k_r| v_{ti}} \right) \right] - 2 \quad (11.96)$$

Cela est représenté schématiquement sur la figure 11.20(a).

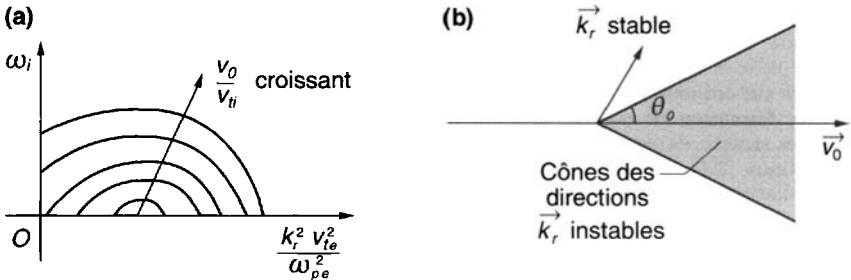


Figure 11.20 : Instabilité acoustique ionique de courant électrons-ions.

(a) Taux de croissance.

(b) Cônes d'instabilité pour la direction de  $\vec{k}_r$ .

Dans les mêmes conditions, c'est-à-dire (11.91) et  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ , on peut aussi résoudre la relation de dispersion par des développements limités des fonctions  $Z$ . Le résultat, pour  $|\omega_i| \ll |\omega_r|$ , est :

$$\omega_r \approx \pm k_r c_s \quad (11.97)$$

et

$$\frac{\omega_i}{|\omega_r|} \approx \left( \frac{\pi Z_i m_e}{8 m_i} \right)^{1/2} \left( \frac{|k_r| v_0}{|\omega_r|} - 1 \right) \quad (11.98)$$

Du point de vue énergétique, l'instabilité est celle d'une onde d'énergie positive (l'onde acoustique ionique) rendue instable par une dissipation négative (effet anti-Landau) apportée à l'onde par les électrons quand leur vitesse de glissement dépasse la vitesse de phase des ondes (c'est-à-dire la vitesse acoustique ionique).

On peut voir enfin que dans une analyse à trois dimensions de cette instabilité, où  $\vec{k}_r$  fait un angle  $\theta$  avec  $\vec{v}_0$ , ce qui intervient dans (11.98) au lieu de  $|k_r|v_0$  c'est  $|k_r|v_0 \cos \theta$ , où  $v_0$  est maintenant le module  $|\vec{v}_0|$  et  $k_r = |\vec{k}_r|$ . Il en résulte donc que l'instabilité existe dans un cône  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  [cf. Fig. 11.20(b)] avec  $\cos^2 \theta > \cos^2 \theta_0 \equiv (c_s^2/v_0^2)$ , ce qui impose à nouveau  $v_0^2 > c_s^2$ .

L'évolution non linéaire de cette instabilité acoustique ionique a été étudiée par simulation sur ordinateur. De manière quasi linéaire, l'instabilité évolue en aplatisant la fonction de distribution électronique dans le domaine des vitesses électroniques résonnantes avec les vitesses de phase de l'onde acoustique ionique croissante. Ensuite, les champs de grande amplitude engendrés par l'instabilité commencent à produire une queue vers les hautes énergies dans la fonction de distribution des ions, et celle-ci donne lieu à un fort amortissement de Landau ionique qui arrête la croissance de l'onde. L'évolution non linéaire de l'instabilité hydrodynamique de Buneman est plus complexe et a été brièvement décrite dans la section 7.3. Plus récemment, des simulations sur ordinateur de l'instabilité de Buneman ont montré une évolution non linéaire avec formation de doubles couches (structures solitaires avec potentiel négatif). De telles structures ont été invoquées pour expliquer divers phénomènes dans les plasmas spatiaux [206]. La formation de faibles doubles couches a aussi été observée dans les simulations sur ordinateur de l'instabilité acoustique ionique ([207], [208]).

### d) Instabilité électrostatique à deux faisceaux d'électrons opposés

Comme dernier exemple d'analyse cinétique des instabilités électrostatiques, on considère le cas de deux faisceaux d'électrons d'égales densités, se déplaçant en sens inverses dans un fond continu d'ions immobiles. C'est le système que nous avons déjà étudié dans la section 7.4, à cela près que nous tenons compte ici des élargissements thermiques des fonctions de distribution des deux faisceaux. Nous allons profiter de la simplicité de ce cas pour étudier divers modèles de fonction de distribution, et en voir l'influence sur les conditions d'instabilité de Penrose.

**α) Distributions de Lorentz-Cauchy.** Supposons que les fonctions de distribution des vitesses des deux faisceaux d'électrons opposés soient de la forme de Lorentz-Cauchy :

$$\hat{f}_0(\vec{w}) = \frac{\alpha}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{[(\vec{w} - \vec{v}_0)^2 + \alpha^2]^2} + \frac{1}{[(\vec{w} + \vec{v}_0)^2 + \alpha^2]^2} \right\} \quad (11.99)$$

où  $\alpha$  est une mesure des écarts de vitesse dans chaque faisceau. On trouve alors pour la fonction de distribution réduite (10.280) :

$$\hat{F}_0(w_k) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{1}{(w_k - u_0)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(w_k + u_0)^2 + \alpha^2} \right] \quad (11.100)$$

où  $u_0$  est la composante de  $\vec{v}_0$  parallèle à  $\vec{k}_r$  et  $\hat{F}_0$  est représenté sur la figure 11.21(a). Comme le minimum de  $\hat{F}_0$  est pour  $w_k = 0$ , la condition nécessaire d'instabilité de Penrose s'écrit :

$$\hat{F}_0''(0) = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{3u_0^2 - \alpha^2}{(u_0^2 + \alpha^2)^3} > 0 ; \text{ soit } ; u_0 > \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad (11.101)$$

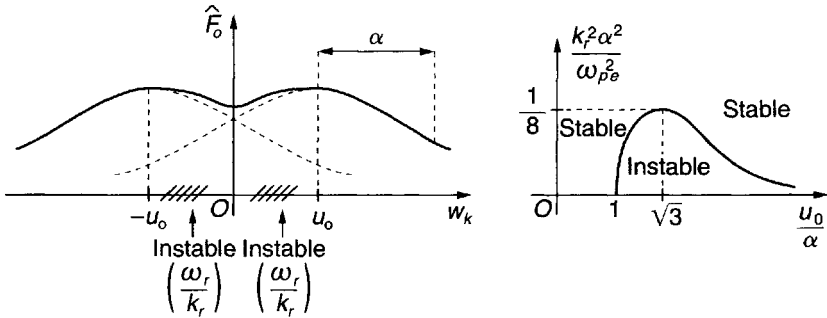


Figure 11.21 : Instabilité électrostatique à deux faisceaux d'électrons opposés.

- (a) Distributions de Lorentz-Cauchy.
- (b) Courbe de Penrose de limite stabilité-instabilité.

La condition suffisante d'instabilité de Penrose se déduit facilement de (11.43) pour  $v_{pc} = 0$ , soit :

$$\frac{\omega_{pe}^2}{k_r^2} \frac{u_0^2 - \alpha^2}{(u_0^2 + \alpha^2)^2} > 0 ; \text{ soit } : u_0 > \alpha \quad (11.102)$$

qui est, évidemment, plus sévère que (11.101). On note que la condition *suffisante de stabilité* de Newcomb-Gardner serait  $u_0 < (\alpha/\sqrt{3})$ . Le seuil d'instabilité est donné par :

$$\frac{k_r^2}{\omega_{pe}^2} < \frac{u_0^2 - \alpha^2}{(u_0^2 + \alpha^2)^2} \quad (11.103)$$

comme on le voit sur la figure 11.21(b). L'instabilité peut donc seulement apparaître pour des nombres d'onde plus petits que  $(\omega_{pe}/\alpha 2\sqrt{2})$ , c'est-à-dire pour des longueurs d'onde plus grandes que la longueur de Debye effective du faisceau d'électrons.

On peut évidemment obtenir les mêmes résultats à partir de la relation de dispersion, et on peut alors déterminer d'autres propriétés importantes de l'instabilité, telles que le taux de croissance maximum. Pour la distribution (11.100) la relation de dispersion des ondes électrostatiques (11.30) est :

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2/2}{(\omega - |k_r|u_0 + i|k_r|\alpha)^2} - \frac{\omega_{pe}^2/2}{(\omega + |k_r|u_0 + i|k_r|\alpha)^2} = 0 \quad (11.104)$$

[à comparer avec (7.36)]. D'où :

$$\omega = -i|k_r|\alpha \pm \left\{ (|k_r|u_0)^2 + \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[ 1 \pm \left( 1 + \frac{8k_r^2 u_0^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2} \quad (11.105)$$

où l'on voit que  $(-i|k_r|\alpha)$  est le taux d'amortissement de Landau pour une fonction de distribution de Lorentz-Cauchy. Le maximum de  $\omega_i$  en fonction de  $u_0$  obtenu pour :

$$u_0 = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{\omega_{pe}}{|k_r|} \equiv u_{0\max} \quad (11.106)$$

est égal à :

$$\omega_{i\max} = \frac{\omega_{pe}}{\sqrt{8}} - |k_r|\alpha = |k_r| \left( \frac{u_{0\max}}{\sqrt{3}} - \alpha \right) \quad (11.107)$$

On obtient aussi à partir de (11.105) la valeur du seuil d'instabilité pour  $(k_r^2/\omega_{pe}^2)$ , et l'on retrouve le résultat (11.103).

**(β) Distributions maxwelliennes.** Supposons maintenant que les fonctions de distribution des vitesses pour les deux faisceaux opposés soient des maxwelliennes déplacées. La fonction de distribution réduite (10.280) du système est alors :

$$\hat{F}_0(w_k) = \frac{1/2}{v_{te}\sqrt{\pi}} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{w_k - u_0}{v_{te}} \right)^2 \right] + \exp \left[ - \left( \frac{w_k + u_0}{v_{te}} \right)^2 \right] \right\} \quad (11.108)$$



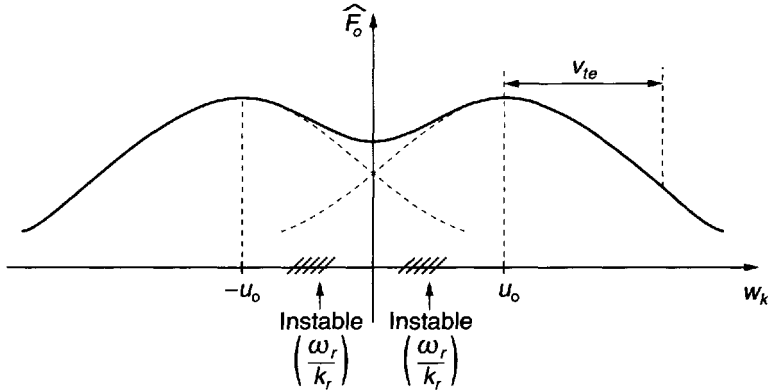


Figure 11.22 : Distributions maxwelliennes dans deux courants opposés.

où  $v_{te}^2 \equiv (2\kappa T_e/m_e) = v_{te}^2$  et  $T_e$  est la température électronique des deux faisceaux. Cela est représenté sur la figure 11.22 où l'on voit que (contrairement au cas des distributions de Lorentz-Cauchy de la figure 11.21(a)) la queue vers les hautes énergies ( $|w_k| \rightarrow \infty$ ) tend très rapidement vers zéro ; c'est-à-dire que pour  $v_{te} \sim \alpha$ , il y a moins de particules de grande vitesse dans une maxwellienne que dans une distribution de Lorentz-Cauchy. On peut montrer que pour (11.108) la condition nécessaire de Penrose  $\hat{F}_0''(0) > 0$  impose :

$$u_0 > v_{te}/\sqrt{2} \tag{11.109}$$

tandis que la condition suffisante de Penrose donne :

$$\frac{1}{2v_e} \left[ Z' \left( \frac{-u_0}{v_{te}} \right) + Z' \left( \frac{u_0}{v_{te}} \right) \right] > 0 \tag{11.110}$$

et impose donc :

$$u_0 > 0.9 v_{te} \tag{11.111}$$

La relation de dispersion électrostatique (11.31) pour une distribution maxwellienne (11.108) peut s'exprimer avec la dérivée de la fonction de dispersion des plasmas (cf. paragraphe 10.3.4(c)) sous la forme :

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2/2}{k_r^2 v_{te}^2} \left[ Z' \left( \frac{\omega - |k_r| u_0}{|k_r| v_{te}} \right) + Z' \left( \frac{\omega + |k_r| u_0}{|k_r| v_{te}} \right) \right] = 0 \tag{11.112}$$

Au seuil d'instabilité  $\omega = 0$ , on a :

$$\frac{2k_r^2 v_{te}^2}{\omega_{pe}^2} = 2\text{Re} \left[ Z' \left( \frac{u_0}{v_{te}} \right) \right] \tag{11.113}$$

Comme le maximum de  $\text{Re}[Z'(\zeta_r)]$  est 0.57, et se produit pour  $\zeta_r \approx 1.5$ , on trouve pour l'instabilité

$$\left( \frac{k_r^2 v_{te}^2}{\omega_{pe}^2} \right)_{\max} = 0.57 \text{ pour } \frac{u_0}{v_e} \approx 1.5 \tag{11.114}$$

En comparant les principaux résultats pour les distributions de Lorentz-Cauchy et de Maxwell, c'est-à-dire (11.101) avec (11.109), (11.102) avec (11.111), et (11.103) et la figure 11.24 avec (11.114), on trouve que les résultats sont très voisins. La raison en est que les modes instables se produisent pour  $|\omega_r/k_r| < u_0$  où les deux types de fonctions de distribution ont à peu près les mêmes formes et modules, de sorte que l'amortissement de Landau et l'anti-amortissement sont assez peu différents dans les deux cas. (N.B. : Il n'en serait pas de même pour les ondes instables dont les vitesses de phase seraient dans la queue vers les hautes énergies de la fonction de distribution, comme par exemple dans certaines instabilités faisceau d'électrons-plasma ou dans l'instabilité de Buneman des deux sections précédentes.)

## 11.4 Théorie cinétique des instabilités électromagnétiques

### 11.4.1 Discussion générale

Nous terminons ce chapitre par la théorie cinétique des instabilités électromagnétiques dans un *plasma uniforme et non magnétisé* et sans champ électrique. Les équations de Vlasov-Maxwell linéarisées décrivant un tel plasma ont été données au début de section 10.4 [cf. équations (10.240)–(10.251)]. Nous nous limitons encore ici à une description non relativiste de la dynamique, mais nous considérons maintenant des plasmas ayant des distributions éventuellement anisotropes et par suite linéairement instables. En général, les modes naturels dans un tel plasma ne peuvent pas, comme nous allons le voir, être séparés en modes électrostatiques et électromagnétiques. Dans la suite, pour établir la stabilité ou l'instabilité, nous supposerons le vecteur d'onde  $\vec{k}$  réel mais pour alléger les notations nous omettrons l'indice  $r$ .

La divergence de  $\vec{B}_1$  étant nulle,  $\vec{B}_1$  est toujours perpendiculaire à  $\vec{k}$ . De plus, l'équation de Faraday (10.248) montre que  $\vec{B}_1$  est aussi perpendiculaire à  $\vec{E}_1$ . D'autre part,  $\vec{E}_1$  peut en général avoir une composante (dite longitudinale)  $\vec{E}_L$  parallèle à  $\vec{k}$  et une composante (dite transverse)  $\vec{E}_T$  perpendiculaire à  $\vec{k}$ . En utilisant (10.248) pour exprimer  $\vec{B}_1$  en fonction de  $\vec{E}_1$  et en portant le résultat dans (10.247) on obtient :

$$f_{s1} = \frac{-iq_s n_{s0}/m_s}{(\omega - \vec{k} \cdot \vec{w})} \left[ \left( 1 - \frac{\vec{k} \cdot \vec{w}}{\omega} \right) \frac{\partial \hat{f}_{s0}}{\partial \vec{w}} + \left( \frac{\vec{k}}{\omega} \cdot \frac{\partial \hat{f}_{s0}}{\partial \vec{w}} \right) \vec{w} \right] \cdot \vec{E}_1 \quad (11.115)$$

qui pour une distribution d'équilibre isotrope se réduit à (10.254). Cependant, de manière plus générale, en utilisant (11.115) et (10.245) et en reliant la densité de courant au champ électrique au moyen du tenseur de susceptibilité, comme dans (10.255), on trouve :

$$\bar{\chi}(\vec{k}, \omega) = \int \frac{\vec{w}}{\omega^2} \left[ \frac{\partial \hat{\varphi}_0}{\partial \vec{w}} + \frac{\vec{k} \cdot \partial \hat{\varphi}_0 / \partial \vec{w}}{\omega - \vec{k} \cdot \vec{w}} \vec{w} \right] d\omega \quad (11.116)$$

où l'on a introduit la fonction (10.159) de distribution d'équilibre pondérée  $\hat{\varphi}_0$ . Pour une distribution d'équilibre pondérée arbitraire, les neuf composantes du tenseur du deuxième ordre  $\bar{\chi}$  sont différentes de zéro et  $\bar{\chi} \cdot \vec{E}_1$  ne peut plus s'exprimer sous la forme simple (10.257) des distributions d'équilibre isotropes. En utilisant (10.255), et en écrivant  $\vec{E}_1 = \vec{E}_T + \vec{E}_L$ , les équations de Maxwell (10.248) et (10.249) deviennent :

$$\vec{k} \times \vec{E}_T - \omega \vec{B}_1 = 0 \quad (11.117)$$

$$\vec{k} \times \vec{B}_1 + \frac{\omega}{c^2} \bar{K} \cdot (\vec{E}_L + \vec{E}_T) = 0 \quad (11.118)$$

où l'on a introduit le tenseur de permittivité :

$$\bar{K}(\vec{k}, \omega) = \bar{\delta} + \bar{\chi}(\vec{k}, \omega) \quad (11.119)$$

En multipliant vectoriellement (11.117) par  $\vec{k}$  puis en portant  $(\vec{k} \times \vec{B}_1)$  dans (11.118) on obtient le système homogène d'équations algébriques pour  $\vec{E}_1$  :

$$N^2 \vec{E}_T - \bar{K} \cdot (\vec{E}_T + \vec{E}_L) = 0 \quad (11.120)$$

où l'on a posé  $(ck/\omega) \equiv N$  et supposé  $\omega \neq 0$ . Sur (11.120) on voit que si aucun des éléments du tenseur de permittivité n'est nul, les champs transverses  $\vec{E}_T$  et longitudinaux  $\vec{E}_L$  sont couplés. Pour le champ total  $\vec{E}_1$ , on trouve de même, en revenant à (11.117) et (11.118) et en répétant les étapes qui conduisent à (11.120) :

$$[(\vec{N} \vec{N} - N^2 \bar{\delta}) + \bar{K}] \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad (11.121)$$

qui est de la forme :

$$\bar{D}(\vec{k}, \omega) \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad (11.122)$$

et définit en général le *tenseur de dispersion* :  $\overline{\overline{D}}(\vec{k}, \omega)$ . Pour des solutions non triviales ( $\vec{E}_1 \neq 0$ ) de (11.122), le déterminant de  $\overline{\overline{D}}$  doit s'annuler, ce qui donne la relation de dispersion :

$$D(\vec{k}, \omega) \equiv \det[\overline{\overline{D}}(\vec{k}, \omega)] = 0 \quad (11.123)$$

En résolvant (11.123) on obtient les modes naturels  $\omega(\vec{k}) = \omega_r(\vec{k}) + i\omega_i(\vec{k})$ , où l'on a supposé  $\vec{k}$  réel. La stabilité est alors assurée si  $\omega_i(\vec{k})$  est négatif pour tout  $\vec{k}$ , tandis que si  $\omega_i(\vec{k})$  est positif pour une certaine valeur de  $\vec{k}$ , l'équilibre est linéairement instable. Pour des distributions d'équilibre arbitraires, même dans un plasma uniforme et sans champ électrique, ce calcul de  $\omega(\vec{k})$  ne peut pas être fait analytiquement.

Pour des distributions d'équilibre isotropes (cf. paragraphe 10.4.2) le tenseur de susceptibilité  $\overline{\overline{\chi}}$  (et donc aussi le tenseur de permittivité  $\overline{\overline{K}}$ ) sont diagonaux et (11.120) montre directement que les champs transverses et longitudinaux sont découplés. On obtient alors des relations indépendantes de dispersion pour les modes transverses électromagnétiques et longitudinaux électrostatiques. Cela conduit aux modes naturels stables décrits au paragraphe 10.4.2.

Comme nous l'avons alors annoncé, nous considérons maintenant une classe spéciale de fonctions de distribution anisotropes pour lesquelles on peut encore obtenir des modes transverses électromagnétiques et longitudinaux électrostatiques indépendants. Nous trouverons que les modes électrostatiques ont la même relation de dispersion que celle déjà trouvée dans la section 11.3 de ce chapitre, tandis que la relation de dispersion électromagnétique nous permettra de faire la théorie cinétique des instabilités électromagnétiques de Weibel dans les plasmas ayant des distributions d'équilibre anisotropes. En particulier, nous pourrions voir les effets de l'agitation thermique sur l'instabilité de Weibel dans des faisceaux opposés étudiée pour les faisceaux froids au paragraphe 7.5.3.

### 11.4.2 Distributions anisotropes symétriques perpendiculairement à $\vec{k}$

En utilisant l'expression générale du tenseur de susceptibilité pour un plasma uniforme, sans champ électrique (11.116), on peut montrer (cf. problème P11-8) que si les fonctions de distribution d'équilibre sont symétriques par rapport aux deux coordonnées cartésiennes perpendicu-

laire à  $\vec{k}$ , c'est-à-dire si :

$$\int w_{T1} \hat{f}_{s0} dw_{T1} = 0 \tag{11.124}$$

et :

$$\int w_{T2} \hat{f}_{s0} dw_{T2} = 0 \tag{11.125}$$

le système (11.120) se sépare en trois équations indépendantes, une pour chaque composante de  $\vec{E}_1$ , c'est-à-dire  $\vec{E}_{T1}$ ,  $\vec{E}_{T2}$  et  $\vec{E}_L$ , où  $T1, T2$  et  $L$  forment un système de coordonnées cartésiennes, avec  $\vec{E}_T = \vec{E}_{T1} + \vec{E}_{T2}$  (cf. Fig. 11.23). En d'autres termes, dans ce système de coordonnées et avec (11.124) et (11.125) satisfaites, le tenseur de dispersion  $\overline{\overline{D}}(\vec{k}, \omega)$  défini par (11.121), et compte tenu de (11.116), devient diagonal ; ainsi (11.123) donne trois relations indépendantes de dispersion (cf. problème P11-8). En réécrivant (11.116) sous la forme :

$$\overline{\overline{\chi}}(\vec{k}, \omega) = \int \overline{w} \overline{M} d\underline{w} \tag{11.126}$$

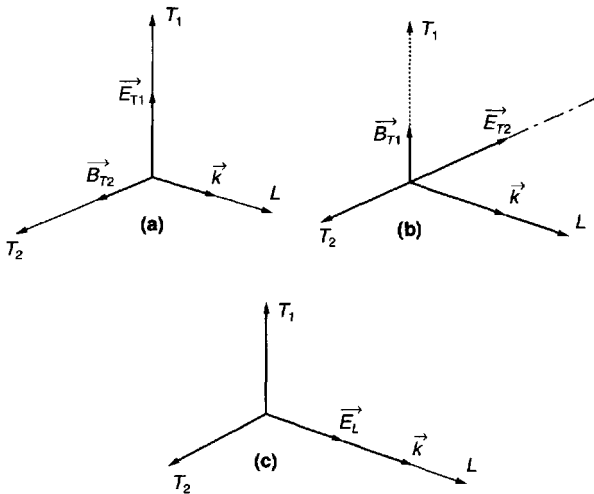


Figure 11.23 : Polarisations des champs pour les trois modes indépendants.

- (a) et (b) Ondes transverses électromagnétiques.
- (c) Ondes longitudinales électrostatiques.

où le vecteur  $\vec{M}$  est donné par le grand crochet dans (11.116) divisé par  $\omega^2$  on trouve :

- pour  $\vec{E}_{T1} \neq 0$  :

$$D_{T1}(\vec{k}, \omega) \equiv 1 - N^2 + \int w_{T1} M_{T1} \underline{dw} = 0 \quad (11.127)$$

- pour  $\vec{E}_{T2} \neq 0$  :

$$D_{T2}(\vec{k}, \omega) \equiv 1 - N^2 + \int w_{T2} M_{T2} \underline{dw} = 0 \quad (11.128)$$

- et pour  $\vec{E}_L \neq 0$  :

$$D_L(\vec{k}, \omega) \equiv 1 + \int w_L M_L \underline{dw} = 0 \quad (11.129)$$

Remarquons qu'à part les contraintes de symétrie (11.124) et (11.125), les distributions d'équilibre peuvent être arbitrairement anisotropes.

On peut montrer que la relation de dispersion (11.129) est identique à la relation de dispersion électrostatique longitudinale (11.31) (cf. problème P11-9). Remarquons que (11.124) et (11.125) n'imposent aucune restriction à la forme de  $f_{s0}$  en fonction de  $w_L \equiv w_k$ . L'instabilité de ces modes a été étudiée dans la section 11.3. Dans le reste de ce chapitre nous considérons donc seulement les modes transverses électromagnétiques associés à (11.127) et (11.128).

Pour simplifier les notations, prenons comme système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  le trièdre  $(L, T1, T2)$ , et pour le vecteur d'onde :  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x$ . Pour les modes avec  $\vec{E}_1$  dans la direction  $y$  la relation de dispersion est alors (11.127). Il y a trois formes de (11.127) que nous trouverons utiles :

$$D_{Ty}(k_x, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \int \frac{w_y}{(\omega - k_x w_x)} \left[ \frac{k_x}{\omega} \left( w_y \frac{\partial}{\partial w_x} - w_x \frac{\partial}{\partial w_y} \right) + \frac{\partial}{\partial w_y} \right] \hat{\varphi}_0 \underline{dw} \quad (11.130)$$

$$= 1 - \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{k_x}{\omega^2} \int \frac{w_y^2 (\partial \hat{\varphi}_0 / \partial w_x)}{(\omega - k_x w_x)} \underline{dw} \quad (11.131)$$

$$= 1 - \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{k_x^2}{\omega^2} \int \frac{w_y^2 \hat{\varphi}_0}{(\omega - k_x w_x)^2} \underline{dw} = 0 \quad (11.132)$$

avec  $\omega_p^2 = \sum_s \omega_{ps}^2$ . En examinant (11.127) et (11.128) on voit que, si l'on choisit le champ transverse  $\vec{E}_1$  dans la direction  $z$ , la relation de dispersion

$D_{T_z}(k_x, \omega) = 0$  pour le champ transverse polarisé suivant  $z$  est identique à (11.130)–(11.132) sauf que  $w_y$  est remplacé par  $w_z$ . En général, les deux relations de dispersion,  $D_{T_y}(k_x, \omega) = 0$  et  $D_{T_z}(k_x, \omega) = 0$ , correspondent à deux ondes planes indépendantes de propriétés différentes.

Dans le cas spécial où les distributions sont isotropes dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ , c'est-à-dire  $\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w_x, w_\perp^2)$ , avec  $w_\perp^2 \equiv w_y^2 + w_z^2$ , (11.132) montre que les relations de dispersion transverses sont identiques,  $D_{T_y}(k_x, \omega) = D_{T_z}(k_x, \omega)$ , et la polarisation du champ transverse est alors en général elliptique (cf. problème P11-10). Quand la distribution est complètement isotrope,  $\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w^2)$ , (11.130) redonne (10.268) (cf. problème P11-11), c'est-à-dire les ondes stables décrites au paragraphe 10.4.2(a).

### a) Faisceaux opposés avec anisotropies de température

La relation de dispersion de l'instabilité électromagnétique à deux faisceaux froids opposés, étudiée dans la section 7.5.3, s'obtient pour :

$$\hat{f}_{i0} = \delta(\vec{w}) \quad (11.133)$$

et :

$$\hat{f}_{e0} = \frac{1}{2} [\delta(w_y - v_0) + \delta(w_y + v_0)] \delta(w_x) \delta(w_z) \quad (11.134)$$

qui représentent une composante ionique stationnaire froide et deux faisceaux identiques d'électrons froids opposés dans la direction  $y$ . L'équation (11.132) donne alors la relation de dispersion des ondes transverses se propageant perpendiculairement aux faisceaux et ayant leur champ électrique parallèle aux faisceaux :

$$D_{T_y} = 1 - \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{k_x^2 v_0^2}{\omega^2} = 0 \quad (11.135)$$

qui est identique à (7.90) (à part les changements de noms des coordonnées). Comme on l'a vu au paragraphe 7.5.3, cette relation prévoit deux types d'ondes. L'une est l'onde électromagnétique de haute fréquence habituelle, stable avec une vitesse de phase plus grande que la vitesse de la lumière ( $\omega_r/k_x > c$  ;  $\omega_i = 0$ ). L'autre est une onde instable purement croissante [ $\omega_r = 0$  ;  $\omega_i(k_x) > 0$ ] pour laquelle  $|\omega|^2 \ll c^2 k_x^2$  et que nous avons appelée une instabilité de Weibel [90].

Dans ce qui suit nous considérons les effets de dispersion finie des vitesses dans les fonctions de distribution des particules du plasma. En général, les instabilités de Weibel sont dues à une anisotropie énergétique des particules du plasma. Nous considérons donc des fonctions de distribution qui représentent non seulement des faisceaux opposés mais aussi des

élargissements thermiques anisotropes. Posons donc :

$$\hat{f}_{s0} = \frac{1/2}{v_{s\perp}^2 \pi} \left\{ \exp \left[ -\frac{(w_z - v_{s0})^2 + w_y^2}{v_{s\perp}^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(w_z + v_{s0})^2 + w_y^2}{v_{s\perp}^2} \right] \right\} \frac{\exp(-w_x^2/v_{s\parallel}^2)}{v_{s\parallel} \sqrt{\pi}} \quad (11.136)$$

qui représente, pour chaque espèce de particules  $s$ , une distribution maxwellienne en  $w_x$  de température  $T_{s\parallel}$  avec  $v_{s\parallel}^2 \equiv (2\kappa T_{s\parallel}/m)_s$ , une distribution de faisceaux opposés en  $w_z$  de vitesse moyenne  $v_{s0}$  et de température  $T_{s\perp}$  avec  $v_{s\perp}^2 \equiv (2\kappa T_{s\perp}/m)_s$  et une distribution maxwellienne en  $w_y$  de température aussi égale à  $T_{s\perp}$ . Cela est représenté sur la figure 11.24. Pour  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x$ , c'est-à-dire une propagation perpendiculaire à la direction des faisceaux, et  $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$  la relation de dispersion se déduit de (11.131),

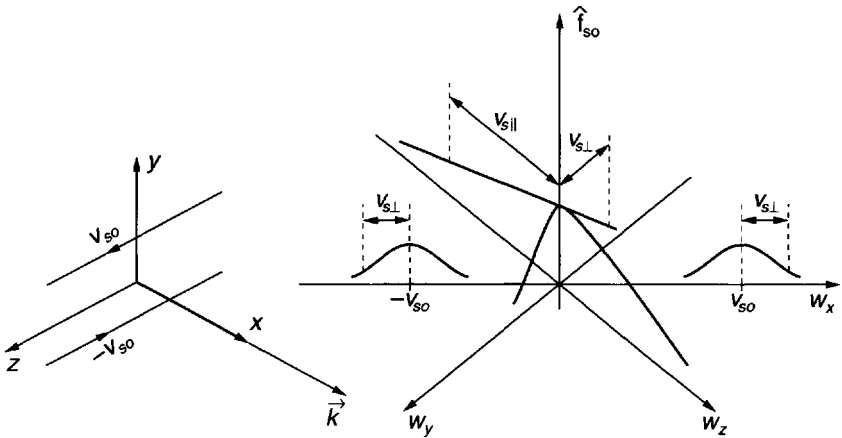


Figure 11.24 : Faisceaux opposés avec anisotropies de températures ; distributions dans trois plans parallèles aux coordonnées de vitesse.



soit :

$$D_{Ty}(k_x, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \frac{T_{s\perp}}{2T_{s\parallel}} Z'(\xi_{s\parallel}) = 0 \quad (11.137)$$

où  $Z'$  est la dérivée de la fonction de dispersion des plasmas (cf. Appendice A10-1), et son argument est  $\xi_{s\parallel} = (\omega/|k_x|v_{s\parallel})$ . De même, pour  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$  on obtient :

$$D_{Tz}(k_x, \omega) = 1 - \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left( \frac{\kappa T_{s\perp} + m_s v_{s0}^2}{2\kappa T_{s\parallel}} \right) Z'(\xi_{s\parallel}) = 0 \quad (11.138)$$

(cf. problème P11-12). Remarquons que pour  $v_{s0} = 0$  les relations de dispersion (11.137) et (11.138) sont identiques, comme pour toute distribution isotrope dans le plan perpendiculaire à  $\vec{k}$ . Si de plus  $T_{s\perp} = T_{s\parallel}$ , (11.137) et (11.138) redonnent la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans un plasma maxwellien et, comme on l'a vu au paragraphe 10.4.2(a), pour les ondes de haute fréquence avec une vitesse de phase supérieure à  $c$ , le dernier terme contenant la fonction  $Z'$  est inexact parce que les fonctions de distribution d'équilibre choisies ne sont pas des maxwelliennes relativistes correctes.

En comparant (11.138) et (11.135) il devient clair qu'un élargissement thermique dans les faisceaux parallèlement à leur vitesse moyenne tend à stabiliser les modes de  $k_x$  élevé. Au contraire l'élargissement thermique perpendiculaire peut être déstabilisant. En fait, (11.137) suggère que l'anisotropie de température en elle-même, c'est-à-dire en l'absence de courant, est déstabilisante pour les longueurs d'onde assez grandes. Plutôt que d'essayer de résoudre ces relations de dispersion, on peut trouver ces effets cinétiques importants en étudiant la condition de seuil d'instabilité de ces modes purement croissants. C'est ce que nous faisons maintenant.

## b) Conditions pour une instabilité purement croissante

Les conditions d'instabilité, et le domaine des nombres d'onde instables, peuvent être déduits de la forme générale de la relation de dispersion  $D_{Ty} = 0$ , (11.130)–(11.132), ou  $D_{Tz} = 0$ , en supposant qu'au seuil d'instabilité  $\omega_r = 0$ , c'est-à-dire que l'instabilité est purement croissante. Pour trouver ces conditions, on part de (11.131) et pour  $\omega_r = 0$  et  $\omega_i = 0^+$ , on applique les formules de Plemelj (10.146) et l'on égale à zéro les parties réelle et imaginaire de cette équation, d'où :

$$-\omega_i^2 = c^2 k_x^2 + \omega_p^2 + P \int \frac{\omega_y^2}{\omega_x} \frac{\partial \hat{\varphi}_0}{\partial \omega_x} d\omega \quad (11.139)$$

et :

$$0 \equiv \pi \int w_y^2 \frac{\partial \hat{\varphi}_{s0}}{\partial w_x} \delta(w_x) dw \quad (11.140)$$

(11.140) impose donc :

$$\left( \frac{\partial \hat{\varphi}_{s0}}{\partial w_x} \right)_{w_x=0} = 0 \quad (11.141)$$

c'est-à-dire que  $\hat{\varphi}_{s0}$  doit être maximum ou minimum à  $w_x = 0$ . On obtient alors, à partir de (11.139), l'instabilité pour :

$$\left( \omega_p^2 + \int \frac{w_y^2}{w_x} \frac{\partial \hat{\varphi}_{s0}}{\partial w_x} dw \right) < 0 \quad (11.142)$$

Le domaine de nombres d'onde instables est ainsi donné par :

$$0 < c^2 k_x^2 < \left[ - \left( \omega_p^2 + \int \frac{w_y^2}{w_x} \frac{\partial \hat{\varphi}_{s0}}{\partial w_x} dw \right) \right] \quad (11.143)$$

Pour les distributions particulières (11.136) on trouve ainsi la condition d'instabilité :

$$\sum_s \omega_{ps}^2 \left( 1 - \frac{\kappa T_{s\perp} + m_s v_{s0}^2}{\kappa T_{s\parallel}} \right) < 0 \quad (11.144)$$

et pour le domaine de nombres d'onde instables :

$$0 < k_x^2 < \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{c^2} \left( \frac{\kappa T_{s\perp} + m_s v_{s0}^2}{\kappa T_{s\parallel}} - 1 \right) \quad (11.145)$$

On voit que dans le cas de deux faisceaux opposés, la condition d'instabilité impose, au moins pour l'un des faisceaux,  $\kappa T_{\perp} + m v_0^2 > \kappa T_{\parallel}$ . Pour un plasma électron-ion dans lequel les ions ont une vitesse moyenne nulle ( $v_{i0} = 0$ ) et sont isotropes en température ( $T_{i\perp} = T_{i\parallel}$ ), tandis que les électrons forment deux faisceaux opposés avec anisotropie de température, la condition nécessaire et suffisante d'instabilité est simplement :

$$\frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}} + \frac{m_e v_{e0}^2}{\kappa T_{e\parallel}} > 1 \quad (11.146)$$

Elle est représenté sur la figure 11.25. On peut montrer que cette condition reste vraie même avec un élargissement thermique en  $w_y$  différent de  $T_{s\perp}$  ; l'élargissement thermique dans la direction du champ  $\vec{B}_1$  du mode n'a aucun effet sur l'instabilité de Weibel à faisceaux opposés (cf. problème P11-13). Remarquons aussi que (11.145) montre que les grandes valeurs de

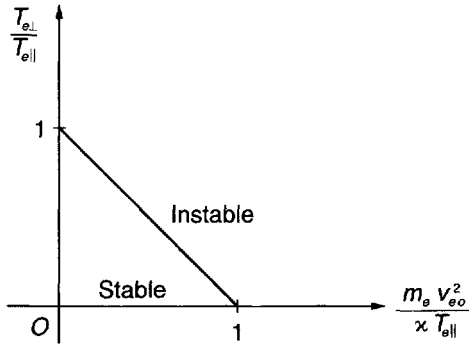


Figure 11.25 : Courbe de seuil pour l'instabilité de Weibel de deux faisceaux opposés d'électrons.

$k_x$  sont stabilisées par un élargissement thermique parallèle à la direction de  $k_x$ , contrairement au modèle de plasma froid du paragraphe 7.5.3, où les  $k_x$  arbitrairement grands ont été trouvés instables.

D'autre part, même en l'absence de faisceaux opposés, quand  $v_{s0} = 0$ , le plasma est instable si  $T_{s\perp} > T_{s\parallel}$ , c'est-à-dire s'il est thermiquement anisotrope. C'est ce qu'on a vu à la fin du paragraphe 11.2.2(b) où un tel plasma a été trouvé stable pour les perturbations électrostatiques, mais nous y revenons maintenant.

### c) Instabilité de Weibel par anisotropie de température

L'instabilité cinétique de Weibel la plus simple correspond au cas où il n'y a pas de courants et où seuls les électrons ont une anisotropie de température. Il y a alors instabilité, d'après (11.146), quand :

$$T_{e\perp} > T_{e\parallel} \quad (11.147)$$

et l'intervalle de nombre d'ondes instables est :

$$0 < k_x^2 < \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} \left( \frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}} - 1 \right) \equiv k_c^2 \quad (11.148)$$

De faibles anisotropies de température existant souvent dans les plasmas, il est intéressant de résoudre la relation de dispersion dans un tel cas

et de calculer le taux de croissance. Comme les ions ne jouent aucun rôle, on peut négliger leurs mouvements en faisant  $m_i \rightarrow \infty$ . On peut aussi faire  $\omega_r = 0$ , négliger le courant de déplacement ( $|\omega|^2 \ll c^2 k^2$ ), et pour des anisotropies faibles, c'est-à-dire  $[(T_{e\perp} - T_{e\parallel})/T_{e\parallel}] \ll 1$ , supposer  $|\xi_{e\parallel}| \ll 1$  de sorte que (11.137) donne de manière approchée :

$$c^2 k_x^2 + \omega_{pe}^2 \left( 1 - \frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}} \right) - \frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}} \omega_{pe}^2 i \sqrt{\pi} \frac{\omega}{|k_x| v_{e\parallel}} \approx 0 \quad (11.149)$$

En résolvant, on trouve :

$$\omega_i = \frac{|k_x| v_{\parallel}}{\sqrt{\pi}} \frac{T_{e\parallel}}{T_{e\perp}} \left( \frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{k_x^2}{k_c^2} \right) \quad (11.150)$$

qui est maximum pour  $|k_x| = (k_c/\sqrt{3})$  et égale à :

$$\frac{\omega_{i \max}}{\omega_{pe}} = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi} \frac{T_{e\parallel}}{T_{e\perp}} \left( \frac{T_{e\perp}}{T_{e\parallel}} - 1 \right)^{3/2} \frac{v_{e\parallel}}{c} \quad (11.151)$$

On voit que, de manière caractéristique, les taux de croissances d'instabilité électromagnétique sont proportionnels à  $\omega_{pe}(v_t/c)$ . Le taux de croissance (11.150) est représenté schématiquement sur la figure 11.26. Seules les ondes de grande longueur d'onde sont instables.

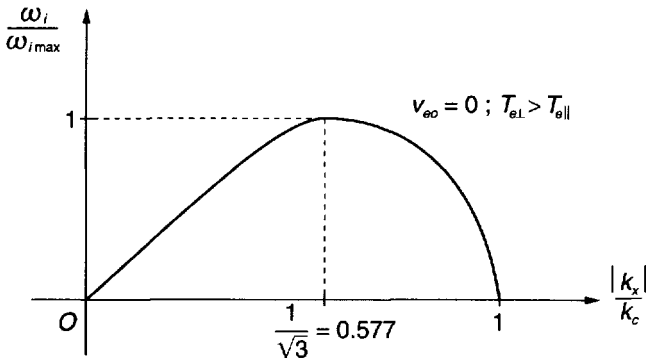


Figure 11.26 : Instabilité de Weibel par anisotropie de température électronique.

L'évolution non linéaire de l'instabilité de Weibel a été étudiée par simulation sur ordinateur [209] et brièvement décrite au paragraphe 7.5.3(c). En fait [209] est même plus important pour les aspects cinétiques traités dans ce chapitre. Des instabilités

électromagnétiques conduisant à une filamentation non linéaire des faisceaux d'électrons ou d'ions dans les plasmas ont été aussi étudiées par simulation sur ordinateur ([210], [211]). Elles ont une grande importance pour la propagation des faisceaux intenses en fusion par confinement inertiel.

## 11.5 Problèmes

### P11-1 Non-unicité de l'équation de conservation de l'énergie de perturbation

Montrer que toute fonction régulière et différentiable  $M(f_s)$ , où  $f_s$  satisfait l'équation de Vlasov (10.6) avec (10.7), satisfait aussi (11.4). Montrer ainsi que la moyenne intégrée dans l'espace de l'équation de conservation des différences avec l'équilibre (11.3) peut s'écrire sous la forme (11.5).

### P11-2 Équation de conservation au second ordre par rapport aux champs

En partant de la moyenne intégrée dans l'espace (11.5) de l'équation de conservation des différences avec l'équilibre, développer tous les champs en série de perturbations,

$$f_s = f_{s0} + f_{s1} + f_{s2} + \dots \tag{11.152}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots \tag{11.153}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \dots \tag{11.154}$$

où les indices inférieurs indiquent l'ordre de perturbation (par exemple,  $|f_{s0}| \gg |f_{s1}| \gg |f_{s2}| \gg \dots$ ), et montrer qu'au second ordre (11.5) devient (11.6).

### P11-3 Équation de conservation de l'énergie de perturbation moyennée sur l'espace, pour des distributions isotropes

Pour un plasma homogène dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_0 = \hat{z}B_0$ , dont les distributions d'équilibre sont isotropes, c'est-à-dire  $f_{s0} = f_{s0}^{(i)}(w^2)$ , montrer directement à partir des équations linéarisées de Vlasov-Maxwell que, pour des perturbations périodiques dans l'espace, l'énergie est :

$$U = \int dr \left[ \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} + \frac{\mu_0 H_1^2}{2} + \sum_s \int \frac{dw}{dw} \left( \frac{-m_s/4}{df_{s0}/dw^2} \right) f_{s1}^2 \right] \tag{11.155}$$

où l'intégrale est prise sur une période.

Note : En partant des équations linéarisées de Maxwell, écrire l'équation de Poynting linéarisée. Remarquer ensuite que pour obtenir  $\vec{E}_1 \cdot \vec{J}_1$  à partir de l'équation de Vlasov non relativiste linéarisée, on multiplie celle-ci par  $-\frac{m}{2} (df_0/dw^2)^{-1} f_1$  et on l'intègre sur l'espace des vitesses. Calculer enfin chaque terme pour obtenir le résultat ci-dessus.

Dans quelles conditions  $U$  peut-elle être négative ?

### P11-4 Conditions nécessaires et suffisantes de Penrose pour l'instabilité électrostatique

- a) Trouver un transformé possible de l'axe réel  $\omega$  dans le plan complexe  $I$  qui montre que la première condition d'instabilité de Penrose (11.45) n'est pas suffisante.
- b) A partir des transformés typiques de l'axe réel  $\omega$  dans le plan complexe  $I$  (par exemple, ceux des figures 11.5 et 11.7) montrer que la seconde condition de Penrose pour l'instabilité est une condition suffisante. (Note : on considère la traversée de l'axe réel  $I$ , au maximum  $I_r$ , par la courbe  $\Gamma_r$ .)

### P11-5 Ondes faiblement amorties sur un faisceau maxwellien d'électrons

Pour un faisceau d'électrons non relativistes avec une dispersion maxwellienne des vitesses, la fonction de distribution électronique est donnée par (11.53). On suppose qu'il y a un fond continu neutralisant d'ions immobiles et que le faisceau d'électrons est bien défini, c'est-à-dire que  $v_0 \gg v_{te}$ .

- a) Montrer que les relations de dispersion pour les ondes faiblement amorties rapides et lentes sont données par (11.55).
- b) Établir le taux d'amortissement de Landau pour ces ondes et montrer qu'elles restent faiblement amorties jusqu'à environ  $\omega_r \leq 0.3(v_0/v_{te})\omega_{pe}$ .

### P11-6 Interaction faisceau d'électrons-plasma : faisceau chaud et plasma froid

On considère l'instabilité faisceau d'électrons-plasma [paragraphe 11.3.5(b)] dans la limite d'un plasma froid et d'un faisceau de haute température, avec  $n_{b0} \ll n_{p0}$ .

- a) Pour les hautes fréquences  $\omega_r \approx k_r v_0 \approx \omega_p$ , établir le résultat (11.77) pour le maximum du taux de croissance.
- b) Montrer que pour les basses fréquences, telles que  $\omega_r \approx k_r v_0 \ll \omega_p$ , il n'y a pas d'instabilité si

$$\frac{v_{tb}}{v_0} \gg \frac{\omega_b}{\omega_p}$$

et noter que ces instabilités résonnantes qu'on a trouvé pour un faisceau froid et un plasma froid [cf. section 7.2.2, équation (7.20)] sont stables pour les températures de faisceau assez faibles.

- c) En revenant aux instabilités à hautes fréquences, établies dans la partie (a) ci-dessus, montrer que les collisions des électrons du plasma froid peuvent détruire l'instabilité ; établir la condition sur la fréquence de collisions  $\nu_p$  des électrons du plasma froid qui donne la stabilité. Ce résultat est la "condition de stabilité de Singhaus" [200] ; mais cf. aussi [198].

### P11-7 Faisceaux d'électrons opposés maxwelliens

- a) En partant de la fonction de distribution réduite (11.108), établir les conditions d'instabilité de Penrose.
- b) Montrer que (11.110) donne de manière approchée (11.111) comme seuil de vitesse moyenne pour l'instabilité.

### P11-8 Conditions d'existence de modes indépendants transverses électromagnétiques et longitudinaux électrostatiques

En partant de la susceptibilité (11.116) pour un plasma uniforme non magnétisé et sans champ électrique, qui est valable pour toutes les distributions d'équilibre anisotropes  $\hat{f}_{s0}(\vec{w})$ , montrer que si ces distributions satisfont les contraintes (11.124) et (11.125) de symétrie par rapport aux deux directions orthogonales perpendiculaires à  $\vec{k}$ , (11.120) se réduit aux trois équations indépendantes (11.127)–(11.129).

En déduire que le tenseur de dispersion  $\overline{\overline{D}}(\vec{k}, \omega)$  donné par (11.121) et (11.122) est diagonal.

### P11-9 Relation de dispersion électrostatique pour des distributions anisotropes

Montrer que pour des distributions anisotropes qui satisfont les conditions de symétrie (11.124) et (11.125), la relation de dispersion électrostatique (11.129) est la même que (11.31) qui a été utilisée pour établir les conditions d'instabilité de Penrose.

### P11-10 Modes TEM pour des distributions isotropes perpendiculairement à $\vec{k}$

Montrer que pour une direction de propagation donnée,  $\vec{k} = k_x \vec{e}_x$ , et si  $\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w_x, w_\perp^2)$  les deux relations de dispersion transverse électromagnétiques (11.127) et (11.128) sont identiques.

### P11-11 Modes TEM pour des distributions isotropes

Montrer que pour des distributions isotropes  $\hat{f}_{s0}(\vec{w}) = \hat{f}_{s0}(w^2) \equiv \hat{f}_{s0}^{(i)}$  les relations de dispersion (11.127) et (11.128) se réduisent à (10.268) établie dans la section 10.4 en supposant *ab initio* que les distributions étaient isotropes.

### P11-12 Faisceaux opposés avec anisotropies de températures : relations de dispersion TEM

a) En partant de la distribution anisotrope (11.136), établir les deux relations de dispersion transverses (11.137) et (11.138).

b) En utilisant un schéma semblable à celui utilisé pour montrer la physique de l'instabilité de Weibel dans un plasma froid [Fig. 7.12, paragraphe 7.5.3(a)], expliquer la condition d'instabilité (11.146).

### P11-13 Instabilité de Weibel : effet de l'élargissement thermique dans la direction de $\vec{B}_1$

On considère le cas plus général (que 11.136) de faisceaux opposés avec anisotropies de températures :

$$\hat{f}_0(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left\{ \exp \left[ -\frac{(w_E - v_0)^2}{v_{tE}^2} \right] + \exp \left[ -\frac{(w_E + v_0)^2}{v_{tE}^2} \right] \right\} \\ \times \frac{\exp(-w_k^2/v_{tk}^2) \exp(-w_B^2/v_{tB}^2)}{\pi^{3/2} v_{tE} v_{tk} v_{tB}}$$

où pour une direction donnée de  $\vec{k}$  on a choisi les champs TEM avec  $\vec{E}_1$  parallèle à la vitesse moyenne  $\pm \vec{v}_0$ . Les élargissements thermiques  $v_{tE}$ ,  $v_{tk}$ , et  $v_{tB}$  dans les directions orthogonales  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{k}$ , et  $\vec{B}_1$ , sont tous les trois différents.

- a) Établir la relation de dispersion TEM qui donne l'instabilité de Weibel des faisceaux opposés et noter qu'elle est indépendante de  $v_{tB}$ .
- b) En utilisant le schéma de la partie (b) du problème P11-12, expliquer physiquement pourquoi  $v_{tB}$  n'a aucun effet sur cette instabilité.
- c) Quelles autres instabilités sont dues au fait que  $v_{tB} \neq v_{tk}$  ou  $v_{tB} \neq v_{tE}$ ?



# Chapitre 12

## Théorie cinétique des gaz faiblement ionisés

### 12.1 Introduction

Dans le chapitre 1 nous avons vu que dans le cas des gaz faiblement ionisés le mouvement des électrons était déterminé essentiellement par les champs appliqués et les collisions avec les neutres ; nous avons également défini le modèle du gaz de Lorentz, électrons-neutres, qui repose sur les deux inégalités

$$n_e \ll n_o \quad (12.1)$$

$$m_e \ll m_o \quad (12.2)$$

où  $n_e$  est la densité des électrons,  $n_o$  celle des neutres ;  $m_e$  et  $m_o$  sont leurs masses respectives.

Dans ce chapitre nous nous proposons d'établir et de discuter ce modèle et de l'appliquer au calcul des coefficients de transport électroniques dans les gaz faiblement ionisés. Les résultats obtenus seront utiles notamment dans les domaines d'étude suivants :

- décharges dans les gaz de faible puissance,
- ionosphère jusque vers 250 km d'altitude,
- plasmas denses et pas trop chauds (flammes, convertisseurs magnétohydrodynamiques...).

Bien que l'application de ce modèle doive être limitée au domaine des gaz très faiblement ionisés, son étude est très intéressante parce qu'elle

permet d'introduire de façon claire un certain nombre de notions fondamentales, en particulier des définitions précises des fréquences de relaxation des électrons. Le plan du chapitre est le suivant.

Dans la section 12.2 nous établissons d'abord les bases d'un modèle de théorie cinétique assez simple et très puissant, celui du *gaz de Lorentz* électrons-neutres, que nous avons déjà rapidement présenté dans la section 1.9.

Nous l'appliquons ensuite, dans les sections 12.3 et 12.4, à l'étude de la relaxation des *anisotropies* électroniques, puis à l'entretien de celles-ci par un champ électrique, c'est-à-dire au calcul de la *conductivité électrique* du gaz.

Dans la section 12.5 nous analysons l'échauffement du gaz d'électrons par l'effet combiné du champ électrique et des collisions (*effet Joule*), et nous montrons que dans le strict modèle de Lorentz, celui-ci conduit progressivement à un échauffement infini, ce qui rend incorrecte la méthode de perturbation utilisée.

Dans les sections 12.6 et 12.7, nous introduisons le petit échange d'énergie par collisions entre les électrons et les neutres (*modèle de Lorentz imparfait*), et nous montrons qu'il peut ainsi en général s'établir un régime d'équilibre entre l'échauffement par effet Joule et le refroidissement par collisions, ce qui permet d'établir le calcul de la conductivité électrique sur des bases solides (à ceci près que la théorie devrait être améliorée en tenant compte des collisions inélastiques, sujet que nous ne faisons qu'effleurer, parce qu'il ne peut être abordé de façon exacte que par des méthodes de calcul numérique sur ordinateur des fonctions de distribution). Dans la section 12.8 nous appliquons les mêmes méthodes à l'analyse de deux autres phénomènes de transport des électrons : *diffusion* libre des électrons et *conductivité thermique* électronique.

Enfin, dans la section 12.9 nous définissons une famille de gaz moyennement ionisés, appelés *plasmas intermédiaires*. Ceux-ci sont caractérisés par d'importants échanges d'énergie entre électrons, avec comme résultat que, moyennant certaines conditions, la fonction de distribution électronique est *a priori* maxwellienne. Cette situation est assez fréquente en pratique, et très intéressante parce que la théorie cinétique se simplifie beaucoup en se ramenant essentiellement à la détermination de la température électronique par une équation de bilan d'énergie.

## 12.2 Gaz de Lorentz électrons-neutres

### 12.2.1 Couplages électrons-ions-neutres

Un gaz ionisé peut *a priori* contenir des électrons, des ions positifs, des neutres (molécules ou atomes) dans leur état fondamental ou dans un état excité. Nous désignons par  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $n_o$  et  $n_o^*$  leurs densités respectives. Dans ce chapitre nous supposons  $n_o^* = 0^1$ .

Si donc on désigne par  $\vec{w}_e$ ,  $\vec{w}_i$ ,  $\vec{w}_o$  la vitesse d'un électron, d'un ion ou d'un neutre, l'état statistique du gaz peut être représenté par trois fonctions de distribution :

$$f_e(\vec{r}, \vec{w}_e, t) \quad (12.3)$$

$$f_i(\vec{r}, \vec{w}_i, t) \quad (12.4)$$

$$F_o(\vec{r}, \vec{w}_o, t) \quad (12.5)$$

relatives respectivement aux électrons, aux ions et aux neutres. Ces trois fonctions obéissent à un système d'équations couplées :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{w}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_e}{m_e} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{w}_e} = C_{ee} + C_{ei} + C_{eo} \quad (12.6)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{w}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_i}{m_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{w}_i} = C_{ii} + C_{ie} + C_{io} \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial F_o}{\partial t} + \vec{w}_o \cdot \frac{\partial F_o}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_o}{m_o} \cdot \frac{\partial F_o}{\partial \vec{w}_o} = C_{oo} + C_{oe} + C_{oi} \quad (12.8)$$

dans lesquelles  $C_{ee}$ ,  $C_{ei}$  et  $C_{eo}$ , par exemple, représentent l'action sur les électrons des collisions avec les autres électrons, les ions et les neutres. Ce système fait apparaître deux types d'interactions entre les diverses espèces de particules :

- *les termes de collisions* tels que  $C_{eo}$  qui figurent au deuxième membre ; en général ils peuvent représenter l'effet des collisions élastiques et celui des collisions inélastiques

---

1. Lorsque les molécules ou atomes possèdent des niveaux d'énergies métastables on peut avoir  $n_o^* \neq 0$ . Si d'autre part les neutres sont électronégatifs il peut y avoir formation d'ions négatifs.

- les interactions du type charge d'espace en ce qui concerne les particules chargées ; celles-ci sont incluses au premier membre dans les termes tels que :

$$\frac{\vec{X}_e}{m_e} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{w}_e}$$

Il est à noter que ces deux espèces d'interactions se traduisent dans le système (12.6) à (12.8) par des termes quadratiques par rapport aux fonctions de distribution.

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés locales du gaz sans préciser l'origine du champ électromagnétique à l'endroit considéré. Nous négligeons d'autre part les collisions inélastiques entre particules (la validité de cette hypothèse sera discutée *a posteriori* à la fin du chapitre).

## 12.2.2 Modèle de Lorentz électrons-neutres

Enfin nous nous limitons aux gaz dans lesquels la composante neutre est homogène ; on peut donc négliger dans l'équation (12.8) le terme de diffusion ; on néglige également les forces appliquées aux neutres ( $\vec{X}_o = 0$ ). Enfin, on admet que, par suite de la condition (12.1), l'action des électrons et des ions sur les neutres est négligeable.

Par conséquent, l'équation (12.8) peut finalement se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial F_o}{\partial t} = C_{oo} \quad (12.9)$$

C'est exactement celle que l'on aurait pour un gaz de neutres en l'absence de toute autre particule ; nous admettons que l'on a attendu suffisamment longtemps pour que ce gaz de neutres ait atteint son état d'équilibre avec les parois de l'enceinte qui le renferme<sup>2</sup>, autrement dit, la fonction  $F_o$  sera la maxwellienne représentée par la formule :

$$F_o = n_o \left( \frac{m_o}{2\pi\kappa T_o} \right)^{3/2} e^{-m_o w_o^2 / 2\kappa T_o} \quad (12.10)$$

Dans les équations (12.6) et (12.7), on peut négliger les collisions entre particules chargées. En effet, par suite des conditions (12.1) et (12.2),

---

2. On pourrait généraliser cette situation en considérant un gaz faiblement ionisé en écoulement. La fonction de distribution  $F_o$  des neutres serait alors déterminée en chaque point par les conditions de l'écoulement, comme si le gaz ne contenait que des neutres. Dans l'étude de la dynamique des électrons et des ions, on pourrait alors considérer  $F_o$  comme donnée à chaque instant en chaque point du gaz. Le modèle d'un gaz homogène que nous étudions dans ce chapitre est applicable à un gaz en écoulement à condition que les variations spatio-temporelles de  $F_o$  ne soient pas trop rapides.

celles-ci sont beaucoup plus rares que les collisions d'une particule chargée avec un neutre. On peut donc écrire les deux équations d'évolution relatives respectivement aux électrons et aux ions sous les formes :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{w}_e \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} + (\vec{\gamma}_e + \vec{\Omega}_e \times \vec{w}_e) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{w}_e} = C_{eo} \quad (12.11)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{w}_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + (\vec{\gamma}_i + \vec{\Omega}_i \times \vec{w}_i) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{w}_i} = C_{io} \quad (12.12)$$

avec :

$$\vec{\gamma}_{e,i} = \frac{q_{e,i} \vec{E}}{m_{e,i}}, \quad \vec{\Omega}_{e,i} = -\frac{q_{e,i} \vec{B}}{m_{e,i}}. \quad (12.13)$$

Nous supposons que la force d'interaction entre un électron ou un ion et un neutre est une force centrale isotrope, ne dépendant que de la distance entre les deux particules. Dans ces conditions, si l'on connaît l'expression du potentiel d'interaction, on peut calculer l'angle de déviation  $\chi(g, p)$ , dans une collision électron-neutre ou ion-neutre, au moyen de la formule (3.29), soit :

$$\chi(p, g) = \pi - 2p \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr/r^2}{\left(1 - \frac{\varphi(r)}{\frac{1}{2}\mu g^2} - \frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2}} \quad (12.14)$$

où  $p$  est le paramètre d'impact, et  $g$  la vitesse relative des deux particules entrées en collision. On peut aussi décrire les phénomènes sans introduire  $p$ , mais seulement la section efficace différentielle  $\sigma(\chi)d\Omega$ .

La situation se simplifie notablement dans le *cas des électrons* ; l'intégrale de collisions s'écrit en effet de façon générale, d'après (8.78) ou (8.79) :

$$\begin{aligned} C_{eo} &= \int (f'_e F'_o - f_e F_o) g p \, dp \, d\varphi \, \underline{dw}_o \\ &= \int (f'_e F'_o - f_e F_o) g \sigma(\chi) \sin \chi \, d\chi \, d\varphi \, \underline{dw}_o \end{aligned} \quad (12.15)$$

Du fait de la grande masse des neutres, on peut admettre les conditions :

$$\vec{w}'_o \approx \vec{w}_o \quad (12.16)$$

$$\vec{w}'_e \approx \vec{w}_e = g \quad (12.17)$$

Ces hypothèses ne sont rigoureusement valables que lorsque l'on considère le rapport  $m_e/m_o$  comme rigoureusement nul ; elles définissent ce qu'on peut appeler le modèle du *gaz de Lorentz parfait* électrons-neutres [212].

Ceci étant, dans l'intégrale (12.15) les variables  $p$  (ou  $\chi$ ) et  $g$  (ou  $w_e$ ) se séparent de la variable  $w_o$  ; l'intégration sur  $w_o$  est d'ailleurs immédiate puisque l'on a :

$$\int F_o \underline{dw}_o = n_o \quad (12.18)$$

Le principal résultat des approximations faites a été de rendre l'opérateur de collisions linéaire par rapport à la fonction de distribution inconnue  $f_e$  ; nous désignons désormais par  $J(f_e)$  cet opérateur linéaire :

$$J(f_e) = n_o w_e \int_o^\pi \int_o^{2\pi} (f'_e - f_e) \sigma(\chi) \sin \chi \, d\chi \, d\varphi \quad (12.19)$$

Rappelons que  $f_e$  est la valeur de la fonction de distribution dans les conditions initiales d'une collision, et  $f'_e$ , la valeur correspondante après la collision ;  $w_e$  est la valeur absolue de la vitesse de l'électron avant la collision.

## 12.3 Relaxation des anisotropies électroniques

### 12.3.1 Définition des fréquences de relaxation

L'expression (12.19) étant linéaire, on peut étudier l'équation (12.11) par des méthodes de développement en série. En pratique, on analyse  $f_e$  en la développant en une série de fonctions sphériques du type<sup>3</sup> :

$$f = \alpha_o(w, t) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} [\alpha_{\ell m}(\vec{r}, w, t) C_{\ell m} + \beta_{\ell m}(\vec{r}, w, t) S_{\ell m}] \quad (12.20)$$

avec :

$$C_{\ell m} \equiv w^\ell P_{\ell m}(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (12.21)$$

$$S_{\ell m} \equiv w^\ell P_{\ell m}(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (12.22)$$

où  $P_{\ell m}(\cos \theta)$  désigne une fonction de Legendre associée. Dans ces formules,  $\alpha_o$  représente la partie isotrope de la fonction de distribution  $f$  ; les termes suivants représentent ses anisotropies. Les propriétés des fonctions

3. Dans la suite de ce chapitre consacré uniquement à l'étude des électrons, nous supprimons l'indice  $e$  et écrivons pour alléger l'écriture  $f(\vec{w})$  au lieu de  $f_e(\vec{w}_e)$ .

sphériques  $C_{\ell m}$  et  $S_{\ell m}$ , les expressions des premières d'entre elles et les relations entre les coefficients  $\alpha_{\ell m}$  et la suite des grandeurs hydrodynamiques (moments de  $f$ ) sont exposées dans l'appendice A12-1.

Dans le présent chapitre nous supposons que le gaz est homogène, de sorte que les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  ne dépendent pas de  $\vec{r}$ . Le développement (12.20) est particulièrement intéressant dans le modèle du gaz de Lorentz parfait, car les fonctions sphériques obéissent à une loi opérationnelle très simple vis-à-vis de l'opérateur  $J$  ; on a en effet :

$$J(\alpha_{\ell m} Y_{\ell m}) = -\nu_{\ell} \alpha_{\ell m} Y_{\ell m} \quad (12.23)$$

$Y_{\ell m}$  désignant une fonction  $C_{\ell m}$  ou  $S_{\ell m}$ .

Les fonctions sphériques sont donc des fonctions propres de l'opérateur  $J$ . Cette propriété repose essentiellement sur le fait que dans le modèle de Lorentz parfait, l'opérateur de collision  $J$  commute avec les opérateurs de rotation dans l'espace, parce que la force d'interaction électron-neutre est centrale et isotrope. Nous renvoyons le lecteur, pour la démonstration exacte de cette formule<sup>4</sup> à [213] ou à l'appendice A12-2.

Les valeurs propres  $-\nu_{\ell}$  ne dépendent que de l'indice  $\ell$  et sont fonctions de  $w$ . En appliquant la formule (12.23) à la fonction  $C_{\ell 0}(\theta) = w^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta)$  pour  $\theta = 0$ , on montre (cf. [213] ou appendice A12-2) que l'expression de  $\nu_{\ell}$  se déduit de la loi de force électron-neutre, par l'intermédiaire de l'angle de déviation, au moyen de la formule générale :

$$\nu_{\ell}(w) = 2\pi n_o w \int_0^{\pi} [1 - P_{\ell}(\cos \chi)] \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (12.24)$$

où  $P_{\ell}$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $\ell$  et  $\chi$  l'angle de déviation (fonction de  $p$  et  $w$ ). On voit que  $\nu_{\ell}$  dépend de la force électron-neutre à travers  $\chi$  ; en particulier, on a :

$$\nu_o = 0 \quad (12.25)$$

$$\nu_1 = 2\pi n_o w \int_0^{\pi} (1 - \cos \chi) \sigma(\chi) \sin \chi d\chi = n_o \sigma_1 w \quad (12.26)$$

en désignant par  $\sigma_1$  la section efficace pour le transport de quantité de mouvement.

Les valeurs propres  $\nu_{\ell}$  ont une signification physique très simple. Supposons en effet pour commencer que le champ électrique et le champ magnétique soient tous deux nuls, mais que la fonction de distribution des électrons à l'instant initial soit quelconque ; un tel état peut effectivement

4. Ce résultat avait été obtenu pour les deux premières anisotropies mais de façon implicite par J.H. Jeans dès 1925 [227].

être produit dans des expériences sur les plasmas, au cours desquelles on applique une impulsion de champ électrique. À la fin de cette impulsion, le gaz d'électrons se trouve dans un état hors d'équilibre, mais n'est plus soumis à aucune action extérieure. Dans ces conditions, il revient vers l'état d'équilibre avec les neutres. Nous allons maintenant écrire les équations qui décrivent cette évolution, et voir que les valeurs propres  $\nu_\ell$  sont des fréquences caractéristiques de cette évolution.

La fonction de distribution initiale peut donc contenir des anisotropies et sa partie isotrope  $\alpha_o$  peut être non maxwellienne ; son évolution est régie par l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = J(f) \quad (12.27)$$

Le développement de  $f$  en fonctions sphériques permet, compte tenu de (12.23) et de l'orthogonalité des fonctions sphériques entre elles, de remplacer cette équation par le système suivant obtenu en égalant membre à membre les coefficients de chaque fonction sphérique :

$$\dot{\alpha}_0 = 0 \quad (12.28)$$

$$\dot{\alpha}_{\ell m} = -\nu_\ell \alpha_{\ell m} \quad (12.29)$$

$$\dot{\beta}_{\ell m} = -\nu_\ell \beta_{\ell m} \quad (12.30)$$

dont les solutions sont :

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(0) \quad (12.31)$$

$$\alpha_{\ell m}(t) = \alpha_{\ell m}(0)e^{-\nu_\ell t} \quad (12.32)$$

$$\beta_{\ell m}(t) = \beta_{\ell m}(0)e^{-\nu_\ell t} \quad (12.33)$$

On voit donc que la partie isotrope de la fonction de distribution se maintient sans aucun changement ; les collisions avec les neutres sont sans action sur elle (du moins dans le modèle de Lorentz parfait étudié ici).

Au contraire, les anisotropies initiales s'amortissent en fonction du temps. *Chaque anisotropie est caractérisée par une fréquence de relaxation  $\nu_\ell$* . La première d'entre elles  $\nu_1$  joue un rôle particulièrement important ; on l'appelle généralement *fréquence de collisions pour les échanges de quantité de mouvement*, ou *fréquence de collisions* tout court. La notion de fréquence de collisions n'a, en fait, un sens évident que pour des molécules du type boule de billard (impénétrables et sans action à distance) ; dans ce cas, la formule (12.24) s'écrit, compte tenu de (3.73) :

$$\nu_\ell = n_o w \int [1 - P_\ell(\cos \chi)] \frac{D^2}{4} 2\pi \sin \chi d\chi \quad (12.34)$$



Dans l'intégrale, le terme  $P_\ell$ , qui peut être considéré comme le produit de  $P_\ell$  par  $P_0 = 1$ , donne un résultat nul, par suite des règles d'orthogonalité. Par conséquent  $\nu_0 = 0$ , et l'on a pour  $\ell > 0$  :

$$\nu_\ell = n_0 \pi D^2 w \quad (12.35)$$

$D$  étant le diamètre des neutres ; ces  $\nu_\ell$  et en particulier  $\nu_1$  coïncident alors avec la fréquence de collisions au sens élémentaire ; on remarque au passage qu'elles sont proportionnelles à la valeur  $w$  de la vitesse des électrons considérés.

Dans tous les autres cas, il vaudrait mieux donner à  $\nu_1$  le nom de fréquence de relaxation des anisotropies de courant électronique (la densité de courant, comme la vitesse moyenne, ne dépendent en effet comme on le voit dans l'appendice A12-2 que des anisotropies d'ordre 1). Telle est sa signification profonde.

### 12.3.2 Données théoriques sur les fréquences de relaxation

Nous venons de voir que pour des neutres du type boule de billard, les fréquences de relaxation se calculent facilement et sont toutes égales à la fréquence de collision "géométrique" donnée par la formule (12.35).

Si l'on calcule les fréquences de relaxation à partir de la description classique des trajectoires, il est intéressant de considérer un autre modèle théorique un peu plus général, celui où le potentiel d'interaction électron-neutre suit une loi en  $1/r^s$  de  $r = 0$  à  $r = \infty$  ; on trouve alors (cf. [301], [101]) une expression de  $\nu_\ell$  du type :

$$\nu_\ell = a w^n \quad (12.36)$$

$a$  étant une constante et l'exposant  $n$  dépendant de  $s$  selon la relation :

$$n = 1 - \frac{4}{s} \quad (12.37)$$

Les deux cas les plus intéressants sont  $s = 4$  et  $s = \infty$ .

Pour  $s = 4$  la fréquence de collision  $\nu_\ell$  est indépendante de  $w$ . Ce modèle (dit des "molécules mawxelliennes"), qui simplifie beaucoup les calculs de théorie cinétique, est fréquemment employé. On peut être tenté de le justifier en s'appuyant sur l'analyse faite dans la section 3.2. On y a vu en effet qu'un électron et un neutre doivent s'attirer quand ils sont à grande distance par suite de la création d'un dipôle induit, et que le potentiel électron-dipôle induit varie effectivement comme  $1/r^4$ . Cependant cette loi attractive est forcément remplacée à courte distance par une loi répulsive

à variation beaucoup plus rapide. La loi  $\nu_\ell = \text{Cte}$  n'est donc certainement jamais valable pour toute valeur de  $w$ .

Le cas  $s \rightarrow \infty$  correspond au cas déjà signalé des boules de billard.

Nous avons vu (cf. section 3.5) que le cas  $s = 1$  (interactions coulombiennes) comporte des difficultés spéciales : la constante  $a$  est alors infinie. On a montré dans la section 3.5 que l'on peut éliminer cette divergence en effectuant la coupure de Debye dans les intégrales.

Le modèle (12.36) est en général trop simple ; le calcul des fréquences  $\nu_\ell$  doit *a priori* être basé sur un calcul quantique de la section différentielle  $\sigma(\chi)$ . Il est commode d'introduire, au lieu des fréquences  $\nu_\ell$ , les sections efficaces de transport :

$$\sigma_\ell = 2\pi \int_0^\pi [1 - P_\ell(\cos \chi)] \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \quad (12.38)$$

qui leur sont reliées par la relation générale :

$$\nu_\ell = n_o \sigma_\ell w_e \quad (12.39)$$

Le calcul des  $\sigma_\ell$  en fonction des angles de déphasage quantique dans une collision a déjà été fait dans l'appendice A3-2b) [cf. (3.165) pour  $\sigma_1$  et (3.167) pour  $\sigma_2$ ].

À partir de ces équations on peut montrer que *lorsque la section efficace différentielle est isotrope* ( $C_1 = C_2 = \dots = C_n = \dots = 0$ ) *toutes les sections efficaces de transport sont égales à la section efficace totale*  $\sigma_o$ , et donc :

$$\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_\ell = \dots = n_o \sigma_o v \quad (12.40)$$

Les molécules boules de billard sont un cas particulier de cette règle générale.

On voit enfin que lorsque l'énergie de l'électron tend vers zéro, la section efficace différentielle élastique devient isotrope. Nous avons vu dans la section 3.4 que cela est dû au fait que tous les déphasages sauf le premier tendent vers zéro. Plus précisément, on obtient, par la méthode dite de la portée effective [214], des développements en série de  $\sigma(w, \chi)$ ,  $\sigma_o(w)$  et  $\sigma_1(w)$  pour les petites valeurs de  $w$  [13]. Ces formules montrent effectivement que  $\sigma_o$  et  $\sigma_1$  tendent vers la même limite lorsque  $w$  tend vers zéro.

### 12.3.3 Données expérimentales sur les fréquences de relaxation

Quelques données sur les sections efficaces  $\sigma_1$  ont été rassemblées dans la section 3.5. L'analyse de ces résultats met en évidence les domaines de

validité de certaines approximations souvent utilisées dans la théorie des gaz faiblement ionisés :

- *Gaz à  $\nu_1$  constant.* L'approximation  $\nu_1 = \text{Cte} (\sigma_1 \sim w^{-1})$  simplifie beaucoup les calculs de théorie cinétique. Quand cette loi est valable on peut poser :

$$\nu_1 = \nu_{10} \frac{n_o}{n_L} \tag{12.41}$$

où  $\nu_{10}$  est la fréquence de collisions dans les conditions normales de température et de pression et  $n_L$  la densité d'un gaz parfait dans ces mêmes conditions (nombre de Loschmidt) :  $n_L = 2.69 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ . Les deux gaz obéissant approximativement à cette loi sont :

1. Hydrogène pour  $\frac{1}{2}m_e w^2 > 4 \text{ eV}$ , avec  $\nu_{10} = 4.3 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$
  2. Hélium pour  $\frac{1}{2}m_e w^2 > 3 \text{ eV}$  avec  $\nu_{10} = 1.83 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$
- *Gaz à  $\sigma_1 = \text{Cte}$ .* Dans d'autres cas on peut au contraire supposer en première approximation que  $\sigma_1$  est constante (d'où  $\nu_1 \sim w$ ). cela s'applique notamment aux cas suivants :
1. Hydrogène pour  $\frac{1}{2}m_e w^2 < 4 \text{ eV}$ , avec  $\sigma_1 = 13.5 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$
  2. Hélium pour  $\frac{1}{2}m_e w^2 < 3 \text{ eV}$ , avec  $\sigma_1 = 5.1 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$ .
  3. Néon pour  $2 \text{ eV} < \frac{1}{2}m_e w^2 < 10 \text{ eV}$ , avec  $\sigma_1 = 3 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$ .

