

François David

Théorie statistique des champs

Tome 2

S A V O I R S A C T U E L S

EDP Sciences / CNRS ÉDITIONS

Dans la même collection

Symétries continues

Franck Laloë

Plasmas créés par laser – Généralités et applications choisies

Patrick Mora

Physique de la turbulence – Des tourbillons aux ondes

Sébastien Galtier

Le temps dans la géolocalisation par satellites

Pierre Spagnou et Sébastien Trilles

Physique quantique, information et calcul – Des concepts aux applications

Pascal Degiovanni, Natacha Portier, Clément Cabart, Alexandre Feller et Benjamin Roussel

Théorie statistique des champs – Tome 1

François David

Mécanique quantique – Tomes I, II et III

Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë

Retrouvez tous nos ouvrages et nos collections sur
<http://laboutique.edpsciences.fr>

Imprimé en France

© 2022, EDP Sciences, 17, avenue du Hoggar, BP 112, Parc d'activités de Courtabœuf, 91944 Les Ulis Cedex A

et

CNRS Éditions, 15, rue Malebranche, 75005 Paris.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays. Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et d'autre part, les courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (art. L. 122-4, L. 122-5 et L. 335-2 du Code de la propriété intellectuelle). Des photocopies payantes peuvent être réalisées avec l'accord de l'éditeur. S'adresser au : Centre français d'exploitation du droit de copie, 3, rue Hautefeuille, 75006 Paris. Tél. : 01 43 26 95 35.

EDP Sciences,

ISBN (papier) : 978-2-7598-2217-1, ISBN (ebook) : 978-2-7598-2218-8

CNRS Éditions,

ISBN (papier) : 978-2-271-14325-9, ISBN (ebook) : 978-2-271-14326-6

Table des matières

Introduction du tome 2	ix
0.6 But de l'ouvrage	ix
0.7 Contenu de l'ouvrage	x
0.8 Remerciements	xii
0.9 Bibliographie sommaire	xiii
0.10 Plan structuré	xv
III Mécanique statistique : phénomènes critiques et groupe de renormalisation	339
10 Rappels : introduction aux phénomènes critiques, le modèle d'Ising	341
10.1 Introduction	341
10.2 Brève introduction aux phénomènes critiques : exposants critiques, lois d'échelle et universalité	342
10.2.1 Transition ferro-paramagnétique et point critique . . .	342
10.2.2 Paramètre d'ordre et brisure de symétrie	343
10.2.3 Singularités au point critique et exposants critiques . .	344
10.2.4 Corrélations et fluctuations au point critique, longueur de corrélation et exposants associés	345
10.2.5 Universalité et lois d'échelle	348
10.3 Rappels de mécanique statistique et modèle d'Ising	351
10.3.1 Le modèle d'Ising	351
10.3.2 Ensemble canonique, fonction de partition	352
10.3.3 Observables et fonctions de corrélation	353
10.3.4 Limite thermodynamique	353
10.4 Potentiel thermodynamique et transformation de Legendre . .	354
10.4.1 Définition	354
10.4.2 Propriétés du potentiel thermodynamique	355
10.4.3 Exercices	358
10.5 Matrice de transfert	358
10.5.1 Modèle d'Ising en $D = 1$	358
10.5.2 Modèle d'Ising en $D = 2$	360
10.5.3 Exercices	360
10.6 Notes	361

11 L'approximation du champ moyen et la théorie de Landau des phénomènes critiques	363
11.1 Introduction	363
11.2 Le modèle d'Ising dans l'approximation du champ moyen . . .	364
11.2.1 Le champ moyen : version Curie-Weiss	364
11.2.2 Le champ moyen comme approximation variationnelle	366
11.2.3 Application : champ moyen pour le modèle d'Ising . . .	369
11.2.4 Exercices	372
11.3 Diagramme de phase et exposants critiques	373
11.3.1 Diagramme de phase et point critique	373
11.3.2 Exposants critiques	374
11.3.3 Exercices	375
11.4 La fonction de corrélation à deux points	375
11.4.1 La dérivée seconde du potentiel thermodynamique . . .	375
11.4.2 La fonction à deux points dans l'espace réel et dans l'espace réciproque	376
11.4.3 Comportement à grande distance de la fonction de corrélation	377
11.4.4 Exposants ν et η	378
11.4.5 Comportement au point critique, limite continue	378
11.4.6 Exercices	380
11.5 La théorie de Landau des phénomènes critiques	380
11.5.1 Principe de l'approximation de Landau	380
11.5.2 Théorie de Landau pour le modèle d'Ising	382
11.5.3 Théorie de Landau pour d'autres systèmes critiques . .	388
11.5.4 Exercices	391
11.6 Fluctuations dans la phase de basse température : dimension critique inférieure	393
11.6.1 Dimension critique inférieure	393
11.6.2 Symétrie discrète : $D_{lc} = 1$	393
11.6.3 Symétrie continue et modes de Goldstone	395
11.6.4 $D_{lc} = 2$ et argument de Mermin-Wagner-Coleman . . .	398
11.6.5 Exercices	401
11.7 Fluctuations au point critique, critère de Ginzburg, domaine critique et dimension critique supérieure	402
11.7.1 Amplitude des fluctuations au voisinage du point critique	403
11.7.2 Critère de Ginzburg et dimension critique supérieure	405
11.7.3 Analyse dimensionnelle pour la température effective	405

11.7.4	Analyse dimensionnelle pour le couplage non linéaire	406
11.7.5	Discussion	407
11.7.6	Exercices	407
11.8	Notes	408
12	La théorie de Wilson du groupe de renormalisation	411
12.1	Introduction	411
12.2	Principe des transformations du groupe de renormalisation	412
12.2.1	Introduction, système microscopique	412
12.2.2	Décimation et transformations d'échelle	413
12.2.3	Hamiltonien renormalisé et conséquences pour les observables	416
12.2.4	Itération et (semi-)groupe de renormalisation	418
12.2.5	Des applications itérées aux flots du groupe de renormalisation	420
12.2.6	Équations de flot et dimension d'échelle de ϕ	422
12.2.7	Exercices	424
12.3	Renormalisation à la « Migdal-Kadanoff »	426
12.3.1	Modèle d'Ising sur réseau triangulaire, principe	426
12.3.2	Approximation variationnelle	427
12.3.3	Couplages renormalisés	428
12.3.4	Points fixes et flot du GR	428
12.3.5	Exercices	429
12.4	Points fixes et variétés critiques	430
12.4.1	Principe général : géométrie des flots et phases du système	431
12.4.2	Linéarisation au voisinage d'un point fixe : champs et dimensions d'échelles	433
12.5	Exposants critiques, lois d'échelle et universalité	436
12.5.1	Point fixe avec une direction instable	436
12.5.2	Invariance d'échelle au point fixe, exposant η	436
12.5.3	Approche du point fixe, longueur de corrélation et exposant ν	437
12.5.4	Universalité des lois d'échelle sur la surface critique	438
12.5.5	Universalité de l'approche au point critique, limite continue, fonctions d'échelle	439
12.5.6	Fonctions d'échelle et limite continue	441
12.5.7	Au-delà de la linéarisation : universalité et domaine critique	443
12.6	Calcul des exposants critiques et des relations d'échelle pour les systèmes magnétiques	445
12.6.1	Système en champ externe h , point bicritique	445
12.6.2	Calcul des exposants critiques	446

12.6.3	Le cas $D > 4$	448
12.7	Notes	448
13	Groupe de renormalisation de Wilson et théorie des champs	449
13.1	Introduction	449
13.2	Modèle de Landau-Ginzburg-Wilson dans l'approximation du potentiel local	450
13.2.1	Approximation du potentiel local	450
13.2.2	Renormalisation par intégration sur des tranches d'impulsions	453
13.2.3	Équation de flots pour le potentiel local	455
13.2.4	Flots et points fixes à $D = 4 - \epsilon$	455
13.2.5	Exercices	459
13.3	$D=4$ et couplage marginalement inessentiel	460
13.3.1	Couplage marginalement inessentiel : corrections loga- rithmiques aux lois d'échelle	461
13.3.2	Couplage marginalement essentiel, divergence exponentielle de ξ	461
13.3.3	Ligne de points fixes : exemple du modèle XY	462
13.3.4	Exercices	464
13.4	Limite continue et relation avec les théories quantiques des champs	464
13.4.1	Limite continue et fonctions d'échelle	465
13.4.2	Conséquences	466
13.4.3	Relation entre modèle de Landau-Ginzburg-Wilson . . et théorie des champs ϕ^4	467
13.4.4	Équations du groupe renormalisation pour la théorie continue	468
13.4.5	Étude des phénomènes critiques par la théorie des champs	470
13.5	Opérateurs dangereux et opérateurs redondants	471
13.5.1	Relations d'échelle pour $D > 4$ et opérateurs inessentiels dangereux	471
13.5.2	Équivalence des procédures de renormalisation et opéra- teurs redondants	472
13.5.3	Exercices	473
IV	Applications et exemples	475
14	Applications de la théorie de Landau-Ginsburg-Wilson	477
14.1	Régularisation dimensionnelle, renormalisation et développement en ϵ	477
14.1.1	Notes	479
14.2	Modèles à N composantes	479
14.2.1	Modèle $O(N)$	479
14.2.2	Développement perturbatif	480

14.2.3	Fonctions β à une boucle	481
14.2.4	Limite $N \rightarrow \infty$	482
14.2.5	$N = 0$	483
14.2.6	Notes	483
14.3	Modèles à symétrie cubique	483
14.3.1	Notes	486
14.4	Polymères	487
14.4.1	Introduction aux polymères	487
14.4.2	Polymères, marches aléatoires et champ libre	488
14.4.3	Effets stériques et classe d'universalité	490
14.4.4	Modèle de gaz de boucles et limite $n = 0$	492
14.4.5	Limite d'échelle et théorie $\phi_{n=0}^4$	495
14.4.6	Notes	497
14.5	Points multicritiques	497
14.5.1	Introduction	497
14.5.2	Modèle d'Ising avec lacunes, point tricritique	497
14.5.3	Champ moyen et théorie ϕ_3^6	499
14.5.4	Renormalisation et fonction bêta	500
14.5.5	Points multicritiques	503
14.5.6	Notes	505
15	Modèles de spins et modèles sigma (classiques et quantiques)	507
15.1	Modèle sigma non linéaire	507
15.1.1	Le modèle	508
15.1.2	Théorie des perturbations	508
15.1.3	Renormalisation à $D = 2$	510
15.1.4	Détails du calcul perturbatif à $D = 2$	512
15.1.5	Modèle sigma en dimension $D > 2$	515
15.1.6	Aspects non perturbatifs, instantons	516
15.1.7	Autres modèles sigma	519
15.1.8	Notes	522
15.2	Chaînes de spin quantiques et modèles sigma	523
15.2.1	Introduction	523
15.2.2	Chaîne quantique antiferromagnétique	523
15.2.3	Intégrale de chemin	524
15.2.4	Théorie effective de basse énergie	525
15.2.5	Modèle $O(3)$ et conjecture de Haldane	526
15.2.6	Notes	528
15.3	Modèle XY, gaz de Coulomb et modèle de sine-Gordon	528
15.3.1	Définition, ondes de spin	528
15.3.2	Vortex	529
15.3.3	Analogie électrostatique	531
15.3.4	Thermodynamique des vortex/gaz de Coulomb	532
15.3.5	La transition de Kosterlitz-Thouless-Berezinski	533
15.3.6	Le modèle de sine-Gordon	534

15.3.7	Exercices	536
15.3.8	Notes	536
16	Surfaces, interfaces et membranes	539
16.1	Interfaces et mouillage	539
16.1.1	Mouillage en 1+1 dimension	539
16.1.2	Modèle quantique, exposants critiques	545
16.1.3	Mouillage en 2+1 dimension	549
16.1.4	Transition rugueuse	550
16.1.5	Notes	552
16.2	Membranes	552
16.2.1	Introduction	552
16.2.2	Membranes fluides : introduction	553
16.2.3	Un peu de géométrie des surfaces	554
16.2.4	Le modèle de Canham-Helfrich	560
16.2.5	Fluctuations thermiques et renormalisation du module de rigidité	563
16.2.6	Longueur de persistance et phase froissée	568
16.2.7	Répulsion stérique, adhésion et décrochage des membranes	568
16.2.8	Membranes polymérisées et transition de froissement	572
17	Systèmes de taille finie et lois d'échelle (<i>Finite Size Scaling</i>)	579
17.1	Systèmes de taille finie	579
17.1.1	Lois d'échelle	582
17.2	Groupe de renormalisation dans les systèmes de taille finie . . .	584
17.3	Transitions du premier ordre	587
17.4	Points critiques quantiques à température finie	591
17.5	Zéros complexes de la fonction de partition	593
17.5.1	Modèle d'Ising avec paramètres complexes	593
17.5.2	Zéros en champ magnétique	593
17.5.3	Zéros en température	595
18	Invariance d'échelle et invariance conforme	597
18.1	Introduction	597
18.2	Invariance d'échelle	598
18.2.1	Champ libre de masse nulle	598
18.2.2	ϕ^4 en dimension $d = 4$	598
18.2.3	Courant de dilatation J_{d+1}^μ et tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$	599
18.2.4	Anomalie d'échelle	600
18.2.5	Théorème de Noether et tenseur énergie-impulsion . . .	602
18.2.6	Le tenseur énergie-impulsion comme réponse à une variation de la métrique	605

18.3	Invariance conforme	607
18.3.1	Le champ libre en dimension $d = 2$	607
18.3.2	Le groupe conforme	608
18.3.3	Pourquoi l'invariance conforme ?	611
18.4	Invariance conforme en deux dimensions (brève présentation)	611
18.4.1	Transformations conformes locales	611
18.4.2	Théorie quantique et invariance conforme	614
18.4.3	La charge centrale et l'algèbre de Virasoro	617
18.5	Notes	621
Index		623
Bibliographie		627

Introduction du tome 2

0.6 But de l'ouvrage

Ce livre présente une introduction aux principaux concepts et outils communs à la physique statistique et à la théorie quantique des champs : développements perturbatifs et diagrammes de Feynman, intégrales de chemin et intégrales fonctionnelles, théorie de la renormalisation et groupe de renormalisation.

Ces concepts et ces techniques mathématiques sont apparus à partir des années 1940-1950 à la fois en physique des hautes énergies (QED, théorie de la renormalisation, théories de jauge non abéliennes), en physique du problème à N-corps (physique nucléaire, physique de la matière condensée) et en physique statistique. Ces développements croisés ont culminé au début des années 1970 avec les applications du groupe de renormalisation à la fois (1) en physique des hautes énergies : construction du modèle standard des interactions électrofaibles et de la chromodynamique quantique, liberté asymptotique, et (2) en physique statistique par la théorie moderne des phénomènes critiques : les transitions de phase continues et les comportements critiques associés sont en fait décrits par des théories quantiques des champs !

Depuis lors ces idées et ces méthodes théoriques se sont appliquées à de très nombreux domaines de la physique statistique (phénomènes critiques, systèmes désordonnés, phénomènes hors équilibre, processus de croissance), de la physique de la matière condensée (physique des solides, matière molle, systèmes mésoscopiques), de la physique des systèmes quantiques (atomes froids), des systèmes dynamiques (transition vers le chaos, turbulence, systèmes complexes), pour citer les principaux. Elles sont en train d'irriguer et d'inspirer des domaines importants des mathématiques. Elles sont regroupées souvent sous le terme de « théorie statistique des champs ». Plutôt qu'une théorie comme la relativité ou la mécanique quantique, la théorie statistique des champs est une « boîte à outils » (outils venus de la physique statistique et de la physique quantique) dont le contenu est maintenant indispensable au physicien théoricien.

Ces succès reposent sur deux éléments.

(1) Tout d'abord il existe une analogie profonde entre le traitement mathématique des fluctuations thermiques en physique statistique et celui des « fluctuations quantiques » (principe d'incertitude) en physique quantique. Cette analogie est particulièrement claire dans la formulation de la mécanique quantique en termes d'intégrale de chemins (Feynman). Une intégrale de chemin

en « temps imaginaire » est analogue à une somme sur les micros états d'un système statistique classique 1D dans l'ensemble grand canonique, la constante de Planck \hbar jouant le rôle de la température T . Cette analogie se généralise très naturellement entre les champs quantiques en D dimensions d'espace et les systèmes statistiques étendus en $D + 1$ dimensions.

(2) Ensuite, les théories quantiques des champs (en général) et les phénomènes critiques sont des systèmes physiques avec un très grand nombre de degrés de liberté indépendants où les fluctuations (quantiques et statistiques) sont importantes sur une très grande gamme d'échelles de distance (longueur d'onde) et de fréquence (énergie). Leurs couplages et leur influence sur la dynamique « effective » du système ne peuvent être traités simplement. La théorie du groupe de renormalisation permet précisément de contrôler – plus ou moins proprement – ces couplages multi-échelles, en définissant proprement le concept de « théorie effective » et en permettant de calculer les « couplages effectifs ». Elle permet de dégager quels sont les degrés de liberté importants (en théorie quantique quels sont les champs) pour décrire la dynamique d'un système à une échelle donnée. De ce point de vue, le groupe de renormalisation a révolutionné notre façon d'aborder de nombreux problèmes en physique (nature des interactions fondamentales, émergence de comportements complexes, apparition de lois d'échelles) et au-delà.

Il faut aussi mentionner d'autres idées très importantes qui font partie de cette boîte à outils, en particulier dans l'étude des systèmes de basse dimensionnalité et des systèmes désordonnés : excitations topologiques (solitons, vortex, instantons) et effets non perturbatifs, solutions exactes et systèmes intégrables, invariance conforme, supersymétrie... Elles forment le socle de la théorie des cordes. Elles sont également à l'origine des contacts et de la fertilisation croisée entre la théorie quantique des champs et les mathématiques.

Enfin un certain nombre de méthodes de discrétisation (théories sur réseau, développements de couplage fort) et de méthodes de simulations numériques (Monte-Carlo), venues de la physique statistique, sont devenues des outils standards en théorie quantique des champs et en physique des hautes énergies.

0.7 Contenu de l'ouvrage

Cet ouvrage est donc une introduction aux applications de la théorie des champs à la mécanique statistique. Son contenu est cohérent, il peut être utilisé seul, ainsi que comme une introduction à certains aspects de la physique des champs et des particules, et à la physique statistique des systèmes à l'équilibre. Il ne dispense pas de la pratique de traités de théorie quantique des champs pour la physique des hautes énergies, ni d'ouvrages consacrés à la physique statistique et à la physique de la matière condensée.

Ce manuel est divisé en quatre grandes sections, et pour des raisons pratiques en deux tomes. Le premier tome se compose des parties I et II, et traite plutôt des aspects théorie quantique et théorie quantique des champs.

Le deuxième tome se compose des parties III et IV, et traite surtout des aspects liés à la physique statistique.

La partie I traite de l'intégrale de chemin en mécanique quantique. Le but de cette partie est de bien faire comprendre l'analogie entre physique statistique à l'équilibre et mécanique quantique (formalisme du temps imaginaire). Les chapitres 1, 2 et 3 en forment la partie essentielle. Les chapitres 4 et 5 présentent des aspects plus avancés. Ils peuvent être sautés en première lecture, et leurs différentes sections peuvent être lues indépendamment en général.

La partie II est une introduction à l'intégrale fonctionnelle en théorie quantique des champs, essentiellement dans le cas de la théorie ϕ^4 . Les formulations de la théorie à temps réel et à temps euclidien et les règles de Feynman pour construire la théorie des perturbations sont traitées dans les chapitres 6 et 7. La théorie de la renormalisation perturbative et les équations du groupe de renormalisation sont introduites en détail au premier ordre dans le chapitre 8. Une brève introduction aux aspects plus généraux de la renormalisation perturbative est donnée dans le chapitre 9. Les formulations non perturbatives de la renormalisation « à la Wilson » et l'équivalence entre la théorie des champs ϕ^4 renormalisée et la limite d'échelle au point critique du modèle d'Ising sont abordées plus bas.

La partie III traite de la physique statistique des phénomènes critiques et de la théorie du groupe de renormalisation dans l'espace réel. Un rappel des concepts de base de physique statistique est donné dans le chapitre 10. Les théories du champ moyen et de Landau des phénomènes critiques sont introduites dans le chapitre 11. Le principe de la théorie de K. Wilson du groupe de renormalisation et ses conséquences pour les phénomènes critiques sont donnés dans le chapitre 12. Le chapitre 13 est consacré à des calculs explicites sur la théorie de Landau-Ginsburg-Wilson (LGW), essentiellement dans l'approximation du potentiel local. Ceci illustre la puissance de la théorie de Wilson, et permet de discuter en profondeur les relations entre renormalisation de Wilson et renormalisation perturbative en théorie des champs.

La partie IV présente des applications physiques de la théorie statistique des champs en physique statistique et en physique de la matière condensée : applications de la théorie du groupe de renormalisation aux phénomènes critiques pour différents problèmes (chapitre 14) ; introduction aux modèles de spins classiques et quantiques (modèles sigma) et aux transitions topologiques (modèle XY et transition de Kosterlitz-Thouless) dans le chapitre 15 ; modèles d'interfaces et de surfaces fluctuantes dans le chapitre 16 ; introduction à la théorie des effets de taille finie dans le chapitre 17. Enfin le chapitre 18 est consacré à une introduction très succincte à l'invariance conforme, concept très important et encore en fort développement théorique (et en mathématiques).

En principe les parties I (intégrale de chemin en mécanique quantique) et III (mécanique statistique, phénomènes critiques et groupe de renormalisation) peuvent être lues indépendamment (bien que pour la fin de la partie II il vaille mieux avoir vu I et le début de II). La partie III (théorie quantique des champs) peut être lue à la suite de I et indépendamment de III.

Mettons en garde le lecteur à propos de ce qu'il ne trouvera pas, ou peu, dans cet ouvrage :

- une exposition détaillée aux méthodes numériques et de calcul formel (analyse des développements en séries de haute température, simulations par Monte-Carlo, matrice de transfert) ;
- une introduction aux méthodes exactes (systèmes intégrables, ansatz de Bethe, matrice S) ;
- un traité sur l'invariance conforme et les techniques reliées (gaz de Coulomb, dualité) ;
- une introduction à la physique des systèmes désordonnés (un sujet en soi) ;
- un traité sur les approches mathématiques rigoureuses (théorie constructive des champs, groupe de renormalisation exact, théorie de la renormalisation à tous les ordres) ;
- une introduction au groupe de renormalisation pour les systèmes quantiques.

0.8 Remerciements

Ce livre est issu principalement des notes destinées aux étudiants du cours de deuxième année du parcours « Physique théorique » du Master « Concepts fondamentaux de la physique », que j'ai donné à l'École normale supérieure (et dans les locaux de l'Université Denis Diderot) de 2001 à 2015. Je tiens à remercier tout particulièrement Jesper Jacobsen, qui m'a assisté pour construire et assurer les séances d'exercices, et m'a remplacé pour les cours à l'occasion pendant toutes ces années. Je suis également très reconnaissant à Édouard Brézin, à qui je dois l'opportunité d'avoir donné ce cours, ainsi qu'à Costas Bachas et Adel Bilal, qui ont coordonné ce parcours, et mes collègues enseignants et administratifs (en particulier Nicole Ribet et Mascia Reato). Cet ouvrage a également beaucoup bénéficié des cours que j'ai donnés dans d'autres établissements, à commencer par celui de théorie quantique des champs pour le programme *Perimeter Scholars International* du Perimeter Institute, que je donne depuis 2009, et de celui pour le programme doctoral de la Suisse romande que j'ai donné à l'École polytechnique fédérale de Lausanne. Je tiens donc à remercier chaleureusement Neil Turok, Tibra Ali, David Gerson et Dan Wohn du Perimeter, ainsi que Frédéric Mila et Aurelio Bay de l'EPFL. Avoir pu enseigner dans de telles institutions est pour moi une chance inestimable.

Michèle Leduc et Michel Le Bellac m'ont encouragé à faire de ces notes un ouvrage. Je les remercie infiniment pour leur persévérance et leur patience... Merci à Michel pour le temps passé à relire mes notes. De nombreux collègues m'ont à divers stades, encouragé, conseillé ou inspiré pour la préparation de

mes cours et l'écriture de ces notes. Je ne saurais me les remémorer tous, mais je tiens à mentionner, outre Jesper, Costas et Adel, D. Bernard, M. Bauer, O. Parcollet, J. Zinn-Justin.

Enfin, mes remerciements et ma gratitude vont bien sûr à tous les étudiants et les étudiantes qui ont suivi mes cours, pour leur intérêt, leur patience, leurs questions et leurs critiques. Ce sont eux qui ont été ma principale source de motivation pour travailler ce cours et ces notes.

0.9 Bibliographie sommaire

La littérature sur le sujet est très riche, et il existe déjà d'excellents ouvrages d'introduction à la physique quantique, la physique statistique, la théorie des champs et la théorie statistique des champs. Cet ouvrage essaye d'avoir une présentation quelque peu originale du sujet, surtout en ce qui concerne les relations entre groupe de renormalisation perturbatif et groupe de renormalisation wilsonien, mais je me suis inspiré consciemment ou inconsciemment de plusieurs ouvrages et cours que j'ai eu l'occasion de suivre.

Ouvrages en français

En mécanique classique des ouvrages de base sont le livre de Landau-Lifchitz [LL94] et le livre d'Arnold [Arn74]. Pour la mécanique quantique des références sont les deux volumes incontournables Cohen-Diu-Laloë [CTDL73a] et le récent troisième volume Cohen-Laloë-Diu [CTLD17], ainsi que le Le Bellac [LB13a, LB13b]. Pour une introduction à la mécanique statistique on peut citer les deux volumes de cours de R. Balian [Bal82, Bal94]. Une introduction détaillée à l'intégrale de chemin en mécanique quantique est le livre de J. Zinn-Justin [ZJ12].

Le classique (un peu ancien) Itzykson-Zuber [IZ13] est une bonne introduction à la théorie quantique des champs, plutôt du point de vue physique des hautes énergies.

Des introductions classiques à la théorie statistique des champs sont les deux volumes du (un peu plus récent) Itzykson-Drouffe [ID13, ID89], et le Le Bellac [LB12].

Ouvrages en anglais

Si l'on passe à l'anglais, qui est la lingua franca de la communauté scientifique, et tend à le devenir pour l'enseignement pré-doctoral et doctoral, la littérature devient immense.

Les ouvrages en français précités sont pour la plupart disponibles en version anglaise : pour la mécanique quantique le Cohen-Diu-Laloë [CTDL92], le Le Bellac [LB06], le Zinn-Justin [ZJ10] ; pour la théorie des champs le Itzykson-Zuber [IZ12], le Itzykson-Drouffe [ID91], le Le Bellac [LBB91].

Des ouvrages très classiques sont pour la théorie quantique des champs (donc surtout orientés physique des hautes énergies) : Le Weinberg [Wei95] (le premier des trois volumes pour ce qui est traité ici), le Peskin-Schroeder [PS18]. Le Zinn-Justin [ZJ02] est une bible orientée à la fois vers la physique des hautes énergies et la physique statistique. Beaucoup moins rigoureux et moins complet, mais stimulant est le Zee [Zee10]. Et pour ne pas oublier l'école russe, citons l'inspirant livre de Polyakov [Pol87].

Pour la théorie statistique des champs et ses applications à la mécanique statistique, citons (outre le Zinn-Justin) le Parisi [Par98], et plus courts, mais plus récents le Brézin [Bré10] et le Cardy [Car96]. Des ouvrages récents orientés vers la physique de la matière condensée sont le Tsvelik [Tsv07], le Fradkin [Fra13] et la très complète introduction à la physique de la matière condensée de Chaikin et Lubensky [CL00].

Des références de base sur les méthodes mathématiques pour la physique théorique, indispensables pour un lecteur peu familier avec les outils mathématiques utilisés dans cet ouvrage, sont le Schwartz [SH82] et le Courant-Hilbert [CH08] (ancien, mais actualisé), et le plus récent et moderne Stone et Goldbart [SG09].

Des références plus précises ou plus avancées seront données à la fin des différents chapitres.

0.10 Plan structuré

Basique (première lecture)

Avancé (optionnel)

TOME 1

1 Rappels de mécanique classique et quantique
2 Intégrale de chemin : introduction
3 Intégrale de chemin et physique statistique

4 Intégrale de chemin : présentation générale
5 Bosons, fermions et spins

6 Intégrale fonctionnelle : le champ libre
7 ϕ^4 : théorie des perturbations
8 ϕ^4 : renormalisation à 1 boucle

9 Renormalisation : théorie générale

TOME 2

10 Rappel sur les phénomènes critiques
11 La théorie du champ moyen
12 Le groupe de renormalisation de Wilson

13 Relations avec la théorie des champs

14 Applications de la théorie de Landau-Ginsburg-Wilson

15 Modèles de spins et modèles sigma
16 Surfaces, interfaces et membranes
17 Effets de taille finie
18 Invariance conforme

Troisième partie

Mécanique statistique : phénomènes critiques et groupe de renormalisation

Chapitre 10

Rappels : introduction aux phénomènes critiques, le modèle d'Ising

10.1 Introduction

Ce chapitre est une introduction à la physique des phénomènes critiques, essentiellement sur l'exemple du modèle d'Ising, modèle statistique simple présentant un point critique. Nous rappelons tout d'abord sur l'exemple des systèmes magnétiques ce que sont les transitions de phase et les points critiques, et leurs caractéristiques (fluctuations critiques, lois d'échelle, exposants critiques, universalité). Sur l'exemple du modèle d'Ising, les outils théoriques de base de la physique statistique à l'équilibre (fonctions thermodynamiques, potentiel de Gibbs, matrice de transfert) sont donnés. Dans le chapitre suivant 11, nous discuterons la théorie du champ moyen, qui permet de comprendre qualitativement la physique des points critiques et l'apparition de comportements d'échelle, mais qui n'est en général pas valable lorsque l'on est très près du point critique (domaine critique). Ensuite, dans le chapitre 12, la théorie de Wilson du groupe de renormalisation est présentée. Elle permet de comprendre quantitativement les propriétés des points critiques et l'existence des lois d'échelle. Enfin, dans le chapitre 13, nous discuterons les relations entre groupe de renormalisation de Wilson en physique statistique et groupe de renormalisation pour les théories quantiques des champs, et pourquoi ce sont des théories quantiques des champs qui décrivent la physique au voisinage des points critiques.

10.2 Brève introduction aux phénomènes critiques : exposants critiques, lois d'échelle et universalité

Un exemple classique de phénomène critique est la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique au point de Curie dans les matériaux magnétiques. Je renvoie aux manuels de physique statistique et de physique de la matière condensée pour une présentation précise du sujet. Je ne vais considérer ici que des situations très idéalisées où on peut décrire la physique de la transition par des modèles simples, qui permettent de capturer l'essence de la physique sous-jacente à la transition de phase.

10.2.1 Transition ferro-paramagnétique et point critique

Dans ces matériaux, à basse température il existe une aimantation spontanée globale $\vec{\mathcal{M}}_0$. Dans des domaines de taille macroscopique (très grande devant la maille élémentaire du cristal), l'aimantation est non nulle et homogène. La physique des domaines d'aimantation et des parois de domaine est riche et complexe, mais nous allons simplifier énormément les choses en nous intéressant à ce qui se passe dans un seul domaine. Nous allons de plus traiter le cas d'un ferromagnétique uniaxe, c'est-à-dire un matériau très anisotrope tel que l'aimantation spontanée ne peut s'orienter que dans une seule direction (disons l'axe z , tel que $\vec{\mathcal{M}}_0 = \mathcal{M}_0 \vec{e}_z$). Pour sélectionner une aimantation spontanée, \mathcal{M}_0 , on applique au matériau un champ magnétique externe B (selon l'axe z), auquel cas il apparaît une aimantation induite \mathcal{M} (du même signe que B). À basse température (matériau ferromagnétique) lorsque l'on fait tendre B vers 0, l'aimantation tend vers $\pm \mathcal{M}_0$ (l'aimantation spontanée) suivant le signe de B . Lorsque $B = 0$ l'aimantation est discontinue, puisqu'elle saute de $+\mathcal{M}_0$ à $-\mathcal{M}_0$ (transition du premier ordre).

Par contre à haute température le matériau devient paramagnétique : l'aimantation spontanée en champ nul est nulle et l'aimantation \mathcal{M} varie

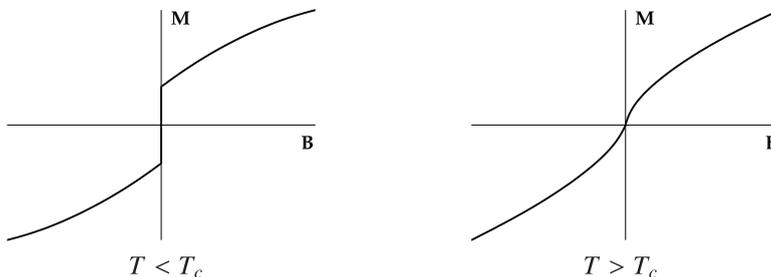


FIGURE 10.1 – Variation de l'aimantation induite \mathcal{M} avec le champ externe B dans la phase ferromagnétique et la phase paramagnétique.

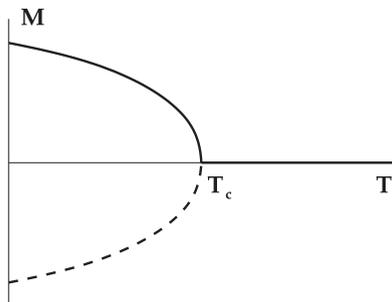
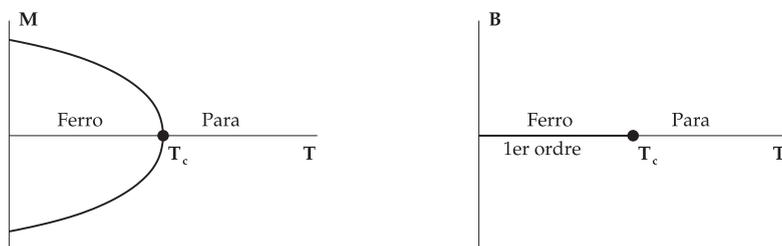
FIGURE 10.2 – Variation de l'aimantation spontanée \mathcal{M}_0 avec la température T .

FIGURE 10.3 – Diagramme température-aimantation (à gauche) et température-champ magnétique (à droite).

continûment avec B quand B change de signe. Dans les cas qui nous intéressent, la transition entre la phase ferro (basse température) et la phase para (haute température) est une transition de phase continue (transition du deuxième ordre). À la température critique (la température de Curie) T_c , l'aimantation spontanée \mathcal{M} s'annule continûment. Les diagrammes de phase du système dans les variables température-aimantation et température-champ magnétique sont illustrés figure 10.3.

10.2.2 Paramètre d'ordre et brisure de symétrie

La caractéristique principale du point critique est qu'il sépare deux phases thermodynamiques où la symétrie du matériau est réalisée d'une façon différente. Dans un magnétique uniaxe le matériau doit être au niveau microscopique invariant sous une réflexion dans un plan orthogonal à l'axe z , c'est-à-dire sous la transformation

$$z \rightarrow -z$$

tant que le champ externe B est nul bien sûr.

Dans la phase paramagnétique ($T > T_c$), cette symétrie est satisfaite. En effet le système est dans une seule phase thermodynamiquement stable, telle

que sous une réflexion $z \rightarrow -z$ l'aimantation spontanée reste inchangée puisque $\mathcal{M} \rightarrow -\mathcal{M} = \mathcal{M} = 0$. Cette phase est la *phase désordonnée*.

Par contre dans la phase ferromagnétique ($T < T_c$), cette symétrie est *spontanément brisée*. En effet le système possède maintenant deux phases thermodynamiques stables et distinctes : celle d'aimantation positive \mathcal{M} et celle d'aimantation opposée $-\mathcal{M}$. Sous la réflexion $z \rightarrow -z$ les deux phases s'interchangent. Ces deux phases pures sont les *phases ordonnées* du système. L'aimantation spontanée \mathcal{M} est le *paramètre d'ordre de la transition*.

10.2.3 Singularités au point critique et exposants critiques

La première caractéristique d'une transition du deuxième ordre est que les quantités thermodynamiques du système se comportent de façon continue au point critique, mais que leurs dérivées sont (en général) divergentes à la transition. Le point critique apparaît donc mathématiquement comme une singularité dans le diagramme de phase. Les divergences sont caractérisées par des exposants critiques.

Pour notre système, les deux quantités thermodynamiques à considérer sont l'énergie interne par unité de volume E_v et l'aimantation par unité de volume \mathcal{M}_v . Ces deux quantités s'obtiennent à partir de l'énergie libre totale F , qui est une fonction de la température T et du champ magnétique appliqué B , comme les dérivées

$$E_v = \frac{E}{\mathcal{V}} = -\frac{T^2}{\text{Vol.}} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \quad , \quad \mathcal{M}_v = \frac{1}{\text{Vol.}} \frac{\partial F}{\partial B} \quad (10.1)$$

où Vol. est le volume du système. Si la transition est continue et du deuxième ordre E_v et \mathcal{M}_v sont continues au point critique $(T, B) = (T_c, 0)$. Par contre on constate expérimentalement que leurs dérivées, la *chaleur spécifique par unité de volume* C_v et la *susceptibilité magnétique* (par unité de volume) χ

$$C_v = \frac{\partial E_v}{\partial T} \quad , \quad \chi = \frac{\partial \mathcal{M}_v}{\partial B} \quad (10.2)$$

divergent au point critique. La divergence de ces quantités est algébrique, c'est-à-dire donnée par des lois de puissance caractérisées par des *exposants critiques* (appelés aussi indices critiques). Les singularités de C_v et χ définissent quatre exposants critiques, notés dans la littérature α , β , γ et δ . Les trois premiers se réfèrent au comportement du système en champ nul ($B = 0$) quand $T \rightarrow T_c$.

$$C_v(T) \propto |T - T_c|^{-\alpha} \quad (10.3)$$

$$\mathcal{M}_v(T) \propto |T - T_c|^\beta \quad (10.4)$$

$$\chi(T) \propto |T - T_c|^{-\gamma} \quad (10.5)$$

L'exposant δ se réfère au comportement de l'aimantation en fonction du champ à la température critique

$$\mathcal{M}_v(T_c, B) \propto |B|^{\frac{1}{\delta}} \quad (10.6)$$

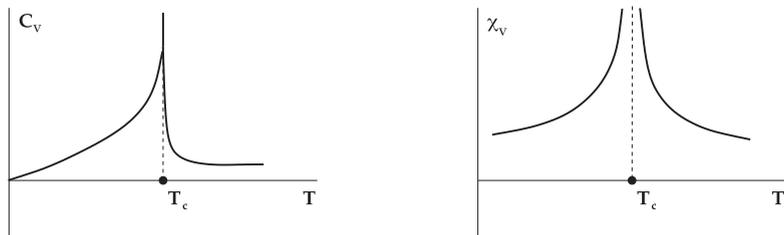


FIGURE 10.4 – Divergences de la chaleur spécifique et de la susceptibilité magnétique au point critique.

En anticipant sur la suite, la théorie simple du champ moléculaire (Curie-Weiss) ou théorie du champ moyen prédit pour ces exposants les valeurs

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1/2 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad \delta = 3 \quad (10.7)$$

10.2.4 Corrélations et fluctuations au point critique, longueur de corrélation et exposants associés

La seconde caractéristique essentielle d'une transition continue est qu'il existe dans le système des fluctuations thermodynamiques très importantes en amplitude et sur de grandes échelles spatiales et temporelles. L'existence de singularités dans les quantités thermodynamiques est en fait la conséquence de ces *fluctuations critiques*.

Corrélations : Pour mesurer ces fluctuations, il faut considérer les corrélations entre quantités thermodynamiques locales du système. On définit donc l'aimantation locale $m(x)$ au point x comme la moyenne spatiale de l'aimantation sur un petit domaine autour de x , domaine très petit devant la taille de l'échantillon, mais qui est bien sûr plus grand que la distance interatomique. L'aimantation globale par unité de volume \mathcal{M} est bien sûr donnée par la valeur moyenne de la moyenne spatiale de $m(x)$

$$\mathcal{M}_v = \frac{1}{V} \int dx \langle m(x) \rangle = \langle m \rangle \quad (10.8)$$

où $\langle \rangle$ désigne la moyenne sur les fluctuations thermiques (voir plus loin les rappels de mécanique statistique).

L'aimantation locale fluctue autour de sa valeur moyenne. Ces fluctuations sont mesurées par

$$\tilde{m}(x) = m(x) - \langle m(x) \rangle$$

La fonction de corrélation spatiale de \tilde{m} en deux points est la fonction à deux points connexe ¹

$$G(x, y) = \langle \tilde{m}(x)\tilde{m}(y) \rangle = \langle m(x)m(y) \rangle - \langle m(x) \rangle \langle m(y) \rangle \quad (10.9)$$

$G(x, x)$ mesure l'amplitude des fluctuations de m autour de sa valeur moyenne au point x (variance). $G(x, y)$ mesure les corrélations entre les fluctuations de m aux points x et y . En pratique, dans des matériaux magnétiques, la transformée de Fourier de la fonction de corrélation est accessible par des expériences de diffusion de neutrons ou de rayons X.

Longueur de corrélation : On observe de façon générale que cette fonction de corrélation décroît exponentiellement à grande distance comme

$$G(x - y) \propto \exp(-|x - y|/\xi) \quad \text{quand} \quad |x - y| \rightarrow \infty \quad (10.10)$$

où ξ est la *longueur de corrélation* pour les fluctuations d'aimantation (en pratique ξ dépend légèrement de l'orientation du vecteur $x - y$ par rapport aux axes cristallographiques, mais cette anisotropie s'avère négligeable au voisinage du point critique, pour des raisons que l'on verra plus loin). La longueur de corrélation définit la distance sur laquelle les fluctuations des aimantations locales sont corrélées.

Loin du point critique, la longueur de corrélation ξ est petite (typiquement de l'ordre de la portée des forces d'échange entre moments magnétiques, quelques mailles de réseau tout au plus). Dans la phase paramagnétique où l'aimantation moyenne est nulle, ξ est la taille typique des domaines où l'aimantation locale est de signe donné. Dans la phase paramagnétique, ξ est la taille typique des îlots où l'aimantation locale est du signe opposé à celui de l'aimantation globale. Ceci est représenté dans la figure 10.5.

Près du point critique, la longueur de corrélation devient très grande et elle devient infinie au point critique. Cette divergence reflète la présence des fluctuations critiques. Toutes les échelles sont présentes dans les fluctuations de l'aimantation locale et les configurations microscopiques ont un caractère fractal. Ceci est représenté sur la figure 10.6.

Exposants ν et η : À cette divergence sont aussi associés deux exposants critiques, notés ν et η . Quand T tend vers la température critique T_c (à champ nul), ξ diverge en effet en suivant une loi de puissance

$$\xi \propto |T - T_c|^{-\nu} \quad (10.11)$$

qui définit l'exposant ν de la longueur de corrélation. Puisqu'à $T = T_c$ $\xi = \infty$, ceci veut dire que la fonction de corrélation à deux points $G(x, y)$ décroît à

¹ La dénomination *connexe* vient du fait que dans une représentation diagrammatique, seuls les diagrammes connexes contribuent à $G(x, y)$, tandis que les diagrammes non connexes contribuent aussi à $\langle m(x)m(y) \rangle$. En théorie des probabilités et en statistiques, les fonctions connexes sont les cumulants de la variable aléatoire $m(x)$.

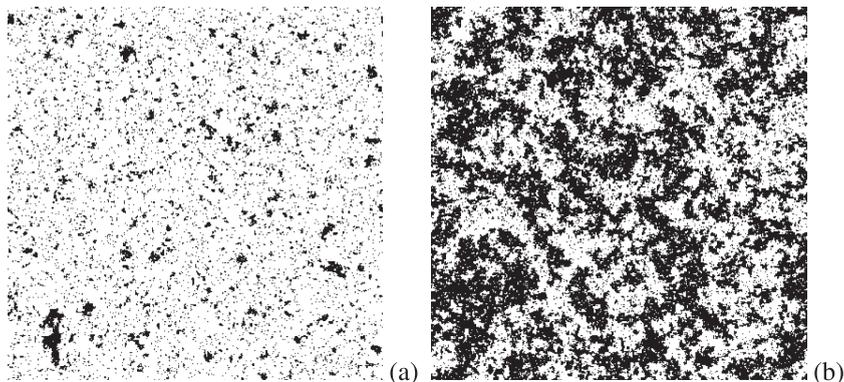


FIGURE 10.5 – Configurations typiques des domaines d’aimantation pour le modèle d’Ising en $D=2$ dans la phase ferromagnétique (a) et dans la phase paramagnétique (b). Le noir représente les spins $s = +1 = \uparrow$, le blanc les spins $s = -1 = \downarrow$.

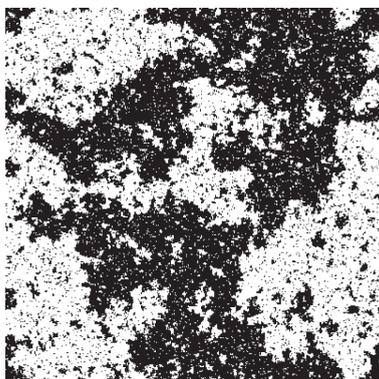


FIGURE 10.6 – Configurations typiques des domaines d’aimantation pour le modèle d’Ising en $D=2$ au point critique.

grande distance plus lentement que toute exponentielle ; en fait elle décroît aussi en suivant une loi algébrique de la forme

$$G(x, y) \propto |x - y|^{2-D-\eta} \quad , \quad \text{quand} \quad |x - y| \rightarrow \infty \quad (10.12)$$

où D est la dimensionnalité du système² et η est l’exposant de la fonction de corrélation. Cette définition de η vient du fait qu’on a accès à la transformée de Fourier $\hat{G}(k)$ de G dans l’espace réciproque, et que le comportement algébrique pour G devient une divergence algébrique à petit vecteur d’onde pour \hat{G}

$$\hat{G}(k) \propto \frac{1}{|k|^{2-\eta}} \quad , \quad \text{quand} \quad |k| \rightarrow 0 \quad (10.13)$$

² $D = 3$ pour les matériaux usuels, mais on peut fabriquer et étudier des matériaux de structure bidimensionnelle ($D = 2$) et unidimensionnelle ($D = 1$).

En anticipant encore sur la suite, la théorie du champ moyen prédit pour ces exposants les valeurs

$$\nu = 1/2 \quad , \quad \eta = 0 \quad (10.14)$$

10.2.5 Universalité et lois d'échelle

Les phénomènes critiques sont intéressants, car ils soulèvent des questions fondamentales sur la physique des systèmes avec un grand nombre de degrés de liberté, en particulier sur l'émergence d'une dynamique non triviale sur une gamme très grande d'échelles de longueur (de vecteur d'onde) ou de temps (d'énergie).

Invariance d'échelle au point critique

Au point critique, les fluctuations (thermodynamiques) sont importantes à toutes les échelles de distance. Si on étudie la dynamique des fluctuations au point critique, elles sont aussi importantes à toutes les échelles de temps. Ceci entraîne le phénomène du *ralentissement critique*. Les temps de corrélations, comme les longueurs de corrélations, divergent au point critique. En conséquence, les configurations typiques (les échantillons de configurations dans un langage de statistique) présentent un caractère fractal et des propriétés d'invariance d'échelle au point critique.

Lois et relations d'échelle

On constate que près du point critique les fonctions de corrélations (les observables) prennent des formes *universelles* qui ne dépendent que des rapports des distances avec la longueur de corrélation. Par exemple, la fonction à deux points se comporte comme

$$G(x, y; T) \propto H(|x - y|/\xi(T)) \quad (10.15)$$

où H est une *fonction d'échelle* universelle. Cette propriété a été observée et postulée être générale pour des systèmes proches de la criticalité par B. Widom (*hypothèse d'échelle* ou *scaling hypothesis*). Cette hypothèse entraîne que certains rapports entre quantités physiques sont aussi universels au voisinage d'un point critique. Par exemple, si la longueur de corrélation diverge en T_c comme

$$\xi = \begin{cases} X_+(T - T_c)^{-\nu} & \text{quand } T > T_c \\ X_-(T - T_c)^{-\nu} & \text{quand } T < T_c \end{cases} \quad (10.16)$$

le rapport X_+/X_- est une quantité universelle. De telles quantités sont appelées *rappports d'amplitudes* critiques.

Les exposants critiques ne sont pas donnés par la théorie simple du champ moyen. Cependant il existe des *relations d'échelle* entre eux. Par exemple, les

exposants α , β , γ et δ s'expriment en fonction des deux exposants ν et η

$$\alpha = 2 - \nu D \quad (10.17)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\nu(D - 2 + \eta) \quad (10.18)$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (10.19)$$

$$\delta = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} \quad (10.20)$$

Certaines de ces relations découlent déjà de l'hypothèse d'échelle. Mais la justification de cette hypothèse et la démonstration de ces relations n'ont été fournies que par la théorie du groupe de renormalisation de Wilson.

Universalité

Les exposants critiques sont les mêmes dans la phase paramagnétique et la phase ferromagnétique. Différents systèmes magnétiques du même type (ferromagnétique uniaxe) et des modèles simples comme le modèle d'Ising (voir plus loin) ont le même comportement critique : mêmes exposants critiques, mêmes fonctions d'échelle pour les fonctions de corrélations près du point critique, mêmes rapports d'amplitudes.

De plus, des systèmes physiques complètement différents peuvent avoir le même comportement critique. Par exemple, le point critique des *fluides binaires* est le même que celui des ferromagnétiques uniaxes ! Les variables *température* T et *fraction relative* x des deux constituants remplacent les variables température T et aimantation moyenne M . Ceci est vérifié pour les mélanges binaires de liquides non polaires. *A priori* le point critique d'un fluide comme l'eau est du même type, mais les interactions à longue portée, dues à la nature polaire de fluide et aux forces de van der Waals, modifient la nature du point critique.

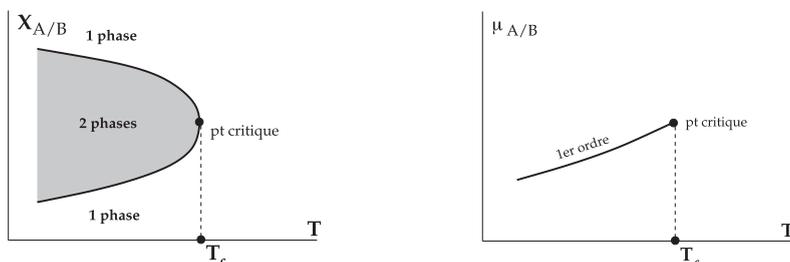


FIGURE 10.7 – Diagramme de phase et point critique pour les fluides binaires dans les variables température/fraction relative (gauche) et température/potentiel chimique relatif (droite).

Autres systèmes et classes d'universalité

La nature de paramètre d'ordre et la dimensionnalité du système influent sur le comportement critique. Les ferromagnétiques bi-axes (l'aimantation est dans un plan) ou habituels (l'aimantation peut prendre toutes les orientations) ont des comportements critiques différents. Des systèmes physiques ont des paramètres d'ordre plus complexes (systèmes magnétiques frustrés) ou d'autres interactions interviennent (désordre par exemple). Il existe plusieurs classes d'universalité caractérisées par des comportements critiques différents. Mais les relations d'échelle sont toujours satisfaites.

Le tableau suivant donne des exemples pour le modèle d'Ising (système magnétique avec $N = 1$ composante), le modèle XY (modèle à $N = 2$ composantes), le modèle de Heisenberg ou modèle O(3) (modèle à $N = 3$ composantes), et le polymère en bon solvant (équivalent à la marche aléatoire auto-évitante ou *self avoiding walk* = SAW), qui peut être formulé aussi comme un système magnétique avec $N = 0$ composante ! Les valeurs des exposants en $D = 2$ sont exactes et obtenues par les méthodes des systèmes intégrables et de la théorie des champs conforme. Les valeurs très précises pour le modèle d'Ising en $D = 3$ sont obtenues par les méthodes de « bootstrap conforme ».

	α	β	γ	δ	ν	η
Champ moyen	0	1/2	1	3	1/2	0
Ising $D = 3$	0,11008	0,32642	1,23707	4,78984	0,62997	0,03629
Ising $D = 2$	0	1/8	7/4	15,0	1	1/4
XY $D = 3$	0,0	0,34	1,31		0,67	0,03
O(3) $D = 3$	-0,1	0,36	1,38		0,70	0,03
SAW $D = 3$	0,23	0,30	1,16		0,58	0,03
SAW $D = 2$	1/2	15/192	43/32	91/5	3/4	5/24

Les comportements critiques sont donc *universels*. Des systèmes physiques différents ont en général le même comportement critique si la symétrie et le schéma de brisure caractérisant leurs points critiques respectifs sont les mêmes. On dit que ces systèmes, ou plus précisément ces points critiques appartiennent à la même *classe d'universalité*.

Invariance d'échelle en physique

L'apparition de fluctuations spatiales et temporelles sur de grandes gammes d'échelles et l'invariance d'échelle peut se manifester pour des systèmes et dans des contextes différents. Citons quelques exemples :

- Matière molle : polymères, cristaux liquides, colloïdes, membranes
- Systèmes hors d'équilibre : processus de croissance, agrégation, fractures, coalescence
- « Systèmes critiques auto-organisés », turbulence développée

- Systèmes fractals
- Systèmes dynamiques et « systèmes complexes » : économie, biologie, astrophysique

Une question essentielle, à laquelle la théorie du groupe de renormalisation a apporté un point de vue nouveau et des réponses précises dans de nombreux cas est la suivante : l'émergence de propriétés d'échelle et de comportements universels, indépendants des détails microscopiques des interactions et de la dynamique, peut-elle être décrite et comprise par des mécanismes et un cadre conceptuel théorique simples ?

10.3 Rappels de mécanique statistique et modèle d'Ising

Dans cette section on rappelle les concepts de base de physique statistique pour les systèmes à l'équilibre, sur l'exemple du modèle d'Ising.

10.3.1 Le modèle d'Ising

Le modèle d'Ising est un modèle simple de spin classique à deux états sur réseau. On considérera un *réseau hypercubique* Λ de maille $a = 1$. Pour le système infini $\Lambda = \mathbb{Z}^D$. Pour un système fini, pour simplifier on considérera un réseau de taille $L = Na$ (N entier) avec des conditions aux limites périodiques, c'est-à-dire un tore $\Lambda = (\mathbb{Z}_N)^D$. La coordinance (nombre de voisins) d'un site est $C = 2D$. Les sites sont étiquetés par un vecteur entier $i = (i_1, \dots, i_D) \in \mathbb{Z}^D$. On pourra aussi considérer des réseaux triangulaires, anisotropes, des conditions aux limites plus compliquées, etc. À chaque site i est attaché un spin classique S_i qui prend la valeur ± 1 .

$$S_i = \pm 1$$

Le couplage entre spins est un *couplage ferromagnétique* entre plus proches voisins, c'est-à-dire entre les spins qui sont sur des sites i et j appartenant à un lien $\langle ij \rangle$ du réseau. De façon compacte on notera \mathbf{S} (en gras) une configuration $\mathbf{S} = \{S_i; i \in \Lambda\}$ des spins sur le réseau Λ . L'énergie d'une configuration $\mathbf{S} = \{S_i\}$ est donnée par le hamiltonien³ de Ising-Lenz

$$\mathcal{H}[\mathbf{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j \quad , \quad J > 0 \quad \text{couplage} \quad (10.21)$$

³ Mathématiquement \mathbf{S} est une fonction de $\Lambda = \mathbb{Z}^D \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ et le hamiltonien $\mathcal{H}[\mathbf{S}]$ est une fonction de la fonction \mathbf{S} , c'est-à-dire une fonctionnelle de tous les spins. Dans toute la suite on désignera une fonction f d'une simple variable x avec des parenthèses par $f(x)$. On notera une fonctionnelle \mathcal{F} d'une fonction \mathbf{X} avec des crochets par $\mathcal{F}[\mathbf{X}]$.

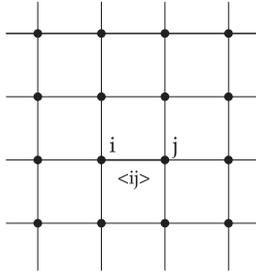


FIGURE 10.8 – Le réseau carré 2D.

Cette énergie est minimale quand tous les spins sont alignés. En présence d'un champ magnétique externe B , il faut rajouter à \mathcal{H} un terme en $-B \sum_i S_i$

$$\mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - B \sum_i S_i \quad , \quad B \text{ champ externe} \quad (10.22)$$

10.3.2 Ensemble canonique, fonction de partition

L'ensemble canonique décrit un système en équilibre avec un thermostat à température T . Le poids de Boltzmann d'une configuration \mathbf{S} est

$$w[\mathbf{S}] = \exp(-\beta \mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}]) \quad , \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (10.23)$$

Pour simplifier, on absorbe le facteur de Boltzmann dans la définition de la température, c'est-à-dire

$$k_B = 1 \quad ; \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (10.24)$$

La fonction de partition du système à température T est donnée par la somme sur toutes configurations

$$Z = \sum_{\mathbf{S}} w[\mathbf{S}] \quad (10.25)$$

et les valeurs moyennes à l'équilibre des observables $A[\mathbf{S}]$ sont données par

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{\mathbf{S}} A[\mathbf{S}] w[\mathbf{S}]}{\sum_{\mathbf{S}} w[\mathbf{S}]} \quad (10.26)$$

L'énergie libre est

$$F = -T \log Z \quad (10.27)$$

et l'énergie interne est

$$E = \langle \mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] \rangle = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \log Z = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{T} \right) \quad (10.28)$$

L'aimantation totale \mathcal{M} est

$$\mathcal{M} = \left\langle \sum_i S_i \right\rangle = - \frac{\partial F}{\partial B} \quad (10.29)$$

et l'aimantation moyenne par site m est

$$m = \mathcal{M}/V \quad ; \quad V \text{ volume du système} \quad (10.30)$$

10.3.3 Observables et fonctions de corrélation

La chaleur spécifique totale est

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = T^2 (\langle \mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] \mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] \rangle - \langle \mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] \rangle \langle \mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] \rangle) \quad (10.31)$$

et la chaleur spécifique par unité de volume est $C_v = C/V$. La susceptibilité magnétique est

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial B} = \frac{1}{V} \sum_{ij} \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle \quad (10.32)$$

On voit apparaître la *fonction de corrélation connexe de deux spins* (déjà introduite pour les systèmes magnétiques)

$$G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

et la relation entre χ et G_{ij} est le premier exemple d'une relation de type *fluctuation-dissipation* reliant ici la susceptibilité magnétique, une quantité caractérisant la *réponse* du système à une perturbation (ici magnétique), à l'intégrale d'une quantité mesurant les *fluctuations à l'équilibre* du système, la fonction de corrélation à deux spins

$$\chi = \sum_j G_{ij} = \sum_j \langle S_i S_j \rangle^{\text{connexe}} \quad (10.33)$$

De la même façon, la chaleur spécifique (réponse du système à une perturbation de température) est reliée (à $B = 0$) à la fonction de corrélation de l'observable *d'énergie locale* E_i associé à un site, définie comme

$$E_i = - \frac{J}{2} \sum_{j \text{ voisin de } i} S_i S_j \quad , \quad C_v = T^2 \sum_j \langle E_i E_j \rangle^{\text{connexe}} \quad (10.34)$$

10.3.4 Limite thermodynamique

Rappelons que dans la phase de haute température (paramagnétique) il n'y a qu'une phase thermodynamique stable en champ nul $B = 0$. La limite thermodynamique (limite de volume infini) $V \rightarrow \infty$ et la limite de champ nul $B \rightarrow 0$ commutent.

Par contre dans la phase de basse température (ferromagnétique) il y a deux phases pures stables possibles, d'aimantation respective $m = \pm m_0$. Pour que le système soit dans une de ces phases pures, disons celle où $m = m_0 > 0$, il faut d'abord prendre la limite thermodynamique $V \rightarrow \infty$ en champ non nul $B > 0$, puis prendre la limite de champ nul $B \rightarrow 0_+$. Si à l'inverse on prend d'abord la limite de champ nul $B \rightarrow 0$ à volume fini $V < \infty$, puis que l'on prend la limite thermodynamique $V \rightarrow \infty$, le système est dans une phase mixte (mélange équiprobable des deux phases pures) et l'aimantation totale moyenne est nulle $m = 0$. Les limites thermodynamiques et de champ nul ne commutent donc pas, on dit que la symétrie \mathbb{Z}_2 qui change le signe de tous les spins $m \longleftrightarrow -m$ est *spontanément brisée*.

10.4 Potentiel thermodynamique et transformation de Legendre

10.4.1 Définition

Introduction

Une quantité importante est le *potentiel thermodynamique* ou *potentiel de Gibbs*. C'est l'analogue en physique statistique de l'action effective introduite en théorie quantique des champs. On l'appellera donc souvent *potentiel effectif*. Il possède les mêmes propriétés mathématiques, mais on va rappeler sa définition et ses propriétés dans le contexte du modèle d'Ising pour avoir des notations cohérentes dans ce chapitre.

Le potentiel thermodynamique permet d'étudier le modèle d'Ising en fonction de son aimantation (spontanée ou induite) \mathcal{M} plutôt que du champ appliqué B qui a permis d'obtenir cette aimantation. Il est défini par une transformée de Legendre à partir de l'énergie libre, de la même façon qu'en thermodynamique on passe des propriétés d'un gaz en fonction du volume, données par son énergie interne E , à celles du gaz en fonction de la pression, données par son enthalpie H .

Source externe et aimantation locale

On couple chaque spin S_i à un *champ externe* (appelé aussi *source externe*) h_i . Chaque source h_i est un paramètre indépendant, fixé, alors que l'on fait la moyenne sur les configurations de spin. Comme pour les S_i on notera \mathbf{h} une configuration de ces champs externes

$$\mathbf{h} = \{h_i; i \in \Lambda\} \quad (10.35)$$

Le hamiltonien total du système couplé à la source est donc

$$\mathcal{H}_{\mathbf{h}}[\mathbf{S}] = \mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] - \mathbf{h} \cdot \mathbf{S}, \quad \text{avec } \mathbf{h} \cdot \mathbf{S} = \sum_i h_i S_i \quad (10.36)$$

Sa fonction de partition Z et son énergie libre F sont maintenant des fonctions des sources $\{h_i\}$, donc des fonctionnelles de \mathbf{h} (et toujours des fonctions de J/T et de B/T).

$$Z[\mathbf{h}] = \sum_{\{S_i\}} e^{-\frac{1}{T}(\mathcal{H}_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] - \mathbf{h} \cdot \mathbf{S})} \quad , \quad F[\mathbf{h}] = -T \log Z[\mathbf{h}] \quad (10.37)$$

Comme en théorie des champs le logarithme de la fonction de partition est la fonction génératrice connexe⁴ du système W .

$$W[\mathbf{h}] = T \log Z[\mathbf{h}] = -F[\mathbf{h}] \quad (10.38)$$

L'aimantation locale m_i du site i , en présence des sources, est simplement la dérivée partielle de W par rapport à la source h_i du site i

$$m_i = \langle S_i \rangle_{\mathbf{h}} = \frac{\partial W[\mathbf{h}]}{\partial h_i} \quad (10.39)$$

De même, la fonction de corrélation connexe à deux spins est donnée par la dérivée seconde de W par rapport aux sources

$$G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle_{\mathbf{h}} - \langle S_i \rangle_{\mathbf{h}} \langle S_j \rangle_{\mathbf{h}} = T \frac{\partial^2 W[\mathbf{h}]}{\partial h_i \partial h_j} \quad (10.40)$$

Définition du potentiel effectif $\Gamma[\mathbf{m}]$

Maintenant au lieu de considérer que les aimantations m_i dépendent des champs externes h_i , inversons les variables et considérons que ce sont les h_i qui sont des fonctions des m_i .

$$m_i = m_i[\mathbf{h}] \quad \rightarrow \quad h_i = h_i[\mathbf{m}]$$

Le potentiel effectif Γ est défini par la transformée de Legendre de F par rapport aux h_i , c'est-à-dire que c'est la fonction des m_i définie comme

$$\Gamma[\mathbf{m}] = \mathbf{m} \cdot \mathbf{h} - W[\mathbf{h}] ; \quad m_i[\mathbf{h}] = \frac{\partial W[\mathbf{h}]}{\partial h_i} \quad (10.41)$$

avec toujours la notation $\mathbf{m} \cdot \mathbf{h} = \sum_i m_i h_i$.

10.4.2 Propriétés du potentiel thermodynamique

Les propriétés du potentiel thermodynamique découlent des propriétés standard de la transformée de Legendre, déjà utilisée en section 7.6 (tome 1). Les plus importantes sont les suivantes :

⁴ Elle s'écrit en fonction des diagrammes connexes dans un développement de basse température.

1 - Définition variationnelle de Γ

La définition de m correspond à extrémiser $F[\mathbf{h}] + \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}$ par rapport aux variations de la source \mathbf{h} . En fait l'extremum est un maximum, au vu des propriétés de convexité de Γ . Une définition équivalente du potentiel Γ est donc

$$\Gamma[\mathbf{m}] = \max_{\mathbf{h}} (F[\mathbf{h}] + \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}) \quad (10.42)$$

2 - Relation champ/aimantation

Le champ externe au site i , h_i est la dérivée partielle du potentiel par rapport à l'aimantation m_i au site i

$$h_i = \frac{\partial \Gamma[\mathbf{m}]}{\partial m_i} \quad (10.43)$$

3 - La transformée de Legendre est une involution

W est la transformée de Legendre de l'action effective Γ .

$$W[\mathbf{h}] = \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} - \Gamma[\mathbf{m}] = ; \quad h_i[\mathbf{m}] = \frac{\partial \Gamma[\mathbf{m}]}{\partial m_i} \quad (10.44)$$

4 - Définition variationnelle de l'énergie libre F

À partir de Γ on a

$$F[\mathbf{h}] = \min_{\mathbf{m}} (\Gamma[\mathbf{m}] - \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}) \quad (10.45)$$

5 - Aimantation moyenne comme minimum de Γ

Ceci implique que, si on connaît le potentiel Γ , les aimantations moyennes des sites i dans le champ externe h sont données par les solutions de l'équation 10.44. En particulier, l'aimantation en champ nul $m_i(h = 0)$ est donnée par le zéro de la dérivée de Γ , c'est-à-dire par le point où le potentiel est extrémal (et en fait minimal, par des propriétés de convexité).

$$m_0 = \text{aimantation en champ nul} \quad \Leftrightarrow \quad m_0 \text{ minimum de } \Gamma[\mathbf{m}]$$

et de façon générale

$$m(h) = \text{aimantation en champ } h \quad \Leftrightarrow \quad m(h) \text{ minimum de } \Gamma[\mathbf{m}] - \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}$$

C'est donc le potentiel Γ qu'il faut minimiser pour obtenir l'état thermodynamique d'équilibre du système.

6 - Corrélations à 2 spins et dérivée seconde de Γ

Il existe aussi une relation importante entre la matrice des dérivées secondes du potentiel effectif par rapport aux aimantations

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial m_i \partial m_j} \quad (10.46)$$

et les fonctions de corrélations connexes à deux spins, définies comme au-dessus par

$$G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

(pour un système fini avec N sites, H_{ij} et G_{ij} définissent des matrices $N \times N$). Ces deux matrices sont l'inverse l'une de l'autre (à la température près)

$$\sum_k G_{ik} H_{kj} = T \delta_{ij}$$

autrement dit

$$\mathbf{G} = T \mathbf{H}^{-1} \quad (10.47)$$

7 - Convexité de Γ

Ceci implique en particulier que *le potentiel Γ est une fonction convexe des m_i* . En effet, comme les poids de Boltzmann du modèle d'Ising sont réels et positifs, la matrice $G_{ij} = \langle \Delta S_i \Delta S_j \rangle$ ($\Delta S_i = S_i - \langle S_i \rangle$) des corrélations connexes à deux spins est une matrice définie positive (c'est-à-dire que $\sum_{ij} u_i G_{ij} u_j > 0 \forall u \neq 0$). Sa matrice inverse H_{ij} est donc aussi définie positive, comme c'est la matrice des dérivées secondes de Γ , Γ est une fonction convexe. Si Γ a un extremum, c'est un minimum.

8 - Potentiel effectif dans un champ externe

Il est facile de montrer que si $\Gamma[\mathbf{m}]$ est le potentiel effectif pour le modèle d'Ising en champ externe nul $B = 0$, le potentiel effectif du modèle en champ non nul est simplement donné par

$$\Gamma[\mathbf{m}; B] = \Gamma[\mathbf{m}] - B \sum_i m_i \quad (10.48)$$

Si le champ externe est non homogène $B \rightarrow B_i$, la relation reste valable

$$\Gamma[\mathbf{m}; \mathbf{B}] = \Gamma[\mathbf{m}] - \sum_i B_i m_i \quad (10.49)$$

9 - Le potentiel effectif comme énergie libre avec contrainte

Enfin donnons une formule très utile. On peut écrire le potentiel effectif Γ comme

$$\Gamma[\mathbf{m}] = \langle \mathcal{H}_{\text{Ising}} \rangle_{\mathbf{h}} - T \mathcal{S}[\mathbf{h}], \quad \mathcal{S}[\mathbf{h}] = \text{entropie du système} \quad (10.50)$$

T est la température. $\mathcal{H}_{\text{Ising}}$ est le hamiltonien « interne » du système de spins (sans tenir compte du couplage au champ externe \mathbf{h}), et $\langle \mathcal{H}_{\text{Ising}} \rangle_{\mathbf{h}}$ est la valeur moyenne de $\mathcal{H}_{\text{Ising}}$ calculée pour le système couplé au champ externe \mathbf{h} . $\mathcal{S}[\mathbf{h}]$ est l'entropie totale du système de spin lorsqu'il est couplé au champ externe \mathbf{h} (donc décrit par le hamiltonien microscopique $\mathcal{H}_{\mathbf{h}} = \mathcal{H}_{\text{Ising}} - \mathbf{h} \cdot \mathbf{S}$). Enfin, dans la formule, le champ externe \mathbf{h} est fixé à sa valeur telle que l'aimantation moyenne $\langle S_i \rangle_{\mathbf{h}} = m_i$.

10.4.3 Exercices

Exercice 10.1. Propriétés variationnelles de Γ

Montrer les propriétés 1 et 2 du potentiel effectif. On aura intérêt à utiliser la formule fondamentale des changements de coordonnées $\mathbf{x} = (x^a) \rightarrow \mathbf{y} = (y^a)$

$$\frac{\partial x^a}{\partial y^b} = (\mathbf{J}^{-1})^a_b, \quad \mathbf{J} = (J^c_d), \quad J^c_d = \frac{\partial y^c}{\partial x^d}$$

Exercice 10.2. Énergie libre versus potentiel effectif

En utilisant 10.43, démontrer les propriétés 3, 4 et 5. Pouvez-vous mettre ceci en relation avec les propriétés de l'action effective en théorie des champs (voir la section 7.6) ?

10.5 Matrice de transfert

Les méthodes de matrice de transfert sont un outil important en physique statistique. Elles ont permis de résoudre le modèle d'Ising en une et en deux dimensions. Elles sont à la base de méthodes exactes et approchées de calcul et des techniques de systèmes intégrables tels l'ansatz de Bethe en physique statistique. C'est sur elles que repose également l'équivalence entre problèmes de physique statistique et problèmes quantiques (matrice de transfert \simeq opérateur d'évolution). Enfin elles permettent des études numériques précises, par les méthodes des lois d'échelle pour les systèmes de taille finie (*finite size scaling*).

10.5.1 Modèle d'Ising en $D = 1$

On considère le modèle d'Ising 1D sur une chaîne unidimensionnelle. Les sites i sont simplement étiquetés par des entiers $i \in \mathbb{Z}$, et dans la suite on considère une chaîne de longueur L avec des conditions aux limites périodiques $S_{i+L} = S_i$. Le hamiltonien est donc

$$H[\mathbf{S}] = \sum_{i=1}^L -JS_i S_{i+1} - BS_i \tag{10.51}$$

et peut se réécrire comme une somme sur chaque lien de termes ne dépendant que des spins aux extrémités du lien.

$$H[\mathbf{S}] = \sum_i E(S_i, S_{i+1}) \quad , \quad E(S_i, S_{i+1}) = -JS_i S_{i+1} - B(S_i + S_{i+1})/2 \quad (10.52)$$

On définit la matrice de transfert $T_{(\ell)}$ pour le lien $(\ell) = (i, i+1)$ comme la matrice dont les lignes e et les colonnes f sont étiquetées respectivement par toutes les configurations « entrantes » possibles e_i des spins sur le site i , et les configurations « sortantes » f_{i+1} pour le site $i+1$ du lien ℓ . Dans notre cas c'est une matrice 2×2 car il y a deux états « in » e et 2 états « out » f

$$e \rightarrow \{S_i = +1, S_i = -1\} \quad , \quad f \rightarrow \{S_{i+1} = +1, S_{i+1} = -1\} \quad (10.53)$$

Les éléments de matrice T_{ef} de la matrice de transfert pour ce lien $\ell = (i, i+1)$ sont les poids de Boltzmann pour ce lien

$$T_{ef} = T(S_i, S_{i+1}) = \exp(-\beta E(S_i, S_{i+1})) \quad (10.54)$$

La matrice de transfert est explicitement pour la chaîne d'Ising

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{++} & T_{+-} \\ T_{-+} & T_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\beta(J+B)} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta(J-B)} \end{pmatrix} \quad (10.55)$$

C'est une matrice réelle symétrique.

Le point crucial est que le poids de Boltzmann d'une configuration \mathbf{S} s'écrit comme un produit d'élément de matrice \mathbf{T}

$$e^{-\beta H[\mathbf{S}]} = T_{a_1, a_2} T_{a_2, a_3} \cdots T_{a_{i-1}, a_i} T_{a_i, a_{i+1}} \cdots T_{a_L, a_1} \quad (10.56)$$

où chaque a_i correspond à l'état du site i ($a_i = \pm$ si $S_i = \pm 1$). La somme sur tous les micro-états \mathbf{S} correspond à sommer sur tous les indices a_i répétés ; donc à prendre la trace (à cause des c.a.l. périodiques $a_{L+1} = a_1$) d'un produit de N matrices de transfert. On a donc simplement pour la fonction de partition

$$Z = \text{tr}(\mathbf{T}^L) \quad (10.57)$$

De façon similaire, on peut calculer les fonctions de corrélations de spin en introduisant la matrice Σ dont les éléments de matrice sont $\Sigma_{ef} = (S_i)_e \delta_{e,f}$. Ici cette matrice est la matrice diagonale

$$\Sigma = \text{diag}(S_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3$$

Les fonctions de corrélation à un point et à deux points sont données simplement par

$$\langle S_i \rangle = \frac{1}{Z} \text{tr}(\Sigma \mathbf{T}^L) \quad , \quad \langle S_i S_{i+n} \rangle = \frac{1}{Z} \text{tr}(\Sigma \mathbf{T}^n \Sigma \mathbf{T}^{L-n}) \quad (10.58)$$

On en déduit que la longueur de corrélation du modèle est donnée par le rapport des deux valeurs propres $\lambda_0 > \lambda_1$ de \mathbf{T} par

$$\xi = 1/\log(\lambda_0/\lambda_1) \quad (10.59)$$

10.5.2 Modèle d'Ising en $D = 2$

Ceci se généralise facilement pour le modèle d'Ising en dimension $D = 2$. Considérons simplement un réseau Λ carré, infini dans une direction, et périodique de taille L dans la deuxième, si bien que $\Lambda = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_L$. Les sites sont étiquetés $\mathbf{i} = (i_1, i_2)$. Une configuration de spin dans une tranche $i_1 = x$ fixée est un vecteur de longueur L , $\mathbf{S}_x = (S_{x,1}, \dots, S_{x,L})$ dont les coefficients prennent les valeurs ± 1 . Il y a bien sûr 2^L configurations de tranches \mathbf{S}_x possibles. Une configuration globale de spin est une collection de vecteurs de configurations de tranches $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_x)_{x \in \mathbb{Z}}$. On peut écrire l'énergie d'une configuration en séparant les contributions des liens entre liens dans une tranche x donnée $e = ((x, j), (x, j + 1))$ et celle des liens entre une tranche x et la suivante $x + 1$, $e = ((x, j), (x + 1, j))$.

$$H[\mathbf{S}] = \sum_{x \in \mathbb{Z}} E_1[\mathbf{S}_x] + E_2[\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_{x+1}] \quad (10.60)$$

avec

$$E_1[\mathbf{S}_x] = -J \sum_{j=1}^L S_{x,j} S_{x,j+1} - B \sum_{j=1}^L S_j \quad (10.61)$$

$$E_2[\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_{x+1}] = -J \sum_{j=1}^L S_{x,j} S_{x+1,j} \quad (10.62)$$

La matrice de transfert $\mathbf{T}(L)$ entre tranches de taille L est une matrice de taille $\mathcal{N}_{\text{config.}} \times \mathcal{N}_{\text{config.}}$ avec ici $\mathcal{N}_{\text{config.}} = 2^L$ le nombre de configurations de tranches. Les éléments de matrice de la matrice de transfert entre la tranche x et la tranche $x + 1$ sont

$$\mathbf{T}(L)_{\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_{x+1}} = \exp(-\beta (E_1[\mathbf{S}_x]/2 + E_2[\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_{x+1}] + E_1[\mathbf{S}_{x+1}]/2)) \quad (10.63)$$

Comme toujours $\beta = 1/k_B T$. Pour le modèle d'Ising sur un tore de taille L_1 dans la première direction et L_2 dans la deuxième (donc avec des conditions aux limites périodiques), la fonction de partition est donnée par la trace

$$Z_{L_1 \times L_2}(\beta) = \text{tr}(\mathbf{T}(L_2)^{L_1}) \quad (10.64)$$

C'est la diagonalisation exacte de cette matrice (en l'absence de champ externe $B = 0$) par Onsager, et les développements ultérieurs, en particulier la reformulation de la matrice de transfert comme celle d'un système de fermions libres en $1 + 1$ dimensions, qui a permis de résoudre le modèle d'Ising en deux dimensions.

10.5.3 Exercices

Exercice 10.3. Diagonalisation de la matrice de transfert $D = 1$

Calculer les 2 valeurs propres $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$ de \mathbf{T} de la matrice de transfert du

modèle d'Ising unidimensionnel et leurs vecteurs propres associés. En déduire la valeur de l'énergie libre par site F et la forme de la fonction de corrélation à deux spins $\langle S \rangle$ et $\langle S_i S_j \rangle$ dans la limite thermodynamique de la chaîne de longueur infinie $L \rightarrow \infty$.

Exercice 10.4. Absence de transition de phase en $D = 1$

En déduire la longueur de corrélation du modèle d'Ising en $D = 1$. Montrer que cette longueur de corrélation est toujours finie si la température est non nulle $T > 0$ *i.e.* $\beta < \infty$. En déduire que le modèle d'Ising $D = 1$ est toujours dans une phase désordonnée (paramagnétique) à $T > 0$ avec une magnétisation nulle (en champ nul) et que c'est seulement à température nulle $T = 0$ qu'il peut être ordonné.

Exercice 10.5. Généralisation en $D = 1$ à des modèles à plusieurs états

Pour un modèle de spin classique à q états en une dimension avec des interactions entre plus proches voisins $\langle i, i+1 \rangle$, montrer que la fonction de partition s'écrit toujours comme la trace d'une puissance de la matrice de transfert T , avec T une matrice $q \times q$. En déduire que la formule 10.59 se généralise, $\lambda_{0,1}$ étant les deux plus grandes valeurs propres de \mathbf{T}

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots$$

Exercice 10.6. Modèle de Potts

Appliquer la méthode de la matrice de transfert pour le modèle de Potts à q états en $D = 1$. Le modèle de Potts à q états est défini de la façon suivante. Le « spin » classique S_i en chaque site peut prendre maintenant q valeurs différentes

$$S_i = 1, 2, \dots, q \tag{10.65}$$

L'énergie d'une configuration est comme pour le modèle d'Ising donnée par une somme de termes de liens e entre plus proches voisins

$$H[\mathbf{S}] = -J \sum_{e=(i,j)} \delta_{S_i, S_j} \quad , \quad \delta_{S, S'} = \begin{cases} 1 & \text{si } S = S', \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10.66}$$

Écrire la matrice de transfert pour le modèle $D = 1$ pour $q = 3$ et $q = 4$. Montrer que le modèle $D = 1$ est toujours désordonné à température $T > 0$. Montrer que la symétrie interne du modèle est celle du groupe des permutations à q éléments \mathfrak{S}_q .

10.6 Notes

L'introduction aux phénomènes critiques et à la mécanique statistique est standard, et peut être trouvée dans de nombreux ouvrages, par exemple [Kad00][ZJ02][Car96][LB12]. Une bible sur les phénomènes critiques est

fournie par la collection de Domb-Green-Lebowitz [DGL01] regroupant des revues de références sur les différents systèmes, aspects et méthodes concernant les phénomènes critiques en physique. Des références plus précises seront données dans les chapitres suivants.

Chapitre 11

L'approximation du champ moyen et la théorie de Landau des phénomènes critiques

11.1 Introduction

Après ces rappels de physique statistique, nous présentons la théorie la plus simple des phénomènes critiques : l'approximation du champ moyen pour des modèles simples, et sa généralisation par Landau à une théorie générale des phénomènes critiques. Cette approche, bien que limitée, est importante historiquement. Elle permet de comprendre qualitativement l'origine des transitions de phases. De plus, elle fournit dans beaucoup de cas une bonne description de la physique des systèmes lorsque l'on est proche, mais pas trop, d'un point critique. La théorie du champ moyen est une (parfois très) bonne théorie phénoménologique, mais elle néglige l'effet des fluctuations thermiques aux grandes échelles de longueur. Les physiciens ont réalisé dans les années soixante que ces fluctuations ne peuvent pas être négligées lorsque l'on est très près d'un point critique (domaine critique). C'est ce qui a conduit à la théorie du groupe de renormalisation, qui permet de comprendre et décrire la physique aux points critiques. Néanmoins il est très important de bien comprendre l'approximation du champ moyen, la théorie de Landau, et leurs limites, pour pouvoir aborder la théorie du groupe de renormalisation. C'est ce que nous faisons dans ce chapitre.

Dans la section 11.2, nous traitons le modèle d'Ising dans l'approximation du champ moyen, d'abord dans 11.2.1 de façon simple et globale (équation de Curie-Weiss pour l'aimantation totale), puis de façon plus locale et systématique dans 11.2.2 en montrant que c'est un exemple simple d'approximation variationnelle. Dans 11.2.3 nous appliquons la méthode variationnelle au modèle d'Ising.

Dans la section 11.3, nous discutons en détail le diagramme de phase, dérivons les valeurs de champ moyen des exposants critiques et dans la section 11.4, nous étudions la fonction de corrélation de spin.

La section 11.5 est consacrée à la théorie générale de Landau, présentée comme une généralisation pour une énergie libre phénoménologique (hamiltonien de Landau) de ce qui a été fait précédemment. Les principes et hypothèses de base sont présentés en 11.5.1 et l'application à Ising en 11.5.2. Les systèmes plus généraux, en particulier ceux caractérisés par des symétries continues, sont discutés en 11.5.3.

Nous avons déjà dit que les fluctuations thermiques sont mal prises en compte dans l'approximation de Landau. À basse température, ces fluctuations thermiques sont *a priori* petites. Leur effet dans ce régime est discuté dans la section 11.6. En basse dimensionnalité il s'avère qu'elles peuvent modifier qualitativement l'image donnée par le champ moyen. En dimension $d = 1$ un argument de Peierls montre qu'il ne peut pas y avoir de transition de phase pour un système avec une symétrie discrète, voir 11.6.2. Pour des systèmes avec une symétrie continue, l'existence de « modes mous » de basse énergie (*ondes de spin* ou *modes de Goldstone*) implique qu'en dimension $d \leq 2$ il ne peut pas non plus y avoir de transition de phase, voir 11.6.3.

L'effet des fluctuations au voisinage d'un point critique est discuté dans la section 11.7. Nous donnons plusieurs versions du *critère de Ginzburg*, qui indique quand les fluctuations deviennent importantes, et présentons le concept important de *dimension critique supérieure*. Ces arguments montrent que pour les points critiques standard comme celui d'Ising, la dimension critique supérieure est $d_{uc} = 4$, et donc que les fluctuations ne peuvent pas être négligées en deux et trois dimensions. Ce qui nous amènera au chapitre suivant...

11.2 Le modèle d'Ising dans l'approximation du champ moyen

11.2.1 Le champ moyen : version Curie-Weiss

On considère le modèle d'Ising sur réseau carré (hypercubique) en dimension D . Le spin sur un site n'est couplé qu'avec ceux sur les sites plus proches voisins. L'approximation du champ moyen consiste à négliger les corrélations entre les fluctuations de ces spins sur les sites voisins et à supposer que le spin

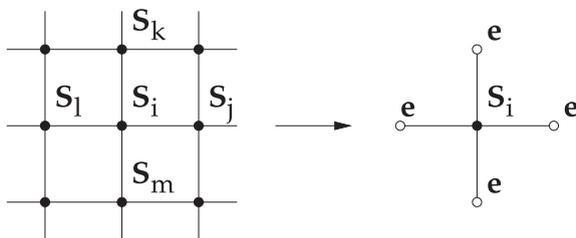


FIGURE 11.1 – Principe de l'approximation du champ moyen.

d'un site i « voit » juste une moyenne des spins de ses $c = 2D$ voisins, moyenne qui ne fluctue pas. Cette moyenne est le « champ local » ou « champ moyen » ou « champ moléculaire » de Curie-Weiss. Ici elle est notée e et on la détermine de façon auto-cohérente. L'énergie locale du spin $S = S_i$ au site i dans le champ moyen de ses voisins est donc (en remplaçant les S_j par l'aimantation moyenne e pour les voisins de i dans le hamiltonien d'Ising)

$$H_e(S) = -(cJe + B)S \quad , \quad c = 2D \quad \text{pour le réseau hypercubique} \quad (11.1)$$

La valeur moyenne de S avec ce hamiltonien est facile à calculer (on a maintenant un système à 2 états $S = \pm 1$)

$$\langle S \rangle = \frac{e^{-H_e(+1)} - e^{-H_e(-1)}}{e^{-H_e(+1)} + e^{-H_e(-1)}} = \tanh(cJe + B) \quad (11.2)$$

et l'énergie moyenne par site¹ est simplement

$$\mathcal{E} = (cJe/2 + B)\langle S \rangle \quad (11.3)$$

La condition d'auto-cohérence est la suivante : l'aimantation moyenne m d'un spin calculée dans l'approximation du champ moyen doit être égale au champ local e mis au départ dans l'approximation, donc que

$$m = \langle S \rangle = e \quad \Rightarrow \quad m = \tanh(cJm + B) \quad (11.4)$$

Cette équation d'état de champ moyen donne l'aimantation m en fonction du champ appliqué B et du couplage J , et en utilisant (11.3) l'énergie interne (par spin). En champ nul $B = 0$, cette équation admet une seule solution $m = 0$ si

$$cJ < 1 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \text{phase paramagnétique} \quad (11.5)$$

Si le couplage J est plus grand que la valeur critique

$$J_c = \frac{1}{c} = \frac{1}{2D} \quad (11.6)$$

L'équation admet aussi deux solutions non nulles

$$cJ > 1 \quad \Rightarrow \quad m = \pm m_0 \quad \text{phase ferromagnétique} \quad (11.7)$$

d'énergie plus petite que la solution paramagnétique $m = 0$. Elles décrivent donc les deux phases ferromagnétiques d'aimantation spontanée $\pm m_0$, plus stables que la phase paramagnétique.

Quand $J \rightarrow J_c$ l'aimantation spontanée s'annule comme $m_0 \sim \sqrt{J - J_c}$, et elle est pour $J < J_c$. Le couplage critique J_c est donc un point critique (point de Curie) et la transition ferro/para est continue (transition du second ordre).

¹ Noter le facteur $c/2 = D$ au lieu de $c = 2D$ qui vient du fait que l'énergie $-JS_i S_j$ d'un lien $\langle ij \rangle$ est partagée entre les sites i et j .

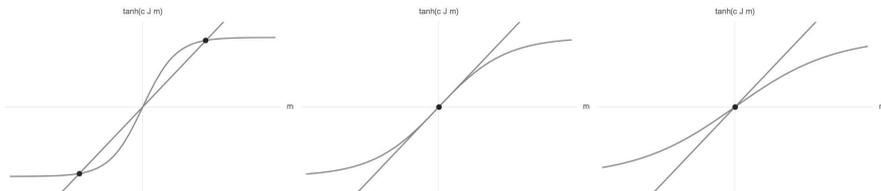


FIGURE 11.2 – Les solutions de l'équation du champ moyen 11.4 pour l'aimantation m , de g. à d. à basse température, au point critique et à haute température.

Au voisinage du point critique J_c il suffit de développer $\tanh(cJm + B)$ à l'ordre trois pour obtenir l'équation d'état approchée en champ non nul

$$m = cJm - \frac{1}{3}m^3 + B + \dots \quad (11.8)$$

On en déduit les quatre exposants critiques dans l'approximation du champ moyen

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1/2 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad \delta = 3 \quad (11.9)$$

$\alpha = 0$ indique que la chaleur spécifique par unité de volume C_v est discontinue à J_c .

11.2.2 Le champ moyen comme approximation variationnelle

Le champ moyen est un cas particulier d'approximation basée sur une méthode variationnelle. Les méthodes variationnelles sont très générales et jouent un rôle très important dans de nombreux domaines de la physique. Le champ moyen traité comme approximation variationnelle permet de résoudre le modèle d'Ising en champ non homogène, de calculer le potentiel thermodynamique et donc de calculer toutes les fonctions de corrélations de spin. Cela permet en outre de suggérer des améliorations au champ moyen.

Hamiltonien d'essai et inégalité de convexité

L'idée de base est d'approximer la dynamique initiale donnée par le hamiltonien H par une dynamique plus simple à traiter donnée par un *hamiltonien d'essai* H_{essai} . Pour cela on réécrit d'abord la fonction de partition exacte en fonction de celle pour le hamiltonien d'essai et d'une valeur moyenne $\langle \dots \rangle_{\text{essai}}$ avec H_{essai} donc avec les poids de Boltzmann $w_{\text{essai}} = \exp(-H_{\text{essai}}[S])$.

$$Z = \sum_{\mathbf{S}} e^{-H[\mathbf{S}]} = \sum_{\mathbf{S}} e^{-H_{\text{essai}}[\mathbf{S}]} e^{H_{\text{essai}}[\mathbf{S}] - H[\mathbf{S}]} = Z_{\text{essai}} \left\langle e^{(H_{\text{essai}}[\mathbf{S}] - H[\mathbf{S}])} \right\rangle_{\text{essai}} \quad (11.10)$$

avec la définition standard pour la fonction de partition et les valeurs moyennes avec le hamiltonien d'essai

$$Z_{\text{essai}} = \sum_{\mathbf{S}} e^{-H_{\text{essai}}[\mathbf{S}]} \quad , \quad \langle \mathcal{O}[\mathbf{S}] \rangle_{\text{essai}} = \frac{1}{Z_{\text{essai}}} \sum_{\mathbf{S}} \mathcal{O}[\mathbf{S}] e^{-H_{\text{essai}}[\mathbf{S}]} \quad (11.11)$$

Cette relation est *exacte* ! La température T est incluse dans la définition de H et H_{essai} .

On utilise maintenant le fait que la fonction exponentielle $\exp(X)$ est *convexe* sur les réels c'est-à-dire que

$$\exp((X_1 + X_2)/2) \leq (\exp(X_1) + \exp(X_2))/2$$

et que plus généralement, pour n'importe quelle variable aléatoire X avec une distribution de probabilité sur \mathbb{R} , on a l'inégalité sur les valeurs moyennes (les espérances)

$$\exp(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\exp(X)] \quad (11.12)$$

On peut appliquer ceci à la variable aléatoire $X = H_{\text{essai}}[\mathbf{S}] - H[\mathbf{S}]$ avec distribution de probabilité sur \mathbf{R} induite par la distribution de Boltzmann sur les configurations de spin \mathbf{S} associée au hamiltonien d'essai H_{essai} . Cette variable aléatoire X est donc définie de telle façon que pour toute fonction $X \rightarrow F(X)$ sur les réels

$$\mathbb{E}[F(X)] = \langle F(H_{\text{essai}}[\mathbf{S}] - H[\mathbf{S}]) \rangle_{\text{essai}} \quad (11.13)$$

On a donc l'inégalité générale

$$\langle \exp(H_{\text{essai}}[\mathbf{S}] - H[\mathbf{S}]) \rangle_{\text{essai}} \geq \exp(\langle H_{\text{essai}}[\mathbf{S}] - H[\mathbf{S}] \rangle_{\text{essai}}) \quad (11.14)$$

qui est d'ailleurs valable pour n'importe quelle fonctionnelle réelle A des spins

$$\langle \exp(A[\mathbf{S}]) \rangle_{\text{essai}} \geq \exp(\langle A[\mathbf{S}] \rangle_{\text{essai}}) \quad (11.15)$$

Prenant le logarithme on obtient une inégalité *rigoureuse* pour l'énergie libre F exacte faisant intervenir l'énergie libre obtenue avec H_{essai} , $F_{\text{essai}} = -\log Z_{\text{essai}}$, et les valeurs moyennes du hamiltonien exact et du hamiltonien d'essai, calculées avec H_{essai}

$$F \leq F_{\text{essai}} + \langle H[\mathbf{S}] - H_{\text{essai}}[\mathbf{S}] \rangle_{\text{essai}} \quad (11.16)$$

Estimation variationnelle pour l'énergie libre

Le principe des méthodes variationnelles est le suivant. On choisit une *famille* \mathfrak{H} de *hamiltoniens d'essai* H_e , dépendant d'un ensemble \mathfrak{E} de paramètres (pour simplifier ces paramètres sont notés e). Donc

$$\text{Famille d'essai } \mathfrak{H} = \{H_e : e \in \mathfrak{E} \text{ espace des paramètres d'essai}\} \quad (11.17)$$

On va chercher dans cet ensemble le meilleur hamiltonien d'essai, c'est-à-dire celui qui minimise $F_e + \langle H[\mathbf{S}] - H_e[\mathbf{S}] \rangle_e$ pour obtenir l'énergie libre variationnelle F_{var}

$$F_{\text{var}} = \min_{e \in \mathfrak{E}} [F_e + \langle H[\mathbf{S}] - H_e[\mathbf{S}] \rangle_e] \quad (11.18)$$

F_{var} est donc la meilleure approximation possible de l'énergie libre exacte F , calculée avec la famille de hamiltoniens d'essai \mathfrak{H} , car

$$F \leq F_{\text{var}}$$

Comme $\langle H_e[\mathbf{S}] \rangle_e = \mathcal{E}_e$ (l'énergie interne) et que $F_e = \mathcal{E}_e - T\mathcal{S}_e$ où \mathcal{S}_e est l'entropie du système avec le hamiltonien d'essai H_e (on a ressorti la température T de H et H_e), on peut réécrire

$$F_{\text{var}} = \min_{e \in \mathfrak{E}} [\langle H[\mathbf{S}] \rangle_e - T\mathcal{S}_e] \quad (11.19)$$

Estimation variationnelle pour le potentiel thermodynamique

Ceci se généralise simplement au potentiel thermodynamique. On rajoute les sources externes $\mathbf{h} = \{h_i\}$ au hamiltonien microscopique

$$H[\mathbf{S}] \rightarrow H_{\mathbf{h}}[\mathbf{S}] = H[\mathbf{S}] - \mathbf{h} \cdot \mathbf{S} \quad (11.20)$$

L'énergie libre variationnelle pour le système avec sources est

$$F_{\text{var}}[\mathbf{h}] = \min_{e \in \mathfrak{E}} [\langle H[\mathbf{S}] - \mathbf{h}\mathbf{S} \rangle_e - T\mathcal{S}_e] = \min_{e \in \mathfrak{E}} [\langle H[\mathbf{S}] \rangle_e - \mathbf{h}\langle \mathbf{S} \rangle_e - T\mathcal{S}_e] \quad (11.21)$$

Le potentiel thermodynamique variationnel $\Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}]$ est sa transformée de Legendre

$$\Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}] = \max_{\mathbf{h}} (F_{\text{var}}[\mathbf{h}] + \mathbf{h}\mathbf{m}) = \max_{\mathbf{h}} \min_{e \in \mathfrak{E}} [\langle H[\mathbf{S}] \rangle_e - T\mathcal{S}_e + \mathbf{h}(\mathbf{m} - \langle \mathbf{S} \rangle_e)] \quad (11.22)$$

où les $\mathbf{m} = \{m_i\}$ sont les aimantations moyennes. On a maintenant un double problème d'extrémisation par rapport aux sources \mathbf{h} et aux paramètres variationnels e , où la dépendance dans les sources \mathbf{h} est *linéaire*. Les sources \mathbf{h} jouent donc le rôle de multiplicateurs de Lagrange, l'extrémisation par rapport à \mathbf{h} impose les contraintes sur les aimantations locales

$$\text{extrémisation par rapport à } h_i \implies \mathbf{m} = \langle \mathbf{S} \rangle_e \quad (11.23)$$

qui portent sur les paramètres e des hamiltoniens d'essai. On est donc ramené à un problème de *minimisation sous contrainte*. Il s'agit de minimiser l'énergie libre interne $\Gamma_e = \langle H \rangle_e - T\mathcal{S}_e$, calculée avec les hamiltoniens d'essai H_e , mais sur le sous-ensemble des e_i tels que les aimantations locales résultantes soient fixées et égales aux m_i .

$$\Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}] = \min_{e \in \mathfrak{E}[\mathbf{m}]} [\langle H \rangle_e - T\mathcal{S}_e] \quad , \quad \mathfrak{E}[\mathbf{m}] = \{e \in \mathfrak{E} : \mathbf{m} = \langle \mathbf{S} \rangle_e\} \quad (11.24)$$

La dépendance dans les aimantations \mathbf{m} est contenue seulement dans les contraintes $\mathfrak{E}[\mathbf{m}]$ sur les paramètres d'essai e .

