Rainer Tiemeyer

Axiome der Klassischen Mechanik

Hilberts Problem und Hamels Lösungsversuch in wissenschaftstheoretischer Perspektive

λογος

Die Open-Access-Stellung der Datei erfolgte mit finanzieller Unterstützung des Fachinformationsdiensts Philosophie (https://philportal.de/)

FACHINFORMATIONSDIENST
PHILOSOPHIE

DOI: https://doi.org/10.30819/4292

Rainer Tiemeyer

Axiome der Klassischen Mechanik

Hilberts Problem und Hamels Lösungsversuch in wissenschaftstheoretischer Perspektive

Diese Veröffentlichung lag dem Promotionsausschuss Dr. phil.
der Universität Bremen als Dissertation vor.
Gutachter: Prof. Dr. Manfred Stöckler
Gutachter: Prof. Dr. Helmut Pulte
Das Kolloquium fand am 26.10.2015 statt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8325-4292-4

Logos Verlag Berlin GmbH
Comeniushof, Gubener Str. 47,
10243 Berlin
Tel.: +49 (0)30 42 85 10 90
Fax: +49 (0)30 42 85 10 92
INTERNET: http://www.logos-verlag.de

Für meine Frau Nina
und unsere Kinder
Paul und Marie

Vorwort

> **„Wenn ein junger Philosophiestudent zu Ihnen käme mit der Bitte um einen Rat, welcher Bereich am dringlichsten einer Bearbeitung bedarf, womit sollte sich der Student auf Ihren Rat hin beschäftigen?**
>
> *Quine*: Ein großes Projekt, das mir als vielversprechend ins Auge gestochen ist, wäre wohl, einen begrenzten Bereich einer gefestigten Wissenschaft herauszugreifen, wie etwa die Newtonsche Mechanik, und zu versuchen, die logischen Implikationen explizit auszumachen, von den grundlegenden Prinzipien bis hin zu den beobachtbaren Prüfstellen. Mit anderen Worten, eine *explizite* Ansammlung von Belegen. Das hätte nicht nur den Vorteil, dass wir über die Erkenntnisweise dieser Wissenschaft Klarheit gewinnen, sondern es könnte auch ein Beitrag zu der Wissenschaft sein, durch das Vorschlagen von Abkürzungen und Vereinfachungen, oder durch den Nachweis, wie ein Teil der Theorie einfach nicht angewendet wird oder seinen Zweck nicht erfüllt. Falls dieses Vorgehen bei einem Musterstück der Wissenschaft gelingt, könnte es auf weitere Fälle ausgedehnt werden und, wenn es weiterhin erfolgreich ist, könnte es dazu beitragen, dass die Philosophie ein Dienstmädchen aller Wissenschaften wird, zusammen mit der Mathematik."
>
> (Quine [1994], S. 57, in eigener Übersetzung)

Als ich diese Empfehlung von Willard Quine gelesen habe, war ich schon lange kein junger Philosophiestudent mehr. Ich glaube aber, dass es ein längerfristiges und altersunabhängiges Projekt ist, die Weggabelungen und Verzweigungen zwischen moderner Logik und Physik ersichtlich zu machen. Quines Vorschlag ist mir damals, als ich diese Arbeit bereits geplant habe, eine wichtige Unterstützung gewesen: erst recht die gefestigte Klassische Mechanik, die den Physikern keine Schwierigkeiten, kein Kopfzerbrechen mehr bereitet; und erst recht die Klassische Logik, wenn man einsehen möchte, zu welchen Ergebnissen sie kommen kann, wenn sie auf empirische Sachverhalte angewendet wird. Es war und bleibt meine Überzeugung, dass die Verbindung von Physik und logischer Reflexion der physikalischen Sprache eine wertvolle Aufgabe ist. Sie führt zu einer Grundlage beider Wissenschaften, aus der wir mehr über unser Erkennen der Naturvorgänge erfahren.

Was Quine oben skizziert ist nichts anderes als die Kurzfassung eines Hilbertschen Problems, das hier mein Untersuchungsgegenstand ist. Genauer beschreibt er, wie ich später ausführen werde, die reduktive Funktion der axiomatischen Methode in Hilberts sechstem Problem. Von Hilbert schon vor über einem Jahrhundert formuliert, hat die Problemstellung an Aktualität für die Wissenschaftstheorie nichts verloren. Sie ist vielleicht aktueller denn je, wenn man bedenkt, dass die moderne Logik über ein so mächtiges und vielseitiges Instrumentarium verfügt, dass sie wissenschaftliche Theorien, ganze Wissenschaftsbereiche nach deduktiven Kriterien ordnen kann. Hinzu kommt, dass bei der Vielzahl an wachsenden Teildisziplinen in beiden Bereichen, Logik und Physik, es umso wichtiger wird danach zu fragen, welche logische Einheitlichkeit eigentlich in den klassischen Bereichen umgesetzt werden kann und welche bereits umgesetzt werden konnte. Welche 'Belege', wie Quine sagt, kann Logik auf Physik angewandt leisten? - Genauer: Inwieweit kann eine logische Rekonstruktion der Klassischen Mechanik gelingen? - Diese Fragen sind ein wesentlicher Ausgangspunkt, von dem aus die Erkenntnistheorie anhebt. Sie haben mich seit jeher interessiert. Die Arbeit ist letztlich mit der Absicht geschrieben worden, gerade diejenigen anzusprechen, die sich, genauso wie ich, in ihrem Studium oder in ihrer Forschung mit dem Berührungspunkt von Logik und Physik auseinandersetzen, weil sie von beiden Seiten fasziniert sind. Beide Seiten sind und bleiben Grundlagendisziplinen, die schon immer in engster Beziehung zur Philosophie gestanden haben.

Während der Umsetzungsphase dieser Arbeit musste ich mich häufig darüber wundern, wie wenig und, wenn überhaupt, wie verzerrt und unglaubwürdig teilweise in den zwei Welten - Logik und Mechanik - von der jeweils anderen Welt gesprochen wird, so dass ich zeitweise den Eindruck hatte, es gäbe keine sprachliche wie methodische Übereinkunft, die eine umfassende Rekonstruktion ermöglichen würde. So bin ich bei dem Vorhaben, die Möglichkeit der logischen Rekonstruktion auf dem Gebiet der Klassischen Mechanik auszumachen, immer weiter von der Idee des vollformalisierten Kalküls abgekommen, in die sich Mechanik und andere Bereiche der Physik vielleicht ausgestalten lassen könnten. Formalisierung, so werde ich erläutern, gelingt in kleinster, beschränkter und fremdartig idealisierter Gestalt einer empirischen Theorie, die bestenfalls ein winziges, inhaltsleeres Simulacrum eines echten Systems von Naturgesetzen ist. Sie gelingt dagegen niemals für die lebendige Wissenschaft der Klassischen Mechanik, und das aus systematischen Gründen. Ich bin für diese Einsicht zu den informellen Ursprüngen der axiomatischen Methode und zu den vielfältigen Konzeptionen der Klassischen Mechanik zurückgegangen, um zu erkennen, dass nur hier die Voraussetzungen liegen, um die besonderen Eigenarten dieser vorrangigen mathematischen Naturwissenschaft logisch zu erfassen. Die Logik muss Abzüge in der formalen Ausgestaltung machen, um den vielfältigen Bedeutungebenen der mechanischen Grundbegriffe und - gesetze gerecht zu werden. Das sind Einschränkungen zugunsten der umfassenden wie einheitlichen Darstellung der Mechanik.

Die Untersuchung geht also dorthin zurück, wo ein zentraler Fixpunkt des axiomatischen Denkens zu finden ist: zu David Hilbert (1862-1943). Eine Einsicht ist mir dabei mehr als deutlich geworden. Jede Rekonstruktion der Mechanik bleibt von Setzungen auf Seiten der Mechanik *und* auf Seiten des logischen Instrumentariums abhängig, von Konventionen, die jeweils genannt werden müssen, damit ein unmissverständlicher Diskurs zwischen beiden Welten, Logik und Mechanik, überhaupt möglich ist. Von Weitem betrachtet bestätigt die Arbeit eine These, die in der heutigen Wissenschaftsphilosophie oft genannt wird, die aber in einer Detailstudie zur Klassischen Mechanik wohl kaum zu finden ist. Es gibt die Überschneidung von Logik und Mechanik, ihre formale wie inhaltliche Gestalt hängt aber ganz entscheidend von dem gesetzten Formalisierungsstandard seitens der Logik *und* von den gesetzten Grundbegriffen seitens der Mechanik ab. Einschränkungen oder Grenzen einer 'expliziten Ansammlung von Belegen', wie Quine es nennt, müssen also in Kauf genommen werden, um eine einheitliche Darstellung zu erzielen.

So ist meine Studie eine Auseinandersetzung mit der Frage nach den Grenzen der logischen Rekonstruktion von Mechanik, der mathematischen Wissenschaft von den 'mittelgroßen Gegenständen in mittlerer Entfernung' (ein Ausdruck von Quine), die immer zuerst da sind. Ich hoffe, dass ich den Leserinnen und Lesern von einigen Neuigkeiten berichten kann, da es sich um eine interdisziplinäre Untersuchung handelt. Die Überschneidung von Logik und Mechanik findet in den Darstellungen der heutigen Lehrbücher keine Beachtung. Lehrbücher schließen das Thema Mechanik ab, konzeptuelle Probleme treten nicht auf. Meine Arbeit wird aber deutlich machen, dass man mit einer klassisch gewordenen Wissenschaft der Mechanik niemals 'fertig' ist, fertig in dem Sinne, dass sie keinen Ausgangspunkt mehr für neue Entdeckungen im Bereich der wahrnehmbaren Körper bieten könnte. Die axiomatisierte Mechanik verdeutlicht die Begriffsbildung und unterstützt den Prozess der Rekonzentualisierung. Sie ist nichts Statisches, sondern bietet immer die Möglichkeit von Revisionen, von Brückengesetzen, von Grenzfallbetrachtungen, die neue Perspektiven auf die Natur eröffnen. In dieser Arbeit wird deshalb besonders davon berichtet, wie rekonstruktive Verbindungen zwischen Naturgesetzen unser Verständnis von der Mechanik verbessern.

Die Auseinandersetzung mit der mechanischen Natur und mit unseren Bildern von der Natur gehört zu einer gemeinsamen Grundlage, an der Mathematik, Physik und Philosophie gleichermaßen teilhaben. Die forschende Wissenschaft kann die Ziele und Resultate eines Prozesses nicht vorschreiben, der schon immer regressiv und zweckfrei gewesen ist. Die Grundlagen der Mechanik gehören zu einer allgemeinen Naturphilosophie.

Eine persönliche Notiz ist mir noch wichtig. Vor vielen Jahren hat mir Professor Dr. Günther Patzig klar gemacht, dass man bei dem bevorzugten Philosophen auch den Menschen hinter den Schriften und Gedanken, seinen Charakter, sein Leben, seine persönlichen Überzeugungen und Abneigungen kennen sollte. Im besten Fall empfindet man gewisse Sympathie für diesen Menschen und sieht einen vorbildlichen Charakter. Umso mehr hat mich das Ziel dieser Arbeit in einen persönlichen Zwiespalt gebracht.

Denn ich werde die wissenschaftsphilosophischen Ideen Georg Hamels (1877- 1954) verteidigen, von deren Richtigkeit und Aussagekraft ich überzeugt bin. Dagegen kann ich Hamels späterer Lebensphase, mit Lehrstuhl an der TU Berlin und mit internationalem Renommee, wenig Vorbildliches abgewinnen. Zur Zeit des Dritten Reichs hat Hamel als Vorsitzender des damaligen Mathematischen Reichsverbandes mit offenbar anführender Überzeugung dazu beigetragen, die mathematischen Wissenschaften mit der nationalsozialistischen Ideologie zu vereinbaren. Er hat die 'Selbstgleichschaltung' der Mathematik in die damals 'neue Weltanschauung' aktiv vorangetrieben. Für detaillierte Belege möchte ich hier nur auf Peckhaus [2001a] hinweisen.

Ich kann verstehen, dass man dies zum Anlass nehmen kann, das wissenschaftliche Werk Hamels abzulehnen. Dennoch lohnt es sich, diese Phase in Hamels Leben auszublenden und sich, wie ich es versuche, auf seine wertvollen Beiträge zu den Grundlagen der Mechanik zu konzentrieren. Denn diese sind in Hamels wissenschaftlicher Frühphase ab der Dissertation um 1900 bis Ende der 1920er entstanden. Es handelt sich um rein wissenschaftliche Publikationen, frei von jeder nationalistischen Färbung. Sie zeigen also keine Verbindung zu seiner späteren zweifelhaften Überzeugung in die 'Deutsche Mathematik'.

Das vorliegende Buch ist eine überarbeitete Fassung meiner Dissertation in Philosophie mit dem gleichen Titel, vorgelegt an der Universität Bremen im April 2015. Dabei sind keine inhaltlichen Veränderungen vorgenommen worden. Es wurden einzelne Wortformulierungen verbessert, die Einleitung in Abschnitt 1.2.3 erweitert und Anhang B ergänzt.

Mein Dank geht an Professor Dr. Helmut Pulte für viele anregende und korrigierende Hinweise aus den Bereichen der Geschichte der Mechanik und der Wissenschaftstheorie. Oft ist es die Auswahl der Literatur, die den Unterschied ausmacht. Dr. Meinard Kuhlmann und Dr. Frank Kannetzky danke ich für messerscharfe Fragestellungen, die durchaus die 'wunden Punkte' getroffen haben und gerade deswegen eine große Hilfe gewesen sind. Marco Schmidt und Dr. Jens Riechmann gilt mein persönlicher Dank für ihre kritischen Blicke von außen. Bei Kathrin Rogel vom Logos Verlag Berlin bedanke ich mich für die freundliche Betreuung der Drucklegung.

Besonders möchte ich mich aber bei Professor Dr. Manfred Stöckler bedanken. Seine grenzenlose Geduld bei der Betreuung dieser Arbeit und sein festes Vertrauen in meine Recherchen und Resultate sind über die vielen Jahre eine tragende Motivation gewesen.

R. Tiemeyer, Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Allgemeine Zielsetzung 1

1.2 Neue wissenschaftstheoretische Herausforderungen in der alten Mechanik 4

1.2.1 Die Dimension der Theorie: rationale Ordnung der mechanischen Gesetze 4

1.2.2 Das Hauptbeispiel des Newtonschen Grundgesetzes 7

1.2.3 Eingrenzung der Untersuchung auf Repräsentationsformen der Klassischen Mechanik 9

1.2.4 Die Dimension des Logischen in der Mechanik 14

1.3 Arbeitsthese: die disjunktive Umsetzung von 'Axiomen der Klassischen Mechanik' 20

2 Hilberts sechstes Problem: davon, die Mechanik axiomatisch zu fassen **23**

2.1 Die axiomatische Methode als Ausgangspunkt der mechanischen Grundlagen im 20. Jahrhundert 23

2.2 Die Formulierung des Hilbertschen Problems 26

2.3 Die axiomatische Methode im sechsten Problem 28

2.3.1 Konstitution eines Begriffssystems 29

2.3.2 'Tieferlegung der Fundamente' 33

2.3.3 Grundlegen: logisches Repräsentieren statt Eliminieren 37

2.3.4 Metamathematische Untersuchungen 40

2.3.5 Ein Blick auf die Grundlagen der Mechanik 42

2.3.6 Metamathematik als Wahrheitsgarant? 45

2.3.7 Axiome im Widerspruch zur Tatsache? 47

2.3.8 Die Formoffenheit des axiomatischen Standpunktes 50

2.4 Merkmale einer axiomatisierten Theorie 55

2.5 Abstufungen des Logischen in der Mechanik 57

2.6 Einwände gegen axiomatische Grundlagen der Mechanik 63
2.6.1 Der pragmatische Einwand: mangelnder Bezug zur Forschung und Didaktik der Mechanik 63
2.6.2 Der sachbezogene Einwand: ein verfehltes Verständnis von physikalischen Theorien 66
2.6.3 Der logikkritische Einwand: die Irrelevanz der logischen Analyse 69

2.7 Zum Rechtfertigungsproblem: Kritik am Instrumentalismus und Einberufung der Intuition 71

2.8 Zum Erklärungsproblem: interne Vereinheitlichung 76
2.8.1 Erklären als Antwort auf Warum-Fragen 76
2.8.2 Erklären als Vereinheitlichung 78

2.9 Ein Fazit: Informelle versus formale Axiomatik in den Grundlagen der Mechanik 81

3 Hamels Grundlagen der Mechanik: Antworten auf Hilberts Problem 85

3.1 Einleitende Übersicht: Die Rekonzeption der Klassischen Mechanik durch Georg Hamel 85

3.2 Zur physikalischen Seite des sechsten Problems 91

3.3 Die Begriffsvielfalt in der rationalen Mechanik des beginnenden 20. Jahrhunderts 94
3.3.1 Kinematische Grundbegriffe 96
3.3.2 Statische Grundbegriffe 97
3.3.3 Dynamische Grundbegriffe 99
3.3.4 Die Dynamik der Punktmassen 101
3.3.5 Die Dynamik kontinuierlicher Massen 102
3.3.6 Die Dynamik starrer Körper 105

3.4 Systematische Prinzipien der rationalen Mechanik 110
3.4.1 Zum Gegenwirkungsprinzip: innere Kräfte 111
3.4.2 Der Gültigkeitsbereich des d'Alembertschen Prinzips 115
3.4.3 Das Prinzip der virtuellen Arbeiten 118
3.4.4 Die analytischen Systemprinzipien und der Gegensatz analytisch - synthetisch in den Grundlagen der Mechanik 121

3.5 Pragmatische Antworten: der Verzicht auf Teile der Problemstellung 124
3.5.1 Das Ende der Mechanistik 124

3.5.2 Boltzmanns Atomismus-Phänomenalismus-Debatte 127
3.5.3 Die Lehrbuchversion des Grenzübergangs 131

3.6 Die Axiome der Mechanik bei Hamel 136
3.6.1 Hamels axiomatische und physikalische Leistungen auf dem Gebiet der Klassischen Mechanik 137
3.6.2 Die Struktur des Axiomensystems der Klassischen Mechanik 139
3.6.3 Das Newtonsche Grundgesetz: der gemeinsame Untergrund 148
3.6.4 Das Grundgesetz ist mehr als seine logische Struktur 156

3.7 Die deduktive Vernetzung in Hamels Grundlagen der Mechanik 160
3.7.1 Hamels Deduktionsthese und Ablehnung der Punktanschauung 160
3.7.2 Deduktionen aus dem Grundgesetz 164
3.7.3 Das Boltzmann-Axiom: Deduktion des Momentensatzes 166
3.7.4 Die Energieerhaltung als drittes Fundamentalgesetz 169
3.7.5 Der deduktive Übergang zu den anderen Systemmechaniken 171

3.8 Metamathematische Resultate 175
3.8.1 Fragen der Widerspruchsfreiheit 176
3.8.2 Fragen der Unabhängigkeit 179
3.8.3 Punkt- versus Kontinuumssicht: der unlösbare Gegensatz der Klassischen Mechanik 182
3.8.4 Das Argument für eine erweiterte Punktanschauung 186

3.9 Ein Fazit: Der Gegensatz der Anschauungen in der Punkt-Kontinuumsdebatte 192

4 Einschränkungen und Übertreibungen: die Kontroverse um Hamels Grundlagen 197

4.1 Einleitende Übersicht 197

4.2 Reaktionen auf Hamels Axiomatisierung der Klassischen Mechanik 199

4.3 Wissenschaftsphilosophische Perspektiven von Hamels Grundlagen der Mechanik 204
4.3.1 Wilsons Problem mit Axiomatisierungen der Klassischen Mechanik 204

4.3.2 Das disjunktive Axiomensystem der Klassischen Mechanik 208

4.4 Der anwendungsbezogene Blick auf die Klassische Mechanik 212
4.4.1 Kuhn über das Newtonsche Grundgesetz 213
4.4.2 Toulmin über die Eigenständigkeit von Anwendung und Grundlage 216
4.4.3 Axiomatisierung als Teil eines Formalisierungsprogrammes 219

4.5 Ein Plädoyer für informelle Axiome der Mechanik 223
4.5.1 Die Anfänge des Semantic Views und der historische Gegensatz zu Hamels Axiomensystem in den 1950ern 223
4.5.2 Die Berufung auf den punktmechanischen Zugang zur Mechanik 224
4.5.3 Verborgene Redundanzbehauptungen 227
4.5.4 Die These der metamathematischen Präzision 230
4.5.5 Ein Fazit: Zurück zu den informellen Ursprüngen der axiomatischen Methode 233

5 Weitere Perspektiven zu einer axiomatisierten Klassischen Mechanik 237

5.1 Nolls und Truesdells Rekonstruktion der Kontinuumsmechanik 239
5.1.1 Orientierung an materialspezifischen Merkmalen 239
5.1.2 Verallgemeinerte Axiome der Kontinuumsmechanik 242
5.1.3 Eine neue Sicht auf die Klassische Mechanik 243

5.2 Erweiterungen von punktmechanischen Systemen 246
5.2.1 Die Verbindung zur Hamiltonmechanik 247
5.2.2 Die Verbindung zur statistischen Physik 249
5.2.3 Physikalische Rekonzeptionen der kontinuumsmechanischen Grundbegriffe 253

Anhang 256

A Der Versuch, das Gegenwirkungsprinzip aus der Punktmechanik zu eliminieren 257

A.1 Der Beweisgang des achten Theorems 257

A.2 Die negative Bewertung des Versuches 261

B Zur logischen Ausgestaltung in der Mechanik **267**

B.1 Syntax, Semantik und formale Repräsentationen 267

B.2 Tarskis Welt: Erfüllbarkeit, Modell und Struktur 273

B.2.1 Der formale Wahrheitsbegriff und logische Vollständigkeit 273

B.2.2 Die logische Folgerung und der Modellbegriff 277

B.2.3 Theorien im modelltheoretischen Sinn 280

B.3 Informelle Repräsentationen in der Klassischen Mechanik 281

B.3.1 Mechanische Prädikation: zwei formale Einschränkungen 281

B.3.2 Informelle Beweisverfahren in der Klassischen Mechanik 284

Literaturverzeichnis **290**

Sachregister **302**

1 Einleitung

1.1 Allgemeine Zielsetzung

Jede naturwissenschaftliche Theorie gibt Gemeinsamkeiten an Aussagen, Gesetzen und Hypothesen wieder, die uns über Forschungsartikel, Vorlesungen, Lehrbücher und Enzyklopädien überliefert sind und die auf den ersten Blick das Bleibende, Feste, ja das womöglich Wesentliche und Wahre unseres Wissens über die Natur enthalten. Ohne ein solches Aggregat an Propositionen wäre die Theorie nicht das, was wir heute unter ihr verstehen. Ein Großteil wissenschaftsphilosophischer Betrachtungen von Theorien besteht darin, das Gemeinsame in jeder einzelnen Theorie, wie auch das Allgemeingültige für alle wissenschaftlichen Theorien, zu reflektieren und zu bewahren, aber auch problematische und ambivalente Sichtweisen zu erkunden und zu kritisieren. Anders als in der naturwissenschaftlichen Forschung handelt es sich dann um eine reflexive Begriffsanalyse im Kontext einer nachträglichen Rechtfertigung, die auf Kohärenz des verwendeten Begriffssystems abzielt. Sie erfordert systematische Kenntnis der Theorie und muss historische Veränderungen beachten, vor allem dann, wenn überlieferte Alternativen zum ersten Blick, der sich so hartnäckig und selbstverständlich erhalten hat, außer Sichtweite geraten sind.