## 12.4 Conductivité sans échauffement des électrons

### 12.4.1 Approximation des champs faibles

En présence de champs électromagnétiques  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ , il apparaît des anisotropies dans la distribution  $f$ . Pour étudier leur évolution nous supposons que le plasma non perturbé est homogène, que le champ électrique  $\vec{E}$  est uniforme et que les effets de diffusion n'existent pas. L'équation de Boltzmann relative aux électrons s'écrit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{\gamma} + \vec{\Omega} \times \vec{w}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = J(f) \tag{12.42}$$

Pour la résoudre on développe comme précédemment  $f$  en fonctions sphériques, selon la formule (12.20) ; on peut en déduire les développements en fonctions sphériques des divers termes de (12.42). Les formules à utiliser sont rassemblées dans l'appendice A12-2 ; on peut alors, du fait

de l'orthogonalité des fonctions sphériques, remplacer (12.42) par une suite d'équations obtenues en y égalant membre à membre les coefficients de chaque fonction sphérique. On obtient ainsi le système d'équations d'évolution suivant :

- Partie isotrope :

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + \left(1 + \frac{w}{3} \frac{\partial}{\partial w}\right) (\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}_1) = 0 \quad (12.43)$$

- Anisotropies d'ordre  $\ell = 1$  :

$$\frac{\partial \vec{\alpha}_1}{\partial t} + \nu_1 \vec{\alpha}_1 + \overline{\overline{\Omega}} \cdot \vec{\alpha}_1 + \frac{1}{w} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \cdot \vec{L}_2 \quad (12.44)$$

où l'on a introduit le vecteur des anisotropies d'ordre 1 :

$$\vec{\alpha}_1 = \alpha_{11} \vec{e}_x + \beta_{11} \vec{e}_y + \alpha_{10} \vec{e}_z \quad (12.45)$$

et le tenseur gyromagnétique :

$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.46)$$

$\vec{L}_2$  est un vecteur proportionnel aux anisotropies d'ordre 2. Nous ne l'avons pas explicité car nous ne l'utiliserons pas, mais on peut le faire facilement en se reportant aux formules (12.239) et (12.240) de l'appendice A12-2.

On peut à partir des formules de cet appendice compléter le système des équations (12.43) et (12.44) par un système infini relatif aux anisotropies d'ordre  $\ell = 2, 3, \dots$

Dans ces équations, on voit que le champ électrique a pour effet de coupler entre elles les anisotropies d'ordres successifs ; plus précisément, on voit sur (12.44) et de façon plus générale sur les formules de l'appendice A12-2 que les anisotropies d'ordre  $\ell$  sont couplées aux anisotropies d'ordre  $\ell - 1$  et  $\ell + 1$  ; le système des équations (12.43), (12.44)... , étant ainsi couplé de proche en proche jusqu'à l'infini, ne peut se résoudre que par des méthodes d'approximation ; on peut supposer que le champ électrique est assez faible pour que l'on ait :

$$\epsilon \equiv \frac{\gamma}{\nu_1} \ll \bar{w} \quad (12.47)$$

où  $\bar{w}$  est une vitesse moyenne des électrons et  $\bar{\nu}_1$  la valeur correspondante  $\nu_1(\bar{w})$ . Cette formule exprime le fait que la variation de vitesse due à l'action du champ électrique pendant un temps de relaxation est beaucoup plus petite que la vitesse moyenne d'agitation thermique des électrons<sup>5</sup>.

Dans ces conditions, on conçoit que les anisotropies produites par le champ électrique sont de petites perturbations<sup>6</sup>. De fait, si l'on se reporte aux équations (12.43), (12.44)... on vérifie que les anisotropies d'ordre  $\ell$  sont d'ordre  $\epsilon^\ell$ , et plus précisément que :

$$\alpha_0 = O(1) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^4) + \dots \quad (12.48)$$

$$\alpha_1 = O(\epsilon) + O(\epsilon^3) + O(\epsilon^5) + \dots \quad (12.49)$$

## 12.4.2 Tenseur de conductivité électronique

Nous appliquons la méthode de perturbation définie ci-dessus au cas d'un champ électrique alternatif  $E = E_o e^{-i\omega t}$  ; pour cela nous nous limitons pour  $f$  à l'approximation du premier ordre :

$$f = f_o + \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w} \quad (12.50)$$

en désignant par  $f_o$  la valeur non perturbée de  $\alpha_o$  représentant l'état initial des électrons du plasma, c'est-à-dire une distribution maxwellienne de température  $T_o$  égale à celle des neutres. En négligeant dans (12.44) le terme  $\vec{\gamma} \cdot \vec{L}_2$  qui est d'ordre  $\gamma^3$  on obtient pour l'équation d'évolution des anisotropies d'ordre 1 :

$$\vec{\alpha}_1 + \nu_1 \vec{\alpha}_1 + \vec{\Omega} \cdot \vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{w} \frac{\partial f_o}{\partial w} \vec{\gamma} \quad (12.51)$$

La solution générale de cette équation comprend un terme transitoire (solution générale de l'équation sans second membre) et un terme stationnaire (solution particulière sinusoïdale de l'équation avec second membre). Le régime transitoire s'étend sur un intervalle de temps de l'ordre de  $1/\nu_1$  ; nous n'étudions que le régime stationnaire qui demeure seul après quelques intervalles de relaxation  $1/\nu_1$ . Dans ce régime, on a en notation complexe :

$$\vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{w} \frac{\partial f_o}{\partial w} \frac{\vec{S}}{-i\omega + \nu_1} \cdot \vec{\gamma} \quad (12.52)$$

5. Il est montré dans [302, chapitre 12] que la méthode approchée développée ci-dessous est valable si l'on remplace  $\bar{\nu}_1$  dans (12.47) par l'une des trois fréquences  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $\bar{\nu}_1$  selon certaines règles.

6. Des études numériques [224] et une analyse théorique [225] ont montré que pour des champs relativement forts ne satisfaisant pas bien la condition (12.47), le développement en harmoniques sphériques est très lentement convergent.

où  $\vec{\gamma}$  est l'amplitude complexe du terme de champ électrique et  $\vec{S}$  le tenseur :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} \frac{(-i\omega + \nu_1)^2}{(-i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} & \frac{-\Omega(-i\omega + \nu_1)}{(-i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} & 0 \\ \frac{\Omega(-i\omega + \nu_1)}{(-i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} & \frac{(-i\omega + \nu_1)^2}{(-i\omega + \nu_1)^2 + \Omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.53)$$

$\vec{S}$  est une combinaison des trois fréquences caractéristiques  $\omega$ ,  $\nu_1$  et  $\Omega$  qui interviennent dans le problème. La nécessité d'introduire ce tenseur est liée à l'anisotropie produite dans le plasma par la présence du champ magnétique statique  $\vec{B}$ . En l'absence d'un tel champ on a  $\Omega = 0$  ;  $\vec{S} = \vec{\delta}$  et l'équation (12.52) se réduit à :

$$\vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{w} \frac{\partial f_o}{\partial w} \frac{\vec{\gamma}}{-i\omega + \nu_1} \quad (12.54)$$

le vecteur  $\vec{\alpha}_1$  des anisotropies étant alors simplement proportionnel et colinéaire à  $\vec{\gamma}$ .

Connaissant  $\vec{\alpha}_1$  on en déduit, par une intégration, le vecteur vitesse  $\vec{v}_e$  du fluide électronique et le vecteur courant électrique associé  $\vec{J}_e$  ; la formule (12.203) de l'appendice A12-1 donne tout d'abord :

$$\vec{v}_e = -\frac{4\pi}{3n_e} \int_0^\infty \frac{\vec{S}}{i\omega + \nu_1} w^3 \frac{\partial f_o}{\partial w} dw \cdot \vec{\gamma} \quad (12.55)$$

soit, après une intégration par parties :

$$\vec{v}_e = -\frac{1}{n_e} \int_0^\infty f_o d\left(\frac{\vec{S}}{-i\omega + \nu_1} \frac{4\pi v^3}{3}\right) \cdot \vec{\gamma} \quad (12.56)$$

Le résultat de ce calcul peut se comparer à l'expérience en introduisant le tenseur de mobilité électronique  $\vec{\mu}_e$  ou le tenseur de conductivité électronique  $\vec{\sigma}_e$  respectivement définis par les relations :

$$\vec{v}_e = \vec{\mu}_e \cdot \vec{E} \quad (12.57)$$

$$\vec{J}_e = n_e q_e \vec{v}_e = \vec{\sigma}_e \cdot \vec{E} \quad (12.58)$$

$\vec{\mu}_e$  est généralement mesuré en courant continu ( $\omega = 0$ ) et  $\vec{\sigma}_e$  surtout utile en HF en liaison avec les phénomènes de propagation d'ondes. Compte tenu de la relation :

$$\vec{\gamma}_e = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \quad (12.59)$$

l'équation (12.56) conduit finalement à :

$$\bar{\mu}_e = \frac{q_e}{m_e n_e} \int_0^\infty f_o d \left( \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \frac{4\pi w^3}{3} \right) \quad (12.60)$$

$$\bar{\sigma}_e = \frac{q_e^2}{m_e} \int_0^\infty f_o d \left( \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \frac{4\pi w^3}{3} \right) \quad (12.61)$$

On voit que le tenseur de conductivité électronique est, dans les conditions étudiées ici ( $B$  uniforme constant, dirigé suivant  $Oz$ ), de la forme :

$$\bar{\sigma}_e = \begin{vmatrix} \sigma_\perp & -\sigma_\times & 0 \\ \sigma_\times & \sigma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\parallel \end{vmatrix} \quad (12.62)$$

On vérifie facilement sur l'expression (12.53) de  $\bar{S}$  qu'en l'absence de champ magnétique ( $\Omega = 0$ ) ce tenseur se réduit à :

$$\bar{\sigma}_e = \sigma_\parallel \bar{\delta} \quad (12.63)$$

Le milieu étant alors isotrope, la conductivité  $\bar{\sigma}_e$  se réduit au scalaire  $\sigma_\parallel$  obtenu en faisant  $\bar{S} = \bar{\delta}$  dans (12.61).

En présence d'un champ magnétique on voit d'après (12.63) que la conductivité  $\sigma_{zz}$  parallèle à  $\vec{B}$  est inchangée et reste égale à la conductivité  $\sigma_\parallel$ . Les conductivités  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_\perp$  dans les directions perpendiculaires à  $\vec{B}$  sont au contraire différentes de  $\sigma_\parallel$  ; la différence  $\sigma_\perp - \sigma_\parallel$  est l'effet dit de magnétorésistance, qui est de l'ordre de  $B^2$  pour les faibles champs magnétiques. Il apparaît d'autre part des termes non diagonaux  $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\sigma_\times$ . Ce sont les termes d'effet Hall qui sont du premier ordre en  $B$  pour les faibles valeurs de  $B$  ( $\Omega \ll \omega, \nu_1$ ). Lorsqu'au contraire le champ  $B$  devient très fort ( $\Omega \gg \omega, \nu_1$ ), on vérifie que les quatre termes transversaux tendent vers zéro, les termes  $\sigma_\perp$  comme  $1/B^2$ , et les termes d'effet Hall  $\sigma_\times$  comme  $1/B$ .

On remarque d'autre part que  $\bar{\sigma}_e$  dépend en général de  $f_o$  et de la loi de force à travers la fonction  $\nu_1(w)$ . Les formules (12.60) et (12.61) se simplifient si la fréquence  $\nu_1$  peut être considérée comme indépendante de  $w$  : les facteurs de fréquence peuvent être alors sortis de l'intégrale qui devient triviale en donnant un facteur  $n_e$ . L'on obtient ainsi la formule simple :

$$\bar{\sigma}_e = -\frac{n_e q_e^2}{m_e (-i\omega + \nu_1)} \bar{S} \quad (12.64)$$

Cette formule se déduit de celle du gaz d'électrons libres en y remplaçant  $-i\omega$  par  $-i\omega + \nu_1$ . Elle est d'un usage courant ; cependant nous avons vu au paragraphe précédent que l'hypothèse  $\nu_1 = \text{Cte}$  sur laquelle elle repose n'est valable qu'exceptionnellement. Elle ne peut donc certainement être considérée que comme une première approximation ; or, si  $\nu_1$  n'est pas constante, il nous faut connaître l'expression de la partie isotrope  $f_o$  pour pouvoir calculer la conductivité et on rencontre alors des difficultés qui tiennent aux hypothèses strictes du modèle de Lorentz parfait, comme nous allons le voir dans la section suivante.

## 12.5 Échauffement du gaz d'électrons : effet Joule

### 12.5.1 Expression de la partie isotrope de $f$

La partie isotrope contient un terme indépendant de  $E$  qui n'évolue pas ; mais il est évident d'après (12.43) qu'elle contient également *un terme en  $E^2$  qui représente un échauffement du gaz d'électrons*. Pour pousser le calcul jusqu'aux termes en  $E^2$  on peut encore négliger dans (12.44) le terme en  $E^3$  (ou  $\gamma^3$ ) ; il est donc raisonnable de conserver pour les anisotropies du premier ordre l'expression (12.52).

Ceci étant, pour reporter cette expression dans l'équation (12.51) d'évolution de la partie isotrope, on ne peut pas garder les relations complexes car les termes quadratiques, tels que  $(\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}_1)$ , vont évidemment faire apparaître l'harmonique  $2\omega$  du champ électrique. Posons donc maintenant :

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_o \cos \omega t \quad (12.65)$$

On a alors :

$$\vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{w} \frac{\partial f_o}{\partial w} \text{Re} \left[ \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \cdot \vec{\gamma}_o (\cos \omega t - i \sin \omega t) \right] \quad (12.66)$$

et par conséquent :

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{2w} \frac{\partial f_o}{\partial w} \vec{\gamma}_o \cdot \text{Re} \left( \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \right) \cdot \vec{\gamma}_o + A_{2\omega} \quad (12.67)$$

où on n'a explicité que le premier terme indépendant du temps qui est la moyenne du terme en  $\cos^2 \omega t$ , et où  $A_{2\omega}$  représente des termes oscillant à la fréquence  $2\omega$ . (Dans ces formules Re veut dire "partie réelle de".) Ces deux termes sont d'ordre  $\gamma^2$ . Mais alors que le premier terme conduit



à un échauffement permanent du gaz d'électrons,  $A_{2\omega}$  produit seulement une modulation de cet échauffement, négligeable si  $\omega$  est assez élevé. Nous négligeons dans ce qui suit ce terme  $A_{2\omega}$  (cf. [302, section 12.8] pour une discussion de la validité de cette approximation). L'équation d'évolution de  $\alpha_0$  s'écrit donc :

$$\alpha_0 - \left(1 + \frac{w}{3} \frac{\partial}{\partial w}\right) \left[ \frac{1}{2w} \frac{\partial f_o}{\partial w} \vec{\gamma}_o \cdot \text{Re} \left( \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \right) \cdot \vec{\gamma}_o \right] = 0 \quad (12.68)$$

Cette équation peut se récrire sous la forme d'une équation de conservation des particules dans l'espace des vitesses, soit :

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + \nabla_w \cdot \vec{F} = 0 \quad (12.69)$$

où  $\vec{F}$  est un vecteur flux dans l'espace des vitesses produit par le champ électrique et les collisions. On passe à cette nouvelle forme en remarquant que l'on a l'identité :

$$\left(1 + \frac{w}{3} \frac{\partial}{\partial w}\right) A \equiv \frac{1}{3w^2} \frac{\partial}{\partial w} (v^3 A) \equiv \frac{1}{3} \nabla_w \cdot (w \vec{A}) \quad (12.70)$$

en désignant par  $\vec{A}$  le vecteur radial de l'espace des vitesses :

$$\vec{A} = A \frac{\vec{w}}{w} \quad (12.71)$$

où  $A$  est une fonction de  $w$ , le module de  $\vec{w}$ . On obtient donc :

$$\vec{F} = \vec{F}_E = F_E \frac{\vec{w}}{w} \quad (12.72)$$

avec :

$$F_E = -\frac{1}{6} \frac{\partial f_o}{\partial w} \vec{\gamma}_o \cdot \text{Re} \left( \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \right) \cdot \vec{\gamma}_o \quad (12.73)$$

Comme  $\bar{S}$  est antisymétrique, les seuls termes qui contribuent à (12.73) sont les termes diagonaux. En explicitant les calculs à partir de l'expression (12.53) de  $\bar{S}$  on obtient :

$$F_E = -\frac{1}{6} \frac{\partial f_o}{\partial w} \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} \vec{\gamma}_o \cdot \bar{B} \cdot \vec{\gamma}_o \quad (12.74)$$

où  $\overline{\overline{B}}$  est le tenseur diagonal de composantes :

$$\begin{aligned} B_{xx} = B_{yy} &= \frac{\omega^2 + \nu_1^2}{\nu_1} \operatorname{Re} \left( \frac{S_{xx}}{-i\omega + \nu_1} \right) = \frac{(\omega^2 + \nu_1^2)(\omega^2 + \Omega^2 + n\nu_1^2)}{[(\omega + \Omega)^2 + n\nu_1^2][(\omega - \Omega)^2 + \nu_1^2]} \\ B_{zz} &= 1 \end{aligned} \quad (12.75)$$

Cette formule se simplifie beaucoup en l'absence de champ magnétique. On obtient alors en effet (en faisant  $\Omega = 0$ )  $\overline{\overline{B}} = \overline{\delta}$ , d'où l'expression :

$$F_E = -\frac{1}{6} \frac{\partial f_o}{\partial w} \frac{\nu_1 \gamma_o^2}{\nu_1^2 + \omega^2} \quad (12.76)$$

On peut, pour chaque valeur de  $w$ , intégrer par rapport au temps l'équation (12.69) et on obtient :

$$\alpha_o(w, t) = f_o(w, t) - (\nabla_w \cdot \vec{F})t \quad (12.77)$$

On voit donc qu'en poussant le calcul jusqu'aux termes du second ordre, il apparaît dans  $\alpha_o$  un terme proportionnel au temps, donc divergent. Une telle perturbation faible au début de l'évolution, parce que du second ordre, mais pouvant à plus long terme devenir très importante parce que croissant proportionnellement au temps, semble mettre en défaut la méthode de calcul utilisée. De telles perturbations ont été rencontrées pour la première fois en mécanique céleste et baptisées "séculaires" par les astronomes. Nous verrons dans les paragraphes suivants que l'on peut résoudre la difficulté ainsi posée en utilisant une méthode dite quasi linéaire qui distingue deux échelles de temps : une échelle des temps courts décrivant l'évolution de  $\vec{\alpha}_1$  (en supposant  $\alpha_o$  constant) et une échelle des temps longs décrivant l'évolution de  $\alpha_o$ .

Dans le cas présent on vérifie sur (12.74) que  $\partial f_o / \partial w$  étant négatif, le flux  $F_E$  est essentiellement positif. Pour cette raison  $F_E$  a été appelé "upflux"<sup>7</sup> par Allis ([215], [216] ; Fig. 12.1). Il y a donc *échauffement continu du gaz d'électrons*.

Cet échauffement est dû à l'action combinée des collisions et du champ électrique (en effet le flux  $F_E$  est proportionnel à  $\nu_1 \gamma_o^2$ ). Comme d'autre part nous avons supposé  $m_e / m_o = 0$ , nous avons négligé totalement les pertes d'énergie des électrons dans leurs collisions élastiques sur les neutres. Les électrons n'ayant aucun mécanisme pour se refroidir, leur échauffement

7. Au lieu de  $F_E$ , Allis introduit son intégrale sur une sphère de rayon  $w$ , c'est-à-dire  $G_E = 4\pi w^2 F_E$ . Le concept d'"upflux" est très utile pour analyser les fonctions de distributions électroniques dans les plasmas de laser à gaz où les collisions inélastiques jouent par ailleurs un rôle important [303, pp. 85-93].

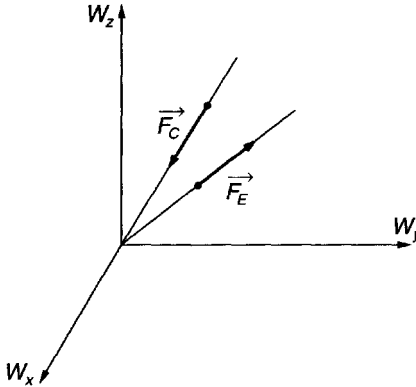


Figure 12.1 : Flux dans l'espace des vitesses.

$F_E$  Flux dû à l'effet Joule.

$F_C$  flux dû aux collisions élastiques  $e-o$ .

est dans la présente théorie illimité. cela rend discutable au bout d'un certain temps le calcul de la conductivité qui a été fait : les perturbations apportées par  $E$  n'étant plus faibles, la méthode d'approximation utilisée n'est plus à priori valable. Nous verrons plus loin comment lever cette difficulté.

## 12.5.2 Effet Joule

Cependant, il est intéressant d'étudier d'un peu plus près l'échauffement des électrons, en calculant les variations de l'énergie cinétique totale  $U_{Ke}$  des électrons contenus dans une unité de volume du gaz ;  $U_{Ke}$  dépend uniquement de  $\alpha_o$  et l'on a :

$$\frac{dU_{Ke}}{dt} = 2\pi m_e \int_0^\infty \dot{\alpha}_o w^4 dw \quad (12.78)$$

En multipliant l'équation (12.43) par  $2\pi m_e w^4$  et en intégrant, on obtient en tenant compte de (12.70) et après une intégration par parties :

$$\frac{dU_{Ke}}{dt} = \frac{4\pi m_e}{3} \int \vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha}_1 w^4 dw = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (12.79)$$

La puissance instantanée fournie en chaleur au gaz d'électrons est donc donnée par cette formule classique de l'effet Joule. Dans un champ sinusoïdal, sa valeur moyenne (effet Joule en alternatif) s'en déduit, en

repassant à un champ réel ; on obtient :

$$\left( \frac{dU_{Ke}}{dt} \right)_{\text{moyen}} = \frac{1}{2} \vec{E}_o \cdot \text{Re} \overline{\overline{\sigma}}_e \cdot \vec{E}_o \quad (12.80)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re}(\sigma_{exx})(E_{ox}^2 + E_{oy}^2) + \frac{1}{2} \text{Re}(\sigma_{ezz})E_{oz}^2 \quad (12.81)$$

On voit sur ces formules que les termes d'effet Hall s'éliminent par suite de l'antisymétrie de  $\overline{\overline{\sigma}}_e$  et que *la puissance active dégagée en chaleur dans le gaz d'électrons est uniquement due à la partie réelle des termes diagonaux du tenseur de conductivité*. Une discussion plus détaillée de l'effet Joule en fonction des trois fréquences  $\omega, \Omega$  et  $\nu_1$  fait l'objet du problème P12-6.

## 12.6 Refroidissement des électrons par collisions élastiques

### 12.6.1 Modèle de Lorentz imparfait

Pour lever la difficulté mentionnée au paragraphe précédent, concernant l'échauffement illimité des électrons par effet Joule, il faut tenir compte des mécanismes de refroidissement des électrons. Parmi ceux-ci, on peut citer :

- l'excitation des neutres dans des collisions inélastiques (en particulier l'excitation vibrationnelle dans les gaz moléculaires) ;
- le rayonnement électromagnétique dû aux fortes accélérations pendant une collision (bremsstrahlung) ;
- le rayonnement électromagnétique à la fréquence  $\Omega$  lors de la rotation dans un champ magnétique ;
- le petit échange d'énergie que nous avons jusqu'à maintenant négligé dans les collisions élastiques électron-neutre.

Nous nous limitons dans ce paragraphe à l'étude du dernier de ces effets en introduisant ce qu'on appelle le *modèle de Lorentz imparfait* qui consiste à admettre que  $m_e/m_o$  est très petit mais fini, et à tenir compte dans les calculs du terme du premier ordre en  $m_e/m_o$  qu'est le petit échange d'énergie entre les électrons et les neutres ; dans ce cas, l'évolution des anisotropies est peu changée ; en effet dans les équations (12.44), etc., on

n'introduit que des termes correctifs négligeables si  $\ell \neq 0$  ; cependant pour  $\ell = 0$  on avait dans le modèle de Lorentz parfait :

$$J(\alpha_0) = 0 \tag{12.82}$$

Les collisions n'avaient aucune action sur la partie isotrope de la fonction de distribution ; en effet, dans une collision on admet alors qu'il n'y a aucune variation de la valeur absolue de la vitesse. Si au contraire on tient compte des termes correctifs en  $m_e/m_o$  (modèle de Lorentz imparfait) l'équation (12.82) devient :

$$J_1(\alpha_0) = \frac{m_e}{m_o} \frac{1}{w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[ \nu_1 w^3 \left( \alpha_o + \frac{\kappa T_o}{m_e w} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} \right) \right] \tag{12.83}$$

Cette formule a été donnée pour la première fois par Chapman et Cowling [286] ; le lecteur en trouvera une démonstration dans [301, pp. 230-235] ou [217] (cf. aussi appendice A12-3). L'opérateur  $J_1$  tend à ramener la partie isotrope de la fonction de distribution des électrons vers une fonction maxwellienne à la température  $T_o$  des neutres (on vérifie en effet immédiatement sur (12.83) que l'on a  $J_1(f_o) = 0$ ).

### 12.6.2 Relaxation de la partie isotrope de $f$

En l'absence de champ électrique l'équation d'évolution de la partie isotrope s'écrit donc :

$$\dot{\alpha}_0 = J_1(\alpha_0) \tag{12.84}$$

qu'on peut écrire comme dans le cas de l'effet Joule sous la forme d'une équation de conservation des particules dans l'espace des vitesses de la forme (12.69) avec maintenant, compte tenu de (12.69) :

$$\vec{F} = \vec{F}_C = F_C \frac{\vec{w}}{w} \tag{12.85}$$

$$F_C = -\frac{m_e}{m_o} \nu_1 v \left( \alpha_0 + \frac{\kappa T_o}{m_e w} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} \right) \tag{12.86}$$

On voit que dans ce modèle de Lorentz imparfait, les collisions électrons-neutres introduisent un flux radial isotrope  $F_C$  analogue au flux  $F_E$  produit par l'effet Joule (cf. Fig.12.1). Mais alors que  $F_E$  est toujours positif (échauffement)  $F_C$  est en général négatif (refroidissement), comme on peut le voir en discutant la formule donnant  $F_C$ . Sur cette formule on remarque tout d'abord que  $F_C$  s'annule lorsque les électrons sont en équilibre avec

les neutres, c'est-à-dire lorsque  $\alpha_o$  est la Maxwellienne  $f_o$  de température  $T_o$  égale à celle des neutres, qui satisfait évidemment à la condition

$$f_o + \frac{\kappa T_o}{m_e w} \frac{\partial f_o}{\partial w} = 0 \quad (12.87)$$

En tirant le rapport  $\kappa T_o/m_e w$  de cette équation et en le reportant dans (12.86) on obtient :

$$\begin{aligned} F_C &= -\frac{m_e}{m_o} \nu_1 w \alpha_o \left[ 1 - \frac{f_o}{\partial f_o / \partial w} \frac{\partial \alpha_o / \partial w}{\alpha_o} \right] \\ &= \left( -\frac{m_e}{m_o} \nu_1 w \alpha_o \right) \left( \frac{\partial \ln f_o}{\partial w} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \ln (f_o / \alpha_o)}{\partial w} \right) \end{aligned}$$

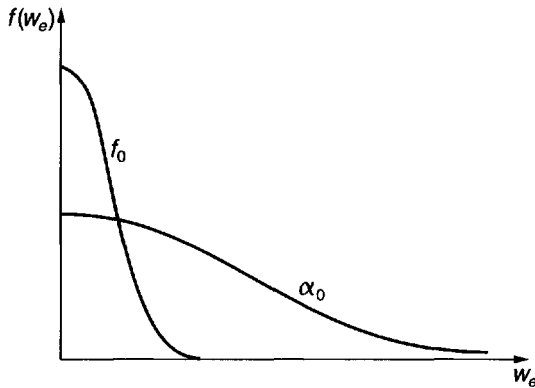


Figure 12.2 : Gaz d'électrons plus "chaud" que le gaz de neutres.

$f_o$  Distribution des électrons s'ils étaient en équilibre avec les neutres.

$\alpha_o$  Distribution actuelle des électrons.

Dans la situation la plus courante, le gaz d'électrons est plus chaud que le gaz de neutres (Fig. 12.2) et l'on vérifie facilement que  $F_C$  est le produit de trois facteurs négatifs et donc lui-même négatif comme il fallait s'y attendre.

Pour analyser plus précisément la relaxation de la partie isotrope de  $f$ , il est pratique d'utiliser à nouveau un développement en série de fonctions propres qui seront maintenant les *fonctions propres de l'opérateur  $J_1$* , c'est-à-dire des fonctions isotropes  $y_n$  satisfaisant à l'équation :

$$J_1(y_n) = -\lambda_n y_n \quad (12.88)$$

Celles-ci fournissent un développement naturel de la partie isotrope de la fonction de distribution et permettent de définir des fréquences et temps de relaxation de refroidissement en posant :

$$\alpha_0 = \sum_n a_n(t) y_n(w) \quad (12.89)$$

La première fonction propre est toujours la fonction maxwellienne  $f_o$  à la température  $T_o$  des neutres ; la valeur propre associée  $\lambda_o$  est nulle puisque l'on a  $J_1(f_o) = 0$  ; les autres fonctions propres ont des expressions qui dépendent de celle de  $\nu_1$ , c'est-à-dire de la loi de force électron-neutre ; elles représentent des *écarts non maxwelliens caractéristiques*. En combinant les équations (12.84), (12.88) et (12.89) on peut étudier l'évolution de ces écarts non maxwelliens : en particulier *en l'absence d'un champ électrique*, les écarts non maxwelliens, qui pouvaient exister à l'instant initial, s'amortissent exponentiellement :

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-\lambda_n t} \quad (12.90)$$

$\lambda_n$  est donc la fréquence de relaxation de l'écart non maxwellien d'ordre  $n$ .

La recherche des fonctions  $y_n$  et des fréquences de relaxation  $\lambda_n$  est en général une affaire numérique assez difficile [312], [219]. La référence [32] contient une discussion de quelques cas particuliers. Dans tous les cas, on trouve que les  $\lambda_n$  sont de l'ordre de  $(m_e/m_o)\nu_1$ .

Les variations sous l'effet des collisions de la partie isotrope de la fonction de distribution sont donc " $m_o/m_e$  fois plus lentes" que celles de la partie anisotrope ; les collisions sont beaucoup plus efficaces pour rendre la fonction de distribution isotrope que pour établir un équilibre d'énergie entre les électrons et les neutres.

## 12.7 Équilibre effet Joule-refroidissement par collisions

### 12.7.1 Méthode quasi linéaire. Formule de Margenau en HF

La différence d'ordre de grandeur entre l'échelle de temps de variation des anisotropies ( $\sim 1/\nu_1$ ) et de la partie isotrope ( $\sim \frac{m_o}{m_e} \frac{1}{\nu_1}$ ) permet de tenir compte de l'échauffement du gaz d'électrons dans le calcul de la conductivité électrique en résolvant le système des deux équations d'ordre  $\ell = 0, 1$  par une méthode "quasi linéaire" ; pour cela on récrit ces deux équations sous les formes :

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial t} + \nabla_w \cdot (\vec{F}_E + \vec{F}_C) = 0 \quad (12.91)$$

$$\vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{w} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} \frac{\vec{S}}{-i\omega + \nu_1} \cdot \vec{\gamma} \quad (12.92)$$

avec :

$$F_E = -\frac{1}{6} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} \vec{\gamma}_o n \cdot \operatorname{Re} \left( \frac{\overline{\overline{S}}}{-i\omega + \nu_1} \right) \cdot \vec{\gamma}_o \quad (12.93)$$

$F_C$  étant toujours donné par la formule (12.86). En écrivant l'expression de  $\vec{\alpha}_1$  ci-dessus on a fait l'hypothèse qu'à tout instant l'anisotropie du premier ordre  $\vec{\alpha}_1$  était déterminée par la formule de réponse linéaire analogue à (12.52), mais en y remplaçant la fonction constante  $f_o$  par la fonction lentement variable  $\alpha_o$ . Le flux  $F_E$  qui intervient dans l'équation d'évolution de  $\alpha_o$  s'exprime alors également à partir de la formule (12.54) de l'approximation linéaire en remplaçant  $f_o$  par  $\alpha_o$ . L'approximation "quasi linéaire" ainsi définie est justifiée par le fait que le temps de relaxation  $1/\nu_1$  de  $\vec{\alpha}_1$  est bien plus court que les temps de relaxation  $1/\lambda_n$  de la partie isotrope :  $\vec{\alpha}_1$  s'ajuste à chaque instant sur la valeur de  $\alpha_o$  comme si cette partie isotrope était constante.

Remarquons d'autre part que la formule (12.93) a été obtenue à partir de la valeur moyenne de l'effet Joule alternatif : dans l'équation (12.91) d'évolution de la partie isotrope on a négligé les modulations à la fréquence  $2\omega$  de l'effet Joule. Il est clair que ceci suppose la condition :

$$\omega \gg \frac{m_e}{m_o} \nu_1 \quad (12.94)$$

Les formules de ce paragraphe décrivent donc l'action d'un champ électrique dans le domaine des hautes fréquences défini par la condition ci-dessus. Nous discuterons au paragraphe suivant le cas des champs continus et de basse fréquence.

Sous l'action combinée du champ électrique et des collisions, la partie isotrope va évoluer vers un état stationnaire défini par la condition :

$$F_E + F_C = C_1 = \text{Cte} \quad (12.95)$$

Dans le cas considéré ici où il n'y a que des collisions élastiques, il n'apparaît ni ne disparaît aucun électron pour  $w = 0$  et  $\infty$  ; on a donc forcément  $C_1 = 0$  et l'équation de flux total nul s'écrit en explicitant  $F_E$  et  $F_C$  à partir de (12.73) et (12.86) :

$$\frac{1}{6} \frac{d\alpha_o}{dw} \frac{\nu_1}{\omega^2 + \nu_1^2} \vec{\gamma}_o \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \vec{\gamma}_o + \frac{m_e}{m_o} \nu_1 w \left( \alpha_o + \frac{\kappa T_o}{m_e} \frac{d\alpha_o}{dw} \right) = 0 \quad (12.96)$$

En intégrant cette équation à variables séparées on obtient finalement la formule dite de Margenau :

$$\alpha_o = C_2 \exp \left( - \int_o^w \frac{2w dw}{w_{te}^2(T_o) + \frac{1}{3} \frac{m_e}{m_o} \frac{1}{\omega^2 + \nu_1^2} \vec{\gamma}_o \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \vec{\gamma}_o} \right) \quad (12.97)$$



qui a été obtenue indépendamment sous diverses formes par Allis [220], Davydov [221] et plusieurs autres auteurs [222], [223]. Dans cette formule  $C_2$  est la constante de normalisation (cf. problème P12-7) définie par la condition :

$$\int_0^\infty \alpha_0 4\pi w^2 dw = n_e \quad (12.98)$$

$\overline{\overline{B}}$  est la combinaison des trois fréquences  $\omega$ ,  $\Omega$  et  $\nu_1(w)$  donnée par les formules (12.75). Enfin  $w_{te}^2(T_o)$  est la vitesse thermique des électrons en cas d'équilibre avec les neutres, donnée par la relation classique (vitesse la plus probable d'une maxwellienne) :

$$w_{te}^2(T_o) = \frac{2\kappa T_o}{m_e} \quad (12.99)$$

En l'absence de champ magnétique ( $\Omega = 0$ ) la formule de Margenau se simplifie car l'on a :

$$\overline{\overline{B}} = \overline{\delta} \quad (12.100)$$

et le deuxième terme du dénominateur s'écrit simplement :

$$\frac{1}{3} \frac{m_o}{m_e} \frac{1}{\omega^2 + \nu_1^2} \gamma_o^2 \quad (12.101)$$

Il faut remarquer que l'intégrale (12.98) doit être finie. Dans le problème P12-7 on montre que cette condition est satisfaite sauf si  $\omega = 0$  ou  $\omega = \Omega$  et si  $\nu_1(w)$  décroît trop rapidement lorsque  $w$  croît. Dans ce dernier cas la conclusion physique est qu'il n'y a pas de solution stationnaire de (12.91) ; cette situation est reliée au phénomène des électrons "runaway" que nous discuterons dans la section 13.7.

## 12.7.2 Formule de Margenau pour les champs continus et BF

Le calcul pour un champ continu ( $\omega = 0$ ) est pratiquement identique à celui qui vient d'être fait, à ceci près que dans l'expression de  $F_E$ , il faut supprimer le facteur  $1/2$  représentant la moyenne de  $\cos^2 \omega t$ . On obtient ainsi la formule de Margenau en courant continu :

$$\alpha_0 = C_2 \exp \left( - \int_0^w \frac{2w dw}{w_{te}^2(T_o) + \frac{2}{3} \frac{m_o}{m_e} \frac{\overrightarrow{\gamma}_o \cdot \overrightarrow{\overline{B}}_o \cdot \overrightarrow{\gamma}_o}{\nu_1^2}} \right) \quad (12.102)$$

où  $\overline{B}_o$  est la valeur de  $\overline{B}$  donnée par les formules (12.75) pour  $\omega = 0$ . En l'absence de champ magnétique cette formule s'écrit plus simplement :

$$\alpha_0 = C_2 \exp \left( - \int_o^w \frac{2w \, dw}{w_{te}^2(T_o) + \frac{2}{3} \frac{m_o}{m_e} \frac{\gamma_o^2}{\nu_1}} \right) \quad (12.103)$$

Les formules de ce paragraphe se transposent immédiatement aux cas des champs électriques alternatifs dans le domaine des basses fréquences défini par :

$$\omega \ll \frac{m_e}{m_o} \nu_1 \quad (12.104)$$

La partie isotrope  $a$ , compte tenu de cette inégalité, le temps de s'ajuster à chaque instant sur la valeur instantanée du champ et s'exprime donc simplement en remplaçant dans les deux formules ci-dessus  $\overline{\gamma}_o$  par  $\overline{\gamma}_o \cos \omega t$ .

### 12.7.3 Discussion de la formule de Margenau

#### a) Caractère maxwellien ou non maxwellien

Pour que la fonction  $\alpha_o$  soit maxwellienne, il faut et il suffit que le dénominateur figurant dans l'intégrale (12.97) ne soit pas fonction de  $w$ . En l'écrivant alors sous la forme  $w_{te}^2(T_o) + w_E^2$  on obtient en effectuant l'intégrale :

$$\alpha_0 = C_2 \exp \left( \frac{-w^2}{w_{te}^2(T_o) + w_E^2} \right) \quad (12.105)$$

qui est bien une distribution maxwellienne de température électronique :

$$T_e = T_o \left( 1 + \frac{w_E^2}{w_{te}^2(T_o)} \right) \quad (12.106)$$

Un cas trivial est celui où le champ électrique est très faible, de sorte que l'on a  $w_E \ll w_{te}(T_o)$  ; dans la formule ci-dessus  $\alpha_0$  se réduit à la maxwellienne

$$f_o = C_2 e^{-w^2/w_{te}^2(T_o)} \quad (12.107)$$

d'équilibre avec les neutres.

Un autre cas évident est celui où la fréquence de collision  $\nu_1$  est indépendante de  $w$ . Cependant nous avons vu au paragraphe 12.3.2 que très peu de gaz satisfont à cette condition : la fonction  $\alpha_o$  est en général non maxwellienne.

Il y a cependant un large domaine de conditions où  $\alpha_o$  est quand même maxwellienne ; c'est celui des hautes fréquences, plus précisément si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\omega \gg \nu_1 \quad (12.108)$$

$$|\omega - \Omega| \gg \nu_1 \quad (12.109)$$

On vérifie facilement en effet que dans le dénominateur de (12.97), le terme dépendant de la vitesse  $\nu_1$  est partout négligeable devant les termes constants contenant les autres fréquences  $\omega$  et  $\Omega$ . Cette situation est très fréquente dans les décharges HF à condition de ne pas se rapprocher de la résonance cyclotron  $\omega = \Omega$ .

### b) Champ critique d'échauffement des électrons

On peut définir un champ électrique critique  $E_1$  donnant l'ordre de grandeur des champs pour lesquels  $\alpha_o$  commence à différer notablement de  $f_o$ . En d'autres termes, l'échauffement des électrons est négligeable lorsque  $E \ll E_1$ , tandis que pour  $E \gg E_1$  il est très important ; on peut par exemple choisir comme définition de  $E_1$  l'égalité des deux termes figurant au dénominateur de (12.97) ; quand  $\alpha_o$  est maxwellienne,  $E_1$  est alors le champ qui donne  $T_e = 2T_o$ . Posons donc :

$$w_{te}^2(T_o) = \frac{1}{3} \frac{m_o}{m_e} \frac{1}{\omega^2 + \nu_1^2} \vec{\gamma}_o \cdot \vec{B} \cdot \vec{\gamma}_o \quad (12.110)$$

où, dans le cas particulier  $\omega = \Omega = 0$  [cf. (12.103)] :

$$w_{te}^2(T_o) = \frac{2}{3} \frac{m_o}{m_e} \frac{\gamma_o^2}{\nu_1^2} \quad (12.111)$$

La valeur de  $\gamma_o$  tirée de ces formules définit le champ critique  $E_1$ . Dans le cas plus simple  $\omega = \Omega = 0$  on obtient :

$$\frac{q_e}{m_e} E_1 = \left( \frac{3}{2} \frac{m_e}{m_o} \right)^{1/2} \nu_1 w_{te}^2(T_o) \quad (12.112)$$

$E_1$  est en général une fonction de  $w$  ; il peut alors se faire que pour un champ  $E$  donné,  $f_o$  soit peu perturbée dans les gammes de vitesses où  $\nu_1$  est grande, et très perturbée dans les gammes de vitesses où  $\nu_1$  est faible. On peut toutefois définir une *valeur moyenne*  $\overline{E_1}$  de  $E_1$  en introduisant dans (12.112) une valeur moyenne  $\overline{\nu_1}$ .

Dans le cas général, le champ critique  $E_1$  dépend des trois fréquences caractéristiques  $\omega$ ,  $\nu_1$  et  $|\omega - \Omega|$ . Ce cas général est discuté dans le problème P12-8.

### c) Cas des champs forts. Distribution de Druyvesteyn

Lorsque le champ électrique  $E$  est très supérieur à  $E_1$  les formules du paragraphe précédent donnant  $\alpha_o$  ou  $T_e$  peuvent être simplifiées en négligeant  $w_{te}^2(T_o)$ . Quand  $\alpha_o$  est maxwellienne,  $T_e$  devient proportionnelle au carré du champ électrique. Quand  $\alpha_o$  est non maxwellienne on peut alors calculer facilement l'intégrale qui figure dans les formules de Margenau si la loi  $\nu_1(w)$  est assez simple. En particulier, pour des molécules du type boule de billard dans un fort champ électrique continu ( $\omega = \Omega = 0$ ), on trouve que  $\alpha_o$  prend la forme :

$$\alpha_o = C_2 e^{-w^4/w_1^4} \quad (12.113)$$

connue sous le nom de fonction de distribution de Druyvesteyn (cf. problème P12-9 où les significations de  $C_2$  et  $w_1$  sont discutées).

### 12.7.4 Mobilité électronique. Loi de similitude

La partie isotrope  $\alpha_o$  de la fonction de distribution étant maintenant déterminée par la formule de Margenau, il suffit de reporter cette fonction à la place de  $f_o$  dans les formules (12.60) et (12.61) pour obtenir les valeurs de la mobilité ou de la conductivité électronique dans le régime stationnaire vers lequel tend le gaz au bout d'un temps suffisant.

Dans ce paragraphe nous allons discuter le résultat obtenu en nous limitant au cas d'un champ électrique continu, en l'absence de champ magnétique ( $\omega = \Omega = 0$ ). Le tenseur de mobilité est alors diagonal unitaire :

$$\bar{\bar{\mu}}_e = \mu_e \bar{\delta} \quad (12.114)$$

On dit que la mobilité est scalaire et l'on obtient simplement à partir de la formule (12.60) :

$$\mu_e = \frac{q_e}{m_e n_e} \int_o^\infty \alpha_o d \left[ \frac{1}{\nu_1} \frac{4\pi w^3}{3} \right] \quad (12.115)$$

où  $\alpha_o$  est défini par la formule (12.103), ce qu'on peut récrire sous la forme :

$$\mu_e = \frac{q_e}{m_e \nu'_1} \quad (12.116)$$

en introduisant une certaine valeur moyenne de la fréquence de collision  $\nu_1(w)$  microscopique définie par la formule :

$$\frac{1}{\nu'_1} = \frac{1}{n_e} \int_o^\infty \alpha_o d \left[ \frac{1}{\nu_1(w)} \frac{4\pi w^3}{3} \right] \quad (12.117)$$

soit encore après quelques lignes de calcul :

$$\frac{1}{\nu'_1} = \frac{1}{n_o} \left\langle \frac{1}{3w^2} \frac{d}{dw} \left( \frac{w^2}{\sigma_1} \right) \right\rangle \quad (12.118)$$

où l'on a introduit la section efficace  $\sigma_1$  de transfert de quantité de mouvement, et où le signe  $\langle \rangle$  désigne une valeur moyenne au sens habituel, c'est-à-dire pondérée par  $\alpha_o$  (cf. problème P12-10).

Si  $\nu_1$  est constante,  $\nu'_1$  est égale à  $\nu_1$  et la mobilité  $\mu_e$  est elle-même constante. Mais de façon générale la mobilité  $\mu_e$  varie avec  $E$ . Plus précisément, si l'on désigne par  $n_o$  et  $T_o$  la densité et la température des molécules,  $\mu_e n_o$  est une fonction de  $E/n_o$  et de  $T_o$  (ou de  $E/p$  si l'on suppose  $T_o$  fixée) :

$$\mu_e = \frac{1}{n_o} f\left(\frac{E}{n_o}, T_o\right) \quad (12.119)$$

Pour le voir il suffit de remarquer que d'après (12.118)  $1/\nu'_1$  est le produit de  $1/n_o$  par une valeur moyenne où apparaissent seulement  $\sigma_1(w)$  et  $\alpha_o$ . Pour un gaz donné  $\sigma_1(w)$  est donnée une fois pour toutes et on vérifie sur (12.103) que  $\alpha_o$  est déterminée par la température des molécules  $T_o$  et par la valeur de  $E/n_o$ .

La formulation ci-dessus est ce qu'on appelle une loi de similitude :  $\mu_e$  dépendant *a priori* des trois paramètres  $E$ ,  $n_o$ ,  $T_o$  ; elle montre que l'on peut se ramener à une dépendance en fonction de deux paramètres seulement,  $E/n_o$  et  $T_o$ , en introduisant comme nous l'avons fait au chapitre 5 la mobilité réduite :

$$\mu_{eo} = \mu_e \frac{n_o}{n_L} = \frac{1}{n_L} f\left(\frac{E}{n_o}, T_o\right) \quad (12.120)$$

Le paramètre  $E/n_o$  est étroitement associé à la température électronique : aux faibles valeurs de  $E/n_o$  l'échauffement est négligeable,  $\mu_{eo}$  tend vers une limite  $\mu_{eo}(0)$  comme nous l'avons vu au chapitre 5. Quand  $E/n_o$  devient de l'ordre de  $\bar{E}_1/n_o$  ( $\bar{E}_1$  champ critique défini au paragraphe précédent)  $T_e$  et  $\mu_{eo}$  varient de façon sensible. Aux fortes valeurs de  $E/n_o$ ,  $T_e$ , et  $\mu_{eo}$  deviennent indépendants de  $T_o$  (cf. Fig. 5.1). Dans cette discussion  $T_e$  est considéré sous sa définition générale puisque  $\alpha_o$  est en général une distribution non maxwellienne.

## 12.8 Diffusion libre des électrons

### 12.8.1 Formules générales

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié l'action d'un champ électrique sur un gaz faiblement ionisé en supposant que le gaz était homogène.

Nous allons maintenant étudier au contraire le cas où le champ électrique est nul mais où la fonction de distribution des vitesses électroniques varie d'un point à un autre. L'équation de Boltzmann relative aux électrons contient maintenant un terme de diffusion et s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + (\vec{\Omega} \times \vec{w}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}} = C_{eo} \quad (12.121)$$

Pour simplifier l'étude nous supposons que la diffusion des électrons se produit dans un gaz de neutres qui est lui-même homogène ; on peut par exemple considérer que les neutres sont comme au paragraphe précédent en équilibre thermique avec les parois du récipient et que leur densité  $n_o$  et leur température  $T_o$  sont des constantes données et indépendantes de la position dans le gaz.

On dit que le phénomène de diffusion des électrons ainsi défini est un phénomène de *diffusion libre*, pour souligner le fait qu'ils ne sont soumis à aucun champ électrique et diffusent sous le simple effet de leur agitation thermique. Nous avons vu dans la section 5.6 que ce phénomène ne peut s'observer que si les densités électroniques et ioniques sont assez faibles pour que les champs de charge d'espace soient négligeables, et qu'au contraire lorsque celles-ci sont assez fortes, le champ de charge d'espace ne peut être nul en général, de sorte que par son intermédiaire la diffusion des électrons est couplée à celle des ions ; c'est ce que nous avons appelé la *diffusion ambipolaire*.

Pour résoudre l'équation de Boltzmann on applique les mêmes méthodes qu'aux paragraphes précédents ; on développe  $f$  en fonctions sphériques suivant la formule (12.20) et on fait les deux hypothèses fondamentales suivantes :

- Les collisions électron-neutre sont décrites par le modèle de Lorentz imparfait (section 12.6).
- L'inhomogénéité de  $f$  est faible de sorte que, dans le développement (12.20),  $\alpha_o$  est le terme principal et les anisotropies sont des petites perturbations d'autant plus faibles que leur ordre  $\ell$  est plus élevé.

Dans ces conditions on obtient, en utilisant les formules de l'appendice A12-2 et en négligeant les anisotropies d'ordre 2 et plus, le système d'équations :

$$\dot{\alpha}_o + \frac{w^2}{3} \nabla \cdot \vec{\alpha}_1 = J_1(\alpha_o) \quad (12.122)$$

$$\vec{\dot{\alpha}}_1 + \nu_1 \vec{\alpha}_1 + \vec{\Omega} \cdot \vec{\alpha}_1 = -\nabla \alpha_o \quad (12.123)$$

On peut résoudre ce système en distinguant deux échelles de temps : sur une échelle de temps courte de l'ordre de  $1/\nu_1$ , l'anisotropie  $\vec{\alpha}_1$  s'ajuste sur la valeur quasi stationnaire de  $\alpha_o$  ; dans ce régime quasi stationnaire on peut dans (12.123) négliger le terme  $\vec{\alpha}_1$  et l'on obtient ainsi :

$$\vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{\nu_1} \overline{\overline{S}}_o \cdot \nabla \alpha_o \quad (12.124)$$

en introduisant le tenseur :

$$\overline{\overline{S}}_o = \begin{bmatrix} \frac{\nu_1^2}{\Omega^2 + \nu_1^2} & \frac{-\Omega \nu_1}{\Omega^2 + \nu_1^2} & 0 \\ \frac{\Omega \nu_1}{\Omega^2 + \nu_1^2} & \frac{\nu_1^2}{\Omega^2 + \nu_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12.125)$$

qui n'est autre que la valeur prise pour  $\omega = 0$  par le tenseur  $\overline{\overline{S}}$  introduit dans le calcul de la conductivité [cf. (12.53)]. En l'absence de champ magnétique on a  $\overline{\overline{S}} = \overline{\overline{\delta}}$  et la formule (12.124) s'écrit simplement :

$$\vec{\alpha}_1 = -\frac{1}{\nu_1} \nabla \alpha_o \quad (12.126)$$

En reportant ces résultats dans (12.26) on obtient l'équation d'évolution de  $\alpha_o$

$$\dot{\alpha}_o - \frac{w^2}{3\nu_1} \nabla \cdot \left[ \overline{\overline{S}}_o \cdot \nabla \alpha_o \right] = J_1(\alpha_o) \quad (12.127)$$

qui fait apparaître deux temps caractéristiques :

- Le temps caractéristique de diffusion  $\tau_D$  obtenu en écrivant  $\nabla \alpha_o$  sous la forme  $\alpha_o/L$ , ce qui donne :

$$\tau_D \approx \frac{3 \langle \nu_1 \rangle L^2}{\langle w \rangle^2} \approx 3 \frac{1}{\langle \nu_1 \rangle} \left( \frac{L}{\langle \lambda \rangle} \right)^2 \quad (12.128)$$

où  $L$  désigne une dimension caractéristique du plasma et  $\langle \lambda \rangle = \langle w \rangle / \langle \nu_1 \rangle$  le libre parcours moyen des électrons moyens. Dans ces formules le signe  $\langle \rangle$  se rapporte par exemple aux électrons ayant la vitesse la plus probable. L'expression de  $\tau_D$  ci-dessus peut d'ailleurs se déduire des règles habituelles sur les mouvements aléatoires :  $\langle \lambda \rangle$  est le pas que fait un électron entre deux collisions,  $1/\langle \nu_1 \rangle$  la durée de ce pas et  $(L/\langle \lambda \rangle)^2$  le nombre de pas nécessaires en mouvement aléatoire pour franchir la distance  $L$ . La théorie de la diffusion ne s'applique que si l'on a

$$\langle \lambda \rangle \ll L$$

d'où il résulte que :

$$\tau_D \gg \frac{1}{\langle \nu_1 \rangle} \quad (12.129)$$

- Le temps caractéristique d'échange d'énergie électron-neutre lié au terme  $J_1(\alpha_o)$ , qui est comme nous l'avons vu dans la section 12.6 :

$$\tau_E \sim \frac{m_o}{m_e} \frac{1}{\langle \nu_1 \rangle} \quad (12.130)$$

Les deux temps caractéristiques  $\tau_D$  et  $\tau_E$  étant tous deux bien plus grands que  $1/\langle \nu_1 \rangle$ , on vérifie bien que l'évolution de  $\alpha_o$  est plus lente que celle de  $\vec{\alpha}_1$  et que la solution quasi stationnaire (12.126) est bien valable.

## 12.8.2 Détermination de $\alpha_o$

Comme pour le calcul de la conductivité électrique il faut donc tout d'abord déterminer la partie isotrope  $\alpha_o$  de la fonction de distribution en résolvant l'équation (12.127). Ce problème est assez compliqué car l'équation déterminant  $\alpha_o$  n'est pas locale. D'un point de vue physique, il était raisonnable dans l'étude de l'action d'un champ électrique de considérer tout au moins localement que celui-ci était une donnée du problème. Au contraire, dans le problème de la diffusion, on doit considérer que les gradients qui apparaissent en un point du fluide sont le résultat des processus de création et de perte du plasma, et en particulier des conditions aux limites imposées aux frontières du plasma. L'équation qui détermine  $\alpha_o$  est maintenant une équation aux dérivées partielles par rapport aux variables  $\vec{r}$ ,  $\vec{w}$ ,  $t$  et sa résolution est un problème avec conditions aux limites, plus difficile que le problème purement local de l'action d'un champ électrique.

Pour commencer la discussion de l'équation déterminant  $\alpha_o$ , on peut remarquer que la diffusion produit un refroidissement du gaz d'électrons ; la raison en est que dans l'ensemble des électrons, ceux de grande énergie diffusent plus vite vers le bord du plasma que ceux de basse énergie ; il en résulte dans le centre du plasma un abaissement de l'énergie moyenne des électrons. On peut démontrer plus clairement ce résultat en appliquant la formule (12.128) non pas aux électrons moyens mais séparément pour chaque groupe d'électrons de vitesse  $w$  en définissant pour ce groupe le temps de diffusion :

$$\tau_D(w) = \frac{3\nu_1(w)}{w^2} L^2 \quad (12.131)$$

La fréquence de collision  $\nu_1(w)$  est soit décroissante, soit constante, soit au pire croissante comme  $w$  (cas des boules de billard) et par conséquent



$\tau_D(w)$  est bien une fonction décroissante de  $w$  (comme nous l'avions affirmé intuitivement).

On peut analyser de façon plus quantitative le refroidissement par diffusion en appliquant à chaque groupe d'électrons de vitesse  $w$  la théorie des modes propres de diffusion développée dans la section 5.4. En supposant pour simplifier qu'il n'y a pas de champ magnétique, la relaxation par diffusion est décrite par l'équation :

$$\dot{\alpha}_o - \frac{w^2}{3\nu_1} \nabla^2 \alpha_o = 0 \tag{12.132}$$

dont la solution pour le jème mode est d'après (5.40) :

$$\alpha_{oj}(w, t) = \alpha_{oj}(w, 0) e^{-(w^2/3\nu_1 \Lambda_j^2)t} \tag{12.133}$$

Si on est parti à l'instant initial d'une maxwellienne de température  $T_e(0)$  on a à l'instant  $t$  :

$$\alpha_{oj}(w, t) \sim e^{-m_e w^2 / 2\kappa T_e(w, t)} \tag{12.134}$$

avec :

$$\frac{m}{2\kappa T_e(w, t)} = \frac{m}{2\kappa T_e(0)} + \frac{t}{3\nu_1(w) \Lambda_j^2} \tag{12.135}$$

En général  $\nu_1(w)$  n'est pas constante et la distribution à l'instant  $t$  n'est plus maxwellienne. Il est clair cependant que pour chaque groupe d'électrons on a une température équivalente  $T_e(w, t) < T_e(0)$  définie par la formule ci-dessus.

De manière générale, le refroidissement par diffusion se combine à l'échange d'énergie par collision électron-neutre [terme  $J_1(\alpha_o)$ ] et éventuellement comme on le verra ci-dessous à l'échauffement par effet Joule et la détermination de  $\alpha_o$  est un problème complexe. On peut toutefois remarquer que  $\alpha_o$  est *a priori* connu dans trois cas particuliers :

- Si les gradients sont faibles,  $\alpha_o$  ne s'écarte que très peu de la distribution d'équilibre avec les molécules ; on a donc :

$$\alpha_o \simeq n_e \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_o} \right)^{3/2} e^{-m_e w^2 / 2\kappa T_o} \tag{12.136}$$

où seul  $n_e$  varie d'un point à un autre. On conçoit intuitivement que le critère pour qu'il en soit ainsi s'obtient en écrivant que dans l'équation (12.127) on a :

$$\tau_E \ll \tau_D \tag{12.137}$$

ce qui s'écrit pour les électrons moyens :

$$\frac{L}{\langle \lambda \rangle} \gg \left( \frac{m_o}{3m_e} \right)^{1/2} \quad (12.138)$$

On voit que le libre parcours moyen des électrons doit être bien plus petit que les dimensions du plasma dans le rapport défini par la condition ci-dessus.

- Il peut exister dans le gaz un *champ électrique*  $E$  qui produit un *échauffement* nettement supérieur au refroidissement par diffusion, de sorte que  $\alpha_o$  est déterminé par ce champ électrique et non par la diffusion. Apparemment cela nous fait sortir du problème de diffusion libre tel que nous l'avons défini. En fait il se peut que  $E$  soit déterminant en ce qui concerne  $\alpha_o$  sans modifier de façon notable les courants de diffusion ; ce pourra être le cas notamment si le champ électrique et les gradients de densité sont orthogonaux. Il y aura alors simultanément dans le gaz un courant de "conduction" parallèle à  $E$  et un courant de diffusion libre parallèle à  $\nabla n_e$ . Cherchons donc un critère pour que l'échauffement électrique soit très supérieur au refroidissement par diffusion. En supposant pour simplifier que le champ magnétique est nul on a d'après (12.78) et (12.127) :

$$\frac{1}{6w^2} \frac{\partial}{\partial w} \left[ w^2 \frac{\partial \alpha_o}{\partial w} \frac{\nu_1 \gamma_o^2}{\omega^2 + \nu_1^2} \right] \gg -\frac{w^2}{3\nu_1} \nabla^2 \alpha_o \quad (12.139)$$

Pour obtenir une relation d'ordre de grandeur, supposons  $\omega = 0$ , et  $\alpha_o$  maxwellienne. En appliquant alors la relation ci-dessus aux électrons moyens, on obtient :

$$eEL \gg \kappa T_e \quad (12.140)$$

Cette condition est habituellement remplie dans les colonnes positives en régime de Schottky (colonnes contrôlées par la diffusion).

- On peut se trouver dans la situation des *plasmas intermédiaires* (cf. section 12.9) définie par la condition :

$$\frac{m_e}{m_o} \nu_1 \ll \nu_{ee} \ll \nu_1$$

où  $\nu_{ee}$  est la fréquence de collision électron-électron. Dans ces conditions les interactions  $e-e$  forcent la distribution à être maxwellienne, soit :

$$\alpha_o = n_e \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{3/2} e^{-m_e w^2 / 2\kappa T_e} \quad (12.141)$$

Dans cette distribution  $n_e$  et  $T_e$  sont *a priori* des fonctions de la position dans le plasma. La détermination de  $\alpha_o$  se réduit donc à celle de  $T_e$  ; elle peut faire intervenir, comme dans le cas général, le refroidissement par diffusion, l'échange d'énergie électron-neutre et éventuellement le chauffage par un champ électrique. Cette situation est discutée dans [302, pp. 105-108] et dans le problème P12-12.

### 12.8.3 Flux et coefficients de diffusion

Si l'on suppose  $\alpha_o$  connu, la formule (12.124) donne l'anisotropie  $\vec{\alpha}_1$ . On en déduit immédiatement par la formule (12.203) de l'appendice A12-1 la vitesse moyenne des électrons et le flux de diffusion :

$$n_e \vec{v}_e = -\frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{\overline{\overline{S}_o}}{\nu_1} \cdot \nabla \alpha_o w^4 dw \quad (12.142)$$

Le terme  $\nabla \alpha_o$  combine deux effets physiques simples : d'une part un terme en  $\nabla n_e$  représentant les variations spatiales de la densité électronique et d'autre part une variation éventuelle, d'un point à l'autre du plasma, de la forme de  $\alpha_o$  (effet que l'on peut dans les cas simples représenter par un terme en  $\nabla T_e$ ). Pour séparer ces deux effets on peut introduire la fonction  $\widehat{\alpha}_o$  normalisée à l'unité en posant :

$$\alpha_o = n_e \widehat{\alpha}_o \quad (12.143)$$

d'où l'on déduit :

$$\nabla \alpha_o = \widehat{\alpha}_o \nabla n_e + n_e \nabla \widehat{\alpha}_o \quad (12.144)$$

et en portant cette expression dans (12.142) :

$$n_e \vec{v}_e = -\overline{\overline{D}}_e \cdot \nabla n_e + n_e \vec{v}_T \quad (12.145)$$

avec :

$$\overline{\overline{D}}_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{w^2 \overline{\overline{S}_o}}{\nu_1} \widehat{\alpha}_o 4\pi w^2 dw \quad (12.146)$$

soit finalement :

$$\overline{\overline{D}}_e = \frac{1}{3} \left\langle \frac{w^2 \overline{\overline{S}_o}}{\nu_1} \right\rangle \quad (12.147)$$

où le signe  $\langle \rangle$  désigne une valeur moyenne prise sur la fonction de distribution  $\widehat{\alpha}_o$  des électrons, et :

$$\vec{v}_T = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{w^2 \overline{\overline{S}_o}}{\nu_1} \cdot \nabla \widehat{\alpha}_o 4\pi w^2 dw \quad (12.148)$$

$\overline{D_e}$  est le coefficient de diffusion des électrons (c'est un tenseur en présence d'un champ magnétique) et  $n_e \vec{v}_T$  le flux de diffusion thermique des électrons.

Si le champ magnétique est nul, ces formules se simplifient : le coefficient de diffusion devient scalaire, soit :

$$D_e = \frac{1}{3} \left\langle \frac{w^2}{\nu_1} \right\rangle \quad (12.149)$$

ce qu'on peut aussi écrire :

$$D_e = \frac{\kappa T_e}{m_e \nu_1''} \quad (12.150)$$

en introduisant (cf. problème P12-10) une certaine valeur moyenne de la fréquence de collision  $\nu_1(w)$  microscopique définie par la formule :

$$\frac{1}{\nu_1''} = \frac{m_e}{3\kappa T_e} \left\langle \frac{w^2}{\nu_1} \right\rangle \quad (12.151)$$

On voit que cette fréquence "efficace" n'est pas la même que la fréquence  $\nu_1'$  introduite dans la formule de la mobilité [cf. (12.118)]. La vitesse  $\vec{v}_T$  se simplifie également ;  $\overline{S_o}$  étant égal à l'unité et  $w$  comme  $\nu_1$  n'étant pas fonction de la position, on a :

$$\vec{v}_T = -\frac{1}{3} \nabla \left\langle \frac{w^2}{\nu_1} \right\rangle = -\nabla \left( \frac{\kappa T_e}{m_e \nu_1''} \right) \quad (12.152)$$

Si le champ magnétique n'est pas nul mais si  $\nu_1$  est une constante, les formules générales se simplifient également parce qu'on peut sortir  $\overline{S_o}$  et  $\nu_1$  des intégrales ; on a alors :

$$\frac{1}{\nu_1''} = \frac{1}{\nu_1} \quad (12.153)$$

et donc :

$$\overline{D_e} = \frac{\kappa T_e}{m_e \nu_1} \overline{S_o} \quad (12.154)$$

avec :

$$\vec{v}_T = -\frac{\overline{S_o}}{\nu_1} \cdot \nabla \left( \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) \quad (12.155)$$

### 12.8.4 Flux d'énergie et conductivité thermique

Le vecteur flux d'énergie cinétique des électrons est défini de façon générale par la formule :

$$\vec{S} = \int \frac{1}{2} m w^2 \vec{w} f \underline{dw} \quad (12.156)$$

Il ne dépend que de l'anisotropie  $\vec{\alpha}_1$  ; son calcul est analogue à celui de  $\vec{v}$  : il suffit en effet de multiplier l'intégrand donnant  $\vec{v}$  par  $n_e \frac{1}{2} m w^2$  pour obtenir celui de  $\vec{S}$  ; on a donc d'après (12.142) :

$$\vec{S} = -\frac{m}{6} \int_0^\infty \frac{w^4}{\nu_1} \overline{\overline{S_o}} \cdot \nabla \alpha_o 4\pi w^2 dw \quad (12.157)$$

dans lequel on peut comme pour le flux de particules faire apparaître un terme en  $\nabla n_e$  et un terme en  $\nabla \hat{\alpha}_o$ , soit :

$$\vec{S} = -\overline{\overline{N}} \cdot \nabla n_e + n_e \vec{L} \quad (12.158)$$

avec :

$$\overline{\overline{N}} = \frac{m}{6} \left\langle \frac{w^4}{\nu_1} \overline{\overline{S_o}} \right\rangle \quad (12.159)$$

et :

$$\vec{L} = -\frac{m}{6} \int_0^\infty \frac{w^4}{\nu_1} \overline{\overline{S_o}} \cdot \nabla \hat{\alpha}_o 4\pi w^2 dw \quad (12.160)$$

Ces formules se simplifient comme celles du paragraphe précédent lorsque le champ magnétique est nul ( $\overline{\overline{S_o}} = \overline{\overline{\delta}}$ ) et/ou si  $\nu_1$  est constante ( $\overline{\overline{S_o}}$  et  $\nu_1$  sortent des intégrales).

Mais d'autre part il est traditionnel de séparer dans  $\vec{S}$  les flux convectifs et le flux de chaleur  $\vec{q}$  (cf. section 9.2) en posant :

$$\vec{S} = \vec{v} \cdot (n \bar{u} \overline{\overline{\delta}} + \overline{\overline{\Psi}}) + \vec{q} \quad (12.161)$$

où  $\bar{u}$  est l'énergie cinétique moyenne des électrons :

$$\bar{u} = \frac{1}{2} m v_e^2 + \frac{3}{2} \kappa T_e \quad (12.162)$$

et  $\overline{\overline{\Psi}}$  le tenseur de pression cinétique [cf. (9.19)]. Dans le cas étudié ici d'un gaz d'électrons presque isotrope ( $|\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w}| \ll \alpha_o$ ) on a :

$$\bar{u} \simeq \frac{3}{2} \kappa T_e \quad (12.163)$$

$$\overline{\Psi} \simeq n_e \kappa T_e \bar{\delta} \quad (12.164)$$

de sorte que la relation entre  $\vec{S}$  et  $\vec{q}$  s'écrit :

$$\vec{q} = \vec{S} - \frac{5}{2} n_e \kappa T_e \vec{v}_e \quad (12.165)$$

En utilisant les expressions (12.158) de  $\vec{S}$  et (12.145) de  $n_e \vec{v}_e$  on peut également séparer dans  $\vec{q}$  les termes en  $\nabla n_e$  et  $\nabla \hat{\alpha}_o$ , soit :

$$\vec{q} = -\overline{\overline{\mathcal{K}}}_n \cdot \nabla n_e - \overline{\overline{\mathcal{K}}}_T \cdot \nabla T_e \quad (12.166)$$

où :

$$\overline{\overline{\mathcal{K}}}_n = \overline{\overline{N}} - \frac{5}{2} \kappa T_e \overline{\overline{D}}_e \quad (12.167)$$

et :

$$n_e \left( \vec{L} - \frac{5}{2} \kappa T_e \vec{v}_T \right) = -\overline{\overline{\mathcal{K}}}_T \cdot \nabla T_e \quad (12.168)$$

$\overline{\overline{\mathcal{K}}}_T$  est la conductivité thermique du gaz d'électrons,  $\overline{\overline{\mathcal{K}}}_n$  un coefficient de diffusion de la chaleur. Ces deux coefficients sont en général tensoriels à cause de l'anisotropie introduite par le champ magnétique.

Pour terminer, on peut à titre d'exemple d'application des formules générales examiner le cas facilement calculable où l'on a simultanément  $\vec{B} = 0$ ,  $\nu_1 = \text{Cte}$  et  $\hat{\alpha}_o$  maxwellienne. On obtient alors :

$$D_e = \frac{\kappa T_e}{m_e \nu_1} \quad (12.169)$$

$$\vec{v}_T = -\frac{1}{\nu_1} \nabla (\kappa T_e / m_e) \quad (12.170)$$

$$N = \frac{m_e}{6\nu_e} \langle w^4 \rangle = \frac{5m_e}{2\nu_1} \left( \frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^2 \quad (12.171)$$

$$\vec{L} = -\frac{m_e}{6\nu_1} \nabla \langle w^4 \rangle = -\frac{5m_e}{2\nu_1} \nabla \left( \frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^2 = -5 \frac{\kappa T_e}{\nu_1} \nabla \left( \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) \quad (12.172)$$

et finalement :

$$\mathcal{K}_n = 0 \quad (12.173)$$

$$\mathcal{K}_T = \frac{5}{2} \frac{\kappa^2}{m_e} \frac{n_e T_e}{\nu_1} \quad (12.174)$$

On voit que la conductivité thermique est proportionnelle à la pression électronique et inversement proportionnelle à la fréquence de collision.

Le coefficient  $\mathcal{K}_n$  s'est annulé : dans le cas particulier étudié ici le terme en  $\nabla n_e$  qui figure dans le flux d'énergie  $\vec{S}$  est donc entièrement dû aux flux convectifs ; le flux de chaleur  $\vec{q}$  n'y apporte aucune contribution. Pour le terme en  $\nabla T_e$ , au contraire,  $\vec{q}$  apporte dans  $\vec{S}$  une contribution juste égale à celle des flux convectifs. Il est évident que ces règles ne sont plus valables dans le cas où  $\nu_1$  est une fonction de  $w$  ; on peut

prévoir cependant que dans la formule (12.166) donnant  $\vec{q}$  le terme en  $\nabla n_e$  sera en général moins important que le terme traditionnel  $-\mathcal{K}_T \nabla T_e$ .

On peut enfin signaler que certains auteurs considèrent que la conductivité thermique doit être définie dans une situation où la pression  $n_e \kappa T_e$  est constante, de sorte que les deux gradients sont reliés par la relation :

$$\frac{\nabla n_e}{n_e} = -\frac{\nabla T_e}{T_e} \tag{12.175}$$

Cela ne change rien dans le cas particulier qui vient d'être étudié. Mais dans le cas général cela conduit à remplacer la formule (12.166) par :

$$\vec{q} = -\overline{\overline{\mathcal{K}}} \cdot \nabla T_e \tag{12.176}$$

avec :

$$\overline{\overline{\mathcal{K}}} = \overline{\overline{\mathcal{K}_T}} - \frac{n_e}{T_e} \overline{\overline{\mathcal{K}_n}} \tag{12.177}$$

## 12.9 Plasmas intermédiaires

Dans cette section nous étudions la théorie cinétique d'une famille de plasmas moyennement ionisés que l'on peut appeler les plasmas "intermédiaires". Ils sont caractérisés par le fait que les interactions entre électrons sont assez fortes pour établir entre les électrons un équilibre thermique correspondant à une température  $T_e$ , cependant que la valeur et l'évolution de celle-ci sont déterminées par les interactions électron-neutre.

### 12.9.1 Définition des plasmas "intermédiaires"

#### a) Notion de distribution maxwellienne imposée

Nous avons vu que le modèle de Lorentz qui sert de base à tout ce chapitre s'appuie sur l'hypothèse fondamentale que les interactions entre électrons sont négligeables par rapport aux interactions électron-molécule, ce qu'on peut écrire :

$$\nu_{ee}, \nu_{ei} \ll \nu_1 \tag{12.178}$$

où  $\nu_{ee}$  et  $\nu_1$  est sont les fréquences de collision  $e-e$  et  $e-o$  ; nous verrons au chapitre 13 (cf. tableau 13.2) que  $\nu_{ee}$  et  $\nu_{ei}$  sont du même ordre de grandeur.

Mais d'autre part, la discussion du paragraphe 12.6.2 a montré l'importance des fréquences de relaxation de  $T_e$ , qui sont de l'ordre de grandeur de  $(m_e/m_o)\nu_1$ . On peut donc classer les plasmas en trois familles par ordre de degré d'ionisation croissant :

- Plasmas faiblement ionisés

$$\nu_{ee}, \nu_{ei} \ll (m_e/m_o)\nu_1 \ll \nu_1 \quad (12.179)$$

- Plasmas intermédiaires

$$(m_e/m_o)\nu_1 \ll \nu_{ee}, \nu_{ei} \ll \nu_1 \quad (12.180)$$

- Plasmas fortement ionisés

$$(m_e/m_o)\nu_1 \ll \nu_1 \ll \nu_{ee}, \nu_{ei} \quad (12.181)$$

Les plasmas faiblement ionisés ont été longuement étudiés dans tout ce chapitre ; les plasmas fortement ionisés (collisionnels) le seront dans le chapitre 13. Reste la famille intermédiaire que nous allons étudier maintenant.

La condition  $\nu_{ee}, \nu_{ei} \ll \nu_1$  exprime le fait que la relaxation des anisotropies est gouvernée par les collisions électron-neutre. La condition  $\nu_{ee}, \nu_{ei} \gg (m_e/m_o)\nu_1$  exprime au contraire le fait que dans la relaxation de la partie isotrope les collisions  $e-e$  jouent un rôle dominant : elles tendent à établir entre les électrons un équilibre thermique, c'est-à-dire à leur imposer une distribution maxwellienne. Nous étudierons au chapitre 13 cette maxwellianisation des électrons par interaction  $e-e$  et montrerons qu'en l'absence de toute autre action elle se produit en un temps de l'ordre de  $1/\nu_{ee}$ .

On conçoit donc que dans les plasmas intermédiaires obéissant à (12.178) la distribution des vitesses électroniques est en général une distribution maxwellienne "imposée" par les interactions  $e-e$ . Il est évident toutefois que les interactions  $e-e$  ne font perdre, ni gagner aucune énergie aux électrons, de sorte que la température électronique  $T_e$  et son évolution seront déterminées par les interactions électron-neutre (effet Joule et refroidissement par collisions). Il est évident d'autre part que, dans les cas des champs de fréquence  $\omega \gg \nu_{ee}, \nu_{ei}$  la distribution électronique comportera des petits termes non maxwellianisés.