11.2.3 Application : champ moyen pour le modèle d'Ising

Choix des hamiltoniens d'essai

L'approximation du champ moyen pour le modèle d'Ising consiste à prendre une famille de hamiltoniens d'essai très simple où pour chaque site i le spin S_i est indépendant des autres et couplé seulement à un champ local e_i (*a priori* différent pour chaque site). La famille des paramètres variationnels \mathfrak{E} est donc juste l'ensemble des champs locaux e_i sur le réseau

$$\mathbf{e} = (e_i, i \text{ sites du réseau}) \quad (11.25)$$

et le hamiltonien d'essai correspondant est simplement

$$H_{\mathbf{e}}[\mathbf{S}] = -J \sum_i e_i S_i \quad (11.26)$$

Aimantation, énergie libre et entropie

Chaque spin S_i fluctue indépendamment des autres spins. Pour un site donné, avec un champ local e , la fonction de partition d'un spin est simplement

$$z = z(e) = 2 \cosh(Je) \quad (11.27)$$

l'aimantation locale du site est

$$m(e) = \langle S \rangle_e = \tanh(Je) \quad (11.28)$$

et l'entropie du site est

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(e) = -(p_+ \log p_+ + p_- \log p_-) = \frac{\log(1 + e^{-2Je})}{1 + e^{-2Je}} + \frac{\log(1 + e^{2Je})}{1 + e^{2Je}} \quad (11.29)$$

où p_{\pm} est la probabilité que le spin $S = \pm 1$

$$p_{\pm}(e) = \frac{2 \exp(\pm Je)}{\cosh(Je)} = \frac{1}{1 + e^{\mp 2Je}} \quad (11.30)$$

On notera que l'on peut réexprimer l'entropie $\mathfrak{s}(e)$ en fonction de l'aimantation $m(e)$ comme

$$\mathfrak{s}(e) = - \left[\frac{1+m}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) + \frac{1-m}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) \right] \quad , \quad m = m(e) \quad (11.31)$$

puisque

$$p_{\pm}(e) = \frac{1 \pm m(e)}{2} \quad (11.32)$$

L'énergie libre et l'entropie totale pour un hamiltonien d'essai $H_{\mathbf{e}}$ sont simplement

$$F_{\mathbf{e}} = \sum_{i \in \text{réseau}} -\log(z(e_i)) \quad , \quad \mathcal{S}_{\mathbf{e}} = \sum_{i \in \text{réseau}} \mathfrak{s}(e_i) \quad (11.33)$$

Énergie libre variationnelle

C'est maintenant très simple de calculer l'énergie libre variationnelle pour le modèle d'Ising avec cette famille de hamiltoniens d'essai locaux. En effet, les spins en différents sites fluctuent indépendamment donc les valeurs moyennes se factorisent

$$\langle S_i \rangle_{\mathbf{e}} = m(e_i) = \tanh(Je_i) \quad (11.34)$$

$$\langle S_i S_j \rangle_{\mathbf{e}} = \begin{cases} m(e_i)m(e_j) & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (11.35)$$

On peut donc facilement calculer l'énergie interne du modèle d'Ising $\langle H_{\text{Ising}}[\mathbf{S}] \rangle_{\mathbf{e}}$ et en utilisant 11.19 on obtient l'énergie libre variationnelle pour le modèle d'Ising

$$F_{\text{var}} = \min_{\mathbf{e}} F[\mathbf{e}] \quad , \quad F[\mathbf{e}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} m(e_i)m(e_j) - \sum_i B m(e_i) - \mathfrak{s}(e_i) \quad (11.36)$$

où l'aimantation par site $m(e)$ et l'entropie par site $s(e)$ sont données par 11.28 et 11.29. Pour obtenir le champ local e_i et l'aimantation m_i dans l'approximation du champ moyen, il suffit de résoudre les équations variationnelles

$$\frac{\partial F[\mathbf{e}]}{\partial e_i} = \left(-J \sum_{j \text{ voisin de } i} m(e_j) - B \right) \frac{dm}{de}(e_i) - \frac{d\mathfrak{s}}{de}(e_i) = 0 \quad (11.37)$$

ou de façon équivalente

$$\left(-J \sum_{j \text{ voisin de } i} m(e_j) - B \right) - \frac{d\mathfrak{s}(e_i)}{dm(e_i)} = 0 \quad (11.38)$$

De 11.31 on obtient

$$\frac{d\mathfrak{s}(e)}{dm(e)} = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{1+m}{1-m} \right) = -\text{arctanh}(m) \quad , \quad m = m(e) \quad (11.39)$$

L'équation variationnelle qui détermine les champs e_i est donc

$$m(e_i) = \tanh \left(J \sum_{j \text{ voisin de } i} m(e_j) + B \right) \quad (11.40)$$

Elle admet une solution homogène $e_i = e$ (si le réseau est invariant par translation), et est équivalente à l'équation de Curie-Weiss 11.4 pour l'aimantation locale $m_i = m$.

$$m = \tanh(cJm + B) \quad (11.41)$$

où c est la coordinance = nombre de voisins d'un site, $c = 2D$ pour un réseau cubique.

Le potentiel thermodynamique dans l'approximation du champ moyen

Le calcul du potentiel thermodynamique $\Gamma[\mathbf{m}]$ pour le modèle d'Ising dans l'approximation du champ moyen est extrêmement simple, car il y a autant de contraintes sur les paramètres d'essai (venant des aimantations locales m_i) que de paramètres d'essai (les champs locaux e_i). Comme on l'a vu, les champs locaux sont entièrement déterminés par les aimantations locales. Les contraintes 11.23 donnent en effet

$$m(e_i) = m_i \quad \Rightarrow \quad e_i = \frac{1}{2J} \log \left(\frac{1+m_i}{1-m_i} \right) \quad (11.42)$$

L'entropie \mathfrak{s}_i d'un site i s'exprime très simplement en fonction de l'aimantation locale du site, m_i , par la relation $\mathfrak{s}_i(e_i) = s(m_i)$ avec toujours

$$\mathfrak{s}(e) = s(m) = - \left[\frac{1+m}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) + \frac{1-m}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) \right] \quad (11.43)$$

On reconnaît dans $s(m)$ les probabilités p_{\pm} pour un spin d'être égal à ± 1 , si l'aimantation est m .

$$p_{\pm}(m) = \frac{1 \pm m}{2} = \mathbb{P}[s = \pm 1 \mid \mathbb{E}[s] = m] \quad (11.44)$$

En utilisant la définition 11.24 pour le potentiel thermodynamique variationnel, $\Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}]$, on obtient immédiatement le potentiel effectif variationnel

$$\Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}] = H_{\text{Ising}}[\mathbf{m}] - \sum_i s(m_i) \quad (11.45)$$

où $H_{\text{Ising}}[\mathbf{m}]$ est le hamiltonien d'Ising pour des spins « continus » m_i (et non plus les spins d'Ising entiers $S = \pm 1$)

$$H_{\text{Ising}}[\mathbf{m}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} m_i m_j - \sum_i B m_i \quad (11.46)$$

et $s(m_i)$ l'entropie variationnelle locale, définie par 11.43.

On peut réécrire le potentiel effectif comme somme de deux termes, un terme contenant les variations spatiales de m et un terme de potentiel local $V(m)$

$$\Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}] = \frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (m_i - m_j)^2 + \sum_i V(m_i) \quad (11.47)$$

avec

$$V(m) = -DJm^2 - Bm + \left[\frac{1+m}{2} \log \left(\frac{1+m}{2} \right) + \frac{1-m}{2} \log \left(\frac{1-m}{2} \right) \right] \quad (11.48)$$

Le potentiel local $V(m)$ est bien sûr défini pour les valeurs physiques de l'aimantation locale $-1 < m < 1$. Le premier terme qui décrit le couplage effectif entre les aimantations est ≥ 0 ($J > 0$), et s'annule si l'aimantation est homogène $m_i = m$.

Équation d'état variationnelle

La minimisation de $\Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}]$ par rapport aux i redonne l'équation d'état pour les aimantations locales, déjà obtenue plus haut

$$\frac{\partial \Gamma_{\text{var}}[\mathbf{m}]}{\partial m_i} = -J \sum_{j \text{ voisin de } i} m_j - B - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - m_i}{1 + m_i} \right) = 0 \quad (11.49)$$

En champ externe homogène B , les aimantations locales sont toutes égales $m_i = m$ et on a (sur réseau carré le nombre de voisins d'un site est $C = 2D$)

$$-(2DJm + B) - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 - m_i}{1 + m_i} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tanh(2DJm + B) = m \quad (11.50)$$

On retrouve donc toujours l'équation d'état obtenue par la méthode du champ local.

11.2.4 Exercices

Exercice 11.1. Pouvez-vous construire une approximation de champ moyen pour un modèle d'Ising dilué à trois états $S_i = \pm 1, 0$. L'état $S_i = 0$ décrit l'absence de spin au site i (lacune) et l'énergie d'une configuration de spin est

$$H[\mathbf{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \mu \sum_i (1 - S_i^2) \quad (11.51)$$

μ est le potentiel chimique pour les lacunes (sites sans spin). Pouvez-vous écrire, sans les résoudre, des équations pour les probabilités que $S = 1, -1$ et 0 , et pour l'aimantation $m = \langle S_i \rangle$ et la densité de lacunes $\rho_L = \langle 1 - S_i^2 \rangle$?

Exercice 11.2. Pouvez-vous construire une approximation de champ moyen pour un modèle de Potts à q états. Dans ce modèle les spins peuvent prendre q valeurs (disons $S_i = 1, 2, \dots, q$) et l'énergie d'une configuration de spin est donnée par une somme sur les paires de spins voisins

$$H[\mathbf{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{S_i, S_j} \quad (11.52)$$

Exercice 11.3. Même question pour un modèle $O(N)$ de type Heisenberg où les spins sont des vecteurs unité à N composantes \vec{S}_i , $|\vec{S}_i| = 1$, avec un hamiltonien de type Ising

$$H[\mathbf{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad (11.53)$$

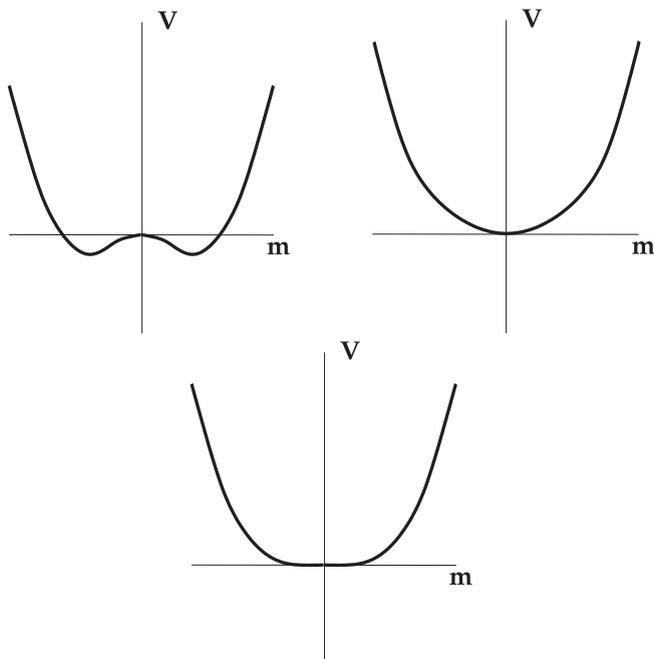


FIGURE 11.3 – Le potentiel effectif $V(m)$ dans les phases de basse et haute température, et au point critique (le champ externe est nul $B = 0$).

11.3 Diagramme de phase et exposants critiques

11.3.1 Diagramme de phase et point critique

Le point critique

En champ nul $B = 0$, le potentiel local V est une fonction paire de m . Ses dérivées sont

$$V'(m) = -B - 2DJm + \tanh^{-1}(m) \quad , \quad V''(m) = -2DJ + \frac{1}{1-m^2} \quad (11.54)$$

Sa dérivée seconde à l'origine $V''(m = 0)$ change de signe pour une valeur critique du couplage.

$$J_c = \frac{1}{2D} \quad (11.55)$$

Ce point définit le point critique du modèle d'Ising (dans l'approximation variationnelle).

Les phases du modèle

Les différentes phases du modèle d'Ising s'analysent facilement à partir de la forme du potentiel V .

Phase paramagnétique : En couplage faible, $J < J_c = \frac{1}{2D}$, V est une fonction convexe avec un seul minimum en $m = 0$. On est dans la phase désordonnée (paramagnétique) de haute température, puisque J joue le rôle de l'inverse de la température T^{-1} .

Phase ferromagnétique : En couplage fort, $J > J_c$, V a deux minima symétriques en $m = \pm m_0(J)$. On est dans la phase ordonnée (ferromagnétique) de basse température où la symétrie \mathbb{Z}_2 ($m \rightarrow -m$) est spontanément brisée.

Point critique : Pour $J = J_c$, l'aimantation spontanée s'annule. C'est le point de Curie qui sépare les deux phases et auquel est associée une transition de phase continue. Au voisinage de ce point critique $J \simeq J_c = 1/2D$, l'aimantation est petite et on peut ne garder dans le potentiel que les termes en m^2 et m^4 .

$$V(m) = -Bm + \frac{J_c - J}{2J_c} m^2 + \frac{1}{12} m^4 + \mathcal{O}(m^6) \quad (11.56)$$

L'équation d'état est

$$\frac{J_c - J}{J_c} m + \frac{1}{3} m^3 = B \quad (11.57)$$

11.3.2 Exposants critiques

La valeur des exposants critiques α , β , γ et δ s'obtient facilement. Partant de la phase ordonnée, l'aimantation spontanée en champ nul s'annule au point critique comme

$$|m| = \sqrt{3 \frac{J_c - J}{J_c}} \implies \beta = \frac{1}{2} \quad (11.58)$$

L'aimantation spontanée au point critique ($J = J_c$) se comporte comme

$$m^3 = 3B \implies \delta = 3 \quad (11.59)$$

L'énergie libre par site est simplement

$$F_v = V(m) \simeq \begin{cases} |J_c - J|^2 & \text{si } J > J_c, \\ 0 & \text{si } J < J_c. \end{cases} \quad (11.60)$$

Donc la chaleur spécifique C_v

$$C_v \simeq \frac{\partial^2 F_v}{\partial J^2} \simeq \begin{cases} 1 & \text{si } J > J_c, \\ 0 & \text{si } J < J_c. \end{cases} \implies \alpha = 0 \quad (11.61)$$

Enfin, la susceptibilité magnétique est

$$\chi_v = \frac{\partial m}{\partial B} \simeq \frac{1}{|J_c - J|} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 1 \quad (11.62)$$

11.3.3 Exercices

Exercice 11.4. On a vu que le potentiel effectif doit être une fonction convexe de m . Expliquer pourquoi dans l'approximation du champ moyen c'est une fonction non convexe de m dans la phase de basse température. Suggérer un remède à ce problème.

Exercice 11.5. Étudier le diagramme de phase du modèle d'Ising dilué dans l'approximation du champ moyen (voir exercice 11.1).

Exercice 11.6. Étudier le diagramme de phase du modèle de Potts dans l'approximation du champ moyen (voir exercice 11.2).

Exercice 11.7. Étudier le diagramme de phase du modèle $O(N)$ dans l'approximation du champ moyen (voir exercice 11.3).

11.4 La fonction de corrélation à deux points

La méthode variationnelle nous a permis d'obtenir le potentiel effectif 11.47 pour des configurations d'aimantation quelconque. On a donc accès non seulement à l'aimantation spontanée, mais aussi aux fonctions de corrélation, c'est-à-dire aux fluctuations d'aimantation. Nous allons nous intéresser à la fonction à deux points.

11.4.1 La dérivée seconde du potentiel thermodynamique

D'après 10.47, la fonction de corrélation connexe à deux spins G_{ij} est l'inverse de la dérivée seconde (Hessien) \mathbf{H} du potentiel effectif $\Gamma[\mathbf{m}]$. Dans l'approximation variationnelle, les éléments de \mathbf{H} s'écrivent

$$H_{ij} = -J \Delta_{ij} + V''(m_0) \delta_{ij} \quad (11.63)$$

où les Δ_{ij} sont les éléments de matrice de l'opérateur Δ (Laplacien discrétisé sur le réseau)

$$\Delta_{ij} = C_{ij} - C \delta_{ij} \quad , \quad C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ voisins ,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (11.64)$$

$C = 2D$ pour le réseau carré. C_{ij} est la matrice de connexion du réseau.

On note M la racine carrée de la dérivée seconde du potentiel local, si bien que

$$V''(m_0) = JM^2 \quad , \quad H_{ij} = J(-\Delta_{ij} + M^2 \delta_{ij}) \quad (11.65)$$

La masse carrée M^2 est toujours ≥ 0 , et s'annule au point critique $J = J_c$ comme

$$M^2 \simeq \begin{cases} C \left| \frac{J_c - J}{J_c} \right| & \text{si } J < J_c, \\ 2C \left[\frac{J - J_c}{J_c} \right] & \text{si } J > J_c. \end{cases} \quad (11.66)$$

11.4.2 La fonction à deux points dans l'espace réel et dans l'espace réciproque

La fonction à deux points $G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$ est donc dans l'approximation du champ moyen

$$G_{ij} = (\mathbf{H}^{-1})_{ij} = \frac{1}{J} \left(\frac{1}{-\Delta + M^2 \mathbf{1}} \right)_{ij} \quad (11.67)$$

Les \mathbf{G}_{ij} sont les éléments de matrice de l'opérateur $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$, considéré comme opérateur agissant sur l'espace $\mathcal{L} = \mathcal{L}^2(\Lambda)$ des fonctions de carré sommable sur le réseau carré $\Lambda = \mathbb{Z}^D$. Ils correspondent au propagateur du champ scalaire libre, régularisé sur réseau, étudié précédemment.

Cette fonction à deux points s'étudie facilement dans l'espace réciproque du réseau \mathbb{Z}^D , c'est-à-dire dans la zone de Brillouin, par transformation de Fourier. L'opérateur \mathbf{H} commute avec les translations sur le réseau, donc est simultanément diagonalisable avec les opérateurs de translation, dont les vecteurs propres (non normalisés) sont les ondes planes

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{a}) = \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{a}) \quad (11.68)$$

les vecteurs à coordonnées entières $\vec{a} = (a^\mu, \mu = 1, D) \in \mathbb{Z}^D$ sont les points du réseau. Les $\vec{k} = (k_\mu, \mu = 1, D) \in [-\pi/a, \pi/a]^D$ sont les vecteurs d'onde dans l'espace réciproque $[\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}]^D$ du réseau, la zone de Brillouin. Les $\psi_{\vec{k}}$ sont donc des vecteurs propres du Laplacien discret Δ , de valeur propre $\lambda_{\vec{k}}$

$$\Delta \psi_{\vec{k}} = -\lambda_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}} \quad , \quad \lambda_{\vec{k}} = 4 \sum_{\mu=1}^D \sin^2(k_\mu/2) \quad (11.69)$$

donc les vecteurs propres de \mathbf{G}

$$G \psi_{\vec{k}} = \frac{1}{J} \frac{1}{\lambda_{\vec{k}} + M^2} \psi_{\vec{k}}$$

et par transformée de Fourier inverse, les corrélations des spins sont (intégrales sur la zone de Brillouin)

$$G_{ij} = \frac{1}{J} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D \vec{k}}{(2\pi)^D} \frac{\exp(i\vec{k} \cdot (\vec{i} - \vec{j}))}{4 \sum_{\mu=1, D} \sin^2(k_\mu/2) + M^2} \quad , \quad M^2 = V''(M_0) \quad (11.70)$$

Ce résultat pour la fonction à deux points est très important. On va le retrouver dans la discussion de la théorie de Landau.

11.4.3 Comportement à grande distance de la fonction de corrélation

Le comportement à grande distance de la fonction de corrélation à deux points permet de calculer la longueur de corrélation et les valeurs des exposants critiques ν et η .

Loin du point critique

Loin du point critique, $M^2 = V''(m_0)$ est d'ordre 1, voire beaucoup plus grand. On s'attend à ce que la fonction à deux points décroisse exponentiellement avec la distance entre les deux points $|i - j|$ sur le réseau. Ceci peut se vérifier explicitement en dimension $D = 1$, où l'on trouve

$$G_{ij} = \frac{e^{-m|i-j|}}{2 \sinh(m)} \quad , \quad m = \xi^{-1} = 2 \operatorname{arcsinh}(M/2) \quad (11.71)$$

En dimension $D \geq 2$ il y a toujours décroissance exponentielle, mais avec une longueur de corrélation finie qui dépend de la direction \vec{u}

$$\vec{u} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{|\vec{i} - \vec{j}|} \quad (11.72)$$

C'est une conséquence de la brisure de l'invariance par rotation par la présence d'un réseau. On a à grande distance

$$G_{ij} \propto e^{-|i-j|/\xi(\vec{u})} \quad \text{avec} \quad \xi(\vec{u}) \sim 1/M \quad (11.73)$$

Près du point critique

Près du point critique, $M^2 = V''(m_0) \ll 1$ est très petit devant 1. On peut montrer facilement qu'à grande distance, donc quand $|i - j| \gtrsim M^{-1} \gg 1$, le terme dominant dans l'intégrale de Fourier 11.70 est le voisinage de l'origine où $|\vec{k}| \simeq M \ll 1$. On peut donc remplacer

$$4 \sum_{\mu} \sin(k_{\mu}/2)^2 \simeq \sum_{\mu} k_{\mu}^2 = \vec{k}^2 \quad (11.74)$$

et l'intégrale sur la zone de Brillouin par l'intégrale sur tout l'espace des moments.

$$\iint_{-\pi}^{\pi} \frac{d^D \vec{k}}{(2\pi)^D} \simeq \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^D \vec{k}}{(2\pi)^D} \quad (11.75)$$

On retrouve le propagateur continu du champ scalaire massif, étudié précédemment, et on a bien une fonction de corrélation invariante par rotation et décroissante exponentiellement

$$G_{ij} \propto e^{-|i-j|/\xi} \quad , \quad \xi = 1/M \quad (11.76)$$

car donnée explicitement par

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ikx}}{k^2 + M^2} \quad (11.77)$$

Au point critique

Au point critique, on a vu que $M^2 = V''(0) = 0$. La longueur de corrélation est donc infinie.

$$\xi = \infty \quad (11.78)$$

L'approximation précédente pour la fonction à deux points est toujours valable, et donc par analyse dimensionnelle, à grande distance, si $D > 2$ elle décroît algébriquement comme

$$G_{ij} = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik(i-j)}}{k^2} = \mathbf{c}_D |i-j|^{2-D} \quad (11.79)$$

Le cas $D = 2$ est particulier car la fonction à deux points, dans l'approximation du champ moyen, souffre de divergences infrarouges et n'est pas bien définie. La fonction à deux points exacte du modèle d'Ising est quant à elle bien définie et ne souffre pas de ce problème.

11.4.4 Exposants ν et η

Quand $J \rightarrow J_c$, la solution du champ moyen prédit que $M^2 = V''(m_0)$ s'annule comme $|J - J_c|$. Donc la longueur de corrélation diverge comme

$$\xi \propto |J - J_c|^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (11.80)$$

Au point critique ($J = J_c$) la fonction à deux points décroît algébriquement comme

$$G_{ij} \propto |i-j|^{2-D} \quad \Rightarrow \quad \eta = 0 \quad (11.81)$$

11.4.5 Comportement au point critique, limite continue

Limite continue pour la fonction de corrélation

Lorsque l'on est près du point critique, la longueur de corrélation ξ est très grande devant la maille du réseau (ici prise égale à 1)

$$\xi \gg 1$$

et à grande distance la fonction à deux points devient invariante par rotation, c'est-à-dire ne dépend que de la distance géométrique $x = |i-j| \gg 1$. Elle est donnée par

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ikx}}{k^2 + M^2} \quad (11.82)$$

On peut en effet négliger les bords de la zone de Brillouin, puisque dans la transformée de Fourier seuls comptent les $k \simeq 1/x \ll 1$. Elle satisfait l'équation elliptique

$$(-\Delta_x + M^2) G(x) = \delta(x) \quad (11.83)$$

où Δ_x est le laplacien sur \mathbb{R}^D , et vaut explicitement

$$G(x) = \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\sqrt{\pi} M^2} (Mx/2)^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d-2}{2}}(Mx) \quad (11.84)$$

où $K_n(z)$ est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce.

Cette fonction de corrélation $G(x)$ se retrouve dans le contexte de la théorie des champs euclidienne (*fonction de Green* ou *propagateur de Feynman*).

Limite continue pour le potentiel effectif $\Gamma[\mathbf{m}]$

Si on s'intéresse à la réponse du système à fluctuations de grande longueur d'onde et de faible amplitude de l'aimantation (qui sont celles qui dominent près du point critique), on peut considérer une aimantation m_i qui varie spatialement de façon continue et lente. On peut donc remplacer m_i par un champ continu $m(x)$ tel que

$$m_i \rightarrow m(x) \quad : \quad |m| \ll 1 \quad , \quad |\nabla_x m| \ll 1 \quad (11.85)$$

Si on revient à la forme 11.47 pour le potentiel effectif dans l'approximation du champ moyen

$$\Gamma_{\text{var}}[m] = \frac{J}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (m_i - m_j)^2 + \sum_i V(m_i)$$

et qu'on absorbe J dans la définition de m

$$m_i \rightarrow J^{-1/2} m(x)$$

on identifie le premier terme au carré du gradient

$$\sum_{\langle ij \rangle} (m_i - m_j)^2 \rightarrow \int d^D x (\vec{\nabla} m(x))^2$$

et on peut ne garder que les termes d'ordre m , m^2 et m^4 dans le développement de $V(m)$ donné par 11.56. On obtient un potentiel effectif de la forme simple

$$\Gamma[m_i] \rightarrow \mathcal{H}[m] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\vec{\nabla} m(x))^2 + \frac{t}{2} m^2(x) - h m(x) + \frac{u}{12} m^4(x) \right] \quad (11.86)$$

où on a identifié

$$t = \frac{J_c - J}{J_c^2} \quad , \quad h = \frac{B}{\sqrt{J_c}} \quad , \quad u = \frac{1}{J_c^2} \quad (11.87)$$

Ce potentiel effectif, qui est *a priori* une approximation du potentiel effectif dans l'approximation variationnelle, a une forme en fait plus générale et joue un rôle très important dans la théorie des phénomènes critiques, puisqu'il est à la base de la théorie de Landau.

11.4.6 Exercices

Exercice 11.8. Démontrer la forme exacte 11.71 du propagateur en $D = 1$.

Exercice 11.9. Montrer que la forme exacte de la longueur de corrélation $\xi(\vec{u})$ dans 11.73 dans l'approximation du champ moyen sur réseau carré est donnée par

$$\xi(\vec{u})^{-1} = \inf_{\vec{q} \in \mathfrak{B}} (\vec{q}\vec{u}) \quad (11.88)$$

où \mathfrak{B} est l'hypersurface définie par l'équation

$$\mathfrak{B} = \left\{ \vec{q} \in \mathbb{R}^D : \sum_{\mu=1,D} \sinh^2(q_\mu/2) = M^2/4 \right\} \quad (11.89)$$

En déduire que près du point critique la longueur de corrélation est bien indépendante de la direction, c'est-à-dire du vecteur unité \vec{u} .

Exercice 11.10. Montrer que le coefficient \mathbf{c}_D dans 11.79 pour la fonction à deux spins au point critique dans l'approximation du champ moyen est

$$\mathbf{c}_D = \frac{1}{2} \frac{S_{D-1}}{(2\pi)^{D-1}} \Gamma(D-2) \quad (11.90)$$

où

$$S_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2) \quad \text{volume de la sphère unité dans } \mathbb{R}^D \quad (11.91)$$

Identifier les divergences infrarouges quand $D \leq 2$ et discuter leur origine.

Exercice 11.11. Déduire la limite continue (près du point critique) du potentiel effectif dans l'approximation du champ moyen pour le modèle $O(N)$ (voir exercice 11.3).

11.5 La théorie de Landau des phénomènes critiques

11.5.1 Principe de l'approximation de Landau

La théorie de Landau des phénomènes critiques est une théorie phénoménologique inspirée de l'approximation du champ moyen. Elle fournit une approche générale, basée sur le concept de paramètre d'ordre macroscopique et de hamiltonien effectif (fonctionnelle d'énergie libre). Bien que

s'avérant incorrecte en général pour comprendre ce qui se passe précisément à un point critique, elle est très utile et joue un grand rôle pour la compréhension des transitions de phases. Le principe de la théorie de Landau est le suivant :

1. On identifie tout d'abord un **paramètre d'ordre \mathbf{m}** macroscopique et local du système, qui décrit les degrés de liberté importants au point critique. En général des considérations de symétries vont nous guider dans la recherche de ce paramètre d'ordre. Pour le modèle d'Ising, c'est l'aimantation locale $m(x)$ et c'est donc un scalaire.

On s'intéresse donc aux propriétés macroscopiques du système en fonction du paramètre d'ordre macroscopique. Les coordonnées d'espace x sont des variables continues ($x \in \mathbb{R}^D$).

2. On construit ensuite une **fonctionnelle d'énergie libre effective** $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ (hamiltonien effectif ou hamiltonien de Landau) supposant que les fluctuations thermodynamiques du paramètre d'ordre sont petites, et que les variations spatiales de ces fluctuations sont également petites (*a priori* c'est une bonne approximation au voisinage du point critique, au moins dans l'approximation du champ moyen). On ne va donc garder que les termes de plus bas degré dans un développement en puissance de \mathbf{m} et de ses dérivés spatiaux $\nabla\mathbf{m}$, $\nabla\nabla\mathbf{m}$, etc.
3. $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ devra respecter les **symétries** du système. En général ceci permet d'éliminer de nombreux termes permis par l'analyse dimensionnelle.
4. On suppose que les fluctuations thermiques sont petites, donc qu'il est suffisant de minimiser l'énergie libre $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ pour trouver la configuration $\mathbf{m}_0(x)$ caractérisant le fondamental. L'énergie libre du système sera donc

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{H}_L[\mathbf{m}_0] \quad \mathbf{m}_0 = \text{minimum de } \mathcal{H}_L[\mathbf{m}] \quad (11.92)$$

et la valeur moyenne du paramètre d'ordre

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \mathbf{m}_0 \quad (11.93)$$

Il est possible de calculer les fonctions de corrélations spatiales du paramètre d'ordre (voir plus loin).

5. Enfin on suppose que les paramètres de ce hamiltonien effectif vont dépendre de façon « régulière » des paramètres microscopiques du système considéré (dans notre cas J , T , B , les détails du réseau et des couplages entre les spins, etc.) et du champ extérieur appliqué. En faisant varier ces paramètres effectifs et en regardant comment le paramètre d'ordre et l'énergie interne du système varient, on obtient le diagramme de phase du système et l'existence éventuelle de transitions de phase qu'il conviendra ensuite de relier aux paramètres physiques (température, champ appliqué) ou microscopiques du système.

Cette énergie libre effective $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ est appelée souvent *hamiltonien de Landau* (c'est en fait la partie « énergie potentielle » ne dépendant pas des dérivées temporelles d'un hamiltonien effectif ou hamiltonien variationnel). On emploie souvent le terme d'action effective dans le contexte de la théorie statistique des champs (c'est la version euclidienne d'une action effective).

11.5.2 Théorie de Landau pour le modèle d'Ising

Hamiltonien de Landau-Ginzburg pour le modèle d'Ising

Hamiltonien en l'absence de champ externe : Pour le modèle d'Ising, le paramètre d'ordre est naturellement l'aimantation moyenne $\mathbf{m}(x) = \langle S(x) \rangle$ et c'est un champ scalaire. Les symétries que l'on va imposer sur le hamiltonien sont la symétrie interne \mathbb{Z}_2 de renversement des spins $\mathbf{m}(x) \rightarrow -\mathbf{m}(x)$ (en l'absence de champ magnétique externe) et la symétrie d'espace du réseau (ici la symétrie du réseau cubique).

Les arguments précédents conduisent à la même forme générale que celle obtenue pour le potentiel thermodynamique $\Gamma[m]$ dans l'approximation du champ moyen au voisinage du point critique. La forme générale pour $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ sera

$$\mathcal{H}_L[\mathbf{m}] = \int d^D x \left[\frac{z}{2} (\vec{\nabla} \mathbf{m}(x))^2 + \frac{a}{2} \mathbf{m}^2(x) + \frac{c}{4!} \mathbf{m}^4(x) \right] \quad (11.94)$$

z , a et c sont des paramètres effectifs dépendant de façon « régulière » des paramètres microscopiques (ici J/T). On a négligé les termes avec plus de deux dérivées spatiales ($(\nabla \mathbf{m})^2$, $(\nabla \nabla \mathbf{m})^2$, etc.) et ceux avec des puissances plus élevées de \mathbf{m} (\mathbf{m}^6 , \mathbf{m}^8 , etc.). On va justifier cette approximation plus bas. Pour que $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ soit borné inférieurement (stabilité), il faut évidemment que z et c soient positifs.

$$z > 0 \quad , \quad c > 0$$

On peut enfin normaliser le paramètre d'ordre \mathbf{m} pour que le coefficient z de $(\nabla \mathbf{m})^2$ soit égal à 1, c'est ce qui est fait généralement dans la littérature.

Couplage à un champ externe : En présence d'un champ magnétique externe $h(x)$, la symétrie $\mathbf{m} \rightarrow -\mathbf{m}$ est explicitement brisée et on doit introduire des termes impairs en $\mathbf{m}(x)$ dans $\mathcal{H}[\mathbf{m}]$. Le hamiltonien doit donc maintenant être invariant sous la transformation $\mathbf{m} \rightarrow -\mathbf{m}$ et $h \rightarrow -h$. Toujours inspiré par le calcul de champ moyen, on peut montrer qu'il suffit d'ajouter un terme en $h(x) \mathbf{m}(x)$ pour traiter le couplage entre le paramètre d'ordre et le champ externe.

$$\mathcal{H}_L[\mathbf{m}] = \int d^D x \left[\frac{z}{2} (\vec{\nabla} \mathbf{m}(x))^2 + \frac{a}{2} \mathbf{m}^2(x) + \frac{c}{4!} \mathbf{m}^4(x) - h(x) \mathbf{m}(x) \right] \quad (11.95)$$

Un terme en $h\mathbf{m}^3$ est permis par la symétrie, mais on va voir qu'il est sous-dominant dimensionnellement. Les coefficients z , a et c peuvent aussi dépendre de h mais au voisinage du point critique ces corrections sont sous-dominantes.

Corrélations spatiales : L'introduction d'un champ externe dépendant du temps permet de calculer les fonctions de corrélations (connexes) du paramètre d'ordre, par le même argument que celui utilisé dans le cadre de l'approximation variationnelle. La minimisation de $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ donne l'aimantation moyenne dans un champ externe inhomogène

$$\mathbf{m}(x) = \langle m(x) \rangle_h \quad (11.96)$$

C'est donc une fonctionnelle du champ externe h . Sa dérivée fonctionnelle donne la fonction de corrélation connexe à deux points

$$\frac{\delta \mathbf{m}(x)}{\delta h(y)} = \langle m(x) m(y) \rangle^{conn.} = \langle m(x) m(y) \rangle - \langle m(x) \rangle \langle m(y) \rangle \quad (11.97)$$

que l'on va déterminer un peu plus loin.

Diagramme de phase, point critique et exposants critiques

Comme on l'a vu dans la discussion de la solution de champ moyen, c'est le signe du paramètre a , coefficient du terme quadratique en \mathbf{m}^2 , qui est crucial. On suppose que a dépend de façon régulière et monotone de la température T , au moins au voisinage du point critique. La température critique T_c est donc telle que $a(T_c) = 0$. On va développer $a(T)$ en fonction de l'écart à la température critique T_c . Cet écart est la température réduite t , définie comme

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad ; \quad a(T) = a_1 t + \mathcal{O}(t^2) \quad a_1 > 0 \quad (11.98)$$

Au voisinage du point critique $|t| \ll 1$, les autres paramètres $z(T)$ et $c(T)$ peuvent être considérés comme constants

$$z(T) = z_0 + \mathcal{O}(t) \quad , \quad z_0 > 0 \quad , \quad c(T) = c_0 + \mathcal{O}(t) \quad , \quad c_0 > 0 \quad (11.99)$$

Notons que par une redéfinition adéquate de m et x , les coefficients z_0 et a_1 peuvent être fixés à l'unité $z_0 = a_1 = 1$.

Diagramme de phase : En l'absence de champ externe ($h(x) = 0$), la minimisation de $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ conduit donc à une aimantation homogène telle que

$$\mathbf{m}(x) = \mathbf{m}_0 \quad , \quad a_1 t \mathbf{m}_0 + c_0 \mathbf{m}_0^3 / 6 = 0$$

avec une phase désordonnée (para) pour $t > 0$ et deux phases ordonnées (ferro) pour $t < 0$ (brisure spontanée de la symétrie \mathbb{Z}_2).

$$\mathbf{m}_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \quad , \\ \pm \sqrt{6a_1/c_0} |t|^{1/2} & \text{si } t < 0 \quad . \end{cases} \quad (11.100)$$

On en déduit la valeur de l'exposant β

$$\beta = 1/2 \quad (11.101)$$

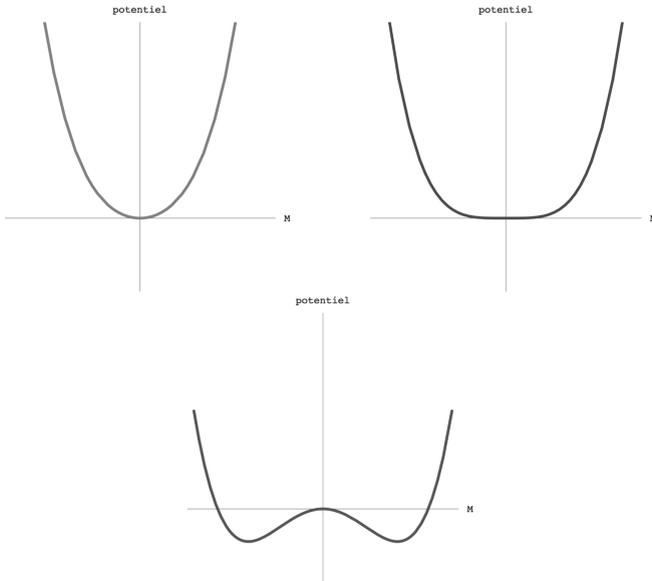


FIGURE 11.4 – Le potentiel de Landau $V(m)$ pour $t > 0$, $t = 0$ et $t < 0$ ($h = 0$).

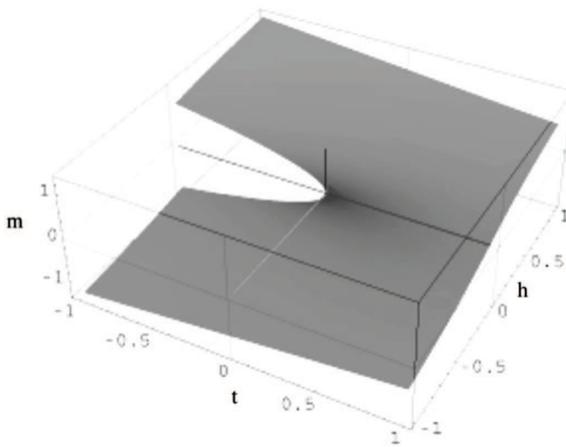


FIGURE 11.5 – Aimantation spontanée m en fonction de t et h dans la théorie de Landau.

Équation d'état : En présence d'un champ externe $h(x)$, la minimisation de $\mathcal{H}_L[\mathbf{m}]$ donne l'équation d'état générale

$$-z_o \Delta_x \mathbf{m}(x) + t a_1 \mathbf{m}(x) + c_o \mathbf{m}^3(x)/6 = h(x) \quad (11.102)$$

En champ homogène $h(x) = h$, on retrouve l'équation d'état du champ moyen

$$a_1 t \mathbf{m}_0 + c_0 \mathbf{m}_0^3/6 = h \quad (11.103)$$

qui donne l'aimantation $\mathbf{m}_0(t, h)$. La forme de cette fonction est donnée dans la figure 11.5. La susceptibilité magnétique (par unité de volume) diverge en $t = 0$ comme

$$\chi_v = \left. \frac{\partial \mathbf{m}_0}{\partial h} \right|_{h=0} = \begin{cases} (a_1 t)^{-1} & \text{si } t > 0, \\ (2a_1 |t|)^{-1} & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (11.104)$$

On en déduit la valeur de l'exposant γ

$$\gamma = 1 \quad (11.105)$$

Au point critique $t = 0$, l'aimantation s'annule avec le champ h comme

$$\mathbf{m}_0(t = 0, h) \propto h^{\frac{1}{3}} \quad \implies \quad \delta = 3$$

Chaleur spécifique : La chaleur spécifique c_v est (au moins sa partie singulière au point critique) proportionnelle à

$$c_v = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad f = a_1 \mathbf{m}_0^2/2 + c_0 \mathbf{m}_0^4/4! - h \mathbf{m}_0 \quad \text{densité d'énergie libre} \quad (11.106)$$

En champ nul $h = 0$ on trouve donc

$$c_v = \begin{cases} 0 & \text{pour } t > 0, \\ 3a_1^2/c_0 & \text{pour } t < 0. \end{cases} \quad (11.107)$$

La chaleur spécifique est discontinue en $t = 0$. On en déduit la valeur de l'exposant α

$$\alpha = 0 \quad (11.108)$$

Longueur de corrélation : Enfin la fonction de corrélation à deux spins est donnée par

$$G(x, y) = \frac{\partial \mathbf{m}(x)}{\partial h(y)} \implies (-z_0 \Delta_x + a_1 t + c_0 \mathbf{m}_0^2/6) G(x - y) = \delta(x - y) \quad (11.109)$$

C'est donc simplement la fonction de Green (euclidienne) d'un champ libre scalaire de masse m ,

$$G(x, y) \propto \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2} \quad (11.110)$$

dont la masse m est donnée par

$$m = \sqrt{a_1 t + c_0 \mathbf{m}_0(t)^2/6} \quad (11.111)$$

et s'annule en $t = 0$. Cette fonction de corrélation décroît exponentiellement à grande distance. La longueur de corrélation $\xi = m^{-1}$. Elle diverge en $t = 0$ comme

$$\xi = m^{-1} = \begin{cases} (a_1 t)^{-1/2} & \text{si } t > 0, \\ (2a_1 |t|)^{-1/2} & \text{si } t < 0. \end{cases} \quad (11.112)$$

On en déduit la valeur de l'exposant ν

$$\nu = 1/2 \quad (11.113)$$

Enfin au point critique $t = 0$, la fonction de corrélation est celle d'un champ libre de masse nulle

$$G(x) \propto |x|^{2-D} \quad (11.114)$$

On en déduit la valeur de l'exposant η dans la théorie de Landau

$$\eta = 0 \quad (11.115)$$

Les exposants critiques : Nous avons donc obtenu tous les exposants critiques du champ moyen avec la théorie de Landau.

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \nu = 1/2, \quad \eta = 0 \quad (11.116)$$

Justification du comptage dimensionnel

On va maintenant expliquer pourquoi on a négligé les termes de dimensionnalité supérieure dans \mathcal{H}_L (point 2).

La théorie de Landau décrit le voisinage du point critique, donc t et h sont petits. Plus précisément, au vu de l'équation d'état 11.123, elle s'applique si $|t|$ est petit et si les trois termes dans 11.123 sont du même ordre, donc si le champ h et l'aimantation m du système sont d'ordre

$$|t| \ll 1, \quad |h| \ll 1, \quad h \sim t^{3/2}, \quad \mathbf{m} \sim t^{1/2} \quad (11.117)$$

De plus on a vu que la longueur de corrélation ξ se comporte comme $|t|^{-1/2}$, donc les configurations d'aimantation à considérer sont celles qui varient lentement en x , avec une longueur de variation ℓ d'ordre ξ . Les gradients sont eux aussi petits, d'ordre

$$\nabla_x \sim \xi^{-1} \sim t^{1/2} \quad (11.118)$$

Dans le régime critique, où $\xi \gg 1$, on voit que les quatre termes qu'on a conservés dans \mathcal{H}_L sont d'ordre t^2

$$(\nabla \mathbf{m})^2 \sim t \mathbf{m}^2 \sim \mathbf{m}^4 \sim h \mathbf{m} \sim t^2 \sim \xi^{-4} \quad (11.119)$$

Par contre, tous les autres termes de plus haut degré en ∇ , \mathbf{m} ou h et autorisés par la symétrie ($\mathbf{m} \leftrightarrow -\mathbf{m}$, $h \leftrightarrow -h$) du système sont d'ordre plus élevé en t

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{m})^4, (\nabla^2 \mathbf{m})^2, \mathbf{m}^2 (\nabla \mathbf{m})^2, \mathbf{m}^6, h \mathbf{m}^3 &\sim t^3 \sim \xi^{-6} \\ (\nabla \mathbf{m})^6, \dots, \mathbf{m}^8, h \mathbf{m}^5, h^3 m &\sim t^4 \sim \xi^{-8} \end{aligned} \quad (11.120)$$

Ces termes sont donc bien négligeables au voisinage du point critique.

Au voisinage du point critique les deux termes $a m^2$ et $c m^4$ dans $\mathcal{H}[m]$ sont du même ordre $\mathcal{O}(|t|^2)$, et les termes négligés m^6 , m^8 , etc. sont bien négligeables

$$t m^2 \sim m^4 \sim |t|^2 \gg m^6 \sim |t|^3 \gg m^8 \sim |t|^4 \dots$$

De même, on s'attend (et on va le montrer plus loin) à ce que la longueur de corrélation ξ se comporte comme

$$\xi \propto |t|^{-1/2}$$

En conséquence le gradient du paramètre d'ordre se comporte comme

$$\nabla m \sim m/\xi \sim |t| \Rightarrow (\nabla m)^2 \sim |t|^2$$

et donc le terme en $(\nabla m)^2$ est bien du même ordre que les deux autres, ce qui justifie qu'on l'ait gardé dans $\mathcal{H}[m]$. Par contre les termes avec plus de dérivées sont bien petits

$$(\nabla^2 m)^2 \sim |t|^3, \quad (\nabla m)^4 \sim |t|^4, \quad \dots$$

En présence d'un champ magnétique externe $h(x)$, la symétrie $m \rightarrow -m$ est explicitement brisée et on doit introduire des termes impairs en $m(x)$ dans $\mathcal{H}[m]$. Le hamiltonien doit maintenant être invariant sous la transformation $m \rightarrow -m$ et $h \rightarrow -h$. Toujours inspiré par le calcul de champ moyen, on peut montrer qu'il suffit d'ajouter un terme en $h(x)m(x)$ pour traiter le couplage entre le paramètre d'ordre et le champ externe.

$$\mathcal{H}[m] = \int d^D x \left[\frac{z}{2} (\vec{\nabla} m(x))^2 + \frac{a}{2} m^2(x) + \frac{c}{4!} m^4(x) - h(x)m(x) \right] \quad (11.121)$$

Un terme en $h m^3$ est permis par la symétrie, mais on va voir qu'il est sous-dominant dimensionnellement. Les coefficients z , a , c peuvent dépendre de h , mais au voisinage du point critique ces corrections sont sous-dominantes.

La minimisation de $\mathcal{H}[m]$ conduit à l'équation reliant $m(x)$ à $h(x)$

$$-z_o \Delta_x m + t a_1 m + c_0 m^3/6 = h \quad (11.122)$$

En champ homogène $h(x) = h$ on retrouve l'équation du champ moyen

$$t m_0 + c_0 m_0^3 = h \quad (11.123)$$

et au point critique $t = 0$ l'aimantation s'annule avec le champ h comme

$$m \propto h^{\frac{1}{3}}$$

On voit que les termes m^4 et hm sont du même ordre, un éventuel terme en hm^3 est négligeable

$$hm \sim m^4 \sim h^{4/3} \gg hm^3 \sim h^2$$

d'où son absence dans $\mathcal{H}[m]$.

Enfin, comme précédemment, la fonction de corrélation de deux aimantations est donnée par

$$\langle m(x)m(y) \rangle^c = \langle m(x)m(y) \rangle - \langle m(x) \rangle \langle m(y) \rangle \propto \frac{\delta m(x)}{\delta m(y)} \quad (11.124)$$

et est donc donnée par la fonction de Green $G(x - y)$, solution de

$$(-z_0 \Delta_x + t a_1 + c_0 m_0^2/2) G(x) = \delta(x) \quad (11.125)$$

donc le même résultat que la limite continue de la fonction de corrélation à deux spins obtenue dans l'approximation du champ moyen

$$G(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ikx}}{k^2 + M^2} \quad ; \quad m^2 = (a_1 + c_0 m_0^2/2) / z_0 \quad (11.126)$$

La « masse » M est l'inverse de la longueur de corrélation ξ et se comporte bien comme

$$\xi^{-1} = M \propto |t|^{1/2} \quad (11.127)$$

On retrouve donc bien le même comportement critique que celui du champ moyen au voisinage du point critique en fonction des deux variables t (écart en température au point critique) et h (champ externe). En particulier, les exposants critiques sont ceux du champ moyen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1/2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 3, \quad \nu = 1/2, \quad \eta = 0 \quad (11.128)$$

11.5.3 Théorie de Landau pour d'autres systèmes critiques

Discussion générale

Pour le modèle d'Ising la construction d'un hamiltonien de Landau-Ginzburg est simple. Le paramètre d'ordre macroscopique (aimantation locale) est relié simplement à la physique microscopique (spins classiques localisés). En général c'est plus compliqué. Identifier quel est le bon paramètre d'ordre caractérisant un système à un point critique et quelles sont les interactions pertinentes pour construire une bonne théorie de Landau peut être plus difficile.

Modèles avec symétrie continue $O(N)$

Le modèle de spins classiques sur réseau le plus simple avec une symétrie continue est le modèle de spin classique avec symétrie $O(N)$ (le groupe des rotations dans \mathbb{R}^N). Sur réseau ce modèle est décrit par des spins classiques à N composantes, donc des vecteurs \vec{S}_i à N composantes réelles, et de norme 1 ($|\vec{S}_i| = 1$) sur chaque site i (si $\vec{S} = \{S_a; a = 1, \dots, N\}$, $|\vec{S}|^2 = \sum_a S_a^2$). Le hamiltonien est la généralisation du hamiltonien d'Ising, avec couplage entre plus proches voisins sur le réseau

$$\mathcal{H}[\vec{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j \quad (11.129)$$

Ce modèle est invariant sous les rotations globales $O(N)$ dans l'espace interne des spins à N composantes.

$$\vec{S}_i \rightarrow \mathbf{R} \vec{S}_i \quad , \quad \mathbf{R} \in O(N) \quad \text{matrice de rotation}$$

puisque

$$\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rightarrow \vec{S}_i \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{R} \cdot \vec{S}_j = \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$

Pour $J > 0$ le couplage est ferromagnétique et l'état de plus basse énergie est celui où les spins sont tous orientés dans une même direction (arbitraire). Cette symétrie globale (le groupe de transformation agit de la même façon sur tous les spins) peut être brisée explicitement en introduisant un champ externe \vec{H} à N composantes et en ajoutant le couplage

$$\mathcal{H}[\vec{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j - \vec{H} \sum_i \vec{S}_i \quad (11.130)$$

Le cas $N = 1$ (une composante) est évidemment le modèle d'Ising. Le cas $N = 2$ (deux composantes) est appelé le modèle XY. Chaque spin peut être représenté par un angle θ_i , avec $\vec{S}_i = (X_i, Y_i) = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$. Le hamiltonien est

$$\mathcal{H}[\vec{S}] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) - H \sum_i \cos(\theta_i - \varphi_0) \quad (11.131)$$

Le cas $N = 3$ (trois composantes) est appelé le modèle de Heisenberg classique.

Un autre cas intéressant est le cas $N \rightarrow \infty$, car dans cette limite le modèle est soluble et l'approximation du champ moyen est exacte (voir exercice). Cette limite est appelée le modèle sphérique.

Enfin un dernier cas intéressant est la limite $N \rightarrow 0$, modèle à zéro composante ! Proprement définie, cette limite décrit en fait un polymère sur réseau (chaîne avec interactions répulsives d'auto-évitement). Ce modèle et les différentes manières de modéliser les polymères seront discutés en détail plus loin.

Si ce modèle possède un point de Curie, avec une transition de type ferromagnétique/paramagnétique, le hamiltonien de Landau pour décrire ce point

critique s'obtient simplement. Le paramètre d'ordre doit avoir N composantes, donc être un vecteur de norme non fixée $\vec{m} = (m_1, \dots, m_N)$. En l'absence de champ externe, on doit avoir la symétrie de rotation $O(N)$. La même analyse que pour Ising (symétries + analyse dimensionnelle) conduit à l'énergie libre

$$\mathcal{H}_L[\vec{m}] = \int d^D x \left[\frac{z}{2} (\nabla_x \vec{m}(x))^2 + \frac{a}{2} (\vec{m}^2(x) + \frac{c}{8} (\vec{m}^2)^2(x) - \vec{h} \vec{m}(x)) \right] \quad (11.132)$$

Comme pour le cas $N = 1$, z , a et c sont des paramètres phénoménologiques qui dépendent de façon régulière de la température, z et c sont > 0 , et a s'annule au point de Curie. Dans la phase désordonnée de haute température $a > 0$, ses propriétés ne sont pas très différentes de celles du modèle d'Ising ($N = 1$). Par contre dans la phase ordonnée de basse température, ses propriétés sont qualitativement différentes pour $N \geq 2$ à cause de la présence de modes zéros (modes de Goldstone) qui seront discutés plus bas. De façon générale, la transition de phase va décrire le passage d'une phase avec symétrie globale $O(N)$ à une phase où cette symétrie est spontanément brisée, et où seul un sous-groupe de symétrie, ici le sous-groupe $O(N - 1)$, n'est pas brisé

$$O(N) \rightarrow O(N - 1) \quad (11.133)$$

Le modèle avec une symétrie $O(2)$ est important car il est à la base de la théorie de Landau-Ginzburg de la supraconductivité. Le paramètre d'ordre est la fonction d'onde $\psi(x)$ du condensat (théorie BCS) qui est une fonction d'onde complexe. Le groupe de symétrie correspond au changement de phase global de la fonction d'onde, donc à une transformation $U(1) = SO(2)$. Le couplage au champ électromagnétique rend la symétrie $U(1)$ locale et est à l'origine des propriétés fascinantes des supraconducteurs.

Dans le contexte de la physique des hautes énergies, le modèle $O(N)$ est parfois appelé *modèle sigma linéaire*.

Des modèles de spins classiques ou quantiques peuvent exhiber des symétries et des mécanismes de brisure de symétrie très riches, qui seront décrits pas des théories de Landau avec des paramètres d'ordres plus complexes (vecteurs, champs complexes, champs matriciels, etc). De même pour des systèmes statistiques avec frustration, des systèmes désordonnés, et les systèmes en physique de la matière mal organisée (matière molle), tels les polymères, les cristaux liquides, les systèmes membranaires présentant de l'ordre géométrique macroscopique. Ces systèmes possèdent souvent des excitations topologiques (vortex, lignes de défaut) qui induisent des transitions de phase, plus difficile à aborder à l'aide d'une approximation de Landau.

Fluides binaires

On a vu que les fluides binaires possèdent un point critique (extrémité de la ligne de coexistence de phases) qui appartient à la même classe d'universalité du modèle d'Ising (en absence d'interactions à longue portée). Ceci peut se comprendre dans le cadre de la théorie de Landau. Dans un modèle idéalisé de

fluide binaire, les paramètres relevant sont la température T et la différence de potentiel chimique entre les deux composantes A et B, $\mu = \mu_A - \mu_B$. Le point critique est (T_c, μ_c) et la densité du fluide est ρ . Au point critique $\rho = \rho_c$. Une théorie de Landau se construit en considérant les paramètres réduits $t = T - T_c$, $s = \mu - \mu_c$ et comme paramètre d'ordre $\phi = \rho - \rho_c$. Le hamiltonien sera

$$H[\phi] = \int d^D x \left(\frac{a_0}{2} (\partial\phi)^2 + a_1\phi + \frac{a_2}{2}\phi^2 + \frac{a_3}{3!}\phi^3 + \frac{a_4}{4!}\phi^4 \right) \quad (11.134)$$

Les $a_i = a_i(t, s)$ sont des paramètres effectifs qui dépendent de façon régulière de s et t , et tels que au point critique

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_0 \text{ et } a_4 > 0 \quad \text{à} \quad s = t = 0 \quad (11.135)$$

En apparence il faut ajuster trois quantités pour atteindre le point critique, mais un changement adéquat de définition du paramètre d'ordre

$$\phi(x) \rightarrow \psi(x) = \phi(x) - \phi_0 \quad (11.136)$$

avec ϕ_0 dépendant de s et t permet de se ramener au cas $a_3 = 0$ et au hamiltonien de Landau pour les systèmes magnétiques $N = 1$.

11.5.4 Exercices

Exercice 11.12. Fluides binaires

Écrire explicitement le changement de paramètre d'ordre 11.136 qui permet de passer du hamiltonien général sans symétrie \mathbb{Z}_2 pour les fluides binaires au hamiltonien de Landau-Ginzburg.

Exercice 11.13. Symétries cubiques

Les systèmes magnétiques de structure cristalline donnée ont généralement des interactions entre moments magnétiques locaux dépendant de la structure du cristal. En conséquence, pour un modèle en D dimensions, le paramètre d'ordre $\vec{\phi}$ sera en général un vecteur à D composantes, donc $N = D$, mais le groupe de symétrie pour les rotations de $\vec{\phi}$ ne sera pas le groupe des rotations $O(D)$, mais un sous-groupe fini, le groupe des rotations qui préserve la structure du réseau cristallin.

Dans le cas d'un modèle magnétique à N composantes, écrire le modèle de Landau le plus général qui possède le groupe de symétrie du réseau hypercubique \mathbb{Z}^N agissant sur le paramètre d'ordre $\vec{\phi} = (\phi_a; a = 1, \dots, N)$, c'est-à-dire le groupe de transformation obtenu en changeant les signes de certaines composantes de ϕ , $\phi_a \rightarrow -\phi_a$ et en permutant certaines des composantes $(\dots\phi_a\dots\phi_b\dots) \rightarrow (\dots\phi_b\dots\phi_a\dots)$.

Exercice 11.14. Modèles de Potts

Des modèles de physique statistique très intéressants, qui généralisent le modèle d'Ising, sont les modèles de Potts. Ces modèles sur réseaux sont définis

comme suit. Chaque site porte un spin S_i qui peut être dans Q états, états que l'on va étiqueter par des nombres entiers

$$S_i = 1, 2 \cdots Q \quad (11.137)$$

Ces étiquettes ne correspondent pas à la valeur d'un moment magnétique donné. Le hamiltonien décrit des interactions entre spins voisins, avec couplage qui favorise des spins voisins dans le même état.

$$H_{\text{Potts}}[S] = -J \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{S_i, S_j} \quad (11.138)$$

Quel est le groupe de symétrie de ce modèle de Potts ? Pouvez-vous écrire un hamiltonien de Landau pour un tel modèle ?

Exercice 11.15. Points tricritiques

Le modèle d'Ising avec interactions entre plus proches voisins exhibe seulement une transition ordre/désordre du second ordre. Des modèles plus généraux peuvent présenter une transition ordre/désordre qui est, soit du deuxième ordre, soit du premier ordre, en fonction des paramètres. La transition entre les deux types de points critiques peut elle-même être considérée comme un point multi-critique intéressant.

C'est le cas du modèle de spin à 3 états, équivalent à un modèle d'Ising dilué, c'est-à-dire que les spins peuvent être absents de certains sites. Les spins classiques locaux prennent trois valeurs

$$S_i = \begin{cases} \pm 1 & \text{spin d'Ising sur le site } i, \\ 0 & \text{pas de spin sur le site } i. \end{cases} \quad (11.139)$$

Le hamiltonien local est

$$H[S] = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - \mu \sum_i S_i^2 \quad (11.140)$$

J est le couplage ferromagnétique d'Ising. μ est le potentiel chimique pour les lacunes (sites où il n'y a pas de spin). Dans la limite $\mu \rightarrow \infty$ on retrouve le modèle d'Ising standard.

Question 1 : En fonction du signe de μ , quel est le fondamental du système ?

Question 2 : Pouvez-vous proposer un hamiltonien d'essai local qui prenne en compte la présence de lacunes, et résoudre le modèle dans l'approximation du champ moyen par la méthode variationnelle ?

Question 3 : Montrer que suivant la valeur de μ la transition est du premier ou du deuxième ordre.

Question 4 : Au point (J_c, μ_c) où la transition change de nature, montrer que le potentiel thermodynamique $\Gamma[m]$ en fonction de l'aimantation m est à grande distance et pour des valeurs petites de m , de la forme

$$\Gamma[m] = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\nabla_x m)^2 + \lambda m^6 \right) \quad (11.141)$$

Cette théorie, et de façon générale les théories contenant des termes en ϕ^2 , ϕ^4 et ϕ^6 , seront discutées en détail plus loin.

11.6 Fluctuations dans la phase de basse température : dimension critique inférieure

11.6.1 Dimension critique inférieure

La théorie de Landau suppose que les fluctuations thermiques sont petites, et ne changent pas qualitativement les propriétés du système. Il s'agit maintenant d'estimer l'importance des fluctuations dans le cadre de la théorie de Landau, et de s'assurer si elles sont effectivement petites.

Plus la dimensionnalité D du système est grande et moins l'effet des fluctuations sera important. Par exemple, pour des modèles de spin chaque site aura un plus grand nombre de voisins (d'ordre D), l'effet des corrélations entre les fluctuations des spins voisins sera *a priori* d'ordre $1/\sqrt{D}$ par rapport à leur moyenne (loi des grands nombres). Il sera donc relativement petit par rapport à l'effet de l'aimantation moyenne, pour de grandes valeurs de D . On peut montrer de cette façon pour le modèle d'Ising que l'approximation du champ moyen devient *exacte* dans la limite $D \rightarrow \infty$. Réciproquement plus D sera petit et plus l'effet des fluctuations sera *a priori* important, toutes choses égales par ailleurs.

Dans cette section, on va étudier l'effet des fluctuations dans la phase de basse température, où la symétrie du système est spontanément brisée. On va voir que si la dimensionnalité du système D est suffisamment petite, les fluctuations thermiques sont suffisamment fortes pour détruire l'ordre à toute température. Il n'y a pas de transition ordre-désordre. La dimension D_{lc} en deçà de laquelle ceci se produit est appelée la *dimension critique inférieure* (*lower critical = lc*). D_{lc} dépend de la nature de la symétrie, discrète ou continue, et de la nature des interactions (courte ou longue portée).

11.6.2 Symétrie discrète : $D_{lc} = 1$

Défauts et argument énergie/entropie

Un argument simple (dû à R. Peierls) montre que sous des conditions assez générales il n'existe pas de phase ordonnée à $T > 0$ en dimension $D = 1$. Cet argument se base sur le rôle des défauts (excitations thermiques), la comparaison entre l'énergie et l'entropie des défauts. Considérons le modèle d'Ising. À basse température, il est possible d'avoir des domaines macroscopiques où le signe de l'aimantation est différent. Ces domaines sont séparés par des parois, caractérisés par une énergie par unité de surface finie (tension de surface) et une épaisseur finie. Dans le cadre de l'approximation de Landau, donc en utilisant le hamiltonien 11.94 avec $a < 0$, on montre facilement (voir exercice)

que la tension de surface est $\sigma_0 \propto \sqrt{z|a|^3/c}$ et que l'épaisseur est du même ordre que la longueur de corrélation $e \propto \xi = \sqrt{z/|a|}$.

En une dimension ($D = 1$), les domaines sont des intervalles et les défauts des points sur la droite réelle séparant ces domaines. La tension de surface d'un défaut est simplement une énergie de défaut, puisqu'en dimension D , σ_0 a la dimension énergie/longueur $^{D-1}$.

Considérons donc un système de taille L (disons avec des conditions aux limites périodiques), et les configurations avec N domaines ; séparés par des défauts en des points $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < L$. L'énergie de ces configurations est proportionnelle au nombre de défauts, donc

$$\text{Énergie} = \sigma_0 N \quad (11.142)$$

et indépendante de la position respective des défauts. L'entropie de l'ensemble de ces configurations à N défauts (traités comme un état macroscopique) est donc celle d'un gaz de N particules indiscernables de taille e qui s'évitent sur un intervalle de longueur L , donc d'ordre

$$\text{Entropie} \simeq k_B \log((L/e)^N/N!) \simeq k_B N \log(L/(Ne)) \quad (11.143)$$

L'énergie libre en fonction du nombre de défauts est donc

$$F_N \simeq \sigma_0 N - k_B T N \log(L/Ne) \quad (11.144)$$

Le nombre moyen de défauts N est obtenu en minimisant cette énergie libre. Pour un système de grande taille $L \gg e \exp(\sigma_0/k_B T)$ il est toujours entropiquement favorable d'avoir un nombre macroscopique N de domaines différents, avec

$$N \propto \frac{L}{e} \exp(-\sigma_0/k_B T) \quad (11.145)$$

donc une densité de défauts finie, plutôt qu'un petit nombre de défauts. On note le facteur exponentiel avec l'énergie d'activation du processus de création de défauts. Le système est donc toujours dans une phase désordonnée. À noter que la distance moyenne entre parois fournit une estimation pour la longueur de corrélation à basse température en accord avec la solution exacte à $D = 1$

$$\xi \sim L/N \sim \exp(\sigma_0/k_B T) \quad (11.146)$$

La longueur de corrélation est finie pour $T > 0$, mais diverge exponentiellement quand $T \rightarrow 0$.

La conclusion est qu'en dimension $D = 1$ les fluctuations thermiques ont une entropie grande et détruisent toujours la phase ordonnée, aussi petite que soit la température $T > 0$.

En dimension $D > 1$, l'argument n'est plus valable. Considérons un domaine de taille R d'aimantation $m < 0$ à l'intérieur du volume (de taille L) d'aimantation globale $m > 0$. L'énergie de surface d'un tel domaine dépend de sa taille et est d'ordre

$$E_1 \propto \sigma_0 R^{D-1} \quad (11.147)$$



FIGURE 11.6 – Une configuration avec plusieurs domaines.

L'entropie du domaine dépend très qualitativement de la taille comme

$$S_1 \propto k_B \log(L^D/R^D) \quad (11.148)$$

À basse température, les domaines où l'aimantation change de signe sont très petits et entropiquement défavorisés. Les systèmes unidimensionnels sont donc très différents des systèmes en plus grande dimension.

$D_{\text{crit. inf.}} = 1$ est la *dimension critique inférieure* pour un système avec une symétrie discrète.

$$\text{symétrie discrète} \Rightarrow D_{\text{crit. inf.}} = 1$$

Limitations de l'argument de Peierls

Deux hypothèses implicites ont été faites dans cet argument :

1. Les forces d'interactions sont à courte portée (pour le modèle d'Ising elles sont entre plus proches voisins).
2. Les poids statistiques des configurations (poids de Boltzmann $w = \exp(-\beta E)$) sont locaux et positifs.

Des systèmes unidimensionnels avec des interactions à longue portée (soit explicites, soit induites par d'autres interactions, par exemple par des phonons) peuvent être ordonnés à basse température. Des modèles de statistique géométriques en $D = 1$ ou des systèmes désordonnés peuvent être également dans ce cas.

11.6.3 Symétrie continue et modes de Goldstone

Introduction

La situation est très différente pour le cas d'un système avec une symétrie continue. Des modes de masse nulle (modes de Goldstone) sont présents dans la phase où la symétrie est brisée spontanément, modes absents si la symétrie est discrète. Les fluctuations restent donc de longue portée pour $T < T_c$. Des résultats rigoureux de mécanique statistique (théorème de Mermin-Wagner) et des arguments de théorie des champs (Goldstone, Coleman) montrent que dans ce cas les fluctuations détruisent l'ordre à toute température si la dimensionnalité du système est inférieure ou égale à deux, et si les interactions sont à courte portée. Donc dans ce cas

$$\text{symétrie continue} \Rightarrow D_{\text{crit. inf.}} = 2$$

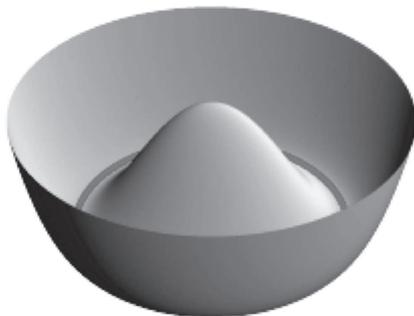


FIGURE 11.7 – Le potentiel du modèle sigma linéaire (pour $N = 2$) et l'ensemble de ses états fondamentaux (cercle). Les modes de Goldstone sont les excitations $\vec{m}(x)$ qui restent confinées au fond du potentiel.

Dans cette section nous discutons ces modes, appelés souvent modes de Goldstone, ou ondes de spin dans le contexte de la matière condensée.

Modèle sigma linéaire $O(N)$

Considérons le modèle de Landau-Ginzburg à N composantes avec symétrie $O(N)$, dans la phase de basse température où $a < 0$, $c > 0$. Le hamiltonien se réécrit (à une constante additive près) comme

$$\mathcal{H}[\vec{m}] = \int d^Dx \frac{1}{2} (\nabla \vec{m})^2 + \frac{c}{8} (\vec{m}^2 - m_0^2)^2 \quad (11.149)$$

$$\vec{m} = \{m^a; a = 1, N\} \quad (11.150)$$

$m_0 > 0$ est l'aimantation moyenne, $c > 0$ la constante de couplage. Sous cette forme, le modèle est souvent appelé modèle sigma linéaire, une appellation qui vient de la physique des hautes énergies (Schwinger). Le potentiel pour le champ \vec{m} est représenté sur la figure 11.7 (pour le modèle à $N = 2$ composantes). L'état de plus basse énergie du système est ordonné, avec une aimantation d'amplitude fixée, mais dans une direction \vec{u}_0 arbitraire.

$$\vec{m}(x) = m_0 \vec{u}_0, \quad |\vec{u}_0| = 1$$

La symétrie globale $O(N)$ du modèle est spontanément brisée. Il y a un ensemble continu d'états de plus basse énergie. Si $\langle \vec{m} \rangle \propto \vec{u}_0$, l'état de plus basse énergie est invariant sous le sous-groupe $O(N-1)$ des rotations autour de cet axe \vec{u}_0 .

$$\text{symétrie brisée } O(N) \rightarrow O(N-1)$$

On voit immédiatement que changer continûment et globalement l'orientation (par une rotation globale des spins) change le fondamental sans changer l'énergie. On s'attend donc à ce que des variations locales de l'orientation des spins \vec{m} ne coûtent pas beaucoup d'énergie si le gradient de

ces variations est petit. De telles fluctuations sont les modes de Goldstone (ondes de spin), que nous caractérisons maintenant.

Fluctuations et modes de Goldstone (ondes de spin)

On étudie les fluctuations autour d'un fondamental dans le cadre de l'approximation de Landau en calculant la fonction de corrélation (connexe) à deux points

$$G^{ab}(x-y) = \langle m^a(x)m^b(y) \rangle - \langle m^a(x) \rangle \langle m^b(y) \rangle \quad (11.151)$$

Pour simplifier, l'aimantation moyenne est choisie dans la direction $a = 1$

$$\vec{m}_0 = m_0 \vec{u}_0 \quad ; \quad \vec{u}_0 = (1, 0 \cdots 0) \quad (11.152)$$

$G^{ab}(x-y)$ est l'inverse du hessien de \mathcal{H} , c'est-à-dire l'opérateur dérivée seconde du hamiltonien $\mathbf{Hess} = \mathcal{H}''$

$$\mathbf{Hess}_{ab} = \frac{\delta^2 \mathcal{H}[\mathbf{m}]}{\delta \mathbf{m}^a \delta \mathbf{m}^b} = -\Delta_x \delta_{ab} + \left. \frac{\partial^2 V(\vec{m})}{\partial m^a \partial m^b} \right|_{\vec{m}=\vec{m}_0}, \quad V(\vec{m}) = \frac{c}{8}(\vec{m}^2 - m_0^2)^2 \quad (11.153)$$

On trouve facilement que

$$\left. \frac{\partial^2 V(\vec{m})}{\partial m^a \partial m^b} \right|_{\vec{m}=\vec{m}_0} = c m_0^a m_0^b = c m_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (11.154)$$

et la transformée de Fourier du hessien est

$$\mathbf{Hess}_{ab}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} p^2 + M^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p^2 \end{pmatrix}, \quad M^2 = c m_0^2 \quad (11.155)$$

La fonction de corrélation à deux points est donc simplement en transformée de Fourier

$$G^{ab}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 + M^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p^2} \end{pmatrix} \quad (11.156)$$

Il y a une *excitation longitudinale* (parallèle à l'aimantation spontanée \vec{m}_0) massive de masse M , et $N - 1$ *excitations transverses* (orthogonales à \vec{m}_0) de masse nulle. Ces excitations transverses sont de basse énergie aux grandes longueurs d'onde, et elles correspondent à des modes « mous » de déformations qui font passer le système d'une aimantation spontanée \vec{m}_0 à une autre

aimantation \vec{m}'_0 de façon continue. Elles portent les noms d'ondes de spin en physique statistique et de *modes de Goldstone* en théorie des champs.

Cette mise en évidence de modes de masse nulle si une symétrie continue est brisée spontanément se généralise facilement à des schémas de brisure plus généraux. Elle est faite ici dans le cadre de la théorie du champ moyen, mais des arguments non perturbatifs de théorie quantique des champs (unitarité, positivité, représentation de Kählen-Lehmann) montrent que l'existence de modes de Goldstone est très générique.

Modes zéro et mode σ

La dynamique des modes s'étudie facilement en réécrivant le champ comme

$$\vec{m} = (m_0 + \sigma, \vec{\pi}) \quad , \quad \vec{\pi} \text{ champ à } N - 1 \text{ composantes} \quad (11.157)$$

Le hamiltonien se linéarise en

$$H = \int d^D x \left(\frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + \frac{M^2}{2}\sigma^2 \right) + \frac{1}{2}(\partial\vec{\pi})^2 + \text{termes non linéaires} \quad (11.158)$$

$\vec{\pi}$ représente les $N - 1$ modes de Goldstones, de masse nulle, σ le champ massif longitudinal. Les termes non linéaires sont des termes de couplages entre les champs σ et $\vec{\pi}$, d'ordre trois ou quatre dans les champs.

11.6.4 $D_{lc} = 2$ et argument de Mermin-Wagner-Coleman

La présence de modes de masse nulle dans la phase de symétrie brisée entraîne l'existence de singularités infrarouges (IR) dans les fonctions de corrélations. Ces singularités à grande distance peuvent se traduire par des divergences IR dans les amplitudes de Feynman, qui peuvent elles-mêmes poser problème pour la cohérence de la théorie des perturbations et l'approximation du champ moyen.

Divergences IR en $D = 2$ et argument de Coleman

Ces singularités posent problème en dimensions $D \leq 2$ car la fonction de corrélation de masse nulle est divergente IR. En effet elle est définie par la transformée de Fourier

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ikx} \frac{1}{k^2} \simeq \int_0^\infty d|k| |k|^{D-3} \quad \text{divergent en } k = 0 \text{ si } D \leq 2 \quad (11.159)$$

On peut régulariser le système dans l'infrarouge (régularisation IR) en le mettant dans une boîte de taille finie L (avec par exemple des conditions aux limites périodiques). La fonction à deux points pour un champ de masse nulle se comporte alors dans le régime $a \ll |x| \ll L$, a étant le régulateur comme

$$G(x) \propto \begin{cases} \log(L/|x|) & \text{si } D = 2, \\ L^{2-D} & \text{si } D < 2. \end{cases} \quad (11.160)$$

La contribution des fluctuations devient prépondérante à grande distance et détruit l'ordre présent à courte distance. Ceci se voit si on calcule la fonction à deux points (non connexe) au premier ordre dans un développement de basse température (c'est-à-dire au premier ordre dans le développement semi-classique). Il suffit d'utiliser l'action linéarisée (équation 11.158) et on trouve qu'à grande distance (on a normalisé $m_0 = 1$, T est la température, $a = \Lambda^{-1}$ la maille du réseau)

$$\langle \vec{m}(x)\vec{m}(0) \rangle = 1 - T(N-1) \frac{1}{2\pi} \log(|x|/a) + \dots \quad (11.161)$$

On voit que, alors qu'*a priori* la fonction à deux points est bornée (elle doit être d'ordre m_0^2 à basse température), le terme d'ordre T diverge à grande distance $x \gg a$. Les fluctuations dominent si $D = 2$ et l'hypothèse à la base de l'approximation de Landau n'est pas valable. Donc l'hypothèse qu'à basse température la symétrie est brisée spontanément n'est pas cohérente.

Ce type d'argument est dû à S. Coleman. Comme on l'a écrit plus haut, l'existence de modes de Goldstone est en fait générique dès qu'une symétrie *continue* est brisée spontanément. On en déduit que pour des systèmes avec une symétrie interne continue (comme le groupe des rotations $O(N)$ dans l'espace interne), la dimension critique inférieure est *a priori* 2

$$\text{symétrie continue} \Rightarrow D_{lc} = 2$$

Rôle des défauts en $D = 2$

Une autre façon plus qualitative de voir le problème est de considérer l'énergie d'un domaine avec défaut d'orientation de taille ℓ ($\vec{m}(x) = +\vec{m}_0$ si $|x| > \ell$, $\vec{m}(0) = -\vec{m}(0)$). Comme on peut faire tourner continûment les spins, l'énergie d'une telle configuration est d'ordre $E \sim \ell^{D-2} m_0^2$ et donc indépendante de la taille ℓ du domaine en $D = 2$. Un argument énergie/entropie (similaire à l'argument de Peierls pour les symétries discrètes) montre que c'est maintenant pour $D \leq 2$ que le désordre l'emporte à toute température $T > 0$.

Théorème de Mermin-Wagner

Cet argument est corroboré pour certains modèles par un résultat rigoureux de physique statistique : le théorème de Mermin-Wagner (qu'il est hors de question de démontrer dans ce cours). Ce théorème énonce que pour un système de spin classique en $D = 2$ avec symétrie continue et avec interactions à courte portée, la fonction de corrélation (non connexe) à deux spins décroît et tend vers 0 à grande distance à toute température T positive, donc que l'aimantation moyenne est toujours nulle. Ceci implique qu'en $D = 2$ un système de spins avec une symétrie continue ne peut pas avoir un paramètre d'ordre non nul et une phase ordonnée où la symétrie est brisée spontanément.

Par contre ce théorème ne précise pas si la fonction de corrélation de spin décroît exponentiellement (longueur de corrélation finie \implies mass gap > 0 ,

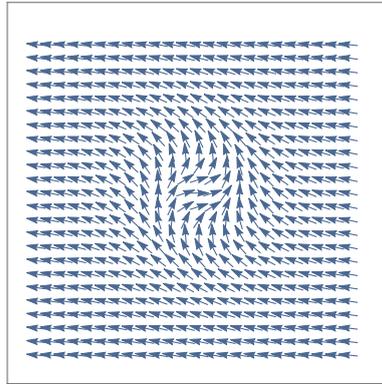


FIGURE 11.8 – Un défaut d'aimantation en dimension 2.

c'est en fait le cas pour les modèles $O(N)$, $N > 2$) ou seulement algébriquement (c'est le cas pour le modèle XY $N = 2$ à basse température $T < T_{KT}$).

Limitations de l'argument de Mermin-Wagner-Coleman

Attention, il y a là aussi des hypothèses implicites pour que ces arguments s'appliquent et qu'il n'y ait pas de phase ordonnée à toute température positive.

1. Le paramètre d'ordre est local, de la forme $m(x)$.
2. Les interactions sont à courte portée, elles ne font intervenir que des dérivées du paramètre d'ordre.
3. Le groupe de symétrie est compact.

Lorsque les interactions sont à longue portée (interactions électrostatiques, interactions induites par les phonons), il peut y avoir brisure spontanée d'une symétrie locale, même en deux dimensions. De tels cas se rencontrent notamment en physique de la matière molle (cristaux liquides, membranes).

Les transitions de phases comme la transition de Kosterlitz-Thouless dans le modèle XY en 2D sont associées à un ordre topologique non local.

Enfin pour des systèmes avec désordre, comme dans le problème de la localisation d'Anderson, on peut décrire la transition par une théorie de Landau faisant intervenir un groupe de symétrie non compact. Le groupe de symétrie du plan hyperbolique $SL(2, \mathbb{R}) = O(2, 1)$ est un exemple de tel groupe. C'est également le cas des polymères en deux dimensions, décrits par une théorie $O(n)$ avec $n = 0$ (un « groupe » non compact). Enfin un exemple simple est la transition de cristallisation en 2D, vue comme brisure spontanée du groupe des translations en 2D (si on ne tient pas en compte les défauts).

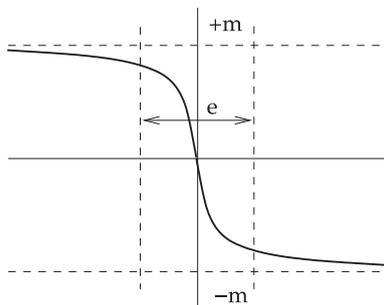


FIGURE 11.9 – Profil d’aimantation de paroi entre un domaine d’aimantation $m > 0$ et un domaine d’aimantation $m < 0$ en $D = 1$ dimension.

11.6.5 Exercices

Exercice 11.16. Parois de défauts dans le modèle ϕ^4

Trouver une solution $m(x)$ de l’équation classique de Landau-Ginzburg non linéaire 11.102 dimension $D = 1$

$$-z \ddot{m}(x) + a m + c m^3 = 0, \quad a < 0 \tag{11.162}$$

dans la phase de symétrie brisée (donc $t < 0$) qui interpole entre la phase « - » ($m = -m_0 < 0$) quand $x \rightarrow -\infty$ et la phase « + » quand $x \rightarrow +\infty$. Indication : essayer un ansatz à partir de la fonction $\tanh(x)$.

Montrer que cette solution décrit le profil d’aimantation d’une paroi de domaine dans le cas général $D > 1$.

Montrer que la taille typique (épaisseur) de cette paroi est $e \propto \xi \propto \sqrt{z/|a|}$ et que l’énergie (par unité de surface) de la paroi (tension d’interface) est $e \propto \xi \propto \sqrt{z/|a|}$.

Exercice 11.17. Couplage modes de Goldstone / mode massif

Exprimer le hamiltonien total $\mathcal{H}[\vec{m}]$ du modèle sigma linéaire en termes des champs de Goldstone $\vec{\pi}$ et du champ massif σ . Décrire les couplages.

Comment le groupe de transformation $O(N)$ agit-il sur les champs $(\sigma, \vec{\pi})$?

Vérifier que le hamiltonien $\mathcal{H}[\sigma, \vec{\pi}]$ est toujours invariant sous ces transformations.

Exercice 11.18. Mécanismes de brisure plus généraux

Pouvez-vous imaginer un modèle de type Landau-Ginzburg exhibant un schéma de brisure spontanée de symétrie du type

$$O(N) \rightarrow O(N - 2) \quad ? \tag{11.163}$$

À combien de modes de Goldstone vous attendez-vous ?

Exercice 11.19. Fonction à deux points

Calculer la fonction à deux points au premier ordre en température dans le modèle sigma linéaire et montrer la relation 11.161. On pourra utiliser un régulateur UV dur sur les moments ou bien une régularisation sur réseau.

Exercice 11.20. Limite $m_\sigma \rightarrow \infty$

On considère le modèle sigma linéaire donné par le hamiltonien 11.149, dans la limite où $c \rightarrow \infty$, m_0 restant fixé d'ordre 1. Montrer que la masse du champ σ tend vers l'infini. Quelle relation existe-t-il entre σ et les champs $\vec{\pi}$ dans cette limite ? Pouvez-vous écrire un hamiltonien effectif pour les champs $\vec{\pi}$ dans cette limite ? Les résultats de cet exercice seront repris dans le chapitre sur l'étude des modèles sigma non linéaires.

11.7 Fluctuations au point critique, critère de Ginzburg, domaine critique et dimension critique supérieure

Discutons maintenant la validité de la théorie de Landau pour décrire le point critique lui-même (on est donc en $D > D_{lc}$). On revient au cas du modèle à une composante, qui suffit pour cette discussion. On a vu que la théorie de Landau est une théorie effective qui décrit la thermodynamique du paramètre d'ordre macroscopique $m(x)$ par le hamiltonien effectif de la forme

$$H_L[m] = \int d^D x \left(\frac{z_0}{2} (\nabla_x m)^2 + \frac{t a_1}{2} m^2 + \frac{c_0}{4!} m^4 \right) \quad (11.164)$$

Les conditions nécessaires pour la validité de la théorie de Landau sont les suivantes.

1. On est proche du point critique, t et h sont donc petits de façon à ce que le paramètre d'ordre m soit petit et la longueur de corrélation ξ grande.
2. On peut donc bien négliger les termes de plus haut degré en m et en ∇_x dans $\mathcal{H}_L[m]$.
3. Les fluctuations thermodynamiques du paramètre d'ordre autour de sa valeur moyenne m_0 sont également petites, de façon à ce que l'on puisse approximer l'énergie libre du système par sa valeur au minimum m_0 de $\mathcal{H}_L[m]$.

C'est cette dernière hypothèse qu'il s'agit de vérifier maintenant. On va voir qu'elle n'est valable que si la dimensionnalité du système D est plus grande qu'une certaine dimension D_{uc} , la dimension critique supérieure. Les arguments pour montrer que D_{uc} existe et est égale à $D_{uc} = 4$ sont basés sur l'analyse dimensionnelle. J'en donne ici deux versions.

11.7.1 Amplitude des fluctuations au voisinage du point critique

Estimons, dans le cadre de la théorie de Landau, l'amplitude des fluctuations $\Delta m(x)$ du paramètre d'ordre $m(x)$ autour de sa valeur moyenne m_0 .

$$m(x) = m_0 + \Delta m(x) \quad (11.165)$$

L'amplitude des fluctuations Δm va dépendre de leur extension spatiale (vecteur d'onde) ℓ . Au voisinage du point critique, $|t| \ll 1$ la longueur de corrélation ξ est grande et les fluctuations sont découplées au-delà de cette échelle de longueur. L'échelle ℓ naturelle pour estimer l'amplitude des fluctuations est donc simplement la longueur de corrélation elle-même

$$\ell \simeq \xi \quad (11.166)$$

Pour estimer l'amplitude Δm d'une fluctuation de taille ℓ (voir dessin), il faut considérer les contributions des deux termes – linéaires et non linéaires – dans $\mathcal{H}_L[m_0 + \Delta m]$. Le premier terme vaut

$$\Delta \mathcal{H}_{lin} = \int z_0 (\nabla m)^2 / 2 + a_1 t m^2 / 2 \sim \ell^{D-2} a_1 t (\Delta m)^2 \sim z_0 \ell^{D-2} (\Delta m)^2 \quad (11.167)$$

Le deuxième vaut

$$\Delta \mathcal{H}_{nonlin} = \int c_0 m^4 / 4! \sim \ell^D c_0 (\Delta m)^4 \quad (11.168)$$

On a absorbé la température dans les coefficients effectifs z_0 et c_0 de \mathcal{H}_L . L'amplitude des fluctuations typique est donnée par la condition que le facteur de Boltzmann (dans la fonction de partition) pour une fluctuation Δm soit d'ordre 1

$$e^{-\Delta \mathcal{H}} \sim 1 \quad \implies \quad \Delta \mathcal{H} \sim 1 \quad (11.169)$$

Il faut donc que

$$\text{Sup}(\Delta \mathcal{H}_{lin}, \Delta \mathcal{H}_{nonlin}) \simeq 1 \quad (11.170)$$

donc les fluctuations de m sont d'ordre

$$\Delta m^2 \sim \text{Inf} \left(z_0^{-1} \ell^{2-D}, c_0^{-1/2} \ell^{-D/2} \right) \quad (11.171)$$

On voit qu'il y a deux cas très différents quand on est près du point critique, donc quand $\ell \gg 1$, comme illustré sur la Fig. 11.10.

1. Si $D > 4$, c'est le terme linéaire qui contrôle l'amplitude des fluctuations, et ces fluctuations sont beaucoup plus petites que le paramètre d'ordre lui-même (dès que $h \neq 0$ ou que $t < 0$).

$$D > 4 \quad \implies \quad (\Delta m)^2 \sim z_0^{-1} \ell^{2-D} \ll m^2 \sim 6 z_0 / c_0 \ell^{-2} \quad (11.172)$$

Les hypothèses à la base de la théorie de Landau sont donc vérifiées, et ce d'autant mieux qu'on est près du point critique !

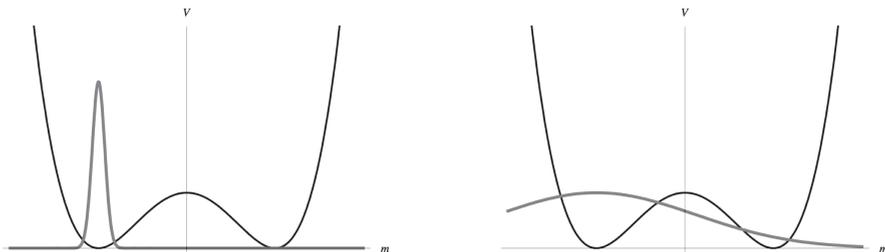


FIGURE 11.10 – Le potentiel effectif $V(m)$ (en fin) et le profil de distribution de probabilité pour les valeurs de m (en épais), près du point critique, dans la phase de symétrie brisée $t < 0$. Δm est la largeur de cette distribution (écart type). Si $|\Delta m| \ll |m|$ (cas de gauche), le critère de Ginzburg est satisfait et la théorie de Landau est valable. Si $|\Delta m| \gg |m|$ (cas de droite), les fluctuations sont trop importantes et la théorie de Landau n'est plus valable.

2. Si $D < 4$, c'est le terme non linéaire qui contrôle l'amplitude des fluctuations, mais ces fluctuations sont alors beaucoup plus grandes que le paramètre d'ordre lui-même

$$D < 4 \quad \implies \quad (\Delta m)^2 \sim c_0^{-1/2} \ell^{-D/2} \gg m^2 \sim 6 z_0/c_0 \ell^{-2} \quad (11.173)$$

La théorie de Landau n'est valable que dans le domaine où la longueur de corrélation ξ est grande devant les longueurs microscopiques du système, mais reste petite devant la longueur « critique » ℓ_c

$$1 \ll \xi \ll \ell_c = (z_0^2/c_0)^{\frac{1}{4-D}} \quad (11.174)$$

Dans le cas contraire $\xi \gg \ell_c$, c'est-à-dire si on est dans le **domaine critique** où la température réduite t est suffisamment petite

$$|t| < t_c \sim \frac{1}{a_1} \left[\frac{c_0^2}{z_0^D} \right]^{\frac{1}{4-D}} \quad (11.175)$$

les fluctuations sont plus importantes que les valeurs moyennes du paramètre d'ordre et la théorie de Landau n'est plus valable.

C'est bien ce que les expériences et les calculs théoriques nous indiquent : les exposants critiques pour des systèmes 2D et 3D sont différents de ceux prédits par le champ moyen et la théorie de Landau.

3. Le cas $D = 4$ est dit marginal, les termes linéaires et non linéaires sont toujours du même ordre et une analyse plus fine sera nécessaire. En fait la théorie du groupe de renormalisation et les analyses numériques indiquent que la théorie de Landau est (plus faiblement) invalidée par des corrections logarithmiques (en puissance de $\log(|t|)$).

11.7.2 Critère de Ginzburg et dimension critique supérieure

Ce critère de validité de la théorie de Landau

$$(\Delta m)^2 \ll m^2$$

est le **critère de Ginzburg**. La dimension $D = 4$ est la **dimension critique supérieure** D_{uc} (u.c. = *upper critical*).

$$D_{uc} = 4.$$

Et suivant la dimensionnalité du système, la théorie de Landau est valable

dès qu'on est proche du point critique $|t| \ll 1$ si $D > D_{uc}$,
seulement en dehors du domaine critique $t_c \ll |t| \ll 1$ si $D < D_{uc}$.

11.7.3 Analyse dimensionnelle pour la température effective

Le rôle de $D = 4$ peut aussi être compris, à un niveau plus qualitatif, par une analyse dimensionnelle simple.

Température effective τ

On rescale simplement x et $m(x)$ pour réécrire le hamiltonien de Landau \mathcal{H}_L comme

$$\mathcal{H}_L[m; \tau, t] = \frac{1}{\tau} \int d^D x [(\nabla_x m(x))^2 + t m(x)^2 + m(x)^4] \quad (11.176)$$

τ est une *température effective* (elle contrôle l'amplitude des fluctuations thermiques). t est la température réduite et mesure l'écart au point critique.

Analyse dimensionnelle pour τ

Comment les paramètres varient-ils avec l'échelle ℓ des fluctuations spatiales du paramètre d'ordre $m(x)$? Une analyse dimensionnelle naïve est effectuée en dilatant les distances

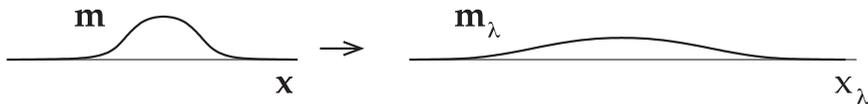
$$x \rightarrow \lambda x = x_\lambda \quad (11.177)$$

et en transformant $m(x)$ pour que les termes en $\nabla_x m(x)^2$ et $m(x)^4$ gardent la même forme. Puisque sous cette transformation $\nabla_x \rightarrow \lambda^{-1} \nabla_x$, ceci implique qu'il faut changer le paramètre d'ordre $m(x)$ comme

$$m \rightarrow \lambda^{-1} m \quad \text{i.e.} \quad m(x) \rightarrow m_\lambda(x_\lambda) = \lambda^{-1} m(x_\lambda/\lambda) \quad (11.178)$$

On a immédiatement

$$\mathcal{H}_L[m_\lambda; \tau, t] = \mathcal{H}_L[m; \tau_\lambda, t_\lambda], \quad \tau_\lambda = \lambda^{4-D} \tau, \quad t_\lambda = \lambda^2 t \quad (11.179)$$

FIGURE 11.11 – Changement d'échelle sur x et m .