So steht es auch um die Theorie der *Klassischen Mechanik*, die mathematische Wissenschaft von den Bewegungen der makroskopischen Körper und ihren materiellen Ursachen. Diese Arbeit wird unter anderem illustrieren, dass bei aller Sicherheit und Bewährung des überlieferten Gesetzeskanons der Mechanik seit Beginn des 20. Jahrhunderts Unklarheiten und Uneindeutigkeiten auf der Ebene ihrer konzeptuellen Grundlagen bestehen bleiben. Das betrifft insbesondere die elementaren Größen der Masse eines Körpers und der angreifenden Kraft. Die Explikationen dieser Grundbegriffe der Klassischen Mechanik sind zum Teil so divergent in ihren mathematischen Ausdrucksformen, Anwendungsbereichen und in ihren logischen Verknüpfungen zueinander, dass es nicht nur berechtigt ist, von verschiedenen Interpretationen oder Zugängen zur Klassischen Mechanik zu sprechen, sondern dass einige historisch orientierte Grundlagenforscher sogar zu der Auffassung neigen, es gäbe bestenfalls eine bevorzugte Newton-Eulersche Traditionslinie der Klassischen Mechanik, nicht aber *die* Klassische Mechanik selbst.

Diese Arbeit untersucht somit die Klassische Mechanik als ein wissenschaftstheoretisches *Fallbeispiel* unter einer bestimmten Rücksicht. Es geht mir darum, inwieweit die Klassische Mechanik dem logischen Anspruch nach konzeptueller Klarheit, Systematizität und Fundierung nachkommen kann, der immer wieder für diese und andere traditionelle Theorien der Physik erhoben wurde. Diese Aufgabe wird seit Beginn des 20. Jahrhunderts in dem *sechsten Problem* der von David Hilbert (1862-1943) gestellten und mittlerweile legendären 'mathematischen Probleme' maßgeblich formuliert.

Ich werde mich dabei auf den physikalischen wie methodologischen Hintergrund zum sechsten Problem Hilberts beschränken, sofern es die Klassische Mechanik betrifft, um anschließend auf Ansätze zur Lösung zu kommen, die insbesondere von Hilberts Doktoranden Georg Hamel (1877-1954) vorgeschlagen wurden. Während es zu Hilberts axiomatischer Methode verhältnismäßig viele Studien gibt, findet man die Grundlagen der Klassischen Mechanik nur in wenigen Einzeluntersuchungen. Das mag sicherlich dazu beigetragen haben, dass nur ein Zugang zur Mechanik seit Beginn des 20. Jahrhunderts in der Physik und Wissenschaftstheorie vorrangig behandelt wird: die so genannte Punktmechanik. Das breite Spektrum setzt sich dagegen aus Einzeldarstellungen in Lehr- und Handbüchern der Physik, der Technischen Mechanik und der Kontinuumsmechanik zusammen und ist selbst für Fachkundige kaum noch überschaubar. Allein deswegen ist schon die Axiomatisierung der Klassischen Mechanik durch Hamel beachtlich. Es wird erstmals versucht, allen unterschiedlichen Anschauungen und Richtungen in der Mechanik gerecht zu werden und sie dennoch auf einen gemeinsamen Untergrund an Gesetzen und Begriffen zu bringen.

Der Hauptteil dieser Arbeit (Kapitel 3) wird auf die überlieferten Grundbegriffe der Klassischen Mechanik aufmerksam machen und Perspektiven zur Vereinheitlichung geben. Hamels Antworten beinhalten neue Ansätze zu einem umfassenden Verständnis der etablierten und in großen Teilen liegen gelassenen *Rekonstruktion* der Mechanik der sichtbaren Materie. Vor allem die logische Ausformulierung aller Bedingungen, mit denen man einen mechanischen Körpertyp zum anderen überführen kann, die Ausformulierung von so genannten *Grenzübergängen*, war die zentrale Motivation zu Hilberts Problem und wurde von Hamel zu neuen Resultaten gebracht. Mechanische Grenzprozesse und Brückengesetze haben bislang nicht die Beachtung in der Wissenschaftstheorie gefunden, die ihr der Sache nach zukommen müssten. Dabei machen gerade sie die Empfindlichkeit zwischen Annahme und Folgerung in der mathematisch sicher und eindeutig geglaubten Wissenschaft der Mechanik offensichtlich.

So wird deutlich, dass das allgemeine Bild von einer in ihren Grundfesten unverändert gebliebenen Wissenschaft der Klassischen Mechanik nicht aufrechterhalten werden kann. Die logischen Unschärfen zwischen verschiedenen Konzeptionen der sichtbaren Materie, insbesondere die unterschiedlichen Beschreibungen der Körperdynamik, bestehen bis heute. Allerdings konnte die Rekonstruktion durch einzelne Grundlagenforscher wie Hamel und andere im 20. Jahrhundert die Klassische Mechanik zu einer größeren Einheit bringen, und das in einer Zeit, in der sich die exakten Wissenschaften wie Physik, Mathematik und Logik kaum mit bestehenden, sondern vielmehr mit neuartigen Gesetzesstrukturen beschäftigt haben. Ich will nun dies Liegengebliebene aufgreifen, weil es Einblicke in zum Teil miteinander unvereinbare Konventionen zwischen diesen Gebieten der Physik, Mathematik und Logik gibt. Es ist die alte, vermeintlich abgeschlossene Mechanik, in der diese Schwierigkeiten zu Tage treten. Sie ist kein kumulativ wachsendes Wissensgebiet, das nur gegen eine einzige, womöglich letztgültige Darstellung konvergieren würde. Sie ist auch beileibe keine verstaubte Propädeutik, die nur zu neueren physikalischen Begriffsstrukturen hinführen soll. Diese Arbeit wird zeigen können, dass eine solche Vorstellung sogar auf der Ebene der Grundbegriffe und -gesetze verkehrt ist. 'Masse', 'Kraft' und 'Moment' bleiben in ihrer logischen Anordnung zu einem mechanischen System ambivalente Begriffe, und gerade die axiomatische Fassung von Begriffssystemen macht diese Vielseitigkeit deutlich.

Somit besteht diese Arbeit aus *zwei zentralen Thesen*, die sich von der gewöhnlichen Auffassung von Klassischer Mechanik und der in ihr fungierenden Logik absetzen. *Zum einen* gibt es diese oft vernachlässigte Vielseitigkeit in der Klassischen Mechanik. Damit meine ich nicht nur, dass ein Formalismus der Klassischen Mechanik unterschiedlich modelliert werden kann. Sondern die Vielseitigkeit äußert sich gerade darin, dass es *mehrere nichtäquivalente* Formalismen der Klassischen Mechanik gibt. Die Auswahl der formalen Darstellung ist dabei vom jeweils intendierten Modellierungsverfahren abhängig. Zu den mathematischen Gesetzen der Mechanik gehören also bedeutungsgebende Merkmale, die dem Formalismus selbst zwar nicht anzusehen, aber untrennbar mit ihm verbunden sind. *Zum anderen* könnte diese erste These als Absage an feste axiomatische Strukturen in der Mechanik verstanden werden. Ich behaupte allerdings, dass es dennoch erfolgreiche Axiomatisierungsversuche gibt, die gerade diese Vielseitigkeit mit gewisser logischer Präzision einfangen. Der Präzisionsstandard der logischen Analyse darf hierbei nicht über eine *informelle Behandlung* hinausgehen, damit neben der formalen Struktur der mechanischen Gesetze auch der *intuitive* Charakter der Gesetze erhalten bleibt.

Letztlich muss die Wissenschaftstheorie den genaueren zweiten Blick suchen, nicht nur, um ihrer vermittelnden Aufgabe gerecht zu werden, sondern vor allem, um die Vorstellung von eindeutigen Konzeptionen bei bewährten Gesetzesstrukturen zu korrigieren. Und in dieser Hinsicht ist die Arbeit im Hauptteil kein Fallbeispiel mehr, sondern eine *reflexive Auseinandersetzung mit Klassischer Mechanik*. Sie stellt ein Plädoyer für die von Hilbert angeregte *axiomatische Methode* und für die Rehabilitierung der von Hamel *umgesetzten Axiomatisierung* der Klassischen Mechanik dar. Im folgenden Abschnitt werde ich die Auswahl und Beschränkung des Themenbereichs näher rechtfertigen.

1.2 Neue wissenschaftstheoretische Herausforderungen in der alten Mechanik

1.2.1 Die Dimension der Theorie: rationale Ordnung der mechanischen Gesetze

Schaut man zurück auf große Meilensteine der Mechanik und die Zielsetzungen ihrer Schöpfer, so findet man häufig ein reorganisierendes Interesse mit dem Anstoß zur allgemeinen Begründung der dort aufgeführten Grundsätze und Anschauungen. Bereits Isaac Newton hat seine ≫*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*≪ mit wenigen Definitionen und drei dynamischen Grundgesetzen, den heute so genannten Newtonschen Axiomen, errichtet, die eine so überwältigende Einfachheit und anschauliche Überzeugungskraft haben, dass auch heute viele Lehrbuchautoren den originalen Wortlaut seiner Grundsätze an den Anfang stellen, ohne die im Laufe der Jahrhunderte entwickelten Modifikationen bis zum heutigen Verständnis der Axiome zu erwähnen.[1] Es ging schon Newton um die Deduktion mathematisch relevanter Strukturen im Bereich der Naturphänomene, erstmals unter der primären Erklärungsinstanz einer Kraft. Sein berühmtes Vorwort zeugt von dem Ideal einer 'Rational Mechanics', der deduktiven Vernetzung von allgemeinen Grundsätzen und -begriffen auf dem Gebiet der Mechanik:

> „Then from these forces, by other propositions which are also mathematical, we deduce the motions of the planets, the comets, the moon, and the sea. I wish we could derive the rest of the phaenomena of nature by the same kind of reasoning from mechanical principles [...]" (Newton [1687], S. 4).

Auch in d'Alemberts ≫*Traité de Dynamique*≪ von 1743 findet man als Ausgangsmotivation die deduktive Festigung der bereits verstandenen dynamischen Gesetze, verbunden mit der Überzeugung, dass sich neue Anwendungsbereiche zeigen:

> „Man ist allgemein bisher mehr bemüht gewesen, das Gebäude zu vergrössern, als den Eingang in dasselbe zu erhellen; und man hat vor allem daran gedacht, dasselbe aufzurichten, ohne seinen Grundlagen nöthige Sicherheit zu geben.
> Ich habe mir in diesem Werke die Aufgabe gestellt, dieses doppelte Ziel zu erreichen, die Grenzen der Mechanik weiter hinauszurücken und den Zugang zu ihr zu ebnen, das eine in gewissem Grade durch das andere zu erreichen, d.h. nicht bloss die Principien der Mechanik aus

[1] Beispiele hierfür sind etwa die Lehrbücher Sommerfeld [1967], Daniel [1997] oder Greiner [2007]. Über die unter Lehrbuchautoren der Physik vorherrschende Paarung von Anachronismus und historischer Bewahrung der mechanischen Prinzipien berichtet bereits eindrucksvoll Eisenbud [1958], dort insbes. S. 145.

> den klarsten Begriffen abzuleiten, sondern auch neue Anwendungen derselben zu machen [...]" (d'Alembert [1899], S. 6 f.).

Und noch Ende des 19. Jahrhunderts, die Klassische Mechanik ist bereits zu einer gefestigten und weitläufigen mathematischen Wissenschaft herangewachsen, mit mehreren begründenden Ausgangsgesetzen und -begriffen, heißt es in dem Lehrbuch Love [1927], dessen historische Einleitung zur Kontinuumsmechanik mittlerweile ein eigener Klassiker ist:

> „In a theory ideally worked out, the progress which we should be able to trace would be [...] one from less to more, but we may say that, in regard to the assumed physical principles, progress consists in passing from more to less." (ebd., S. 1).

Weitere große Architekten der Klassischen Mechanik hätten ebenso zu Wort kommen können, um die Idee einer *prinzipiengeleiteten Erfahrungswissenschaft* zu verdeutlichen: Euler, Kirchhoff, Mach, Hertz oder Boltzmann. Man muss den Eindruck haben, dass die Mechanik bis zu einem gewissen Anwendungskontext, in dem das Kontingente der Natur hineintritt, als eine logisch-deduktive und allein mathematisch zu begründende Wissenschaft der Natur verstanden wurde. Gemeint ist die *axiomatische* Vorgehensweise in der Mechanik, wie später Hilbert immer wieder zum Ausdruck gebracht hat.

> „Dies Verfahren ist von jeher als ein Muster strenger Wissenschaftlichkeit angesehen worden und hat daher vielen anderen Wissenschaften als Vorbild gedient. Insbesondere in der theoretischen Physik war man bestrebt, sich dem Ideal der Euklidischen Geometrie zu nähern." (Hilbert [1992], S. 15)

Das prinzipiengeleitete oder axiomatische Verständnis von Mechanik bleibt auch im 20. Jahrhundert bestehen, als man meinte, die Klassische Mechanik habe bereits einen Zustand der Vollendung erreicht. Entsprechend wird hierzu der Mechanik-Eintrag im Sachlexikon Brockhaus [1957], S. 487, mit der Erklärung begonnen:

> „*Mechanik*, Physik: die Lehre von den Bewegungen und den sie hervorrufenden Kräften. Ziel der Mechanik ist die Aufstellung einfachster Prinzipien zur unmittelbaren Lösung mechanischer Probleme [...]".

Dass also seit Jahrhunderten ein wissenschaftliches Bestreben danach besteht, die Mechanik in eine sicher begründete und zweifelsfreie Theorie umzugestalten, stellt eine eigene Tatsache dar. Es ist gewissermaßen Teil der mathematischen Theoriebildung selbst, wenn die Mechanik „ein System, d.i. ein nach Prinzipien geordnetes Ganze[s] der Erkenntnis sein soll", wie bereits Immanuel Kant erklärt.[2] Systematisierung nach logischen Kri-

[2] So das Zitat aus Kant [1786], S. IV.

terien der Schlüssigkeit, Reduktion und Konsistenz gehört zum definierenden Merkmal der einheitlichen Gesamtheit von Sätzen, die man wissenschaftliche Theorie nennt.

Ich glaube, alle Grundlagenforscher in der Mechanik teilen diese Überzeugung, dass die allgemeine axiomatisierte Theorie der Klassischen Mechanik, die *rationale Mechanik*, mehr ist als eine unvermittelte Ansammlung an einzelnen Gesetzen, Aussagen und Modellen. Die Axiomatik ist Inbegriff der Idee, dass eine bloße Reihe von Sätzen, Anschauungen und empirisch bewährten Resultaten niemals allein eine Theorie bildet. Theorien sind nach logischen Kriterien systematisiert, sind ökonomisch gestaltet.[3] Mit Kant gesprochen,

> „[d]asjenige Ganze der Erkenntnis, was systematisch ist, kann schon darum *Wissenschaft* heißen, und, wenn die Verknüpfung der Erkenntnis in diesem System ein Zusammenhang von Gründen und Folgen ist, so gar *rationale* Wissenschaft".[4]

Das Vertrauen in bestehende Strukturen, ob nun a priori gültig oder aus der Erfahrung gewonnen, bleibt hintergründig präsent in allen wegweisenden Darstellungen der Klassischen Mechanik, die bis heute unser Verständnis derselben geformt haben.

Erstaunlich ist nun, dass nahezu alle großen Meister in der Geschichte der Mechanik am prinzipiengeleiteten Aufbau der Wissenschaft festhalten wie an einer Art regulativen Idee, die womöglich von der einheitsstiftenden Vernunft gefordert wird. Dennoch besteht in der Wissenschaftsphilosophie und in der Physik höchste Uneinigkeit darüber, ob dieses Ideal für den Fall der Klassischen Mechanik bereits erfüllt wurde und ob es überhaupt erfüllbar ist. In der Physik ist es nicht einmal eine relevante Frage, wo es eher darum gehen sollte, „möglichst schnell zu den eigentlich physikalischen Problemen hin[zu]streben" und daher mit pragmatischer Gelassenheit „in der systematischen Begründung und der axiomatischen Folgerichtigkeit einige Lücken" zu hinterlassen.[5]

In der Wissenschaftstheorie bleiben die Systematisierung und die Identifizierung von solchen 'Lücken' allerdings von höchstem Interesse. Das gilt vor allem dann, wenn sich herausgestellt hat, dass die mechanische Natur von uns in unterschiedlicher Weise interpretiert wird, bis hin zu den *mathematischen Grundbegriffen* der Theorie. Zahlreiche Studien aus neuerer Zeit belegen, dass sich die Klassische Mechanik weder systematisch noch historisch in einem festen mathematischen Schema repräsentieren lässt.[6]

[3] Siehe Cohen und Nagel [1949], S. 129.

[4] Zitiert aus Kant [1786], S. V. Kants Begriff des 'Rationalen' steht im Kontext der Verstandesbegriffe und ist deutlich allgemeiner angelegt als die 'rationale' Begründung der Mechanik aus reduzierten Grundbegriffen und -gesetzen über Raum, Zeit, Materie und Kraft, denen immer eine empirische Bedeutung zukommen muss.

[5] So exemplarisch die Einschätzung in Sommerfeld [1967], S. V f.