## b) Domaine d'existence des plasmas intermédiaires

Pour évaluer de façon pratique l'importance du domaine des plasmas intermédiaires, on peut tracer dans un diagramme de coordonnées  $n_e/n_o, T_e$  les deux courbes :

$$\overline{\nu_{ei}} = \overline{\nu_1} \quad (12.182)$$

$$\overline{\nu_{ei}} = \frac{m_e}{m_o} \overline{\nu_1} \quad (12.183)$$



où  $\overline{\sigma_{eo}}$  est la section efficace de transfert de quantité de mouvement  $e-o$  calculée pour  $w_e = (2kT_e/m_e)^{1/2}$ . Si maintenant on remplace  $\overline{\sigma_{ei}}$  par la valeur (3.82), les deux équations ci-dessus deviennent :

$$\frac{n_e}{n_o} = \frac{\overline{\sigma_{eo}}}{\pi r_o^2} \frac{1}{\ln \Lambda} \tag{12.184}$$

$$\frac{n_e}{n_o} = \frac{m_e \overline{\sigma_{eo}}}{m_o \pi r_o^2} \frac{1}{\ln \Lambda} \tag{12.185}$$

où  $r_o$  est la longueur de Landau. Les figures 12.3 et 12.4 représentent un tel diagramme dans les cas particuliers de l'hélium et de l'argon. On peut

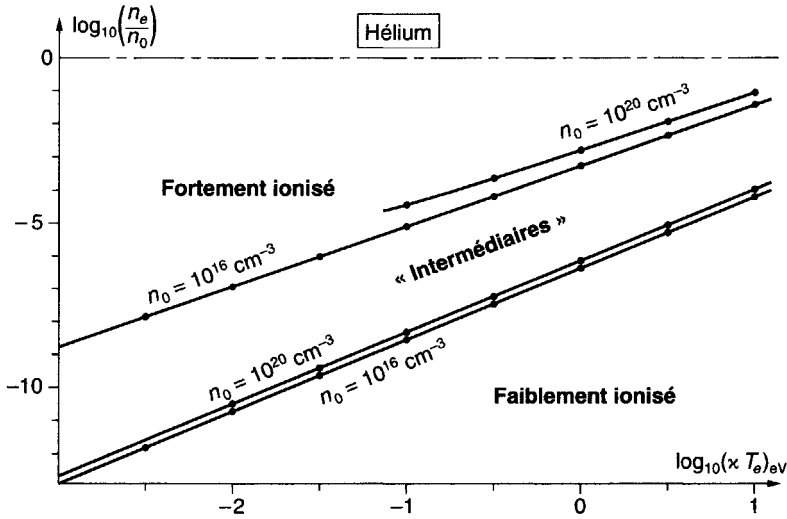


Figure 12.3 : Les trois familles de plasmas dans le cas de l'hélium.

en tirer les conclusions suivantes. Les valeurs critiques de  $n_e/n_o$  dépendent essentiellement de  $T_e$  et relativement peu de  $n_o$  [cela tient au fait que les valeurs absolues des densités n'interviennent dans (12.184) et (12.185) qu'à travers le terme  $\ln \Lambda$ ]. Aux basses valeurs de  $T_e$  les degrés d'ionisation critiques deviennent très faibles. Par exemple dans l'hélium, à 20 K pour une température électronique  $\kappa T_e = 1.7 \times 10^{-3}$  eV, le domaine des plasmas intermédiaires correspond à des degrés d'ionisation compris entre  $10^{-12}$  et  $10^{-8}$ . Autrement dit, aux très basses valeurs de  $T_e$  les interactions coulombiennes deviennent dominantes même pour des valeurs extrêmement faibles de  $n_e/n_o$ . Cela est évidemment dû au fait que la section efficace de Rutherford tend vers l'infini quand l'énergie relative tend vers zéro. Pour  $T_e = 273$

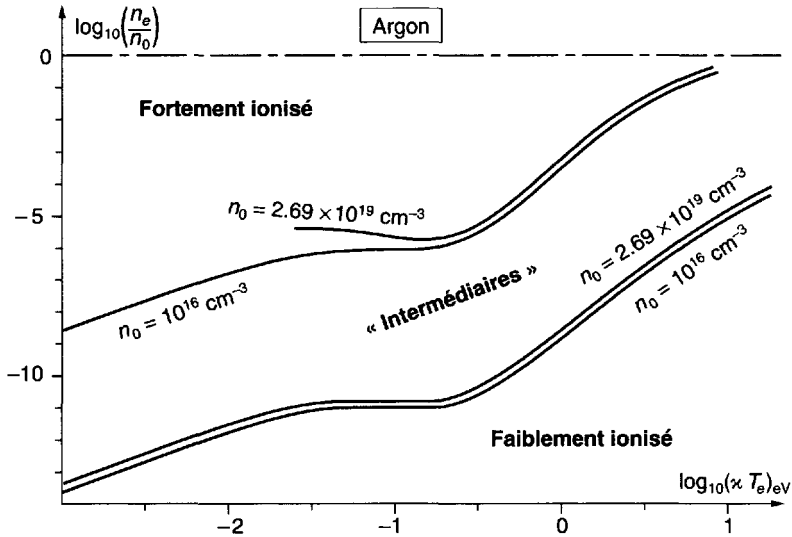


Figure 12.4 : Les trois familles de plasmas dans le cas de l'argon.

K, les degrés d'ionisations critiques restent encore assez bas ; dans l'hélium par exemple le domaine des plasmas intermédiaires s'étend sur des valeurs de  $n_e/n_0$  comprises entre  $5 \times 10^{-10}$  et  $2 \times 10^{-6}$ .

En revanche lorsque  $T_e$  devient élevé, ce qui est facilement le cas en présence d'un champ électrique, les valeurs critiques de  $n_e/n_0$  deviennent relativement élevées. Par exemple, dans l'hélium, pour  $\kappa T_e = 5 \text{ eV}$ , le domaine des plasmas intermédiaires s'étend sur les valeurs de  $n_e/n_0$  comprises entre  $10^{-5}$  et  $10^{-1}$ .

Dans le cas de l'argon (comme d'ailleurs dans Xe et Kr) les degrés d'ionisation critiques sont anormalement bas à cause de l'effet Ramsauer.

Rappelons enfin que toute cette discussion n'est valable que si le refroidissement des électrons se fait par des collisions élastiques électron-molécule. Si des collisions inélastiques se produisent elles peuvent jouer un rôle très important dans le bilan d'énergie électronique et raccourcir les temps de relaxation de la partie isotrope de la distribution des vitesses électroniques. On peut montrer par exemple [226] qu'une petite proportion d'un gaz diatomique ajoutée comme impureté dans un gaz rare peut jouer un rôle important à cause des collisions inélastiques d'excitation des états de vibration des molécules. En général les collisions inélastiques ne modifient que la queue vers les hautes énergies de la fonction de distribution électronique, le corps de celle-ci restant souvent maxwellien du fait des interactions  $e-e$ .

### 12.9.2 Théorie cinétique des plasmas intermédiaires

Tous les problèmes traités jusqu'à maintenant dans ce chapitre se simplifient considérablement dans le cas des plasmas intermédiaires parce qu'on peut supposer *a priori* que la partie isotrope de  $f_e$  est une maxwellienne :

$$\alpha_o = n_e \left( \frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{3/2} \exp(-m_e w_e^2 / 2\kappa T_e) \quad (12.186)$$

Le problème de déterminer  $f_e$  se réduit à calculer  $T_e$ , et cela se fait assez simplement à partir de l'équation de bilan énergétique des électrons.

#### a) Mobilité électronique (et conductivité)

Le calcul de la mobilité électronique se déduit de l'équation générale (12.56). A partir de (12.186) on a maintenant (en omettant les indices  $e$ ) :

$$\frac{d\alpha_o}{dw} = -\frac{mw}{\kappa T} \alpha_o \quad (12.187)$$

L'anisotropie d'ordre 1 est donc d'après (12.52) :

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{m}{\kappa T} \alpha_o \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \cdot \bar{\gamma} \quad (12.188)$$

et l'échauffement par effet Joule est d'après (12.78) :

$$\left( \frac{dU_{Ke}}{dt} \right)_E = \frac{4\pi m^2}{3 \kappa T} \int_0^\infty w^4 \alpha_o \left( \bar{\gamma} \cdot \frac{\bar{S}}{-i\omega + \nu_1} \cdot \bar{\gamma} \right) dw \quad (12.189)$$

où l'on a posé :

$$U_{Ke} = \int_0^\infty \frac{1}{2} m w^2 \alpha_o 4\pi w^2 dw \quad (12.190)$$

Le refroidissement par les collisions  $e-o$  s'obtient d'autre part à partir de la formule (12.83) de Chapman et Cowling, soit :

$$\left( \frac{dU_{Ke}}{dt} \right)_{e-o} = -\frac{4\pi m^2}{m_o} \left( 1 - \frac{T_o}{T_e} \right) \int_0^\infty \nu_1 w^4 \alpha_o dw \quad (12.191)$$

On trouve donc le résultat physiquement satisfaisant que ce terme d'échange d'énergie entre les électrons et les neutres est proportionnel à  $T_e - T_o$ .

La température électronique s'obtient finalement en écrivant le bilan d'énergie des électrons :

$$\left(\frac{dU_{Ke}}{dt}\right)_E + \left(\frac{dU_{Ke}}{dt}\right)_{e-o} = 0 \quad (12.192)$$

Ce calcul est développé dans le problème P12-11 dans le cas simple où l'on a  $\omega = \Omega_e = 0$ .

On retrouve aussi pour les plasmas intermédiaires les règles de similitude déjà établies pour les gaz faiblement ionisés :

- $E/n_o$  est une fonction de  $T_e$  et  $T_o$ .
- $\mu_e n_o$  est une fonction de  $T_e$  (ou, d'après la règle précédente, de  $E/n_o$  et  $T_o$ ).
- Quand  $T_e \gg T_o$ ,  $T_e$  et  $\mu_e n_o$  ne sont plus fonction que de  $E/n_o$ .

## b) Diffusion libre et conductivité thermique

Les équations générales de la section 12.8 se simplifient aussi dans les plasmas intermédiaires. Le cas particulier  $\nu_1 = \text{Cte}$  est étudié dans [302, pp. 105-108] et dans le problème P12-12.

# 12.10 Appendices

## A12-1 Anisotropies et hydrodynamique

### a) Définition des anisotropies microscopiques

Il est commode, pour étudier les propriétés d'une fonction de distribution simple, de la développer localement en une série de fonctions sphériques de l'espace des vitesses. Pour cela, on représente un vecteur vitesse  $\vec{w}$  par son module  $w$  et ses deux angles polaires  $\theta$  et  $\varphi$  (Fig. 12.5). Nous utilisons les fonctions sphériques avec les notations suivantes<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} C_{\ell m} &= v^\ell P_{\ell m}(\cos \theta) \cos m\varphi \\ S_{\ell m} &= v^\ell P_{\ell m}(\cos \theta) \sin m\varphi \\ P_{\ell m}(\cos \theta) &= (\sin \theta)^m \frac{d^m P_\ell(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m} \end{aligned} \quad (12.193)$$

et nous développons une fonction de distribution simple quelconque selon la formule :

$$f(\vec{r}, \vec{w}, t) = \alpha_o(r, w, t) + \sum_{\ell, m} [\alpha_{\ell m}(r, w, t) C_{\ell m} + \beta_{\ell m}(r, w, t) S_{\ell m}] \quad (12.194)$$

8. De nombreux auteurs [267], [268] introduisent un facteur  $(-1)^m$  dans la formule de définition de  $P_{\ell m}$ . En suivant [269, p. 110], nous préférons ne pas utiliser ce facteur. Nous sommes cependant cohérents avec [268, p. 332] qui utilise la notation  $P_{\ell m} = (-1)^m P_\ell^m$ , où  $P_\ell^m$  inclut le facteur  $(-1)^m$  et en conséquence  $P_{\ell m}$  ne l'inclut pas.

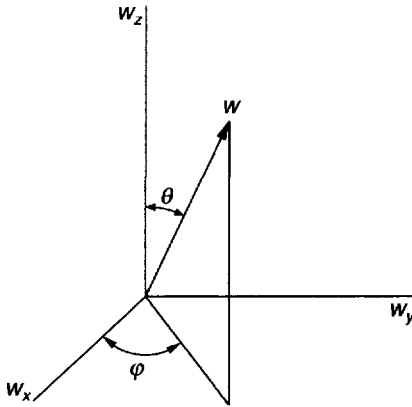


Figure 12.5 : Coordonnées sphériques dans l'espace des vitesses.

Les coefficients  $\alpha_o$ ,  $\alpha_{\ell m}$ ,  $\beta_{\ell m}$  ne dépendent pas de l'orientation de  $\vec{w}$  mais seulement de son module ; c'est ce que nous appelons des fonctions isotropes. Dans le développement ci-dessus,  $\alpha_o$  représente la partie isotrope de la fonction de distribution, et la somme qui suit, ses diverses anisotropies. Dans cette somme  $\ell$  varie de 1 à  $\infty$ , et  $m$  de 0 à  $\ell$ .

Les anisotropies sont d'autant plus compliquées que les indices  $\ell$  et  $m$  sont plus élevés ; le tableau 12.1 rappelle les expressions des premières d'entre elles. Remarquons que tous les  $S_{\ell o}$  sont nuls.

	Coordonnées sphériques	Coordonnées cartésiennes
$C_{00}$	1	1
$C_{10}$	$w \cos \theta$	$w_z$
$C_{11}$	$w \sin \theta \cos \varphi$	$w_x$
$S_{11}$	$w \sin \theta \sin \varphi$	$w_y$
$C_{20}$	$w^2(3 \cos^2 \theta - 1)/2$	$(3w_z^2 - w^2)/2$
$C_{21}$	$3w^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi$	$3w_z w_x$
$S_{21}$	$3w^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi$	$3w_z w_y$
$C_{22}$	$3w^2 \sin^2 \theta \cos(2\varphi)$	$3(w_x^2 - w_y^2)$
$S_{22}$	$3w^2 \sin^2 \theta \sin(2\varphi)$	$6w_x w_y$

Tableau 12.1 : Expression des fonctions sphériques d'ordre  $\ell = 0, 1, 2$ .

Les fonctions sphériques sont orthogonales sur toute sphère de l'espace des vitesses de rayon  $w$  ; autrement dit, l'intégrale d'un produit  $C_{\ell m} S_{\ell' m'}$  sur une telle sphère est toujours nulle ; il en est de même pour toutes les intégrales des produits  $C_{\ell m} C_{\ell' m'}$  et

$S_{\ell m} S_{\ell' m'}$ , sauf pour  $\ell = \ell'$ ,  $m = m'$ . Dans ce dernier cas, on a les règles de calcul suivantes (formules de normalisation) :

$$\int (C_{\ell m})^2 dS = \int (S_{\ell m})^2 dS = w^{2(\ell+1)} \frac{2\pi(\ell+m)!}{(2\ell+1)(\ell-m)!} \quad (12.195)$$

pour  $m \neq 0$ , et :

$$\int (C_{\ell 0})^2 dS = w^{2(\ell+1)} \frac{4\pi}{2\ell+1} \quad (12.196)$$

pour  $m = 0$ .

## b) Densité et vitesse de fluide

La suite des coefficients  $\alpha_o$ ,  $\alpha_{\ell m}$ ,  $\beta_{\ell m}$  constitue une description de la fonction  $f$  qui est d'ailleurs d'autant plus fine qu'on la pousse plus loin. Or, les moments macroscopiques  $n$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{\Psi}$ ,  $\vec{Q}$ , etc. constituent une autre suite du même genre mais introduite pour des raisons plus physiques. Il est intéressant de calculer ces moments en fonction des anisotropies ; en portant dans leurs relations de définition le développement (12.194) on trouve que chaque moment ne fait intervenir que certains ordres d'anisotropie : ceci est dû aux propriétés d'orthogonalité des fonctions sphériques d'indices  $l$  différents.

**$\alpha$ ) Densité**  $n$  ne fait intervenir que la partie isotrope de  $f$  ; les anisotropies n'y contribuent pas à cause de l'orthogonalité des fonctions sphériques de  $\ell$  différents. On a donc :

$$n = \int \alpha_o \underline{dw} = 4\pi \int_0^\infty \alpha_o w^2 dw \quad (12.197)$$

Il en est de même pour le calcul de la valeur moyenne d'une fonction isotrope quelconque ; par exemple l'énergie cinétique moyenne  $\bar{u}$  des particules s'écrit :

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \int \frac{1}{2} m w^2 \alpha_o 4\pi w^2 dw \quad (12.198)$$

**$\beta$ ) Vitesse moyenne** Pour calculer  $\vec{w}$  on remarque tout d'abord que le vecteur  $\vec{w}$  s'exprime en fonction des seules fonctions sphériques d'ordre 1 :

$$\vec{w} = C_{11} \vec{e}_x + S_{11} \vec{e}_y + C_{10} \vec{e}_z \quad (12.199)$$

Si on porte cette expression ainsi que le développement (12.194) dans la relation de définition de  $\vec{w}$ , on voit que seules les anisotropies d'ordre  $\ell = 1$  donnent une contribution à  $\vec{w}$  :

$$\vec{v} = \frac{1}{n} \int (C_{11} \vec{e}_x + S_{11} \vec{e}_y + C_{10} \vec{e}_z) (\alpha_{11} C_{11} + \beta_{11} S_{11} + \alpha_{10} C_{10}) dw \quad (12.200)$$

A cause de l'orthogonalité des fonctions d'indices  $m$  différents cela se réduit à :

$$\vec{v} = \frac{1}{n} \left[ \vec{e}_x \int \alpha_{11} C_{11}^2 \underline{dw} + \vec{e}_y \int \beta_{11} S_{11}^2 \underline{dw} + \vec{e}_z \int \alpha_{10} C_{10}^2 \underline{dw} \right] \quad (12.201)$$

Pour effectuer les intégrations on pose

$$\underline{dw} = dw dS$$

où  $dS$  est un élément de surface sur la sphère de rayon  $w$ . On vérifie alors, soit par application de (12.195) et (12.196), soit par raison de symétrie, que l'on a :

$$\int (C_{11})^2 ds = \int (S_{11})^2 dS = \int (C_{10})^2 dS = 4\pi w^4 / 3 \quad (12.202)$$

En utilisant ces formules on effectue dans (12.201) l'intégration sur la sphère de rayon  $w$  et on obtient finalement :

$$\vec{v} = \frac{4\pi}{3n} \int_0^\infty \vec{\alpha}_1 w^4 dw \quad (12.203)$$

où  $\vec{\alpha}_1$  est le vecteur regroupant les trois coefficients d'anisotropie d'ordre 1 :

$$\vec{\alpha}_1 = \alpha_{11} \vec{e}_x + \beta_{11} \vec{e}_y + \alpha_{10} \vec{e}_z$$

où  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  sont les vecteurs unitaires portés par les axes.

### c) Tenseur de pression cinétique

Rappelons tout d'abord que  $\overline{\overline{\Psi}}$  peut s'écrire sous la forme :

$$\overline{\overline{\Psi}} = \overline{\overline{T}} - nm \vec{v} \vec{v} \quad (12.204)$$

où

$$\overline{\overline{T}} = m \int \vec{w} \vec{w} f d\vec{w} \quad (12.205)$$

est le tenseur flux de quantité de mouvement et  $nm \vec{w} \vec{w}$  le flux "convectif" de quantité de mouvement. Le calcul de  $\overline{\overline{T}}$  à partir des anisotropies se fait à partir des formules du tableau 12.1 en utilisant comme pour  $\vec{w}$  les propriétés d'orthogonalité des fonctions sphériques. On obtient alors pour  $\overline{\overline{\Psi}}$  l'expression suivante :

$$\overline{\overline{\Psi}} = \overline{\overline{\Psi}}_0 + \overline{\overline{\Psi}}_1 + \overline{\overline{\Psi}}_2 \quad (12.206)$$

avec :

$$\overline{\overline{\Psi}}_0 = \frac{2}{3} n \bar{u} \bar{\delta} = n(\kappa T + \frac{1}{3} m v^2) \bar{\delta} \quad (12.207)$$

$$\overline{\overline{\Psi}}_1 = -nm \vec{v} \vec{v} \quad (12.208)$$

$$\overline{\overline{\Psi}}_2 = \frac{4\pi}{15} m \int_0^\infty \begin{bmatrix} -\alpha_{20} + 6\alpha_{22} & 6\beta_{22} & 3\alpha_{21} \\ 6\beta_{22} & -\alpha_{20} + 6\alpha_{22} & 3\beta_{21} \\ 3\alpha_{21} & 3\beta_{21} & 2\alpha_{20} \end{bmatrix} w^6 dw \quad (12.209)$$

On voit que  $\overline{\overline{\Psi}}$  est relié aux anisotropies d'ordre  $\ell = 0, 1, 2$ . En combinant les deux équations (12.207) et (12.208), et en remarquant que la trace de  $\overline{\overline{\Psi}}_2$  est nulle on vérifie que l'on a :

$$n\kappa T = \frac{1}{3} Tr \overline{\overline{\Psi}} \quad (12.210)$$

conformément à la définition générale (cf. chapitre 9) de la température cinétique d'un gaz.

### d) Vecteur flux de chaleur

Rappelons tout d'abord que  $\vec{q}$  peut s'écrire [cf. (12.161)] sous la forme :

$$\vec{q} = \frac{1}{2} m \int \vec{w} w^2 f d\vec{w} - \vec{v} \cdot (n\bar{u} \bar{\delta} + \bar{\Psi}) \quad (12.211)$$

où

$$\frac{1}{2} m \int \vec{w} w^2 f d\vec{w} = \vec{S} \quad (12.212)$$

est le vecteur flux total d'énergie et

$$\vec{v} \cdot (n\bar{u} \bar{\delta} + \bar{\Psi}) \quad (12.213)$$

le flux "convectif" d'énergie. Le calcul de  $\vec{S}$  est tout à fait semblable à celui de  $\vec{w}$  et l'on obtient finalement :

$$\vec{q} = \frac{2\pi}{3} m \int_0^\infty \bar{\alpha}_1 w^6 dw - \vec{v} \cdot (n\bar{u} \bar{\delta} + \bar{\Psi}) \quad (12.214)$$

On voit que  $\vec{q}$  est comme  $\bar{\Psi}$  relié aux anisotropies d'ordre  $\ell = 0, 1, 2$ .

### e) Distribution isotrope

Dans ce cas  $f$  se réduit à  $\alpha_0$  et l'on a :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= 0 \\ \bar{\Psi} &= n\kappa T \bar{\delta} \\ \vec{q} &= 0 \end{aligned}$$

### f) Distribution de révolution autour d'un axe

Prenons pour axe  $Oz$  l'axe de symétrie. Le développement de  $f$  ne contient alors que des termes où  $m = 0$  et l'on a :

$$v = v_z = \frac{4\pi}{3n} \int_0^\infty \alpha_{10} w^4 dw \quad (12.215)$$

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} p_\perp & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel \end{bmatrix} \quad (12.216)$$

avec :

$$p_\perp = n\kappa T + \frac{1}{3} n m v^2 - \frac{4\pi}{15} m \int_0^\infty \alpha_{20} w^6 dw \quad (12.217)$$

$$p_\parallel = n\kappa T - \frac{2}{3} n m v^2 + \frac{8\pi}{15} m \int_0^\infty \alpha_{30} \alpha_{20} w^6 dw \quad (12.218)$$

Le vecteur  $\vec{q}$  est porté par l'axe  $Oz$  (comme  $\vec{w}$  et pour les mêmes raisons de symétrie) et l'on a :

$$q = q_z = \frac{2\pi}{3} m \int_0^\infty \alpha_{10} w^6 dw - \frac{5}{2} n \kappa T v + \left[ \frac{1}{6} n m v^3 - \frac{8\pi}{15} m v \int_0^\infty \alpha_{20} w^6 dw \right] \quad (12.219)$$



**g) Approximation “régulière”**

Dans de nombreux cas on a à considérer un gaz isotrope légèrement perturbé par une faible action anisotrope (champ électrique, gradient de densité ou de température...). On peut alors montrer que les anisotropies d'ordre  $\ell$  sont d'ordre  $\epsilon^\ell$  par rapport au paramètre de perturbation  $\epsilon$ . Dans cette approximation dite “régulière” on a pour les grandeurs hydrodynamiques les règles simples suivantes :

$$n = 0(1) = 4\pi \int_0^\infty \alpha_0 w^4 dw \tag{12.220}$$

$$\vec{w} = 0(\epsilon) = \frac{4\pi}{3n} \int_0^\infty \vec{\alpha}_1 w^4 dw \tag{12.221}$$

$$\bar{\Psi} = n\kappa T \bar{\delta} + 0(\epsilon^2) \tag{12.222}$$

$$\vec{q} = 0(\epsilon) = \frac{2\pi}{3} m \int_0^\infty \vec{\alpha}_1 w^6 dw - \frac{5}{2} n\kappa T \vec{w} \tag{12.223}$$

**A12-2 Développement de l'équation de Boltzmann**

Considérons l'équation de Boltzmann relative à une espèce de particules chargées, écrite sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + (\vec{\gamma} + \vec{\Omega} \times \vec{w}) \cdot \frac{\partial f}{\partial w} = \mathcal{B}(f) \tag{12.224}$$

et supposons  $f$  développée en fonctions sphériques selon la formule :

$$f = \alpha_o(r, w, t) + \sum [\alpha_{\ell m}(r, w, t)C_{\ell m} + \beta_{\ell m}(r, w, t)S_{\ell m}] \tag{12.225}$$

En portant cette expression dans l'équation précédente et en effectuant les calculs on peut écrire (12.224) sous la forme :

$$A_0 + \sum [A_{\ell m}C_{\ell m} + B_{\ell m}S_{\ell m}] = 0 \tag{12.226}$$

Le problème que nous nous posons est de calculer les coefficients  $A_{\ell m}$ ,  $B_{\ell m}$  en fonction des coefficients  $\alpha_{\ell m}$ ,  $\beta_{\ell m}$  et de leurs dérivées.

**a) Calcul de  $\partial f / \partial t$**

En désignant par  $\dot{\alpha}_{\ell m}$  la dérivée par rapport au temps de  $\alpha_{\ell m}$  on a :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{\alpha}_o + \sum (\dot{\alpha}_{\ell m}C_{\ell m} + \dot{\beta}_{\ell m}S_{\ell m}) \tag{12.227}$$

et l'on a donc :

$$\begin{aligned} (A_{\ell m}) \frac{\partial f}{\partial t} &= \dot{\alpha}_{\ell m} \\ (B_{\ell m}) \frac{\partial f}{\partial t} &= \dot{\beta}_{\ell m} \end{aligned}$$

### b) Calcul du terme de diffusion $\vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$

Ce calcul assez compliqué est développé dans [301] (cf. aussi problème P12-2). Il conduit pour les premières anisotropies aux formules :

$$(A_0)_{\text{gradient}} = \frac{w^2}{3} \left( \frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \beta_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{10}}{\partial z} \right) \quad (12.228)$$

$$(A_{10})_{\text{gradient}} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial z} + \frac{w^2}{5} \left( 3 \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial x} + 3 \frac{\partial \beta_{21}}{\partial y} + 2 \frac{\partial \alpha_{20}}{\partial z} \right) \quad (12.229)$$

$$(A_{11})_{\text{gradient}} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial x} + \frac{w^2}{5} \left( \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha_{20} + 6\alpha_{22}) + 6 \frac{\partial \beta_{22}}{\partial y} + 3 \frac{\partial \alpha_{21}}{\partial z} \right) \quad (12.230)$$

$$(B_{11})_{\text{gradient}} = \frac{\partial \alpha_0}{\partial y} + \frac{w^2}{5} \left( 6 \frac{\partial \beta_{22}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (-\alpha_{20} - 6\alpha_{22}) + 3 \frac{\partial \beta_{21}}{\partial z} \right) \quad (12.231)$$

et de manière générale à la règle :

$$\Delta \ell = \pm 1 \quad (12.232)$$

c'est-à-dire que  $A_{\ell m}$  et  $B_{\ell m}$  sont fonctions des coefficients d'anisotropies  $\alpha_{\ell' m}$  et  $\beta_{\ell' m}$  d'ordre :

$$\ell' = \ell + 1 \text{ et } \ell' = \ell - 1 \quad (12.233)$$

(cf. problème P12-1). Si  $f$  est représentée de façon approchée par un développement à deux termes, on établit facilement les formules ci-dessus (sans les termes  $\ell = 2$  ; cf. problème P12-2).

### c) Calcul du terme électrique $\vec{\gamma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}$

Ce calcul, analogue au précédent, est également développé dans la référence [302]. Il conduit pour les premières anisotropies aux formules :

$$(A_0)_{\text{électrique}} = \left( 1 + \frac{w}{3} \frac{\partial}{\partial w} \right) (\gamma_x \alpha_{11} + \gamma_y \beta_{11} + \gamma_z \alpha_{10}) \quad (12.234)$$

$$(A_{10})_{\text{électrique}} = \gamma_z \frac{1}{w} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} + \left( 1 + \frac{w}{5} \frac{\partial}{\partial w} \right) (3\gamma_x \alpha_{21} + 3\gamma_y \beta_{21} + 2\gamma_z \alpha_{20}) \quad (12.235)$$

$$(A_{11})_{\text{électrique}} = \gamma_x \frac{1}{w} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} + \left( 1 + \frac{w}{5} \frac{\partial}{\partial w} \right) [\gamma_x (-\alpha_{20} + 6\alpha_{22}) + 6\gamma_y \beta_{22} + 3\gamma_z \alpha_{21}] \quad (12.236)$$

$$(B_{11})_{\text{électrique}} = \gamma_y \frac{1}{w} \frac{\partial \alpha_0}{\partial w} + \left( 1 + \frac{w}{5} \frac{\partial}{\partial w} \right) [6\gamma_x \beta_{22} + \gamma_y (-\alpha_{20} + 6\alpha_{22}) + 3\gamma_z \beta_{21}] \quad (12.237)$$

et de façon générale à la même règle

$$\Delta \ell = \pm 1 \quad (12.238)$$

que pour le terme de diffusion (cf. problème P12-4). En négligeant les termes avec  $\ell \geq 2$  on peut aussi obtenir directement les formules ci-dessus à partir du développement de  $f$  à deux termes (cf. problème P12-4).

### d) Calcul du terme magnétique $\vec{\Omega} \times \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}$

Le calcul développé dans [302] (cf. problème P12-5) conduit maintenant aux formules plus simples :

$$(A_{\ell m})_{\text{magnétique}} = m \Omega \beta_{\ell m} \quad (12.239)$$

$$(B_{\ell m})_{\text{magnétique}} = -m\Omega\alpha_{\ell m} \tag{12.240}$$

On voit que les fonctions sphériques sont “presque” des fonctions propres de l’opérateur  $\vec{\Omega} \times \vec{w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{w}}$  avec les valeurs propres  $m\Omega$  : il y a simplement en plus échange avec inversion de signe entre les coefficients jumelés  $\alpha_{\ell m}$  et  $\beta_{\ell m}$ . Si l’on avait pris comme base de fonctions, au lieu des fonctions réelles  $C_{\ell m}$  et  $S_{\ell m}$ , les fonctions complexes

$$Y_{\ell m} = C_{\ell m} + iS_{\ell m} \tag{12.241}$$

on aurait trouvé qu’elles étaient effectivement des fonctions propres avec pour valeurs propres  $im\Omega$ .

### e) Calcul du terme de collision $\mathcal{B}(f)$

Dans le cas particulier où  $\mathcal{B}(f)$  se réduit à l’opérateur de Lorentz  $\mathcal{J}(f)$  (12.19), le terme de collision, qui paraît *a priori* complexe, est en fait très simple pour des raisons de symétrie. Désignons en effet par  $\vec{w}$  le vecteur engendré à partir de  $\vec{w}$  par une rotation  $R\vec{w}$  dans l’espace des vitesses. Pour chaque rotation  $R$  on peut associer à une fonction de distribution  $f(\vec{w})$  la fonction transformée  $Sf$  telle que l’on ait :

$$Sf(R\vec{w}) = f(\vec{w}) \tag{12.242}$$

On définit ainsi un opérateur de rotation agissant sur l’espace des fonctions  $f$ . Nous allons montrer que les deux opérateurs  $J$  et  $S$  commutent. En effet l’on a :

$$JSf(\vec{u}) = \int \int [Sf(\vec{u}') - Sf(\vec{u})] p dp d\epsilon \tag{12.243}$$

$\vec{u}$  étant le vecteur vitesse initial et  $\vec{u}'$  le vecteur vitesse final après la collision. On peut aussi introduire les vecteurs  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  définis par :

$$\vec{u} = R\vec{w} \tag{12.244}$$

$$\vec{u}' = R\vec{w}' \tag{12.245}$$

Les vecteurs  $\vec{w}$  et  $\vec{w}'$  sont les vecteurs initial et final dans une autre collision. En effet, à cause de l’invariance par rotation de la loi de force, si l’on fait une certaine rotation  $R$  de la vitesse initiale, la vitesse finale subit la même rotation. On peut donc écrire :

$$JSf(\vec{u}) = \int \int [Sf(R\vec{w}') - Sf(R\vec{w})] p dp d\epsilon = Jf(v) \tag{12.246}$$

c’est-à-dire :

$$S J f(\vec{u}) = S [J f(R\vec{w})] \tag{12.247}$$

ou, d’après (12.193) :

$$S J f(u) = J f(\vec{w}) \tag{12.248}$$

soit, finalement :

$$S J f(u) = J S f(u) \tag{12.249}$$

L’opérateur  $J$ , commutant avec tous les opérateurs  $R$ , commute en particulier avec les opérateurs de rotation infinitésimale  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$ . Les trois opérateurs  $J, \rho^2$  et  $\rho_z$  qui commutent entre eux ont en commun une base complète de fonctions propres. Comme  $\rho^2$  et  $\rho_z$  agissent seulement sur  $\theta$  et  $\varphi$ , leur base de fonctions propres est bien définie. Ce sont les fonctions sphériques :

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = P_{\ell m}(\cos \theta) e^{im\varphi} \tag{12.250}$$

On a donc :

$$J[Y_{\ell m}(\theta, \varphi)] = \nu_{\ell m}(\bar{w})Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (12.251)$$

où l'on considère  $w$  comme un paramètre.

Montrons enfin que les valeurs propres  $\nu_{\ell m}$  ne dépendent pas de l'indice  $m$  : si  $f$  est une fonction propre de  $J$  avec la valeur propre  $k$ , on montre facilement que c'est aussi une fonction propre de  $Sf$  : en effet  $Jf = kf$ , et puisque  $S$  et  $J$  commutent on a :

$$JSf = SJf = Skf = kSf \quad (12.252)$$

Il en résulte que toute somme de la forme :

$$\sum_s \lambda_s S_s Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$$

est une fonction propre de  $J$  avec la valeur propre  $\nu_{\ell m}$ . Mais on sait qu'une telle somme décrit la fonction sphérique générale d'indice  $\ell$  ; en d'autres termes on a :

$$\sum_s \lambda_s S_s Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = Y_{\ell \mu}(\theta, \varphi), \text{ avec } \mu \neq m \quad (12.253)$$

Cela montre que l'on a :

$$\begin{aligned} J[Y_{\ell, \mu}(\theta, \varphi)] &= \nu_{\ell m} Y_{\ell \mu}(\theta, \varphi) \\ \nu_{\ell m} &= \nu_{\ell \mu} \end{aligned}$$

On peut donc récrire (12.202) sous la forme :

$$JY_{\ell m}(\theta, \varphi) = -\nu_{\ell}(w)Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (12.254)$$

d'où l'on déduit :

$$J[w^{\ell} Y_{\ell m}] = -\nu_{\ell} w^{\ell} Y_{\ell m} \quad (12.255)$$

soit finalement par combinaison :

$$J(C_{\ell m}) = -\nu_{\ell} C_{\ell m}, \quad J(S_{\ell m}) = -\nu_{\ell} S_{\ell m} \quad (12.256)$$

Pour expliciter un peu  $\nu_{\ell}$ , il suffit d'appliquer la formule générale (12.23) à la fonction particulière :

$$C_{\ell 0} = w^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) \quad (12.257)$$

avec la condition initiale  $\theta = 0$ . La valeur finale de  $\theta$  n'est autre que l'angle de déviation  $\chi$  (qui dépend de  $w$  et du paramètre d'impact  $p$ ). En posant donc dans (12.19) :

$$f = C_{\ell 0}(0) = w^{\ell} \quad (12.258)$$

$$f' = C_{\ell 0}(\chi) = w^{\ell} P_{\ell}(\cos \chi) \quad (12.259)$$

et en tenant compte de (12.23) on obtient finalement :

$$\nu_{\ell}(w) = 2\pi n_o w \int_0^{\pi} [1 - P_{\ell}(\cos \chi)] \sigma(\chi) \sin \chi \, d\chi \quad (12.260)$$

qui donne une expression générale de  $\nu_{\ell}$  fonction de  $\sigma(\chi)$  déterminée elle-même par la loi de force électron-neutre.

### A12-3 Formule de Chapman et Cowling

Dans leur célèbre ouvrage [286] paru en 1939 S. Chapman et T. G. Cowling ont écrit, après un raisonnement mathématique simplifié et un bref calcul, la formule (12.83) qui porte leur nom. Dans les années 50, au moment de la naissance de la physique moderne des plasmas, de nombreux lecteurs très perplexes sur la démarche de ces auteurs ont refait un calcul détaillé à partir de l'équation générale de Boltzmann (8.78) ou (8.79) et de l'analyse des paramètres dans une collision, en supposant pour les électrons une distribution isotrope quelconque, et pour les neutres une maxwellienne  $F_o$  (isotrope) à la température  $T_o$ . Ils ont alors trouvé que la formule de Chapman et Cowling était bien une bonne approximation de l'opérateur de Boltzmann, sauf dans un domaine très restreint des faibles vitesses électroniques où l'on aurait  $w_e \approx w_o$ . A titre d'exemple nous indiquons très rapidement les étapes de ce calcul en suivant [217]. On pose d'abord :

$$f_e = f_o \phi \tag{12.261}$$

où  $f_o$  est la maxwellienne d'équilibre avec les neutres, et  $\phi$  une fonction de distribution réduite sans dimension des électrons. En remarquant que dans une collision on a :

$$f'_o F'_o - f_o F_o = 0 \tag{12.262}$$

on peut mettre l'opérateur de Boltzmann sous la forme :

$$J(f) = n_o \left( \frac{M_o}{2\pi k T_o} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{w_o=0}^{\infty} \int_{\beta=0}^{\pi} \int_{\gamma=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\chi=0}^{\pi} (\phi' - \phi) \exp \frac{-m_o w_o^2}{2\kappa T} g \sigma(\chi, g) d\varphi \sin \chi d\chi \sin \beta d\beta d\gamma w_o^2 dw_o \tag{12.263}$$

Dans cette formule les notations  $\chi, w_e, w_o$  sont les mêmes que dans la section 12.2, mais ici on ne considère plus  $w_o$  comme négligeable et  $\beta$  et  $\gamma$  désignent la colatitude et la longitude de  $\vec{w} - \vec{o}$  par rapport à  $\vec{w} - \vec{e}$ . On exprime ensuite la vitesse finale électronique  $w'_e$  en fonction des paramètres de la collision et l'on obtient :

$$(1 + s^2)(w_e'^2/w_e^2) = 1 + s^2 + 2s \cos \chi + 2u_{oe} ((s - 1) \cos \beta (1 - \cos \chi) + (s + 1) \sin \beta \sin \chi \sin \varphi) + 2u_{oe}^2 (1 - \cos \chi) \tag{12.264}$$

avec :

$$s = m_e/m_o \tag{12.265}$$

$$u_{oe} = w_o/w_e \tag{12.266}$$

Le paramètre  $s$  étant  $\ll 1$ , on cherche une approximation à la formule (12.263) valable pour  $s \ll 1$ . Mais il faut remarquer que (12.264) fait apparaître les deux paramètres  $s$  et  $u_{oe}$ . En fait pour la plupart des collisions, les ordres de grandeur de ces deux paramètres sont liés car on a en général :

$$u_{oe} \approx s^{\frac{1}{2}} \tag{12.267}$$

Dans ces conditions, on a :

$$w_e' \approx w_e \tag{12.268}$$

et l'on peut calculer de façon approchée  $\phi' - \phi$  par un développement de Taylor. Les auteurs de [217] montrent par cette méthode que  $J(f)$  est à l'ordre  $s$  fourni par la formule de Chapman et Cowling. Ce calcul montre de plus que celle-ci tombe en défaut lorsque  $w_e \Rightarrow 0$ , c'est-à-dire pour les valeurs de  $w_e$  comparables à la valeur moyenne de  $w_o$ . Cela explique certaines difficultés rencontrées quand on cherche à calculer une fonction de distribution électronique par résolution numérique de l'équation de Boltzmann. Celles-ci sont liées à une singularité à l'origine de la formule de Chapman et Cowling. On peut résoudre cette difficulté par une coupure judicieusement faite (cf. encore [217]).

## 12.11 Problèmes

### P12-1 Règle de sélection pour le terme de diffusion

Partant des relations fonctionnelles suivantes qui relient les fonctions de Legendre associées :

$$(2\ell + 1) \cos \theta P_{\ell m}(\theta) = (\ell - m + 1)P_{\ell+1, m}(\theta) + (\ell + m)P_{\ell-1, m}(\theta) \quad (12.269)$$

$$(2\ell + 1) \sin \theta P_{\ell, m-1}(\theta) = P_{\ell+1, m}(\theta) - P_{\ell-1, m}(\theta) \quad (12.270)$$

$$2m \cos \theta P_{\ell m}(\theta) = \sin \theta P_{\ell, m+1} + (\ell + m)(\ell - m + 1)P_{\ell, m-1} \quad (12.271)$$

montrer que les coefficients  $(A_{\ell m})_{\text{gradient}}$ ,  $(B_{\ell m})_{\text{gradient}}$  de (12.226) dépendent seulement des termes  $\alpha_{\ell' m}$  et  $\beta_{\ell' m}$  avec  $\ell' = \ell \pm 1$ .

### P12-2 Terme de diffusion dans l'approximation linéaire

En supposant que  $f$  peut être représentée par le développement limité :

$$f = \alpha_0 + \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w} \quad (12.272)$$

calculer directement les coefficients  $(A_0)_{\text{gradient}}$ ,  $(B_{11})_{\text{gradient}}$ ,  $(A_{11})_{\text{gradient}}$ ,  $(A_{10})_{\text{gradient}}$  (simplifier les calculs en utilisant les résultats du problème P12-1).

### P12-3 Règle de sélection pour les termes électriques

En partant des relations :

$$\frac{\partial C_{\ell m}}{\partial w_x} = \frac{1}{2} [-C_{\ell-1, m+1} + (\ell + m)(\ell + m - 1)C_{\ell-1, m-1}]$$

$$\frac{\partial C_{\ell m}}{\partial w_y} = \frac{1}{2} [-S_{\ell-1, m+1} - (\ell + m)(\ell + m - 1)S_{\ell-1, m-1}]$$

$$\frac{\partial C_{\ell m}}{\partial w_z} = (\ell + m)C_{\ell-1, m}$$

valables pour  $m \neq 0$ ,

$$\frac{\partial C_{\ell 0}}{\partial w_x} = -C_{\ell-1, 1}$$

$$\frac{\partial C_{\ell 0}}{\partial w_y} = -S_{\ell-1, 1}$$

et trois relations analogues écrites en changeant  $C$  en  $S$  et  $S$  en  $-C$ , montrer que les coefficients  $(A_{\ell m})_{\text{électrique}}$ ,  $(B_{\ell m})_{\text{électrique}}$  dans (12.226) dépendent seulement des termes  $\alpha_{\ell' m}$  et  $\beta_{\ell' m}$  avec  $\ell' = \ell \pm 1$ . (Ces équations sont démontrées dans [302, appendice 12B].)

### P12-4 Terme électrique dans l'approximation linéaire

En supposant que  $f$  peut être représentée par le développement limité :

$$f = \alpha_0 + \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{w} \tag{12.273}$$

calculer directement les coefficients :

- $(A_0)_{\text{électrique}}$
- $(A_{11})_{\text{électrique}}$
- $(B_{11})_{\text{électrique}}$
- $(A_{10})_{\text{électrique}}$

(Utiliser les résultats du problème P12-3.)

### P12-5 Terme magnétique

En partant des mêmes équations que dans le problème P12-3, établir les deux équations (12.239) et (12.240).

### P12-6 Effet Joule en présence d'un champ magnétique

Dans un gaz faiblement ionisé, on suppose qu'il y a un champ électrique alternatif  $\vec{E} = \vec{E}_o \cos \omega t$  et un champ magnétique continu  $\vec{B}$  ; l'angle entre ces deux vecteurs est  $\theta$ .

a) À partir de (12.81) et en supposant que la fréquence  $\nu_1$  de collision électron-neutre est indépendante de la vitesse, montrer que :

$$\frac{dU_{Ke}}{dt} = A[g(\nu) \cos^2 \theta + h(\nu, b) \sin^2 \theta] \tag{12.274}$$

avec :

$$\nu = \nu_1^2 / \omega^2 \tag{12.275}$$

$$b = \Omega^2 / \omega^2 \tag{12.276}$$

Expliciter  $A$ ,  $g(\nu)$  et  $h(\nu, b)$ .

b) En supposant le champ magnétique nul, tracer la courbe de  $dU_{Ke}/dt$  en fonction de  $\nu$ . Trouver des approximations pour les valeurs faibles ou élevées de  $\nu_1$ .

c) En supposant le champ magnétique non nul, montrer que les changements du chauffage par rapport au cas ci-dessus sont produits par la composante  $E_{\perp}$  de  $\vec{E}$  qui est perpendiculaire à  $\vec{B}$ . Tracer le réseau de courbes :

$$h(\nu, b) = \text{Cte} \tag{12.277}$$

sur un diagramme de coordonnées  $x = \log_{10} \nu$  et  $y = \log_{10} b$ . Expliquer ce qui se passe sur les deux axes de ce diagramme.

### P12-7 \*Normalisation de la formule de Margenau

Si  $\alpha_o$  est la fonction de distribution de Margenau (12.97) on peut définir le terme de chauffage :

$$w_E^2 = \frac{1}{3} \frac{m_o}{m_e} \frac{1}{\omega^2 + \nu_1^2} \vec{\gamma}_o \cdot \vec{B} \cdot \vec{\gamma}_o \tag{12.278}$$

qui apparaît au dénominateur de l'intégrale de normalisation :

$$I = \int_0^{\infty} \alpha_o 4\pi w^2 dw \tag{12.279}$$

- a) Montrer que pour  $\omega$  fini et différent de  $\Omega$ , les deux quantités ci-dessus sont finies pour toute fonction  $\nu_1(w)$ .
- b) Montrer que pour  $\omega = 0$  ou  $\omega = \Omega$ , les deux quantités ci-dessus sont encore finies si  $\nu_1(v)$  ne s'annule pas lorsque  $v \rightarrow \infty$ .
- c) Montrer que pour  $\omega = 0$  ou  $\omega = \Omega$ , il y a des difficultés si  $\nu_1(w)$  décroît comme  $1/w$  ou plus rapidement lorsque  $w \rightarrow \infty$ . Quelle est la conclusion à en tirer dans ce dernier cas ?

### P12-8 \*Champ critique en présence d'un champ magnétique

Le champ critique d'échauffement des électrons [cf. paragraphe 12.7.3b)] s'exprime par des formules simples lorsque les fréquences  $\omega$ ,  $|\omega - \Omega|$  et  $\nu_1$  satisfont à certaines inégalités fortes. Établir celles-ci en fonction de  $E_{\parallel}$  ou  $E_{\perp}$  (composantes de  $\vec{E}$  parallèle et perpendiculaire à  $\vec{B}$ ) et des fréquences dans les cinq cas suivants :

- a) Collisions dominantes :  $\nu_1 \gg \omega, \Omega$ .
- b) Champ magnétique dominant, basses fréquences :  $\Omega \gg \nu_1 \gg \omega$ .
- c) Champ magnétique dominant, hautes fréquences :  $\Omega \gg \omega \gg \nu_1$ .
- d) Résonance cyclotron (partie centrale) :  $\omega \gg \nu_1 \gg |\omega - \Omega|$ .
- e) Résonance cyclotron (ailes) :  $\omega \gg |\omega - \Omega| \gg \nu_1$ .

### P12-9 Distribution de Druyvesteyn

Établir l'équation (12.113) et calculer  $v_1$  et  $C_2$  en fonction de  $\gamma_0$  et de la section efficace  $\sigma$  de collision électron-neutre.

### P12-10 Fréquences de collisions moyennes pour la mobilité et la diffusion

- a) Établir l'équation (12.118).
- b) Calculer  $\nu'_1$  pour un plasma intermédiaire d'hélium où la pression et la température des neutres sont 1 torr et 273 K avec  $T_e < 3$  eV. Note : écrire  $\nu'_1$  en fonction de  $T_e$  (eV).
- c) Établir l'équation (12.151) et y faire apparaître la section efficace  $\sigma_1$  pour le transfert de quantité de mouvement.
- d) Calculer  $\nu''_1$ , pour le même exemple que ci-dessus.
- e) Établir une expression pour le rapport  $T'_e/T_e$  où  $T_e$  est la température cinétique et  $T'_e$  la température de diffusion [cf. (5.15)]. Exprimer ce rapport au moyen de  $\sigma_1$ .
- f) Trouver deux cas où  $T'_e = T_e$ .



### P12-11 Plasmas intermédiaires : mobilité et température électroniques

- a) Montrer que dans un plasma intermédiaire où il y a un champ électrique continu et pas de champ magnétique, la température électronique  $T_e$  et le paramètre de Townsend  $E/n_o$  sont reliés par l'équation :

$$\left(\frac{m_o}{6m_e}\right)^{1/2} \frac{e}{s_o} \frac{E}{n_o} = \kappa T_e \left(1 - \frac{T_o}{T_e}\right)^{1/2} g(T_e)$$

avec :

$$g^2(T_e) = \frac{\int_0^\infty \sigma'_1 u^2 e^{-u} du}{\int_0^\infty \frac{1}{\sigma'_1} u e^{-u} du} \tag{12.280}$$

et :

$$\begin{aligned} s_o &= 10^{-16} \text{ cm}^2 \\ \sigma'_1 &= \frac{\sigma_1}{s_o} \\ u &= \frac{m_e v^2}{2\kappa T_e} \end{aligned}$$

- b) Montrer que dans un plasma intermédiaire la mobilité électronique est donnée par :

$$\mu_e = \frac{4}{3\pi^{1/2}} \left(\frac{e}{m} \frac{1}{n_o s_o}\right) \left(\frac{m_e}{2\kappa T_e}\right)^{1/2} h(T_e)$$

avec :

$$h = \int_{u=0}^\infty e^{-u} d\left(\frac{u}{\sigma'_1}\right) \tag{12.281}$$

- c) En supposant que  $\sigma_1$  est une fonction lentement variable de l'énergie, trouver des expressions approchées des formules ci-dessus.

### P12-12 Diffusion dans les plasmas intermédiaires

On considère un plasma "intermédiaire" dans lequel  $n_o$  est constant dans l'espace et le temps, mais où  $n_e$ , et éventuellement  $T_e$ , varient dans l'espace.

- a) En supposant qu'il n'y a aucun champ électrique, montrer par comparaison de deux fréquences que la condition pour que la distribution électrique soit maxwellienne peut s'écrire :

$$L \gg L_M \tag{12.282}$$

avec :

$$L_M = \left(\frac{\ell_{ee}\ell_{eo}}{3}\right) \tag{12.283}$$

où  $L$  est une longueur caractéristique des gradients dans le plasma, et  $\ell_{ee}$ ,  $\ell_{eo}$  sont les libres parcours moyens d'un électron vis-à-vis des collisions  $e-e$  et  $e-o$ .

- b) En posant par exemple  $\ln \Lambda = 10^{-1}$  et  $\overline{\sigma_{eo}} = 5 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$ , représenter sur un diagramme de coordonnées :

$$x = \log_{10} n_o y = \log_{10} n_e / T_e^2 \tag{12.284}$$

le réseau des courbes  $L_M = 10^{-1}, 1, 10, 10^2 \text{ cm}$  ( $n_o$  et  $n_e$  en  $\text{cm}^{-3}$ ,  $T_e$  en eV). Quelle est la valeur de  $L_M$  pour  $T_o = 300 \text{ K}$ ,  $p = 1 \text{ torr}$ ,  $n_e = 10^{12}$ ,  $T_e = 3 \text{ eV}$  ? Représenter sur ce même diagramme la limite des plasmas intermédiaires.

- c) Montrer par comparaison de deux fréquences que la condition pour que le refroidissement soit négligeable s'écrit :

$$L \gg L_{T_o} \quad (12.285)$$

avec :

$$L_{T_o} = \left( \frac{m_o}{3m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{n_o \sigma_{eo}} \quad (12.286)$$

Représenter sur le diagramme de la partie b) le réseau des courbes  $L_{T_o} = 10^{-1}, 1, 10, 10^2$  cm. Quelle est la valeur de  $L_{T_o}$  pour  $T_o = 300$  K,  $p_o = 1$  torr ? Comparer cette valeur à celle de  $L_M$  de la partie b). Quelle conclusion qualitative peut-on en tirer ?

# Chapitre 13

## Théorie cinétique collisionnelle des plasmas

### 13.1 Introduction

Après avoir étudié dans le chapitre précédent la théorie cinétique des gaz faiblement ionisés, nous abordons maintenant celle des gaz fortement ionisés. En pratique nous nous limitons au cas des “vrais” plasmas complètement ionisés, et nous supposons pour simplifier l’écriture que le plasma est constitué d’électrons et d’une seule espèce d’ions de charge  $q_i = -Zq_e$ .

Cette étude est difficile pour les raisons suivantes :

- Un gaz complètement ionisé *ne peut pas être décrit correctement par le modèle de Lorentz* ; en effet les deux types de particules qu’il contient (électrons et ions) satisfont bien à la relation  $m_e \ll m_i$  mais non à la relation d’indépendance des électrons entre eux qui s’écrirait  $n_e \ll n_i$ .
- Le grand rayon d’action de la force de Coulomb introduit des *divergences dans les intégrales de collisions*. Nous avons vu en effet au chapitre 3 que la section efficace pour le transport de quantité de mouvement est apparemment infinie pour les interactions coulombiennes. Cette divergence est due aux interactions lointaines ; elle signifie que la description cinétique classique des interactions entre particules au moyen de collisions binaires incohérentes tombe en défaut, à cause précisément de la décroissance relativement lente de la force de Coulomb avec la distance.

De façon précise nous avons vu dans la section 3.5 et nous reverrons dans la section 13.2 que l'on peut distinguer dans un plasma :

- les *interactions proches* entre particules qui peuvent être décrites par des collisions binaires ;
- les *interactions lointaines* pour lesquelles on doit considérer qu'une particule du gaz interagit en même temps avec un grand nombre d'autres particules.

Les interactions lointaines multiples étant dominantes, nous avons déjà vu qu'on peut essayer d'étudier les propriétés d'un plasma au moyen d'un *modèle de fluide continu* : c'est ce que nous avons fait dans les chapitres 6 et 7. Nous y avons considéré le plasma comme constitué de deux fluides continus de charge électrique opposée, intimement mélangés, et nous avons fait une théorie purement macroscopique basée sur les équations hydrodynamiques et les équations de Maxwell. Malheureusement cette théorie n'est satisfaisante que dans l'approximation dite des plasmas froids (cf. paragraphe 9.2.7).

Dans de nombreux problèmes il faut tenir compte de l'agitation thermique et étudier comme nous l'avons fait au chapitre 10 les interactions d'une particule individuelle avec le reste du plasma considéré comme un fluide continu. Cette théorie de Vlasov-Landau est la première approximation dans la théorie cinétique des plasmas.

Dans le présent chapitre nous étudions les effets produits par les collisions et posons ainsi les bases de la deuxième approximation : la théorie cinétique collisionnelle des plasmas. Celle-ci étant souvent d'un formalisme assez lourd, nous en exposerons les principes, établirons les résultats les plus importants, et dans d'autres cas citerons simplement les résultats en renvoyant le lecteur aux travaux spécialisés dans la théorie cinétique des plasmas. Cela étant, le plan du chapitre s'établit comme suit.

Dans la section 13.2 nous revenons sur la divergence coulombienne, et sa suppression par la coupure de Debye, en traitant le cas simple des collisions  $e-i$  qui satisfont partiellement au modèle de Lorentz. Nous calculerons ainsi les deux premières *fréquences de relaxation* définies au chapitre 12.

Dans la section 13.3 nous introduisons le formalisme des *coefficients de transport dans l'espace des vitesses* qui décrivent l'évolution d'un faisceau de particules chargées injecté dans un plasma. Nous en déduisons dans la section 13.4 et dans l'appendice A13-1 les expressions et les propriétés des temps de relaxation par collisions dans un plasma.

Dans la section 13.5 et dans l'appendice A13-2 nous établissons l'équation cinétique de Fokker-Planck qui tient compte des variations des temps de relaxation avec les vitesses, et qui est l'équation cinétique la plus utilisée pour le calcul des coefficients de transport usuels dans un plasma. Nous montrons dans l'appendice A13-3 qu'elle permet de décrire le re-

tour vers l'équilibre thermodynamique (maxwellianisation des électrons). Nous donnons alors dans la section 13.6 quelques notions générales sur les équations cinétiques des plasmas.

Nous appliquons ensuite l'équation de Fokker-Planck dans la section 13.7 au calcul de la conductivité électrique en courant continu d'un plasma, en montrant que dans un champ électrique continu il apparaît un phénomène de découplage des électrons et des ions (électrons "runaways"). Nous donnons enfin dans la section 13.8, sans démonstration, quelques formules décrivant les autres coefficients de transport usuels dans un plasma.

## 13.2 Étude préliminaire des collisions électron-ion

### 13.2.1 Relaxation électrons-ions. Coupure de Debye

Pour amorcer la discussion des propriétés collisionnelles des plasmas, il est intéressant d'étudier les collisions binaires  $e-i$  en refaisant le calcul de la section 3.5 mais en se référant maintenant à la notion de fréquence de relaxation introduite au chapitre 12. Dans ce calcul on assimile donc les ions à des centres de potentiel fixe de masse infinie, ce qui est justifié par la petite valeur du rapport  $m_e/m_i$  ; on néglige d'autre part les interactions  $e-e$ , ce qui par contre n'est pas correct puisque l'on n'a pas  $n_e \ll n_i$  ; nous les introduirons donc plus tard dans la section 13.3.

L'angle de déviation d'un électron de vitesse  $w_e$  et de paramètre d'impact  $p$  se calcule (cf. paragraphe 3.2.4) au moyen des formules :

$$\chi = \pi - 2\theta_m \quad (13.1)$$

$$\tan \theta_m = \frac{p}{p_o} \quad (13.2)$$

$$p_o = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_o m_e w_e^2} \quad (13.3)$$

où  $p_o$  est le paramètre d'impact critique pour les électrons de vitesse  $w_e$ , c'est-à-dire la valeur de  $p$  qui conduit à une déviation de  $90^\circ$ .

Essayons de calculer les fréquences de relaxation des anisotropies en utilisant la formule (12.24) ; on a :

$$\cos \chi = -\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad (13.4)$$

avec :

$$t = \frac{p}{p_o} \quad (13.5)$$

d'où :

$$1 - P_1(\cos \chi) = 1 - \cos \chi = \frac{2}{1 + t^2} \quad (13.6)$$

$$1 - P_2(\cos \chi) = \frac{3}{2}(1 - \cos^2 \chi) = \frac{6t^2}{(1 + t^2)^2} \quad (13.7)$$

et l'on a théoriquement :

$$\nu_1(w_e) = 2\pi n_i w_e p_o^2 \int_0^\infty \frac{2t dt}{1 + t^2} \quad (13.8)$$

$$\nu_2(w_e) = 2\pi n_i w_e p_o^2 \int_0^\infty \frac{6t^3 dt}{(1 + t^2)^2} \quad (13.9)$$

Ces deux intégrales sont infinies ; elles présentent à cause de leur borne supérieure une divergence logarithmique ; pour préciser, limitons, d'une façon pour l'instant arbitraire, les intégrations à une valeur  $t_1 = p_1/p_o$  de la borne supérieure ; on obtient alors :

$$\nu_1(w_e, p_1) = 2\pi n_i w_e p_o^2 \ln(1 + t_1^2) \quad (13.10)$$

$$\nu_2(w_e, p_1) = 6\pi n_i w_e p_o^2 \left[ \ln(1 + t_1^2) + \frac{1}{1 + t_1^2} - 1 \right] \quad (13.11)$$

En principe, pour calculer  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , on doit remplacer  $p_1$  par l'infini dans ces deux formules ; on trouve alors des valeurs infinies ; cette difficulté est l'une des nombreuses de ce genre qui proviennent du grand rayon d'action de la force de Coulomb : la divergence est due essentiellement aux collisions lointaines, pour lesquelles  $p/p_o$  est grand et la déviation petite ; si au contraire on appelle collisions proches les collisions pour lesquelles la déviation est supérieure à  $90^\circ$ , on peut définir sans ambiguïté pour ces collisions une fréquence de collision  $\nu_{90}$  qui est évidemment :

$$\nu_{90} = \pi n_i w_e p_o^2 \quad (13.12)$$

C'est cette quantité qui apparaît au début des formules (13.10) et (13.11) ; mais elle y est multipliée par un facteur logarithmique qui mesure l'importance des collisions lointaines.

### 13.2.2 Coupure à la longueur de Debye

On a vu dans la section 1.4 que les corrélations entre particules permettent de considérer que dans un plasma en équilibre thermodynamique le potentiel électrostatique apparent d'un ion est à la distance  $r$  de celui-ci :

$$\varphi = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_o r} e^{-r/\lambda_s} \quad (13.13)$$

pour  $r \gg r_o$  avec :

$$r_o = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o \kappa T} \quad (13.14)$$

$$\lambda_s^2 = \frac{\epsilon_o \kappa T}{n_e e^2 (Z + 1)} = \frac{\lambda_D^2}{Z + 1} \quad (13.15)$$

Pour les distances  $r > \lambda_s$  le potentiel de Coulomb subit donc une coupure exponentielle et ceci suggère que dans le calcul des relaxations on peut effectivement arrêter les intégrations à une valeur du paramètre d'impact de l'ordre de grandeur de  $\lambda_s$ . Pour préciser cette question très importante, rappelons que nous avons comparé au paragraphe 1.6.1 les ordres de grandeur des diverses longueurs fondamentales qui interviennent dans la théorie d'un plasma, à savoir :

- $r_o$  longueur de Landau
- $d_e$  distance moyenne entre les électrons
- $\lambda_D$  longueur de Debye

Du point de vue, qui nous intéresse ici, des collisions  $e-i$  on peut également considérer deux autres longueurs :

- le paramètre d'impact critique défini par la formule (13.3)
- le libre parcours moyen d'un électron entre deux collisions proches

Ces deux dernières grandeurs étant fonctions de  $w_e$ , il est intéressant de considérer dans un plasma proche de l'équilibre thermodynamique local leurs valeurs moyennes obtenues en remplaçant  $w_e$  par sa valeur la plus probable,  $\overline{w_e} = \sqrt{2\kappa T/m_e}$ , soit :

$$\overline{p_o} = \frac{Z e^2}{8\pi\epsilon_o \kappa T} = \frac{Z}{2} r_o \quad (13.16)$$

$$\overline{\lambda_{90}} = \frac{1}{\pi n_i \overline{p_o}^2} \quad (13.17)$$

On voit donc que  $\overline{p_o}$  est, au facteur  $Z/2$  près, égal à la longueur de Landau. Ceci étant nous avons montré dans la section 1.6 que les plasmas gazeux que l'on rencontre en pratique appartiennent à une grande famille que nous avons appelée les *plasmas cinétiques classiques*. Dans ceux-ci l'énergie de corrélation des particules est bien plus petite que leur énergie cinétique d'agitation thermique (analogie avec les gaz parfaits) et l'on a :

$$r_o, \overline{p_o} \ll d_e \ll \lambda_D \ll \overline{\lambda_{90}} \quad (13.18)$$

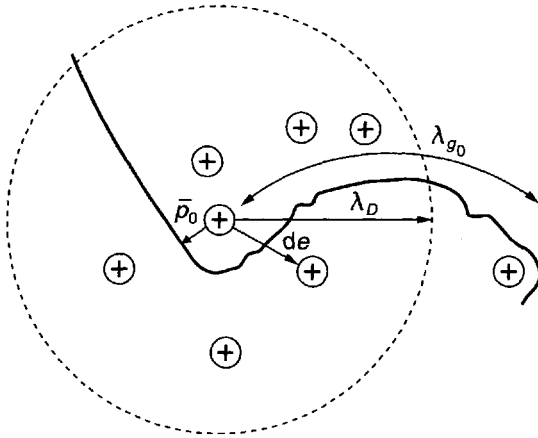


Figure 13.1 : Schéma d'une trajectoire électronique.

La signification physique de ces diverses inégalités est représentée sur la figure 13.1 qui est un schéma grossier d'une trajectoire électronique. On y voit que :

-  $\bar{p}_0$  est bien plus petit que  $d_e$  ; donc les collisions proches sont des phénomènes binaires bien définis où interviennent seulement un électron et un ion. La situation serait très différente dans les plasmas classiques corrélés (cf. Fig. 1.3) où les inégalités (13.18) seraient renversées et où la notion de collision binaire perdrait tout sens.

-  $\bar{\lambda}_{g0}$  étant bien plus grand que  $d_e$ , les collisions proches sont des phénomènes assez rares ; par contre les collisions lointaines sont extrêmement fréquentes ; on a représenté leur action sur l'électron par les petites ondulations de trajectoires entre deux fortes déviations. On peut donc classer les collisions  $e-i$  selon la valeur du paramètre d'impact en quatre familles :

- $p < \bar{p}_0$  : collisions proches, interaction de Coulomb binaire sans atténuation
- $\bar{p}_0 < p < d_e$  : collisions lointaines, interaction de Coulomb binaire sans atténuation
- $d_e < p < \lambda_D$  : collisions lointaines, interaction de Coulomb multiple sans atténuation
- $\lambda_D < p$  : collisions lointaines, interaction de Coulomb multiple avec atténuation.



Dans la troisième région, il n'y a plus de collisions binaires mais un phénomène de diffusion multiple ; le calcul de  $\nu_1$  et de  $\nu_2$  a donc un sens discutable ; cependant divers auteurs ont montré, par un calcul statistique sur ces déviations multiples [228], [229], qu'on obtenait le bon ordre de grandeur des phénomènes<sup>1</sup> en utilisant la théorie des collisions binaires, même pour  $p > d_e$  et en limitant  $p$  à une valeur voisine de  $\lambda_D$  ; au-delà de cette valeur l'exponentielle de Debye supprime toute interaction notable. Nous avons d'ailleurs précisé dans la section 3.5 qu'il était raisonnable pour effectuer cette coupure de ne tenir compte que de la partie électronique des corrélations, c'est-à-dire de poser dans les formules (13.10) et (13.11)  $p_1 = \lambda_D$ . On obtient ainsi :

$$\nu_1(w_e) = 4\pi n_i w_e p_o^2 \ln \left( \frac{\lambda_D}{p_o} \right) \quad (13.19)$$

$$\nu_2(w_e) = 12\pi n_i w_e p_o^2 \ln \left( \frac{\lambda_D}{p_o} \right) \quad (13.20)$$

Les valeurs ainsi obtenues sont fonctions de  $w_e$  : si l'on néglige les variations lentes introduites par le terme logarithmique on voit d'après (13.3) que  $\nu_1$  et  $\nu_2$  varient approximativement comme  $w_e^{-3}$  ; quand on considère un plasma dont l'état est voisin de l'équilibre thermodynamique on est souvent plus intéressé par des *valeurs moyennes* que nous définirons ainsi :

$$\bar{\nu}_1 = 4\pi n_i \bar{w}_e \bar{p}_o^2 \ln \Lambda \quad (13.21)$$

$$\bar{\nu}_2 = 12\pi n_i \bar{w}_e \bar{p}_o^2 \ln \Lambda \quad (13.22)$$

avec<sup>2</sup> :

$$\Lambda = \frac{\lambda_D}{\bar{p}_o} = 8\pi \varepsilon_o^{3/2} \frac{(\kappa T)^{3/2}}{n_e^{1/2} Z} \quad (13.23)$$

soit :

$$\Lambda = 8.26 \times 10^6 \frac{T^{3/2}}{Z n_e^{1/2}} \quad (\text{SI}) \quad (13.24)$$

1. Il est en fait à peu près évident physiquement que la superposition simultanée de faibles déviations, qui est la situation réelle, est équivalente à une suite de collisions dans le temps, qui est le modèle utilisé ici. Il suffit pour cela que les déviations soient aléatoires et faibles.

2. Certains auteurs utilisent pour caractériser l'importance des collisions lointaines des notations légèrement différentes :

Spitzer [313], Shkarofsky et al. [306] :  $\Lambda_{\text{Shkarofsky}} = (3/2)\Lambda$  et  $\bar{w}_e = (3\kappa T/m_e)^{1/2}$

Balescu [314] :  $\Gamma = (n_e^{1/3} e^2 / 4\pi \varepsilon_0 \kappa T) = \pi^{-1/3} \Lambda^{-2/3}$  ( $Z = 1$ )

Divers :  $n_D = \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_D^3 = Z\Lambda/6 =$  nombre d'électrons dans la sphère de Debye.

$$= 8.26 \times 10^3 \frac{T^{3/2}}{Z n_e^{1/2}} \quad (\text{CGS}) \quad (13.25)$$

$$= 1.03 \times 10^{10} \frac{(\kappa T)^{3/2}}{Z n_e^{1/2}} \quad (\text{eVcT}) \quad (13.26)$$

Nous avons vu d'ailleurs dans la section 3.5 qu'au-dessus de  $T_e = 4 \times 10^5$  K, il fallait apporter une légère correction d'origine quantique à  $\ln \Lambda$ . Les valeurs ainsi corrigées de  $\Lambda$  ont été données au chapitre 3 (cf. tableau 3.5).

On peut aussi expliciter  $\bar{\nu}_1$  en fonction de  $n_e$  et  $T$  ; on obtient avec les mêmes unités que dans (13.23) et (13.26) les formules pratiques très importantes :

$$\bar{\nu}_1 = \frac{2^{1/2}}{16 \pi \epsilon_0^2} \frac{e^4}{m_e^{1/2}} \frac{n_e Z}{(\kappa T)^{3/2}} \ln \Lambda \quad (13.27)$$

$$= 4.83 \cdot 10^{-6} \frac{n_e Z \ln \Lambda}{(\kappa T)^{3/2}} \quad (\text{SI}) \quad (13.28)$$

$$= 4.83 \frac{n_e Z \ln \Lambda}{(\kappa T)^{3/2}} \quad (\text{CGS}) \quad (13.29)$$

$$= 3.87 \cdot 10^{-6} \frac{n_e Z \ln \Lambda}{(\kappa T)^{3/2}} \quad (\text{eVcT}) \quad (13.30)$$

## 13.3 Coefficients de transport dans l'espace des vitesses

### 13.3.1 Définitions générales

L'analyse du paragraphe précédent a montré, sur le cas des collisions  $e-i$ , que les collisions lointaines, correspondant à des petits angles de déviation, jouent un plus grand rôle dans l'évolution statistique des électrons que les collisions proches. Profitant de cette propriété nous allons maintenant, pour étudier de façon plus générale toutes les interactions qui peuvent se produire dans un plasma, utiliser un formalisme introduit par Chandrasekhar [287, p. 89] à propos des amas d'étoiles et appliqué ensuite aux plasmas par Spitzer [313]. Pour cela considérons l'expérience idéale représentée sur la figure 13.2 : un faisceau de particules monocinétiques chargées d'espèce  $a$  pénètre en  $AA'$  dans une région où il y a d'autres particules chargées d'espèce  $b$ . La fonction de distribution  $f(\vec{w}_b)$  des vitesses des particules  $b$  est supposée homogène dans toute la région traversée par les particules  $a$ . On fait de plus pour étudier ce problème les hypothèses suivantes :

1. La densité du faisceau de particules  $a$  est assez faible pour que les interactions  $a$ - $a$  soient négligeables.
2. Les particules  $a$  se déplacent à l'intérieur du gaz de particules  $b$  en interagissant seulement avec les particules  $b$ .
3. Les interactions des particules  $a$  avec les particules  $b$  sont décrites comme une suite de collisions binaires lointaines se succédant de façon complètement aléatoire.

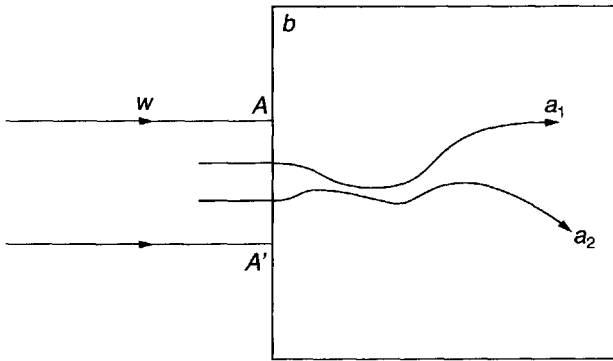


Figure 13.2 : Diffusion d'un faisceau de particules tests  $a$  par des particules cibles  $b$ .

- L'hypothèse 1) n'est pas critiquable : on peut toujours en pratique prendre une densité des particules  $a$  assez faible pour qu'elle soit satisfaite. On peut alors considérer que le faisceau des particules  $a$  est constitué par une suite de particules  $a$ , arrivant les unes après les autres à des intervalles de temps suffisamment grands ; on dit alors que les particules  $a$  constituent des particules "tests".
- L'hypothèse 2) est moins satisfaisante. En pratique, si l'on veut que la cible ait une densité suffisante, on est forcé de la constituer avec plusieurs espèces de particules constituant un milieu macroscopiquement neutre. L'application des résultats obtenus à l'étude des plasmas supposera que l'on superpose d'une certaine manière les effets des diverses espèces de particules  $b$ . Cette superposition ne sera en fait possible de façon simple que si l'on admet l'hypothèse 3) qui décrit les interactions comme une suite de collisions binaires sans corrélation entre elles.

- L'hypothèse 3) est la moins satisfaisante. La discussion faite au paragraphe précédent permet de prévoir qu'elle conduira à des divergences, et que celles-ci ne seront levées qu'en effectuant une coupure sur les paramètres d'impact. La justification exacte de cette coupure est en fait liée à une analyse des phénomènes dans laquelle on introduit les corrélations et les interactions collectives.

Quoi qu'il en soit, les diverses particules  $a$  ne suivent pas toutes la même trajectoire, ce qu'on a souligné dans la figure 13.2 en représentant deux trajectoires particulières suivies par les particules  $a_1$  et  $a_2$ . Le faisceau incident monocinétique subit donc une certaine dispersion des vitesses. On précise cette notion en introduisant des coefficients statistiques définis comme suit.

Si  $\vec{w}_a$  est la vitesse initiale d'une des particules  $a$ , on désigne par  $\vec{w}_a + \Delta\vec{w}_a$  la vitesse qu'elle a après un trajet de durée  $\Delta t$  à travers le gaz de particules  $b$ .  $\Delta\vec{w}_a$  varie d'une particule à une autre ; il est raisonnable toutefois d'admettre que la valeur moyenne de  $\Delta\vec{w}_a$  est proportionnelle à  $\Delta t$  ; on considère donc la valeur moyenne  $\Delta\vec{w}_a/\Delta t$  calculée sur un grand nombre de particules tests. On écrira cette grandeur  $\langle\Delta\vec{w}_a\rangle_b/\Delta t$ . Les composantes  $\langle\Delta w_{ax}\rangle_b/\Delta t$ ,  $\langle\Delta w_{ay}\rangle_b/\Delta t$ ,  $\langle\Delta w_{az}\rangle_b/\Delta t$  de  $\langle\Delta\vec{w}_a\rangle_b/\Delta t$  sont les coefficients de transport du premier ordre qu'on peut appeler *coefficients de déplacement dans l'espace des vitesses*.

On peut également considérer pour chaque particule le tenseur  $\Delta\vec{w}_a \Delta\vec{w}_a/\Delta t$  et la valeur moyenne  $\langle\Delta\vec{w}_a \Delta\vec{w}_a\rangle_b/\Delta t$  de ce tenseur calculée sur un grand nombre de particules tests. Les composantes de ce tenseur sont les coefficients de transport du second ordre ou *coefficients de diffusion dans l'espace des vitesses*.