Le comportement en échelle de t n'est pas surprenant ; dans l'approximation de Landau, $t \propto M^2 = \xi^{-2}$ où ξ est la longueur de corrélation, et il est normal que sous notre changement d'échelle

$$\xi \rightarrow \xi_\lambda = \xi/\lambda \quad (11.180)$$

Le point important est le comportement de la température effective τ . Elle se transforme avec λ comme λ^{4-D} . Autrement dit, si on se place *au point critique* $t = 0$ où la longueur de corrélation est infinie, le seul paramètre restant et qui contrôle l'amplitude des fluctuations thermiques est la température effective τ . Les fluctuations du paramètre d'ordre d'extension (longueur d'onde) ℓ sont caractérisées par une température effective τ_ℓ . Suivant la dimensionnalité du système, on a des situations très différentes.

D > 4 : La température effective décroît avec l'échelle ℓ . À grande distance, les fluctuations thermiques sont moins importantes qu'à courte distance. On s'attend donc bien à ce que la théorie de Landau soit valable pour décrire les propriétés macroscopiques du système.

D < 4 : La température effective croît avec l'échelle ℓ . À grande distance, les fluctuations thermiques sont plus importantes qu'à courte distance. La théorie de Landau n'est pas valable pour décrire les propriétés du point critique.

D = 4 : C'est le cas dit « marginal » où l'analyse dimensionnelle simple dit que le système est invariant d'échelle.

On retrouve donc bien le fait que $D = 4$ est la dimension critique supérieure par une simple analyse dimensionnelle.

11.7.4 Analyse dimensionnelle pour le couplage non linéaire

Dans une variante plus connue de cet argument, on écrit le hamiltonien de Landau sous sa forme standard

$$\mathcal{H}_L[m_\lambda; t, v] = \int d^D x [(\nabla_x m)^2 + t m^2 + v m^4] \quad (11.181)$$

(v est le couplage qui mesure l'amplitude des termes non linéaires) et on considère les transformations d'échelle qui laissent cette forme invariante. Dans ce

cas la transformation d'échelle à faire sur m est

$$m \rightarrow m_\lambda = \lambda^{(D-2)/2} m$$

et c'est le couplage non linéaire v qui scale comme

$$v \rightarrow v_\lambda = \lambda^{4-D} v \quad (11.182)$$

On dit que la dimension d'échelle de v est $4-D$. Pour $D > 4$, les non-linéarités (couplages de modes) sont moins importantes quand λ croît (grandes échelles) et la théorie de Landau est valable. Pour $D < 4$, v croît avec λ et les non-linéarités sont importantes aux grandes échelles. Ces deux versions de l'analyse dimensionnelle sont mathématiquement équivalentes.

11.7.5 Discussion

Tous ces arguments ont été présentés dans le cas du modèle de Landau-Ginzburg à une composante. Il est facile de voir que ces arguments sont tout à fait généraux, et s'appliquent à tous les problèmes dont la théorie de Landau met en jeu un hamiltonien de la forme 11.164 avec un paramètre d'ordre à plusieurs composantes et des couplages dépendant de la physique et des symétries du problème. En particulier

1. Pour des hamiltoniens de cette forme, la dimension critique supérieure sera toujours $D_{uc} = 4$.
2. Ceci est donc indépendant du caractère discret ou continu de la symétrie du paramètre d'ordre.
3. Ceci sera toujours lié à la dimension $D - 4$ des couplages non linéaires pour les termes en m^4 dans le hamiltonien de Landau-Ginzburg.
4. Comme on le voit dans l'exercice 11.22, dans des calculs perturbatifs de corrections au champ moyen ce sera toujours lié à la présence de divergence IR en dimension $D < 4$ au point critique (ou la théorie est massive).

Par contre dans certains systèmes, des points critiques (points multicritiques, points de Lifchitz, systèmes désordonnés) ne sont pas décrits par un hamiltonien de Landau en $\int (\nabla_x \mathbf{m})^2 + \mathbf{m}^4$ et leur dimension critique supérieure peut être différente de 4 !

11.7.6 Exercices

Exercice 11.21. Théorie ϕ^6

On verra que le point tricritique du modèle d'Ising est décrit dans l'approximation de Landau par une théorie avec un terme non linéaire en m^6 (plutôt que le terme en m^4 pour le point critique ordinaire). Pouvez-vous déterminer quelle est la dimension critique supérieure pour ce point tricritique ?

Exercice 11.22. Divergences IR pour la chaleur spécifique

On a vu que dans le cadre de l'approximation variationnelle (champ moyen) pour le modèle d'Ising, la chaleur spécifique C_v est discontinue, mais *finie* au point critique. Mais ce résultat ne tient pas compte des fluctuations. On peut calculer la contribution des fluctuations dans le cadre du champ moyen et montrer qu'elle diverge au point critique si $D < 4$ en raison de divergences IR. On revient donc à la section 11.2.2.

L'énergie interne variationnelle du modèle d'Ising peut être définie naïvement par

$$E_{\text{var}}^{(1)} = T^2 \frac{\partial F_{\text{var}}/T}{\partial T} \quad (11.183)$$

mais alternativement, à partir de la formule exacte pour l'énergie interne, $E = \langle H \rangle = -J \sum_{\langle ij \rangle} \langle S_i S_j \rangle$, par

$$E_{\text{var}}^{(2)} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \langle S_i \rangle_{\text{var}} \langle S_j \rangle_{\text{var}} + \langle S_i S_j \rangle_{\text{var}}^{\text{connexe}} \quad (11.184)$$

Question 1 : Montrer que $E_{\text{var}}^{(1)}$ et $E_{\text{var}}^{(2)}$ diffèrent par le second terme $\langle S_i S_j \rangle_{\text{var}}^{\text{connexe}}$ dans 11.184, qui représente la contribution des fluctuations à l'énergie interne.

Question 2 : En utilisant la forme de la fonction à deux points $G_{ij} = \langle S_i S_j \rangle_{\text{var}}^{\text{connexe}}$ obtenue dans la section 11.2.2, en déduire l'expression de la chaleur spécifique dans l'approximation du champ moyen

$$C_{\text{var}} = \frac{\partial E_{\text{var}}^{(2)}}{\partial T} \quad (11.185)$$

Question 3 : Montrer que la contribution des fluctuations dans C_{var} est proportionnelle à un terme qui s'écrit (près du point critique) comme une intégrale sur les impulsions

$$\int d^D k \frac{1}{(k^2 + M^2)^2}, \quad M = \xi^{-1} \quad \text{masse effective} \quad (11.186)$$

où ξ est la longueur de corrélation, calculée dans l'approximation variationnelle. Cette intégrale peut-elle être divergente infrarouge (IR) lorsque $M = 0$, et si oui pour quelles valeurs de D ? En déduire que, à cause des fluctuations, C_{var} diverge au point critique si $D < 4$ et reste fini si $D > 4$.

On retrouve donc ici, par un calcul quantitatif de la chaleur spécifique, le fait que les fluctuations sont prépondérantes en dessous de la dimension $D_{uc} = 4$, et invalident les hypothèses de l'approximation de Landau.

11.8 Notes

La théorie du champ moléculaire ou du champ moyen a été introduite par P. Weiss en 1907, inspirée des résultats et idées de P. Curie et P. Langevin. Elle a

été développée et appliquée à beaucoup de systèmes et de situations en matière condensée, matière molle et en physique statistique. Mentionnons en particulier la théorie du champ local de L. Néel qui explique les antiferromagnétiques par exemple, et plus récemment les méthodes du champ moyen dynamique, qui permettent de traiter des systèmes quantiques fortement corrélés. Voir par exemple [Kad09]. La théorie de Landau des phénomènes critiques, basée sur le développement polynomial de l'énergie libre, a été proposée par Landau en 1937. Ginzburg a discuté de l'influence des fluctuations et introduit le critère de Ginzburg en 1961, au début de la décennie qui a vu l'émergence des idées de groupe de renormalisation et a culminé dans les travaux de Wilson au début de la décennie suivante. La présentation que nous donnons ici est assez standard, mais nous avons traité la formulation variationnelle de la théorie du champ moyen de façon assez détaillée.

Chapitre 12

La théorie de Wilson du groupe de renormalisation

12.1 Introduction

La théorie de groupe de renormalisation (dite théorie de Wilson) fournit un cadre général et cohérent pour traiter l'effet des fluctuations près d'un point critique et pour comprendre les propriétés générales des phénomènes critiques : apparition de fluctuations critiques, existence des lois d'échelle, relations d'échelle entre exposants critiques et entre amplitudes critiques, universalité et classes d'universalité. Elle fournit en fait un nouveau paradigme pour traiter ces phénomènes « émergents » aux grandes échelles et à basses énergies en physique, et a permis de comprendre la relation profonde entre ces phénomènes et les comportements à hautes énergies en physique quantique (physique des hautes énergies et théorie quantique des champs) donc la relation avec la théorie de la renormalisation et du groupe de renormalisation, initialement formulée dans le cadre de la QED (Stueckelberg – Petermann et Gell-Mann – Low).

L'idée de base est de partir d'un hamiltonien microscopique qui décrit la physique d'un système, et de voir comment se transforme le hamiltonien effectif (ou renormalisé), construit en prenant en compte seulement les fluctuations à petites échelles, hamiltonien calculé par une procédure de « granularisation » (le terme standard en anglais est *coarse graining*) en fonction de l'échelle. Si la formulation de cette théorie est en grande partie due à K. Wilson, et date du début des années 1970, elle représente (comme souvent en physique) l'aboutissement de deux décennies de recherches (théoriques et expérimentales) et de réflexions, auxquelles sont associés beaucoup de grands noms de la physique statistique et de la physique de la matière condensée (L. Kadanoff, P. Anderson, B. Widom, M. Fisher, etc.). Elle doit également énormément à la physique des hautes énergies, domaine d'où venait K. Wilson, et auquel il a apporté des contributions très importantes.

Dans cette section, je présente le principe de la théorie de Wilson du groupe de renormalisation, dans sa formulation standard, telle qu'on la trouve dans de

nombreux manuels, et sans faire référence aux aspects historiques. La présentation sera faite à partir de l'exemple de la théorie du point critique du modèle d'Ising (point de Curie pour un système avec un paramètre d'ordre à une composante), en s'intéressant seulement aux propriétés d'équilibre. On insistera à la fin de la section sur les relations entre ce formalisme du groupe de renormalisation et les théories quantiques des champs. Les applications à des systèmes critiques différents, les aspects de dynamique temporelle (dynamique critique), la généralisation de l'invariance d'échelle à l'invariance conforme, seront traités ou au moins abordés dans les sections suivantes.

12.2 Principe des transformations du groupe de renormalisation

12.2.1 Introduction, système microscopique

Introduction

Je commence par donner une définition abstraite – mais mathématiquement non rigoureuse – des transformations du groupe de renormalisation dans l'espace réel. Nous verrons des exemples et des calculs plus explicites, qui justifient le formalisme, dans les sections suivantes. Nous partons d'un système microscopique sur réseau décrit par un hamiltonien \mathcal{H}_0 . Nous définissons des transformations de décimations (transformations de bloc de spin) qui consistent à moyenniser les fluctuations dans des blocs de taille finie, B , puis, en réabsorbant cette transformation par des changements, de définir un hamiltonien renormalisé \mathcal{H}' qui décrit la physique du système à l'échelle des blocs. L'itération de cette procédure définit les « flots du groupe de renormalisation » (en fait un semi-groupe d'applications itérées) agissant dans un espace de hamiltoniens possibles pour le système.

Système et hamiltonien microscopique

Pour simplifier, je considère un système statistique avec un paramètre d'ordre continu ϕ – le champ – et des transformations de renormalisation linéaires sur ce champ. Ce modèle défini sur réseau carré $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^D$ (en dimension D), avec une maille de réseau a (qui fixe l'échelle minimale de distance). D'autres types de réseaux sont évidemment possibles.

Les degrés de liberté sont des variables ϕ_i attachées aux sites i du réseau Λ . Génériquement je considère que les ϕ_i sont des variables continues réelles, avec une mesure « plate » $\mathcal{D}[\phi] = \prod_i d\phi_i$. Les contraintes éventuelles sur ces variables seront incorporées dans le hamiltonien microscopique $\mathcal{H}[\phi]$ (par exemple la contrainte $|\phi_i| = 1$ pour le modèle Ising est obtenue en ajoutant un terme en $A \sum_i (\phi_i^2 - 1)^2$, et en faisant tendre $A \rightarrow \infty$). Dans des cas plus élaborés, les ϕ_i

auront plusieurs composantes, par exemple un champ vectoriel $\vec{\phi} = \{\phi^a; a = 1, N\}$ décrivant des degrés de liberté supplémentaires.

La physique (à l'équilibre) du système est décrite par un hamiltonien microscopique (fonctionnelle énergie libre) $\mathcal{H}[\phi]$ local, qu'on peut écrire comme une intégrale sur tout l'espace (une somme sur les sites i du réseau) d'une somme de termes associés aux observables locales O_α . Ces observables O_α sont des fonctions de ϕ et de ses dérivées spatiales $\nabla\phi$, $\nabla^2\phi$, etc. évaluées au site i (sur le réseau les dérivées ∇ sont bien sûr remplacées par des différences finies). À ce stade cette définition est assez vague, mais on l'écrit simplement

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^D x \sum_{\alpha} \kappa^{\alpha} O_{\alpha} = \sum_{\alpha} a^D \sum_{i \in \Lambda} \kappa^{\alpha} O_{\alpha}[\phi_i, \nabla\phi_i, \dots] \quad (12.1)$$

Les coefficients κ^{α} sont les paramètres, ou constantes de couplages, du modèle. L'index α est attaché comme index « contravariant » aux couplages κ pour indiquer que les κ sont des coordonnées locales dans un espace des hamiltoniens (notations d'Einstein, similaires à la notation x^{μ} pour les coordonnées d'espace-temps d'un point \mathbf{x} dans l'espace-temps). Les paramètres physiques comme la température, les champs appliqués, les couplages entre sites, sont contenus dans ces paramètres de \mathcal{H} . La fonction de partition Z du modèle sur réseau est donc

$$Z = \sum e^{-\mathcal{H}[\phi]} = \int \prod_{i \in \Lambda} d\phi_i e^{-\mathcal{H}[\phi]} \quad (12.2)$$

On suppose que \mathcal{H} est tel qu'on soit suffisamment « proche » d'un point critique pour que la longueur de corrélation ξ du système soit grande devant la maille du réseau $\xi \gg a$. Alors il est naturel de s'intéresser au système à des échelles intermédiaires $a \ll \ell \ll \xi$. C'est ce que permettent de faire les transformations de groupe de renormalisation.

12.2.2 Décimation et transformations d'échelle

Transformation de renormalisation

1 - Décimation – variables de bloc : On s'intéresse à la dynamique moyenne des spins dans un « bloc ». Pour cela on subdivise le réseau en blocs b de taille $B \times B \times \dots \times B$, (hypercubes de B^D sites). On définit le champ moyenné sur le bloc b par la moyenne arithmétique $\tilde{\phi}_b$ des spins sur les sites dans le bloc b

$$\tilde{\phi}_b = \frac{1}{B^D} \sum_{i \in b} \phi_i \quad (12.3)$$

B est un entier, et cette opération est usuellement appelée transformation de « bloc de spin » ou « décimation ». Ces blocs b forment un nouveau réseau $\tilde{\Lambda}$ de maille $\tilde{a} = Ba$. B est le facteur d'échelle de cette procédure de décimation.

2 - Hamiltonien effectif pour les variables de bloc : Pour caractériser la statistique des variables de bloc $\tilde{\phi}_b$, on moyenne sur les fluctuations des spins à l'intérieur des blocs pour arriver à un hamiltonien effectif $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]$ pour les variables de bloc $\tilde{\phi}_b$ attachées aux sites du réseau $\tilde{\Lambda}$ de maille $\tilde{a} = Ba$. \mathcal{H}_{eff} est défini simplement par

$$e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]} = \int \prod_{i \in \Lambda} d\phi_i \prod_{b \in \tilde{\Lambda}} \delta\left(\tilde{\phi}_b - \frac{1}{B^D} \sum_{i \in b} \phi_i\right) e^{-\mathcal{H}[\phi_i]} \quad (12.4)$$

On a bien sûr

$$Z = \int \prod_{b \in \tilde{\Lambda}} d\tilde{\phi}_b e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]} \quad (12.5)$$

Génériquement ce hamiltonien effectif n'est plus « ultralocal », c'est-à-dire que même si H ne contient que des termes d'interactions entre spins à distance finie $|i - i'| \leq d_{\text{max}}$, \mathcal{H}_{eff} contiendra des termes d'interaction entre blocs à des distances $|b - b'|$ arbitrairement grandes. Cependant, en général on peut montrer que ces interactions restent « locales », c'est-à-dire décroissant exponentiellement avec la distance entre blocs. Voir [Bac84] pour une dérivation générale (dans le cadre de la théorie des perturbations et de la théorie des champs) et l'exercice 12.2 pour un calcul explicite dans un cas simple (le champ libre).

3 - Changements d'échelle : La troisième étape consiste à comparer cet hamiltonien effectif (qui décrit la dynamique à l'échelle $\tilde{a} = Ba$ des blocs) avec le hamiltonien de départ (qui décrit la dynamique à l'échelle a du réseau initial). Pour cela, il faut effectuer des changements d'échelle sur le réseau et sur le champ ϕ et considérer des quantités « renormalisées » qui soient effectivement comparables. Ceci est illustré sur les figures 12.1-12.2.

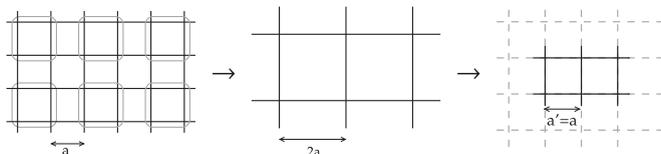


FIGURE 12.1 – Les 3 étapes d'une transformation élémentaire du GR : 1) définition de variables de bloc de spin à partir du réseau initial ; 2) calcul du hamiltonien effectif pour les variables de bloc ; 3) rescaling de x et des champs pour obtenir un modèle renormalisé.

3.a - Changement d'échelle dans l'espace : Il faut d'abord changer l'échelle des distances (rescaling)

$$x \rightarrow x' = x/B \quad (12.6)$$

pour que le réseau $\tilde{\Lambda}$ de maille $\tilde{a} = Ba$ redevienne un réseau Λ' identique au réseau Λ de maille a

$$\tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda' = \Lambda \quad , \quad b \in \tilde{\Lambda} \rightarrow i' \in \Lambda' = \Lambda \quad (12.7)$$

3.b - Changement d'échelle sur les champs ϕ : Simultanément on fait un changement d'échelle sur les champs, en redéfinissant les variables sur le nouveau réseau Λ' comme

$$\tilde{\phi}_b \rightarrow \phi'_{i'} = B^\Delta \tilde{\phi}_b \quad (12.8)$$

Δ est un facteur à ajuster, que l'on appellera la *dimension d'échelle* de ϕ . La justification pour ce rescaling du champ 12.8 est la suivante : on souhaite que $\mathcal{H}'[\phi'_{i'}]$ « ressemble le plus possible » au hamiltonien initial $\mathcal{H}[\phi_i]$. Un exemple de détermination de Δ est d'imposer que les fluctuations de ϕ' en un site i' soient du même ordre que les fluctuations de ϕ en un site i du réseau initial (autrement dit que les variances soient du même ordre)

$$\langle \phi'^2_{i'} \rangle_{\mathcal{H}'}^c \simeq \langle \phi^2_i \rangle_{\mathcal{H}}^c \quad (12.9)$$

Cette renormalisation du champ est illustrée sur la fig. 12.2. Naturellement le choix pour Δ dépend en général du hamiltonien initial \mathcal{H} (c.-à-d. que $\Delta = \Delta[\mathcal{H}]$). Le champ ϕ' est appelé le *champ renormalisé*.

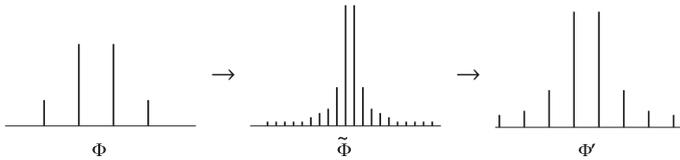


FIGURE 12.2 – Les distributions typiques pour le champ en un site (illustrées ici pour un champ discret, type Ising). La distribution du champ moyenné sur un bloc $\tilde{\phi}_b$ est plus resserrée que celle de ϕ_i , on rescale ce champ $\tilde{\phi}_b \rightarrow \phi'_{i'}$ pour reobtenir une distribution du même type (même variance).

Une fois ces rescalings effectués, la théorie effective pour le champ renormalisé $\phi'_{i'}$, fait intervenir le *hamiltonien renormalisé* $\mathcal{H}'[\phi'_{i'}]$, défini simplement par le changement de variable dans la mesure de probabilité

$$\prod_{b \in \tilde{\Lambda}} d\tilde{\phi}_b e^{-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}_b]} = \prod_{i' \in \Lambda} d\phi'_{i'} e^{-\mathcal{H}'[\phi'_{i'}]} \quad (12.10)$$

Transformations non linéaires dans les champs

Ici on a considéré une opération de moyennage des ϕ dans un bloc ($\phi_i \rightarrow \tilde{\phi}_b$) qui est linéaire. D'autres procédures de renormalisation, par

exemple les transformations de Migdal-Kadanoff pour le modèle d'Ising (voir section 12.3), sont non linéaires. Ceci n'obère pas la suite de l'analyse, qui considère les transformations de renormalisation dans l'espace des couplages. Par contre pour prendre en compte l'effet des transformations de renormalisation sur les fonctions de corrélations, il faudra regarder proprement la renormalisation du champ externe h (voir plus loin).

12.2.3 Hamiltonien renormalisé et conséquences pour les observables

On a obtenu ainsi un *hamiltonien renormalisé* $\mathcal{H}'[\phi']$ qui décrit la physique du système pour et en termes des variables de blocs renormalisées ϕ' , après intégration sur les degrés de liberté à l'intérieur des blocs de taille B et transformation d'échelle par le facteur B^{-1} . Si cette opération est faite exactement, on n'a évidemment pas changé la physique du système. On a donc des relations simples entre les observables du système initial et celles du modèle décrit par \mathcal{H}' .

Fonctions de partition

Les fonctions de partition des deux systèmes sont évidemment égales

$$Z = \int d\phi e^{-\mathcal{H}[\phi]} = \int d\phi' e^{-\mathcal{H}'[\phi']} \quad (12.11)$$

mais ce ne sont pas exactement les mêmes systèmes.

Si on est parti d'un système sur un réseau de taille finie L (disons avec $L \gg a$ et des conditions aux limites périodiques pour éviter de discuter les effets de bord), le système renormalisé est de taille $L' = L/B$, et on a

$$Z_{\mathcal{H}}(L) = Z_{\mathcal{H}'}(L/B) \quad (12.12)$$

Fonctions de corrélations

Je note maintenant les coordonnées de façon continue $x = x_i = a i$, donc $\phi(x) = \phi_i$. On a des relations simples entre les fonctions de corrélations du modèle initial et celle de la théorie renormalisée. Pour la fonction à un point

$$\langle \phi(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi_i \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \tilde{\phi}_b \rangle_{\mathcal{H}_{\text{eff}}} = B^{-\Delta} \langle \phi'(x') \rangle_{\mathcal{H}'} \quad , \quad x' = x/B \quad (12.13)$$

Pour la fonction à deux points, au moins tant que $|i_1 - i_2| \gg B$, $i \in b$, $i_2 \in b_2$, on a aussi

$$\langle \phi_{i_1} \phi_{i_2} \rangle_{\mathcal{H}} \simeq \langle \tilde{\phi}_{b_1} \tilde{\phi}_{b_2} \rangle_{\mathcal{H}_{\text{eff}}}$$

Le signe \simeq indique qu'il y a une petite différence faisant intervenir des corrélations entre $\nabla\phi$. Il est naturel de supposer que ces différences auront un

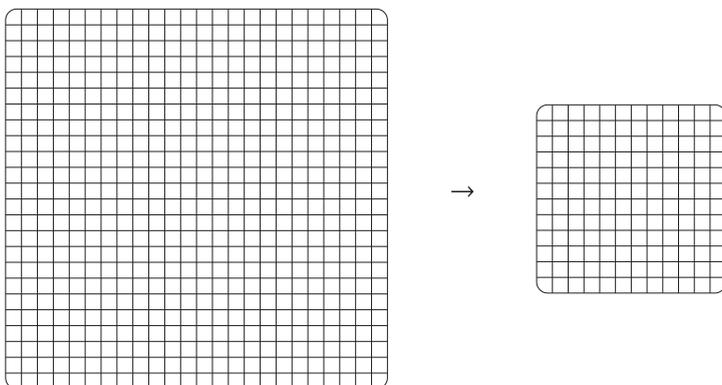


FIGURE 12.3 – La renormalisation change la taille du système.

effet négligeable sur les propriétés à grande distance des fonctions de corrélations (mais il convient de le vérifier). On a donc la relation entre fonctions de corrélation à deux points de la théorie initiale et de la théorie renormalisée

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{\mathcal{H}} \simeq B^{-2\Delta} \langle \phi'(x_1/B)\phi'(x_2/B) \rangle_{\mathcal{H}'} \quad (12.14)$$

On aura évidemment des relations similaires pour les fonctions à K points

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_K) \rangle_{\mathcal{H}} \simeq B^{-K\Delta} \langle \phi'(x_1/B) \cdots \phi'(x_K/B) \rangle_{\mathcal{H}'} \quad (12.15)$$

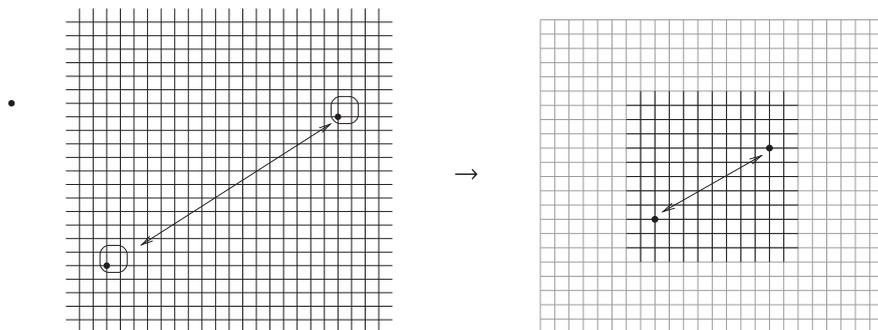


FIGURE 12.4 – Renormalisation des fonctions de corrélations.

Longueur de corrélation

Enfin 12.14 entraîne la relation évidente entre les longueurs de corrélations de la théorie initiale $\xi = \xi_{\mathcal{H}}$, et de la théorie renormalisée $\xi' = \xi_{\mathcal{H}'}$

$$\xi = B \xi' \quad (12.16)$$

12.2.4 Itération et (semi-)groupe de renormalisation

Principe

Pour déterminer les propriétés du système à grande distance (typiquement la longueur de corrélation $\xi \gg a$), il suffit en principe d'itérer la procédure. Pour arriver à l'échelle ℓ en partant de l'échelle microscopique a , il faut faire une transformation d'échelle par un facteur $S = \ell/a$, donc itérer N fois avec $N = \log S / \log B$ pour arriver à un hamiltonien renormalisé \mathcal{H}_S . Si ce hamiltonien n'est pas trop compliqué, la détermination des propriétés aux grandes échelles $x \sim \ell$ du système initial sur réseau de maille a est équivalente à déterminer les propriétés à courte distance $x' \sim a = \ell/S$ du système renormalisé, problème *a priori* plus simple.

On pourrait évidemment faire une seule transformation de renormalisation avec $B = S$ pour passer de a à ℓ , mais c'est un problème difficile, équivalent à calculer directement le potentiel effectif $\Gamma[\phi]$ à partir du hamiltonien microscopique $\mathcal{H}[\phi]$. Comme on va le voir, décomposer une grosse transformation d'échelle en beaucoup de petites offre plusieurs avantages.

Hamiltoniens et champs renormalisés

Les transformations itérées donnent donc un « flot » (en fait ici une application itérée – donc des « mappings ») dans l'espace des hamiltoniens

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \rightarrow \mathcal{H}'' \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{H}^{(N-1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(N)} = \mathcal{H}_S \quad (12.17)$$

On passe du hamiltonien initial \mathcal{H} au hamiltonien renormalisé \mathcal{H}_S , en fonction du *facteur d'échelle*

$$S = B^N \quad (12.18)$$

\mathcal{H}_S dépend à la fois du facteur d'échelle S et du hamiltonien initial \mathcal{H} , donc devrait s'écrire $\mathcal{H}^{\text{ren}}[S; \mathcal{H}]$.

Simultanément on a effectué une série d'opérations de renormalisation et de changements d'échelle sur les champs

$$\phi(x) = B^{-\Delta} \phi'(x') = B^{-\Delta-\Delta'} \phi''(x'') = \dots = B^{-(\Delta+\Delta'+\dots+\Delta^{(N-1)})} \phi^{(N)} \quad (12.19)$$

qui conduit à définir un « champ renormalisé » ϕ_S relié au champ initial ϕ par un facteur multiplicatif $Z(S)$

$$\phi_S(x_S) = \phi^{(N)}(x_S) = Z_S \phi(x) \quad ; \quad x_S = x/S \quad (12.20)$$

avec le facteur de renormalisation du champ

$$Z(S) = Z_S = B^{\Delta+\Delta'+\dots+\Delta^{(N-1)}} \quad (12.21)$$

Rappelons que chaque $\Delta^{(n)}$ peut dépendre du point (dans l'espace des hamiltoniens) $\mathcal{H}^{(n)}$ où on est arrivé à l'étape n en partant du hamiltonien initial \mathcal{H} . Donc le facteur de renormalisation du champ $Z(S)$ dépend du facteur d'échelle S et du hamiltonien initial \mathcal{H} , et devrait s'écrire $Z(S; \mathcal{H})$.

Le (semi-)groupe de renormalisation

Notons \mathcal{R}_S la transformation dans « l'espace des hamiltoniens » correspondant à une transformation itérée de facteur d'échelle S

$$\mathcal{H} \xrightarrow{\mathcal{R}_S} \mathcal{H}_S \quad , \quad S \text{ facteur d'échelle} \tag{12.22}$$

Ces transformations forment un (semi-)groupe multiplicatif dans le facteur d'échelle S

$$\mathcal{R}_{S_2} \circ \mathcal{R}_{S_1} = \mathcal{R}_{S_2 S_1} \tag{12.23}$$

C'est dans un semi-groupe additif dans le logarithme de S , que l'on va noter s , et d'incrément Δs

$$s = \log(S) = N\Delta s \quad , \quad \Delta s = \log(B) \tag{12.24}$$

s joue le rôle d'un « temps » discret pour les transformations d'échelle. L'ensemble de ces transformations dans « l'espace des hamiltoniens du système » forme ce qu'on appelle le groupe de renormalisation. Rappelons qu'un semi-groupe est un objet mathématique analogue à un groupe, mais sans inverse. Ici les transformations n'ont pas d'inverse, car en général deux hamiltoniens différents peuvent conduire au même hamiltonien renormalisé. En effet dans la procédure de renormalisation on « perd de l'information » sur les degrés de liberté et la dynamique du système. Un exemple explicite est donné dans 12.8.

Action du groupe de renormalisation sur les observables

Les caractéristiques de l'action d'une transformation élémentaire de renormalisation (bloc de spin) s'étendent évidemment aux transformations itérées générales. Si $\mathcal{Z}_H(L)$ désigne la fonction de partition pour le système initial, mais pour un réseau fini de taille L (et de maille a) on a

$$\mathcal{Z}_H(SL) = \mathcal{Z}_{\mathcal{H}_S}(L) \tag{12.25}$$

Pour les fonctions de corrélation, on a la relation très importante

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathcal{H}} \simeq Z(S)^{-K} \langle \phi_s(x_1) \cdots \phi_s(x_K) \rangle_{\mathcal{H}_S} \tag{12.26}$$

où $Z(S)$ est le facteur de renormalisation de ϕ défini par 12.20. La même relation s'applique évidemment aux fonctions de corrélations connexes $\langle \phi \cdots \phi \rangle_{\mathcal{H}}^{\text{conn}}$. Enfin, la longueur de corrélation $\xi_{\mathcal{H}}$ pour le hamiltonien \mathcal{H} est définie par le comportement à grande distance de la fonction à deux points

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{\mathcal{H}} \propto e^{-|x-y|/\xi_{\mathcal{H}}} \quad \text{quand } |x-y| \rightarrow \infty \tag{12.27}$$

et on a

$$\xi_{\mathcal{H}} = S \xi_{\mathcal{H}_S} \tag{12.28}$$

12.2.5 Des applications itérées aux flots du groupe de renormalisation

Réduction à un nombre fini de couplages

En pratique, dans les applications de ce formalisme général, on doit tronquer l'espace des hamiltoniens (objet mathématique mal défini) à un sous-espace de hamiltoniens (mieux – voire bien – défini) ne dépendant que d'un nombre fini ou discret de paramètres (couplages). La projection sur un tel sous-ensemble se fait en utilisant des transformations du groupe de renormalisation approchées, par une procédure de troncature, et en fixant un nombre fini de conditions de normalisation (autant que de couplages). On va voir des exemples explicites dans la suite. Ceci s'avère justifié aux voisinages des points fixes, où la méthode est pertinente. Tout le jeu consiste à trouver de bons choix de troncatures tels que les caractéristiques globales des transformations de renormalisation soient préservées, et qui permettent de calculer avec une bonne précision ces flots.

Des applications itérées aux flots continus

Quand le nombre d'itérations est grand, $N \gg 1$, on peut souvent considérer le facteur d'échelle S comme un paramètre continu et non plus discret. Cette approximation est justifiée au voisinage des points fixes des transformations du groupe de renormalisation, où la vitesse du flot est petite, donc où les « pas » des itérations dans l'espace des couplages $\delta\kappa = \kappa' - \kappa$ sont petits. On peut donc faire un grand nombre d'itérations en restant dans un petit domaine de couplages. On le vérifiera explicitement sur des exemples dans la suite.

Une autre justification est donnée par l'étude des modèles définis avec un régulateur UV dans l'espace des moments k au lieu de l'espace des positions x (modification du comportement à haute énergie au lieu de discrétisation par réseau). Dans ces cas on peut définir assez proprement des transformations de renormalisation dépendant d'un paramètre continu S .

Dans le cas où le nombre de paramètres est fini, ou au moins discret, et où les transformations de renormalisation dépendent d'un paramètre d'échelle continu S , $s = \log(S)$ est un paramètre réel et on peut alors supposer que les transformations du groupe de renormalisation forment un groupe continu de transformation. Autrement dit, on peut oublier les détails de la discrétisation et le fait que des hamiltoniens très différents peuvent se renormaliser dans le même \mathcal{H}_S .

Dans ce cas les itérations du GR prennent la forme d'équations de flot (de courant) engendré par un champ de vecteur dans l'espace des couplages.

Opérateurs et flots dans l'espace des couplages

Pour rendre ces considérations plus précises – sans qu’elles soient plus rigoureuses à ce stade –, on considère des hamiltoniens de la forme

$$\mathcal{H}[\phi] = a^D \sum_{i \in \Lambda} \sum_{\alpha} \kappa^{\alpha} O_{\alpha}[\phi_i] \tag{12.29}$$

où les O_{α} sont des *opérateurs* locaux (dans le sens d’*observables locales*) dans les champs, de la forme générale

$$O_{\alpha}[\phi_i] = \nabla^{n_1} \phi_i \nabla^{n_2} \phi_i \cdots \nabla^{n_k} \phi_i \tag{12.30}$$

∇ désignant l’opérateur de différence finie sur le réseau.

$$\nabla_{\mu} \phi_i = \phi_{i+e^{\mu}} - \phi_i \tag{12.31}$$

Par exemple, pour les hamiltoniens de type Landau-Ginsburg(-Wilson) les opérateurs sont

$$1, \phi^2, \phi^4, (\nabla\phi)^2, \phi^6, \phi^8, (\nabla\phi)^4, (\Delta\phi)^2, \phi^2(\nabla\phi)^2, \text{ etc.} \tag{12.32}$$

Les paramètres κ^{α} sont les *couplages* associés aux opérateurs O_{α} . Dans la littérature ils sont parfois appelés des « champs », car certains correspondent à des champs externes (par exemple le couplage associé à ϕ est le champ externe h). Cette dénomination peut induire des confusions avec le champ ϕ (le paramètre d’ordre). Donc ici on parlera de couplage pour les κ^{α} , d’opérateurs pour les observables locales $O_{\alpha}[\phi]$ et de champ seulement pour ϕ .

Les κ^{α} sont les coordonnées d’un point $\kappa = \{\kappa^{\alpha}; \alpha = 0, 1, \dots\}$ dans un espace de hamiltoniens. Les transformations de renormalisation agissent donc sur les couplages comme un groupe de transformation additif à un paramètre continu $s = \log(S)$

$$\kappa \xrightarrow{\mathcal{R}_S} \kappa_S = \mathbf{K}(\kappa, s) \quad , \quad s = \log(S) \tag{12.33}$$

Elles définissent un flot dans l’espace des couplages (voir figure 12.5).

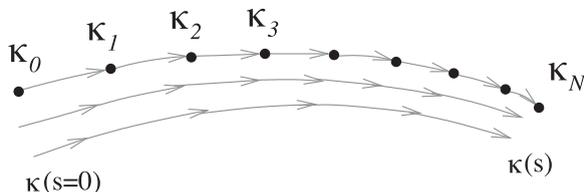


FIGURE 12.5 – Les itérations des transformations du GR peuvent être remplacées par un flot continu dans l’espace des couplages.

Si on suppose que ces transformations sont suffisamment régulières dans le paramètre s (en fait elle doivent être au moins de classe C^1 , c’est-à-dire

différentiables, et dans la suite on supposera qu'elles sont C^2 , en utilisant l'additivité et la structure de groupe $\mathbf{K}(\mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa}, s_1), s_2) = \mathbf{K}(\boldsymbol{\kappa}, s_1 + s_2)$, et en prenant un s_2 infinitésimal,

$$s_1 = s = \log(S) \quad , \quad s_2 = ds = dS/S \quad (12.34)$$

elles peuvent s'écrire sous forme différentielle

$$\boldsymbol{\kappa}(S + dS) = \boldsymbol{\kappa}(S) + dS S^{-1} \mathbf{W}(\boldsymbol{\kappa}(S)) + \mathcal{O}(dS^2) \quad (12.35)$$

\mathbf{W} est un champ de vecteur défini sur l'espace des couplages. $\mathbf{W}(\boldsymbol{\kappa})$ est le vecteur au point $\boldsymbol{\kappa}$. Dans le système de coordonnées donné par les couplages $\{\kappa^\alpha; \alpha = 0, 1, \dots\}$, les composantes du champ de vecteur \mathbf{W} sont des fonctions des couplages $\{W^\alpha(\boldsymbol{\kappa}); \alpha = 0, 1, \dots\}$. Ces fonctions seront appelées ici les *fonctions de Wilson*. À chaque couplage κ^α est associée une fonction de Wilson W^α , qui dépend *a priori* de tous les couplages du modèle.

12.2.6 Équations de flot et dimension d'échelle de ϕ

Fonctions de Wilson et équations de flot

Avec ces définitions, les transformations de renormalisation prennent la forme d'équations de flot (flot de transformations engendrées par un champ de vecteur)

$$S \frac{d}{dS} \boldsymbol{\kappa}(S) = \mathbf{W}(\boldsymbol{\kappa}(S)) \quad (12.36)$$

ou en termes de composantes (les couplages individuels)

$$S \frac{d}{dS} \kappa^\alpha(S) = W^\alpha(\boldsymbol{\kappa}(S)) \quad (12.37)$$

Renormalisation et dimension d'échelle du champ ϕ

Lorsque les transformations de renormalisation peuvent s'écrire comme des équations de flot, la renormalisation du champ ϕ peut s'écrire également sous forme différentielle. La variation du facteur de renormalisation (linéaire dans notre procédure) du champ, $Z(S)$, ne dépend en effet que des couplages à l'échelle S , $\boldsymbol{\kappa}(s)$. On peut donc écrire, comme on l'a supposé

$$S \frac{\partial}{\partial S} \log[Z(S)] = \Delta(\boldsymbol{\kappa}(S)) \quad (12.38)$$

où $\Delta(\boldsymbol{\kappa})$ n'est autre que la puissance Δ qui intervient à chaque étape de la renormalisation du champ ϕ , cf. Eq. (12.8). La fonction $\Delta(\boldsymbol{\kappa})$ est appelée la *dimension d'échelle* du champ ϕ , et est notée Δ_ϕ . Elle dépend des couplages $\boldsymbol{\kappa}$ en général, et c'est une fonction sur l'espace des couplages.

Renormalisation du champ ϕ et du champ externe h

Le traitement du champ ϕ semble différent de celui des couplages κ . En fait le champ ϕ est l'opérateur associé au champ externe h considéré comme couplage supplémentaire. Il correspond à l'ajout au hamiltonien microscopique du terme

$$\mathcal{H}[\phi] \rightarrow \mathcal{H}[\phi] + \delta\mathcal{H}[\phi], \quad \delta\mathcal{H}[\phi] = -h \int d^D x \phi(x) = -a^D \sum_{i \in \Lambda} h \phi_i \quad (12.39)$$

Dans une étape élémentaire de la procédure de renormalisation, ce terme se transforme comme

$$\sum_{i \in \Lambda} h \phi_i = \sum_{b \in \tilde{\Lambda}} h B^D \tilde{\phi}_b = \sum_{i' \in \Lambda} h B^{D-\Delta} \phi'_{i'} \quad (12.40)$$

donc le couplage h est renormalisé comme

$$h \rightarrow h' = B^{D-\Delta} h$$

En itérant pour obtenir un rescaling par un facteur d'échelle S , le couplage h se transforme donc en

$$h \rightarrow h(S) = S^D Z(S)^{-1} h \quad (12.41)$$

On peut donc définir une fonction de Wilson associée au couplage h . Elle dépend de h et des couplages κ , et est simplement

$$W^h(\kappa; h) = S \frac{\partial}{\partial S} h(S) = (D - \Delta(\kappa)) h \quad (12.42)$$

La dimension Δ_ϕ du champ ϕ , qui nous dit comment le champ ϕ est rescalé par les transformations du GR, est donc simplement reliée au flot de la constante de couplage h (le champ externe) par

$$W^h = (D - \Delta_\phi) h \quad (12.43)$$

Cet argument est général et permet de définir la dimension d'échelle Δ pour le champ ϕ à partir du flot pour h dans le cas de transformations d'échelles non linéaires dans le champ, en particulier les transformations dites de bloc de spin ou de décimation à la Migdal-Kadanoff (voir section suivante).

Covariance des équations de flot

Le fait que les transformations du GR dérivent d'un flot implique que lors d'une redéfinition des couplages (c'est-à-dire d'un changement de système de coordonnées dans l'espace des hamiltoniens), $\kappa \rightarrow \tilde{\kappa}$ les fonctions de Wilson changent $\mathbf{W} \rightarrow \tilde{\mathbf{W}}$ comme des vecteurs contravariants (composantes d'un champ de vecteur)

$$\kappa^\alpha \rightarrow \tilde{\kappa}^\alpha, \quad W^\alpha \rightarrow \tilde{W}^\alpha \quad \text{avec} \quad \tilde{W}^\alpha(\tilde{\kappa}) = \frac{\partial \tilde{\kappa}^\alpha}{\partial \kappa^\beta} W^\beta(\kappa) \quad (12.44)$$

La dimension du champ Δ_ϕ se transforme comme un scalaire (0-forme)

$$\Delta_\phi[\kappa] \rightarrow \tilde{\Delta}_\phi[\tilde{\kappa}] = \Delta_\phi[\kappa] \quad (12.45)$$

12.2.7 Exercices

Exercice 12.1. Théorie de Landau

On peut considérer la théorie de Landau du point de vue de Wilson. Partir du modèle défini par le hamiltonien de Landau

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{r_0}{2}\phi^2 + \frac{u_0}{4!}\phi^4 - h_0\phi \right] \quad (12.46)$$

($r_0 = t$ est la température réduite). Montrer que dans le programme des transformations du groupe de renormalisation, si on néglige les fluctuations en identifiant les champs et hamiltoniens effectifs de bloc avec leurs correspondants microscopiques

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}] = \mathcal{H}[\phi] \quad (12.47)$$

le reste de l'analyse (rescaling et étude des couplages renormalisés) se réduit à l'analyse dimensionnelle classique présentée dans la section sur la théorie de Landau dans 11.7.4. En déduire que les fonctions de Wilson pour les couplages r , u et h sont simplement

$$W_t = 2t, \quad W_u = (4 - D)u, \quad W_h = \frac{2 + D}{2}h \quad (12.48)$$

Quelle relation y a-t-il entre les fonctions W et les dimensions des couplages ?

Exercice 12.2. Modèle gaussien $D = 1$

Le modèle gaussien sur réseau est un cas exactement soluble de calcul de renormalisation. La physique n'est pas intéressante (pas de transition de phase), mais met en évidence les propriétés des transformations : localité, caractère de semi-groupe, etc. On part du modèle gaussien sur réseau à $D = 1$. Le réseau est \mathbb{Z} . Le hamiltonien le plus général invariant par translation est

$$\mathcal{H}[\Phi] = \sum_{\mathbb{Z}} \frac{1}{2} \phi(m) K_{m,n} \phi(n) \quad ; \quad K_{m,n} = K(m - n) \quad (12.49)$$

On effectue des transformations avec des blocs de 2 spins ($B = 2$) donc

$$\phi'(m) = \frac{2^\Delta}{2} (\phi(2m) + \phi(2m + 1)) \quad (12.50)$$

Question 1 : Montrer que la renormalisation s'exprime simplement sur la transformée de Fourier $\hat{G}(k)$ de l'inverse du noyau $K_{m,n}$, le propagateur $G_{m,n} = (K^{-1})_{m,n}$

$$\hat{K}(k) = \sum_n e^{-ikn} K_{0,n}, \quad \hat{G}(k) = \hat{K}(k)^{-1} \quad (12.51)$$

comme $G \rightarrow G'$ avec

$$\widehat{G}'(k) = \frac{2^{2\Delta}}{4} [\widehat{G}(k/2)(1 + \cos(k/2)) + \widehat{G}(k/2 + \pi)(1 - \cos(k/2))] \quad (12.52)$$

Question 2 : En partant du modèle ultralocal où $K_{m,n} \neq 0$ si $|m - n| \leq 1$ (interactions entre plus proches voisins), montrer que les hamiltoniens renormalisés $\mathcal{H}^{(N)}$ sont caractérisés par des noyaux $K_{m,n}^{(N)}$ avec interactions décroissant exponentiellement avec la distance $|K_{m,n}^{(N)}| \leq \exp(-c|m - n|)$, $c > 0$. Une telle décroissance garantit le caractère local des interactions dans la limite continue.

Question 3 : De façon générale, vérifier que si K est un noyau local positif (décroissance exponentielle à l'infini + parité) ceci implique que $\widehat{K}(k)$ est analytique dans une bande autour des k réels et que $\widehat{K}(k) > 0$ si $k \neq 0$. Alors montrer que K' est aussi local et positif.

Question 4 : Montrer que les modèles de masse nulle tels que $\widehat{K}(k) = a k^2 + \mathcal{O}(k^4)$ (donc $\widehat{K}(0) = 0$) se renormalisent dans des modèles de masse nulle. Si $\widehat{K}(0) \neq 0$, comment ce terme dominant se renormalise-t-il ?

Question 5 : Montrer qu'il est naturel de choisir $\Delta = -1/2$ pour que le terme dominant à petit k pour les théories de masse nulle ne soit pas renormalisé

$$\widehat{K}(k) = a k^2 + \mathcal{O}(k^4) \rightarrow \widehat{K}'(k) = a k^2 + \mathcal{O}(k^4) \quad (12.53)$$

Question 6 : Montrer que le point fixe de ces transformations est

$$\widehat{G}^*(k) = \frac{1}{4 \sin^2(k/2)} - \frac{1}{6} \quad (12.54)$$

Question 7 : Montrer que deux noyaux différents $K_1 \neq K_2$ peuvent donner par renormalisation le même noyau renormalisé $K'_1 = K'_2$. Ceci implique que les transformations de renormalisation forment un semi-groupe. Pouvez-vous caractériser l'ensemble des noyaux qui ont la même image ?

Exercice 12.3. Modèle gaussien $D > 1$

Essayer de répondre aux mêmes questions pour un modèle gaussien général sur un réseau hypercubique \mathbb{Z}^D en dimension $D > 1$ et des transformations de « bloc de spin » sur des hypercubes de taille $B = 2$ contenant 2^D sites.

Exercice 12.4. Décimation sur le modèle gaussien

On considère le même modèle gaussien sur réseau \mathbb{Z}^D , mais avec une procédure de renormalisation différente. On intègre sur les fluctuations de ϕ tous les sites qui n'ont pas de coordonnées purement paires, et on garde comme champs renormalisés les champs ϕ sur ces sites pairs, sans les faire fluctuer. Autrement dit on passe lors de la transformation de bloc de spin du réseau λ et du champ ϕ au réseau $\tilde{\lambda}$ et au champ $\tilde{\phi}$ avec

$$\Lambda = \mathbb{Z}^D \rightarrow \tilde{\Lambda} = (2 \times \mathbb{Z})^D, \quad \phi_{\mathbf{m}} \rightarrow \tilde{\phi}_{\mathbf{m}} = \phi_{2\mathbf{m}} \text{ avec } \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^D \quad (12.55)$$

Répéter l'exercice, au moins pour le cas $D = 1$. Caractériser le nouveau point fixe de ces transformations. Montrer que les transformations forment toujours un semi-groupe.

12.3 Renormalisation à la « Migdal-Kadanoff »

12.3.1 Modèle d'Ising sur réseau triangulaire, principe

Introduction

Des transformations de bloc de spins pour des modèles simples comme le modèle d'Ising ont été introduites par L. Kadanoff dans les années 1960, et représentent une étape importante dans la compréhension des phénomènes critiques et l'idée du groupe de renormalisation. Nous allons en donner ici un exemple simple, inspiré des idées de L. Kadanoff et de A. Migdal. On va considérer pour simplifier le modèle d'Ising en deux dimensions, et sur un réseau triangulaire (ce cas est commode pour les calculs). La méthode est basée sur des transformations de bloc de spin simple, et sur une approximation variationnelle pour traiter les interactions entre les blocs.

Le hamiltonien microscopique pour des interactions entre plus proches voisins est noté

$$\mathcal{H}[S] = - \left(J_0 \mathcal{N}_{\text{sites}} + J_1 \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j + J_2 \sum_i S_i \right) \quad (12.56)$$

Les paramètres sont notés J . J_0 est juste relié à l'énergie du fondamental, J_1 est le couplage ferro, J_2 est le champ externe. La température est normalisée à $k_B T = 1$.

Transformation de bloc de spin

La procédure de décimation est construite à partir des blocs de trois spins organisés en triangles disposés comme sur la figure 12.6. Le réseau des blocs $\tilde{\Lambda}$ est encore un réseau triangulaire, tourné de $\pi/6$ et dilaté par rapport au réseau initial par un facteur d'échelle

$$B = \sqrt{3} \quad (12.57)$$

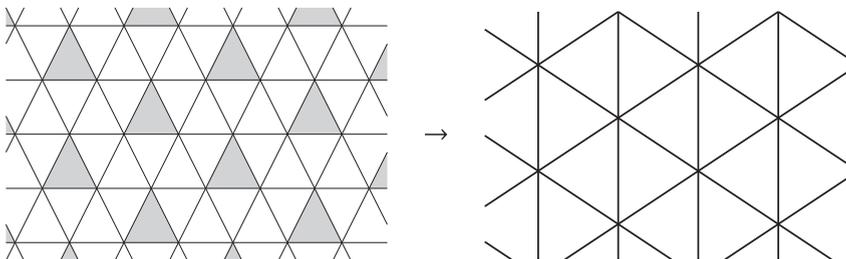


FIGURE 12.6 – Transformation de « bloc de spin » sur le réseau triangulaire.

Le spin effectif d'un bloc $b = \{i, j, k\}$, \tilde{S}_b , est défini comme le signe de la moyenne des trois spins du bloc

$$\tilde{S}_b = \text{Signe}(S_i + S_j + S_k) \tag{12.58}$$

Explicitement

$$\begin{aligned} (+ + +), (+ + -), (+ - +), (- + +) &\rightarrow (+) \\ (- - +), (- + -), (+ - -), (- - -) &\rightarrow (-) \end{aligned}$$

Les spins de bloc sont donc toujours des spins d'Ising $S_b = \pm 1$. Contrairement aux transformations 12.3 considérées dans la section précédente, la transformation 12.58 est ici une transformation non linéaire dans le paramètre d'ordre microscopique $S_i \rightarrow S_b$.

Enfin on rescale le réseau $\tilde{\Lambda} \rightarrow \Lambda'$, qui est le même que le réseau initial Λ (à une rotation d'angle $\pi/6$ près), par le rescaling des distances $x \rightarrow x' = x/\sqrt{3}$. Les spins S n'ont pas besoin d'être renormalisés puisque les spins \tilde{S} sont toujours des spins d'Ising ($\tilde{S} = \pm 1$). Donc

$$\tilde{S}_b \rightarrow S'_{i'} = \tilde{S}_b \tag{12.59}$$

12.3.2 Approximation variationnelle

Pour calculer le hamiltonien renormalisé \mathcal{H}' , on va traiter exactement les couplages dans chaque bloc, et les couplages entre blocs par une approximation de champ moyen. Dans le cadre de cette approximation, nous allons voir que \mathcal{H}' reste de la même forme que le hamiltonien d'Ising initial \mathcal{H} .

On sépare les termes de couplage de spins en deux contributions, celle des liens dans un bloc $\langle b \rangle$, donc associée aux sites du réseau renormalisé, et celle des liens entre blocs voisins $\langle bb' \rangle$, donc associée aux liens sur le réseau renormalisé.

$$\sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j = \sum_b \sum_{\langle ij \rangle \in b} S_i S_j + \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{\langle ij \rangle \in \langle bb' \rangle} S_i S_j$$

Le hamiltonien renormalisé \mathcal{H}' s'écrit par définition

$$e^{-\mathcal{H}'[S_b]} = \sum_{S_i \rightarrow S_b} e^{-\mathcal{H}[S_i]} = \prod_b Z_{\text{bloc}}[S_b] \left\langle e^{J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{\langle ij \rangle \in \langle bb' \rangle} S_i S_j} \right\rangle_{\{S_b\}}$$

Z_{bloc} étant la somme des termes à l'intérieur du bloc b

$$Z_{\text{bloc}}[\pm 1] = e^{3J_0} (e^{3J_1 \pm 3J_2} + 3e^{-J_1 \pm J_2}) \tag{12.60}$$

C'est le deuxième terme qui est compliqué et qui va donner des termes d'interactions à $N > 2$ spins et des termes non locaux dans \mathcal{H}' . On fait une

approximation (du type variationnelle) pour estimer ce terme, en le remplaçant par

$$\left\langle \exp \left[J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{\langle ij \rangle \in \langle bb' \rangle} S_i S_j \right] \right\rangle_{\{S_b\}} \longrightarrow \exp \left[\left\langle J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{\langle ij \rangle \in \langle bb' \rangle} S_i S_j \right\rangle_{\{S_b\}} \right] \quad (12.61)$$

Comme les variables de bloc S_b sont fixées dans chaque bloc, le terme dans l'exponentielle de droite se factorise en

$$\left\langle J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \sum_{\langle ij \rangle \in \langle bb' \rangle} S_i S_j \right\rangle_{\{S_b\}} = 2J_2 \sum_{\langle bb' \rangle} \langle S_i \rangle_{S_b} \langle S_j \rangle_{S_{b'}} \quad (12.62)$$

avec

$$\langle S_{\text{site}} \rangle_{\pm 1} = \pm \frac{e^{3J_1 \pm 3J_2} + e^{-J_1 \pm J_2}}{e^{3J_1 \pm 3J_2} + 3e^{-J_1 \pm J_2}} \quad (12.63)$$

On peut donc, dans le cadre de cette approximation variationnelle, écrire le hamiltonien renormalisé comme celui d'un modèle d'Ising avec interactions entre plus proches voisins

$$\mathcal{H}'[S'] \rightarrow \mathcal{H}'_{\text{var.}}[S'] = - \sum_i (J'_0 + J'_2 S'_i) - \sum_{\langle ij \rangle} J'_1 S'_i S'_j \quad (12.64)$$

12.3.3 Couplages renormalisés

Le calcul des couplages renormalisés J' en fonction des couplages initiaux J est un calcul algébrique facile, mais un peu fastidieux. Le point intéressant est que les relations peuvent être linéarités lorsque le champ externe J_1 est petit. La renormalisation du couplage ferromagnétique J_1 s'obtient assez facilement en faisant $J_2 = 0$

$$J'_1 = 2 J_1 \left(\frac{e^{3J_1} + e^{-J_1}}{e^{3J_1} + 3e^{-J_1}} \right)^2 + \mathcal{O}(J_2^2) \quad (12.65)$$

Celle du champ externe J_2 est

$$J'_2 = 3 J_2 \left(\frac{e^{3J_1} + e^{-J_1}}{e^{3J_1} + 3e^{-J_1}} \right) + \mathcal{O}(J_2^3) \quad (12.66)$$

12.3.4 Points fixes et flot du GR

Considérons les itérations de cette transformation pour le modèle en champ nul ($J_2 \simeq B = 0$). La transformation $J_1 \rightarrow J'_1$ a trois points fixes, deux points fixes attractifs triviaux $J_1 = 0$ et $+\infty$ et un point fixe répulsif non trivial

$$J_1^* = \frac{1}{4} \log(1 + 2\sqrt{2}) \simeq 0,3356... \quad (12.67)$$

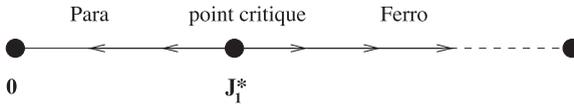


FIGURE 12.7 – Les 3 points fixes de la transformation de renormalisation pour le couplage d’Ising et leur interprétation.

Si $0 < J_1 < J_1^*$, $0 < J'_1 < J_1$, tandis que si $J_1 > J_1^*$, $J'_1 > J_1$. Autrement dit si on itère la transformation, le couplage renormalisé tend respectivement vers le point fixe $J_1 = 0$ (modèle d’Ising à température ∞) ou vers le point fixe $J_1 = \infty$ (modèle d’Ising à température nulle). On va voir dans la suite que le point fixe J_1^* s’identifie au point critique du modèle d’Ising, et que les deux domaines $[0, J_1^*[$ et $]J_1^*, \infty]$ correspondent aux deux phases du modèle (respectivement désordonnée = paramagnétique et ordonnée = ferromagnétique). On voit également qu’en champ externe $J_2 \neq 0$, J_2 est renormalisé et que $|J'_2| > |J_2|$ pour toute valeur de J_1 . Les transformations de renormalisation sont répulsives, donc éloignent J_2 de l’axe $J_2 = 0$.

Enfin, on voit qu’au voisinage du point fixe $J_1 = J_1^*$, $J_2 = 0$, les transformations de renormalisation sont petites et que l’on peut approximer les applications itérées $J \rightarrow J' \rightarrow J'' \rightarrow \dots J^{(N)}$ par un groupe de transformations continues $J \rightarrow J(S)$.

12.3.5 Exercices

Exercice 12.5. Transformations complètes

Déduire la forme complète (non linéaire en J_2) des transformations de renormalisation pour J_1 et J_2 (et si vous le souhaitez J_0). Analyser la structure des flots.

Exercice 12.6. Linéarisation des flots

Linéariser les transformations $J \rightarrow J'$ au voisinage du point fixe $J^* = (J_1^*, 0)$. Montrer que $(J' - J^*) = M(J - J^*)$ où M est une matrice 2×2 . Montrer que cette matrice est diagonale et calculer (numériquement) ses valeurs propres λ_1 et λ_2 . La théorie de Wilson discutée dans la section suivante montre que les exposants critiques sont

$$\nu = \frac{\log B}{\log \lambda_1} \quad , \quad \eta = 2 + 2 - 2 \frac{\log \lambda_2}{\log B}$$

où $B = \sqrt{3}$. Calculer ces exposants dans cette approximation et les comparer aux valeurs exactes pour Ising 2D.

Exercice 12.7. Couplage à trois spins

On ajoute un terme de couplage à 3 spins dans le hamiltonien microscopique, donné par la somme sur tous les triangles $t = (i_1, i_2, i_3)$ du réseau triangulaire

du produit des spins

$$\mathcal{H}_{(3)}[S] = -J_3 \sum_{\mathbf{t}=(i_1, i_2, i_3)} S_{i_1} S_{i_2} S_{i_3} \quad (12.68)$$

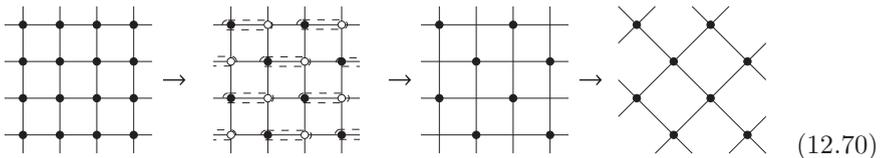
Montrer que la procédure de bloc de spin introduite précédemment permet de traiter également ce couplage. Construire les transformations de renormalisation pour les couplages J_2 , J_1 et J_3 , au moins à l'ordre linéarisé en J_1 et J_3 . Analyser les flots des transformations dans l'espace de ces trois couplages. La nature du point fixe est-elle changée ?

Exercice 12.8. Décimation sur réseau carré

D'autres procédures de bloc spin sont possibles. Voici un exemple. On considère le modèle d'Ising sur un réseau carré. On divise le réseau en bloc de deux spins (dimères) organisés comme indiqué ci-dessous. Chaque bloc contient un site blanc et un site noir. On décime les spins blancs en choisissant le spin renormalisé comme étant égal au spin noir. Autrement dit on oublie le spin blanc en sommant sur ces deux valeurs possibles

$$b = (\bullet, \circ), \quad \tilde{S}_b = S_\bullet \quad (12.69)$$

Le principe d'une telle procédure de décimation est illustré ci-dessous



Quel est le facteur d'échelle B de cette transformation ? Avec le même schéma d'approximation (variationnel) que précédemment, écrire les transformations pour les couplages J_2 et J_1 du modèle d'Ising.

Pouvez-vous construire des procédures de décimation analogues pour le modèle d'Ising sur réseau hypercubique \mathbb{Z}^D en D dimensions ? Écrivez les transformations pour les couplages. Pouvez-vous dire quelque chose sur la limite $D \rightarrow \infty$?

12.4 Points fixes et variétés critiques

La théorie du groupe de renormalisation consiste à généraliser et systématiser l'analyse des transformations de renormalisation dans l'espace des hamiltoniens, et à associer les points fixes et sous-espaces invariants sous ces transformations aux points et aux comportements critiques du modèle statistique que l'on étudie par ces méthodes. Dans cette analyse un rôle essentiel est joué par les points fixes du groupe de renormalisation et par l'analyse de ce qui se passe au voisinage de ces points fixes.

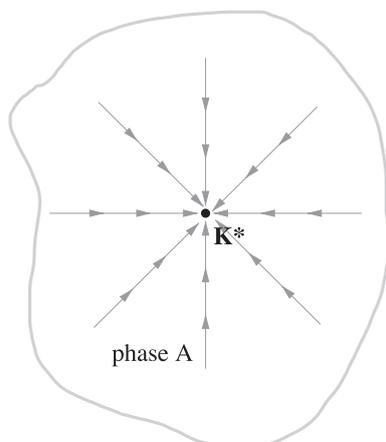


FIGURE 12.8 – Un point fixe attractif des flots du GR : le bassin d’attraction correspond à une phase du système.

12.4.1 Principe général : géométrie des flots et phases du système

Pour qu’une analyse de renormalisation soit possible, on fait généralement les hypothèses suivantes (validées en pratique, par exemple dans les calculs approchés de transformations de « block spin » discutés précédemment).

1. Les transformations du groupe de renormalisation $\kappa \rightarrow \kappa(S)$ sont des fonctions régulières des paramètres (couplages) κ .
2. On peut les traiter comme des flots continus en $s = \log(S)$, engendrés par un champ de vecteur \mathbf{W} donné par les fonctions de Wilson

$$\frac{\Delta \kappa}{\Delta s} = \mathbf{W}(\kappa) \rightarrow \frac{d\kappa}{ds} = \mathbf{W}(\kappa) \quad (12.71)$$

3. La topologie et la géométrie des trajectoires sont relativement simples (dans les cas physiques génériques), pas de cycles limites, d’attracteurs étranges, etc. La structure globale des flots sera décrite par les points fixes et les bassins d’attraction.

Ces hypothèses sont hautement non triviales en fait, et sont plutôt au départ des observations. De façon générale, ce que l’on observe est la chose suivante.

1. Le bassin d’attraction A d’un point fixe attractif κ_A correspond à une phase donnée du système. Pour toute valeur des paramètres microscopiques $\kappa \in A$, les propriétés macroscopiques (grande distance) du système seront les mêmes, et sont décrites par celles du point fixe.

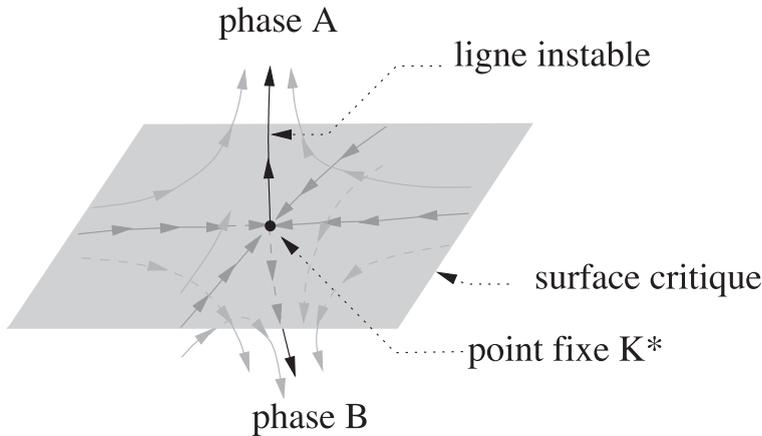


FIGURE 12.9 – Les flots du groupe de renormalisation au voisinage d'un point fixe avec une direction instable : son bassin d'attraction est la surface critique qui sépare deux phases du système.

2. La frontière entre deux bassins d'attraction A et B est une variété V de codimension un dans l'espace des paramètres. Elle correspond à la transition entre ces deux phases : si on fait varier continûment un des paramètres, par exemple la température, on se déplace dans l'espace des paramètres et quand on traverse la surface V , les propriétés macroscopiques du système changent de A à B . V est donc une (hyper)surface critique, l'ensemble des couplages correspondant à un point critique entre les phases A et B .
3. Cette variété critique est stable sous les flots du groupe de renormalisation. On s'attend donc à ce qu'elle contienne elle-même un point fixe κ^* , avec une seule direction instable. La variété critique est le bassin d'attraction de ce point fixe κ^* , qui va donc décrire les propriétés à grande distance du système au point critique.

On va donc étudier les propriétés des flots au voisinage d'un tel point fixe et leurs conséquences pour la physique du système.

Comme on l'a dit, en théorie les flots du groupe de renormalisation pourraient présenter des cycles limites, voire des comportements plus complexes (attracteurs étranges, régimes chaotiques). En pratique ce n'est généralement pas le cas, sauf pour des systèmes physiques très particuliers. Il y a des raisons sous-jacentes pour cela. En dimension deux $D = 2$, le « Théorème C » de A. B. Zamolodchikov [Zam86] montre que pour de nombreux systèmes les flots du groupe de renormalisation sont des flots qui dérivent du gradient d'une « fonction c », qui ne peut donc que décroître sous les flots, ce qui exclut des comportements complexes. Le théorème C repose sur les propriétés d'invariance conforme et d'unitarité de nombreuses théories des champs

bidimensionnelles, qui seront discutées dans le chapitre 18. Il existe des généralisations de ce résultat en dimension $D > 2$, en particulier un « Théorème A » en dimension 4 [KS11]. C'est un domaine encore activement étudié.

12.4.2 Linéarisation au voisinage d'un point fixe : champs et dimensions d'échelles

Les propriétés locales des flots du GR au voisinage d'un point fixe κ^* suffisent déjà pour déterminer beaucoup de caractéristiques des points critiques, en particulier les propriétés d'universalités et les lois d'échelle aux points critiques.

Linéarisation des flots

Un point fixe est un zéro des fonctions de Wilson, donc au voisinage d'un point fixe κ^* on peut linéariser les flots

$$W^\alpha(\kappa) = W_\beta^\alpha \cdot (\kappa^\beta - \kappa^{*\beta}) + O(|\kappa - \kappa^*|^2) \quad (12.72)$$

avec la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Les W_β^α sont les dérivées du champ de vecteur au point fixe

$$W_\beta^\alpha = \left. \frac{\partial W^\alpha}{\partial \kappa^\beta} \right|_{\kappa^*} \quad (12.73)$$

et forment la matrice jacobienne $\mathbf{W}' = \{W_\beta^\alpha\}$ du champ de vecteur \mathbf{W} au point κ^* .

À ce stade nous allons faire une hypothèse supplémentaire, en général satisfaite pour des systèmes physiques « simples ». Nous supposons que la matrice réelle \mathbf{W}' est *diagonalisable*, donc avec des valeurs propres réelles, et qu'il existe une plus grande valeur propre λ_0 , et que les valeurs propres de \mathbf{W}' sont dénombrables et s'ordonnent comme

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_k > \dots \quad (12.74)$$

Dans ce cas, on peut diagonaliser $\mathbf{W}' = U^{-1} \mathbf{diag}(\lambda_\alpha) U$ et se placer dans un système de coordonnées locales $\kappa \rightarrow \mathbf{g} = \{g^\alpha\}$ (dans l'espace des couplages) dont le point fixe est l'origine et dans lequel la matrice \mathbf{W}' est diagonale. Un tel système est donné simplement par

$$\mathbf{g} = U(\kappa - \kappa^*) \quad i.e. \quad g^\alpha = U_\beta^\alpha (\kappa^\beta - \kappa^{*\beta}) \quad (12.75)$$

Comme \mathbf{W} est un champ de vecteur dont les composantes W^α se transforment comme 12.44 sous un changement de coordonnée, dans les nouvelles coordonnées g^α le point fixe et la matrice \mathbf{W}' deviennent respectivement

$$\kappa^* \rightarrow \mathbf{g}^* = \mathbf{0} \quad , \quad \mathbf{W}' \rightarrow \mathbf{diag}(\lambda_\alpha) \quad (12.76)$$

Autrement dit, au voisinage du point fixe, dans ce nouveau système de coordonnées, les fonctions de Wilson sont simplement

$$W^\alpha(\mathbf{g}) = \lambda_\alpha g^\alpha + \mathcal{O}(g^2) \quad (12.77)$$

Couplages/champs d'échelle et opérateurs d'échelle

Réexprimer le modèle et les transformations du GR en termes des nouveaux couplages équivaut à réécrire le hamiltonien \mathcal{H} (défini par 12.1) comme une perturbation du hamiltonien correspondant au point fixe \mathcal{H}^* , perturbation obtenue en ajoutant de nouveaux opérateurs O_α , avec les couplages g^α

$$\mathcal{H}[\phi] = \mathcal{H}^*[\phi] + \int d^D x \sum_\alpha g^\alpha O_\alpha[\phi] \quad (12.78)$$

Les couplages g^α sont appelés *couplages d'échelle* ou *champs d'échelle* (*scaling fields*). Ils mesurent l'amplitude de la perturbation du hamiltonien au point fixe par des opérateurs associés $O_\alpha(\phi)$, les *opérateurs d'échelle* (*scaling operators*). La dénomination « champ d'échelle » (*scaling field*) vient de ce qu'on peut voir les g^α comme des champs externes couplés aux opérateurs O_α . Ils se transforment simplement sous les transformations de renormalisation puisque ces couplages effectifs sont tels que

$$S \frac{dg^\alpha(S)}{dS} = \lambda_\alpha g^\alpha(S) + \mathcal{O}(g^2) \quad \Rightarrow \quad g^\alpha(S) = S^{\lambda_\alpha} g^\alpha + \dots \quad (12.79)$$

En fait la situation est un peu plus complexe, à cause d'opérateurs qui correspondent à une reparamétrisation des ϕ (opérateurs redondants), mais nous n'en discutons pas à ce stade.

Dimensions d'échelle

La valeur propre λ^α de W_β^α associée au couplage g^α caractérise comment le couplage évolue avec S et est appelée naturellement la *dimension d'échelle* (*scaling dimension*) de g^α .

$$\lambda^\alpha = \dim[g^\alpha] = \Delta_{g^\alpha} \quad \text{dimension d'échelle de } g^\alpha \quad (12.80)$$

De même la dimension d'échelle de l'opérateur associé O_α est définie comme

$$\Delta_{O_\alpha} = \dim[O_\alpha] = D - \lambda^\alpha \quad \text{dimension d'échelle de } O_\alpha \quad (12.81)$$

C'est en accord avec les définitions déjà données pour les dimensions du champ ϕ (l'opérateur associé au paramètre d'ordre) et du champ externe (le terme source) h .

$$\Delta = \Delta_\phi = \dim[\phi] \quad ; \quad \Delta_h = \dim[h] = D - \Delta_\phi \quad (12.82)$$

Nous sommes donc en train de parler de dimension en impulsion k (espace réciproque) ou en masse m , c'est-à-dire en inverse des distances x dans l'espace réel. On a $[k] = +1$, $[x] = -1$.

Couplages essentiels, inessentiels et marginaux

Le signe de la dimension du couplage g détermine si le flot du GR est attractif ou répulsif au voisinage du point fixe. Si le flot est répulsif le couplage est dit *pertinent* ou *essentiel* (*relevant* en [fr]anglais), si le flot est attractif le couplage est dit *non pertinent* ou *inessentiel* (*irrelevant* en [fr]anglais), si la dimension est nulle le couplage est dit *marginal*. Les mêmes dénominations s'appliquent à l'opérateur associé O .

couplage relevant	$\lambda > 0$	opérateur relevant	$\Delta < D$	(12.83)
couplage irrelevant	$\lambda < 0$	opérateur irrelevant	$\Delta > D$	
couplage marginal	$\lambda = 0$	opérateur marginal	$\Delta = D$	

En première approximation seuls les couplages essentiels sont importants pour le comportement aux grandes échelles $S \rightarrow \infty$. Comme on va le voir, ce sont leurs dimensions d'échelle λ (et donc de celle des opérateurs correspondants Δ) qui vont déterminer les exposants critiques associés au point fixe.

Retour sur les hypothèses

Revenons maintenant sur l'hypothèse que la matrice \mathbf{W}' est diagonalisable. C'est d'abord une observation « expérimentale ». Dans un grand nombre de situations physiques, les calculs explicites de renormalisation (renormalisation dans l'espace réel, développement en ϵ) montrent que les valeurs propres sont réelles (au moins les plus petites que l'on peut calculer). Cela peut ensuite s'expliquer par des arguments généraux de théorie des champs basés sur l'unitarité. Comme on va le voir plus loin, les classes d'universalité sont associées à des théories quantiques des champs, et les théories les plus simples qui décrivent les points critiques « usuels » comme le modèle d'Ising, les systèmes magnétiques, etc. sont des théories unitaires. Les opérateurs d'échelle O_α (voir plus loin) correspondent aux observables locales (opérateurs hermitiens) de la théorie des champs, et l'unitarité implique que leur dimension d'échelle est réelle. Enfin, l'unitarité se traduit pour des modèles de mécanique statistique sur réseau (avec des degrés de liberté classiques et discrets) par le fait que leur matrice de transfert est auto-adjointe (symétrique ou hermitique).

Les situations où les valeurs propres de \mathbf{W} sont complexes, ou bien où \mathbf{W}' n'est pas diagonalisable sont plus rares, mais se rencontrent dans certains systèmes, en particulier des systèmes désordonnés. Il faut signaler aussi qu'il existe des classes importantes de systèmes physiques avec des points fixes où les dimensions des opérateurs d'échelle sont réelles, bien que la théorie des champs associée soit non unitaire ! Enfin l'unitarité assure en général qu'on n'a pas de situation « exotique » où les itérations du GR présentent des cycles limites, des attracteurs étranges et un comportement chaotique, etc.

12.5 Exposants critiques, lois d'échelle et universalité

12.5.1 Point fixe avec une direction instable

Avant d'aborder la discussion détaillée de ce qui se passe au voisinage d'un point fixe, et plus généralement d'une surface critique, faisons un rappel important. Les concepts de couplages d'échelle (relevants ou irrelevant) et d'opérateurs d'échelle sont relatifs au voisinage d'un point fixe dans l'espace des couplages, et ne sont pas absolus. En général les flots du GR possèdent plusieurs points fixes, et les dimensions des couplages et des opérateurs (quand on peut les considérer globalement) sont différentes aux différents points. Un couplage peut être relevant au voisinage d'un point fixe et irrelevant au voisinage d'un autre.

Considérons d'abord le cas le plus simple : le point fixe ne possède qu'une seule direction instable, il n'y a donc un seul couplage relevant g_0 , tel que $\lambda_0 > 0$. Les autres couplages g_α sont irrelevant ($0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$). La surface critique (bassin d'attraction du point fixe) est donc de codimension 1, et sépare les deux phases $g_0 > 0$ et $g_0 < 0$.

Ce cas s'applique au modèle d'Ising et au modèle de Landau Ginzburg en champ nul $h = 0$. On se restreint aux hamiltoniens $\mathcal{H}[\phi]$ pairs, invariants \mathbb{Z}_2 ($\phi \rightarrow -\phi$). Le couplage essentiel est l'écart à la température critique

$$g_0 = t = \frac{T - T_c}{T_c},$$

et l'opérateur associé $O_0(x)$ est l'opérateur « énergie » locale, noté $\varepsilon(x)$.

12.5.2 Invariance d'échelle au point fixe, exposant η

On suppose que l'on est au point fixe $\mathbf{g}^* = 0$. L'action générale d'une transformation d'échelle sur les fonctions de corrélations à N points est donnée par 13.4.4

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathbf{g}} = Z(S)^{-K} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_K) \rangle_{\mathbf{g}(S)}$$

Au point fixe \mathbf{g}^* , $\mathbf{g}(S) = \mathbf{g}^*$ et $Z(S) = S^{\Delta^*}$ où

$$\Delta^* = \Delta_\phi(\mathbf{g}^*) \tag{12.84}$$

est la dimension d'échelle du champ ϕ au point fixe. Les fonctions de corrélations sont donc invariantes d'échelle

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathbf{g}^*} = S^{-K\Delta^*} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_K) \rangle_{\mathbf{g}^*} \tag{12.85}$$

Elles doivent décroître algébriquement avec la distance, et la longueur de corrélation est infinie.

En particulier, en supposant que la fonction à deux points est invariante par rotation à grande distance (ceci sera justifié plus loin), elle doit bien être de la forme (*a priori* exacte au point fixe)

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{\mathbf{g}^*} = c |x - y|^{-2\Delta^*} \tag{12.86}$$

où c est une constante non universelle (dépendant du modèle). On rappelle qu'à un point critique d'un système statistique la fonction à deux points se comporte algébriquement comme

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle_{\text{crit}} \propto |x - y|^{2-D-\eta}$$

L'exposant critique η (correction au champ moyen) est donc relié à la dimension du champ au point critique Δ^* par

$$\eta = D + 2 - 2\Delta_h = 2 - D + 2\Delta^* \tag{12.87}$$

12.5.3 Approche du point fixe, longueur de corrélation et exposant ν

On considère maintenant le système au voisinage du point fixe. Dans un premier temps on néglige les couplages inessentiels g_α , $\alpha = 1, 2, \dots$, et donc seul $g_0 \neq 0$. On est sur la ligne instable, trajectoire des flots qui s'échappent du point fixe (figure 12.10).



FIGURE 12.10 – Flots du GR au point fixe avec un seul couplage essentiel g_0 .

Puisqu'on est en dehors de la surface critique, on est *a priori* dans une phase massive et la longueur de corrélation ξ est maintenant grande, mais finie. On ne connaît pas sa valeur précise $\xi(g_0)$, mais on sait que

$$\xi(g_0(S)) = \frac{1}{S} \xi(g_0) \quad \text{et} \quad g_0(S) = S^{\lambda_0} g_0 \tag{12.88}$$

On connaît donc la dépendance en g_0 de ξ

$$\xi(g_0) = a |g_0|^{-\frac{1}{\lambda_0}} \tag{12.89}$$

avec a une constante non universelle (dépendant du modèle). Puisque λ_0 est positif (le couplage g_0 est relevant), la longueur de corrélation ξ devient bien infinie au point fixe critique $g_0 = 0$.

Pour le modèle d'Ising ou le modèle de Landau-Ginsburg, le couplage important κ est la température et le couplage (champ) d'échelle g_0 est donc relié à l'écart au point critique

$$g_0 \propto T - T_c \tag{12.90}$$



FIGURE 12.11 – Flots sur la surface critique avec un seul couplage inessentiel g_1 .

L'exposant critique ν (divergence de la longueur de corrélation) est égal à l'inverse de la dimension du couplage relevant g_0 au point fixe

$$\nu = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\dim[g_0]} \tag{12.91}$$

Donc les deux exposants η et ν sont directement reliés aux dimensions d'échelle du champ ϕ , Δ^* , et du couplage essentiel g_0 , λ_0 , au point fixe.

12.5.4 Universalité des lois d'échelle sur la surface critique

Il faut maintenant vérifier que les autres couplages inessentiels au voisinage du point fixe ne modifient pas ces résultats.

En général, pour un système donné (par exemple le modèle d'Ising avec couplages entre plus proches voisins) au point critique, c'est-à-dire à la température critique T_c , on n'est jamais au point fixe, mais seulement quelque part sur la surface critique (variété stable de codimension 1), à une distance finie du point fixe. Si on est dans ce cas général, donc sur la surface critique, mais pas exactement au point fixe, il faut tenir compte des couplages inessentiels et estimer s'ils modifient ou non les comportements d'échelle.

Je considère ici pour simplifier le cas simple où il y a un seul opérateur inessentiel \mathcal{O}_1 avec le couplage g_1 (de dimension $\lambda_1 < 0$) et où on est toujours suffisamment près du point fixe pour pouvoir linéariser les flots du GR (et donc considérer que la dimension du paramètre d'ordre $\Delta_\phi = \Delta$ ne dépend pas du couplage g_1).

Je suppose donc que je suis à un point critique, donc sur la surface critique $g_0 = 0$, mais à une distance finie du point fixe, donc $g_1 \neq 0$. La fonction à deux points se comporte toujours comme

$$\langle \phi(Sx_1)\phi(Sx_2) \rangle_{g_1} = S^{-2\Delta^*} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_1(S)}$$

mais comme $g_1(S) \propto S^{\lambda_1}$ est petit quand $S \rightarrow \infty$, puisque $\lambda_1 < 0$ on peut développer au voisinage du point fixe

$$\begin{aligned} &= S^{-2\Delta^*} \left(\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_1=0} + \mathcal{O}(g_1(S)) \right) \\ &= S^{-2\Delta^*} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_1=0} + \mathcal{O}(S^{-2\Delta^*+\lambda_1}) \end{aligned}$$

donc on trouve finalement que le comportement à grande distance de la fonction à deux points est de la forme

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = |x - y|^{-2\Delta^*} (c + d |x - y|^{\lambda_1} + \dots) \tag{12.92}$$

avec c et d des constantes dépendant des modèles. On obtient donc un terme sous-dominant. Cet argument se généralise simplement à plusieurs couplages inessentiels g_1, g_2, g_3 de dimensions $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots$, et aux fonctions à N points.

La théorie du groupe de renormalisation prédit donc deux choses :

1. **Universalité du comportement d'échelle** : Les fonctions de corrélations ont un comportement d'échelle à grandes distances, contrôlé par l'exposant Δ^* , **sur la surface critique** au voisinage du point fixe.
2. En général il existe des corrections sous-dominantes à ce comportement d'échelle. Ces corrections sont elles-mêmes des puissances de $|x - y|$ avec des exposants universels, données par les dimensions d'échelle des couplages inessentiels, les amplitudes de ces corrections ne sont pas universelles, mais dépendent de la position sur la surface critique.

Pour l'instant on est resté proche du point fixe, si bien que la linéarisation des flots est une approximation valable. On verra plus loin que ces conclusions restent valables même si on est loin du point fixe, mais toujours sur la surface critique.

12.5.5 Universalité de l'approche au point critique, limite continue, fonctions d'échelle

Regardons maintenant ce qui se passe quand on s'approche d'un point critique général, c'est-à-dire qu'on s'approche de la surface critique en restant à une distance finie du point fixe. Pour simplifier, on va d'abord considérer le cas d'un couplage essentiel g_0 et un seul couplage inessentiel g_1 , et où on peut linéariser les flots.

Longueur de corrélation

On se place d'un côté donné de la surface critique (par exemple $g_0 > 0$), et on choisit un point de référence \mathbf{R} sur la ligne instable, c'est-à-dire un couplage $g_0^{\text{ref.}} \neq 0$. La longueur de corrélation $\xi_0 = \xi(g_0^{\text{ref.}}, 0)$ est finie en ce point, et varie continûment avec les couplages g_0 et g_1 au voisinage de ce point. On sait déjà que si $g_1 = 0$, $\xi_0 \propto |g_0^{\text{ref.}}|^{1/\lambda_0}$.

On est intéressé en fait au comportement de ξ quand on s'approche d'un point critique \mathbf{c} sur la surface critique qui n'est pas le point fixe $\mathbf{0}$ (voir la figure 12.12), c.-à-d.

$$g_0 \rightarrow 0_+, \quad g_1 \neq 0 \text{ fixé} \tag{12.93}$$

Pour cela on va suivre les flots du GR à partir d'un tel couplage microscopique jusqu'au voisinage du point R , et ajuster le facteur d'échelle $S = S(g_0)$ en fonction de g_0 pour que

$$g_0(S) = g_0^{\text{ref.}} \quad \Rightarrow \quad S(g_0) = [g_0/g_0^{\text{ref.}}]^{-\frac{1}{\lambda_0}} \tag{12.94}$$

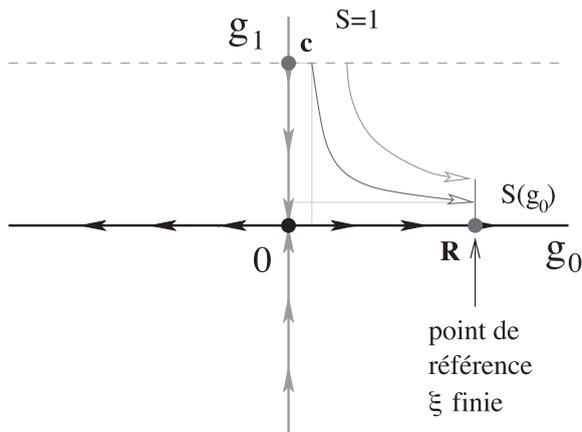


FIGURE 12.12 – Flots du GR au voisinage de la surface critique, $g_0 \rightarrow 0$ mais à distance finie du point fixe ($g_1 \neq 0$).

Ce facteur d'échelle diverge quand on s'approche de la surface critique ($S(g_0) \rightarrow +\infty$ quand $g_0 \rightarrow 0$) et donc dans cette limite on s'approche de plus en plus du point **R**.

$$g_1(S(g_0)) = S(g_0)^{\lambda_1} g_1 = [g_0/g_0^{\text{ref.}}]^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} g_1 \rightarrow 0 \quad \text{puisque } \lambda_1 < 0.$$

Autrement dit, ces flots ajustés du GR envoient le voisinage de **c** dans un voisinage de **R** sur l'axe instable.

On sait que la longueur de corrélation obéit à la relation d'échelle

$$\xi(g_0, g_1) = S \xi(g_0(S), g_1(S))$$

et qu'elle est analytique dans les couplages au voisinage de **R**. Donc on peut développer ξ en fonction de $g_1(S)$ qui est petit. On obtient un développement de ξ en

$$\begin{aligned} \xi(g_0, g_1) &= S \xi(g_0^{\text{ref.}}, g_1 S^{\lambda_1}) \\ &= [g_0/g_0^{\text{ref.}}]^{-\frac{1}{\lambda_0}} \left[\xi_0 + [g_0/g_0^{\text{ref.}}]^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} g_1 \partial_{g_1} \xi(g_0^{\text{ref.}}, 0) + \dots \right] \end{aligned} \quad (12.95)$$

On voit que quand on traverse la surface critique en un point qui est à une distance finie du point fixe, la divergence de la longueur de corrélation est la même (*universalité de l'exposant ν*). Mais on obtient maintenant des corrections non analytiques et sous-dominantes pour la longueur de corrélation, corrections qui sont de la forme générale

$$\xi \underset{g_0 \rightarrow 0_+}{=} |g_0|^{-\frac{1}{\lambda_0}} \left[\mathbf{a}_+(g_1) + \mathbf{b}_+(g_1) |g_0|^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} + \dots \right] \quad (12.96)$$

où les coefficients a_+ , b_+ sont non universels, et des fonctions régulières du couplage inessentiel g_1 . Enfin, notons que bien que l'argument utilise un choix d'un point de référence \mathbf{R} , le résultat final n'en dépend pas, comme il se doit.

Le même argument peut être répété de l'autre côté de la surface critique $g_0 < 0$. On obtient pour ξ un développement quand $g_0 \rightarrow 0_-$ de la même forme, mais avec des coefficients a_- , b_- différents puisqu'on doit utiliser un point de référence \mathbf{R}' différent (sur la ligne instable, mais de l'autre côté du point fixe).

Exposants de corrections aux lois d'échelle

Dans le cas du modèle d'Ising par exemple, ceci implique que la longueur de corrélation diverge au point critique comme

$$\xi(T) \underset{T \rightarrow T_c}{=} |T - T_c|^{-\nu} [A_{\pm} + B_{\pm} |T - T_c|^{\omega} + \dots] \quad (12.97)$$

L'exposant ν est toujours donné par 12.91 et est bien universel. Les coefficients A , B etc. sont différents si $T > T_c$ (cas + phase désordonnée) ou si $T < T_c$ (cas - phase ordonnée). Les premières corrections aux lois d'échelle sont décrites par un autre exposant $\omega > 0$. Cet exposant est aussi obtenu par les valeurs propres des équations des flots linéarisés, et est donc un autre exposant critique universel

$$\omega = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \quad (12.98)$$

Conclusion

Cet argument se généralise au cas de plusieurs couplages inessentiels g_{α} . La longueur de corrélation diverge lorsque l'on traverse la surface critique, la divergence est universelle, contrôlée par l'exposant ν . Les corrections sous-dominantes au comportement d'échelle de ξ dans le domaine critique font intervenir des puissances de $|T - T_c|^{\bar{\omega}}$ avec des exposants eux-mêmes universels de la forme générale $\bar{\omega} = n_0 + \sum_{\alpha \geq 1} n_{\alpha} \omega_{\alpha}$, $\omega_{\alpha} = -\lambda_{\alpha} / \lambda_0$, $n_{\alpha} \in \mathbb{N}$.

La théorie du groupe de renormalisation prédit donc bien l'existence et l'universalité des lois d'échelle pour ξ à l'approche du point critique.

12.5.6 Fonctions d'échelle et limite continue

L'analyse effectuée dans la section précédente sur la longueur de corrélation au voisinage d'un point critique s'applique également aux fonctions de corrélations du système. Elle conduit à la notion très importante de *fonctions d'échelle*. L'existence de ces fonctions d'échelle est cruciale pour calculer les autres exposants critiques (α , β , γ et δ pour le modèle d'Ising), démontrer les relations d'échelle entre ces exposants, et comprendre la relation entre les phénomènes critiques et les théories quantiques des champs.

La procédure précédente consistait à s'approcher d'un point \mathbf{c} sur la surface critique en faisant tendre le couplage relevant $g_0 \rightarrow 0$, les couplages inessentiels

étant fixés, et à rescaler simultanément toutes les distances $x \rightarrow x' = x/S$ de façon à ce qu'elles soient proportionnelles à la longueur de corrélation du système. Pour cela, on choisissait un point de référence \mathbf{R} sur la ligne instable, de coordonnées $(g_0^{\text{ref.}}, 0, \dots)$. Ce point est caractérisé par une *longueur de corrélation finie* $\xi(g_0^{\text{ref.}}, g_1 = \dots = 0) = \xi_{\text{ref.}}$.

Considérons la fonction à deux points. Si on rescale les distances par le facteur d'échelle

$$S = \xi/\xi_{\text{ref.}}$$

cette fonction de corrélation se transforme comme

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_0, g_1 \dots} = S^{-2\Delta^*} \langle \phi(x_1/S)\phi(x_2/S) \rangle_{g_0^{\text{ref.}}, g_1(S)} \quad (12.99)$$

que l'on peut remplacer lorsque $\xi \gg \xi_{\text{ref.}}$ (donc $S \gg 1$ et $g_1(S) \simeq 0$), par la fonction à deux points sur la ligne instable, au point de référence

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_{g_0, g_1 \dots} \simeq \left[\frac{\xi}{\xi_{\text{ref.}}} \right]^{-2\Delta^*} \langle \phi(\xi_{\text{ref.}} x_1/\xi)\phi(\xi_{\text{ref.}} x_2/\xi) \rangle_{g_0^{\text{ref.}}} \quad (12.100)$$

Cette relation se généralise aux fonctions à K points.

On en déduit que quand on s'approche de la surface critique et donc que $\xi \rightarrow \infty$, les fonctions de corrélations à K points prennent une *forme universelle* donnée par

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_K) \rangle \simeq \xi^{-K\Delta^*} G_K(x_1/\xi, \dots, x_K/\xi) \quad (12.101)$$

Les *fonctions d'échelle* universelles $G_K(z_1, \dots, z_K)$ ne dépendent plus de couplages irrelevants. Elles sont données par les fonctions de corrélations de la théorie au point \mathbf{R} , donc définies *sur la ligne instable* (et correspondant à la perturbation du point fixe par le couplage essentiel g_0).

$$G_K(z_1, \dots, z_K) = (\xi_{\text{ref.}})^{K\Delta^*} \langle \phi(z_1 \xi_{\text{ref.}}) \cdots \phi(z_K \xi_{\text{ref.}}) \rangle_{\mathbf{R}} \quad (12.102)$$

Δ^* est la dimension d'échelle du champ ϕ au point fixe $\mathbf{0}$, et $\xi_{\text{ref.}} = \xi(\mathbf{R})$ la longueur de corrélation au point de référence \mathbf{R} sur la ligne instable. Les variables de position $z_i = x_i/\xi$ et la fonction G_K sont maintenant *sans dimension*. Étant donné 12.101, les fonctions d'échelle G_K ne dépendent en fait pas du choix du point de référence \mathbf{R} sur la ligne instable.

Les fonctions d'échelle ne sont pas les mêmes *a priori* si on est d'un côté ou de l'autre de la variété critique $g_0 \rightarrow 0_{\pm}$. Il y aura donc en fait deux familles de fonctions d'échelle G_K^{\pm} .

Si on veut comparer les fonctions de corrélations à K spins d'un modèle d'Ising aux fonctions d'échelle, il faut tenir compte de la normalisation précise des champs, c'est-à-dire quelle est la relation entre les spins d'Ising microscopiques $\sigma(x_i)$ et les champs continus $\phi(x_i)$. Il faut aussi tenir compte du fait que l'on ne part pas nécessairement d'un point critique proche du point fixe (donc les couplages irrelevants peuvent être d'ordre $\mathcal{O}(1)$ et la linéarisation au

voisinage du point fixe non valable). Ceci entraîne des constantes multiplicatives non universelles si on veut comparer les corrélations de spin aux fonctions d'échelle du type

$$\langle \sigma(x_1) \cdots \sigma(x_K) \rangle_{\text{Ising}} \simeq c_K \xi^{-K\Delta^*} G_K^\pm(x_1/\xi, \dots, x_K/\xi)$$

Mentionnons que les fonctions de corrélations d'autres opérateurs ont également une limite continue décrite par des fonctions d'échelle. Pour le modèle d'Ising c'est le cas des fonctions de corrélation de l'opérateur énergie locale $\varepsilon(x)$

$$\langle \varepsilon(x_1) \cdots \varepsilon(x_K) \rangle_{\text{Ising}} \propto \xi^{-K\Delta_\varepsilon^*} G_{\varepsilon \dots \varepsilon}^\pm(x_1/\xi, \dots, x_K/\xi)$$

et de même pour les corrélations entre spins σ et énergies ε .