[6] Wichtige Orientierungen für diese Untersuchung sind die Studien von Max Jammer, Mark

1.2.2 Das Hauptbeispiel des Newtonschen Grundgesetzes

Um eine Vorstellung von formalen Lücken zu geben, mit denen man in der Axiomatisierung der Klassischen Mechanik konfrontiert wird, will ich kurz auf das Newtonsche Grundgesetz eingehen. Rein formal stellt es den kinetischen Zusammenhang zwischen der Massenbeschleunigung eines Körpers und der an ihm angreifenden Gesamtkraft dar. In algebraischer Form ist die Vektorsumme $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ identisch mit dem Produkt aus Masse m und Gesamtbeschleunigung $\vec{a} = \sum_i \vec{a}_i$ in Richtung der wirkenden Kraft: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Zunächst wird deutlich, dass das Gesetz kein bestimmtes Kraftgesetzes zum Ausdruck bringt, keinen speziellen Anwendungsbereich darstellt. Das hat schon früh zu der Auffassung geführt, es handle sich um kein reines Naturgesetz, das aus empirischen Daten induktiv erschlossen wurde, sondern eher um eine Art Definition. Die Identität definiert eine Kraft oder aber eine Masse oder eine Bewegungsänderung. Verschiedene erkenntnistheoretische Varianten zwischen Definition und empirischer Aussage wurden in der Mechanikgeschichte diskutiert. Mir geht es hier zunächst nur um die Bedeutung der vorkommenden Terme.

Der Charakter eines Grundgesetzes wird vor allem in seinem universellen Gültigkeitsbereich gesehen. Streng genommen kann man der Gesetzesaussage gar nicht widersprechen, es gilt unter allen denkbaren Umständen für sichtbare Körper.[7] Das ist ein wesentlicher Grund, weshalb Newtons Grundgesetz häufig als ein uninterpretiertes, funktionelles *Gesetzesschema* $\vec{F}(m, \vec{a})$ aufgefasst wird.[8] Die Terme $\vec{F}$, m und $\vec{a}$ müssen zunächst durch reale Größen modelliert werden, die an einer geometrischen Konstruktion veranschaulicht sind. Sie bleiben von einer semantisch beladenen, informellen Konstruktion abhängig. Das Entscheidende ist nun, dass solche Konstruktionen nicht in der Gesetzesform enthalten sind. Das Schema sagt nichts über die Art des Gegebenseins der Grundbegriffe aus. Erst *nach* Auswahl der anschaulichen Kraft- und Massengrößen kann eine mathematisch eindeutige Lösung des mechanischen Problems, d.i. die Aufstellung von Kraftfunktionen, gelingen. Das mag zunächst sehr simpel und selbstverständlich sein, wird aber dann zu einem Repräsentationsproblem, wenn **1.** Mess- bzw. Modellierungbedingungen bestimmt werden, und wenn **2.** die Grundbegriffe eindeutig durch eine Gesetzesform zu bezeichnen sind.

Wilson und Jeremy Butterfield. Besondere Bedeutung haben hierfür allerdings die Schriften Clifford Truesdells. Er war ein profunder Kenner der Klassischen Mechanik, hatte zahlreiche historische Fallstudien veröffentlicht und war einer der großen Architekten der modernen Kontinuumsmechanik, die im Stil einer umfassenden 'Rational Mechanics' angelegt ist. Nicht zuletzt beeindrucken die Schriften Pierre Duhems, die für diesen Themenbereich ihre Aktualität nicht verloren haben.

[7] Dieser universelle Charakter wird bereits in Euler [1752] behauptet. Aktuell vergleiche man etwa mit Hüttemann [2007], S. 140 f.

[8] Diese Auffassung ist häufig hintergründig vorhanden. Explizit findet man sie in Hamel [1909b], S. 364 f.

Zu 1.: Eine reale Situation zu konstruieren, in der das Grundgesetz überprüft werden kann, überschreitet immer den Bezug auf *eine* resultierende Kraft $\vec{F}$, die eine Massenbeschleunigung hervorruft. Bei einer gewöhnlichen Kraftmessung, z.B. mit einer Schraubenfeder, wird dieser Fall streng genommen gar nicht realisiert. Denn das Massensystem mit Messvorrichtung misst eine ausbalancierte Kraft, die sich mit der Schwerkraft gegenseitig ausgleicht. Es handelt sich um ein statisches Kräftesystem, das also ein Kräftegleichgewicht darstellt. Das Newtonsche Gesetz sagt aber nichts über statische Kräftesysteme außer $\vec{a} = 0$ voraus. Es ist keinesfalls klar, dass die *eine kinetische* Kraftkomponente $\vec{F}_i \neq 0$ aus dem statischen Fall des Kräftegleichgewichts $\vec{F} = 0$ 'folgt'. Es handelt sich vielmehr um eine Zusatzannahme.[9] In diesem Fall kann auch der Vektorcharakter von Kräften nicht aus dem Vektorcharakter der Bewegungsgrößen $\vec{a}_i$ geschlossen werden. Das für statische Kraftsysteme zu zeigen, ist eine ganz eigenständige Konstruktion.[10] Walter Noll hat deshalb später bemerkt, dass das Newtonsche Gesetz nur in der Physik als ein universelles Gesetz der Mechanik behandelt wird, weil man sich dort auf kinetische Situationen beschränkt, in denen durch Kraftwirkung eine Bewegung eintritt.[11] Das gelte aber keinesfalls für die Grundlagen der Technischen Mechanik, in denen statische Kräfte vor den kinetischen Kräften die dominierende Rolle spielen.[12] Im Bereich der Verifikation durch Messvorschriften und Modellierungen treten also erhebliche logische Lücken auf, die es unklar machen, weshalb das Newtonsche Kraftgesetz unter allen Umständen überprüfbar ist.

Zu 2.: Und selbst wenn solche Modellierungsfragen beiseite geschoben werden, bleiben Uneindeutigkeiten beim Gültigkeitsbereich des Kraftgesetzes, die unmittelbar die Grundbegriffe betreffen. Denn der Term m kann verschiedene Massenobjekte bedeuten, die auch algebraisch unterschiedlich zu behandeln sind. Er kann einen massenbehafteten Oberflächenausschnitt bezeichnen, im Inneren oder am äußeren Rand des Körpers. Oder er bezeichnet ein geschlossenes Volumen, einen schweren Körper oder ein träges Objekt, das einen Gegendruck erzeugt. Es kann sich auch um eine verformbare Fläche oder um ein starres Objekt handeln, oder schlichtweg um einen massebehafteten Punkt. Je nachdem, welche Konstruktion von m als sinnvoll für das mechanische Problem ausgewählt wird, stehen

[9] „It is impossible to know how two forces which are not directly opposed would react, *if* they were directly opposed." (Poincaré [1929], S. 98). Siehe auch Hamel [1927], S. 4.

[10] Daher hat bereits Euler in seinem berühmten Vorwort zum ersten Band der Mechanik, Euler [1736], die neue kinetische Disziplin der Mechanik von der älteren Statik abgegrenzt.

[11] Zur Terminologie: Man spricht von *Kinetik*, wenn der Zusammenhang zwischen Kräften und Bewegungen von Massen untersucht wird. Die Disziplin der Mechanik, die sich allein auf geometrische Größen der Bewegungslehre beschränkt und Kräfte wie Massen ausklammert, wird dagegen *Kinematik* genannt. Man vergleiche dazu etwa Hamel [1912], S. 10.

[12] Siehe dazu Noll [2007], S. 1.

unterschiedliche Krafttypen und ihre konstitutiven Gesetzesformen zur Verfügung: Gesetzesformen für Oberflächenspannungen, für volumenartige Kräfte, für punktmechanische Fernkräfte oder für eingeprägte Kontaktkräfte, die unabhängig von der Modellierung des Massenkörpers gelten. Keine dieser *semantischen* Möglichkeiten wird durch die Form des Newtonschen Gesetzes zum Ausdruck gebracht, sondern kommt auf der Ebene der synthetischen Konstruktion hinzu. Jede Axiomatisierung müsste diese Rekonstruktion der Grundbegriffe also mitberücksichtigen. Das ist das zentrale logische Problem um den Kraftbegriff und ihre konstitutiven Gesetze, das ich im Hauptteil (Kapitel 3) dieser Arbeit genauer behandeln werde.

Komplizierter wird dieses Repräsentationsproblem noch durch den Umstand, dass der Beschleunigungsterm $\vec{a}$ nicht allein für geradlinige Bewegungen gelten muss. Bei Drehbewegungen von Körpern treten ebenfalls Beschleunigungen auf, die durch angreifende Drehmomente erzeugt sind. Die Struktur dieser so genannten Momentensätze ist ein wenig anders als bei Kraftgesetzen, aber dennoch bleibt die Frage, ob diese aus dem Newtonschen Kraftgesetz deduzierbar sind. Es hat bis Mitte des 20. Jahrhunderts gedauert, um einzusehen, dass die logische Position der Momentensätze innerhalb der Klassischen Mechanik auch von der Art der Modellierung des Körpers abhängig ist. Für punktmechanische Systeme und zum Teil auch für starre Körper sind sie aus den Newtonschen Axiomen deduzierbar, aber keinesfalls für elastische wie kontinuierliche Massensysteme. Hier ist die Momentenbilanz wie in der Statik ein eigenes Axiom. Auch bei solchen Lücken, die bei der logischen Anordnung von mechanischen Gesetzen zwischen Grundannahmen und Folgen auftreten, konnte Hamels Axiomatisierung wesentliche Klärung leisten.

1.2.3 Eingrenzung der Untersuchung auf Repräsentationsformen der Klassischen Mechanik

Die entscheidenden Repräsentationslücken in der Klassischen Mechanik zu identifizieren, die mit den dynamischen Begriffen der Kraft und Masse verbunden sind, ist somit die Ausgangssituation der Arbeit. Ich möchte insbesondere Antworten darauf geben, welche 'Axiome der Klassischen Mechanik' es tatsächlich gibt und welche Aspekte der mechanischen Grundlagen, bei aller Berechtigung ihres rationalen Anspruchs, das Ideal einer logisch-formalen Repräsentation nicht erfüllen können.

Dabei wird sich zeigen, dass die Auswahl der Grundbegriffe der Mechanik von einer *informellen* Interpretation abhängig bleibt. Alle semantisch beladenen Konstruktionen gehen über das funktionelle *Schema* der Gesetze[13] und der Grundbegriffe hinaus und sind gewissermaßen informelle Voraussetzungen zu einer mathematisch eindeutigen Lösung. Diese vielfach missverstandene Antwort Hamels erhebt die Informalität der dynamischen

[13] In der modernen Logik spricht man auch von *Aussagefunktionen* (siehe dazu Anhang B).

Begriffe selbst zu einem Axiom. Er erklärt damit die 'synthetische Methode' in der Mechanik zur Grundlage ihres deduktiven Aufbaus: Die Bedeutung aller relevanten Terme ist stets aus der *anschaulichen Konstruktion* zu entnehmen.[14] In der Arbeit wird erläutert, wie sich Hamels Umsetzung der Axiomatik gleichsam gegen formalisierte Repräsentationen richtet.

Die Beurteilung der Gestalt von 'Axiomen der Mechanik' hängt entscheidend davon ab, welcher Standard der Formalisierung in der axiomatischen Methode zur Anwendung kommt. Um diese Abhängigkeit vom normativen *Anspruch der logischen Differenzierung* geht es mir, der in den meisten Grundlagenschriften zur Mechanik gar nicht erwähnt wird. Wir müssen offen legen, mit welchem logischen Standard wir eine Theorie betrachten. Eine solche Objektivierung der logischen Reflexion, die sich speziell dem axiomatischen Denken widmet, ist erst seit Beginn des 20. Jahrhundert zu sehen, und einen entscheidenden Anfang setzen hierbei *Hilberts* wissenschaftstheoretische und metamathematische Untersuchungen. Dass sich gewisse Grundbegriffe und -gesetze der Mechanik der strengen Formalisierung entziehen, ist dann aber keinesfalls ein Scheitern des axiomatischen Vorgehens, sondern eher die natürliche Grenze des Formalisierungsvorhabens. Ich komme darauf im nächsten Abschnitt 1.2.4 wieder zurück.

Diese Arbeit ist deswegen kein Beitrag zu einer 'neueren Erkenntnistheorie' der Klassischen Mechanik, das wäre meines Erachtens ein weiterer und deutlich umfassenderer Schritt. So beanspruche ich keinesfalls, den Kantischen Versuch einer Begründung der Mechanik aus evidenten Grundsätzen a priori der Vernunft zu bewerten. Es geht mir auch nicht darum, den sicheren Anteil, den die mechanischen Gesetze durch die Mathematik, speziell durch die Geometrie und Analysis, erhalten, neu auszuloten oder in Frage zu stellen.[15] Die Arbeit untersucht *Repräsentationsformen* der Klassischen Mechanik.

Man beschreibt hierbei die Einzeldarstellungen zur Klassischen Mechanik hinsichtlich ihrer formalen wie semantischen Voraussetzungen. In dieser *logischen Analyse rekonstruiert* man die Ergebnisse (Repräsentationen) einer naturwissenschaftlichen Theorie und schreitet erst von der Rekonstruktion zurück zu den Erkenntnisgründen. Somit bleibt der Erfolg der Analyse auf ein Minimum an erkenntnistheoretischen Annahmen beschränkt. Ein Bekenntnis wäre etwa, dass die Darstellungen der Klassischen Mechanik wissenschaftliche *Modelle* sind, d.h. dass sie nicht nur für sich selbst stehen, sondern dass sie Gegenstände, Prozesse etc. *repräsentieren* und wir ein Wissen von ihnen erlangen können.[16] Indem man vom Bestand der

[14] Wie schon bei Hilbert und auch später bei Hamel und Hölder ist die synthetische Leistung in der mathematischen Begriffsbildung an Kants Konzeption orientiert. Ich werde allerdings diese historische Verflechtung mit Kants originalen Vorstellungen nicht weiter verfolgen.

[15] Vielbeachtet ist die Behauptung Kants, „daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel *eigentliche* Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin *Mathematik* anzutreffen ist" (Kant [1786], S. VIII).

[16] So etwa ein Bekenntnis in Frigg [2006], S. 51.

Repräsentationsformen ausgeht, können schwierige erkenntnistheoretische Fragen zurückgesetzt werden, während diejenigen Voraussetzungen einer Repräsentation, die durch das logische Instrumentarium erfasst werden können, den offensichtlichen und bestimmenden Teil der Analyse ausmachen. Demnach ist der Fokus auf Repräsentationsformen *neutral* gegenüber erkenntnistheoretischen Positionen in der Wissenschaftstheorie, aber empfindlich von der Syntax der Repräsentationssprache abhängig.[17]

Die Repräsentationen sind auch heute in vieler Hinsicht divergent, von Zielsetzungen, logischen Standards, historischen Überlieferungen und von pragmatischen Entscheidungen für eine von mehreren Begriffsschemen abhängig. Dieser Gestaltungsfreiheit will ich näher auf den Grund gehen. Denn ich bin davon überzeugt, dass neben ontologischen und epistemologischen Untersuchungen dieser *semantische* Aspekt der wissenschaftlichen Repräsentation ein ganz entscheidender Weg dazu ist, eine Wissenschaft wie die Mechanik besser zu verstehen.

Ich werde in dieser Untersuchung deshalb auch offen lassen, was an den Prinzipien der Mechanik nun metaphysischer Art und womöglich denknotwendig ist.[18] Das ist keinesfalls eine Absage gegen jeden aprioristischen Begründungsversuch von mechanischen Prinzipien. Mit Blick auf die vielen konzeptuellen Veränderungen in der modernen Physik müsste der Versuch allerdings deutlich 'undogmatischer' ausfallen als noch in der transzendentalphilosophischen Betrachtung nach Kant.[19] Auch Hilbert und Hamel haben einen abgeschwächten Apriorismus in der Mechanik verteidigt. Diesen erkenntnistheoretischen Standpunkt allerdings mit der axiomatischen Methode selbst in Verbindung zu bringen, halte ich für einen Fehler. Die Ablehnung einer Apriori-Begründung der rationalen Elemente der

[17] Ein Plädoyer für die philosophische Auseinandersetzung mit wissenschaftlichen Repräsentationsformen findet man etwa in Frigg [2006] oder in Suppes [2002]. Die These der 'erkenntnistheoretischen Neutralität' von Repräsentationen (Bildern, Darstellungen) einer Theorie stellt meines Erachtens einen Konsens zwischen allen Befürwortern einer strukturalistischen Position und ihren Kritikern dar. Explizit zu finden ist sie etwa in Muller [2009], S. 9, in Haack [1978], S. 144, sowie in Stöckler [1994], S. 58. In der *semantischen* (oder modelltheoretischen) *Sichtweise* auf Theorien wird die erkenntnistheoretische Neutralität von Repräsentationsformen unmittelbar ersichtlich und lässt sich auf formale Merkmale des logischen Modellbegriffs nach Tarski zurückführen. Das wird hier in Anhang B.2 illustriert.

[18] Vergleiche Kant [1786], Seiten V f. u. XIII.

[19] Dass die aprioristische Charakterisierung der Mechanik nur den analytischen, arithmetischen Teil umfasst, dass aber bei geometrisch-synthetischen Begriffsbildungen dagegen in Anbetracht der nichteuklidischen Geometrie von keiner 'reinen' Anschaulichkeit (Intuition) gesprochen werden kann, ist bereits in Hölder [1924], Abschnitte 1 und 2, hervorgehoben worden. In entsprechender Weise verdeutlicht Lyre [2006], dass es erforderlich wäre, die 'Strenge des Apriori' in der modernen Physik abzuschwächen und neu zu kalibrieren: etwa so, dass sich „erst im Nachhinein feststellen lässt, welche der möglichen Kandidaten für Bedingungen der Möglichkeit von Erfahrung tatsächlich aussichtsreich waren" (ebd., S. 14). In jedem Fall halte ich es für einen Irrtum, man könne alle erkenntnistheoretischen Eigenarten der Mechanik von den mathematischen Theorieelementen trennen, wie es tatsächlich von Suppes und anderen Verfechtern der *semantischen Sichtweise* auf Theorien behauptet wurde (siehe hier S. 132 f.).

Mechanik muss dem Axiomatisierungsvorhaben kein Ende bereiten. Beide Programme sind in der Wissenschaftstheorie voneinander unabhängig.

Repräsentationen und das neue Axiomenverständnis

Die Zuwendung zu unterschiedlichen Repräsentationsformen in der Mechanik (wie auch in der Mathematik und Logik) wird nach meiner Auffassung durch den *Wandel im Axiomenverständnis* unterstützt. Denn das Festhalten an Repräsentationsformen ist ein umso verlässlicherer Ausgangspunkt, wenn sich erkenntnistheoretische Veränderungen abzeichnen. Von dem Wandel im Axiomenverständnis will ich deswegen zum Ende dieses Abschnitts berichten.[20]

Mechanische Prinzipien galten zur Zeit Newtons bis Mitte des 19. Jahrhunderts als evidente, unfehlbare Erkenntnisse über die Natur. Noch bei Kant findet man die Auffassung, dass Axiome, erste unbeweisbare Forderungen der Geometrie, Arithmetik, der Mechanik oder anderer Bereiche der rationalen Wissenschaften, den Erkenntnisstatus von *synthetischen Urteilen a priori* haben. Sie sind apodiktische, notwendige Aussagen, deren Begriffe gleichsam durch Gegenstände der reinen Anschauung konstruierbar sind.[21]

Mit Blick auf damals rivalisierende und zum Teil sich ausschließende Grundlagensysteme der Mechanik (nach Descartes, Leibniz und nach Newton) konnte an eine Mehrzahl an unabhängig bestehenden Systemen nicht gedacht werden: Einer Natur musste *eine* Axiomatisierung entsprechen, die sich durch möglichst wenige systemstiftende und erfahrungskonstitutive Prinzipien auszeichnet; werden doch nach damaliger Überzeugung durch die Axiome die *Wesenseigenschaften* der Materie zum Ausdruck gebracht. Mit Axiomen der Mechanik sagt man, was die Gegenstände der Wirklichkeit in einem *materiellen* Sinne 'sind', welche Eigenschaften ihnen wesentlich zukommen.[22] So wie nach Euklids »*Elemente*« ein räumlicher Punkt dasjenige ist, was keine Teile hat, so wird nun in der Mechanik das Wesentliche des Körperlichen in den Prinzipien der Mechanik zum Ausdruck gebracht: dass ein Körper ausgedehnt ist (Descartes), dass er mit internen Kräften versehen ist (Leibniz), oder dass er aus undurchdringlichen kleinsten Partikeln besteht (Euler).

Axiome der Klassischen Naturphilosophie mussten demnach zu dem 'euklidianischen Ideal' einer *einzigen* axiomatischen Darstellung führen. Das Licht der Vernunft beleuchtet 'oben' die Axiome und reicht (wenn auch abgeschwächt) bis 'hinunter' zu den Folgerungen und materiellen Anwen-

[20] Als detaillierte Studie zum epistemologischen Wandel des innermechanischen Prinzipienverständnisses bis zum Ende des 19. Jahrhunderts sei hier vor allem auf Pulte [2005] verwiesen. In den erkenntnislogischen Differenzierungen zum Wandel des Verständnisses der 'Axiome der Mechanik' bis heute ist sie die wichtigste Orientierung in dieser Arbeit.