De manière générale ces divers coefficients de transport sont fonctions de  $\vec{w}_a$  et de la distribution des vitesses  $f(\vec{w}_b)$  des particules cibles. Nous en donnons dans l'appendice A13-1 des expressions générales ; mais on peut remarquer tout de suite que si la fonction de distribution  $f(\vec{w}_b)$  des vitesses des particules cibles est *isotrope* on a par raison de symétrie, en prenant pour axe  $Oz$  la direction de la vitesse initiale :

$$\langle\Delta w_{ax}\rangle_b = \langle\Delta w_{ay}\rangle_b = 0 \quad (13.31)$$

$$\langle\Delta w_{ax} \Delta w_{ay}\rangle_b = \langle\Delta w_{ay} \Delta w_{az}\rangle_b = \langle\Delta w_{az} \Delta w_{ax}\rangle_b = 0 \quad (13.32)$$

et :

$$\langle\Delta w_{az}\rangle_b \neq 0 \quad (13.33)$$

$$\langle(\Delta w_{ax})^2\rangle_b = \langle(\Delta w_{ay})^2\rangle_b \neq 0 \quad (13.34)$$

$$\langle(\Delta w_{az})^2\rangle_b \neq 0 \quad (13.35)$$

Dans ce cas, il ne reste donc que trois coefficients distincts à considérer :  $\langle \Delta w_{az} \rangle_b / \Delta t$ ,  $\langle (\Delta w_{ax})^2 \rangle_b / \Delta t$  et  $\langle (\Delta w_{az})^2 \rangle_b / \Delta t$  que nous noterons maintenant  $\langle \Delta w_{a\parallel} \rangle_b / \Delta t$ ,  $\frac{1}{2} \langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t$  et  $\langle (\Delta w_{a\parallel})^2 \rangle_b / \Delta t$  ; on peut leur donner les noms suivants :

$$\begin{aligned} \langle \Delta w_{a\parallel} \rangle_b / \Delta t & \quad \text{coefficient de ralentissement} \\ \langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t & \quad \text{coefficient de dispersion angulaire} \\ \langle (\Delta w_{a\parallel})^2 \rangle_b / \Delta t & \quad \text{coefficient de dispersion longitudinale} \end{aligned}$$

Les deux premiers sont les plus importants. Ils ont un sens parfaitement clair. Le troisième intervient dans la quantité  $\langle (\Delta w_{a\parallel})^2 \rangle - \langle \Delta w_{a\parallel} \rangle^2$  qui est associée à la dispersion longitudinale des vitesses.

### 13.3.2 Collisions *e-i*. Relations avec les fréquences de relaxation

Dans le cas des collisions *e-i* le calcul des coefficients de transport se simplifie beaucoup ; on peut en effet alors supposer en première approximation que les ions sont immobiles et de masse infinie ; on obtient ainsi une description analogue à celle du modèle de Lorentz pour les collisions électron-neutre dans les gaz faiblement ionisés ; la fonction de distribution  $f(\vec{w}_b)$  des particules cibles s'élimine du calcul.

Considérons donc un électron de vitesse  $w_e$  qui circule dans le gaz d'ions ; pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  il parcourt une longueur  $dx = w_e \Delta t$  ; d'après la définition de la section efficace différentielle il effectue un nombre probable de collisions donnant lieu à une déviation comprise entre  $\chi$  et  $\chi + d\chi$  égal à :

$$n_i [\sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi] w_e \Delta t \quad (13.36)$$

Dans chacune de ces collisions sa variation de vitesse selon la direction initiale est :

$$\Delta w_{e\parallel} = -w_e (1 - \cos \chi) \quad (13.37)$$

La variation probable due aux collisions d'angle compris entre  $\chi$  et  $\chi + d\chi$  est :

$$\Delta w_{e\parallel} = -n_i w_e^2 (1 - \cos \chi) [\sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi] \Delta t \quad (13.38)$$

En ajoutant les contributions dues à tous les angles de déviation possibles, c'est-à-dire en intégrant sur  $\chi$ , on obtient :

$$\frac{\langle \Delta w_{e\parallel} \rangle_i}{\Delta t} = -n_i w_e^2 \int (1 - \cos \chi) \sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi \quad (13.39)$$

soit, compte tenu de la définition (12.26) de  $\nu_1$  :

$$\langle \Delta w_{e\parallel} \rangle_i / \Delta t \equiv -w_e \nu_1(w_e) \quad (13.40)$$

Soulignons que dans ce calcul nous avons admis qu'il y avait addition des variations de vitesse longitudinale  $\Delta w_{e\parallel}$  dues aux diverses collisions : ceci est valable si l'on a affaire à des collisions lointaines dont l'action globale ne donne qu'une faible déviation. La situation est différente pour les variations transversales de vitesse  $\Delta w_{e\perp}$  : ces déplacements s'effectuent en effet dans des directions réparties de façon aléatoire autour de l'axe du faisceau, de sorte que lorsque  $N$  déviations élémentaires identiques se produisent, la déviation statistique radiale résultante est égale à  $\sqrt{N}$  fois la déviation élémentaire ; ce sont donc les carrés des déviations  $(\Delta w_{e\perp})^2$  qui s'ajoutent (tout au moins si les déviations restent faibles). Le calcul de  $\langle (\Delta w_{e\perp})^2 \rangle$  se mène donc comme celui de  $\langle \Delta w_{e\parallel} \rangle$  et l'on a :

$$(\Delta w_{e\perp})^2 = n_i w_e^3 (1 - \cos^2 \chi) [\sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi] dt \quad (13.41)$$

soit, compte tenu de (13.9) :

$$\langle (\Delta w_{e\perp})^2 \rangle_i / \Delta t = \frac{2}{3} n_i w_e^3 \int [1 - P_2(\cos \chi)] \sigma(\chi) 2\pi \sin \chi d\chi \quad (13.42)$$

ou :

$$\langle (\Delta w_{e\perp})^2 \rangle_i / \Delta t \equiv \frac{2}{3} w_e^2 \nu_2(w_e) \quad (13.43)$$

On voit donc que le calcul des deux premiers coefficients de transport dans l'espace des vitesses se ramène à celui des deux premières fréquences de relaxation ; il soulève donc les mêmes difficultés dues à la divergence des intégrales à calculer. En faisant comme précédemment une coupure à la longueur de Debye, on obtient donc, en portant dans (13.40) et (13.43) les expressions (13.19) et (13.20) de  $\nu_1$  et  $\nu_2$  :

$$\langle \Delta w_{e\parallel} \rangle_i / \Delta t = -4\pi n_i w_e^2 p_o^2 \ln \Lambda \quad (13.44)$$

$$\langle (\Delta w_{e\perp})^2 \rangle_i / \Delta t = 8\pi n_i w_e^3 p_o^2 \ln \Lambda \quad (13.45)$$

### 13.3.3 Collisions $a$ - $b$ . Distribution maxwellienne dans la cible

Un calcul général des coefficients de transport dans l'espace des vitesses a été fait par MacDonald, Rosenbluth et Judd [230], [231] à partir des hypothèses que nous avons énoncées au paragraphe 13.3.1. Ce calcul est développé dans l'appendice A13-1. Il conduit aux formules suivantes pour des particules tests d'espèce  $a$  et des particules cibles d'espèce  $b$  :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} H_{ab} \quad (13.46)$$

$$\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} G_{ab} \quad (13.47)$$

avec :

$$\Gamma_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a} \right]^2 \ln \Lambda \quad (13.48)$$

$$H_{ab}(\vec{w}_a) = \frac{m_a + m_b}{m_b} \int \frac{f(\vec{w}_b)}{|\vec{w}_a - \vec{w}_b|} d\vec{w}_b \quad (13.49)$$

$$G_{ab}(\vec{w}_a) = \int |\vec{w}_a - \vec{w}_b| f(\vec{w}_b) d\vec{w}_b \quad (13.50)$$

Si la fonction de distribution  $f(\vec{w}_b)$  des particules cibles est maxwellienne, il n'y a plus que trois coefficients scalaires à considérer et l'on obtient (cf. appendice A13-1) pour les deux premiers :

$$\langle \Delta \vec{w}_{a\parallel} \rangle_b / \Delta t = -\frac{n_b}{2\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a \bar{w}_b} \right]^2 \left( 1 + \frac{m_a}{m_b} \right) R(u_{ab}) \ln \Lambda \quad (13.51)$$

$$\langle (\Delta \vec{w}_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t = \frac{n_b}{2\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a} \right]^2 \frac{1}{\bar{w}_b} S(u_{ab}) \ln \Lambda \quad (13.52)$$

avec :

$$u_{ab} = \frac{w_a}{\bar{w}_b} \quad (13.53)$$

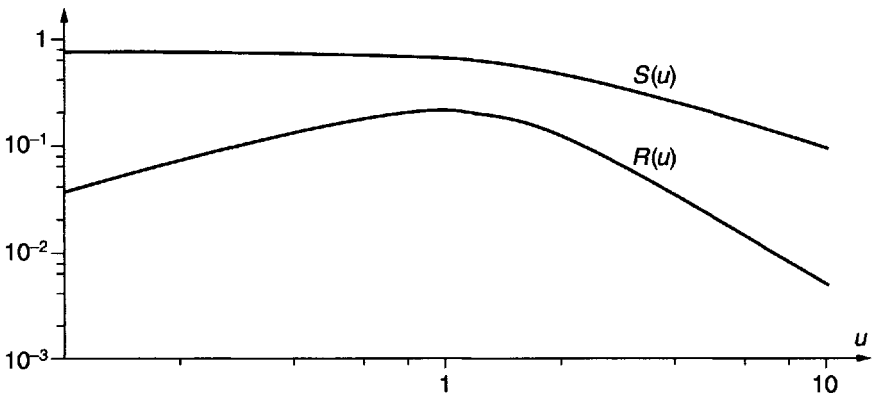
$\bar{w}_b$  étant la vitesse la plus probable  $\sqrt{2\kappa T_b / m_b}$  des particules cibles. Les fonctions  $R(u)$  et  $S(u)$  sont explicitées dans l'appendice A13-1 [cf. formules (13.63) et (13.65)]. Leurs principales propriétés sont résumées dans le tableau 13.1 et sur la figure 13.3.

On voit que  $R(u)$  est maximum pour  $u = 1$ . On en déduit la propriété physique intéressante que le *ralentissement* d'un faisceau de particules d'espèce  $a$  par les particules d'espèce  $b$  est maximum quand la *vitesse*

$u$	0	$\ll 1$	1	$\gg 1$	$\infty$
$R(u)$	0	$0.376 u$	0.214	$1/2 u^2$	0
$S(u)$	0.752		0.629	$1/u$	0

Tableau 13.1 : Propriétés des fonctions  $R(u)$  et  $S(u)$ .

$w_a$  des particules incidentes est égale à la vitesse la plus probable  $\bar{w}_b$  des particules  $b$  dans la cible. Ce résultat peut être relié au fait que la section efficace de Rutherford est une fonction décroissante de l'énergie du mouvement relatif. Il est donc normal que l'on ait un maximum d'interaction quand  $w_a = \bar{w}_b$  parce qu'alors il y a un maximum du nombre de particules  $b$  ayant une faible vitesse relative par rapport aux particules  $a$ .

Figure 13.3 : Variations de  $R(u)$  ( $\sim$ ralentissement) et de  $S(u)$  ( $\sim$ déflexion).



### 13.3.4 Coefficients de ralentissement dans un plasma

#### a) Règle d'addition

Considérons maintenant le cas, plus réel que celui décrit dans les paragraphes précédents, où un faisceau de particules d'espèce  $a$  pénètre dans un plasma macroscopiquement neutre (Fig. 13.4). Pour simplifier l'écriture on suppose que ce plasma est constitué d'électrons et d'une seule espèce d'ions de charge  $q_i = -Z q_e$ . On admet par ailleurs que les distributions de vitesses des électrons et des ions sont toutes deux maxwelliennes avec  $T_e = T_i$ .

Les coefficients de transport des particules  $a$  sont dus à l'action des électrons et des ions du plasma ; on suppose que ces actions s'additionnent purement et simplement, de sorte que l'on a :

$$\langle \Delta w_{a\parallel} \rangle = \langle \Delta w_{a\parallel} \rangle_e + \langle \Delta w_{a\parallel} \rangle_i \quad (13.54)$$

$$\langle (\Delta \vec{w}_{a\perp})^2 \rangle = \langle (\Delta \vec{w}_{a\perp})^2 \rangle_e + \langle (\Delta \vec{w}_{a\perp})^2 \rangle_i \quad (13.55)$$

Cette règle de superposition est évidemment satisfaite quand on décrit les interactions comme une suite de collisions binaires sans corrélations : elle est donc soumise aux mêmes incertitudes que les formules des paragraphes précédents.

#### b) Ralentissement d'un faisceau d'électrons

La formule (13.51) appliquée à un faisceau d'électrons donne, compte tenu de la condition  $m_e \ll m_i$  :

$$\langle \Delta w_{e\parallel} \rangle_e / \Delta t = - \frac{n_e}{2\pi \epsilon_0^2} \left( \frac{e^2}{m_e \bar{w}_e} \right)^2 2 R(u_{ee}) \ln \Lambda \quad (13.56)$$

$$\langle \Delta w_{e\parallel} \rangle_i / \Delta t = - \frac{n_i}{2\pi \epsilon_0^2} \left( \frac{Z e^2}{m_e \bar{w}_i} \right)^2 R(u_{ei}) \ln \Lambda \quad (13.57)$$

d'où l'on déduit par addition :

$$\langle \Delta w_{e\parallel} \rangle_{e,i} / \Delta t = - \frac{n_e}{2\pi \epsilon_0^2} \left( \frac{e^2}{m_e \bar{w}_e} \right)^2 A(w_e) \ln \Lambda \quad (13.58)$$

avec :

$$A(w_e) = 2 R(u_{ee}) + Z^2 \frac{m_i}{m_e} R(u_{ei}) \quad (13.59)$$

La figure 13.5(a) représente les variations de  $A(w_e)$  avec  $w_e$  en supposant à titre d'exemple  $Z = 1$  et  $m_i/m_e = 1836$  (cas d'un plasma d'hydrogène atomique).

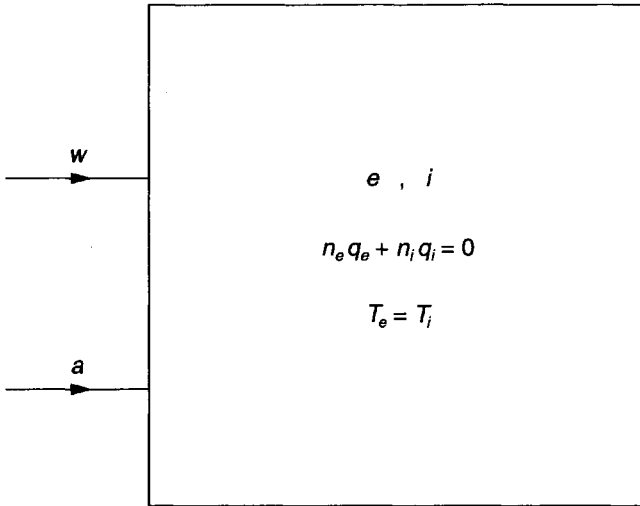


Figure 13.4 : Diffusion d'un faisceau de particules tests  $a$  dans un plasma en équilibre thermique.

On peut appeler *électrons thermiques* ceux d'un faisceau où l'on aurait  $w_e = \bar{w}_e$ . L'analyse de la figure 13.5 montre que le *ralentissement* d'un faisceau d'électrons thermiques ou suprathermiques ( $w_e \geq \bar{w}_e$ ) s'effectue de façon à peu près égale *sur les électrons et sur les ions* du plasma. On vérifie d'autre part facilement que la formule (13.58) redonne l'expression (13.44) lorsque  $w_e \gg \bar{w}_e$ .

### c) Ralentissement d'un faisceau d'ions

En faisant le même calcul pour les ions on obtient :

$$\langle \Delta w_{i\parallel} \rangle_{e,i} / \Delta t = - \frac{n_e}{2\pi \epsilon_0^2} \left( \frac{e^2}{m_e \bar{w}_e} \right)^2 B(w_i) \ln \Lambda \quad (13.60)$$

avec :

$$B(w_i) = Z^2 \frac{m_e}{m_i} [R(u_{ie}) + 2Z R(u_{ii})] \quad (13.61)$$

La figure 13.5(b) représente les variations de  $B(w_i)$  (toujours dans le cas particulier  $Z = 1$  et  $m_i/m_e = 1836$ ). Si l'on appelle maintenant *ions thermiques* les ions tels que  $w_i = \bar{w}_i$  on voit sur cette figure que le ralentissement d'un faisceau d'ions thermiques s'effectue *principalement sur les ions du plasma*. Il en est de même pour les ions suprathermiques jusqu'à

une valeur de  $w_i$  de l'ordre de  $(m_i/m_e)^{1/4} \bar{w}_i$ . Au-delà de cette valeur le ralentissement d'un faisceau d'ions se fait principalement sur les électrons. Cette propriété qui est en opposition avec les idées habituelles sur le ralentissement de particules par collisions (ralentissement maximum quand les particules cibles ont la même masse que les particules incidentes) est liée à la présence du facteur  $\mu g^2$  au dénominateur de la formule de Rutherford, qui montre que les collisions les plus efficaces sont celles où la vitesse relative est la plus faible. Or la vitesse des ions rapides est évidemment plus proche de celle des électrons thermiques que de celle des ions thermiques.

### 13.3.5 Coefficients de dispersion angulaire dans un plasma

Des calculs analogues donnent pour les coefficients de dispersion angulaire :

$$\langle (\Delta w_{e\perp})^2 \rangle_{e,i} / \Delta t = \frac{n_e}{2\pi \epsilon_0^2} \left( \frac{e^2}{m_e} \right)^2 \frac{1}{\bar{w}_e} C(w_e) \ln \Lambda \quad (13.62)$$

$$\langle (\Delta w_{i\perp})^2 \rangle / \Delta t = \frac{n_e}{2\pi \epsilon_0^2} \left( \frac{e^2}{m_e} \right)^2 \frac{1}{\bar{w}_e} D(w_i) \ln \Lambda \quad (13.63)$$

avec :

$$C(w_e) = S(u_{ee}) + Z \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} S(u_{ei}) \quad (13.64)$$

$$D(w_i) = \left( \frac{Z m_e}{m_i} \right)^2 \left[ S(u_{ie}) + Z \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} S(u_{ii}) \right] \quad (13.65)$$

Les figures 13.5(c) et 13.5(d) représentent les variations de  $C(w_e)$  et  $D(w_i)$  (dans le cas particulier  $Z = 1$  et  $m_i/m_e = 1836$ ). On y voit que :

- la dispersion angulaire d'un faisceau d'électrons thermiques ou suprathermiques se fait de façon à peu près égale sur les électrons et sur les ions du plasma ;

- la dispersion angulaire d'un faisceau d'électrons hypothermiques se fait principalement sur les ions du plasma ;

- la dispersion angulaire des ions est plus faible que celle des électrons dans un rapport qui est de l'ordre de  $(Z m_e/m_i)^2$  ;

- la dispersion angulaire d'un faisceau d'ions thermiques ou légèrement suprathermiques ( $w_i < \bar{w}_i (m_i/m_e)^{1/2}$ ) se fait principalement sur les ions du plasma ;

- la dispersion angulaire d'un faisceau d'ions fortement suprathermiques ( $w_i > (m_i/m_e)^{1/2} \bar{w}_i$ ) se fait de façon à peu près égale sur les électrons et sur les ions du plasma.

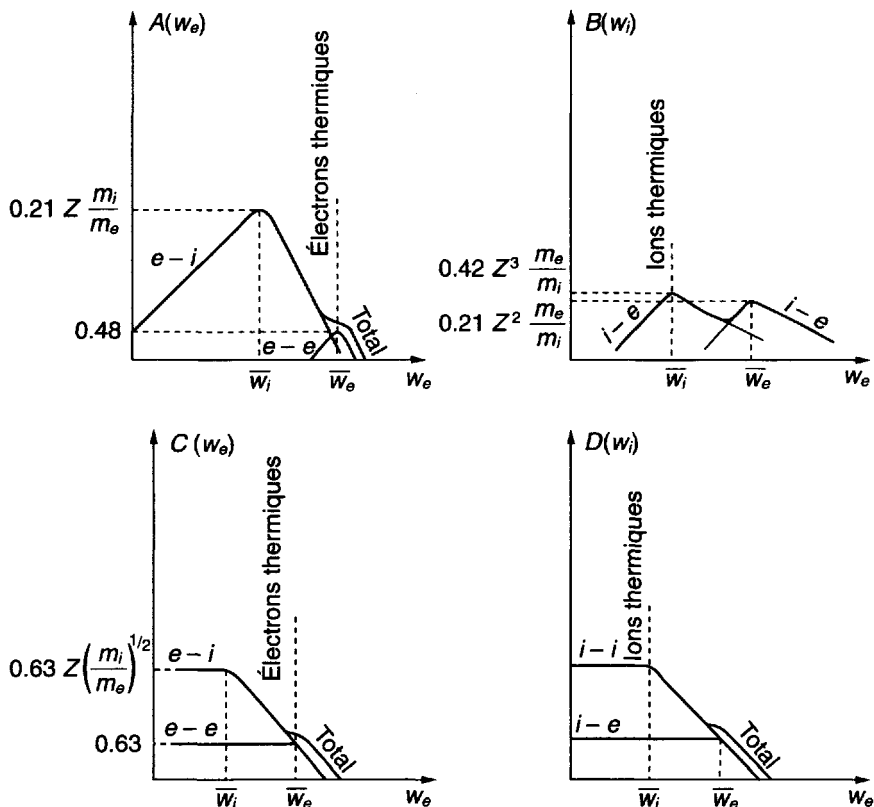


Figure 13.5 : Coefficients de transport dans un plasma en équilibre thermique.

- A Ralentissement d'un faisceau d'électrons.
- B Ralentissement d'un faisceau d'ions.
- C Dispersion angulaire d'un faisceau d'électrons.
- D Dispersion angulaire d'un faisceau d'ions.

Les axes de coordonnées sont gradués en coordonnées logarithmiques ; voir dans le texte les constantes de proportionnalité qui permettent de passer des fonctions  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  aux coefficients de transport.

## 13.4 Les temps de relaxation dans un plasma

### 13.4.1 Définitions

À partir des coefficients de transport dans l'espace des vitesses on peut définir des temps de relaxation. Si les particules cibles  $b$  ont une distribution isotrope on introduit pour un faisceau incident de particules  $a$  les deux temps caractéristiques :

$$(t_r)_{ab} = -\frac{w_a \Delta t}{\langle \Delta w_{a\parallel} \rangle_b} \quad \text{temps de relaxation de ralentissement} \quad (13.66)$$

$$(t_D)_{ab} = \frac{w_a^2 \Delta t}{\langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b} \quad \text{temps de relaxation de déflexion} \quad (13.67)$$

Si l'on admet des règles d'addition (13.54) et (13.55) on peut définir des temps de relaxation totaux du faisceau de particules  $a$ , au moyen des formules :

$$\frac{1}{(t_r)_a} = \sum_b \frac{1}{(t_r)_{ab}} \quad (13.68)$$

$$\frac{1}{(t_D)_a} = \sum_b \frac{1}{(t_D)_{ab}} \quad (13.69)$$

Ces temps de relaxation sont utiles pour étudier de façon semi-quantitative l'évolution du faisceau incident :  $t_r$  donne l'ordre de grandeur du temps au bout duquel  $w_a$  s'annule et  $t_D$  l'ordre de grandeur du temps au bout duquel la divergence du faisceau devient importante. On peut remarquer que les relations telles que (13.66) et (13.67) par exemple sont en fait des relations différentielles qu'on peut écrire aussi :

$$\frac{d\langle w_{a\parallel} \rangle}{dt} = -\frac{w_a}{t_r} \quad (13.70)$$

$\langle w_{a\parallel} \rangle$  étant à l'instant  $t$  la valeur probable de la vitesse des particules du faisceau selon la direction initiale de  $\vec{w}_a$ . Cependant on ne peut pas intégrer cette équation en considérant  $t_r$  comme constant ; d'autre part elle n'est évidemment valable que pendant une période initiale où  $\langle w_{a\parallel} \rangle$  reste voisin de  $w_a$  et la divergence du faisceau assez faible. Au-delà de cet intervalle de temps il faut écrire une équation d'évolution pour la fonction de distribution  $f(\vec{w}_a)$  des particules tests ; il est évident que cette équation devra tenir compte du fait que les temps de relaxation varient avec  $w_a$ . Nous l'établirons sous la forme dite de *Fokker-Planck* dans la section 13.5, puis nous étudierons de façon plus générale les équations cinétiques des plasmas dans la section 13.6.

### 13.4.2 Temps de relaxation moyens dans un plasma

Les temps de relaxation définis par les formules (13.66) à (13.69) sont des fonctions de  $w_a$ . Nous avons vu la signification physique qu'ils ont dans les conditions expérimentales rappelées sur la figure 13.4.

On introduit souvent des temps de relaxation moyens  $\bar{t}_r$  et  $\bar{t}_D$  correspondant à un faisceau incident d'électrons ou d'ions "thermiques", c'est-à-dire ayant une vitesse initiale égale à la vitesse la plus probable des particules de même espèce dans le plasma. L'intérêt de cette définition est qu'elle est applicable aux particules mêmes du plasma : on peut par la pensée (Fig. 13.6) sélectionner dans un plasma les particules qui ont un vecteur vitesse  $\vec{w}_e$  ou  $\vec{w}_i$  donné : elles constituent un faisceau ; il est évident que les faisceaux les plus abondants sont les faisceaux *thermiques* correspondant à  $w_e = \bar{w}_e$  ou  $w_i = \bar{w}_i$ . Les temps de relaxation moyens sont ceux de ces faisceaux thermiques ; ils permettent de se faire une idée semi-quantitative des propriétés des plasmas légèrement perturbés.

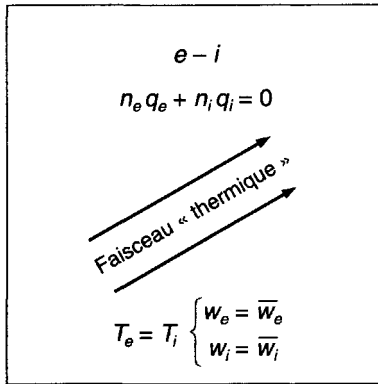


Figure 13.6 : Faisceau thermique dans un plasma.

Le calcul des temps de relaxation moyens se fait facilement à partir des formules du paragraphe 13.3. Les résultats de ce calcul sont rassemblés dans le tableau 13.2 en exprimant tous les temps en fonction de  $1/\bar{\nu}_1$ , où  $\bar{\nu}_1$  est la fréquence de relaxation moyenne pour les collisions  $e-i$  définie par les formules (13.21) ou (13.30).

En analysant ce tableau on peut faire les remarques suivantes :

- Les temps de relaxation des *électrons* sont tous voisins de  $1/\bar{\nu}_1$ .
- Les temps de relaxation des *ions entre eux* sont de l'ordre de  $(m_i/m_e)^{1/2}/\bar{\nu}_1$ .

	<i>e-i</i>	<i>e-e</i>	<i>i-i</i>	<i>i-e</i>
$\overline{t_r}$	$\frac{1}{\nu_1}$	$\frac{1.17 Z}{\nu_1}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{1.17}{Z^2 \nu_1}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right) \frac{1.33}{Z \nu_1}$
$\overline{t_D}$	$\frac{0.5}{\nu_1}$	$\frac{0.79 Z}{\nu_1}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{0.79}{Z^2 \nu_1}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right) \frac{0.64}{Z \nu_1}$

Tableau 13.2 : Temps de relaxation moyens dans un plasma.

	<i>e-i</i>	<i>e-e</i>	<i>i-i</i>	<i>i-e</i>
$\overline{t_r}$	$\frac{1}{\nu_1(x)}$	$\frac{0.5 Z}{\nu_1(x)}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{0.5}{Z^2 \nu_1(x)}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{1}{Z \nu_1(x)}$
$\overline{t_D}$	$\frac{0.5}{\nu_1(x)}$	$\frac{0.5 Z}{\nu_1(x)}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{0.5}{Z^2 \nu_1(x)}$	$\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2} \frac{0.5}{Z \nu_1(x)}$

Domaine de validité

$w_e \gg \overline{w_i}$ soit : $x \gg \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$	$w_e \gg \overline{w_e}$ soit : $x \gg 1$	$w_i \gg \overline{w_i}$ soit : $x \gg 1$	$w_i \gg \overline{w_e}$ soit : $x \gg \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$
--	---	---	--

Tableau 13.3 : Temps de relaxation des particules suprathermiques dans un plasma (particules ayant une vitesse égale à *x* fois la vitesse la plus probable).

- Les temps de relaxation des *ions sur les électrons* sont de l'ordre de  $(m_i/m_e)/\bar{\nu}_1$  ; autrement dit les collisions *i-e* jouent un rôle peu important en ce qui concerne l'évolution des ions.

Les temps de relaxation pour des faisceaux *suprathermiques* diffèrent notablement de ces temps moyens. On peut par exemple refaire le tableau pour des particules ayant une vitesse  $w_e = x \bar{w}_e$  ou  $w_i = x \bar{w}_i$  (avec  $x \gg 1$ ). On se place alors sur les courbes de la figure 13.5 dans les parties asymptotiques situées à droite ; on en déduit facilement, compte tenu des expressions approchées de  $R(u)$  et  $S(u)$  pour  $u \gg 1$ , les résultats rassemblés dans le tableau 13.3.

Dans ce deuxième tableau on a exprimé tous les temps de relaxation en fonction de :

$$\nu_1(x) = \bar{\nu}_1/x^3 \quad (13.71)$$

En comparant ces résultats à ceux du tableau 13.2 on voit que l'ensemble de tous les temps de relaxation est multiplié par  $x^3$ . *Les particules suprathermiques relaxent  $x^3$  fois plus lentement que les particules thermiques.* Il apparaît d'autre part des changements importants en ce qui concerne les ions ; alors que pour les ions thermiques ralentissement et dispersion angulaire se font à peu près à la même vitesse et principalement par l'action des collisions  $i-i$ , on trouve que pour les ions suprathermiques le ralentissement est le phénomène le plus rapide et se fait principalement sur les électrons, comme nous l'avons déjà signalé.

### 13.4.3 Relation entre les deux fréquences fondamentales $\omega_p$ et $\nu_1$

Les discussions des paragraphes précédents nous ont amené à définir pour tout plasma la fréquence fondamentale  $\bar{\nu}_1$  [cf. (13.30)] qui est une fréquence de relaxation par collisions. Nous l'appellerons souvent simplement fréquence de collisions.

Or il y a dans un plasma une autre fréquence fondamentale, la fréquence de plasma définie par sa pulsation :

$$\omega_p = \left[ \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right]^{1/2} \quad (13.72)$$

Celle-ci est, comme nous l'avons vu, une fréquence d'oscillation de charge d'espace ; elle est donc liée au comportement collectif du plasma.

Il est intéressant de comparer les deux fréquences fondamentales  $\bar{\nu}_1$  et  $\nu_p = \omega_p / 2\pi$ . En remplaçant les constantes fondamentales par leur valeur



on obtient :

$$\frac{\bar{\nu}_1}{\nu_p} = 4.44 \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \quad (13.73)$$

Pour discuter cette formule il est commode de rechercher comme dans la section 1.6, sur le diagramme  $x = \log_{10} n_e$ ,  $y = \log_{10} T_e$ , le lieu des points où l'on a  $\nu_p = \bar{\nu}_1$ . Celui-ci est défini par l'équation :

$$y - \frac{x}{3} + 2.18 - \frac{2}{3} \log Z \ln \Lambda = 0 \quad (\text{CGS}) \quad (13.74)$$

Le double logarithme ayant une variation très lente, la courbe décrite par cette équation est très approximativement une droite de pente 1/3. En se reportant à la figure 1.11 on voit que cette droite est très voisine de la droite  $r_o = \lambda_D$ . On en conclut que *dans les plasmas cinétiques classiques on a* :

$$\bar{\nu}_1 \ll \nu_p \quad (13.75)$$

Par exemple pour  $n_e = 10^{12}$ ,  $T = 10^4$  K et  $Z = 1$  on a  $\nu_p = 9000$  MHz et  $\bar{\nu}_1 = 45$  MHz. L'inégalité (13.75) est une propriété très importante des plasmas cinétiques ; elle conduit à définir pour l'évolution d'un plasma deux échelles de temps très différentes :

- les propriétés collectives se manifestent sur des intervalles de temps "courts" de l'ordre de  $t_p = 1/\nu_p$  ;
- les propriétés liées aux collisions binaires se manifestent sur des intervalles de temps "longs" de l'ordre de  $t_r = 1/\bar{\nu}_1$ .

## 13.5 Équation de Fokker-Planck

Si l'on admet toujours que les collisions lointaines sont d'importance prédominante dans un plasma, on ne peut plus en principe utiliser comme équation d'évolution d'une fonction de distribution l'équation de Boltzmann habituelle. Celle-ci suppose en effet que les collisions sont des phénomènes binaires bien définis. On peut par contre écrire une équation de conservation dans l'espace des vitesses à partir des coefficients de transport définis dans la section 13.3. Les collisions lointaines produisent en effet dans l'espace des vitesses  $\vec{w}_a$  un flux  $\vec{j}_{ab}$  qui se déduit des coefficients  $\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$  et  $\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$  par la formule :

$$\vec{j}_{ab} = f_a \langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t + \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot f_a \langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t \quad (13.76)$$

Au deuxième membre de cette équation, le premier terme représente l'effet de déplacement moyen des vitesses  $\vec{w}_a$ . On peut d'ailleurs l'écrire en introduisant la force moyenne de friction des particules  $a$  sur les particules

$b$  par la relation :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t \equiv - \frac{\vec{F}_{ab}}{m_a} \quad (13.77)$$

Le deuxième terme représente un phénomène de diffusion (c'est-à-dire de dispersion moyenne des vitesses  $\vec{w}_a$ ) qu'on peut écrire en introduisant le coefficient (tensoriel) de diffusion<sup>3</sup>  $\overline{\overline{D_{ab}}}$  des particules  $a$  dans le gaz de particules  $b$  défini par la relation :

$$\frac{1}{2} \langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t \equiv \overline{\overline{D_{ab}}} \quad (13.78)$$

On peut donc écrire  $\vec{j}_{ab}$  sous la forme équivalente :

$$\vec{j}_{ab} = -f_a \frac{\vec{F}_{ab}}{m_a} + \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot f_a \overline{\overline{D_{ab}}} \quad (13.79)$$

En additionnant les effets sur les particules  $a$  de toutes les espèces de particules  $b$  (y compris les particules  $a$  elles-mêmes), on obtient le vecteur flux total produit dans l'espace des vitesses  $\vec{w}_a$  par les collisions lointaines, soit :

$$\vec{j}_a = \sum_b \vec{j}_{ab} \quad (13.80)$$

et l'on peut donc écrire dans cet espace l'équation de conservation des particules :

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot \vec{j}_a = 0 \quad (13.81)$$

En rajoutant au premier membre les termes habituels de diffusion dans l'espace ordinaire et d'accélération par la force extérieure, on obtient l'équation connue sous le nom d'équation de Fokker-Planck :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{w}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{w}_a} = \\ \sum_b \left[ \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot f_a \frac{\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot f_a \frac{\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b}{\Delta t} \right] \end{aligned} \quad (13.82)$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme équivalente :

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{w}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{w}_a} = \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot \vec{j}_{ab} \quad (13.83)$$

3. On peut montrer [288, p. 33] l'équivalence entre la définition du coefficient de diffusion par la formule (13.78) associée à la statistique de petits mouvements aléatoires et sa définition à partir du courant de diffusion dans un milieu inhomogène (cf. section 12.8.3).

avec :

$$\vec{j}_{ab} = f_a \langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t + \frac{\partial}{\partial w_a} \cdot f_a \langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t \quad (13.84)$$

et :

$$\vec{F}_a = \sum \vec{F}_{ab} \quad (13.85)$$

$$\overline{\overline{D}}_{ab} = \sum \overline{\overline{D}}_{ab} \quad (13.86)$$

Les coefficients de transport dans l'espace des vitesses peuvent être explicités au moyen des formules de Rosenbluth (13.46) à (13.50). On obtient alors, pour déterminer les fonctions de distributions  $f_a$ ,  $f_b$ , etc., un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires du quatrième ordre et à quatre variables. La solution de ce système dans le cas général est un problème quasi désespéré sauf par des méthodes numériques ; heureusement, dans de nombreux cas, on peut le simplifier si on étudie des fonctions de distributions qui présentent certaines lois de symétrie.

On peut d'abord supposer que les fonctions de distributions présentent localement une symétrie de révolution autour d'un certain axe ; ce sera le cas par exemple si on se propose d'étudier l'action d'un champ électrique uniforme sur le plasma. On peut alors prendre des coordonnées sphériques usuelles  $w$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  autour de cet axe et,  $\varphi$  n'intervenant pas, exprimer l'équation de Fokker-Planck en fonction de  $w$  et  $\mu = \cos \theta$  ; l'essentiel étant le calcul du deuxième membre  $(\frac{\partial f_a}{\partial t})_{\text{coll}}$ . de cette équation, on montre [230] qu'il peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{2w^2}{\Gamma_a} \frac{\partial f_a}{\partial t} \text{ coll.} &= \frac{\partial}{\partial w} \left[ f_a \left( -2w^2 \frac{\partial h_a}{\partial w} - 2 \frac{\partial g}{\partial w} + \frac{2\mu}{w} \frac{\partial g}{\partial \mu} - \frac{1-\mu^2}{w} \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ f_a \left( -2(1-\mu^2) \frac{\partial h_a}{\partial \mu} + \frac{2\mu}{w} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{2}{w^2} \frac{\partial g}{\partial \mu} + \frac{2(1-\mu^2)}{w} \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial \mu} + \frac{\mu(1-\mu^2)}{w^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[ f_a \left( w^2 \frac{\partial^2 g}{\partial w^2} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial w \partial \mu} \left[ 2f_a(1-\mu^2) \left( -\frac{1}{w} \frac{\partial g}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 g}{\partial w \partial \mu} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \left[ f_a \left( \frac{1-\mu^2}{w} \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\mu(1-\mu^2)}{w^2} \frac{\partial g}{\partial \mu} + \frac{(1-\mu^2)^2}{w^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (13.87)$$

les fonctions  $h_a$  et  $g$  pouvant elles-mêmes être explicitées sous forme d'intégrales assez compliquées. Nous n'écrirons pas ces intégrales mais seulement le résultat de leur calcul quand les fonctions  $f_a$ ,  $f_b$ , ... sont développées en une série de polynômes de Legendre. Si on pose :

$$f_a = \sum_n a_n^{(a)}(w) P_n(\cos \theta) \quad (13.88)$$

on montre [230] qu'on en déduit assez facilement les développements des fonctions  $g$  et  $h$  au moyen des formules :

$$h_a = \sum_n \sum_b \frac{m_a + m_b}{m_b} A_n^{(b)}(w) P_n(\cos \theta) \quad (13.89)$$

$$g = \sum_n \sum_b B_n^{(b)}(w) P_n(\cos \theta) \quad (13.90)$$

avec :

$$A_n^{(b)}(w) = \frac{4\pi}{2n+1} \left[ \int_0^\infty \frac{x^{n+2}}{w} a_n^{(b)}(x) dx + \int_w^\infty \frac{w^n}{x^{n-1}} a_n^{(b)}(x) dx \right] \quad (13.91)$$

$$B_n^{(b)}(w) = \frac{-4\pi}{4n^2-1} \times \left[ \int_0^\infty \frac{x^{n+2}}{w^{n-1}} \left( 1 - \frac{(n-1/2)x^2}{(n+1/2)w^2} \right) a_n^{(b)}(x) dx + \int_w^\infty \frac{w}{x^{n-3}} \left( 1 - \frac{(n-1/2)w^2}{(n+1/2)x^2} \right) a_n^{(b)}(x) dx \right] \quad (13.92)$$

Dans l'appendice A13-3 et dans la section 13.7 nous appliquerons ces formules à l'étude de deux problèmes importants relativement simples : la maxwellianisation des électrons par interactions entre eux (théorème H) et le calcul de la conductivité électrique d'un plasma.

## 13.6 Équations cinétiques des plasmas

Revenons maintenant au problème fondamental de la théorie cinétique des plasmas complètement ionisés, c'est-à-dire à la recherche d'équations cinétiques, décrivant l'évolution des fonctions de distribution simples relatives aux divers types de particules contenus dans le plasma. Ce problème est difficile car on doit *a priori* tenir compte des interactions binaires entre particules, des interactions lointaines multiples et du comportement collectif du plasma. Nous passons en revue dans cette section les principales formes d'équation cinétique qui ont été proposées par les divers auteurs ; pour une étude plus détaillée de ce sujet le lecteur pourra se reporter aux références [319], [314], [307], [97], [98].

L'analyse générale des méthodes de déduction de ces diverses équations cinétiques conduit, comme nous l'avons dit au chapitre 1, à distinguer deux "échelles" de temps. Sur des intervalles de temps de l'ordre de grandeur  $1/\omega_p$  ("échelle des temps courts") le comportement du plasma est déterminé essentiellement par les interactions collectives, et est décrit en première approximation par l'équation de Vlasov (8.57). Sur des intervalles de temps de l'ordre de grandeur de  $1/\nu_1 \gg 1/\omega_p$  ("échelle des temps longs") les collisions (essentiellement les collisions lointaines) jouent un rôle important et le comportement du plasma est décrit par des équations cinétiques irréversibles analogues à l'équation de Boltzmann.

### 13.6.1 Forme générale pour les collisions lointaines

De manière générale l'équation cinétique relative aux particules d'espèce  $a$  peut s'écrire :

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{w}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}'} + \frac{\vec{X}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{w}_a} = \sum_b C_{ab} \quad (13.93)$$

Dans cette formule  $\vec{X}_a$  désigne la force d'origine extérieure appliquée aux particules  $a$  et  $C_{ab}$  représente l'effet des interactions des particules  $a$  avec les particules  $b$  ; la sommation sur les  $C_{ab}$  s'étend à toutes les espèces de particules  $b$  présentes dans le plasma, y compris les particules  $a$  elles-mêmes. Nous avons vu au chapitre 8 que  $C_{ab}$  s'exprime de façon rigoureuse au moyen des fonctions de distribution doubles, de sorte que l'équation (13.93) ne peut en principe déterminer  $f_a$  que si l'on connaît toutes les fonctions de distribution doubles  $f_{ab12}$ . Pour la transformer en une équation cinétique complètement déterminée, il faut pouvoir écrire  $C_{ab}$  sous forme d'une fonctionnelle des fonctions de distribution simples  $f_a$  et  $f_b$ . Il faut pour cela faire des approximations : les nombreux auteurs qui ont étudié ce problème ont utilisé diverses méthodes d'approximations ; la figure 13.7 et le tableau 13.4 que nous allons discuter dans les paragraphes qui suivent représentent une synthèse des diverses équations obtenues et de leurs relations mutuelles. On peut faire à leur sujet deux remarques générales :

a) Pour toutes ces équations sauf pour l'équation de Boltzmann qui a peu d'intérêt dans les gaz fortement ionisés, les termes  $C_{ab}$  peuvent se mettre sous la forme :

$$C_{ab} = - \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot \vec{J}_{ab} \quad (13.94)$$

Autrement dit,  $C_{ab}$  se présente comme la divergence dans l'espace des vitesses  $\vec{w}_a$  d'un flux  $\vec{J}_{ab}$  dans ce même espace, dû aux interactions. Le fait que toutes ces équations se mettent sous cette forme tient à ce que les collisions dominantes sont des collisions lointaines, produisant pour chaque particule une somme de petits déplacements dans l'espace des vitesses.

b) Les équations cinétiques peuvent d'autre part se ranger en deux classes fondamentalement différentes :

- Les unes sont des *équations locales* (Boltzmann, Landau, Fokker-Planck) en ce sens que  $C_{ab}$  ne fait intervenir que les valeurs de  $f_a$  et  $f_b$  au point  $\vec{r}'$  où l'on calcule l'évolution de  $f_a$ .
- Les autres sont des *équations non locales* (Vlasov) en ce sens que  $C_{ab}$  y fait intervenir les valeurs de  $f_b$  non seulement au point  $\vec{r}'$  mais également en tous les autres points de l'espace.

Dans les équations locales il faut toutefois remarquer que  $C_{ab}$  peut *a priori* dépendre de la force extérieure  $\vec{X}_a$  ainsi que des gradients  $\partial f_a / \partial \vec{r}$  et  $\partial f_b / \partial \vec{r}$  (quand ces gradients interviennent on pourrait dire que l'équation est semi-locale). Ces effets sont assez difficiles à évaluer (cf. par exemple [314]) ; aussi l'on se contente en général de calculer  $C_{ab}$  en supposant le gaz homogène et sans force extérieure : on obtient ainsi une valeur  $C_{ab}^0$  du terme d'interaction. On convient donc de se limiter à l'étude d'états dans lesquels la force extérieure et les effets d'inhomogénéité peuvent être considérés comme de petites perturbations. Il est raisonnable de penser que l'on a :

$$C_{ab} = C_{ab}^0 + C'_{ab} \quad (13.95)$$

$C'_{ab}$  étant un terme correctif tenant compte des effets de gradient et de force extérieure. En négligeant les  $C'_{ab}$  on peut écrire (13.93) sous la forme :

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{w}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{w}_a} = \sum_b C_{ab}^0 \quad (13.96)$$

Il est entendu que cette équation n'est applicable que lorsque l'on peut écrire :

$$f_a = f_a^0 + f_a^1 \quad (13.97)$$

avec :

$$f_a^0 \equiv f_a^0(\vec{w}_a, t) \quad (13.98)$$

$$f_a^1 \equiv f_a^1(\vec{r}, \vec{w}_a, t) \quad (13.99)$$

$$|f_a^1| \ll |f_a^0| \quad (13.100)$$

En portant (13.97) dans (13.96) on peut alors considérer  $f_a^0$  comme un terme d'ordre zéro,  $f_a^1$ ,  $\vec{X}_a$ ,  $\partial / \partial \vec{r}$  comme des quantités du premier ordre et remplacer (13.96) par un système de deux équations, l'une relative aux termes d'ordre zéro et l'autre aux termes d'ordre un ; on obtient ainsi :

$$\frac{\partial f_a^0}{\partial t} = \sum_b C_{ab}^0(f_a^0, f_b^0) \quad (13.101)$$

$$\frac{\partial f_a^1}{\partial t} + \vec{w}_a \cdot \frac{\partial f_a^1}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{X}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a^1}{\partial \vec{w}_a} = \sum_b C_{ab}^0(f_a^0, f_b^1) + C_{ab}^0(f_a^1, f_b^0) \quad (13.102)$$

Cette méthode de perturbation est connue sous le nom d'approximation de Chapman-Enskog.

### 13.6.2 Passage de l'équation de Liouville aux équations cinétiques

La théorie cinétique des gaz et des plasmas peut se développer selon différentes méthodes schématisées sur la figure 13.7 et dans le tableau 13.4 ; la première constitue en quelque sorte l'arbre généalogique des diverses équations cinétiques, la deuxième rassemble pour la commodité du lecteur les expressions de  $\vec{j}_{ab}$  dans ces diverses équations. On y a négligé les interactions proches et  $\vec{j}_{ab}$  est le flux dans l'espace des vitesses qui représente les interactions lointaines.

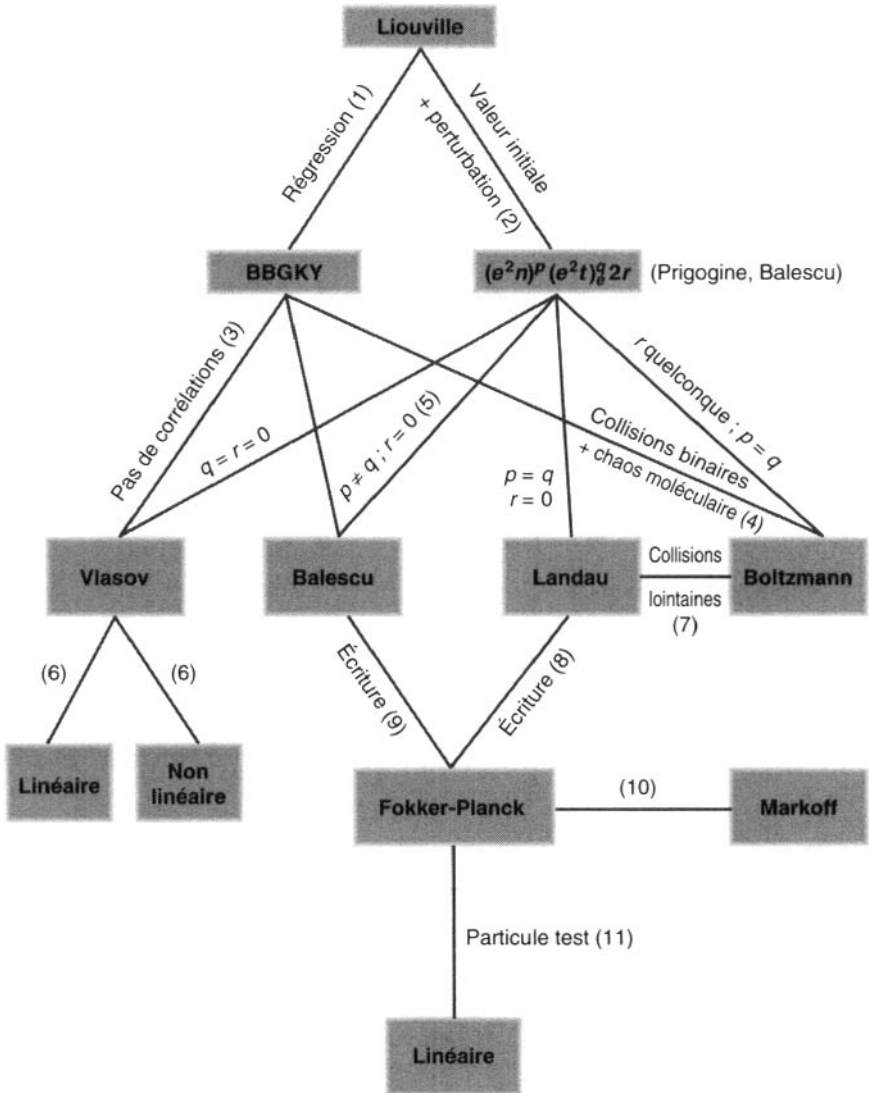


Figure 13.7 : Équations cinétiques des gaz et des plasmas.

Pour plus de détails sur les démonstrations citées ci-dessus cf. références suivantes :  
 (1) Section 8.3.4, (2) Balescu [314], (3) Section 8.4.2.  
 (4) Section 8.4.3, (5) Balescu [314], (6) Section 8.4.2.  
 (7) Appendice A13-2, (8) (9) Appendice A13-4, (10) [230], (11) Problème P13-1.

- Équation de BBGKY

$$\vec{j}_{ab} = \int \frac{\overrightarrow{X}_{ab12}}{m_a} f_{ab12} \underline{dr}_{b2} \underline{dw}_{b2} \quad (13.103)$$

- Équation de Vlasov

$$\vec{j}_{ab} = -\frac{\overrightarrow{X}^j}{m_a} f_a \quad (13.104)$$

$$\overrightarrow{X}^j = -q_a \frac{\partial}{\partial \tau_a} \varphi_{ab} \quad \varphi_{ab} = \int \frac{n_b q_b}{r_{ab}} \underline{dr}_b \quad (13.105)$$

- Équation de Landau

$$\vec{j}_{ab} = \Gamma_{ab} \int \overline{\overline{G}}_{ab} \cdot \left( \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_b} - \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \right) f_a f_b \underline{dw}_b \quad (13.106)$$

$$\Gamma_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a} \right]^2 \ln \Lambda \quad \overline{\overline{G}}_{ab} = \frac{\overline{1} g^2 - \vec{g} \vec{g}}{g^3} \quad \vec{g} = \vec{w}_a - \vec{w}_b \quad (13.107)$$

- Équation de Balescu

$$\vec{j}_{ab} = N_{ab} \int \overline{\overline{U}}_{ab} \cdot \left( \frac{1}{m_b} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_b} - \frac{1}{m_a} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \right) f_a f_b \underline{dw}_b \quad (13.108)$$

$$N_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a} \right]^2 \quad \overline{\overline{U}}_{ab} = \int \frac{\vec{k} \vec{k}}{k^4} \frac{\delta(\vec{k} \cdot \vec{g})}{|\epsilon(\vec{k}, \omega)|^2} \underline{dk} \quad (13.109)$$

$(\omega = \vec{k} \cdot \vec{w}_a)$

$$\epsilon(\vec{k}, \omega)_{(\omega = \vec{k} \cdot \vec{w}_a)} = 1 + \frac{4\pi}{k^2} \sum_b \frac{q_b^2}{m_b} \frac{1}{\vec{k} \cdot \vec{w}_a} \int \frac{\vec{k} \cdot \vec{w}_b}{\vec{k} \cdot \vec{g}} \vec{k} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \vec{w}_b} \quad (13.110)$$

- Équation de Fokker-Planck

$$\vec{j}_{ab} = f_a \frac{\overrightarrow{F}_{ab}}{m_a} - \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \cdot f_a \overline{\overline{D}}_{ab} \quad (13.111)$$

$$\frac{\overrightarrow{F}_{ab}}{m_a} = \frac{\langle \overrightarrow{\Delta w}_a \rangle_b}{\Delta t} \quad \overline{\overline{D}}_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\langle \overrightarrow{\Delta w}_a \overrightarrow{\Delta w}_a \rangle_b}{\Delta t} \quad (13.112)$$

Tableau 13.4 : Équations cinétiques des plasmas.



a) Partant de l'équation de Liouville on peut aborder le problème de deux manières différentes :

- par la méthode régressive de Yvon (cf. chapitre 8) on établit un système infini d'équations couplées dont chacune décrit l'évolution d'une fonction de distribution "réduite" (fonction simple  $f_1$ , double  $f_{12}$ , triple  $f_{123}$ ...). C'est le système B.B.G.K.Y. que nous avons discuté au chapitre 8.

- on peut au contraire chercher directement une solution formelle de l'équation de Liouville ; considérant cela comme un problème à valeur initiale on détermine la densité dans l'espace des phases  $D(t)$  à l'instant  $t$  en fonction de sa valeur  $D(0)$  à l'instant zéro. La solution formelle ainsi obtenue étant en fait très complexe, on est amené à l'analyser en une série multiple de termes tenant compte des interactions à 2, 3, ...  $N$  particules. Prigogine et Balescu qui ont développé cette méthode ont montré que les ordres de grandeur des termes de cette série multiple peuvent être classés au moyen des trois paramètres :

$$e^2 n, e^2 t, e^2$$

où  $e$  est la constante qui mesure la force des interactions entre particules (la charge de l'électron dans le cas des plasmas),  $n$  la densité moyenne des particules du gaz et  $t$  l'intervalle de temps au bout duquel on étudie le gaz. Plus précisément on montre que les divers termes de la série qui exprime  $D(t)$  peuvent être considérés comme d'ordre :

$$(e^2 n)^p (e^2 t)^q (e^2)^r \quad (13.113)$$

les indices  $p$ ,  $q$  et  $r$  variant d'un terme à l'autre. Selon le type de problème que l'on considère on sera amené à ne garder dans cette série multiple que des termes obéissant à certaines lois en ce qui concerne les indices  $p$ ,  $q$  et  $r$ . Balescu [314] a d'ailleurs mis au point des techniques de diagrammes permettant de sélectionner plus facilement les termes recherchés. Quoi qu'il en soit on obtient ainsi diverses approximations de  $D(t)$ , d'où l'on déduit alors par régression, soit des approximations pour  $f_1(t)$ , soit des équations d'évolutions approchées de  $f_1$ , c'est-à-dire des équations "cinétiques".

b) En suivant la voie du système BBGKY on peut établir les équations de Vlasov ou de Boltzmann :

• On obtient l'équation de Vlasov (13.104) comme nous l'avons fait au chapitre 8 en négligeant les corrélations entre particules (c'est-à-dire en posant  $f_{12} = f_1 f_2$ ). Cela revient, comme nous l'avons vu, à supposer que les interactions entre particules sont uniquement des interactions collectives représentées par un champ de charge d'espace. On conçoit intuitivement que ce modèle de fluide continu s'applique bien aux plasmas complètement

ionisés où nous avons montré (cf. section 13.2) que les collisions lointaines et multiples sont dominantes. De façon plus précise la méthode de Prigogine et Balescu permet de montrer comme nous le verrons ci-dessous que l'équation de Vlasov décrit les propriétés des plasmas cinétiques sur des intervalles de temps "courts", de l'ordre de la période  $t_p = 2\pi/\omega_p$ , des oscillations électrostatiques du plasma.

- On obtient l'équation de *Boltzmann* en considérant au contraire que les interactions sont à courte portée et la densité assez faible pour que les collisions soient binaires. En combinant ces hypothèses avec celle dite du chaos moléculaire (corrélations négligeables entre deux points suffisamment éloignés) nous avons développé au chapitre 8 le calcul qui conduit à l'équation de Boltzmann. Les hypothèses qui servent à l'établir montrent qu'elle s'applique *a priori* aux gaz dilués d'atomes ou de molécules neutres.

- Partant de l'équation de Boltzmann on peut obtenir l'équation de *Landau* (13.106) [242] qui est une tentative d'application de l'équation de Boltzmann aux plasmas. Pour cela on suit la même méthode que dans la section 13.3 ; on ne tient compte que des collisions lointaines (à faible déviation), et pour éviter les divergences introduites par celles-ci on fait une coupure à la longueur de Debye. Ce calcul est développé dans l'appendice A13-3.

c) En appliquant la méthode de Prigogine et Balescu aux plasmas on peut montrer (cf. [314, p. 62 et p. 144]) que le développement par rapport aux puissances de  $e^2$  non combinées (termes en  $e^{2r}$  de la série multiple (13.113) par opposition aux termes en  $(e^2n)^p$  et  $(e^2t)^q$  où il apparaît des puissances de  $e^2$  combinées avec  $n$  ou  $t$ ) est en fait équivalent à un développement par rapport aux puissances de  $\Lambda^{-2/3}$ . Or dans les *plasmas cinétiques classiques*,  $\Lambda^{-2/3}$  est un petit paramètre : il est donc raisonnable de ne conserver que les termes dominants d'ordre zéro par rapport à ce paramètre, c'est-à-dire de se limiter dans la série (13.113) aux termes d'ordre  $r = 0$ .

On recherche ensuite les temps caractéristiques qui peuvent intervenir dans la dynamique du plasma. Toujours en se limitant aux plasmas cinétiques on est ainsi amené à la remarque essentielle que nous avons déjà faite plusieurs fois : il existe deux temps caractéristiques d'ordres de grandeur très différents :

- $t_p$  période des oscillations de plasma
- $t_r$  temps de relaxation par collisions, avec d'après (13.73) :

$$t_p/t_r = 4.44 \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \ll 1 \quad (13.114)$$

On a par exemple pour  $n_e = 10^{11} \text{ cm}^{-3}$  et  $\kappa T_e = 1 \text{ eV}$  :  $t_p/t_r \sim 1.4 \cdot 10^{-3}$ . Dans ces conditions on est amené à distinguer deux domaines d'évolution complètement différents :

- Sur des intervalles de temps courts ( $t \sim t_p$ ) on ne garde dans la série multiple (13.113) que les termes d'ordre  $q = 0$  par rapport à  $e^2 t$ . Le calcul montre par contre qu'il faut garder tous les ordres en  $p$ . En le développant on aboutit [314] à l'équation de *Vlasov* qui décrit donc le comportement collectif du plasma pour des intervalles de temps de l'ordre de  $t_p$ .
- Sur des intervalles de temps longs ( $t \sim t_r$ ) on doit tenir compte des termes d'ordre  $q > 1$  par rapport à  $e^2 t$  ; en gardant tous les termes d'ordre  $p$  et  $q$  quelconque (mais comme nous l'avons justifié ci-dessus en éliminant tous ceux d'ordre  $r \neq 0$ ) on est conduit à l'équation cinétique de *Balescu* (13.108). Celle-ci a été obtenue indépendamment par *Lenard* [234] en partant du système *BBGKY*. Elle représente à peu près ce qu'on peut faire de mieux en matière d'équation d'évolution des plasmas cinétiques classiques. En ajoutant les deux expressions de *Vlasov* et *Balescu* on décrit en effet de façon self-consistante à la fois les effets de collisions et les effets collectifs : on constate d'ailleurs que les intégrales qui y figurent convergent sans qu'il soit nécessaire de faire des coupures plus ou moins artificielles.

On peut simplifier le calcul qui conduit à l'équation de *Balescu* en ne gardant que les termes d'ordres  $p = q$ . On retrouve ainsi l'équation de *Landau*. Mais cette équation simplifiée n'est pas aussi satisfaisante, comme on pouvait s'y attendre : les intégrales qu'elle contient ne convergent pas et nécessitent des coupures. Une manière élégante d'effectuer ces coupures consiste à supposer que les particules interagissent non pas par un potentiel de Coulomb mais par un potentiel de Debye :

$$\varphi(r) \sim \frac{1}{r} e^{-r/\lambda_D} \quad (13.115)$$

On montre alors [314, p. 230 et suiv.] que l'équation de *Landau* ainsi formée est en général une très bonne approximation.

**d)** Les équations de *Landau* et de *Balescu* peuvent par un changement d'écriture se mettre sous une forme où  $\vec{j}_{ab}$  apparaît comme une combinaison linéaire de  $f_a$  et de  $\partial f_a / \partial \vec{w}_a$ . Ce calcul est développé dans l'appendice A13-4 et conduit à l'expression (13.111) dite de *Fokker-Planck*. Dans la section 13.5 nous avons considéré cette équation comme résultant directement de l'existence des coefficients de transport dans l'espace des vitesses,

et nous avons montré que  $\overrightarrow{F_{ab}}$  est la force de friction des particules  $a$  sur les particules  $b$ , tandis que  $\overline{D_{ab}}$  est le coefficient de diffusion dans l'espace des vitesses  $\overrightarrow{w}_a$  de la densité  $f_a$  des particules  $a$  sur le gaz de particules  $b$ . Si l'on décrit comme nous l'avons fait les phénomènes d'interactions par une suite de collisions binaires, on peut expliciter ces coefficients au moyen des formules de *Rosenbluth* (13.46) à (13.50).

La validité de l'équation de Fokker-Planck dépasse cependant le cadre de la théorie collisionnelle faite dans les sections 13.3 et 13.5. On peut l'obtenir à partir d'une analyse purement probabiliste : on fait l'hypothèse que la vitesse d'une particule du gaz subit une suite de petites variations aléatoires ; on caractérise les propriétés de ces variations par les coefficients du premier ordre et du deuxième ordre introduits dans la section 13.3 et l'on obtient finalement l'équation de Fokker-Planck sous l'une des deux formes équivalentes (13.82) ou (13.83) avec les mêmes relations de correspondance (13.112) entre  $\overrightarrow{F_{ab}}$ ,  $\overline{D_{ab}}$ ,  $\langle \Delta \overrightarrow{w}_a \rangle_b / \Delta t$  et  $\langle \Delta \overrightarrow{w}_a \Delta \overrightarrow{w}_a \rangle_b / \Delta t$ .

Contrairement à ce que pourrait faire penser la formule 13.111 du tableau 13.4, l'équation de Fokker-Planck n'est pas une équation linéaire parce que les coefficients  $\overrightarrow{F_{ab}}$  et  $\overline{D_{ab}}$  dépendent des fonctions de distribution  $f_b$  : cette dépendance couple entre elles les diverses équations d'évolution et introduit d'autre part des termes quadratiques en  $f_a$  liés aux interactions  $a$ - $a$ . La situation se simplifie par contre quand on traite un problème à vrai dire un peu idéal dit de particules tests analogue à celui dont nous sommes partis dans la section 13.3. Il consiste par exemple à supposer que les particules d'espèce  $a$  sont en très petite quantité et que les distributions  $f_b$  sont déterminées par autre chose que les interactions avec les particules  $a$ . On considère alors les fonctions  $f_b$  comme données ; on néglige d'autre part les interactions  $a$ - $a$  : l'équation de Fokker-Planck des particules  $a$  est alors complètement déterminée et linéaire en  $f_a$ .

## 13.7 Conductivité électrique

### 13.7.1 Conductivité sans échauffement

Pour calculer la conductivité électrique, il faut étudier les petites perturbations créées par un champ électrique  $\overrightarrow{E}$  uniforme dans un plasma homogène ; on suppose  $\overrightarrow{E}$  continu, dirigé suivant  $Oz$ , et l'on admet que les ions ont une fonction de distribution maxwellienne à la température  $T$  ; on pose enfin :

$$f_e = f_e^{(0)} + f_e^{(1)} \quad (13.116)$$

en supposant que  $\vec{E}$  est assez faible pour que  $f_e^{(0)}$  reste aussi maxwellienne à la température  $T$ ,  $f_e^{(1)}$  étant une petite perturbation du premier ordre de la forme :

$$f_e^{(1)} = a_1^e \cos \theta \tag{13.117}$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{w}$  et  $\vec{E}$ . L'équation de Fokker-Planck relative aux électrons peut s'écrire symboliquement :

$$(-e\vec{E}/m) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{w}} = \frac{\partial f_e}{\partial t}_{coll.e-e} + \frac{\partial f_e}{\partial t}_{coll.e-i} \tag{13.118}$$

Si on néglige les termes proportionnels à  $E^2$  le premier membre s'écrit :

$$(-e\vec{E}/m) \cdot \frac{\vec{w}}{w} \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial w} = -\frac{eE}{m} \cos \theta \frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial w} \tag{13.119}$$

L'analyse du deuxième membre étant difficile, on peut étudier tout d'abord ce que donnerait le modèle du gaz de Lorentz parfait. Autrement dit, on néglige d'abord les collisions  $e-e$  et dans le calcul de  $\frac{\partial f_e}{\partial t}_{coll.e-i}$ , on suppose que les ions sont immobiles (hypothèse équivalente à  $m_e/m_i = 0$ ) ; l'étude de ce cas limite à partir des formules (13.87) à (13.92) est développé dans le problème P13-1 ; on obtient :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}_{coll.e-i} = -\nu_1(w) f_e^{(1)} \tag{13.120}$$

Cette relation est identique à celle obtenue au chapitre 12 en utilisant l'opérateur de Lorentz  $J(f)$  déduit de l'équation de Boltzmann ; on peut donc calculer la conductivité par application de la formule (12.61) ; ce calcul est développé dans le problème P13-2 ; on obtient ainsi la "conductivité de Lorentz" :

$$\sigma_L = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_1} \frac{16}{3} \left( \frac{2}{3\pi} \right)^{1/2} = 2.457 \frac{n_e e^2}{m_e \nu_1} \tag{13.121}$$

On peut faire un calcul plus exact en exprimant toujours, ce qui est justifié, l'interaction  $e-i$  au moyen de la formule (13.120) mais en tenant compte des interactions entre électrons ; on utilise alors l'équation de Fokker-Planck relative aux électrons en limitant le développement de  $f_e$  aux anisotropies d'ordre 1 [cf. formule (13.116)] et en supposant toujours que  $f_e^{(0)}$  et  $f_i$  sont des fonctions maxwelliennes à la température  $T$  ; autrement dit on néglige l'échauffement des électrons et des ions, ce qui semble satisfaisant pour les très faibles valeurs de  $E$ . L'application des formules (13.87) à (13.92) conduit à poser :

$$h_e = h_0 + h_{ei} + h_1 \tag{13.122}$$

$$g_e = g_0 + g_{ei} + g_1 \quad (13.123)$$

où  $h_0$  et  $g_0$  sont les termes d'interaction  $e-e$  isotrope, c'est-à-dire les quantités définies par les formules (13.218) et (13.219).  $h_{ei}$  et  $g_{ei}$  sont les termes d'interaction  $e-i$ , c'est-à-dire les quantités définies par les formules (13.239) et (13.240). Les termes  $h_1$  et  $g_1$  qui sont des termes d'interaction  $e-e$  liés à l'anisotropie de  $f_e$  compliquent beaucoup les calculs. Néanmoins Spitzer *et al.* [232] ont obtenu par une méthode un peu différente une équation différentielle pour la fonction  $a_1(w)$  du développement (13.88) et après une intégration numérique assez difficile ont trouvé pour la conductivité électrique d'un plasma constitué d'ions de charge  $q_i = Ze$  l'expression :

$$\sigma = \gamma(Z)\sigma_L \quad (13.124)$$

Le facteur  $\gamma(Z)$  est une fonction croissante du rapport  $Z = |q_i/q_e|$ , avec :

$$\gamma = 0.58 \quad \text{pour } Z = 1 \quad (13.125)$$

$$\gamma = 1 \quad \text{pour } Z = \infty \quad (13.126)$$

Le fait que  $\gamma(Z)$  tende vers 1 lorsque  $Z \rightarrow \infty$  montre que le modèle de Lorentz s'applique dans ce cas limite. Il se trouve donc que dans un plasma d'ions multichargés de  $Z$  élevé, ce sont les interactions  $e-i$  qui sont dominantes. Ce paradoxe est dû au fait que les interactions  $e-e$  font intervenir un facteur  $Z$  tandis que pour les interactions  $e-i$  c'est  $Z^2$  qui intervient. Si on rapproche les formules (13.30), (13.121) et (13.124) on obtient pour  $Z = 1$  :

$$\sigma = 8.31 \cdot 10^{-3} \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} \quad (\text{SI}) \quad (13.127)$$

et pour la résistivité :

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} = 1.20 \times 10^2 \frac{\ln \Lambda}{T^{3/2}} \quad (\text{SI}) \quad (13.128)$$

On voit que la densité  $n_e$  s'est éliminée et que la résistivité d'un plasma complètement ionisé ne dépend que de sa température. Elle devient d'ailleurs très faible aux hautes températures. On rappelle que l'on a pour le cuivre à la température ordinaire :

$$\rho_{\text{Cu}} = 2 \cdot 10^{-8} \quad (\text{SI}) \quad (13.129)$$

### 13.7.2 Échauffement et emballement des électrons

Le calcul de la conductivité des gaz totalement ionisés que nous venons de faire dissimule les difficultés essentielles. Il est fondé sur les deux hypothèses suivantes :

a) En présence du champ  $\vec{E}$  le gaz d'électrons tend vers un état stationnaire.

b) Dans cet état stationnaire, l'échauffement des électrons est négligeable.

Il conviendrait, comme pour les gaz faiblement ionisés, de discuter ces deux hypothèses ; la discussion mathématique est malheureusement plus difficile à faire dans les gaz totalement ionisés à cause du caractère non linéaire de l'équation de Fokker-Planck. Cependant, il est facile de se rendre compte, par un raisonnement semi-quantitatif, que les hypothèses a) et b) sont fausses, aussi faible que soit  $\vec{E}$ .

Considérons en effet les électrons qui, à l'instant initial, ont une vitesse  $w$  bien déterminée et dirigée dans le sens inverse à  $\vec{E}$  ; ils vont être accélérés par  $\vec{E}$  et freinés par les collisions ; pour savoir quel est celui de ces deux phénomènes qui l'emporte, considérons ces électrons comme formant un faisceau de particules et étudions leur évolution en écrivant l'équation de leur mouvement d'une façon approchée sous la forme :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{eE}{m} + \frac{\langle \Delta w_{\parallel} \rangle}{\Delta t} = \frac{eE}{m} - \left| \frac{\langle \Delta w_{\parallel} \rangle}{\Delta t} \right| \quad (13.130)$$

Si  $eE/m > |\langle \Delta w_{\parallel} \rangle / \Delta t|$ , les électrons considérés sont accélérés.

Si  $eE/m < |\langle \Delta w_{\parallel} \rangle / \Delta t|$ , ils sont freinés.

Or  $|\langle \Delta w_{\parallel} \rangle / \Delta t|$  est donné par la formule (13.58). On peut donc construire la courbe représentant  $|\langle \Delta w_{\parallel} \rangle / \Delta t|$  en fonction de  $w$  ; elle a l'allure représentée sur la figure 13.8(a). Le maximum se produit pour une valeur de  $w$  très voisine de  $\bar{w}_i$ . Pour discuter la formule (13.130) on compare graphiquement les valeurs de  $eE/m$  et  $|\langle \Delta w_{\parallel} \rangle / \Delta t|$  en traçant sur la figure 13.8(a) la droite d'ordonnée  $eE/m$ . Si le plasma est au voisinage de l'équilibre thermodynamique, la plupart des électrons ont une vitesse  $w$  située au voisinage de  $\bar{w}_e \gg \bar{w}_i$ . La valeur correspondante du coefficient de ralentissement se situe sur la figure au voisinage du point  $A$  dans la partie descendante de la courbe. Ceci nous conduit à définir un champ électrique critique  $E_c$  par la condition :

$$\frac{e}{m} E_c = |\langle \Delta w_{\parallel} \rangle / \Delta t|_A \quad (13.131)$$

En comparant les formules (13.131) et (12.112), on trouve que ce champ critique est assez voisin du champ critique d'échauffement  $E_1$  défini au

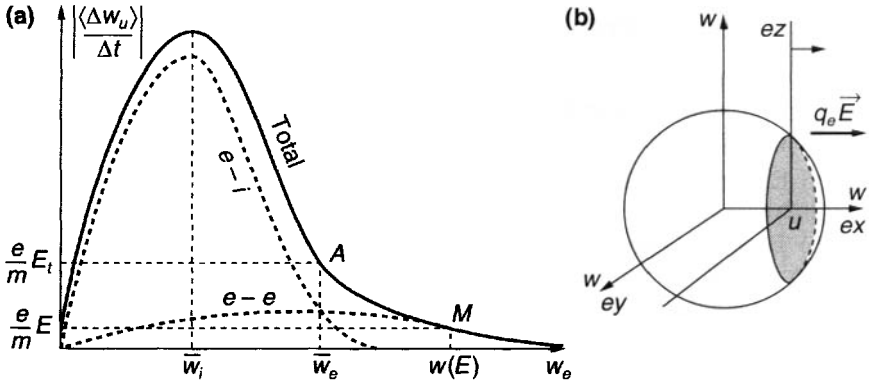


Figure 13.8 : "Runaways" primaires.

- a) Forces appliquées aux électrons : force de freinage et force électrique.  
 b) Espace des vitesses et "runaways" primaires : les électrons dont la vitesse est à droite du plan  $w = w_1$  sont immédiatement découplés.

paragraphe 12.7.3 ; on a plus précisément, si on calcule ces deux champs pour la vitesse la plus probable :

$$E_c = 1.85 E_1 \quad (13.132)$$

Si le champ appliqué au plasma est égal à  $E_c$ , on se rend compte qu'une grande partie des électrons du plasma (ceux pour lesquels on a  $w_z > \bar{w}_e$ ) vont être accélérés parce que pour eux  $eE/m > |\langle \Delta w_{||} \rangle / \Delta t|$ , l'accélération se poursuivra infiniment parce que le coefficient de frottement décroît avec  $w$  ; c'est le phénomène des électrons découplés ("runaways" en anglais) ; il semble alors se produire sur une grande partie des électrons du gaz. Si au contraire  $E \ll E_c$ , la droite d'ordonnée  $eE/m$  coupe la courbe en un point  $M$  d'abscisse  $w(E) \gg \bar{w}_e$ . Dans ces conditions, seuls les électrons de vitesse plus grande que  $w(E)$  sont découplés immédiatement ; ils laissent derrière eux en se découplant une fonction de distribution électronique tronquée dans l'espace des vitesses par le plan  $w_z = w(E)$ . L'ensemble des électrons non découplés, qui constitue la plus grande partie du plasma, va tout d'abord acquérir une vitesse de fluide limitée donnant lieu à un courant et une conductivité finis ; cet équilibre va s'établir en un temps qui est de l'ordre de  $1/\nu_1(\bar{w}_e)$ . Mais d'autre part, par suite des interactions  $e-e$ , la fonction de distribution des vitesses électroniques va tendre à se maxwellianiser à nouveau en remplissant le vide de l'espace des vitesses laissé par les électrons découplés ; le phénomène est assez analogue à celui



décrit dans l'appendice A13-3 ; il se produit en un temps de l'ordre de  $1/\nu_1(w(E))$ .

La région  $w > w(E)$  étant ainsi continuellement réalimentée, tous les électrons du gaz vont être finalement découplés. Le processus a d'ailleurs tendance à s'accélérer car le nombre des électrons non découplés va en décroissant ; il en résulte pour une vitesse donnée une diminution de  $|\langle \Delta w_{\parallel} \rangle / \Delta t|$ , donc, pour un champ  $E$  donné, une augmentation du taux de production des électrons découplés. En résumé, aussi petit que soit  $E$ , tous les électrons du plasma seront finalement découplés au bout d'un temps suffisamment long. On doit donc considérer la conductivité calculée au paragraphe précédent comme représentant les phénomènes de façon transitoire, c'est-à-dire pour des instants compris entre  $1/\nu_1(\bar{w}_e)$  et  $1/\nu_1(w(E))$ .