Contrairement aux fonctions de corrélations du modèle de départ, dont le comportement à courte distance dépend du régulateur à courte distance (réseau), les fonctions d'échelle ont un comportement à courte distance universel donnée par la théorie au point fixe. Comme on va le voir plus loin, ces fonctions d'échelle s'identifient aux fonctions de corrélations d'une théorie quantique des champs euclidienne. Le groupe de renormalisation révèle donc une relation profonde entre les phénomènes critiques et les théories quantiques des champs.

12.5.7 Au-delà de la linéarisation : universalité et domaine critique

Les raisonnements précédents ont utilisé le fait qu'on était suffisamment près du point fixe pour qu'on puisse linéariser les équations de flot. En fait leurs conclusions sont valables même si on traverse la surface critique loin du point fixe. En effet si on est à une distance finie du point fixe, mais suffisamment près de la surface critique, les flots du GR nous amènent près du point fixe avant que le couplage relevant l'emporte et que l'on ne soit entraîné loin de la variété critique. Ceci est représenté Fig. 12.13. L'important pour obtenir le comportement d'échelle caractérisé par le point fixe est que le flot du GR nous amène en un « temps » $s_1 = \log(S_1) = \mathcal{O}(1)$ fini dans le domaine où la linéarisation des flots est valable et nous laisse dans ce domaine pendant un temps $s_2 = \log(S_2) \gg 1$ suffisamment grand par rapport au premier avant d'en être finalement éjecté. Cette condition définit le *domaine critique*.

Finalement, pour observer un comportement critique pour un modèle statistique donné, décrit par un nombre fini de paramètres, il suffit que, en faisant varier un de ces paramètres, on traverse la surface critique en un point (dans le domaine d'attraction du point fixe). Les comportements d'échelle observés si on est suffisamment près de ce point critique seront toujours décrits par le même point fixe. Ceci est illustré (très abstraitement) sur la Figure 12.14 pour le cas du modèle d'Ising. Le modèle microscopique (Ising sur réseau carré avec couplage entre plus proches voisins, et en champ nul) ne dépend que

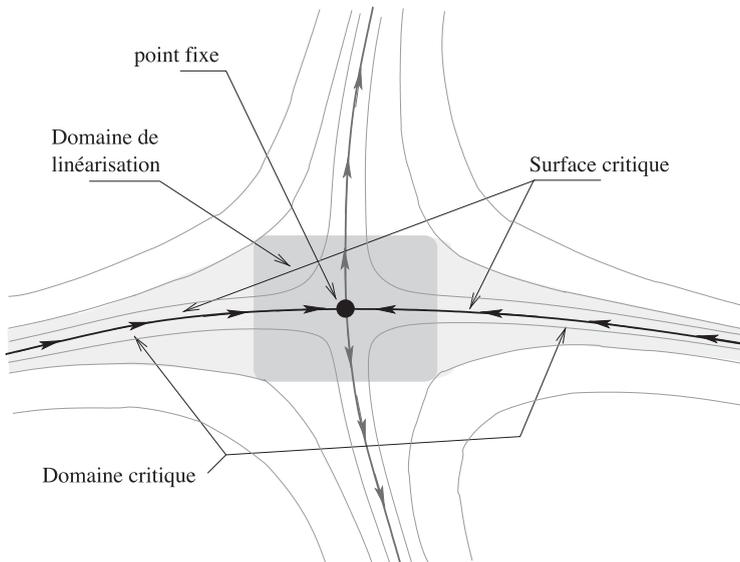


FIGURE 12.13 – Le domaine critique (gris clair) est le voisinage de la surface critique d'où sont issus les flots du GR qui passent suffisamment près du point fixe (domaine en gris foncé) pour que l'approximation de linéarisation des flots du GR soit valide pendant un « temps » $s = \log(S)$ long et qu'on observe donc les comportements d'échelle.

d'un paramètre, la température T . Les transformations du groupe de renormalisation envoient ce modèle dans un espace beaucoup plus grand de théories dépendant d'un grand nombre de couplages. Quelque part dans cet espace va se situer le point fixe, et la surface critique. La ligne (de dimension 1) paramétrée par T et correspondant au modèle d'Ising traverse la surface critique (de codimension 1) en T_c , la température critique du modèle d'Ising. D'autres modèles appartenant à la même classe d'universalité (Ising sur un réseau différent, avec des couplages entre seconds voisins, à plusieurs spins, avec des spins continus, etc.) vont être décrits par d'autres courbes dans l'espace des couplages, qui traverseront la surface critique en des points différents, donc leurs températures critiques respectives seront différentes. Néanmoins, leur comportement à grande distance à leur point critique respectif sera toujours décrit par le point fixe, et leur comportement au voisinage du point fixe (dans leur domaine critique) sera décrit par la ligne instable. Donc ils sont dans la même classe d'universalité. Leurs exposants critiques sont les mêmes et les fonctions de corrélations données par les mêmes fonctions d'échelle.

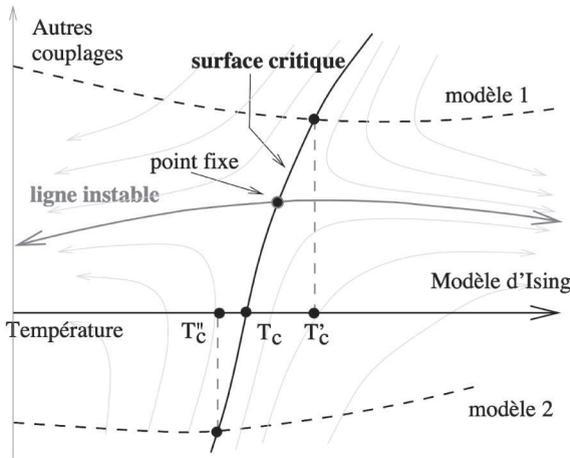


FIGURE 12.14 – Illustration de l’argument général pour l’universalité. Quand on fait varier la température pour différents modèles (Ising, Modèle 1 et Modèle 2), les températures critiques T_c , T_c' , T_c'' sont différentes. Au voisinage des points critiques, la physique à grande distance $\ell \geq \xi$ est universelle, et décrite par le point fixe et sa variété instable.

12.6 Calcul des exposants critiques et des relations d’échelle pour les systèmes magnétiques

12.6.1 Système en champ externe h , point bicritique

Nous pouvons maintenant déduire les relations d’échelle qui relient les exposants ν et η aux autres exposants critiques α , β , γ et δ pour les systèmes magnétiques. L’existence des fonctions d’échelle est le point essentiel.

Revenons au modèle d’Ising dans un champ externe h . Dans l’espace des paramètres **température**, **champ externe** (T, B), le point de Curie est un point bicritique, il faut ajuster les deux paramètres $T = T_c$, $B = 0$ pour atteindre le point critique. Comme on l’a vu dans la section 12.3, les calculs de renormalisation dans l’approximation de Migdal-Kadanoff suggèrent qu’il lui correspond un point fixe avec deux directions instables, donc *deux couplages essentiels (relevants)* :

1. le couplage t (température réduite $\sim T - T_c$) couplé à l’opérateur énergie $\mathcal{E} \simeq \phi^2$ (opérateur pair pour la symétrie $\mathbb{Z}_2 : \phi \rightarrow -\phi$), c’est le couplage considéré jusqu’à présent ;
2. le champ externe h , couplé à l’opérateur de champ $\sigma = \phi$ (opérateur impair).

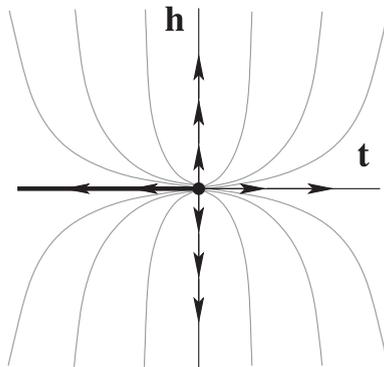


FIGURE 12.15 – Les flots du GR pour le modèle d’Ising en fonction des deux couplages essentiels t (température réduite) et h (champ magnétique).

Les flots du GR au voisinage du point fixe ont l’allure représentée sur la Fig. 12.15 (la variété instable est maintenant une surface de dimension 2). On a vu que les dimensions des couplages t et h et des opérateurs associés \mathcal{E} et σ sont reliées aux exposants η et ν par

$$\Delta_t = \frac{1}{\nu} \quad , \quad \Delta_{\mathcal{E}} = D - \Delta_t = D - \frac{1}{\nu} \quad (12.103)$$

$$\Delta_{\sigma} = \frac{D - 2 + \eta}{2} \quad , \quad \Delta_h = D - \Delta_{\sigma} = \frac{D + 2 - \eta}{2} \quad (12.104)$$

Il suffit d’exprimer les quantités thermodynamiques en termes de fonctions de corrélation des opérateurs d’échelle et de faire l’hypothèse que ces corrélations prennent une forme universelle donnée par une fonction d’échelle près du point critique pour obtenir les exposants α , β , γ et δ .

12.6.2 Calcul des exposants critiques

Susceptibilité magnétique χ et exposant γ

La susceptibilité magnétique χ est l’intégrale de la fonction (connexe) à deux spins, qui prend la forme d’une fonction d’échelle $G_{\sigma\sigma}$ près du point critique ($t = h = 0$). Par homogénéité on peut donc l’écrire

$$\chi = \int d^D x \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle^{(c)} = \int d^D x \xi^{-2\Delta_{\sigma}} G_{\sigma\sigma}(x/\xi) = C \xi^{D-2\Delta_{\sigma}}$$

avec $C = \int d^D z G_{\sigma\sigma}(z)$ une constante sans dimension. Il existe deux fonctions d’échelle, donc deux constantes C^{\pm} suivant le signe de t , mais ceci n’affecte pas la suite de l’argument. On a omis également le suffixe $^{(c)}$ pour « connexe » pour les fonctions d’échelle.

La longueur de corrélation ξ diverge comme $|t|^{-\nu} = t^{-1/\Delta_t}$ (pour $h = 0$). Donc la susceptibilité magnétique est singulière en $t = 0$ et se comporte comme

$$\chi \propto |t|^{\frac{2\Delta_\sigma - D}{\Delta_t}}.$$

L'exposant γ est donc simplement

$$\gamma = \frac{D - 2\Delta_\sigma}{\Delta_t} = \nu(2 - \eta) \quad (12.105)$$

C'est la relation d'échelle 10.19 (relation d'hyperscaling).

Chaleur spécifique C_v et exposant α

Le même argument s'applique à la chaleur spécifique. La partie singulière de la chaleur spécifique est donnée par l'intégrale de la fonction à deux points (connexe) pour l'opérateur énergie ε , qui a une limite d'échelle donnée par une fonction $G_{\varepsilon\varepsilon}$

$$C_v = \int d^D x \langle \varepsilon(x) \varepsilon(0) \rangle^c = \int d^D x \xi^{-2\Delta_\varepsilon} G_{\varepsilon\varepsilon}(x/\xi) \propto \xi^{D-2\Delta_\varepsilon} \propto |t|^{\frac{2\Delta_\varepsilon - D}{\Delta_t}} \quad (12.106)$$

L'exposant α est donc

$$\alpha = \frac{D - 2\Delta_\varepsilon}{\Delta_t} = 2 - \nu D \quad (12.107)$$

Il y a juste une petite subtilité, car la densité d'énergie E_v a une partie régulière, analytique en t , et l'argument s'applique pour la partie singulière en t de C_v , qui n'est pas une divergence ($\alpha > 0$).

Aimantation \mathcal{M} , exposants β et δ

L'aimantation est donnée par la fonction à un point G_σ , qui scale avec la longueur de corrélation comme

$$\mathcal{M} = \langle \sigma \rangle \propto \xi^{-\Delta_\sigma} \quad (12.108)$$

Quand $h = 0$, $t \rightarrow 0_-$ on a vu que $\xi \propto |t|^{-1/\Delta_t}$; donc

$$\beta = \frac{\Delta_\sigma}{\Delta_t} = \frac{\nu}{2}(D - 2 + \eta) \quad (12.109)$$

Quand $t = 0$, $h \neq 0$ c'est maintenant h qui joue le rôle du couplage essentiel. Les mêmes arguments s'appliquent en remplaçant t par h , et donc la longueur de corrélation diverge quand $h \rightarrow 0$ comme $\xi \propto |h|^{-1/\Delta_h}$, si bien que

$$\delta = \frac{\Delta_h}{\Delta_\sigma} = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} \quad (12.110)$$

L'ensemble des relations d'échelle 10.17–10.19 a donc été obtenu.

12.6.3 Le cas $D > 4$

On a vu dans l'ex. 12.1 que la théorie de Landau peut se comprendre comme un cas particulier où les fluctuations sont négligeables, et où en fait le point fixe des transformations de renormalisation est gaussien. Mais d'autre part les exposants de la théorie de Landau

$$\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}, \gamma = 1, \delta = 3, \nu = \frac{1}{2}, \eta = 0$$

ne satisfont pas les relations d'échelle 10.17–10.19 ! On va voir plus loin que ceci s'explique par le fait que les fonctions d'échelle sont singulières. La terminologie précise est l'existence d'opérateurs inessentiels dangereux en dimension $D > 4$. Donc il ne s'agit pas en fait d'une contradiction avec la théorie générale.

12.7 Notes

Cette présentation schématique et non rigoureuse du concept du groupe de renormalisation dans l'espace réel, selon Wilson, et appliqué aux phénomènes critiques, est basée sur du matériel standard que l'on peut trouver dans les ouvrages cités en référence dans l'introduction. On pourra se référer aussi à la revue de Wilson et Kogut de 1974 [WK74], et pour les aspects historiques sur le développement du concept de groupe de renormalisation pour la physique statistique et la matière condensée, aux contributions contenues dans l'ouvrage édité à la mémoire de K. Wilson [BHPP15]. On y trouvera également des détails et des hommages aux contributions de K. Wilson en physique des hautes énergies et en théorie quantique des champs.

Chapitre 13

Groupe de renormalisation de Wilson et théorie des champs

13.1 Introduction

Nous présentons maintenant des calculs explicites de groupe de renormalisation de Wilson, appliqués au point critique du modèle d'Ising, qui utilisent des techniques de théorie quantique des champs. Ces méthodes permettent de garder un certain contrôle sur les approximations faites. Elles permettent de justifier (au moins au niveau physique) les hypothèses de la théorie du groupe de renormalisation de Wilson. Ces calculs sont basés sur la théorie des perturbations et le développement en boucle, et seront valables si la théorie est « proche » du point fixe gaussien. Ces techniques sont à la base du développement en ϵ (epsilon-expansion) de K. Wilson et M. Fisher, ainsi qu'à d'autres techniques perturbatives de calcul des exposants critiques, qui ont été jusqu'à très récemment les techniques les plus précises de calcul de ces exposants en 3 dimensions. Elles sont maintenant dépassées par les méthodes de bootstrap conforme pour un certain nombre de cas.

Ces calculs vont nous permettre de discuter précisément les relations entre les calculs de groupe de renormalisation en physique statistique (point de vue Wilsonien) et ceux en théorie quantique des champs (point de vue perturbatif à la Stueckelberg–Pettersson, Gell-Mann–Low et Callan–Symanzik). Apparaîtra clairement la raison pour laquelle une classe d'universalité est associée à une théorie quantique des champs, dont les fonctions de corrélation seront les fonctions d'échelle dans le domaine critique.

13.2 Modèle de Landau-Ginzburg-Wilson dans l'approximation du potentiel local

13.2.1 Approximation du potentiel local

Principe de l'approximation

Voici un exemple de calcul explicite de Groupe de Renormalisation avec une théorie continue (le modèle de Landau-Ginzburg-Wilson) et des transformations d'échelle continues. Ce type de calcul est en fait un calcul d'action renormalisée au premier ordre en perturbation, et se trouve déjà dans les articles fondateurs (voir par exemple la revue de K. Wilson et J. Kogut [WK74]). J'en donne une version un peu plus proche des techniques de calcul d'action effective renormalisée (développés par Wetterich), mais ces deux méthodes sont équivalentes (au moins dans le cadre des approximations faites ici). Les principes du calcul sont les suivants.

1. On part de la théorie de Landau, donc d'un hamiltonien microscopique du type Landau-Ginzburg-Wilson, avec un potentiel local.
2. On tient compte de la renormalisation par les fluctuations thermiques dans un calcul au premier ordre dans la température (calcul à une boucle).
3. On fait le calcul de groupe de renormalisation avec un régulateur dans l'espace des impulsions plutôt que dans l'espace des positions. Ceci permet de considérer des transformations par un facteur d'échelle S continu dès le départ.

Les calculs reposent donc sur des techniques de théorie quantique des champs et d'intégrale fonctionnelle, qui ont été présentées dans la partie II.

On part d'un modèle avec un paramètre d'ordre continu $\phi(x)$ (le champ) et un hamiltonien de Landau-Ginzburg $\mathcal{H}[\phi]$ avec un potentiel local $V(\phi)$ régulier, mais pour l'instant non précisé.

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] \quad (13.1)$$

La fonction de partition est définie par la somme sur les configurations de ϕ . L'intégrale fonctionnelle (sommation sur le champ microscopique ϕ) conduit au potentiel effectif (ou action effective) $\Gamma[\varphi]$ qui est une fonction d'un champ macroscopique non fluctuant $\varphi(x)$ qui est appelé champ de fond et correspond à une aimantation moyenne. Attention

$$\varphi(x) = \langle \phi(x) \rangle \neq \phi(x)$$

Rappelons-en le principe (voir 10.4). On introduit un terme source (champ externe) $h(x)$, la fonctionnelle connexe $W[h]$ est le logarithme de la fonction

de partition dans le champ h . Le potentiel effectif $\Gamma[\varphi]$ est la transformée de Legendre de $W[h]$. $\varphi(x)$ est le champ de fond (aimantation moyenne).

$$W[h] = T \log \left[\sum_{\phi} e^{-\frac{1}{T}(\mathcal{H}[\phi] - h \cdot \phi)} \right] \quad (13.2)$$

$$\Gamma[\varphi] = \int_x h(x)\varphi(x) - W[h] \quad , \quad \varphi(x) = \frac{\delta}{\delta h(x)} W[h] = \langle \phi(x) \rangle_h \quad (13.3)$$

Régularisation dans l'espace des moments

Pour définir proprement la somme sur les configurations de champ \sum_{ϕ} , il faut avoir un régulateur à courte distance qui définit le modèle. Au lieu de considérer le modèle sur un réseau (carré) de maille a , ce qui revient à limiter les fréquences spatiales de ϕ à la zone de Brillouin

$$\hat{\phi}(k) \quad \text{défini dans la zone de Brillouin } k_{\mu} \in [-\pi/a, \pi/a] \quad (13.4)$$

on va utiliser un régulateur dur (*sharp regulator*) dans l'espace des moments, en définissant la sommation sur les champs ϕ comme la somme sur les modes $\hat{\phi}$ de moments plus petits qu'une certaine échelle de moment Λ

$$\hat{\phi}(k) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad |k| < \Lambda \quad (13.5)$$

Λ est un régulateur ultra-violet $\sim \pi/a$. Autrement dit, dans l'intégration sur les modes de ϕ on remplace la zone de Brillouin de taille $2\pi/a$ par la boule de rayon Λ (voir figure 13.1)

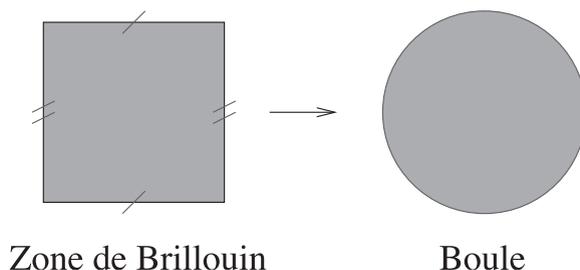


FIGURE 13.1 – Régularisation sur réseau versus régularisation « dure », vues dans l'espace des impulsions.

Potentiel effectif à une boucle dans l'approximation locale

Le potentiel effectif est donné à l'ordre d'une boucle (c'est-à-dire au premier ordre en température T)

$$\Gamma[\varphi] = \mathcal{H}[\varphi] + \frac{T}{2} \text{tr} \log [-\Delta + V''(\varphi)] + \mathcal{O}(T^2) \quad (13.6)$$

On introduit une seconde approximation en négligeant les gradients de φ dans le calcul de $\text{tr} \log [-\Delta + V''(\varphi)]$. Ceci veut dire que l'on suppose que le champ de fond varie lentement par rapport à l'échelle de courte distance $|\nabla\varphi| \ll 1$. Ceci nous permet de remplacer le $\text{tr} \log [-\Delta + V''(\varphi)]$, qui est une quantité non locale, par quelque chose de beaucoup plus simple, l'intégrale sur x d'une quantité locale

$$\text{tr} [\log [-\Delta + V''(\varphi)]] \longrightarrow \int d^D x \langle x | \log [-\Delta + V''(\varphi(x))] | x \rangle \quad (13.7)$$

En effet, $\langle x | \log [-\Delta + V''(\varphi(x))] | x \rangle$ est maintenant un élément de matrice diagonal d'un opérateur invariant par translation dont x est simplement un paramètre. En effet, dans cette approximation, l'opérateur $\mathbf{O}_x = -\Delta + V''(\varphi(x))$ agit sur des fonctions $\psi(y)$ comme

$$\mathbf{O}_x \cdot \psi(y) = -\Delta_y \psi(y) + V''(\varphi(x)) \psi(y) \quad (13.8)$$

et ce quel que soit y . En passant en transformée de Fourier (sur les fonctions $\psi(y)$), on peut donc écrire le terme $\langle x | \log (\mathbf{O}_x) | x \rangle$ comme une intégrale sur les impulsions k

$$\langle x | \log [-\Delta_x + V''(\varphi)] | x \rangle = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \log [(k^2 + V''(\varphi(x)))] \quad (13.9)$$

La trace correspond simplement à intégrer cet objet sur les x

$$\text{tr} \longrightarrow \int d^D x \quad (13.10)$$

C'est cette intégrale 13.9 divergente sur k qui est régularisée par l'introduction d'un régulateur dur Λ . L'intégrale sur les impulsions k est bornée par le régulateur Λ . Le terme régularisé devient simplement

$$\text{tr}_\Lambda [\log [-\Delta_x + V''(\varphi)]] = \int d^D x \int_{|k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \log [(k^2 + V''(\varphi(x)))/\Lambda^2] \quad (13.11)$$

Par cohérence dimensionnelle il faut diviser le terme dans le log par Λ^2 .

On note l'analogie entre ce résultat pour un régulateur sharp et la forme analogue pour un laplacien sur réseau carré, obtenue pour le champ libre

$$\text{tr} [\log [-\Delta + m^2]] = \int d^D x \int_{|k_\mu| < \frac{\pi}{a}} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \log \left[\left(\frac{4}{a^2} \sum_\mu \sin^2(k_\mu a/2) + m^2 \right) a^2 \right] \quad (13.12)$$

où l'intégration est restreinte à la zone de Brillouin.

13.2.2 Renormalisation par intégration sur des tranches d'impulsions

Étape 1 : Intégration sur les modes rapides

Le principe des transformations de renormalisation est illustré sur la figure 13.2.

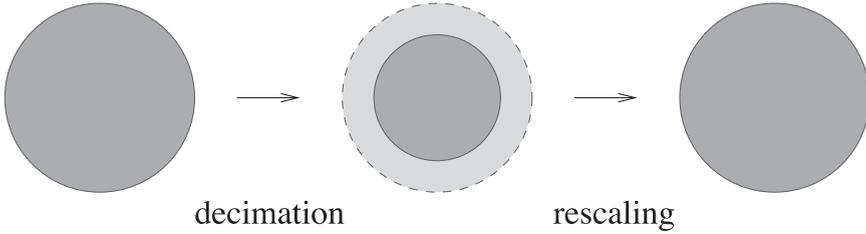


FIGURE 13.2 – Principe de la renormalisation dans l'espace des moments avec un régulateur dur $|k| \leq \Lambda$.

Les transformations de blocs de spin (intégration sur les fluctuations à petite échelle) vont ici être effectuées en intégrant sur les modes de grand nombre d'ondes de ϕ – les « modes rapides » ou « modes durs » – $\hat{\phi}(k)$ à grand k , et en gardant les « modes lents » ou « modes mous » à petit nombre d'onde k . Si $B > 1$ est le facteur d'échelle de la transformation de renormalisation, les moments durs et mous sont respectivement tels que

$$k \text{ dur si } \Lambda/B < |k| < \Lambda \quad , \quad k \text{ mou si } |k| < \Lambda/B \quad (13.13)$$

On sépare donc $\phi(x)$ en composantes rapides (fast) et lentes (slow)

$$\phi = \phi_{\text{fast}} + \phi_{\text{slow}} \quad (13.14)$$

définies simplement par les composantes de Fourier de ϕ

$$\hat{\phi}_{\text{slow}}(k) = \begin{cases} \hat{\phi}(k) & \text{si } |k| \leq \frac{\Lambda}{B}, \\ 0 & \text{si } |k| > \frac{\Lambda}{B}. \end{cases} \quad , \quad \hat{\phi}_{\text{fast}}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } |k| \leq \frac{\Lambda}{B}, \\ \hat{\phi}(k) & \text{si } |k| > \frac{\Lambda}{B}. \end{cases} \quad (13.15)$$

Le hamiltonien effectif $\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}]$ est obtenu en intégrant sur les composantes rapides

$$e^{-\frac{1}{T}\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}]} = \int \mathcal{D}[\phi_{\text{fast}}] e^{-\frac{1}{T}\mathcal{H}_{\text{eff}}[\phi]} \quad (13.16)$$

Le champ moyenné est défini comme la composante lente de ϕ

$$\tilde{\phi} = \phi_{\text{slow}} \quad (13.17)$$

La théorie effective pour $\tilde{\phi}$ est donc caractérisée par le nouveau cut-off Λ'

$$\Lambda' = \Lambda/B \quad (13.18)$$

Étape 2 : Calcul de \mathcal{H}_{eff} dans l'approximation du potentiel local

\mathcal{H}_{eff} se calcule facilement dans le cadre de l'approximation du potentiel local, présentée précédemment. Pour un champ de fond φ variant lentement (c'est-à-dire tel que $\varphi = \varphi_{<} = \tilde{\varphi}$), l'action effective $\Gamma_{\Lambda'}[\varphi]$ obtenue avec \mathcal{H}_{eff} doit être la même que celle obtenue avec \mathcal{H}

$$\Gamma_{\Lambda}[\varphi] = \Gamma_{\Lambda'}[\varphi] \quad (13.19)$$

(l'intégration sur les modes durs ne change pas la dynamique des modes mous). En utilisant la forme explicite de l'action effective dans l'approximation du potentiel local 13.6, 13.7 et 13.11, on en déduit sans calculs supplémentaires que le hamiltonien effectif pour $\tilde{\phi}$ est de la même forme que \mathcal{H}

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}[\tilde{\phi}] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \tilde{\phi})^2 + V_{\text{eff}}(\tilde{\phi}) \right] \quad (13.20)$$

avec un potentiel local effectif V_{eff} donné par le potentiel initial V , plus une correction venant de l'intégration sur les modes durs

$$V_{\text{eff}}[\tilde{\phi}] = V[\tilde{\phi}] + \frac{T}{2} \int_{\frac{\Lambda}{B} < |k| < \Lambda} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \log \left[(k^2 + V''(\tilde{\phi})) / \Lambda^2 \right] \quad (13.21)$$

L'intégrale sur k dans le terme de droite est juste une fonction du paramètre $V''(\tilde{\phi})$ (qui est maintenant un nombre réel, puisque $\tilde{\phi}$ ne dépend plus de x), du régulateur Λ , du facteur d'échelle B , et de la dimension D .

Étape 3 : Rescaling

L'étape finale consiste à rééchelonner (rescaler) les champs et les distances/impulsions, pour obtenir les champs et le hamiltonien renormalisés. Ici, avec les notations de la section 12.2, il faut faire

$$x = x' B, \quad k = k' / B, \quad \tilde{\phi} = B^{\frac{2-D}{2}} \phi' \quad (13.22)$$

afin de réobtenir le terme cinétique et le régulateur UV initial. Le hamiltonien renormalisé est

$$H'[\phi'] = \int d^D x' \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi')^2 + V_B(\phi') \right] \quad (13.23)$$

où seul le potentiel local V est renormalisé $V(\phi) \rightarrow V_{\text{ren}}(\phi')$ avec

$$\begin{aligned} V_{\text{ren}}(\phi) &= B^D V_{\text{eff}}(B^{-\Delta} \phi) \\ &= B^D V(B^{-\Delta} \phi) + \frac{T}{2} \int_{\Lambda < |k'| < \Lambda B} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \log \left[\frac{(B^{-2} k'^2 + V''(B^{-\Delta} \phi))}{\Lambda^2} \right] \end{aligned} \quad (13.24)$$

L'exposant de rescaling Δ pour le champ ϕ est sa dimension canonique

$$\Delta = \frac{D-2}{2} \quad (13.25)$$

13.2.3 Équation de flots pour le potentiel local

Le flot prend une forme particulièrement simple dans la limite où on intègre sur une tranche infinitésimale de moments à chaque itération, c'est-à-dire si on prend au départ

$$B = 1 + ds \quad ds \ll 1 \tag{13.26}$$

auquel cas on obtient (on absorbe T dans les normalisations de V et ϕ)

$$V_{\text{ren}}(\phi) = V(\phi) + ds \left[DV(\phi) - \Delta \phi V'(\phi) + \frac{1}{2} \Lambda^D \frac{\mathcal{S}_D}{(2\pi)^D} \log [1 + \Lambda^{-2} V''(\phi)] \right]$$

\mathcal{S}_D est le volume de la sphère unité dans \mathbb{R}^D , $\mathcal{S}_D = 2 \pi^{D/2} / \Gamma(D/2)$.

En itérant cette équation N fois, on obtient le potentiel renormalisé $V_S(\phi)$ après une transformation d'échelle de facteur $S = (1 + ds)^N$ qui peut être considéré continu. L'équation de flot pour V_S prend la forme d'une équation aux dérivées partielles non linéaire (en termes des dérivées par rapport à la variable ϕ). Si on normalise x , k et ϕ pour que $\Lambda = 1$, cette équation de flot s'écrit

$$S \frac{\partial}{\partial S} V_S(\phi) = DV_S(\phi) - \frac{D-2}{2} \phi V'_S(\phi) + \mathbb{A} \log [1 + V''_S(\phi)] \tag{13.27}$$

avec

$$\mathbb{A} = (4\pi)^{-D/2} / \Gamma(D/2)$$

une constante positive. La première équation correspond à une renormalisation de l'énergie du fondamental qui n'a pas de conséquence physique (normalisation globale de la mesure). La valeur exacte de la constante \mathbb{A} ne va pas jouer de rôle dans la discussion qui suit sur la structure des flots du GR et le calcul des exposants critiques dans cette approximation. Elle sera importante pour comparer les calculs de théorie des champs et ceux du groupe de renormalisation dans l'espace réel.

13.2.4 Flots et points fixes à $D = 4 - \epsilon$

Nous pouvons maintenant étudier de façon générale ces équations et la géométrie des flots dans l'espace des potentiels locaux $V(\phi)$. On remarque aussi que dans l'équation 13.27 la dimension D de l'espace est juste un paramètre, que l'on peut traiter D comme une variable, et regarder ce qui se passe quand D varie de $D > 4$ à $D < 4$. Cette idée est à la base du développement en ϵ de Fisher et Wilson.

Projection sur les potentiels en ϕ^4

Nous allons analyser l'équation 13.27, lorsque $D < 4$, et que le point fixe gaussien $V(\phi) = 0$ est instable, en faisant une approximation supplémentaire. Si le domaine intéressant est celui où les potentiels $V(\phi)$ ne sont pas très différents du potentiel de Landau-Ginzburg en ϕ^2 et ϕ^4 , nous allons projeter

l'équation de flot en ne gardant que les termes de degré 4 au plus en puissance de ϕ (procédure de troncature). On part donc d'un potentiel

$$V(\phi) = e + \frac{r}{2}\phi^2 + \frac{u}{4!}\phi^4 \quad (13.28)$$

et dans 13.27 on tronque le développement en ϕ à l'ordre quatre

$$\log [1 + V''(\phi)] = \log \left[1 + r + \frac{u}{2}\phi^2 \right] \simeq \log(1+r) + \frac{u}{2(1+r)}\phi^2 - \frac{u^2}{8(1+r)^2}\phi^4 \quad (13.29)$$

Le terme en $\log[1+r]$ est juste une renormalisation additive de l'énergie libre e . On obtient des équations de flots fermées pour les couplages e , u et r , donc les fonctions de Wilson associées

$$\begin{aligned} S \frac{\partial}{\partial S} e &= W_e(e, r, u) = D e + \mathbb{A} \log(1+r) \\ S \frac{\partial}{\partial S} r &= W_r(r, u) = 2r + \mathbb{A} \frac{u}{(1+r)} \\ S \frac{\partial}{\partial S} u &= W_u(r, u) = (4-D)u - 3\mathbb{A} \frac{u^2}{(1+r)^2} \end{aligned} \quad (13.30)$$

Le point fixe de Wilson au premier ordre en ϵ

On note de façon standard (la dimension critique supérieure est $D_{uc} = 4$)

$$\epsilon = 4 - D \quad (13.31)$$

et on va étudier ces flots en supposant que ϵ est petit. Si on développe à l'ordre 2 en r et u (c'est justifié au premier ordre en ϵ), les fonctions de Wilson sont

$$W_r(r, u) = 2r + \mathbb{A}u - \mathbb{A}ru, \quad W_u(r, u) = (4-D)u - 3\mathbb{A}u^2 \quad (13.32)$$

Les flots correspondants sont représentés sur les Figs 13.3, 13.5 et 13.4.

Outre le point fixe trivial à l'origine, on trouve un point fixe non trivial \mathbf{W} où les fonctions de Wilson s'annulent. C'est le *point fixe de Wilson*

$$r^* = -\frac{1}{6}\epsilon, \quad u^* = \frac{1}{3\mathbb{A}}\epsilon \quad (13.33)$$

Il est dans la région physique $u > 0$ si $D < 4$. Ce point fixe est à une distance $\mathcal{O}(\epsilon)$ de l'origine (le point fixe gaussien) donc l'approximation précédente est bien justifiée. La matrice des dérivés des flots à ce point fixe est

$$\left. \frac{\partial(W_r, W_u)}{\partial(r, u)} \right|_{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\epsilon}{3} & \mathbb{A} \left(1 + \frac{\epsilon}{6}\right) \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} \quad (13.34)$$

Donc r correspond à une direction essentielle $(1, 0)$ et u à une direction inessentielle $(-\mathbb{A}, 2)$. Les dimensions d'échelle des couplages d'échelle (champs d'échelle) associés $g_0 = (r - r^*) + (u - u^*)\mathbb{A}/2 = r + u\mathbb{A}/2$ et $g_1 = (u - u^*)$ sont

$$\lambda_0 = 2 - \frac{\epsilon}{3}, \quad \lambda_1 = -\epsilon \quad (13.35)$$

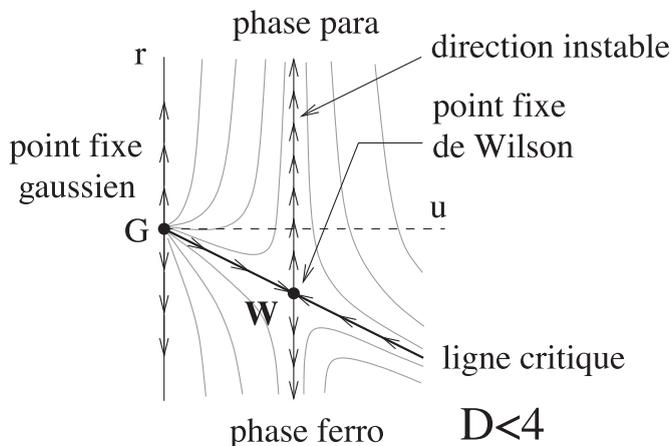


FIGURE 13.3 – Flots du GR en u et r pour $D < 4$ (G est le point fixe gaussien, W le point fixe de Wilson).

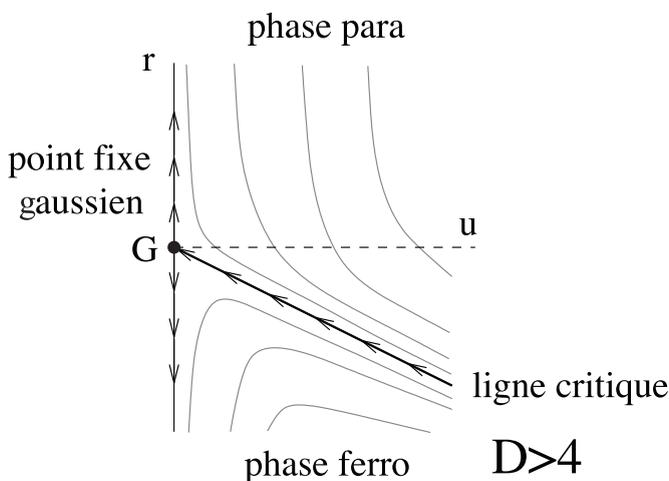


FIGURE 13.4 – Flots du GR en u et r pour $D > 4$.

Donc pour $D < 4$, les flots sur la surface critique sont attirés vers le point fixe de Wilson, et non pas vers le point fixe gaussien G . C'est donc W qui décrit la classe d'universalité du point critique du modèle d'Ising. Ce point fixe est à distance ϵ du point fixe gaussien (qui correspond au champ moyen).

Cas $D > 4$: Pour $D > 4$ on a retrouvé les résultats du champ moyen. C'est le point fixe gaussien G en $u = 0$ qui gouverne le comportement critique.

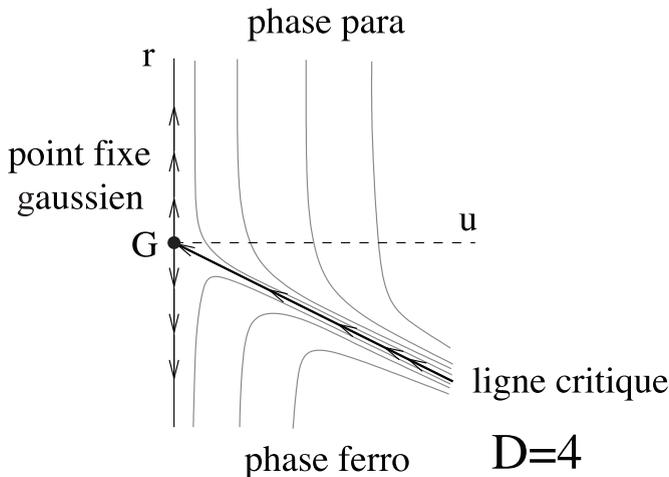


FIGURE 13.5 – Flots du GR en u et r pour $D = 4$.

Cas $D = 4$: Pour $D = 4$ la fonction $W_u = -\frac{3}{16\pi^2}u^2$ est < 0 si $u > 0$. Le couplage u est marginalement inessentiel (s’il est positif), c’est-à-dire que sur la surface critique le flot du GR est attiré vers le point fixe gaussien $u = 0$, mais les flots convergent vers G beaucoup moins rapidement que pour $D > 4$. Nous reviendrons sur ce cas plus loin.

Exposants critiques

Les relations générales de la section 12.6 permettent de calculer les exposants critiques associés au point fixe de Wilson. On a vu que dans l’approximation du potentiel local la dimension Δ_ϕ du champ ϕ est inchangée par rapport à sa dimension canonique. Par contre $\lambda_0 \neq 2$ et de plus la dimension λ_1 va nous donner l’exposant ω des premières corrections aux lois d’échelle. On a donc obtenu à l’ordre ϵ les trois exposants critiques indépendants

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} , \quad \eta = 0 , \quad \omega = \frac{\epsilon}{2} \tag{13.36}$$

À ce stade il est déjà intéressant de prendre $\epsilon = 1$ et de comparer aux exposants critiques pour les systèmes dans la classe d’universalités du modèle d’Ising à 3 dimensions

D=3	champ moyen	ordre ϵ	analytique	expérience
ν	1/2	0,58	0,630(1)	0,625(10)
η	0	0	0,035(3)	

(13.37)

Ici nous avons cité les estimations analytiques par les calculs de renormalisation. Des estimations beaucoup plus précises sont obtenues par le bootstrap

conforme. On voit que les corrections au champ moyen données par ce calcul simple de groupe de renormalisation vont qualitativement dans la bonne direction.

Développement en ϵ et autres extensions

En fait la théorie quantique des champs permet de construire (à partir de la théorie ϕ^4) un développement perturbatif systématique en $\epsilon = 4 - D$ (*développement en ϵ de Wilson-Fisher*) pour les exposants critiques et les fonctions d'échelle.

En particulier, cette théorie permet de justifier à l'ordre ϵ les approximations faites ici dans l'approximation du potentiel local : les termes négligés dans le calcul (les gradients de ϕ et les termes d'ordre supérieurs en ϕ et $\nabla\phi$) n'interviennent que dans les corrections en $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

À l'ordre 2 le développement en ϵ donne

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} \quad ; \quad \eta = \frac{\epsilon^2}{54} \quad (13.38)$$

Ce qui donne pour $\epsilon = 1$ ($d = 3$)

$$\nu = 0,62 \quad , \quad \eta = 0,02 \quad (13.39)$$

La méthode de renormalisation dans l'espace des k et l'approximation du potentiel local peuvent être systématisées et généralisées pour beaucoup d'applications (équation de Wilson-Polchinski, potentiel effectif moyenné de Wegner-Wetterich). Des résultats rigoureux peuvent être obtenus par ces méthodes.

13.2.5 Exercices

Exercice 13.1. Calcul par intégration directe sur les modes rapides

Déduire directement l'expression 13.21 en intégrant sur les modes rapides ϕ_{fast} tels que $\Lambda/B < |k| < \Lambda$, en faisant l'approximation du potentiel local et l'approximation gaussienne. Montrer que l'on obtient le même résultat que celui obtenu directement à partir de l'action effective totale.

Exercice 13.2. Étude complète de l'équation de flot dans l'approximation du potentiel local

Généraliser l'étude précédente en tronquant le potentiel à l'ordre ϕ^{2n} , $n > 2$, et en étudiant (numériquement) les flots de l'équation 13.27 obtenus dans l'approximation du potentiel local. Montrer que le point fixe de Wilson obtenu en tronquant à l'ordre ϕ^{2n} est stable quand $n \rightarrow \infty$; c'est-à-dire converge vers un point fixe de l'équation de flot non tronquée 13.27.

Calculer (numériquement) la valeur de l'exposant ν en fonction de l'ordre n de la troncation du potentiel.

À titre d'exemple, je représente dans la Fig. 13.6 les estimations pour ν pour $n \leq 12$ (et $\epsilon = 1$). On voit que l'on converge vers un $\nu_{\text{pot.loc.}} = 0,68(1)$

qui est plus grand que la valeur théorique exacte (sans l'approximation du potentiel local).

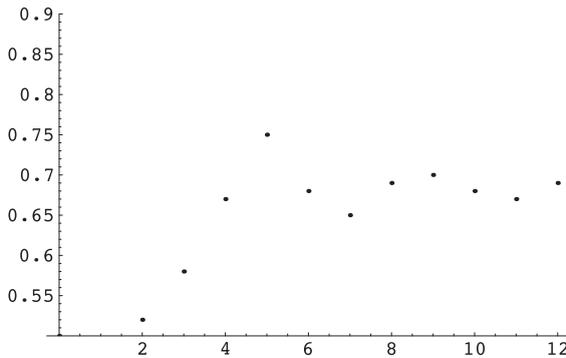


FIGURE 13.6 – Estimation de ν en $D = 3$ dans l'approximation du potentiel local en fonction de l'ordre n de troncation du potentiel $V(\phi)$.

Exercice 13.3. Autres points fixes

En tronquant les équations de flot à l'ordre ϕ^6 ou ϕ^8 , pouvez-vous trouver d'autres points fixes que le point fixe gaussien et le point fixe de Wilson ? Étudier qualitativement leur stabilité en fonction de la dimension D de l'espace.

La physique de tels points fixes sera discutée plus en détail dans la section sur les points multicritiques.

13.3 $D = 4$ et couplage marginalement inessentiel

Nous n'avons pas encore discuté le cas d'une perturbation d'un point fixe par un couplage g marginal, de dimension nulle $\Delta_g = 0$. C'est ce qui arrive pour le modèle de Landau-Ginzburg-Wilson en dimension $D = 4$. Le point fixe gaussien est perturbé par le couplage en ϕ^4 qui s'avère être marginalement inessentiel.

Cette situation se rencontre également pour QED (couplage marginalement inessentiel) et pour les théories de jauge en dimension $D = 4$, où le couplage est alors marginalement essentiel (liberté asymptotique). Ce cas est aussi très important pour certains systèmes de physique statistique en dimension $D = 2$, et en physique des systèmes quantiques unidimensionnels, où la dimension de l'espace-temps est $D = 1 + 1$. Dans ce cas il faut développer les équations de flots au deuxième ordre en g et la situation dépend du signe de la fonction de Wilson.

13.3.1 Couplage marginalement inessentiel : corrections logarithmiques aux lois d'échelle

On considère le cas d'une théorie qui ne dépend que d'un seul couplage g marginal. À l'ordre dominant au voisinage du point fixe $g^* = 0$ la fonction de Wilson W pour ce couplage est

$$W(g) = b_2 g^2 + \mathcal{O}(g^3) \quad (13.40)$$

Si $b_2 < 0$ le couplage g est dit *marginalement inessentiel* (du moins pour $g > 0$). Le couplage renormalisé $g(S)$ décroît avec le facteur d'échelle spatial S , mais selon une loi logarithmique, au lieu d'une loi de puissance.

C'est le cas pour la théorie ϕ^4 (LGW) à $D = 4$. Si on identifie $g_0 \simeq r$ à la température réduite $t = (T - T_c)/T_c$ et $g_1 \simeq u$, les fonctions de Wilson sont

$$S \frac{\partial g_0}{\partial S} = W_0 = \lambda_0 g_0 \quad , \quad \lambda_0 > 0 \quad ; \quad S \frac{\partial g_1}{\partial S} = W_1 = -c_2 g_1^2 \quad , \quad c_2 > 0 \quad (13.41)$$

La température réduite $t = g_0$ est toujours un couplage essentiel mais le couplage non linéaire $u = g_1$ est marginalement inessentiel. On peut répéter l'analyse faite en 12.5.5 lorsque le couplage g_1 est inessentiel. La longueur de corrélation $\xi(g_0, g_1)$ diverge toujours au point critique, c'est-à-dire quand $g_0 \rightarrow 0$, $g_1 > 0$ fixé. Si $g_1 \neq 0$ il y a des corrections aux lois d'échelle, mais le calcul montre qu'elles sont logarithmiques, et non plus en loi de puissance comme dans 12.97.

13.3.2 Couplage marginalement essentiel, divergence exponentielle de ξ

On considère maintenant le cas d'une théorie qui ne dépend que d'un seul couplage g *marginalement essentiel* quand $g > 0$. Ce n'est pas le cas de ϕ^4 . À l'ordre dominant au voisinage du point fixe $g^* = 0$ la fonction de Wilson W pour ce couplage est maintenant

$$W(g) = b_2 g^2 + \mathcal{O}(g^3) \quad , \quad b_2 > 0 \quad (13.42)$$

En intégrant l'équation de flot on trouve alors que le couplage renormalisé $g(S)$ croît avec le facteur d'échelle S comme

$$g(S) \simeq \frac{g}{1 - g b_2 \log S} \quad (13.43)$$

Il croît donc à grande distance et décroît à courte distance (hautes énergies). C'est le phénomène de liberté asymptotique (*asymptotic freedom*).

Dans ce cas, la longueur de corrélation diverge exponentiellement quand on s'approche du point fixe $g \rightarrow 0_+$ comme

$$\xi(g) \propto \exp\left(\frac{1}{b_2 g}\right) \quad \text{quand } g \rightarrow 0_+ \quad (13.44)$$

donc plus vite que toute loi de puissance. Autrement dit, la masse m de la théorie des champs correspondante s'annule avec g comme

$$m \simeq \exp\left(-\frac{1}{b_2 g}\right) \quad (13.45)$$

Cette situation sera discutée plus en détail dans l'étude des modèles de spin (modèles sigma non linéaires) en dimension $D = 2$.

13.3.3 Ligne de points fixes : exemple du modèle XY

Enfin si la fonction de Wilson $W(g) = 0$ est identiquement nulle, on est en présence d'une *ligne de points fixes*. Chaque valeur de g décrit une théorie différente, appartenant à classe d'universalité différente, avec des exposants critiques qui varient continûment en fonction de g .

Un exemple fameux (et physiquement important) est le modèle XY en 2 dimensions, qui décrit la transition de Kosterlitz-Thouless. Ce modèle et sa renormalisation seront présentés dans 15.3. À ce stade nous décrivons et discutons ses flots de renormalisation.

Le modèle XY sur réseau est le modèle de spin classique à deux composantes et symétrie continue $O(2)$. En deux dimensions, en plus des ondes de spins (les modes de Goldstone qui sont les excitations de basse énergie), ce modèle possède des excitations topologiques, les vortex, d'énergie finie, qui introduisent du désordre. Nous discuterons plus en détail le concept de vortex en 15.3, mais des exemples d'onde de spin et de vortex sont représentés en Fig. 13.7.

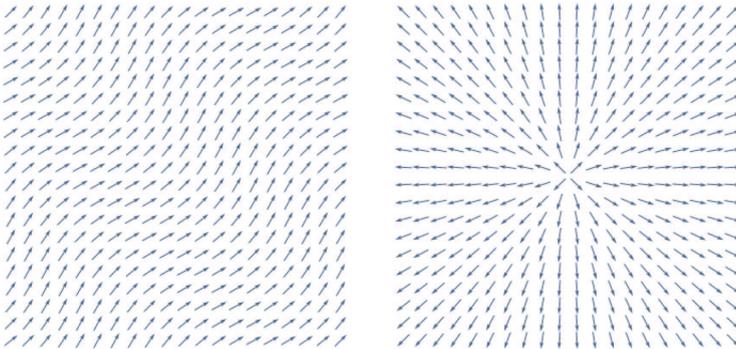


FIGURE 13.7 – Onde de spin et vortex dans le modèle XY 2D.

La théorie effective est caractérisée par deux paramètres: $\kappa = T$, la raideur de spin (la température effective des ondes de spin) et un nouveau paramètre z , la fugacité des vortex.

Si $z = 0$ (absence de vortex), le modèle est en fait gaussien et la température T n'est pas renormalisée. Si $z > 0$, il y a des vortex. À très basse

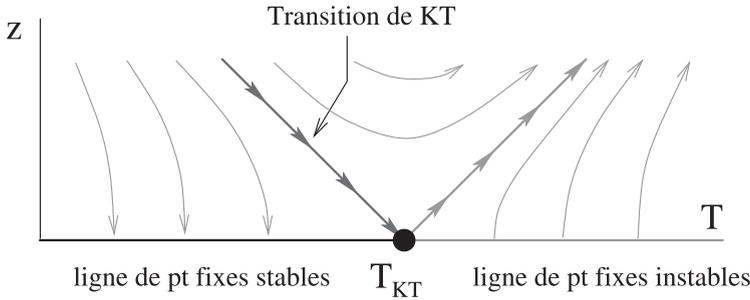


FIGURE 13.8 – Les flots du modèle XY : un exemple de ligne de points fixes.

température, l'effet des vortex n'est pas très important. Il s'avère qu'il existe une température critique $T_{KT} > 0$ au-delà de laquelle les vortex sont libérés et la physique change (c'est la transition de Berezinski-Kosterlitz-Thouless). En notant $t = (T - T_{KT})/T_{KT}$ la température réduite, les fonctions de Wilson W_z et W_t pour les deux paramètres z et t sont, d'après un calcul de renormalisation au premier ordre

$$W_z = tz \quad , \quad W_t = z^2 \tag{13.46}$$

La première fonction W_z décrit comment la fugacité des vortex z est renormalisée par les fluctuations thermiques, en fonction de la température t . Pour $t < 0$ (donc $T < T_{KT}$) l'effet est négatif, la fugacité renormalisée est plus petite que la fugacité « nue ». Pour $t > 0$ ($T > T_{KT}$) l'effet est positif, la fugacité renormalisée est plus grande que la fugacité « nue ». La deuxième fonction W_t décrit comment la température effective t est renormalisée par la présence de vortex. L'effet est toujours positif : plus de vortex \implies plus de désordre \implies température effective plus grande.

On peut déduire ces équations de flot 13.46 à partir de la théorie de Sine-Gordon, d'action

$$S[\phi] = \int d^2x \left[\frac{1}{2T} (\partial\phi)^2 - z \cos(\phi) \right] \tag{13.47}$$

qui est la théorie des champs duale du modèle XY.

Les flots du groupe de renormalisation dans le plan (t, z) sont représentés dans la Fig. 15.14. L'axe $z = 0$ est une ligne de points fixes. Pour $t < 0$ ces points fixes sont stables dans la direction z (perturbation par une densité petite de vortex). Ils décrivent des théories de masse nulle, dont les fonctions de corrélations (de spin) décroissent algébriquement. Si t est positif, les points fixes sont instables. Partant d'une valeur petite de la fugacité z , la fugacité renormalisée z croît et la densité de vortex devient grande. Les vortex sont libérés, le système est désordonné, les fonctions de corrélations (de spin) décroissent exponentiellement. Le point $z = t = 0$ est un point critique qui décrit la transition de libération des vortex. On peut montrer qu'à la transition, la longueur

de corrélation ξ , qui est finie dans la phase massive $t > 0$, diverge en $t = 0$ comme

$$\xi \propto \exp\left(\frac{\text{cst.}}{\sqrt{t - t_c}}\right) \quad (13.48)$$

13.3.4 Exercices

Exercice 13.4. Corrections logarithmiques aux lois d'échelle

Dans le cas d'un modèle avec un couplage essentiel g_0 et un couplage marginalement inessentiel g_1 avec les fonctions de Wilson de 13.41, montrer que la longueur de corrélation ξ diverge à la surface critique $g_0 \rightarrow 0$ comme

$$\xi(g_0) \simeq A |g_0|^{-\frac{1}{\lambda_0}} \left[1 + B \frac{1}{\log(1/|g_0|)} + \dots \right] \quad (13.49)$$

Appliquer ce résultat au modèle de Landau-Ginzburg-Wilson à une composante (modèle d'Ising) en dimension $D = 4$.

Exercice 13.5. Couplage marginalement essentiel

Déduire les relations 13.44 et 13.45 pour une théorie avec un couplage marginalement essentiel g et une fonction de Wilson donnée par 13.42.

En partant d'un couplage nu petit $g_0 \ll 1$ à une échelle de distance microscopique a_0 , à quelle échelle le couplage renormalisé devient-il d'ordre $\mathcal{O}(1)$ et s'attend-on à ce que les effets non perturbatifs deviennent importants ? Comparer cette échelle à la longueur de corrélation ξ .

Exercice 13.6. Modèle XY

Montrer que la ligne critique associée à la transition KT est la ligne $z + t = 0$, $z > 0$. En déduire la relation 13.48 pour la divergence de la longueur de corrélation ξ à la transition.

Quelle est la dimension d'échelle Δ_z de la fugacité z (sur la ligne de points fixes) en fonction de t ? Que se passe-t-il à la transition ?

13.4 Limite continue et relation avec les théories quantiques des champs

Nous avons vu dans la section 12.5.6 que près d'un point critique les fonctions de corrélations (ou du moins leur partie singulière) d'un modèle statistique prennent une forme universelle, donnée par des fonctions d'échelle. Ces fonctions sont caractérisées uniquement par la classe d'universalité du point critique. Nous allons développer ceci, et montrer que ces fonctions d'échelle sont en fait les fonctions de corrélations (fonctions de Green) d'une théorie quantique des champs (euclidienne) associée au point fixe correspondant à la classe d'universalité. C'est cette relation extrêmement profonde et importante entre la théorie des phénomènes critiques et la théorie quantique des champs qui a été mise en évidence par la théorie du groupe de renormalisation de Wilson.

13.4.1 Limite continue et fonctions d'échelle

Les fonctions d'échelle s'obtiennent à partir des fonctions de corrélation pour un système statistique donné $\langle \sigma(x_1) \cdots \sigma(x_K) \rangle$ en dilatant l'échelle des distances par un facteur d'échelle S ($x \rightarrow x' = s/S$) et en faisant simultanément tendre les couplages vers le point critique (donc ici $T \rightarrow T_c$, $H \rightarrow 0$) en « remontant » les trajectoires du groupe de renormalisation de façon à ce que les observables se comportent comme dans la limite continue. Pour le modèle de Landau-Ginsburg-Wilson (modèle d'Ising), on définit les « constantes de couplages renormalisées » t_R et h_R et le « champ renormalisé » ϕ_R pour la théorie continue comme

$$t_R = tS^{\Delta_t} \quad , \quad h_R = hS^{\Delta_h} \quad , \quad \phi_R = S^{\Delta_\phi} \sigma \quad (13.50)$$

$t \propto T - T_c$ et $h \propto H$ sont des couplages « réduits » sans dimension. Les *fonctions d'échelle* G_K pour le champ ϕ sont obtenues en prenant la limite d'échelle des fonctions de corrélations du champ renormalisé $S \rightarrow \infty$, t_R et h_R fixés (donc les couplages t et h tendent vers le point critique $t_c = h_c = 0$)

$$G_K(x_1, \dots, x_k; t_R, h_R) = \lim_{\substack{S \rightarrow \infty \\ t_R, h_R \text{ fixed}}} (S^{\Delta_\phi})^K \langle \sigma(Sx_1) \cdots \sigma(Sx_K) \rangle_{t, h} \quad (13.51)$$

Autrement dit, on part d'un système statistique défini avec un régulateur à courte distance fini (pour Ising la maille de réseau $a = 1$), on rescale les distances $x \rightarrow x' = x/S$ c'est-à-dire qu'on fait tendre le régulateur vers 0 (limite continue $a \rightarrow a' = 1/S \rightarrow 0$) tout en ajustant les couplages (ici t et h) et la normalisation des observables locales (ici le champ $\phi = \sigma$) pour que la longueur de corrélation et les fonctions de corrélations restent finies. Ceci est illustré sur la Fig. 13.9. La théorie du groupe de renormalisation assure que ceci est possible si on est au voisinage d'un point critique, et il faut ajuster autant de couplages qu'il y a de couplages essentiels au point fixe correspondant, en suivant les flots du GR issus du point fixe.

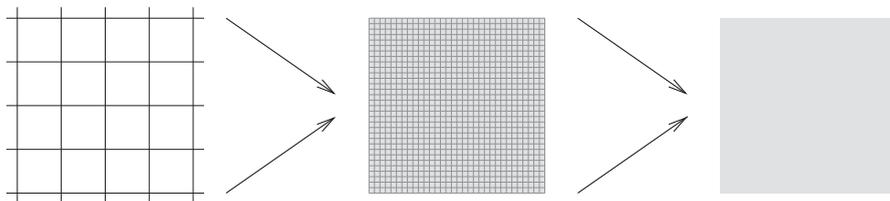


FIGURE 13.9 – *Limite continue* : les fonctions d'échelle sont obtenues en faisant tendre le régulateur à courte distance vers 0 et en faisant tendre simultanément les couplages vers le point critique \mathbf{c} , de façon à ce que les couplages renormalisés (et donc la longueur de corrélation) restent finis.

Les fonctions d'échelle de la théorie continue ainsi obtenues ne sont rien d'autre que les fonctions de corrélations pour le modèle statistique initial

restreint à la variété instable (ici de dimension 2) issue du point fixe par les flots du groupe de renormalisation. Les couplages renormalisés t_R et h_R ne sont rien d'autre qu'un choix de coordonnées sur cette variété (surface) instable \mathcal{V} . Il y a une relation simple entre t_R et h_R et les couplages effectifs $t(S)$ et $h(S)$ qui sont les coordonnées initiales sur la surface instable. Ceci est illustré sur la Fig. 13.10.

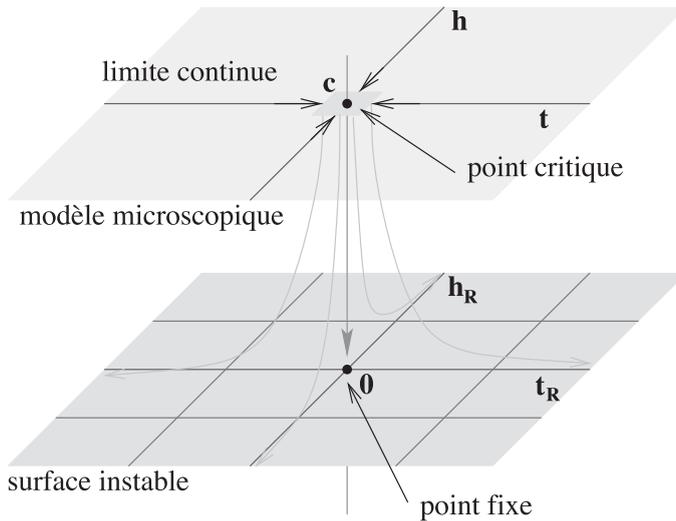


FIGURE 13.10 – *Limite continue* : le comportement au voisinage du point critique c pour un modèle microscopique avec un régulateur UV fini (surface du haut), est décrit par la variété instable (surface du bas). Il ne dépend que d'un nombre fini de couplages essentiels renormalisés (ici t_R et h_R).

13.4.2 Conséquences

Fonctions d'échelle en champ nul

Les fonctions d'échelle en champ nul $h = 0$ obtenues dans les deux phases, respectivement désordonnée ($t \rightarrow 0_+$) et ordonnée ($t \rightarrow 0_-$), $G_K^\pm(x_1, \dots, x_K)$, sont donc juste des valeurs particulières des fonctions d'échelle générales

$$G_K^\pm(x_1, \dots, x_K) = G_K(x_1, \dots, x_K; t = \pm 1, h = 0) \quad (13.52)$$

Elles ne sont donc pas indépendantes, puisqu'elles sont données par les fonctions de corrélations d'une seule et même théorie.

Rapports d'amplitudes critiques

On en déduit que les quantités sans dimensions obtenues en prenant des rapports de fonctions d'échelle dans les deux phases sont aussi des quantités

universelles, qui ne dépendent que de la classe d'universalité du point critique. L'exemple le plus connu est le rapport d'amplitudes pour la longueur de corrélation

$$\frac{A_+}{A_-} \quad , \quad \xi \underset{T \rightarrow T_c}{=} A_{\pm} |T - T_c|^{-\nu} \quad , \quad T > T_c \text{ ou } T < T_c \quad (13.53)$$

Fonctions d'échelle pour des points critiques différents dans la même classe d'universalité

Si on construit les fonctions d'échelle par la procédure de limite continue à partir de deux modèles différents, avec des points critiques différents \mathbf{c} et \mathbf{c}' (par exemple en partant d'un modèle d'Ising sur des réseaux carré ou triangulaire), on obtient des fonctions d'échelle $G(x; g_R)$ et $G'(x; g'_R)$ *a priori* différentes (je note g_R l'ensemble des couplages renormalisés). Les mêmes arguments que ceux pour l'universalité montrent que ces fonctions d'échelle sont équivalentes par une redéfinition finie des couplages renormalisés $g_R \rightarrow g'_R$ (donc à un changement local de coordonnées sur la variété instable \mathcal{F}) et un changement de normalisation des champs $\phi \rightarrow \phi' = Z\phi$

$$G_K(x; g_R) = Z^K G'_K(x; g'_R) \quad (13.54)$$

Donc la théorie des champs associée à la limite continue et la physique dans le domaine critique sont bien universelles.

13.4.3 Relation entre modèle de Landau-Ginzburg-Wilson et théorie des champs ϕ^4

La construction des fonctions d'échelle par cette procédure de limite continue d'un système statistique (en dimension D) est tout à fait analogue à la construction de la mécanique quantique (à temps euclidien) comme limite continue d'un système statistique unidimensionnel de chemins (voir la partie I du livre). En fait on construit ainsi une théorie quantique des champs (à temps euclidien) en dimension D , et les fonctions d'échelle sont les fonctions de corrélations de cette théorie des champs, c'est-à-dire les éléments de matrice de produits d'opérateurs locaux pour cette théorie. Voir la partie II du livre pour les détails. Ce qu'il faut retenir c'est que de façon générale :

1. À un point fixe du groupe de renormalisation est associée une théorie quantique des champs de masse nulle (théories invariantes d'échelle).
2. La variété instable associée à ce point fixe (déformation par des opérateurs essentiels) décrit des théories quantiques des champs massives (théories non invariantes d'échelle).
3. Les couplages d'échelle essentiels (champs d'échelle) sont les constantes de couplages de cette théorie quantique des champs massive.

4. Les fonctions de corrélations du modèle statistique sur la variété instable sont les fonctions d'échelle associées à la classe d'universalité du point fixe. Ces fonctions d'échelle sont données par les fonctions de corrélations (éléments de matrice dans le vide de produits d'opérateurs locaux) de la théorie des champs correspondante.

À titre d'exemple, je représente dans la figure 13.11 les théories quantiques des champs (QFT) correspondant aux limites d'échelle du modèle de Landau-Ginzburg-Wilson en dimension $1 < D < 4$. On considère ici le modèle en champ nul $h = 0$. $r = t$ est la température réduite (couplage essentiel) et u le couplage en ϕ^4 . On a deux points fixes ; \mathbf{G} le point fixe gaussien et \mathbf{W} le point fixe de Wilson.

1. La théorie d'Ising « vit » sur la ligne d'instabilité du point fixe de Wilson \mathbf{W} et ne dépend que d'un seul paramètre (la masse $m^2 \simeq r \simeq t$). C'est la limite continue du modèle d'Ising.
2. La théorie ϕ^4 « vit » entre la ligne du champ libre et la ligne Ising, sur le domaine d'instabilité de \mathbf{G} , elle dépend de deux paramètres, la masse m^2 et le couplage $u \sim g$. C'est la limite continue du modèle de LGW, qu'on a étudié dans la partie II par des développements perturbatifs.
3. En particulier, la ligne des flots du GR qui part de G pour arriver en W correspond aux théories ϕ^4 de masse nulle.
4. La théorie pour $u = 0$ est le champ scalaire libre, limite continue du modèle gaussien.
5. Il faut bien sûr considérer aussi le modèle dans un champ externe h , qui est toujours un couplage essentiel. En pratique il suffit de connaître toutes les fonctions de corrélations de la théorie en champ nul $h = 0$ pour pouvoir calculer celles de la théorie en champ externe $h \neq 0$.

13.4.4 Équations du groupe renormalisation pour la théorie continue

La théorie continue ne dépend que d'un ensemble fini N de constantes de couplage renormalisées, $\mathbf{g}_R = \{g_R^a; a = 1, N\}$ qui correspondent aux couplages essentiels (champs d'échelle) sur la variété instable \mathcal{F} pour le point fixe $\mathbf{0}$. Les fonctions d'échelle étant les fonctions de corrélation pour la théorie sur \mathcal{F} , elles obéissent à la relation de base 13.4.4 pour les fonctions de corrélation

$$\langle \phi(Sx_1) \cdots \phi(Sx_K) \rangle_{\mathcal{H}} \simeq Z(S)^{-K} \langle \phi_s(x_1) \cdots \phi_s(x_K) \rangle_{\mathcal{H}_S}$$

mais maintenant restreinte à un nombre fini de couplages, les couplages renormalisés, sans qu'il soit fait d'approximation. Je note comme dans la discussion générale par $W^a(\mathbf{g}_R)$ les fonctions de Wilson pour les couplages renormalisés

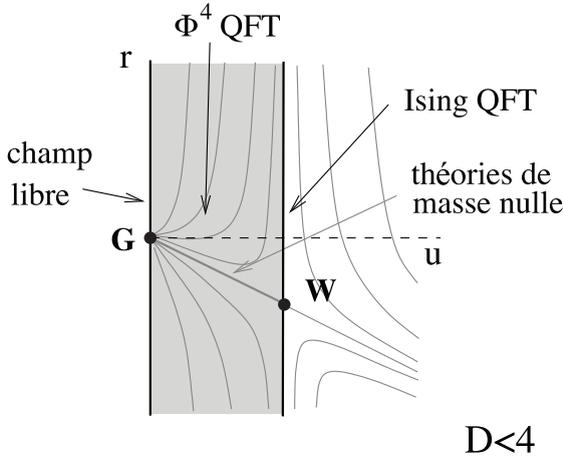


FIGURE 13.11 – Théories des champs associées au modèle de LGW en $D < 4$.

$\mathbf{g}_R = \{g_R^a; a = 1, N\}$ (ce sont les composantes d'un champ de vecteur \mathbf{W} sur \mathcal{F} qui engendre les flots du groupe de renormalisation sur \mathcal{F}) et $\Delta(\mathbf{g}_R)$ la dimension du champ ϕ sur \mathcal{F} (c'est une fonction scalaire sur \mathcal{F}). On a donc

$$W^a(\mathbf{g}_R) = S \frac{d}{dS} g_R^a(S) \quad , \quad \Delta(\mathbf{g}_R) = S \frac{d}{dS} \log Z(S)$$

En dérivant la relation générale 13.4.4 par rapport au facteur d'échelle S , on obtient l'équation différentielle qui donne le comportement d'une fonction d'échelle

$$G_K(x_1, \dots, x_K; \mathbf{g}_R) = \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle_{\mathbf{g}_R}$$

sous une dilatation.

$$\left[S \frac{\partial}{\partial S} - \sum_a W^a(\mathbf{g}_R) \frac{\partial}{\partial g_R^a} + K \Delta(\mathbf{g}_R) \right] G_K(Sx_1, \dots, Sx_K; \mathbf{g}_R) = 0 \tag{13.55}$$

Cette équation réexprime simplement le fait qu'un changement d'échelle est réabsorbé dans une redéfinition (renormalisation) des constantes de couplage et des champs. Elle se généralise simplement au cas des fonctions de corrélations avec plusieurs types d'opérateurs (par exemple $\sigma \sim \phi$ et $\mathcal{E} \sim \phi^2$ pour la théorie d'Ising), chacun avec leur dimension Δ (pour Ising $\Delta_\sigma = \Delta = D - \Delta_h$ et $\Delta_\mathcal{E} = D - \Delta_t$).

Cette équation est extrêmement importante en théorie des champs et est reliée à l'équation de Callan-Symanzik qui décrit comment une théorie des champs dépend de « l'échelle de renormalisation ».

13.4.5 Étude des phénomènes critiques par la théorie des champs

La relation entre phénomènes critiques et théorie quantique des champs mise en évidence par la théorie du groupe de renormalisation s'est avérée extrêmement fructueuse.

Pour étudier des phénomènes critiques, on peut bien sûr étudier les flots du groupe de renormalisation et les points fixes pour un modèle particulier. En pratique c'est souvent assez lourd et les approximations faites sont délicates à contrôler.

On peut aussi chercher à identifier la théorie des champs qui correspond à la classe d'universalité du système, et l'étudier directement. Les méthodes de théories des champs sont par exemple

1. La théorie perturbative des champs : ceci conduit aux développements en $D = 4 - \epsilon$ de Wilson-Fisher pour les systèmes magnétiques, ou à des calculs directs en dimension 3. Voir l'introduction à la théorie perturbative des champs.
2. L'invariance conforme. De larges classes de points critiques en 2D ; et certains systèmes quantiques 1D, correspondent à des théories des champs invariantes conformes (invariantes sous des transformations d'échelle locales), qui possèdent des propriétés mathématiques fascinantes. On peut classifier mathématiquement ces théories (du moins une très large classe, calculer le contenu en opérateurs, les dimensions d'échelle, les fonctions de corrélations, etc. Ceci s'est avéré extrêmement fructueux pour les systèmes bidimensionnels. Plus récemment les méthodes de « bootstrap conforme » ont permis de faire de grands progrès pour le calcul des exposants critiques en dimension 3.
3. Systèmes intégrables. Les déformations de ces théories critiques (théories massives décrivant le domaine critique) sont souvent des théories des champs intégrables (possédant une infinité de quantités conservées) pour lesquelles on peut également calculer exactement un certain nombre de quantités. Les modèles statistiques sur réseau correspondant sont souvent intégrables. Rappelons que c'est l'intégrabilité du modèle d'Ising bidimensionnel qui a permis *in fine* à L. Onsager de le résoudre.
4. Enfin, mentionnons les approches récentes basées sur les idées d'holographie et de correspondance ADS/CFT qui permettent d'aborder l'étude des systèmes critiques par des techniques de théorie des cordes et de gravitation.

13.5 Opérateurs dangereux et opérateurs redondants

13.5.1 Relations d'échelle pour $D > 4$ et opérateurs inessentiels dangereux

Les exposants donnés par la théorie du champ moyen (valable si $D \geq 4$) ne satisfont pas toutes les relations d'échelle, alors que la validité de l'approximation de Landau à $D > 4$ s'explique par le fait que c'est le point fixe gaussien trivial qui décrit le point critique. Ce paradoxe n'est qu'apparent. Il s'explique par le concept d'opérateur « inessentiel dangereux » (dû à M. Fisher). C'est un point technique que je détaille ici. Il se rencontre pour certains points critiques.

Nous allons considérer des couplages r , h et T et un champ ϕ , définis en réécrivant le hamiltonien de Landau (LGW) comme

$$\mathcal{H}[\phi] = \frac{1}{T} \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{r_0}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} \phi^4 - h_0 \phi \right] \quad (13.56)$$

En dimension $D > 4$, les deux couplages pertinents sont r_0 (l'écart à la température critique, analogue à la masse carrée), h_0 (le champ magnétique), tandis que T (la température effective) est non pertinent. Les opérateurs correspondant aux couplages r_0 et h_0 sont l'énergie \mathcal{E} et l'aimantation σ

$$\mathcal{E} = \phi^2 \quad \text{et} \quad \sigma = \phi \quad (13.57)$$

En effet, si je rescale comme

$$x \rightarrow Sx, \quad \phi \rightarrow S^{-\Delta_\phi} \phi \quad (13.58)$$

et en choisissant $\Delta_\phi = 1$ les couplages scalent comme

$$T \rightarrow T_S = S^{4-D} T, \quad r_0 \rightarrow r_S = S^2 r_0, \quad h \rightarrow h_S = S^3 h \quad (13.59)$$

Donc

$$\Delta_T = 4 - D, \quad \Delta_r = 2, \quad \Delta_h = 3, \quad \Delta_\phi = 1, \quad \Delta_\mathcal{E} = 2 \quad (13.60)$$

Les exposants β et δ faisant intervenir la fonction à un point $\langle \phi \rangle$ scalent bien comme attendu, de même que la longueur de corrélation, et on a donc toujours

$$\nu = \frac{1}{\Delta_r}, \quad \beta = \frac{\Delta_\phi}{\Delta_r}, \quad \delta = \frac{\Delta_h}{\Delta_\phi} \quad (13.61)$$

Par contre les fonctions connexes à deux points $\langle \mathcal{E} \mathcal{E} \rangle^c$ et $\langle \sigma \sigma \rangle^c$ sont nulles à $T = 0$ (puisqu'il n'y a pas de fluctuations). Le terme dominant donnant le comportement d'échelle pour ces fonctions est donné par le terme linéaire en T quand $T \rightarrow 0$, et pas par le terme constant en T^0 . Techniquement on dit que

la température T est un « couplage non pertinent dangereux » et l'opérateur associé un *opérateur inessentiel dangereux* (*dangerous inessential operator*), c'est-à-dire intervenant quand même dans certaines fonctions d'échelle.

Par exemple on vérifie simplement qu'avec nos notations la susceptibilité magnétique χ et la chaleur spécifique C_v sont reliées aux fonctions à deux points par

$$C_v = \frac{1}{T} \int d^D x \langle \mathcal{E}(x) \mathcal{E}(0) \rangle \quad , \quad \chi = \frac{1}{T} \int d^D x \langle \phi(x) \phi(0) \rangle \quad (13.62)$$

Les fonctions à deux points pour l'opérateur d'énergie et l'opérateur de spin (champ) sont respectivement

$$H(x-y) = \frac{1}{T} \langle \mathcal{E}(x) \mathcal{E}(0) \rangle \quad \text{et} \quad G(x-y) = \frac{1}{T} \langle \phi(x) \phi(0) \rangle \quad (13.63)$$

Ce sont bien des fonctions d'échelle non nulles dans la limite $T \rightarrow 0$, mais il faut tenir compte de la dimension de T , Δ_T , dans leur comportement d'échelle au point fixe (ici le point fixe gaussien). Par exemple

$$G(S(x-y)) = S^{-2\Delta_\phi + \Delta_T} G(x-y) \quad (13.64)$$

En tenant compte de cette dépendance supplémentaire, il faut rajouter un terme en Δ_T dans les relations donnant les exposants η , α et δ en fonction de Δ_ϕ et Δ_E . Ceci donne

$$D - 2 + \eta = 2\Delta_\phi - \Delta_T \quad , \quad \alpha = \frac{D - 2\Delta_E + \Delta_T}{\Delta_r} \quad , \quad \gamma = \frac{D - 2\Delta_\phi + \Delta_T}{\Delta_r} \quad (13.65)$$

Le concept d'opérateurs inessentiels dangereux est important dans des cas physiquement intéressants.

13.5.2 Équivalence des procédures de renormalisation et opérateurs redondants

Discutons finalement les *opérateurs redondants*. C'est un concept un peu subtil, dû à Wegner, mais qu'il est bon d'avoir en tête pour avoir une bonne compréhension du formalisme du groupe de renormalisation. Pour une même classe de modèles, des procédures de renormalisation différentes (par exemple des procédures de décimations ou des procédures de moyenne sur des blocs de taille ou de forme différente) conduisent à des flots différents dans l'espace des couplages, qui en général mènent à des points fixes différents. Or ces différents points fixes doivent être équivalents, car décrivant la physique à grande distance du même modèle microscopique.

La solution de ce problème est que des procédures de renormalisation différentes (disons \mathcal{R}_S et \mathcal{R}'_S) sont alors équivalentes modulo des redéfinitions des champs $\phi_S(x) \rightarrow \phi'_S(x)$. Ces redéfinitions sont en général locales, non linéaires mais non ultra-locales. Ceci veut dire que la valeur $\phi'(x)$ de ϕ' au point x , va

dépendre de la valeur de ϕ au point x , $\phi(x)$, mais aussi de ses dérivées locales $\nabla\phi(x)$, $\nabla^2\phi(x)$, etc.

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi'[\phi, \nabla\phi, \dots] \quad (13.66)$$

Si les deux procédures de renormalisation diffèrent de façon « infinitésimale »,

$$\phi'(x) = \phi(x) + \epsilon[\phi](x) \quad (13.67)$$

les hamiltoniens renormalisés \mathcal{H}_S et \mathcal{H}'_S (sous les deux procédures) diffèrent par des opérateurs locaux $\mathcal{O}_\epsilon(x)$ proportionnels aux équations du mouvement du modèle (voir la section 12.8).

$$\mathcal{H}[\phi] \rightarrow \mathcal{H}'[\phi] = \mathcal{H}[\phi] + \int dx \mathcal{O}_\epsilon(x) \quad (13.68)$$

Les valeurs moyennes de ces opérateurs donnent zéro pour toutes les observables physiques. Ces opérateurs sont appelés opérateurs redondants. Les couplages associés (couplages redondants ou *redundant scaling fields*) sont les générateurs des redéfinitions des champs dans l'espace des couplages. Ces générateurs redondants engendrent l'ensemble des H équivalents physiquement, car donnant les mêmes observables.

Mathématiquement, il faut donc considérer les transformations du groupe de renormalisation comme agissant dans l'espace des hamiltoniens locaux, quotienté par les redéfinitions locales des champs. Ceci n'est à ce stade pas du tout défini rigoureusement, et doit être regardé *cum grano salis*.

13.5.3 Exercices

Exercice 13.7. Relation explicite entre couplages nus et renormalisés

En se basant sur le calcul de renormalisation du modèle de LGW dans le cadre de l'approximation du potentiel local, écrire les relations explicites entre les couplages nus r_0 et u_0 du modèle discrétisé (avec cut-off λ) et les couplages renormalisés de la théorie des champs correspondante (la théorie ϕ^4 , avec échelle de renormalisation μ) en dimension $D < 4$.

Faire l'identification entre les fonctions de Wilson W_u et W_r et les fonctions de groupe de renormalisation β_u et β_t de la théorie ϕ^4 en $D < 4$, telles que calculées en 8.9.2. Comparer les équations de flots dans ces deux formulations et discuter pourquoi elles décrivent la même physique.

Exercice 13.8. Couplages inessentiels dangereux

Refaire le raisonnement de 13.5.1 en considérant l'action de LGW de la forme

$$\mathcal{H} = \int d^D x [(\nabla\phi)^2 + t\phi^2 + u\phi^4]$$

Montrer que c'est alors ϕ^4 qui est l'opérateur inessentiel dangereux.

Exercice 13.9. Opérateurs redondants

Montrer que pour le modèle de Landau (LGW) de hamiltonien

$$\mathcal{H} = \int \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{r}{2}\phi^2 + \frac{u}{4!}\phi^4 ,$$

les opérateurs

$$\mathcal{O}_1 = -\Delta\phi + r\phi + \frac{u}{6}\phi^3$$

et

$$\mathcal{O}_2 = (\nabla\phi)^2 + r\phi^2 + \frac{u}{6}\phi^4$$

sont des opérateurs redondants. Quelles sont les redéfinitions des champs associées ?

Quatrième partie

Applications et exemples

Chapitre 14

Applications de la théorie de Landau-Ginsburg-Wilson

14.1 Régularisation dimensionnelle, renormalisation et développement en ϵ

Nous avons vu dans 13.4 que la limite d'échelle est décrite par une théorie des champs. Il est donc possible de construire une théorie continue normalisée, et de calculer directement les exposants critiques dans ce cadre. Pour la théorie ϕ^4 , il est particulièrement intéressant d'utiliser la régularisation dimensionnelle et la procédure de soustraction minimale pour construire la théorie renormalisée. Nous en détaillons juste le principe, et renvoyons à 8.9 pour les détails des calculs à une boucle. La régularisation dimensionnelle consiste à effectuer les calculs d'intégrales de Feynman en dimension D générale, par exemple en utilisant la représentation des paramètres α de Schwinger (temps propre) pour les propagateurs. D apparaît alors comme un paramètre et on peut définir les intégrales comme des fonctions méromorphes de D dans le plan complexe. Les pôles correspondent aux divergences UV. La présence d'un régulateur UV Λ n'est plus nécessaire. Il faut juste supposer que les intégrales homogènes sur des puissances de moments donnent zéro.

$$\int d^D k |k|^{-2n} = 0 \quad \forall n \quad (14.1)$$

Ceci correspond mathématiquement à choisir une prescription de *partie finie* pour régulariser les intégrales divergentes, ou si l'on préfère utiliser un régulateur UV, λ , à remplacer toutes les puissances divergentes de Λ par zéro.

$$\Lambda^{D-2n} \rightarrow 0 \quad (14.2)$$

La procédure de renormalisation par soustraction minimale (ou renormalisation dimensionnelle) consiste à renormaliser la théorie à $D = 4$ en introduisant des contretermes qui ne contiennent que de *purs pôles* en $\epsilon = 4 - D$, mais pas de partie analytique finie en ϵ . En partant des contretermes à une boucle

pour ϕ^4 obtenues en 8.138 et 8.139, ceci correspond à choisir pour la relation entre constante de couplage nue g_B et constante de couplage renormalisée sans dimension u_R

$$g_B = \mu^\epsilon \left(u_R + u_R^2 \frac{3}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (14.3)$$

et pour celle entre masse nue (au carré) et écart renormalisé au point critique t_R (sans dimension)

$$m_B^2 = \mu^2 t_R \left(1 + u_R \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\epsilon} \right) \quad (14.4)$$

En prenant les définitions standard (Gell-Mann–Low, Callan-Symanzik) des fonctions bêta pour ces paramètres 8.140

$$\beta_u(u_R) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} u_R \Big|_{g_B}, \quad \beta_t(u_R t_R) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} t_R \Big|_{g_B, m_B^2} \quad (14.5)$$

on obtient

$$\beta_u(u_R) = -\epsilon u_R + u_R^2 \frac{3}{32\pi^2} \quad (14.6)$$

et

$$\beta_t(u_R, t_R) = t_R \left(-2 + u_R \frac{1}{32\pi^2} \right) \quad (14.7)$$

On constate que dans ce schéma, seul le premier terme de la fonction β_u (correspondant à la dimension classique) dépend de $\epsilon = 4 - D$. Les corrections quantiques ne dépendent pas de ϵ , seulement du couplage renormalisé. De façon similaire, la fonction β_t , donc la dimension anormale de t ne dépend pas de ϵ .

Cette propriété du schéma de soustraction minimale est valable à tous les ordres de perturbation. Dans ce schéma, les contretermes pour le couplage sont de la forme

$$g_B = \mu^\epsilon \left(u_R + \sum_{k=1}^{\infty} u_R^{k+1} C_k(\epsilon) \right) \quad (14.8)$$

Le contreterme à l'ordre de k boucles étant de la forme

$$C_k(\epsilon) = \sum_{j=1}^k c_{k,j} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^j \quad (14.9)$$

Le fait que la fonction bêta soit finie quand $\epsilon = 0$ implique que à l'ordre k , les coefficients $c_{k,j}$ pour $j > 1$ s'expriment en fonction des contretermes précédents C_h , $h < k$. À l'ordre k , seul le coefficient du pôle simple $c_{k,1}$ est nouveau et doit être calculé explicitement, et on trouve que

$$\beta_u(u) = -\epsilon u + \sum_{k=1}^{\infty} u^{k+1} k c_{k,1} \quad (14.10)$$

La fonction bêta en dimension $D = 4 - \epsilon$ s'exprime donc simplement à partir de la fonction bêta en dimension $D = 4$

$$\beta_u^\epsilon(u) = -\epsilon u + \beta_u^0(u) \quad (14.11)$$

De la même façon, la dimension anormale de $t = m^2$ est une fonction de u indépendante de ϵ , de même que la dimension du champ ϕ (sauf pour le terme classique qui sera $(2 - D)/2 = -1 + \epsilon/2$).

On peut alors exprimer dans ce schéma de renormalisation le point fixe de Wilson-Fisher comme une série formelle en ϵ

$$\beta_u^\epsilon(u^*) = 0 \quad \implies \quad u^* = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k u_k \quad (14.12)$$

De façon similaire, la dimension anormale de t au point fixe (qui donne l'exposant ν), et celle du champ (qui donne l'exposant η) s'exprimeront comme des séries en ϵ , et ce à partir du calcul en $\epsilon = 0$. C'est le principe du développement en ϵ de Wilson-Fisher. Pour ϕ^4 à l'ordre de deux boucles, il donne explicitement

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{12} + \frac{7\epsilon^2}{162} \quad ; \quad \eta = \frac{\epsilon^2}{54} \quad (14.13)$$

L'exposant η n'a pas de terme d'ordre ϵ car il n'y a pas de renormalisation du champ à une boucle.

14.1.1 Notes

L'idée du développement en ϵ est due à K. Wilson et D. Fisher et est introduite en [WF72]. Son utilisation systématique est détaillée par exemple dans le volume 6 du Domb-Green [DGL76] consacré au groupe de renormalisation, voir en particulier la contribution de E. Brézin, J.-C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, et celle de D. J. Wallace. Pour les détails de calculs aux ordres élevés, on pourra par exemple consulter le livre de H. Kleinert [KSF01].

14.2 Modèles à N composantes

14.2.1 Modèle $O(N)$

Le modèle de Landau-Ginzburg-Wilson vectoriel avec symétrie $O(N)$ est défini par un champ vectoriel réel à N composantes $\vec{\phi}(x) = \{\phi_a\}_{a=1,N}$ et par l'action euclidienne

$$S = \int d^D x \frac{1}{2} (\nabla_x \vec{\phi})^2 + \frac{m^2}{2} \vec{\phi}^2 + \frac{g}{8} (\vec{\phi}^2)^2 \quad , \quad \vec{\phi} = (\phi_a)_{a=1,N} \quad (14.14)$$

Ce modèle est invariant sous les rotations dans l'espace interne des composantes de $\vec{\phi}$. Le propagateur porte des indices de couleur a, b puisque pour

la théorie libre ($g = 0$)

$$\langle \phi_a(x)\phi_b(y) \rangle_0 = \delta_{ab} G_0(x-y) = \text{a} \text{-----} \text{a} \quad (14.15)$$

Le vertex d'interaction porte maintenant deux indices de couleur indépendants a et b puisque le terme d'interaction s'écrit

$$\left(\vec{\phi}^2 \right)^2 = \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \delta_{ac} \delta_{bd} = \begin{array}{c} \text{a} \quad \text{b} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{a} \quad \text{b} \end{array} \quad (14.16)$$

Il se représente donc comme deux lignes en contact, chacune portant un indice de couleur sans les échanger au contact.

Le facteur de symétrie du vertex est donc $1/8 = (1/2)^3$ car on peut permuter maintenant seulement les deux lignes dans chaque paire portant le même indice, et les deux paires portant des indices *a priori* différents. Ceci justifie le choix de normalisation $g/8$ pour la constante de couplage. Attention ! Lorsque $N = 1$ on retrouve le modèle du champ scalaire, ϕ^4 mais la normalisation est différente ($g/8$ au lieu de $g/24$).

14.2.2 Développement perturbatif

La combinatoire du développement perturbatif est la suivante. Il faut tenir compte des indices de couleur $a \in \{1, N\}$ quand on applique le théorème de Wick. Les diagrammes de Feynman sont construits avec des lignes continues transportant de la couleur. Une ligne continue joignant deux vertex externes donne alors un facteur δ_{ab} pour les indices de couleurs a et b portés par les champs $\vec{\phi}(z_i)$ (pour les fonctions de corrélations) (ou par les champs de fond $\vec{\varphi}(z_i)$ pour les fonctions irréductibles). Il peut y avoir des boucles internes fermées portant des indices de couleurs indépendants. Chaque boucle va donner un facteur N via la somme sur tous les indices possibles transportés par chaque boucle $\sum_{a,b} \delta_{ab} = N$. Il faut tenir compte de cette description quand on calcule les facteurs de symétrie des diagrammes.

La fonction irréductible à 2 points est

$$\Gamma_{ab}^{(2)} = \delta_{ab} \Gamma^{(2)} \quad (14.17)$$

avec

$$\Gamma^{(2)} = \text{a} \text{---} \text{---} \text{a} + g \left(1 \text{ a} \text{---} \text{---} \text{a} + \frac{N}{2} \text{ a} \text{---} \text{---} \text{a} \right) + \dots \quad (14.18)$$

La fonction irréductible à 4 points est

$$\Gamma_{abcd}^{(4)} = (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \Gamma^{(4)} \quad (14.19)$$

avec

$$\Gamma^{(4)} = g \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ a \end{array} \begin{array}{c} b \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ b \end{array} - g^2 \left(\frac{N}{2} \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ a \end{array} \begin{array}{c} c \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ c \end{array} \begin{array}{c} b \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ b \end{array} + 1 \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ a \end{array} \begin{array}{c} b \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ b \end{array} \right. \\
 \left. + 1 \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ a \end{array} \begin{array}{c} b \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ b \end{array} + 1 \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ a \end{array} \begin{array}{c} b \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ b \end{array} + 1 \begin{array}{c} a \\ \diagdown \\ \times \\ \diagup \\ a \end{array} \begin{array}{c} b \\ \diagup \\ \times \\ \diagdown \\ b \end{array} \right) \quad (14.20)$$

Les amplitudes (intégrales de Feynman) associées à chaque diagramme sont les mêmes que pour ϕ^4 scalaire ($N = 1$). Seuls les facteurs de symétries qui prennent en compte les sommations sur les indices de couleur changent.

14.2.3 Fonctions β à une boucle

Le calcul de la renormalisation du modèle et des fonctions du GR se fait exactement comme pour le cas $N = 1$. On trouve pour les paramètres renormalisés sans dimension $u_R = g_R \mu^\epsilon$ et $t_R = m_R^2 \mu^{-2}$ (ici en dimension $D = 4 - \epsilon$ et en appliquant le schéma de 8.9)

$$g_B = \mu^\epsilon \left(u_R + u_R^2 \frac{N+8}{2} \mathbf{C}_D \frac{1 - (\mu/\Lambda)^\epsilon}{\epsilon} + \mathcal{O}(u_R^3) \right) \quad (14.21)$$

$$m_B^2 = \mu^2 \left(t_R + u_R \frac{N+2}{2} \mathbf{C}_D \left(-\frac{(\mu/\Lambda)^{\epsilon-2}}{2-\epsilon} + t_R \frac{1 - (\mu/\Lambda)^\epsilon}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(u_R^2) \right) \quad (14.22)$$

Avec le coefficient (associé à la divergence à une boucle)

$$\mathbf{C}_D = 2\mathbb{A} = \frac{2(4\pi)^{-D/2}}{\Gamma(D/2)} \quad (14.23)$$

D'où les fonctions bêta à une boucle

$$\begin{aligned}
 \beta_u(u_R) &= -\epsilon u_R + \frac{N+8}{2} \mathbf{C}_D u_R^2 + \dots \\
 \beta_t(u_R, t_R) &= t_R \left(-2 + \frac{N+2}{2} \mathbf{C}_D u_R + \dots \right)
 \end{aligned} \quad (14.24)$$

La structure des flots est la même que pour $N = 1$ (au moins tant que $N > -8 \dots$). Notez que pour $N = 1$ les fonctions ne sont pas exactement celles du modèle scalaire, simplement parce que le couplage (coefficient du terme en ϕ^4 dans l'action) n'est pas normalisé de la même manière. Le point fixe UV est en

$$u_R^* = \epsilon \frac{2}{N+8} \frac{1}{\mathbf{C}_D} \quad (14.25)$$

et l'exposant de la longueur de corrélation

$$\nu = \frac{1}{\Delta_t(u_R^*)} = \frac{1}{2} + \epsilon \frac{1}{4} \frac{N+2}{N+8} + \dots \tag{14.26}$$

14.2.4 Limite $N \rightarrow \infty$

Dans la limite $N \rightarrow \infty$ on doit retrouver un modèle avec les mêmes symétries que le modèle sphérique. Voir les exercices de TD sur ce modèle. Pour obtenir un développement perturbatif qui a un sens dans la limite $n \rightarrow \infty$ il faut rescaler la constante de couplage en g'

$$g N = g' \tag{14.27}$$

et prendre la limite $N \rightarrow \infty$, g' fixé. Dans cette limite, seuls les diagrammes avec le maximum de boucles fermées (donnant chacune un facteur N) survivent. Pour la fonction à deux points, ce sont les diagrammes dits « en cactus » représentés sur la figure 14.1.

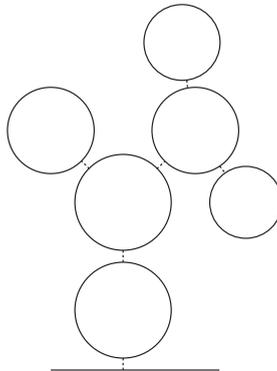


FIGURE 14.1 – Les diagrammes « en cactus » dominent quand $N \rightarrow \infty$.

Les fonctions bêta sont à une boucle

$$\begin{aligned} \beta_u(u'_R) &= -\epsilon u'_R + \frac{1}{2} \mathbf{C}_D u'^2_R + \dots \\ \beta_t(u'_R, t_R) &= t_R \left(-2 + \frac{1}{2} \mathbf{C}_D u'_R + \dots \right) \end{aligned} \tag{14.28}$$

d'où

$$\nu = \frac{1}{2 - \epsilon} = \frac{1}{D - 2} \tag{14.29}$$

En fait les résultats à une boucle sont alors exacts.

Une façon plus simple de construire la limite $N = \infty$ est d'utiliser l'intégrale fonctionnelle et des champs auxiliaires. On retrouve les résultats perturbatifs et on peut étudier le modèle via un autre développement perturbatif, le développement en puissance de $1/N$.