[21] Siehe dazu insbes. Kant [1787], S. 760 f.: 'Von den Axiomen'.

[22] In Popper [1956] wird diese Besonderheit daher als 'Essentialismus' verstanden.

dungen.[23] Neben der mathematischen Aufgabe der rationalen Mechanik, eine Reduktion von Grundgesetzen und -begriffen zu erzielen, bestand nun die naturphilosophische Aufgabe in einer 'metaphysischen' Grundlegung. Die Anpassung zwischen Denken und Anschauung wird durch eine erfahrungsimmanente Metaphysik aller Naturwissenschaften erfüllt.[24]

Das moderne Verständnis von Axiomen grenzt sich nun gleich in mehreren, zum Teil sich überschneidenden Charakteristiken von dem euklidianischen Ideal der Naturbeschreibung ab. Seit Ende des 19. Jahrhunderts setzte eine *konventionalistisch* zu nennende Haltung gegenüber mechanischen Prinzipien ein. Grundgesetze werden von nun an als *revidierbar* und zum Teil als bloß nützliche, *bequeme* Setzungen aufgefasst. Sie sind aus empirischen Gründen zerlegbar und sogar widerlegbar. Jede Gültigkeit der Axiome wird vielmehr *provisorisch* verstanden, als eine bisherige *Bewährung*. Ein mechanisches Prinzip kommt somit über einen rein *hypothetischen* Charakter nicht hinaus.[25] Es gilt deswegen - wie eine Konvention - als *wählbar* hinsichtlich gewisser repräsentativer Kriterien der logisch-deduktiven Einfachheit, der Zweckmäßigkeit (Ökonomie) oder auch hinsichtlich der intuitiven Zugänglichkeit.

Mit der Wählbarkeit von Hypothesen kann ein grundsätzlicher *Theorienpluralismus* nicht mehr ausgeschlossen werden. Es kommen, je nach Ausschnitt der betrachteten Wirklichkeit, nebeneinander stehende Zugänge, Interpretationen oder *Bilder* der Theorie in Frage, wie es in Heinrich Hertz' wegweisendem Werk »*Die Prinzipien der Mechanik*« zum Ausdruck kommt:

> „Eindeutig sind die Bilder, welche wir uns von den Dingen machen wollen, noch nicht bestimmt durch die Forderung, dass die Folgen der Bilder wieder die Bilder der Folgen seien. Verschiedene Bilder derselben Gegenstände sind möglich und diese Bilder können wir nach verschiedenen Richtungen unterscheiden" (Hertz [1894], S. 2).

So wandelt sich auch die *Bedeutung und Aufgabe der Axiome*. Sie sind keine Propositionen von Wesenseigenschaften der materiellen Wirklichkeit. Man

[23] Zu den rivalisierenden Programmen der rationalen Mechanik siehe etwa Pulte [2005], S. 141 ff.; zum Euklidianischen Ideal ebd., S. 66 f. Die Licht-Metapher habe ich ebd., S. 52, entnommen.

[24] Kant [1786] folgt ganz dieser vereinheitlichenden Zielsetzung. Man beachte die Hervorhebung des Singulars im folgenden Wortlaut: „Alle wahre Metaphysik [...] enthält die reinen Handlungen des Denkens, mithin Begriffe und Grundsätze a priori, welche das Mannigfaltige *empirischer Vorstellungen* allererst in *die* [eigene Herv.] gesetzmäßige Verbindung bringt, dadurch es *empirisches Erkenntnis*, d. i. Erfahrung, werden kann." (ebd., S. XIII).

[25] Man siehe einleitend dazu König und Pulte [1998], S. 1141, Pulte [2004a], S. 933, sowie Pulte [2005], S. 327. Paradigmatisch ist hierbei die Kritik Carl Jacobis an den Lagrangeschen Beweisen des Prinzips der virtuellen Arbeit (vgl. dazu Pulte [1998]), wie auch die Entwicklung nichteuklidischer Geometrien, die Henri Poincaré zu der Ablehnung der Kantischen These führte, die synthetisch gewonnenen Axiome der Geometrie seien gleichsam a priori gültig (vgl. hierzu insbes. Poincaré [1929], S. 65).

zielt nun auf *'systematische Zusammenfassung'*[26] ab, etwa darauf, die Theorie logisch einfacher und gegenüber konzeptuellen Alternativen deutlicher zu gestalten. Hertz' Mechanikbuch geht ganz in dieser Zielsetzung auf und hatte einen immensen Einfluss auf die Grundlagen der Klassischen Mechanik im beginnenden 20. Jahrhundert, von denen ich hier berichten werde.

> „Und da wir von den Prinzipien der Mechanik durch verschiedene Auswahl der Sätze, welche wir zu Grunde legen, verschiedene Darstellungen geben können, so erhalten wir verschiedene solche Bilder der Dinge, welche Bilder wir prüfen und miteinander vergleichen können in Bezug auf ihre Zulässigkeit, ihre Richtigkeit und ihre Zweckmäßigkeit." (Hertz [1894], S. 4 f.)

Damit geht eine weitestgehende Skepsis gegenüber metaphysischen Vereinheitlichungsversuchen einher, während mathematische wie *logische* Verfahren bevorzugte *Instrumente* einer 'einfachen' (nach Hertz) wie 'naturgemäßen Klassifikation' (nach Duhem) in den Grundlagen der Mechanik werden. *Wesentlich* ist bestenfalls dasjenige an den Prinzipien zu nennen, was hinreicht, ein System der Mechanik logisch-deduktiv aufzubauen.[27]

Kurzum: Der Aufbau der Mechanik zu Beginn des 20. Jahrhunderts *mittels* Axiomen bzw. Prinzipien entwickelt sich nach einem konventionalistischen Verständnis, während sich in Bezug auf die Darstellungs*methode* in der Mechanik durchaus *instrumentalistische* Eigenarten zeigen.[28] In diesem Umfeld wird hier die *axiomatische Methode* Hilberts in Bezug auf die bestehenden Darstellungen in den *Grundlagen der Mechanik* untersucht. Ich werde gleich verdeutlichen, dass die Frage nach der Darstellungsmethode auf den Aspekt der *logischen Ausgestaltung* (*Logizität*) dieser Repräsentationen in der Mechanik hinausläuft.

1.2.4 Die Dimension des Logischen in der Mechanik

Was sind nun also Axiome oder Prinzipien, und was sind im Besonderen 'Axiome der Mechanik'? - Die Idee der Axiomatik ist so alt wie die Mathematik selbst und muss als Teil der Theoretisierung einer Wissenschaft

[26] So heißt es später in Hilbert [1992], S. 37.

[27] In diesem Sinn etwa Volkmann [1900], S. 44. Dort auf S. 12 wird Axiomen insofern etwas 'Subjektives' zugeschrieben, als ihnen nur noch eine 'relative Richtigkeit', bezogen auf die jeweilige Darstellung der Mechanik und das jeweilige 'Forschungsvorhaben', zukommt.

[28] Ich folge dem Begriff des *'methodologischen Instrumentalismus'* in der Axiomatik Hilberts, wie er in Tapp [2007] für Hilberts finitistisches Programm in den Grundlagen der Mathematik verwendet wird. Der Begriff ist meines Erachtens auf die axiomatische Methode überhaupt zutreffend: dass diese als ein „*Werkzeug zum Erreichen des grundlagensichernden Zweckes dient* [eigene Herv.], aber darüber hinaus und 'in sich' keine Bedeutung hat." (ebd., S. 190). Dagegen grenze ich diese Verwendung von der *instrumentalistischen Theorienauffassung* ab, wie man sie etwa in Popper [1956] findet (siehe auch Bartels [2007], S. 212). Dass Theorien grundsätzlich bloß nützliches Werkzeug zur Systematisierung und Kalkulation von empirischen Vorgängen sein sollen, darüber hinaus allerdings keine Erklärungsleistung erfüllen, halte ich in Bezug auf Hilbert für unzutreffend.

gesehen werden. Schon Euklid hat bekanntlich die elementare Geometrie der Punkte, Geraden und Ebenen nach wenigen Grundsätzen geordnet, um logische Einheitlichkeit und Minimalität der anschaulichen Annahmen zu erreichen. Die axiomatische Rekonstruktion ist als ein weiterer Prozess der Vereinheitlichung zu verstehen. Das bereits bestehende Wissen soll weiter deduktiv vermittelt werden. Dabei sind Axiome ein aus logischen Gründen sinnvoll gesetzter Anfang. Schon in der altgriechischen Bezeichnung ist ′$\alpha\xi\acute{\iota}\omega\mu\alpha$′ gleichbedeutend mit persönlicher ′Wertschätzung′, in der technischen Bezeichnung wird das Verb ′$\acute{\alpha}\xi\iota o\tilde{\upsilon}\nu$′ auch mit ′für würdig, für richtig halten′ oder mit ′fordern′ übersetzt. Axiome sind wie theoretische Forderungen zu verstehen.[29]

Im modernen Verständnis haben Axiome nun vorläufige Gültigkeit, die nur *im* betrachteten System ohne weitere Bedingungen Bestand haben. Nicht zuletzt deswegen sind sie stets das *Ergebnis* der logischen Rekonstruktion. Axiome stehen am Ende eines logischen Erkenntnisprozesses, bilden den provisorischen Abschluss eines theoretischen Wissens, wenngleich sie in der Sache immer am Anfang stehen.

> „Euclid's chief contribution did not consist in discovering additional theorems, but in exhibiting them as part of a system of connected truths. The kind of question Euclid must have asked himself was: Given the theorems about the angle sum of a triangle, about similar triangles, the Pythagorean theorem, and the rest, what are the minimum number of assumptions or axioms from which these can be inferred? As a result of his work, instead of having what were believed independent propositions, geometry became the first known example of a deductive system. The axioms were thus in fact *discovered later* than the theorems, although the former are *logically prior* to the latter." (Cohen und Nagel [1949], S. 132)

Hier wird bereits die regressive Motivation zur Axiomatisierung deutlich ausgesprochen: Die Anzahl an unabhängigen Grundannahmen ist mit dem Ziel der weiteren logischen Vereinheitlichung der Theorie zu minimieren. Eventuell sind auch redundante oder sogar widersprüchliche Annahmen zu entlarven. Es geht nicht primär darum, neue materielle Entdeckungen auf dem Gebiet der Geometrie wie der Mechanik zu machen, sondern um Systematisierung der bereits erworbenen Gesetzesformen. Axiomatisieren setzt also im *Kontext der Rechtfertigung* des Bestehenden an, nicht im Kontext der physikalischen Forschung und Entdeckung. Dass sich dabei die bestehenden Axiome empirischen Korrekturen ′von außen′ nicht verschließen und neuen Phänomenbereichen angepasst werden, ist Ausdruck ihres provisorischen Charakters.

[29] Siehe etwa Freudenthal [1971] und Hölder [1924], S. 12. Auf weitere epistemologische Differenzierungen in ′Axiome′, ′Postulate′ und ′Prinzipien′, wie etwa noch in Volkmann [1900], S. 12 f., wird es mir hier nicht ankommen, nur die deduktive Rolle der Axiome wird in dieser Arbeit im Vordergrund stehen.

Das axiomatische Unternehmen kann aber immer nur relativ zu einem zuvor gesetzten Rahmen der *logischen Ausgestaltung* gelingen. Jedes Ideal der rationalen Mechanik bleibt von dem Anspruch der logischen Differenzierung abhängig. Was dem Physiker als einwandfreie Deduktion gilt, bereitet dem Logiker häufiger Kopfzerbrechen, weil er hier und da verborgene oder auch redundante Voraussetzungen vermutet. Nach Heinrich Hertz zeichnet sich die Auswahl an Prinzipien, die das 'einfachste Bild' der Mechanik erzeugt, noch dadurch aus,

> „daß sich aus ihr ohne weitere Berufung auf die Erfahrung die gesamte Mechanik rein deduktiv entwickeln läßt" (Hertz [1894], S. 4).

Ein solcher Anspruch erscheint uns heute als unerreichbar und problematisch. Denn 'das Ganze' der Mechanik kann kaum deutlich durch eine Realdefinition bezeichnet werden. Hierfür müssten nicht nur zu allen Grundbegriffen der Mechanik (Bewegung, Kraft, Masse usw.) die ihnen 'wesentlichen' Eigenschaften eindeutig bekannt sein, sondern man müsste auch zeigen, dass gemeinsam mit den konstitutiven Gesetzen *alle* Bereiche dieser Mechanik gefolgert werden können. Doch was ist dann mit physikalischen Grenzgebieten, in denen mechanische Modelle angewendet werden: elastische Medien, Flüssigkeiten oder Gaspartikel etwa? Eine scharfe Grenze, ein Definiens der 'gesamten' Mechanik kann nur eine vorübergehende Setzung sein. Das 'einfache Bild' der Mechanik bleibt somit hypothetisch.

Außerdem wird deutlich, dass im regressiven Kontext der Rechtfertigung die *materiellen Bedingungen* des Wahrseins mechanischer Aussagen, bei denen man sich auf 'Erfahrung berufen' muss, nun durch 'rein deduktive' Beweisstrukturen zu ersetzen sind. Das Problem der rationalen Mechanik besteht also darin, inwiefern eine deduktive Begründung auf Ebene der Grundbegriffe des Körperlichen (Masse, Bewegung, Kraft) gelingen kann, *nachdem* die materiellen Wahrheitsbedingungen nicht mehr in Frage gestellt sind. Formale Schlusskriterien könnten an der Gültigkeit materieller Aussagen der Erfahrungswissenschaften vorbeilaufen.[30] Ich würde es allerdings als eine Voraussetzung der rationalen Mechanik sehen, dass die klare Trennung zwischen Form und Inhalt für die klassischen Schlussformen der Mathematik und Logik auch für mechanische Gesetze gültig bleibt. Andernfalls wäre der Erkenntnisgewinn durch mathematische Repräsentationsformen geradezu ein unbegründbares Rätsel. Und als solche Prämisse ist wohl auch Hertz's Erklärung zu verstehen.

Hertz hatte sicherlich die *Sonderrolle* der Mechanik berücksichtigt. Damals galt die Mechanik noch als erste mathematische Naturwissenschaft vor der Physik. Im Vergleich zu den physikalischen Größen der Elektro-

[30] Man bedenke nur, dass erst in der modernen klassischen Logik kein semantischer Unterschied mehr zwischen faktischer und notwendiger Allgemeinheit eines Urteils oder einer Folgerung gemacht wird (man vergleiche mit Stelzner und Stöckler [2001a], S. 7 f; Gabriel [2001], S. 27 f., sowie hier Anhang B.2).

oder Thermodynamik (Ladung, elektrisches Feld, innere Energie und Temperatur etwa) sind Bewegungserscheinungen und die Wirkungen von Massenelementen unmittelbar ersichtlich. Sie haben einen direkten phänomenologischen Ursprung, sie sind immer 'zuerst da', so dass einige Grundlagenforscher die Wendung 'Wie die Erfahrung uns zweifellos lehrt' benutzen, um diese Unmittelbarkeit zum Ausdruck zu bringen.[31] Es gibt auch kein verzwicktes Messproblem, in welches die Grundbegriffe eingewickelt sind. Mit Blick auf die neuen Grundlagen zur Quantenmechanik und zur relativistischen Mechanik dürfen vergleichsweise *einfache* Begriffsstrukturen erwartet werden. Was in der elementaren Geometrie gelingt, kann in der reinen Bewegungslehre der sichtbaren Körper ebenfalls aussichtsreich sein. Dieser Übergang zur Dynamik von Massen und die damit verbundenen Schwierigkeiten werden durch das sechste Problem Hilberts herausgefordert, und ich werde in dieser Arbeit von diesen Schwierigkeiten und von Lösungsansätzen berichten.

Eine unerlässliche Vorbedingung des logischen Diskurses ist somit, dass der Rahmen der logischen Ausgestaltung festgelegt ist. Der Begründungsversuch muss die Konventionen des Begründungsverfahrens selbst mit einbeziehen. Hier (in Kapitel 2) soll zunächst Hilberts *axiomatische Methode* in den Vordergrund treten und präzisiert werden, was an der überlieferten axiomatischen Sichtweise unklar und problematisch geblieben ist. Nach Hilberts Methode geht es nicht mehr darum, grundlegende Begriffe real zu definieren, sondern die für das einzelne System konstitutive Relationen und Funktionen zwischen den Objekten auszuzeichnen, welche dann nicht weiter expliziert werden. Wir müssen also nicht definieren, was ein Punkt, eine Masse, eine Kraft *ist*. Sondern als Grundbegriffe werden sie allein über die konstitutiven Verknüpfungen und Funktionen *im* mechanischen System repräsentiert. Diese so genannten *impliziten Definitionen* sind dann selbst eigene Axiome neben den Grundgesetzen der Mechanik und kennzeichnen die logische Struktur des Systems.

Das Systematische einer Theorie wird somit über die logische Struktur, welche diese Grundbegriffe enthält, greifbar.

> „[T]erms defined implicitly through the axioms [...], although they function as undefined elements in the system, are virtually defined by the system itself." (Cohen und Nagel [1949], S. 239)

Die axiomatische Methode stellt also funktionelle Beziehungen zwischen den Grundelementen ins Zentrum der logischen Analyse und fasst sie zu einer logischen Struktur zusammen. Metamathematische Fragestellungen, etwa nach Widerspruchslosigkeit und Unabhängigkeit der Begriffe, werden nun anhand formaler Kriterien der mathematischen Theorie beurteilbar.

[31] So etwa in Mach [1897], S. 212, oder in Hamel [1912], S. 52. Diese 'Unmittelbarkeit' trennscharf zu machen ist dagegen ein schwieriges Grundproblem der Erkenntnistheorie.

Parallel zur axiomatischen Methode der Göttinger Schule um Hilbert[32] wurden syntaktische wie semantische Differenzierungen entwickelt, die verschiedene Stufen der logischen Präzision im Begründungsverfahren darstellen. Neben dem Einfluss durch den Logizismus Freges, Peanos und Russells ist in der mathematischen Logik die semantische Wende um Alfred Tarski zu nennen. Tarski und anderen war es gelungen, die neuen metamathematischen Perspektiven, die von der axiomatischen Methode ausgehen, durch klar umrissene Konventionen zu sichern. Der semantische Wahrheitsbegriff, der logische Folgerungsbegriff und die Beschränkung auf mengentheoretische Modelle galten als neue Grundlage zu diesem semantischen Programm.[33] So wird verständlich, dass fast alle Logikergruppen zu der Zeit mit größtem Eifer darauf abzielten, die umgangssprachliche Aussagenlogik durch weitere Funktionalisierung der Aussageelemente zu spezifizieren. Weitere Substitutionsverfahren sollten verfeinerte Beweisstrukturen erbringen. Im Resultat standen nun verschiedenstufige Relationslogiken zur Verfügung, in denen die Gesetze und Begriffe als uninterpretierte Schemen vorkommen.

Zum Beispiel wird in Hölder [1924], §6, deutlich gemacht, welch ein Umdenken nötig ist, um die faktische Beweispraxis in der Mathematik und Mechanik mit den neuen Begriffsstrukturen der Logik in Einklang zu bringen. Die Studie belegt an der Praxis der Mathematik, dass die aussagenlogischen und syllogistischen Beweisschemen nicht ausreichen, um Identitätsaussagen als Eigenschaft zwischen zwei Objekten zu klären. Es sind Substitutionsverfahren nötig, funktionelle Beziehungen zwischen undefinierten Objekten, um die Konventionen des Beweisens in der Mathematik und Mechanik ersichtlich zu machen.

> „Von neueren Autoren, die zum Teil ihren Ausgang von der Mathematik genommen haben, ist auf eine Erweiterung der Formallogik hingewiesen worden, die darin besteht, daß an Stelle der ausschließlichen Betrachtung der Gattungsbegriffe die *Relationen*, d. h. die Eigenschaften, welche gewisse Gegenstände des Denkens in Beziehung aufeinander besitzen, in die Logik mit einbezogen werden. In der Tat spielen in der Mathematik schon gar nicht die Urteilsformen die Hauptrolle, mit denen die gewöhnliche Syllogistik sich beschäftigt, und welche Individuen unter Gattungsbegriffe oder Gattungsbegriffe unter andere ebensolche Begriffe subsumieren. Nicht solche Urteile werden vom Mathematiker aufgestellt, die etwa besagen, daß alle ganzen Zahlen rationale

[32] Der Einfluss ist durchaus beachtlich: Moritz Pasch, Felix Klein, Ernst Zermelo, Georg Hamel, Hermann Weyl, Max Born und John von Neumann sind nur einige Namen, die im Zusammenhang mit Mechanik zu nennen wären. Eine kurze Übersicht zu Hilberts Einfluss in der Physik seiner Zeit gibt Wuensch [2012].