On conçoit que si  $E$  est assez faible, le phénomène des électrons découplés est lent à démarrer. De ce fait, pendant un certain intervalle transitoire la conductivité de Spitzer reste valable. L'étude de ce régime transitoire et de l'amorçage du processus catastrophique des électrons découplés a été faite tout d'abord par Dreicer [236], [237] en faisant l'hypothèse simplificatrice qu'à tout instant du phénomène, la distribution des vitesses électroniques est représentée par une fonction maxwellienne déplacée :

$$f(w_e) = \frac{C}{T^{3/2}} \exp - \frac{m_e |\vec{w}_e - \vec{v}_e|^2}{2\kappa T_e} \quad (13.133)$$

On est ainsi ramené à étudier en fonction du temps l'évolution de  $v_e$  et  $T_e$ . Les variations de ces deux grandeurs en fonction du temps sont représentées schématiquement sur la figure 13.9 pour le cas d'un champ électrique faible :  $E \ll E_c$ . On y a porté en abscisse la quantité  $x = \nu_1(\bar{w}_e)t$ ,  $\nu_1(\bar{w}_e)$  étant toujours calculée au moyen de la formule (13.19).

Les courbes montrent un palier, d'autant plus long que  $E$  est petit et qui correspond aux calculs de Spitzer. Ultérieurement Kruskal et Bernstein [239] ont publié une théorie plus exacte (à ceci près qu'ils négligent les interactions  $e-e$ ). Ils décomposent l'espace des vitesses en trois régions (Fig. 13.10) :

1. la région de collision où l'état du gaz reste presque isotrope ;
2. la région de transition où les anisotropies sont importantes ;
3. la région des électrons découplés correspondant aux grandes valeurs de la vitesse.

Il y a en permanence un flux d'électrons passant de la région 1 dans la région 2 et de la région 2 dans la région 3.

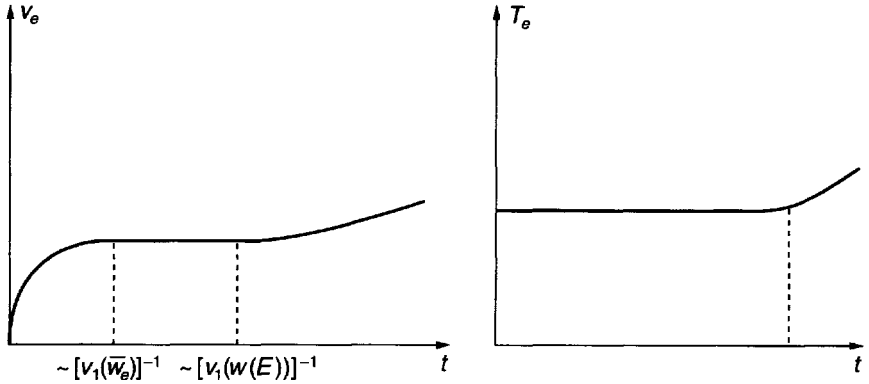


Figure 13.9 : Variation de  $v_e$  et de  $T_e$  en fonction du temps.

Schéma pour un champ électrique faible ( $E \ll E_c$ ).

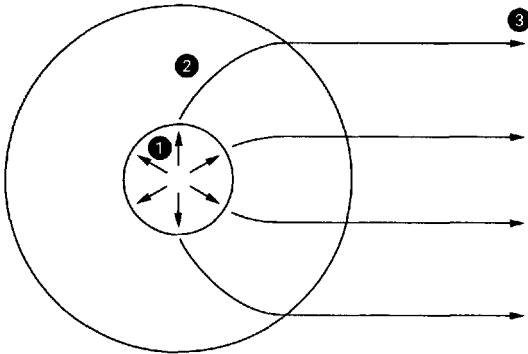


Figure 13.10 : Espace des vitesses suivant Kruskal et Bernstein [239].

En fait, les électrons découplés ne sont pas accélérés indéfiniment, parce que tôt ou tard apparaissent des phénomènes de freinage d'une autre nature que les collisions élastiques. En particulier, si les électrons atteignent des énergies de l'ordre de 10 keV, ils seront ralentis énergiquement par émission d'un rayonnement de bremsstrahlung. Mais par ailleurs, l'instabilité de Buneman (cf. section 7.3) est un autre mécanisme de freinage beaucoup plus efficace : un faisceau d'électrons traversant un

plasma peut voir son énergie de translation diminuer au profit d'oscillations de plasma se développant soit dans le faisceau soit dans le plasma traversé ; quand l'amplitude des oscillations devient très grande, des effets non linéaires très importants se produisent ; en certains endroits, le faisceau initial peut même rebrousser chemin ; un faisceau monocinétique se subdivise progressivement en une série de faisceaux moins denses et retourne progressivement à l'état désordonné. Buneman [81] a montré que ce mécanisme, qu'il a appelé les collisions collectives, limite la conductivité d'un plasma totalement ionisé à une valeur de l'ordre de :

$$\sigma = 200\pi \frac{n_e e^2}{m_e \omega_p} \quad (13.134)$$

soit :

$$\sigma = \sigma_L \frac{200\pi}{2.457} \frac{v_1}{\omega_p} \quad (13.135)$$

d'où finalement, d'après (13.73) :

$$\sigma = \left[ 1.52 \cdot 10^2 \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \right] \sigma_L \quad (13.136)$$

Dans le cas typique où  $\ln \Lambda = 10$ , la formule (13.136) donne donc une conductivité qui est de l'ordre  $10^7$  fois plus petite que celle  $\sigma_L$  déduite des collisions binaires par le modèle de Lorentz. Une telle différence montre l'importance de ce phénomène et la nécessité d'étudier conjointement le freinage collisionnel et le développement des instabilités. On a essayé de vérifier ces théories avec des expériences utilisant un plasma torique [240] (c'est la meilleure manière de simuler un plasma infini). Cependant, ces expériences sont délicates car les collisions inélastiques et les instabilités masquent le phénomène. On trouvera en [241] un exposé de synthèse plus récent sur les études tant numériques qu'expérimentales de ce phénomène des électrons "runaways" qui joue un grand rôle dans les machines à fusion contrôlée du type Tokamak.

## 13.8 Autres coefficients de transport

La méthode employée pour évaluer la conductibilité électrique peut aussi être appliquée aux autres coefficients de transport. Nous ne considérons ici que la conductibilité thermique en reproduisant l'analyse faite par Spitzer [233].

En présence d'un gradient de température  $\nabla T$ , il apparaît non seulement un flux de chaleur,  $\vec{q}$ , mais aussi un courant électrique  $\vec{J}$ . Le

gradient de température modifie la fonction distribution des vitesses électroniques et un courant résultant d'électrons apparaît [cf. (12.145)]. De même, un champ électrique produit un flux de chaleur. En l'absence de champ magnétique, on peut écrire pour un état stationnaire<sup>4</sup> :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} - \alpha \nabla T \quad (13.137)$$

$$\vec{q} = \beta \vec{E} - \kappa \nabla T \quad (13.138)$$

D'après la thermodynamique des processus irréversibles [243, chapitre 8], ces quatre coefficients ne sont pas indépendants, mais liés par la relation :

$$\beta = \alpha T + \frac{5\kappa T}{2e} \sigma \quad (13.139)$$

Les effets thermoélectriques représentés par les équations (13.137) et (13.138) tendent à réduire le coefficient effectif de conductibilité thermique. Dans un état stationnaire aucun courant ne peut passer dans la direction du gradient de température, puisqu'une divergence de courant en résulterait, et des champs électriques augmenteraient rapidement sans limite. Un champ électrique secondaire est produit, de façon à compenser le courant produit par le gradient de température. Ce champ électrique secondaire agit à son tour pour réduire le flux de chaleur. Le coefficient de conductibilité effectif est réduit à  $\epsilon\kappa$ , où :

$$\epsilon = 1 - \frac{\alpha\beta\eta}{\kappa} \quad (13.140)$$

Pour un gaz de Lorentz (cf. problème P13-3), la valeur de  $\kappa$  est :

$$\kappa_L = 20 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{(\kappa T)^{5/2} \kappa}{m_e^{1/2} e^4 Z \ln \Lambda} \quad (13.141)$$

$$= 4.67 \cdot 10^{-12} \frac{T^{5/2}}{Z \ln \Lambda} \quad (\text{cal/s K cm}) \quad (13.142)$$

pour  $\epsilon = 0.40$ .

En tenant compte des interactions  $e-e$ ,  $\kappa$  devient :

$$\kappa = \delta_T \kappa_L \quad (13.143)$$

---

4. Nous prenons pour  $\alpha$  et  $\beta$  les signes choisis par Balescu [308, section 5.5] qui sont opposés à ceux de Spitzer.

Le tableau 13.5 donne les valeurs de  $\delta_T$  et de  $\epsilon$  pour différentes valeurs de  $Z$ , extraites de la référence [233], qui donne aussi des résultats détaillés pour  $\alpha$  et  $\beta$ . On y voit que l'équation (13.139) est satisfaite à environ un millièmèe près, vérification utile de la précision numérique du calcul.

$Z$	1	2	4	16	$\infty$
$\delta_T$	0.225	0.356	0.513	0.791	1.000
$\epsilon$	0.419	0.410	0.401	0.396	0.400

Tableau 13.5 : valeurs de  $\delta_T$  et de  $\epsilon$ .

L'effet d'un champ magnétique transversal sur la conductibilité thermique peut s'évaluer grossièrement en admettant que le flux de chaleur est (comme celui de particules) réduit par un facteur  $1 + (\Omega_e/\nu_1)2$ , où  $\Omega_e$  est la fréquence cyclotron des électrons. Une étude plus complète de l'ensemble des coefficients de transport collisionnels a été faite par Braginskii [242], et un résumé en est donné en dans le formulaire de physique des plasmas édité par le Naval Research Laboratory [320]. Mais plus récemment Balescu [308, section 5.5] a fait une étude théorique très complète de tous les coefficients de transport mécaniques, électriques et thermiques dans un plasma avec ou sans champ magnétique.

## 13.9 Appendices

### A13-1 Coefficients de transport dans l'espace des vitesses

#### a) Calcul de $\Delta\vec{w}_a$ dans une collision

En partant des hypothèses énoncées au paragraphe 13.3.1, nous calculons maintenant les coefficients de transport dans l'espace des vitesses des particules d'espèce  $a$  (particules tests) effectuant des collisions sur des particules d'espèce  $b$  (particules cibles). Considérons tout d'abord ce qui se passe dans une collision élémentaire et désignons par :

$\vec{w}_a$  et  $\vec{w}_b$  les deux vitesses avant la collision ;

$\vec{w}_a + \Delta\vec{w}_a$  et  $\vec{w}_b + \Delta\vec{w}_b$  les vitesses après la collision ;

$\vec{g}$  et  $\vec{g} + \Delta\vec{g}$  les valeurs de la vitesse relative avant et après la collision.

Les quantités  $\Delta\vec{w}_a$ ,  $\Delta\vec{w}_b$ ,  $\vec{g}$  et  $\Delta\vec{g}$  sont indépendantes du système de coordonnées dans lequel on les mesure. En se plaçant dans le système du centre de gravité on peut donc écrire immédiatement :

$$\frac{\vec{w}_a}{m_b} = -\frac{\vec{w}_b}{m_a} = \frac{\vec{g}}{m_a + m_b} \quad \text{avec} \quad \vec{g} = \vec{w}_a - \vec{w}_b \quad (13.144)$$

D'où l'on déduit la relation entre  $\Delta \vec{w}_a$  et  $\vec{\Delta g}$  :

$$\Delta \vec{w}_a = \frac{m_b}{m_a + m_b} \vec{\Delta g} \quad (13.145)$$

Dans une collision binaire élastique le vecteur  $\vec{g}$  garde un module constant et effectue une simple rotation qui le conduit de la position initiale  $\vec{g}$  à la position finale  $\vec{g}'$  comme indiqué sur la figure 13.11. On voit donc sur cette figure que l'on a :

$$\vec{\Delta g} = 2g \sin \frac{\chi}{2} \vec{s} \quad (13.146)$$

où  $\chi$  est l'angle de déviation et  $\vec{s}$  le vecteur unitaire porté par la bissectrice extérieure de l'angle  $(\vec{g}, \vec{g}')$ .

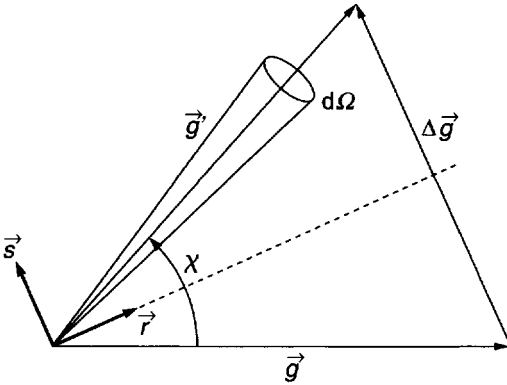


Figure 13.11 : Rotation du vecteur vitesse relative dans une collision binaire élastique.

### b) Calcul de $\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$

Les valeurs de  $\Delta \vec{w}_a$  produites par une suite de collisions de faible déviation s'additionnent. Considérons donc les collisions avec les particules  $b$  dont le vecteur vitesse est dans  $\underline{dw}_b$  autour d'une valeur moyenne  $\vec{w}_b$  et pour lesquelles le vecteur  $\vec{g}$  est dans l'élément d'angle solide  $d\Omega$  autour de la position moyenne  $\vec{g}$  (Fig. 13.11). Le nombre probable de ces collisions pour chaque particule  $a$  et pendant un intervalle de temps  $\Delta t$  est, d'après la définition de la section efficace  $\sigma(\chi)$  :

$$([f(\vec{w}_b) \underline{dw}_b] [\sigma(\chi) d\Omega] g) \Delta t \quad (13.147)$$

d'où l'on déduit par addition des effets de toutes les classes de collisions :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \int_{\Omega} \int_{\vec{w}_b} \frac{m_b}{m_a + m_b} \vec{\Delta g} g \sigma(\chi) d\Omega f(\vec{w}_b) \underline{dw}_b \quad (13.148)$$

On effectue cette intégration en deux temps en calculant tout d'abord à  $\vec{w}_b$  constant la quantité :

$$\vec{A} = \langle \Delta \vec{g} \rangle = \int \Delta \vec{g} g \sigma(\chi) d\Omega = \int 2g^2 \sin \frac{\chi}{2} \vec{s} \sigma(\chi) d\Omega \quad (13.149)$$

après quoi on aura :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \frac{m_b}{m_a + m_b} \int \vec{A} f(\vec{w}_b) d\vec{w}_b \quad (13.150)$$

Calculons donc tout d'abord  $\vec{A}$ . Dans ce calcul  $\vec{w}_b$  et  $\vec{w}_a$  étant constants,  $\vec{g}$  l'est aussi et il est évident par raison de symétrie que  $\vec{A}$  est dirigé suivant  $\vec{g}$  ; on a donc :

$$\vec{A} = A_z \frac{\vec{g}}{g} \quad (13.151)$$

avec en remplaçant  $\sigma(\chi)$  par l'expression de Rutherford (3.69) :

$$A_z = - \int_0^\pi 2g^2 \sin \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{8\pi \epsilon_0 \mu g^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} 2\pi \sin \chi d\chi \quad (13.152)$$

$$= - \frac{1}{4\pi \epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu g} \right]^2 \int_0^\pi \frac{\cos \chi / 2 d\chi / 2}{\sin^3 \chi / 2} \quad (13.153)$$

Cette dernière intégrale diverge à cause de sa borne  $\chi = 0$  qui correspond aux collisions lointaines. On élimine cette divergence en effectuant comme dans la section 3.5 la coupure physiquement raisonnable de Debye. En introduisant cette coupure<sup>5</sup> dans l'intégrale (13.153) on obtient :

$$\vec{A} = - \frac{1}{4\pi \epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{\mu_{ab}} \right]^2 \ln \Lambda \frac{\vec{g}}{g^3} \quad (13.154)$$

On peut d'autre part remarquer que l'on a :

$$- \frac{\vec{g}}{g^3} = \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \left( \frac{1}{g} \right) \quad (13.155)$$

De sorte que (13.154) peut encore s'écrire :

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a} \right]^2 \frac{(m_a + m_b)^2}{m_b^2} \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \left( \frac{1}{g} \right) \quad (13.156)$$

On remplace enfin  $\ln(\lambda_D / p_0)$  par sa valeur moyenne  $\ln \Lambda$  ; l'erreur ainsi faite est assez faible puisqu'elle porte sur un terme logarithmique à variation lente. On obtient ainsi, en reportant le résultat (13.156) dans l'intégrale (13.150), le résultat final :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \Gamma_{ab} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} H_{ab} \quad (13.157)$$

---

5. Le calcul fait ici (superposition de collisions à faible déviation) n'est d'ailleurs évidemment pas valable au voisinage de la borne supérieure  $\chi = \pi$ . On étend malgré tout, par raison de simplicité, la formule (13.153) jusqu'à cette borne. C'est une approximation valable dans les plasmas cinétiques classiques parce que dans ce cas les collisions lointaines constituent la contribution principale dans l'intégrale (13.153), de sorte que l'erreur relative faite est de l'ordre de  $(\ln \Lambda)^{-1}$ .

avec :

$$\Gamma_{ab} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a} \right]^2 \ln \Lambda \quad (13.158)$$

$$H_{ab}(\vec{w}_a) = \frac{m_a + m_b}{m_b} \int \frac{1}{g} f(\vec{w}_b) \underline{dw}_b \quad (13.159)$$

### c) Calcul de $\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$

**α) Règle d'additivité** La première question qui se pose pour le calcul des coefficients de transport du second ordre est de vérifier que les termes quadratiques  $\Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a$  s'additionnent statistiquement. Pour s'en rendre compte on peut par exemple considérer deux intervalles de temps successifs  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  pendant lesquels une particule  $a$  donnée subit, du fait des collisions, des variations de vitesses  $(\Delta \vec{w}_a)_1$  et  $(\Delta \vec{w}_a)_2$ . Si les collisions sont à faibles déviations la variation totale  $\Delta \vec{w}_a$  pendant l'intervalle de temps total  $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$  s'obtient simplement par addition :

$$\Delta \vec{w}_a = (\Delta \vec{w}_a)_1 + (\Delta \vec{w}_a)_2 \quad (13.160)$$

On en déduit, pour le terme quadratique correspondant, l'expression :

$$\Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a = (\Delta \vec{w}_a)_1 (\Delta \vec{w}_a)_1 + (\Delta \vec{w}_a)_2 (\Delta \vec{w}_a)_2 + \overline{\overline{C}} \quad (13.161)$$

où  $\overline{\overline{C}}$  représente le terme de couplage entre les effets produits pendant  $\Delta t_1$  et ceux produits pendant  $\Delta t_2$ , soit :

$$\overline{\overline{C}} = (\Delta \vec{w}_a)_1 (\Delta \vec{w}_a)_2 + (\Delta \vec{w}_a)_2 (\Delta \vec{w}_a)_1 \quad (13.162)$$

Si les collisions sont une suite d'événements binaires non corrélés, la valeur probable de  $\overline{\overline{C}}$  s'écrit :

$$\langle \overline{\overline{C}} \rangle = \langle (\Delta \vec{w}_a)_1 \rangle \langle (\Delta \vec{w}_a)_2 \rangle + \langle (\Delta \vec{w}_a)_2 \rangle \langle (\Delta \vec{w}_a)_1 \rangle \quad (13.163)$$

Or  $\langle (\Delta \vec{w}_a)_1 \rangle$  est proportionnel à  $\Delta t_1$  et  $\langle (\Delta \vec{w}_a)_2 \rangle$  à  $\Delta t_2$  ; le terme (13.162) est donc proportionnel au produit  $\Delta t_1 \Delta t_2$  ; pour calculer la valeur probable de (13.161) on peut négliger ce terme quadratique devant les contributions des deux termes qui sont linéaires en  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$ , c'est-à-dire écrire la règle d'additivité :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle = \langle (\Delta \vec{w}_a)_1 (\Delta \vec{w}_a)_1 \rangle + \langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle \quad (13.164)$$

**β) Calcul** La règle d'additivité (13.164) étant admise, on écrit immédiatement l'analogie de la formule (13.148) :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \int_{\Omega} \int_{\vec{w}_b} \left( \frac{m_b}{m_a + m_b} \right)^2 \Delta \vec{g} \Delta \vec{g} g \sigma(\chi) d\Omega f(\vec{w}_b) \underline{dw}_b \quad (13.165)$$

$$= \left( \frac{m_b}{m_a + m_b} \right)^2 \int \overline{\overline{B}} f(\vec{w}_b) \underline{dw}_b \quad (13.166)$$

avec :

$$\overline{\overline{B}} = \langle \Delta \vec{g} \Delta \vec{g} \rangle = \int \Delta \vec{g} \Delta \vec{g} g \sigma(\chi) d\Omega = \int 4g^3 \sin^2 \frac{\chi}{2} \vec{s} \vec{s} \sigma(\chi) d\Omega \quad (13.167)$$



Pour le calcul de l'intégrale (13.167)  $\vec{w}_a$ ,  $\vec{w}_b$  et par conséquent  $\vec{g}$  sont constants. On peut donc momentanément prendre comme axe  $Oz$  la direction de  $\vec{g}$  et désigner par  $\varphi$  un angle d'azimut dans le plan perpendiculaire à  $\vec{g}$ . Les composantes de  $\vec{s}$  sont alors :

$$s_x = \cos \chi/2 \cos \varphi \tag{13.168}$$

$$s_y = \cos \chi/2 \sin \varphi \tag{13.169}$$

$$s_z = -\sin \chi/2 \tag{13.170}$$

On voit alors immédiatement que dans l'intégrale (13.167) l'intégration sur  $\varphi$  rend nuls tous les termes rectangles :

$$\mathcal{B}_{xy} = \mathcal{B}_{yx} = \mathcal{B}_{yz} = \mathcal{B}_{zy} = \mathcal{B}_{zx} = \mathcal{B}_{xz} = 0 \tag{13.171}$$

cependant que l'on a pour les termes diagonaux :

$$\mathcal{B}_{xx} = \mathcal{B}_{yy} \neq \mathcal{B}_{zz} \neq 0 \tag{13.172}$$

Calculons donc successivement  $\mathcal{B}_{xx}$  et  $\mathcal{B}_{zz}$  ; on remarque tout d'abord pour cela que l'intégrale sur  $\varphi$  donne pour ces termes un facteur  $\pi$ , après quoi il reste à intégrer sur  $\chi$ , ce qui donne :

$$\mathcal{B}_{zz} = \int_0^\pi 4g^3 \sin^4 \frac{\chi}{2} \sigma(\chi) \pi \sin \chi d\chi = \frac{1}{8\pi \epsilon_o^2 g} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{\mu_{ab}} \right]^2 \tag{13.173}$$

$$\mathcal{B}_{xx} = \mathcal{B}_{yy} = 4\pi g^3 \int_0^\pi \sin^2 \frac{\chi}{2} \cos^2 \frac{\chi}{2} \sigma(\chi) \sin \chi d\chi \tag{13.174}$$

$$= \frac{1}{4\pi \epsilon_o^2 g} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{\mu_{ab}} \right]^2 \int_0^\pi \frac{\cos^3(\chi/2) d(\chi/2)}{\sin \chi/2} \tag{13.175}$$

Cette intégrale diverge ; on effectue pour la rendre convergente la même coupure que précédemment [cf. formule (13.153)] ; il vient alors :

$$\mathcal{B}_{xx} = \mathcal{B}_{yy} = \frac{1}{4\pi \epsilon_o^2 g} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{\mu_{ab}} \right]^2 \left[ \ln \sin\left(\frac{\chi}{2}\right)_{\min} + \frac{1}{2} \right] \tag{13.176}$$

soit, avec les mêmes approximations que pour le calcul de  $\vec{A}$  :

$$\mathcal{B}_{xx} = \mathcal{B}_{yy} = \frac{1}{4\pi \epsilon_o^2 g} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{\mu_{ab}} \right]^2 \ln \Lambda \tag{13.177}$$

En comparant (13.173) et (13.177) on voit que pour les plasmas cinétiques classiques où  $\ln \Lambda \gg 1$  on peut négliger  $\mathcal{B}_{zz}$  devant  $\mathcal{B}_{xx}$  ou  $\mathcal{B}_{yy}$  et écrire donc :

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{1}{4\pi \epsilon_o^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{\mu_{ab}} \right]^2 \ln \Lambda \frac{1}{g} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{13.178}$$

Dans le système de coordonnées où nous nous sommes placés on peut voir facilement que l'on a :

$$\frac{1}{g} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\vec{1} g^2 - \vec{g} \vec{g}}{g^3} \tag{13.179}$$

où  $\bar{\bar{1}}$  est le tenseur diagonal unitaire. Mais sous cette dernière forme le résultat est écrit de façon tensorielle exacte et est donc indépendant du système de coordonnées choisi. On peut d'autre part facilement montrer que,  $\vec{r}$  étant un vecteur position quelconque, on a l'identité :

$$\frac{\bar{\bar{1}}r^2 - \vec{r}\vec{r}}{r^3} \equiv \nabla \nabla r \quad (13.180)$$

En reportant les résultats (13.179) et (13.180) dans l'expression (13.178) on obtient :

$$\bar{\bar{B}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{\mu_{ab}} \right]^2 \ln \Lambda \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} g \quad (13.181)$$

D'où, en remontant à la formule (13.167), le résultat final :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \Gamma_{ab} \vec{\nabla} w_a \vec{\nabla} w_a G_{ab} \quad (13.182)$$

avec :

$$G_{ab} = \int g f(\vec{w}_b) \underline{dw}_b \quad (13.183)$$

$\Gamma_{ab}$  étant comme précédemment défini par la formule (13.158).

### d) Cas où $f(\vec{w}_b)$ est isotrope

$\alpha$ ) **Calcul de  $\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$**  Lorsque  $f(\vec{w}_b)$  est isotrope, les intégrales  $H_{ab}$  et  $G_{ab}$  ne dépendent pas de l'orientation de  $\vec{w}_a$  : ce sont elles-mêmes des fonctions isotropes de  $\vec{w}_a$ . Pour les calculer on peut prendre  $\vec{w}_a$  comme axe  $Oz$  et utiliser un développement en polynômes de Legendre. D'après la définition géométrique des polynômes de Legendre (cf. [268], [269]) on a :

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{w_a} \left[ P_0(\cos \theta) + \frac{w_b}{w_a} P_1(\cos \theta) + \left( \frac{w_b}{w_a} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right] \text{ pour } w_b < w_a \quad (13.184)$$

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{w_b} \left[ P_0(\cos \theta) + \frac{w_a}{w_b} P_1(\cos \theta) + \left( \frac{w_a}{w_b} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right] \text{ pour } w_b > w_a \quad (13.185)$$

où  $\theta$  est l'angle des vecteurs  $\vec{w}_a$  et  $\vec{w}_b$ . Dans l'intégrale (13.159) seuls les termes de  $1/g$  en  $P_0(\cos \theta)$  donnent une contribution lorsque  $f(\vec{w}_b)$  est isotrope. On déduit donc de (13.184) et (13.185) :

$$H_{ab}(w_a) = 4\pi \frac{m_a + m_b}{m_b} \left[ \frac{1}{w_a} \int_0^{w_a} w_b^2 f(w_b) dw_b + \int_{w_a}^{\infty} w_b f(w_b) dw_b \right] \quad (13.186)$$

d'où l'on déduit d'après (13.157) :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = -4\pi \frac{m_a + m_b}{m_b} \Gamma_{ab} \frac{\vec{w}_a}{w_a^3} \int_0^{w_a} w_b^2 f(w_b) dw_b \quad (13.187)$$

$\beta$ ) **Calcul de  $\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t$**  Pour calculer  $G_{ab}$  il faut d'abord développer  $g$  en polynômes de Legendre ; pour cela on écrit :

$$g = g^2 \times \frac{1}{g} = (w_a^2 + w_b^2 - 2w_a w_b \cos \theta) \frac{1}{g} = [(w_a^2 + w_b^2) P_0 - 2w_a w_b P_1] \frac{1}{g} \quad (13.188)$$

Le développement de  $1/g$  en polynômes de Legendre est donné par les formules (13.184) et (13.185). Pour obtenir celui de  $g$  on voit d'après (13.188) qu'il faut connaître celui des produits  $P_1 P_\ell$  ; à partir d'une formule donnée par Whittaker et Watson [265, p. 331] on obtient :

$$P_1 P_\ell = \frac{1}{2\ell + 1} [(\ell + 1) P_{\ell+1} + \ell P_{\ell-1}] \tag{13.189}$$

Pour le calcul de  $G_{ab}$  on a seulement besoin de connaître dans  $g$  le terme en  $P_0$ , terme que nous désignons par  $g_0$ . De (13.188) et (13.189) on déduit facilement :

$$g_0 = (w_a^2 + w_b^2) \frac{1}{w_a} - \frac{2 w_a w_b}{3} \frac{w_b}{w_a^2} = w_a + \frac{1}{3} \frac{w_b^2}{w_a} \text{ pour } w_b < w_a \tag{13.190}$$

$$g_0 = (w_a^2 + w_b^2) \frac{1}{w_b} - \frac{2 w_a w_b}{3} \frac{w_a}{w_b^2} = w_b + \frac{1}{3} \frac{w_a^2}{w_b} \text{ pour } w_a > w_b \tag{13.191}$$

d'où :

$$G_{ab} = 4\pi \left[ w_a \int_0^{w_a} w_b^2 f dw_b + \frac{1}{3w_a} \int_0^{w_a} w_b^4 f dw_b + \int_{w_a}^\infty w_b^3 f dw_b + \frac{w_a^2}{3} \int_{w_a}^\infty w_b f dw_b \right] \tag{13.192}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} G_{ab} = 4\pi \frac{\vec{w}_a}{w_a} \left[ \int_0^{w_a} w_b^2 f dw_b - \frac{1}{3w_a^2} \int_0^{w_a} w_b^4 f dw_b + 2 \frac{w_a}{3} \int_{w_a}^\infty w_b f dw_b \right] \tag{13.193}$$

On remarque d'autre part que l'on a l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} [\vec{w}_a A(w_a)] = \bar{1} A + \frac{1}{w_a} \frac{dA}{dw_a} \vec{w}_a \vec{w}_a \tag{13.194}$$

où  $A$  est une fonction quelconque de  $w_a$  ; d'où, compte tenu de (13.182), et (13.193) le résultat final :

$$\begin{aligned} \langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = & \\ 4\pi \Gamma_{ab} \left[ \bar{1} \left( \frac{1}{w_a} \int_0^{w_a} w_b^2 f dw_b - \frac{1}{3w_a^3} \int_0^{w_a} w_b^4 f dw_b + \frac{2}{3} \int_{w_a}^\infty w_b f dw_b \right) \right. & \\ \left. + \frac{\vec{w}_a \vec{w}_a}{w_a^2} \left( -\frac{1}{w_a} \int_0^{w_a} w_b^2 f dw_b + \frac{1}{9w_a^3} \int_0^{w_a} w_b^4 f dw_b \right) \right] & \end{aligned} \tag{13.195}$$

où  $f$  désigne la fonction de distribution  $f(w_b)$  des particules cibles. Si l'on prend  $\vec{w}_a$  comme axe  $Oz$  on voit immédiatement que ce tenseur prend la forme :

$$\langle \Delta \vec{w}_a \Delta \vec{w}_a \rangle_b / \Delta t = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \langle (\Delta w_{a\parallel})^2 \rangle_b / \Delta t \end{vmatrix} \tag{13.196}$$

avec :

$$\langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t = 8\pi \Gamma_{ab} \left[ \frac{1}{w_a} \int_0^{w_a} w_b^2 f dw_b - \frac{1}{3w_a^3} \int_0^{w_a} w_b^4 f dw_b + \frac{2}{3} \int_{w_a}^\infty w_b f dw_b \right] \tag{13.197}$$

$$\langle (\Delta w_{a\parallel})^2 \rangle_b / \Delta t = 8\pi \Gamma_{ab} \left[ -\frac{1}{9w_a^3} \int_0^{w_a} w_b^4 f dw_b + \frac{1}{3} \int_{w_a}^\infty w_b f dw_b \right] \tag{13.198}$$

### e) Cas où $f(w_b)$ est maxwellienne

$\alpha$ ) Calcul de  $\langle \Delta \vec{w}_{a\parallel} \rangle_b / \Delta t$  Dans les calculs du paragraphe précédent on particularise maintenant  $f(w_b)$  en posant :

$$f_b = n_b \left( \frac{m_b}{2\pi\kappa T_b} \right)^{3/2} e^{-m_b w_b^2 / 2\kappa T_b} = \frac{n_b}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\bar{w}_b^3} e^{-\frac{w_b^2}{\bar{w}_b^2}} \quad (13.199)$$

où  $\bar{w}_b$  désigne la vitesse la plus probable des particules cibles. Pour effectuer les calculs on pose :

$$x = w_b / \bar{w}_b \quad (13.200)$$

$$u_{ab} = w_a / \bar{w}_b \quad (13.201)$$

On obtient alors facilement, en reportant (13.199) dans (13.187) et en tenant compte de (13.158) :

$$\langle \Delta \vec{w}_{a\parallel} \rangle_b / \Delta t = -\frac{n_b}{4\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a \bar{w}_b} \right]^2 \left( 1 + \frac{m_a}{m_b} \right) R(u_{ab}) \ln \Lambda \quad (13.202)$$

avec :

$$R(u) = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{1}{u^2} \int_0^u x^2 e^{-x^2} dx \quad (13.203)$$

$\beta$ ) Calcul de  $\langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t$  Un calcul analogue fait à partir de la formule (13.197) donne :

$$\langle (\Delta w_{a\perp})^2 \rangle_b / \Delta t = \frac{n_b}{4\pi\epsilon_0^2} \left[ \frac{Z_a Z_b e^2}{m_a} \right]^2 \frac{1}{\bar{w}_b} S(u_{ab}) \ln \Lambda \quad (13.204)$$

avec :

$$S(u) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \left[ \left( \frac{2}{u} - \frac{1}{u^3} \right) \int_0^u e^{-x^2} dx + \frac{1}{u^2} e^{-u^2} \right] \quad (13.205)$$

## A13-2 Équation de Landau

Partons du terme de collision (8.79) de Boltzmann que nous récrivons sous la forme :

$$C_{ab} = \int (f'_a f'_b - f_a f_b) g \sigma(\chi, \varphi) d\Omega \underline{dw}_b \quad (13.206)$$

Dans un plasma cinétique classique on peut négliger les collisions proches, les variations de vitesses :

$$\Delta \vec{w}_a = \vec{w}'_a - \vec{w}_a \quad (13.207)$$

$$\Delta \vec{w}_b = \vec{w}'_b - \vec{w}_b \quad (13.208)$$

sont faibles et l'on peut transformer  $C_{ab}$  en développant  $f'_a$  et  $f'_b$  en série de Taylor, soit en se limitant au deuxième ordre :

$$\begin{aligned} f'_a &= f_a + \overrightarrow{\Delta w}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \vec{w}_a} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Delta w}_a \overrightarrow{\Delta w}_a : \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_a} f_a + \dots \\ f'_b &= f_b + \overrightarrow{\Delta w}_b \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \vec{w}_b} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Delta w}_b \overrightarrow{\Delta w}_b : \frac{\partial}{\partial \vec{w}_b} \frac{\partial}{\partial \vec{w}_b} f_b + \dots \end{aligned} \quad (13.209)$$

d'où :

$$f'_a f'_b - f_a f_b = f_b \overrightarrow{\Delta w_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \overrightarrow{w_a}} + f_a \overrightarrow{\Delta w_b} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \overrightarrow{w_b}} + f_a \overrightarrow{\Delta w_b} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \overrightarrow{w_b}} + f_b \overrightarrow{\Delta w_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \overrightarrow{w_a}} \tag{13.210}$$

$$+ \frac{1}{2} f_b \overrightarrow{\Delta w_a} \overrightarrow{\Delta w_a} : \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{w_a}} \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{w_a}} f_a + \frac{1}{2} f_a \overrightarrow{\Delta w_b} \overrightarrow{\Delta w_b} : \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{w_b}} \frac{\partial}{\partial \overrightarrow{w_b}} f_b + \dots \tag{13.211}$$

En reportant cette expression dans  $C_{ab}$  on obtient l'équation de Fokker-Planck (13.83) ou l'équation de Landau (13.106). Ce calcul est développé dans [104, annexe II] ; nous le résumons ci-dessous.

On peut se demander pourquoi il est nécessaire et d'ailleurs suffisant de pousser le développement ci-dessus jusqu'au deuxième ordre. La raison en est la divergence coulombienne des intégrales : les termes du premier et du deuxième ordre du développement ci-dessus donnent tous deux un résultat infini lors de l'intégration sur  $\chi$  lorsque  $\chi \rightarrow 0$ . Pour supprimer la divergence il faut comme d'habitude faire la coupure de Debye. Il en résulte alors deux contributions du même ordre de grandeur proportionnelles à  $\ln \Lambda$ . Rappelons que dans les plasmas cinétiques classiques, on a  $\ln \Lambda \gg 1$ . Cela étant, on peut montrer que les termes d'ordre supérieur à 2 dans le développement de Taylor ne produisent au contraire aucune divergence et apportent une contribution plus faible, par un facteur d'ordre  $\ln \Lambda$ , que les contributions du premier et du deuxième ordre.

Pour effectuer le calcul de l'intégrale (13.206) on exprime d'abord comme au paragraphe A13-1  $\overrightarrow{\Delta w_a}$  et  $\overrightarrow{\Delta w_b}$  dans une collision en fonction de la variation  $\overrightarrow{\Delta g}$  du vecteur vitesse relative dans cette même collision. On obtient ainsi :

$$C_{ab} = \int \underline{dw_b} g \sigma d\Omega \left\{ \left[ \frac{m_b}{\mu_{ab}} \frac{\partial f_a}{\partial \overrightarrow{w_a}} f_b - \frac{m_a}{\mu_{ab}} \frac{\partial f_b}{\partial \overrightarrow{w_b}} f_a \right] \overrightarrow{\Delta g} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{m_b}{\mu_{ab}} \right)^2 \frac{\partial^2 f_a}{\partial \overrightarrow{w_a} \partial \overrightarrow{w_a}} f_b - \frac{m_a m_b}{\mu_{ab}} \frac{\partial f_a}{\partial \overrightarrow{w_a}} \frac{\partial f_b}{\partial \overrightarrow{w_b}} + \frac{1}{2} \left( \frac{m_a}{\mu_{ab}} \right)^2 \frac{\partial^2 f_b}{\partial \overrightarrow{w_b} \partial \overrightarrow{w_b}} f_a \right] \overrightarrow{\Delta g} \overrightarrow{\Delta g} \right\} \tag{13.212}$$

On effectue d'abord l'intégration sur l'angle de déviation, c'est-à-dire sur  $d\Omega$ . Ce calcul est identique à celui des coefficients de transport dans l'espace des vitesses fait dans l'appendice A13-1. On introduit les valeurs moyennes de  $\overrightarrow{\Delta g}$  et  $\overrightarrow{\Delta g} \overrightarrow{\Delta g}$  sur les angles, soit :

$$\langle \overrightarrow{\Delta g} \rangle = \int \overrightarrow{\Delta g} g \sigma d\Omega \tag{13.213}$$

$$\langle \overrightarrow{\Delta g} \overrightarrow{\Delta g} \rangle = \int \overrightarrow{\Delta g} \overrightarrow{\Delta g} g \sigma d\Omega \tag{13.214}$$

On obtient les expressions (13.154), (13.178) et (13.179). En effectuant ensuite l'intégration sur  $\underline{dw_b}$ , on obtient finalement le résultat (13.106).

### A13-3 "Maxwellianisation" des électrons ou des ions par self-interaction

Considérons dans un plasma l'une des composantes chargées, par exemple les électrons, et supposons que leur fonction de distribution à un certain instant initial soit isotrope mais non maxwellienne ; étudions l'évolution de cette fonction de distribution vers l'état

maxwellien, sous l'effet des seules interactions  $e-e$ , c'est-à-dire en négligeant les interactions  $e-i$  et en supposant qu'il n'y a aucune force extérieure appliquée aux électrons ; on peut espérer ainsi préciser la notion de temps de "maxwellianisation" des électrons entre eux, notion que nous avons introduite au paragraphe 12.9.1 ; les calculs que nous allons faire peuvent d'ailleurs s'appliquer aux ions, dans la mesure (discutable) où les interactions  $i-e$  peuvent être négligées.

On étudie le problème ainsi posé au moyen de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll.}} \quad (13.215)$$

le deuxième membre étant calculé au moyen des formules (13.89) à (13.92) qui ici se simplifient énormément ; en effet :

– il n'y a qu'un seul type de particules en jeu ; les indices  $a$  et  $b$  étant donc partout égaux, on peut les supprimer ;

– toutes les fonctions étant isotropes on peut poser  $\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{\partial h}{\partial \mu} = 0$  et réduire les sommes (13.90), (13.91) et (13.92) à leur premier terme avec :

$$a_0(w) = f \quad (13.216)$$

L'équation (13.89) s'écrit donc :

$$\frac{2w^2}{\Gamma} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll.}} = \frac{\partial}{\partial w} \left[ f \left( -2w^2 \frac{\partial h}{\partial w} - 2 \frac{\partial g}{\partial w} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \left[ f \left( w^2 \frac{\partial^2 g}{\partial w^2} \right) \right] \quad (13.217)$$

avec :

$$h = 2A_0(w) = 8\pi \left( \int_0^w \frac{x^2}{w} f(x) dx + \int_w^\infty x f(x) dx \right) \quad (13.218)$$

$$g = B_0(w) = 4\pi \left( \int_0^w x^2 w (1 + x^2/3w^2) f(x) dx + \int_w^\infty x^3 (1 + w^2/3x^2) f(x) dx \right) \quad (13.219)$$

En combinant ces trois équations on peut mettre finalement l'équation d'évolution (13.215) sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \frac{8\pi e^4}{m^2} \ln \Lambda \left[ \frac{2}{3} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \left( \int_w^\infty x f(x) dx + \frac{1}{w^3} \int_w^\infty x^4 f(x) dx \right) \right. \\ & \left. + \frac{4}{3w} \frac{\partial f}{\partial w} \left( \int_0^\infty x f(x) dx - \int_0^w \left( 1 - \frac{x}{w} \right)^2 \left( 1 + \frac{x}{2w} \right) x f(x) dx \right) + 2f^2 \right] \end{aligned} \quad (13.220)$$

On peut la mettre sous une forme réduite en l'écrivant d'abord :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{8\pi^2 e^4}{m^2} \ln \Lambda \mathcal{A}f(w) \quad (13.221)$$

en appelant pour alléger les notations  $\mathcal{A}f(w)$  la quantité entre crochets dans (13.220). L'opérateur  $\mathcal{A}f(w)$  est homogène par rapport à  $f$  de degré 2 et par rapport à  $w$  de degré zéro. Cela permet d'énoncer sans intégration d'importantes lois de similitude. On peut en effet caractériser l'état initial du gaz d'électrons par sa densité  $n$ , sa vitesse quadratique moyenne  $w_1$  (qui définit l'énergie moyenne des particules) et enfin la forme de sa fonction de distribution. Au cours de l'évolution seule cette forme varie,  $n$  et  $w_1$  restant constants ; c'est pourquoi nous posons :

$$f = \frac{n}{w_1^3} \varphi(u) \quad (13.222)$$

avec :

$$u = \frac{w}{w_1} \tag{13.223}$$

Il est facile de voir que  $\varphi(u)$  satisfait alors à la double condition

$$4\pi \int_0^\infty u^2 \varphi(u) du = 4\pi \int_0^\infty u^4 \varphi(u) du = \text{Cte} \tag{13.224}$$

En portant (13.222) dans (13.221), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\pi \langle \nu_1 \rangle \mathcal{A} \varphi(u) \tag{13.225}$$

en appelant ici  $\langle \nu_1 \rangle$  l'expression  $\nu_1(w_1)$  relative aux particules considérées. Introduisons enfin un temps réduit  $s$  défini par la formule :

$$s = 2\pi \langle \nu_1 \rangle t \tag{13.226}$$

Nous obtenons l'équation réduite

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathcal{A} \varphi(u) \tag{13.227}$$

qui ne contient plus aucun paramètre. Autrement dit, toutes les fonctions de distribution semblables relaxent de façon semblable, les lois d'évolution devenant identiques si on prend comme unité de vitesse la vitesse quadratique moyenne et comme unité de temps une unité inversement proportionnelle à  $\langle \nu_1 \rangle$ . Or, l'on a :

$$\frac{1}{\langle \nu_1 \rangle} \sim \frac{m^2 w_1^3}{n} \sim \frac{m^{1/2} \bar{w}^{3/2}}{n} \tag{13.228}$$

*L'échelle de temps des relaxations par self-interaction varie comme la racine carrée de la masse, la puissance 3/2 de l'énergie et l'inverse de la densité.* Rosenbluth et al. [230] ont effectué une intégration numérique de l'équation (13.227) dans un cas particulier intéressant : celui où à l'instant initial tous les électrons ont la même vitesse  $w_1$ . Les résultats sont représentés sur la figure 13.12.

En fait, une distribution initiale du type fonction de Dirac  $f = \delta(w_1)$  est impossible à manipuler numériquement ; cependant on peut admettre qu'au bout d'un temps relativement court (de l'ordre de  $0.1/\langle \nu_1 \rangle$ ), elle se sera légèrement élargie et pourra être représentée par une courbe de Gauss ; c'est cette distribution qu'on peut prendre comme état initial ; elle est représentée par la courbe  $C_0$  de la figure 13.12 ; les courbes  $C_1$  et  $C_2$  représentent la fonction de distribution aux instants  $t = 0.62/\langle \nu_1 \rangle$  et  $t = 4.1/\langle \nu_1 \rangle$  ; la courbe  $C_\infty$  est la distribution maxwellienne ; on voit que pour les vitesses  $w$  de l'ordre de  $w_1$  l'état maxwellien est atteint au bout d'un temps de l'ordre de  $1/\langle \nu_1 \rangle$  ; ce temps coïncide assez bien avec les temps de relaxation moyens  $t_r$  ou  $t_D$  relatifs aux collisions e-e que nous avons calculés au paragraphe 13.4.2 (cf. tableau 13.2).

Par contre, la queue de la distribution maxwellienne du côté des hautes énergies se remplit beaucoup plus lentement. Une étude approchée [230] de l'équation (13.227) montre que l'on atteint l'état maxwellien pour la valeur  $w \gg w_1$  au bout d'un temps  $t_M(w)$  donné par la relation approchée :

$$t_M(w) \simeq \frac{1}{\nu_1(w)} = \frac{1}{3\langle \nu_1 \rangle} \frac{1}{(w/w_1)^3} \tag{13.229}$$

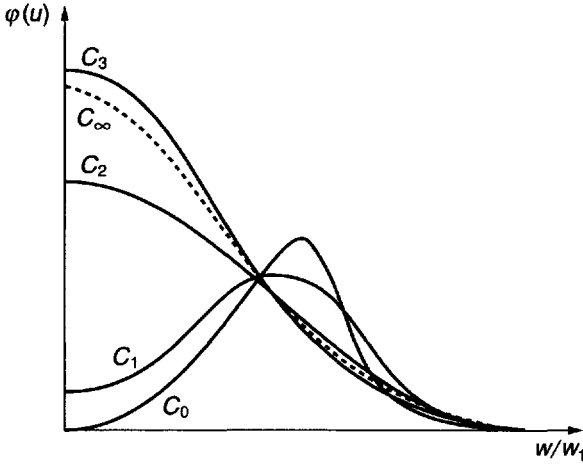


Figure 13.12 : Maxwellianisation des électrons.

### A13-4 Écriture de l'équation de Landau sous la forme de Fokker-Planck

Le terme (13.106)  $\vec{J}_{ab}$  de l'équation de Landau (cf. tableau 13.4) peut s'écrire, en faisant sortir  $f_a$  et  $\frac{\partial f_a}{\partial w_a}$  de l'intégrale, sous la forme :

$$\vec{J}_{ab} = \vec{A} f_a - \overline{\overline{B}} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial w_a} \quad (13.230)$$

avec :

$$\vec{A} = \frac{\Gamma_{ab}}{m_b} \int \overline{\overline{G_{ab}}} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial w_b} dw_b \quad (13.231)$$

$$\overline{\overline{B}} = \frac{N_{ab}}{m_a} \int \overline{\overline{G_{ab}}} f_b dw_b \quad (13.232)$$

Mais l'on a de façon générale, pour un tenseur tel que  $\overline{\overline{B}}$  fonction de  $\vec{w}_a$  et symétrique :

$$\overline{\overline{B}} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial w_a} = \frac{\partial}{\partial w_a} \cdot \overline{\overline{B}} f_a - f_a \frac{\partial}{\partial w_a} \cdot \overline{\overline{B}} \quad (13.233)$$

de sorte que (13.230) peut aussi s'écrire :

$$\vec{J}_{ab} = \frac{\vec{F}_{ab}}{m_a} f_a - \frac{\partial}{\partial w_a} \cdot \overline{\overline{D_{ab}}} f_a \quad (13.234)$$

avec :

$$\frac{\vec{F}_{ab}}{m_a} = \vec{A} + \frac{\partial}{\partial w_a} \cdot \overline{\overline{B}} \quad (13.235)$$

$$\overline{\overline{D_{ab}}} = \overline{\overline{B}} \quad (13.236)$$



Sous la forme (13.234) l'équation qui exprime  $\overrightarrow{j}_{ab}$  en fonction de  $f_a$  et  $\partial f_a / \partial \overrightarrow{w}_a$  est l'analogie exacte dans l'espace des vitesses d'une équation de flux dans l'espace ordinaire en présence d'une force extérieure et d'un gradient de pression [cf. par exemple les formules (5.13) et (5.63)]. Le même calcul peut se faire à partir de l'équation de Balescu (13.108) du tableau 13.4 ; il conduit encore aux formules (13.234), (13.234), (13.234) mais dans les expressions (13.231) et (13.232) de  $\overrightarrow{B}$  et  $\overline{B}$  il faut remplacer  $\Gamma_{ab}$  par  $N_{ab}$  et  $\overline{G}_{ab}$  par  $\overline{U}_{ab}$ .

### 13.10 Problèmes

#### P13-1 Linéarisation de l'équation de Fokker-Planck

a) En posant dans les équations (13.88) à (13.215) :

$$f_a \equiv f_e = f_e^{(0)} + a_1^e \mu \tag{13.237}$$

$$f_b \equiv f_i = A e^{-w^2/W_0^2} \tag{13.238}$$

et en ne tenant compte que des collisions avec les ions, montrer que l'on a pour les électrons :

$$h = A_0^i(w) = n_i/w \tag{13.239}$$

$$g \simeq n_i w \tag{13.240}$$

b) En déduire la relation :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t}_{\text{coll.e-i}} = -\frac{n\Gamma_e}{w^3} f_e^{(1)} \tag{13.241}$$

#### P13-2 Conductivité électrique de Lorentz

En partant de la formule (12.61) et en supposant pour simplifier  $B = 0$ , montrer que l'on a :

$$\sigma_L = \frac{16}{3} \left( \frac{2}{3\pi} \right)^{1/2} \frac{n e^2}{m \overline{v}_1} \tag{13.242}$$

#### P13-3 Conductivité thermique de Lorentz

En admettant que  $\alpha_0$  est maxwellienne et en calculant les moyennes appropriées de  $\nu_1$ , comparer l'expression (13.141) donnée par Spitzer aux résultats de la section 12.8.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Chapitre 14

## Plasmas et rayonnement

### 14.1 Introduction

Dans ce chapitre nous traitons de l'émission de rayonnement électromagnétique par les plasmas et, de façon plus générale, de l'interaction des champs de rayonnement avec les particules matérielles au sein d'un plasma. Même dans le cas d'un plasma froid et faiblement ionisé produit par décharge électrique dans un gaz, les électrons possèdent une énergie suffisante pour exciter les atomes de l'état fondamental vers des états radiatifs. L'émission de raies atomiques est alors un des moyens par lesquels le plasma cède une partie de l'énergie apportée par le champ électrique appliqué. Cependant les phénomènes radiatifs sont beaucoup plus importants dans le cas des plasmas thermonucléaires : ces plasmas de température très élevée rayonnent une quantité d'énergie extrêmement importante qui doit être fournie par les réactions nucléaires pour que la température soit conservée.

L'évaluation quantitative du rayonnement émis par un plasma nécessite la prise en compte de son épaisseur optique pour le rayonnement qu'il peut émettre. Si le plasma est *optiquement épais* (complètement opaque) alors il émet comme un corps noir et la perte d'énergie qui en résulte peut être importante ( $\sim T^4$ ). C'est le cas dans les plasmas d'explosion nucléaire, où l'énorme quantité d'énergie libérée par les réactions nucléaires équilibre la colossale quantité d'énergie rayonnée. Dans ces conditions il serait absolument impossible de faire fonctionner un réacteur à fusion contrôlée, où les températures mises en jeu sont comparables à celles d'une explosion, mais dans lequel le taux de production d'énergie doit être beaucoup plus faible pour éviter la destruction du réacteur. Cependant les plasmas usuels de laboratoire sont optiquement minces pour leur propre rayonnement, et

cela implique que l'émission totale d'énergie rayonnée est moindre que celle d'un corps noir. Dans ces conditions la fusion thermonucléaire contrôlée devient possible *a priori*.

Dans le cas d'un plasma *optiquement mince*, on ne peut évaluer la puissance rayonnée que par une analyse détaillée des processus responsables de l'émission de rayonnement. Si le plasma est complètement ionisé, composé par exemple d'électrons et de protons, le rayonnement est produit par les électrons libres. La théorie bien connue du rayonnement d'une particule chargée accélérée, décrite dans les ouvrages d'électrodynamique classique, permet alors de calculer le rayonnement émis. Ce sera le sujet de la section 14.2 dans laquelle on discutera en détail les deux processus fondamentaux d'émission de rayonnement par des électrons, à savoir l'émission cyclotron et le bremsstrahlung. Cette théorie ne s'applique en principe qu'aux plasmas composés uniquement d'électrons et de noyaux nus. Cependant, un plasma même complètement ionisé peut contenir des ions qui n'ont pas été complètement "épluchés" de tous leurs électrons ; dans de tels cas on doit également tenir compte de l'émission due aux transitions entre deux niveaux liés.

Dans tous les cas, le *couplage du rayonnement avec la matière* doit être pris en compte. Par cela on veut dire, tout d'abord, que le rayonnement émis par certaines parties du plasma peut être absorbé dans les couches externes de celui-ci et donc que l'émission résultante dans le vide extérieur dépend de ces phénomènes d'auto-absorption. A la fin de la section 14.5 nous évaluerons l'ordre de grandeur de la longueur d'auto-absorption d'un plasma. Mais, d'autre part, la présence de grandes quantités de rayonnement dans un plasma modifie sa composition physico-chimique, c'est-à-dire la population des différentes espèces présentes dans le plasma. Le problème de l'étude simultanée de l'émission de rayonnement par la matière et de la modification de l'état de celle-ci par l'existence de grandes quantités de rayonnement est connu sous le nom de problème du transfert radiatif. Nous discuterons cette théorie générale dans la section 14.8.

Lorsque la quantité de rayonnement dans un plasma est importante, on peut d'ailleurs assimiler le rayonnement à un fluide et au lieu de considérer le plasma comme composé d'électrons, d'ions et éventuellement de neutres, considérer qu'il contient aussi un gaz de photons qui peuvent, en quelque sorte, être traités comme les particules matérielles. On peut en effet écrire des équations cinétiques et hydrodynamiques pour le gaz de photons, et c'est cette approche que l'on nomme l'*hydrodynamique radiative*. Elle n'est que peu utile dans le cas des plasmas de faible densité dans lesquels les phénomènes collectifs sont les plus importants ; c'est au contraire une formulation très fructueuse des problèmes concernant les plasmas chauds

et très denses tels que ceux rencontrés en astrophysique et dans l'étude des explosions nucléaires.

Enfin, dans la section 14.9 nous introduirons, pour résumer tout le chapitre, une classification des plasmas du point de vue du rayonnement. Ceci généralisera la classification des plasmas introduite au chapitre 1 où le rayonnement était ignoré.

## 14.2 Émission de rayonnement par les électrons libres

### 14.2.1 Champs d'une particule chargée (formules relativistes)

On sait qu'une distribution continue de charge  $\rho(\vec{r}, t)$  et de courant  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  peuvent être obtenus à l'aide des potentiels retardés de Lorentz qui sont des solutions exactes des équations de Maxwell (voir par exemple [289]). À partir de ceux-ci, on peut obtenir des potentiels approchés qui décrivent le champ électromagnétique à l'extérieur d'une particule quasi ponctuelle. Un électron, par exemple, peut être assimilé à un petit volume chargé dont le rayon est de l'ordre de  $10^{-12}$  cm, mais dont la structure interne est mal connue. Si on s'intéresse seulement au champ électromagnétique à l'extérieur de ce très petit volume, on peut alors remplacer les potentiels exacts de Lorentz par ceux de Liénard-Wiechert qui fournissent une excellente approximation de ce champ externe. Ces potentiels sont donnés par les formules suivantes :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{r} \right] \frac{1}{1 - \left[ \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{rc} \right]} \quad (14.1)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{q \vec{v}}{r} \right] \frac{1}{1 - \left[ \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{rc} \right]} \quad (14.2)$$

À partir de ces expressions, les champs sont donnés par les formules habituelles :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (14.3)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (14.4)$$

Les notations et la géométrie du problème sont présentés sur la figure 14.1. Au temps  $t$ , la particule est au point  $O$  et l'observateur en  $P$ . Le

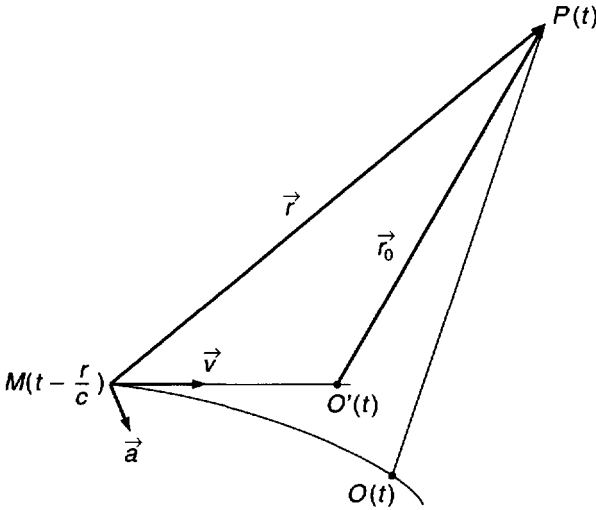


Figure 14.1 : Champs produits par une particule chargée en mouvement.

$O, P$  Positions de la particule et de l'observateur à l'instant  $t$ .

$M$  Point source à l'instant  $t - r/c$ .

$O'$  Position virtuelle de la particule à l'instant  $t$  (comme si  $\vec{a}$  était nul).

potentiel et les champs au point  $P$  sont des fonctions de la position  $\vec{r}$ , de la vitesse  $\vec{v}$  et de l'accélération  $\vec{a}$  de la particule ; cependant les valeurs de ces quantités ne doivent pas être prises au point  $O$  et au temps  $t$ , mais à l'instant antérieur  $(t - r/c)$  en un certain point  $M$  de la trajectoire qu'on appelle le point source. La position  $\vec{r} = \overrightarrow{MP}$  du point source est définie par la condition que la lumière prenne le même temps pour aller de  $M$  en  $P$ , que la particule pour aller de  $M$  en  $O$ . Le temps  $(t - r/c)$  est le temps retardé. On a également représenté sur la figure une position virtuelle  $O'$  (avec  $\vec{r}_0 = \overrightarrow{O'P}$ ) qui serait la position de la particule au temps  $t$ , si partant de  $M$  elle s'était déplacée le long d'une ligne droite à la vitesse constante  $\vec{v}$  qu'elle avait en  $M$ . C'est une position virtuelle car, en général,  $\vec{v}$  varie à cause de l'accélération  $\vec{a}$  et la particule arrive au temps  $t$  en  $O$  plutôt qu'en  $O'$ . Les crochets utilisés dans les formules (14.1) et (14.2) représentent des quantités retardées liées au point source  $M$  (position  $\vec{r}$ , temps  $t - r/c$ ). Nous n'en ferons plus usage dans la suite. Le calcul des champs à partir des potentiels de Liénard-Wiechert est décrit dans les ouvrages classiques [290], [291], [292] ; il montre que les champs peuvent être séparés en deux

parties distinctes :

- *Champs de convection*

$$\frac{4\pi\epsilon_0\vec{E}_1}{q} = \vec{r}_0 \frac{1 - v^2/c^2}{r^3(1 - \vec{r} \cdot \vec{v}/rc)^3} \quad (14.5)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\vec{r} \times \vec{E}_1}{rc} \quad (14.6)$$

Ces champs sont seulement des fonctions de  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  ; ils ne dépendent pas de l'accélération  $\vec{a}$ . On voit également qu'ils décroissent comme  $\frac{1}{r^2}$  pour les grandes valeurs de  $r$ . Par conséquent, le flux d'énergie à travers une sphère centrée sur  $M$  tend vers zéro lorsque le rayon de la sphère tend vers l'infini. L'énergie associée à ces champs est transportée par le mouvement de la particule : ils accompagnent celle-ci ; c'est la raison pour laquelle on les appelle "champs de convection". Comme ils ne dépendent pas de l'accélération, ils peuvent être calculés à l'aide d'une simple transformation de Lorentz, en supposant que la particule se déplace à la vitesse constante  $\vec{v}$  (voir problème P14-1).

- *Champs de rayonnement*

$$\frac{4\pi\epsilon_0\vec{E}_2}{q} = \frac{\vec{r} \times (\vec{r}_0 \times \vec{a})}{c^2 r^3 (1 - \vec{r} \cdot \vec{v}/rc)^3} \quad (14.7)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\vec{r} \times \vec{E}_2}{rc} \quad (14.8)$$

Ces autres champs dépendent de  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  et de l'accélération  $\vec{a}$  ; ils sont nuls pour  $\vec{a} = 0$ . Ils varient comme  $1/r$  aux grandes valeurs de  $r$  et, de ce fait, loin de la particule, les champs de rayonnement sont beaucoup plus grands que les champs de convection. Pour les champs de rayonnement, le flux d'énergie à travers une sphère de très grand rayon tend vers une valeur finie lorsque le rayon de la sphère tend vers l'infini. L'énergie qui leur est associée se sépare de la particule, et représente pour celle-ci une perte d'énergie ; c'est la raison pour laquelle on les appelle "champs de rayonnement".

Leur structure est représentée sur la figure 14.2. Le champ  $\vec{E}_2$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{r}$ , ce que l'on a montré en dessinant ce champ électrique dans le plan perpendiculaire à  $\vec{r}$ . Le champ

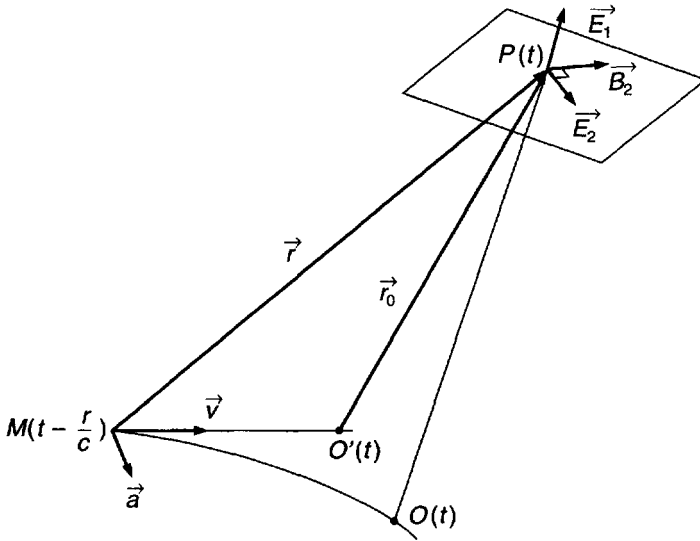


Figure 14.2 : Champs de rayonnement.

magnétique  $\vec{B}_2$  est perpendiculaire à la fois à  $\vec{r}$  et  $\vec{E}_2$  ; il se trouve aussi dans le plan perpendiculaire à  $\vec{r}$ . On voit ainsi clairement que cette structure de champs est semblable à celle d'une onde électromagnétique.

## 14.2.2 Rayonnement d'une particule non relativiste ( $v \ll c$ )

### a) Champs

Les formules précédentes et leurs conséquences sont discutées dans de nombreux ouvrages classiques [290], [291], [292]. Cependant, pour l'objet du présent texte on se limitera au cas où la vitesse de la particule est beaucoup plus petite que la vitesse de la lumière et pour lequel les expressions et la géométrie des champs se simplifient beaucoup.

Lorsque  $v \ll c$  les trois points  $M$ ,  $O$  et  $O'$  sont confondus, comme on peut le voir sur la figure 14.3(a). Les deux vecteurs  $\vec{r}$  et  $\vec{r}_0$  sont égaux. Afin de décrire leur direction, introduisons un vecteur unitaire  $\vec{s}$  le long de  $MP$ . Les champs de rayonnement (nous omettrons dorénavant l'indice



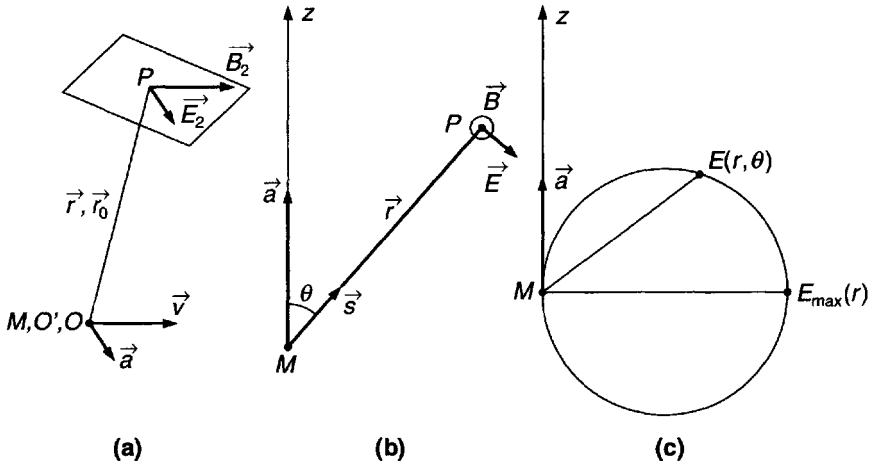


Figure 14.3 : Structure dipolaire du champ de rayonnement pour  $v \ll c$ .

- (a) Polarisations de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .  
 (b) Dipôle axé sur l'accélération de l'électron.  
 (c) Dépendance angulaire de  $\vec{E}$  (et  $\vec{B}$ ).

2) s'écrivent alors :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{s} \times (\vec{s} \times \vec{a})}{r} \quad (14.9)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{s} \times \vec{E}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\vec{s} \times \vec{a}}{r} \quad (14.10)$$

Comme le vecteur  $\vec{v}$  ne joue plus aucun rôle, alors que  $\vec{a}$  est essentiel, on peut représenter les champs sur la figure 14.3(b) où l'axe vertical  $Oz$  a été choisi suivant la direction du vecteur accélération  $\vec{a}$ .

Les champs électrique et magnétique sont représentés sur la figure et l'on a également omis l'indice 2. Leurs valeurs absolues sont données par :

$$|E| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \sin \theta}{r} \quad (14.11)$$

$$|B| = |E|/c \quad (14.12)$$

En examinant ces résultats et la géométrie de la figure 14.3(b), on remarque que la structure des champs est semblable à celle produite par une antenne

dipolaire d'axe  $\vec{a}$  et ceci, tant du point de vue de la polarisation des champs que de leur distribution angulaire représentée sur la figure 14.3(c) à l'aide d'un lobe circulaire pour l'intensité du champ.

### b) Puissance rayonnée

Soit  $P(\vec{s}, t)$  la puissance rayonnée au temps  $t$  par la particule, par unité d'angle solide dans la direction  $\vec{s}$ . Celle-ci peut être calculée à partir du vecteur de Poynting :

$$\vec{E} \times \vec{B} / \mu_0 = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \frac{|\vec{s} \times \vec{a}|^2}{r^2} \vec{s} \quad (14.13)$$

On obtient :

$$P(\vec{s}, t) = \frac{dW(\vec{s})}{d\Omega dt} = \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} |\vec{s} \times \vec{a}|^2 \quad (14.14)$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} |\vec{a}|^2 \sin^2 \theta \quad (14.15)$$

où  $\theta$  est l'angle formé par  $\vec{a}$  et la direction  $\vec{s}$  de l'observateur. On en déduit la puissance totale  $P(t)$  rayonnée au temps  $t$  par la particule en intégrant (14.15) sur l'angle  $\theta$ , soit :

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \int P(\vec{s}, t) d\Omega = \frac{q^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3} |\vec{a}|^2 \quad (14.16)$$

Ce résultat est connu sous le nom de formule de Larmor.

### c) Distribution spectrale de la puissance rayonnée

On peut également être intéressé par la distribution en fréquence de cette puissance rayonnée ; cette question n'a de sens que si on intègre la puissance émise le long de la trajectoire complète. Mais on ne peut pas supposer que depuis  $t = -\infty$  jusqu'à  $t = +\infty$   $\vec{v}$  et  $\vec{a}$  sont tous les deux non nuls, car il en résulterait une puissance totale rayonnée infinie.

Pour éviter cela, on imagine la situation représentée sur la figure 14.4, où une particule commence son mouvement au loin sans être accélérée, puis durant un certain intervalle de temps subit une accélération en suivant une trajectoire compliquée entre les points  $A$  et  $B$ , et finalement s'en va au loin sans aucune accélération.

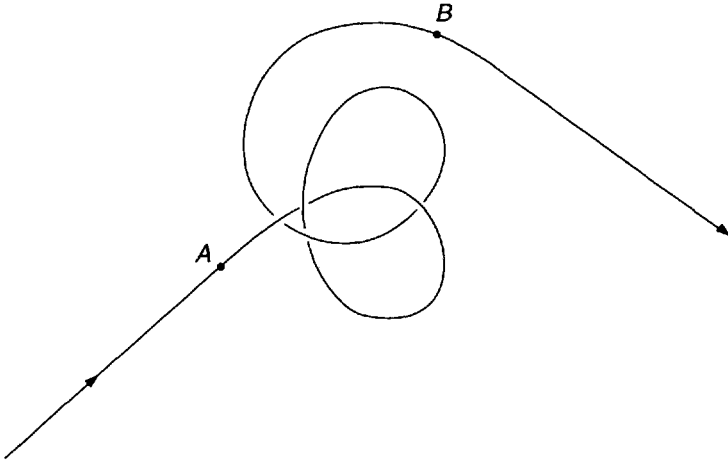


Figure 14.4 : Trajectoire d'une particule accélérée entre les points A et B.

De cette façon, la puissance rayonnée le long de la trajectoire complète est finie et peut s'écrire :

$$W(\vec{s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{s}, t) dt \quad (14.17)$$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt \quad (14.18)$$

La première de ces formules représente l'énergie dans une direction donnée et la seconde l'énergie totale. On peut les transformer en utilisant l'identité de Parseval qui s'écrit pour un vecteur réel (cf. par exemple [292, pp. 668-9]) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{A}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{A}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |\vec{A}(\omega)|^2 d\omega \quad (14.19)$$

où  $\vec{A}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\vec{A}(t)$ . On obtient ainsi le spectre dans une direction donnée (énergie par  $d\omega d\Omega$ ) :

$$W(\vec{s}, \omega) = \frac{q^2}{16\pi^3 \varepsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{s} \times \vec{a}) e^{+i\omega t} dt \right|^2 \quad (14.20)$$

ou dans n'importe quelle direction (énergie par  $d\omega$ ) :

$$W(\omega) = \frac{q^2}{6\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{a}(t) e^{+i\omega t} dt \right|^2 \quad (14.21)$$

On voit ainsi que les composantes de Fourier de la puissance rayonnée sont étroitement liées aux composantes de Fourier du vecteur accélération. Les seules fréquences qui apparaissent dans le champ rayonné sont celles qui existent dans l'analyse de Fourier du vecteur accélération.

Nous examinerons un exemple simple illustrant cette règle dans la section suivante où nous considérerons la rotation d'une particule dans un champ magnétique. Ce mouvement ne fait intervenir que la fréquence cyclotron  $\Omega$  et le champ de rayonnement sera monochromatique avec  $\omega = \Omega$ .

## 14.3 Rayonnement cyclotron

### 14.3.1 Puissance totale rayonnée

La formule de Larmor (14.16) donne pour la puissance rayonnée par un électron de vitesse<sup>1</sup>  $v$  tournant dans un champ magnétique uniforme :

$$P(\vec{v}) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left| \frac{e \vec{v} \times \vec{B}}{m} \right|^2 \quad (14.22)$$

La puissance totale rayonnée par tous les électrons contenus dans une unité de volume du plasma est alors donnée par la formule :

$$\left( \frac{dU}{dt} \right)_c = \int P(\vec{v}) f(\vec{v}) d\underline{v} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{B^2}{m^3} \int m v_{\perp}^2 f(\vec{v}) d\underline{v} \quad (14.23)$$

Si l'on suppose que la fonction de distribution des vitesses des électrons est isotrope, alors l'intégrale dans la formule ci-dessus vaut exactement deux tiers de la pression cinétique, et par suite :

$$\left( \frac{dU}{dt} \right)_c = \frac{e^4 B^2}{3\pi\epsilon_0 m^3 c^3} n_e \kappa T_e \quad (14.24)$$

ou, sous forme numérique :

$$\left( \frac{dU}{dt} \right)_c = 5.35 \cdot 10^{-24} n_e T_e B^2 \quad (\text{SI}) \quad (14.25)$$

La comparaison de cette énergie rayonnée et de la densité totale d'énergie cinétique des électrons dans le plasma permet de définir un temps

1. Dans ce chapitre on ne rencontrera aucune vitesse de fluide. On peut donc utiliser la notation  $\vec{v}$  pour la vitesse d'un électron individuel et  $f(\vec{v})$  (au lieu de  $f(\vec{w})$ ) pour une fonction de distribution des vitesses.

de relaxation caractéristique pour le refroidissement du gaz électronique par émission de rayonnement cyclotron. Cela est discuté dans le problème P14-2 où il est montré que ce temps de relaxation est généralement très long à l'échelle des phénomènes microscopiques et toujours beaucoup plus grand que la période de rotation des électrons dans le champ magnétique.

### 14.3.2 Distribution spectrale et angulaire

Le rayonnement cyclotron n'est pas isotrope. Pour étudier sa répartition angulaire partons de la formule (14.14) et considérons la situation représentée sur la figure 14.5 : à un instant donné chaque électron émet un rayonnement dipolaire d'axe  $OM$  dirigé le long du rayon instantané de giration ; on regarde le rayonnement dans la direction  $OP$  que l'on suppose être dans le plan  $yOz$  et faisant un angle  $\theta$  avec  $B$ .

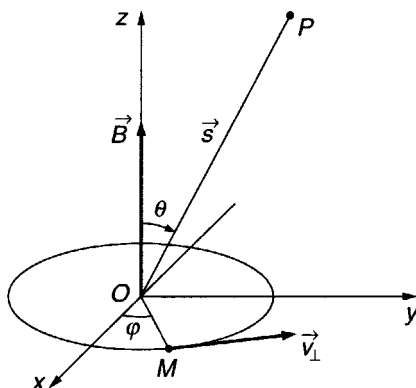


Figure 14.5 : Distribution angulaire du rayonnement cyclotron ( $v \ll c$ ).