14.2.5 $N = 0$

Un autre cas intéressant est $N = 0$, qui décrit la limite d'échelle des longs polymères en bon solvant (longue chaîne flexible avec une interaction de contact répulsive). L'exposant ν est alors l'exposant pour le scaling de la taille d'un polymère R en fonction du nombre de monomères L

$$R \propto L^\nu \quad (14.30)$$

L'exposant ν est l'inverse de la dimension fractale d_F de la chaîne $\nu = 1/d_F$. À l'ordre ϵ c'est

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16} + \dots \quad (14.31)$$

Ceci traduit l'effet de gonflement des chaînes dû aux effets stériques. Nous reviendrons plus en détail sur les polymères section 14.4.

14.2.6 Notes

Une présentation plus détaillée de la limite $N \rightarrow \infty$ et du développement en $1/N$ peut être trouvée dans la contribution de S.-K. Ma du Vol. 6 du Domb & Green [DGL76]. Voir aussi la collection de contributions dans le livre de Brézin et Wadia [BW93] (les premières traitent des modèles vectoriels, toutes les suivantes des modèles matriciels, de la limite planaire et des développements topologiques).

14.3 Modèles à symétrie cubique

Les modèles avec des groupes de symétrie discrets peuvent également être traités.

Je donne l'exemple du modèle où le champ $\vec{\phi}$ est un vecteur à N composantes, mais où le groupe de symétrie est celui du réseau hypercubique \mathbb{Z}^N . Il y a alors deux constantes de couplages indépendantes qui correspondent aux deux termes possibles d'ordre 4

$$S[\phi] = \int d^D x \frac{1}{2} \sum_a (\nabla_x \phi_a)^2 + \frac{t}{2} \sum_{a=1}^N \phi_a^2 + \frac{g_1}{8} \sum_{a \neq b} \phi_a^2 \phi_b^2 + \frac{g_2}{24} \sum_a \phi_a^4 \quad (14.32)$$

Si $g_2 = 3g_1$, on retrouve le modèle $O(N)$. Si $g_1 = 0$, on a simplement N copies indépendantes du modèle scalaire $N = 1$. Le potentiel est borné inférieurement pourvu que

$$g_2 > 0 \quad \text{et} \quad g_1 > -g_2 \frac{1}{3(N-1)} \quad (14.33)$$

(utiliser l'inégalité de Schwarz).

Champ moyen : Si $t > 0$, le minimum du potentiel est en $\vec{\phi} = 0$ et la symétrie n'est pas brisée. Si $t < 0$, la symétrie cubique est spontanément brisée.

Le schéma de brisure dépend du rapport g_1/g_2 . Pour $N = 2$, on trouve que si $g_1/g_2 > 1/3$, il y a quatre minima du potentiel, situés sur les axes ($\phi_1 = 0$ ou $\phi_2 = 0$), alors que si $-1/3 < g_1/g_2 < 1/3$, les quatre minima sont sur les diagonales $\phi_1 = \pm\phi_2$. Pour N quelconque ce schéma est le même : si $g_1 > g_2/3$ les minima sont sur les axes principaux ($\phi_j = 0, j \neq i$), si $g_2/3 > g_1 > g_2/3(1 - N)$ sur les axes diagonaux ($\phi_1 = \pm\phi_2 = \dots = \pm\phi_N$).

Groupe de renormalisation : Il y a deux fonctions irréductibles à 4 points. La première $\Gamma_{aabb}^{(4)}$ avec $a \neq b$ va donner la renormalisation de g_1

$$\begin{aligned}
 & g_1 \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} + g_1^2 \frac{N-2}{2} \begin{array}{c} c \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad c \end{array} + g_1 g_2 \frac{1}{2} \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} \\
 & + g_1 g_2 \frac{1}{2} \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} + g_1^2 \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} + g_1^2 \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad b \end{array} \quad (14.34)
 \end{aligned}$$

la deuxième $\Gamma_{aaaa}^{(4)}$ donne la renormalisation de g_2

$$\begin{aligned}
 & g_2 \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} + g_1^2 \frac{N-1}{2} \begin{array}{c} c \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad c \end{array} + g_2^2 \frac{1}{2} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} + g_1^2 \frac{N-1}{2} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} \\
 & + g_2^2 \frac{1}{2} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} + g_1^2 \frac{N-1}{2} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} + g_2^2 \frac{1}{2} \begin{array}{c} a \quad a \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \quad \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ a \quad a \end{array} \quad (14.35)
 \end{aligned}$$

La fonction irréductible à deux points $\Gamma_{aa}^{(2)}$ est

$$a \text{---} a + g_1 \frac{N-1}{2} \begin{array}{c} b \\ \circ \\ a \text{---} a \end{array} + g_2 \frac{1}{2} \begin{array}{c} a \\ \circ \\ a \text{---} a \end{array} \quad (14.36)$$

Les amplitudes des diagrammes sont toujours celles de la théorie scalaire.

On répète le calcul de la renormalisation sans difficulté. Les couplages g_1 et g_2 sont renormalisés. Les couplages sans dimension associés sont $u_1 = g_1 \mu^\epsilon$ et $u_2 = g_2 \mu^\epsilon$ et on trouve pour les deux fonctions bêta de ces couplages u_1 et u_2 en dimension $D < 4$

$$\beta_{u_1} = -\epsilon u_1 + \left(u_1^2 \frac{N+2}{2} + u_1 u_2 \right) \mathbf{C}_D + \dots \quad (14.37)$$

$$\beta_{u_2} = -\epsilon u_2 + \left(u_1^2 \frac{3(N-1)}{2} + u_2^2 \frac{3}{2} \right) \mathbf{C}_D + \dots \quad (14.38)$$

La fonction bêta pour le couplage $t = m^2 \mu^{-2}$ (le carré de la masse) est

$$\beta_t = t \left(-2 + \left(u_1 \frac{N-1}{2} + u_2 \frac{1}{2} \right) \mathbf{C}_D + \dots \right) \quad (14.39)$$

Pour $\epsilon > 0$ ($D < 4$) il y a maintenant quatre points fixes.

$$\text{le point fixe gaussien} \quad u_1 = u_2 = 0 \quad (14.40)$$

$$\text{le point fixe du modèle scalaire} \quad u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{2}{3} \epsilon \quad (14.41)$$

$$\text{le point fixe du modèle } O(N) \quad u_1 = \frac{2}{8+N} \epsilon, \quad u_2 = \frac{6}{8+N} \epsilon \quad (14.42)$$

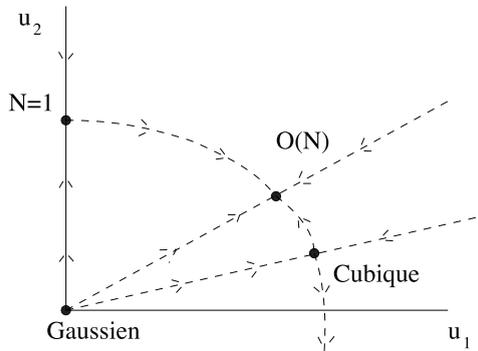
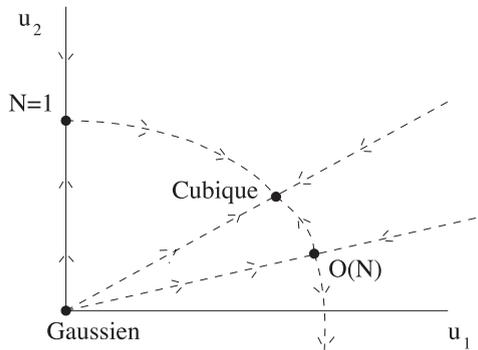
$$\text{et un nouveau point fixe cubique} \quad u_1 = \frac{2}{3N} \epsilon, \quad u_2 = \frac{2(N-1)}{3N} \epsilon \quad (14.43)$$

Ce qui est intéressant est la position relative de ces points fixes et leur stabilité. Il y a deux cas, suivant que N est plus petit ou plus grand qu'une certaine valeur critique N_c , qui vaut au premier ordre en ϵ

$$N_c = 4 \quad (14.44)$$

$N < N_c$: Les points fixes sont disposés comme sur la Fig. 14.2 et c'est le point fixe $O(N)$ qui est attractif. Son domaine d'attraction est une région du plan. Même si on part d'un modèle microscopique qui n'a que la symétrie cubique, en général à la transition la symétrie est la symétrie $O(N)$. Ce phénomène est connu sous la dénomination de « *symmetry enhancement* ». Le point fixe cubique est un point fixe multicritique. Son domaine d'attraction est une ligne. Cette ligne sépare le domaine d'attraction du point fixe $O(N)$ d'un autre domaine, où les couplages sont envoyés à l'infini. Sans discuter plus en détail ce cas, signalons qu'en fait cela implique que la transition de phase devient du premier ordre (transition du premier ordre induite par les fluctuations).

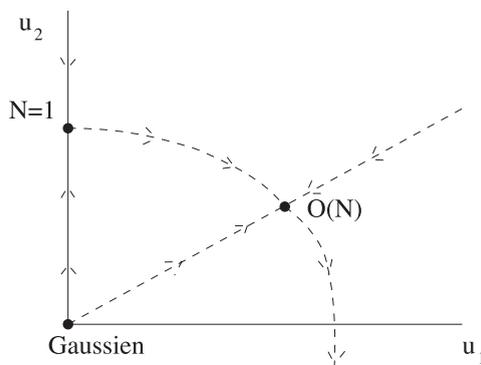
$N > N_c$: Les points fixes sont disposés comme sur la Fig. 14.3 et c'est le point fixe cubique qui est attractif. Donc *a priori* à la transition la symétrie est une symétrie cubique, sauf si on part au niveau microscopique d'un système avec la symétrie $O(N)$.

FIGURE 14.2 – Flots des couplages pour le modèle cubique pour $N < N_c$.FIGURE 14.3 – Flots des couplages pour le modèle cubique pour $N > N_c$.

$N = N_c$: Ce cas est un peu particulier et est représenté sur la Fig. 14.4. C'est la valeur de N où les points fixes sont confondus et échangent leurs rôles. Le double point fixe a une direction irrélègente (attractive) et une direction marginale (attractive d'un côté, répulsive de l'autre).

14.3.1 Notes

Pour ceci, nous renvoyons encore au Vol. 6 de Domb & Green [DGL76], en particulier à la contribution de V. Privman, P. C. Hohenberg et A. Aharony.

FIGURE 14.4 – Flots des couplages pour le modèle cubique pour $N = N_c$.

14.4 Polymères

14.4.1 Introduction aux polymères

La théorie des polymères et des marches aléatoires est un domaine important de la physique statistique, avec de nombreuses applications fondamentales et appliquées. Il est hors de question d'introduire le sujet dans sa généralité. Il existe d'excellents ouvrages comme pour ce qui va nous concerner [dCJ10, dCJ87]. Nous allons voir ici comment la théorie du groupe de renormalisation et la théorie des champs ont permis de comprendre le comportement des polymères en bon solvant.

Les *polymères* sont de longues, voire très longues, macromolécules, composées d'une suite d'unités moléculaires élémentaires, les *monomères*, unis par des liaisons moléculaires fortes (liaisons covalentes). Lorsqu'un polymère est composé d'une seule sorte de monomère, on parle d'homopolymères, si ce sont plusieurs sortes on parle d'hétéropolymères. Si la très grande majorité des systèmes étudiés et d'intérêt pratique comportant des polymères sont denses (matières plastiques, matériaux composites, etc.), certains polymères peuvent être dans des phases diluées ou semi-diluées dans un liquide qui écranterait suffisamment les interactions inter-polymères pour qu'on puisse considérer un polymère comme une longue chaîne flexible interagissant peu avec les autres polymères. On parle alors de polymère en solution. Si de plus les interactions à longue portée entre monomères sont écranterées par le solvant (forces électrostatiques si le polymère est chargé, mais surtout forces de van der Waals), on parle d'un *polymère dans un bon solvant*.

C'est cette situation qui va nous intéresser ici, car dans ce cas des modèles théoriques simples peuvent être utilisés, et des propriétés universelles émergent.

Un tel polymère flexible, composé de N monomères, peut être modélisé par une chaîne de N segments de longueur a fixée (la taille du monomère), joints entre eux par leurs extrémités, et libres de tourner les uns par rapport aux

autres. On néglige donc les effets de la rigidité, qui va s'avérer non pertinente pour les très longues chaînes $N \gg 1$. Une configuration du polymère est donc donnée par les vecteurs positions \vec{r}_i , $i = 0, \dots, N$ des extrémités des monomères, avec la contrainte de longueur $|\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}| = a$, comme représenté sur la Fig. 14.5.

On va supposer que toutes les configurations de la chaîne sont équiprobables, aux contraintes stériques près, qui interdisent à deux monomères d'occuper la même place dans l'espace. On va voir que ces contraintes stériques, ou d'autoévitement, sont en fait importantes. Les propriétés d'une configuration typique (un échantillon) seront donc obtenues en faisant la moyenne sur un ensemble statistique de toutes les configurations autorisées.

Ce modèle très simple doit permettre de calculer des quantités caractéristiques du polymère en bon solvant. Les observables les plus simples sont la distance bout à bout (entre les deux extrémités) $d(N)$

$$d(N) = |\vec{r}_N - \vec{r}_0| \quad (14.45)$$

et le *rayon de giration* $R_G(N)$ qui est la variance de la position des monomères

$$R_G(N) = \sqrt{\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \vec{r}_i^2 - \left(\frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N \vec{r}_i \right)^2} \quad (14.46)$$

On peut d'ailleurs avoir accès expérimentalement à ces quantités. Elles vont donner qualitativement l'extension spatiale d'un polymère de longueur N .

Nous allons voir que ces quantités (leurs valeurs moyennes) se comportent selon une loi d'échelle pour de très longs polymères, et plus précisément comme

$$\langle d(N)^2 \rangle \simeq \langle R_G(N)^2 \rangle \simeq N^{2/d_F} \quad \text{quand } N \rightarrow \infty \quad (14.47)$$

d_F est la *dimension fractale* de la chaîne (si la chaîne était un segment rigide de longueur N , on aurait $d(N) = Na$ et $R_G(N) = Na/2\sqrt{3}$, donc $D_F = 1$).

14.4.2 Polymères, marches aléatoires et champ libre

Ce modèle très simple de chaîne polymère est en fait un modèle de marche aléatoire dans l'espace, de longueur de pas fixée a . Il est donc possible de

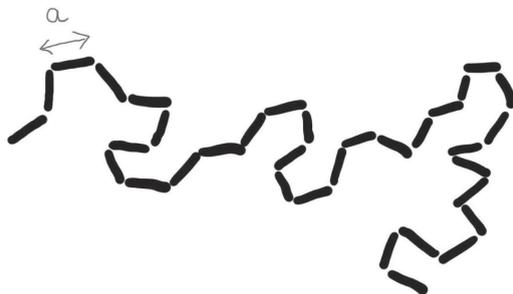


FIGURE 14.5 – Un modèle de chaîne de segments de longueur fixée pour le polymère.

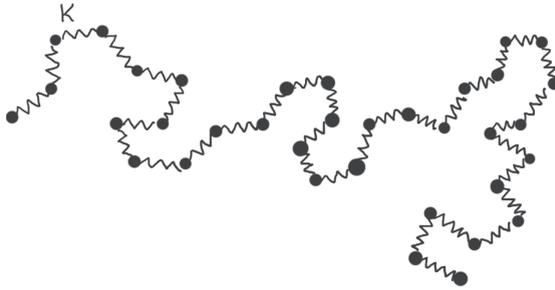


FIGURE 14.6 – Un modèle de chaîne élastique pour le polymère.

le mettre en relation avec les résultats classiques concernant le mouvement brownien, mais également, via l'intégrale de chemin, avec la mécanique quantique et la théorie des champs. Une façon simple de comprendre ceci est de passer d'un modèle de monomères de longueur fixée à un modèle élastique et statistique, où les monomères sont maintenant des ressorts de raideur κ , et où donc à chaque configuration de monomère i d'extrémités \vec{r}_{i-1} et \vec{r}_i est associée une énergie interne $E_i = \kappa(\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})^2/2$. À température finie T , les fluctuations thermiques impliquent que la longueur moyenne du monomère a , est

$$a^2 = \langle (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})^2 \rangle = \frac{k_B T}{\kappa} \quad (14.48)$$

Cette longueur moyenne va jouer le rôle de la longueur élémentaire a dans le modèle de maillon rigide. La chaîne élastique est donc une chaîne harmonique de N ressorts, comme représenté sur la Fig. 14.6. À une configuration de chaîne de N éléments, caractérisée par les vecteurs positions des $N + 1$ points

$$\mathbf{r} = \{\vec{r}_i, i = 0; N\}$$

est associé un poids statistique de Boltzmann (par simplicité on a absorbé le facteur de Boltzmann dans κ , donc normalisé $k_B T = 1$)

$$W[\mathbf{r}] = \exp \left(- \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\kappa}{2} (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})^2 \right) \quad (14.49)$$

La fonction de partition d'une chaîne de longueur N dont les extrémités sont fixées est donc

$$Z[\vec{r}_0, \vec{r}_N; N] = \int_{\vec{r}_0, \vec{r}_N \text{ fixés}} \prod_{i=1}^{N-1} d^d \vec{r}_i \exp \left(- \sum_{i=1}^N \frac{\kappa}{2} (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1})^2 \right) \quad (14.50)$$

Cette intégrale gaussienne est similaire au propagateur à temps euclidien discrétisé pour la particule libre. Elle vaut explicitement

$$Z[\vec{r}_0, \vec{r}_N; N] = \left(\frac{2\pi N}{\kappa} \right)^{-d/2} \exp \left(- \frac{\kappa}{2N} (\vec{r}_N - \vec{r}_0)^2 \right) \quad (14.51)$$

d est la dimension de l'espace. Dans la limite de très longue chaîne $N \gg 1$ on peut considérer que la chaîne se comporte comme une trajectoire brownienne (une marche aléatoire continue), et en renormalisant les longueurs, et en notant $L = N/\sqrt{\kappa}$ la longueur de la chaîne, identifier la fonction de partition à un élément de matrice du noyau de la chaleur

$$Z[\vec{r}_0, \vec{r}_1; L] \propto \langle \vec{r}_1 | \exp(L \Delta) | \vec{r}_0 \rangle \quad (14.52)$$

où Δ est le laplacien (l'opérateur de Laplace-Beltrami) dans l'espace de d dimensions.

Bien sûr, les chaînes polymères sont en général de longueur fixée. Puisqu'on s'intéresse aux propriétés des très longues chaînes, il est intéressant de considérer l'ensemble grand-canonique où la longueur des chaînes peut varier, et d'associer une fugacité z à chaque monomère. La fonction de partition grand-canonique est alors

$$Z[\vec{r}_0, \vec{r}_1; z] = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z[\vec{r}_0, \vec{r}_1; N] \quad (14.53)$$

Si on considère la fugacité comme l'exponentielle d'un potentiel chimique μ pour un élément de longueur de la chaîne, dans la limite continue de grande chaîne ceci peut se réécrire, L étant toujours la longueur de la chaîne

$$Z[\vec{r}_0, \vec{r}_1; \mu] = \int_0^{\infty} dL \exp(-\mu L) Z[\vec{r}_0, \vec{r}_1; L] \quad (14.54)$$

La fonction de partition 14.53 à potentiel chimique de longueur fixée μ est donc la transformée de Laplace de la fonction de partition 14.52 à longueur fixée L . En termes du laplacien c'est, en intégrant explicitement sur L

$$Z[\vec{r}_0, \vec{r}_1; \mu] = \langle \vec{r}_1 | \frac{1}{-\Delta + \mu} | \vec{r}_0 \rangle \quad (14.55)$$

C'est donc le propagateur euclidien pour le champ libre scalaire de masse $m = \sqrt{\mu}$! Ceci n'est en fait pas surprenant, et a déjà été discuté dans le cadre de l'intégrale de chemin et de l'intégrale fonctionnelle dans les sections 3.2.1, 4.8.3 et 6.8.

14.4.3 Effets stériques et classe d'universalité

De la forme explicite de la fonction de partition pour une chaîne polymère idéale, on déduit facilement ses propriétés en particulier sa dimension fractale $d_F = 2$. Cependant ce modèle très simple néglige complètement les effets d'encombrement stérique, c'est-à-dire que même en l'absence de forces à longue portée entre monomères, deux monomères situés loin le long de la chaîne ne peuvent pas occuper la même position, alors que cela est possible pour une chaîne brownienne.

Un argument dimensionnel très simple permet d'estimer si les effets stériques sont importants ou pas, en fonction de la dimensionnalité de l'espace. Si on considère deux chaînes browniennes indépendantes, comme elles sont chacune de dimension fractale $d_F = 2$, elles ont une probabilité nulle de se croiser si la dimension de l'espace d est

$$d > d_F + d_F = 4 \quad (14.56)$$

et elles ont une probabilité d'ordre un de se croiser si $d < 4$. On peut songer à l'analogie avec le fait que deux droites prises au hasard ne se croisent pas génériquement dans l'espace ($d = 3 > 1 + 1$), alors qu'elles se croisent dans le plan ($d = 2 = 1 + 1$). Ainsi $d = 4$ joue le rôle de dimension critique supérieure pour les effets stériques.

Les effets stériques entraînent un effet de *gonflement stérique* de la chaîne, qui va occuper plus de volume dans l'espace qu'une chaîne purement brownienne qui peut se recouper. Les expériences, et les calculs théoriques, mettent en évidence ce comportement, et montrent que la chaîne reste un objet fractal, donc avec des propriétés d'échelle pour les très longues chaînes, comme ceux donnés pour le rayon de giration et la distance aux extrémités par 14.47, mais maintenant avec une dimension fractale plus petite

$$d_F < 2 \quad \text{si} \quad d < 4 \quad (14.57)$$

Il s'avère que ce comportement est universel, et que d_F ne dépend que de la dimension de l'espace d . De ce point de vue les polymères sont des systèmes critiques, définissant une nouvelle classe d'universalité.

Enfin, signalons à ce stade que le comportement sera le même pour des chaînes polymères ouvertes (avec deux extrémités) que pour des chaînes polymères fermées, donc des boucles. Si on fait abstraction en dimension 3 des effets topologiques liés à la présence d'entrelacements (des nœuds), la dimension fractale d'une chaîne fermée sera la même que celle d'une chaîne ouverte.

Grâce en particulier à P.-G. de Gennes, cette classe d'universalité peut être décrite comme celle d'un système magnétique à n composantes, comme étudié dans la section 14.2, mais dans la limite un peu particulière où $n = 0$. Deux idées sont importantes : (i) si une chaîne brownienne peut être décrite en termes d'un champ libre ϕ , les interactions stériques peuvent être décrites par des interactions en ϕ^4 , (ii) une chaîne brownienne isolée est en fait décrite par un champ vectoriel $\vec{\phi}$ avec n composantes et symétrie $O(n)$ dans la limite où le nombre des composantes du champ est $n = 0$.

Les effets stériques peuvent être modélisés de plusieurs manières. Tout d'abord on peut imposer les contraintes d'autoévitement sur la chaîne de deux façons : (i) *autoévitement dur*, la chaîne ne peut pas se toucher (voir Fig. 14.7) ; (ii) *autoévitement doux*, la chaîne peut se toucher ou se croiser, mais cela coûte une certaine énergie E_c positive par point de contact, ce qui défavorise ces configurations (voir Fig. 14.8). Le premier cas correspond bien sûr à $E_c = +\infty$.

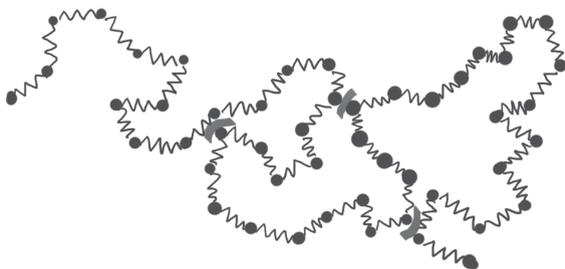
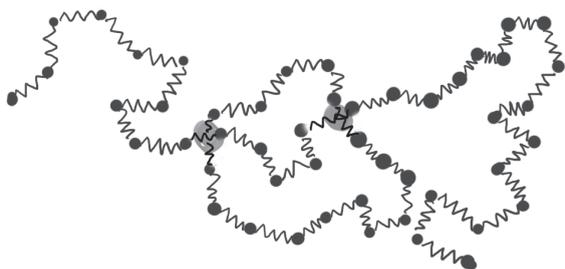


FIGURE 14.7 – Autoévitement fort : la chaîne ne peut pas se croiser.

FIGURE 14.8 – Autoévitement faible : une énergie positive E_c est associée aux points de croisement.

14.4.4 Modèle de gaz de boucles et limite $n = 0$

Donnons un exemple simple, sur réseau bidimensionnel, dans le cas d'un autoévitement fort, où l'équivalent avec un modèle de spin à $n = 0$ composantes est explicite. On considère le réseau en nid d'abeille, ou réseau hexagonal. Ce réseau est particulier car les vertex sont trivalents, cela va s'avérer important. À chaque vertex i est associé un spin classique à n composantes $\vec{S}(i) = (S_1(i), \dots, S_n(i))$. La longueur du spin est fixée par commodité à \sqrt{n} , donc $\vec{S}(i)^2 = n$. En généralisant le cas étudié dans le développement à haute température du modèle d'Ising, on choisit comme poids de Boltzmann pour une configuration $\mathbf{S} = \{\vec{S}(i)\}$ le produit sur les liens $e = (i, j)$ du réseau hexagonal

$$W[\mathbf{S}] = \int d\mathbf{S} W[\mathbf{S}] = \prod_{e=(i,j)} (1 + U \vec{S}(i) \vec{S}(j)) \quad (14.58)$$

i et j étant les extrémités du lien e . U est un paramètre positif. Le poids $W[\mathbf{S}]$ est maximal si les spins sont tous alignés $\vec{S}(i) = \vec{S}$ (ordre ferromagnétique). Si $U = 0$ les spins sont totalement désordonnés, ce qui correspond à la phase de haute température (phase paramagnétique). La fonction de partition Z du modèle est une fonction de U et de n . Elle peut se développer en puissances de U . Le terme d'ordre U^N s'exprime comme une somme sur tous les ensembles

\mathcal{E} de N liens distincts ($e_1 = (i_1, j_1), \dots, e_N = (i_N, j_N)$) du réseau hexagonal de l'intégrale sur les spins (donc sur les sphères de rayon \sqrt{n}) en chaque vertex de produits scalaires de spins

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} U^N \sum_{|\mathcal{E}|=N} \int d\mathbf{S} \prod_{a=1}^N S_{\alpha_a}(i_a) S_{\alpha_a}(j_a) \quad (14.59)$$

$|\mathcal{E}|$ est le nombre de liens dans \mathcal{E} . L'intégrale sur chaque spin $\vec{S}(i)$ se réduit aux quatre cas suivants (puisque le réseau hexagonal est trivalent) : (i) aucun lien ne contient le site i , (ii) un seul lien contient le site i , (iii) deux liens contiennent le site i , et enfin (iv) trois liens contiennent le site i . Mais la moyenne (l'intégrale) sur le spin donne respectivement (en normalisant l'intégrale pour que le volume de la sphère soit égal à l'unité)

$$\begin{aligned} (i) \quad \int d\vec{S} \, 1 = 1 \quad , \quad (ii) \quad \int d\vec{S} \, S_\alpha = 0 \\ (iii) \quad \int d\vec{S} \, S_\alpha S_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad (iv) \quad \int d\vec{S} \, S_\alpha S_\beta S_\gamma = 0 \end{aligned} \quad (14.60)$$

Les seuls ensembles de liens \mathcal{E} qui subsistent dans 14.59 sont donc ceux tels que les liens forment des boucles fermées. La géométrie du réseau hexagonal fait que ces boucles ne peuvent se toucher. De plus, en sommant sur les indices α des spins dans une boucle, on obtient un produit de symboles de Kronecker $\delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_2 \alpha_3} \dots \delta_{\alpha_L \alpha_1} = n$ (avec la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés). On a donc un facteur n par boucle fermée et la fonction de partition s'exprime simplement comme une somme sur les ensembles géométriques \mathcal{B} de boucles qui ne se touchent pas sur le réseau hexagonal

$$Z(U, n) = \sum_{\mathcal{B}=\{\text{boucles disjointes}\}} U^{L(\mathcal{B})} n^{|\mathcal{B}|} \quad (14.61)$$

où $L(\mathcal{B})$ est la longueur totale des boucles (nombre de liens) et $|\mathcal{B}|$ le nombre de boucles. Une telle configuration est représentée Fig. 14.9. De tels modèles géométriques sont appelés des modèles de *gaz de boucles auto-évitant*. U est la fugacité des liens (monomères) et n la fugacité des boucles. On peut de la même façon représenter des configurations incluant des polymères ouverts dont les extrémités sont fixées en calculant des fonctions de corrélations du modèle. Par exemple la fonction à deux points (non normalisée)

$$Z(i, j) = \sum_{\mathbf{S}} W[\mathbf{S}] \vec{S}(i) \vec{S}(j) \quad (14.62)$$

s'écrit comme somme sur les configurations auto-évitant \mathcal{P} de boucles fermées \mathcal{B} et d'un chemin ouvert \mathcal{P} dont les extrémités sont les vertex i et j (Fig. 14.10)

$$Z(U, n|i, j) = \sum_{\mathcal{P}=\{\text{boucles} + \text{polymère } i \rightarrow j\}} U^{L(\mathcal{P})} n^{|\mathcal{P}|} \quad (14.63)$$

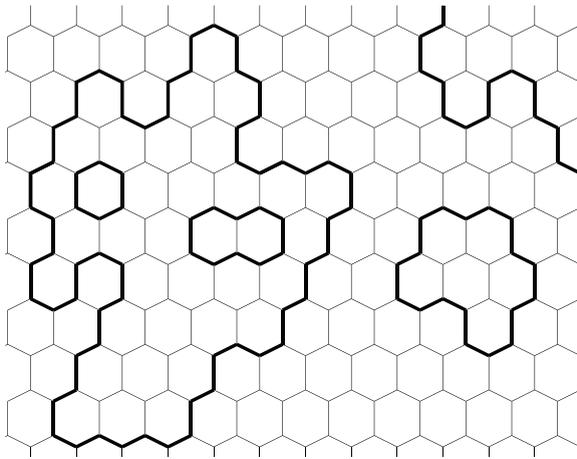


FIGURE 14.9 – Une configuration de boucles sur le réseau hexagonal.

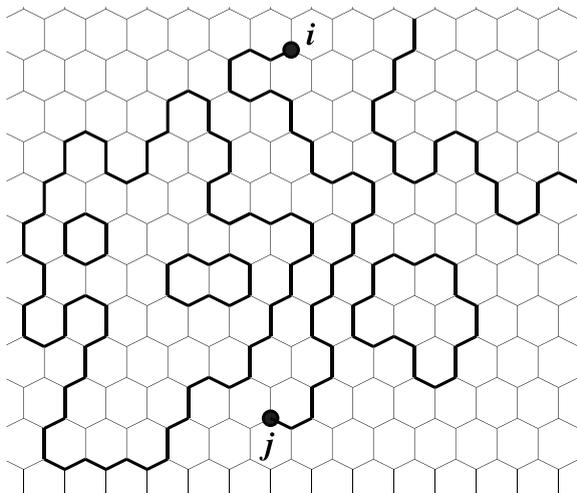


FIGURE 14.10 – Une configuration de polymère ouvert et de boucles sur le réseau hexagonal.

où maintenant $|\mathcal{P}|$ égale le nombre de boucles+1, et $L(\mathbf{P})$ est le nombre total de liens de la configuration. Dans sa formulation comme gaz de boucles et de polymères, le nombre de composantes n du spin n'est plus qu'un paramètre. Pour obtenir la fonction de partition pour *une boucle* auto-évitante, il suffit de prendre la limite $n \rightarrow 0$

$$Z_{1 \text{ boucle}}(U) = \sum_{\text{une boucle } \mathcal{C}} U^{L(\mathcal{C})} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - Z(U, n)}{n} \quad (14.64)$$

De même, pour obtenir la fonction de partition pour un polymère ouvert

$$Z_{1\text{ polymère}}(U|i, j) = \sum_{\mathcal{P} \text{ polymère } i \rightarrow j} U^{L(\mathcal{P})} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z(U, n|i, j)}{n} \quad (14.65)$$

En effet, n étant la fugacité des boucles, ces limites $n \rightarrow 0$ permettent de ne garder que les configurations avec une seule boucle, ou un seul polymère. Puisque si $n = 0$, la fonction de partition $Z(U, n = 0) = 1$, la fonction à deux points est simplement la fonction de corrélation du modèle de spin

$$Z_{1\text{ polymère}}(U|i, j) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \langle \vec{S}(i) \vec{S}(j) \rangle \quad (14.66)$$

Enfin, pour remonter à la fonction à deux points pour un polymère de longueur fixée L , $\bar{Z}_{1\text{ polymère}}(L|i, j)$ il faut faire une transformation de Laplace inverse, puisque

$$Z_{1\text{ polymère}}(U|i, j) = \sum_{L=0}^{\infty} U^L \bar{Z}_{1\text{ polymère}}(L|i, j) \quad (14.67)$$

exactement comme pour le chemin brownien 14.53.

14.4.5 Limite d'échelle et théorie $\phi_{n=0}^4$

L'exemple simple en dimension deux s'étend à d'autres réseaux en dimensions plus grandes. De façon générale, on peut formuler un modèle de polymère auto-évitant comme la limite $n \rightarrow 0$ d'un modèle de spin à n composantes. En particulier, il est possible de formuler directement dans le continu un modèle de marches aléatoires faiblement auto-évitantes (comme représenté Fig. 14.8 et discuté section 14.4.3) en termes d'une théorie des champs ϕ^4 à n composantes, dans la limite $n \rightarrow 0$.

Si on revient à l'exemple du modèle de boucles sur réseau triangulaire, U (la fugacité des monomères) joue le rôle de l'inverse de la température pour le modèle de spin. Pour U très petit, donc la phase de haute température du modèle de spin, seules de très petites boucles sont présentes. Comme il s'agit d'un modèle de spin, similaire au modèle d'Ising, qui correspond à $n = 1$, on peut montrer qu'il existe un point critique à un $U_c > 0$, où le système magnétique passe d'une phase désordonnée de haute température à une phase ordonnée de basse température, et où la longueur de corrélation du modèle devient infinie, et diverge comme

$$\xi \propto |U_c - U|^{-\nu} \quad (14.68)$$

où ν est l'exposant critique de la longueur de corrélation. Mais d'autre part, dans le modèle de boucle ou de polymère, la longueur moyenne du polymère est simplement

$$\langle L \rangle = U \frac{\partial}{\partial U} \log(Z(U)) \quad (14.69)$$

Autrement dit, la longueur du polymère L est le paramètre conjugué de la fugacité U . On en déduit facilement que le point critique U_c est le point où les boucles deviennent grandes, et que la longueur moyenne des boucles dans la fonction de partition diverge comme

$$\langle L \rangle \propto (U_c - U)^{-1} \quad (14.70)$$

Autrement dit, le point critique U_c décrit le comportement des grandes chaînes ouvertes (polymères) ou fermées (boucles). Une étude un peu soignée de la fonction à deux points 14.65 au point critique permet de montrer que la longueur de corrélation ξ pour cette fonction à deux points correspond à l'extension moyenne dans l'espace de la chaîne. C'est naturel car ce sont chacune la seule grandeur ayant la dimension d'une longueur que l'on peut respectivement considérer pour les deux modèles (modèle de spin et chaîne polymère) dans la limite d'échelle. Mais ceci implique que le point critique décrit le comportement d'échelle du polymère, donc les comportements du rayon de giration et de la distance bout à bout d'un polymère de grande taille.

$$\text{longueur de corrélation } \xi \propto \text{rayon de giration } R_G \quad (14.71)$$

Ces arguments d'échelle et d'analyse dimensionnelle, qui peuvent être rendus rigoureux, permettent de relier la divergence de la longueur de corrélation au point critique avec les effets de gonflement stérique et les comportements d'échelles de la chaîne

$$\xi \propto |U_c - U|^{-\nu} \quad , \quad |U_c - U|^{-1} \propto L \quad , \quad R_G \propto L^{1/d_F} \quad (14.72)$$

et donc de relier simplement la dimension fractale d_F du polymère à l'exposant critique ν du modèle $n = 0$ par

$$d_F = \frac{1}{\nu} \quad , \quad \text{donc } R_G \propto L^\nu \quad (14.73)$$

Cette identité fondamentale étant obtenue, il suffit d'appliquer les calculs du comportement critique du modèle vectoriel n composante et symétrie $O(n)$ considéré dans la section 14.2 pour le cas $n = 0$ pour obtenir des résultats sur le comportement d'échelle des polymères en bon solvant. En particulier on obtient bien que $d = 4$ est la dimension critique supérieure, comme argumenté plus haut. Les effets stériques ne sont par pertinents en dimension $d > 4$, et la dimension fractale d'un polymère est toujours $d_F = 2$. Par contre, en dimension $d < 4$ en particulier $d = 3$ et $d = 2$, le gonflement stérique est important. La dimension fractale de la chaîne en dimension $d = 3$ peut par exemple être calculée par un développement en $\epsilon = 4 - d$, avec à l'ordre d'une boucle

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{16} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (14.74)$$

Le fait que les polymères en bon solvant soient décrits dans la limite d'échelle par une théorie des champs permet aussi en dimension $d = 2$ d'appliquer les

techniques des théories conformes (théories des champs invariants conformes) pour obtenir la valeur exacte de l'exposant ν .

$$\nu = 3/4 \quad \text{pour} \quad d = 2 \quad (14.75)$$

Nous terminons ici cette très brève introduction aux polymères.

14.4.6 Notes

L'idée de relier le polymère en bon solvant à un système magnétique à $N = 0$ composante est due à P.G. de Gennes. Les références de base sont le livre de P.G. de Gennes [dG79] et celui de J. des Cloizeaux et G. Janninck [dCJ10]. Les polymères et gaz de boucles en dimension deux ($D = 2$) sont très particuliers et intéressants. Leur physique est intimement liée aux systèmes intégrables, aux théories conformes, et aux systèmes stochastiques conformes. Nous renvoyons aux livres de J. Cardy [Car96], de P. di Francesco *et al.* [DFMS12] et de G. Mussardo [Mus10], pour une introduction à ce domaine très riche.

14.5 Points multicritiques

14.5.1 Introduction

La théorie du champ moyen prévoit l'existence de *points multicritiques*, c'est-à-dire de transitions de phases continues particulières requérant d'ajuster plus d'un paramètre (la température) pour les observer. Nous avons déjà vu que le point critique du modèle d'Ising (point de Curie) nécessite d'ajuster deux paramètres, le champ externe appliqué $B = 0$ (par symétrie) et la température ($T = T_c$). De même, le point critique dans un fluide nécessite d'ajuster la température et la pression. Ce sont donc en fait des *points bicritiques*. Nous allons étudier un exemple simple de point tricritique, et voir que ce point est aussi décrit par une théorie des champs.

14.5.2 Modèle d'Ising avec lacunes, point tricritique

Le modèle d'Ising avec vacances est une extension simple du modèle d'Ising, dans lequel on autorise certains sites du réseau à ne pas porter de spin d'Ising, on parle alors de « lacune » ou de « vacance ». Ces lacunes sont mobiles, et peuvent se situer n'importe où sur le réseau. Elles introduisent un *désordre « recuit »* (*annealed disorder*) et sont à traiter comme des variables aléatoires, comme les spins d'Ising eux-mêmes. Ce cas est très différent de la situation où les vacances seraient distribuées de façon aléatoire, mais fixe, on parlerait alors de *désordre « gelé »* (*quenched disorder*), cas intéressant et physiquement plus difficile à traiter.

On peut considérer l'ensemble grand canonique où le nombre des lacunes est variable, et associer à chaque lacune une fugacité z , ou un potentiel chimique

μ (l'énergie nécessaire pour créer une lacune dans le système). On peut alors traiter le modèle d'Ising comme un système de spin à trois états

$$S(i) = \begin{cases} +1 & \text{si il y a un spin au site } i \text{ et il vaut } \uparrow, \\ -1 & \text{si il y a un spin au site } i \text{ et il vaut } \downarrow, \\ 0 & \text{si il y a une lacune au site } i, \text{ et donc pas de spin.} \end{cases} \quad (14.76)$$

L'énergie d'une configuration microscopique sera (on considère un réseau carré \mathbb{Z}^d pour simplifier) une somme sur les liens et une somme sur les sites

$$\mathcal{H}[\mathbf{S}] = \sum_{e=(ij)} -J S(i)S(j) + \sum_i \mu (1 - S(i)^2) \quad (14.77)$$

Le poids de Boltzmann d'une configuration sera toujours

$$W[\mathbf{S}] = \exp(\mathcal{H}[\mathbf{S}]) \quad (14.78)$$

La fugacité des lacunes $z = \exp(\mu)$ contrôle la densité des lacunes. Si z est petit, il y a peu de lacunes et le système se comporte comme le modèle d'Ising, avec une transition continue entre une phase désordonnée à petit J (haute température) et une phase ordonnée à grand J (basse température), ou $J = 1/T$. Si z est plus grand, la densité de lacunes devient importante, et les interactions effectives entre spins plus faibles, la température critique sera plus basse. Il s'avère que si z est suffisamment grand, la transition devient du premier ordre, la magnétisation subit un saut de $\langle S \rangle = 0$ si $T > T_c$ à $\langle S \rangle \neq 0$ si $T < T_c$, et en même temps la densité de lacunes ρ subit également un saut ! Le point le long de la ligne critique dans le plan des deux paramètres (T, z) où la transition passe du deuxième ordre au premier ordre est le point tricritique. Ce diagramme de phase est représenté schématiquement Fig. 14.11. Le point tricritique est localisé à une température et une fugacité bien précises T_{tc} , z_{tc} .

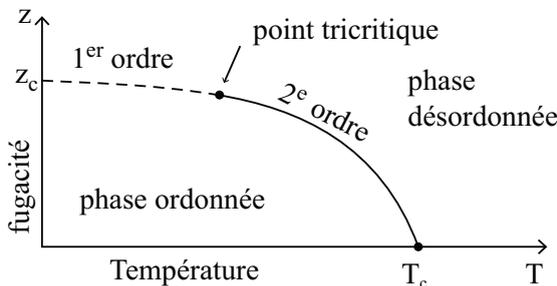


FIGURE 14.11 – Diagramme de phase du modèle d'Ising avec lacunes, T est la température, z la fugacité des lacunes.

14.5.3 Champ moyen et théorie ϕ_3^6

Il est possible d'étudier le modèle d'Ising avec lacunes dans l'approximation du champ moyen, en utilisant la méthode variationnelle de la section 11.2.2, ou par la théorie de Landau. Le résultat est qu'au voisinage du point tricritique, le hamiltonien effectif (ou de Landau) pour l'aimantation ϕ doit être pris de la forme

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi) \quad \text{avec} \quad V(\phi) = t\phi^2 + g\phi^4 + \lambda\phi^6 \quad (14.79)$$

Il faut maintenant tenir compte du terme en ϕ^6 . Le couplage λ de ce terme doit être positif (pour que le potentiel soit borné inférieurement). t correspond toujours à une température réduite $t \sim (T - T_{tc})/T_{tc}$. Le couplage g du terme en ϕ^4 tient compte d'une fugacité réduite des lacunes $g \sim (z_{tc} - z)/z_{tc}$. $g > 0$ correspond à une fugacité petite, donc une faible densité de lacune, $g < 0$ à une fugacité élevée, donc une densité de lacune plus grande.

λ étant fixé et positif, la façon dont le potentiel $V(\phi)$ évolue avec la température réduite t dépend du signe de g , qui peut être négatif ou positif. Si g est positif, le potentiel évolue comme pour le modèle ϕ^4 (Landau-Ginzburg), comme représenté sur la Fig. 14.12. Pour t négatif, le potentiel a deux minima symétriques, la symétrie \mathbb{Z}_2 est spontanément brisée, et il existe une magnétisation spontanée. Pour g positif, le minimum du potentiel est en $\phi = 0$. Lorsque $t < 0$ tend vers zéro, la longueur de corrélation diverge et l'aimantation s'annule comme

$$\xi \propto |t|^{-1/2} \quad \text{et} \quad \langle \phi \rangle \propto |t|^{1/2} \quad \text{si} \quad g > 0$$

La demi-ligne $t = 0, g > 0$ est donc une ligne critique correspondant à une transition de type Ising, mais elle se termine en $g = 0$.

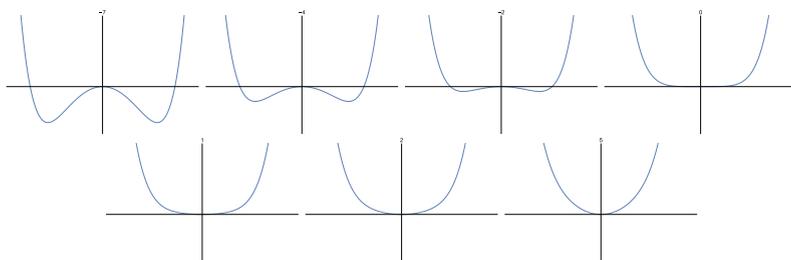


FIGURE 14.12 – $V(\phi)$ de t négatif à t positif pour $g > 0$, la transition est du second ordre.

Si g est négatif, le potentiel évolue avec t de la façon suivante, représentée sur la Fig. 14.13. Si t est négatif, le potentiel possède deux minima symétriques. Si t est positif mais suffisamment petit, le potentiel possède trois minima, deux minima absolus non nuls, et un minimum relatif en $\phi = 0$. La phase

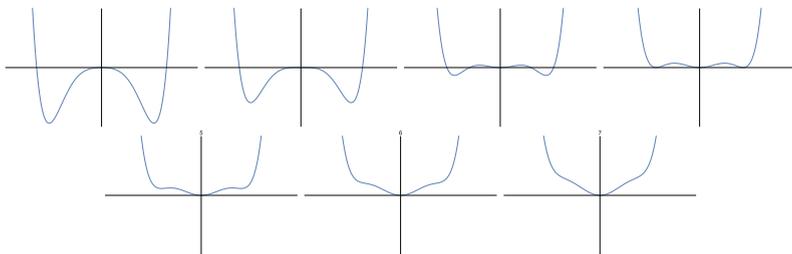


FIGURE 14.13 – $V(\phi)$ de t négatif à t positif pour $g < 0$, la transition est du premier ordre.

désordonnée est métastable, et le système est encore ordonné. Si t augmente, il existe une valeur critique $t_c(g) > 0$ telle que le potentiel a ses trois minima de même énergie, l'un en $\phi = 0$, les deux autres en $\phi = \pm\phi_0(g)$. Trois phases sont en coexistence. Pour $t > T_c(g)$ mais pas trop grand, les deux phases ordonnées sont maintenant métastables et c'est la phase désordonnée qui est stable. La transition phase ordonnée - phase désordonnée en t_c est donc une transition discontinue, donc du premier ordre. Si $g = 0$, la transition est du second ordre au point tricritique $t = 0$, mais elle est d'une nature différente de celle pour $g > 0$. Par exemple, l'aimantation est non nulle pour t négatif, et la longueur de corrélation est finie. Si la longueur de corrélation diverge quand $t = 0$ comme pour $g > 0$, l'aimantation s'annule différemment

$$\xi \propto |t|^{-1/2} \quad \text{mais} \quad \langle \phi \rangle \propto |t|^{1/4} \quad \text{si} \quad t < 0, \quad g = 0 \quad (14.80)$$

Le point tricritique peut également être atteint suivant la ligne $t = 0$; $g \rightarrow 0$. Pour $g < 0$ la symétrie est brisée. La longueur de corrélation et l'aimantation se comportent comme

$$\xi \propto |g|^{-1} \quad \text{et} \quad \langle \phi \rangle \propto |g|^{1/2} \quad \text{si} \quad g < 0, \quad t = 0 \quad (14.81)$$

La théorie du champ moyen prédit donc déjà que la transition de phase au point tricritique ne doit pas appartenir à la même classe d'universalité que celle du point critique standard ($g > 0$). Le diagramme de phase de la théorie est schématiquement représenté Fig. 14.14.

14.5.4 Renormalisation et fonction bêta

Comme pour le point critique du modèle d'Ising, la question est de savoir si les fluctuations invalident ou pas la théorie du champ moyen pour le point tricritique. La théorie au point tricritique $t = g = 0$ est la théorie ϕ^6

$$S[\phi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{\lambda}{6!}\phi^6 \right) \quad (14.82)$$

La constante de couplage est normalisée pour simplifier son développement perturbatif. En suivant les arguments généraux développés pour la théorie ϕ^4 ,

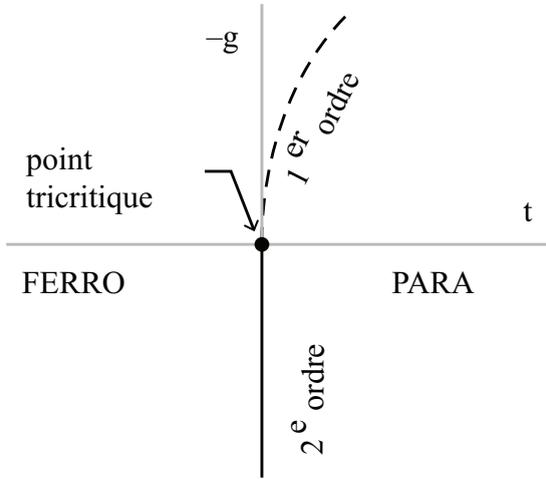


FIGURE 14.14 – Le diagramme de phase de la théorie ϕ^6 dans le plan $(t, -g)$. t est le couplage ϕ^2 , g le couplage ϕ^4 .

la dimension canonique du champ étant toujours $\Delta_\phi = (2 - d)/2$, la dimension canonique de λ est

$$\Delta_\lambda = 2(d - 3) \tag{14.83}$$

Le couplage λ est donc essentiel en dimension $d < 3$, marginal en dimension $d = 3$ et inessentiel en dimension $d > 3$. Pour aller plus avant, il faut faire un calcul de groupe de renormalisation, donc étudier la théorie ϕ^6 au voisinage de sa dimension critique supérieure qui est $d_{uc} = 3$. Nous résumons ici quelques aspects de cette analyse. Le développement perturbatif de la théorie ϕ^6 fait intervenir le propagateur habituel, mais un vertex d'interaction de degré six, donc ayant six pattes externes.

$$\text{---} = 1/p^2 \quad , \quad \text{---} \times \text{---} = h \tag{14.84}$$

Au premier ordre en théorie des perturbations, la théorie ϕ^6 en dimension $d = 3$ possède des divergences ultraviolettes. Outre des divergences proportionnelles à des insertions en ϕ^2 et ϕ^4 , qui sont attendues puisque t et g sont des couplages essentiels (comme t est un couplage essentiel pour ϕ^4), la divergence intéressante est une divergence logarithmique proportionnelle à une insertion d'un opérateur ϕ^6 , donc qui signale une renormalisation du couplage λ . Cette divergence est donnée par le diagramme irréductible à deux vertex internes, six pattes externes et trois lignes internes, donc deux boucles, qui apparaît dans la fonction irréductible à six points

$$\Gamma(6) = h \text{---} \times \text{---} - h^2 \frac{1}{6} \left(\text{---} \text{---} \text{---} + 9 \text{ diagrammes équivalents} \right) \tag{14.85}$$

Ce diagramme donne une divergence ultraviolette. La façon la plus simple de la déterminer et de représenter l'amplitude du diagramme dans l'espace des positions, car si on note x_1 et x_2 les positions des deux vertex dans \mathbb{R}^3 , comme le propagateur correspond au potentiel de Coulomb, ce diagramme est

$$\text{---} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x_1 - x_2|} \implies \text{---} \text{---} = \frac{1}{(4\pi)^3} \int d^3x_2 \frac{1}{|x_1 - x_2|^3} \quad (14.86)$$

L'intégrale diverge à courte distance quand $x_2 \rightarrow x_1$. En introduisant un régulateur à courte distance

$$|x_2 \rightarrow x_1| > a = \pi/\Lambda \quad (14.87)$$

La divergence est en

$$\text{---} \text{---} \simeq \frac{1}{(4\pi)^2} \log \Lambda \quad (14.88)$$

et elle est absorbée dans une renormalisation du couplage, le couplage renormalisé étant

$$h = h_R + \frac{10}{6!} \frac{1}{(4\pi)^2} h_R^2 \log(\Lambda/\mu) \quad (14.89)$$

Le calcul standard de la fonction β donne au premier ordre en théorie des perturbations

$$\beta(h_R) = \frac{5}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} h_R^2 \quad (14.90)$$

La fonction bêta est positive, le couplage h du terme ϕ^6 est donc marginalement essentiel. Les mêmes arguments que pour la théorie ϕ^4 mènent aux conclusions suivantes.

- (1) En dimension $d > 3$, le champ moyen (la théorie de Landau) est correct.
- (2) En dimension $d = 3$, les résultats de la théorie du champ moyen sont modifiés par des corrections logarithmiques.
- (3) En dimension $d < 3$, la fonction β est (dans le schéma minimal)

$$\beta(h_R) = -2\epsilon h_R + \frac{5}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} h_R^2, \quad \epsilon = 3 - d \quad (14.91)$$

Elle possède un zéro non trivial en

$$h^* = \epsilon \frac{6}{5} (4\pi)^2 \quad (14.92)$$

qui correspond à un point fixe infrarouge (sur la ligne $h = g = 0$), l'analogie tricritique du point fixe de Wilson-Fischer pour ϕ^4 . Ce point fixe, et les exposants critiques correspondants pour le point tricritique peuvent être en principe calculés dans un développement en $\epsilon = 3 - d$. Il faut garder en mémoire que si pour Ising il y a deux opérateurs essentiels, l'un pair, ϕ^2 conjugué à la température réduite t (donc l'opérateur énergie \mathcal{E}), et l'autre impair ϕ , conjugué au champ externe appliqué h (donc l'opérateur de spin), pour le point

tricritique on s'attend à deux opérateurs essentiels pairs, ϕ^2 et ϕ^4 et deux opérateurs impairs, ϕ et ϕ^3 , qui auront chacun une dimension d'échelle non triviale si $d < 3$. Les flots du groupe de renormalisation dans le plan des couplages (renormalisés) t et g pour $d < 3$ sont représentés sur la Fig. 14.15.

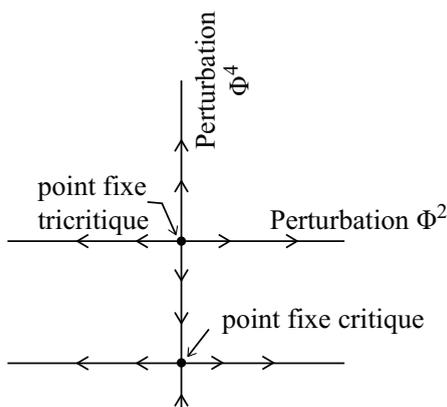


FIGURE 14.15 – Les flots du groupe de renormalisation dans le plan $(t, -g)$ correspondant au digramme de phase de la Fig. 14.14. Dans la direction g (couplage ϕ^4) le flot va du point fixe tricritique (point fixe UV) vers le point fixe d'Ising (point fixe IR). Ces deux points fixes sont instables (UV) dans la direction t .

14.5.5 Points multicritiques

Modèles $O(n)$

Des points multicritiques peuvent exister dans de nombreux cas. Tout d'abord, mentionnons que les modèles avec symétrie $O(n)$, ou des symétries plus générales, peuvent présenter des points tricritiques. Pour un modèle vectoriel, la théorie des champs correspondante sera bien sûr une théorie avec un terme d'interaction en ϕ^6 , donc

$$S[\vec{\phi}] = \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi})^2 + \frac{\lambda}{12} (\vec{\phi}^2)^3 \right) \quad (14.93)$$

Point Θ des polymères

Un exemple intéressant est le point thêta (point Θ) des polymères. Nous avons vu que pour des polymères en bon solvant, l'effet entropique de la répulsion stérique peut se modéliser simplement dans une théorie effective par un terme d'interaction à deux corps, donc deux polymères en $g\phi^4$ pour un modèle $O(n)$ à $n = 0$ composantes. La physique au niveau moléculaire et macromoléculaire des polymères est bien sûr plus compliquée, les détails des interactions polymère-solvant et monomère-monomère doivent être pris en compte.

Si l'interaction à courte distance entre deux monomères devient attractive, cet effet va contrebalancer la répulsion stérique. Si cette interaction attractive est forte, le polymère va s'effondrer et former une pelote dense (on parle de la phase dense) de dimension fractale $d_F = d$. Les phases denses des polymères sont un sujet en soi, avec de nombreuses applications. Si cette interaction attractive n'est pas trop forte, il peut exister un point d'équilibre où son effet et celui de la répulsion stérique se compensent exactement. Il faut tenir compte dans la théorie effective des termes d'ordres supérieurs, donc du terme en ϕ^6 , qui va correspondre à un terme de répulsion de contact à trois polymères si son coefficient est positif.

Le point Θ sera donc décrit dans la théorie ϕ^6 pour le modèle vectoriel à $n = 0$ composantes. En ce point, on s'attend à ce que le polymère soit gonflé par rapport à la chaîne brownienne, mais moins gonflé que le polymère avec répulsion stérique en bon solvant.

Points multicritiques généraux

Bien entendu, la possibilité d'observer des comportements multicritiques ne s'arrête pas au cas d'un point tricritique. Dans un modèle de spins sur réseau, où le spin peut prendre k valeurs différentes s_1, \dots, s_k , ou un modèle de spin continu décrit par un modèle de Landau-Ginzburg avec un potentiel $V(\phi)$ ayant k minima distincts, un point multicritique général peut être atteint en ajustant k paramètres du modèle. Sans aller plus avant dans les détails, un point multicritique d'ordre k sera obtenu en partant d'une théorie avec un potentiel polynomial d'ordre $2k$, donc de la forme

$$V(\phi) = \sum_{i=1}^k t_i \phi^{2i} \quad (14.94)$$

avec $t_k > 0$ et en ajustant les t_i pour $i < k$. Dans la théorie de Landau, il suffit de prendre les $t_i = 0$. Dans la théorie de Wilson, les t_i sont renormalisés. La dimension canonique du couplage t_i est

$$\Delta_{t_i} = -d + i(d - 2) \quad (14.95)$$

Si $d > 2$, le couplage le plus pertinent est toujours t_1 (le terme ϕ^2) si bien que l'exposant de la longueur de corrélation au point k -critique est dans la théorie de Landau

$$\nu(k) = 1/(2(k - 1)) \quad (14.96)$$

Mais la dimension critique supérieure pour la théorie k -multicritique sera

$$d_{uk}(k) = 2k/(k - 1) \quad (14.97)$$

Les points multicritiques d'ordre $k > 3$ sont décrits par la théorie du champ moyen en dimension trois ($d = 3$).

Par contre, en dimension deux ($d = 2$) tous les points multicritiques sont non triviaux, et leurs exposants critiques ne sont pas donnés par la théorie

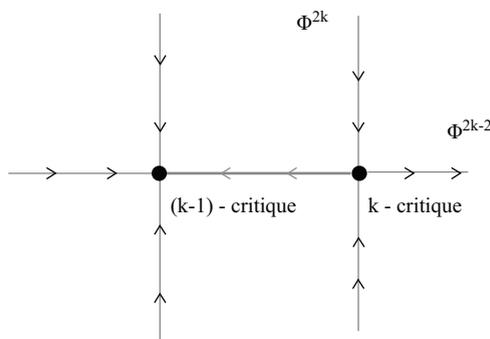


FIGURE 14.16 – Flot du point fixe k -critique (UV) vers le point fixe $(k-1)$ -critique dans le plan des couplages de $\phi^{2(k-1)}$ et ϕ^{2k} .

du champ moyen. En fait la théorie conforme des champs permet de prédire exactement la nature des flots du groupe de renormalisation entre les points fixes correspondants, et la valeur des exposants critiques associés aux points multicritiques en dimension deux. De façon générale, le point k -critique du modèle de Landau-Ginsburg-Wilson est décrit par un point fixe avec $k - 1$ directions instables auxquelles sont associés des couplages d'échelles et des opérateurs essentiels pairs, qui seront les ϕ^{2j} pour $1 \leq j < k$. Comme pour le point tricritique, dans la direction t_{k-1} associée à l'opérateur $\phi^{2(k-1)}$, le flot va du point fixe k -critique (UV) vers le point fixe $(k-1)$ -critique (IR) (voir Fig. 14.16).

14.5.6 Notes

Nous renvoyons à la contribution de I. D. Lawrie et S. Sarbach et à celle de C. M. Knobler et R. L. Scott dans le Vol. 9 du Domb & Lebowitz. La structure des points multicritiques et les flots de renormalisations peuvent être étudiés de façon très explicite en deux dimensions, et nous renvoyons à [DFMS12] et [Mus10].

Chapitre 15

Modèles de spins et modèles sigma (classiques et quantiques)

15.1 Modèle sigma non linéaire

Le modèle sigma non linéaire $O(N)$ décrit la phase de basse température du modèle de Landau-Ginzburg avec symétrie continue, en ne retenant que la dynamique des excitations de basse énergie, les modes de Goldstone. C'est l'exemple le plus simple d'une classe de modèles très importants pour la physique, les systèmes de basse dimensionnalité et les systèmes quantiques unidimensionnels. L'étude de ses propriétés en deux dimensions est très intéressante. Nous avons vu qu'en deux dimensions, la symétrie globale $O(N)$ du modèle ne peut pas être spontanément brisée. Les fluctuations des modes de Goldstone sont suffisamment fortes à grande distance (ou basse énergie) pour détruire la phase de symétrie brisée, et donc *a priori* redonner une masse à la théorie. Comme on va le voir, c'est un calcul de renormalisation qui permet de mettre en évidence ce phénomène, et de comprendre comment la masse se comporte en fonction du couplage entre modes, ou si l'on préfère, comment la longueur de corrélation du modèle se comporte à basse température. D'autre part (mais les deux propriétés sont reliées), le modèle sigma en deux dimensions s'avère un exemple de théorie des champs *asymptotiquement libre* à haute énergie, comme les théories de jauge non abéliennes de dimension quatre. Ce modèle est cependant plus simple, car la physique des couplages entre modes de Goldstone est plus simple que celle du confinement.

Ce modèle est également intéressant car il présente des excitations topologiques, les « instantons », qui jouent un rôle important dans sa physique. Mentionnons aussi que le modèle $O(3)$ est en 1+1 dimension une théorie des champs dite intégrable, possédant outre la symétrie globale $O(3)$ des symétries non locales correspondant à des courants conservés non locaux. Ceci conduit à des propriétés très intéressantes, et par exemple à pouvoir déterminer exactement sa matrice de diffusion quantique (la matrice S).

Les modèles sigma basés sur des groupes de symétries G plus généraux apparaissent dans beaucoup de problèmes de physique (matière condensée,

chaînes de spins quantiques, systèmes désordonnés, matière molle). Ils jouent un rôle fondamental dans les théories des cordes, donc les questions de quantification de la gravitation, et d'unification des interactions fondamentales.

15.1.1 Le modèle

Le champ \mathbf{S} est un champ vectoriel à N composantes réelles, mais dont la longueur est fixée $|\vec{S}| = 1$. \mathbf{S} appartient donc à la sphère \mathcal{S}_{N-1} .

$$\mathbf{S}(x) = \{S_i(x), i = 1, \dots, N\}, \quad \mathbf{S}^2 = \sum_i S_i^2 = 1 \quad (15.1)$$

L'action est celle du modèle linéaire avec la contrainte 15.1. Elle s'écrit, en ajoutant un champ externe \mathbf{H}

$$\mathcal{H}[\mathbf{S}] = \int d^D x \left(\frac{1}{2g} (\nabla_x \mathbf{S}(x))^2 - \mathbf{S}(x) \cdot \mathbf{H} \right) \quad (15.2)$$

$g > 0$ est la constante de couplage, elle joue le rôle de la température. Son inverse $\kappa = g^{-1}$ est appelé souvent *rigidité de spin*.

En l'absence de champ externe $\mathbf{H} = 0$, l'action est invariante sous les rotations globales, donc sous le groupe orthogonal $O(N)$

$$\mathbf{S}(x) \rightarrow \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}(x), \quad \mathbf{R} \in O(N) \quad (15.3)$$

Par contre les minima de l'action sont les configurations où le champ est constant, mais pointe dans une direction arbitraire sur la sphère

$$\mathbf{S}(x) = \mathbf{S}_0 \quad (15.4)$$

La symétrie $O(N)$ est spontanément brisée, et la symétrie résiduelle est celle des rotations dans le plan orthogonal à \mathbf{S}_0 . On a donc à basse température un schéma de brisure spontanée de symétrie

$$O(N) \rightarrow O(N-1) \quad (15.5)$$

et le champ appartient à l'espace quotient, la sphère de dimension $N-1$ (c'est un espace symétrique)

$$\mathbf{S}(x) \in \mathcal{S}_{N-1} = O(N)/O(N-1) \quad (15.6)$$

En présence d'un champ externe uniforme $\mathbf{H} \neq 0$, la symétrie est brisée explicitement et le champ s'aligne dans la direction de \mathbf{H} .

15.1.2 Théorie des perturbations

Principe : champs $\vec{\pi}$ et σ

Pour quantifier ce modèle, on doit construire l'intégrale fonctionnelle

$$Z = \int \mathcal{D}[\mathbf{S}] e^{-\mathcal{H}[\mathbf{S}]} \quad (15.7)$$

Attention, la mesure fonctionnelle $\mathcal{D}[\mathbf{S}]$ n'est pas la mesure pour le champ scalaire, elle incorpore la contrainte $\mathbf{S}^2 = 1$. Pour construire une théorie de perturbation, il existe plusieurs approches (qui vont donner des résultats équivalents).

Le plus simple est d'utiliser une projection de la sphère sur le plan \mathbb{R}^{N-1} pour représenter explicitement les $N - 1$ degrés de liberté comme des champs scalaires. Ceci consiste donc à représenter \mathbf{S} dans un système de coordonnées locales au voisinage de la solution classique \mathbf{S}_0 . Cette représentation ne tient pas compte de la structure globale de la sphère. La projection la plus simple est la projection orthogonale. On représente

$$\mathbf{S}(x) = (\boldsymbol{\pi}(x), \sigma(x)), \quad \boldsymbol{\pi}(x) = (\pi_i(x), i = 1, \dots, N-1), \quad \sigma(x) = \sqrt{1 - \boldsymbol{\pi}(x)^2} \quad (15.8)$$

et pour simplifier on choisit le plan orthogonal à \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = (0, H) \text{ si bien que } \mathbf{H}\mathbf{S}(x) = H\sigma(x) \quad (15.9)$$

L'action se développe en

$$\mathcal{H}[\mathbf{S}] = \int d^D x \left[-H + \left(\frac{1}{2g} (\nabla_x \boldsymbol{\pi}(x))^2 + \frac{H}{2} \boldsymbol{\pi}^2(x) \right) + O(\boldsymbol{\pi}^4) \right] \quad (15.10)$$

Le terme quadratique décrit bien $N - 1$ champs scalaires de masse $m^2 = gH$. Ils sont de masse nulle quand $H = 0$, ce sont les champs de Goldstone. En rescalant $\boldsymbol{\pi} \rightarrow \sqrt{g}\boldsymbol{\pi}$ (et $H \rightarrow g^{-1}H$) il est facile de voir que les termes d'interactions venant de la composante σ sont des termes d'ordre g^k , $k \geq 1$, donc négligeable à couplage faible $g \rightarrow 0$. Par contre il faut en tenir compte dans un développement perturbatif en puissance de g .

On note que cette décomposition ne représente que la moitié de la sphère. Elle sera donc inadéquate pour décrire les effets des fluctuations quand g est grand. On peut utiliser d'autres représentations du champ, par exemple la projection stéréographique.

Méthode du champ auxiliaire

On peut aussi représenter la contrainte $\mathbf{S}(x)^2 = 1$ à l'aide d'un champ auxiliaire (ici noté $\lambda(x)$). Ceci est équivalent à représenter la contrainte en transformée de Fourier comme

$$\delta(|\mathbf{S}(x)| - 1) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{d\lambda(x)}{2i\pi} e^{-\lambda(x)(\mathbf{S}(x)^2 - 1)} \quad (15.11)$$

On réécrit donc l'action en termes d'un champ $\mathbf{S}(x)$ qui est maintenant un champ vectoriel à N composantes réelles, sans contrainte, et d'un champ auxiliaire $\lambda(x)$ (et on rescale $\lambda \rightarrow (2g)^{-1}\lambda$ pour simplifier)

$$\mathcal{H}[\mathbf{S}, \lambda] = \int d^D x \frac{1}{2g} ((\nabla_x \mathbf{S}(x))^2 + \lambda(x)(\mathbf{S}(x)^2 - 1)) \quad (15.12)$$

l'intégrale fonctionnelle devenant

$$Z = \int \mathcal{D}[\mathbf{S}] \mathcal{D}[\lambda] e^{-\mathcal{H}[\mathbf{S}, \lambda]} \quad (15.13)$$

(on a fait $\mathbf{H} = 0$). La mesure $\mathcal{D}[\mathbf{S}]$ est maintenant la mesure standard pour le champ scalaire à N composantes. La mesure $\mathcal{D}[\lambda]$ est une mesure d'intégration sur un contour d'intégration complexe ! Sur un réseau hypercubique de maille ϵ ces mesures sont explicitement

$$\int \mathcal{D}[\mathbf{S}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_x \left(d^N \mathbf{S}(x) \left[\frac{2\pi g}{\epsilon^{d-2}} \right]^{-N/2} \right) \quad (15.14)$$

$$\int \mathcal{D}[\lambda] = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \prod_x d \left(\lambda(x) \left[\frac{2i\pi g}{\epsilon^d} \right]^{-1} \right) \quad (15.15)$$

Cette représentation est extrêmement utile pour étudier le modèle dans sa limite $N \rightarrow \infty$ et pour mettre en évidence des effets non perturbatifs.

15.1.3 Renormalisation à $D = 2$

Introduction

L'analyse dimensionnelle indique que le champ \mathbf{S} est sans dimension et que la constante de couplage a la dimension (en termes de longueur ℓ ou de masse μ)

$$[g] \sim [\ell]^{D-2} \sim [\mu]^{2-D} \quad (15.16)$$

On s'attend donc à ce que le modèle soit renormalisable en dimension $D = 2$. Le montrer nécessite une analyse soignée, en tenant compte de la symétrie $O(N)$ et des identités de Ward associées. Nous présentons juste le résultat : on a besoin de renormaliser le couplage et le champ. Les divergences UV disparaissent si on réexprime les corrélations en termes du couplage renormalisé sans dimension g_R

$$g = \mu^{2-D} G(g_R) \quad (15.17)$$

et du champ renormalisé \mathbf{S}_R

$$\mathbf{S} = Z(g_R)^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_R \quad (15.18)$$

μ est l'échelle de renormalisation.

La renormalisation du couplage se note généralement $G(g_R) = g_R Z_g(g_R)$. Le facteur de renormalisation du champ est tel que la contrainte pour le champ renormalisé s'écrit

$$\mathbf{S}_R^2 = Z(g_R) \quad (15.19)$$

Les contretermes Z_g et Z contiennent les divergences UV, donc des $\log(\Lambda/\mu)$ où Λ est un régulateur UV et μ l'échelle de renormalisation (ou des pôles en $\epsilon = D - 2$ en régularisation dimensionnelle).

Les fonctions de corrélations du champ renormalisé \mathbf{S}_R sont finies UV, exprimées en série des perturbations en puissance de g_R .

Fonctions bêta

La fonction bêta pour la constante de couplage est (au premier ordre)

$$\beta_g(g_R) = -\frac{N-2}{4\pi} g_R^2 + \dots \quad (15.20)$$

Il y a une fonction γ pour le champ, qui équivaut à une fonction bêta pour le champ externe renormalisé h_R (le terme de brisure explicite de la symétrie)

$$\beta_h = h_R \left(-2 + \frac{N-1}{4\pi} g_R + \dots \right) \quad (15.21)$$

Liberté asymptotique et restauration dynamique de symétrie

Pour $N > 2$ la fonction bêta est < 0 et le modèle est donc asymptotiquement libre (dans le régime UV). Par contre le couplage effectif revient grand dans le régime IR (grandes distances/basse énergie) et le modèle sigma est fortement couplé. On s'attend donc à ce que le « vide perturbatif » de la théorie ($N-1$ modes de Goldstone / ondes de spin faiblement couplées) soit déstabilisé par les fluctuations. En fait la symétrie $O(N)$ n'est pas brisée. Les excitations du modèle sont massives, et pour la théorie lorentzienne en 1+1 dimension, les états à une particule sont N bosons massifs, appartenant à la représentation fondamentale standard de $O(N)$. On parle de *restauration dynamique de la symétrie* $O(N)$.

Si le modèle est massif, les arguments standard du groupe de renormalisation montrent que la masse physique m se comporte en fonction de la constante de couplage renormalisée g comme

$$m \propto \mu \exp\left(-\frac{4\pi}{N-2} \frac{1}{g}\right) \quad (15.22)$$

μ étant l'échelle de masse de renormalisation. En effet la masse m est simplement l'inverse de la longueur de corrélation ξ . C'est un invariant du groupe de renormalisation donc

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \beta_g(g) \frac{\partial}{\partial g} m = 0 \quad (15.23)$$

qui est de la forme $m = \mu \times \text{fonction}(g)$. À tous les ordres de la théorie des perturbations, la masse est nulle. On parle de création dynamique de masse (*dynamical mass generation*) et il s'agit d'un phénomène non perturbatif. Ce scénario est compatible avec le théorème de Mermin-Wagner-Coleman, qui énonce que, en 2 dimensions, et présence de forces à courtes portées, il n'est pas possible d'avoir de brisure spontanée d'une symétrie continue comme dans le schéma $O(N) \rightarrow O(N-1)$.

15.1.4 Détails du calcul perturbatif à $D = 2$

Introduction

On présente ici le calcul perturbatif direct de la fonction à deux points au premier ordre (une boucle) en théorie des perturbations. Il existe des méthodes plus générales et plus puissantes de calcul de la renormalisation du modèle, en particulier les méthodes de calcul de l'action effective dans une configuration de champ de fond (*background field configuration*) générale. Nous allons utiliser la régularisation dimensionnelle et des fonctions de corrélations invariantes $O(N)$, car dans ce cas les divergences infrarouges qui apparaissent à $H = 0$ (pas de champ externe) disparaissent (théorème d'Elitzur-David).

Diagrammatique

D'abord on rescale

$$\pi \rightarrow \sqrt{g} \pi \quad \text{donc} \quad S = (\sqrt{g} \pi, \sqrt{1 - g\pi^2})$$

Il faut développer à l'ordre g l'action 15.10

$$\mathcal{H} = \int d^2x \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 + \frac{g}{2}(\pi \partial_\mu \pi)^2 + O(g^2) \quad (15.24)$$

Mais il faut tenir compte du fait que la mesure pour l'intégration fonctionnelle est non linéaire.

$$\mathcal{D}[\pi] = \prod_x \frac{d\pi(x)}{\sqrt{1 - g\pi^2(x)}} = \prod_x d\pi(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_x \log(1 - g\pi^2(x))\right) \quad (15.25)$$

Donc il faut rajouter à l'action un terme de mesure qui au premier ordre en g s'écrit

$$\Delta \mathcal{H}_{\text{mes.}} = -\frac{g}{2} \delta(0) \int d^Dx \pi^2 + O(g^2) \quad (15.26)$$

où $\delta(0) = (2\pi)^{-D} \int d^Dk$ est la valeur (infinie !) de la fonction de Dirac à l'origine (l'inverse du « volume du point »).

Le propagateur $G_0(x)$ est celui du champ libre de masse nulle pour le champ à $N - 1$ composantes π (les modes de Goldstone). Au premier ordre en g il y a un vertex d'interaction à 4 pattes, mais chaque ligne transportant un indice $i = 1, \dots, N - 1$ porte une dérivée ∂_μ , donc en représentation d'impulsion un moment entrant ik_μ , que l'on représente par une flèche. Le terme de mesure donne un vertex à deux pattes (vertex de masse) avec un coefficient infini. Les termes suivants du développement en π de l'action et de la mesure vont introduire un nombre infini de vertex avec un nombre arbitrairement grand de pattes externes.



FIGURE 15.1 – Le propagateur et les vertex d’interaction et de mesure présents à l’ordre g pour le modèle sigma non linéaire.

La fonction à deux points

La fonction à 2 points est

$$\langle \mathbf{S}(x)\mathbf{S}(y) \rangle = \langle g \boldsymbol{\pi}(x)\boldsymbol{\pi}(y) + \sqrt{1 - g \boldsymbol{\pi}^2(x)}\sqrt{1 - g \boldsymbol{\pi}^2(y)} \rangle \quad (15.27)$$

que l’on développe à l’ordre 2 en g

$$1 + g \left\langle \boldsymbol{\pi}(x)\boldsymbol{\pi}(y) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}^2(x) + \boldsymbol{\pi}^2(y)) \right\rangle + g^2 \left\langle \frac{1}{4}\boldsymbol{\pi}^2(x)\boldsymbol{\pi}^2(y) - \frac{1}{8}((\boldsymbol{\pi}^2(x))^2 + (\boldsymbol{\pi}^2(y))^2) \right\rangle + O(g^3) \quad (15.28)$$

Le terme d’ordre deux en $\boldsymbol{\pi}$ est calculé facilement à l’ordre dominant en g (les termes d’interactions ne comptent pas, il suffit d’appliquer le théorème de Wick)

$$g(N - 1) (G_0(x - y) - G_0(0)) \quad (15.29)$$

Le terme d’ordre quatre en $\boldsymbol{\pi}$ est aussi calculé facilement à l’ordre dominant

$$g^2 \frac{N - 1}{2} (G_0(x - y)^2 - G_0(0)^2) \quad (15.30)$$

Le terme sous-dominant d’ordre g^2 pour le terme d’ordre deux en $\boldsymbol{\pi}$ requiert les vertex d’interaction et de mesure. On obtient

$$g^2 (N - 1) G_0(0) \int d^D z (\partial_\mu G_0(x - z)\partial_\mu G_0(z - y)) - \partial_\mu G_0(-z)\partial_\mu G_0(z)) = g^2 (N - 1) G_0(0) (G_0(0) - G_0(x)) \quad (15.31)$$

En utilisant les équations du mouvement $-\Delta G_0(x) = \delta(x)$, en éliminant les termes qui s’annulent par parité, et en notant que les diagrammes quadratiquement divergences UV en $\int d^D k = (2\pi)^D \delta(0)$ sont exactement compensés par les diagrammes avec un terme d’interaction en $\delta(0) \boldsymbol{\pi}^2$ venant de la mesure, la fonction à deux points est

$$1 + g(N - 1)(G_0(x) - G_0(y)) + g^2 \frac{N - 1}{2} (G_0(x) - G_0(0))^2 + O(g^3) \quad (15.32)$$

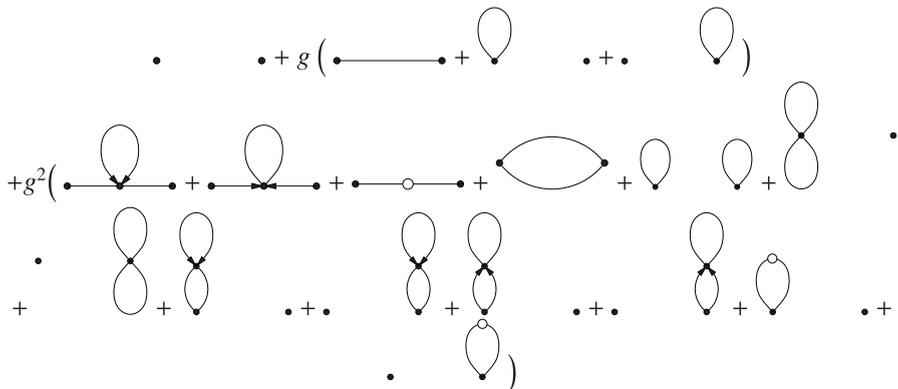


FIGURE 15.2 – La fonction à deux points à l'ordre g^2 .

Renormalisation

Le modèle est régularisé dans l'IR et dans l'UV. Le propagateur de masse nulle est en $D = 2$

$$G_0(x) = \frac{1}{2\pi} \log(L/|x|) \quad L \text{ IR regulator} \tag{15.33}$$

et à points coïncidants

$$G_0(0) = \frac{1}{2\pi} \log(L/a) \quad a = \frac{1}{\Lambda} \text{ UV regulator} \tag{15.34}$$

On vérifie que les divergences IR ($L \rightarrow \infty$) se compensent (théorème d'Elitzur), mais que la fonction à deux points est encore divergente UV

$$\langle \mathbf{S}(x)\mathbf{S}(0) \rangle = 1 + g \frac{N-1}{2\pi} \log(a/|x|) + g^2 \frac{N-1}{2(2\pi)^2} \log^2(a/|x|) + O(g^3) \tag{15.35}$$

Pour éliminer les divergences UV, il faut renormaliser le champ comme

$$\mathbf{S}_R = Z^{\frac{1}{2}} \mathbf{S} \quad , \quad Z = 1 - g \frac{N-1}{2\pi} \log(a\mu) + O(g^2) \tag{15.36}$$

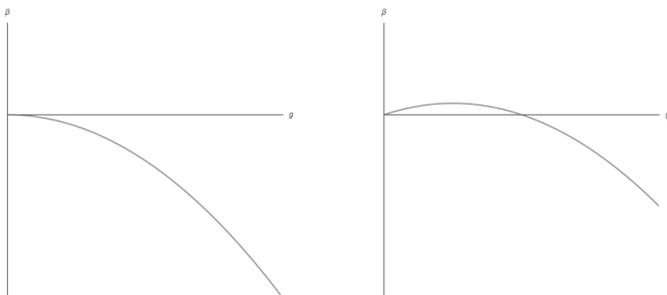
et le couplage comme

$$g_R = g - g^2 \frac{N-2}{4\pi} \log(a\mu) + O(g^3) \tag{15.37}$$

On en déduit la fonction β_g et la dimension d'échelle du champ $\Delta_{\mathbf{S}}$ par les formules habituelles

$$\beta_g(g_R) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_R \quad , \quad \Delta_{\mathbf{S}} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \log(Z^{1/2}) \tag{15.38}$$

pour obtenir 15.20 et 15.21, en se rappelant que $\beta_h = -W_h = h(-2 + \Delta_h)$.

FIGURE 15.3 – La fonction β du modèle σ non linéaire en $D = 2$ et en $D > 2$.

15.1.5 Modèle sigma en dimension $D > 2$

De même que l'on peut étudier la renormalisation de la théorie ϕ^4 en dimension $D \neq 4$, on peut définir le modèle σ non linéaire en dimension $D \neq 2$ (par régularisation dimensionnelle par exemple). Le calcul perturbatif en $D = 2$ au premier ordre non trivial en g s'étend facilement au premier ordre en $\epsilon = D - 2$ puisqu'on obtient par analyse dimensionnelle (en utilisant 15.17)

$$\beta_g(g_R) = \epsilon g_R - \frac{N-2}{4\pi} g_R^2 + O(g_R^3) \quad , \quad D = 2 + \epsilon \quad (15.39)$$

Toujours pour $N > 2$, il existe un point fixe UV non trivial en

$$g_R^* = \frac{4\pi}{N-2} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (15.40)$$

Ce point fixe sépare une phase ordonnée de basse température $0 < g_R < g_R^*$, où le couplage renormalisé $g_R(S) \rightarrow 0$ dans l'IR ($S \rightarrow \infty$), d'une phase désordonnée de haute température $g_R > g_R^*$, où le couplage renormalisé $g_R(S) \rightarrow \infty$ dans l'IR. Le point fixe g_R^* est donc le point critique qui décrit la transition de phase para/ferro (le point de Curie) dans le modèle $O(N)$.

Le couplage g est essentiel au voisinage du point fixe g^* , sa dimension d'échelle est $\lambda_0 = -\beta'_g(g^*) = \epsilon$. L'exposant ν de la longueur de corrélation se comporte quand $D \rightarrow 2_+$ comme

$$\nu = \frac{1}{\epsilon} + O(1) \quad , \quad D = 2 + \epsilon \quad (15.41)$$

résultat indépendant de N , mais valable si $N > 2$. Il faut noter (voir exercice) que ce résultat est exact dans la limite $N \rightarrow \infty$

$$\nu = \frac{1}{D-2} + O(1/N) \quad (15.42)$$

et qu'en $D = 4$ on retrouve le résultat de la théorie du champ moyen $\nu = 1/2$.

15.1.6 Aspects non perturbatifs, instantons

Invariance conforme

Le modèle sigma en $D = 2$ possède plusieurs propriétés remarquables. Le modèle classique est non seulement invariant d'échelle, mais invariant conforme (voir la discussion générale sur l'invariance conforme plus bas). Cela veut dire la chose suivante. On considère le modèle comme défini sur la sphère de Riemann (obtenue en complétant le plan complexe \mathbb{C} par le point à l'infini, et en notant les coordonnées $x = (z, \bar{z})$) et soit une configuration de champ $\mathbf{S}(x)$ « régulière » à l'infini, c'est-à-dire quand la variable $x' = (z^{-1}, \bar{z}^{-1})$, $\mathbf{S}'(z') = \mathbf{S}(z)$ est régulière (C^1) en $z' = 0$. Alors on vérifie que l'action est invariante sous les transformations conformes globales de la sphère (transformations homographiques, ou transformations de Möbius, du groupe $SL(2, \mathbb{C})$)

$$z \rightarrow w = \frac{az + b}{cz + d} \quad , \quad \mathbf{S}(z, \bar{z}) \rightarrow \mathbf{S}'(z, \bar{z}) = \mathbf{S}(w, \bar{w}) \quad (15.43)$$

C'est-à-dire que l'action est invariante (en l'absence de champ externe $H = 0$)

$$\mathcal{H}[\mathbf{S}'] = \mathcal{H}[\mathbf{S}] \quad (15.44)$$

Puisque la fonction β_g est non nulle à une boucle, la théorie quantique présente une anomalie de trace, elle n'est ni invariante d'échelle, ni invariante conforme.

Charge topologique du modèle $O(3)$ bidimensionnel

Le modèle $O(3)$ est particulièrement intéressant, car lorsqu'il est défini sur la sphère de Riemann, une configuration classique \mathbf{S} est une application de la sphère sur la sphère

$$\mathcal{S}_2 \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathcal{S}_2 \quad (15.45)$$

De telles applications sont caractérisées par un nombre topologique entier $Q \in \mathbb{Z}$, correspondant au nombre d'enroulements de la sphère sur elle-même, puisque le groupe d'homotopie de la sphère $\Pi_2(\mathcal{S}_2) = \mathbb{Z}$. Pour une configuration régulière (de classe C^1) ce nombre topologique est donné par l'intégrale d'une densité locale

$$Q[\mathbf{S}] = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \mathbf{S} \cdot (\partial_1 \mathbf{S} \times \partial_2 \mathbf{S}) = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{abc} S_a \partial_\mu S_b \partial_\nu S_c \quad (15.46)$$

$\varepsilon^{\mu\nu}$ est le symbole antisymétrique d'ordre 2 et ε_{abc} est le symbole antisymétrique d'ordre 3 (symbole de Kronecker).

Q est un invariant topologique, puisqu'une déformation continue $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}'$ ne change pas la valeur de Q . Cet entier Q est l'analogue bidimensionnel du nombre d'enroulements d'une trajectoire sur un cercle, discuté lors de la quantification de la particule chargée sur un cercle, sur le rôle du flux magnétique et l'effet Bohm-Aharonov.

L'espace des configurations est donc divisé en une collection de « secteurs topologiques » étiquetés par l'entier Q . La quantification du modèle sigma

doit prendre en compte l'existence de ces secteurs topologiques. En particulier, chaque secteur contient des configurations classiques qui minimisent l'action du modèle dans ce secteur, mais qui ne sont pas équivalentes au minimum classique de l'action dans le secteur $Q = 0$, qui est une configuration constante $\mathbf{S}_0(x) = \vec{n}_0$.

Instantons

Ces configurations classiques de topologie non triviale sont appelées *instantons* (cette dénomination est due à G. 't Hooft, pour désigner des configurations localisées dans le temps à un instant donné, pour les distinguer des solitons, qui sont des configurations qui se propagent dans le temps).

En particulier, la solution dans le secteur $Q = 1$ est simple, elle correspond à des rotations internes (transformations $O(3)$) et des transformations conformes dans le plan, à la bijection triviale de la sphère sur la sphère

$$\mathbb{C} \equiv \mathcal{S}_2 \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{S}_2 \equiv \mathbb{C} \quad (15.47)$$

Cet instanton est caractérisé par sa position, sa taille et son orientation. La solution d'action minimale dans le secteur $Q = -1$ est obtenue par changement d'orientation et est appelée « anti-instanton ». Les configurations plus générales $Q > 1$ seront des *multi-instantons*, et on peut étudier l'effet des configurations de type « gaz d'instantons et d'anti-instantons ».

Angle θ

Par analogie avec l'effet Aharonov-Bohm, le modèle sigma $O(3)$ peut être défini et étudié en présence d'un tel terme topologique. Le modèle est défini par l'intégrale fonctionnelle

$$Z_\theta = \int \mathcal{D}[\mathbf{S}] \exp\left(-\frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{S})^2 + i\theta Q\right) \quad (15.48)$$

Comme Q s'écrit comme l'intégrale d'une densité de charge topologique locale, cette action est bien locale, ne faisant intervenir que \vec{S} et ses dérivées d'ordre 1. Q étant toujours entière, la variable θ est définie modulo 2π . Elle est appelée l'*angle thêta*.

Si $\theta \neq 0$, le modèle n'est plus invariant par parité $z \rightarrow -z$ (PT-invariance en 1+1 dimension). C'est l'analogie en deux dimensions du fait qu'en une dimension (mécanique quantique) la présence d'un champ magnétique brise explicitement l'invariance par renversement du temps $t \rightarrow -t$ (T-invariance).

Un cas intéressant est le cas $\theta = \pi$. Comme pour la particule dans un champ magnétique sur le cercle, pour cette valeur de θ on s'attend à ce que la théorie soit invariante par parité (PT-invariance), mais cette symétrie sera réalisée de façon particulière, et spontanément brisée.

A priori les divergences UV et la renormalisation du modèle $O(3)$ se traitent de la même manière dans le secteur perturbatif $Q = 0$ et les autres

secteurs topologiques $Q \neq 0$, car la théorie de la renormalisation nous assure que les contretermes ne dépendent pas du champ de fond (*background configuration*), qui peut très bien être du type instanton. Mais il faut tenir compte du fait que le modèle classique étant invariant d'échelle, les instantons sont de taille arbitraire et peuvent être très petits. Les instantons de taille de l'ordre du cut-off à courte distance vont donc interférer avec les effets de renormalisation.

Terminons donc en présentant le diagramme des flots du groupe de renormalisation dans le plan (g, θ) , qui est en partie conjectural, mais obtenu sur la base de calculs de renormalisation, d'arguments de modèles intégrables, et d'étude de modèles en 1+1 dimension (chaîne de spins) qui sont censés être équivalents. On s'attend à avoir un point fixe IR non trivial pour $\theta = \pi$.

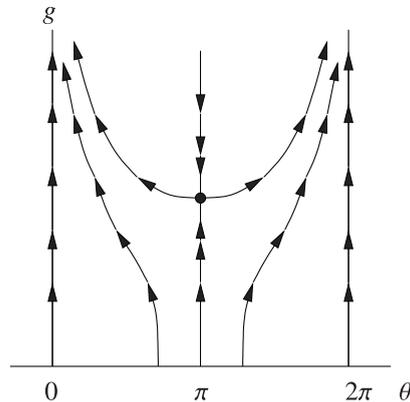


FIGURE 15.4 – Flot du groupe de renormalisation pour le modèle $O(3)$.

La présence de ce point fixe implique que les fonctions de corrélations doivent décroître de façon algébrique à grande distance pour $\theta = \pi$, contrairement au cas $\theta \neq \pi$. Ceci n'est pas incompatible avec le théorème de Mermin-Wagner-Coleman car les modes de masse nulle ne sont pas des bosons de Goldstone. Le modèle a encore une symétrie $O(3) \simeq SU(2)$. Une analyse plus poussée (qu'on ne fera pas ici) montre que la théorie effective à $\theta = \pi$ est un modèle de Wess-Zumino-Witten $SU(2)_{k=1}$, où $SU(2)$ est le groupe de symétrie, et k est un entier qui désigne le niveau du terme topologique de ce modèle (c'est l'analogue du spin s demi-entier dans la représentation du spin par une intégrale de chemin).

Autres aspects non perturbatifs

Enfin, mentionnons un autre aspect très important du modèle sigma $O(n)$, qui va bien au-delà de ce qui est discuté dans cet ouvrage. La théorie des champs à temps réel possède une infinité de charges classiques non locales conservées (en plus de l'énergie et de l'impulsion). Ces quantités conservées en font une théorie des champs intégrable. Ces symétries non locales sont

préservées par la quantification. Le modèle $O(n)$ est une théorie quantique intégrable. Ceci a des conséquences frappantes. La matrice S de diffusion du modèle est factorisable, et peut être exprimée entièrement en termes des éléments de matrice S à deux corps. Il n'y a que des collisions élastiques possibles entre deux particules, et toute la physique est contenue dans les déphasages lors des collisions. Ces éléments de matrice S peuvent être calculés exactement.

15.1.7 Autres modèles sigma

D'autres modèles sigma jouent un rôle important en physique, notamment en physique de la matière condensée. Nous discuterons plus loin le cas des chaînes de spin. Mentionnons-en quelques-uns.

Modèles $\mathbb{C}P_N$

Les modèles $\mathbb{C}P_N$ sont des modèles sigma basés sur le plan projectif complexe (de dimension N) plutôt que sur la sphère (ou le plan projectif réel). Ce plan projectif est un quotient

$$\mathbb{C}P_N = U(N+1)/U(N) \times U(1) \quad (15.49)$$

On peut les formuler de façon similaire au modèle sigma en termes d'un champ qui est un vecteur complexe à $N+1$ composantes de norme unité

$$\mathbf{Z}(x) = \{Z_i(x)\}_{i=1, N+1} \quad , \quad \mathbf{Z}(x) \cdot \bar{\mathbf{Z}}(x) = \sum_i Z_i(x) \bar{Z}_i(x) = 1 \quad (15.50)$$

avec l'action

$$\mathcal{H}[\mathbf{Z}] = \frac{1}{2g} \int d^d x \left(\partial_\mu \mathbf{Z} \cdot \partial_\mu \bar{\mathbf{Z}} - (\bar{\mathbf{Z}} \cdot \partial_\mu \mathbf{Z})(\mathbf{Z} \cdot \partial_\mu \bar{\mathbf{Z}}) \right) \quad (15.51)$$

Dans cette formulation, une des composantes réelles de \mathbf{Z} est encore redondante, car l'action possède une invariance de jauge $U(1)$ résiduelle

$$\mathbf{Z}(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \mathbf{Z}(x)$$

Ces modèles possèdent des propriétés similaires à celles des modèles sigma $O(N)$. Ils sont renormalisables en dimension deux ($d=2$), avec une fonction bêta négative, donc ils sont asymptotiquement libres dans l'ultraviolet. Ils sont aussi susceptibles d'un développement en $1/N$ à N grand. Ils possèdent des solutions de type instantons. Ils sont classiquement intégrables et invariants conformes. Par contre, comme l'invariance conforme, l'intégrabilité est perdue lors de la quantification (anomalies).

Modèles chiraux

Une autre extension est la classe des *modèles chiraux*. Ils sont basés sur un groupe de Lie G , généralement les groupes $SU(N)$. Le champ prend ses

valeurs $g(x)$ dans les éléments du groupe, donc le champ g est une application **espace** $\rightarrow G$. Ils décrivent la dynamique des modes de Goldstone pour un schéma de brisure de symétrie

$$G \times G \rightarrow G \quad \text{puisque} \quad G = G \times G/G \quad (15.52)$$

Le hamiltonien (pour un groupe $SU(N)$) sera

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[g] &= \frac{1}{2\lambda} \int d^2x \operatorname{tr} ((g^{-1} \cdot \partial_\mu g) \cdot (g^{-1} \cdot \partial_\mu g)^\dagger) \\ &= \frac{1}{2\lambda} \int d^2x \operatorname{tr} (\partial_\mu g \cdot \partial_\mu g^\dagger) \end{aligned} \quad (15.53)$$

On note la constante de couplage λ pour la distinguer du champ $g(x)$. Ces modèles sont également invariants conformes classiquement en deux dimensions, renormalisables, et sont asymptotiquement libres si le groupe est compact. Ces modèles jouent un rôle important en physique de la matière condensée. Les modèles basés sur des groupes non compacts type $SU(N, M)$ interviennent dans les problèmes de systèmes désordonnés, localisation par exemple. Ils sont présents aussi en physique des hautes énergies. Leurs extensions supersymétriques, basées sur des super-groupes comme $SU(N|M)$ sont également présentes dans les modèles de supergravité et de gravitation quantique.