[33] Zur historischen Übersicht zu den logischen Entwicklungsphasen im 20. Jahrhundert vergleiche man mit Rodríguez-Consuegra [1994], Shapiro [1994], Weaver [1994], sowie Mancosu u. a. [2004]. Außerdem wurde hier der Anhang B ergänzt, um einige der hier verwendeten Termini aus der formalisierten Semantik zu präzisieren.

> Zahlen sind, oder daß alle Strecken unter die 'Größen' gerechnet werden müssen, wohl aber solche, die z. B. von zwei Zahlen aussagen, daß die erste davon 'größer' ist als die zweite, die zweite 'kleiner' als die erste, oder daß eine Zahl dadurch entsteht, daß eine zweite Zahl mit einer dritten vervielfältigt wird usw."[34]

Diese Überlegungen Hölders orientieren sich an Hilberts axiomatischer Behandlung der Geometrie, und auch Hamels Ideen zu den Grundlagen der Mechanik lassen sich nahtlos hieran anschließen.

Neben der Syllogistik und der Mengenlehre standen axiomatische Kalküle der Prädikaten- und Typenlogik zur Verfügung, die auch außerhalb der mathematisch sicheren Gebiete zur Anwendung kommen sollten.[35] Von nun an war und ist es von besonderer Relevanz, welcher Anspruch der Formgestaltung des Schlusses und der Gesetzesstrukturen erhoben wird. Das ist der methodologische Aspekt in Hilberts sechstem Problem: Mit welchen logischen Mitteln kann die Axiomatisierung der Klassischen Mechanik gelingen? Sie läuft im konventionalistischen Verständnis von Axiomen auf die Frage *nach dem Formalen in der Mechanik* und den 'natürlichen Grenzen' in der mathematischen Beschreibung von bewegten Körpern hinaus.

> „Dem Denken steht ein unermeßlicher Vorrat an formalen Beziehungen zur Verfügung, und es kommt darauf an, solche Systeme von formalen Beziehungen zu finden, die sich den in der Wirklichkeit vorgefundenen Beziehungen anpassen lassen. Die Wirklichkeit wird also daraufhin untersucht, wie weit sie sich durch begriffliche Relationssysteme darstellen läßt." (Hilbert [1992], S. 27)

Dass diese regressive Anpassung gerade für eine mathematische *und* empirische Wissenschaft wie die Mechanik eine höchst verzweigte Aufgabe ist, die mehrere Antworten mitbringt, wird schon deutlich, wenn man nur die Mathematik und ihre unterschiedlichen Beweisverfahren betrachtet. Schon Hilbert musste feststellen, dass man weit davon entfernt war, einen festen Rahmen des deduktiven Beweisens zu finden, der sich der Praxis einerseits und der logischen Strenge des formalen Folgerns andererseits anschmiegt.

> „In der Mathematik und auch in anderen Gebieten, in denen man eine axiomatische Grundlegung wählt, werden die Schlußfolgerungen aus den Axiomen meist gezogen, ohne eine formalisierte Logik zu benutzen." (Hilbert und Ackermann [1972], S. 111)

Die Axiomatisierung der Klassischen Mechanik ist, wie ich hier deutlich machen will, mit einer *informellen Gebrauchslogik* gelungen. Es wäre weiter

[34] Zitiert aus Hölder [1924], S. 4. Siehe entsprechend auch Cohen und Nagel [1949], S. 111.

[35] Eine Übersicht über alle diese Kalküle von unterschiedlicher Ausdrucksstärke, sowie über ihre Anwendungen in der Mathematik, gibt etwa Hilbert und Ackermann [1972].

zu klären, ob eine Formalisierung der etablierten Beweisverfahren sinnvoll ist. Was sind die Grenzen dieses Unternehmens, und von welcher Qualität sind die Aussagen, die formale Axiome der Mechanik liefern können? - In diesem Problemkreis bewegen sich die Grundlagen der Klassischen Mechanik des 20. Jahrhunderts, denen ich mich hier zuwende.

1.3 Arbeitsthese: die disjunktive Umsetzung von 'Axiomen der Klassischen Mechanik'

Die Arbeit betrachtet das Axiomatisierungsprojekt in der Mechanik mit Blick auf den neu eröffneten Formalisierungsanspruch der modernen Logik: in Kapitel 2 im Kontext der Anforderungen durch Hilberts Methode und in Kapitel 4 im Kontext der speziellen Anforderungen durch die Grundkonzepte der Klassischen Mechanik, die zuvor im Hauptteil (Kapitel 3) zusammengefasst sind.

Ich werde damit zeigen, dass die Axiomatik hier Erfolge zu verzeichnen hat, die zum Teil verborgen geblieben sind. Sie bestehen nicht in der Erweiterung der empirischen Reichweite der Grundbegriffe, sondern in der logischen Verknüpfung derselben. Es zeigen sich durchaus Vorteile, im Bereich des logisch *Hypothetischen* zu bleiben und mechanische Gesetze funktionell zu zerlegen. Wenn man angeben kann, welche Begriffe widersprüchlich und unabhängig voneinander sind, treten Differenzierungen auf, die dazu beitragen, die alte Mechanik zu einer größeren Einheit zu bringen. Auf diese Erfolge der 'Axiome der Klassischen Mechanik' kommt es mir an, und deshalb habe ich hier meinen Untersuchungsschwerpunkt gesetzt.

Anders als uns die meisten Mechaniklehrbücher glauben lassen, wird offenkundig, dass es mehrere Zugänge, mehrere Bilder, sogar mehrere sich widersprechende Konzeptionen in der Klassischen Mechanik gibt. Das war die ursprüngliche Motivation zu Hilberts Problem und wird in Hamels Antwortskizze umso deutlicher. Bezeichnend ist hierzu wieder der bereits oben genannte Lexikoneintrag zur Mechanik im Brockhaus [1957], S. 487, der sich nachweislich an Hamels Schriften orientiert hat:

> „Die M[echanik] betrachtet Körper als Systeme von Massenpunkten *oder* als Kontinua und teilt sie *je nach* den zwischen diesen wirkenden Kräften auf in M[echanik] der Massenpunkte, der starren Körper und M[echanik] der deformierbaren Körper (Hydro-, Elasto-M[echanik]) [eigene Herv.]."

In dieser Hinsicht bleiben die dynamischen Grundbegriffe und -gesetze der Mechanik davon abhängig, ob man Systemkörper als ausgedehnt-kontinuierliche Massenverteilungen oder als diskrete Punktmassen veranschaulicht. Starre Körper zeigen zudem Merkmale von beiden Anschauungen. Das hat schon mehrfach zu dem Problem geführt, was die nun hinreichen-den Gesetze der Mechanik starrer Körper tatsächlich sind.[36] Hilberts Problem ist in dieser Hinsicht die Klassifizierung physikalischer Objekte zwischen mathematisch endlichen und infinitesimalen Größen, und gerade in dieser Klassifizierung konnte Hamel seine vielversprechendsten Resultate hervorbringen.

Doch nur weil es diese Vieldeutigkeiten auf Ebene der Grundbegriffe gibt, ist das Bemühen um rationale Ordnung noch keiner Beliebigkeit ausgesetzt, wie man mit Blick auf die Anwendungsebene von Prinzipien vermuten könnte. Die Grenze zwischen Grundlagen und Anwendung lässt sich ganz sicher nicht scharf ziehen. Das wird aber erst dann zu einem methodologischen Problem, wenn behauptet wird, man könne alle komplexen Modellierungs- und Idealisierungsprozesse deduktiv aus den Prinzipien folgern.[37] Von dieser Zielsetzung ist aber jedes Axiomatisierungsvorhaben weit entfernt.

Axiome der Mechanik unterliegen nicht von sich aus dem deduktiv-nomologischen Erklärungsmodell, bei dem eine 'vollständige' Schlusskette zwischen Grundannahmen und empirisch-geometrischen Randbedingungen vorliegen müsste. Die deduktive Vernetzung ist ein eigenständiger Prozess neben synthetischen Modellierungen, die in der Forschung betrachtet werden. Einem Anspruch auf deduktive 'Vollständigkeit' können beide Prozesse nicht genügen. Hiermit wende ich mich später (in Kapitel 4) gegen eine pragmatische, anwendungsbezogene Sichtweise auf die Klassische Mechanik, die letzten Endes dem prinzipienorientierten Aufbau jegliche Grundlage entzieht. Demnach behauptet man einerseits, dass Modellierung und formale Begriffskonstitution miteinander untrennbar vermengt sind und schließt dann auf die Nutzlosigkeit jeder axiomatischen Grundlage, weil diese an dem selbst gesetzten Vollständigkeitsanspruch scheitern würde. Gerade dieser letzte Begründungsschritt erweist sich als Irrtum.[38]

Wer aber den axiomatischen Aufbau zur Theorie der Mechanik verfolgt, widerspricht keinesfalls dem 'selbstkorrigierenden Charakter aller Wissenschaften', wie es treffend in Cohen und Nagel [1949] heißt:

> „The method of science is thus essentially circular. We obtain evidence for principles by appealing to empirical material, to what is alleged to be "fact"; and we select, analyze, and interpret empirical material on the basis of principles. In virtue of such give and take between facts and principles, everything that is dubitable falls under careful scrutiny at one time or another" (ebd., S. 396).

[36] Der in dieser Arbeit verwendete Begriff der 'Anschauung' orientiert sich an Hilbert und Hamel und damit mittelbar an Kant. Er bedeutet sowohl den Akt des Anschauens als auch den Inhalt des betrachteten Gegenstandes (siehe dazu Patzig [1988], S. 31). Für die Erkenntnisquelle einer anschauungsbezogenen Konstruktion der Mechanik wird häufiger von 'Intuition' gesprochen (siehe dazu vor allem Abschnitt 2.7).

[37] Siehe dazu Lyre [2006], S. 10 f.

[38] Auch viele Anhänger der semantischen Sichtweise haben bis heute diesem Irrtum immer wieder neuen Nährboden gegeben.

Jede Axiomatisierung kann Zirkularitäten, Unvollständigkeiten, kann sogar Widersprüche auf Ebene der Grundbegriffe wie auf Ebene der Modellierungen aushalten. Ihr Erfolg besteht darin, diese Uneinigkeiten, die sich im Nachhinein ergeben, zu identifizieren und idealerweise aufzulösen. Nach Hamel münden schließlich unabhängige und irreduzible Konzeptionen in *disjunktiven, nebeneinander stehenden* Systemen der Klassischen Mechanik.

Doch wie geht man nun mit solchen alternativen *Systemmechaniken* um? Sind sie die Absage an die Möglichkeit von einheitlichen Axiomen der Mechanik? - Ich meine, dem ist nicht so. Verschiedene formale Zugänge zu differenzieren und die Grenzen zum nichtaxiomatischen Bereich der Modellierungen zu bewahren, ist ein Schritt zur Vereinheitlichung. Denn er fordert die weitergehenden *Grenzübergänge* heraus, konzeptuelle Überführungen zwischen den Systemmechaniken, die vermutlich ohne diese Differenzierungen nicht einmal erkennbar sind.

Jede logische Repräsentation hängt also von der synthetischen Zusammensetzung der betrachteten Objekte *und* von der Entscheidung für eine rationale Ordnung der Grundgesetze ab. Invariante Größen, grundlegende Begriffe behalten für eine *Auswahl* an Modellierungen des Körperlichen somit ihre volle Gültigkeit. Man kann mit Cohen und Nagel [1949], S. 397, sogar so weit gehen, „that it is just certain *selected invariant relations* of things in which science is interested". Von einem vollständigen Gültigkeitsbereich der Klassischen Mechanik kann zwar keine Rede sein. Aber *dass* es invariante Größen, Prinzipien und Axiome gibt, die einen *bestimmten* Gegenstandsbereich der sichtbaren Materie umfassen, rechtfertigt nach meiner Überzeugung die immer bleibende Aktualität von Grundlagendiskussionen, gerade auch in der Klassischen Mechanik. Auf Ebene der Prinzipien wird diese Auswahl selbst begrenzt und abzählbar bleiben, und das motiviert letzten Endes immer aufs Neue zu einer Axiomatisierung mit endlich vielen Grundgesetzen. Von solch weiterführenden Ausrichtungen in den Grundlagen der Mechanik wird schließlich in Kapitel 5 berichtet.

2 Hilberts sechstes Problem: davon, die Mechanik axiomatisch zu fassen

> „Ich glaube: Alles was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens überhaupt sein kann, verfällt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik."
> (Hilbert [1917], S. 415)

2.1 Die axiomatische Methode als Ausgangspunkt der mechanischen Grundlagen im 20. Jahrhundert

Wer die Frage nach der logischen Beschaffenheit eines Theoriegebäudes stellt, wird auch heute noch unmittelbar auf das mathematische wie philosophische Werk David Hilberts verwiesen, dem großen Göttinger Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts.[1] Kein anderer nach ihm hat die Idee der *axiomatischen Methode* so energisch verteidigt, die Idee eines Mathematisierungsprozesses, der in allen Wissenschaften Anwendung finden soll. Kein anderer nach ihm hat so detaillierte Vorstellungen darüber entwickelt, wie die traditionelle axiomatische Sichtweise zu einem Instrument der *logischen Begriffsanalyse* und damit zu einer echten Methode heranwachsen kann. Hilberts axiomatische Methode stellt den wichtigsten methodologischen Ausgangspunkt für die Grundlagen der Mechanik im 20. Jahrhundert dar. Ich möchte daher versuchen, ihre wesentlichen, erneuernden Merkmale herauszustellen, um Missverständnisse zu verdeutlichen, die mit dem neuen methodologischen Anspruch verbunden werden können und die auch tatsächlich aufgetreten sind.

Obige Passage aus Hilberts Vortrag ≫*Axiomatisches Denken*≪ verdeutlicht zum einen die Vorstellung, dass eine Theorie - im klassischen Sinne - durch die *mathematisierte* Konzeption des Inhaltes definiert ist.[2] Das gilt vor allem für Inhalte, die etwa aus der Mechanik stammen, die nicht rein mathematischer Natur sind, sondern immer einen empirischen oder anschaulichen Bezug haben.

Zum anderen wird eine *zweite, reflexive Stufe der Theoriebildung* angesprochen, die sich der deduktiven Reorganisation widmet. Die Axiomatik wird

---

[1] Ein aktuelles Beispiel wäre Hintikka [2009]. Wenn es um die Kriterien der axiomatischen Methode geht, wird auch dort auf Hilberts originale Vorstellungen Bezug genommen.

[2] Gemeint ist das klassische Ideal von Wissenschaftlichkeit in der 'aprioristischen Tradition' nach Kant und Fries. Demnach wird Wissenschaft im eigentlichen Sinn als „System [...], Theorie [als] das Ideal von Wissenschaft" (Pulte [2004a], S. 922) verstanden und beinhaltet die „Auffassung, dass Mathematik für Wissenschaft konstitutiv" sei (ebd., S. 922).

zu einem Programm der so genannten *Metamathematik*, in der das Theoriegebäude wie ein einheitliches Satzsystem betrachtet wird.[3]

'Reife' in Hilberts Wortlaut meint also eine gewisse inhaltliche Sicherheit oder Gesetztheit, die ein theoretisches Fundament mitzubringen hat: dass sich der Inhalt bewährt hat, die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten erforscht und entdeckt sind. Dies kann nicht nur von der Lagrangemechanik, die Hilbert hier im Sinn hat, behauptet werden.[4] Grundsätzlich ist die gesamte *Mechanik* als Theorie der Kinetik der sichtbaren Körper bis Ende des 19. Jahrhunderts systematisch gefestigt, so dass der Begriff des 'Klassischen' an der Klassischen Mechanik hier erst seine inhaltliche Berechtigung bekommt.[5]

Die Axiomatik *als Tätigkeit zweiter Ordnung*[6], als Reflexion *über* einer bewährten Theorie,[7] ist das entscheidende Moment im Hilbertschen Denken und stellt einen Fixpunkt für das moderne, *logische* Verständnis der Grundlagen der Mechanik dar. Sowohl das noch zu diskutierende Werk Georg Hamels, der Doktorand bei Hilbert gewesen ist und die umfangreichste Skizze zur Axiomatik der Klassischen Mechanik vorgelegt hat, als auch die Leistung Walter Nolls und Clifford Truesdells, die zu einer gänzlichen Neubewertung der Klassischen Mechanik geführt hat, stehen unter dieser Prämisse des axiomatischen Verständnisses von Wissenschaftlichkeit.[8]

Von hier ausgehend werden zwei epistemologische Grundhaltungen ersichtlich, die eine deduktive oder axiomatisierte Mechanik begleiten.

1. Es herrscht rückblickend ein *konventionalistisches Prinzipienverständnis* vor, das nun mit einer *Funktionalisierung* des Prinzipiengehaltes verknüpft wird. Prinzipien sind funktionelle, Form gebende (aber nicht unbedingt formale) Satzelemente, deren Bedeutungsgehalt von ihrem Status in der Theorie zu trennen ist. Sie haben allgemeine Gültigkeit in der Theorie und sind für den jeweiligen Theorieaufbau konstitutiv. Diese Vorstellung wird bereits aus folgendem bekannten 'Fachwerk-Zitat' aus Hilbert [1917], S. 406, deutlich:

   > „Wenn wir eine bestimmte Theorie näher betrachten, so erkennen

[3] Man vergleiche Pulte [2004a], S. 923 und König und Pulte [1998], S. 1146.

[4] Vgl. Hilbert [1917], S. 408.

[5] So etwa die Umschreibung in Wilson [1998], S. 251: „'Classical Mechanics' covers the approach to physical phenomena that dominated science from roughly the time of Galileo until the early decades of the twentieth century."

[6] So bezeichnet in Bunge [1967a], S. 1.

[7] „The axiomatic method is characteristically reflexive" (Sauer [1999], S. 3).

[8] So etwa Hamel [1967a], S. 1: „Wenn wir uns aber auf die klassische Mechanik beschränken [...], so ist die mathematisch-deduktive Methode möglich, weil das Gebäude der klassischen Mechanik in seinen wesentlichen Teilen abgeschlossen ist." - Was Truesdell betrifft, so ist die Einleitung zu der enzyklopädischen Darstellung der Kontinuumsmechanik, Truesdell und Toupin [1960], S. 230, ein lebhaftes Bekenntnis zur axiomatischen Methode. Auf die Neubewertung der Klassischen Mechanik wird hier am Ende (Abschnitt 5.1.2 und folgender) hingewiesen.

> wir allemal, dass der Konstruktion des Fachwerkes von Begriffen einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zugrunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen *nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen* [eigene Herv.]".

Konventionalistisch verstanden sind Prinzipien also durch andere Prinzipien ersetzbar, sofern dies *aus deduktiven Gründen* ersichtlich ist. Es gibt keine ewige, unumstößliche Wahrheit der Prinzipien wie noch zur Zeit Newtons, Lagranges oder Eulers. Die Konventionalisierung der Prinzipien einer Theorie ist ein wesentliches, neues Element des Wissenschaftsverständnisses im 19. Jahrhundert.[9]

2. Es wird nun ein neuartiges *methodologisches* Verständnis im Umgang mit mathematischen Theorien erklärt: Das ist die *axiomatische Methode*. Darin verbirgt sich gerade der Optimismus Hilberts gegenüber theorieskeptischen Haltungen, dass die axiomatische Rekonstruktion eine neue methodische Chance zur Fundierung der bewährten Theorien eröffnet.[10] In ihrer vollendeten Form sind schließlich die Prinzipien einer Theorie bloße *Schemata oder Funktoren*, deren Bedeutung sich je nach betrachteten Modell durch die Auswahl der bezeichneten Objekte unterscheidet. Dieser Aspekt der 'Funktionalisierung' wird besonders später in der modelltheoretischen Lesart des Hilbertschen Werkes hervorgehoben.[11]

Ich will im Folgenden diese beiden Aspekte - das konventionalistische Prinzipienverständnis und die axiomatische Behandlung von Theorien - näher vorstellen und entfalten. In Hilberts sechstem Problem fallen diese beiden Aspekte untrennbar zusammen. Es bildet deshalb sowohl historisch als auch inhaltlich einen so bemerkenswerten Ausgangspunkt für die axiomatische Behandlung der Mechanik im 20. Jahrhundert.

[9] Man vergleiche insbes. Pulte [2004a], S. 933; zur klassischen Prinzipienauffassung Pulte [2005], S. 46, sowie die Literaturangaben aus Anm. 25, S. 13.