Un calcul simple donne alors :

$$|\vec{s} \times \vec{a}|^2 = a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \quad (14.26)$$

où  $\varphi$  est l'azimut de l'électron. La puissance rayonnée par l'électron par unité d'angle solide dans la direction  $OP$  s'obtient en prenant la valeur moyenne de  $\varphi$  sur une période de giration ; il vient alors en utilisant (14.14),

pour un électron de vitesse  $\vec{v}$  :

$$P(\vec{s}, \vec{v}) = \frac{e^4 v_{\perp}^2 B^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 m^2 c^3} (1 + \cos^2 \theta) \quad (14.27)$$

où  $v_{\perp}$  est la composante de  $\vec{v}$  perpendiculaire à  $\vec{B}$  ; soit après intégration sur la distribution de vitesse :

$$\frac{dU}{dt d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \left( \frac{dU}{dt} \right)_c (1 + \cos^2 \theta) \quad (14.28)$$

où  $(dU/dt)_c$  est la puissance totale rayonnée donnée par (14.24). Le rayonnement émis est purement monochromatique, avec l'unique fréquence :

$$\omega = \Omega \quad (14.29)$$

Les résultats concernant la distribution spectrale et angulaire peuvent être résumés en introduisant une quantité appelée *émissivité spectrale, dans la direction  $\vec{s}$ , d'un électron de vitesse  $\vec{v}$*  (puissance par  $d\omega d\Omega$ ) [315]. Cette quantité que nous désignons par  $\eta_{\omega}(\vec{s}, \vec{v})$  est la grandeur fondamentale utilisée dans la théorie du transfert radiatif. Dans le cas du rayonnement cyclotron émis par des électrons non relativistes, on a :

$$\eta_{\omega}(\vec{s}, \vec{v}) \equiv \frac{1}{2\pi} \eta_{\nu}(\vec{s}, \vec{v}) = \frac{e^2 \omega^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 c^3} v_{\perp}^2 (1 + \cos^2 \theta) \delta(\omega - \Omega) \quad (14.30)$$

### 14.3.3 Discussion des approximations

Nous avons calculé le rayonnement émis à l'aide d'une théorie simple non quantique, et également négligé la variation du rayon de giration pendant le processus radiatif. Ces deux hypothèses sont basées sur les remarques suivantes :

- La puissance rayonnée produit seulement une lente contraction adiabatique des orbites. On veut dire par là que la condition suivante est satisfaite :

$$P(v_{\perp}) \times \frac{2\pi}{\Omega} \ll \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \quad (14.31)$$

On peut effectivement montrer que cette condition peut aussi s'écrire :

$$\hbar \Omega \ll \frac{3}{8\pi} 137 mc^2 \quad (14.32)$$

$$B < B_1 = 7.2 \cdot 10^{10} \text{ (SI)} \quad (14.33)$$

- Les orbites d'un électron tournant dans un champ magnétique constant sont d'ailleurs quantifiées et les niveaux d'énergie (niveaux de Landau [284]) sont :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \Omega \quad (14.34)$$

Mais on est généralement dans la situation où :

$$\kappa T \gg \hbar \Omega \quad (14.35)$$

ce qui correspond à :

$$B < B_2 \quad (14.36)$$

avec :

$$B_2 = 4,4 \cdot 10^9 \frac{\kappa T}{mc^2} = 0.74 T \quad (\text{SI}) \quad (14.37)$$

Dans ces conditions l'émission de rayonnement à la fréquence  $\Omega$  peut être assimilée à des transitions entre deux niveaux de Landau de nombres quantiques très élevés et, suivant le principe de correspondance, la théorie classique du rayonnement s'applique dans cette situation limite.

### 14.3.4 Corrections relativistes

Les corrections relativistes sont petites quand le plasma est non relativiste, c'est-à-dire si  $\kappa T \ll m_e c^2$ . On montre, par exemple, que la puissance totale rayonnée est légèrement augmentée selon la formule suivante :

$$\frac{dU}{dt} = \left( \frac{dU}{dt} \right)_{\text{nonrel}} \times \left( 1 + \frac{5}{2} \frac{\kappa T_e}{m_e c^2} + \dots \right) \quad (14.38)$$

Il y a aussi une certaine quantité de rayonnement sur les harmoniques de la fréquence cyclotron, le plus important étant le premier ( $\omega = 2\Omega$ ) pour lequel on a :

$$P'_2(v) = P(v) \times \left[ \frac{12}{5} \beta_{\perp}^2 \right] \quad (14.39)$$

où  $P(v)$  est la puissance rayonnée par un électron de vitesse  $v$  dans l'approximation non relativiste et  $P'_2(v)$  la puissance rayonnée à la fréquence  $\omega = 2\Omega$ , avec  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c \ll 1$ . Le cas des particules ultrarelativistes sort du cadre de ce chapitre ; on en trouvera une discussion dans l'ouvrage de Bekefi [315]. Pour  $\kappa T \gg mc^2$  les propriétés du rayonnement changent radicalement ; on l'appelle dans ce cas le *rayonnement synchrotron*. Ses deux principales caractéristiques sont : une très forte directivité du rayonnement sous forme d'un étroit pinceau centré sur  $\vec{v}$  ( $\vec{a}$  ne joue plus aucun rôle important dans la distribution angulaire) et la présence d'harmoniques d'ordre très élevé.

## 14.4 Bremsstrahlung électron-neutre

### 14.4.1 Remarques préliminaires

Lors d'une collision binaire, des forces importantes s'exercent sur les particules et, de façon générale, l'accélération subie par la particule 1 s'écrit :

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{X}_{12}}{m_1} \quad (14.40)$$

où  $\vec{X}_{12}$  est la force exercée sur la particule 1 par la particule 2. La présence de la masse au dénominateur de cette formule montre clairement que la plus grande part du rayonnement est due aux électrons. On doit donc considérer trois types de collisions :  $e-e$ ,  $e-o$  et  $e-i$ , mais nous allons montrer que les collisions  $e-e$  produisent une quantité négligeable de rayonnement

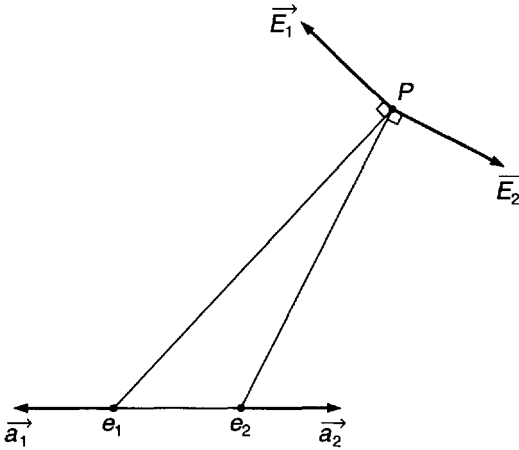


Figure 14.6 : Le bremsstrahlung  $e$ - $e$  est négligeable dans l'approximation dipolaire ( $v \ll c$ ).

dans l'approximation dipolaire ( $v \ll c$ ). Cela peut être déduit de la figure 14.6, sur laquelle on a représenté l'interaction de deux électrons  $e_1$  et  $e_2$  lors d'une collision.

D'après les règles générales de l'émission dipolaire, on voit que les deux champs électriques rayonnés par  $e_1$  et  $e_2$  sont perpendiculaires respectivement à  $e_1P$  et  $e_2P$  et presque opposés ; ces deux champs s'annulent mutuellement pour un observateur éloigné. On peut montrer, plus précisément (voir par exemple [292]), que le rayonnement dû aux collisions  $e$ - $e$  se produit seulement par une correction relativiste introduisant le rayonnement quadripolaire. Nous considérerons donc seulement deux types de collision : les collisions  $e$ - $o$  que nous analysons maintenant et les collisions  $e$ - $i$  qui seront traitées dans la section suivante.

## 14.4.2 Bremsstrahlung électron-neutre

La géométrie d'une collision élastique électron-neutre est présentée sur la figure 14.7(a). En se rappelant que le potentiel d'interaction entre un électron et un neutre est à court rayon d'action, on observe que lors d'une collision électron-neutre l'accélération  $a$  est une impulsion limitée à la section  $AB$  de la trajectoire et dont la durée est en ordre de grandeur :

$$\tau \sim \frac{p}{v} \quad (14.41)$$



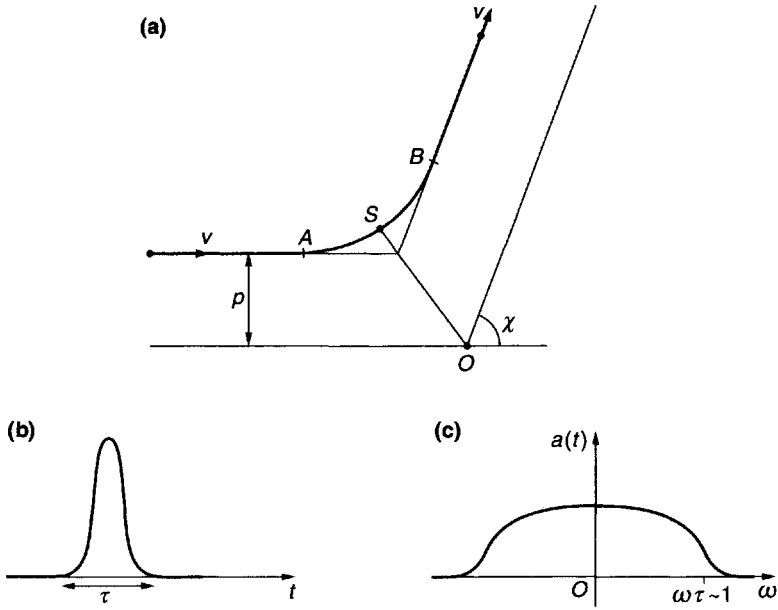


Figure 14.7 : Bremsstrahlung électron-neutre.

- (a) Trajectoire d'un électron.
- (b) Variation temporelle de  $a$ .
- (c) Transformée de Fourier de  $a(t)$ .

Cette impulsion est représentée sur la figure 14.7(b) avec sa transformée de Fourier sur la figure 14.7(c). On observe que le spectre rayonné est relativement plat à partir de  $\omega = 0$ , jusqu'à une certaine fréquence telle que  $\omega p/v \sim 1$ . On peut d'ailleurs trouver une approximation pour la distribution spectrale dans le domaine des basses fréquences : dans cette région on peut approximer le terme  $e^{i\omega t}$  par l'unité, dans la formule (14.21), et on obtient :

$$W(\omega) \approx \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left| \int d\vec{v} / dt \right|^2 \tag{14.42}$$

ou, pour une collision avec une vitesse initiale  $v$  et un angle de déflexion  $\chi$  :

$$W(v, \chi, \omega) = \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} | \Delta \vec{v} |^2 \tag{14.43}$$

Mais on déduit aisément de la figure 14.7(a) que :

$$|\Delta \vec{v}|^2 = |2v \sin(\chi/2)|^2 = 2v^2(1 - \cos \chi) \quad (14.44)$$

formule à partir de laquelle on obtient le résultat final :

$$W(v, \chi, \omega) = \frac{e^2}{3\pi^2 \varepsilon_0 c^3} v^2 (1 - \cos \chi) \quad (14.45)$$

pour la composante de Fourier de l'énergie rayonnée lors d'une collision effectuée par une particule de vitesse  $v$  subissant une diffusion d'angle  $\chi$ .

Calculons à présent la quantité  $\eta_\omega(\vec{s}, \vec{v})$  qui est l'émissivité spectrale d'un électron de vitesse  $\vec{v}$  (puissance moyenne rayonnée par  $d\omega d\Omega$  dans la direction  $\vec{s}$ , par mode de propagation). En supposant que le plasma est isotrope  $\eta_\omega$  ne dépend, ni de la direction de  $\vec{s}$ , ni de celle de  $\vec{v}$  ; par suite cette quantité s'écrit simplement  $\eta_\omega(v)$ . Le nombre moyen de collisions effectuées par un électron par seconde dans l'angle compris entre  $\chi$  et  $\chi + d\chi$  est :

$$n_0[\sigma(\chi)2\pi \sin \chi d\chi]v \quad (14.46)$$

La puissance moyenne rayonnée s'obtient en multipliant le résultat (14.45) par le nombre de collisions (14.46) et en intégrant sur  $\chi$ . Ce calcul introduit la section efficace de transfert de quantité de mouvement définie au chapitre 3 :

$$\sigma_1(v) = \int_0^\pi \sigma(\chi)(1 - \cos \chi)2\pi \sin \chi d\chi \quad (14.47)$$

et on obtient, pour la puissance moyenne totale rayonnée par un électron de vitesse  $v$  dans l'intervalle  $d\omega$ , le résultat :

$$\bar{P}_\omega(v) = \frac{e^2}{3\pi^2 \varepsilon_0 c^3} n_0 v^3 \sigma_1(v) \quad (14.48)$$

Comme  $\eta_\omega$  est défini par angle solide  $d\Omega$  et par mode on obtient finalement :

$$\eta_\omega(v) = \frac{1}{8\pi} \bar{P}_\omega(v) = \frac{e^2}{24\pi^3 \varepsilon_0 c^3} n_0 v^3 \sigma_1(v) \quad (14.49)$$

Nous avons obtenu ce résultat en utilisant la théorie classique du rayonnement et non pas la théorie quantique. Pour justifier cela, on doit montrer que la puissance totale rayonnée par un électron lors d'une collision est généralement beaucoup plus petite que l'énergie cinétique initiale des électrons  $\frac{1}{2}mv^2$ . En effet les photons émis sont alors d'énergie très inférieure à l'énergie cinétique de l'électron, et l'on se trouve alors dans les conditions du principe de correspondance entre la mécanique classique et la mécanique quantique. On peut aussi remarquer que le rayonnement ne modifie alors que très peu

la trajectoire qui est essentiellement déterminée par les champs appliqués à l'électron. Cela constitue le sujet du problème P14-3.

Le bremsstrahlung électron-neutre influe d'ailleurs peu sur la dynamique d'ensemble des électrons dans les gaz faiblement ionisés. On peut en effet montrer que la puissance totale rayonnée est beaucoup plus petite que la perte de puissance due au recul des neutres (voir problème P14-4). Il s'agit cependant d'un effet physique intéressant du point de vue du diagnostic des gaz faiblement ionisés. La mesure, dans le domaine des micro-ondes, du spectre continu émis par les électrons lors de collisions avec les neutres permet d'obtenir des informations sur la température électronique et, plus généralement, sur la fonction de distribution des vitesses électroniques [315]. Malgré ces remarques, il est intéressant de chercher une correction quantique à l'émissivité spectrale ; celle-ci a été calculée par Holstein [247] et le résultat est cité par Bekefi [316] sous la forme :

$$\eta_\omega(v) = \eta_\omega(v)_{\text{class}} \frac{\sigma_1 [(\varepsilon + \varepsilon')/2]}{\sigma_1(\varepsilon)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{\varepsilon}\right) \left(1 - \frac{\hbar\omega}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (14.50)$$

Dans cette formule  $\varepsilon$  est l'énergie initiale des électrons et  $\varepsilon'$  leur énergie finale. Ce résultat est tracé sur la figure 14.8. On observe que le spectre n'est pas aussi plat qu'on

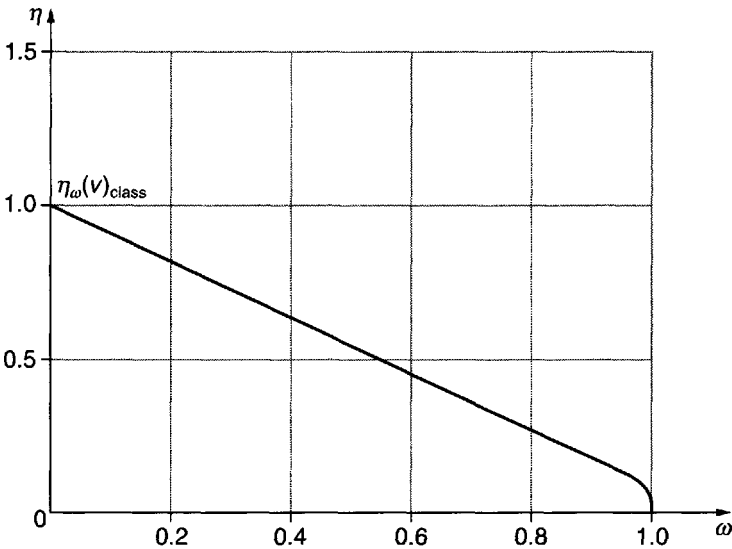


Figure 14.8 : Taux d'émission spontanée en fonction de la fréquence pour une collision de type sphère dure. D'après Bekefi [315, p. 77].

$$\eta_\omega(v) \text{ en valeurs relatives, } \omega \text{ en unités } 2\hbar\omega/mv^2.$$

l'avait supposé précédemment mais que lorsque  $\omega$  approche de zéro, le calcul quantique tend vers la même limite que la limite classique qui a été obtenue dans la formule (14.49).

Une dernière correction est nécessaire à cause de l'effet de dispersion du plasma. Les calculs présentés ci-dessus étaient basés sur des collisions binaires dans le vide, sans tenir compte de la réaction collective du plasma. Cela est discuté dans l'ouvrage de Bekefi [315] qui montre qu'en considérant l'effet de dispersion du plasma, on peut rattacher le résultat ci-dessus (14.49), maintenant appelé  $\eta_\omega(v)_{\text{vac}}$  ou émissivité dans le vide, à l'émissivité spectrale dans le plasma par la relation :

$$\eta_\omega(v) = \eta_\omega(v)_{\text{vac}} \times \frac{N}{1 + [\nu_1(v)/\omega]^2} \quad (14.51)$$

dans laquelle  $N$  est l'indice de réfraction du plasma et  $\nu_1(v) = n_0\sigma_1(v)v$  la fréquence de collision pour le transfert de quantité de mouvement.

## 14.5 Bremsstrahlung électron-ion ( $v \ll c$ )

### 14.5.1 Quelques quantités fondamentales

Le problème du rayonnement de freinage  $e-i$  est un peu plus compliqué. En principe, il devrait être plus simple que le précédent, car le potentiel exact d'interaction  $e-i$ , le potentiel de Coulomb, est connu, et Sommerfeld [295] effectua il y a longtemps le calcul exact du rayonnement de freinage émis lors d'une collision électron-ion ; cependant la transposition de ce calcul au cas global d'un plasma nécessite de nombreuses approximations qui compliquent le problème. Les meilleures références en la matière sont probablement les ouvrages de Bekefi [315] et Shkarofsky *et al.* [306].

Afin de mieux comprendre les différentes approximations qui seront faites ultérieurement, il est bon de remarquer que les principales quantités de base qui entrent en jeu dans ce problème sont :

- la vitesse électronique moyenne  $\bar{v}$  :

$$m\bar{v}^2 = 2 \kappa T \quad (14.52)$$

- la longueur de de Broglie réduite électronique  $\overline{\lambda_B}$  :

$$\overline{\lambda_B} = \frac{\hbar}{m\bar{v}} = \frac{\hbar}{(2m\kappa T)^{1/2}} \quad (14.53)$$

- la distance moyenne entre les électrons  $d_e$  :

$$d_e = n_e^{-1/3} \quad (14.54)$$

- la longueur de Landau  $r_0$  :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\kappa T} \quad (14.55)$$

- le paramètre d'impact critique  $p_0(v)$  :

$$p_0(v) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \quad (14.56)$$

Cette dernière quantité est la valeur du paramètre d'impact qui produit un angle de déviation égal à  $\frac{\pi}{2}$ . C'est une fonction de la vitesse de l'électron et pour cette raison, il est commode d'introduire sa moyenne :

$$\bar{p}_0 = p_0(\bar{v}) = \frac{Zr_0}{2} \quad (14.57)$$

La comparaison des valeurs de ces différentes quantités permet d'introduire une classification des plasmas basée sur le rayonnement de freinage  $e - i$ . Cette classification peut être représentée sur le diagramme de la figure 14.9 (analogue à celui de la figure 1.11) avec les coordonnées  $x = \log n_e$  et  $y = \log T$ . Nous y avons tracé les droites suivantes :

$$\kappa T = m_e c^2 \longrightarrow y = 9.77 ; T = 5.9 \cdot 10^9 \quad (\text{CGS}) \quad (14.58)$$

$$\bar{\lambda}_B = d_e \longrightarrow y - \frac{2x}{3} + 11.35 = 0 \quad (\text{CGS}) \quad (14.59)$$

$$\bar{\lambda}_B = r_0 \longrightarrow y = 5.80 ; T = 6.3 \cdot 10^5 \quad (\text{CGS}) \quad (14.60)$$

$$r_0 = d_e \longrightarrow y - \frac{x}{3} + 2.78 = 0 \quad (\text{CGS}) \quad (14.61)$$

$$\hbar\omega_p = 2\kappa T \longrightarrow y - \frac{x}{2} + 6.67 = 0 \quad (\text{CGS}) \quad (14.62)$$

Le domaine le plus intéressant de ce diagramme est celui qui se rapporte aux plasmas chauds tels que ceux étudiés dans les recherches sur la fusion thermonucléaire. C'est le domaine appelé (1) dans lequel règnent les inégalités fortes :

$$r_0 \ll \bar{\lambda}_B \ll d_e \quad (14.63)$$

$$\hbar\omega_p \ll \kappa T \ll m_e c^2 \quad (14.64)$$

## 14.5.2 Puissance totale rayonnée

La puissance rayonnée par une paire électron-ion à un instant donné dépend uniquement de la distance  $r$  entre les deux particules. Elle vaut :

$$P(r) = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left( \frac{Ze^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \quad (14.65)$$

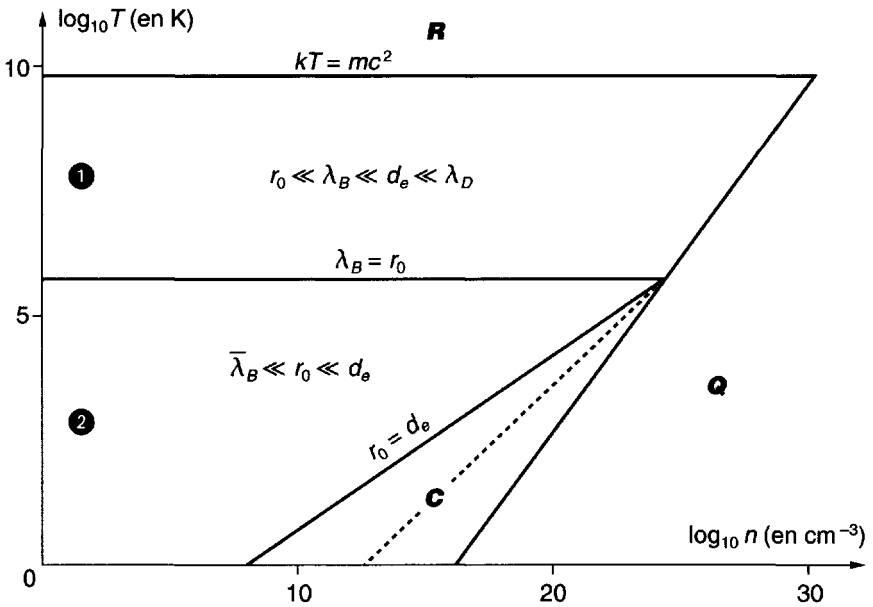


Figure 14.9 : Classification des plasmas par rapport au rayonnement de freinage  $e - i$ .

- (1) Petits angles de diffusion dominants.  
 (2) Grands angles de diffusion dominants.  
 R relativistes. Q quantiques dégénérés. C corrélés.

La puissance totale rayonnée par toutes les paires électron-ion situées à la distance  $r$  s'obtient en multipliant ce résultat par  $n_e n_i 4\pi r^2 dr$ . Afin d'obtenir, à l'aide de cette théorie classique, la puissance totale rayonnée par unité de volume du plasma, on multiplie la formule (14.65) par ce nombre de paires et on intègre le produit obtenu sur  $r$ .

On trouve que l'intégrand varie comme  $1/r^2$ . Il n'y a donc pas de divergence pour les grandes valeurs de  $r$ , comme il y en a dans de nombreux autres cas avec le potentiel de Coulomb. La divergence n'existe pas ici du fait de la dépendance en  $1/r^4$  de la puissance rayonnée par les particules à la distance  $r$ . Il semble cependant raisonnable de faire une coupure dans ce calcul à une valeur maximum  $r_{\max} = d_e$ , car pour de plus grandes valeurs de  $r$ , on a des collisions multiples, et il est clair qu'il y a une certaine annulation entre les champs électriques produits par les accélérations d'un électron donné dues à différents ions dans des directions différentes. Cette

coupure n'est, en aucun cas, critique car cette partie de l'intervalle n'a que peu d'importance dans le résultat final. Par conséquent nous ne ferons aucune coupure aux grandes valeurs de  $r$ .

Par contre, aux courtes distances, le rayonnement est plus important et il y a une divergence pour  $r \rightarrow 0$ . Cependant du point de vue de la mécanique quantique, il est clair que la description classique n'est pas valable pour  $r \ll \overline{\lambda}_B$  car à de telles distances la notion de trajectoire perd son sens, et certainement les électrons ne peuvent être considérés comme des particules ponctuelles pour ce type de phénomènes. Nous introduirons, par conséquent, une coupure à faible distance :

$$r_{\min} = \overline{\lambda}_B \quad (14.66)$$

Avec cette coupure on obtient la formule simple suivante pour la puissance totale émise par rayonnement de freinage  $e-i$  :

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_{\text{class}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{n_e n_i Z^2}{m_e^2 c^3} \frac{1}{\overline{\lambda}_B} \quad (14.67)$$

$$= 2.19 \times 10^{-40} n_e n_i Z^2 \sqrt{T} \quad (\text{SI}) \quad (14.68)$$

Les corrections quantiques à ce résultat simple ont été étudiées par de nombreux auteurs (voir par exemple Bekefi [315], Griem [247], Shkarofsky [306]). Il est d'usage courant de les introduire à l'aide d'un coefficient,  $\overline{G}$  le *facteur de Gaunt moyen*, défini par la formule suivante :

$$\frac{dU}{dt} = \left(\frac{dU}{dt}\right)_{\text{class}} \times \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \overline{G} \quad (14.69)$$

C'est une fonction de la température électronique  $T_e$  et ses variations en fonction de  $T_e/Z^2$  sont représentées sur la figure 14.10.

Pour les hautes températures, on peut facilement en calculer une valeur limite à l'aide de l'approximation de Born :

$$\overline{G}_{\text{Born}} = 2 \frac{\sqrt{3}}{\pi} \approx 1.1 \quad (14.70)$$

et l'on constate sur la figure 14.10 (d'après Shkarofsky [306, p. 235]) que l'erreur faite en utilisant l'approximation de Born est de moins de 5 % pour  $\kappa T > 5$  keV.

### 14.5.3 Dépendance spectrale

Commençons par la théorie classique. On s'intéresse au domaine (1) de la figure 14.9, et il est clair que, du fait de la coupure à  $\overline{\lambda}_B$  qui est plus

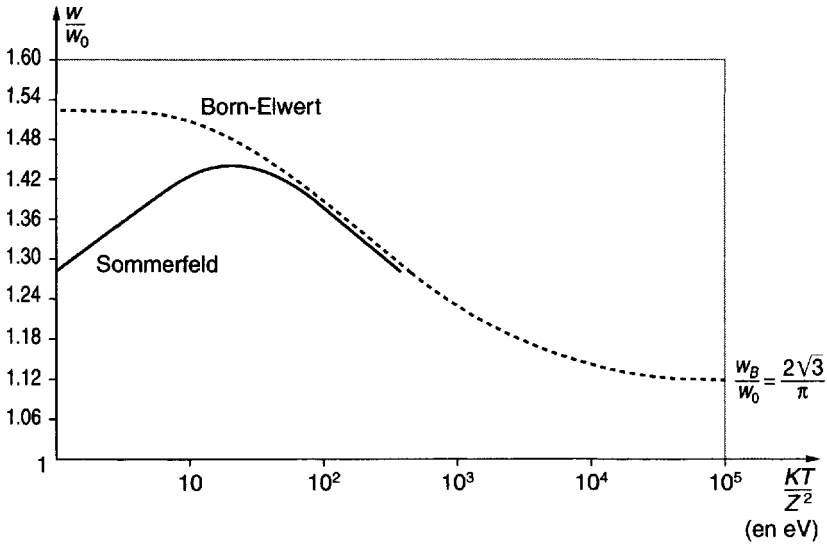


Figure 14.10 : Facteur de Gaunt pour la puissance totale rayonnée (d'après Shkarofsky [306, p. 235]).

grand que  $r_0$ , on peut alors utiliser l'approximation dite des trajectoires rectilignes : toutes les collisions considérées seront en effet des collisions avec un petit angle de diffusion. On peut donc représenter une telle collision comme indiqué sur la figure 14.11.

En choisissant comme origine des temps l'instant de plus courte approche on peut alors exprimer l'accélération  $a$  à l'instant  $t$  et ses composantes  $a_{\perp}$  et  $a_{\parallel}$  par les formules :

$$a = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m(p^2 + v^2 t^2)} \quad (14.71)$$

$$a_{\perp} = \frac{Ze^2 p}{4\pi\epsilon_0 m(p^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \quad (14.72)$$

$$a_{\parallel} = \frac{Ze^2 vt}{4\pi\epsilon_0 m(p^2 + v^2 t^2)^{3/2}} \quad (14.73)$$

On remarque maintenant que, comme pour les collisions  $e-o$ , la durée d'une collision est donnée en ordre de grandeur par :

$$\tau \sim p/v \quad (14.74)$$



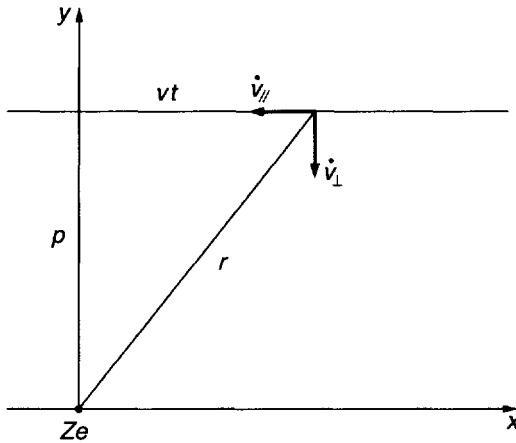


Figure 14.11 : Approximation des trajectoires électroniques rectilignes.

En introduisant dans la formule (14.21) les expressions de l'accélération indiquées ci-dessus, on peut montrer que les intégrales définies qui apparaissent peuvent être exprimées sous la forme de fonctions de Bessel modifiées  $K_\ell$  [268] et le résultat est le suivant :

$$W(v, p, \omega) = \left( \frac{2e^2 \omega^2}{3\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 m v^2} \right)^2 \left( \left[ K_1\left(\frac{\omega p}{v}\right) \right]^2 + \left[ K_0\left(\frac{\omega p}{v}\right) \right]^2 \right) \quad (14.75)$$

À l'intérieur de la dernière parenthèse il y a deux termes ; le premier,  $K_1$ , représente la contribution de  $a_\perp$  et le terme  $K_0$  la contribution de  $a_\parallel$ .

Un tracé de cette formule est montré sur la figure 14.12, et on y observe que  $W$  est petit pour  $\omega p/v \gg 1$  comme on s'y attendait. On peut aussi obtenir une approximation pour les faibles valeurs de  $z = \omega p/v$ , car dans ce domaine on a pour les fonctions de Bessel modifiées les expressions suivantes :

$$K_0(z) \approx \ln\left(\frac{1}{z}\right) \quad (14.76)$$

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z} \gg K_0(z) \quad (14.77)$$

de sorte que, comme le rayonnement est produit principalement par  $a_\perp$ , en utilisant pour  $\omega p/v \ll 1$  l'approximation  $1/z$  de  $K_1$  on obtient :

$$W(v, p, \omega) \sim \left( \frac{2e^2}{3\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi \varepsilon_0 m v} \right)^2 \frac{1}{p^2} \quad (14.78)$$

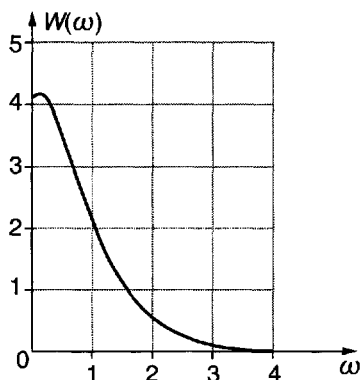


Figure 14.12 : Spectre de fréquence de l'énergie rayonnée par un électron de vitesse  $v$  et de paramètre d'impact  $p$ .

Approximation des trajectoires rectilignes : d'après Bekefi [315, p. 85].

$W(\omega)$  en unités arbitraires.

$\omega$  en unités  $\omega p/v$ .

On doit maintenant intégrer (14.78) sur le paramètre d'impact  $p$  pour obtenir la puissance rayonnée dans la bande  $d\omega$  :

$$\bar{P}_\omega(v)d\omega = \int W n_i v 2\pi p dp \quad (14.79)$$

Cela produit un terme  $\ln p$  et nous introduisons deux coupures, une coupure inférieure  $p_{\min}$  et une coupure supérieure  $p_{\max}$ . De cette façon, on obtient :

$$\eta_\omega(v) = \frac{1}{8\pi} \bar{P}_\omega(v) = n_i \left( \frac{e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{1}{v} \ln \left( \frac{p_{\max}}{p_{\min}} \right) \quad (14.80)$$

Remarquons que cette *émissivité spectrale* ne dépend pas de  $\omega$ , à l'exception d'une lente variation dans le terme logarithmique.

Posons-nous maintenant le problème des choix raisonnables de  $p_{\min}$  et  $p_{\max}$ . Pour  $p_{\min}$  la situation est claire suivant la discussion du début de section on fait les choix suivants :

$$p_{\min} = \bar{\lambda}_B \text{ dans la zone (1)} \quad (14.81)$$

$$p_{\min} = r_0 \text{ dans la zone (2)} \quad (14.82)$$

alors que pour  $p_{\max}$  on doit faire une coupure, soit à  $d_e$  comme on l'a expliqué plus haut, soit à  $v/\omega$  puisque la limite des basses fréquences n'est

évidemment plus valable à cette dernière limite. On pose donc :

$$p_{\max} = \text{Min} [d_e, v/\omega] \quad (14.83)$$

en désignant ainsi la plus petite des deux quantités  $d_e$  et  $v/\omega$ . Pour discuter cette dernière formule, on remarque que l'on a :

$$d_e < v_T/\omega \text{ si } \omega_p < \omega \omega_p N_D^{1/3} \quad (14.84)$$

et

$$d_e > v_T/\omega \text{ si } \omega > \omega_p N_D^{1/3} \quad (14.85)$$

où  $N_D$  est le nombre d'électrons dans la sphère de Debye. Ces inégalités sont discutées dans le problème P14-4.

Pour obtenir la *distribution spectrale totale*, on part de l'équation (14.80) et on l'intègre sur  $v$ . Pour simplifier le calcul on considère que le terme logarithmique est indépendant de  $v$  et l'on pose :

$$\ln \Gamma = \ln \left( \frac{p_{\max}}{p_{\min}} \right) \quad (14.86)$$

Le paramètre  $\Gamma$  introduit ici est quelque peu semblable au paramètre  $\Lambda$  utilisé classiquement dans le problème des collisions coulombiennes, mais on n'utilise pas la même notation, car  $\Gamma$  est en général différent de  $\Lambda$ . On peut alors écrire pour l'émissivité spectrale totale :

$$j_\omega = \int \eta_\omega(v) f(v) 4\pi v^2 dv \quad (14.87)$$

On trouve finalement pour chacune des deux polarisations et pour une distribution maxwellienne à la température  $T$  :

$$j_\omega = n_e n_i \left( \frac{Z^2 e^6}{48\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left( \frac{m_e}{2\pi \kappa T} \right)^{1/2} \ln \Gamma \quad (14.88)$$

$$= 2.39 \cdot 10^{-53} \frac{n_e n_i Z^2}{\sqrt{T}} \ln \Gamma \quad (\text{SI}) \quad (14.89)$$

On peut calculer la puissance totale rayonnée en intégrant sur  $\omega$  le résultat ci-dessus à partir de 0 jusqu'à une valeur maximum qui, du fait des limites quantiques, doit être prise égale à  $\kappa T/\hbar$ , soit :

$$\frac{dU}{dt} = \int_0^{\kappa T/\hbar} P_\omega d\omega = 8\pi \int_0^{\kappa T/\hbar} j_\omega d\omega \quad (14.90)$$

Cette méthode est quelque peu douteuse, car nombre des approximations faites auparavant ne sont certainement pas valables dans le domaine des hautes fréquences. Quoi qu'il en soit, en agissant ainsi on trouve le résultat suivant :

$$\frac{dU}{dt} = \left( \frac{dU}{dt} \right)_{\text{class}} \times \frac{2}{\pi^{3/2} \ln \Gamma} \quad (14.91)$$

qui n'est après tout pas si mauvais, comparé aux valeurs plus exactes qui incluent le vrai facteur de Gaunt.

### 14.5.4 Effets de dispersion

De même que pour le bremsstrahlung *e-o*, on doit tenir compte de la nature dispersive du plasma, et suivant Bekefi [315], on obtient :

$$\eta_{\omega}(v) = \eta_{\omega}(v)_{\text{coll. bin. } N} \quad (14.92)$$

où

$$N = \frac{c}{\omega} \text{Re}(k) \quad (14.93)$$

Cette correction est négligeable pour  $\omega \gg \omega_p$  et introduit une lente coupure pour  $\omega < \omega_p$ . Le résultat exact obtenu par différents auteurs (cf. par exemple Dawson [248]) est présenté sur la figure 14.13 où l'on constate que les caractéristiques générales sont celles attendues, à l'exception d'une bosse autour de  $\omega = \omega_p$ , qui est due à l'excitation d'oscillations de plasma. La discussion de ce phénomène sort du cadre de ce chapitre. Les effets de la dispersion du plasma sur le facteur de Gaunt moyen  $\bar{G}(T, \omega)$  sont résumés dans le tableau 14.1 qui résume l'analyse de Bekefi [315]. Remarquons enfin qu'ils ne jouent qu'un petit rôle dans les plasmas thermonucléaires et leur bilan énergétique.

	Hautes températures $T > 8.9 \times 10^5 Z^2 (^{\circ}K)$	Basses températures $T < 8.9 \times 10^5 Z^2 (^{\circ}K)$
Hautes fréquences $\omega > \omega_p$	$\Gamma = \left( \frac{4}{\gamma} \right) \frac{p_{\text{max}}}{p_{\text{min}}}$	$\left( \frac{2}{\gamma} \right)^{5/2} \frac{p_{\text{max}}}{p_{\text{min}}}$
Basses fréquences $\omega < \omega_p$	$\Gamma = \left( \frac{8}{e\gamma} \right)^{1/2} \frac{p_{\text{max}}}{p_{\text{min}}}$	$\left( \frac{2}{\gamma} \right)^2 \frac{1}{e^{1/2}} \frac{p_{\text{max}}}{p_{\text{min}}}$
	$p_{\text{min}} = \frac{\hbar}{(m\kappa T)}^{1/2} \sim \bar{\lambda}_B$ $p_{\text{max}} = \left( \frac{\kappa T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega_p} \sim \lambda_D$	$p_{\text{min}} = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \kappa T}$ $p_{\text{max}} = \left( \frac{\kappa T}{m} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega} \sim \lambda_D \frac{\omega_p}{\omega}$

Tableau 14.1 : Facteur de Gaunt moyen  $\bar{G}(T, \omega) = (\sqrt{3}/\pi) \ln \Gamma$ .

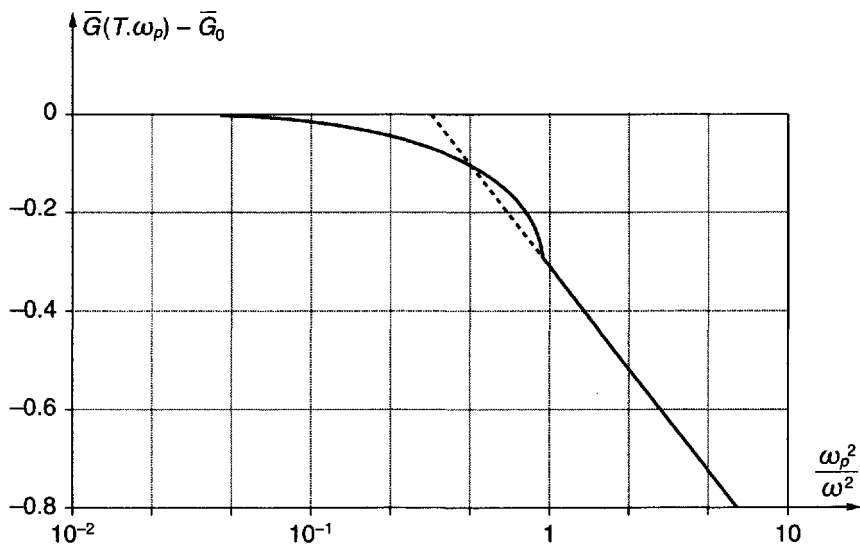


Figure 14.13 : Transition des hautes fréquences ( $\omega \gg \omega_p$ ) vers les basses fréquences ( $\omega \ll \omega_p$ ). On aperçoit au voisinage de  $\omega_p$  une petite bosse due à l'excitation d'une onde longitudinale. Le facteur de Gaunt haute fréquence  $\bar{G}$  est donné par l'asymptote horizontale passant par l'origine. La droite pointillée est la valeur asymptotique basse fréquence du facteur de Gaunt. Dans le graphe  $\omega$  est maintenu constante. (D'après Heald et Wharton [249].).

### 14.5.5 Théorie quantique

Les corrections quantiques ont été étudiées par de nombreux auteurs et l'usage courant consiste à les regrouper dans un facteur de Gaunt défini par :

$$\eta_\omega(v) = n_e n_i \left( \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{1}{v} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) G(v, \omega) \quad (14.94)$$

ou, en intégrant sur une fonction de distribution maxwellienne :

$$j_\omega = \int \eta_\omega(v) f(\vec{v}) d\underline{v} \quad (14.95)$$

$$j_\omega = n_e n_i \left( \frac{Z^2 e^6}{48\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m_e^2} \right) \left( \frac{m_e}{2\pi \kappa T} \right)^{1/2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \bar{G}(T, \omega) \quad (14.96)$$

Un résultat exact pour  $G(v, \omega)$  dans le cas d'une collision unique a été donné par Sommerfeld [295]. Ce résultat fait intervenir une fonction hypergéométrique compliquée et son application aux plasmas nécessite différentes approximations dont les principales sont détaillées ci-dessous.

### Domaine des basses fréquences ( $\omega p_0/v \ll 1$ )

- Faibles valeurs de  $T$  :

$$G(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{2v/\omega}{\gamma p_0} \right) \quad (14.97)$$

- Grandes valeurs de  $T$  :

$$G(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{2v/\omega}{\lambda_B(v)} \right) \quad (14.98)$$

Sur ces formules on voit que, dans le cadre de l'approximation des basses fréquences, le résultat obtenu par la théorie quantique est le même que celui obtenu à partir de la théorie classique avec des coupures raisonnables. Le principe de correspondance entre la mécanique quantique et la mécanique classique s'applique, en effet, dans le cadre de cette approximation des basses fréquences.

**Domaine des hautes fréquences, approximation de Born** Ce domaine est plus compliqué et nous ne l'aborderons pas ici. Nous citons seulement les résultats de l'*approximation de Born*, qui est une bonne description dans le domaine (1) de la figure 14.9 car elle est essentiellement identique à l'approximation des trajectoires rectilignes, qui s'applique dans ce domaine des plasmas chauds. Avec cette approximation on obtient :

$$G(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \left( \frac{q + q'}{q - q'} \right) \quad (14.99)$$

avec :

$$q = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v}; \quad q' = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v'} \quad (14.100)$$

où les variables  $q$  et  $q'$  correspondent aux valeurs initiales et finales de la vitesse de l'électron. En intégrant sur une distribution maxwellienne des vitesses  $v$  on obtient, dans ce cadre de l'approximation de Born, la valeur suivante pour le facteur de Gaunt moyen :

$$\bar{G}(T, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{-\hbar\omega/2\kappa T} K_0 \left( \frac{\hbar\omega}{2\kappa T} \right) \quad (14.101)$$

et pour les grandes valeurs de  $\hbar\omega/kT$  :

$$\bar{G}(T, \omega) \sim \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{e^{-\hbar\omega/\kappa T}}{\pi(\hbar\omega/\kappa T)^{1/2}} \quad (14.102)$$

Remarquons que ce résultat fait intervenir un facteur  $e^{-\hbar\omega/\kappa T}$ . Ceci est une règle générale qu'on obtient par toutes les approximations pour  $\hbar\omega \gg kT$ . Ce facteur exponentiel n'est que la conséquence dans l'émission de rayonnement de la décroissance exponentielle de la fonction de distribution des électrons aux grandes vitesses.

## 14.5.6 Longueurs d'absorption

Dans le paragraphe précédent on a calculé la puissance émise par un volume de plasma en supposant qu'il n'y avait pas auto-absorption de cette énergie par le plasma lui-même. À l'aide d'arguments très simples on peut trouver les limites de cette approximation.

**a) Bremsstrahlung  $e-i$** 

Considérons une sphère de plasma de rayon  $R$ . S'il n'y a pas auto-absorption, l'émission de cette sphère est proportionnelle à son volume et donnée par :

$$P_{\text{vol}} = \frac{4\pi R^3}{3} \times \frac{dU}{dt} \quad (14.103)$$

Si le plasma était un corps noir il rayonnerait proportionnellement à sa surface externe une puissance donnée par :

$$P_{\text{surf}} = 4\pi R^2 \times \sigma T^4 \quad (14.104)$$

Pour des raisons thermodynamiques, il est évidemment impossible que le plasma émette plus de puissance qu'un corps noir ; cela implique qu'en égalant les deux résultats ci-dessus on obtient une valeur maximum de  $R$ , que nous appelons  $l_B$ , pour laquelle il est impossible qu'il n'y ait pas auto-absorption pour le bremsstrahlung. De cette façon on obtient :

$$l_B = 1.2 \times 10^{33} \frac{T^{7/2}}{n_e n_i Z^2} \bar{G} \quad (\text{CGS}) \quad (14.105)$$

**b) Rayonnement cyclotron**

Un calcul similaire n'est pas aussi simple dans le cas du rayonnement cyclotron. Ce rayonnement est essentiellement monochromatique autour de  $\omega = \Omega$ . Le calcul de la longueur d'auto-absorption pour le rayonnement cyclotron peut se faire en comparant ce dernier au rayonnement du corps noir seulement dans une bande de fréquences  $\delta\omega$  autour de la fréquence cyclotron. Cette comparaison n'aura un sens clair que si on connaît la largeur de la résonance cyclotron. Ce n'est pas un problème simple, comme on peut le constater à partir des études plus détaillées de ce problème (voir Bekefi [315] et Trubnikov [251]).

## 14.6 Description d'un champ de rayonnement dans le vide

### 14.6.1 Intensité spécifique et distribution photonique

**a) Description par les ondes. Intensité spécifique**

Considérons un volume de l'espace où il n'y a pas de matière, mais seulement du rayonnement électromagnétique. On peut analyser celui-ci à l'aide des méthodes de Fourier sous forme d'une superposition d'ondes monochromatiques planes de vecteurs d'onde  $\vec{k}$  et de fréquence angulaire  $\omega = ck = 2\pi\nu$ . Pour décrire le champ de rayonnement on doit spécifier

la répartition des intensités des ondes en fonction de la fréquence et de la direction de propagation. Considérons (Fig. 14.14) un point  $M(\vec{r})$  de l'espace et une direction de propagation caractérisée par un vecteur unitaire  $\vec{s}$ , un petit angle solide  $d\Omega$  autour de cette direction et un élément de surface  $dS$  perpendiculaire à  $\vec{s}$ .

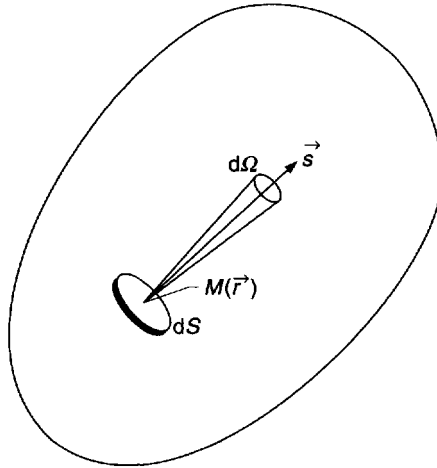


Figure 14.14 : Intensité spécifique du rayonnement dans le vide.

Les ondes de fréquences comprises entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  et dont le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est à l'intérieur de  $d\Omega$  constituent, lorsqu'elles sont limitées transversalement par la surface  $dS$ , ce qu'on appelle un pinceau lumineux. Si on désigne par  $dP_\nu(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$  la puissance transportée par ce pinceau au temps  $t$ , on peut écrire le flux d'énergie correspondant (puissance par unité de surface) sous la forme :

$$\frac{dP_\nu(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})}{dS} = I_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t) d\nu d\Omega \quad (14.106)$$

Certains auteurs utilisent, au lieu de  $I_\nu$ , la fonction équivalente définie pour les fréquences angulaires :

$$I_\omega \equiv \frac{1}{2\pi} I_\nu \quad (14.107)$$

De plus, on décide que  $\nu$  ne représente pas seulement une fréquence donnée, mais également un mode de propagation. Ce choix sera expliqué



ultérieurement lorsque nous appliquerons ce formalisme à la propagation des ondes dans la matière.

D'autres auteurs choisissent de définir  $I_\nu$  pour une lumière dite "naturelle" : dans le vide les modes normaux de propagation sont des ondes transverses et on peut considérer qu'il y a deux modes différents avec des polarisations mutuellement orthogonales, et que la lumière naturelle est une superposition stochastique de ces deux modes. Pour cette raison, si on choisit pour  $I_\nu$  l'intensité associée à un mode, alors l'intensité associée à cette lumière naturelle est obtenue par :

$$I'_\nu = 2I_\nu \quad (14.108)$$

### b) Description photonique. Fonction de distribution photonique

On peut également considérer le rayonnement comme un gaz de photons auquel s'applique le formalisme de la théorie cinétique des particules matérielles en commençant par introduire une fonction de distribution des vitesses. Bien entendu, un photon n'est pas caractérisé par sa vitesse mais par sa quantité de mouvement :

$$\vec{q} = \frac{h\nu}{c} \vec{s} \quad (14.109)$$

On décrit donc la distribution de photons dans un espace de coordonnées  $\vec{r}, \vec{q}$  en appelant  $\underline{dr dq}$  un élément de volume de cet espace, avec :

$$\underline{dq} = q^2 dq d\Omega = \left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu d\Omega \quad (14.110)$$

Si  $dN_\phi$  est le nombre de photons dans un élément de volume  $\underline{dr dq}$  on pose :

$$dN_\phi = f_\nu(\vec{r}, \vec{q}, t) \underline{dr dq} \quad (14.111)$$

La fonction  $f_\nu$  est appelée fonction de distribution photonique<sup>2</sup>.

### c) Relation entre $I_\nu$ et $f_\nu$

Les deux définitions (14.106) et (14.111) font appel à deux descriptions complémentaires du champ électromagnétique :  $I_\nu$  est à rapprocher de l'aspect ondulatoire et  $f_\nu$  de l'aspect particulaire. Ces deux descriptions

---

2. Le photon n'étant pas localisable, l'introduction de  $f_\nu(\vec{r}, \vec{q}, t)$  est un artifice pour représenter une distribution d'énergie et de quantité de mouvement, avec un formalisme analogue à celui utilisé pour les particules matérielles.

sont essentiellement équivalentes dans le vide, en dehors de quelques problèmes de cohérence qu'on néglige ici. Nous allons maintenant établir une relation entre  $I_\nu$  et  $f_\nu$  et considérer l'introduction de  $f_\nu$  comme un artifice de calcul. La densité spatiale de photons de fréquence comprise entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  et dont la direction est à l'intérieur de  $d\Omega$  peut s'écrire :

$$f_\nu d\underline{q} = f_\nu \left(\frac{h}{c}\right)^3 \nu^2 d\nu d\Omega \quad (14.112)$$

Pour obtenir le flux d'énergie correspondant on doit multiplier cette densité par la vitesse de la lumière  $c$  et par l'énergie du photon  $h\nu$  ; on obtient alors l'équation :

$$\frac{dP_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t)}{dS} = f_\nu \frac{h^4 \nu^3}{c^2} d\nu d\Omega \quad (14.113)$$

ou finalement, en comparant à (14.106) :

$$I_\nu \equiv \frac{h^4}{c^2} \nu^3 f_\nu \quad (14.114)$$

#### d) Taux d'occupation des états quantiques

On peut aussi introduire l'idée d'états quantiques du champ électromagnétique et définir une nouvelle quantité appelée le taux d'occupation des états quantiques. On définit simplement les états quantiques du rayonnement à partir de la théorie classique des cavités résonnantes électromagnétiques. On montre dans les ouvrages d'électromagnétisme ou d'optique (cf. [245]) qu'une cavité résonnante de dimensions bien plus grande que les longueurs d'ondes considérées possède un très grand nombre de modes de résonance et que plus précisément la densité des modes (nombre de modes par unité de volume  $\underline{dr}$  et par intervalle de fréquence  $\underline{d\nu}$  au voisinage de  $\nu$ ) est :

$$M(\nu) = 4\pi\nu^2/c^3 \quad (14.115)$$

pour chaque mode de polarisation. En introduisant la quantité de mouvement  $\vec{q} = h\nu/c\vec{s}$  d'un photon on peut définir un espace des phases  $\vec{r}, \vec{q}$ . À chaque élément de volume  $\underline{dr} \underline{dq}$  de cet espace correspond un nombre de modes :

$$dN = M(\nu)d\nu \underline{dr} = \underline{dr} \underline{dq}/h^3 \quad (14.116)$$

On peut donc par la pensée diviser l'espace des phases en cellules de volume  $h^3$ , et considérer qu'à chacune d'entre elles est associé un état quantique

du rayonnement pour chaque mode de propagation. Le nombre de photons se trouvant dans un de ces états quantiques s'écrit alors :

$$\tau_\nu = h^3 f_\nu = \frac{c^2}{h\nu^3} I_\nu \quad (14.117)$$

C'est le taux d'occupation des états quantiques. Comme les photons sont des bosons,  $\tau_\nu$  peut prendre n'importe quelle valeur ; il peut, en particulier, être plus grand que l'unité. On montrera dans la section 14.8 [cf. (14.214)] que lorsque  $\tau_\nu \gg 1$  les processus d'émission stimulée sont dominants et que c'est la transition vers la description classique du rayonnement.

## 14.6.2 Quantités macroscopiques associées au rayonnement

De même que pour les particules matérielles, on peut définir la densité et le flux de trois quantités, à savoir le nombre de photons, leur quantité de mouvement et leur énergie. Ces quantités peuvent être définies pour un petit domaine de fréquence entre  $\nu$  et  $\nu + d\nu$  ; on les appelle alors les quantités spectrales. Si on intègre ensuite sur  $\nu$ , on obtient les densités ou les flux totaux, qui sont les variables hydrodynamiques décrivant l'état du gaz de photons. Nous n'avons pas utilisé les quantités spectrales intermédiaires dans la théorie cinétique des particules matérielles, mais dans le cas des photons elles sont très utiles. La table de toutes ces grandeurs est :

### Quantités spectrales

$$\text{Densité de photons } n_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{ch\nu} \int I_\nu d\Omega \quad (14.118)$$

$$\text{Flux de photons } \vec{J}_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{h\nu} \int \vec{s} I_\nu d\Omega \quad (14.119)$$

$$\text{Densité de quantité de mouvement } \vec{G}_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \int \vec{s} I_\nu d\Omega \quad (14.120)$$

$$\text{Flux de quantité de mouvement } \vec{T}_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int \vec{s} \vec{s} I_\nu d\Omega \quad (14.121)$$

$$\text{Densité d'énergie } U_\nu(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega \quad (14.122)$$

$$\text{Flux d'énergie } \vec{S}_\nu(\vec{r}, t) = \int \vec{s} I_\nu d\Omega \quad (14.123)$$

### Quantités globales

$$\text{Densité de photons } n(\vec{r}, t) = \int f_\nu d\underline{q} = \int n_\nu d\nu \quad (14.124)$$

$$\text{Flux de photons } J(\vec{r}, t) = c \int \vec{s} f_\nu d\underline{q} \quad (14.125)$$

$$\text{Densité de quantité de mouvement } \vec{G}(\vec{r}, t) = \frac{h}{c} \int \nu \vec{s} f_\nu d\underline{q} \quad (14.126)$$

$$\text{Flux de quantité de mouvement } \vec{T}(\vec{r}, t) = h \int \nu \vec{s} \vec{s} f_\nu d\underline{q} \quad (14.127)$$

$$\text{Densité d'énergie } U(\vec{r}, t) = h \int \nu f_\nu d\underline{q} \quad (14.128)$$

$$\text{Flux d'énergie } \vec{S}(\vec{r}, t) = hc \int \nu \vec{s} f_\nu d\underline{q} \quad (14.129)$$

Notons les identités suivantes :

$$\vec{S}_\nu \equiv c^2 \vec{G}_\nu \quad (14.130)$$

$$\vec{S} \equiv c^2 \vec{G} \quad (14.131)$$

On n'a pas utilisé d'indices pour les quantités globales ; en cas d'ambiguïté avec les mêmes quantités pour les particules matérielles, nous utiliserions alors l'indice  $\varphi$  pour les photons.

Il est souvent utile de diviser le champ de rayonnement en deux moitiés en considérant en un point de l'espace un petit élément de surface  $dS$  perpendiculaire à une direction donnée  $\vec{s}$ , et les deux groupes de photons traversant  $dS$  et dans le sens + du vecteur  $\vec{s}$  ou dans le sens - opposé (Fig. 14.15).

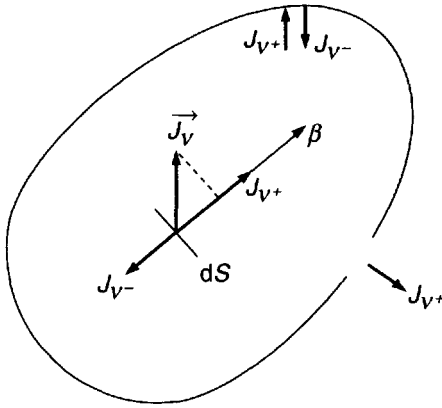
Si on appelle  $J_{\nu+}(\vec{s})$  et  $J_{\nu-}(\vec{s})$  les valeurs absolues des flux partiels produits par ces deux groupes de photons, alors ces deux quantités dépendent, en général, de la direction de  $\vec{s}$  par rapport au vecteur de flux net  $\vec{J}_\nu$  et sont liés à ce dernier par l'équation :

$$J_{\nu+}(\vec{s}) - J_{\nu-}(\vec{s}) = \vec{s} \cdot \vec{J}_\nu \quad (14.132)$$

Ces flux partiels interviennent dans l'interaction avec une paroi ou dans le flux à travers un petit trou dans celle-ci (voir encore Fig. 14.15).

### 14.6.3 Anisotropies de $I_\nu$ . Champs de rayonnement isotrope

Afin de décrire la dépendance de  $I_\nu$  avec la direction  $\vec{s}$  il est commode d'en faire un développement en harmoniques sphériques, comme nous l'avons

Figure 14.15 : Demi-flux  $J_{\nu+}$ ,  $J_{\nu-}$  et vecteur flux  $\vec{J}_\nu$ .

fait au chapitre 12 pour une fonction de distribution de vitesses. Ce formalisme est développé dans l'appendice A14-1 ainsi que les formules permettant de relier les quantités hydrodynamiques aux coefficients des anisotropies.

### a) Cas isotrope

Si on suppose que le champ de rayonnement est isotrope, alors l'intensité spécifique  $I_\nu$  est une fonction de  $\nu$ ,  $\vec{r}$  et  $t$  mais pas de la direction du vecteur  $\vec{s}$ . Dans le développement en harmoniques sphériques on a  $\bar{\alpha}_1, \alpha_2, \dots = 0$  et on obtient alors aisément les formules suivantes pour les premiers moments de  $I_\nu$  :

$$n_\nu = \frac{4\pi}{h\nu c} I_\nu \quad (14.133)$$

$$\bar{T}_\nu = \frac{4\pi}{3c} I_\nu \nu \delta = \frac{U_\nu}{3} \nu \delta \quad (14.134)$$

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu \quad (14.135)$$

$$\vec{J}_\nu = \vec{G}_\nu = \vec{S}_\nu = 0 \quad (14.136)$$

Dans le cas d'un champ isotrope, les flux partiels sont utiles et sont donnés par les formules suivantes :

$$J_{\nu+} = J_{\nu-} = \frac{\pi}{h\nu} I_\nu \quad (14.137)$$

$$G_{\nu+} = G_{\nu-} = \frac{\pi}{c^2} I_{\nu} \quad (14.138)$$

$$S_{\nu+} = S_{\nu-} = \pi I_{\nu} = \frac{c}{4} U_{\nu} \quad (14.139)$$

Notons que ces dernières formules sont souvent établies dans les ouvrages classiques de thermodynamique à propos de l'intensité spectrale du rayonnement du corps noir. Comme on le voit ici, elles sont en fait des propriétés de n'importe quel champ isotrope.

### b) Champ de rayonnement d'équilibre thermodynamique

Le rayonnement d'équilibre thermodynamique est donné par la célèbre formule de Planck<sup>3</sup> :

$$I_{\nu} \equiv B_{\nu}(T) = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1} \quad (14.140)$$

La fonction de distribution et les taux d'occupation des états quantiques correspondants sont :

$$f_{\nu} = \frac{1}{h^3} \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1} \quad (14.141)$$

$$\tau_{\nu} = \frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1} \quad (14.142)$$

On voit que  $\tau_{\nu} \rightarrow 0$  pour  $h\nu \gg \kappa T$  (photons suprathermiques) alors que  $\tau_{\nu} \rightarrow \infty$  pour  $h\nu \ll \kappa T$  (photons infrathermiques). Finalement on peut calculer la densité totale de photons, la densité totale d'énergie et le flux partiel total d'énergie à l'aide des formules suivantes :

$$n = 8\pi \left( \frac{\kappa T}{hc} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = AT^3$$

$$A = 2.404 \times 8\pi \left( \frac{\kappa}{hc} \right)^3 = 2.029 \cdot 10^7 \quad (\text{SI}) \quad (14.143)$$

$$U = 8\pi \frac{(\kappa T)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = aT^4$$

$$a = \frac{4\sigma}{c} = 7.57 \cdot 10^{16} \quad (\text{SI}) \quad (14.144)$$

$$S_+ = \frac{c}{4} U = \sigma T^4$$

$$\sigma = \frac{2}{14} \frac{\pi^5 \kappa^4}{h^3 c^2} = 5.67 \cdot 10^{-8} \quad (\text{SI}) \quad (14.145)$$

3. Suivant les remarques faites au début de cette section, nous écrivons la formule de Planck sans le facteur 2. Ce dernier est souvent introduit par les auteurs qui préfèrent définir l'intensité spécifique pour une lumière naturelle incluant les deux modes de propagation.

où  $\sigma$  est la constante de Stephan.

**Photon moyen** Il y a au moins trois façons différentes de définir un photon thermique moyen, à savoir :

- photon d'énergie moyenne :

$$h\nu = U/n = 2.70 kT \quad (14.146)$$

- photon correspondant au maximum de  $n_\nu$ :

$$h\nu = 1.59 kT \quad (14.147)$$

- photon correspondant au maximum de  $U_\nu$  ou  $I_\nu$ :

$$h\nu = 2.82 kT \quad (14.148)$$

Considérant que ces résultats sont à peu près identiques, nous prendrons comme définition du photon moyen d'équilibre thermodynamique la valeur :

$$h\nu = 2kT \quad (14.149)$$

## 14.7 Description d'un champ de rayonnement dans un plasma

### 14.7.1 Microchamps et macrochamps

À l'échelle microscopique le champ électromagnétique dans un plasma a une structure très compliquée ; chaque particule chargée peut être considérée comme une singularité ponctuelle où les champs tendent vers l'infini ; entre les particules existe un champ électromagnétique fini mais qui fluctue continuellement à cause de l'agitation thermique des particules. Ce *champ microscopique* peut avoir des effets mesurables : par exemple, c'est lui qui détermine l'élargissement par effet Stark statistique des raies émises par un atome ou un ion immergé dans le plasma.

Cependant, la plupart du temps on ne s'intéresse pas à ce champ microscopique très compliqué, mais plutôt à des *champs macroscopiques* moyens  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  qui sont par définition les solutions des équations de Maxwell macroscopiques :

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (14.150)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad (14.151)$$

Ces équations sont macroscopiques car les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{J}$  qui y apparaissent sont des valeurs moyennes calculées sur la distribution de charges ponctuelles en mouvement. Ces densités sont des fonctions continues de la position et du temps ; leur utilisation revient à remplacer le plasma composé de particules ponctuelles par un mélange de deux fluides continus de charges électriques négatives et positives.

### 14.7.2 Ondes dans un plasma homogène

La théorie des ondes dans un plasma homogène a été esquissée au chapitre 1. Elle est basée sur la relation de dispersion (cf. paragraphe 1.7) :

$$D(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (14.152)$$

Les solutions réelles  $\vec{k}(\omega)$  de cette équation sont les modes de propagation. Ce sont des ondes macroscopiques et ainsi la notion de photons disparaît complètement. On peut cependant discuter des propriétés hydrodynamiques de ces ondes en introduisant les flux d'énergie et de quantité de mouvement qui leur sont associés. La vitesse d'énergie est définie par la relation :

$$\vec{v}_u = \frac{\text{flux d'énergie moyen associé à l'onde}}{\text{densité d'énergie moyenne associée à l'onde}} \quad (14.153)$$

Il est parfois délicat de calculer  $\vec{v}_u$  mais heureusement, dans la plupart des cas (ondes de faible atténuation), la vitesse d'énergie est égale à la vitesse de groupe  $\vec{v}_g$  donnée par la relation :

$$\vec{v}_u = \vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \vec{e}_x \frac{\partial \omega}{\partial k_x} + \vec{e}_y \frac{\partial \omega}{\partial k_y} + \vec{e}_z \frac{\partial \omega}{\partial k_z} \quad (14.154)$$

et ainsi le problème se simplifie car, comme on le voit dans cette formule, on peut calculer la vitesse de groupe à partir de l'équation de dispersion (14.152).

### 14.7.3 Plasmas faiblement inhomogènes

On dira qu'un plasma est faiblement inhomogène lorsque les dérivées spatiales et temporelles des quantités définissant le plasma sont suffisamment petites, de sorte que les inégalités  $\partial A / \partial r \ll kA$  et  $\partial A / \partial t \ll \omega A$  sont vérifiées pour n'importe quelle quantité  $A$  dans le plasma. Les ondes se propagent alors en chaque point du plasma comme si celui-ci était homogène, mais leurs propriétés varient lentement lorsqu'elles traversent le



plasma. Ce sont les conditions de l'approximation dite de WKB. On peut donc écrire en chaque point du plasma une équation de dispersion locale :

$$D(\vec{k}, \omega, \vec{r}) = 0 \quad (14.155)$$

et pour chaque mode de propagation une vitesse de phase :

$$\vec{v}_\phi = \frac{\omega}{k} \left( \frac{\vec{k}}{k} \right) \quad (14.156)$$

et une vitesse de groupe :

$$\vec{v}_g = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right)_{\vec{r}} \quad (\vec{r} \text{ constant}) \quad (14.157)$$

Chaque mode change progressivement pendant qu'il se propage au sein du plasma, mais il conserve son individualité et l'énergie qu'il transporte est conservée. Il est intéressant de considérer la ligne de force de  $\vec{v}_g$ . C'est ce qu'on appelle le rayon lumineux. On peut alors définir l'intensité spécifique associée à un pinceau de rayons par la formule :

$$\frac{dP_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t)}{dS} = I_\nu(\vec{r}, \vec{s}, t) d\nu d\Omega \quad (14.158)$$

qui est exactement la même que (14.106) à la différence qu'il s'agit maintenant d'un mode variant lentement et que le petit angle solide  $d\Omega$  se réfère à un pinceau de rayons lumineux et non pas de vecteurs  $\vec{k}$ .

## 14.7.4 Grandeurs hydrodynamiques radiatives

À partir des remarques précédentes on peut alors définir les grandeurs hydrodynamiques associées à un champ de rayonnement. Cela ne peut être fait pour le nombre de photons car ceux-ci ont complètement disparu ( $n_\nu, J_\nu$  n'ont aucune signification). En ce qui concerne l'énergie, la situation est simple : les formules dans le vide peuvent être utilisées à condition d'y remplacer  $c$  par  $v_g$ . Quelques problèmes se posent par contre pour la densité et le flux de quantité de mouvement, car il n'existe pas de relation simple entre  $\vec{v}_g$  et  $\vec{v}_\phi$ . Ce point a été analysé en détail par Bers (cf. par exemple [361]).

## 14.7.5 Plasma à l'équilibre thermodynamique

Bekefi a montré qu'à l'équilibre thermodynamique l'intensité spécifique dans un plasma est donnée par la formule :

$$I_\nu(\vec{s}) = B_{o\nu}(\vec{s}, T) = [N_r(\vec{s})]^2 B_{o\nu}(T) \quad (14.159)$$

dans laquelle  $N_r$  est un indice de réfraction des rayons (Bekefi [315, p. 32]), quelque peu différent de l'indice de réfraction habituel  $N$ . Dans un plasma isotrope on a en fait  $N_r = N$ . Mais plus généralement, l'expression de  $N_r$  dans un plasma magnétisé est donnée par Bekefi sous les formes :

$$\left[ N_r(\vec{s}) \right]^2 = \left| N^2 \frac{d\Omega_k}{d\Omega} k v_g \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_\theta \right| \quad (14.160)$$

$$\left[ N_r(\vec{s}) \right]^2 = \left| \frac{N^2 \sin \theta (1 + A^2)^{1/2}}{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\cos \theta + A \sin \theta}{(1 + A^2)^{1/2}} \right]} \right| \quad (14.161)$$

où  $\theta$  est l'angle entre  $\vec{k}$  et  $\vec{B}$ , et

$$A = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial N}{\partial \theta} \right)_\omega \quad (14.162)$$

La densité d'énergie à la fréquence  $\nu$  devient alors :

$$U_\nu = \frac{U_\nu \text{ vac}}{4\pi} \int c N^2 \left| \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_\theta \right| d\Omega_k \quad (14.163)$$

Dans le cas d'un plasma isotrope où  $B = 0$  les formules se simplifient et l'on a alors :

$$I_\nu = N^2 B_{o\nu}(T) \quad (14.164)$$

$$U_\nu = \frac{c^3}{v_g v_\varphi} U_\nu \text{ vac}(T) \quad (14.165)$$

## 14.8 Transfert radiatif dans un plasma

### 14.8.1 L'équation de transfert

#### a) Bilan énergétique dans un pinceau lumineux

Dans un plasma faiblement inhomogène considérons un pinceau de lumière d'angle solide  $d\Omega_1$  arrivant sous l'angle d'incidence  $\xi_1$  sur un petit élément de volume ayant la forme d'un cylindre aplati (Fig. 14.16). À cause de l'inhomogénéité du milieu, le pinceau émergera de la face arrière de la boîte sous un angle  $\xi_2$  légèrement différent de  $\xi_1$  et dans l'angle solide  $d\Omega_2$ . On peut écrire le bilan d'énergie relatif à ce pinceau lumineux sous la forme :

$$\begin{aligned} & (\text{Puissance émergente}) - (\text{Puissance incidente}) \\ & = (\text{Puissance introduite par le plasma dans le pinceau}) \\ & \quad - (\text{Puissance ôtée au pinceau par le plasma}). \end{aligned}$$

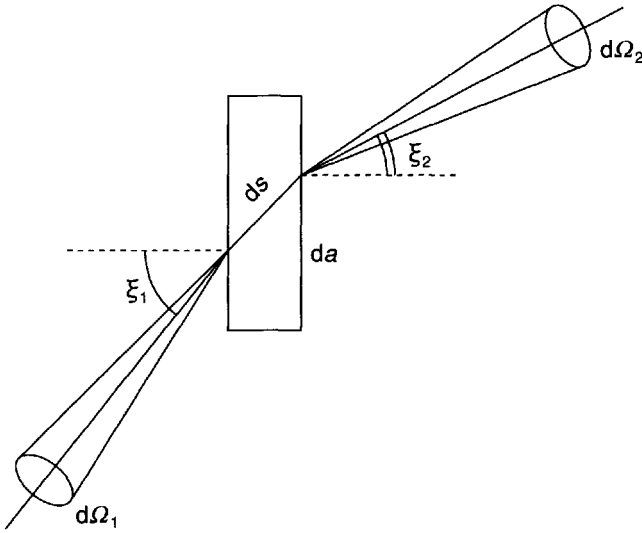


Figure 14.16 : Rayonnements traversant un petit volume de plasma.

Si on appelle ces quatre termes  $P_2, P_1, P_+$ , et  $P_-$ , on a :

$$P_2 - P_1 = P_+ - P_- \tag{14.166}$$

Évaluons chacun de ces termes en appelant  $da$  la surface de base du petit élément de volume et  $ds$  la longueur parcourue par le pinceau dans celui-ci. Pour un rayon moyen on a :

$$P_1 = I_\nu da \cos \xi_1 d\nu d\Omega_1 \tag{14.167}$$

$$P_2 = (I_\nu + dI_\nu) da \cos \xi_2 d\nu d\Omega_2 \tag{14.168}$$

$$P_+ = J_\nu (da ds \cos \xi) d\nu d\Omega \tag{14.169}$$

$$P_- = (K_\nu ds)(I_\nu da \cos \xi d\nu d\Omega) \tag{14.170}$$

Les indices 1 et 2 pour les variables  $\xi$  et  $d\Omega$  n'ont pas été utilisés dans les deux derniers termes, car on a seulement besoin de la valeur moyenne de ces quantités le long du pinceau à l'intérieur de l'élément de volume. Les coefficients  $J_\nu$  et  $K_\nu$  représentent l'effet de la matière sur le petit faisceau qui s'y propage.  $J_\nu$  est appelé *coefficient d'injection* et  $K_\nu$  *coefficient d'extraction*. On utilisera aussi l'inverse de  $K_\nu$ ,  $l_\nu = 1/K_\nu$  qui est le libre parcours moyen d'un photon de fréquence  $\nu$ . En principe  $J_\nu$  et  $K_\nu$  incluent les effets de la diffusion comme il est montré sur la figure 14.17, où

l'on observe l'effet de la *diffusion entrante* (trajectoire 1' 2) provenant de faisceaux de direction initiale 1' différente de celle du faisceau initial 1, et de la *diffusion sortante* (trajectoire 1 2'), où le rayon sort dans la direction 2' différente de la direction finale 2.

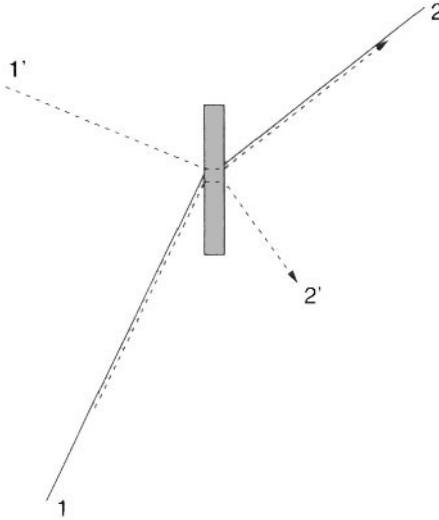


Figure 14.17 : Effets de la diffusion dans le transfert radiatif.

Le rayon 1' - 2 contribue à  $P_+$ .

Le rayon 1 - 2' contribue à  $P_-$ .

Il est donc commode d'écrire ces deux coefficients sous la forme :

$$J_\nu = j_\nu + \sigma_{\nu+} \quad (14.171)$$

$$K_\nu = \kappa_\nu + \sigma_{\nu-} \quad (14.172)$$

À présent  $j_\nu$  est le *coefficient d'émission* qui, comme nous l'allons voir, inclut l'émission spontanée et l'émission stimulée.  $\kappa_\nu$  est le *coefficient d'absorption* alors que  $\sigma_{\nu+}$  et  $\sigma_{\nu-}$  sont respectivement les coefficients de diffusion entrante et sortante. Remarquons qu'il n'est pas toujours simple de faire une séparation nette entre les deux types de phénomènes. Afin d'exprimer la différence  $P_2 - P_1$  on doit comparer  $\cos\xi_1 d\Omega_1$  et  $\cos\xi_2 d\Omega_2$ . Si le milieu était isotrope, il découlerait de la loi classique de la réfraction qui s'écrit le long d'un rayon sous la forme :

$$N \sin \xi = \text{Cte} \quad (14.173)$$

un résultat classique de l'optique géométrique :

$$N^2 da \cos \xi d\Omega = \text{Cte} \quad (14.174)$$

connu sous le nom d'équation de conservation de l'étendue des faisceaux lumineux [244, p. 48] [245]. Dans un plasma isotrope ce résultat peut être généralisé en introduisant l'indice de réfraction des rayons lumineux, noté  $N_r$ . L'intérêt principal de l'utilisation de cette quantité réside dans le fait que l'on a :

$$N_r^2 da \cos \xi d\Omega = \text{Cte} \quad (14.175)$$

On obtient alors :

$$P_2 - P_1 = d[I_\nu da \cos \xi d\nu d\Omega] \quad (14.176)$$

$$= (N_r^2 da \cos \xi d\nu d\Omega) \frac{d}{ds} \left( \frac{I_\nu}{N_r^2} \right) ds \quad (14.177)$$

et finalement, en rapprochant les formules (14.169), (14.170) et (14.177), on obtient l'équation définitive :

$$N_r^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{I_\nu}{N_r^2} \right) = J_\nu - K_\nu I_\nu \quad (14.178)$$

connue sous le nom d'équation de transfert du rayonnement.