Modèles de Wess-Zumino-Witten

Le groupe $SU(2)$ étant le recouvrement universel du groupe des rotations $SO(3)$, il est topologiquement équivalent à la sphère tridimensionnelle S^3 (la sphère unité dans \mathbb{R}^4). Le modèle chiral $SU(2)$ est perturbativement équivalent au modèle sigma $O(4)$. Non perturbativement il sera un peu différent. Ce modèle admet des extensions topologiques particulières intéressantes en deux dimensions.

Nous avons vu dans les chapitres sur l'intégrale de chemin pour la particule chargée dans un champ magnétique et pour le spin qu'il est nécessaire de prendre en compte dans l'intégrale de chemin un terme de phase géométrique. En particulier dans la Sect. 5.2, nous avons considéré un spin comme une particule contrainte à se déplacer sur la sphère unité S^2 dans \mathbb{R}^3 , en présence d'un champ magnétique externe, orthogonal à la surface de la sphère, créé par un monopole magnétique au centre de la sphère. Ceci revient à ajouter au terme cinétique dans l'action (ici pour une trajectoire périodique en temps euclidien, en notant $\lambda = \hbar/m$)

$$S[\vec{n}] = \frac{1}{2\lambda} \int_0^T dt \frac{d\vec{n}}{dt} \frac{d\vec{n}}{dt}$$

un terme géométrique $\Omega[\vec{n}]$ donnant une phase géométrique

$$e^{i s \Omega[\vec{n}]} \quad (15.54)$$

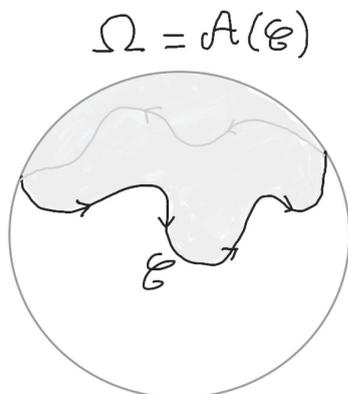


FIGURE 15.5

où $\Omega[\vec{n}]$ est l'angle sphérique total sur la sphère englobé par la trajectoire périodique sur la sphère. C'est donc l'aire $\mathcal{A}[\mathcal{C}]$ de la surface englobée par une courbe fermée orientée \mathcal{C} dans S^2 .

$$\mathcal{C} : S^1 \rightarrow S^2 \tag{15.55}$$

Une telle aire est définie modulo l'aire totale de S^2 , qui est 4π , et la phase géométrique devant être définie de façon non ambiguë, le spin est quantifié

$$s = k/2 \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{15.56}$$

Une phase géométrique peut s'introduire de façon similaire pour le modèle chirale $SU(2)$ en deux dimensions. Le modèle étant invariant conforme (classiquement) on considère pour simplifier le modèle euclidien où l'espace-temps est la sphère bidimensionnelle S^2 . Une configuration du champ chirale g est une application de S^2 dans $SU(2)$

$$g : S^2 \rightarrow SU(2) \tag{15.57}$$

L'image de S^2 est donc une surface fermée \mathcal{S} . On peut considérer le volume algébrique enclos par cette surface \mathcal{S} dans $SU(2)$ (qui est tridimensionnel), $\text{Vol}(\mathcal{C})$. Ce volume est défini modulo le volume total de $SU(2)$, $\text{Vol}(SU(2)) = 2\pi^2$. On peut obtenir ce volume pour un champ $g(x)$ de la façon suivante. Toute application continue $g : x \rightarrow g(x)$ de $S^2 \rightarrow SU(2)$ peut être étendue en une application continue de la boule unité $B^3 \rightarrow SU(2)$ ($B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$). Le volume sera proportionnel à

$$\int_{B^3} \text{tr}[g^{-1}(x)dg(x) \wedge g^{-1}(x)dg(x) \wedge g^{-1}(x)dg(x)] \tag{15.58}$$

L'intégrand étant une dérivée totale dans B^3 , ceci peut être réécrit comme une intégrale de bord, donc une intégrale sur S^2 faisant intervenir seulement

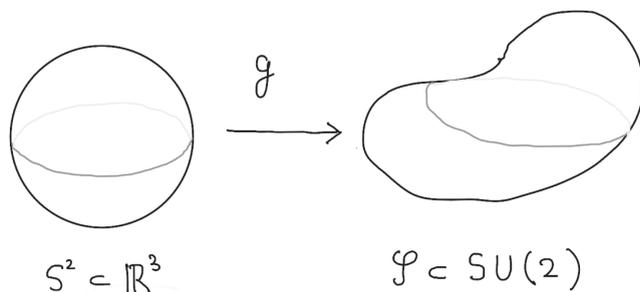


FIGURE 15.6

g et ses dérivées sur la sphère, comme il se doit pour une théorie de départ bidimensionnelle. On peut donc ajouter à l'action du modèle chirale un terme géométrique (dit terme de Wess-Zumino-Witten) de la forme

$$S_{\text{WZW}}[g] = i k 2\pi \text{Vol}[C_g] / \text{Vol}[SU(2)] \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \text{ entier} \quad (15.59)$$

k est un entier qui est appelé le niveau du modèle, et on parlera de modèle de WZW $SU(2)_k$. Ceci se généralise à des modèles chiraux sur des groupes compacts plus généraux.

Comme pour la particule sur une sphère, l'introduction d'une phase géométrique (un « flux magnétique externe » quantifié) modifie profondément la dynamique du modèle. On peut montrer que le terme de WZW modifie la fonction bêta du modèle à l'ordre λ^3 , qui a maintenant un point fixe attractif λ^* à une distance finie de l'origine. Le modèle $SU(2)_k$ a une limite de basse énergie qui est une théorie invariante d'échelle, et en fait une théorie conforme, à la différence du modèle chirale (donc pour $k = 0$) qui a une limite de basse énergie massive.

15.1.8 Notes

Le modèle sigma non linéaire a été introduit par M. Gell-Mann et M. Lévy en 1960 dans la cadre de la physique des particules et de la théorie de la désintégration bêta. La quantification et la renormalisation de ce modèle et des modèles chiraux ont été initiées dans les années 1970. Sa renormalisabilité et le calcul de sa fonction bêta en $2 + \epsilon$ dimensions ont été étudiés par A. Polyakov, puis par Brézin et Zinn-Justin et beaucoup d'autres dans les années 1970. L'étude du modèle sigma dans le cas général où l'espace des configurations du champ est une variété riemannienne quelconque a été initiée par D. Friedan en 1980, et trouve des applications importantes en théorie des cordes. Les modèles de Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZW) ont été introduits par Wess et Zumino en 1971. Pour des références générales sur les appli-

cations à la physique statistique, on pourra consulter (comme toujours) le livre de Zinn-Justin [ZJ02]. Pour les applications à la physique des théories de jauge, une bonne référence est [NSVI84]. Pour les aspects classiques et intégrabilité, voir [OM81].

15.2 Chaînes de spin quantiques et modèles sigma

15.2.1 Introduction

Les modèles sigma bidimensionnels apparaissent aussi comme théorie quantique effective de basse énergie pour des systèmes quantiques non relativistes unidimensionnels particuliers, les chaînes de spins quantiques antiferromagnétiques. C'est un exemple intéressant, car on voit comment une dynamique effective relativiste en 1+1 dimension peut émerger d'une dynamique microscopique. Un autre exemple est la théorie effective des excitations de bord dans l'effet Hall quantique (pour un système bidimensionnel), qui est aussi en 1+1 dimension. Un autre exemple plus récent est le graphène, où une dynamique relativiste de fermions de Dirac (ou de Majorana) en 2+1 dimensions peut émerger d'une dynamique microscopique non relativiste en 2 dimensions.

15.2.2 Chaîne quantique antiferromagnétique

Nous partons d'une chaîne unidimensionnelle de longueur M , où chaque site i porte un spin quantique \vec{S}_i ($i \in \{1, M\}$). La valeur du spin est $s = k/2$ (entier ou demi-entier), la même pour tous les sites. Pour simplifier $M = 2N$ est pair et on prend des conditions aux limites périodiques $\vec{S}_{i+M} = \vec{S}_i$. L'espace de Hilbert de la chaîne est donc le produit tensoriel des M espaces de Hilbert pour chaque spin i , \mathbb{C}^{2s+1}

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \otimes \mathbb{C}^{2s+1}}_M \quad (15.60)$$

\vec{S}_i désigne l'opérateur de spin s agissant au site i , donc dans l'espace de Hilbert du site i . C'est donc une notation compacte pour

$$\vec{S}_i = \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{i-1} \otimes \vec{S} \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{N-i} \quad (15.61)$$

Chaque vecteur \vec{S} a trois composantes (S_x, S_y, S_z) chacune un opérateur, bien sûr. Le hamiltonien du système est simplement donné par des couplages d'échange isotropes entre plus proches voisins (c'est le cas simple de la chaîne XXX).

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^M J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}, \quad J > 0 \quad (15.62)$$

Noter le signe du couplage, qui fait que le modèle est antiferromagnétique. Si les spins étaient classiques, à température nulle ils alterneraient en direction avec $\vec{S}_i = (-1)^i \vec{M}$. Pour $J < 0$ il correspondrait au modèle ferromagnétique $O(3)$ quantique (sur une chaîne).

Ce modèle est exactement soluble pour $s = 1/2$. C'est en effet pour celui-ci que H. Bethe a introduit son Ansatz de Bethe, promis à une belle postérité... Nous allons étudier par des méthodes approchées sa limite de basse énergie par des méthodes d'intégrale de chemin.

15.2.3 Intégrale de chemin

Nous avons vu dans l'intégrale de chemin qu'un spin quantique isolé dans un champ magnétique externe \vec{B} , dont le hamiltonien est

$$\mathbf{H} = -\mu \vec{B} \cdot \vec{S}$$

peut se formuler par une intégrale de chemin sur la sphère unité dans \mathbb{R}^3 , donc sur des chemins de la forme $\vec{n} = \{\vec{n}(t); t = 0, t\}$ avec $|\vec{n}(t)| = 1$

$$\langle \vec{n}_f | \exp(-it\mathbf{H}) | \vec{n}_i \rangle = \int \mathcal{D}[\vec{n}] \exp(i\mathcal{S}[\vec{n}]) \quad (15.63)$$

avec une action contenant un terme correspondant au hamiltonien et un terme de phase géométrique pour prendre en compte le caractère quantique du spin

$$\mathcal{S}[\vec{n}] = \mu s \int_0^t du \vec{n}(u) \cdot \vec{B} - s \int_0^t d\Omega(u)$$

$d\Omega(u) = (\vec{n}(u) \times d\vec{n}(u)) \cdot \vec{e} / (1 + \vec{e} \cdot \vec{n}(u))$ est l'élément d'angle solide engendré par le chemin $\vec{n}(u)$ pendant l'intervalle de temps $[u, u + du]$ (voir la figure 15.7). Il est défini en référence à un vecteur fixe \vec{e} qui permet de définir la base d'états cohérents $|\vec{n}\rangle$.

Il est assez facile de voir par les méthodes d'états cohérents de spin que cette intégrale de chemin se généralise à notre problème de chaînes de spin en interaction. Il suffit d'avoir un spin classique $\vec{n}_i(t)$ par site, donc un champ de spin et d'utiliser l'action

$$\mathcal{S}\{\{\vec{n}_i\}\} = -s \left(\sum_{j=1}^M \int d\Omega_j \right) + J s^2 \left(\sum_{i=1}^M \int dt (\vec{n}_{i+1}(t) \vec{n}_i(t)) \right) \quad (15.64)$$

où $d\Omega_i$ désigne l'angle sphérique engendré par la trajectoire du vecteur $\vec{s}_i(t)$ pendant l'intervalle dt .

Cependant, comme le couplage est antiferromagnétique, les orientations des spins ont tendance à alterner. Il est plus approprié de formuler les choses en termes de *spins répartis* (*staggered spins*) \vec{n}_i , définis comme

$$\vec{s}_i = (-1)^i \vec{n}_i \quad (15.65)$$

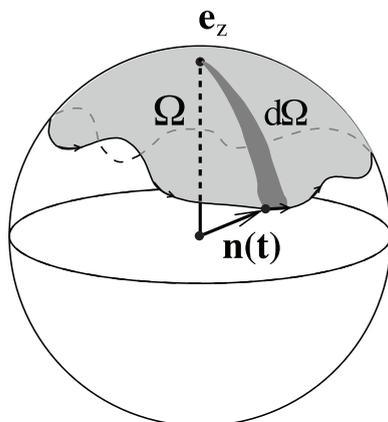


FIGURE 15.7 – La phase géométrique et l'angle solide intervenant dans l'intégrale de chemin pour le spin.

L'action pour ces nouveaux spins s'écrit (à une constante additive près)

$$\tilde{S}[\vec{n}_i] = s \left(\sum_{j=1}^N \left(\int d\Omega_{2j-1} - \int d\Omega_{2j} \right) \right) - \frac{J s^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{2N} \int dt (\vec{n}_{i+1}(t) - \vec{n}_i(t))^2 \right) \quad (15.66)$$

où $d\Omega_i$ désigne maintenant l'angle sphérique engendré par la trajectoire du vecteur $\vec{n}_i(t)$ pendant l'intervalle dt , voir Fig. 15.7.

15.2.4 Théorie effective de basse énergie

Jusqu'à ce stade aucune approximation n'a été faite. On cherche maintenant à déterminer l'action effective pour les excitations de basse énergie de cette chaîne de spins quantiques, en utilisant une approximation de type champ moyen, non rigoureuse mais éclairante, proposée notamment par D. Haldane.

On note a_0 la maille élémentaire de la chaîne (distance entre sites). On suppose que le spin \vec{n}_i peut s'écrire en termes de deux composantes, lentement variables par rapport au temps t et à la coordonnée d'espace $x = a_0 i$: une composante $\vec{m}_i(t)$ correspondant aux fluctuations du paramètre d'ordre \vec{m} (pour l'ordre de Néel), et une composante $\vec{\ell}_i(t)$ correspondant aux fluctuations de l'aimantation moyenne, elle aussi petite, car du même ordre que les dérivées de \vec{m} . On écrit donc

$$\vec{n}_{2i}(t) = \vec{m}_i(t) + a_0 \vec{\ell}_i(t) \quad , \quad \vec{n}_{2i+1}(t) = \vec{m}_i(t) - a_0 \vec{\ell}_i(t) \quad (15.67)$$

On a fait l'hypothèse que \vec{m} et $\vec{\ell}$ varient lentement, donc sont des *fonctions régulières* $\vec{m}(t, x)$ et $\vec{\ell}(t, x)$ du temps t et l'espace $x = 2a_0 i$. La taille du système

est $L = N2a_0$. Dans la limite continue $a_0 \rightarrow 0$ on suppose donc que

$$\vec{m}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \vec{\ell} \cdot \vec{m} = 0 \quad (15.68)$$

Au premier ordre en a_0 , on peut donc écrire (en symétrisant un peu les choses)

$$\vec{s}_{2j}(t) - \vec{s}_{2j-1}(t) = a_0 \left(\partial_x \vec{m}(t, x) + 2 \vec{\ell}(t, x) \right) \quad (15.69)$$

$$\vec{s}_{2j+1}(t) - \vec{s}_{2j}(t) = a_0 \left(\partial_x \vec{m}(t, x) - 2 \vec{\ell}(t, x) \right) \quad (15.70)$$

et donc les termes dans l'action 15.66 s'écrivent (en utilisant la formule différentielle pour $d\Omega$)

$$\int d\Omega_{2j-1} - \int d\Omega_{2j} = a_0 \int dt \left(\partial_x \vec{m} + 2 \vec{\ell} \right) \cdot (\vec{m} \times \partial_t \vec{m}) \quad (15.71)$$

et

$$(\vec{s}_{2j}(t) - \vec{s}_{2j-1}(t))^2 + (\vec{s}_{2j+1}(t) - \vec{s}_{2j}(t))^2 = a_0^2 \left(2(\partial_x \vec{m})^2 + 8 \vec{\ell}^2 \right) \quad (15.72)$$

L'action effective qui en résulte en termes de \vec{m} et $\vec{\ell}$ ne contient pas de dérivées de $\vec{\ell}$, et est d'ordre deux (quadratique) en $\vec{\ell}$. On peut donc intégrer explicitement sur le champ $\vec{\ell}$ dans l'intégrale fonctionnelle 15.63 pour obtenir une théorie donnée par une action effective pour le champ \vec{m} seulement.

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}[\vec{m}] = \frac{1}{2g} \iint dt dx \left(\frac{1}{v_s} (\partial_t \vec{m})^2 - v_s (\partial_x \vec{m})^2 \right) + \frac{\theta}{4\pi} \iint dt dx \vec{m} \cdot (\partial_t \vec{m} \times \partial_x \vec{m}) \quad (15.73)$$

avec les paramètres effectifs

$$g = \frac{2}{s} \quad , \quad v_s = 2Js a_0 \quad , \quad \theta = 2\pi s \quad (15.74)$$

15.2.5 Modèle O(3) et conjecture de Haldane

Cette action effective 15.74 pour le paramètre d'ordre antiferromagnétique \vec{m} est une action à temps réel. Elle contient deux termes. Le premier terme est un terme dynamique effectif, le deuxième est un terme topologique.

Discutons d'abord le premier terme. La densité lagrangienne du premier terme

$$\left(\frac{1}{v_s} (\partial_t \vec{m})^2 - v_s (\partial_x \vec{m})^2 \right)$$

est celle du modèle sigma non linéaire O(3) en 1+1 dimension, où le temps et l'espace sont rééchelonnés comme

$$t \rightarrow t\sqrt{v_s} \quad , \quad x \rightarrow x/\sqrt{v_s}$$

Autrement dit, il décrit la dynamique d'ondes de spin (modes de Goldstone) pour le paramètre d'ordre antiferro, se propageant à une vitesse

$$\text{vitesse des ondes de spin} = k/\omega = v_s,$$

au lieu de la vitesse de la lumière $k/\omega = 1$ pour le modèle relativiste décrit en 15.1.1. Le paramètre g joue le rôle d'un couplage effectif pour les ondes de spin.

On est donc dans la situation très intéressante d'un système quantique étendu (ici une chaîne de spin quantique unidimensionnelle) qui n'est bien entendu pas un système relativiste, mais dont la dynamique de basse énergie (dynamique des modes de Goldstone de masse nulle) exhibe une symétrie relativiste, donc une invariance sous un groupe de Lorentz $SO(1,1)$. Cette symétrie est une symétrie effective de basse énergie. Ceci est dû au caractère linéaire à basse énergie/grande longueur d'onde de la relation de dispersion des ondes de spin (dans l'approximation linéaire)

$$\omega/k = \pm v_s$$

Les paramètres g et v_s sont des paramètres effectifs. Leurs valeurs données par 15.74 dans l'approximation de type champ moyen seront *a priori* modifiées dans une démonstration exacte.

Le deuxième terme est un terme topologique. En effet, l'intégrale de ce terme s'écrit

$$\iint dt dx \vec{m} \cdot (\partial_t \vec{m} \times \partial_x \vec{m}) = 2\pi Q \quad (15.75)$$

où Q est la charge topologique (un nombre entier) définie par 15.46 dans la section 15.1.6 pour le modèle sigma $O(3)$ bidimensionnel. Le paramètre θ correspond bien à l'angle topologique du modèle $O(3)$. La relation entre cet angle et le spin s ,

$$\theta = 2\pi s$$

est une relation topologique. On s'attend donc à ce qu'elle reste valable dans une théorie effective exacte. L'angle topologique θ est défini modulo 2π , on a donc deux cas très différents

$$\text{spin } s \text{ entier} \implies \theta = 0 \quad (15.76)$$

et

$$\text{spin } s \text{ demi-entier} \implies \theta = \pi \quad (15.77)$$

On en déduit que la dynamique de basse énergie est très différente suivant ces deux cas.

Spin entier : Il n'y a pas de terme topologique. La théorie de basse énergie est celle du modèle sigma $O(3)$ en 1+1 dimension. Comme cela a été discuté en section 15.1.3 les fluctuations (ici quantiques) ont pour effet de restaurer dynamiquement la symétrie $O(3)$. La théorie effective de très basse énergie

est en fait massive. Ceci veut dire que la chaîne de spin quantique antiferromagnétique est désordonnée, et que le spectre en énergie possède un gap en énergie. L'état fondamental est invariant $O(3)$ et le premier état excité est un singlet de $O(3)$, donc un multiplet vectoriel composé de trois états d'énergie $\Delta E \simeq \exp(-4\pi/g)$.

Spin demi-entier : L'angle θ vaut π . Comme discuté (au niveau empirique) dans la section 15.1.6, c'est la valeur particulière pour le terme topologique où la dynamique de très basse énergie du modèle sigma est gouvernée par un point fixe infrarouge non trivial ! La symétrie $O(3)$ n'est pas restaurée dynamiquement. Les fonctions de corrélations vont décroître algébriquement à grande distance, et non pas exponentiellement. On parle alors de pseudo-ordre, car le théorème de Mermin-Wagner-Coleman n'est pas violé, il y a des modes de masse nulle, mais ce ne sont pas des modes de Goldstone. En tout état de cause, le modèle n'a pas de gap en énergie.

Conjecture de Haldane Ceci conduit donc à la prédiction générale sur le spectre de basse énergie d'une chaîne de spins quantiques antiferromagnétique, énoncée par D. Haldane

$$\begin{aligned} \text{spin } s \text{ entier} &\implies \text{ gap en énergie} \\ \text{spin } s \text{ demi-entier} &\implies \text{ pas de gap en énergie} \end{aligned} \quad (15.78)$$

Cette conjecture est confirmée par de très nombreuses études : résultats exacts par des méthodes de systèmes intégrables pour des petites valeurs du spin ($s = 1/2$, $s = 1$), étude numérique et analytique du spectre pour des chaînes de taille finie et analyse par les méthodes de loi d'échelles de taille finie (*finite size scaling* ou FFS).

15.2.6 Notes

Le contenu de cette section s'inspire assez largement du livre de Tsvelik [Tsv07]. On pourra consulter également celui de Fradkin [Fra13].

15.3 Modèle XY, gaz de Coulomb et modèle de sine-Gordon

15.3.1 Définition, ondes de spin

Le cas du modèle sigma $O(2)$ est particulier et très intéressant, car il met en évidence le rôle des excitations topologiques que sont les vortex, et l'existence d'un ordre topologique, et la possibilité d'avoir des transitions de phases topologiques en deux dimensions.

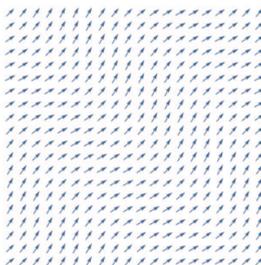


FIGURE 15.8 – Onde de spin dans le modèle XY 2D.

Le cas $N = 2$ est spécial, car le spin peut s'écrire en termes d'une seule variable d'angle θ

$$\mathbf{S}(x) = (\cos(\theta(x)), \sin(\theta(x))) \quad (15.79)$$

L'action continue pour le modèle sigma non linéaire $N = 2$ s'écrit simplement en termes de cette variable

$$\mathcal{H}[\theta] = \int d^2x \frac{1}{2g} (\nabla_x \theta(x))^2 \quad (15.80)$$

C'est l'action d'un champ libre scalaire en deux dimensions, donc naïvement il n'y a pas de renormalisation possible, ni pour le couplage (température) g , ni pour la norme de \vec{S} .

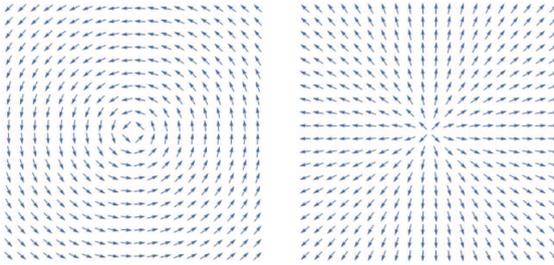
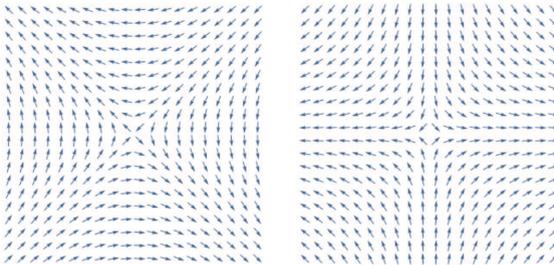
15.3.2 Vortex

Les choses ne sont pas si simples, et plus intéressantes, car il faut se souvenir que la variable θ est un angle, donc n'est définie que modulo 2π . On dit que le champ θ correspondant à un boson est « compactifié », ici sur un cercle de rayon unité $R = 1$. Il est possible d'avoir des configurations de spin avec des singularités topologiques, les vortex. Si l'on considère une courbe fermée orientée \mathcal{C} dans le plan, la charge topologique $m_{\mathcal{D}}$ totale contenue dans le domaine \mathcal{D} à l'intérieur de la courbe est définie comme le nombre de tours effectué par le spin lorsqu'on le suit le long de la courbe. C'est donc un entier.

$$\oint_{\mathcal{C}} dx^\mu \partial_\mu \theta = 2\pi m_{\mathcal{D}} \quad , \quad m_{\mathcal{D}} \in \mathbb{Z} \text{ entier} \quad (15.81)$$

Ces vortex sont inévitablement présents dans le modèle sur réseau. Dans les figures 15.8, 15.9 et 15.10 sont représentées respectivement une configuration sans vortex (onde de spins), des configurations avec une singularité élémentaire de charge $m = 1$ (vortex), et des configurations avec une singularité de charge $m = -1$ (anti-vortex).

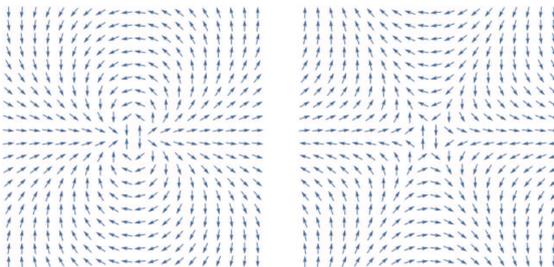
Il faut souligner que les différentes configurations de la figure 15.9 sont obtenues par une rotation globale des spins, elles sont donc topologiquement

FIGURE 15.9 – Des vortex $m = 1$ dans le modèle XY 2D.FIGURE 15.10 – Des (anti-)vortex $m = -1$ dans le modèle XY 2D.

équivalentes. Il en est de même pour celles de la figure 15.10. Enfin, sur la figure 15.11 sont donnés des exemples de singularités de charge topologique plus élevée $m = 2$ et $m = -2$.

En première approximation, on peut découpler les vortex des ondes de spin en écrivant une configuration comme

$$\theta = \theta_{\text{vortex}} + \theta_{\text{onde de spin}} \quad (15.82)$$

FIGURE 15.11 – Vortex avec $m = 2$ et $m = -2$ dans le modèle XY 2D.

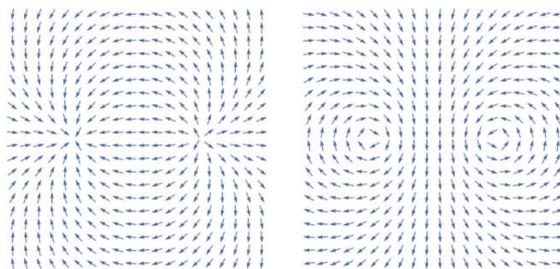


FIGURE 15.12 – Paires vortex-vortex dans le modèle XY 2D.

où θ_{vortex} est une configuration d'énergie minimale, les singularités où la charge topologique est localisée étant fixées. $\theta_{\text{onde de spin}}$ représente les fluctuations autour de ces configurations.

15.3.3 Analogie électrostatique

Cependant les vortex ont une énergie grande. Il est facile de voir que le gradient du champ décroît avec la distance à un vortex élémentaire de charge $m = \pm 1$ (ici situé à l'origine) comme

$$|\nabla\theta_{\text{vortex}}(x)| \simeq \frac{1}{|x|} \quad (15.83)$$

Donc l'énergie d'une configuration avec un vortex est

$$E_{\text{vortex}} = \mathcal{H}[\theta_{\text{vortex}}] \simeq \frac{\pi}{g} \log(L/a) \quad (15.84)$$

a étant le régulateur à courte distance (la maille du réseau) et L un régulateur à grande distance (la taille du système).

De même, si on considère une paire vortex-vortex à une distance d , telle celle représentée sur la figure 15.12, la configuration d'énergie minimale a une énergie

$$E_{\text{vortex-vortex}} \simeq \frac{\pi}{g} \log\left(\frac{L^4}{d^2 a^2}\right) \quad (15.85)$$

tandis que pour une paire vortex-antivortex, telle celle représentée sur la figure 15.13, l'énergie est

$$E_{\text{vortex-antivortex}} \simeq \frac{\pi}{g} \log\left(\frac{d^2}{a^2}\right) \quad (15.86)$$

On voit sur ces résultats que les vortex se comportent comme des charges électriques en 2 dimensions, de charge égale à leur charge topologique $q = m$.

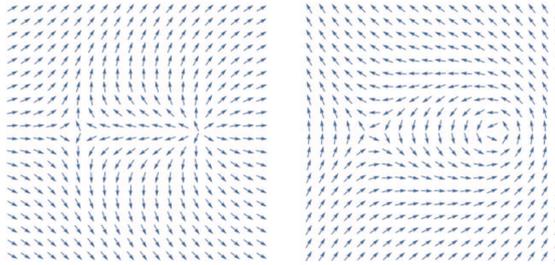


FIGURE 15.13 – Paires vortex-antivortex dans le modèle XY 2D.

L'électrostatique de Coulomb en deux dimensions est simplement définie par le potentiel de Coulomb créé par une charge q au point x_0

$$\phi_q(x) = -\frac{q}{2\pi} \log(|x - x_0|) \quad (15.87)$$

qui donne un champ électrique radial en $1/r$.

Cette analogie électrostatique est profonde et peut se formuler mathématiquement. Le champ électrique E^μ , le potentiel de Coulomb ϕ et la densité de charge topologique ρ sont donnés par

$$E^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \theta = \partial_\mu \phi \quad , \quad \Delta \phi = 2\pi \rho \quad (15.88)$$

Le modèle XY sur réseau peut être formulé comme un modèle de gaz de Coulomb bidimensionnel, avec des charges entières $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ couplées (faiblement) à un champ d'ondes de spin décrites par un boson (champ scalaire) non compactifié.

On voit que des vortex de mêmes charges se repoussent, mais que des vortex de charges opposées s'attirent. L'énergie d'une configuration avec un seul vortex $q = m = \pm 1$, ou plus généralement d'une configuration de charge topologique totale Q , diverge avec la taille du système L comme $Q^2 \log(L)$. Il n'est donc possible *a priori* d'avoir des vortex dans un système de grande taille seulement si la charge totale est nulle $Q = 0$, autrement dit s'il y a autant de vortex que d'antivortex.

15.3.4 Thermodynamique des vortex/gaz de Coulomb

Le fait que l'énergie d'un vortex isolé se comporte comme le log du volume implique qu'il existe un phénomène de libération des vortex à haute température. Ici g joue le rôle de la température T dans la fonction de partition

$$Z = \int \prod_x d\theta(x) \exp\left(-\frac{1}{2g} \int d^2x (\partial_\mu \theta)^2\right) \quad (15.89)$$

L'entropie S d'un vortex est le logarithme du nombre de configurations possibles W , qui est simplement le nombre de sites où le vortex peut être localisé

$$W = \mathcal{N} = \left(\frac{L}{a}\right)^2 \quad (15.90)$$

L'énergie libre est donc

$$F = E - TS = (\pi - 2g) \log(L/a) \quad (15.91)$$

Tant que $g < \pi/2$ (basse température), l'énergie libre d'un vortex est plus grande que celle d'une configuration sans vortex. Les vortex sont thermodynamiquement très peu probables. Par contre si $g > \pi/2$ ils sont thermodynamiquement favorisés, le gain en entropie l'emporte sur le coût en énergie.

15.3.5 La transition de Kosterlitz-Thouless-Berezinski

La température critique

$$g_{KT} = \pi/2 \quad (15.92)$$

correspond à une transition de phase topologique. À basse température les vortex peuvent être négligés. C'est la phase de Coulomb. Le champ θ peut être traité comme un champ libre non compactifié, la densité de vortex est nulle, et la fonction à deux points décroît algébriquement

$$G(x) = \langle \cos(\theta(x) - \theta(0)) \rangle \simeq |x/a|^{-\frac{g}{2\pi}} \quad (15.93)$$

Par contre dans la phase de haute température, la densité des vortex est finie, et le système est dans une phase plasma 2D. Il y a écrantage de Debye et la fonction de corrélation décroît exponentiellement (phase massive) comme

$$G(x) = \langle \cos(\theta(x) - \theta(0)) \rangle \simeq \exp(-|x|/\xi) \quad (15.94)$$

Cette transition de phase porte le nom de Berezinski-Kosterlitz-Thouless (BKT ou KT).

Une analyse de groupe de renormalisation est possible, en considérant les deux paramètres importants dans un modèle de gaz de Coulomb : la température g et un paramètre effectif z correspondant à la fugacité des vortex (ce paramètre sera d'ordre $\mathcal{O}(1)$ à l'échelle microscopique du réseau). Les fonctions de Wilson donnant les flots du groupe de renormalisation ont été déjà présentées en section 13.3.3, et sont

$$W_g(g, z) = \mathbf{a} z^2 \quad , \quad W_z(g, z) = \mathbf{b} z(g - g_{KT}) \quad (15.95)$$

avec \mathbf{a} et \mathbf{b} des constantes positives. Le principe du calcul sera donné dans le cadre du modèle dual de sine-Gordon. La ligne critique $g_c(z)$ définie par

$$g_c(z) - g_{KT} = -\sqrt{a/b} z \quad (15.96)$$

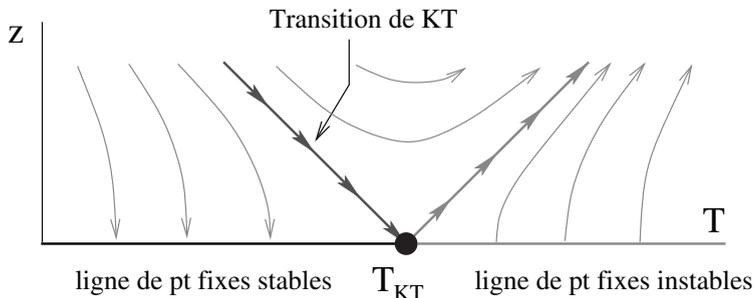


FIGURE 15.14 – Les flots du modèle XY : un exemple de ligne de points fixes.

sépare les deux phases. La fugacité renormalisée tend vers zéro dans l'IR si $g < g_c$ (phase de Coulomb de basse température) et devient grande dans l'IR si $g > g_c$ (phase massive « plasma » avec écrantage à haute température). La même analyse de scaling que pour le voisinage d'un point fixe ordinaire permet de montrer que si on part d'un modèle microscopique avec une fugacité z , la longueur de corrélation ξ dans la phase massive diverge au point de KT quand on abaisse la température g (z étant fixé) comme

$$\xi \propto \exp\left(\mathbf{c}(z)/\sqrt{g - g_c(z)}\right) \quad (15.97)$$

$\mathbf{c}(z)$ dépendant de \mathbf{a} , \mathbf{b} et z . La longueur de corrélation diverge exponentiellement à la transition KT. C'est différent d'une transition de phase ordinaire, où elle diverge algébriquement comme $\xi \propto |g - g_g|^{-\nu}$.

15.3.6 Le modèle de sine-Gordon

Le modèle de sine-Gordon (SG) est une théorie des champs en 1+1 dimension qui a de nombreuses propriétés remarquables. Il est défini par l'action euclidienne

$$\mathcal{H}[\phi] = \int d^2x \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - u \cos(\beta\phi) \quad (15.98)$$

et est donc invariant par des translations discrètes du champ $\phi \rightarrow \phi + 2\pi/\beta$. Ce modèle possède des solutions de type soliton, est intégrable classiquement et quantiquement (il possède une infinité de quantités conservées non locales, en plus de l'énergie et de l'impulsion du champ). On peut le voir également comme la limite $m \rightarrow \infty$ de la théorie de LGW décrivant un point m -critique avec m minima, ou d'un modèle d'horloge \mathbb{Z}_m .

Il nous intéresse ici, car il est *dual* du gaz de Coulomb et donc du modèle XY dans le sens suivant. Si on développe la fonction de partition du modèle de SG en perturbation dans le « couplage » u , on obtient

$$Z[u]/Z[0] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{u^N}{N!} \int d^2x_1 \cdots d^2x_N \langle \cos(\beta\phi(x_1)) \cdots \cos(\beta\phi(x_N)) \rangle_0 \quad (15.99)$$

où $\langle \dots \rangle_0$ est la valeur moyenne pour la théorie du champ libre de masse nulle (la théorie à $u = 0$). À partir du propagateur

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_0 = -\frac{1}{2\pi} \log(|x_1 - x_2|/L) \quad (15.100)$$

où L est la taille du système (régulateur IR), il est facile de calculer que dans la limite $L \rightarrow \infty$, seuls les termes pairs $N = 2M$ subsistent, et peuvent se calculer comme

$$\begin{aligned} \frac{4^{-M}}{(M!)^2} \int d^2x_1 \cdots d^2x_M d^2y_1 \cdots d^2y_M \prod_{1 \leq i \leq M} a^{\frac{\beta^2}{4\pi}} \prod_{1 \leq i < j \leq M} |x_i - x_j|^{\frac{\beta^2}{4\pi}} \\ \prod_{1 \leq i < j \leq M} |y_i - y_j|^{\frac{\beta^2}{4\pi}} \prod_{1 \leq i \neq j \leq M} |x_i - y_j|^{-\frac{\beta^2}{4\pi}} \quad (15.101) \end{aligned}$$

a est le régulateur UV, définissant le propagateur à points coïncidents $\langle \phi(x)\phi(x) \rangle_0 = -\frac{1}{2\pi} \log(a/L)$. Autrement dit, le terme d'ordre u^{2M} est égal à la fonction de partition d'un ensemble de M particules indiscernables de charges $+1$ et de M particules indiscernables de charges -1 , interagissant par un potentiel de Coulomb, et à température $T = 2\pi/\beta^2$. Le modèle de sine-Gordon est donc équivalent au gaz de Coulomb et au modèle XY, si on identifie u avec la fugacité z des vortex, et on identifie la température g du modèle XY avec l'inverse de la température du modèle SG

$$z \leftrightarrow u/2 \quad , \quad \frac{g}{2\pi} \leftrightarrow \frac{2\pi}{\beta^2} \quad (15.102)$$

Le modèle de sine-Gordon est dual du modèle XY dans le sens suivant : la phase de haute température d'un modèle est identifiée à la phase basse température de l'autre modèle. On peut également identifier le champ ϕ du modèle de SG au potentiel ϕ dual du champ θ du modèle XY dans 15.88. Les vortex de charge $m = \pm 1$ dans XY correspondent dans le modèle de SG aux « opérateurs de vertex » $\exp(\pm i\beta\phi)$.

Les renormalisations de la fugacité z et de la température g dans le modèle XY peuvent s'obtenir par cette dualité à partir de la renormalisation du couplage u et de la température β^2 du modèle de SG, qui se calcule en théorie des perturbations. Il faut renormaliser les opérateurs de vertex par une prescription de produit normal

$$:e^{\pm i\beta\phi}: = a^{-\frac{\beta^2}{4\pi}} e^{\pm i\beta\phi} \quad (15.103)$$

ce qui conduit à la renormalisation de u , donc de z . La renormalisation de β^2 , donc de g est un peu plus subtile et vient des singularités à courte distance dans 15.103, qui correspondent au développement à courte distance (OPE) du produit de deux opérateurs de vertex

$$e^{i\beta\phi(\frac{x}{2})} e^{-i\beta\phi(\frac{x}{2})} \underset{x \rightarrow 0}{=} |x|^{-\beta^2/4\pi} \left[\mathbf{a} + (\mathbf{b} x^\mu x^\nu + \mathbf{c} |x|^2 \delta^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi(0) + \dots \right] \quad (15.104)$$

15.3.7 Exercices

Exercice 15.1. En utilisant 15.88, calculer la configuration $\theta_{\text{vortex}}(x)$ d'énergie minimale du modèle XY avec un vortex de charge m en un point x_0 . En déduire que l'énergie est $E_m = m^2 \frac{\pi}{g} \log(L/a)$.

Exercice 15.2. Calculer la configuration $\theta(x)$ d'énergie minimale (dans le continu et dans l'espace infini) d'une configuration avec N vortex de charges respectives $m_1, m_2 \cdots m_N$ en des points arbitraires $x_1, x_2 \cdots x_N$.

Exercice 15.3. En supposant un régulateur IR L (taille du système) grand devant les distances entre vortex, et un régulateur UV a petit devant ces mêmes distances, montrer que l'énergie totale de la configuration diverge avec la taille du système L comme $m_{\text{total}}^2 \frac{\pi}{g} \log(L)$ où $m_{\text{total}} = m_1 + m_2 + \cdots m_N$ est la charge topologique totale de la configuration. Montrer que cette énergie est finie seulement quand $m_{\text{total}} = 0$ (et $a > 0$).

Exercice 15.4. Calculer cette énergie. Comment diverge-t-elle quand $a \rightarrow 0$?

Exercice 15.5. Déduire l'identité 15.101 pour le modèle de SG.

Exercice 15.6. En utilisant le théorème de Wick et le propagateur de masse nulle en $d = 2$, calculer les coefficients **a**, **b** et **c** dans l'OPE 15.104 de deux opérateurs de vertex pour le champ libre de masse nulle.

Exercice 15.7. En déduire les flots du GR pour u et β^2 . Montrer que u est relevant (au sens du GR de Wilson) quand $\beta^2 < 8\pi$ et irrelevant quand $\beta^2 > 8\pi$. Comparer avec les flots du modèle XY.

Exercice 15.8. Montrer que des termes d'ordre plus élevés dans l'action comme $\cos(2\beta\phi)$, $\cos(3\beta\phi)$ sont toujours irrelevants au sens du groupe de renormalisation au voisinage du point critique $\beta_c^2 = 8\pi$.

15.3.8 Notes

La transition topologique du modèle XY a été proposée indépendamment par V. Berezinsky en 1972 et par J. Kosterlitz et D. Thouless en 1973. Le modèle classique de sine-Gordon en 1+1 dimensions est connu depuis le XIX^e siècle des mathématiciens. Depuis les années 1970 il est très étudié par les physiciens, en raison de ses propriétés d'intégrabilité classique et quantique, de l'existence de solitons, et de ses propriétés de dualité, à la fois avec le gaz de Coulomb, et avec un modèle de fermions, le modèle de Thirring (cette célèbre dualité a été découverte par S. Coleman). La discussion du modèle présentée ici suit les ouvrages classiques, voir en particulier [ID91] et [Car96], ainsi que le chapitre 2 du livre de D.R. Nelson [Nel02]. D'autres systèmes présentent une transition topologique induite par des singularités topologiques de type vortex. On peut mentionner notamment la théorie de la fusion cristal/liquide

en deux dimensions, et la possibilité d'une phase intermédiaire dite phase hexatique, induite par les défauts (dislocations et disinclinaisons). Les défauts jouent également un rôle fondamental dans la théorie des cristaux liquides. Enfin, mentionnons que le modèle de sine-Gordon et le modèle XY sont également reliés au problème de la transition rugueuse (voir plus bas).

Chapitre 16

Surfaces, interfaces et membranes

16.1 Interfaces et mouillage

Des problèmes faisant intervenir des interfaces (soit entre des phases fluides, soit entre phases magnétiques) peuvent être traités comme des problèmes de physique quantique ou de théorie des champs. C'est par exemple le cas des problèmes d'interaction d'une interface avec une paroi, qui permettent de traiter les phénomènes de mouillage. Nous en donnons un aperçu ici.

16.1.1 Mouillage en 1+1 dimension

Mouillage : théorie de champ moyen

On considère un système en dimension deux présentant deux phases thermodynamiques A et B en coexistence (modèle d'Ising à $T < T_c$, fluide binaire, fluide à la ligne de coexistence liquide/vapeur, etc.). Il y a donc possibilité d'interface entre ces deux phases. L'énergie d'une interface peut s'écrire comme

$$\mathcal{E}_{\text{interface}} = \sigma \times \text{aire de l'interface}$$

où σ est la tension de surface entre les 2 phases A et B

$$\sigma_{A|B} = \sigma > 0$$

En dimension $D = 2$ l'interface est de dimension $D - 1$, donc c'est une ligne, et σ est la tension de ligne, mais nous gardons la dénomination générique de tension de surface.

Supposons maintenant que le système (le fluide) est dans un espace semi-infini (demi-plan) et est donc en contact avec une paroi plane (une ligne). Il faut associer une énergie de surface aux configurations où c'est ou la phase A, ou la phase B qui est en contact avec la paroi.

$$\sigma_{A|\text{paroi}} = \sigma_A \quad , \quad \sigma_{B|\text{paroi}} = \sigma_B$$

Si la paroi préfère être en contact avec la phase A plutôt qu'avec la phase B, ceci veut dire que

$$\sigma_A < \sigma_B$$

sinon c'est l'inverse.

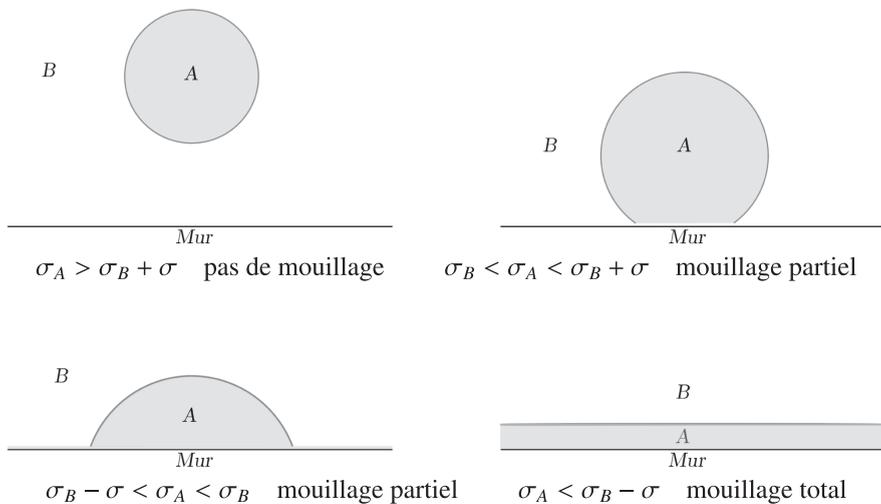


FIGURE 16.1 – Interaction goutte-paroi et mouillage en fonction des tensions de surface.

Maintenant, considérons le cas dans lequel le système est dans la phase B , en contact avec la paroi, avec une goutte de volume (aire) fini \mathcal{V} , et fixé, de la phase A . S'il n'y a pas de paroi (système infini), la configuration d'équilibre (énergie minimale) est une bulle sphérique (cercle) de A dans B qui minimise l'aire (la longueur) de l'interface.

En présence de la paroi, la bulle de A peut venir se coller à la paroi. On dit alors qu'il y a mouillage. Pour voir quelle situation est énergiquement favorisée, il faut comparer les trois tensions σ , σ_A et σ_B . Si $\sigma_B + \sigma < \sigma_A$ la paroi est directement en contact avec la phase B et il n'y a pas de mouillage. Si $\sigma_B - \sigma < \sigma_A < \sigma_B + \sigma$ la goutte de phase A colle à la paroi avec un angle de contact θ . On dit qu'il y a mouillage partiel. Enfin si $\sigma_A < \sigma_B - \sigma$ la paroi préfère être isolée de B par un film mouillant de la phase A . En particulier, si une goutte de A entre en contact avec la paroi, elle la mouille complètement. On dit qu'il y a mouillage complet.

Dans le cas intermédiaire du mouillage partiel, l'angle de contact de l'interface avec la paroi, θ , est fixé simplement par l'équilibre des forces de tension superficielle qui s'exercent sur le point de contact P entre les deux phases sur le mur (figure 16.2).

$$\sigma_B = \sigma_A + \sigma \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\sigma_B - \sigma_A}{\sigma}\right)$$

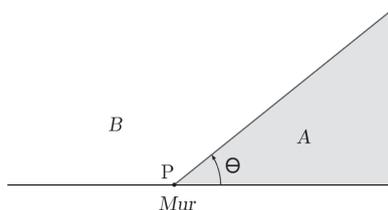


FIGURE 16.2 – Angle de contact de l’interface avec la paroi dans la phase de mouillage partiel.

Transition de mouillage

La transition entre le mouillage partiel et le mouillage total a toutes les caractéristiques d’une transition de phase (on parle de transition de paroi). En effet, elle sépare deux phases macroscopiquement différentes pour l’interface. Quand il y a mouillage partiel ou pas de mouillage l’interface préfère être loin de la paroi, tandis que quand il y a mouillage total l’interface préfère être proche de la paroi.

L’angle de contact θ peut être considéré comme un paramètre d’ordre de la transition (c’est l’analogie de la magnétisation pour le modèle d’Ising). Le paramètre qui gouverne la transition est la tension de l’interface σ car si on considère que σ_A et σ_B varient peu en fonction des paramètres physiques (température, etc.) alors que σ varie plus vite, il existe une tension critique σ_{crit}

$$\sigma_{\text{crit}} = \sigma_B - \sigma_A \quad (16.1)$$

telle que si $\sigma < \sigma_c$ le mouillage est total et $\theta = 0$ tandis que si $\sigma > \sigma_c$ le mouillage est partiel et $\theta > 0$. En fonction d’un paramètre réduit t défini par exemple comme

$$t = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_c} = \frac{\sigma_B - \sigma_A - \sigma}{\sigma_B - \sigma_A}$$

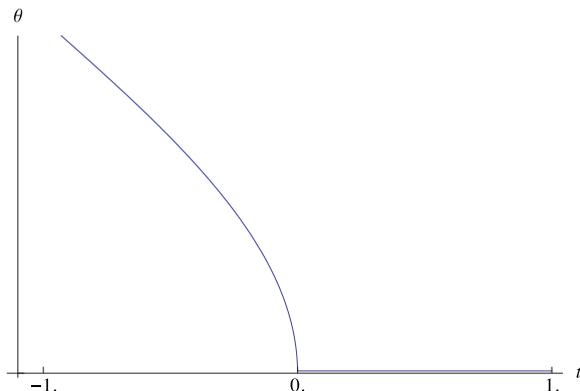
l’angle de contact se comporte comme

$$\theta = 0 \quad \text{si } t > 0 \quad ; \quad \theta \sim \sqrt{|t|} \quad \text{si } t < 0 \quad (16.2)$$

Un modèle microscopique en 1+1 dimension

Ce traitement est une théorie du champ moyen. Il ne prend en compte ni la structure de l’interface, ni les détails de l’interaction à la paroi, ni l’effet des fluctuations thermiques.

En fait, puisque la transition de mouillage (par la phase A) se produit à $\sigma_A = \sigma_B - \sigma$ et que $\sigma > 0$ on est dans la situation où $\sigma_A < \sigma_B$ et où la paroi préfère être en contact avec A qu’avec B. Au niveau microscopique, dans la situation de mouillage partiel, les régions où la paroi n’est pas mouillée par

FIGURE 16.3 – L'angle de contact en fonction du paramètre t .

A sont quand même en contact avec A , mais par un film d'épaisseur microscopique (quelques molécules) comme on va le voir dans le modèle microscopique qui suit.

Pour aller plus loin et prendre en compte l'effet des fluctuations, on va utiliser ici un modèle semi-microscopique ultra simplifié en 1+1 dimensions.

Il faut d'abord une modélisation des fluctuations de l'interface. L'interface est caractérisée par sa hauteur $z(x) > 0$ au-dessus de la paroi. On suppose que les ondulations (fluctuations thermiques) sont de faible amplitude (comparées à leur longueur d'onde), si bien qu'on néglige les « surplombs » et qu'on approxime l'énergie de l'interface en ne gardant que les termes quadratiques en $\nabla z = \frac{\partial z}{\partial x}$

$$\mathcal{E}_{\text{interface}} = \sigma \int dx \sqrt{1 + (\nabla z)^2} \simeq \sigma \int dx \frac{1}{2} (\nabla z)^2 \quad (16.3)$$

On modélise ensuite l'interaction interface-paroi. Cette interaction est modélisée par un potentiel à courte portée (typiquement exponentiel si on suppose que les interactions fluide-paroi sont écrantées à une échelle ℓ), de la forme (par exemple)

$$\mathcal{E}_{\text{interaction}} = \int dx U(z(x)) \quad , \quad U(z) = e^{-2z/\ell} + t e^{-z/\ell} \quad (16.4)$$

Le paramètre t va jouer le rôle du paramètre réduit t de la théorie de champ moyen. Le premier terme modélise l'effet répulsif de la paroi (à courte distance), le second terme l'interaction répulsive ou attractive à plus longue portée, qui va induire la transition de mouillage.

On considère bien sûr un système infini dans la direction x et semi-infini dans la direction z , donc on travaille dans la limite thermodynamique

$$-\infty < x < \infty \quad (16.5)$$

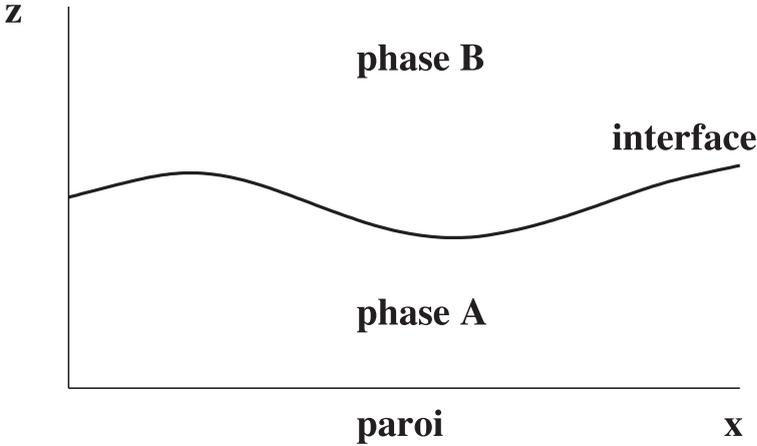


FIGURE 16.4 – Modélisation de l’interface comme une fonction de hauteur $z(x)$.

Pour un système fini dans la direction x , il n’y a pas de transition.

Dans une approximation de champ moyen, il faut juste minimiser l’énergie d’une configuration homogène

$$z(x) = z \quad , \quad \mathcal{H}[z] = \mathcal{E}_{\text{interface}} + \mathcal{E}_{\text{interaction}} \propto U(z) \quad (16.6)$$

Le paramètre t contrôle bien la transition de mouillage. Si $t < 0$, l’interface est piégée en un $z = z_{\min}(t)$ fini. On a un film mouillant d’épaisseur microscopique et on est dans la situation de mouillage partiel. L’énergie de l’interface à ce minimum est

$$U_{\min} = U(z = z_{\min}) < U_{\infty} = U(z = +\infty) \quad (16.7)$$

et ces énergies correspondent dans la description macroscopique à

$$U_{\min} = \sigma_B \quad , \quad U_{\infty} = \sigma_A + \sigma \quad (16.8)$$

Si $t > 0$, l’interface préfère être à grande distance de la paroi $\ell \ll z \rightarrow \infty$. On est dans la situation du mouillage total.

La façon dont la distance $z_{\min}(t)$ diverge et dont l’énergie $U_{\min} - U_{\infty} = \sigma_A + \sigma - \sigma_B$ s’annule quand le paramètre microscopique $t \rightarrow 0_-$ dépend des détails de l’interaction interface-paroi.

Influence des fluctuations thermiques

Quelle est l’influence des fluctuations thermiques sur la transition ? Pour cela il faut sommer sur les différentes configurations de l’interface et calculer la fonction de partition

$$Z = \int \mathcal{D}[z(x)] e^{-\frac{1}{T} \mathcal{H}[z(x)]} \quad (16.9)$$

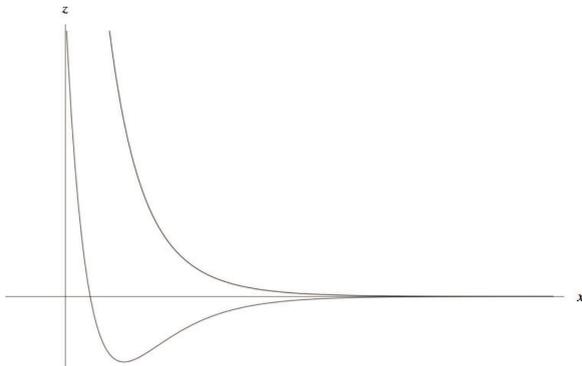


FIGURE 16.5 – Le potentiel $U(z)$ d'interaction entre l'interface et la paroi : à droite, $t > 0$ potentiel répulsif ; à gauche, $t < 0$ potentiel attractif.

avec T la température et \mathcal{H} l'énergie

$$\mathcal{H}[z] = \mathcal{E}_{\text{interface}} + \mathcal{E}_{\text{interaction}} = \int dx \left(\frac{\sigma}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + U(z) \right) \quad (16.10)$$

Dans la suite on absorbera la température T dans la normalisation de la tension σ et du potentiel $U(z)$, de façon à ce que $T = 1$. On peut également normaliser x et z de façon à ce que la tension $\sigma = 1$. Le seul paramètre du modèle est le paramètre t dans le potentiel $U(z)$ donné par 16.4.

On va s'intéresser à la distance moyenne de l'interface à la paroi $\langle z \rangle$

$$\langle z \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[z(x)] e^{-\mathcal{H}[z(x)]} z(x_0) \quad (16.11)$$

L'importance et la portée des fluctuations thermiques sont caractérisées par la fonction de corrélation connexe

$$G(x-y) = \langle z(x)z(y) \rangle - \langle z(x) \rangle \langle z(y) \rangle \quad (16.12)$$

et la longueur de corrélation ξ

$$G(x-y) \simeq e^{-|x-y|/\xi} \quad \text{quand } |x-y| \rightarrow \infty \quad (16.13)$$

Une autre quantité intéressante est l'énergie libre par unité de longueur

$$f = - \lim_{\mathcal{L} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{L}} \log(Z) \quad \mathcal{L} \text{ taille du système dans la direction } x \quad (16.14)$$

où Z_0 est la fonction de partition pour une interface libre, donc avec $U_0(z) = 0$. En effet f va correspondre à la tension effective du système lorsque l'interface est en contact avec la paroi (mouillage partiel, B en contact avec la paroi), c'est-à-dire

$$f = [\sigma_B]_{\text{eff.}} \quad (16.15)$$

Le terme « effectif » voulant dire : les fluctuations thermiques étant prises en compte, afin d'obtenir des énergies libres.

Si Z_0 est la fonction de partition pour une interface libre, donc avec $U_0(z) = 0$, la densité d'énergie libre correspondante f_0

$$f_0 = - \lim_{\mathcal{L} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathcal{L}} \log(Z_0) \quad \mathcal{L} \text{ taille du système dans la direction } x \quad (16.16)$$

est la tension effective du système lorsque l'interface est loin de la paroi (mouillage total, A en contact avec la paroi et une interface A/B loin de la paroi). Donc f_0 correspond à

$$f_0 = [\sigma_A + \sigma]_{\text{eff}}. \quad (16.17)$$

Lorsque le paramètre t varie, $\langle z \rangle$, ξ et f varient. On s'attend toujours à rencontrer un point critique t_{crit} correspondant à une transition de mouillage.

Quand $t < t_c$ l'interface reste accrochée à la paroi (situation de mouillage partiel) et on aura $\langle z \rangle < \infty$ (l'interface est à une distance finie de la paroi), $\xi < \infty$ (la longueur de corrélation est finie) et $f < f_0$ (l'énergie libre est minimisée lorsque l'interface est proche de la paroi).

Au contraire, quand $t > t_c$ l'interface est libre (situation de mouillage total), et $\langle z \rangle = \infty$, $\xi = \infty$, $f = f_0$ (l'énergie libre est minimisée lorsque l'interface est loin de la paroi et n'interagit plus avec elle).

Le problème est donc de déterminer si effectivement il a une telle transition, d'estimer la valeur de t_{crit} , et comment $\langle z \rangle = \infty$ et ξ divergent (s'ils divergent) quand $t \rightarrow t_{\text{crit}}$, et comment f tend vers f_0 . En effet par les mêmes arguments de champ moyen, on s'attend à ce qu'à la transition, l'angle de contact θ se comporte comme

$$\theta \propto \sqrt{f_0 - f} \quad (16.18)$$

16.1.2 Modèle quantique, exposants critiques

La fonction de partition est donc (on normalise $T = 1$)

$$Z \simeq \int \mathcal{D}[z] \exp\left(- \int dx \left(\frac{\sigma}{2} (\nabla z)^2 + U(z) \right)\right) \quad (16.19)$$

Z est donc l'intégrale de chemin à temps euclidien pour une particule quantique de masse $m = \sigma$, de coordonnée $q = z$ sur une ligne dans le potentiel $U(z)$. Le hamiltonien quantique est donc

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\sigma} \mathbf{P}^2 + V(\mathbf{z}) \quad , \quad \mathbf{P} = i \frac{\partial}{\partial z}$$

En utilisant le dictionnaire quantique/statistique précédent, les propriétés du système interface/paroi s'obtiennent en fonction du fondamental du modèle quantique et de son spectre. Il faut donc caractériser le spectre de ce système en résolvant l'équation de Schrödinger

$$-\psi'' + U(z)\psi = E\psi.$$

On peut, à la place du potentiel $U(z)$ donné par 16.4, utiliser un potentiel encore plus simple en palier de la forme

$$U(z) = \begin{cases} +\infty & \text{si } z < 0, \\ t & \text{si } 0 < z < \ell \\ 0 & \text{si } z > \ell. \end{cases} \quad (16.20)$$

On a donc un mur dur en $z = 0$, un puits de potentiel de largeur ℓ et de profondeur $|t|$ si $t < 0$, et une demi-ligne où le potentiel est zéro jusqu'à l'infini.

Il est évident que le spectre du système contient toujours un continuum d'états libres (ondes planes quand $z \rightarrow \infty$ réfléchies par la paroi en $z = 0$, d'énergie positive commençant en $E = 0$). Le puits de potentiel introduit juste un déphasage entre les ondes entrantes et les ondes sortantes.

La physique dépend de savoir s'il existe des états liés, c'est-à-dire des états propres d'énergie $\psi(z)$ d'énergie $t < E < 0$ et localisés près de la paroi. Pour obtenir de tels états, il faut trouver des solutions de l'équation de Schrödinger satisfaisant les conditions

$$\psi(0) = 0 \quad (16.21)$$

$$\psi(z) \text{ et } \psi'(z) \text{ continus en } z = \ell \quad (16.22)$$

$$\psi(z) \rightarrow 0 \quad \text{quand } z \rightarrow +\infty \quad (16.23)$$

Il faut donc raccorder des solutions de la forme

$$\psi(z) \propto \begin{cases} \sin(\sqrt{E-t} z) & \text{si } 0 < z < \ell \\ \exp(-\sqrt{-E} z) & \text{si } z > \ell \end{cases} \quad (16.24)$$

Les conditions de raccord donnent l'équation pour les niveaux d'énergie des états liés

$$\sqrt{E-t} \cot(\sqrt{E-t} \ell) + \sqrt{-E} = 0 \quad (16.25)$$

Il est facile de voir que cette équation n'admet de solutions avec $t < E < 0$ que si

$$t < t_{\text{crit}} = -\frac{\pi^2}{4\ell^2} \quad (16.26)$$

Si $t > t_{\text{crit}}$ il n'y a pas d'état lié, tous les états propres sont délocalisés et le minimum du spectre est

$$E_0 = 0 \quad (16.27)$$

Si $t < t_{\text{crit}} < 0$ il y a un fondamental $\psi_0(z)$ d'énergie $E_0(t) < 0$, qui est un état lié à la paroi, piégé dans le puits de potentiel, mais avec une queue exponentielle en dehors du puits (effet tunnel). De l'équation il est facile de voir que quand $t \rightarrow t_{\text{crit}}$, $E_0(t) \rightarrow 0$ comme

$$E_0(t) \propto (t_{\text{crit}} - t)^2 \quad (16.28)$$

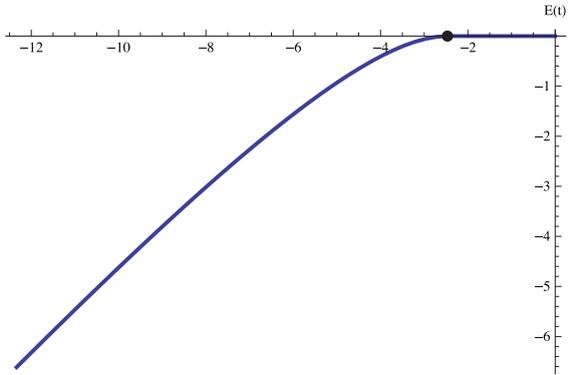


FIGURE 16.6 – Énergie du fondamental E en fonction de la profondeur du puits t .

L'énergie du fondamental en fonction de t est représentée sur la figure 16.6.

On notera que tant que $-\frac{9\pi^2}{4\ell^2} < t < -\frac{\pi^2}{4\ell^2}$ il n'y a qu'un seul état lié, le fondamental, et que de façon plus générale si $-\frac{(2n+3)^2\pi^2}{4\ell^2} < t < -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4\ell^2}$ il n'y a que n états liés dans le puits.

La situation est résumée sur la figure 16.7.

Le cas $t < t_{\text{crit}}$ correspond à la phase de mouillage partiel. L'interface reste accrochée à la paroi, car les fluctuations thermiques ne sont pas assez fortes pour la décrocher. S'il n'y a qu'un état lié, la longueur de corrélation est donnée par

$$\xi = 1/|E_0(t)| \tag{16.29}$$

La façon dont l'énergie du fondamental s'annule quand $t \rightarrow t_c$ caractérise donc la divergence de la longueur de corrélation. Cette divergence est caractérisée par un exposant critique ν , défini comme

$$\xi \sim |t_{\text{crit}} - t|^{-\nu} \tag{16.30}$$

et on a

$$\nu = 2 \tag{16.31}$$

La distance de l'interface à la paroi est donnée par

$$\ell_w = \langle z \rangle \tag{16.32}$$

Elle diverge à la transition et on définit un exposant critique ψ par

$$\ell_w \sim |t_c - t|^{-\psi} \tag{16.33}$$

Cette distance est donnée via le dictionnaire quantique/statistique par

$$\ell_w = \langle \psi_0 | z | \psi_0 \rangle = \int_0^\infty dz z |\psi_0(z)|^2 \quad \text{avec } \psi_0(z) \text{ le fondamental} \tag{16.34}$$

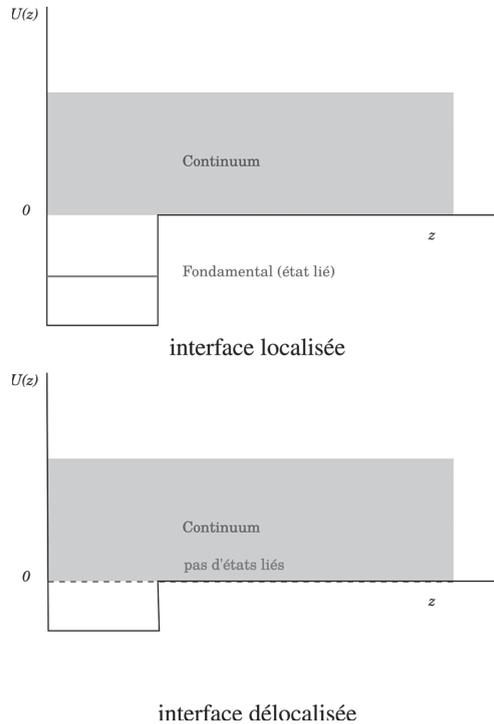


FIGURE 16.7 – Énergie du fondamental dans le cas localisé (mouillage total) et délocalisé (mouillage partiel).

et comme dans notre cas $\psi_0(z)$ a une queue exponentielle en $\exp(-\sqrt{-E_0} z)$, il est facile de voir que quand $t \rightarrow t_{\text{crit}}$

$$\ell_w \simeq 1/\sqrt{-E_0} \quad (16.35)$$

donc l'exposant critique vaut

$$\psi = 1 \quad (16.36)$$

Enfin, en utilisant 16.18, on prédit qu'à la transition, l'angle de contact θ va s'annuler linéairement comme

$$\theta \sim |t_{\text{crit}} - t| \quad (16.37)$$

ce qui est très différent de la théorie du champ moyen qui prédit

$$\theta_{\text{champ moyen}} \sim \sqrt{t_{\text{crit}} - t} \quad \text{avec d'ailleurs } t_{\text{crit}} = 0 \quad (16.38)$$

Ces résultats s'avèrent indépendants de la forme du potentiel $U(z)$, tant qu'il reste à courte portée et que la transition reste du deuxième ordre. Pour des interactions interface/paroi plus compliquées, ou en présence d'effets de gravité, la transition de mouillage peut aussi être du premier ordre.

16.1.3 Mouillage en 2+1 dimension

Bien sûr, le cas $D = 1 + 1$ est un cas idéalisé. On peut néanmoins concevoir des expériences, et ce cas peut être étudié en grands détails par les méthodes d'intégrabilité et de mécanique statistique rigoureuse. Le cas physique est le cas d'une interface interagissant avec une paroi dans un système tridimensionnel (demi-espace). L'analogie du modèle continu effectif donné par le hamiltonien 16.10 est celui d'un champ bidimensionnel $z(\vec{x}, \vec{x}) = (x_1, x_2)$ où \vec{x} est une coordonnée sur la paroi, et z la distance de l'interface à la paroi, avec un hamiltonien de la forme

$$\mathcal{H}[z] = \int d^2\vec{x} \left(\frac{\sigma}{2} \left(\vec{\nabla}_x z \right)^2 + U(z) \right) \quad (16.39)$$

avec un potentiel $U(z)$ répulsif à courte distance du mur et attractif à grande distance.

La théorie du champ moyen pour la transition de mouillage sera la même qu'en 1+1 dimension. Par contre, l'effet des fluctuations thermiques sera beaucoup moins important. En effet loin de la paroi, les fluctuations de z sont celles d'un champ libre gaussien (GFF) en dimension deux, donc logarithmiques

$$D = 2 + 1 \quad \implies \quad \langle (z(0) - z(\vec{x}))^2 \rangle \propto \log |\vec{x}|$$

alors qu'en dimension 1+1 ce sont celles d'un brownien, donc linéaires

$$D = 1 + 1 \quad \implies \quad \langle (z(0) - z(x))^2 \rangle \propto |x|$$

L'interaction effective de l'interface avec la paroi due aux fluctuations (répulsion stérique) sera de beaucoup plus faible portée. En fait, si on considère le problème général et théorique du mouillage en $D + 1$ dimensions, un argument dimensionnel standard indique que $D = 2$ est la dimension critique supérieure du problème.

$$D_{uc} = 2$$

Pour $D > 2$, donc en dimension d'espace supérieure à trois, la théorie classique (champ moyen) est valable. En dimension $D < 3$, donc en dimension d'espace plus petite que trois, les fluctuations thermiques sont pertinentes, et les exposants critiques ne sont plus ceux du champ moyen.

Le cas marginal $D = 2$ est intéressant. Il a été étudié notamment par Brézin-Halperin-Leibler par des méthodes de groupe de renormalisation fonctionnel. Il s'avère qu'il faut considérer un potentiel d'interaction interface/paroi exponentiel de la forme

$$U(z) = a e^{-2z/\ell} - b e^{-z/\ell} \quad , \quad a \ \& \ b > 0 \quad (16.40)$$

avec ℓ une longueur caractéristique de portée d'interaction, pour traiter le problème en dimension 2+1. Mentionnons également que le problème peut être étudié dans le cadre d'un développement en $D = 2 - \epsilon$, avec des propriétés de non-analyticité en ϵ intéressantes.

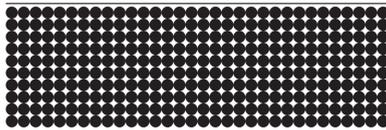


FIGURE 16.8 – Une interface d’un cristal à température nulle (ici en 1+1 dimension).

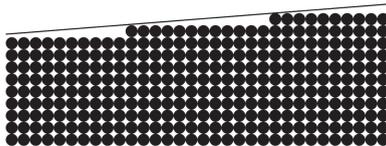


FIGURE 16.9 – Une interface d’un cristal à très basse température (phase plate ou lisse), les défauts sont des marches (ici en 1+1 dimension).

16.1.4 Transition rugueuse

Enfin, ce type de modèle d’interface en 2+1 dimensions permet de traiter le phénomène de la transition rugueuse. Ceci concerne les propriétés des interfaces cristallines (entre autres). Nous présentons ici une introduction très succincte.

Considérons un cristal idéal sans défaut, par exemple avec symétrie cubique simple. On peut penser par exemple à un cristal de glace en équilibre avec de l’eau liquide le long de la courbe de coexistence dans le plan **pression/température**. À température nulle, une face $(0,0,1)$ est simplement un plan (voir fig. 16.8). La forme de l’interface est simplement décrite par l’équation $(x, y, z = \text{cste})$.

À température non nulle, les atomes peuvent bouger et l’interface n’est plus plane. Si on néglige la possibilité de surplomb, d’arches, etc., on peut supposer que l’interface est toujours décrite par une fonction univaluée de hauteur $(x, y, z = z(x, y))$. Cette approximation est *a priori* valide à basse température. À très basse température, les défauts d’horizontalité sont des marches et à chaque marche est associée une énergie d’activation, en première approximation proportionnelle à la longueur de la marche.

Dans cette phase de très basse température, on s’attend à des petites fluctuations de la hauteur z , mais d’amplitude finie. L’interface du cristal reste plane, avec un nombre très petit de défauts (marches). À plus haute température, mais avec une tension d’interface (tension de surface) toujours finie (donc bien en dessous de la température de fusion du cristal), le nombre de défauts augmente, et à une certaine température critique T_r , les fluctuations de hauteur divergent. On dit que l’interface devient rugueuse, T_r est la température critique pour la *transition rugueuse* (*roughening transition*).

Des modèles simples sur réseau pour la transition rugueuse sont les modèles de type solid-on-solid (modèle SOS). Il s’agit dans sa version la plus simple



FIGURE 16.10 – L’interface d’un cristal dans la phase rugueuse.

d’un modèle gaussien discret sur réseau (ici un réseau carré) où à chaque site $i \in \mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$ est attachée une variable de hauteur discrétisée $z(i) \in \mathbb{Z}$. Le hamiltonien (énergie) d’une configuration microscopique $\mathbf{z} = \{z(i); i \in \mathcal{L}\}$ est similaire à celui du modèle gaussien (ou du modèle d’Ising), donné par une somme sur les liens $e = \langle ij \rangle$ du réseau

$$\mathcal{H}[\mathbf{z}] = \frac{\sigma}{2} \sum_{\langle ij \rangle} (z(i) - z(j))^2 \quad (16.41)$$

Le paramètre de couplage σ est l’analogie du couplage ferromagnétique du modèle d’Ising, et joue le rôle de la tension de surface pour le modèle d’interface. Dans le modèle SOS stricto sensu le terme $(z(i) - z(j))^2$ est remplacé par $|z(i) - z(j)|$. D’autres modèles imposent des contraintes comme $|z(i) - z(j)| \leq 1$, ou sont définis sur des réseaux différents et plus adaptés, qui permettent de formuler le problème comme des modèles de boucles.

Ce modèle a une symétrie globale \mathbb{Z} , $z(i) \rightarrow z(i) + m$, m entier. Une transformation de dualité exacte (analogue à la dualité **Ising basse température / Ising haute température** sur réseau carré) permet de transformer ce modèle en un modèle avec symétrie continue $O(2)$ sur réseau carré, le modèle de Villain, qui se formule également comme un modèle de gaz de Coulomb, et aussi comme un modèle de gaz de boucles orientées. Rappelons que le groupe (abélien) $O(2)$ des rotations dans le plan est le groupe dual du groupe (abélien) des translations entières \mathbb{Z} .

Près de la transition rugueuse, la limite continue pour un modèle d’interface gardant mémoire de la structure cristalline périodique, et donc du fait que les positions préférentielles de l’interface sont discrètes, une théorie effective est assez naturellement le modèle de sine-Gordon (SG), avec un hamiltonien de la forme

$$\mathcal{H}[z] = \int d^2x \left(\frac{\sigma}{2} (\vec{\nabla}z)^2 - \mu \cos\left(\frac{z}{2\pi a}\right) \right) \quad (16.42)$$

a étant la période du réseau, σ une tension de surface et μ un potentiel chimique de marche (ou l’inverse d’une température). À basse température $\mu \gg \mu_c$ l’interface est piégée dans un minimum du potentiel $z = ma$, $m \in \mathbb{Z}$, c’est la phase lisse (phase massive de SG). À la température critique μ_c (transition rugueuse/dépiégeage) l’interface se libère et pour $\mu < \mu_c$ on est dans la phase rugueuse (phase de masse nulle de SG).

16.1.5 Notes

Pour plus de détails sur la très riche physique du mouillage (en 2+1 dimensions, interactions à longue portée, influence du désordre, dynamique, mouillage multicritique, etc.), voir le cours de M. Fisher dans [NPW04], ainsi que la contribution de S. Dietrich dans le volume 12 de la série Domb-Green-Lebowitz [DGL88], et celle de G. Forgacs, R. Lipowsky et Th. M. Niewenhuisen dans le volume 14 de la même série [DGL91]. La physique de la transition rugueuse (aspects dynamiques, réalisations expérimentales, en particulier dans l'hélium à très basse température) est très riche et beaucoup plus complexe que ce qui a été présenté ici. Pour une introduction, voir toujours G. Forgacs, R. Lipowsky et Th. M. Niewenhuisen dans le volume 14 de [DGL91]. Pour les études dans l'hélium à basse température, voir les revues de S. Balibar *et al.* [Bal87, BGEP85]

16.2 Membranes

16.2.1 Introduction

La physique statistique des membranes est un sujet très intéressant. Il fait partie du très vaste domaine de la physique et de la physicochimie de la *matière molle*. Ce domaine s'est très fortement développé depuis les années 1970, notamment sous l'impulsion de P.G. de Gennes (à qui on doit cette dénomination). Il porte sur l'étude des propriétés et sur les nombreuses applications des systèmes souples ou plus ou moins fluides (par opposition à la physique de la matière condensée dure) tels les colloïdes, les tas de sable, les polymères, les gels, les cristaux liquides, les tissus biologiques et les assemblages de molécules biologiques, les fluides non newtoniens, etc. Typiquement dans des systèmes tels les cristaux liquides ou les membranes, il suffit de considérer que les composants élémentaires ne sont pas les atomes isolés, mais des molécules, macromolécules ou des clusters de taille beaucoup plus grande (typiquement de quelques dizaines de nanomètres jusqu'au micron, qui interagissent par des forces qui ne sont pas des liaisons fortes (covalentes ou ioniques), mais beaucoup plus faibles (liaisons hydrogène et forces d'hydratations, forces de van der Waals). Les énergies d'excitations et donc les températures auxquelles les fluctuations thermiques sont importantes sont plus élevées, et typiquement aux températures ambiantes.

Le terme membranes désigne des objets bidimensionnels étendus et souples (donc pouvant être modélisés par des surfaces géométriques) pour lesquels les effets de la *rigidité de courbure* sont importants et à prendre en compte. À ce titre ils diffèrent des polymères et des modèles d'interfaces considérés précédemment, pour lesquels ce sont les effets de la *tension* qui sont prépondérants.

Deux grandes classes d'objets peuvent être considérées : les membranes fluides et les membranes polymérisées (il y a des systèmes intermédiaires, qui

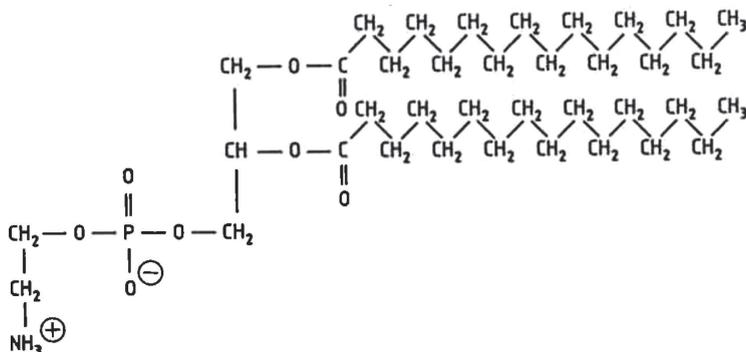


FIGURE 16.11 – Vue schématique d’une molécule amphiphile (DPPC) avec sa tête hydrophile (gauche) et ses deux queues hydrophobes (droite).

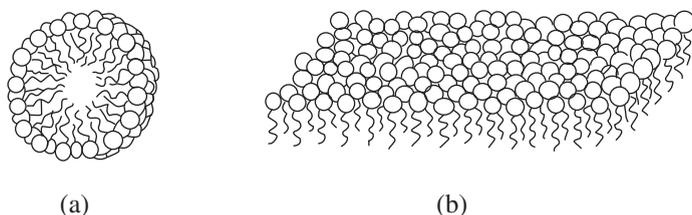


FIGURE 16.12 – Vue schématique d’une micelle (a) et d’une monocouche (b).

sont également intéressants). Nous allons d’abord donner une brève introduction aux membranes fluides et à leur relation avec des problèmes de théorie des champs.

16.2.2 Membranes fluides : introduction

Films amphiphiles

Les *phospholipides* sont des molécules composées de deux parties bien séparées : une tête polaire (un groupe phosphate) qui est *hydrophile* (énergétiquement il préfère être en contact avec de l’eau), et une ou deux longues chaînes lipidiques (de longues chaînes hydrocarbonnées) qui sont *hydrophobes* (elles préfèrent être en contact entre elles, comme des molécules d’huiles, qu’être en contact avec des molécules d’eau). Un exemple de telle molécule (le DPPC) est représenté Fig. 16.11. En solution dans de l’eau, ces molécules vont préférer se disposer en *micelles* sphériques, comme sur la Fig. 16.12 (a). Dans un mélange binaire eau/huile elles vont former une *monocouche* à l’interface eau/huile, réduisant très fortement la tension de surface de l’interface, comme sur la Fig. 16.12 (b). Pour cette raison on désigne aussi ces molécules comme des molécules de *surfactant* ou molécules *tensioactives*.

Pour un mélange ternaire **eau/huile/surfactant**, suivant les proportions le système peut être dans une grande variété de phases, ordonnées ou désordonnées. Les principaux types sont représentés Fig. 16.13. Les phases ordonnées correspondent à des phases de type cristal liquide, les phases désordonnées à des phases de type microémulsion. L'échelle typique de ces structures (distance entre les monocouches) peut aller de 10 Å à plusieurs centaines d'Å. Les cristaux liquides et les microémulsions sont des systèmes fascinants, mais nous allons nous restreindre au cas des bicouches et des vésicules.

Bicouches et vésicules

Dans des mélanges binaires **solvant/surfactant** (avec quelques additifs bien dosés pour optimiser les propriétés du mélange), les molécules de surfactant s'organisent pour former des bicouches de grande taille, voir Fig. 16.14. La structure en bicouches minimise le contact entre le solvant (par exemple de l'eau) et les queues hydrophobes des molécules de surfactant. Les bicouches sont très importantes en biologie et en biophysique, car elles peuvent former des vésicules sphériques (voir Fig. 16.15), et sont à la base de la structure des membranes cellulaires.

La bicouche sera dite fluide si les molécules de surfactants dans la bicouche sont libres de se déplacer dans la bicouche, et forment donc un liquide bidimensionnel. Un modèle simple pour décrire les bicouches comme des surfaces est d'attribuer une énergie H à une configuration, qui ne dépendra que de sa géométrie dans l'espace tridimensionnel. La bicouche est traitée comme étant d'épaisseur et de densité surfacique fixée. On ne tient pas compte de la structure interne locale de la membrane.

Si pour l'interface entre deux phases, le terme dominant pour un hamiltonien effectif est proportionnel à l'aire de l'interface, avec σ une tension superficielle

$$H_{\text{interface}} = \sigma \text{Aire} \quad (16.43)$$

pour une membrane isolée, composée d'un nombre fixé \mathcal{N} de molécules, s'auto-assemblant en une couche ou une bicouche de densité surfacique fixée, l'aire de la membrane est fixée. Le terme 16.43 est présent, mais constant. Il ne contrôle donc pas les configurations de la membrane. Il faut aller à l'ordre suivant (si on considère un hamiltonien effectif comme un développement dans les échelles de tailles respectives de l'objet) et se concentrer sur les propriétés de *rigidité* de la membrane, donc sur sa *courbure*.

16.2.3 Un peu de géométrie des surfaces

Géométrie différentielle

Donnons d'abord quelques rappels de géométrie différentielle. Nous renvoyons à des ouvrages d'introduction comme ceux de M. Spivak [Spi70] et de B. Dubrovin, A. Fomenko et S. Novikov [DFN84], et pour une brève introduction pour les membranes la contribution de l'auteur [Dav04] dans [NPW04].

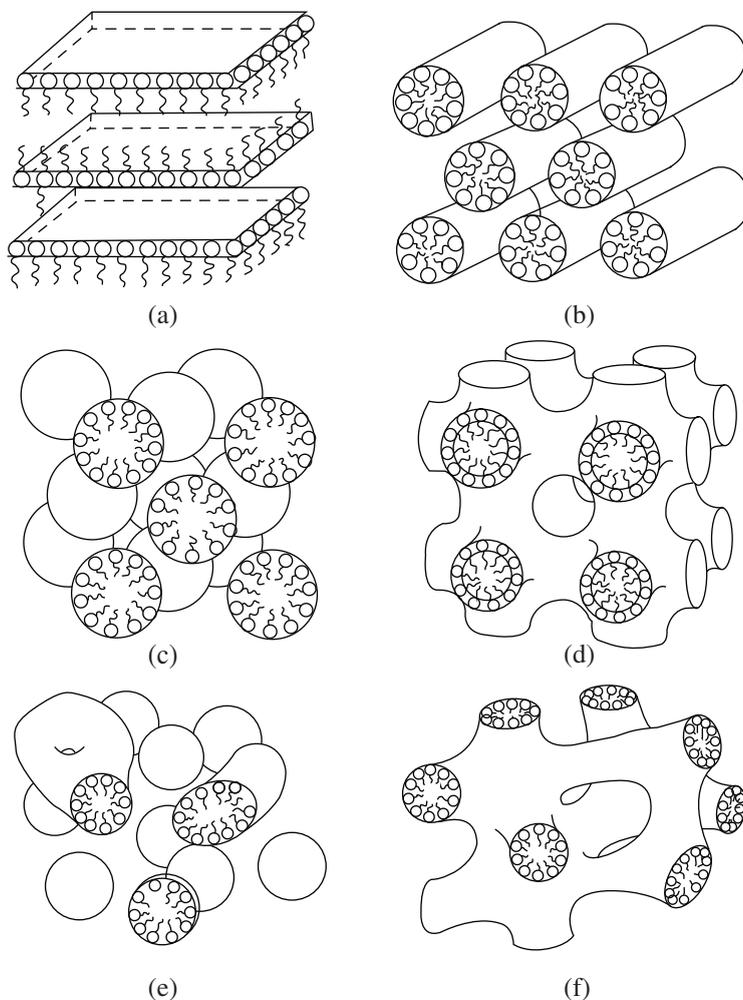


FIGURE 16.13 – Exemples de phases pour un mélange ternaire eau/huile/surfactant : (a) lamellaire, (b) tubulaire hexagonale, (c) micellaire cristalline, (d) bicontinue cristalline (phase « cauchemar du plombier »), (e) micellaire diluée, (f) bicontinue irrégulière (phase « éponge »).

Mathématiquement, une surface est un objet bidimensionnel « régulier » plongé dans \mathbb{R}^3 (cas tridimensionnel) ou \mathbb{R}^d (cas général d -dimensionnel). C'est donc une variété bidimensionnelle \mathcal{S} plongée dans \mathbb{R}^d . Un point s dans la variété abstraite \mathcal{S} a une position $\vec{X}(s)$ (un d -vecteur) dans \mathbb{R}^d (l'espace de plongement). Une variété 2d (une surface) est un objet mathématique obtenu en recollant des « bouts » de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire des ensembles ouverts \mathcal{V}_i semblables (homéomorphes) à des ouverts U_i de \mathbb{R}^2 , de façon à recouvrir toute la variété.

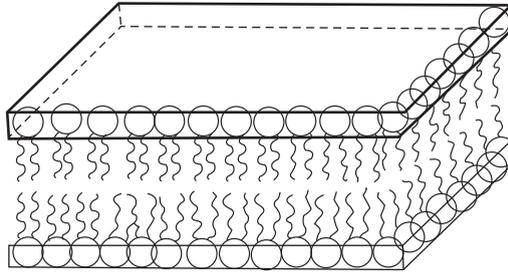


FIGURE 16.14 – Exemple schématique de bicouche plane, formée de deux couches de surfactants dont les têtes hydrophiles sont en contact avec le solvant.

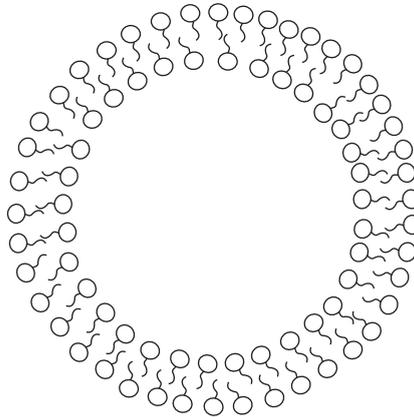


FIGURE 16.15 – Exemple schématique de vésicule formée par une bicouche.

On parle d'un « atlas » de \mathcal{S} . Les U_i sont des cartes locales de \mathcal{S} . Un point $\mathbf{s} \in \mathcal{V}_i \subset \mathcal{S}$ est l'image d'un point $\sigma = (\sigma^i)_{i=1,2}$ de $U_i \subset \mathbb{R}^2$. (σ^1, σ^2) sont les coordonnées¹ du point \mathbf{s} dans le système de coordonnées locales correspondant à la carte U_i . Sa position dans l'espace est notée (par abus de langage) $\vec{X}(\sigma)$ (Fig. 16.16). Passer d'une carte U_i à une carte « voisine » U_j (donc telle que leur intersection est non vide $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j \neq \emptyset$) correspond à un changement de système de coordonnées locales.

Métrie de plongement et courbure

Pour une surface « physique » plongée dans l'espace, la distance dans \mathbb{R}^d de deux points voisins définit une métrique riemannienne sur la variété, dite métrique de plongement. Dans un système de coordonnées σ , la distance entre

¹ Les indices i sont en haut, car les coordonnées σ^i sont les composantes d'un vecteur, donc d'un tenseur contravariant.

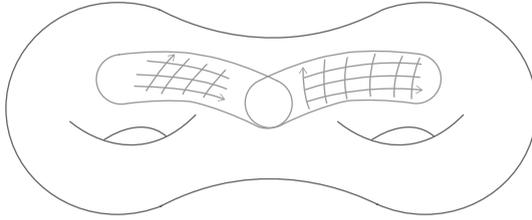


FIGURE 16.16 – Coordonnées locales sur une surface.

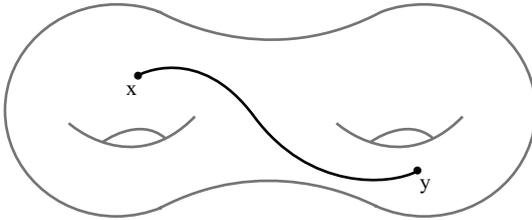


FIGURE 16.17 – La longueur (dans l'espace) d'une courbe sur une surface ne dépend que de la métrique intrinsèque g_{ij} (induite par le plongement) sur la surface.

deux points σ et σ' de coordonnées proches

$$\sigma = (\sigma^1, \sigma^2), \quad \sigma' = \sigma + d\sigma = (\sigma^1 + d\sigma^1, \sigma^2 + d\sigma^2) \quad (16.44)$$

est donnée par

$$\text{dist}(\sigma, \sigma')^2 = |\vec{X}(\sigma) - \vec{X}(\sigma')|^2 = d\sigma^i d\sigma^j g_{ij}(\sigma) \quad (16.45)$$

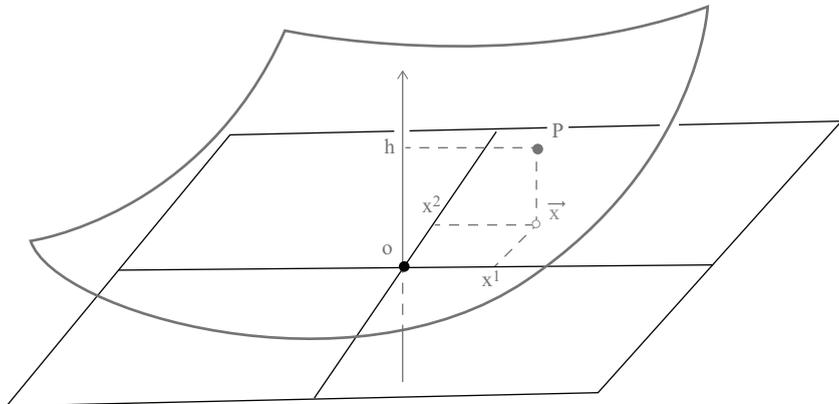
avec le tenseur métrique g_{ij} .

$$g_{ij}(\sigma) = \frac{\partial \vec{X}(\sigma)}{\partial \sigma^i} \cdot \frac{\partial \vec{X}(\sigma)}{\partial \sigma^j} = \partial_i \vec{X} \cdot \partial_j \vec{X} \quad (16.46)$$

Toutes les propriétés « internes » de la surface se déduisent de cette métrique (Fig. 16.19).

Par contre, la géométrie extrinsèque de la surface, c'est-à-dire la façon dont la surface est plongée dans l'espace, est caractérisée par d'autres objets. Le premier est la courbure extrinsèque, dont nous rappelons brièvement la définition. Au voisinage d'un point \mathbf{o} sur la surface \mathcal{S} , on peut prendre comme système de coordonnées la projection de la surface sur le plan tangent au point (description de Monge). Pour un système de coordonnées σ , ce plan $\mathcal{P}_{\mathbf{o}}$ est engendré par les deux vecteurs tangents, définis de façon générale comme

$$\vec{t}_i(\mathbf{x}) = \partial_i \vec{X}(\mathbf{x}) = \left. \frac{\partial \vec{X}(\sigma)}{\partial \sigma^i} \right|_{\sigma=\sigma(\mathbf{x})} \quad (16.47)$$

FIGURE 16.18 – Projection d'une surface sur le plan tangent en un point \mathbf{o} .

Si on considère une base de vecteurs orthonormés (dans l'espace euclidien $E_3 = \mathbb{R}^3$) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ dont l'origine est le point \mathbf{o} et telle que les vecteurs (\vec{e}_1, \vec{e}_2) sont dans le plan tangent en \mathbf{x} , $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$. Le vecteur $\vec{e}_3 = \vec{n}$ est donc orthonormal à la surface. Au voisinage de l'origine, si on projette orthogonalement un point \mathbf{s} de la surface sur le plan $\mathcal{P}_{\mathbf{o}}$, les coordonnées de ce point seront

$$(x^1, x^2, x^3) = (\vec{x}, h(\vec{x})) \quad (16.48)$$

$h(\vec{x})$ est la hauteur de la surface au-dessus du point \vec{x} du plan tangent. Pour une surface régulière (plongement C^2) $h(\vec{x})$ se développe à l'ordre deux comme

$$h(\vec{x}) = \frac{1}{2} K_{ij} x^i x^j + \mathcal{O}(|\vec{x}|^3) \quad (16.49)$$

Le tenseur $\mathbf{K} = (K_{ij})$ est un tenseur symétrique d'ordre $(2,0)$. C'est la *tenseur de courbure extrinsèque*.