[10] In König und Pulte [1998], S. 1146, wird treffend zusammengefasst: „[... So] werden Theorien in der Folge fast durchgehend als rein hypothetische Satzsysteme mit Erklärungs- und Prognosefunktion verstanden. Die Entwicklung der Logik und Mathematik durch G. Peano, G. Frege, B. Russell und D. Hilbert befördert dabei eine zugleich empiristische wie formale, phänomenorientierte wie logisch-rekonstruktive Theorienbestimmung, die als Ausgangspunkt nachfolgender Konzeptionen bis heute mittelbaren Einfluss hat".

[11] Vergleiche dazu Hodges [2009], §2 und Hintikka [2009], S. 70 und 74.

2.2 Die Formulierung des Hilbertschen Problems

In Hilberts berühmter Rede über ≫*Mathematische Probleme*≪, gehalten in Paris im Jahr 1900, finden wir einen lebhaften Appell an den Fortschritt und an das Zusammenwachsen der mathematischen Wissenschaften in Gestalt einer Forderung an die deduktive Strenge beim Aufbau einer mathematischen Theorie. Die oft zitierten Worte „In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!" (Hilbert [1900a], S. 262) sind ein stürmischer Kontrapunkt zu der wissenschaftsskeptischen Haltung, wie sie zu damaliger Zeit auf dem Gebiet der Naturwissenschaft vorrangig durch Emil DuBois-Reymond provoziert wurde.[12]

In Hilberts Vortrag an die Fachwelt der Mathematik kommt, so der Kommentar in Aleksandrov [1971], S. 18 f., der Glaube an den „einheitlichen Charakter der Mathematik als der Grundlage der gesamten exakten naturwissenschaftlichen Erkenntnis" zum Ausdruck. Er zeigt Hilberts „festes Vertrauen auf die unbegrenzte Macht der menschlichen Erkenntnis und den unversöhnlichen Kampf gegen jeglichen Agnostizismus". Von den dreiundzwanzig dort gestellten Problemen, so unterschiedlich in ihrem mathematischen Charakter und im Rückblick so treffend und universell, dass sie den mathematischen Diskurs für die erste Hälfte des 20. Jahrhundert geprägt haben,[13] thematisiert das sechste Problem die Axiomatisierung der Mechanik. Damit nimmt es einen „besonderen Platz" (Aleksandrov [1971], S. 19) unter den Problemen ein, und das gleich in zweierlei Hinsicht.

Zum einen handelt es sich um kein innermathematisches Problem, wenn dort eine strenge Begründung der wechselseitigen Beziehung zwischen Mathematik und Mechanik im allgemeinen erfragt wird. Die Mechanik ist eine mathematische Wissenschaft mit direktem empirischen Anwendungsbezug, der sie von der Algebra oder Analysis grundsätzlich unterscheidet. Es können in der Sache begründete Zweifel aufkommen, ob ein

---

[12] Siehe dazu Aleksandrov [1971], S. 19. DuBois-Reymond [1882] ist eine damals vielbeachtete, erkenntnistheoretische Kritik an Grundüberzeugungen der Physik und Psychologie. Die Streitschrift richtet sie vor allem gegen die Atomismusthese, die dort auf die Laplacesche „Corpuscular-Philosophie" zurückgeführt wird. Ein dynamisches Phänomen der „Körperwelt" durch die mechanische Wirkung von punktuellen Bestandteilen der Körper und ihrer Umgebung zu erklären, durch Darstellung eines „System[s] simultaner Differentialgleichungen", sei ein bloßes „Surrogat einer Erklärung" für wahrnehmbare 'Qualitäten' (alle eben genannten Zitate sind aus ebd., Seiten 11 u. 18). Die mathematische Form könne nur vorgeben, sie entspreche den „nöthigen thatsächlichen Bestimmungen" (ebd., S. 17) der wahrnehmbaren Welt. Die philosophische Position des Atomismus verzettele sich so immer wieder in „unlösliche Widersprüche" (ebd., S. 18), denn es sei wissenschaftlich unzulässig, von einem gedachten „Bilde der Materie" auf „neue, [...] ihr eigenes Wesen aufklärende Eigenschaften" zu schließen, „und dies ohne dass wir irgend ein neues Princip einführten" (ebd., S. 21). Die Streitschrift thematisiert also den ständig aktuellen Gegensatz zwischen der Beschreibungsebene des direkt sinnlich Zugänglichen und der abstrahierten Analyse desselben in Form eines ikonischen Modells der Mechanik. So endet sie mit dem eindringlichen, aufklärenden Appell „Ignorabimus!": Wir müssen erkennen, dass die wahrhafte Bedeutung der Grundbegriffe der Physik wie etwa 'Materie' oder 'Kraft' ein unlösbares „Räthsel" (ebd., S. 45) sei.

[13] So sinngemäß ein Zitat von H. Weyl in Bernhardt und Wussing [1971], S. 15.

solches Vorhaben 'in vollem Umfang' gelingt. Zum anderen muss man wie Grattan-Guinness [2000b], S. 755, in Frage stellen, ob der Anspruch, die Mechanik axiomatisch zu begründen, überhaupt ein 'echtes Problem' darstellt, das eine mathematisch eindeutige Lösung erbringen kann. Zu Recht wird auch in Corry [2006], S. 17, darauf hingewiesen, dass es eher als eine „general task" zu verstehen ist.

Im Original wird dem sechsten Problem der Titel "Mathematische Behandlung der Axiome der Physik" gegeben und damit die Ausrichtung sehr allgemein gehalten:

> „Durch die Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, *nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*" (Hilbert [1900a], S. 272)

Wenn Hilbert anschließend die Beiträge von Ernst Mach, Heinrich Hertz, Ludwig Boltzmann und Paul Volkmann auf dem Gebiet der Grundlagen der Mechanik würdigt, so ist eine Gemeinschaft von Physikern angesprochen, die sich intensiv mit methodologischen Fragen der rationalen Mechanik und einer deduktiven Grundlegung derselben auseinandergesetzt und das methodologische Denken Hilberts geprägt haben.[14] Man muss weitergehend behaupten, dass deren Beiträge die 'metatheoretische Entwicklung' der rationalen Mechanik bis zum beginnenden 20. Jahrhundert bestimmt haben.[15]

Es wird am übersichtlichsten sein, zunächst diejenigen Merkmale zu erläutern, die das neuartige methodologische Verständnis von Theorien seit Hilbert deutlich machen, auch wenn die Trennung von der physikalischen Fragestellung ein wenig gewaltsam erscheinen mag. Ohne die methodischen Merkmale sind die Grundlagenfragen zur Mechanik missverständlich, da sie eine eigenständige wissenschaftstheoretische Sichtweise auf Fragestellungen der Physik enthalten, die allein schon diskussionwürdig ist. Hilberts axiomatische Methode selbst soll Antwort auf bestehende Fragen der nunmehr 'klassisch' zu nennenden Mechanik geben können. So wie es in Boltzmann [1905], S. 257, heißt,

> „Oft ist ein Problem schon halb gelöst, wenn die richtige Methode der Fragestellung gefunden ist.",

so hat auch das sechste Problem eine *methodologische Seite*: Es geht um die Anwendung der axiomatischen Methode auf die Klassische Mechanik. Hierauf konzentriere ich mich in diesem Kapitel. Die physikalische Seite

---

[14] Es sollte zusätzlich der Einfluss durch Carl Neumann, Gustav Kirchhoff und Aurel Voss betont werden, wie in Corry [2004], S. 51 ff.

[15] Diese Bemerkung orientiert sich an Pulte [2004b], S. 977.

des Hilbertschen Problems, die auch maßgeblich von Boltzmanns Fragen zu den Grundlagen der Mechanik angeregt wurde,[16] wird dann im folgenden Kapitel (Abschnitte 3.2 und folgende) betrachtet.

2.3 Die axiomatische Methode im sechsten Problem

Die axiomatische Methode nach Hilbert ist enger gefasst als die axiomatische Sichtweise auf Theorien, welche bekanntlich bis Euklids »Elemente« zurückverfolgt werden kann.[17] In Hilbert [1905], S. 11 f., wird diese traditionelle *Sichtweise* der Axiomatik folgendermaßen erläutert:

> „Die allgemeinen Grundzüge einer axiomatischen Auffassung sind eigentlich unbewusst stets zu Grunde gelegt worden, in der Mathematik, wie auch in anderen Wissenschaften. Hat man irgend ein Thatsachenmaterial zur Verfügung, das gewisse Sätze, auch zweifelhafte, Vermutungen etc. enthalten mag, so zeichnet man eine Reihe dieser Aussagen aus, sondert sie ab, und faßt sie zu einem eigenen System, dem *Axiomensystem*, zusammen. Dies faßt man nun als Grundlage auf, und sucht durch logische Combinationen nach den bekannten logischen Gesetzen das ganze vorliegende Material daraus herzuleiten."

Während man nach der Sichtweise als konstitutiv erkannte Begriffe eines mathematischen Wissensgebietes in einem deduktiven Zusammenhang präsentiert, werden nun mit der Methode klar umgrenzte Kriterien angegeben, nach denen ein axiomatischer Aufbau der Theorie gelingen soll. Die Methode enthält Kriterien, wie logische Sicherheit und Vergleichbarkeit der Theorieelemente erreicht werden kann. Damit wird sie zu einem „Untersuchungsverfahren" (Hilbert [1900b], S. 181) weiterentwickelt. Sie enthält gegenüber der Sichtweise eine zusätzliche metatheoretische Komponente, die in den Prozess des Verstehens einer wissenschaftlichen Theorie mit eingeht.[18]

Die axiomatische Methode lässt sich durch drei Funktionen oder Zielrichtungen charakterisieren, die sich wechselseitig beeinflussen. Im Idealfall orientiert man sich bei der Rekonstruktion gleichzeitig an allen drei Zielrichtungen:[19]

- **die deskriptive Funktion**: Begriffe zu analysieren und Begriffssysteme aufzustellen (Abschnitt 2.3.1);

[16] Man vergleiche dazu insbes. Corry [2006], Seiten 8 und 16 f.

[17] Siehe dazu vor allem Majer [2006a], Seiten 157 und 159.

[18] Man vergleiche dazu Tapp [2007], S. 74.

[19] Zur deskriptiven und deduktiven Funktion vergleiche Hintikka [1996], Kap. 1, 'The Functions of Logic', dort insbes. Seiten 4 und 9.

- **die deduktive (und reduktive) Funktion**: die Vernetzung und Reduktion der Begriffe, Axiome und Theoreme, kurz: die 'Tieferlegung der Fundamente' (Abschnitte 2.3.2 und 2.3.3);
- **die metamathematische Untersuchung**: die Axiomensysteme hinsichtlich metalogischer Gütekriterien (Widerspruchsfreiheit etc.) zu prüfen (Abschnitt 2.3.4).

Die anschließenden Abschnitte erläutern Hilberts Vorstellungen und die seiner Nachfolger dahingehend, wie weit die axiomatische Methode in der Mechanik anwendbar ist.

2.3.1 Konstitution eines Begriffssystems

> „Durch die Axiomatisierung verlieren die vorher etwas vagen Begriffe [...] ihren mystischen Charakter, da sie dann durch die Axiome implizit definiert sind." (Hilbert u. a. [1928], S. 3)

Nach Hilberts Auffassung verleiht die axiomatische Methode den Lehrsätzen eines Wissensgebietes eine, wie Mach sagen würde, 'ökonomische Ordnung'. „Diese Ordnung erfolgt", so Hilbert [1917], S. 405, mit dem oft zitierten Bild,

> „mit Hilfe eines gewissen *Fachwerkes von Begriffen* in der Weise, daß dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts Anderes als die *Theorie* des Wissensgebietes."[20]

Theorie wird also als das Ergebnis eines vereinheitlichenden wie absichernden Begründungsversuchs verstanden, die durch die axiomatische Tätigkeit dem reflexiven Moment der Begriffsanalyse unterworfen ist. Dieser Aspekt der *logischen Begriffsanalyse* oder der *logischen Rekonstruktion* wird auch später von Truesdell in aller Deutlichkeit hervorgehoben, wenn er auf das sechste Problem Hilberts zu sprechen kommt:

> „A mathematician must know that good axioms spring from *intrinsic need – details scatter, concept is not clear, or paradox stands unresolved* [eigene Herv.]. Formal axioms represent only one response to the call for conceptual analysis before significant new problems can be stated. You cannot solve a problem that has not yet been set." (Truesdell [1984a], S. 137)

[20] In dem ökonomischen Merkmal der wissenschaftlichen Theoriebildung ist Hilbert zweifellos durch Mach [1897] beeinflusst (man vergleiche zu Machs Theorieverständnis Pulte [2004a], S. 930, und König und Pulte [1998], S. 1144). Ferner wird in Corry [2004], S. 61 f., der unmittelbare Einfluss durch Volkmann [1900] betont, wo auf Seite 3 f. die Gebäudemetapher verwendet wird, um das Missverständnis eines rein explorativen Theoriebildungsprozesses zurückzuweisen. Hierzu mehr in Abschnitt 2.6.

Wenn im sechsten Problem die ≫*Grundlagen der Geometrie*≪ als 'Vorbild' für einen axiomatischen Aufbau der Mechanik zu nehmen sei, so wird uns dort in der Einleitung die Aufgabe gestellt,

> „ein *vollständiges* und *möglichst einfaches System* von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, dass dabei *die Bedeutung* der verschiedenen Axiomgruppen und die Tragweite der aus den einzelnen zu ziehenden Folgerungen *möglichst klar* zu Tage tritt [eigene Herv.]." (Hilbert [1903], S. 1)

Das Axiom als implizite Definition einer Begriffsrelation

Die obigen Zitate machen deutlich, dass zur logischen Rekonstruktion einer Theorie dem einzelnen Axiom die Aufgabe zukommt, Begriffe und ihre Beziehungen zueinander, die für die Theorie als *grundlegend* erachtet werden, *implizit zu definieren*.[21] Hilbert führt dies an der elementaren Geometrie aus, indem die 'Systeme von Objekten' gebildet werden, die in der Geometrie unterschieden bleiben: Punkte, Geraden und Ebenen.[22] Ein *Axiom* ist dann „eine genaue und vollständige Beschreibung" (Hilbert [1903], S. 2) der '*Beziehungen*', die zwischen diesen Objekttypen eingeführt werden. Es sind also diese Relationen $R(x, y, \ldots)$ und ihre Termvariablen $x, y, \ldots$, die letztlich die zulässigen Objekte implizit definieren.

Ich will das am Beispiel der geometrischen Grundrelation

$$'x \textit{ liegt auf } y'$$

verdeutlichen.[23] Die Relation hat offenbar nur dann Bedeutung, wenn für 'x' Punkte $A, B, \ldots$ oder Geraden $a, b, \ldots$ und für 'y' Geraden oder Ebenen $\alpha, \beta, \ldots$ eingesetzt werden. Diese intuitive Vereinbarung zum Grundbereich der Relation wird nicht weiter thematisiert. Durch ein Axiom wird vielmehr derjenige Bedeutungsaspekt von

$$'A \textit{ liegt auf } a'$$

bestimmt, der für die Geometrie *grundlegend* ist. Und grundlegend heißt diese Bedeutung insofern, als weitere geometrische Sätze, in denen Lagebeziehungen zwischen Punkten und Geraden zum Ausdruck kommen, aus dem Axiom *folgen*. So besagt das erste *Inzidenzaxiom*:

> Zu zwei unterschiedlichen Punkten A und B gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade a, auf der beide Punkte '*liegen*'.

---

[21] Mathematische Durchführungen des impliziten Definierens sind bereits in der Geometrie von Moritz Pasch zu finden, von der Hilbert wesentlich beeinflusst wurde. (Man vergleiche Pasch [1882], S. 98; sowie Majer [2006a], S. 3; Hodges [2009], §2; und Suppes [1992], S. 226).

[22] Vergleiche Hilbert [1903], S. 2.

[23] In Hilbert [1903], S. 2, wird 'x bestimmt y' anstelle von 'x liegt auf y' definiert. Obiges Beispiel orientiert sich an der Rekonstruktion in Ewald [1974], S. 12.

Durch das Axiom wird nur diesem Merkmal der Eindeutigkeit der 'Liegen-auf'-Relation für Punktelemente und Geraden Bedeutung verliehen. Es wird insbesondere nichts darüber ausgesagt, was Punkte, Geraden usw. *sind*, sondern lediglich ihr Vorkommen in der 'Liegen-auf'-Relation verleiht diesen Objekten Bedeutung. In diesem Sinn sind die Relation und die Objekte ihres Gültigkeitsbereichs 'eingewickelt' in ein Axiom, das als inhaltliches (informelles) Satzgefüge *keine explizite Trennung* zwischen einem Definiens und einem Definiendum zeigt.[24]

Implizites Definieren ist also der Versuch, einen Term, der einen Begriff in das Axiomensystem einführt, durch mathematisch notwendige oder als notwendig erkannte Eigenschaften und Beziehungen zu charakterisieren. Die Schwierigkeit besteht dabei im Identifizieren dieser wesentlichen, für die Theorie tragfähigen Beziehungen zwischen den Termen. Immerhin soll das Axiomensystem so 'vollständig' sein, dass alle bekannten und bewährten Theoreme der Theorie aus den Axiomen gefolgert werden können.

Übertragen auf die Mechanik umfasst implizites Definieren nicht nur die Aufstellung der gesetzesartigen Gleichungen: dass etwa das Kraftgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ gelten soll. Sondern die identifizierten Grundbegriffe sind durch allgemeine *Funktionszuordnungen* miteinander zu verknüpfen, wodurch sie (nach modelltheoretischer Lesart) ein fester Bestandteil der *logischen Struktur* der Theorie werden. So ist etwa 'Punktmasse' kein explizit definiertes Objekt, sondern durch eine Zuordnung bestimmt, zwischen einem geometrischen Punkt eines ausgewählten Koordinatensystems und einer reellen Zahl, dem Wert der Masse.[25] Der reelle Zahlenkörper und der Euklidische Vektorraum gehören also hintergründig zur logischen Struktur der Klassischen Mechanik.

Diesen funktionellen Sinn des impliziten Definierens übernimmt Georg Hamel für seine Grundlagen der Klassischen Mechanik:

> „Reine Logik gibt nur eine Form, die verschiedenen Inhalt haben kann. Es ist ja z.B. der ganze Sinn der mathematischen Physik, Erfahrung resp. Anschauungsbegriffe durch Zahlen zu *ersetzen*, und eine Differentialgleichung kann verschiedenen physikalischen Inhalt haben. Ich nehme also im folgenden das Wort *Axiom* durchaus im *Hilbert*schen Sinne: es sind nichtbeweisbare Äußerungen über Begriffe, die durch die Axiome erst in *dem ganzen Umfang* ihrer logischen Abhängigkeit [eigene Herv.] festgelegt werden (z.B. absoluter Raum, absolute Zeit, Kraft, Ursache, Masse)." (Hamel [1909b], S. 358).

[24] So umschrieben in Kambartel [1968], S. 166. Nach Gabriel [1972], S. 39, geht das implizite Definieren auf J. D. Gergonne zurück. „Eine implizite Definition nennt er ein System von Aussagen, [...], in denen Wörter mit bekannter und solche mit unbekannter Bedeutung vorkommen".

[25] Man vergleiche hierzu die axiomatischen Darstellungen der Punktmechanik nach McKinsey u. a. [1953] und Hamel [1927].

An dieser Stelle bleibt unklar, wie eine Axiomatisierung 'vollständig' sein kann oder 'in dem ganzen Umfang' die funktionalen Abhängigkeiten der Grundterme festlegen kann. Erst Alfred Tarski hat letztlich durchschaut, dass die Vollständigkeit von Begriffen und die logische Vollständigkeit von Axiomensystemen keine einfache Behauptungen sind, sondern dass sie an komplizierte metamathematische Konventionen geknüpft sind.[26] Sie bleiben zunächst unbewiesene Hypothesen. Das muss aber dem Axiomatisierungsanspruch keinen Abbruch tun: Wer zeigen kann, dass alle bislang bekannten und bewährten Gesetzesformen eines Theoriegebietes Folgerungen der Axiomgruppe sind, kann durchaus in einem einfachen Sinn von 'vollständig' sprechen.[27] Genau so ist der Begriff von Hilbert und Hamel verwendet worden.

Die rationale Reorganisation von empirischen Theorien

In der systemischen, begrifflichen Analyse unterscheidet sich die Tätigkeit des axiomatisch denkenden Mathematikers von der eines Naturforschers, dem es vielmehr darum geht, neue empirische Phänomene und Zusammenhänge zu entdecken und mithilfe von Gesetzen zu erklären.