### b) Profondeur optique et fonction source

Il est d'usage d'introduire de nouvelles variables dans l'équation (14.178), à savoir la profondeur optique  $z_\nu$  définie par :

$$dz_\nu = K_\nu ds \quad (14.179)$$

et la fonction source  $S_\nu$  définie par :

$$S_\nu = \frac{1}{N_r^2} \frac{J_\nu}{K_\nu} \quad (14.180)$$

La première est de toute évidence en rapport avec l'atténuation le long d'un rayon ; la signification de la fonction source sera clarifiée dans le paragraphe suivant. Avec ces nouvelles variables l'équation de transfert s'écrit

$$\frac{d}{dz_\nu} \left( \frac{I_\nu}{N_r^2} \right) = \frac{I_\nu}{N_r^2} - S_\nu \quad (14.181)$$

### c) Intégration formelle de l'équation du transfert radiatif

Considérons le cas de la figure 14.18, où l'on suit un rayon qui entre dans un volume de plasma en  $A$ , en sort en  $B$ , et supposons qu'à l'extérieur de ce volume il n'y ait que du vide. Ainsi  $N_r$  approche de l'unité à la surface du plasma et si l'on néglige les éventuels phénomènes de réflexion à l'interface vide/plasma alors l'équation (14.181) s'intègre aisément, et on obtient :

$$I_\nu(B) = I_\nu(A)e^{-z_A} + \int_0^{z_A} S_\nu(z_\nu)e^{-z_\nu} dz_\nu \quad (14.182)$$

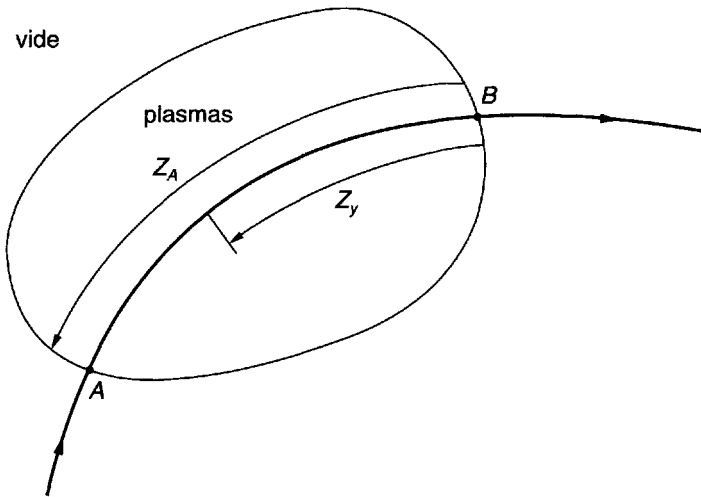


Figure 14.18 : Intégration formelle de l'équation de transfert le long d'un rayon.

Dans cette équation le point de sortie  $B$  est choisi comme origine des profondeurs optiques, et  $z_\nu$  est la profondeur optique d'un point  $M$  le long du chemin  $AB$ . Cette formule a une signification physique claire : l'intensité en  $B$  est égale à l'intensité au point d'entrée  $A$  atténuée par le facteur de transmission  $e^{-z_A}$ , mais augmentée par le rayonnement introduit en chaque point  $M$  du chemin, atténué ensuite par le facteur variable  $e^{-z_\nu}$ . Le fait que le rayonnement qui a son origine au point  $M$  soit proportionnel à  $S_\nu$  explique l'appellation de fonction source donnée à cette quantité.

Notons que l'intégration de l'équation de transfert effectuée en (14.182) est purement formelle et quelque peu trompeuse. En effet, si la diffusion

apporte des contributions à  $J_\nu$  et  $K_\nu$ , alors  $S_\nu(z_\nu)$  dans (14.182) dépend de  $I_\nu$  ; en d'autres termes, on a seulement transformé l'équation différentielle (14.181) en l'équation intégrale (14.182). De plus, cette dernière est compliquée en ce sens qu'elle est non locale par rapport aux angles ; on veut dire par là que les valeurs de  $I_\nu$ , qui apparaissent dans  $S_\nu$  au point  $M$ , sont reliées à d'autres directions que celles du rayon considéré en  $M$ .

Pendant dans de nombreux cas on peut négliger la diffusion (voir par exemple la section 14.9 lorsque le bremsstrahlung est dominant). Dans ce cas  $S_\nu$  devient une propriété locale du milieu, dépendant seulement des propriétés de la matière au point  $M$ . Dans ces conditions, il est d'usage d'introduire une température  $T_\nu$  en posant :

$$S_\nu \equiv B_{o\nu}(T_\nu) \tag{14.183}$$

$T_\nu$  est appelée la température de rayonnement pour la fréquence  $\nu$ . Utilisant la définition (14.180) de  $S_\nu$ , on peut écrire :

$$j_\nu/\kappa_\nu = N_r^2 B_{o\nu}(T_\nu) = B_\nu(T_\nu) \tag{14.184}$$

On peut dire que  $T_\nu$  est une température équivalente telle que le rapport  $j_\nu/\kappa_\nu$  est celui donné par la loi de Kirhhoff pour  $T = T_\nu$ .

### 14.8.2 Théorie cinétique et hydrodynamique des photons

#### a) Limite haute fréquence. Équation de Boltzmann des photons

On doit maintenant remarquer que dans le transfert de rayonnement, la matière joue deux rôles différents :

- La matière est à l'origine de l'apparition d'un indice de réfraction  $N_r$ , éventuellement différent de l'unité, variable dans le temps et dans l'espace. Les effets de réfraction qui sont essentiellement macroscopiques gouvernent le phénomène de propagation des ondes et sont représentés par  $N_r$  au premier membre de l'équation (14.178).

- La matière crée, annihile et diffuse du rayonnement par interactions microscopiques avec les constituants atomiques du milieu. Ces effets sont représentés par le second membre de l'équation (14.178) et les photons sont évidemment nécessaires à leur description détaillée. Il est intéressant d'étudier la limite des hautes fréquences définie par la condition que  $\omega$  soit beaucoup plus grand que toutes les fréquences jouant un rôle dans la propagation des ondes dans le plasma, c'est-à-dire :

$$\omega \gg \omega_p, \Omega \tag{14.185}$$

À cette limite haute fréquence l'indice de réfraction (l'habituel  $N$ , ou  $N_r$ ) vaut l'unité :

$$N = N_r = 1 \quad (14.186)$$

et l'équation de transfert se simplifie en :

$$\frac{dI_\nu}{ds} = J_\nu - K_\nu I_\nu \quad (14.187)$$

On peut alors passer de la description lagrangienne de l'équation (14.187), dans laquelle on suit la variation de  $I_\nu$  le long d'un rayon, à la description eulérienne où l'on fait la même chose en considérant  $I_\nu$  comme une fonction de  $\vec{r}$  et  $t$ , et en écrivant la dérivée totale (correspondant à la vitesse  $c$  dans la direction  $\vec{s}$ ) sous la forme :

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{cdt} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{s} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \quad (14.188)$$

L'équation de transfert devient alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \vec{s} \cdot \frac{\partial I_\nu}{\partial \vec{r}} = J_\nu - K_\nu I_\nu \quad (14.189)$$

Cependant puisque  $N_r = 1$ , on doit considérer que la lumière se propage essentiellement dans le vide et l'on peut alors utiliser l'équivalence de  $I_\nu$  et de la fonction de distribution photonique  $f_\nu$ , comme on l'a établi pour le vide dans la section 14.6. En posant donc :

$$f_\nu = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} I_\nu \quad (14.190)$$

on obtient l'équation d'évolution pour  $f_\nu$  sous la forme :

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + c \vec{s} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \vec{r}} = C(f_\nu) \quad (14.191)$$

C'est l'équation de Boltzmann pour les photons. Les deux seules différences entre cette équation et l'équation habituelle relative à la matière sont l'absence de terme de force appliquée au premier membre (il n'y a pas de forces agissant sur les photons) et l'écriture non explicite du terme de collisions au second membre sous la forme :

$$C(f_\nu) = \frac{c^3}{h^4 \nu^3} J_\nu - c K_\nu f_\nu \quad (14.192)$$

Comme on l'a vu plus haut  $J_\nu$  et  $K_\nu$  incluent des termes d'émission-absorption à peu près analogues aux collisions inélastiques. Pour les termes de diffusion qui ressemblent aux collisions élastiques,  $C(f_\nu)$  peut être écrit sous la forme d'une intégrale de Boltzmann classique (cf. (14.201) ou [252]).



### b) Équations hydrodynamiques pour les photons

Partant de l'équation de Boltzmann on peut obtenir les équations hydrodynamiques relatives aux photons à l'aide de la même méthode "régressive" qu'au chapitre 9.

**Équations d'énergie** Pour obtenir l'équation de transfert d'énergie spectrale on intègre simplement l'équation de transfert sur les angles, et pour le transfert d'énergie global on effectue une seconde intégration sur  $\nu$ . on obtient ainsi :

- l'équation spectrale :

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}_\nu = s_\nu \quad (14.193)$$

$$s_\nu = \int (J_\nu - K_\nu I_\nu) d\Omega \quad (14.194)$$

- l'équation globale :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = s \quad (14.195)$$

$$s = \int s_\nu d\nu \quad (14.196)$$

**Équations de la quantité de mouvement** En multipliant par  $\vec{s}$ , avant d'effectuer les intégrations et utilisant les identités (14.130) et (14.131) on obtient de même :

- l'équation spectrale :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\overline{T}}_\nu = \vec{P}_\nu \quad (14.197)$$

$$\vec{P}_\nu = \frac{1}{c} \int \vec{s} (J_\nu - K_\nu I_\nu) d\Omega \quad (14.198)$$

- l'équation globale :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\overline{T}} = \vec{P} \quad (14.199)$$

$$\vec{P} = \int \vec{P}_\nu d\nu \quad (14.200)$$

Ces équations de l'hydrodynamique radiative sont en principe plus simples à résoudre que l'équation de transfert. Cependant, pour les utiliser, de même que dans le cas des particules matérielles, deux problèmes doivent être résolus :

- évaluer les termes de collisions  $s_\nu$  et  $\vec{P}_\nu$
- trouver des méthodes d'approximation pour fermer le système (il y a plus d'inconnues que d'équations).

### 14.8.3 Analyse des termes collisionnels des photons

#### a) Diffusion

Rappelons tout d'abord que dans un gaz froid la diffusion peut être due au processus de Rayleigh (collisions élastiques  $h\nu \rightarrow 0$ ) ou à la diffusion résonnante ( $h\nu + A \Rightarrow A^* \Rightarrow h\nu + A$  un processus en deux étapes, cf. [250] pour une discussion complète). Dans un plasma suffisamment chaud, il n'existe plus d'atomes et le processus de diffusion est le processus Compton (collisions élastiques  $h\nu - e$ ).

La contribution de la diffusion Compton au terme de collisions de (14.191) peut être décrite à l'aide d'une intégrale de Boltzmann :

$$C(f_\nu) = \int (f'_\nu f'_e - f_\nu f_e) c \sigma(\chi) d\Omega dv_e \quad (14.201)$$

Si les photons ne sont pas trop énergétiques ( $h\nu \ll m_e c^2$ ), ce qui est le cas pour des photons thermiques ( $h\nu \sim 2kT$ ) dans un plasma non relativiste ( $\kappa T \ll m_e c^2$ ), alors le modèle de Lorentz s'applique, les électrons devenant maintenant les particules lourdes, et  $C(f_\nu)$  s'écrit :

$$J(f_\nu) = n_e c \int (f'_\nu - f_\nu) \sigma(\chi) d\Omega \quad (14.202)$$

Dans ce cas limite la section efficace de Compton se réduit à sa limite basse énergie, la section efficace de Thomson :

$$\sigma(\chi) = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \chi) \quad (14.203)$$

La validité de ces formules et les propriétés de cet opérateur de collisions sont discutées dans le problème P14-5. Remarquons également que la formule (14.201) doit être corrigée par des termes de statistique quantique relatifs à la diffusion Compton stimulée (voir problème P14-6). Nous arrêtons ici notre discussion des termes collisionnels liés à la diffusion, car dans la plupart des cas celle-ci est négligeable ; nous discuterons de l'importance de la diffusion Compton dans les plasmas chauds dans la section 14.9.

**b) Émission-absorption (transitions lié-lié)**

En négligeant la diffusion, on a :

$$J_\nu = j_\nu \tag{14.204}$$

$$K_\nu = \kappa_\nu \tag{14.205}$$

Étudions alors l'émission et l'absorption de lumière associées aux transitions entre deux états d'une particule matérielle dans le plasma. On doit, en principe, considérer trois types de transitions : lié-lié, lié-libre, libre-libre (Fig. 14.19).

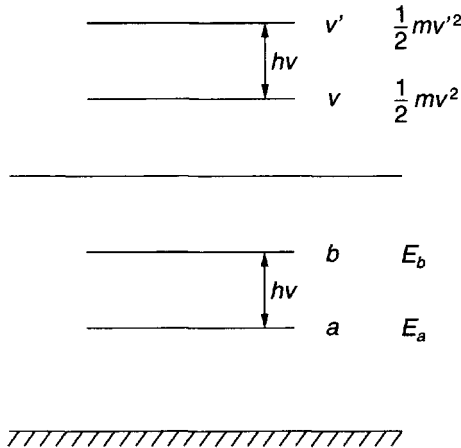


Figure 14.19 : Transitions lié-lié et libre-libre.

Pour simplifier l'analyse nous discuterons tout d'abord seulement le cas des transitions lié-lié entre un état inférieur  $a$  d'énergie  $E_a$  et un état supérieur  $b$  d'énergie  $E_b$  (Fig. 14.19) sans aucune discussion des profils de raies. Le cas des transitions libre-libre est discuté dans le paragraphe suivant. Il existe trois mécanismes fondamentaux d'interaction entre les photons et les états  $a$  et  $b$  :

- émission spontanée de  $b$  vers  $a$  contribuant à  $j_\nu$ ,
- absorption de  $a$  vers  $b$  avec un coefficient  $\kappa_{\nu a}$ ,
- émission stimulée de  $b$  vers  $a$  avec un coefficient  $\kappa_{\nu s}$ .

De ces deux derniers processus inverse résulte le coefficient d'absorption apparente :

$$\kappa_\nu = \kappa_{\nu a} - \kappa_{\nu s} \tag{14.206}$$

Les trois coefficients  $j_\nu$ ,  $\kappa_{\nu a}$  et  $\kappa_{\nu s}$  relatifs à une transition donnée ne sont pas indépendants ; ils sont reliés par les règles d'Einstein que nous rappelons ici en utilisant un formalisme heuristique simple de section efficace. Le coefficient d'absorption de photons d'énergie  $h\nu$  peut être écrit sous la forme :

$$\kappa_{\nu a} = \sum_{ab} n_a \sigma_{ab} \quad (14.207)$$

avec :

$$h\nu = E_b - E_a \quad (14.208)$$

où le  $\Sigma$  est étendu à tous les couples de niveaux d'énergie tels que la relation (14.208) soit vérifiée, et où  $n_a$  est la densité des absorbeurs initialement dans l'état  $a$ . En réalité les niveaux ne sont pas infiniment étroits et  $\sigma_{ab}$  est une fonction de  $\nu$ , positive dans les limites du profil de la raie. On ne considère ici qu'une valeur efficace  $\sigma_{ab}$  obtenue par une moyenne appropriée sur le profil de la raie. De façon similaire, le coefficient d'émission stimulée peut être écrit sous la forme :

$$\kappa_{\nu s} = \sum_{ab} n_b \sigma_{ba} \quad (14.209)$$

Pour des raisons quantiques, les sections efficaces  $\sigma_{ab}$  et  $\sigma_{ba}$  des deux processus inverses  $a \rightleftharpoons b$  sont essentiellement identiques. De façon plus spécifique, on doit tenir compte des multiplicités  $g_a$  et  $g_b$  des deux états  $a$  et  $b$ , et on obtient la relation :

$$\sigma_{ab} g_a = \sigma_{ba} g_b \quad (14.210)$$

connue sous le nom de principe de microréversibilité. En utilisant cette relation et en regroupant  $\kappa_{\nu a}$  et  $\kappa_{\nu s}$  on obtient :

$$\kappa_\nu = \sum_{ab} n_a \sigma_{ab} \left( 1 - \frac{n_b/g_b}{n_a/g_a} \right) \quad (14.211)$$

À ce point de la discussion, il est commode de caractériser les populations relatives des deux niveaux  $a$  et  $b$  dans le milieu par une température  $T_{ab}$  définie par :

$$\left( \frac{n_b}{g_b} \right) / \left( \frac{n_a}{g_a} \right) = \exp[-(E_b - E_a)/\kappa T_{ab}] = e^{-h\nu/\kappa T_{ab}} \quad (14.212)$$

appelée *température de Boltzmann* relative aux états  $a$  et  $b$ . Le coefficient d'absorption s'écrit alors :

$$\kappa_\nu = \sum_{ab} n_a \sigma_{ab} \left( 1 - e^{-h\nu/\kappa T_{ab}} \right) \quad (14.213)$$

Notons que  $\kappa_\nu$  est toujours plus petit que  $\kappa_{\nu a}$  à cause de l'émission stimulée. Habituellement, le niveau supérieur  $b$  est moins peuplé que le niveau bas  $a$  ; ainsi la compensation de  $\kappa_{\nu a}$  par  $\kappa_{\nu s}$  est seulement partielle et le  $\kappa_\nu$  résultant est toujours positif. Dans un milieu "laser" il y a au contraire une inversion de population qui fait que  $\kappa_{\nu s} > \kappa_{\nu a}$  et en conséquence  $\kappa_\nu < 0$  ; cela signifie que le milieu amplifie la lumière de fréquence  $\nu$ .

Il existe une deuxième loi d'Einstein qui se rapporte aux deux procédés d'émission : elle peut s'écrire schématiquement :

$$\frac{\text{Émission spontanée}}{1} = \frac{\text{Émission stimulée}}{\tau_\nu} = \frac{\text{Émission totale}}{1 + \tau_\nu} \quad (14.214)$$

Cette relation s'applique à l'équation (14.192) écrite dans l'espace des phases, ce qui donne :

$$\frac{c^3}{h^4 \nu^3} j_\nu = \frac{c \kappa_{\nu s} f_\nu}{\tau_\nu} \quad (14.215)$$

ou, en utilisant la définition (14.117) de  $\tau_\nu$ , et (14.213) :

$$j_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \kappa_{\nu s} = \frac{h\nu^3}{c^2} \sum_{ab} n_a \sigma_{ab} e^{-h\nu/\kappa T_{ab}} \quad (14.216)$$

S'il y a seulement une transition satisfaisant (14.208), on obtient en combinant (14.213) et (14.216),

$$j_\nu = \kappa_\nu B_{\nu}(T_{ab}) \quad (14.217)$$

Cela montre que la température de Boltzmann  $T_{ab}$  est aussi la température de rayonnement pour laquelle le milieu suit la loi de Kirchhoff.

### c) Émission-absorption (transitions libre-libre)

Pour des transitions entre deux états  $a$  et  $b$  qui sont tous les deux dans le spectre continu des niveaux (transitions libre-libre), les formules doivent être légèrement modifiées. C'est le cas, par exemple, du bremsstrahlung. Les formules pour le spectre continu émis et absorbé par les électrons libres ont été discutées par Bekefi [315]. Il a utilisé les coefficients radiatifs spectraux dépendant de la vitesse :

$\eta_{\nu a}(\vec{v})$  coefficient d'absorption des électrons de vitesse  $\vec{v}$

$\eta_{\nu s}(\vec{v}')$  coefficient d'émission stimulée des électrons de vitesse  $\vec{v}'$

$\eta(\vec{v}')$  coefficient d'émission spontanée des électrons de vitesse  $\vec{v}'$

avec :

$$h\nu = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 \quad (14.218)$$

Les coefficients ci-dessus sont des valeurs moyennes rapportées à un électron, et les coefficients globaux sont donc :

$$\kappa_{\nu a} = \int \eta_{\nu a}(\vec{v}) f(\vec{v}) d\mathbf{v} \quad (14.219)$$

$$\kappa_{\nu s} = \int \eta_{\nu s}(\vec{v}') f(\vec{v}') d\underline{v}' \quad (14.220)$$

$$j_{\nu} = \int \eta_{\nu}(\vec{v}') f(\vec{v}') d\underline{v}' \quad (14.221)$$

Les relations d'Einstein permettent d'exprimer les trois coefficients spectraux de rayonnement en fonction d'un seul d'entre eux. Dans ce cas des transitions d'électrons libre-libre, il est aisé d'utiliser comme coefficient de base le coefficient d'émission spontanée qui peut être calculé par les méthodes développées dans la section 14.2 ; on obtient ainsi :

$$\kappa_{\nu} = \kappa_{\nu a} - \kappa_{\nu s} = \frac{c^2}{N_r^2 h \nu^3} \int \eta_{\nu}(\vec{v}') [f(\vec{v}') - f(\vec{v}')] d\underline{v}' \quad (14.222)$$

Si la distribution des vitesses des électrons est maxwellienne on montre aisément que :

$$\frac{j_{\nu}}{\kappa_{\nu}} = N_r^2 B_{0\nu}(T) = B_{\nu}(T) \quad (14.223)$$

ce qui est la loi de Kirchhoff. Pour que cette loi soit valable dans un plasma, il suffit que sa fonction de distribution des vitesses soit maxwellienne. Alors la loi de Kirchhoff est satisfaite pour chaque fréquence avec une température de rayonnement unique égale à la température cinétique des électrons. Pour toute autre fonction de distribution on peut poser :

$$\frac{j_{\nu}}{\kappa_{\nu}} = S_{\nu} = N_r^2 B_{0\nu}(T_{\nu}) = B_{\nu}(T_{\nu}) \quad (14.224)$$

avec :

$$e^{-h\nu/\kappa T_{\nu}} = \frac{\int \eta_{\nu}(\vec{v}') f(\vec{v}') d\underline{v}'}{\int \eta_{\nu}(\vec{v}') f(\vec{v}') d\underline{v}'} = \frac{\kappa_{\nu s}}{\kappa_{\nu a}} \quad (14.225)$$

La formule ci-dessus se simplifie dans le cas limite de l'*approximation classique* utilisée dans la section 14.2. Cela correspond au domaine des *basses fréquences* pour lequel on a :

$$h\nu = \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 \ll \frac{1}{2} m v'^2 \quad (14.226)$$

Considérons, pour simplifier, que la distribution des vitesses est isotrope (pour des vitesses anisotropes cf. Bekefi [315]). On doit alors relier  $f(v')$  et  $f(v)$  par la relation approchée :

$$f(v') = f(v) + h\nu \frac{\partial f}{\partial E} = f(v) + \frac{h\nu}{mv} \frac{\partial f}{\partial v} \quad (14.227)$$

et décrire les propriétés radiatives du plasma par les formules :

$$j_{\nu} = \int \eta_{\nu}(v) f(v) dv \quad (14.228)$$

$$\kappa_{\nu} = -\frac{c^2}{N_r^2 m \nu^2} \int \frac{\eta_{\nu}(v)}{v} \frac{\partial f}{\partial v} dv \quad (14.229)$$

$$S_{\nu} = \frac{N_r^2 \nu^2}{c^2} \kappa T_{\nu} \quad (14.230)$$

$$\kappa T_{\nu} = -\frac{\int \eta_{\nu}(\vec{v}') f(v) dv}{\int \eta_{\nu}(\vec{v}') \frac{\partial f}{\partial E} dv} \quad (14.231)$$

**d) Relaxation photons-matière. Transfert radiatif**

Si l'on revient à nouveau au formalisme plus simple des transitions lié-lié, on peut en reprenant les résultats des formules précédentes (14.192), (14.213), (14.216), obtenir finalement :

$$C(f_\nu) = c \kappa_\nu [f_{ov}(T_{ab}) - f_\nu] \tag{14.232}$$

avec :

$$f_{ov}(T_{ab}) = \frac{h^4 \nu^3}{c^2} B_{ov}(T_{ab}) \tag{14.233}$$

Dans ce résultat final  $f_{ov}(T_{ab})$  est la fonction d'équilibre rayonnement  $\rightleftharpoons$  matière, c'est-à-dire la valeur à la fréquence  $\nu$  de la fonction de distribution des photons, qui serait présente, si le rayonnement et la matière étaient en équilibre à la température  $T = T_{ab}$  ; il faut rappeler que  $T_{ab}$  a été elle-même choisie de manière que le rapport de population  $n_b/n_a$  corresponde à un équilibre thermodynamique de la matière à la température  $T_{ab}$ . Maintenant  $f_\nu$  est la vraie valeur réalisée dans le milieu, et on voit que le terme de collisions (14.232) est un terme de relaxation, qui tend à ramener  $f_\nu$  à sa valeur d'équilibre  $f_{ov}(T_{ab})$ .

Mais cette évolution est compliquée, premièrement parce que le coefficient de relaxation est en général fonction de la fréquence  $\nu$ , et plus encore parce que la matière évolue sous l'action du champ de rayonnement. Les photons induisent des transitions qui changent les populations dans le milieu. L'équation de Boltzmann des photons est ainsi couplée aux équations d'évolution des populations  $n_a, n_b, \dots$  et aux équations de Boltzmann des électrons (ou d'autres particules) qui décrivent l'évolution des fonctions de distribution des vitesses  $f(\vec{v}_e \dots)$ . Tout cela est le très difficile problème du "transfert radiatif" qui ne peut être résolu que par des approximations physiques que nous discutons ci-dessous.

**14.8.4 Approximations physiques du transfert radiatif**

**a) L'état quasi statique pour les photons**

Sur la figure 14.18, la relation (14.182) montre que les photons qui arrivent à un point donné sont nés dans le voisinage immédiat (à une distance inférieure à quelques  $l_\nu$ ). Une exception possible pourrait être le cas où il y aurait de très forts gradients de température dans le milieu. Alors l'augmentation de  $j_\nu$  avec la distance au point d'observation pourrait dominer l'atténuation due à l'absorption le long du rayon lumineux. Cette situation, qui est celle des ondes de chocs radiatives, est inhabituelle.

De plus, la lumière parcourt la distance  $l_\nu$  dans un temps  $l_\nu/c$  qui est très petit par rapport aux temps caractéristiques des changements significatifs d'état de la matière. On doit donc considérer que, du point de vue du champ radiatif, la matière évolue très lentement et que  $I_\nu$  atteint à chaque instant un état quasi stationnaire obtenu en négligeant le terme  $\partial I_\nu/\partial t$  dans la relation (14.189). Dans cet état quasi stationnaire on obtient alors :

$$\vec{s} \cdot \nabla I_\nu = \sum_{ab} n_a \sigma_{ab} \left(1 - e^{-h\nu/\kappa T_{ab}}\right) [B_{o\nu}(T_{ab}) - I_\nu] \quad (14.234)$$

### b) Équilibre thermodynamique local (ETL) partiel

On dit que l'on a un équilibre thermodynamique local (ETL) partiel, quand la matière est localement à l'équilibre avec elle-même, c'est-à-dire quand toutes les températures de Boltzmann  $T_{ab}$  sont égales à une unique valeur  $T$ , et quand les distributions de vitesse de toutes les espèces de particules sont maxwelliennes avec cette même température  $T$ . Cependant, le rayonnement et la matière peuvent être hors d'équilibre,  $I_\nu$  étant différent de  $B_{o\nu}(T)$ . On peut se poser la question de savoir si  $I_\nu$  peut être très différent de  $B_{o\nu}(T)$ . Quoiqu'il en soit, l'état de la matière est maintenant décrit par le seul paramètre  $T$  et toutes les équations se simplifient considérablement. On a alors :

$$\kappa_\nu = \kappa_{\nu a} (1 - e^{-h\nu/\kappa T}) \quad (14.235)$$

$$j_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \kappa_{\nu a} e^{-h\nu/\kappa T} \quad (14.236)$$

$$C(f_\nu) = c\kappa_\nu [f_{o\nu}(T) - f_{o\nu}] \quad (14.237)$$

et la relation (14.232) devient :

$$\vec{s} \cdot \nabla I_\nu = c\kappa_\nu [B_{o\nu}(T) - I_\nu] \quad (14.238)$$

Les équations hydrodynamiques correspondantes, pour le transfert d'énergie et de quantité de mouvement, s'obtiennent comme dans la section 14.8 et on trouve en supposant  $\kappa_\nu$  isotrope :

$$\nabla \cdot \vec{S}_\nu = c\kappa_\nu [U_{o\nu}(T) - U_\nu] \quad (14.239)$$

$$c^2 \nabla \cdot \vec{T}_\nu = -c\kappa_\nu \vec{S}_\nu \quad (14.240)$$

Notons que la densité totale d'énergie radiative  $U = \int U_\nu d\nu$  est beaucoup plus petite que la densité d'énergie cinétique dans la matière, sauf dans le domaine des très hautes températures (cf. section 14.9). Cependant, le



flux d'énergie radiative  $\vec{S} = \int \vec{S}_\nu d\nu$  n'est pas négligeable et même souvent beaucoup plus important que les flux d'énergie associés à la matière. L'explication de ce paradoxe ( $U$  négligeable mais pas  $\vec{S}$ ) est que l'énergie de la matière est transférée avec une vitesse de l'ordre de grandeur de la vitesse du son, tandis que l'énergie radiative se transfère avec la vitesse  $c \gg v_{\text{son}}$ . Notons aussi qu'il est difficile d'intégrer sur  $\nu$  pour obtenir les équations pour  $U$  et  $\vec{S}$ , car en général  $\kappa_\nu = \kappa_\nu(T)$  varie avec  $\nu$ , de manière compliquée.

**c) Approximation de la diffusion**

Supposons maintenant que le champ radiatif soit presque isotrope. Par cela on entend que dans le développement en harmoniques sphériques de  $I_\nu$  (cf. appendice A14-1) on a  $|\vec{\alpha}_1| \ll \alpha_0$ . Le flux d'énergie  $\vec{S}_\nu$  doit alors être relativement petit. Si, au contraire, le champ radiatif était complètement anisotrope, comme dans un faisceau parallèle, on aurait  $S_\nu = cU_\nu$ . Donc, on peut utiliser le rapport  $S_\nu/cU_\nu$  comme une mesure de l'anisotropie, et dans le cas d'un champ radiatif presque isotrope on a :

$$S_\nu/cU_\nu \ll 1 \tag{14.241}$$

Dans ces conditions la pression de radiation se réduit à sa valeur scalaire :

$$\overline{\overline{T}_\nu} = \frac{U_\nu}{3} \overline{\delta} \tag{14.242}$$

et l'équation de transfert de l'impulsion (14.240) devient :

$$\vec{S}_\nu = -\frac{c}{\kappa_\nu} \nabla (U_\nu/3) = -D_\nu \nabla U_\nu \tag{14.243}$$

avec :

$$D_\nu = \frac{l_\nu c}{3} \tag{14.244}$$

L'équation ci-dessus exprime une loi de diffusion analogue à celle des particules dans la matière. Il y a cependant deux différences :

1. La diffusion radiative décrit un flux d'énergie et non un flux de particules comme c'est le cas dans la matière. On aurait pu écrire une équation de la diffusion pour les photons totalement semblable à celle dans la matière, avec un coefficient de diffusion qui serait d'ailleurs aussi  $D_\nu$ .

2. Les mécanismes de la diffusion sont tout à fait différents pour les particules matérielles et les photons. Dans la matière, la diffusion est contrôlée par les collisions élastiques ; le libre parcours moyen qui entre dans la formule du coefficient de diffusion est le libre parcours moyen de collision élastique. La diffusion des photons est au contraire régie par des absorptions et émissions successives, en général pas par le même atome (ou particule de matière). Le libre parcours moyen qui entre dans la formule (14.244) de  $D_\nu$  est le libre parcours moyen d'absorption.

#### d) Équilibre thermodynamique local (ETL) complet Conduction radiative de la chaleur

On a vu que seule la proximité immédiate d'un point (à des distances de quelques  $l_\nu$ ) participe à l'établissement de  $I_\nu$  en ce point. Si l'on suppose que la température matérielle  $T$  varie peu sur une distance  $l_\nu$ , alors  $I_\nu$  doit être en chaque point le même que si le milieu était homogène et infini, c'est-à-dire :

$$I_\nu = B_{o\nu}(T) \quad (14.245)$$

Dans ce cas on dit que le milieu est en équilibre thermodynamique local (ETL) complet ; complet car cela concerne à la fois le rayonnement et la matière, mais local car  $T$  varie (quoique lentement) avec la position dans le milieu. Quand l'équilibre thermodynamique local complet est réalisé, l'équation de la diffusion (14.243) devient :

$$\vec{S}_\nu = -\frac{l_\nu c}{3} \nabla U_{o\nu} \quad (14.246)$$

et le flux d'énergie total est :

$$\vec{S} = -\int \frac{l_\nu c}{3} \nabla U_{o\nu} d\nu \quad (14.247)$$

Comme on l'a vu précédemment, cette intégrale n'est en général pas triviale. Si  $l_\nu$  était indépendant de la fréquence, on obtiendrait :

$$\vec{S} = -\frac{l_\nu c}{3} \nabla \left( \frac{4\sigma}{c} T^4 \right) = -\frac{16\sigma l_\nu T^3}{3} \nabla T \quad (14.248)$$

où  $\sigma$  est la constante de Stefan [cf. (14.143), (14.145)]. Cette loi est tout à fait analogue à la loi de Fourier (ou Fick) pour le transfert de la chaleur avec ici un coefficient de conductivité thermique proportionnel à  $T^3$ . Cependant, plus généralement  $l_\nu$  est une fonction de  $\nu$ . Il est alors commode

d'introduire un  $l_\nu$  moyen, le libre parcours moyen de Rosseland :

$$l_R = \frac{\int_0^{+\infty} l_\nu (dU_{0\nu}/dT) d\nu}{\int_0^{+\infty} (dU_{0\nu}/dT) d\nu} \quad (14.249)$$

Une expression plus explicite de  $l_R$  est obtenue dans le problème P14-6. En utilisant  $l_R$ , l'équation de conduction radiative de la chaleur peut alors être écrite de manière tout à fait générale sous la forme :

$$\vec{S} = -\kappa_R \nabla T \quad (14.250)$$

avec :

$$\kappa_R = \frac{16\sigma_{\text{ell}} l_R T^3}{3} \quad (14.251)$$

Notons que si l'on s'intéressait au transfert de la quantité de mouvement (à la place de celui de l'énergie), on devrait introduire une autre moyenne de  $\kappa_\nu$  ou  $l_\nu$  (cf. problème P14-6).

## 14.9 Classification des plasmas en hydrodynamique radiative

### 14.9.1 Équation de Boltzmann pour les photons

En conclusion de ce chapitre nous introduisons maintenant une classification des plasmas du point de vue de l'hydrodynamique radiative. Pour ceci on utilisera le même diagramme que celui introduit au chapitre 1 avec les coordonnées :

$$x = \log n_e \quad (\text{CGS}) \quad (14.252)$$

$$y = \log T \quad (\text{CGS}) \quad (14.253)$$

Mais maintenant nous le compléterons par des considérations relatives au rayonnement. Nous considérons un plasma complètement ionisé constitué d'électrons et d'ions de charge  $Ze$ . Discutons d'abord la validité de l'équation de Boltzmann pour les photons thermiques ; ceux-ci ont été définis dans la section 14.6 par la relation :

$$h\nu = 2\kappa T \quad (14.254)$$

Comme on a vu que l'équation de Boltzmann pour les photons est valable pour  $N = 1$ , c'est-à-dire  $\nu \ll \nu_p$ , on trace sur le diagramme la droite :

$$h\nu_p = 2\kappa T \quad (14.255)$$

ce qui donne, en coordonnées  $(x, y)$  :

$$y = \frac{x}{2} - 6.67 \quad (\text{CGS}) \quad (14.256)$$

On voit sur la figure 14.20 que cette ligne est dans la partie basse du diagramme, le domaine des plasmas corrélés. On en conclut que pour les

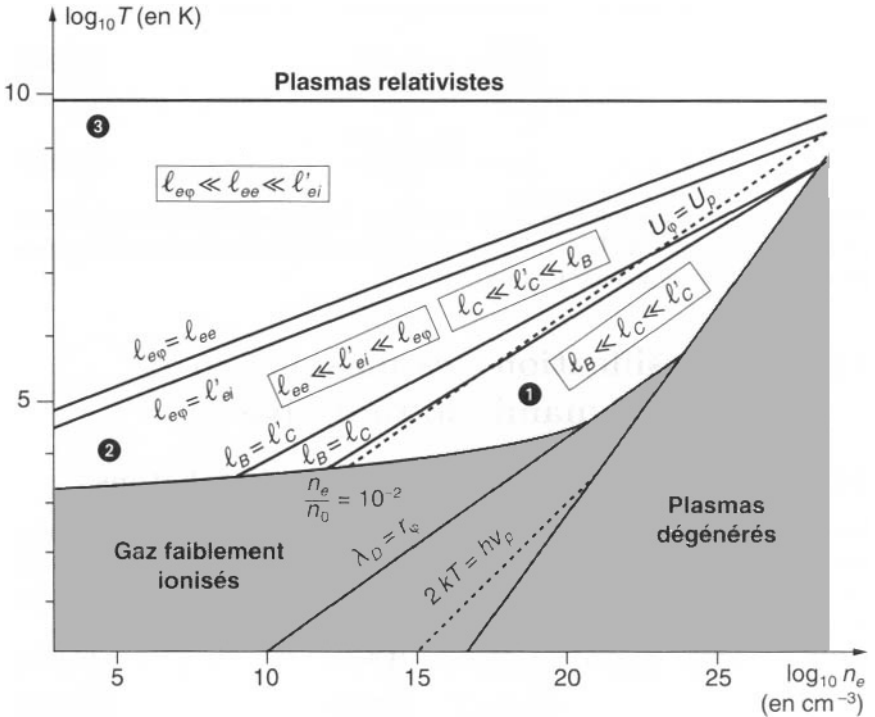


Figure 14.20 : Classification des plasmas du point de vue des interactions matière-rayonnement.

Région 1 : plasmas matériels, bremsstrahlung dominant.

Région 2 : plasmas radiatifs, effet Compton dominant, électrons couplés aux ions.

Région 3 : plasmas radiatifs, effet Compton dominant, électrons couplés aux photons.  $n_e/n_0 = 10^{-2}$  formule de Saha à 1 bar.

$U_\phi$  énergie radiative,  $U_p$  énergie cinétique des particules matérielles.

$U_\phi = U_p$  frontière entre les plasmas matériels ( $T$  faibles) et radiatifs ( $T$  élevées).

plasmas habituels (cinétiques, classiques) on a :

$$(h\nu)_{\text{thermique}} \ll h\nu_p \quad (14.257)$$

et l'équation de Boltzmann pour les photons est valable. Soulignons bien que ce résultat s'applique aux photons thermiques qui sont essentiels en hydrodynamique radiative. La conclusion serait tout à fait différente si on ne s'intéressait pas à l'hydrodynamique, mais à la propagation électromagnétique d'une onde de relativement basse fréquence, comme par exemple une onde radio dans l'ionosphère ; les photons associés seraient alors très "infrathermiques". Les effets de réfraction seraient très importants et l'on devrait utiliser, au lieu de l'équation de Boltzmann, l'équation générale (14.178) du transfert radiatif.

### 14.9.2 Densités d'énergie

Comparons maintenant la densité d'énergie radiative du plasma :

$$U_\varphi = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (14.258)$$

et la densité d'énergie cinétique de ses particules matérielles :

$$U_K = \frac{3}{2} \left( \frac{Z+1}{Z} \right) n_e \kappa T \quad (14.259)$$

Pour cela on a tracé sur le diagramme la droite :

$$U_\varphi = U_K \quad (14.260)$$

ce qui donne en coordonnées  $(x, y)$  :

$$y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \log_{10} \left( \frac{Z+1}{Z} \right) - 0.52 \quad (\text{CGS}) \quad (14.261)$$

On voit sur la figure 14.20 que cette droite sépare le domaine des plasmas usuels en deux moitiés, et deux familles de plasmas peuvent donc être définies :

1. Les plasmas matériels ( $n$  grand,  $T$  petit) où  $U_K > U_\varphi$ .
2. Les plasmas radiatifs ( $n$  petit,  $T$  grand) où  $U_\varphi > U_K$ .

Nous verrons cependant, dans la section 14.9, que pour que cette distinction ait un sens physique, il est nécessaire de considérer des plasmas d'assez grandes dimensions ; autrement le plasma serait optiquement mince pour les photons thermiques et la valeur de la densité d'énergie  $U_\varphi$  donnée par (14.258) ne pourrait pas s'établir.

### 14.9.3 Longueurs d'interaction photon-électron

#### a) Diffusion Compton (collisions élastiques $h\nu-e$ )

Dans les plasmas non relativistes, la section efficace de diffusion Compton se réduit à sa limite pour les basses énergies, la section efficace de Thomson (14.203). Si on l'intègre sur  $\chi$ , on obtient la section efficace totale :

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_o^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \quad (\text{CGS}) \quad (14.262)$$

Le libre parcours moyen d'un photon pour la diffusion Compton est donc :

$$\ell_c = \frac{1}{n_e \sigma_T} = \frac{1.5 \cdot 10^{24}}{n_e} \quad (\text{CGS}) \quad (14.263)$$

Remarquons que ceci est un libre parcours moyen pour un transfert de quantité de mouvement (un libre parcours moyen de diffusion) et pas pour un échange d'énergie, car on est ici dans les conditions du modèle de Lorentz (cf. section 12.2) dans lequel le photon d'énergie  $h\nu = 2\kappa T \ll m_e c^2$  doit être considéré comme la particule de masse faible et l'électron comme la particule lourde.

L'échange d'énergie entre le photon et l'électron dans une collision est, en valeur relative, de l'ordre de  $2\kappa T/m_e c^2 \ll 1$ . Le nombre de collisions nécessaire pour un échange complet d'énergie est de l'ordre de  $m_e c^2/\kappa T$ . Puisque le photon fait des pas aléatoires de longueur  $\sim \ell_c$ , le libre parcours moyen d'échange d'énergie est de l'ordre de :

$$\ell'_c = \left( \frac{m_e c^2}{\kappa T} \right)^{1/2} \ell_c = \frac{1.16 \cdot 10^{29}}{n_e T^{1/2}} \quad (\text{CGS}) \quad (14.264)$$

#### b) Bremsstrahlung inverse

Le bremsstrahlung inverse est une collision inélastique entre un photon et un électron dans le champ d'un ion, c'est-à-dire un processus libre-libre.

$$h\nu + e + (A^+) \longrightarrow e + (A^+) \quad (14.265)$$

Nous avons estimé dans la section 14.5 l'ordre de grandeur du libre parcours moyen associé :

$$\ell_B = 10^{23} \frac{T^{7/2}}{n_e^2 Z} \quad (\text{CGS}) \quad (14.266)$$

Dans ce cas il n'y a pas lieu de faire la distinction entre les transferts de quantité de mouvement et d'énergie ; dans une collision de bremsstrahlung, le photon disparaît et donc transfère sa quantité de mouvement et son énergie.

**c) Comparaison de  $\ell_c, \ell'_c$  et  $l_B$** 

Sur le diagramme de la figure 14.20 on a tracé deux droites :

$$l_B = \ell_c \longrightarrow 7y/2 - x = \log_{10} Z + 1.2 \quad (\text{CGS}) \quad (14.267)$$

$$l_B = \ell'_c \longrightarrow 4y - x = \log_{10} Z + 6.1 \quad (\text{CGS}) \quad (14.268)$$

Ces résultats seront discutés au paragraphe 14.9.5.

**14.9.4 Longueurs d'interaction des électrons**

Pour les collisions des électrons entre eux (collisions  $e-e$ ) ou avec les ions (collisions  $e-i$ ) on a montré dans le chapitre 13 que la fréquence caractéristique est :

$$\bar{\nu}_1 = 4.8 \frac{n_e Z}{T^{3/2}} \ln \Lambda \quad (\text{CGS}) \quad (14.269)$$

et :

$$\bar{\nu}_{ei} = \bar{\nu}_1 \quad (14.270)$$

$$\nu'_{ei} \sim \frac{m_e}{m_i} \bar{\nu}_1 \quad (14.271)$$

$$\nu_{ee} \sim \nu'_{ee} \sim \bar{\nu}_1 \quad (14.272)$$

où les fréquences marquées d'un ' sont relatives aux échanges d'énergie alors que les autres concernent les échanges de quantité de mouvement. Peyraud [253] a montré que dans les collisions Compton électron-photon les fréquences caractéristiques sont :

$$\bar{\nu}_{e\phi} \sim \nu'_{e\phi} \sim \frac{8\pi r_0^2}{3} c \frac{U_\phi}{m_e c^2} \quad (14.273)$$

ce qui est une formule relativement intuitive, si l'on admet que  $U_\phi/m_e c^2$  est une densité équivalente de photons. À partir des fréquences données ci-dessus, on peut calculer les longueurs d'interaction :

$$l_{ee} = l'_{ee} = l_{ei} = (2\kappa T_e/m_e)^{1/2} / \bar{\nu}_1 = 1.14 \times 10^5 \frac{T^2}{n_e Z \ln \Lambda} \quad (\text{CGS}) \quad (14.274)$$

$$l'_{ei} = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} l_{ei} \quad (14.275)$$

$$l_{e\phi} = l'_{e\phi} = (2\kappa T_e/m_e)^{1/2} / \nu_{e\phi} = 3 \times 10^{27} T^{-7/2} \quad (\text{CGS}) \quad (14.276)$$

Sur la figure 14.20 on a tracé les deux droites :

$$l_{e\phi} = l_{ee} \longrightarrow (11y/2) - x = \log Z + \log(\ln \Lambda) + 22.4 \quad (\text{CGS}) \quad (14.277)$$

$$l_{e\varphi} = l'_{ei} \longrightarrow (11y/2) - x = \log Z + \log(\ln \Lambda) + \frac{1}{2} \log \left( \frac{m_e}{m_i} \right) + 22.4 \quad (\text{CGS}) \quad (14.278)$$

Ces résultats sont discutés dans le paragraphe suivant.

### 14.9.5 Familles de plasmas

Sur la figure 14.20 on voit différentes zones, chacune d'entre elles correspondant à une famille de plasmas de propriétés différentes. Les zones *R*, *Q* et *C*, dont la discussion a été menée au chapitre 1 (cf. Fig. 1.11), correspondent respectivement à des plasmas relativistes, dégénérés et classiques corrélés. La zone *W* correspond aux gaz faiblement ionisés ; sa limite a été obtenue en posant :

$$n_e/n_o = 10^{-2} \quad (14.279)$$

et en calculant ce rapport à partir de l'équation de Saha (1.4) pour une pression totale de une atmosphère et  $E_i = 13.6$  eV (hydrogène atomique). La partie centrale du diagramme correspond aux plasmas cinétiques classiques. Elle est maintenant divisée à peu près en trois zones :

- Zone 1 : *Plasmas matériels avec interaction bremsstrahlung  $\varphi$ -e*

Dans ces plasmas la densité d'énergie cinétique  $U_K$  est bien plus grande que la densité d'énergie radiative  $U_\varphi$ . Le libre parcours moyen des photons est  $l_B$ , la longueur d'interaction bremsstrahlung.

- Zone 2 : *Plasmas radiatifs avec couplage e-i*

Le libre parcours moyen des photons est maintenant  $\ell_c$ , lié à la diffusion Compton. La densité d'énergie interne du plasma est  $\approx U_\varphi$ . Mais  $U_\varphi$  n'étant pas très grand ( $T$  pas trop haute), on a  $l'_{ei} \ll l_{e\varphi}$ , ce qui signifie que les électrons sont plus fortement couplés aux photons qu'aux ions.

- Zone 3 : *Plasmas radiatifs avec couplage e- $\varphi$*

Dans cette zone de très haute température (ou de basse densité), le libre parcours moyen des photons est encore  $\ell_c$  de la diffusion Compton et l'on a encore  $U_\varphi \gg U_K$  ; mais maintenant  $U_\varphi$  est si élevée que l'on a  $l_{e\varphi} \ll l'_{ei}$ . Les électrons sont plus fortement couplés aux photons qu'aux ions.

Entre ces zones principales, il y a de plus petites zones intermédiaires où les transferts d'énergie et de quantité de mouvement sont produits par deux mécanismes différents.



Finalement on doit noter que les résultats et classifications précédents ne sont valables que si les dimensions du plasma considéré sont assez grandes. Pour le comprendre on remarque d'abord que dans tous les cas (sauf les plasmas relativistes, que nous ne discutons pas ici) les longueurs d'interaction satisfont aux inégalités :

$$l_{ee} \sim l_{ei} \ll l_B, \ell_c, l'_c \quad (14.280)$$

Cela veut dire que le couplage des électrons entre eux ou avec les ions est plus fort que le couplage des photons avec la matière. En conséquence, si l'échelle de longueur  $L$  de variation des paramètres dans un plasma est plus grande que  $l_{ee}$  (faibles gradients  $\rightarrow$  approximation de la diffusion) mais plus petite que  $l_B$  et  $l'_c$ , le plasma est seulement en ETL partiel, c'est-à-dire qu'il y a équilibre entre électrons et ions mais pas entre la matière et le rayonnement. Pour illustrer cette situation et analyser les ordres de grandeur pour que l'on ait cet ETL partiel, on a représenté les valeurs numériques de longueurs d'interaction sur la figure 14.21.

Sur ce diagramme, à partir des droites  $l_B = \ell_c$  ou  $l_{e\varphi} = l_{ee}$ , on a tracé les droites où :

$$l_{e\varphi} = 10^6, 10^3, 1, 10^{-3}, 10^{-6} \quad (\text{CGS})$$

$$l_{ee} = 10^6, 10^3, 1, 10^{-3}, 10^{-6} \quad (\text{CGS})$$

$$\ell_c = 10^9, 10^6, 10^3, 1, 10^{-3} \quad (\text{CGS})$$

$$l_B = 10^6, 10^3, 1, 10^{-3} \quad (\text{CGS})$$

Pour un plasma représenté par le point  $A$  on a :

$$l_{ee} = 10^{-3} \quad (\text{CGS})$$

$$\ell_c = 10^3 \quad (\text{CGS})$$

Si sa dimension caractéristique  $L \approx 1\text{cm}$  on a :

$$l_{ee} \ll L \ll \ell_c \ll l_B \quad (14.281)$$

Un tel plasma est optiquement mince pour les photons thermiques, et il ne peut donc être complètement à l'ETL ; en dépit de cela, il atteint facilement un ETL partiel car :

$$l_{ee}, l_{ei} \ll L \quad (14.282)$$

de sorte que les photons émis s'échappent vers le vide. La densité de rayonnement n'atteint jamais le  $U_\varphi$  d'équilibre donné par la formule (14.258).

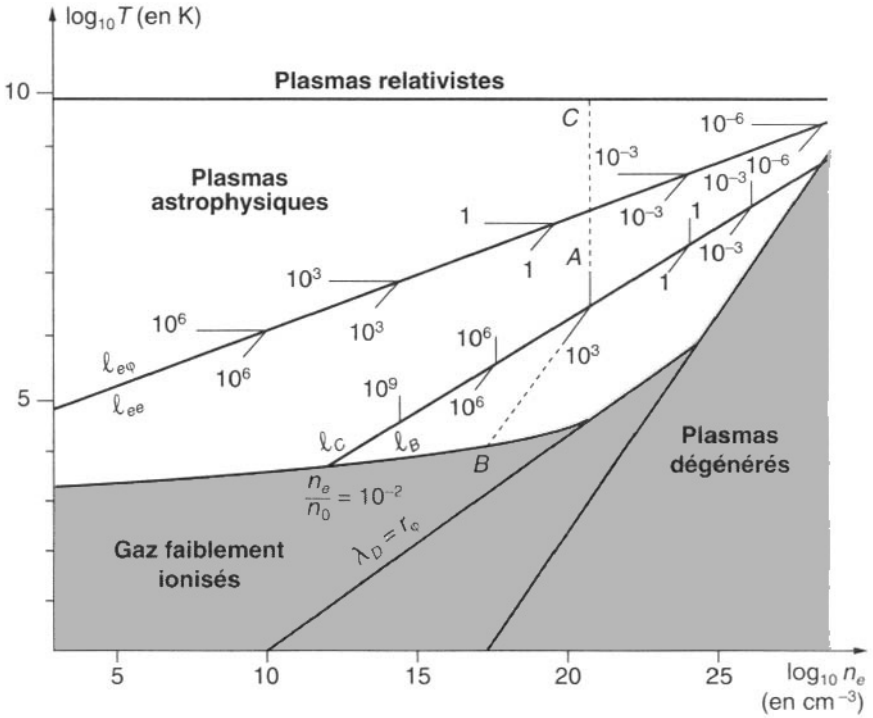


Figure 14.21 : Ordres de grandeur des longueurs d'interaction.

Plasmas en équilibre thermodynamique.  $l_{e\varphi}, l_{ee}, l_B, l_c$  en cm.

$BAC$  lieu des points où la longueur d'interaction photon-électron est égale à 10 mètres.

Pour résumer cette analyse on a aussi tracé, sur la figure 14.21, le contour  $BAC$  correspondant à une longueur d'interaction du photon ( $l_B$  ou  $l'_c$ ) égale à  $10^3$  cm = 10 m. Comme c'est la dimension maximum réaliste pour un plasma sur Terre, on en conclut que pour les zones hors de ce contour, les relations et les classifications données ci-dessus relèvent seulement de l'astrophysique.

## 14.10 Interactions laser-matière à très haut flux

### 14.10.1 Propriétés des lasers de grande puissance

Depuis une vingtaine d'années on a développé, pour les recherches sur la fusion contrôlée par la filière du confinement inertiel (cf. section 1.10), des lasers pulsés de très grande puissance. Les principales caractéristiques de ces instruments sont :

- la longueur d'onde  $\lambda$  et la fréquence  $\nu$  du faisceau,
- l'énergie  $W$  délivrée dans une impulsion et la durée  $\tau$  de celle-ci,
- la puissance  $P$  et le flux d'énergie  $S$  focalisés sur une toute petite surface de cible.

On peut distinguer deux types de lasers : ceux où l'on cherche à maximiser  $W$ , et ceux où l'on cherche à maximiser  $P$  ou mieux  $S$ . Les premiers, qu'on peut appeler lasers "nanoseconde", sont utilisés pour le confinement inertiel et le chauffage des plasmas denses. Les seconds, baptisés lasers "picoseconde", ou même de façon un peu futuriste "femtoseconde" (1 femtoseconde = 1 fs =  $10^{-15}$  s), qui utilisent des techniques optiques spéciales de compression de la durée de l'impulsion, peuvent être utilisés aussi pour des recherches fondamentales sur les interactions rayonnement-matière. Les records actuels dans ces deux familles sont les suivants :

- Lasers nanoseconde : Nova (Livermore)  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $W = 100 \text{ kJ}$ ,  $\tau = 1 \text{ ns}$
- Lasers picoseconde : P102 (Limeil)  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $P = 55 \text{ TW}$ ,  $\tau = 0.25 \text{ ps}$

Des projets plus grandioses sont à l'étude. Pour les lasers "nanoseconde", ils dépendent surtout du montant des investissements acceptés, mais aussi de la maîtrise d'instruments devenus très complexes avec de nombreux faisceaux (à synchroniser), des dispositifs multiplicateurs de fréquence et des systèmes optiques capables de résister aux très hauts flux. Les lasers "femtoseconde" sont plutôt moins complexes, mais ils mettent en œuvre des techniques optiques très difficiles de compression de l'énergie optique dans le temps et dans l'espace. On peut espérer atteindre dans un avenir proche des flux de  $10^{20} \text{ W/cm}^2$  [257], [258], [259] directement ou par l'intermédiaire de l'autofocalisation dans un plasma (cf. ci-dessous dans les effets relativistes). De tels ordres de grandeur actuels ou futuristes ouvrent de nouveaux domaines de la physique, et notamment divers effets non linéaires, que nous allons maintenant évoquer rapidement, dans l'interaction laser-matière aux très hauts flux de photons.

### 14.10.2 Effets stimulés dans les interactions $h\nu-e$

Il faut d'abord noter que l'analyse de la section 14.9 a supposé que le rayonnement était voisin de l'équilibre thermique. Ses conclusions sont fausses si le rayonnement est loin de l'équilibre et plus dense qu'à l'équilibre thermique pour certaines fréquences et directions, ce qui est le cas dans un faisceau laser. Dans cette situation, les effets stimulés peuvent devenir très significatifs et changer profondément les résultats. On sait que le critère pour que les effets stimulés soient dominants est que le taux d'occupation des états quantiques soit très supérieur à l'unité, soit :

$$h^3 f_\nu \gg 1 \quad (14.283)$$

où  $f_\nu$  est la fonction de distribution des photons. Le fonctionnement du laser lui-même impose que cette condition soit satisfaite. Mais pour décrire l'interaction du faisceau laser avec les électrons d'un plasma, il faut alors modifier l'équation de Boltzmann des photons pour y inclure la diffusion Compton stimulée (cf. problème P14-7 et [253]). En

pratique, ces effets de collisions binaires  $h\nu-e$  sont en général masqués dans un plasma dense par de nombreux effets non linéaires collectifs d'interaction onde-plasma.

### 14.10.3 Effets multiphotoniques sur les atomes

On peut d'autre part voir apparaître des effets multiphotoniques dans les interactions photon-atome. Pour évoquer succinctement ceux-ci, commençons par relier le flux d'énergie  $S$  et le champ électrique oscillant  $E$  dans une onde électromagnétique. La relation de base est :

$$S = \frac{c\varepsilon_0 E^2}{2} \quad (14.284)$$

soit :

$$E = \left( \frac{2}{c\varepsilon_0} \right)^{1/2} S^{1/2} \approx 27 S^{1/2} \quad (\text{SI}) \quad (14.285)$$

Considérons maintenant le champ électrique  $E_a$  sur la première orbite de Bohr dans l'atome d'hydrogène :

$$E_a = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} \approx 5.14 \cdot 10^{11} \quad (\text{SI}) \quad (14.286)$$

On est sûr qu'il y aura des effets "multiphotoniques" très importants au niveau des atomes dans l'interaction avec une onde électromagnétique si l'on a :

$$E = E_a \quad (14.287)$$

soit :

$$S = S_a = \frac{c\varepsilon_0 E_a^2}{2} \approx 3.5 \cdot 10^{20} \quad (\text{SI}) \quad (14.288)$$

En fait, cette condition classique est beaucoup trop sévère. Le flux  $S_a$  est celui qui permet l'ionisation d'un atome par un effet de champ quasi classique. On l'atteint largement dès maintenant. Mais depuis une vingtaine d'années, avec des flux beaucoup plus faibles (de l'ordre de  $10^{12}$  W/m<sup>2</sup>), on a observé l'ionisation multiphotonique d'un atome sous forme de résonances quantiques (cf. [296, pp. 595-599], [256]) définies par les deux conditions :

$$(n-1)h\nu = E_x \quad (14.289)$$

$$nh\nu > E_i \quad (14.290)$$

où  $E_x$  et  $E_i$  sont respectivement les énergies d'excitation (résonnante) et d'ionisation de l'atome, l'ionisation se faisant par le processus en deux étapes :



En revenant à l'ionisation directe par effet de champ, on peut remarquer qu'avec une impulsion très brève on peut produire par ce processus un plasma dense et complètement ionisé : la recombinaison à trois corps d'un tel plasma peut produire des inversions de populations, et c'est une nouvelle filière qui s'ouvre pour la réalisation de lasers à rayons X [262].

### 14.10.4 Oscillation relativiste des électrons dans une onde

La réponse d'un plasma à un champ électrique oscillant se calcule en général en supposant que les électrons effectuent dans l'onde des oscillations de faible amplitude. On obtient alors immédiatement, pour la vitesse d'oscillation d'un électron :

$$-i\omega \vec{v}_e = q_e \vec{E} \quad (14.292)$$

Ce calcul non relativiste n'est valable que si  $v_e \ll c$ , ce qui est en général le cas. Dans les champs très forts, la vitesse  $v_e$  tend vers  $c$  et il faut utiliser des équations relativistes. Pour avoir un ordre de grandeur des champs correspondants, posons par exemple  $v_e = c/2$  dans (14.292). On définit ainsi un champ critique :

$$E_r = \omega m_e c / 2e \approx 5.3 \cdot 10^{-3} \nu \quad (\text{SI}) \quad (14.293)$$

d'où une valeur critique du flux d'énergie :

$$S_r = \frac{c \varepsilon_0 E_r^2}{2} \approx 3.7 \cdot 10^{-8} \nu^2 \quad (\text{SI}) \quad (14.294)$$

soit pour  $\lambda = 1 \mu$ ,  $\nu = 3 \cdot 10^{15}$  :

$$S_r = 3.3 \cdot 10^{23} \quad (\text{SI}) \quad (14.295)$$

On voit que l'on commence à s'approcher de ce domaine avec les lasers "picoseconde" actuels.

Lorsque la relativité intervient ainsi au niveau de l'oscillation des électrons dans une onde électromagnétique, il apparaît toute une série d'effets non linéaires dans la propagation : autofocalisation des faisceaux lasers, naissance de champs électriques longitudinaux très intenses susceptibles d'accélérer des particules, génération d'harmoniques, production de champs magnétiques de l'ordre de 100 Teslas, "accélération" de photons (élévation de la fréquence)... (cf. [260], [261], [262] pour les études théoriques en cours de ces divers effets. Ces récentes publications contiennent une bibliographie plus complète).

### 14.10.5 Effets multiphotoniques sur les particules

Des effets multiphotoniques analogues à ceux observés sur les atomes pourraient être envisagés, aux niveaux des noyaux et des particules élémentaires, mais ils sont tout à fait impensables à l'heure actuelle. Il suffit pour le voir de calculer le champ classique "à la surface" d'un électron, soit :

$$E_e = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \approx 1.81 \cdot 10^{20} \quad (\text{SI}) \quad (14.296)$$

Pour avoir  $E = E_e$  il faudrait un flux :

$$S = S_e = \frac{c\varepsilon_0 E_e^2}{2} \approx 4 \cdot 10^{37} \quad (\text{SI}) \quad (14.297)$$

ce qui paraît totalement impossible.

On peut par contre envisager des effets nouveaux au niveau de l'électrodynamique : effets multiphotoniques dans la diffusion Compton et dans le bremsstrahlung inverse (qui est plutôt un processus atomique), production de paires électron-positron... Nous renvoyons les lecteurs intéressés par ces sujets à [258], [263], [264].

## 14.11 Appendices

### A14-1 Développement de $I_\nu$ en harmoniques sphériques

Pour analyser les variations de  $I_\nu$  avec la direction de propagation (direction du vecteur  $\vec{s}$ ), on effectue un développement en harmoniques sphériques. Le formalisme utilisé est

le même que celui introduit au chapitre 12 pour décrire les anisotropies d'une fonction de distribution des vitesses ; il faut seulement changer  $\vec{w}$  en  $\vec{s}$ . Posons donc :

$$I_\nu(\vec{s}, \nu, \vec{r}, t) = \alpha_0 + \Sigma(\alpha_{\ell m} C_{\ell m} + \beta_{\ell m} S_{\ell m}) \quad (14.298)$$

avec :

$$C_{\ell m} = \nu^\ell P_{\ell m}(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (14.299)$$

$$S_{\ell m} = \nu^\ell P_{\ell m}(\cos \theta) \sin m\varphi \quad (14.300)$$

Les coefficients  $\alpha_0, \alpha_{\ell m}, \beta_{\ell m}$  sont des fonctions de  $\nu, \vec{r}$  et  $t$ . Nous utilisons de plus la notation:

$$\vec{\nu} = \nu \vec{s} \quad (14.301)$$

de sorte que l'analogie avec le chapitre 12 est complète. On peut donc reprendre les résultats de l'appendice 12-1. En tenant compte des règles d'orthogonalité on a :

$$\int I_\nu d\Omega = 4\pi\alpha_0 \quad (14.302)$$

$$\int \vec{s} I_\nu d\Omega = \frac{4\pi\nu}{3} \vec{\alpha}_1 \quad (14.303)$$

$$\int \vec{s} \vec{s} I_\nu d\Omega = \frac{4\pi\alpha_0}{3} + c\overline{\overline{L_2}} \quad (14.304)$$

On en déduit les relations entre les coefficients d'anisotropie et les grandeurs hydrodynamiques :

$$n_\nu = \frac{4\pi}{ch\nu} \alpha_0 \quad (14.305)$$

$$\vec{J}_\nu = \frac{4\pi}{3h} \vec{\alpha}_1 \quad (14.306)$$

$$\vec{G}_\nu = \frac{4\pi\nu}{3c^2} \vec{\alpha}_1 \quad (14.307)$$

$$\overline{\overline{T}}_\nu = \frac{4\pi}{3c} \alpha_0 \overline{\overline{\delta}} + \overline{\overline{L_2}} \quad (14.308)$$

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} \alpha_0 \quad (14.309)$$

$$\vec{F}_\nu = \frac{4\pi\nu}{3} \vec{\alpha}_1 \quad (14.310)$$

Remarquons que  $\overline{\overline{L_2}}$  dans les équations (14.304) et (14.308) est un tenseur produit par les anisotropies d'ordre  $\ell = 2$ . Nous ne l'avons pas écrit explicitement parce que nous nous limitons en général au cas des champs de radiation presque isotropes, pour lesquels ce terme est négligeable.

## 14.12 Problèmes

### P14-1 \*Champs de convection

a) Montrer à l'aide de la transformation de Lorentz que les champs de convection pour une particule animée d'un mouvement uniforme s'écrivent :

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0(\vec{r}_0) \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (14.311)$$

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_1$$

où  $\varphi$  est l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{r}_0$ , et  $E_0(\vec{r}_0)$  la limite petite vitesse de  $\vec{E}_1$  :

$$\vec{E}_0(\vec{r}_0) = \frac{9}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0}{r_0} \frac{1}{r_0^2} \tag{14.312}$$

- b) Montrer à l'aide d'une simple manipulation trigonométrique que la formule ci-dessus est équivalente à la formule (14.5).

### P14-2 Refroidissement par rayonnement cyclotron

- a) Si le rayonnement cyclotron est le seul mécanisme de refroidissement, montrer que la décroissance de la température électronique est donnée par :

$$T_e(t) = T_e(0)e^{-t/\tau_c}$$

et calculer  $\tau_c$ . (On supposera que la fonction de distribution des vitesses électroniques reste isotrope.)

Calculer la valeur du champ magnétique pour laquelle le taux de refroidissement serait de 100% par période cyclotron.

- b) Écrire une condition simple pour que la fonction de distribution des vitesses reste de forme constante. Évaluer la situation dans le cas des plasmas thermonucléaires confinés par un champ magnétique : introduisant le paramètre de confinement magnétique  $\beta$ , montrer que la condition d'isotropie peut s'écrire :

$$T < 3 \cdot 10^8 (\beta \ln \Lambda)^{1/2} \quad (\text{SI})$$

et que ceci est habituellement satisfait dans des situations courantes.

### P14-3 Pertes d'énergie dans les collisions $e-o$

Pour comparer l'énergie totale émise pendant une collision  $e-o$  et l'énergie initiale de l'électron, on considère le cas d'un neutre produisant un potentiel répulsif de la forme  $\varphi = A/r^n$ . On considère le cas spécial d'une collision de front (paramètre d'impact = 0)

- a) Montrer que l'énergie totale rayonnée  $\Delta u$  est liée à l'énergie initiale  $u$  par la relation :

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{2^{3/2} n^2}{3} \alpha^2 \left( \frac{u}{m_e c^2} \right)^{1/2} \frac{a_0}{r_0} J$$

où  $\alpha = 1/137$ ,  $a_0$  est le rayon de la première orbite de Bohr,  $r_0$  est la distance minimale d'approche, et

$$J = \int_0^1 \frac{x^n dx}{(1-x^n)^{1/2}}$$

- b) Montrer en utilisant les tables d'intégrales que :

$$J = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(2 + \frac{1}{n}\right) \Gamma(1/2)}{\Gamma(5/2 + n)}$$

En évaluant  $J$  et les autres facteurs dans  $\Delta u/u$ , montrer que ce rapport est en général beaucoup plus petit que l'unité.

### P14-4 Bremsstrahlung électron-neutre

On considère un gaz faiblement ionisé où les distributions de vitesses des électrons et des neutres sont maxwelliennes (températures  $T_e$  et  $T_o$ ).

- Calculer la puissance totale  $W_{\text{rad}}$  rayonnée par une unité de volume du gaz du fait du bremsstrahlung électron-neutre [on partira de la formule (14.49) et d'une approximation linéaire tirée des résultats de la figure 14.8].
- Calculer la puissance totale  $W_{\text{coll}}$  perdue par une unité de volume du gaz d'électrons du fait des collisions élastiques électron-neutre [on partira de la formule (12.191)].
- Former le rapport  $W_{\text{rad}}/W_{\text{coll}}$  et l'exprimer en fonction des rapports sans dimensions  $m_e/m_o$ ,  $T_e/T_o$ ,  $\kappa T_e/m_e c^2$  et  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ .
- Montrer que l'on a en général  $W_{\text{rad}} \ll W_{\text{coll}}$  sauf si  $T_e$  est très voisin de  $T_o$ .

### P14-5 Opérateur de Lorentz pour $h\nu-e$

Appliquer les formules du chapitre 12 au cas des collisions  $h\nu-e$ , et calculer les deux premières fréquences de relaxation des photons [on partira de la formule (14.203)].

### P14-6 Libre parcours moyen de Rosseland

- En posant  $u = h\nu/\kappa T$  montrer que la formule (14.249) peut se mettre sous la forme :

$$l_R = \int_0^\infty l'_\nu du \quad (14.313)$$

où  $l'_\nu$  est le libre parcours moyen des photons et :

$$G(u) = (15/4\pi^4) \frac{u^4 \exp -u}{(1 - \exp -u)^2} \quad (14.314)$$

- Montrer que ces formules peuvent aussi s'écrire en fonction du coefficient d'absorption  $\kappa_\nu$  sous la forme :

$$l_R = \int_0^\infty 1/\kappa_\nu G'(u) du \quad (14.315)$$

avec :

$$G'(u) = (15/4\pi^4) \frac{u^4 \exp -u}{(1 - \exp -u)^3} \quad (14.316)$$

### P14-7 \*Opérateur de Boltzmann avec effets stimulés

On peut rechercher une généralisation de l'équation de Boltzmann (cf. par exemple [252, p. 132]), tenant compte des effets de statistique quantique. Pour le cas des collisions photon-électron, cette équation de Boltzmann généralisée prend la forme :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + c \vec{s} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}} + (\vec{X}_e/m_e) \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \vec{v}_e} = J_\nu(f_e) \quad (14.317)$$

avec :

$$J_\nu(f_e) = c \int \left\{ [1 + h^3 f_\nu] f'_\nu f'_e [1 - h^3 f_e] - [1 + h^3 f'_\nu] f_\nu f_e [1 - h^3 f'_e] \right\} \times \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \frac{\nu_0}{\nu} \sigma(\nu_0, \chi_0) d\Omega'_0 \nu^2 d\nu d\Omega \quad (14.318)$$



et :

$$\sigma(0, \chi_0) \equiv \sigma(\chi_0) = \frac{r_0^2}{2}(1 + \cos^2 \chi_0) \quad (14.319)$$

- a) Rattacher ces formules à celles des paragraphes 14.8.3 et ??c).
- b) Expliquer la signification physique des facteurs en  $1 \pm h^3 \dots$
- c) Montrer que dans les plasmas gazeux les termes en  $-h^3 \dots$  sont négligeables.