Le tenseur \mathbf{K} peut se diagonaliser suivant deux *directions principales* orthogonales, toujours dans le plan tangent. Les deux valeurs propres sont les deux courbures principales.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \quad (16.50)$$

Les courbes sur la surface suivant les deux directions principales ont un *rayon de courbure local* donné par

$$R_1 = 1/K_1, \quad R_2 = 1/K_2 \quad (16.51)$$

Suivant les signes des courbures, la structure locale de la surface par rapport au plan tangent est celle d'un sommet/fond ($K_1 K_2 > 0$), d'un point selle $K_1 K_2 < 0$ ou d'un cylindre/plan ($K_1 K_2 = 0$) (Fig. 16.20).

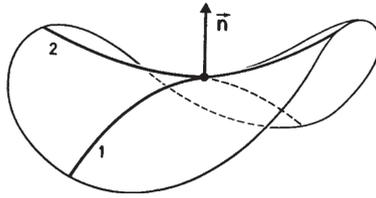


FIGURE 16.19 – Les deux directions principales (cas $K_1 < 0, K_2 > 0$).

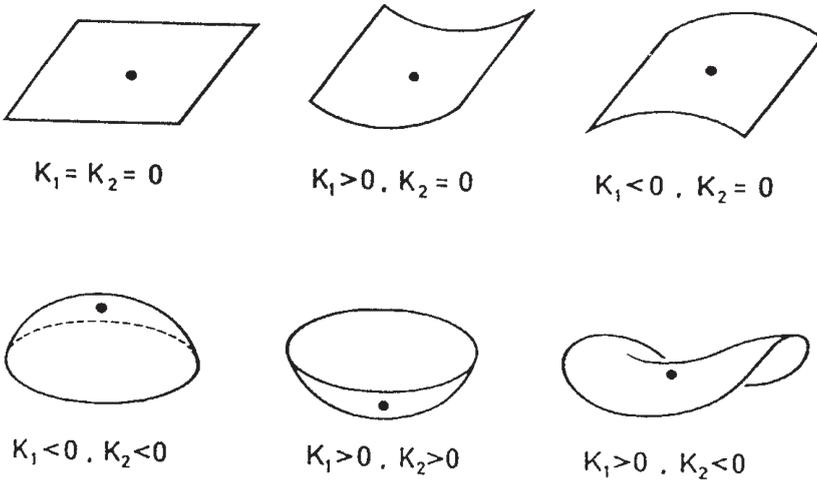


FIGURE 16.20 – Les différentes configurations de courbure locale.

Plutôt que de considérer les courbures principales, il est intéressant de considérer la *courbure moyenne* H et la *courbure scalaire* ou *courbure de Gauss* R , définies respectivement comme

$$H = (K_1 + K_2)/2, \quad R = 2 K_1 K_2 \tag{16.52}$$

Ces concepts peuvent se formaliser et se généraliser à des surfaces plongées dans $\mathbb{R}^d, d > 3$. Dans un système de coordonnées locales, le tenseur de courbure est un vecteur

$$\vec{K}_{ij} = D_i D_j \vec{X} \tag{16.53}$$

avec D_i la dérivée covariante par rapport à la métrique de plongement $g_{ij} = \partial_i \vec{X} \partial_j \vec{X}$. Ceci donne

$$\vec{K}_{ij} = \partial_i \partial_j \vec{X} - \Gamma_{ij}^\ell \partial_\ell \vec{X} \tag{16.54}$$

avec Γ_{ij}^ℓ la connexion affine (décrivant le transport parallèle dans la métrique \mathbf{g}), définie par

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{i\ell} (\partial_k g_{j\ell} + \partial_j g_{\ell k} - \partial_\ell g_{jk}) \tag{16.55}$$

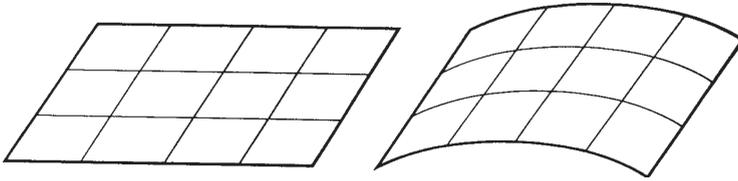


FIGURE 16.21 – Deux plongements inéquivalents d’une surface avec une métrique interne \mathbf{g} fixée, ici la métrique plate.

De façon standard en géométrie riemannienne, la convention d’Einstein de sommation sur les indices covariants et contravariants est adoptée, et la matrice g^{ij} est l’inverse de la métrique g_{ij}

$$g^{ij} = (\mathbf{g}^{-1})_{ij} \quad (16.56)$$

Chaque composante \vec{K}_{ij} est un vecteur orthogonal à la surface. En trois dimensions ($d = 3$), c’est donc un vecteur colinéaire au vecteur normal \vec{n} , et

$$K_{ij} = \vec{n} \vec{K}_{ij} \quad (16.57)$$

et on a

$$H = \text{tr}(\mathbf{K})/2 = g^{ij} K_{ij}/2 \quad , \quad R = 2 \det(\mathbf{K}) \quad (16.58)$$

Enfin, notons que la courbure locale R n’est rien d’autre que la *courbure scalaire* associée au tenseur métrique $\mathbf{g} = (g_{ij})$. Elle ne dépend que de ce tenseur métrique, et pas de la géométrie extrinsèque, donc de la façon dont la surface est précisément plongée dans l’espace (voir Fig. 16.21).

Pour une surface fermée, son intégrale donne un invariant topologique, la *caractéristique d’Euler* χ , elle-même reliée au nombre de poignées g de la surface, appelé aussi le *genre* g de la surface, par

$$\int d^2\sigma \sqrt{g} R = 4\pi \chi \quad , \quad \chi = 2(1 - g) \quad (16.59)$$

16.2.4 Le modèle de Canham-Helfrich

La fonctionnelle d’énergie de Canham-Helfrich

Une fonctionnelle d’énergie (hamiltonien) apte à décrire les propriétés mécaniques et statistiques de membranes fluides se construit en développant en termes locaux en fonction du nombre de dérivées du champ de position \vec{X} , et en imposant l’invariance par reparamétrisation (si on paramétrise la membrane en termes de coordonnées locales générales). On obtient la fonctionnelle d’énergie géométrique suivante

$$\mathcal{H} = \int d^2s \left(r_0 + \frac{\kappa_0}{2} H^2 + \frac{\bar{\kappa}_0}{2} R \right) \quad (16.60)$$

d^2s est l'élément d'aire

$$d^2s = d^2\sigma \sqrt{g(\sigma)} \quad (16.61)$$

H la courbure moyenne et R la courbure scalaire.

Cette fonctionnelle (hamiltonien) a été introduite par P. Canham et W. Helfrich dans les années 1970 [Can70, Hel73]. Elle contient trois paramètres. r_0 est proportionnel à l'aire de la membrane, et est une *tension de surface microscopique*. Il sera important si on est dans un ensemble grand-canonique où l'aire (le nombre de molécules) de la membrane peut varier. Ce cas est en théorie possible, et souvent plus commode à considérer pour le calcul que l'ensemble canonique discuté plus haut, où l'aire de la membrane est fixée.

Le paramètre κ_0 , proportionnel au carré de la courbure moyenne locale, est la *rigidité de courbure*. κ_0 doit être positif pour que la membrane soit stable, et mesure le coût local en énergie pour courber la membrane dans l'espace. $\bar{\kappa}_0$ est la *rigidité gaussienne*. L'intégrale de la courbure gaussienne (courbure scalaire) d'une surface étant un invariant topologique, donc constant quand on déforme localement la membrane, ce dernier terme n'aura pas d'effet sur les fluctuations locales. Par contre, il sera important pour l'étude des configurations globales, topologiquement non équivalentes, d'une membrane, telles celles représentées sur la Fig. 16.13.

Ces trois paramètres dépendent bien sûr de la structure microscopique de la membrane et du milieu dans lequel elle est plongée. La fonctionnelle de Canham-Helfrich permet d'analyser de nombreux aspects des comportements mécaniques et propriétés thermodynamiques des membranes fluides. Nous ne discuterons pas ici toute la très riche physico-chimie des membranes et des surfactants, et nous les traitons comme des paramètres effectifs et phénoménologiques, comme pour la théorie de Landau des phénomènes critiques.

Mentionnons simplement que si κ_0 est positif et grand, les configurations privilégiées sont de courbure moyenne nulle, ce qui veut dire que les deux courbures principales sont opposées $K_1 = -K_2$. Si $\bar{\kappa}_0$ est négatif, une courbure scalaire $R = K_1 K_2$ positive ou nulle est privilégiée. Les phases lamellaires similaires à celles représentées en (a) de la Fig. 16.13, formées de plans parallèles, minimisent le hamiltonien. Si $\bar{\kappa}_0$ est positif, ce seront des configurations de genre g positif et élevé, donc de caractéristique d'Euler négative avec beaucoup de trous (poignées) qui sont similaires aux configurations de type (d) ou (f) de la Fig. 16.13 (cauchemar de plombier, phase éponge).

Le terme de courbure moyenne est donc le plus important, et c'est celui que nous allons discuter dans la suite. Notons qu'en dimension trois ($d = 3$) il peut se réécrire comme

$$H^2 = \left(\Delta \vec{X}\right)^2 \quad (16.62)$$

où g est la métrique donnée par le plongement de la surface

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{X} \partial_\nu \vec{X} \quad (16.63)$$

et Δ est le laplacien scalaire dans cette métrique.

$$\Delta = D_i D^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i g^{ij} \sqrt{g} \partial_j \quad (16.64)$$

Dans la dernière expression, \vec{n} est le vecteur normal à la surface. Ceci conduit à deux remarques.

Relation avec les modèles sigma

Le terme de courbure moyenne peut donc se réécrire comme l'action d'un modèle sigma non linéaire $O(3)$ sur une surface \mathcal{S} courbe munie d'une métrique \mathbf{g} . \vec{n} est le vecteur normal à la surface.

$$\frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{S}} d^2s H^2 = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{S}} d^2\sigma \sqrt{g} \partial_\mu \vec{n} g^{\mu\nu} \partial_\nu \vec{n} \quad (16.65)$$

La rigidité de courbure κ joue le rôle de la rigidité de spin $\kappa = g^{-1}$ dans le modèle sigma de la section 15.1. Mais dans notre cas, la métrique \mathbf{g} est la métrique de plongement (Eq. 16.63). Elle est donc dynamique. Le champ vectoriel normal \vec{n} découle également du plongement, donc il n'est pas indépendant de la métrique \mathbf{g} . Cette situation est différente de celle d'un modèle sigma dans une métrique de fond courbe (voir la section 15.1). Pour ces modèles la métrique \mathbf{g} est fixée (champs de fond classique), et le champ \vec{n} est le champ dynamique (champ quantique).

Il est intéressant d'étudier les relations de ce modèle avec les théories où la métrique fluctue de façon plus générale, et indépendamment des champs sur la surface, qui apparaissent dans les problèmes de gravité quantique et dans les théories des cordes. Ces relations ont été initiées par le théoricien russe A. Polyakov [Pol86].

Membranes en dimension d

Dans sa première formulation 16.62, le modèle se généralise immédiatement à des membranes bidimensionnelles plongées dans un espace euclidien d -dimensionnel \mathbb{R}^d . Ceci ne correspond bien sûr pas à des cas réalistes, mais c'est intéressant à considérer. En particulier la limite $d \rightarrow \infty$ présente de fortes analogies avec la limite $n \rightarrow \infty$ pour les modèles sigma $O(n)$ et les modèles vectoriels à n composantes considérés précédemment. De nombreuses observables peuvent être calculées exactement et pas seulement en perturbation aux premiers ordres.

16.2.5 Fluctuations thermiques et renormalisation du module de rigidité

Analyse dimensionnelle

L'étude et la modélisation des membranes appartiennent au vaste domaine de la physique de la matière molle. Les membranes sont des objets souples et les énergies d'activation conduisant à des changements de configuration sont petites. Les fluctuations thermiques s'avèrent souvent importantes aux températures ambiantes, et de petites variations des paramètres (comme la température, la salinité ou le pH du milieu) peuvent avoir un effet considérable sur les propriétés macroscopiques du système.

L'importance des fluctuations thermiques est amplifiée par le fait qu'elles peuvent se manifester à toutes les échelles de longueur. En effet, l'énergie de courbure pour une membrane bidimensionnelle est *invariante d'échelle*. Cela veut dire la chose suivante. Considérons l'énergie de courbure d'une configuration arbitraire de membrane, donnée par un champ $\vec{X}(\sigma)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ étant un système de coordonnées (local) donné sur la surface

$$\mathcal{H}_{\text{courbure}}[\vec{X}] = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\frac{\kappa_0}{2} H^2 + \frac{\bar{\kappa}_0}{2} R \right) \quad (16.66)$$

Lorsqu'on dilate la membrane par un facteur d'échelle λ ,

$$\vec{X}(\sigma) \rightarrow \vec{X}_\lambda(\sigma) = \lambda \vec{X}(\sigma) \quad (16.67)$$

on change donc sa taille, mais pas sa forme, il est facile de vérifier que l'énergie de courbure totale de change pas

$$\mathcal{H}_{\text{courbure}}[\vec{X}_\lambda] = \mathcal{H}_{\text{courbure}}[\vec{X}] \quad (16.68)$$

En effet, sous une dilatation, les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 sont dilatés d'un facteur λ , et donc les courbures changent comme

$$K_{1,2} \rightarrow \lambda^{-1} K_{1,2}, \quad H \rightarrow \lambda^{-1} H, \quad R \rightarrow \lambda^{-2} R \quad (16.69)$$

alors que l'élément d'aire est dilaté d'un facteur λ^2 qui contrebalance le premier facteur. Le terme d'énergie de surface

$$\mathcal{H}_{\text{surface}}[\vec{X}] = \int d^2\sigma \sqrt{g} \quad (16.70)$$

change bien évidemment comme

$$\mathcal{H}_{\text{surface}}[\vec{X}_\lambda] = \lambda^2 \mathcal{H}_{\text{surface}}[\vec{X}] \quad (16.71)$$

Autrement dit, le paramètre de tension microscopique r_0 dans la fonctionnelle d'énergie de Canham-Helfrich 16.60 a comme dimension canonique ℓ^{-2} , donc la dimension d'une *masse*² dans le langage de la théorie des champs, alors que les paramètres de rigidité de courbure κ_0 et $\bar{\kappa}_0$ ont une dimension zéro. Ils correspondent à des *couplages renormalisables* dans ce langage.

Fluctuations au premier ordre

Pour estimer l'effet des fluctuations sur les propriétés de rigidité de la membrane, il faut donc effectuer un calcul de renormalisation, comme pour les modèles sigma bidimensionnels (où la rigidité de spin est aussi un paramètre sans dimension). Nous présentons ici le principe du calcul de renormalisation à une boucle (au premier ordre dans la température), tel qu'il a été donné dans les publications originelles par L. Peliti et S. Leibler [PL85], par A. Polyakov [Pol86] et par D. Förster [För86].

Une façon simple est d'utiliser la méthode du champ de fond, et de calculer la contribution des fluctuations autour d'une telle configuration. Considérons donc une configuration classique de la membrane, qui est dénotée \vec{X}_0 . σ étant un système des coordonnées locales sur la membrane, c'est une fonction $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{X}_0(\sigma)$. Une petite déformation de cette configuration de fond est une fonction $\vec{X}(\sigma) = \vec{X}_0(\sigma) + \tilde{\vec{X}}(\sigma)$. Mais il faut spécifier dans quel système de coordonnées est définie la déformation. Par exemple si $\tilde{\vec{X}}(\sigma)$ est tangent à la membrane au point $\vec{X}_0(\sigma)$, la déformation correspond à un changement de coordonnées sur la membrane, et non pas à une déformation de la configuration de la membrane. Dans un langage de théorie quantique des champs, il faut *fixer la jauge* avec laquelle on travaille (relative au groupe des difféomorphismes, c'est-à-dire aux changements de coordonnées locales sur la membrane). C'est l'analogie des problèmes de fixation de jauge en électrodynamique (par rapport au groupe de jauge local $U(1)$), dans les théories de jauge non abéliennes (par rapport à un de Lie général comme $SU(2)$ ou $SU(3)$), et en relativité générale (par rapport au groupe des difféomorphismes de l'espace-temps $\text{Diff}_{1,3}$, donc des transformations de Poincaré locales).

Un choix de jauge naturel pour les déformations par rapport à une configuration de fond de référence \vec{X}_0 arbitraire (mais suffisamment lisse) est de considérer les déformations orthogonales à cette configuration, donc telles que $\tilde{\vec{X}}(\sigma)$ soit orthogonal au plan tangent à la membrane en $\vec{X}_0(\sigma)$. Pour une membrane dans un espace tridimensionnel, si on désigne par $\vec{n}_0(\sigma)$ le vecteur unité normal à la surface en $\vec{X}_0(\sigma)$ (ceci requiert juste un choix d'orientation locale sur la membrane), la déformation est caractérisée par une fonction scalaire $h(\sigma)$, puisqu'on peut l'écrire

$$\vec{X}(\sigma) = \vec{X}_0(\sigma) + h(\sigma) \vec{n}_0(\sigma) \quad (16.72)$$

C'est cette fonction $h(\sigma)$ qui est la variable aléatoire dont on va traiter les fluctuations.

Le principe d'un calcul de renormalisation à une boucle est exactement le même que pour les calculs avec la méthode du potentiel local. On part de l'énergie de courbure de Canham-Helfrich 16.66 $\mathcal{H}_{\text{courbure}}[\vec{X}]$, et on la développe à l'ordre deux dans la perturbation h autour de la configuration de fond \vec{X}_0 (approximation gaussienne). C'est un calcul classique de géométrie différentielle, qui est un peu long, mais simple en principe. Nous ne le détaillons pas ici et renvoyons à [För86]. À partir de 16.72 on obtient la variation

au deuxième ordre du tenseur métrique

$$g_{ij} = g_{0ij} - 2h K_{0ij} + \partial_i h \partial_j h + K_{0ik} g_0^{kl} K_{0lj} h^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (16.73)$$

où g_0 est le tenseur métrique et K_0 le tenseur de courbure extrinsèque pour la configuration de fond \vec{X}_0 . Poursuivant le calcul, on arrive à la variation d'ordre deux en h pour l'énergie de courbure

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_0}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g_0} [\Delta h \Delta h + 2h (H^2 + 2R)\Delta h \\ + 2H K^{ij} D_i h D_j h + (2H - R)(20H^2 - R)h^2] \end{aligned} \quad (16.74)$$

Ici $H = 2C$ (avec C la courbure moyenne), R (la courbure gaussienne), et D_i (les dérivées covariantes) sont définies pour la configuration de fond \vec{X}_0 (le suffixe $_0$ est omis). Δ est le laplacien scalaire 16.64 par rapport à la métrique de fond g_0 .

On notera que le terme de courbure gaussienne dans 16.66 ne joue aucun rôle (il n'y a pas de terme proportionnel à $\bar{\kappa}_0$ dans 16.73). Ceci est dû à la formule d'Euler-Poincaré 16.59, qui indique que l'intégrale de la courbure gaussienne est un invariant topologique (la caractéristique d'Euler) qui est un nombre entier. Donc il ne peut pas changer sous une déformation infinitésimale de la configuration de la surface. À tous les ordres en h , la variation de l'énergie de courbure gaussienne est zéro !

Le premier terme dans 16.74 représente l'énergie des fluctuations transverses par rapport à la configuration plate, telle que $H = R = 0$. Ce terme quadratique en h (approximation gaussienne) fait intervenir quatre dérivées d'espace, donc est quartique dans les impulsions, puisqu'il s'écrit en transformée de Fourier

$$\frac{\kappa_0}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \hat{h}(k) |k|^4 \hat{h}(-k)$$

Le terme quadratique dans les impulsions, présent pour les modèles d'interface avec tension de surface σ

$$\frac{\sigma}{2} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \hat{h}(k) |k|^2 \hat{h}(-k)$$

est donc absent. En conséquence les fluctuations de la membrane à grandes distances (grandes longueurs d'onde ou petits nombres d'onde) sont beaucoup plus importantes pour les membranes sans tension que pour les interfaces avec tension. Ceci se traduit par des singularités infrarouges plus fortes pour le propagateur

$$\langle \hat{h}(k) \hat{h}(-k) \rangle \propto \frac{1}{|k|^4}$$

Il est plus intéressant de considérer la fonction de corrélation à deux points pour les normales \vec{n} à la membrane. Pour les fluctuations autour d'une

membrane plate ($\vec{X}_0(\sigma) = (\vec{\sigma}, 0)$), σ étant choisi comme les coordonnées euclidiennes sur le plan, cette corrélation vaut au premier ordre

$$\langle \vec{n}(\sigma) \vec{n}(0) \rangle \simeq 1 - \frac{1}{2} \left\langle \left(\vec{\nabla} h(\sigma) - \vec{\nabla} h(0) \right)^2 \right\rangle \quad (16.75)$$

ce qui donne explicitement

$$\langle \vec{n}(\sigma) \vec{n}(0) \rangle \simeq 1 - \frac{1}{2\pi \kappa_0} \log(|\sigma|/a) \quad (16.76)$$

où a est un régulateur à courte distance (typiquement la taille des constituants moléculaires de la membrane). Nous retrouvons la même forme que pour le propagateur du modèle sigma non linéaire $O(3)$ (le modèle de Heisenberg) en deux dimensions, au premier ordre en perturbation (κ_0 étant dans ce cas la rigidité de spin), comme discuté dans la section 15.1.

Renormalisation et fonctions bêta

Ce résultat n'est bien sûr valable que pour des distances $|\sigma|$ petites. À des échelles plus grandes, il faut tenir compte du couplage non linéaire entre les modes h , et faire un calcul de type groupe de renormalisation. Pour cela, revenons à 16.74. Les termes suivants dans 16.74, quadratique en h , mais contenant la courbure moyenne $C = H/2 = \text{tr}K/2$ et la courbure gaussienne R , décrivent (au premier ordre non trivial) les couplages non linéaires géométriques entre les modes, puisque H et R dépendent de la déformation.

En suivant le raisonnement de la méthode du potentiel local, on peut écrire le hamiltonien effectif à une boucle

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(\vec{X}) = \mathcal{H}_{\text{courbure}}[\vec{X}] + \frac{1}{2} \text{tr} \log [\Delta^2 + (2H^2 - R)\Delta - D_i H K^{ij} D_j + \dots] \quad (16.77)$$

\dots représente les termes de dimension 4 sans opérateurs dérivés, et faisant intervenir C et R , qui ne joueront pas de rôle dans la suite de l'analyse. Pour être exact, il faut rajouter à la contribution des fluctuations un terme de Fadeev-Popov (le \log d'un autre déterminant) pour tenir compte de la fixation de jauge, mais ce terme ne joue pas non plus de rôle dans le calcul de renormalisation à une boucle. En développant le $\text{tr} \log$ en supposant que la courbure de la membrane est petite (donc les quantités H et R), il peut se réécrire comme

$$\text{tr} \log [\dots] \simeq \text{tr} \log [\Delta^2] + \text{tr} [\Delta^{-1}(2H^2 - R) - \Delta^{-2}(D_i H K^{ij} D_j)] + \dots \quad (16.78)$$

Dans le premier terme de 16.78, le laplacien est toujours pris dans la métrique courbe de la membrane $g_{ij} = \partial_i \vec{X} \partial_j \vec{X}$. Le terme $\text{tr} \log[-\Delta] = \log \det[-\Delta]$ dépend en fait des propriétés intrinsèques de la métrique g , donc s'avère dépendre de la courbure gaussienne ou courbure scalaire R , mais pas de la partie extrinsèque de la courbure contenue dans H . C'est le phénomène

d'anomalie conforme, ou anomalie de trace, qui sera discuté plus en détail dans la section 18.3.

Dans le deuxième terme de 16.78, les opérateurs différentiels D_i et Δ peuvent être pris dans une métrique plate. En ne gardant dans la trace $\text{tr} \simeq \int d^2\sigma \int d^2k$ que la contribution d'une tranche de modes rapides

$$k_{\min} < |k| \leq k_{\max} = \Lambda = \frac{\pi}{a}$$

(c'est la même idée que le schéma de renormalisation de la section 13.2) on obtient au final, par un calcul similaire un terme additionnel pour que la contribution de ces modes de la forme locale

$$\int d^2\sigma \sqrt{g} \frac{\delta\kappa}{2} H^2 + \int d^2\sigma \sqrt{g} \frac{\delta\bar{\kappa}}{2} R \quad (16.79)$$

avec explicitement les deux termes de renormalisation de rigidité

$$\kappa_{\text{eff}} = \kappa + \delta\kappa \quad , \quad \delta\kappa = -\frac{3}{8\pi} \log \left| \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^2} \right| \quad (16.80)$$

$$\bar{\kappa}_{\text{eff}} = \bar{\kappa} + \delta\bar{\kappa} \quad , \quad \delta\bar{\kappa} = +\frac{5}{12\pi} \log \left| \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^2} \right| \quad (16.81)$$

Ces explications succinctes ne remplacent pas le calcul explicite de [PL85], [Pol86], [För86], qui utilise les mêmes techniques que celles pour les modèles sigma non linéaires.

Complétons la discussion par le résultat pour une membrane plongée dans l'espace euclidien de dimension d quelconque, qui se calcule de la même manière.

$$\kappa_{\text{eff}} = \kappa + \delta\kappa \quad , \quad \delta\kappa = -\frac{d}{8\pi} \log \left| \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^2} \right| \quad (16.82)$$

$$\bar{\kappa}_{\text{eff}} = \bar{\kappa} + \delta\bar{\kappa} \quad , \quad \delta\bar{\kappa} = -\frac{d-8}{12\pi} \log \left| \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^2} \right| \quad (16.83)$$

Précisons également que les fluctuations thermiques et les effets de rigidité renormalisent la tension de surface de la membrane, lorsqu'il faut la prendre en compte, en ajoutant à l'énergie de courbure un terme de tension de surface

$$\mathcal{H}_{\text{surface}}[\vec{X}] = r \int d^2\sigma \sqrt{g} \quad (16.84)$$

En $d = 3$ cette renormalisation est

$$r_{\text{eff}} = r \left(1 + \frac{\kappa^{-1}}{8\pi} \log \left| \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^2} \right| + \dots \right) \quad (16.85)$$

16.2.6 Longueur de persistance et phase froissée

La conséquence principale du fait que le module de rigidité κ est renormalisé, et que le signe de la correction dans 16.80 et 16.82 est négatif, est que le module de rigidité *décroit* aux grandes échelles de distance. C'est quantitativement le même effet que la décroissance aux grandes échelles de la rigidité de spin $\kappa = g^{-1}$ pour les modèles sigma non linéaires en dimension $d = 2$. De la même façon que les corrélations de spin $\langle \vec{S}(x)\vec{S}(y) \rangle$ pour un modèle de spin vont en fait décroître à grande distance, suivant une loi exponentielle caractérisée par une longueur caractéristique finie ξ , la longueur de corrélation du modèle, on s'attend à ce que les corrélations des normales à la surface $\langle \vec{n}(x)\vec{n}(y) \rangle$ décroissent avec la distance des points sur la surface $d(x, y) = |\vec{X}(x)\vec{X}(y)|$ comme

$$\langle \vec{n}(x)\vec{n}(y) \rangle \sim \exp(d(x, y)/\xi_p) \quad (16.86)$$

où la longueur de corrélation ξ_p est appelée *longueur de persistance*. Ce concept a été introduit par P.G. de Gennes et C. Taupin [DGT82] pour l'étude des microémulsions. Cette longueur de persistance apparaît dynamiquement, et le calcul de renormalisation montre qu'elle varie avec le module de rigidité comme

$$\xi_p \propto \exp(\kappa 4\pi/d k_B T) \quad (16.87)$$

On a réintroduit la température T , normalisée jusqu'ici à $k_B T = 1$. L'apparition de cette longueur de persistance ξ_p signifie que les fluctuations de formes (ondulations thermiques de la membrane) réduisent le rôle de la rigidité, et qu'elles l'écrantent complètement à des échelles de longueur plus grandes que ξ_p . À ces grandes échelles, la rigidité ne compte plus, et l'orientation du plan de la membrane est arbitraire. On dit que la membrane est dans une *phase froissée* (*crumpled phase*), l'analogue de la phase désordonnée pour les modèles de spin. La membrane pourra être dans des configurations désordonnées comme les phases micellaires (e) et les phases éponges (f), représentées schématiquement figure 16.13. La préférence entre ces deux cas sera gouvernée par la valeur de la rigidité gaussienne $\bar{\kappa}$ (renormalisée), puisque $\bar{\kappa} > 0$ favorise des caractéristiques d'Euler négatives (donc des phases éponges) et $\bar{\kappa} < 0$ des caractéristiques d'Euler positives (donc des phases micellaires).

16.2.7 Répulsion stérique, adhésion et décrochage des membranes

Interactions stériques

Les interactions entre membranes sont bien entendu à prendre en compte, et jouent un rôle important dans la physique, et la biophysique, des membranes. D'un intérêt tout particulier sont les interactions stériques (déjà discutées pour les polymères), et l'influence des fluctuations thermiques sur ces interactions. Un exemple simple est une membrane isolée, positionnée au-dessus de – et

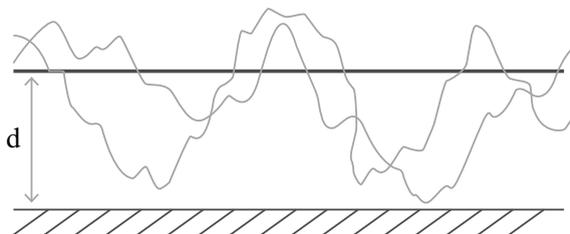


FIGURE 16.22 – Une membrane élastique en interaction avec une paroi, les fluctuations thermiques (en gris) induisent une répulsion entropique.

parallèlement à – une paroi plane, comme représenté sur la Fig. 16.22. Les fluctuations thermiques induisent des ondulations de la membrane, et des fluctuations importantes de sa distance à la paroi. Les interactions de contact (stériques) entre la membrane et la paroi ne peuvent pas être négligées, et ont des effets très importants.

Un argument dimensionnel simple dû à W. Helfrich indique que ces fluctuations sont si importantes que même en l'absence d'interactions autres que l'interaction de contact, une membrane est repoussée par la paroi, pour des raisons entropiques. Le nombre de configurations accessibles pour une membrane loin de la paroi est plus grand que pour une membrane près de la paroi. L'entropie S est donc plus haute, donc l'énergie libre $F = E - TS$ plus basse. Cette « répulsion entropique » est décrite par un potentiel effectif (une énergie libre par unité de surface de la membrane) dépendant de la distance d entre la membrane et la paroi, de la forme

$$F(d) = C \frac{(k_B T)^2}{\kappa} \frac{1}{d^2} \quad (16.88)$$

où κ est le module de rigidité de la membrane, T la température, et C un coefficient positif (d'où l'effet répulsif) sans dimension.

Si la membrane interagit avec la paroi par des forces attractives de courte ou longue portée (forces d'hydratation, van der Waals), il y a compétition entre ces forces et la répulsion entropique, qui augmente avec la température. Ceci peut conduire à une transition de phase, entre une phase de basse température où la membrane adhère à la paroi, et une phase de haute température où la membrane se décroche, et est repoussée par la paroi. Cette transition de décrochage est l'analogue de la transition de mouillage pour les interfaces près d'une paroi, discutée plus haut au chapitre 16.1.

Phases lamellaires

Ces effets entropiques peuvent être importants dans les phases lamellaires diluées de membranes, consistant en un empilement de bicouches séparées par un solvant, représentées en Fig. 16.23 (cristaux liquides smectiques lyotropes). Les effets de répulsion entropique sont là aussi en compéti-

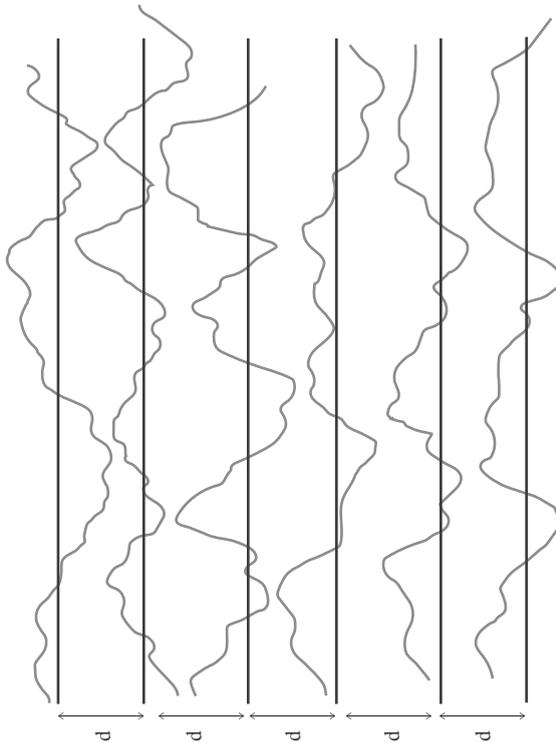


FIGURE 16.23 – Une phase lamellaire de membranes (empilement de bicouches) : les fluctuations thermiques induisent une répulsion entropique entre les membranes.

tion avec les effets attractifs entre membranes qui stabilisent la phase lamellaire. Si les interactions microscopiques sont suffisamment à courte portée, la répulsion entropique entraîne un effet de gonflement (*swelling*) et la distance entre couches peut être très grande (des centaines voire des milliers d'ångströms), elle sera stabilisée par les effets de pression osmotique surfactant/solvant. Les propriétés élastiques de la phase lamellaire sont donc principalement données par la compétition entre les effets de pression osmotique et la répulsion entropique. Là encore, W. Helfrich en a déduit l'apparition d'une compressibilité verticale B donnée par une formule universelle en fonction de la distance d entre couches, du module de rigidité et de la température, dérivant d'une énergie libre entropique d'une forme similaire à celle pour un système membrane-paroi

$$F_{\text{lam}}(d) = C_{\text{lam}} \frac{(k_B T)^2}{\kappa} \frac{1}{d^2} \quad (16.89)$$

avec un coefficient numérique C_{lam} universel, différent de C . Ces effets peuvent être observés et estimés dans des expériences.

Un modèle analytique

La position de la membrane au-dessus de la paroi sera notée $h(x)$ avec $x = (x_1, x_2)$ les coordonnées de la projection orthogonale sur le plan de la paroi d'un point \mathbf{x} de la membrane, donc de coordonnées dans l'espace $(x_1, x_2, h(x))$. C'est la représentation de Monge de la surface, qui suppose qu'il n'y a pas de surplombs. h est positif $h > 0$, puisque la paroi est située en $h = 0$.

Les interactions paroi-membrane peuvent être modélisées simplement par un potentiel effectif $U(h)$. Ces interactions résultent d'effets divers, forces de van der Waals, effets d'hydratation et interaction avec le solvant, etc. Nous ne discuterons pas toute cette physique et cette physico-chimie ici, et renvoyons par exemple au cours de S. Leibler [Lei04] dans [NPW04]. Si la membrane n'interagit pas avec la paroi lorsqu'elle n'est pas en contact avec elle, sans pouvoir la traverser, il suffit de prendre

$$U(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h > 0, \\ \infty & \text{si } h < 0. \end{cases} \quad (16.90)$$

Si la membrane est attirée par la surface à distance suffisamment courte (accrochage par des forces à courte portée), on prendra par exemple

$$U(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h > a, \\ -E_0 & E_0 > 0, \text{ si } 0 < h < a, \\ \infty & \text{si } h < 0. \end{cases} \quad (16.91)$$

Si la membrane est à l'équilibre à une distance finie d de la paroi, il faut tenir compte de l'effet des ondulations thermiques qui font varier la position de la membrane localement, et peuvent l'amener à toucher la paroi. L'amplitude de ces ondulations est contrôlée par la rigidité κ . Tant que la distance d est petite devant la longueur de persistance (*a priori* grande), on peut négliger les termes non linéaires de couplages entre modes, et linéariser l'énergie de courbure en ne gardant que les termes quadratiques en h . La fonctionnelle d'énergie à considérer est alors simplement

$$\mathcal{H}[h] = \int d^2x \left(\frac{\kappa}{2} (\Delta h(x))^2 + U(h(x)) \right) \quad (16.92)$$

Cette fonctionnelle est similaire à la fonctionnelle 16.39 utilisée en section 16.1.3 pour les problèmes de mouillage d'interface. L'énergie de surface en $(\nabla h)^2$ (quadratique dans les dérivées) est remplacée par l'énergie de courbure $(\Delta h)^2$, qui est *quartique* dans les dérivées.

Étude par renormalisation

L'influence des ondulations thermiques de la hauteur de la membrane peut être étudiée par les méthodes d'action effective et l'approximation du potentiel local présentées au chapitre 13.2.2. L'équation 13.21 pour le potentiel effectif

V_{eff} obtenu après intégration sur les ondulations thermiques dans une tranche de moments $\Lambda/B < |k| < \Lambda$ (avec $\Lambda = 1/a$ un “*cutoff*” de moments, et a un régulateur de courtes distances, typiquement l'épaisseur de la membrane) dans une approximation du type potentiel local sera remplacée par une équation équivalente pour le potentiel d'interaction membrane-paroi U . En définissant $V(h) = U(h)/\kappa$, elle est simplement de la forme

$$V_{\text{eff}}[\tilde{h}] = V[\tilde{h}] + \frac{1}{2\kappa} \int_{\frac{\Lambda}{B} < |k| < \Lambda} \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log \left[(k^4 + V''(\tilde{h}))/\Lambda^4 \right] \quad (16.93)$$

La différence essentielle étant que le terme cinétique k^2 pour la théorie de Landau-Ginzburg-Wilson (LGW) et pour le mouillage critique est remplacé par le terme de courbure k^4 . La dimension du « champ » de hauteur h est $\Delta_h = 1$, au lieu de $\Delta_\phi = 0$ en dimension $D = 2$ pour LGW. On en déduit une équation de flot du groupe de renormalisation pour V de la forme

$$S \frac{\partial}{\partial S} V_S(h) = 2V_S(\phi) + h V'_S(h) + \frac{1}{4\pi} \log [1 + V''_S(h)] \quad (16.94)$$

C'est la même équation de flot que l'équation 13.27 pour le mouillage et LGW en une dimension ($D = 1$). Elle peut être étudiée analytiquement et numériquement. Pour plus de détails, nous renvoyons là encore à [Lei04].

Il s'avère qu'elle possède deux points fixes. Un premier point fixe V_0^* est complètement attractif V_0^* (au sens du groupe de renormalisation). Il est représenté en Fig. 16.24 (a) et c'est un potentiel décroissant avec la distance à la paroi. Il décrit le comportement générique à grande distance d'une membrane en interaction avec une paroi, donc l'effet de répulsion entropique prédit par Helfrich. Ce potentiel $V_0^*(h)$ décroît à grande distance de la paroi comme h^{-2} , et ceci donne accès au coefficient \mathcal{C} de 16.88. Le second point fixe V_1^* possède une direction instable, donc est associé à un point critique. C'est un potentiel d'interaction répulsif à courte distance et attractif à grande distance, représenté en Fig. 16.24 (b). Il décrit la transition de décrochage (*unbinding*) d'une membrane en interaction attractive à courte distance avec une paroi.

Une procédure un peu plus avancée [Dav90] permet d'étudier de la même façon les phases lamellaires, et d'accéder au coefficient \mathcal{C}_{lam} dans l'énergie libre entropique pour ces phases 16.89.

16.2.8 Membranes polymérisées et transition de froissement

Membranes polymérisées

Une autre classe intéressante d'objets bidimensionnels est représentée par les « membranes polymérisées » ou « membranes cristallines », qui sont des films flexibles (comme les membranes fluides), mais avec une structure interne plus ou moins rigide, qui implique qu'elles ont des propriétés d'élasticité interne importantes, et entrent en compétition avec les effets de rigidité de courbure

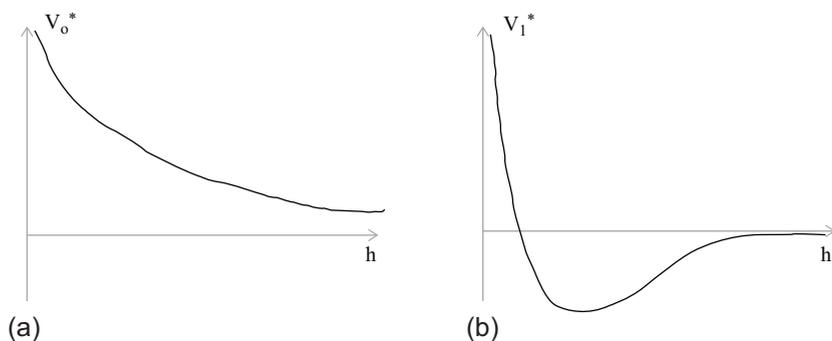


FIGURE 16.24 – (a) Le point fixe $V_0^*(h)$, et (b) le point fixe $V_1^*(h)$. Le premier décrit la répulsion entropique, le second la transition de décrochage.

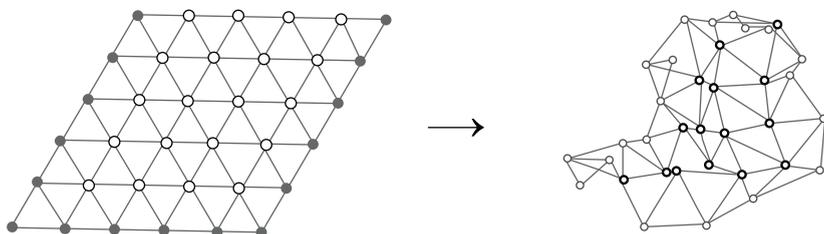


FIGURE 16.25 – Un réseau planaire (triangulaire) dans le plan et une configuration de plongement dans l'espace \mathbb{R}^3 (d'après D. Nelson et Y. Kantor dans [NPW04]).

discutés précédemment. Il n'est pas question de discuter en détail ce sujet très riche, qui est né dans les années 1980, et a connu un grand développement théorique autour des années 1990. Il a connu un renouveau pour certains de ses aspects récemment, avec les progrès expérimentaux concernant l'élaboration et l'étude de films très fins et de grande taille, comme le graphène, et via les nanotechnologies.

Un modèle simple, mais très idéalisé de tel système est celui d'un réseau bidimensionnel harmonique (par exemple un réseau triangulaire de ressorts) plongé dans l'espace tridimensionnel ou D -dimensionnel, avec une rigidité de courbure locale, comme représenté sur la figure 16.25.

Un modèle continu consiste à considérer le plan \mathbb{R}^2 , ou un domaine du plan \mathcal{D} , doté d'un système de coordonnées intrinsèque $x = (x^1, x^2)$ fixé et lié à la structure microscopique sous-jacente (le réseau) de la membrane. L'existence de ces coordonnées intrinsèques est la grande différence avec les modèles de membranes fluides, qui sont invariants par reparamétrisations locales. Une configuration de plongement du réseau dans l'espace est donnée par la position de chaque point, donc par un champ de vecteur

$$x \in \mathcal{D} \rightarrow \vec{X}(x) \in \mathbb{R}^3 \quad (16.95)$$

La métrique de plongement, ou métrique extrinsèque, est la restriction sur la surface plongée de la métrique euclidienne de l'espace. Elle est donnée par

$$G_{ij}(x) = \partial_i \vec{X}(x) \partial_j \vec{X}(x) \quad (16.96)$$

La configuration d'énergie minimale pour le plongement minimise les forces élastiques et de rigidité en réalisant un plongement euclidien isométrique dans un plan de \mathbb{R}^3 (la normalisation de x peut être choisie pour cela), et tel que la métrique extrinsèque pour la membrane coïncide avec la métrique du plan, et que la courbure extrinsèque soit nulle

$$G_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} \quad , \quad K_{ij}^{(0)} = 0 \quad (16.97)$$

Une fonctionnelle d'énergie locale \mathcal{H} (de type LGW) prenant en compte les effets d'élasticité interne et de rigidité de courbure peut se construire en utilisant la théorie classique de l'élasticité, dans son approximation linéaire (loi de Hooke généralisée). Elle fait intervenir le tenseur des déformations (*strain tensor*) qui est pour un plongement non minimal

$$u_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i \vec{X} \partial_j \vec{X} - \delta_{ij}) \quad (16.98)$$

et est de la forme

$$\mathcal{H} = \int d^2x \frac{\kappa}{2}(\Delta \vec{X})^2 + \mu(u_{ij})^2 + \frac{\lambda}{2}(u_{ii})^2 \quad (16.99)$$

κ est la rigidité de courbure de la membrane, μ et λ sont des modules élastiques de la membrane, et plus précisément les coefficients de Lamé, μ étant le module de cisaillement.

La membrane fantôme

Un cas très simple est celui d'une membrane polymérisée infiniment flexible, donc pour laquelle $\kappa = 0$. Le modèle microscopique sera un simple réseau harmonique dans \mathbb{R}^3 , donc un modèle gaussien bidimensionnel avec un champ \vec{X} à 3 composantes (ou d composantes dans \mathbb{R}^d). Si on néglige les effets d'interactions stériques, donc on considère un modèle où les éléments de la membrane peuvent se traverser ou occuper la même position dans l'espace sans aucune interaction (d'où le terme de « membrane fantôme »), on obtient dans la limite continue une action gaussienne

$$\mathcal{H} = \int d^2x \frac{1}{2}(\partial_i \vec{X})^2 \quad (16.100)$$

Sous l'effet des fluctuations thermiques, une telle membrane adopte une configuration « froissée » très compacte, telle que la distance entre deux points de la membrane dans l'espace est beaucoup plus petite que leur distance intrinsèque sur la membrane, puisque la valeur moyenne du carré de cette distance

extrinsèque est obtenue du propagateur du champ libre en deux dimensions

$$\left\langle (\vec{X}(x) - \vec{X}(y))^2 \right\rangle \simeq \frac{k_B T}{2\pi} \log |x - y| \implies d_{\text{fractale}} = \infty \quad (16.101)$$

Un tel objet est en fait de dimension fractale d_{fract} infinie, puisque cette observable se comporte en général comme $|x - y|^{2/d_{\text{fract}}}$.

La membrane flexible autoévitante

Même en négligeant les effets de la rigidité, les effets stériques vont être prépondérants pour une membrane polymérisée flexible, pour toute dimension d de l'espace de plongement. C'est très différent du cas du polymère flexible, pour ce dernier cas les effets stériques sont importants seulement si $d \leq 4$, comme discuté dans le chapitre 14.4.

La théorie des effets de gonflement stériques pour les membranes polymérisées flexibles est un sujet difficile et intéressant. Un argument phénoménologique, généralisant une approximation due au chimiste P. J. Flory pour les polymères, conduit à l'estimation

$$d_{\text{fract}} = d_{\text{Flory}} = \frac{d + 2}{4} \quad (16.102)$$

qui donne bien $2 < d_{\text{Flory}} < d$ si la dimension de l'espace de plongement est $6 < d < \infty$, mais conduit à prédire que la membrane doit rester plate avec $d_{\text{fract}} = 2$ si $d \leq 6$, donc en trois dimensions.

Mais une théorie complète nécessite un traitement par le groupe de renormalisation. Il est possible de généraliser de façon non triviale des méthodes introduites par S. F. Edwards pour les polymères. Ceci dépasse largement cet ouvrage. Nous renvoyons aux contributions de D. Nelson, de Y. Kantor, de B. Duplantier et de M. Bowick dans [NPW04] pour les premiers travaux sur ce sujet, et à la revue plus récente et complète de K.J. Wiese [Wie01].

La transition de froissement

Revenons au cas de la membrane fantôme, donc en négligeant les effets stériques d'autoévitement, mais prenons en compte la rigidité (donc $\kappa > 0$). Les simulations numériques et les calculs analytiques mettent en évidence un phénomène nouveau et remarquable. Si à haute température (basse rigidité) la membrane reste froissée (avec $d_{\text{fract}} = \infty$), car les effets entropiques dominent, par contre à basse température (haute rigidité) c'est la rigidité de courbure qui l'emporte, et la membrane reste plate (avec $d_{\text{fract}} = 2$), avec des ondulations transverses de petite amplitude (mais intéressantes, nous y reviendrons). Ces deux phases (plate et froissée) sont séparées par une transition de phase à un couplage critique, la transition de froissement. La nature et les propriétés de cette transition peuvent être étudiées de plusieurs façons, et elle s'avère très intéressante. Là encore nous n'allons pas discuter beaucoup plus en détail ceci, mais juste mentionner quelques approches. Pour plus de détails, voir

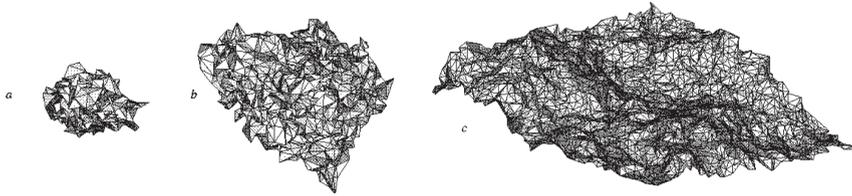


FIGURE 16.26 – Configurations de membrane fantôme dans la phase froissée (a), à la transition (b) et dans la phase plate (c) (extrait des simulations de Bowick *et al.* [BCTT01]).

les contributions de D. Nelson, de M. Bowick [Bow04] et de G. Gompper et D.J. Kroll toujours dans [NPW04].

On peut tout d’abord partir du hamiltonien effectif 16.99, en rajoutant un terme de tension effective $t(u_i i)$ et le traiter par des méthodes de groupe de renormalisation perturbatives (à la LGW). En fait il faut le généraliser à des « membranes » de dimension interne $D \geq 2$ dans un espace de dimension générale d . Le hamiltonien effectif prend alors la forme générale

$$\mathcal{H} = \int d^D x \frac{1}{2} (\Delta \vec{X})^2 + \frac{t}{2} (\partial_i \vec{X} \partial_i \vec{X}) + \mu (\partial_i \vec{X} \partial_j \vec{X})^2 + \frac{\lambda}{2} (\partial_i \vec{X} \partial_i \vec{X})^2 \quad (16.103)$$

Une analyse en champ moyen prédit une transition de froissement, et l’analyse dimensionnelle montre que la dimension critique supérieure est $D_{uc} = 4$, comme pour LGW. Attention D est la dimensionnalité interne de la membrane. L’effet des fluctuations peut être analysé par un développement à la Wilson-Fisher en $4 - \epsilon$, qui prédit en fonction de la dimension d de l’espace de plongement soit une transition continue du deuxième ordre, donc avec des exposants critiques non triviaux, soit une transition du premier ordre induite par les fluctuations. Ce dernier phénomène a déjà été discuté sur l’exemple des modèles de LGW à symétries cubiques en 14.3.

La transition de froissement peut également être étudiée par une formulation de type modèle sigma non linéaire, et un développement en $1/d$, qui prédit pour $D = 2$ (la vraie membrane) et en grande dimension d’espace d une transition continue du second ordre.

Propriétés d’échelle de la phase plate

Si l’existence d’une phase froissée et d’une transition de froissement pour des membranes réelles (avec autoévitement) dans l’espace en 3 dimensions est problématique, et semble exclue par les simulations numériques [BCTT01], celle de la phase plate est indubitable. Cette phase plate est intéressante en soi. Elle correspond à une phase où l’invariance euclidienne du modèle de départ dans l’espace externe (translations et rotations dans \mathbb{R}^3) est spontanément brisée dans la simple invariance $E(2)$ par les translations et les rotations dans

le plan de la membrane.

$$E(3) \rightarrow E(2)$$

On s'attend donc à une théorie de basse énergie pour trois modes de Goldstone. En partant d'une configuration d'énergie minimale plane qui soit le plan $\vec{X} = (X_1, X_2, 0)$ et en paramétrant les déformations de la configuration par les déformations longitudinales $u = (u_1, u_2)$ dans le plan de la membrane et les déformations orthogonales (transverses) dans la direction perpendiculaire au plan

$$\vec{X}(x) = (x_1 + u_1(x), x_2 + u_2(x), h(x)) \quad (16.104)$$

et en gardant les termes de plus basse énergie dans 16.99, on peut approximer le tenseur des déformations par

$$u_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i + \frac{1}{2} \partial_i h \partial_j h \quad (16.105)$$

et se ramener pour la phase plate à un hamiltonien effectif plus simple

$$\mathcal{H}[u, h] = \int d^2x \frac{\kappa}{2} (\Delta h)^2 + \mu (u_{ij})^2 + \frac{\lambda}{2} (u_{ii})^2 \quad (16.106)$$

(u_1, u_2) correspond aux deux modes longitudinaux de « phonons », h au mode d'ondulations transverses (fluctuations de hauteur). Ce sont les trois modes de Goldstone. Les phonons ont un propagateur en $1/k^2$, mais les ondulations ont un propagateur en $1/k^4$. De plus ces modes sont couplés de façon non linéaire. Ce couplage est une conséquence de l'invariance du modèle sous des « basculements infinitésimaux » de la membrane

$$u_i \rightarrow u_i - \frac{1}{2} \epsilon_i h - \frac{1}{4} \epsilon_i \epsilon_j x_j, \quad h \rightarrow h + \epsilon_i x_i \quad (16.107)$$

Ce couplage entraîne une modification du comportement à grande distance (petit vecteur d'onde k) de ces modes. La fonction de corrélation des phonons se comporte comme

$$\langle \hat{u}(k) \hat{u}(-k) \rangle \propto \frac{1}{|k|^{2+\eta_u}} \quad (16.108)$$

et celle des ondulations comme

$$\langle \hat{h}(k) \hat{h}(-k) \rangle \propto \frac{1}{|k|^{4-\eta}} \quad (16.109)$$

avec une relation d'échelle entre les dimensions anormales

$$\eta_u = 2 - 2\eta \quad (16.110)$$

L'exposant de rugosité ζ , qui mesure la croissance des fluctuations de hauteur h avec la distance entre points (comme dans les problèmes de transition rugueuse), et défini par

$$\langle ((h(x) - h(y))^2) \rangle \propto |x - y|^{2\zeta} \quad (16.111)$$

est donné par

$$\zeta = \frac{2 - \eta}{2} \quad (16.112)$$

Il peut être estimé par des calculs perturbatifs de développement en $D = 4 - \epsilon$ et développement en $1/d$ (encore) et par des simulations numériques. Ils conduisent à des estimations de l'ordre de

$$\zeta \simeq 0,64(2) \quad (16.113)$$

Clairement la surface plate est moins rugueuse qu'en l'absence de couplage entre les modes d'ondulation et les phonons, auquel cas on aurait $\zeta = 1$. Le couplage non linéaire entre les ondulations et avec les phonons augmente la rigidité de la surface. En fait les calculs de groupe de renormalisation montrent que le comportement à grande distance de la phase plate est en effet gouverné par un point fixe attractif non trivial. De même, les corrélations entre phonons décroissent à grande distance (un effet d'écrantage par les ondulations). Cette phase plate est donc une phase avec des propriétés d'invariance d'échelle et d'universalité non triviales.

Structure interne

Enfin mentionnons que la physique des membranes est beaucoup plus riche que ce qui est discuté ici de façon succincte. Les phénomènes associés à la cristallisation d'une membrane fluide peuvent conduire à l'apparition d'une phase intermédiaire entre le liquide et le cristal 2d, la phase hexatique caractérisée par une densité de dislocations (les disinclinaisons) et des propriétés élastiques encore différentes. La présence de défauts (dislocations, impuretés, défauts de courbure), de désordre ou d'inhomogénéités de structure (courbure spontanée, etc.) donne lieu à une vaste gamme de phases et de phénomènes possibles. Tout ceci étant très important en physique mésoscopique, en physicochimie et en biophysique. Les modèles très idéalisés présentés ici ne sont qu'une porte d'entrée à ce domaine. Là encore nous renvoyons à [NPW04] pour une introduction.

Enfin mentionnons que des progrès récents ont été faits dans le domaine des membranes cristallines ou polymérisées par des réalisations expérimentales comme les films de graphène ou de disulfure de molybdène. Voir par exemple [RSB17].

Chapitre 17

Systèmes de taille finie et lois d'échelle (*Finite Size Scaling*)

Ce chapitre présente de façon très succincte les conséquences du groupe de renormalisation et de l'existence de lois d'échelle au voisinage d'un point critique pour des systèmes de taille finie. Il s'agit d'un aspect important de la théorie des phénomènes critiques, qui a de nombreuses applications. Dès l'apparition de la théorie moderne des phénomènes critiques dans les années 1970, ce point a été discuté, tout d'abord par M. Fisher, qui a souligné que l'existence de lois d'échelle ne se limitait pas aux systèmes infinis, mais était valable sous une certaine forme pour les systèmes finis. Le sujet s'est fortement développé dans les années 1970 et 1980. C'est maintenant une méthode standard pour l'étude des points critiques.

17.1 Systèmes de taille finie

Considérons un modèle statistique, par exemple le modèle d'Ising sur réseau carré, les paramètres microscopiques sont le couplage normalisé J (ou la température T), le champ externe B et la maille microscopique du réseau a , dans un espace de taille finie. Au voisinage d'un point critique, les fluctuations critiques sont corrélées sur une distance de l'ordre de la longueur de corrélation ξ , qui est beaucoup plus grande que l'échelle microscopique a

$$\xi \gg a \quad (17.1)$$

La théorie du groupe de renormalisation repose sur l'hypothèse (justifiée) que les détails de la physique microscopique et en particulier le cut off a ne jouent plus de rôle et que la physique à grande distance ne dépend que de cette échelle ξ . La longueur de corrélation ξ diverge au point critique T_c comme

$$\xi \simeq |T - T_c|^{-\nu} \quad (17.2)$$

et une quantité thermodynamique comme la susceptibilité magnétique χ diverge comme

$$\chi \simeq |T - T_c|^{-\gamma} \simeq \xi^{\gamma/\nu} \quad (17.3)$$

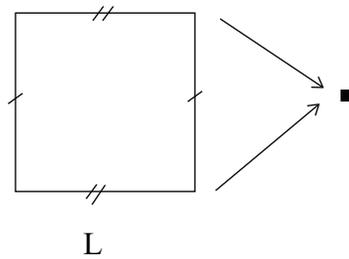


FIGURE 17.1 – Une boîte de taille finie L (tore si c.a.l. périodiques). À grande échelle $\ell \gg L$ le système peut être vu comme un point (système zéro-dimensionnel).

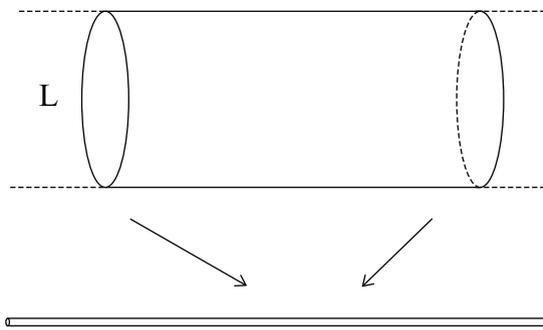


FIGURE 17.2 – Un barreau de taille finie L (cylindre si c.a.l. périodiques). À grande échelle $\ell \gg L$ le système peut être vu comme une droite (système 1-dimensionnel).

Considérons le modèle défini dans un espace fini. Les deux cas les plus importants sont ceux d'une boîte de taille finie L , par exemple un carré de taille $L \times L$ en 2d, $L \times L \times L$ en 3d, etc., et celui d'un système infini dans une seule direction, par exemple un ruban de taille $L \times \infty$ en 2d, un barreau de taille $L \times L \times \infty$ en 3d, etc. « Vu de l'infini », le système est dans le premier cas zéro-dimensionnel, dans le second cas unidimensionnel.

Pour simplifier la discussion, et éliminer les effets de bord, nous supposerons que dans les directions finies, les conditions aux limites sont périodiques. Sinon il faut s'intéresser aux phénomènes critiques en présence de parois et aux transitions de surface. C'est un sujet très riche et très intéressant, avec d'importantes conséquences et applications expérimentales, mais il ne sera pas traité ici.

En 2 dimensions, dans le cas 0-dimensionnel le modèle est défini sur un réseau de maille a sur un tore $\mathbb{T}_L^{(2)} = \mathbb{R}^2/L\mathbb{Z} \times L\mathbb{Z}$, dans le cas 1-dimensionnel, sur un cylindre $\mathbb{C}_L^{(2)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Le premier cas (le tore) s'applique aux simulations numériques par Monte-Carlo, par exemple, qui s'effectue avec un nombre fini de spins. Le deuxième cas (le cylindre) s'applique pour analyser les résultats des études par matrice de transfert (numérique ou analytique) effectué sur des tranches (ici des cercles) de taille finie.

Dans le cas du tore, pour L fini, le système de spins d'Ising a un nombre fini de spins. La fonction de partition Z est (en champ externe nul) une fonction analytique de la température T pour $T > 0$, et ne peut donc pas avoir de singularité. En effet on peut écrire Z (en normalisant le couplage ferromagnétique $J = 1$) en fonction d'un polynôme de degré Nd (d est la dimension du réseau, N le nombre de sites, Nd le nombre de liens du réseau)

$$Z = \sum_{s_i = \pm 1} e^{\beta \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j} = z^{-2N} \text{Polynome}(z^2), \quad z = e^\beta, \quad N = (L/a)^d \quad (17.4)$$

Ceci valable pour le réseau carré (cubique) s'étend facilement à des réseaux de géométries différentes, des couplages plus complexes. Les quantités thermodynamiques comme la susceptibilité magnétique locale χ , ou la chaleur spécifique C , ne peuvent pas diverger. Il n'y a pas de transition de phase dans un système fini, et le système est désordonné à toute température. Considérons χ , et normalisons $a = 1$. Pour le système fini, χ est maintenant fonction de la température T et de la taille L

$$\chi = \chi(T, L) \quad (17.5)$$

Pour L fixé, χ est une fonction régulière de T , mais lorsque L devient très grand, on constate que χ se comporte de plus en plus comme la susceptibilité en espace infini. Un pic apparaît pour T proche de la température critique T_c du modèle d'Ising. Son maximum croît avec L , et il devient une divergence en T_c quand $L = \infty$. Ceci est illustré schématiquement sur la figure 17.3.

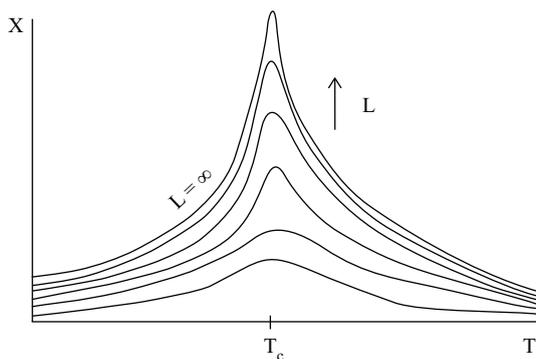


FIGURE 17.3 – La susceptibilité $\chi(T)$ en fonction de la taille L .

Pour le cas du cylindre, réseau infini dans une seule direction, de taille L dans les autres, le système peut être vu comme un modèle statistique unidimensionnel, mais avec un grand nombre d'états $\mathcal{N} = 2^{(L/a)^{d-1}}$ (le nombre de configurations de spin dans chaque tranche). L'argument de Peierls implique qu'il ne peut y avoir de transition de phase à température finie. Le système sera là encore toujours désordonné, et la susceptibilité locale χ une fonction

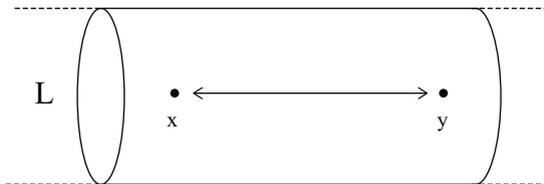


FIGURE 17.4 – Fonction de corrélation à deux points sur le cylindre de largeur L .

régulière $\chi(T, L)$ de la température T . Là aussi un pic apparaît pour $T \simeq T_c$, qui croît avec la taille L et devient la singularité en T_c de $\chi(T)$ pour le système infini quand $L \rightarrow \infty$.

Sur le tore ou dans une boîte finie de taille L , parler de longueur de corrélation ξ n'a pas de sens. C'est par contre possible pour le cas du cylindre ou du ruban, de taille infinie dans une « direction longitudinale », et de taille finie L dans les $d - 1$ directions « transverses ». Il suffit de considérer les fonctions de corrélation de spin dans cette direction longitudinale infinie. ξ est alors une fonction de T et L .

$$\xi = \xi(T, L) \quad (17.6)$$

Là aussi, la longueur de corrélation doit rester finie si $L < \infty$, car le système est effectivement unidimensionnel, et la longueur de corrélation est typiquement au plus d'ordre L près de la température critique. Donc un pic va apparaître pour $T \simeq T_c$, qui devient la divergence en T_c de ξ pour $L \rightarrow \infty$.

17.1.1 Lois d'échelle

Lorsque l'on est proche du point critique T_c , la longueur de corrélation du système infini $\xi(T)$ est très grande, et le groupe de renormalisation prédit que la physique à grande distance est gouvernée par le point fixe de Wilson-Fisher. Les détails microscopiques des interactions et l'échelle microscopique a ne sont plus pertinents. Ils interviennent juste pour fixer les couplages effectifs (renormalisés) de la théorie renormalisée, qui sont en nombre fini. Rappelons que pour le modèle d'Ising, ces couplages pertinents (relevants) sont au nombre de deux pour la théorie de LGW au voisinage du point fixe de WF : la température réduite (masse carrée) $t_R \sim (T - T_c)/T_c$ et le champ externe renormalisé h_R (ou de façon équivalente le facteur de renormalisation du champ ϕ , Z_R).

Lorsque la taille du système L est également grande, et comparable ou plus grande que la longueur de corrélation ξ , on sera dans le domaine où apparaissent des lois d'échelle dépendant de L :

$$\xi \text{ et } L \gg a \quad (17.7)$$

À la suite de Fisher on s'attend à ce que la susceptibilité locale ne dépende, en plus de la température via la longueur de corrélation, que du paramètre sans

dimension L/ξ , et prenne la forme

$$\chi(T, L) = \xi^{\gamma/\nu} F_\chi(\xi/L) \quad (17.8)$$

où $F_\chi(x)$ sera une fonction d'échelle universelle. $\xi = \xi(T) = \xi(T, L = \infty)$ est la longueur de corrélation du système infini. On aura une forme d'échelle similaire pour la chaleur spécifique locale $C_v(T, L)$.

$$C_v(T, L) = \xi^{\alpha/\nu} F_C(\xi/L) \quad (17.9)$$

De la même façon, la longueur de corrélation pour un cylindre (ruban) de largeur finie sera de la forme

$$\xi(T, L) = \xi F_\xi(\xi/L) \quad (17.10)$$

En termes de la température T et de L , ceci peut se réécrire

$$\chi(T, L) = L^{\gamma/\nu} \tilde{F}_\chi((T - T_c)L^{\frac{1}{\nu}}) \quad (17.11)$$

$$C_v(T, L) = L^{\alpha/\nu} \tilde{F}_C((T - T_c)L^{\frac{1}{\nu}}) \quad (17.12)$$

et

$$\xi(T, L) = L \tilde{F}_\xi((T - T_c)L^{\frac{1}{\nu}}) \quad (17.13)$$

Ces fonctions \tilde{F}_χ , \tilde{F}_C et \tilde{F}_ξ sont universelles, en ce sens qu'elles dépendent seulement de la géométrie du problème et des conditions aux limites (outre la classe d'universalité du point critique, caractérisé par la dimensionnalité d , la nature du paramètre d'ordre et de la symétrie associée, etc.). Ces formes d'échelle seront valables suffisamment près du point critique. Des corrections non universelles sous dominantes seront présentes sinon.

Puisque dans le système infini, $\chi \simeq c_\pm |T - T_c|^{-\gamma}$ quand $T \rightarrow T_c \pm 0_+$, avec c_+ et c_- les amplitudes critiques, dont le rapport c_+/c_- est universel, pour retrouver ce résultat dans la limite $L \rightarrow \infty$, il faut que les fonctions d'échelle aient un maximum proche de l'origine, et se comportent à l'infini comme

$$\tilde{F}_\chi(x) \simeq c_\pm |x|^{-\gamma} \quad \text{quand } x \rightarrow \pm\infty \quad (17.14)$$

$$\tilde{F}_C(x) \simeq d_\pm |x|^{-\alpha} \quad \text{quand } x \rightarrow \pm\infty \quad (17.15)$$

$$\tilde{F}_\xi(x) \simeq e_\pm |x|^{-\nu} \quad \text{quand } x \rightarrow \pm\infty \quad (17.16)$$

Avant de montrer comment on justifie ces lois d'échelle de taille finie par la théorie du groupe de renormalisation, discutons en quelques applications.

Si on a des estimations pour χ , C_v , ξ etc. pour différentes tailles du système, par des simulations numériques, des développements de haute ou basse température, des calculs de matrice de transfert, ou par des résultats exacts par des méthodes de systèmes intégrables ou combinatoires, l'analyse des effets de taille finie permet de déterminer la position du point critique, de déterminer la nature de la transition et d'estimer les exposants critiques.

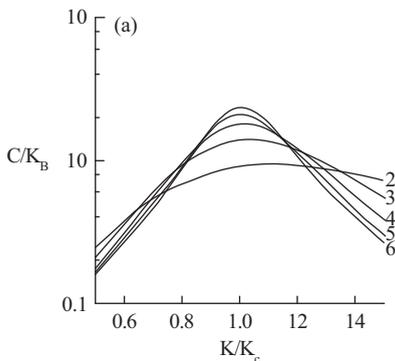


FIGURE 17.5 – Le pic de chaleur spécifique pour le modèle de Potts à $q = 3$ états en 2d sur une bande, en fonction de la largeur L de la bande (d’après H. Blöte et M. Nightingale in [Car88] et M. Barber in [DGL83]).

Considérons par exemple la chaleur spécifique. De 17.12 $C_v(T, L)$ a un maximum $T_{max}(L)$, et sa valeur croît avec L comme

$$C_v(T_{max}(L), L) \propto L^{\alpha/\nu} \quad (17.17)$$

La largeur en température du pic de $C_v(T, L)$, $\Delta_C(L)$, décroît avec L comme

$$\Delta_C(L) \propto L^{-1/\nu} \quad (17.18)$$

Enfin, la position du maximum $T_{max}(L)$ tend vers la température critique également comme

$$T_{max}(L) - T_c \propto L^{-1/\nu} \quad (17.19)$$

Une technique pour estimer en même temps le couplage (température) critique T_c et les exposants ν et α est de considérer ces trois paramètres comme des paramètres variationnels et d’optimiser leurs valeurs pour que les courbes des fonctions

$$f(x, L) = L^{-\alpha/\nu} C_v(T_c + x L^{-1/\nu}) \quad (17.20)$$

coïncident au mieux au voisinage de $x = 0$ pour des valeurs de L différentes et grandes. Si des lois d’échelle de taille finie existent, ces différentes fonctions f_L coïncident bien, et l’ajustement se fait dans un domaine de plus en plus grand quand $L \rightarrow \infty$. La limite quand $L \rightarrow \infty$ est la fonction d’échelle

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \tilde{F}_C(x) \quad (17.21)$$

17.2 Groupe de renormalisation dans les systèmes de taille finie

L’existence de ces lois d’échelle en fonction de la taille pour les systèmes de taille finie peut se justifier par les idées du groupe de renormalisation. Dans la

présentation succincte donnée au-dessus, l'idée de base est que dans le domaine critique, les seules échelles pertinentes sont la longueur de corrélation ξ et la taille du système L . Ceci est similaire aux hypothèses à la base du groupe de renormalisation dans l'espace réel, qui conduisent notamment à la relation d'hyperscaling

$$\alpha = 2 - \nu d \quad (17.22)$$

Donc pour déduire l'existence et la forme des lois d'échelle de taille finie, il suffit en principe d'utiliser à bon escient la théorie du groupe de renormalisation. Dans la formulation « wilsonienne » dans l'espace réel, dont le principe a été donné au chapitre 12, on part d'un hamiltonien microscopique \mathcal{H}_0 pour la théorie avec un cut-off microscopique a , et on effectue des opérations successives de « bloc de spin », ou décimation, par intégration sur les variables à l'intérieur des blocs, puis de « rescaling » pour obtenir un hamiltonien renormalisé \mathcal{H}_S ou hamiltonien effectif, pour des variables ϕ_S définies à l'échelle $S \times a$, $S \gg 1$ étant le facteur de changement d'échelle. Ce hamiltonien renormalisé est caractérisé par des paramètres (couplages) renormalisés κ_S^α .

L'opération de bloc de spin étant locale, elle ne dépend pas de la taille L du système, tant que cette taille est plus grande que celle des blocs, bien sûr. Par contre le hamiltonien renormalisé obtenu étant en général non local, pour un système de taille L , il ne contiendra pas de termes de couplages entre sites à des distances plus grandes que L . Mais comme discuté en 12, il est essentiel que ce hamiltonien renormalisé reste local. C'est le cas en général, car les couplages effectifs à grande distance sont exponentiellement petits. On s'attend donc à ce que corrections de taille finie dans la procédure soient négligeables en pratique, en particulier dans le régime critique et pour des tailles $L \sim \xi$. Dans le domaine critique, le hamiltonien effectif qui décrit la physique à grande distance est le même pour L fini que pour le système infini. C'est donc la théorie des champs de LGW correspondant au point fixe de WF qu'il faut considérer.

On s'attend à ce que ceci soit valable lorsque l'hyperscaling est satisfait, donc en dimension d'espace $d < 4$. Pour $d \geq 4$ le point fixe est la théorie gaussienne, l'approximation du champ moyen est valable, mais les relations d'échelle entre exposants critiques ne sont plus valables, et une analyse en termes de groupe de renormalisation doit prendre en compte la notion un peu subtile d'opérateurs irrelevants dangereux 13.5.1.

Les lois d'échelle de taille finie sont donc analysables dans le contexte de la théorie des champs dans un espace fini (tore, cylindre, etc.). La géométrie étant fixée, la procédure de renormalisation permet de construire avec les mêmes contretermes que pour la théorie en espace infini une théorie dépendant de paramètres renormalisés (g_R, t_R) pour la théorie ϕ^4 de LGW. Les fonctions de corrélations normalisées G , pour le champ renormalisé $\phi = \phi_R$, dépendent maintenant du paramètre supplémentaire L

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle_L = G_N(x_1, \cdots, x_N; g_R, t_R, L) \quad (17.23)$$

et sous une transformation d'échelle se comportent comme

$$G_N(Sx_1, \dots, Sx_N; g_R, t_R, L) = Z(S)^{-K} G_N(x_1, \dots, x_N; g_R(S), t_R(S), L/S) \quad (17.24)$$

On peut voir L comme un paramètre (couplage) supplémentaire de dimension d'échelle $\Delta_L = -1$ (rappel, nous parlons de dimension en échelle de masse ou de moment, donc d'inverse de distance). Au point fixe, le couplage est g_R^* , la température réduite critique est $t_R^* = 0$, le groupe de renormalisation prédit $t_R(S) = t_R S^{-\Delta_t}$, $Z(S) = S^{\Delta_\phi}$, Δ_t et Δ_ϕ étant les dimensions d'échelle du couplage t et du champ ϕ .

La susceptibilité magnétique est donnée par l'intégrale de la fonction connexe à deux points

$$\chi(t, L) = \int d^d x G_2^{(c)}(x, 0; g^*, t, L) \quad (17.25)$$

En utilisant la loi d'échelle 17.23

$$\chi(t, L) = \int d^d x L^{-2\Delta_\phi} G_2^{(c)}(x/L, g^*, t(L), 1) = L^{d-2\Delta_\phi} \chi(t(L), 1) \quad (17.26)$$

Puisque les dimensions d'échelle donnent les exposants critiques ν et γ par $\Delta_t = 1/\nu$ et $2\Delta_\phi = d - \gamma/\nu$, on obtient

$$\chi(t, L) = L^{\gamma/\nu} \chi(tL^{-1/\nu}) \quad (17.27)$$

C'est la relation d'échelle de taille finie 17.11 pour la susceptibilité, puisque $t \simeq T - T_c$. C'est une conséquence très simple des relations du groupe de renormalisation pour les fonctions de corrélation de la théorie des champs correspondant à la limite critique du modèle d'Ising.

Le même type d'argument permet de déduire la relation d'échelle 17.12 pour la chaleur spécifique, à partir de la fonction de corrélation connexe pour les opérateurs d'énergie $\langle \phi^2 \phi^2 \rangle$, et de façon directe 17.13 pour la longueur de corrélation.

Calcul des fonctions d'échelle

Les fonctions d'échelle \tilde{F}_χ et \tilde{F}_C s'obtiennent à partir des fonctions de corrélation de la théorie des champs dans un espace de taille finie. On peut donc *a priori* les calculer par exemple par un développement perturbatif. Pour la théorie de LGW le point fixe g^* est d'ordre $O(\epsilon)$ avec $\epsilon = 4 - d$, on peut utiliser le développement en $4 - \epsilon$ de Wilson-Fisher. Il y a cependant des subtilités dues à la présence de modes zéro dans le propagateur. Considérons le cas simple du tore, donc une boîte de taille L avec des conditions aux limites périodiques. Les modes dans l'espace des moments sont discrétisés

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n} \quad , \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^d \quad (17.28)$$

Les modes $\vec{k} \neq 0$ ont une valeur propre $\neq 0$ même au point critique $t = 0$. Le propagateur de masse nulle, qui intervient dans les calculs perturbatifs pour la théorie critique ($t = 0$), n'est par contre pas défini pour le mode zéro $\vec{n} = 0$ qui correspond à intégrer sur les fluctuations constantes dans la boîte $\phi(x) = \phi_0$. Il faut le traiter à part dans le calcul comme une coordonnée collective. Ceci conduit à des termes non analytiques en ϵ pour les fonctions d'échelle. Nous renvoyons aux articles de Brézin et Zinn-Justin et de Rudnick, Guo et Jasnou dans [Car88] pour une discussion précise de ce problème. L'important est que les fonctions d'échelle existent et qu'elles soient calculables.

Tout ceci est valable pour des conditions aux limites plus compliquées, par exemple antipériodiques, ou dans une boîte avec conditions aux limites de Dirichlet ($\phi = 0$) sur le bord. Ceci s'applique aussi pour le cas du cylindre (système infini dans une direction, c.a.l. périodiques dans les autres). La forme précise des fonctions d'échelle est différente dans chaque cas, et nécessite le calcul des fonctions de corrélations pour la théorie des champs dans ces géométries différentes.

Ces considérations s'appliquent bien sûr également à des théories décrivant des points critiques avec des symétries plus larges, en particulier les modèles vectoriels avec symétrie $O(N)$ et brisure de symétrie $O(N) \rightarrow O(N - 1)$. Les effets de taille finie peuvent d'ailleurs être étudiés dans la limite $N \rightarrow \infty$ et à l'aide du développement en $1/N$.

17.3 Transitions du premier ordre

Il existe un comportement d'échelle pour des systèmes de taille finie près d'une transition du premier ordre, mais ceci est moins intéressant. En effet à une transition du premier ordre, le système coexiste dans plusieurs phases α de même densité d'énergie libre f_α , et la longueur de corrélation ξ_α dans chaque phase reste finie et d'ordre a (l'échelle microscopique). De même les susceptibilités magnétiques ξ_α et chaleurs spécifiques C_α restent finies.

Un exemple est le modèle d'Ising à trois états (modèle d'Ising avec lacunes) discuté dans 14.5.2, pour lequel, à fugacité suffisamment grande des lacunes, la transition ferro/para devient du premier ordre, comme indiqué dans le diagramme de phase 14.11. Un exemple encore plus simple est le modèle d'Ising dans le plan T/H (température, champ externe) qui pour $T < T_c$ présente une transition du premier ordre en $H = 0$. H est le paramètre pertinent pour cette transition, et l'aimantation locale $M = \langle S \rangle$ est singulière, puisque discontinue en $H = 0$ puisque $\lim_{H \rightarrow 0^\pm} M(H) = \pm M_0$. Dans un système de taille finie L , il n'y a qu'une seule phase, d'aimantation M nulle si $H = 0$. Cette phase est un mélange statistique (équiprobable si $H = 0$) des deux phases macroscopiques d'aimantation non nulle $M = \pm M_0$ (figure 17.6).

La discontinuité est arrondie et devient une transition entre ces deux aimantations. Une analyse simple permet de voir que la largeur de cette zone de

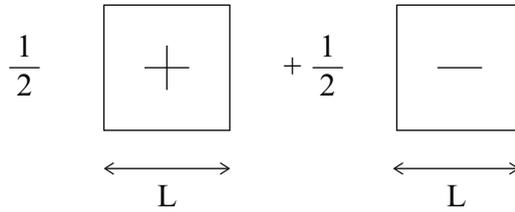


FIGURE 17.6 – Dans une boîte de taille finie, à basse température $T \ll T_c$, la configuration pour $H = 0$ est le mélange statistique des deux configurations d’aimantation non nulle $M = \pm M_0$.

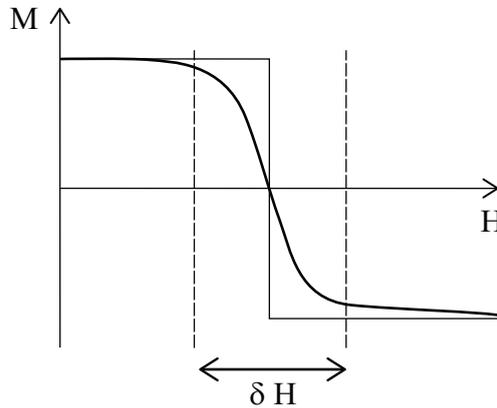


FIGURE 17.7 – La magnétisation en fonction du champ à une transition du premier ordre en taille finie.

transition est inversement proportionnelle au volume

$$\delta H \propto 1/V_{\text{ol}} = L^{-d} \tag{17.29}$$

Si on néglige les fluctuations dans chaque phase, on peut associer à chaque phase $M = \pm M_0$ une probabilité proportionnelle à $e^{\pm V_{\text{ol}} H M_0}$ (en normalisant la température à $\beta = 1$). La susceptibilité $\chi = dM/dH$ aura donc un pic en $H = 0$ de hauteur L^d et de largeur δH avec

$$\delta H \propto L^{-d} \tag{17.30}$$

$\delta H \propto L^{-d}$, et tend vers une fonction δ de Dirac quand $L \rightarrow \infty$.

$$\chi(H) = \delta(H) \quad L = \infty \tag{17.31}$$

En conséquence la magnétisation a une forme d’échelle

$$\chi(H, L) = L^d F(HL^d) \tag{17.32}$$

avec dans cette approximation très grossière $F(x) \simeq 1/\cosh(x)^2$, donc décroissant plus vite qu'une puissance de x .

Une telle loi d'échelle est compatible avec la loi d'échelle 17.12 pour la chaleur spécifique (ici c'est H le paramètre pertinent, pas la température, donc c'est la susceptibilité χ qui joue le rôle de la chaleur spécifique C_v) pour un système critique décrit par un point fixe avec

$$\nu = 1/d \quad , \quad \alpha = 1 \quad (17.33)$$

donc vérifiant bien l'hypothèse d'échelle et l'hyperscaling $\alpha = 2 - \nu d$.

Il est en effet possible, bien que ce soit assez limité du point de vue des conséquences et des applications, de traiter une transition du premier ordre en leur associant un « point fixe de discontinuité » (*discontinuity fixed point*), satisfaisant précisément 17.33. Pour le modèle d'Ising dans le plan (T, H) ce point fixe D est en $T = 0$ et $H = 0$, donc à température et champ nul, et est différent du point fixe critique C en $T = T_c, H = 0$ et du point fixe désordonné F de haute température en $T = \infty, H = 0$.

Dans le cas du cylindre, donc du système quasi unidimensionnel, infini dans une direction et de taille finie dans les autres, les effets de taille finie à un point critique du premier ordre sont différents et un peu plus complexes à traiter. En effet la dynamique effective au point critique fait intervenir un gaz de parois de domaines séparant des domaines dans des phases différentes, l'énergie des parois étant d'ordre L^{d-1} (figure 17.8). Nous renvoyons à notre analyse de 11.6.2 concernant la compétition énergie/entropie pour les parois de domaines dans un système unidimensionnel. Il en résulte que, en champ nul, l'aimantation locale M du modèle sur une bande est bien nulle, mais que ceci résulte de la moyenne entre des domaines d'aimantations positive et négative, de taille moyenne (dans la direction longitudinale) d dépendant exponentiellement de l'énergie d'une paroi transverse, elle-même d'ordre L^{d-1} où L est la taille transverse du système. Il en résulte une longueur de corrélation effective dans la direction longitudinale de l'ordre de d , beaucoup plus grande que la longueur de corrélation dans le bulk (qui est de l'ordre du régulateur microscopique $\xi_{\text{bulk}} \sim a$)

$$\xi_{\text{long.}} \propto \exp(c L^{d-1}/T) \quad (17.34)$$

avec c une constante numérique effective dépendant des détails du modèle et de la température T , T étant très inférieur à la température critique du modèle d'Ising $T < T_c$. La susceptibilité locale étant toujours donnée par la fonction de corrélation de spin, elle contient maintenant une partie d'intégration selon la direction longitudinale y

$$\chi = \int d^d x \langle S(x)S(o) \rangle \sim L^{d-1} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{|y|}{\xi_{\text{long}}}} \sim L^{d-1} \exp(c L^{d-1}/T) \quad (17.35)$$

Cet argument très grossier demande à être raffiné. Il indique que dans le cas du ruban (cylindre), le pic de la susceptibilité ne croît pas avec la taille comme

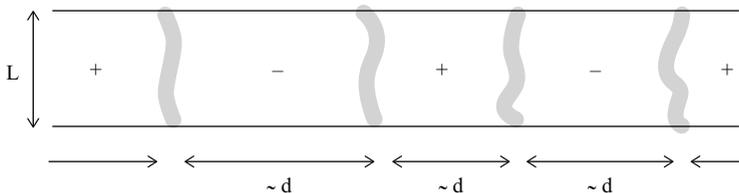


FIGURE 17.8 – Dans une bande de largeur finie, à basse température $T \ll T_c$, la configuration pour $H = 0$ est un mélange statistique de configurations où des domaines d’aimantations opposées $\pm M_0$ sont séparés par des parois d’énergie $E_{\text{paroi}} \propto L^{d-1}$; la distance typique entre parois d est donnée par un argument énergie vs. entropie « à la Peierls ».

une puissance de la taille L , mais comme une exponentielle d’une puissance de la taille ! Pour plus de détails, nous renvoyons à [Car88].

Enfin, pour les applications pratiques, le signal que le pic de susceptibilité croisse avec la taille comme L , et sa largeur décroisse comme $1/L$, est un indicateur fort qu’on a affaire à une transition de phase du premier ordre. Sur la figure 17.9 nous montrons un exemple de tel comportement pour la transition du modèle de Potts à q états en 2 dimensions pour $q = 64$, un cas qui est connu comme étant fortement du premier ordre. On constate bien une croissance exponentielle du pic avec la largeur du ruban L .

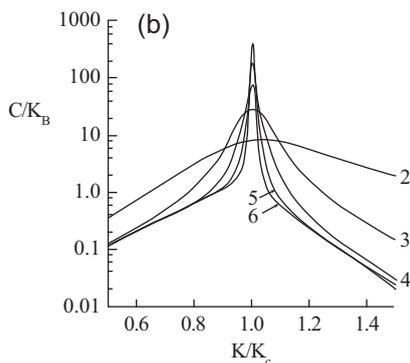


FIGURE 17.9 – Le pic de chaleur spécifique pour le modèle de Potts à $q = 64$ états en 2d sur une bande, en fonction de la largeur L de la bande (d’après H. Blöte et M. Nightingale in [Car88] et M. Barber in [DGL83]).

17.4 Points critiques quantiques à température finie

Mentionnons très brièvement un autre domaine où les lois d'échelle de taille finie apparaissent, et peuvent être importantes. Il s'agit des points critiques quantiques dans des systèmes quantiques. Des systèmes quantiques étendus (1d, 2d, 3d), par exemple des systèmes de spins quantiques couplés sur réseau, ou des systèmes électroniques fortement corrélés, peuvent en fonction des paramètres de leur hamiltonien exhiber des *points critiques quantiques*. Il s'agit de points où le spectre du système, qui en général présente un gap en énergie, devient sans gap (*gapless*). Pour ces valeurs particulières, les états excités, même de petites impulsions, ne sont plus séparés du fondamental par un gap en énergie $\Delta E > 0$, la nature du fondamental, les symétries effectives du modèle quantique changent...

Il est hors de question de détailler ce domaine très important de la physique quantique et de la physique de la matière condensée moderne. Considérons un exemple emblématique, le diagramme de phase en interaction/température pour le modèle de Hubbard à demi-remplissage, qui décrit la transition de Mott entre une phase conductrice (Métal) et une phase non conductrice (Isolant de Mott) pour des électrons (spin 1/2, donc deux états de spin \uparrow et \downarrow) sur un réseau carré 2d ou 3d, donc en moyenne un électron par site, avec une interaction de site répulsive (couplage U) modélisant la répulsion de Coulomb, et un terme de « hopping » (couplage t) donnant la probabilité de saut quantique entre sites voisins. Le couplage est le rapport $g = U/t$. S'il est petit, les électrons peuvent sauter quantiquement et se déplacer sur le réseau sans être trop handicapés par la répulsion coulombienne des électrons voisins, le système est conducteur, donc c'est un métal. S'il est grand, le blocage coulombien l'emporte et les électrons restent localisés chacun sur leur site. Il y a donc un spin par site et le système est équivalent au modèle de Heisenberg antiferromagnétique (quantique), mais le système est isolant (isolant de Mott). La transition entre les deux états (transition métal/isolant) arrive pour un couplage critique g_c , et elle est appelée la transition de Mott. À température nulle on considère un système quantique isolé, donc dans son état fondamental. Ce sont les fluctuations quantiques (faibles dans la phase isolante, fortes dans la phase métal) qui sont à l'origine de la transition. S'il apparaît (c'est le cas pour certaines réalisations du modèle du modèle) que la longueur de corrélation diverge au point critique, on a affaire à un point critique quantique (*quantum critical point* = QCP). À basse température, les fluctuations thermiques commencent à jouer un rôle. En physique statistique classique, elles sont prépondérantes, mais ici, près du point critique quantique, il existe un « domaine critique quantique » où elles sont en compétition avec les fluctuations quantiques, et les deux doivent être prises en compte. Elles vont « adoucir » la nature de la transition, et on s'attend à ce que par exemple la longueur de corrélation reste finie.

De tels points critiques quantiques à température nulle peuvent apparaître dans d'autres systèmes, par exemple les systèmes de spins frustrés sur réseaux

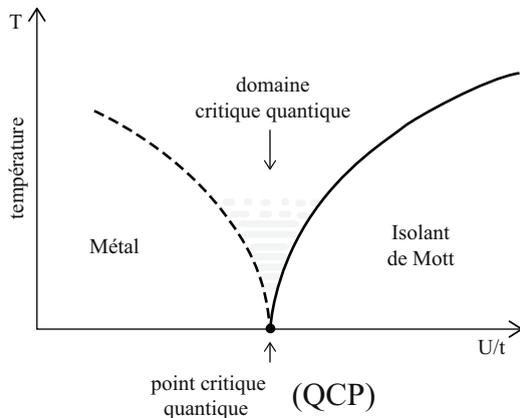


FIGURE 17.10 – Un exemple (idéalisé) de point critique quantique : la transition de Mott.

(liquides de spin), voir la revue récente de L. Balents [Bal10] par exemple. Ils peuvent être présents dans les systèmes quantiques unidimensionnels (chaînes de spin).

La relation avec les effets de taille finie est la suivante. Nous avons vu dans le Vol. 1, chapitre 5, que les systèmes quantiques (non relativistes) étendus en d dimension, par exemple les systèmes de spins sur réseau, les systèmes de bosons ou de fermions peuvent être formulés par des méthodes d'intégrale de chemin comme des systèmes en $1 + d$ dimensions : une dimension de temps et les d dimensions d'espace (ceci peut bien sûr se faire aussi par d'autres méthodes). Nous avons en particulier présenté le cas des gaz de fermions et de bosons non relativistes, et leurs relations respectives avec la théorie de Landau-Ginzburg et celle de Gross-Pitaevskii. Nous avons aussi traité le cas de chaînes de spins quantiques (donc pour $d = 1$) en 15.2. Le temps et l'espace jouent des rôles différents bien sûr en général, mais l'exemple de la chaîne antiferromagnétique de spin demi-entier montre que la théorie effective de basse énergie peut être une théorie relativiste en $1+1$ dimensions (on peut peut-être considérer le modèle $O(3)$ à $\theta = \pi$ comme décrivant un point critique quantique...). Nous avons vu aussi que les propriétés à l'équilibre d'un système quantique à température finie sont données par cette théorie quantique à temps euclidien (donc temps imaginaire) périodique, avec la relation fondamentale

$$\text{période euclidienne } \tau_E = \hbar/k_B T$$

L'étude du domaine critique en température au voisinage d'un point critique quantique est donc analogue mathématiquement à l'étude des effets de taille finie pour un système statistique (classique) au voisinage d'un point critique. Le cas d'un système statistique dans une bande ou sur un cylindre correspond à une direction spatiale infinie, $d - 1$ directions spatiales finies (périodiques),

le cas d'un système quantique fini à température nulle (formulation hamiltonienne) correspond à une direction temporelle infinie, $d - 1$ directions spatiales finies. Le cas d'un point critique quantique pour un système quantique infini en d dimensions, mais à température finie, correspond à une direction euclidienne de temps périodique, et les d directions spatiales infinies. Il est susceptible d'exhiber des lois d'échelle à température finie.

17.5 Zéros complexes de la fonction de partition

17.5.1 Modèle d'Ising avec paramètres complexes

Finalement, mentionnons une autre façon de considérer les effets de taille finie près d'un point critique. Considérons l'exemple du modèle d'Ising (avec interactions entre plus proches voisins) sur un graphe fini. Le cas le plus simple est celui du réseau carré en d dimensions, avec des conditions aux limites périodiques, mais la discussion s'applique à des cas beaucoup plus généraux. La fonction de partition adéquatement normalisée peut s'écrire comme une somme sur les configurations d'un produit sur les sites i et les liens $\langle ij \rangle$ du graphe.

$$Z = \sum_{S_i = \pm 1} \prod_i e^{H(S_i + 1)} \prod_{\langle ij \rangle} e^{J(S_i S_j + 1)} \quad (17.36)$$

est donc un polynôme de grand degré dans les variables $z = e^{2J}$ et $w = e^{2H}$, $Z(z, w)$. J est le couplage (inverse de la température T) et H le champ externe. La fonction de partition n'a donc pas de singularités dans l'espace (J, H) (ou (z, w)), comme attendu, mais il est intéressant de la considérer dans le plan complexe, et de regarder les zéros de $Z(z, w)$. En effet, ces zéros ont des propriétés très intéressantes, et la façon dont ils se comportent lorsque la taille du système L tend vers l'infini donne des informations précieuses sur les différentes phases et les points critiques du modèle.

17.5.2 Zéros en champ magnétique

Le fameux théorème de Lee-Yang établit par exemple que (sous des conditions assez générales) dans le plan complexe des w , les zéros de la fonction de partition Z sont situés sur le cercle unité. Pour une taille finie de réseau L , il y aura $\mathcal{N}_w = L^d$ zéros, et ils sont situés en dehors de l'axe réel positif (correspondant à des H réels). C'est leur comportement quand $L \rightarrow \infty$ en fonction de la valeur de la température $T = J^{-1}$ qui est intéressant.