> „Unter der axiomatischen Erforschung einer mathematischen Wahrheit verstehe ich eine Untersuchung, welche nicht dahin zielt, im Zusammenhang mit jener Wahrheit *neue* oder allgemeinere Sätze zu *entdecken* [eigene Herv.], sondern die vielmehr die Stellung jenes Satzes innerhalb des Systems der bekannten Wahrheiten und ihren logischen Zusammenhang in der Weise klarzulegen sucht, dass sich sicher angeben lässt, welche Voraussetzungen zur Begründung jener Wahrheit notwendig und hinreichend sind." (Hilbert [1903], S. 88)

Aus axiomatischer Sicht sind Rekonstruktionen *systemisch* motiviert. Die in einer Theorie oder sogar in einer Theoriengruppe zusammengefassten Gesetze werden durch die Axiomatik so restrukturiert, dass sie einem einheitlichen, abstrahierten Begriffsmuster angepasst sind.[28] Das setzt bereits voraus, dass der untersuchte Rahmen vorstrukturiert und bewährt sein muss, damit die konzeptuelle und systemische Rekonstruktion überhaupt greifen kann.[29] Andernfalls, so die Erklärung in Hilbert [1900a], S. 273, wäre man

[26] Siehe dazu Tarski [1935c] und Tarski [1936], insbes. S. 475.

[27] Für diesen einfachen Gebrauch von Vollständigkeit in Abgrenzung zur logischen Vollständigkeit und zur Begriffsvollständigkeit (Kategorizität) hat Mario Bunge den Begriff der 'primitive-completeness' (oder 'p-completeness') vorgeschlagen. Siehe dazu Bunge [1967a], S. 64, und Bunge [1967b], S. 471.

[28] Zudem heißt es in Hilberts Vorlesung ≫Natur und mathematisches Erkennen≪ von 1919/20 (Hilbert [1992], S. 36): „Bei dieser fortschreitenden Systematisierung wird man dazu genötigt, sich in den Begriffsbildungen immer weiter von der unmittelbaren Beobachtung zu entfernen."

[29] „Jene [...] Gesetze bilden nicht das Endziel, sondern vielmehr nur den notwendigen Ausgangspunkt, bei welchem erst eigentlich die theoretische Problemstellung einsetzt." (Hilbert [1992], S. 36)

ständig zu einer Veränderung der theoretischen Annahmen gezwungen, was der Bedingung zu einer sinnvollen Anwendung der axiomatischen Methode gänzlich widersprechen würde.

> „Der Physiker sieht sich oftmals durch die Ergebnisse seiner Experimente gezwungen, zwischendurch und während der Entwicklung seiner Theorie neue Annahmen zu machen, [...] ein Verfahren, welches beim streng logischen Aufbau einer Theorie nicht statthaft ist".[30]

Nach Hilbert bezieht sich die axiomatische Methode in Anwendung auf die Physik vorrangig auf die begrifflich-konstitutive Seite der Theorie. Die Analyse der empirischen, hypothetischen oder prognostizierenden Seite einer physikalischen Theorie kann nicht zum Ziel führen. Die Theorie muss sich *bewährt* haben, der empirisch-hypothetische Inhalt der Theorie muss sicher *vorausgesetzt* werden können. Das heißt, damit die Axiomatisierung dem funktionellen Zusammenhang zwischen Grundbegriffen offen legt, muss ein *intuitives* Verständnis der Begriffe bereits vorhanden sein.[31] Ich werde auf diesen kritischen Punkt des empirischen Inhaltes auf Seite 53 (Abschnitt 2.3.8) zurückkommen.

Ein weiterer kritischer Aspekt der Axiomatisierung zeigt sich bereits: Es ist die Frage, was durch Rekonstruktionen *erklärt* wird. Selbst wenn die Vereinheitlichung zu einem deduktiven, kompakten System als ein Moment des Erklärens aufgefasst wird, so bleibt unklar, ob die axiomatische Methode neue Aussagen über die mechanische Natur hervorbringen kann. Auch dieser Frage wird an späterer Stelle (Abschnitt 2.7) nachzugehen sein.

2.3.2 'Tieferlegung der Fundamente'

Hilberts Bild vom 'Fachwerk der Begriffe' lässt bereits erkennen, wie die Axiomatik als Methode (und nicht bloß als Sichtweise) auszusehen hat. Es geht um die Konstitution sicherer, eindeutiger und voneinander unabhängiger Grundbegriffe, die in der Lage sind, das Ganze des mehr oder minder abgeschlossenen Theoriegebäudes zu tragen.

Ich möchte nun auf die deduktive und die reduktive Funktion der modernen Axiomatik zu sprechen kommen, die noch bei Hilbert untrennbar zusammengedacht werden, aber eigentlich zwei entgegengesetzten Richtungen entsprechen, die man innerhalb eines Begriffssystems einschlagen kann.[32]

---

[30] Man vergleiche auch mit einem Brief an Frege in Frege [1976], S. 67.

[31] Siehe dazu auch Majer [2006a], Seiten 158 und 176; sowie Hintikka [2009], S. 74.

[32] Man findet die beiden Funktionen nicht nur bei Hilbert, insbesondere in Hilbert [1992], S. 18 f.; sie sind bereits zentrale Motivationen von Gottlob Frege zu seiner ≫*Begriffsschrift*≪, die bekanntlich die logische Begriffsanalyse revolutioniert hat. (Man vergleiche insbesondere Frege [1879], Seiten X, XIII, 3 und 25.) Übersetzt in präzise semantische Konzeptionen, beinhalten sie auch heute die wesentlichen Anforderungen an ein axiomatisches System, so etwa in Hintikka [2009], S. 74.

(i) Die deduktive vernetzende Funktion: Das ist die Untersuchung der *logischen Reichweite* einer Axiomgruppe 'nach vorn'. Die motivierende Frage wäre hierbei: Welches *Maximum* an Theoremen folgt aus provisorisch angenommenen Grundbegriffen und -gesetzen? Sind die Folgerungen logisch eindeutig? Welche Sätze folgen dagegen nicht aus den Axiomen, bzw. welche Zusatzannahmen sind dafür nötig?

(ii) Die reduzierende zerlegende Funktion: Das ist die 'rückwärts gewandte' Untersuchung der Axiome und Grundbegriffe nach einem *Minimum an irreduziblen Aussagen und Formen*. Welche versteckten Annahmen macht ein Axiom? Gibt es Begriffe in den Axiomen, die mehrdeutige oder voneinander abhängige Unterbegriffe enthalten?

Dieser funktionelle Unterschied wird so treffend wie scharfsinnig von Kazimierz Ajdukiewicz hervorgehoben, neben Tarski und Lukasiewicz der dritte einflussreiche Vertreter der *Lemberg-Warschauer Logikschule*.[33] In Ajdukiewicz [1960] werden *deduktive* von *reduktiven Axiomensystemen* unterschieden. Sie entsprechen entgegengesetzen Blickrichtungen, Schlussweisen ('inferences') vom Grund zur ihren Folgen und zurück von einer Folge zu ihren möglichen Gründen. Während in der deduktiven Schlussweise das System als Ganzes in den Mittelpunkt gerät, ist es in der reduktiven Richtung eher der einzelne grundlegende Begriff, der auf seine definierenden Merkmale hin untersucht wird.

> „For one that examines their [d.i. 'of axiomatic systems'] methodological structure, the question is to establish the *proteron pros hêmas*, i.e. that which is asserted first and provides the motive for the rest. On the contrary, for one that examines the metascientific structure of the systems, the question is to find the *proteron tê physei*, i.e. that from which the rest results by the rules of transformation or, in other terms, the reason from which, by these rules, the consequence follows." (Ajdukiewicz [1960], S. 211)

Die deduktiven Axiomensysteme zeichnen sich dadurch aus, dass die Axiome eine begründete Struktur bilden, aus der die Theoreme nacheinander gefolgert werden. Sie kommen vorrangig in der Mathematik zur Anwendung. In reduktiven Axiomensystemen herrscht dagegen eine umgekehrte Blickrichtung vor. Anerkannte Theoreme sind die 'provisorische Grundlage' dafür, die Axiome inhaltlich weiter in mehrere irreduzible Teilaxiome zu

[33] Die Lemberg-Warschauer Schule als analytische Strömung des beginnenden 20. Jh. teilt mit dem Wiener Kreis die Präferenz der logischen Analyse als Mittel des erkenntnistheoretischen Fortschrittes, schwächt aber dessen epistemologische Grundsätze ab. So lehnten ihre Vertreter die Syntax der Sprache als einziges Objekt der Philosophie entschieden ab und sprachen sich für einen offeneren Umgang mit metaphysischen Entitäten aus. Über Tarski hatte die Lemberg-Warschauer Schule einen mittelbaren Einfluss auf die Stanford-Berkeley Schule des Semantic Views. (Man vergleiche insbesondere Peirce und Woleński [1987].)

zerlegen.[34] Nach Auffassung von Ajdukiewicz sind Axiomatisierungen von physikalischen Theorien in erster Linie reduktiv, sofern „from these [d.i. 'general empirical'] laws we draw the theoretical principles, which are by no means their consequences but, on the contrary, their reasons"(Ajdukiewicz [1960], S. 212). Prinzipien können, modern aufgefasst, immer nur in einem *provisorischen* Sinne grundlegend sein, sowohl in ihrer Position als Systemelement neben anderen Prinzipien als auch in ihrer empirischen Bedeutung.

Ajdukiewiczs Erläuterung des axiomatischen Denkens macht deutlich, was Hilbert mit der noch folgenden Metapher *'Tieferlegung der Fundamente'* zum Ausdruck bringen will. Es sind diese zwei Richtungen, die oft in den Grundlagen der Mechanik untrennbar miteinander verwoben sind. Ein deduktiver Fortschritt „beruht dann lediglich in dem weiteren logischen Ausbau des schon aufgeführten Fachwerkes der Begriffe" (Hilbert [1917], S. 406), das durch 'grundlegende Sätze' bzw. 'Axiome' gestützt wird. Das logische 'Ausbauen' meint die Verknüpfung bestehender Sätze nach *herkömmlichen Schluss- und Folgerungsregeln*. Die logischen Beziehungen zwischen gültigen Sätzen sollen enger und fester geknüpft werden, damit die *deduktiven Abhängigkeiten und Voraussetzungen* der einzelnen Gesetze und Theoreme deutlicher hervortreten. Das Ideal dieses Vorgehens wäre dann die Lückenlosigkeit der logischen Beweisstruktur in einem Axiomensystem, an dessen Ende die logische Vollständigkeit des axiomatisierten Systems steht. Die logischen Lücken werden minimiert, bei gleichem Begriffs- und Gesetzesumfang.

Das Schließen von deduktiven Lücken in einem Satzsystem lässt also erkennen, dass die logischen Schlüsse

> „im Grunde nur die Zurückführung auf gewisse tiefer liegende Sätze ermöglichen, die nunmehr ihrerseits an Stelle der zu beweisenden Sätze als neue Axiome anzusehen sind. [...] Das Verfahren der axiomatischen Methode [...] kommt also einer *Tieferlegung der Fundamente* der einzelnen Wissensgebiete gleich, wie eine solche ja bei jedem Gebäude nötig wird in dem Maße, als man dasselbe ausbaut, höher führt und dennoch für seine Sicherheit bürgen will." (Hilbert [1917], S. 407).

Ein Axiom ist kein statisches, unantastbares Residuum in einem Satzsystem, sondern kann sich als prinzipiell austauschbar und weiter reduzierbar erweisen. *Die Minimierung der Zahl an unabhängigen Axiomen*, die eine Theorie (oder ein Teilgebiet derselben) 'abdecken' können, ist dann ein Kriterium für den Erfolg der axiomatischen Methode. Entsprechend wird zum Vorgehen am sechsten Problem vorgeschlagen,

> „[...] zunächst durch eine geringe Anzahl von Axiomen eine möglichst allgemeine Klasse physikalischer Vorgänge zu umfassen und dann

[34] Man vergleiche Ajdukiewicz [1960], S. 211.

> durch Adjunktion neuer Axiome der Reihe nach zu den spezielleren Theorien zu gelangen" (Hilbert [1900a], S. 272).

Damit werden die begrifflichen, definitorischen Lücken und Unklarheiten minimiert, beim Gleichbleiben der systematisch-deduktiven Parameter.

Schematische Darstellung

Obige Zitate von Ajdukiewicz und Hilbert zeigen, dass die 'Tieferlegung' des theoretischen Fundamentes zwei Schritte beinhaltet, einerseits einen vernetzenden Schritt, andererseits eine zerlegenden Schritt. In dem ersten Schritt ist eine kleine Axiomgruppe A_0 zu finden, aus der die Menge an Theoremen T deduktiv erschlossen werden kann.[35] Bezeichne '$\Rightarrow$' eine informelle Folgerung, so ist der erste Schritt schematisch:

$$A_0 \Rightarrow T.$$

Auf diesen deduktiven Minimierungsprozess der gewöhnlichen Axiomatik schließt sich der *wesentliche Fundierungsschritt* der axiomatischen Methode an, der oft nicht beachtet wird. Die Axiomgruppe A_0 selbst wird auf mögliche überflüssige Annahmen, reduzierbare Elemente etc. hin untersucht. Sie wird in eine *Vielzahl* an *speziellen* Axiomen und Gruppen A_1, $A_2, \ldots$ *zerlegt*, um zu prüfen, ob A_0 selbst ein letztes Fundament darstellt:

$$(A_1, A_2, \ldots A_n \Rightarrow A_0) \Rightarrow T.$$

Diese neuen Axiome können wiederum aus anderen theoretischen Gebieten stammen und so das Theorielement T mit anderen mathematischen Disziplinen vernetzen. Maximierung von lückenlosen Deduktionsketten und Minimierung von Definitionslücken sind die zwei gegenseitigen Pole der Axiomatisierung, die iterativ durchlaufen werden.[36]

Tieferlegung der Grundlagen der Mechanik

Zu diesem zweiten reduktiven Fundierungsschritt findet man in Hilbert [1905] eine bemerkenswerte Erläuterung, die sich unmittelbar auf die Grundlagen der Mechanik bezieht.[37] Genauso wie man die elementare Geometrie algebraisch aus dem reellen Zahlenkörper als Axiomgruppe modellieren kann, lassen sich auch die Lagrangeschen Differentialgleichungen 'an die Spitze' stellen, wie es gewöhnlich getan wird, um die gesamte Klassische Mechanik zu gewinnen.

---

[35] Bei Bestehen einer Folgerungsbeziehung zwischen A_0 und T spricht man von einer *Theorie* im logisch-deduktiven Sinn (siehe etwa Monk [1976], S. 208, sowie hier Anhang B.2.3).

[36] Die Gegenüberstellung von deduktiven und begrifflichen Merkmalen hebt sich in *modellvollständigen* ('kategorischen') Axiomensystemen auf. Diese tiefgreifende Einsicht ist erstmals in Tarski [1935c] zu finden, die bereits gefestigte Konventionen von logischen Systemkalkülen voraussetzt. Trotz des dort auf Seite 97 skizzierten Optimismus, auch in der Mechanik modellvollständige Systeme zu finden, bleibt dieser Bereich der logischen und begrifflichen Vollständigkeit eines mechanischen Systems im 20. Jahrhundert rein spekulativ.

[37] Man vergleiche auch Corry [2004], S. 139 und S. 145.

> „Man verzichtet damit jedoch auf die ganz ungeheure mathematische Fruchtbarkeit der axiomatischen Methode, auf die ich stets besonders [hinwies]; sie beruht wesentlich darauf, daß man *einzelne kleine Axiome hat und ihre Beziehungen untersucht* [eigene Herv.]." (Hilbert [1905], S. 119)

Das heißt, die 'Tieferlegung' beinhaltet nicht das Festhalten an allgemeinen Gesetzmäßigkeiten, die eventuell zu viele unnötige Annahmen in sich bergen: „[...] *man setzt hier viel zu viel voraus*" (ebd., S. 120, in eigener Herv.). Sondern sie beinhaltet die Zerlegung „der Zusammenhänge in diesem Unterbau" (ebd., S. 120). Der einheitliche und sichere Formalismus wird somit durch eine deduktive 'innere' Tiefenstruktur ergänzt, in der weniger unbekannte Parameter auftreten.

Diese Erläuterung Hilberts trifft meines Erachtens den entscheidenden Beweggrund, warum man überhaupt eine empirische Theorie wie die Mechanik axiomatisch behandelt. Die meisten Grundlagenforscher, die Hilbert nachweislich beeinflusst haben (Boltzmann, Hertz, Volkmann u.a.), sehen in der reduktiven Funktion den eigentlich sinnvollen Gebrauch der axiomatischen Methode. Wir finden sie bei Pierre Duhem[38], bei Heinrich Hertz[39] oder bei Carl Neumann. Besonders in Neumann [1870] wird dieser reduktive Aspekt eindrucksvoll am Trägheitsprinzip nach Galilei demonstriert. So bestehe das Prinzip im Grunde aus mehreren Teilprinzipien, die unterschiedliche Aspekte der räumlichen und zeitlichen Äquivalenz (implizit) definieren.[40] Mit Neumanns Zerlegung wird das Trägheitsprinzip auf 'tieferliegende' Existenzannahmen der Raum-Zeit-Struktur reduziert, repräsentiert durch den Euklidischen Vektorraum. Und in diesem Sinn werden auch später Hamel oder Noll die axiomatische Methode anwenden, um einzelne Merkmale der Klassischen Mechanik auf grundlegendere Gesetze zurückzuführen.

2.3.3 Grundlegen: logisches Repräsentieren statt Eliminieren

Eine Reduktion, wie sie nach der axiomatischen Methode verstanden wird, besteht ausschließlich in der logischen Ableitbarkeit aus allgemeinen Axiomen. Ein deduktives gegenüber einem reduktiven Axiomensystem unterscheidet sich dabei, wie gerade erläutert, alleine in der Blickrichtung von

[38] Vgl. Duhem [1908], Kap. VI §2: 'Eine primäre Qualität ist eine in der Tat, aber nicht von Rechts wegen irreduzierbare Qualität'.

[39] Siehe dazu vor allem Hertz [1894], dort mit dem ehrgeizigen Anspruch, die gesamte Mechanik auf eine verallgemeinerte Form des Gaußschen Minimalprinzipes zu bringen und den Kraftbegriff als explizite Definition vollständig zu eliminieren. „Um ihn [d.i. den 'ersten Erfahrungssatz der Mechanik'] gruppieren wir die übrigen allgemeinen Prinzipien nach ihrer Verwandtschaft zu ihm und untereinander, *als Folgerungen oder als Teilaussagen* [eigene Herv.]." (ebd., S. 33)

[40] Man siehe dort im Vorwort, Seite 3 f., sowie Pulte [2005], S. 428.

den Axiomen aus. Jede Axiomatisierung lebt in einem Spannungsfeld zwischen deduktiver Entfaltung und reduktiver Begrenzung. Keine Axiomatisierung kann deswegen abgeschlossen und endgültig erstarrt sein. Wir müssen im Gegenteil beim regressiven Zerlegen der mechanischen Prinzipien ihre *Vielseitigkeit in Darstellung und Bedeutung* erkennen. In diesem Sinn heißt es schon in Neumann [1870], S. 23:

> „Immer werden wir im Auge behalten müssen, dass diese Prinzipien etwas [...] *Bewegliches* sind; damit wir wo möglich in jedem Augenblick übersehen können, welche Wirkung eine *Änderung* dieser Prinzipien auf ganze Gestaltung der Theorie ausüben würde; [...] damit wir (mit einem Wort) die Theorie vor einer *Versteinerung*, vor einer *Erstarrung* zu bewahren im Stande sind".

In der wissenschaftsphilosophischen Diskussion kennt man viele Spielarten des Reduzierens einer spezielleren Theorie B auf eine allgemeinere Theorie A.[41] Ich glaube aber deutlich machen zu können, dass die 'reduktive Funktion' in der axiomatischen Methode und speziell in den Grundlagen der Mechanik (nach Hilbert, Hamel u.a) allein *epistemologisch* zu verstehen ist. Indem eine Reduktion auf allgemeinere Prinzipien *nachgewiesen* wird, oder indem Grenzübergänge und Brückengesetze zwischen mehreren Versionen eines Prinzips betrachtet werden, kann das *Wissen* über verschiedene *mögliche Zugänge* zur Theorie erweitert und gesichert werden.[42] Für die Grundlagenforscher besteht durchaus der Anspruch, die nachgewiesene Reduktion durch Axiome und gefolgerte Theoreme zu *repräsentieren*, idealerweise in logisch-mathematischer Form.