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

# Bibliographie

## [RÉFÉRENCES DES CHAPITRES]

### [Chapitre 1 : Gaz ionisés et plasmas]

- [1] I. Langmuir, *Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.*, **14**, 627 (1928)
- [1b] M.N. Saha, *Phil. Mag.*, **40**, 472 (1920) et *Proc. Roy. Soc. London*, **A99**, 135 (1921)
- [1c] Lord Rayleigh, *Phil. Mag.*, **11**, 117 (1906)
- [1d] F.M. Penning, *Nature*, **118**, 301 (1926) et *Physica*, **6**, 241 (1926)
- [1e] L. Tonks, I. Langmuir, *Phys. Rev.*, **33**, 195 (1929)
- [1f] J.M. Dawson, *Phys. Rev.*, **113**, 389 (1959)
- [1g] H.M. Schneider, *Phys. Fluids*, **9**, 2298 (1966)

### [Chapitre 2 : Trajectoires dans un champ magnétique]

- [2] T. G. Northrop, *The Adiabatic Motion of Charged Particles*, Interscience, New York (1963)
- [2b] R. Kulsrud, *Phys. Rev.*, **106**, 205 (1957)
- [3] A. I. Morozov, L. S. Soloviev, *Reviews of Plasma Physics*, A. Leontovich Ed., **2**, 201 (1966)
- [4] E. Fermi, *Astrophys. J.*, **119**, 1 (1954)
- [5] A.L. Peratt, *Physics of the Plasma Universe*, Springer-Verlag, New York (1992)
- [6] M. Bloom, M. Rigglin, *Canadian J. Phys.*, **52**, 436 (1974)
- [7] P. Louvet, Review of Isotope separation plasma processes, *2nd Workshop on separation phenomena in liquids and gases*, Versailles (1989)

### [Chapitre 3 : Collisions élastiques]

- [8] H. E. Wilhelm, *Phys. Rev.*, **187**, 382 (1969)
- [9] R. Marshak, *Ann. N. Y. Acad. Science*, **41**, 49 (1941)
- [10] L. S. Frost, A. V. Phelps, *Phys. Rev.*, **136**, 1538 (1964)
- [11] R. W. Crompton, *Aust. J. Phys.*, **22**, 715 (1969)
- [12] A. L. Gilardini, *Low energy Electron Collisions in Gases*, Wiley, New York (1973)
- [13] T.F. O'Malley, *Phys. Rev.*, **130**, 1020 (1963)

### [Chapitre 4 : Collisions inélastiques]

- [14] J. W. Gallagher, *JILA Data Center*, Campus Box 440, Université du Colorado, Boulder, Colorado 80309, USA

- [15] R. A. Phaneuf, *ORNL Data Center*, Bldg. 6003, Oak Ridge National Laboratory, P. O. Box X, Oak Ridge, Tenn. 37830, USA
- [16] J.-L. Delcroix, *GAPHYOR Handbook*, **92-1**, GAPHYOR Data Center, Bat. 212, Université Paris-Sud 91405, Orsay, France (1992)
- [17] H. Tawara, *Research Information Center, Institute of Plasma Physics*, Nagoya Univ., Nagoya, 464 Japon
- [18] Y. Nakai, *Nuclear Data Center, Japan Atomic Energy Research Institute (JAERI)*, Tokai-Mura, Naka-Gun, Ibaraki-Ken 319-11, Japon
- [19] L.M. Biberman, V.S. Vorob'ev, I.T. Yakubov, *Kinetics of Nonequilibrium, Low-Temperature, Plasmas*, Consultants Bureau, Plenum, New York (1987)
- [20] H. Tawara, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **19**, 617 (1990)
- [21] A. Phelps, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **19**, 653 (1990)
- [22] T. W. Shyn, S. Y. Cho, *Phys. Rev. A*, **40**, 1315 (1989)
- [23] S. Szucs, M. Karemera, M. Terao, F. Brouillard, *J. Phys. B*, **17**, 1613 (1984)
- [24] Schiavone, *Chem. Phys. US*, **70**, 4468 (1979)
- [25] H.T. Hunter, M.I. Kirkpatrick, I. Alvarez, C. Cisneros, R.A. Phaneuf, *Atomic Data for Fusion*, *ORNL-6086*, C. F. Barnett Ed., vol. 1 (1990)
- [26] J.P. Hansen, *Phys. Rev. A. US*, **44**, 6130 (1991)
- [27] T. Mukoyama, *Phys. Rev. A. US*, **40**, 6686 (1989)
- [28] Gravielle, *Phys. Rev. A. US*, **44**, 7299 (1991)
- [29] O Nagy, *Phys. Rev. A. US*, **43**, 5991 (1991)
- [30] H.Tawara, *Atomic data and nuclear data tables*, **32**, 235 (1985)
- [31] G.H. Smith, *Phys. Rev. US*, **44**, 5647 (1991)
- [32] J. Bitner, *Chem. Phys. Lett.*, **143**, 571 (1988)
- [33] K.A. Smith, *Int Conf. phys. électr. atom. Coll (Contr. pap.)*, 681 (1987)
- [34] T.J. Park, *J. Chem. Phys.*, **91**, 974 (1989)
- [35] S. Anderson, *J. Chem. Phys.*, **75**, 2153 (1981)
- [36] D. Madison, *Phys. Rev. A*, **43**, 304 (1991)
- [37] W.H. Soon, *Phys. Rev. A*, **43**, 723 (1991)
- [38] R.K. Jones, *Phys. Rev. A*, **31**, 2898 (1985)
- [39] E. Rille, *Phys. Rev. A*, **29**, 521 (1984)

**[Chapitre 5 : Propriétés macroscopiques des gaz faiblement ionisés]**

- [40] L. G. H. Huxley, R. W. Crompton, *The Diffusion and Drift of Electrons in Gases*, Wiley, New York (1974)
- [41] E. W. McDaniel, *Collision phenomena in ionized gases*, Wiley, New York (1964)
- [42] J. L. Pack, *Phys. Rev*, **127**, 2084 (1962)
- [43] E. W. McDaniel, E. A. Mason, *The Mobility and Diffusion of Ions in Gases*, Wiley, New York (1973)
- [44] H. W. Ellis, R. Y. Pai, E. W. McDaniel, E. A. Mason, L. A. Viehland, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **17**, 177 (1976)
- [45] H. W. Ellis, E. W. McDaniel, D. L. Albritton, L. A. Viehland, S. L. Lin, E. A. Mason, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **22**, 179 (1978)
- [46] H. W. Ellis, M. G. Thackston, E. W. McDaniel, E. A. Mason, *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, **31**, 113 (1984)

- [47] J. B. Hasted, *Physics of Atomic Collisions, 2nd ed.*, American Elsevier, New York (1972)
- [48] H. J. Oskam, *Philips Research Reports*, **13**, 335 (1958)
- [49] L. Tonks, I. Langmuir, *Phys. Rev.*, **36**, 456 (1929)
- [50] S. A. Self, H. N. Ewald, *Physics of Fluids*, **9**, 2486 (1966)
- [51] H. B. Valentini, *Plasmaphysik*, **3**, 151 (1979)
- [52] M. Hoyaux, *Revue Générale de l'Électricité*, **60**, 279 et 317 (1951)
- [53] M. Hoyaux, *Arc Physics*, Springer-Verlag, New York (1968)

**[Chapitre 6 : Faisceaux d'électrons : ondes et instabilités électrostatiques]**

- [54] W. C. Hahn, *Gen. Elec. Rev.* **42**, 258 (1939)
- [55] S. Ramo, *Phys. Rev.*, **56**, 276 (1939) et *Proc. IRE*, **27**, 757 (1939)
- [56] L. J. Chu. Il est admis que le concept de flux d'énergie négative (flux de puissance) dans les perturbations de petite amplitude d'un faisceau d'électrons a été présenté par L. J. Chu à la conférence annuelle de l'I.R.E. "Electron Tube Research" à Durham, NH, USA en 1951, mais n'a jamais été publié par lui. Ce fut le point de départ du développement de la théorie du flux d'énergie de perturbation pour un grand nombre de générateurs et amplificateurs hyper-fréquences qui utilisent des faisceaux d'électrons. Pour le concept d'énergie négative dans les ondes sur les faisceaux d'électrons, cf. aussi [64].
- [57] A. Bers, P. Penfield Jr., *I. R. E. Trans.*, **ED-9**, 12 (1962)
- [58] J. D. Lawson, *The Physics of Charged Particle Beams*, 2<sup>e</sup> édition, chapitre 6, Clarendon Press, Oxford (1988)
- [59] C. C. Cutler, C. F. Quate, *Phys. Rev.*, **80**, 875 (1950)
- [60] A. Bers, "Space-Time Evolution of Plasma Instabilities : Absolute and Convective", in *Handbook of Plasma Physics* (M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, Gen. Eds.), Vol. 1, *Basic Plasma Physics*, (A. A. Galeev, R. N. Sudan, Vol. Eds.), Chapitre 3.2, pp. 451-517, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1983)
- [61] C. K. Birdsall, G. R. Brewer, A. V. Haeff, *Proc. I. R. E.*, **41**, 865 (1953); C.K. Birdsall, J.R. Whinnery, *J. Appl. Phys.*, **24**, 314 (1953)
- [62] H. A. Haus, in *Proc. P. I. B. Symp. on Electronic Waveguides*, **Vol. VIII**, pp. 89-132, Polytechnic Press, Brooklyn, New York (1958)
- [63] W. H. Louisell, *Coupled Modes and Parametric Electronics*, Wiley, New York (1960)
- [64] P. A. Sturrock, *J. Appl. Physics*, **31**, 2052 (1960)
- [64b] A. Arsenjewa-Heil, O. Heil, *Z. Phys.*, **95**, 752 (1935)
- [64c] R. H. Varian, S. F. Varian, *J. Appl. Phys.*, **10**, 321 (1939)
- [65] J. E. Rowe, *Nonlinear Electron Wave Interaction Phenomena*, Academic Press, Boston (1965)
- [66] J. R. Cary, D. S. Lemmons, *J. Appl. Phys.*, **53**, 3303 (1982)
- [67] J. R. Pierce, *Appl. Phys.*, **15**, 721 (1944)
- [68] S. Kuhn, M. Hörhager, *J. Appl. Phys.*, **60**, 1952 (1986)
- [69] B. B. Godfrey, *Phys. Fluids*, **30**, 1553 (1987)
- [70] J. J. Miller, E. Rostas, *Helv. Phys. Acta*, **13**, 435 (1940)
- [71] J. R. Pierce, *Proc. I.R.E.*, **33**, 112 (1945)
- [72] J. R. Pierce, W. G. Sheperd, *Bell. Syst. Tech. Journal*, **26**, 460 (1947)

- [73] S. Humphries Jr., *Charged Particle Beams*, Wiley, New York (1990)
- [74] R. B. Miller, *Intense Charged Particle Beams*, Plenum Press, New York (1982)
- [74b] V. L. Granatstein, I. Alexeff Eds., *High Power Microwave Sources*, Artech House, Boston (1987)

**[Chapitre 7 : Instabilités de courant dans les plasmas]**

- [75] D. Bohm, E. P. Gross, *Phys. Rev.*, **75**, 1851 (1949)
- [76] A. I. Akhiezer, Ya. B. Fainberg, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **69**, 555 (1949)
- [77] A. I. Akhiezer, Ya. B. Fainberg, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **21**, 1262 (1951)
- [78] J. A. Davis, A. Bers, in *Proc. Symp. on Turbulence of Fluids and Plasmas* (1968), Microwave Research Institute Symposia Series, Vol. XVIII, 87, Polytechnic Press of P. I. B. (distribué par Interscience-Wiley), Brooklyn, New York (1969)
- [79] J. R. Pierce, *Jour. Appl. Phys.*, **19**, 231 (1948)
- [80] G. I. Budker, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **107**, 807 (1956), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **1**, 218 (1957); *Sov. Phys. Dokl.*, 218 (1957)
- [81] O. Buneman, *Phys. Rev.*, **115**, 503 (1959).
- [82] O. Ishihara, A. Hirose, A. B. Langdon, *Phys. Fluids*, **24**, 452 (1981)
- [83] A. Hirose, O. Ishihara, A. B. Langdon, *Phys. Fluids*, **25**, 610 (1982)
- [84] A. V. Haeff, *Proc. I. R. E.*, **37**, 1 (1949)
- [85] A. V. Haeff, *Phys. Rev.*, **74**, 1532 (1948)
- [86] J. R. Pierce, W. B. Hebenstreit, *B. S. T. J.*, **28**, 33 (1949)
- [87] R. Q. Twiss, *Proc. Phys. Soc. London*, **B64**, 654 (1951)
- [88] A. Wendt, *Memo No. UCC/ERL M85/45*, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, 28 mai 1985
- [89] R. C. Davidson et al., *Phys. Rev. Lett.*, **24**, 579 (1970)
- [90] E. S. Weibel, *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 83 (1959)
- [91] R. C. Davidson et al., *Phys. Fluids*, **15**, 317 (1972)
- [92] I. Langmuir, *Phys. Rev.*, **26**, 585 (1925) et *Proc. U.S. Nat. Acad. Sci.*, **14**, 627 (1928)
- [93] I. Alexeff, J. R. Roth, J. D. Birdwell, *Phys. Fluids*, **24**, 1348 (1981)

**[Chapitre 8 : Équations cinétiques]**

- [94] J. Yvon, *Les Corrélations et l'entropie*, Dunod, Paris (1966)
- [95] L. Boltzmann, *Leçons sur la théorie des gaz*, Gauthier-Villars, Paris (1902)
- [96] R. L. Liboff, N. Rostoker, *Kinetic Equations*, Gordon and Breach, New York (1971)
- [97] Ta-You Wu, *Kinetic Equations of Gases and Plasmas*, Addison-Wesley, Reading Mass. (1966)
- [98] R. L. Liboff, *Introduction to the Theory of Kinetic Equations*, Wiley, New York (1969)
- [99] Y. Rocard, *Thermodynamique*, Masson, Paris (1952)
- [100] J. Yvon, *La Théorie statistique des fluides et l'équation d'état, Actualités scientifiques et industrielles*, **203**, Hermann, Paris (1935)
- [101] S. Harris. *An introduction to the theory of the Boltzmann equation*, Holt, New York (1981)
- [102] Y. Pomeau, P. Résibois, *Physics Reports*, **19C-2**, 63 (1975)

[103] Gunton, *Introduction to the theory of metastable and unstable states*, Springer-Verlag, Berlin (1983)

[104] J. P. Babuel-Peyrissac, *Équations Cinétiques des Fluides et des Plasmas*, Gordon and Breach, Paris (1974)

[105] J. Yvon, *J. Phys. Rad.*, **19**, 733 (1958)

**[Chapitre 9 : Hydrodynamique et magnétohydrodynamique]**

[106] O. Buneman, *Phys. of Fluids*, **4**, 669 (1961)

[107] J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, D. Quemada, *Nuclear Fusion, Suppl.*, **2**, 411 (1962)

[108] J.A. Shercliff, *A Textbook of Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, Oxford (1965)

[109] A. Schluter, Plasma in Magnetfeld, *Ann. Physik*, **6-10**, 422 (1952)

[110] L. Spitzer, *Astrophys. J.*, **116**, 299 (1952)

[111] L. Tonks, *Phys. Rev.*, **97**, 1443 (1955)

**[Chapitre 10 : Théorie cinétique de Vlasov-Landau]**

[112] L. D. Landau, *Jour. Phys. USSR*, **10**, 25 (1946) ; reproduit dans *Collected Papers of L. D. Landau*, D. ter Haar Ed., Gordon and Breach, New York (1967)

[113] J. Dawson, *Phys. Fluids*, **4**, 869 (1961)

[114] L. Brillouin, *Congrès International d'Electricité, Paris 1932*, **2**, 739, Gauthier-Villars, Paris (1933)

[115] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, chapitres IV et V, Academic Press, New York (1960)

[116] J. D. Jackson, *Jour. Nucl. Energy, Part C*, **1**, 171 (1960)

[117] B. D. Fried, S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function*, Academic Press, New York (1961)

[118] J. H. Malmberg, C. B. Wharton, *Phys. Rev. Letters*, **17**, 175 (1966)

[119] H. Derfler, T. C. Simonen, *Phys. Rev. Letters*, **17**, 172 (1966)

[120] B. D. Fried, R. W. Gould, *Phys. Fluids*, **4**, 139 (1961)

[121] A. Y. Wong, N. D'Angelo, R. W. Motley, *Phys. Rev. Letters*, **9**, 415 (1962)

[122] R. W. Gould, *Phys. Rev. A*, **136**, 991 (1964)

[123] G. M. Sessler, G. A. Pearson, *Phys. Rev.*, **162**, 108 (1967)

[124] R. W. Motley, *Q-Machines*, Academic Press, New York (1975)

[125] J. N. Hayes, *Phys. Fluids*, **4**, 1387 (1961).

[126] A. A. Vlasov, *Zhurnal Eksp. i Teoret. Fiz.*, **8**, 291 (1938); et *Jour. Phys. (URSS)*, **9**, 25 (1945)

[127] W. D. Jones, H. J. Doucet, J. M. Buzzi, *An Introduction to the Linear Theories and Methods of Electrostatic Waves in Plasmas*, Plenum Press, New York (1985)

[128] N. G. van Kampen, *Physica*, **21**, 949 (1955)

[129] K. M. Case, *Ann. Physics*, **7**, 349 (1959)

[130] R. J. Mason, *Jour. Math. Phys.*, **9** 868 (1968)

[131] K. M. Case, *Phys. Fluids*, **21**, 249 (1978)

[132] F. C. Shure, *Plasma Phys. (Jour. of Nucl. Energy, Part C)*, **6**, 1 (1964)

[133] K. M. Case, *Phys. Fluids*, **8**, 96 (1965); J. D. Crawford, P. D. Hislop, *Ann. Phys.*, **189**, 265 (1989)

- [134] G. Bateman, M. D. Kruskal, *Phys. Fluids*, **15**, 277 (1972)
- [135] D. R. Cook, A. N. Kaufman, E. R. Tracy, T. Flå, *Phys. Lett. A*, **175**, 326 (1993)
- [136] L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, *Phys. Rev.*, **94**, 511 (1954) ; E. P. Gross, M. Krook, *Phys. Rev.*, **102**, 593 (1956)
- [136b] J. M. Green, *Phys. Fluids*, **16**, 2022 (1973)
- [137] A. A. Vedenov, in *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 3, (M. A. Leontovich Ed.), p. 248, Consultants Bureau, New York (1967)
- [138] A. Lenard, I. B. Bernstein, *Phys. Rev.*, **112**, 1456 (1958)
- [139] R. M. Kulsrud, C. S. Shen, *Phys. Fluids*, **9**, 177 (1966)
- [140] T.-Y. Huang, L. Chen, A. Hasegawa, *Phys. Fluids*, **17**, 1744 (1974)
- [141] E. M. Epperlein, R. W. Short, A. Simon, *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1765 (1992)
- [142] E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, (quatrième édition 1937), Chapitre IV, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Grande-Bretagne (1988)
- [143] T. M. O'Neil, *Phys. Fluids*, **8**, 2255 (1965)
- [144] V. E. Zakharov, V. I. Karpman, *Soviet Physics JETP*, **16**, 351 (1963)
- [145] W. E. Drummond, D. Pines, *Nuclear Fusion Suppl.*, **Pt. 3**, 1049 (1962) et *Ann. Phys.*, New York, **28**, 478 (1964) ; A. A. Vedenov, E. P. Velikhov, R. Z. Sagdeev, *Nuclear Fusion Suppl.*, **Pt. 2**, 465 (1962)
- [146] D. Pesme, G. Laval, R. Pellat, *J. de Phys.*, **8**, C13-213 (1977)
- [147] A. N. Kaufman, *J. Plasma Phys.*, **8**, 1 (1972)
- [148] I. B. Bernstein, F. Engelmann, *Phys. Fluids*, **9**, 937 (1966)
- [149] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York (1983) ; G. M. Zaslavsky, *Chaos in Dynamic Systems*, Harwood Academic Publishers, New York (1985)
- [150] H. Poincaré, *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Paris (1892) et Dover, New York (1957)
- [151] G. M. Zaslavsky, N. N. Filonenko, *Sov. Phys. JETP*, **27**, 851 (1968) ; A. B. Rechester, T. H. Stix, *Phys. Rev. A*, **19**, 1656 (1979)
- [152] B. V. Chirikov, *Plasma Phys. (J.N.E. Pt. C)*, **1**, 253 (1960) ; *Phys. Reports*, **52**, 265 (1979)
- [153] B. V. Chirikov, *USSR Academy of Sciences Report 267* (Traduit par A. T. Sanders, CERN Translation 71-40, Genève) Novosibirsk (1969) ; J. B. Taylor, in *Culham Lab. Prog. Report CLM-PR 12* (1969)
- [154] J. M. Greene, *J. Math. Phys.*, **20**, 1183 (1979)
- [155] A. B. Rechester, R. B. White, *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 1586 (1980) ; A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, R. B. White, *Phys. Rev. A*, **23**, 2664 (1981)
- [156] V. Fuchs, V. Krapchev, A. Ram, A. Bers, *Physica D*, **14**, 141 (1985) ; S. J. Tanaka, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **29**, 1067 (1987) ; A. K. Ram, A. Bers, K. Kupfer, *Phys. Lett. A*, **138**, 288 (1989)
- [157] N. J. Fisch, A. Bers, *Plasma Research Report PRR 77/31*, Research Laboratory of Electronics, M.I.T., Cambridge, Décembre 1977, et *Proc. Third Topical Conf. on RF Plasma Heating*, Calif. Inst. of Technology, Pasadena, Californie, Janvier 1978 ; N. J. Fisch, *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 873 (1978), errata **42**, 410 (1979) ; *Rev. Mod. Phys.*, **59**, 175 (1987)



- [158] C. F. F. Karney, N. J. Fisch, *Phys. Fluids*, **22**, 1817 (1979) ; V. Fuchs, R. A. Cairns, M. M. Shoucri, K. Hizanidis, A. Bers, *Phys. Fluids*, **29**, 2937 (1986) ; P. T. Bonoli, R. C. Englade, *Phys. Fluids*, **29**, 2937 (1986) ; C. F. F. Karney, *Comp. Phys. Repts.*, **4**, 183 (1986)
- [159] T. Imai *et al.*, *Nucl. Fusion*, **28**, 1341 (1988)
- [160] R. Z. Sagdeev, A. A. Galeev, *Nonlinear Plasma Theory* (Révisé et édité par T. M. O'Neil et D. L. Book), W. A. Benjamin, New York (1969)
- [161] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Academic Press, New York (1972)
- [162] D. J. Kaup, A. Reiman, A. Bers, *Rev. Mod. Phys.*, **51**, 915 (1979)
- [163] J. Weiland, H. Wilhelmson, *Coherent Non-Linear Interaction of Waves in Plasmas*, Pergamon Press, Oxford (1977)
- [164] W. L. Kruer, *The Physics of Laser Plasma Interactions*, Addison-Wesley, Reading Mass. (1988) ; R. Pellat, in *Laser-Plasma Interaction, Les Houches 1980*, North-Holland, Amsterdam (1982) ; K. Mima, K. Nishikawa, in *Handbook of Plasma Physics*, vol. 2, chapitre 6.5 (M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, Gen. Eds.) North Holland, Amsterdam (1984) ; H. A. Baldis, E. M. Campbell, W. L. Kruer, in *Handbook of Plasma Physics*, vol. 3, chapitre 9 (M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, Gen. Eds.) North Holland, Amsterdam (1991)
- [165] B. Coppi, M. N. Rosenbluth, R. N. Sudan, *Ann. Phys.*, New York, **55**, 207 (1969)
- [166] A. Bers, D. J. Kaup, A. H. Reiman, *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 182 (1976)
- [167] S. Y. Vyshkind, M. I. Rabinovich, *Sov. Phys. JETP*, **44**, 292 (1976) ; J. Wersinger, J. Finn, E. Ott, *Phys. Fluids*, **23**, 1142 (1980) ; C. Meunier, M. Bussac, G. Laval, *Physica D*, **4**, 236 (1982)
- [168] C. C. Chow, A. Bers, A. K. Ram, *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 3379 (1992)
- [169] M. Camac, A. Kantrowitz, M. M. Litvak, R. Patrick, H. E. Petschek, *Nucl. Fusion Suppl.*, **2**, 423 (1962)
- [170] R. C. Davidson, A. N. Kaufman, *J. Plasma Phys.*, **3**, 97 (1969)
- [171] E. Ott, C. T. Dum, *Phys. Fluids*, **14**, 959 (1971)
- [172] B. B. Kadomtsev, *Plasma Turbulence*, Academic Press, Londres (1965) ; M. N. Rosenbluth, B. Coppi, R. N. Sudan, *Ann. Phys.*, New York, **55**, 248 (1969)
- [173] A. Hasegawa, *Plasma Instabilities and Nonlinear Effects*, Springer-Verlag, New York (1975)
- [174] R. Z. Sagdeev, *Reviews of Plasma Physics*, M. A. Leontóvich Ed., Consultants Bureau, New York (1966)
- [175] H. Washimi, T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.*, **17**, 996 (1966)
- [176] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1095 (1967)
- [177] V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, **35**, 908 (1972) et *Handbook of Plasma Physics*, vol. 2, chapitre 5.3 (M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev, Gen. Eds.) North Holland, Amsterdam (1984) ; S. G. Thornhill, D. ter Haar, *Phys. Reports*, **43**, 43 (1978)
- [178] D. R. Nicholson, *Introduction to Plasma Theory*, John Wiley & Sons, New York (1983)
- [179] K. Nishikawa, *J. Phys. Soc. Japan*, **24**, 916 et 1152 (1968)

- [180] R. W. Gould, T. M. O'Neil, J. H. Malmberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 219 (1967) ; T. M. O'Neil, R. W. Gould, *Phys. Fluids*, **11**, 134 (1968)
- [181] J. H. Malmberg, C. B. Wharton, R. W. Gould, T. M. O'Neil, *Phys. Rev. Lett.*, **20**, 95 (1968); H. Ikezi, N. Takahashi, K. Nishikawa, *Phys. Fluids*, **12**, 853 (1969)
- [182] B. D. Fried, C. L. Hendrick, J. McCune, *Phys. Fluids*, **11**, 249 (1968)
- [183] P. C. de Jagher, F. W. Sluijter, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **29**, 677 (1987)
- [184] V. Heinz, *Phys. Lett. A*, **109**, 385 (1985)

**[Chapitre 11 : Théorie cinétique des instabilités dans les plasmas non magnétisés]**

- [185] I. B. Bernstein, *Phys. Rev.*, **109**, 10 (Appendice 1 : Théorème de Newcomb) (1958)
- [186] C. S. Gardner, *Phys. Fluids*, **6**, 839 (1963)
- [187] T. K. Fowler, *J. Math. Phys.*, **1**, 359, (1963)
- [188] T. K. Fowler, *Advances in Plasma Physics*, A. Simon, W. B. Thompson Eds., **1**, 201, Wiley-Interscience, New York (1968)
- [189] A. B. Mikhailovskii, *Theory of Plasma Instabilities*, **1**, Consultants Bureau-Plenum Publ. Corp., New York (1974)
- [190] R. C. Davidson in *Handbook of Plasma Physics*, M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev Eds., *Volume 1 : Basic Plasma Physics*, A. A. et R. N. Sudan Eds., Chapitre 3.3, pp. 519-585, North-Holland, Amsterdam (1983)
- [191] O. Penrose, *Phys. Fluids*, **3**, 258 (1960)
- [192] H. Nyquist, *B. S. T. J.*, **11**, 126 (1932)
- [193] R. J. Briggs, in *Advances in Plasma Physics*, A. Simon, W. B. Thompson Eds., **4**, 43 John Wiley & Sons, New York (1971)
- [194] A. Jackson, *Phys. Fluids*, **3**, 786 (1960)
- [195] G. Francis, A. K. Ram, A. Bers, *Phys. Fluids*, **29**, 255 (1986)
- [196] R. J. Briggs, A. Bers, *Proceedings of the Fourth Symposium on the Engineering Aspects of MHD*, pp. 23-30, université de Californie, Berkeley (avril 1963)
- [197] T. M. O'Neil, J. H. Malmberg, *Phys. Fluids*, **11**, 1754 (1968)
- [198] S. A. Self, M. M. Shoucri, F. U. Crawford, *Jour. Appl. Physics*, **42**, 704 (1971)
- [199] C. T. Dum, *Jour. Geophys. Res.*, **94**, 2429 (1989)
- [200] H. E. Singhaus, *Phys. Fluids*, **7**, 1534 (1964)
- [201] C. Roberson, K. U. Gentle, *Phys. Fluids*, **14**, 2462 (1971)
- [202] V. E. Zakharov, *Sov. Phys. JETP*, **35**, 908 (1972)
- [203] P. Y. Cheung, A. Y. Uong, *Phys. Fluids*, **28**, 1538 (1985)
- [204] M. V. Goldman, *Rev. Mod. Physics*, **56**, 709 (1984)
- [205] T. E. Stringer, *Plasma Physics*, **6**, 267 (1964)
- [206] *Wave Instabilities in Space Plasmas*, P. J. Palmadesso, K. Papadopoulos Eds., Reidel, Dordrecht (1979)
- [207] T. Sato, H. Okuda, *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 740 (1980)

- [208] A. Hasegawa, T. Sato, *Phys. Fluids*, **25**, 632 (1982)
- [209] R. C. Davidson, D. A. Hammer, I. Haber, C. E. Wagner, *Phys. Fluids*, **15**, 317 (1972)
- [210] R. Lee, M. Lampe, *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 1390 (1973)
- [211] T. P. Hughes, A. T. Drobot, E. Ott, *Phys. Rev. Lett.*, **47**, 1529 (1981)

**[Chapitre 12 : Théorie cinétique des gaz faiblement ionisés]**

- [212] M. Bayet, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, *J. Phys. Rad.*, **15**, 795 (1954)
- [213] M. Bayet, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, *J. Phys. Rad.*, **16**, 174 (1955)
- [214] B. L. Moiseiwitsch, in *Atomic and Molecular Processes* D., R. Bates Ed., pp. 281-332, Academic Press, Londres (1962)
- [215] W. P. Allis, H. A. Haus, *J. Appl. Phys.*, **45**, 781 (1974)
- [216] W. P. Allis, *Note Technique ONERA*, **234**, Châtillon, France (1974)
- [217] E. Moreau, J. Salmon, *J. Phys. Rad.*, **21**, 217 (1960)
- [218] M. Bayet, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, *J. Phys. Rad.*, **17**, 923 (1956)
- [219] J. Arzac, J. Basquin, J.-L. Delcroix, J. F. Denisse, J. Salmon, *J. Phys. Rad.*, **17**, 1005 (1956)
- [220] W. P. Allis, *Handbuch der Physik*, **21**, Springer-Verlag, Berlin (1956)
- [221] D. Davydov, *Physik Zeits. Sowjetunion* **8**, 59 (1935)
- [222] H. Margenau, *Phys. Rev.*, **69**, 508 (1946)
- [223] R. Jancel, T. Kahan, *Nuovo Cimento*, **12**, 573 (1954)
- [224] L. C. Pitchford, S.V. O'Neil, J. R. Rumble, *Phys. Rev. A*, **23**, 294 (1981)
- [225] W. P. Allis, *Phys. Rev. A*, **26**, 1704 (1982)
- [226] M. A. Uman, *Phys. Rev. A*, **133**, 1266 (1964)
- [227] J. H. Jeans, *The Dynamical Theory of Gases*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1921)

**[Chapitre 13 : Théorie cinétique collisionnelle des plasmas]**

- [228] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1 (1943)
- [229] S. Gasiorowicz, M. Neumann, R.J. Ridell, *Phys. Rev.*, **101**, 922 (1956)
- [230] W. McDonald, M. N. Rosenbluth, D. L. Judd, *Phys. Rev.*, **107**, 1 (1957)
- [231] W. McDonald, M. N. Rosenbluth, D. L. Judd, *Phys. Rev.*, **107**, 350 (1957)
- [232] R. S. Cohen, L. Spitzer, P. Routly, *Phys. Rev.*, **80**, 230 (1950)
- [233] L. Spitzer Jr, R. Härm, *Phys. Rev.*, **89**, 977 (1953)
- [234] A. Lenard, *Ann. Phys.*, **3**, 390, New York (1960)
- [235] A. N. Kaufman, in *La théorie des gaz neutres et ionisés*, C. de Witt, J. F. Detoeuf Eds., Hermann, Paris et Wiley, New York (1960)
- [236] H. Dreicer, *Phys. Rev.*, **115**, 238 (1959)
- [237] H. Dreicer, *Phys. Rev.*, **117**, 329 (1960)
- [238] A.V. Gurevitch, *Soviet Phys. J.E.T.P.*, **12**, 904 (1961)
- [239] M.D. Kruskal, I.B. Bernstein *Phys. of Fluids*, **7**, 407 (1964)
- [240] L.A. Ferrare, K.C. Rogers *Phys. of Fluids*, **10**, 1319 (1967)
- [241] H. Knoepfel, D. A. Spong, *Nuclear Fusion*, **19**, 785 (1979)
- [242] S. I. Braginskii, in *Reviews of Plasma Physics*, Vol. 1, M.N. Leontovich Ed., Consultants Bureau, New York (1965)
- [243] S. R. de Groot, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Interscience, New York, Londres (1951)

**[Chapitre 14 : Plasmas et rayonnement]**

- [244] G.A. Boutry, *Optique instrumentale*, Masson, Paris (1946)
- [245] B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, New York (1992)
- [246] T. Holstein, "Low frequency approximation to free-free transition probabilities", *Scientific paper 65-1E2-Gases-P2*, Westinghouse Research Labs, Pittsburgh, Penn. (1965)
- [247] H. R. Griem, "Radiation Processes in Plasmas", in *Handbook of Plasma Physics*, M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev Eds., Volume 1 ; *Basic Plasma Physics I*, A. A. Galeev, R. N. Sudan Eds., pp. 73-113, North-Holland, Amsterdam (1983)
- [248] J. Dawson, C. Oberman, *Physics of Fluids*, **5**, 517 (1962)
- [249] M. A. Heald, C. B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York (1965)
- [250] J. Oxenius, *Kinetic Theory of Particles and Photons*, Springer Series in Electrophysics, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin (1986)
- [251] B. A. Trubnikov, *Reviews of Plasma Physics*, **7**, 345, M. A. Leontovich Ed., Consultants Bureau, New York (1979)
- [252] D. H. Sampson, *Radiative Contributions to Energy and Momentum Transfer in a Gas*, Wiley, New York (1965)
- [253] J. Peyraud, *J. de Phys.*, **29**, 306 (1968)
- [254] Ya. B. Zel'dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Vol. 1, Wallace D. Hayes, Ronald F. Probstein Eds., Academic Press, New York (1966)
- [255] D. Mihalas, B.W. Mihalas, *Foundations of Radiation Hydrodynamics*, Oxford University Press, Oxford (1984)
- [256] G. Mainfray, C. Manus, *Rep. Prog. Phys.*, **54**, 1333 (1991)
- [257] D. Normand *et al.*, *Optics Letters*, **15**, 1400 (1990)
- [258] S. Seznec *et al.*, *Optics Communications*, **87**, 331 (1992)
- [259] C. Rouyer *et al.*, *Optics Letters*, **18**, 214 (1993)
- [260] T. Katsouleas, W. B. Mori, J. M. Dawson, S. Wilks, *Conference on Femtosecond to Nanosecond High-Intensity Lasers and Applications*, *SPIE*, **1229**, 98 (1990)
- [261] H. S. Brandi, T. Lehner, C. Manus, G. Mainfray, *Phys. Rev. E*, **47**, 3780 (1993) ; H.S. Brandi *et al.*, *Phys. Fluids B*, **5**, 35-39 (1993) ; G. Mainfray, C. Manus, in *Progress in Optics*, E. Wolf Ed., **32**, 313, North-Holland, Amsterdam (1993)
- [262] J. P. Watteau, *et al.*, *Phys. Fluids B*, **4**, 2217 (1992)
- [263] E.S. Sarachik, G.T. Schappert, *Phys. Rev. D*, **10**, 2738 (1970)
- [264] J. W. Shearer, J. Garrison, J. Wong, J. E. Swain, *Phys. Rev. A*, **8**, 1582 (1973)

## [RÉFÉRENCES D'INTÉRÊT GÉNÉRAL]

## [Mathématiques]

- [265] Whittaker, Watson, *Modern Analysis*, 4ème éd., Cambridge University Press, Cambridge (1958)
- [266] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York (1965)
- [267] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, édition revue et corrigée par A. Jeffrey, p. 1012, Academic Press, New York (1980)
- [268] *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (M. Abramowitz, I. Stegun Eds., dixième édition corrigée, Dover, New York (1972)
- [269] E. Jahnke, F. Emde, *Tables of Functions*, Dover, New York (1945)
- [270] V. N. Faddeyeva, N. M. Terentev, *Tables of Values of the Probability Integral for Complex Arguments*, GITTL, Moscou (1954)
- [271] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, deuxième édition corrigée, p. 277, Oxford University Press, Londres (1952)
- [272] E. T. Copson, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, première édition corrigée, p. 438, Oxford University Press, Londres (1944)
- [273] B. W. Roos, "Analytic Functions and Distributions", in *Physics and Engineering*, John Wiley & Sons, New York (1969)
- [274] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, P. Noordhoff, N. V. Groningen, Hollande (1953)
- [275] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, vol. I et II, Hermann, Paris (1951) ; I. M. Gelfand, G. E. Shilov, *Generalized Functions*, vol. I, Academic Press, New York (1964)
- [276] N. G. van Kampen, B. U. Felderhof, *Theoretical Methods in Plasma Physics*, North-Holland, Amsterdam (1967)

## [Mécanique et Physique statistique]

- [277] J. L. Synge, *The Relativistic Gas*, North Holland, Amsterdam (1957)
- [278] P. M. Morse, *Thermal Physics*, Benjamin, New York (1965)
- [279] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics*, University of Texas Press, Austin (1980)
- [280] L. Landau, E. Lifshitz *Mécanique*, MIR, Moscou (1966)
- [281] L. Landau, E. Lifshitz *Mécanique des Fluides*, MIR, Moscou (1971)
- [282] L. Landau, E. Lifshitz, *Physique statistique*, MIR, Moscou (1967)
- [283] H. Goldstein *Classical mechanics*, édition révisée, Addison-Wesley, New York (1980)
- [284] A. Messiah, *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris (1960)
- [285] T. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, McGraw-Hill, New York (1965)
- [286] S. Chapman, T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, deuxième édition, Cambridge University Press, Cambridge (1952)
- [287] S. Chandrasekhar, *Principles of stellar dynamics*, University of Chicago Press, Chicago (1942)

- [288] E. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*, InterEditions, Paris (1991)

**[Electromagnétisme]**

- [289] H. A. Lorentz, *Theory of Electrons*, deuxième édition, Dover, New York (1952)
- [290] W. K. H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, deuxième édition, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1962)
- [291] G. Fournet, *Électromagnétisme*, Masson, Paris (1980)
- [292] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, deuxième édition, Wiley, New York (1975)

**[Physique atomique et moléculaire]**

- [293] H. G. Kuhn, *Atomic Spectra*, deuxième édition, Longman, Londres (1969)
- [294] G. Herzberg, *Spectra of Diatomic Molecules*, deuxième édition, Van Nostrand, New York (1961)
- [295] A. Sommerfeld, *Atombau und Spectrallinien*, Wellen Mechanik, vol. 2, Fredrick Ungar, New York (1951)
- [296] E. W. Mc Daniel, *Atomic Collisions, Electron and Photon Projectiles*, Wiley, New York (1989)

**[Gaz partiellement ionisés]**

- [297] J.-L. Delcroix, *Physique des Plasmas*, tome 1, Dunod, Paris (1963)
- [298] J.-L. Delcroix, *Plasma Physics*, Wiley, New York (1965)
- [299] A. R. Hochstim, *Kinetic Processes in Gases and Plasmas*, Academic Press, New York (1969)
- [300] S. C. Brown, *Basic Data of Plasma Physics*, deuxième édition, MIT Press (1967)
- [301] M. Bayet, *Physique Electronique des Gaz et des Solides*, Masson, Paris (1958)
- [302] J.-L. Delcroix, *Physique des Plasmas*, tome 2, Dunod, Paris (1966)
- [303] B. E. Cherrington, *Gaseous Electronics and Gas Lasers*, Pergamon Press, Oxford (1979)
- [304] R. J. Rosa, *Magnetohydrodynamic Energy Conversion*, McGraw-Hill, New York (1968)

**[Plasmas complètement ionisés]**

- [305] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, deuxième édition, Plenum Press, New York (1984)
- [306] I. P. Shkarofsky, T. W. Johnston, M. P. Bachynski, *The Particle Kinetics of Plasmas*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1966)
- [307] D.C. Montgomery, D.A. Tidman, *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill, New York (1964)
- [308] R. Balescu, *Transport processes in plasmas, vol. 1 Classical transport theory*, North-Holland, Amsterdam (1988)
- [309] R. Balescu, *Transport processes in plasmas, vol. 2 Neoclassical transport*, North-Holland, Amsterdam (1988)
- [310] H. Alfvén, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, Oxford (1950)

- [311] D. J. Rose, M. Clark, *Plasmas and Controlled Fusion*, Wiley, New York (1961)
- [312] J.-L. Delcroix, *Introduction to the Theory of Ionized Gases*, Interscience, New York (1960)
- [313] L. Spitzer, *Physics of fully ionized gases*, deuxième édition, Wiley, New York (1962)
- [314] R. Balescu, *Statistical mechanics of charged particles*, Interscience-Wiley, Londres (1963)
- [315] G. Bekefi, *Radiation Processes in Plasmas*, Wiley, New York (1966)
- [316] W. B. Thompson, *An Introduction to Plasma Physics*, Pergamon Press, Oxford (1962)
- [317] J. G. Linhart, *Plasma Physics*, Euratom, Bruxelles (1969)
- [318] *Handbook of Plasma Physics*, M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev Eds., Volume 1 : *Basic Plasma Physics I*, A. A. Galeev, R. N. Sudan Eds., North-Holland, Amsterdam (1983)
- [319] G. Ecker, *Theory of Fully Ionized Plasmas*, Academic Press, New York (1972)
- [320] D. L. Book, *NRL Plasma Formulary*, *NRL Publication 0084-4040*, Washington DC (1987)
- [321] Yu. L. Klimontovich, *Statistical Theory of Non-Equilibrium Processes in a Plasma*, Pergamon Press, Oxford (1967)
- [322] S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics—A Statistical Approach*, W. H. Benjamin, New York (1973)

**[SUJETS SPÉCIALISÉS NON TRAITÉS DANS CE LIVRE]**

**[Plasmas denses à fortes corrélations]**

- [323] M. Baus, J. P. Hansen, "Statistical Mechanics of simple Coulomb Systems", *Physics Reports*, **59**, 1 (1980)
- [324] C. Deutsch, Y. Furutani, M. M. Gombert, *Physics Reports*, **69**, 86 (1981)
- [325] S. Ichimaru, H. Iyetomi, S. Tanaka, *Physics Reports*, **149**, 91 (1987)
- [326] C. Deutsch, *Physica Scripta*, **T2**, 192 (1983)
- [327] Y. L. Klimontovich, *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas*, Pergamon Press, Oxford (1982)

**[Fusion nucléaire par confinement magnétique]**

- [328] M. Trocheris Ed., M. M. J. Adam *et al.*, *La Fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique*, Masson, Paris (1987)
- [329] J. G. Cordey, R. J. Goldston, R. R. Parker, *Physics Today*, n° 1, **45**, 22 (janvier 1992)
- [330] J. D. Callen, B. A. Carreras, R. D. Stambaugh, *Physics Today*, n° 1, **45**, 34 (janvier 1992)
- [331] T. J. Dolan, *Fusion Research*, 3 volumes, Pergamon Press, New York (1982)
- [331b] *World Survey of Activities in Controlled Nuclear Fusion* (1991), *Nuclear Fusion*, supplément spécial (1991), International Atomic Energy Agency, Vienne (1991)

**[Fusion nucléaire par confinement inertiel]**

- [332] D. Colombant, C. Deutsch, *La Recherche*, **15**, 157 (1984)
- [333] C. Deutsch, *Annales de physique*, **11**, 1 (1986)
- [334] R. C. Arnold, J. Meyer-Ter-Vehn, *Reports on Progress in Physics*, **50**, 559 (1987)
- [335] J. H. Nucholls, L. Wood, A. Thiessen, G. B. Zimmerman, *Nature*, **239**, 139 (1972)
- [336] J. D. Lindl, R. L. McCrory, M. Campbell, *Physics Today*, **45**, n° 9, 32 (septembre 1992)
- [337] W. J. Hogan, R. Bangerter, G. Kulcinski, *Physics Today*, **45**, n° 9, 42 (septembre 1992)
- [338] R. Dautray, J. P. Watteau, "Énergie thermonucléaire", in *Encyclopædia Universalis*, **22**, 580 (1990)
- [339] R. Dautray, J. P. Watteau Eds., *La Fusion thermonucléaire par laser*, Commissariat à l'Énergie Atomique, Saclay (1994)

**[Décharges dans les gaz]**

- [340] S. C. Brown, *Introduction to Electrical Discharges in Gases*, Wiley, New York (1966)
- [341] B. E. Cherrington, *Gaseous Electronics and Gas Lasers*, Pergamon Press, Oxford (1979)
- [342] E. Badareu, I. Popescu, *Décharges électriques dans les gaz*, Dunod, Paris (1965)
- [343] S. Flugge, *Handbuch der Physik*, XXI, XXII, Springer-Verlag, Berlin (1956)

**[Décharges HF et microndes]**

- [344] A. D. Macdonald, S. J. Tetenbaum, *Gaseous Electronics* N. Hirsh, J. J. Oskam Eds., Vol. 1 : *Electrical Discharges*, Chapitre 3, Academic Press, New York (1978)
- [345] A. B. Sa, C. M. Ferreira, S. Pasquiers, C. Boisse-Laporte, P. Leprince, J. Marec, *J. Appl. Phys.*, **70**, 1974, (1991)
- [346] J. Marec, E. Bloyet, M. Chaker, P. Leprince, P. Nghiem, *Electrical Breakdown and Discharges in Gases. NATO ASI Series B : Physics*, **89b**, 347, Plenum Press, New York (1982)
- [347] S. Pasquiers, C. Boisse-Laporte, A. Granier, E. Bloyet, P. Leprince, J. Marec, *J. Appl. Phys.*, **65**, 1455 (1989)
- [348] M. Moisan, Z. Zakrzewski, *J. Phys. D Appl. Phys.*, **24**, 1025 (1991)
- [349] M. Moisan, A. Shivarova, A. W. Trivelpiece, *Plasma Physics*, **24**, 1331 (1982)
- [350] M. Moisan, Z. Zakrzewski, "Plasmas sustained by surface waves at Microwave and RF Frequencies", in *Radiative Processes in Discharge Plasmas, NATO ASI Series B : Physics*, **149**, Plenum Press, New York (1982)

**[Ondes dans les plasmas et effets non linéaires]**

- [351] W. P. Allis, S. J. Buchsbaum, A. Bers, *Waves in Anisotropic Plasmas*, MIT Press, Cambridge, Mass. (1963)
- [352] J. F. Denisse, J.-L. Delcroix, *Théorie des ondes dans les plasmas*, Dunod, Paris (1961)
- [353] J. F. Denisse, J.-L. Delcroix, *Plasma Waves*, Wiley, New York (1963)



- [354] D. Quemada, *Ondes dans les plasmas*, Hermann, Paris (1968)
- [355] S. Pasquier, *J. Appl. Phys.*, **69**, 7246 (1991)
- [356] R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, G. M. Zaslowski, *Nonlinear Physics from the pendulum to turbulence and chaos*, Harwood Academic Publishers, New York (1990)
- [357] T. H. Stix, *Theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill, New York (1962) et *Waves in Plasmas*, American Institute of Physics, New York (1992)
- [358] V. L. Ginzburg, *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*, North Holland, Amsterdam (1961)
- [359] A. W. Trivelpiece, *Slow-wave Propagation in Plasmas Waveguides*, San Francisco Press, San Francisco (1967)
- [360] P. Vandenplas, *Electron Waves and Resonances in Bounded Plasmas*, Interscience-Wiley, New York (1968) ; J. M. Dawson, *Phys. Rev.*, **113**, 389 (1959) ; H. M. Schneider, *Phys. Fluids*, **9**, 2298 (1966)
- [361] A. Bers, "Linear Waves and Instabilities", in *Plasma Physics, Les Houches* (1972), C. de Witt, J. Peyraud Eds., pp. 115-215, Gordon and Breach, New York (1975)
- [362] G. Laval, R. Pellat, "Non-Linear Effects", in *Plasma Physics, Les Houches* (1972), C. de Witt, J. Peyraud, Eds., pp. 217-291, Gordon and Breach, New York (1975)

[Gaines, sondes]

- [363] J. D. Swift, M. J. R. Schwar, *Electric Probes for Plasma Diagnostics*, Iliffe Books, Londres (1971)
- [364] P. M. Chung, L. Talbot, K. J. Jourgan, *Electric Probes in Stationary and Flowing Plasmas : Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York (1975)
- [365] K. U. Riemann, "The Bohm criterion and sheath formation", in *Appl. Phys.*, **24**, 493 (1991)

[Diagnostics des plasmas]

- [366] L. Marton, *Methods of Experimental Physics : Vol. 9A et 9B Plasma Physics*, Academic Press, New York, Londres (1971)
- [367] O. Auciello, D. L. Flamm, *Plasma Diagnostics, Vol.1*, Academic Press, Boston (1989)
- [368] R. H. Huddlestone, S. L. Leonard Eds., *Plasma Diagnostic Techniques*, Academic Press, New York (1965)
- [369] M. A. Heald, C. B. Wharton, *Plasma Diagnostics with Microwaves*, Wiley, New York (1965)

# Crédits des figures

Les figures 1.14, 1.15, 1.18, 1.19, 1.22, 1.23 et 1.24 sont tirées de l'article "Plasmas", par J.-L. Delcroix, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

Les figures 1.26 et 1.27 sont tirées de l'article "Thermonucléaire (énergie)", par R. Dautray et J.-P. Watteau, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

Les figures 1.29, 1.30, 1.31, 1.32, 1.33 et 1.34 sont tirées de l'article "Gazeux (état)", par J.-L. Delcroix, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

La figure 2.10 est tirée de l'article "Magnétosphères", par M. Petit, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

Les figures 9.1, 9.2, 9.3 et 9.4 sont tirées de l'article "Magnétohydrodynamique", par J.-L. Delcroix, *Encyclopædia Universalis*, 1989.

La figure 1.28 est tirée de *La Fusion thermonucléaire par laser*, par R. Dautray et J.-P. Watteau, Commissariat à l'Energie Atomique, 1994.

Les figures 14.8, 14.10, 14.12 et 14.13 sont tirées de *Radiation Processes in Plasmas*, par G. Bekefi, Wiley, 1966.

La figure 13.12 est tirée de *Introduction à la théorie des gaz ionisés*, par J.-L. Delcroix, Dunod, 1959.

La figure 1.17 est tirée de *Théorie des ondes dans les plasmas*, par J.-F. Denisse et J.-L. Delcroix, Dunod, 1961.

Les figures 1.2, 2.4, 2.9, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 3.8, 8.2, 9.5 et 9.6 sont tirées de *Physique des plasmas, Tome 1*, par J.-L. Delcroix, Dunod, 1963.

Les figures 1.1, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 8.5, 8.7, 8.8, 12.1, 12.3, 12.4 et 12.5 sont tirées de *Physique des plasmas, Tome 2*, par J.-L. Delcroix, Dunod, 1966.

Nous remercions le Commissariat à l'Energie Atomique, ainsi que les éditions Dunod, Encyclopædia Universalis et Wiley, de nous avoir autorisés à reproduire ces figures.

# Index

Cet index concerne les deux volumes de l'ouvrage. Les nombres en caractères romains se réfèrent aux pages du volume 1, ceux en italique à celles du volume 2.

## Abréviations

**e** électron(s)  
**i** ion(s)  
**o** neutre(s)  
**AP** approximation  
**B** champ magnétique  
**EM** électromagnétique  
**ES** électrostatique  
**ET** équilibre thermodynamique  
**ETL** équilibre thermodynamique local  
**F** faisceau  
**F** onde rapide (fast)  
**L** longitudinal(es)  
 $\mu$  moment magnétique orbital  
**PF** plasma froid  
**QMV** quantité de mouvement  
**T** température  
**T** transverse(s)  
**TEM** transverse électromagnétique

## Atomes et molécules

*Ar* 172, 183, 205, 210, 212, 327  
*Br* 186  
*C* 186  
*Cl* 182, 186  
*Cl<sub>2</sub>* 185  
*CO* 172, 185, 206, 210  
*CO<sub>2</sub>* 172, 185, 206, 210  
*Cs* 172, 183, 211  
*Cs<sub>2</sub>* 185  
*F* 186, 210  
*H* 183, 186, 193  
*He* 172, 182, 206, 210, 211, 327

*He<sub>2</sub>* 185  
*Hg* 172, 183, 210  
*Hg<sub>2</sub>* 185  
*HO* 186  
*H<sub>2</sub>* 172, 185, 186, 193, 206, 210, 297  
*H<sub>2</sub>O* 172, 185, 206  
*H<sub>3</sub>N* 172  
*H<sub>4</sub>C* 172  
*I* 183, 186  
*I<sub>2</sub>* 185  
*K* 183, 210, 211  
*K<sub>2</sub>* 185  
*Kr* 172, 183, 206  
*Li* 172, 183, 186, 210, 211  
*Li<sub>2</sub>* 185  
*N* 172, 183  
*Na* 172, 183, 186, 211  
*Na<sub>2</sub>* 185  
*Ne* 172, 183, 206, 210, 297  
*NO* 172, 210  
*N<sub>2</sub>* 172, 185, 206, 210  
*N<sub>2</sub>O* 172  
*O* 172, 183, 186  
*O<sub>2</sub>* 172, 185, 186, 210  
*Xe* 172, 206

## A

Adiabaticité  
  rapport d' *95-97*  
  spatiale 102  
  temporelle 102, 138  
Affinité électronique 186  
Application standard *201*  
Attachement

évolution de  $n_e$  238  
mécanismes 192

## B

Balistiques (modes) 115  
Bases de données 199  
BGK (Bhatnagar, Gross, Krook)  
cf. Équation, Collisions  
Bremsstrahlung  
cf. Rayonnement  
inverse (absorption) 460

## C

Caractéristiques (Lagrange) 112, 224  
Causalité (principe de) 126  
Caviton 215  
Centre guide 88  
Champ de rayonnement  
dans le vide 430  
dans un plasma 437  
états quantiques 432  
Champ électrique critique  
échauffement des  $e$  313, 342, 382  
Champ magnétique  
convection (MHD) 68  
diffusion (MHD) 68  
Champs d'une particule  
de convection 405  
de rayonnement 405  
non relativiste 406  
Chaos  
spatio-temporel 210  
Chaotique (dynamique) 198  
Chapman et Cowling (formule) 306,  
339  
Chauffage par turbulence 312  
Chirikov (condition) 200  
Chirikov-Taylor cf. Application  
Choc acoustique ionique 212  
Classification des plasmas  
bremsstrahlung  $e - i$  419  
densité, température 9  
interactions radiatives 49  
longueurs fondamentales 33  
par rapport aux ondes 46  
Coefficients de transport,  
espace des vitesses  
additivité 359, 390  
déplacement 354, 388  
diffusion 354, 390, 392

dispersion angulaire 355, 361  
dispersion longitudinale 355  
ions suprathermiques 366  
ralentissement 355  
des  $e$  359  
des  $i$  360

Coefficients radiatifs  
absorption 442, 449  
émission 442, 449  
extraction 441  
injection 441

## Collision(s)

cohérentes, incohérentes 154  
coulombienne(s) 36, 150, 347  
coupure de Debye 164, 348  
déviation 158  
divergence de  $\sigma_1$  164  
impact critique 150, 349  
lointaines 165, 350  
ln  $\Lambda$  39, 167, 367  
proches 37, 166, 350  
élastique(s) 141  
déphasages 160  
déviation, 37, 148, 291  
effet Ramsauer 172  
masse réduite 144  
mouvement relatif 145  
ondes partielles 160  
paramètre d'impact 36, 146  
sphères dures 152, 158, 165,  
294  
spiralante ( $\varphi \approx 1/r^4$ ) 180  
système du laboratoire 174  
théorie quantique 159  
inélastique(s) 181  
catalogue 192  
complexe intermédiaire 198  
équations cinétiques 430  
hydrogène 193, 194  
ternaires 197  
troisième corps 197  
modèles en dynamique linéaire  
BGK 182, 229  
Fokker-Planck 183  
Lenard-Bernstein 185, 229  
relaxation 181  
Vedenov 184  
probabilité 156  
simples, multiples 155  
Colonne positive  
lois de similitude 230

régime  
 chute libre 234  
 Schottky 233, 235, 245  
 Commutation d'opérateurs 337  
 Compression  
 adiabatique 109, 95  
 magnétique 109  
 Compton (diffusion) 49, 211, 448, 460  
 stimulée 465, 471  
 Conductivité électrique 100, 301  
 effet Hall 126, 301  
 gaz faiblement ionisés 301  
 magnétorésistance 126, 301  
 plasmas 166, 379  
 courant continu 40  
 longitudinale de Vlasov 142  
 Lorentz 379, 399  
 plasmas froids 125  
 plasmas intermédiaires 329  
 Spitzer 40, 380, 383  
 Conductivité thermique 57  
 gaz faib. ionisés 324  
 plasmas 386, 399  
 Conservation cf. Équat. de transport  
 Constantes du mouvement 122, 117  
 Convergence développement en fonc-  
 tions sphériques 299  
 Coordonnées tournantes 128  
 Corrélations  
 définition 411  
 équilibre (ET) 40  
 hydrodynamique des 100  
 plasmas 26, 41  
 Couplage(s) d'ondes  
 phases aléatoires 210, 230  
 résonnant 206  
 entre anisotropies 298, 336  
 Courant électrique  
 création cf. Current drive  
 déplacement 102  
 diamagnétisme 81  
 magnétisation 91  
 toroidal cf. Current drive  
 Current drive  
 LHCD (tokamak) 59  
 modèle de Fisch 205, 230  
 Cyclotron (vecteur rotation) 86  
 cf. aussi Résonance, Fréquences

## D

Dawson (modèle multifaisceaux) 149

Décharge(s) dans les gaz 10, 65  
 claquage laser 73  
 étincelle 72  
 hautes fréquences 73, 221  
 luminescente 68  
 régime d'arc 70  
 régime de Townsend 68  
 Degré d'ionisation 5  
 Demi-flux radiatifs 434  
 Densité  
 d'énergie radiative 433  
 dans espace des phases 3  
 de QMV radiative 433  
 des photons 433  
 double 29, 10, 11  
 et partie isotrope de  $f$  332  
 Dérive(s) 103  
 courbure magnétique 115  
 électrique 94, 115, 138  
 gradient de  $B$  116, 139  
 gravitationnelle 97, 115  
 vitesses macroscopiques 81  
 Diamagnétisme 58, 91, 79  
 et dérives 118, 139  
 Diffusion  
 ambipolaire 223  
 deux espèces d'ions 243  
 parfaite 226  
 coefficient de 207, 321  
 des électrons  
 libre (gaz neutre) 207, 316  
 plasmas intermédiaires 343  
 longueurs de diffusion 218  
 modes propres 217  
 cf. aussi Modes propres  
 quasi linéaire : cf. Quasi linéaire  
 thermique  
 gaz faiblement ionisés 322  
 Diode de Pierce 343  
 Dispersion (relation) 15, 41, 438  
 cf. aussi Ondes, Instabilités  
 Dispersion (tenseur de) 274  
 Distance moyenne  $e-e$  33, 349  
 Doppler (effet) 191

## E

Échauffement des électrons  
 équilibre 310, 311, 341  
 Échelles de temps  
 dynamique d'un plasma 40  
 théorie de la diffusion 317

- Échos de plasma  
 spatial 218  
 temporel 216
- Écoulement libre 114, 222, 223
- Effondrement 215
- Einstein  
 processus radiatifs 451  
 relation  $D/\nu$  209
- Elliptiques (points) 191
- Émission  
 spontanée 449  
 stimulée 449
- Émissivité spectrale des  $e$  451
- Énergie  
 cinétique moyenne 332  
 d'interaction 29  
 d'onde 256, 259, 148, 151, 152,  
 154  
 de corrélation 30  
 de Fermi 35  
 de perturbation 257  
 de réaction 188  
 libre 297  
 potentielle d'un plasma 81
- Entropie 118
- Épaisseur de peau  
 collisionnelle 228  
 non collisionnelle 170  
 anormale 170
- Équation de Balescu 374, 377
- Équation de BGK 183
- Équation de Boltzmann 371, 376  
 caractère local 23  
 collisions inélastiques 29, 31, 38  
 démonstration 17  
 fonctions sphériques 335, 340  
 invariants 24, 42  
 irréversibilité 25  
 photons 446, 448, 457  
 sans second membre 15
- Équation de Fokker-Planck 183, 373,  
 378, 398, 399  
 modèle de Lenard-Bernstein 185  
 lois de conservation 228  
 modèle de Vedenov 185
- Équation de Landau 374, 377, 378,  
 395, 398
- Équation de Liouville  
 à une particule 15  
 plasmas 7, 34  
 variables  $\vec{r}$  et  $\vec{w}$  7  
 variables conjuguées 4
- Équation de Vlasov 16, 374, 375  
 cf. aussi Vlasov  
 entropie 118  
 équilibres inhomogènes 223  
 incompressibilité du fluide 108  
 relativiste 120  
 réversibilité 108, 216  
 théorème de Liouville 108
- Équations cinétiques  
 gaz 1  
 locales ou non locales 371  
 mélanges 27  
 plasmas 370
- Équations de Maxwell 437
- Équations de Lagrange 122
- Équations de transport  
 chaleur 53  
 charge électrique 60  
 courant électrique 62  
 dissipation interne 295  
 dissipation petite 274  
 énergie 250, 274, 295, 323, 345,  
 121  
 cinétique relativiste 120-121  
 interne totale 53  
 non relativiste 52, 224, 232  
 perturbation 257, 329, 345,  
 233, 283  
 PF non relativiste 248  
 PF relativiste 322, 343, 344,  
 348  
 potentielle 52, 100  
 radiative 447
- entropie 119
- flux de QMV 53, 92
- grandeur  $A$  48
- masse 60
- particules 50
- pression cinétique 53, 93
- QMV 204, 51, 122  
 globale 61  
 non relativiste 224  
 radiative 447  
 relativiste 122
- température cinétique 54
- termes d'interaction 49, 59, 84  
 B.B.G.K.Y. 88  
 corrélations 86  
 gaz quasi homogène 88  
 réciprocité 88  
 Vlasov 49
- Étendue (faisceaux lumineux) 443

Eulerienne (description) 112

## F

Faisceau(x) d'électrons 245  
 couplage au circuit extérieur 287  
 création d'un plasma 242  
 dissipation interne 294  
 dynamique en dimension 247  
 équations linéaires 248  
 équations non linéaires 247  
 fonction de réponse 280  
 effet Doppler 252  
 énergie  
 cinétique de perturbation 283  
 développement en série 282  
 d'onde 257  
 faisceau non homogène 283  
 excitation par deux grilles  
 admittance 291, 293  
 dipolaires 261, 284  
 espacées 265  
 maxwelliens  
 ondes peu amorties 284  
 modes propres (naturels) 251  
 onde lente 251  
 onde rapide 251

Fermeture  
 équations hydrodynamiques  
 adiabatique 54  
 Euler 55  
 Navier-Stokes 56  
 plasmas froids 54  
 système B.B.G.K.Y. 14

Fluide quasi continu 36

Flux dans l'espace des vitesses  
 gaz faiblement ionisés  
 effet Joule 303  
 refroidissement (collisions) 307  
 plasmas  
 collisions lointaines 368, 371

Flux  
 chaleur  
 et anisotropies de  $f$  334  
 tenseur 45  
 vecteur 47, 323  
 énergie 276  
 cinétique 47, 323  
 d'ondes 225  
 radiative 433  
 entropie 119  
 photons 433

## QMV

radiative 433  
 tenseur 46

Fokker-Planck

cf. Equation, Collisions

Fonction de réponse longitudinale 129  
 Fonction  $Z$  de dispersion 163, 218, 227

Fonction(s) de distribution

anisotropies 292, 330  
 approximation régulière 345

bi-maxwellienne 240

d'équilibre 117, 118, 223

de révolution

autour de  $\vec{k}$  274

autour d'un axe 334

double 10

Druvesteyn 314, 342

Lorentz-Cauchy 134, 269

réponse à excitation initiale  
 225

maxwellienne 75, 290, 312

déplacée 42

imposée (collisions  $e-e$ ) 326

relativiste 158, 226

normalisée 128

partie isotrope 292, 331

photons 431

réduite à une dimension 171

simple 9

Fonctions propres

laplacien 219, 239

opérateur de Boltzmann 293, 337

opérateurs de rotation 337

Force d'interaction 143

Frenet (trièdre de) 131

Fréquence(s)

attachement 238

collisions 6, 367

constante 232

$e-h\nu$  461

$e-i$  38

$e-o$  203, 294

expérimentales 296

moyenne 342

potentiel  $1/r^s$  295

coupure 42

cyclotron 86, 96

fondamentales  $\omega_p$  et  $\nu_{\text{coll}}$  367

ionisation 213

plasma 13, 367

rebondissement (piégeage) 192

Fusion nucléaire

confinement  
 inertiel 61  
 magnétique 58, 106, 78  
 critère de Lawson 57  
 par laser, attaque indirecte 64  
 paramètre  $\beta$  58, 91  
 réactions de fusion 53  
 température de Post 57

## G

Gaines 24, 78  
 Gaunt (facteur) 421, 426  
 Gaz de Lorentz  
 électrons-neutres 290  
 imparfait 306, 316  
 parfait 292  
 photons-électrons 448  
 Gaz faiblement ionisés 51, 287  
 Gel du plasma dans  $B$  105  
 Gradient, champ de vecteurs 130  
 Grandeurs hydrodynamiques  
 définitions 44  
 radiatives 433, 439  
 équilibre (ET) 436, 439  
 rayonnement isotrope 435  
 Gyrotron 293

## H

Hamiltonien  
 particule chargée 134, 32  
 plasma (semi-relativiste) 33  
 Hydrodynamique radiative 447  
 Hyperboliques (points) 191

## I

Impédance d'un plasma 17, 180  
 Impulsion solitaire 212  
 Indice de réfraction (rayons) 440  
 Instabilité(s)  
 absolue 315  
 convective 315  
 critères cf. Penrose  
 distributions anisotropes 274  
 explosive 208  
 paramétriques 208  
 à deux courants 216  
 Rayleigh-Taylor 64  
 saturation 211, 261  
 Instabilité(s) électromagnétique(s)

F opposés,  $T$  anisotropes 286  
 purement croissante 279  
 Weibel non relativiste  
 AP magnétoquasistatique 324  
 effets non linéaires 332  
 dispersion 327, 328, 273, 276  
 domaine d'instabilité 280  
 énergie de perturbation 329  
 évolution non linéaire 332, 282  
 F opposés,  $T$  anisotropes 277  
 mécanisme contre-réaction 329  
 plasma froid 323  
 plasmas,  $T$  anisotrope 282  
 Weibel relativiste  
 dispersion 337  
 énergie de perturbation 345  
 Instabilité(s) électrostatique(s)  
 Buneman 261  
 avec agitation thermique 261  
 dispersion 309, 312  
 domaine d'instabilité 309, 340  
 évolution non linéaire 312, 268  
 plasmas froids 263  
 régime acoustique ionique 265  
 régime cinétique 264  
 taux de croissance 311, 342  
 de courant 297, 309  
 deux faisceaux  $e$  opposés  
 dispersion 313  
 domaine d'instabilité 314  
 évolution non linéaire 317  
 instabilité absolue 315  
 maxwelliens 285  
 modèle plasma froid 315  
 mouvement des ions 317, 342  
 deux faisceaux  $e$  parallèles  
 amplification spatiale 315, 342  
 dispersion 315-317  
 domaine d'instabilité 318  
 évolution non linéaire 319  
 deux faisceaux  $i$  320  
 diode de Pierce 267, 288, 291  
 faisceau  $e$ -plasma 254  
 agitation thermique 254  
 chaud-chaud 258  
 chaud-froid 256, 284  
 évolution non linéaire 308, 261  
 froid-chaud 260  
 froid-froid 309  
 solutions  $\omega(k_r)$  301, 225  
 faisceau  $e$ -plasma (froid-froid)  
 amplification spatiale 305



collisions 306  
 croissance maximum 303  
 dispersion 299-301, 307  
 domaine d'instabilité 340  
 effets non linéaires 308  
 gradient de densité 341  
 plasma=milieu réactif 305  
 solutions  $k(\omega_r)$  305  
 solutions  $\omega(k_r)$  301  
 faisceau-milieu dissipatif 267  
 onde lente instable 270  
 onde rapide stable 270  
 faisceau-milieu réactif 276, 306  
 bilans d'énergie 278  
 dispersion temporelle pure 280  
 Pierce-Budker-Buneman 309  
 Intensité du rayonnement 430, 439  
 équilibre (ET) 436, 440  
 lumière naturelle 431  
 Invariant(s) adiabatique(s) 104, 120  
 action longitudinale 121, 140  
 de flux global 121  
 $\mu$  orbital 90, 109, 121  
 Ionisation cf. Degré, Saha  
 Ionosphère 10  
 Ions négatifs 186

## J

Joule (effet)  
 avec un champ  $B$  341  
 gaz faiblement ionisés 305

## K

KAM cf. Tores  
 Kirchhoff (loi) 451  
 Klystron  
 amplificateur 285  
 reflex 293  
 Kortweg-de Vries (équation) 213

## L

Lagrange cf. Équations  
 Lagrangienne (description) 112  
 Landau  
 amortissement 43, 147, 154, 157,  
 158, 159, 160, 174  
 collisions 183  
 coupure relativiste 226  
 non linéaire 211

contour 134  
 dissipation 143  
 Langevin (formule) 203  
 Langmuir  
 paradoxe 308  
 sonde 78  
 Larmor (formule) 48, 408  
 Lasers  
 à électrons libres 293  
 de puissance 63  
 Legendre  
 fonctions 292, 330  
 polynômes 293, 369, 393  
 Libre parcours moyen  
 collisions proches 36, 349  
 Liénard-Wiechert (potentiels) 403  
 Limite centrale (théorème) 77  
 Longueur(s)  
 d'interaction  $e-h\nu$  461  
 d'interaction  $h\nu-e$  460  
 Debye 21, 227, 333, 156, 349  
 écran 29  
 Landau 21, 349  
 Rosseland 457  
 Lorentz cf. Gaz

## M

Magnétohydrodynamique  
 approximation 324  
 gaz faiblement ionisés 73  
 liquides 66  
 plasmas 75  
 Magnétoquasistatique (AP) 324  
 Manley-Rowe (relations) 208, 230  
 Margenau : cf. Échauffement  
 Maxwellianisation  $e-e$  395  
 Métastables (états) 182, 184  
 Méthode régressive (Yvon) 1, 375  
 Microchamps et macrochamps 437  
 Microréversibilité 200, 31, 450  
 Milieu faiblement dissipatif  
 relation  $k_i(\omega_r) - \omega_i(k_r)$  275  
 Miroir(s) magnétique(s)  
 cône de perte 113  
 de révolution 123, 132  
 force de freinage 139  
 rapport de miroir 112  
 Mobilité  
 électronique 203, 300  
 effet Ramsauer 205  
 expérimentales 205

- loi de similitude 204, 314
  - plasmas intermédiaires 343
  - réduite 204, 315
  - ionique 208
    - Langevin 208
    - loi de similitude 212
    - réduite 208
  - Modes propres
    - cavité cylindrique 240
    - cavité parallélépipédique 239
  - Moléculaire (régime) 36
  - Moment
    - de Lagrange  $p_\varphi$  124
    - $\mu$  orbital cf. Invariant(s)
  - Monotron 293, 295
- N**
- Newcomb-Gardner (stabilité) 232
    - perturbations électrostatiques
      - plasmas anisotropes 239
      - plasmas isotropes 236
    - perturbations quelconques 234
  - Niveaux d'énergie
    - atomes 181
    - molécules 182
  - Nyquist (méthode de) 242
- O**
- Ohm (loi d') généralisée 64
    - gaz partiellement ionisés 98
    - plasmas binaires 101
    - plasmas multiples 97
  - Onde(s)
    - acoustique ionique 42, 160, 188, 207, 214
      - champs 226
    - active (énergie négative) 255
    - Alfvén 43, 71
    - hybride basse 206
    - longitudinales ES 170
      - plasmas anisotropes 275, 285
    - passive (énergie positive) 255
    - plasma  $e$  12, 42, 155, 207, 214
      - champs 226
      - dispersion 227
      - méthode van Kampen-Case 227
    - plasma  $i$  161
    - pseudo-sonore
      - cf. Onde acoustique ionique

- siffleurs 44
- TEM 17, 42, 167, 208, 285
  - plasmas anisotropes 275, 285
- transverse à un faisceau
  - analyse non relativiste 347
  - changement de repère 347
  - dispersion 337, 338, 346, 277
  - énergies de perturbation 337
  - modes TEM, F, S 338, 346
  - polarisations 338
- Orbites
  - adiabatiques 101, 103
  - liées et non liées 134
  - liées provisoirement 135
- Oscillations de gaine 16

**P**

- Paquets d'ondes 194
  - cohérentes
    - mouvement d'une particule 198
    - séparatrices 199
    - temps d'autocorrélation 196
- Paramètre
  - de plasma 30
  - de Townsend  $E/n_0$  204
- Particules résonnantes 143
  - échange d'énergie avec onde 151
- Partie principale d'une intégrale 136
- Peniotron 293
- Penrose (conditions) 244, 247
  - distributions avec un minimum 251
  - nécessaires et suffisants 284
  - plasma equiv. à un F 248, 284
- Permittivité
  - longitudinale
    - faisceau  $e$  250
    - plasma 130
    - plasma froid 19
    - tenseur de 273
- Photons thermiques moyens 437
- Piégeage dans une onde 189
  - effet des collisions 194
  - électrons
    - passant 191
    - piégés 191
- Planck (formule) 436
- Plasmas
  - astrophysiques et géophysiques 9
  - cinétiques classiques 35, 349

corrélés classiques 36  
 de laboratoire 10  
 froids (modèles) 100  
   EM non relativiste linéarisé 322  
   EM relativiste 320  
   ES relativiste 343  
 intermédiaires 53, 325  
 matériels ou radiatifs 459  
 théorie collisionnelle 345  
 Plemelj (formules) 136  
 Poincaré (section de) 201  
 Polarisabilité atomique 209  
 Pondéromotrice (force) 214  
 Post-décharge 217  
 Potentiels d'interaction  
   électron-neutre 149  
   neutre-neutre 150  
 Prandtl magnétique 70  
 Pression  
   cinétique 44  
   et anisotropies de  $f$  333  
   de radiation 455  
   inter-particulaire 35, 50  
   interne (Van der Waals) 52  
   magnétique (et tension) 70, 79  
 Pseudo-période 104, 119  
 Puissance dissipée 126, 139, 142, 230

## Q

Quasi hélicoïdal (mouvement) 103  
 Quasi linéaire (théorie)  
   gaz faiblement ionisé  
     conductivité électrique 309  
   plasmas 195  
     collisions 204  
     diffusion résonnante 197, 229  
     ondes cohérentes 198  
     phases aléatoires 195

## R

Rayon d'orbite 92  
 Rayon lumineux 439  
 Rayonnement  
   bremsstrahlung 413  
   bremsstrahlung  $e-i$  49  
     Born 421, 428  
     dispersion du plasma 426  
     facteur de Gaunt 421, 426  
     longueur d'absorption 429

  puissance totale 421  
   spectre 423  
   théorie quantique 427  
   trajectoires rectilignes 422  
 bremsstrahlung  $e-o$  414  
   correction quantique 416  
   dispersion du plasma 418  
   émissivité spectrale des  $e$  416  
   puissance totale 416  
 cyclotron 48  
   corrections relativistes 413  
   description quantique 412  
   distribution spectrale 411  
   longueur d'absorption 429  
   puissance totale 410  
 d'une particule chargée  
   distribution spectrale 408  
   puissance totale 408  
 des plasmas 401  
 longueurs d'absorption 460  
 synchrotron 49, 413

## Réaction

  constante de 197  
 taux de 195  
   pour maxwelliennes 200  
 ternaire  
   constante de 197  
   saturée pseudo-binaire 198

## Rebondissement (piégeage) 145, 192

## Recombinaison

  coefficient de 236  
 en surface 215  
 en volume 237  
 mécanismes de 191

## Refroidissements des électrons

  collisions 306  
 diffusion 319  
 mécanismes 306

## Relaxation

  anisotropies 294  
 courant électrique 65  
 $e-e$  365  
 $e-i$  355, 365  
 $e-o$  52  
 $i-e$  365  
 $i-i$  365  
 par diffusion 219  
 partie isotrope de  $f_e$  307  
 photons-matière 453  
 temps de (plasmas) 363

## Résonance

  cyclotron 43, 127

électronique 140  
 ionique 130  
 hybride  
   basse 46  
   haute 46  
 Reynolds (nombre de)  
   hydrodynamique 70  
   magnétique 69  
 Rosenbluth (formules) 357, 369, 389  
 Runaways (*e* emballés) 381, 382

## S

Saha (formule) 7, 77  
 Schrödinger (équation) 215  
 Section efficace  
   absorption de photons 450  
   collision élastique *e-o* 170  
   de réaction 191  
   différentielle  
     élastique 154  
     inélastique 30, 38  
   méthodes de mesure 169, 180  
   Rutherford 158, 161, 327, 361  
   totale 162  
   transport 177  
     énergie 180  
     QMV 164, 293  
 Séculaire (terme)  
   échauffement des électrons 304  
   particules résonnantes 152  
 Séparatrice (orbite) 191  
   cf. aussi Paquets  
 Seuil de réaction 188  
 Siffleurs : cf. Onde(s)  
 Soliton 212, 214  
   de Langmuir 215  
 Sphériques (fonctions) 292, 330  
   cf. aussi Legendre  
 Standard map cf. Application  
 Stefan (constante) 437  
 Subsoniques (mouvements) 62  
 Susceptibilité électrique  
   équilibre  
     anisotrope 273  
     isotrope 167, 227  
   longitudinale  
     cinétique 128, 171  
     collisions 182, 228  
     faisceau *e* 250, 300  
     faisceau froid 150  
     plasma 128, 226

plasma froid 300  
 plasma de Lorentz-Cauchy 224  
 prolongement analytique 134  
 tenseur 167, 227  
 Système B.B.G.K.Y.  
   équation de  $f_1$  12, 34, 371  
   équation de  $f_{12}$  14

## T

Température  
   Boltzmann (2 niveaux) 450  
   cinétique 9  
   cinétique en eV 9  
   de diffusion 207  
   de rayonnement 445  
   électronique 343  
 Thomson (diffusion) 448, 460  
 Tokamak 205  
 Tores de KAM 201  
 Townsend (unité) 204  
 Trajectoires  
   *B* uniforme 85  
   cycloïdales 95  
   dans une onde  
     espace de phase 191  
 Transfert radiatif  
   approximations  
     classique pour les *e* libres 452  
     diffusion 455  
     ETL complet 456  
     ETL partiel 454  
     quasi-statique pour  $h\nu$  453  
   conductivité therm. radiative 456  
   équation de transfert 443  
   fonction source 443  
   profondeur optique 443  
 Transformation  
   conforme 242  
   Fourier-Laplace  
     domaine de convergence 126  
   Lorentz 96  
 Transitions libre-libre 451  
 Tube de force 105  
 Turbulence  
   faible 212  
   forte de Langmuir 215

## V

Van Kampen, Case  
 modes 175, 228

approximation WKB 180  
orthogonalité 180, 228  
spectre continu et discret 179  
relation avec Landau 177  
Variables fluides globales 58  
Viscosité 57  
Vitesse  
d'Alfvén 44  
d'énergie 259, 438  
de fluide et anisotropies 332  
de groupe 259, 147, 151, 174, 439  
de piégeage 191  
du son 43  
Vlasov-Maxwell (modèle de) 107  
cf. aussi équation de Vlasov  
propriétés 108-122  
Vlasov-Maxwell en 3 dimensions 164  
cf. aussi Ondes  
Vlasov-Poisson en 1 dimension 122

collisions 181  
effets non linéaires 188  
évolution asymptotique 138  
excitation externe 139  
fonction de Green 130  
Fourier-Laplace 124  
linéarisé 123  
modes faiblement variables 145  
modes naturels 129, 145-148, 162  
non linéaire 123  
perturbations spatiales périodiques 131  
relation de dispersion 129  
réponse linéaire 127  
réponses forcées 129

**Z**

Zakharov (modèle) 214

*Cette page est laissée intentionnellement en blanc.*

**L O U I S - J E A N**  
**avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex**  
**Tél. : 92.53.17.00**  
**Dépôt légal : 261 — Mars 1994**  
**Imprimé en France**