Dans la phase de haute température désordonnée $J > J_c$, ces zéros s'accumulent sur un arc du cercle unité qui reste à distance finie de la demi-droite réelle. La densité des zéros le long de cet axe est d'ailleurs une quantité intéressante, la suite de zéro devient une coupure, $Z(w)$ restant analytique en dehors, et les points terminaux $w_c = e^{\pm i\theta_c}$ sont des points de branchements, la singularité de bord de Lee-Yang en champ magnétique imaginaire $H = i\theta_c/2$. Cette singularité correspond en fait à un point critique, dont la limite continue

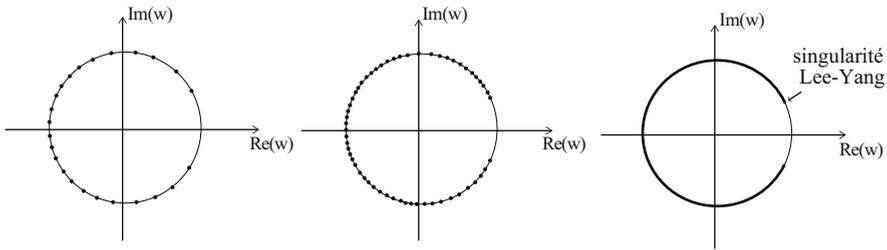


FIGURE 17.11 – Zéros en champ magnétique complexe pour le modèle d’Ising pour $T > T_c$, pour une taille de réseau L petite, plus grande, et dans la limite $T \rightarrow \infty$.

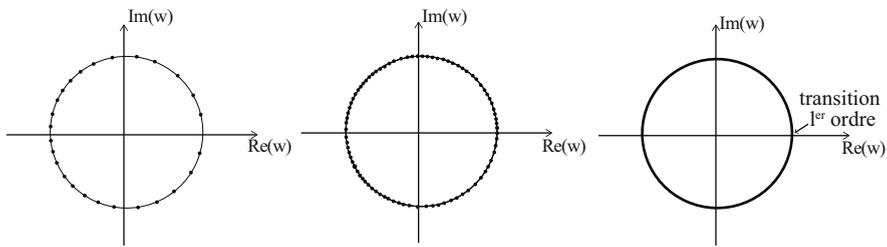


FIGURE 17.12 – Zéros en champ magnétique complexe pour le modèle d’Ising pour $T < T_c$, pour une taille de réseau L petite, plus grande, et dans la limite $T \rightarrow \infty$.

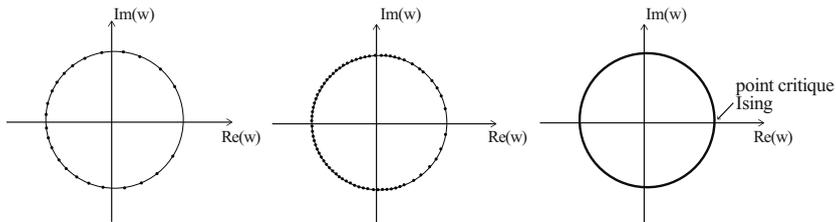


FIGURE 17.13 – Zéros en champ magnétique complexe pour le modèle d’Ising à la température critique $T = T_c$, pour une taille de réseau L petite, plus grande, et dans la limite $T \rightarrow \infty$.

est décrite par une théorie des champs non unitaire intéressante. Voir figure 17.11.

Dans la phase de basse température $T < T_c$ la densité de zéros est finie en $w = 1$ ($H = 0$) et la discontinuité de la fonction de partition correspond à la coexistence de deux phases d’aimantation spontanée opposées (fig 17.12).

À la température critique $T \rightarrow T_c$, les deux points de branchement se rapprochent et « pincet » l’axe réel. C’est le cas intéressant que l’on va discuter (fig 17.13). La façon dont les zéros de $Z(w)$ s’approchent du point critique $w = 1$ ($H = 0$) avec la taille du système L , et le comportement de la densité

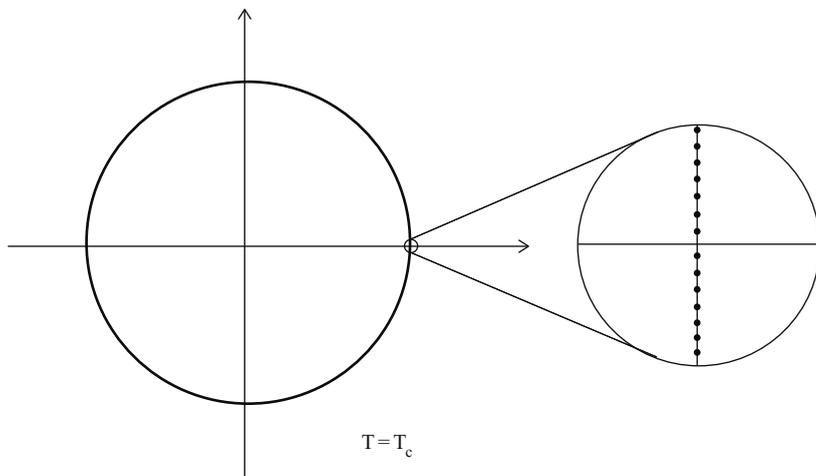


FIGURE 17.14 – « Rescaling » 17.37 des zéros au voisinage du point critique en fonction de la taille du système L .

des zéros à $L = \infty$ donne accès au comportement critique en champs du système d'Ising, donc par exemple à l'exposant δ et à celui de la susceptibilité γ . Ceci se fait en étudiant la distribution des zéros au voisinage du point critique $w_c = 1$ en termes de la variable d'échelle « rescalée » avec L

$$\tilde{w} = (w - w_c)L^{\Delta_h} \quad (17.37)$$

avec Δ_h la dimension d'échelle du champ externe h au point fixe de WF, donnée par 12.104, $\Delta_h = (d + 2 - \eta)/2$.

17.5.3 Zéros en température

La situation est la même pour le modèle en champ nul $H = 0$ et à température complexe, donc étudié dans le plan en $z = e^{2J}$. La fonction de partition pour un réseau de taille finie L possède des zéros dans le plan complexe, qui pour $L \rightarrow \infty$ s'accumulent et vont « pincer » l'axe réel aux points critiques, pour le modèle d'Ising au point z_c correspondant au point critique (point de Curie). Pour le modèle d'Ising en dimension $d = 2$ en champ nul, les zéros peuvent être extraits de la solution exacte de L. Onsager et de ses généralisations (Kauffmann, Kac et Ward, etc.). Ceci permet une étude très précise de ces effets de taille finie et des lois d'échelle.

Signalons que ce type d'études n'est pas restreint au modèle d'Ising en 2D, mais s'étend aux modèles en $d = 3$ et plus. Des études ont été faites pour les modèles de Potts, pour les modèles de spins continus (modèles de Heisenberg, etc.), pour lesquels les fonctions de partitions ne sont plus des polynômes, mais restent analytiques à L fini. Notons d'ailleurs que le théorème de Lee-Yang s'applique à des cas plus généraux que le modèle d'Ising. L'étude de la

distribution d'échelle des zéros permet d'accéder non seulement aux exposants critiques, mais aussi aux rapports d'amplitudes critiques.

Signalons également qu'en général, les zéros complexes en température des fonctions de partition ne s'accumulent pas simplement sur des courbes simples, mais peuvent se localiser dans des régions du plan complexe. Un exemple pour le modèle d'Ising 2d sur réseau triangulaire anisotrope est donné en figure 17.15. Elles ont été utilisées également pour les théories de jauge sur réseaux en physique des hautes énergies.

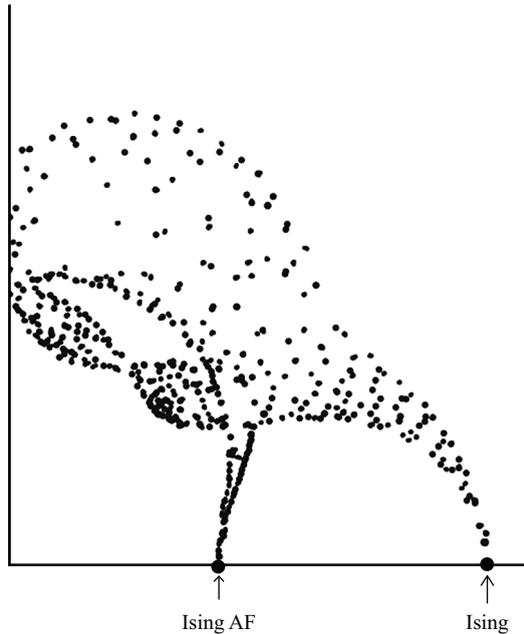


FIGURE 17.15 – Les zéros en température (dans le plan en z) pour un modèle d'Ising critique sur réseau 2D anisotrope, d'après Stephenson *et al.* [Ste87]. Les zéros se localisent dans des régions, qui viennent « pincer » l'axe réel aux points critiques.

Chapitre 18

Invariance d'échelle et invariance conforme

18.1 Introduction

Dans ce chapitre nous revenons sur quelques aspects plus formels de l'invariance d'échelle, et sur son extension, l'invariance conforme, qui joue un rôle très important en théorie des champs (et en théorie des cordes) aussi bien qu'en physique statistique. L'hypothèse d'échelle et la théorie de Wilson prédisent qu'un point critique pour un système statistique, le système aux grandes échelles est invariant d'échelle, et qu'il est décrit par un point fixe auquel correspond une théorie quantique des champs invariante d'échelle. Le voisinage du point critique (domaine critique) est décrit par des perturbations massives (par des opérateurs «*rélevants*») de cette théorie de masse nulle. Les transformations d'échelle sont les dilatations uniformes par un facteur global λ à partir d'un point d'origine. Combinées aux translations elles forment le groupe des homothéties de l'espace euclidien, et avec les rotations forment un groupe des homothéties-rotations. Elles ne conservent pas les distances (qui sont dilatées par le facteur global λ , mais conservent les angles). Dans un premier temps nous revenons sur cette symétrie globale du point de vue théorie des champs.

Il est assez naturel de considérer le groupe plus grand des transformations qui préservent les angles, mais peuvent transformer les distances de façon non rigide (globales). Ce sont les transformations conformes. Le fait que des points critiques possèdent cette propriété est suggéré (sous certaines conditions) par la théorie de groupe de renormalisation lui-même. L'invariance conforme apparaît également en physique des hautes énergies, et joue maintenant un rôle central en gravité quantique, en physique des hautes énergies, et même en matière condensée, notamment via les idées d'holographie. En particulier pour les systèmes 2D, l'invariance conforme a des implications considérables qui ont révolutionné le domaine, et conduit à de très nombreux résultats exacts, notamment concernant la classification des points critiques et les valeurs exactes des exposants critiques. C'est encore un domaine actif à l'interface

de la physique théorique et des mathématiques. L'extension de ces méthodes d'invariance conforme au cas de la dimension $d > 2$ a connu de très gros progrès ces dernières années, et c'est un domaine en plein développement. Nous ne présenterons ici dans un deuxième temps qu'une très élémentaire introduction à ces deux sujets.

18.2 Invariance d'échelle

Dans l'espace euclidien, une transformation d'échelle centrée à l'origine est une dilatation globale par un facteur λ

$$\vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^d \quad (18.1)$$

Elles forment évidemment un groupe multiplicatif abélien (commutatif) homéomorphe à \mathbb{R}_+ . Lorsque c'est une symétrie de la théorie, il lui sera associé par le théorème de Noether un courant conservé.

18.2.1 Champ libre de masse nulle

L'action du champ libre scalaire de masse nulle est

$$S[\phi] = \int d^D x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \quad (18.2)$$

Sous l'action des transformations d'échelle données par

$$\phi(x) \rightarrow \phi_\lambda(x) = \lambda^\Delta \phi(\lambda x) \quad , \quad \Delta = \frac{d-2}{2} \quad (18.3)$$

Δ est la dimension d'échelle du champ ϕ . Cette action est invariante en toute dimension d , puisqu'on a pour tout $\lambda > 0$

$$S[\phi_\lambda] = S[\phi] \quad (18.4)$$

18.2.2 ϕ^4 en dimension $d = 4$

La théorie ϕ^4 de masse nulle n'est pas invariante d'échelle en général, mais l'est en dimension 4. L'action étant

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{g}{4!} \phi^4 \right] \quad (18.5)$$

sous la transformation $\phi(x) \rightarrow \phi_\lambda(x) = \lambda \phi(\lambda x)$, elle est invariante $S[\phi_\lambda; g] = S[\phi; g]$. C'est la conséquence du fait que la constante de couplage g est sans dimension, $\Delta_g = 4 - d = 0$ pour $d = 4$.

18.2.3 Courant de dilatation J_{dil}^μ et tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$

Considérons une théorie scalaire de densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V(\phi) \quad (18.6)$$

Si la théorie est invariante d'échelle, le courant associé aux dilatations J_{dil}^μ est donné par

$$J_{\text{dil}}^\mu(x) = T^\mu_\nu x^\nu + \frac{d-2}{2} \phi \partial^\mu \phi \quad (18.7)$$

où $T^{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion, c'est-à-dire le courant associé à l'invariance par translation, donné pour théorie scalaire par

$$T^\mu_\nu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \quad (18.8)$$

Ceci dérive du théorème de Noether, et sera détaillé un peu plus bas en 18.2.5. La divergence de ce courant J_{dil}^μ est

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = x^\nu \partial_\mu T^\mu_\nu + T^\mu_\mu + \frac{d-2}{2} \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) \quad (18.9)$$

Si les équations du mouvement sont satisfaites, le premier terme est nul, puisque le courant T^μ_ν est conservé (invariante par translation)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (18.10)$$

La divergence de J_{dil} se réduit à

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = T^\mu_\mu + \partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) = \frac{d-2}{2} \phi \Delta \phi - dV(\phi) \quad (18.11)$$

Pour ϕ^4 , en utilisant les équations du mouvement

$$-\Delta \phi + \frac{g}{6} \phi^3 = 0$$

ceci se réécrit

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = (d-4) \frac{g}{4!} \phi^4 = \frac{d-4}{4} \phi \Delta \phi \quad (18.12)$$

Le courant de dilatation est bien conservé en dimension $d = 4$. La théorie ϕ^4 classique est bien invariante d'échelle.

On notera, en notant $\mathbf{T} = T^\mu_\mu$ la trace du tenseur énergie impulsion, que la conservation du courant de dilation équivaut à pouvoir écrire cette trace comme une dérivée totale.

$$\mathbf{T} = -\partial^\mu (\phi \partial_\mu \phi) \quad (18.13)$$

Son intégrale s'annule dans l'espace \mathbb{R}^4 (pour des configurations classiques ϕ décroissant suffisamment vite à l'infini).

$$\int d^4x \mathbf{T} = 0$$

18.2.4 Anomalie d'échelle

Toute cette analyse de l'invariance d'échelle a été faite dans le cadre classique. Pour les théories de champs quantique, il faut tenir compte des divergences UV à courte distance, qui potentiellement peuvent invalider l'analyse classique, puisqu'elles concernent précisément le comportement aux très petites échelles. En général une théorie quantique a un comportement d'échelle différent de sa limite classique, à cause des effets de renormalisation. En particulier, l'invariance d'échelle classique peut être brisée par une anomalie d'échelle.

Continuons à considérer la théorie ϕ^4 en dimension d . L'action euclidienne est

$$\mathcal{S} = \int d^d x \mathcal{L} \quad , \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{t}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 \quad (18.14)$$

Si on reprend la forme générale 18.9 pour le courant J_{dil}^μ et 18.8 pour T_ν^μ , la divergence de J_{dil}^μ s'écrit aussi comme

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = \left[\frac{d-2}{2} \phi \Delta \phi - d \left(\frac{t}{2} \phi^2 + \frac{g}{4!} \phi^4 \right) \right] + x^\nu \partial_\mu T_\nu^\mu \quad (18.15)$$

Le deuxième terme $x^\nu \partial_\mu T_\nu^\mu$ s'annule toujours dans la théorie quantique, car l'invariance par translation impose que $\partial_\mu T_\nu^\mu = 0$. Il reste le premier terme, qui comme on l'a vu plus haut, et en utilisant les équations du mouvement de la théorie ϕ^4

$$-\Delta \phi + t \phi + \frac{g}{3!} \phi^3 = 0$$

peut aussi s'écrire comme

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = -t \phi^2 + (4-d) \frac{g}{4!} \phi^4 \quad (18.16)$$

Sous cette forme, $\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu$ s'annule toujours bien pour $t = 0$ et $d = 4$, tant que ϕ est un champ classique.

Pour la théorie quantique, J_{dil}^μ est maintenant un opérateur quantique, et le premier terme de 18.15 est une combinaison linéaire d'opérateurs composites $\phi \Delta \phi$, ϕ^2 et ϕ^4 , qui contiennent des divergences UV, comme on l'a vu dans le chapitre sur la théorie de la renormalisation (Tome I de ce livre). La théorie quantique ne sera invariante d'échelle que si on peut définir le courant local J_{dil}^μ comme un opérateur renormalisé, agissant sur les états comme le générateur des transformations d'échelle, et qui soit conservé $\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = 0$. De façon équivalente, il faudra que la trace de l'opérateur tenseur énergie-impulsion T , soit une dérivée totale, $T = \partial_\mu K^\mu$, ce qui impliquera que $\int dx T = 0$ (si on néglige les termes de bord).

Le calcul de l'anomalie d'échelle pour la théorie quantique ϕ^4 est simple à l'ordre d'une boucle en utilisant la renormalisation dimensionnelle et les calculs de sa renormalisation déjà effectués dans le Tome 1. Le courant quantique J_{dil}^μ et sa divergence doivent être définis à partir de l'action renormalisée $S_R[\phi]$,

qui pour la théorie de masse nulle s'écrit à l'ordre d'une boucle en dimension $d = 4 - \epsilon$

$$S_R[\phi] = \int d^d x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{g_B}{4!} \phi^4 \quad (18.17)$$

g_B est la constante de couplage nue. Elle contient un contreterme UV qui est un pôle en $1/\epsilon$, et elle a été calculée à l'ordre d'une boucle (chapitre 8.5 du Tome 1). Elle s'écrit en termes de la constante de couplage renormalisée sans dimension g et de l'échelle de renormalisation μ comme

$$g_B = \mu^\epsilon \left(g + \frac{3}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} g^2 \right) \quad (18.18)$$

Rappelons qu'à l'ordre d'une boucle il n'y a pas de renormalisation du terme $(\partial_\mu \phi)^2$ (pas de renormalisation du champ), et ϕ est le champ renormalisé (égal à cet ordre au champ nu ϕ_B). Le terme en ϕ^2 est toujours absent, car il n'est pas renormalisé à une boucle en régularisation/renormalisation dimensionnelle pour la théorie critique (de masse nulle).

La divergence du courant 18.16 pour la théorie quantique de masse nulle s'écrit donc *a priori*

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = \epsilon \frac{g_B}{4!} \phi^4 \quad (18.19)$$

À l'ordre d'une boucle, ceci donne dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu = \frac{3}{(4\pi)^2} g^2 \frac{1}{4!} \phi^4 \quad (18.20)$$

C'est l'anomalie d'échelle ! Les effets de renormalisation brisent l'invariance d'échelle en $d = 4$.

On voit bien dans ce calcul le rôle des divergences UV. Le pôle en $1/\epsilon$ du contreterme à une boucle vient compenser le zéro en ϵ qui donne l'invariance d'échelle classique en $d = 4$. On note aussi que le coefficient n'est rien d'autre que la fonction bêta à une boucle de la théorie ϕ^4 , qui a été calculée dans le chapitre 8 du Tome 1.

$$\beta(g) = \frac{3}{(4\pi)^2} g^2 + \dots \quad (18.21)$$

C'est naturel, puisque la fonction bêta indique comment la constante de couplage renormalisée varie avec l'échelle, ce qui est précisément l'effet de brisure de l'invariance d'échelle. Cette relation entre l'anomalie d'échelle et la fonction bêta se généralise au-delà du calcul à une boucle.

$$\partial_\mu J_{\text{dil}}^\mu(x) = \beta(g) \frac{1}{4!} \phi^4(x) \quad (18.22)$$

Ce résultat est en fait aussi valable pour la théorie en dimension $d < 4$. Le terme en $(d-4)$ dans 18.12 correspond au terme classique (terme d'ordre zéro en puissance de \hbar , donc à l'ordre des arbres) de la fonction β en dimension $d < 4$. La relation entre le courant et la fonction β 18.23 implique que la théorie est invariante d'échelle au point fixe de Wilson-Fisher g^* , zéro de la fonction β , d'ordre $\epsilon = 4 - d$.

18.2.5 Théorème de Noether et tenseur énergie-impulsion

Pour compléter la discussion, nous rappelons ici la démonstration du théorème de Noether (qui a déjà été présentée Tome 1, section 7.9, avec des notations un peu différentes), et les définitions du tenseur énergie-impulsion.

Théorème de Noether

Le théorème de Noether montre qu'à toute symétrie globale d'une théorie classique donnée par une action locale correspond un courant conservé. La démonstration se trouve dans tous les ouvrages de référence et nous rappelons celle de [DFMS12]. On considère une théorie donnée par un champ Φ et une densité lagrangienne locale \mathcal{L} . L'action est

$$\mathcal{S}[\Phi] = \int d^d \mathbf{x} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad (18.23)$$

On suppose qu'un groupe de symétrie continu G (groupe de Lie) agit en même temps sur les positions et sur les champs de la façon suivante. Les transformations sont du type général suivant : sur l'espace

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathcal{X}(\mathbf{x}) \quad (18.24)$$

et sur le champ

$$\Phi \rightarrow \Phi' \text{ tel que } \Phi'(\mathbf{x}') = \mathcal{F}(\Phi(\mathbf{x})) \quad (18.25)$$

\mathcal{X} et \mathcal{F} sont des fonctions données. Si ces transformations correspondent à l'action d'un groupe G , à chaque élément $g \in G$ sont associés un \mathcal{X}_g et un \mathcal{F}_g et on a la loi de composition $\mathcal{X}_g \circ \mathcal{X}_{g'} = \mathcal{X}_{gg'}$ et $\mathcal{F}_g \circ \mathcal{F}_{g'} = \mathcal{F}_{gg'}$. Si c'est une symétrie, cela veut dire que l'action est invariante sous les transformations

$$\mathcal{S}[\Phi] = \mathcal{S}[\Phi'] \quad (18.26)$$

On considère des transformations infinitésimales, de la forme

$$g = 1 + \omega^a \mathfrak{t}_a \quad (18.27)$$

Les ω^a sont « infinitésimaux », les \mathfrak{t}_a sont les générateurs du groupe. Les transformations infinitésimales correspondantes sur \mathbf{x} et Φ sont notées

$$\mathbf{x}' = \mathcal{X}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \omega^a \epsilon_a(\mathbf{x}) \quad (18.28)$$

$$\Phi' = \mathcal{F}_g(\Phi) = \Phi + \omega^a \chi_a(\Phi) \quad (18.29)$$

Pour démontrer le théorème de Noether, il faut considérer la variation de l'action pour une transformation infinitésimale générale de cette forme, en considérant que ω_a peut dépendre de la position \mathbf{x} , $\omega^a = \omega^a(\mathbf{x})$.

$$\delta \mathcal{S} = \mathcal{S}[\Phi'] - \mathcal{S}[\Phi] \quad (18.30)$$

Pour cela, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\Phi'] &= \int d^d \mathbf{x}' \mathcal{L} \left(\Phi'(\mathbf{x}'), \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'^\mu} \Phi'(\mathbf{x}') \right) \\ &= \int d^d \mathbf{x} \left| \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}} \right| \mathcal{L} \left(\mathcal{F}(\Phi(\mathbf{x})), \frac{\partial x'^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \mathcal{F}(\Phi(\mathbf{x})) \right) \end{aligned} \quad (18.31)$$

Pour des transformations infinitésimales, ceci donne après un peu de calcul

$$\delta \mathcal{S}[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \omega^a K_a - \int d^d \mathbf{x} \partial_\mu \omega^a L_a^\mu \quad (18.32)$$

avec

$$K_a = \partial_\nu \epsilon_a^\nu \mathcal{L} + \chi_a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi} + (-\partial_\mu \epsilon_a^\nu \partial_\nu \Phi + \partial_\mu \chi_a) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi)} \quad (18.33)$$

et

$$L_a^\mu = -\epsilon_a^\nu \mathcal{L} + (\epsilon_a^\nu \partial_\nu \Phi - \chi_a) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \Phi)} \quad (18.34)$$

Ce calcul est général et valable pour n'importe quelle déformation. Maintenant intervient l'existence d'une symétrie globale. Si les transformations correspondent à l'action d'un groupe de symétrie, ceci veut dire que pour tout ω^a constant indépendant de \mathbf{x} ,

$$\omega^a(\mathbf{x}) = \omega^a$$

la variation de l'action est nulle pour toute configuration du champ. Le terme en $\partial_\mu \omega^a$ est absent et ceci implique que

$$\int d^d \mathbf{x} K_a(\mathbf{x}) = 0 \quad (18.35)$$

Ceci n'est possible que si K^a peut s'écrire comme une dérivée totale

$$K_a = \partial_\mu \Lambda_a^\mu \quad (18.36)$$

Assez souvent K_a s'annule identiquement $K_a = 0$, donc on peut prendre $\Lambda_a^\mu = 0$. La condition 18.38 est équivalente à l'existence d'une symétrie globale.

Revenant à la variation de l'action pour une variation ω^a générale, en intégrant par partie (et en supposant qu'il n'y a pas de termes de bord) elle se réécrit alors de façon générale

$$\delta \mathcal{S}[\phi] = \int d^d \mathbf{x} \omega^a \partial_\mu (L_a^\mu + \Lambda_a^\mu) \quad (18.37)$$

Ceci définit le courant

$$J_a^\mu = L_a^\mu + \Lambda_a^\mu \quad (18.38)$$

Si Φ satisfait les équations de mouvement classique, la variation de l'action est nulle $\delta \mathcal{S} = 0$ pour toute variation « infinitésimale » du champ $\phi \rightarrow \phi'$ =

$\phi + \delta\phi$, en particulier pour les variations de la forme 18.30 18.31 pour des $\omega^a(\mathbf{x})$ arbitraires. Ceci implique que $\partial_\mu J_a^\mu = 0$. C'est le théorème de Noether

$$\text{symétrie} + \text{équations du mouvement} \implies \partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (18.39)$$

Le courant J^μ ainsi défini dépend de L^μ ; qui est en partie arbitraire. On peut rajouter à L , et donc à J , un vecteur sans divergence arbitraire (lorsque les équations du mouvement sont satisfaites).

$$J^\mu \rightarrow J'^\mu = J^\mu + H^\mu, \quad \partial_\mu H^\mu = 0 \quad (18.40)$$

Courants et charges conservées

En temps réel, donc avec $\mathbf{x} = (x^0, \dots, x^{d-1}) = (t, \vec{x})$ et signature lorentzienne $(- + \dots +)$ $ds^2 = -dt^2 + d\vec{x}^2$, l'existence d'un courant conservé implique l'existence de charges globales par intégration sur une hypersurface d'espace

$$Q_a(t) = \int d^{d-1}\vec{x} J_a^0(\mathbf{x}), \quad \partial_t Q_a(t) = 0 \quad (18.41)$$

Pour une théorie quantique, la version quantique du théorème de Noether peut être établie, par exemple par des méthodes d'intégrale fonctionnelle. Les densités de courant J_a^μ deviennent des opérateurs locaux \mathbf{J}_a^μ , et les charges des opérateurs \mathbf{Q}_a . Leur définition à partir des opérateurs de champs requiert renormalisation et prescription de produits normaux. Il faut s'assurer que les lois de conservation ne sont pas détruites par la présence d'anomalies (comme c'est le cas pour l'invariance d'échelle pour ϕ^4). Dans la représentation de Schrödinger, pour une symétrie globale associée à un groupe de Lie G , avec des constantes de structures f_{bc}^a , les charges doivent obéir aux relations de commutation correspondantes

$$[\mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}_b] = i f_{ab}^c \mathbf{Q}_c \quad (18.42)$$

et commuter avec le hamiltonien pour être conservées

$$[\mathbf{Q}_a, \mathbf{H}] = 0 \quad (18.43)$$

Identités de Ward

L'action du groupe de symétrie sur les fonctions de corrélations de la théorie est donnée par les *identités de Ward*. Elles s'obtiennent de façon générale en combinant la démonstration du théorème de Noether avec des transformations de type dans l'intégrale fonctionnelle 18.30 18.31 et en utilisant les équations de Schwinger-Dyson (voir Tome 1, section 7.8). Pour des fonctions de corrélations d'opérateurs locaux généraux \mathbf{O}_i elles prennent la forme

$$\partial_\mu \langle \mathbf{J}_a^\mu(x) \mathbf{O}_1(x_1) \cdots \mathbf{O}_n(x_n) \rangle = - \sum_i \delta(x-x_i) \left\langle \mathbf{O}_1(x_1) \cdots \frac{\delta}{\delta\omega^a} \mathbf{O}_i(x_i) \cdots \mathbf{O}_n(x_n) \right\rangle \quad (18.44)$$

Application aux translations : le tenseur énergie-impulsion

Le tenseur énergie-impulsion est le courant associé aux translations, donc aux transformations

$$\Phi'(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \quad (18.45)$$

Ceci correspond à des transformations infinitésimales 18.30 18.31 avec

$$\epsilon_a^\mu = \delta_a^\mu \quad , \quad \chi = 0 \quad (18.46)$$

On vérifie que les $K_a = 0$, donc on peut prendre $L_a^\mu = 0$, et on obtient le résultat 18.8 pour le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire.

Application à l'invariance d'échelle

Pour le champ scalaire, considérons les transformations d'échelle

$$x \rightarrow x_\lambda = \lambda x \quad , \quad \phi \rightarrow \phi_\lambda = \lambda^{\frac{2-d}{2}} \phi \quad (18.47)$$

Les générateurs 18.30 et 18.31 pour $\lambda = 1 + \omega$ (ω infinitésimal) sont

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad , \quad \chi(\phi) = \frac{2-d}{2} \phi \quad (18.48)$$

18.35 et 18.36 donnent pour un champ scalaire de densité lagrangienne \mathcal{L} donnée par 18.6 et caractérisée par le potentiel $V(\phi)$

$$K = -dV(\phi) - \frac{d-2}{2} \phi V'(\phi) \quad , \quad L^\mu = x^\nu \partial_\nu \phi \partial^\mu \phi + \frac{d-2}{2} \phi \partial^\mu \phi - x^\mu \mathcal{L} \quad (18.49)$$

On vérifie que L^μ correspond bien au courant pour les dilatations donné par 18.12, et que K ne s'annule en $d = 4$ que pour $V(\phi) \propto \phi^4$. En dimension $d \neq 4$ on a

$$K = -\epsilon g \frac{1}{4!} \phi^4 \quad , \quad \epsilon = 4 - d \quad (18.50)$$

18.2.6 Le tenseur énergie-impulsion comme réponse à une variation de la métrique

Une autre définition, en fait équivalente, du tenseur énergie-impulsion est de ne pas le considérer comme le courant associé à l'invariance par translation, mais comme la réponse à une variation de la métrique lorsque l'on considère la théorie des champs comme couplée à un champ gravitationnel classique, un « champ de fond », donc définie dans un espace courbe muni d'une métrique riemannienne. Revenons à la théorie scalaire pour un champ ϕ , d'action dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{S}[\phi] = \int_E d^d \mathbf{x} \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + V(\phi)$$

La théorie peut être définie dans un espace riemannien général \mathcal{M} , muni d'une métrique g , définissant l'élément de longueur ds^2 et l'élément de volume dv dans un système de coordonnées locales \mathbf{x} par les formules classiques

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}(\mathbf{x}), \quad dv = d^d\mathbf{x} \sqrt{g(x)}, \quad g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (18.51)$$

en remplaçant l'élément de volume euclidien $d^d\mathbf{x}$ et les dérivées partielles ∂_μ par l'élément de volume dv et les dérivés covariantes D_μ (faisant intervenir la connexion de Christoffel $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$). Pour la théorie scalaire, l'action est simplement

$$\mathcal{S}_g[\phi] = \int_{\mathcal{M}} d^d\mathbf{x} \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi + V(\phi) \right) = \int_{\mathcal{M}} d^d\mathbf{x} \sqrt{g} \mathcal{L} \quad (18.52)$$

Le tenseur énergie-impulsion classique est défini de façon générale comme la variation de l'action classique par rapport à une déformation de la métrique

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

par la dérivée fonctionnelle

$$T^{\mu\nu}(x) = - \frac{2}{\sqrt{g(x)}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad (18.53)$$

ou dit autrement

$$\delta \mathcal{S} = - \frac{1}{2} \int d^d\mathbf{x} \sqrt{g(x)} T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x) \quad (18.54)$$

Pour le champ scalaire, on obtient

$$T^{\mu\nu} = D^\mu \phi D^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (18.55)$$

Pour la métrique plate euclidienne $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, ceci coïncide avec la forme 18.8 pour le tenseur énergie-impulsion défini comme courant par le théorème de Noether. Avec cette définition, le tenseur énergie-impulsion est automatiquement symétrique, alors que le tenseur comme courant ne l'est pas automatiquement. Pour des modèles avec par exemple des champs vectoriels, les deux définitions ne coïncident pas automatiquement, mais sont équivalentes à des termes sans divergence près.

La relation entre les deux constructions de $T^{\mu\nu}$ se comprend de la façon suivante. Si on part de la théorie dans l'espace plat, faire une translation infinitésimale non homogène.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu(x) \quad (18.56)$$

peut être considéré comme un difféomorphisme (un changement de coordonnées). Dans ces nouvelles coordonnées, la métrique euclidienne change comme

$$\delta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \quad (18.57)$$

donc équivalent à un changement de métrique avec

$$\delta g_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \omega_\nu + \partial_\nu \omega_\mu)$$

La forme de la variation de l'action 18.34 dans la première formulation est donc similaire à celle 18.56 dans la deuxième formulation.

Enfin, cette définition s'étend à des théories quantiques définies dans une métrique courbe classique (théorie des champs en espace courbe). De façon très succincte, si la quantification peut être effectuée dans une métrique g , par exemple par des méthodes d'intégrale fonctionnelle, $T^{\mu\nu}$ est maintenant un opérateur quantique local, dont les éléments de matrice sont définis par leur insertion dans des « valeurs moyennes dans le vide » de produit d'opérateurs par la dérivée fonctionnelle par rapport à la « métrique de fond » g analogue à 18.55

$$\langle T^{\mu\nu}(x) A(y_1) B(y_2) \cdots \rangle = -\frac{2}{\sqrt{g(x)}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \langle A(y_1) B(y_2) \cdots \rangle \quad (18.58)$$

18.3 Invariance conforme

18.3.1 Le champ libre en dimension $d = 2$

Pour le champ libre scalaire en dimension d , la trace du tenseur énergie-impulsion $\mathbf{T} = T^\mu_\mu$ est, en utilisant 18.8,

$$\mathbf{T} = \frac{2-d}{4} (\partial\phi)^2 \quad (18.59)$$

Cette trace \mathbf{T} est identiquement nulle en dimension $d = 2$, pour toute configuration du champ ϕ . Ce n'est pas une conséquence des équations du mouvement.

Cela est lié au fait que le champ libre est invariant sous les transformations conformes (c'est-à-dire les dilatations locales qui préservent les angles mais pas les distances). L'exemple le plus simple de transformation conforme est l'inversion par rapport à l'origine. Son action sur le champ ϕ est définie comme (en 2 dimensions la dimension de ϕ est 0)

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} \quad ; \quad \phi \rightarrow \phi' \quad , \quad \phi'(\vec{x}) = \phi(\vec{x}') \quad (18.60)$$

Avec un peu de calcul, on vérifie que sous une inversion, l'action S_0 du champ libre est invariante

$$S_0[\phi] = \int d^2\vec{x} \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 \quad ; \quad S_0[\phi'] = S_0[\phi] \quad (18.61)$$

si $d = 2$. Il faut que les dérivées du champ ϕ s'annulent suffisamment vite à l'infini pour que l'action soit finie. En fait l'action du champ libre est invariante sous le groupe des transformations conformes du plan complexe (transformations de Möbius du plan \mathbb{R}^2). Ce groupe se définit simplement en adjoignant

au plan \mathbb{R}^2 le point à l'infini, pour l'identifier à la sphère de Riemann munie des coordonnées complexes $z = x^1 + ix^2$, $\bar{z} = x^1 - ix^2$. Les transformations conformes sont les éléments du groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, de la forme

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (18.62)$$

où on peut restreindre (a, b, c, d) aux éléments d'une matrice complexe de déterminant unité.

18.3.2 Le groupe conforme

Le groupe conforme est défini en d dimensions. C'est le groupe de transformations de l'espace \mathbb{R}^d adjoint du point à l'infini (compactification dite d'Alexandrov) qui préservent localement les angles. Ce groupe est engendré par la combinaison des homothéties (translations, rotations et dilatations) avec les inversions, qui donnent les *transformations conformes spéciales* (TCS), de la forme

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \frac{\vec{x} - \vec{b}(\vec{x} \cdot \vec{x})}{1 - 2\vec{b} \cdot \vec{x} + (\vec{b} \cdot \vec{b})(\vec{x} \cdot \vec{x})} \quad (18.63)$$

C'est un groupe continu (groupe de Lie) non compact, de dimension

$$\frac{(d+2)(d+1)}{2}$$

Il s'identifie en fait au groupe de Lorentz restreint des transformations de l'espace de Minkowski de dimension $d+2$

$$\text{SO}(d+1, 1) \quad (18.64)$$

qui préserve la métrique de Lorentz, avec signature $(- + \dots +)$

$$ds^2 = -dy_0^2 + dy_1^2 + \dots + dy_{d+1}^2$$

C'est également le groupe des isométries positives (translations et rotations) de l'espace hyperbolique (de courbure constante négative) de dimension $d+1$

$$\mathbb{H}_{d+1}$$

En effet, on peut identifier \mathbb{H}_{d+1} à la nappe positive de l'hyperboloïde

$$y_0^2 = 1 + y_1^2 + \dots + y_{d+1}^2, \quad y_0 > 0 \quad (18.65)$$

Les transformations de Lorentz restreintes à cet hyperboloïde sont les isométries de \mathbb{H}_{d+1} . Le fait que ces isométries correspondent à des transformations conformes en d dimension se comprend géométriquement en considérant les points à l'infini de l'espace hyperbolique \mathbb{H}_{d+1} , qui est un espace non compact. L'espace de ces points à l'infini est isomorphe à la sphère d -dimensionnelle \mathcal{S}_d . En effet, on peut représenter \mathbb{H}_{d+1} comme la boule unité dans \mathbb{R}^{d+1} .

$$\mathbb{H}_{d+1} = \mathcal{B}_{d+1} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d+1}; |\mathbf{r}| < 1\} \quad (18.66)$$

muni de la métrique hyperbolique (métrique de Poincaré)

$$ds^2 = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{(1 - |\mathbf{r}|^2)^2} \quad (18.67)$$

Les points à l'infini sont les points sur la sphère unité

$$\mathbb{H}_{d+1}^\infty = \mathcal{S}_d = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d+1}; |\mathbf{r}| = 1\} \quad (18.68)$$

Les isométries de \mathbb{H}_{d+1} agissent par continuité sur \mathcal{S}_{d+1} comme les transformations conformes sur la sphère. La représentation 18.65 des transformations conformes spéciales dans \mathbb{R}^d s'obtient par projection stéréographique de la sphère unité sur un hyperplan tangent.

Une autre représentation de l'espace hyperbolique \mathbb{H}_{d+1} est obtenue en considérant le demi-espace supérieur dans l'espace euclidien de dimension $d + 1$, \mathbb{R}^{d+1} , dont les éléments sont les points dont la dernière coordonnée est strictement positive

$$\mathbb{H}_{d+1} = \mathbb{R}_+^{d+1} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{d+1}; r_{d+1} > 0\} \quad (18.69)$$

et en le munissant de la métrique

$$ds^2 = \frac{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r_{d+1}^2} \quad (18.70)$$

L'espace des points à l'infini est l'hyperplan $r_{d+1} = 0$, auquel on adjoint le point à l'infini.

En dimension $d = 1$, la première représentation correspond à la représentation du plan hyperbolique \mathbb{H}_2 comme le disque de Poincaré (l'ensemble des points à l'infini étant le cercle unité), la deuxième à la représentation comme le demi-plan supérieur (l'ensemble des points à l'infini étant la droite réelle complétée du point à l'infini). Les transformations conformes sont les transformations homographiques réelles

$$x \rightarrow \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (18.71)$$

En dimension $d = 2$, la première représentation correspond à la représentation de \mathbb{H}_3 comme la boule hyperbolique en 3 dimensions, dont l'ensemble des points à l'infini est la sphère unité (sphère de Riemann). Ceci est représenté sur la figure 18.1. La deuxième représentation est la représentation par le demi-espace supérieur (l'ensemble des points à l'infini étant le plan, identifié donc au plan complexe, complété du point à l'infini). Les transformations conformes sont les transformations homographiques complexes

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}. \quad (18.72)$$

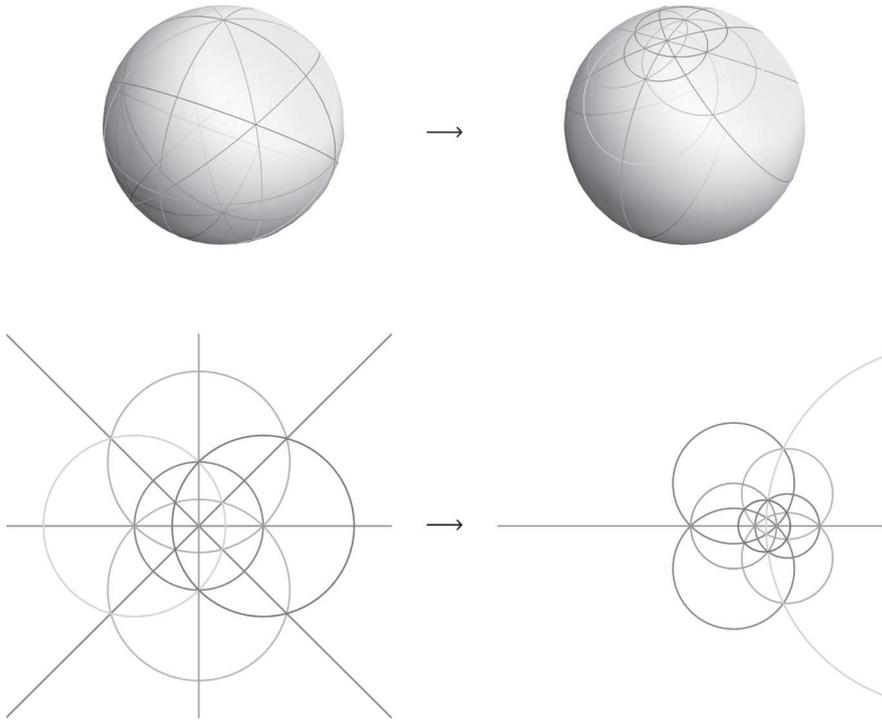


FIGURE 18.1 – La sphère unité en trois dimensions S_2 peut être vue comme l'ensemble des points à l'infini de la boule hyperbolique de Poincaré \mathbb{B}_3 , munie de la métrique hyperbolique 18.69, qui est une réalisation de l'espace hyperbolique \mathbb{H}_3 . Une isométrie de l'espace hyperbolique \mathbb{H}_3 (un élément du groupe $SO(3,1)$) induit une transformation conforme sur la sphère de Riemann S_2 , et par projection stéréographique une transformation holographique sur le plan complexe. Un exemple d'une telle conformation conforme est représenté sur la sphère (figures supérieures) et dans le plan complexe (figures inférieures).

Dans le cas général, les générateurs du groupe conforme en d dimensions (représentés comme agissant sur des fonctions sur \mathbb{R}^d par des transformations $\phi'(x') = \phi(x)$) sont

$$\begin{array}{ll}
 P_\mu = i \partial_\mu & \text{translations} \\
 L_{\mu\nu} = i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) & \text{rotations} \\
 D = -i x^\mu \partial_\mu & \text{dilatation} \\
 K_\mu = -i (2 x_\mu x^\nu \partial_\nu - \mathbf{x}^2 \partial_\mu) & \text{TSC}
 \end{array} \tag{18.73}$$

Cette représentation permet de calculer explicitement leurs relations de commutation, et de vérifier qu'elles correspondent aux relations de commutations du groupe $SO(d + 1, 1)$.

18.3.3 Pourquoi l'invariance conforme ?

L'invariance conforme joue un rôle important en physique, notamment concernant les phénomènes critiques. Il y a de bonnes raisons pour que la propriété d'invariance d'échelle d'un système critique se généralise à une propriété d'invariance conforme, pour de nombreux systèmes physiques. L'argument peut se comprendre simplement si on revient au schéma de renormalisation de Wilson dans l'espace réel pour un système critique, présenté dans le chapitre 12. Dans la procédure de « transformation de bloc de spin » schématiquement présentée en 12.2.2, on part d'un réseau carré de maille élémentaire a , on le divise en « blocs » carrés (dans ce cas) de taille B uniforme, on somme sur les degrés de liberté internes pour obtenir une action effective pour un modèle sur le réseau des blocs de maille Ba , enfin on « rescale » le réseau (l'espace) et les champs pour obtenir une action renormalisée sur le même réseau que le réseau initial. Cette transformation correspond à une transformation d'échelle globale sur le système.

Rien n'empêche *a priori* d'effectuer des transformations de blocs de spin avec des blocs de taille différente suivant leur position dans l'espace, mais de forme homothétique. Ceci ne peut se faire que de façon approximative au départ, mais correspond à une version « discrétisée » (dans un sens assez vague que nous ne précisons pas ici) de transformation de renormalisation basée sur des transformations d'échelles locales préservant la géométrie des blocs élémentaires, donc des transformations conformes. Si la procédure n'engendre pas de nouveaux termes pertinents aux grandes échelles, et si lorsqu'elle est itérée elle converge vers un point fixe, ce sera le même que celui obtenu pour des transformations d'échelles homogènes. Il est alors naturel de supposer que la limite continue décrite par le point fixe est non seulement invariante d'échelle, mais invariante conforme.

Cet argumentaire est très heuristique et qualitatif. Nous allons revenir en particulier dans le cas bidimensionnel, sur les conditions qui assurent qu'une théorie invariante d'échelle est également invariante conforme.

18.4 Invariance conforme en deux dimensions (brève présentation)

18.4.1 Transformations conformes locales

Transformations globales

Le cas bidimensionnel est particulièrement riche et intéressant, avec de très importantes conséquences pour la physique, aussi bien en physique statistique

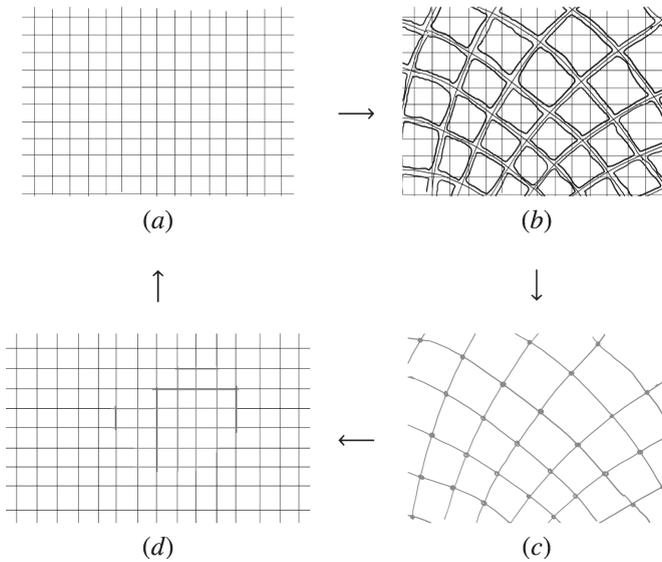


FIGURE 18.2 – Transformation de bloc de spins conforme plutôt que d'échelle (schématique).

et de la matière condensée qu'en physique des hautes énergies et des interactions fondamentales, puisque certains des concepts des théories des champs conformes bidimensionnelles (2D CFT) sont apparus en théorie des cordes, et d'autres en mécanique statistique.

En deux dimensions (euclidiennes) nous avons déjà vu que les transformations conformes globales du plan \mathbb{R}^2 se représentent simplement en coordonnées complexes

$$z = x^1 + ix^2 \quad \bar{z} = x^1 - ix^2 \quad (18.74)$$

et sont les transformations de Moebius de la forme

$$z \rightarrow z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (18.75)$$

Ce sont les transformations homographiques de la sphère de Riemann, qui forment le groupe $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \quad , \quad \det(A) = 1 \quad (18.76)$$

Mentionnons que les transformations conformes qui préservent le demi-plan supérieur $\mathbb{H}_+ = \{z : \text{Re}(z) > 0\}$ sont les transformations homographiques réelles

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad , \quad \det(A) = 1 \quad (18.77)$$

Mentionnons aussi qu'en « temps réel » pour la métrique avec signature lorentzienne $(+ -)$ z et \bar{z} deviennent par rotation de Wick les coordonnées du cône de lumière u et v

$$u = x + t, \quad v = x - t \quad (18.78)$$

Transformations locales

En deux dimensions les transformations conformes globales s'étendent localement dans les *transformations conformes locales*, qui sont simplement les *fonctions analytiques* qui envoient un domaine du plan \mathcal{D} dans un autre domaine \mathcal{D}'

$$z \rightarrow z' = f(z) \quad (18.79)$$

La notation complexe est commode, car on peut écrire une fonction complexe sur le plan $\phi(\vec{x})$ comme une fonction des deux variables $\phi(z, \bar{z})$, avec la contrainte implicite $\bar{z} = \text{c.c. de } z$. Si on représente ces transformations comme agissant sur les fonctions $\phi(z, \bar{z})$ par $\phi \rightarrow \phi'$ avec $\phi'(z', \bar{z}') = \phi(z, \bar{z})$, les générateurs de ces transformations sont les

$$\ell_n = -z^{n+1} \partial_z, \quad \bar{\ell}_n = -\bar{z}^{n+1} \partial_{\bar{z}} \quad (18.80)$$

Leurs relations de commutations sont

$$\begin{aligned} [\ell_n, \ell_m] &= (n - m) \ell_{n+m} \\ [\bar{\ell}_n, \bar{\ell}_m] &= (n - m) \bar{\ell}_{n+m} \\ [\ell_n, \bar{\ell}_m] &= 0 \end{aligned} \quad (18.81)$$

Ces relations simples engendrent une algèbre (l'algèbre de Witt) qui est le produit direct des deux algèbres engendrées respectivement par les ℓ_n et les $\bar{\ell}_n$, chacune identifiable à l'algèbre des difféomorphismes (préservant l'orientation) du cercle unité $\text{Diff}_+(S_1)$. Il est important de noter que ℓ_{-1} ; ℓ_0 et ℓ_1 (et les $\bar{\ell}$ correspondants) engendrent la sous-algèbre des transformations conformes *globales* du plan $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. En effet on vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \ell_{-1}, \bar{\ell}_{-1} &\rightarrow \text{translations} \\ \ell_0, \bar{\ell}_0 &\rightarrow \text{rotations et dilatation} \\ \ell_1, \bar{\ell}_1 &\rightarrow \text{transformations conformes spéciales} \end{aligned} \quad (18.82)$$

Pour revenir aux transformations locales, elles ne préservent pas le plan complexe, ce ne seront donc pas des symétries exactes d'une théorie quantique, mais elles structurent de façon très importante la théorie.

Coordonnées complexes et métriques conformes

Dans les coordonnées complexes, l'élément de longueur est

$$ds^2 = dzd\bar{z} \quad (18.83)$$

donc le tenseur métrique est dans ces coordonnées $\mathbf{x} = (x^z, x^{\bar{z}}) = (z, \bar{z})$ comme

$$g = \begin{pmatrix} g_{zz} & g_{z\bar{z}} \\ g_{\bar{z}z} & g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18.84)$$

Noter que son inverse est

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g^{zz} & g^{z\bar{z}} \\ g^{\bar{z}z} & g^{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18.85)$$

et on peut exprimer vecteurs, tenseurs, etc. dans ces coordonnées avec des indices covariants $_z$ et $_{\bar{z}}$ et contravariants z et $^{\bar{z}}$, et monter et descendre les indices avec ces tenseurs métriques.

Les coordonnées complexes permettent également de traiter les théories dans une métrique riemannienne non plate. En effet, un théorème (basé sur le théorème d'uniformisation) établit que localement, partant d'une métrique g_{ij} générale, il existe toujours un système de coordonnées local \mathbf{x} dans lequel la métrique s'écrit localement comme une métrique conforme

$$g_{ij} = \delta_{ij} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho \text{ facteur conforme.}$$

Dans ce système de coordonnées, les angles sont conservés, mais les distances dépendent de la position dans l'espace. En coordonnées complexes l'élément de longueur et la métrique sont simplement

$$ds^2 = dzd\bar{z} \rho(z, \bar{z}), \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \rho(z, \bar{z})/2 \quad (18.86)$$

et l'élément de volume

$$d^2x \sqrt{g} = d^2z \rho(z, \bar{z}), \quad d^2z = d\text{Re}(z)d\text{Im}(z) \quad (18.87)$$

Ceci ne peut se faire en général que localement, mais on peut traiter le cas de théories sur des surfaces de Riemann générales (avec un nombre de boucles, ou genre, quelconque) et couvrant la surface par des cartes avec des coordonnées complexes.

18.4.2 Théorie quantique et invariance conforme

Une grande partie des idées et des résultats sur les théories conformes en deux dimensions découlent du travail séminal de Belavin, Polyakov et Zamolodchikov de 1984 [BPZ84], universellement cité comme « BPZ ». Nous introduisons juste quelques aspects basiques.

Si une théorie quantique est invariante conforme, en particulier une théorie euclidienne décrivant un point critique d'un système statistique possédant cette symétrie conforme, ceci veut dire que les observables de la théorie se transforment de façon particulière sous des transformations conformes. On considère en particulier les fonctions de corrélations à n points (les « valeurs moyennes dans le vide » de produits d'opérateurs locaux)

$$\langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \quad (18.88)$$

Le tenseur énergie impulsion en deux dimensions

Le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ encode la « réponse » de la théorie aux « translations locales » $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \epsilon$. Il est donc l'objet fondamental pour engendrer les transformations conformes locales, comme il l'est pour les transformations d'échelle. En coordonnées complexes, ses composantes sont

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T^{zz} & T^{z\bar{z}} \\ T^{\bar{z}z} & T^{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \tag{18.89}$$

Il est symétrique donc $T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z}$. Nous avons déjà argué que l'invariance conforme (globale) est assurée si la trace du tenseur énergie impulsion est nulle (dans le plan). Cette trace est donnée par $\text{tr}(\mathbf{T}) = g_{\mu\nu}T^{\nu\mu} = (T^{z\bar{z}} + T^{\bar{z}z})/2$. Donc

$$\text{Invariance conforme} \implies T^{z\bar{z}} = T^{\bar{z}z} = 0 \tag{18.90}$$

Analyticité du tenseur énergie impulsion

La conservation du courant s'écrit alors

$$\partial_u T^{\mu\nu} = 0 \implies \partial_z T^{zz} = 0 \quad , \quad \partial_{\bar{z}} T^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{18.91}$$

T^{zz} est donc une fonction anti-analytique de z , et $T^{\bar{z}\bar{z}}$ une fonction analytique de z . Le tenseur énergie impulsion $T^{\mu\nu}$ pour une théorie invariante conforme s'écrit donc

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} T^{zz}(\bar{z}) & 0 \\ 0 & T^{\bar{z}\bar{z}}(z) \end{pmatrix} \tag{18.92}$$

On exprime généralement T en termes de ses composantes covariantes

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{zz} & T_{z\bar{z}} \\ T_{\bar{z}z} & T_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix} \tag{18.93}$$

C'est T_{zz} qui est analytique, et $T_{\bar{z}\bar{z}}$ qui est anti-analytique. On note dans toute la littérature

$$T(z) = -2\pi T_{zz} \quad , \quad \bar{T}(\bar{z}) = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}} \tag{18.94}$$

et on a bien sûr

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = 0 \tag{18.95}$$

Ces propriétés d'analyticité du tenseur énergie-impulsion sont valables pour la théorie classique. Pour la théorie quantique, elles se transcrivent en des propriétés d'analyticité pour les fonctions de corrélations incluant ce tenseur, mais bien sûr à des termes de contacts près, qui contiennent les propriétés conformes des opérateurs locaux, de la forme

$$\partial_{\bar{z}} \langle T_{zz}(z, \bar{z}) \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = 0 + \text{termes de contacts} \tag{18.96}$$

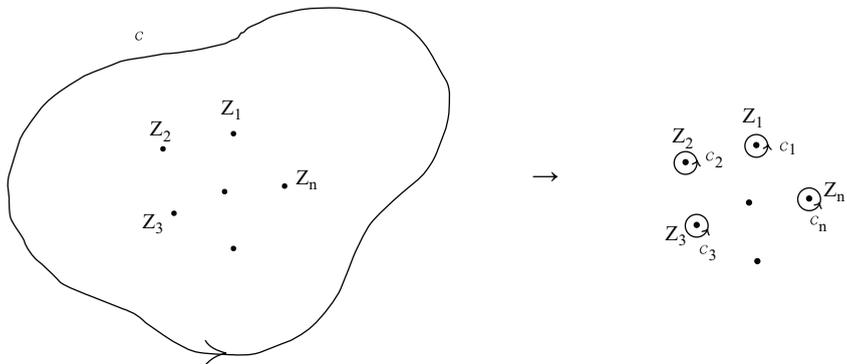


FIGURE 18.3 – Identité de Ward conforme.

Identités de Ward conformes

Ces propriétés d’analyticité font que les identités de Ward pour les transformations conformes prennent une forme remarquablement simple. Si on considère une observable produit d’opérateurs locaux de la forme $\mathcal{O}(z_1, \dots, z_n) = \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n)$, et une transformation conforme infinitésimale

$$z \rightarrow z + \epsilon(z)$$

où $\epsilon(z)$ est définie et analytique dans un domaine Ω (de la topologie d’un disque) qui contient les points (z_1, \dots, z_n) , la variation de la fonction de corrélation de \mathcal{O} est donnée par des intégrales de contour de la fonction de corrélation avec le tenseur énergie-impulsion, de la forme

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon \langle \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle &= - \oint_{\mathcal{C}} dz \epsilon(z) \langle T(z) \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \\ &\quad - \oint_{\mathcal{C}} d\bar{z} \bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) \Phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \Phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \end{aligned} \tag{18.97}$$

où \mathcal{C} est un contour encerclant les points (z_1, \dots, z_n) , homotope au bord du domaine $\mathcal{C} = \partial\Omega$. Notez que l’on peut voir l’intégrale sur le contour comme donnant la charge Q_ϵ (opérateur quantique) portée par l’hypersurface \mathcal{C} et associée à la transformation infinitésimale ϵ , par

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} dz \epsilon(z) T(z) \tag{18.98}$$

L’analyticité de $T(z)$ et celle de la déformation $\epsilon(z)$ dans le domaine Ω font que l’on peut déformer analytiquement le contour d’intégration \mathcal{C} dans chaque intégrale dans le terme de droite de 18.99, et décomposer le contour en une somme de petits contours \mathcal{C}_i encerclant chacun $\Phi_i(z_i, \bar{z}_i)$, ce qui donne

l'action de la transformation conforme infinitésimale sur l'opérateur quantique Φ_i , avec une représentation (un peu formelle mais très importante)

$$\delta_\epsilon \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) = \oint_{c_i} dz \epsilon(z) T(z) \Phi_i(z_i, \bar{z}_i) + \text{c.c.} \quad (18.99)$$

qui peut être analysée par les techniques de développement à courte distance pour le produit d'opérateurs $T(z)\Phi_i(z_i, \bar{z}_i)$, et dont nous allons voir les conséquences.

Opérateurs primaires

Parmi les opérateurs locaux d'une théorie conforme qui sont des « champs d'échelles », une classe spéciale est celle des opérateurs locaux qui se transforment simplement sous des transformations conformes générales $z \rightarrow z' = w(z)$, comme

$$\Phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \Phi(z, \bar{z}) \quad (18.100)$$

De tels opérateurs sont appelés « champs primaires » de la théorie conforme. Ils correspondent aux « vecteurs de plus haut poids » en représentation des groupes. Les nombres h et \bar{h} sont les poids conformes de Φ , qui sera dit de poids (h, \bar{h}) . h et \bar{h} sont en général (pour des théories unitaires) des nombres réels (attention \bar{h} n'est pas le c.c. de h). Il est facile de voir en appliquant ceci à des transformations linéaires complexes $z \rightarrow \lambda e^{i\theta} z$ (dilatation plus rotation) que

$$\begin{aligned} h + \bar{h} &= \Delta && \text{dimension d'échelle de } \Phi \\ h - \bar{h} &= s && \text{spin de } \Phi \end{aligned} \quad (18.101)$$

Notez qu'en dimension deux, le spin n'est pas restreint à être entier ou demi-entier. Dans le cas contraire, ces champs correspondent à des objets plus compliqués, avec des interactions à longue portée, appelés « parafermions ».

Considérons un opérateur primaire Φ de poids (h, \bar{h}) . T et \bar{T} sont des opérateurs conformes, respectivement de poids $(2, 0)$ et $(0, 2)$, mais on va voir tout de suite que T et \bar{T} ne sont pas des opérateurs primaires. Pour une transformation conforme infinitésimale, l'action sur Φ donnée par 18.102 correspond, via 18.101, au comportement à courte distance pour le produit de T avec Φ donné par l'OPE

$$\begin{aligned} T(z) \Phi(w, \bar{w}) &= \frac{h}{(z-w)^2} \Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \Phi(w, \bar{w}) + \dots \\ \bar{T}(\bar{z}) \Phi(w, \bar{w}) &= \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2} \Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \partial_{\bar{w}} \Phi(w, \bar{w}) + \dots \end{aligned} \quad (18.102)$$

18.4.3 La charge centrale et l'algèbre de Virasoro

Pour déterminer comment se transforment T et \bar{T} sous des transformations conformes, il faut passer par des calculs explicites, par exemple pour le

champ libre (boson libre), ou par la théorie générale des représentations des algèbres infinies. Tout ceci sera contenu dans le développement à courte distance $T(z)T(w)$, et il s'avère que dans cette OPE, T qui est de poids $(2, 0)$ peut se mélanger avec l'identité $\mathbf{1}$ qui est de poids $(0, 0)$. Le résultat pour cet OPE est en fait, pour une théorie conforme donnée, de la forme

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} \mathbf{1} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial_w T(w) + \dots \quad (18.103)$$

Une OPE analogue existe bien sûr pour \bar{T} . La présence du premier terme indique que T et \bar{T} ne sont pas des champs primaires.

Le coefficient c au numérateur dépend de la théorie conforme considérée. Ce coefficient est la *charge centrale* de la théorie, et c'est un invariant très important. Pour une théorie conforme unitaire, c'est un nombre réel positif, mais l'invariance conforme impose des contraintes plus fortes sur c . Pour le champ scalaire libre de masse nulle (boson libre) $c = 1$. Pour une autre théorie conforme simple, le champ de Dirac de masse nulle (fermion libre) $c = 1/2$.

En réintégrant cette OPE dans l'identité de Ward pour le tenseur énergie impulsion, on arrive à la loi de transformation pour les composantes de T sous une transformation conforme générale $z \rightarrow z' = w(z)$

$$T(z) \rightarrow T'(w) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-2} \left(T(z) - \frac{c}{12} \{w; z\} \mathbf{1} \right) \quad (18.104)$$

où $\{w; z\}$ est la *dérivée schwartzienne* de la transformation

$$\{w; z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2} \left(\frac{w''}{w'} \right)^2 \quad (18.105)$$

La dérivée schwartzienne a la propriété d'être nulle pour des transformations conformes globales

$$z \rightarrow w = \frac{az + b}{cz + d} \iff \{w; z\} = 0 \quad (18.106)$$

Terminons cette brève présentation en revenant aux charges conformes. Les charges conformes (opérateur quantique) associées à la transformation infinitésimale

$$z \rightarrow w = z + \epsilon z^{n+1} \quad (18.107)$$

via 18.100 sont notées L_n et \bar{L}_n . De l'OPE 18.105 et de 18.100 découlent les relations de commutation pour ces charges (pour c réel)

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{2} n(n^2-1) \delta_{n+m,0} \mathbf{1} \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m) \bar{L}_{n+m} + \frac{c}{2} n(n^2-1) \delta_{n+m,0} \mathbf{1} \\ [L_n, \bar{L}_m] &= 0 \end{aligned} \quad (18.108)$$

Ces relations de commutation sont les *relations de Virasoro*. Les L_n et les \bar{L}_n engendrent indépendamment deux *algèbres de Virasoro* Vir et $\overline{\text{Vir}}$ de dimension infinie, qui commutent entre elles. Ces relations sont une déformation de celles qui définissent l'algèbre de Witt 18.83 des difféomorphismes du cercle, qui est une algèbre de Lie. Pour $c = 0$ on retrouve les relations de commutation de l'algèbre de Witt. Le nouveau terme, proportionnel à la charge centrale c , correspond en mathématique à un terme d'*extension centrale*. L'algèbre de Virasoro est l'unique extension centrale possible de l'algèbre de Witt par le groupe abélien $U(1)$. On voit bien que L_1 , L_0 et L_{-1} engendrent une sous-algèbre de Vir que n'est rien d'autre que l'algèbre (de Lie) des transformations conformes globales $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, comme il se doit. En effet, le terme d'extension centrale est nul si $n = 0, \pm 1$.

L'étude de l'algèbre de Virasoro et de ses représentations, ainsi que de leurs extensions (supersymétriques notamment), est un objet central des théories conformes et des théories des cordes.

Anomalie de trace

L'apparition d'une charge centrale $c \neq 0$ signifie qu'il existe une *anomalie conforme* (locale). L'invariance de la théorie sous des transformations conformes locales est brisée par des termes venant du comportement à courte distance du tenseur énergie-impulsion, donc de la présence d'un cut-off microscopique et des effets de renormalisation. Cette anomalie est également appelée *anomalie de trace*. En effet elle est reliée au fait que la trace du tenseur énergie-impulsion d'une théorie conforme n'est plus nulle lorsque cette théorie est couplée à une métrique riemannienne non plate. Nous donnons ici juste le résultat. En espace plat infini la valeur moyenne de cette trace s'annule pour une théorie conforme

$$\langle \mathbf{T}(x) \rangle_{\text{plat}} = \langle T^\mu_\mu(x) \rangle_{\text{plat}} = 0$$

Si on considère maintenant la théorie couplée à une métrique g , comme fait plus haut pour le boson par 18.54, cette trace est proportionnelle à la courbure scalaire locale de la métrique R , le coefficient étant donné par la charge centrale.

$$\langle \mathbf{T}(x) \rangle_g = \langle T^\mu_\mu(x) \rangle_g = \frac{c}{24\pi} R(x) \quad (18.109)$$

La courbure scalaire R a déjà été introduite pour les surfaces plongées dans l'espace dans le chapitre sur les membranes 16.58, mais c'est un objet intrinsèque de géométrie riemannienne attaché seulement à la métrique intrinsèque g .

La définition du tenseur énergie-impulsion comme réponse à une variation de la métrique 18.55 implique que

$$\langle \mathbf{T}(x) \rangle_g = \frac{2}{\sqrt{g}} g_{\mu\nu}(x) \frac{\delta \Gamma[g]}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \quad (18.110)$$

où $\Gamma[g]$ est « l'énergie libre » (ou action effective) de la théorie quantique dans la métrique g . Pour le boson libre, $W[g]$ est donné par l'intégrale fonctionnelle

(définie correctement) avec l'action du champ libre dans la métrique g , $S_g[\phi]$, donnée par 18.54 avec $V[\phi] = 0$.

$$Z[g] = e^{-\Gamma[g]} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-S_g[\phi]} \quad (18.111)$$

$\langle \mathbf{T}(x) \rangle_g$ est donc la variation de la densité locale d'énergie du vide sous une transformation de la métrique par un facteur conforme local

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x)(1 + \epsilon(x)) \quad (18.112)$$

Charge centrale et effet Casimir

Une autre conséquence importante est la variation de « l'énergie du vide » avec la taille d'un système, mise en évidence par J. Cardy. L'invariance conforme permet de relier une théorie définie dans le plan avec la théorie définie sur un cylindre de taille L dans une direction (donc avec des c.a.l. périodiques) et de longueur infinie dans l'autre. En effet on peut envoyer le plan (moins l'origine) dans le cylindre par l'application conforme

$$z \rightarrow w = \frac{L}{2\pi} \ln z \quad (18.113)$$

La loi de transformation de T 18.106 conduit, puisque $\{w; z\} = 1/2z^2$, et supposant qu'on a normalisé T pour que $\langle T(z) \rangle_{\text{plan}} = 0$, à

$$\langle T(w) \rangle_{\text{cylindre}} = -\frac{c}{6} \frac{\pi^2}{L^2} \quad (18.114)$$

Pour une théorie quantique, maintenant à temps réel, avec $\mathbf{x} = (it, x)$ définie sur le cylindre, donc sur un cercle de périmètre L , la composante T_{00} du tenseur énergie-impulsion donne la densité d'énergie du vide e_{vide} , et est

$$e_{\text{vide}} = -T^{00} = -(T_{zz} + T_{\bar{z}\bar{z}}) = \frac{1}{2\pi}(T + \bar{T}) = -\frac{c}{6} \frac{\pi}{L^2} \quad (18.115)$$

C'est un exemple d'*effet Casimir*. La densité d'énergie du vide dépend de la taille L du système. La charge centrale c est le coefficient de proportionnalité pour cet effet.

Cela a des conséquences importantes pour l'analyse des effets de taille finie dans les systèmes critiques 2D, et est très utile pour les études par matrices de transfert.

Modèles minimaux

Pour terminer cette brève introduction, mentionnons une classe importante de modèles. Il s'agit des modèles correspondant à des théories conformes qui ne contiennent qu'un *nombre fini de champs conformes primaires* et qui sont *unitaires*. Ils sont relativement simples à étudier et classer à l'aide de la

théorie des représentations de l'algèbre de Virasoro. Cette théorie sort du cadre de cet ouvrage. Un résultat très important concernant ces modèles, appelés *modèles minimaux*, est que si la charge centrale c est plus petite que un

$$0 \leq c < 1 \quad (18.116)$$

la charge centrale c ne peut prendre que des valeurs discrètes et bien spécifiées de la forme

$$c = 1 - 6 \frac{(p - p')^2}{pp'} \quad p, p' \text{ entiers } > 0 \quad (18.117)$$

Pour un couple $1 < p' < p$ (pour que c soit non négatif), les poids conformes des opérateurs primaires ($h = \bar{h}$ pour des opérateurs de spin zéro) ne peuvent prendre que des valeurs très spécifiques également, étiquetées par deux entiers

$$h_{r,s} = \frac{(pr - p's)^2 - (p - p')^2}{4pp'} \quad , \quad 1 \leq r < p' \quad , \quad 1 \leq s < p \quad , \quad r, s \text{ entiers} \quad (18.118)$$

Les modèles critiques simples s'inscrivent dans cette table. Le modèle d'Ising correspond au modèle (4, 3) et on trouve bien la charge centrale

$$\text{Ising} = (4, 3) \quad , \quad c = 1/2 \quad (18.119)$$

qui correspond au fait que le modèle d'Ising critique en deux dimensions est équivalent à un système de fermions libres de Dirac. Il possède trois champs primaires

$$\begin{aligned} \phi_{(1,1)} &= \phi_{(2,3)} \quad , \quad h_{1,1} = 0 \quad , \quad \mathbf{1} \text{ identité} \\ \phi_{(2,2)} &= \phi_{(1,2)} \quad , \quad h_{2,2} = 1/16 \quad , \quad \sigma \text{ spin} \\ \phi_{(2,1)} &= \phi_{(1,3)} \quad , \quad h_{2,2} = 1/2 \quad , \quad \epsilon \text{ énergie} \end{aligned} \quad (18.120)$$

Le modèle d'Ising tricritique correspond à

$$\text{Ising tricritique} = (5, 4) \quad , \quad c = 7/10 \quad (18.121)$$

Le modèle de Potts à trois états correspond à un modèle (6, 5)

$$\text{Potts}_3 = (6, 5) \quad , \quad c = 4/5 \quad (18.122)$$

mais c'est également le cas du modèle d'Ising tétracritique ; leurs contenus en champs primaires et leurs espaces de Hilbert, les représentations de Virasoro et les symétries associées sont différentes.

18.5 Notes

L'invariance conforme et les théories de champs conformes forment un domaine très vaste qui a connu de très importants développements durant les quatre dernières décennies. En ce qui concerne leurs applications pour les

systèmes statistiques en deux dimensions, et les systèmes quantiques en 1+1 dimension, ils ont des liens étroits avec la théorie des systèmes statistiques et des théories des champs intégrables (qui possèdent une infinité de lois de conservations), car les déformations massives de théories conformes sont souvent des théories intégrables. Des exposés de ces deux sujets dépassent largement le cadre de cet ouvrage. Des références classiques (déjà citées) sur l'invariance conforme en deux dimensions et les théories conformes sont l'ouvrage introductif de J. Cardy [Car96], et le livre très complet de P. Di Francesco, P. Mathieu et D. Sénéchal [DFMS12]. Une autre très bonne référence pour les théories conformes et les systèmes intégrables est le livre de G. Mussardo [Mus20]. Il en existe beaucoup d'autres.

L'application des techniques d'invariance conforme est plus difficile en dimension supérieure $d > 2$, et ne conduit pas à la moisson de résultats exacts de la dimension deux. Néanmoins des progrès très importants ont été effectués récemment, conduisant notamment à des estimations pour les exposants critiques du modèle d'Ising en dimension trois plus précises que les meilleures estimations par les techniques du groupe de renormalisation ou les méthodes standards de mécanique statistique. Une bonne introduction récente par un des principaux initiateurs de ces avancées est donnée par les notes de cours de S. Rychkov à l'ETHZ [Ryc17].

Enfin, mentionnons que l'invariance conforme et ses extensions supersymétriques sont aussi des ingrédients cruciaux dans la correspondance AdS/CFT (« *Anti de Sitter / Conformal Field Theory correspondence* », aussi appelée « *Gauge / Gravity correspondence* »), un aspect essentiel de la théorie des cordes modernes et de la gravitation quantique, avec d'importantes applications en physique des hautes énergies, mais également en physique de la matière condensée et en physique statistique, ainsi qu'en mathématiques pures.

Index

- aimantation spontanée, 344
- algèbre de Virasoro, 621
- algèbre de Witt, 616
- amplitude critique, 466
- angle θ , 517
- anomalie d'échelle, 602
- anomalie de trace, 621
- antivortex, 529
- approximation du potentiel local (LPA), 450, 454
- approximation variationnelle, 367, 427

- bassin d'attraction, 431
- bicouches, 554
- brisure spontanée de symétrie, 344

- caractéristique d'Euler, 561
- chaîne antiferromagnétique, 524
- chaîne de spins, 523
- chaleur spécifique, 344, 353, 385
- champ libre, 600, 610
- champ local, 369
- champ moléculaire, 364
- champ moyen, 364
- champ renormalisé, 418, 465
- champ/couplage d'échelle, 434
- charge centrale, 620, 622
- charge conservée, 606
- charge topologique, 516, 529
- classe d'universalité, 350
- conjecture de Haldane, 528
- correction aux lois d'échelle, 441
- couplage marginal, 435, 460
- couplage non pertinent/inessentiel, 435
- couplage pertinent/essentiel, 435
- couplage renormalisé, 465
- courant conservé, 601, 606
- courbure moyenne, 559
- courbure scalaire (Gauss), 559, 561
- courbures principales, 558

- création dynamique de masse, 511
- critère de Ginzburg, 402
- cumulant, 346

- dérivée schwartzienne, 620
- développement en ϵ , 459, 477
- dimension critique inférieure, 393
- dimension critique supérieure, 402
- dimension d'échelle, 422, 434, 446
- dimension fractale, 488
- domaine critique, 443
- dualité, 534

- effet Casimir, 622
- énergie interne, 344, 352
- énergie libre, 344, 352
- équation d'état, 372, 384
- équation de Callan-Symanzik, 469
- équation de flot, 423, 455
- excitation topologique, 462
- exposant α , 349, 378, 385
- exposant β , 349, 383
- exposant δ , 349
- exposant η , 346, 386, 436, 446
- exposant γ , 349, 385
- exposant ν , 346, 378, 437, 446
- exposant ω , 441
- exposant critique, 344, 366

- flot de renormalisation, 420, 422
- flot linéarisé, 433
- fluide binaire, 349
- fonction bêta, 511
- fonction connexe, 346
- fonction d'échelle, 441, 465
- fonction de corrélation, 357, 375, 417
- fonction de partition, 416
- fonction de Wilson, 422, 468

- gaz de Coulomb, 532, 551

- groupe conforme, 610
- groupe de renormalisation, 418, 468
- hamiltonien d'essai, 366, 369
- hamiltonien de Landau, 381, 382
- hamiltonien microscopique, 412
- hamiltonien renormalisé, 415, 418
- hypothèse d'échelle, 348
- identité de Ward, 607
- identités de Ward conformes, 618
- instanton, 517
- invariance conforme, 516, 610
- invariance d'échelle, 436, 600
- liberté asymptotique, 461, 511
- limite $N \rightarrow 0$, 389, 483
- limite $N \rightarrow \infty$, 389, 482
- limite continue, 378, 465
- limite thermodynamique, 353
- longueur de corrélation, 346, 377, 385, 417, 437, 439, 461
- longueur de persistance, 568
- métrique conforme, 616
- métrique de plongement, 558
- magnétisation, 353
- marche aléatoire auto-évitante, 350
- matière molle, 553
- matrice de transfert, 358
- membrane, 553
- micelle, 554
- modèle chiral, 519
- modèle d'Ising, 350, 351, 358, 369, 623
- modèle de Heisenberg, 350, 372, 389
- modèle de Potts, 361, 372, 391, 624
- modèle de Sine–Gordon, 463, 534
- modèle de Villain, 551
- modèle de Wess–Zumino–Witten, 518, 520
- modèle gaussien, 424
- modèle $O(N)$, 389, 479
- modèle sigma, 508, 563
- modèle sigma linéaire, 396
- modèle solid-on-solid (SOS), 550
- modèle XY, 350, 389, 462, 529
- modèles minimaux, 623
- mode de Goldstone, 396
- monocouche, 554
- monomère, 487
- mouillage, 539, 540
- mouillage partiel, 540, 547
- mouillage total, 540
- multi instantons, 517
- onde de spin, 531
- opérateur d'échelle, 434
- opérateur inessentiel dangereux, 448, 471
- opérateur primaire, 619
- opérateur redondant, 472
- OPE, 620
- ordre de Néel, 525
- paramètre d'ordre, 344, 381
- phase froissée, 569
- phase géométrique, 520
- phénomène critique, 342
- poils de Boltzmann, 352, 359
- point bicritique, 445, 497
- point critique, 342, 365, 373
- point fixe, 431
- point fixe de Wilson, 456
- point fixe instable, 436
- point multicritique, 497, 624
- point tricritique, 392, 624
- polymère, 350, 487
- polymère en bon solvant, 487
- potentiel effectif (thermodynamique), 354, 371
- régularisation dimensionnelle, 477
- rayon de courbure, 559
- rayon de giration, 488
- relation d'échelle, 447
- relation d'hyperscaling, 447
- relation de fluctuation-dissipation, 353
- renormalisation dimensionnelle, 478
- rigidité de courbure, 561
- rigidité de spin, 508, 563
- rigidité gaussienne, 562
- SAW (*self avoiding walk*), 350
- scaling hypothesis*, 348
- schéma de Migdal–Kadanoff, 426
- semi-groupe, 418
- singularité infrarouge, 398
- soustraction minimale, 478
- surfactant, 554
- susceptibilité magnétique, 344, 446

- tenseur énergie-impulsion, 601, 607
- tenseur de courbure, 560
- tensioactif, 554
- théorème de Mermin-Wagner-Coleman, 398
- théorème de Noether, 604
- théorie de Landau, 380, 424
- théorie des champs conforme, 617
- théorie du champ moyen, 348, 350
- transformée de Legendre, 355
- transformation de « block spin », 413
- transformations conformes locales, 615
- transformations conformes spéciales, 610
- transformations de Moebius, 615
- transition de mouillage, 541
- transition du premier 342
- transition du second ordre, 343
- transition induite par les fluctuations, 485
- transition KT, 533
- transition rugueuse, 550
- universalité, 349, 438, 443
- variété critique, 432
- vortex, 462, 529

Bibliographie

- [AHKM08] Albeverio, S., R. Høegh-Krohn, S. Mazzucchi. *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals: An Introduction*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [Arn74] Arnold. V.I. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, 1974.
- [Bac84] Bachas, C. P. *Perturbative construction and rigorous proof of locality of effective lattice actions for continuum theories*. Nucl. Phys. B, 235: 172–196, 1984.
- [Bal82] Balian, R. *Du microscopique au macroscopique : cours de physique statistique de l'École polytechnique*, tome 1 de *Du microscopique au macroscopique : cours de physique statistique de l'École polytechnique*. École polytechnique, 1982.
- [Bal87] Balibar, S. *La transition rugueuse*. La Recherche, 194: 1452, 1987.
- [Bal94] Balian, R. *Physique statistique*, tome 2 de *Bicentenaire (1794-1994)*. École polytechnique, Département de physique, 1994.
- [Bal10] Balents, Leon. *Spin liquids in frustrated magnets*. Nature, 464: 199–208, mars 2010.
- [BCTT01] Bowick, M.J., A. Cacciuto, G. Thorleifsson et A. Travesset. *Universality classes of self-avoiding fixed-connectivity membranes*. Eur. Phys. J. E, 5(2): 149–160, 2001. [https://doi.org/epje/v5/p149\(e0099\)](https://doi.org/epje/v5/p149(e0099)).
- [Ber66] Berezin, F.A. *The Method of Second Quantization*. Academic Press, 1966.
- [BGEP85] Balibar, S., F. Gallet, Rolley E. et Wolf P.E. *Roughening transition and helium crystals*. Dans Grosse, P. (rédacteur): *Festkörperprobleme 25. Advances in Solid State Physics*, tome 25. Springer, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [BHPP15] Baaquie, B. E., K. Huang, M. EE. Peskin et K. K. Phua (éditeurs): *Ken Wilson Memorial Volume: Renormalization, Lattice Gauge Theory, the Operator Product Expansion and Quantum Fields*. WSPC co-published with Now Publisher, 2015.
- [Bow04] Bowick, M. J. *Fixed-connectivity membranes*. Dans Nelson, D., T. Piran et S. Weinberg (éditeurs) : *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces, Second Edition*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [BPZ84] Belavin, A.A., A.M. Polyakov et A.B. Zamolodchikov. *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*. Nucl. Phys. B, 241: 333, 1984.
- [Bré10] Brézin, E. *Introduction to Statistical Field Theory*. Cambridge University Press, 2010.
- [Bro05] Brown, L. M. *Feynman's Thesis: A New Approach to Quantum Theory*. World Scientific, 2005, <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/5852>.
- [BS59] Bogoliubov N. N., et D. V. Shirkov. *The Theory of Quantized Fields*. Interscience, 1959.

- [BW93] Brézin, E. et S. R. Wadia. *The Large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics: From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*. World Scientific Pub Co Inc, 1993.
- [Can70] Canham, P. B. *The minimum energy of bending as a possible explanation of the biconcave shape of the human red blood cell*. J. Theor. Biol., 26: 61, 1970.
- [Car88] Cardy, J. L. *Finite-Size Scaling*. Current Physics—Sources and Comments 2. North-Holland, 1988.
- [Car96] Cardy, J. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics*. Cambridge Lecture Notes in Physics. Cambridge University Press, 1996.
- [CDM10] Cartier, P. et C. DeWitt-Morette. *Functional Integration: Action and Symmetries*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2010.
- [CH08] Courant, R. et D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*, tome 1. Wiley, 2008.
- [CL00] Chaikin, P.M. et T.C. Lubensky. *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [Con03] Connes, A. *Symétries galoisiennes et renormalisation*. Dans Birkhäuser, (réducteur) : *La renormalisation, séminaire Poincaré 2002*, tome 30 de *Progress in Mathematical Physics*. Duplantier, B. et Rivasseau, V., 2003.
- [CTDL73a] Cohen-Tannoudji, C., B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique - Tome I*. Collection Enseignement des sciences, 16. Masson, 1973.
- [CTDL73b] Cohen-Tannoudji, C., B. Diu, et F. Laloë. *Mécanique quantique - Tome II*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, 1973.
- [CTDL92] Cohen-Tannoudji, C., B. Diu, et F. Laloë. *Quantum Mechanics, 2 Volume Set*. Wiley, 1992.
- [CTLD17] Cohen-Tannoudji, C., F. Laloë, et B. Diu. *Mécanique quantique - Tome III : Fermions, bosons, photons, corrélations et intrication*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2017.
- [Dav90] David, F. *Renormalization group treatment of entropic interactions in lamellar phases*. Dans Dubois-Violette, E. et B. Pansu (éditeurs) : *International workshop on geometry and interfaces*, tome C7-1990 de *Colloque de Physique*. Éditions de Physique, 1990.
- [Dav04] David, F. *Geometry and field theory of random surfaces and membranes*. Dans Nelson, D., T. Piran et S. Weinberg (éditeurs) : *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces, Second Edition*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [Dav14] David, F. *The Formalisms of Quantum Mechanics: An Introduction*. Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, 2014.
- [dCJ87] Cloizeaux, J. des et G. Janninck. *Les polymères en solution : leur modélisation et leur structure*. Éditions de Physique, 1987.
- [dCJ10] Cloizeaux, J. des et G. Janninck. *Polymers in Solution, Their Modelling and Structure*. Oxford University Press, 2010.

- [DEF⁺99a] Deligne, P., P. Etingof, D.S. Freed, L.C. Jeffrey, et D. Kazhdan. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, tome 1 de *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*. American Mathematical Society, 1999.
- [DEF⁺99b] Deligne, P., P. Etingof, D.S. Freed, L.C. Jeffrey, et D. Kazhdan. *Quantum Fields and Strings: A Course for Mathematicians*, tome 2. American Mathematical Society, 1999.
- [Del12] B. Delamotte. *An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group*. Dans Schwenk, A. et J. Polonyi (éditeurs) : *Renormalization Group and Effective Field Theory Approaches to Many-Body Systems*, numéro 852 dans *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2012.
- [DFMS12] Di Francesco, P., P. Mathieu et D. Sénéchal. *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer New York, 2012.
- [DFN84] Dubrovin, B. A., A. T. Fomenko et S. P. Novikov. *Modern Geometry, Methods and Applications*. Springer, 1984.
- [dG79] Gennes, P.G. de. *Scaling Concepts in Polymer Physics*. Cornell University Press, 1979.
- [DGL76] Domb, C., M. S. Green et J. Lebowitz (éditeurs). *Phase Transitions and Critical Phenomena, Volume 6*. Academic Press, 1976.
- [DGL83] Domb, C., M. S. Green et J. Lebowitz (éditeurs). *Phase Transitions and Critical Phenomena, Volume 8*. Academic Press, 1983.
- [DGL88] Domb, C., M. S. Green et J. Lebowitz (éditeurs). *Phase Transitions and Critical Phenomena, Volume 12*. Academic Press, 1988.
- [DGL91] Domb, C., M. S. Green et J. Lebowitz (éditeurs). *Phase Transitions and Critical Phenomena, Volume 14*. Academic Press, 1991.
- [DGL01] Domb, C., M. S. Green et J. Lebowitz (éditeurs). *Phase Transitions and Critical Phenomena, Volumes 1-20*. Academic Press, 1972-2001.
- [DGT82] De Gennes, P. G. et C. Taupin. *Microemulsions and the flexibility of oil-water interfaces*. *J. Phys. Chem.*, 86(13): 2294–2304, juin. 1982. <https://doi.org/10.1021/j100210a011>.
- [Fey48] Feynman, R. P. *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*. *Reviews of Modern Physics*, 20: 367–387, April 1948.
- [FHS10] Feynman, R. P., A. R. Hibbs et D. F. Styer. *Quantum mechanics and path integrals*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, emended ed., dover ed édition, 2010. Originally published: Emended ed. New York : McGraw-Hill, 2005.
- [För86] Förster, D. *On the scale dependence, due to thermal fluctuations, of the elastic properties of membranes*. *Phys. Lett.*, 114A: 115, 1986.
- [Fra13] Fradkin, E. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2013.
- [Gal99] Gallavotti, G. *Statistical Mechanics: A Short Treatise*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 1999.

- [Gal03] Gallavotti, G. *Renormalisation et mécanique classique*. Dans Birkhäuser (éditeur) : *La renormalisation, séminaire Poincaré 2002*, tome 30 de *Progress in Mathematical Physics*. Duplantier, B. et Rivasseau, V., 2003.
- [Gal13] Gallavotti, G. *The Elements of Mechanics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [Hel73] Helfrich, W. *Elastic properties of lipid bilayers: Theory and possible Experiments*. Z. Naturforsch., 28C: 693, 1973.
- [ID89] Itzykson, C. et J.M. Drouffe. *Théorie statistique des champs*. Number 2, *Savoirs Actuels*. EDP Sciences, 1989.
- [ID91] Itzykson, C. et J.M. Drouffe. *Statistical Field Theory: Volume 1, From Brownian Motion to Renormalization and Lattice Gauge Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1991.
- [ID13] Itzykson, C. et J. M. Drouffe. *Théorie statistique des champs*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2013.
- [IZ12] Itzykson, C. et J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012.
- [Kad00] Kadanoff, L.P. *Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization*. Statistical Physics: Statics, Dynamics and Renormalization. World Scientific, 2000.
- [Kad09] Kadanoff, L. P. *More is the same ; phase transitions and mean field theories*. Journal of Statistical Physics, 137(5-6): 777–797, 2009.
- [Kam11] Kamenev, A. *Field Theory of Non-Equilibrium Systems*. Cambridge University Press, 2011.
- [KBD79] Kac, M., K. Baclawski, et M. D. Donsker. *Mark Kac: probability, number theory, and statistical physics: selected papers*. MIT Press, 1979.
- [KS85] Klauder, J.R. et B. S. Skagerstam. *Coherent States: Applications in Physics and Mathematical Physics*. World Scientific, Singapore, 1985, <https://doi.org/10.1142/0096>.
- [KS11] Komargodski, Z. et A. Schwimmer. *On renormalization group flows in four dimensions*. JHEP, 99, 2011.
- [KSF01] Kleinert, H. et V. Schulte-Frohlinde. *Critical Properties of Φ^4 -theories*. World Scientific, 2001.
- [Lal18] Laloe, F. *Comprenons-nous vraiment la mécanique quantique ? 2e édition, révisée et augmentée*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2018.
- [LB06] Le Bellac, M. *Quantum Physics*. Cambridge University Press, 2006.
- [LB12] Le Bellac, M. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge - Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2012.
- [LB13a] Le Bellac, M. *Physique quantique : Vol. 1 - Fondements*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2013.
- [LB13b] Le Bellac, M. *Physique quantique : Vol. 2 - Applications et exercices corrigés*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2013.

- [LBB91] Le Bellac, M. et G. Barton. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford Science Publ. Clarendon Press, 1991.
- [Lei04] Leibler, S. *Equilibrium Statistical Mechanics of Fluctuating Films and Membranes*. Dans Nelson, D., T. Piran et S. Weinberg (éditeurs) : *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces, Second Edition*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [LL94] Landau, L.D. et E.M. Lifchitz. *Physique théorique: Mécanique*. Physique théorique. Ellipses Marketing, 1994.
- [Mus10] Mussardo, G. *Statistical Field Theory: An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*. Oxford Graduate Texts. OUP Oxford, 2010.
- [Mus20] Mussardo, G. *Oxford Graduate Texts: Statistical Field Theory: An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics, Second Edition*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, 2020.
- [Nel02] Nelson, D.R. *Defects and Geometry in Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2002.
- [NPW04] Nelson, D., T. Piran et S. Weinberg (éditeurs). *Statistical Mechanics of Membranes and Surfaces, Second Edition*. World Scientific, Singapore, 2004.
- [NSVI84] Novikov, V. A., M. A. Shifman, A. I. Vainstein et Zakharov, V. I. *Two-dimensional sigma models: modeling non-perturbative effects of quantum chromodynamics*. Dans *Phys. Reports 116, 103*. Elsevier, 1984.
- [OM81] Olshanetsky, M. A. et Perelomov, A. M. *Classical integrable systems related to Lie algebras*. Dans *Phys. Reports 71, 313*. Elsevier, 1981.
- [Par98] Parisi, G. *Statistical Field Theory*. Avalon Publishing, 1998.
- [Per86] Perelomov, A.M. *Generalized Coherent States and Their Applications*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, 1986.
- [PL85] Peliti, L. et S. Leibler. *Effects of Thermal Fluctuations on Systems with Small Surface Tension*. *Phys. Rev. Lett.*, 54(1690), 1985.
- [Pol86] Polyakov, A. *Fine Structure of Strings*. *Nucl. Phys.*, B268: 406, 1986.
- [Pol87] Polyakov, A. *Gauge Fields and Strings*, tome 3 of *Contemporary concepts in physics, ISSN 0272-2488*. CRC Press, 1987.
- [PS18] Peskin, M.E. et D. V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. CRC Press, 2018.
- [Riv03] Rivasseau, V. *Introduction à la renormalisation*. Dans Birkhäuser (éditeur) : *La renormalisation, séminaire Poincaré 2002*, tome 30 de *Progress in Mathematical Physics*. Duplantier, B. et Rivasseau, V., 2003.
- [RSB17] Russell, Emily R., Rastko Sknepnek et Mark Bowick. *Stiffening thermal membranes by cutting*. *Phys. Rev. E*, 96: 013002, Jul 2017. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.96.013002>.
- [Ryc17] Rychkov, S. *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in $D \geq 3$ Dimensions*. SpringerBriefs in Physics. Springer, 2017.
- [SG09] Stone, M. et P. Goldbart. *Mathematics for Physics: A Guided Tour for Graduate Students*. Cambridge University Press, 2009.

- [SH82] Schwartz, L. et D. Huet. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Enseignement des sciences. Hermann, 1982.
- [She07] Sheffield, S. *Gaussian free fields for mathematicians*. Probability Theory and Related Fields, 139(3): 521–541, 2007. ISSN 1432-2064. <https://doi.org/10.1007/s00440-006-0050-1>.
- [Spi70] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish (Boston), 1970.
- [Ste87] Stephenson, J. *et al.* *Partition function zeros for the two dimensional Ising Model, I - IV*. Physica, 129 A - 148 A, 1984 - 1987.
- [Tsv07] Tselvik, A.M. *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2007.
- [Wei95] Weinberg, S. *The Quantum Theory of Fields*. Numéro vol. 1 dans *Quantum Theory of Fields, Vol. 2 : Modern Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [WF72] Wilson, Kenneth G. et Michael E. Fisher. *Critical exponents in 3.99 Dimensions*. Phys. Rev. Lett., 28: 240–243, Jan 1972. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.28.240>.
- [Wic54] Wick, G. C. *Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions*. Phys. Rev., 96: 1124–1134, 1954. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.1124>.
- [Wie01] Wiese, K. J. *Polymerized membranes, a review*, tome 19 de *Phase Transitions and Critical Phenomena*, chapitre 2. Academic Press, 2001.
- [WK74] Wilson, K. G. et J. Kogut. *The renormalization group and the epsilon expansion*. Physics Reports, 12(2): 75–199, 1974.
- [Zam86] Zamolodchikov, A. B. « *Irreversibility* » of the flux of the Renormalization Group in a 2-d Field Theory. JETP Lett., 43: 730–732, 1986.
- [Zee10] Zee, A. *Quantum Field Theory in a Nutshell: Second Edition*. Princeton University Press, 2010.
- [ZJ99] Zinn-Justin, J. *Renormalization and renormalization group: From the discovery of uv divergences to the concept of effective field theories*. Dans Witt-Morette, C. de et J. B Zuber (éditeurs) : *Proceedings of the NATO ASI on Quantum Field Theory: Perspective and Prospective*, numéro C 530 dans *NATO ASI Series*, pages 375–388. Kluwer Academic Publishers, 1999. <http://www.ipht.fr/articles/t98/118/>.
- [ZJ02] Zinn-Justin, J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 2002.
- [ZJ10] Zinn-Justin, J. *Path Integrals in Quantum Mechanics*. Oxford Graduate Texts. OUP Oxford, 2010.
- [ZJ12] Zinn-Justin, J. *Intégrale de chemin en mécanique quantique : introduction*. Savoirs Actuels. EDP Sciences, 2012.