Patrick Suppes hat später diesen Repräsentationsaspekt zu Recht als das Hauptanliegen einer jeder Axiomatisierung angesehen.[43] Implizite Definitionen, Theoreme und Folgerungen aus den Axiomgruppen haben also ihre Berechtigung darin, die 'interne Architektur' einer Theorie offen zu legen und besser verständlich zu machen. Man versteht mehr von einem Bauwerk mit einem Blick auf den Bauplan des Architekten. Es werden weitere Blickrichtungen, weitere Zugänge *ergänzt*, um das jeweilige Gebiet ökonomischer zu gestalten.[44] Gut beobachtet ist dahingehend Suppes' Bemer-

[41] Ich möchte hier lediglich auf die kompakte Übersicht Hoyningen-Huene [2007] verweisen. Wichtig ist der Hinweis dort in Anm. 1, dass der Sprachgebrauch von Physikern und Wissenschaftsphilosophen nicht einheitlich zu sein scheint. Physiker verstehen die Reduktion eher in umgekehrter Richtung, von A nach B.

[42] Dabei sind solche Grenzfallbetrachtungen in erster Linie „von innerwissenschaftlichem Interesse", das Wissen darüber „mathematisch z.T. äußerst heikel" (Hoyningen-Huene [2007], S. 179). Auch in der Frage, wie rigoros diese Reduktionen durchgeführt werden müssen, herrscht zwischen Theoretikern der Physik, zwischen Mathematikern und Philosophen keine einheitliche Vorstellung. Siehe dazu ebd., S. 179.

[43] Siehe insbesondere Suppes [1988b], S. 254 ff., und Suppes [2002], S. 52 f. Dass nach Suppes' Vorstellung als Repräsentationsform die logische Modelltheorie und Mengenlehre herangezogen werden soll, ist dagegen eine unnötige und überzogene Forderung.

[44] Man vergleiche Hoyningen-Huene [2007], S. 186 zur 'retentiven Reduktion' und S. 187

kung, dass letztlich jedes Repräsentieren durch eine mathematische Form nichts anderes als eine 'Reduktion' darstellt, mit dem Ziel, einen konstitutiven Aspekt des Phänomens bewusst zu machen. Diese epistemologische Bedeutung von 'Reduktion' passt meines Erachtens zu der instrumentalistischen wie reflexiven Sicht derjenigen Grundlagenforscher, die sich der axiomatischem Methode bedienen. Und nur in diesem Sinne soll im Folgenden auch von 'Reduktion' gesprochen werden.

Keinesfalls hat Hilberts 'Tieferlegung der Fundamente' irgendeine *eliminative* Zielsetzung, wo die Vielfältigkeit der unterschiedlichen Repräsentationsweisen im Vordergrund steht: „[...] ist doch die Gleichberechtigung verschiedener Axiomensysteme stets von hohem prinzipiellen Interesse", wie es in Hilbert [1900a], S. 59, heißt.[45] Mit der axiomatischen Methode lässt sich bestenfalls untersuchen, ob es *im Prinzip möglich wäre*, Begriffe oder Grundgesetze eines mathematisch rekonstruierten Gebietes zu eliminieren.

> „[A] mathematician constructing his axiomatic system affirms neither axioms nor theorems, but takes a neutral attitude towards both [...]. In deducing theorems from axioms, the mathematician [...] effects not an actual, but only a potential deduction, the expression of which would be: if it were true that A, it would be true that B." (Ajdukiewicz [1960], S. 211 f.)

Wenn zum Beispiel Georg Hamel in den Grundlagen der Mechanik zeigt, wie aus den Grundgesetzen der Kontinuumsmechanik unter der *einschränkenden Randbedingung*, dass die inneren Spannungszustände keine Arbeit verrichten, die klassischen Systemmechaniken gefolgert werden können, dann handelt es sich um ein Repräsentationstheorem, das einen reduzierenden, aber keinen eliminierenden Sinn hat.[46] Natürlich argumentiert Hamel mit diesem Theorem für die Vorrangigkeit der Kontinuumsmechanik, zielt allerdings nicht darauf ab, die Punktmechanik zu eliminieren. Sie behält ihre volle Berechtigung in Anwendungsbereichen, in denen nur einfache Massenschwerpunkte betrachtet werden.

Geradezu verfehlt wäre es, die Eliminierbarkeit von Definitionen heranzuziehen, um zu unterstellen, man reduziere letztlich nur auf strukturell minimierte Theorien. Hier liegt eine Verwechslung von expliziter und impliziter Definition vor. Implizite Definitionen sind Axiome und führen strukturelle Merkmale der an sich undefinierten Grundbegriffe ein, während *explizite Definitionen* ('proper definitions') auf der Basis des Grundvokabulars neue Terme ergänzt. Aus logischer Sicht sind es nur die

zur 'reduktionistischen Position'.

[45] Siehe auch Suppes [2002], S. 53.

[46] Auf Hamels Theorem werde ich genauer in Abschnitt 3.7.5 eingehen. Zu einer modelltheoretischen Erklärung von 'Repräsentationstheorem' siehe Suppes [2002], S. 57, und Suppes [1988b], S. 259 f.

expliziten Definitionen, die einen analytischen Charakter haben, die nicht kreativ, nicht begriffserweiternd sind. Sie sind keine Axiome, weil sie nur zur terminologischen Vereinfachung dienen und jederzeit wieder eliminiert werden können.[47] Doch eine Theorie kann selbst vom logischen Standpunkt aus niemals allein aus expliziten Definitionen bestehen, was den Eliminationsvorwurf entkräftet. Als Beispiel aus den Grundlagen der Mechanik wäre nach Hamel der Energiebegriff in der Punktmechanik eine explizite Definition. Er dient dort (und nur dort) zur Vereinfachung der kinetischen Aufgabe, die wirkenden Systemkräfte aufzufinden.[48]

Die Tieferlegung im Sinne Hilberts hat nach allem, was ich sehen kann, auch nicht zum Ziel, *ontologische* Entscheidungen in den Grundlagen zu erzwingen. Wenn in der Klassischen Mechanik der *Gegensatz zwischen Punkt- und Kontinuumskonzeption* besteht, dann in einem konventionalistischen Sinn: Es kann sowohl die eine als auch die andere Konzeption als Grundlage zum Aufbau der Klassischen Mechanik dienen. Deshalb halte ich es auch für missverständlich und verfehlt, wenn diese Grundlagendiskussion auf 'ontologische' Unterschiede zurückgeführt wird.[49] Ich spreche im Folgenden neutraler von 'Zugängen', 'Sichtweisen', 'Konstruktionen' und 'Anschauungen', wie schon Hilbert, Hamel, Truesdell, Suppes und andere, die von der axiomatischen Methode überzeugt waren.

2.3.4 Metamathematische Untersuchungen

Die axiomatische Behandlung einer Theorie zeigt einen meta-mathematischen Charakter, ganz im Sinn der griechischen Präposition $\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}$ als zeitliches 'nachher'.[50] Als System von gültig angenommenen Satzelementen kann die Theorie in einem nachfolgenden Schritt auf systemische Kriterien überprüft werden:

(i) „*erstens* soll es [d.i. das Fachwerk an Begriffen] einen Überblick über die *Abhängigkeit* bzw. *Unabhängigkeit* der Sätze der Theorie",

(ii) „und zweitens eine Gewähr der *Widerspruchslosigkeit* aller Sätze der Theorie bieten." (Hilbert [1917], S. 407).

[47] Siehe etwa Suppes [1957], S. 154, als logisches Theorem auch Monk [1976], S. 209.

[48] Hierauf gehe ich genauer in Abschnitt 3.7.4 ein.

[49] Das ist aktuell in Wilson [2013] der Fall.

[50] Der Begriff 'Metamathematik' geht auf Hilbert zurück. In Hilberts Schriften zu den Grundlagen der Mathematik bezieht sich der Begriff allerdings bereits auf das umfassende Programm, die elementare Mathematik auf *absolute* Widerspruchsfreiheit hin zu untersuchen. Das ist Hilberts Programm der 'finiten Beweistheorie' (vgl. Shapiro [1994]). Die Metamathematik, von der in diesen Passagen die Rede sein wird, betrifft dagegen den *engeren* Bereich der *strukturrelativen* Metamathematik, auf der die gesamte *Modelltheorie* basiert. Theorien und ihre Modelle (Realisierungen) werden hiernach nur *relativ zu* vorgegebenen Strukturen untersucht. Zu dieser Unterscheidung, die man immer bei Hilberts Werk beachten muss, siehe auch Shapiro [2005], S. 70.

Mit Blick auf Hilberts ≫*Grundlagen der Geometrie*≪ (Hilbert [1903]) zeigt sich die besondere Leistung darin, dass dort eine *informelle Semantik* vorgeschlagen wird, nach der die Konsistenz und Unabhängigkeit der geometrischen Axiome bewiesen wird.[51]

> „Die Axiome [der Euklidischen Geometrie] stehen miteinander nicht im Widerspruch; d.h. es ist nicht möglich, durch logische Schlüsse aus denselben eine Tatsache abzuleiten, welche einem der aufgestellten Axiome widerspricht. Um dies einzusehen, genügt es, eine Geometrie anzugeben, in der sämtliche Axiome [...] erfüllt sind." (Hilbert [1903], S. 18)

Der Nachweis der Unabhängigkeit der geometrischen Axiome wird entsprechend informell behandelt:

> „Wir werden die Unabhängigkeit [eines Axioms] erkennen, indem wir den Nachweis führen, dass [... dieses Axiom] durch logische Schlüsse nicht aus den übrigen Axiomen [...] abgeleitet werden kann." (ebd., S. 20)

Beachtlich ist, dass diese beiden metamathematischen Ideen, die erst später in der vollen Entwicklung der formalisierten Semantik nach Tarski präzisierbar waren, bereits zu Beginn des 20. Jahrhunderts den Anspruch an axiomatischer Genauigkeit ausmachen sollten. Und so sind Hilberts ≫Grundlagen≪ auch ein prominentes Beispiel dafür, wie *im Gebrauch*, in der Beweispraxis, die grundlegenden Ideen einer logischen Disziplin, der *Modelltheorie*, eingeführt wurden.[52]

(iii) In Hilbert [1903], S. 1, wird wiederum eine Art '*Vollständigkeit*' des Axiomensystems gefordert: dass aus den Axiomen alle elementaren Sätze und Theoreme der Geometrie folgerbar sein sollen.[53] Das 'ganze Fachwerk' soll errichtet werden.[54]

Historisch bemerkenswert ist, dass Hilbert den Vollständigkeitsaspekt *axiomatisch* fordert, in Form seines 'Vollständigkeitsaxioms'.[55] Ohne semantische Rekonstruktion bietet dieses Axiom aber keine deduktive Sicherheit: Die Vollständigkeit, als logische Konvention verstanden, bleibt unbewie-

[51] Man vergleiche vor allem mit Sauer [1999], S. 6.

[52] So dargestellt in Grattan-Guinness [2000a], S. 161; Hodges [2009], Kap. 2; oder auch Blanchette [2009], Kap. 1 und 2.

[53] So verstanden in Corry [2006], S. 11.

[54] So das Zitat hier auf Seite 25.

[55] „Die Elemente (Punkte, Geraden, Ebenen) der Geometrie bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist" (Hilbert [1903], S. 16).

sen, eine Hypothese.[56] Ein präzises semantisches Verständnis der 'logischen Vollständigkeit' wird erst später durch Tarskis Wahrheitssemantik und dem darauf aufbauenden logischen Folgerungsbegriff erreicht.[57] Den Vollständigkeitsaspekt eines Axiomensystems zu untersuchen ist nicht zuletzt das entscheidende Motiv für den Übergang von einem informellen Begriffssystem hin zu einer *formalisierten* Semantik der Begriffe.

Das Vollständigkeitsproblem in der Geometrie überträgt sich unmittelbar auf die Grundlagen der Mechanik. Wann immer dort von 'vollständiger' Axiomgruppe, von 'vollständigen Begriffen' oder von 'abgeschlossenen Theorien' gesprochen wird, bleibt dies eine Vermutung. Darauf wurde schon auf Seite 32 in Abschnitt 2.3.1 hingewiesen. Es gibt im Gegensatz zur elementaren Geometrie auch deutliche Hinweise darauf, dass keine positiven Resultate zur logischen Vollständigkeit der Klassischen Mechanik möglich sind, nicht einmal zur einfachen Punktmechanik.[58]

Damit lässt sich an dieser Stelle schon der Wert einer metamathematischen Untersuchung hinterfragen. Inwiefern verstehen wir eine Theorie besser? Was *erklären* wir durch Metamathematik? Anstatt einer zu allgemeinen und verfälschenden Diskussion möchte ich bei der Mechanik bleiben und zunächst nur untersuchen, ob und wie dort überhaupt Metamathematik verfolgt wurde.

2.3.5 Ein Blick auf die Grundlagen der Mechanik

Die metamathematische Ausrichtung der Hilbertschen Axiomatik findet sich durchaus im Werk Georg Hamels zur Klassischen Mechanik wieder. Hamels lebenslange Bemühung um eine einheitliche Darstellung der Klassischen Mechanik zeigt sich allein darin, dass sich alle Veröffentlichungen zu den Grundlagen an Hilberts Axiomatik orientieren.[59] Während im kommenden Kapitel 3 die physikalischen Antworten auf das Hilbertsche Problem untersucht werden, soll hier nunmehr die rein methodologische Reichweite der Axiomatisierung betrachtet werden, die bei Hamel eine so entscheidende Rolle spielt.

Bemerkenswert ist zunächst Hamels Vorsicht bei der möglichen Reichweite des axiomatischen Verfahrens auf empirischem Gebiet. Wie weit reicht die logische Analyse der Prinzipien der Mechanik? - Hamels Vorschlag zielt darauf, die deduktive Ordnung informell zu behandeln und hinter den mechanischen Forschungsgegenstand zu stellen.

---

[56] Man vergleiche Mancosu u. a. [2004], S. 10. Das geometrische Vollständigkeitsaxiom Hilberts mit der logischen Vollständigkeit zu verknüpfen und der Euklidischen Geometrie diese auch im strengen Sinne nachzuweisen, ist eine der hervorragenden Leistungen Alfred Tarskis; siehe dazu vor allem die Ergebnisschrift Tarski [1959].

[57] Man vergleiche Hintikka [2009], S. 74; Jané [2006], S. 29, und Mancosu u. a. [2004], S. 9.

[58] Siehe vor allem Montague [1962] sowie DaCosta und Doria [1991].

[59] Hamels hauptsächliche Veröffentlichungen zu den Grundlagen sind auf Seite 137 in Teil 3.6 angegeben.

> „Aber es war nie das Streben zu einem rein logischen Aufbau maßgebend, derart, dass alle Annahmen klar ausgesprochen und ihre Abhängigkeit untersucht worden wäre.“ (Hamel [1927], S. 1)

Vielmehr sollen die Axiome

> „hinreichen, die in Behandlung stehende Wissenschaft zu begründen, soweit es sich um allgemeine Sätze dieser Wissenschaft handelt. Es dürfen also nicht unausgesprochene Voraussetzungen in den Beweisen allgemeiner Sätze unterlaufen.“ (Hamel [1912], S. 7).

Und an anderer Stelle heißt es:

> „[Die Axiome] müssen ausreichen, das Gebäude der Wissenschaft in seinen wesentlichen Teilen aufzurichten.“ (Hamel [1967a], S. 2).

Kriterien der Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit innerhalb eines Axiomensystems werden also auf die 'allgemeinen' Sätze, die Grundgesetze der Theorie, relativiert. So vage diese Umschreibung auch sein mag, verdeutlicht sie doch die Ansicht, dass die enorme Komplexität der Mechanik einen eher zwingen wird, bei der logischen Begriffsanalyse zu bleiben als zu der metamathematischen Prüfung aufzusteigen. Die Fülle an Hintergrundannahmen aus der Geometrie, Analysis und Algebra, die Behandlung von Randbedingungen zu Gesetzesschemen, die Idealisierungen zu den Grundbegriffen führen automatisch zu mehr Bescheidenheit als noch bei der Axiomatisierung der Euklidischen Geometrie. So heißt es auch einleitend in Hilbert [1906], S. 4:

> „Die Tatsachen sind eben hier [d.i. in der Mechanik] viel komplicierter, als in der Geometrie, und noch nicht so geklärt, so dass von einem festen [...] axiomatischen Aufbau noch nicht die Rede sein kann. Allerdings müssen wir streben, auch die Mechanik zu einer vollkommen axiomatisierten, *rein* mathematischen Wissenschaft zu machen, und das ist ja wohl auch das Ziel ihrer Entwicklung; kann man ja doch [...] die Höhe der Stufe, auf der eine Wissenschaft steht, *nach dem Maße der Anwendung der Mathematik in ihr* [eigene Herv.] beurteilen.“

Hamel steht diesem Bekenntnis in nichts nach. An Fragen der Metamathematik auf dem Gebiet der Naturwissenschaften könne

> „nicht eher gedacht werden, als bis Physik und Chemie abgeschlossene, einer aprioristischen Untersuchung fähige Disziplinen geworden sind.“ (Hamel [1909a], S. 352)

Sowohl in Hilberts als auch in Hamels Äußerung wird deutlich, dass der Erfolg der axiomatischen Methode auf empirischem Gebiet der Naturwissenschaften davon abhängt, wie mathematisch die Grundbegriffe und -gesetze gefasst sind. Die impliziten Definitionen müssen den *funktionalen*

Umfang des Begriffes erfassen, um der Metamathematik zugänglich zu werden und das Gebiet aus axiomatischer Sicht 'abzuschließen'.[60] Anders als Hilbert hat Hamel hierfür ein recht eigentümliches Verständnis von 'a priori' eingeführt und wie oben von einem 'aprioristischen' Vorgehen in der Axiomatik gesprochen: Die Axiome müssen denjenigen Anteil der Gesetze beschreiben, der „vor aller Erfahrung, a priori, wie Kant sagt," (Hamel [1912], S. 4) liegt. Hierauf werde ich noch gesondert im nächsten Kapitel (Abschnitt 3.6.2) eingehen. Auch von Truesdell wird die rationale Mechanik wie eine gedankliche Tätigkeit a priori verstanden. Dies wird etwa in folgender Passage deutlich:

> „Forces and torques, like bodies, motions, and masses, are primitive elements. They are mathematical quantities introduced *a priori*, represented by symbols, and subjected to mathematical axioms that *delimit their properties* [eigene Herv.] and render them clear and useful for the description of mechanical phenomena in nature." (Truesdell [1991], S. 151)

Meines Erachtens ist dieses Begrenzen der Grundbegriffe durch mathematische Ausdrucksformen - durch Funktionen, analytische und logische Operatoren - gleichbedeutend mit Hilberts 'Mathematisieren' und mit Hamels 'Apriorisieren'. Es bleibt dennoch unklar, ob Hamels Gebrauch mit der Kantischen Wendung einer 'Erkenntnis a priori', die unabhängig von der sinnlichen Erfahrung gewonnen ist, noch übereinstimmt.[61] Deutlicher als Hilbert legt Hamel allerdings größten Wert darauf, dass sich die Mechanik als eigenständige *synthetische* Wissenschaft *nicht* in dem mathematisierten Begriffsrahmen erschöpft. Die axiomatische Konzeption der mechanischen Grundbegriffe zu einem Begriffsschema a priori ist nur ein Teil der rationalen Mechanik, ohne hierauf reduzierbar zu sein.[62]

Dennoch zählen für Hamel die metamathematischen Fragen der Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit der Axiome noch voll zur axiomatischen Methode. Er selbst hat Ergebnisse hierzu erzielt: zu der Widerspruchsfreiheit des Systems der starren Körper und zu der Unabhängigkeit des von Hamel so genannten 'Boltzmannschen Axioms'. Hierauf gehe ich im folgenden Kapitel ausführlich ein. Interessant ist, dass die metamathematische Dimension im axiomatischen Werk Nolls und Truesdells dagegen *ausgelassen* wird, ja nicht einmal Erwähnung findet. Es ist ein erneuter

[60] Man vergleiche hier Abschnitt 2.3.1. Man spricht dabei auch von der *Extension* des Begriffs.

[61] Man vergleiche etwa Moser [1998]. Der Begriff 'Apriorismus', entstanden in der neukantianischen Tradition, bleibt ein vages Leitwort für einen logisch-systematischen Erkenntnisgewinn, der sinnlicher Wahrnehmung vorausgeht, und damit für eine Gegenposition zum Empirismus (siehe dazu Halbfass [1971]). Diese Umschreibung trifft auf Hamels 'Apriorisieren' durchaus zu.

[62] Auf dieses Verständnis von 'synthetisch' komme ich in den Abschnitten aus Teil 3.4 zurück, mit Bezug zu Hamel dann in Abschnitt 3.6.3.

Hinweis darauf, dass die metamathematischen Ziele erst *regressiv* gesetzt werden: wenn die Theorie - in diesem Fall die Kontinuumsmechanik - im Wesentlichen aufgestellt ist.[63]

Es zeigt sich, dass die metamathematische Untersuchung in den Grundlagen der Mechanik eine *übergeordnete* und *abschließende* Rolle einnimmt. Vielmehr haben die begriffskonstitutive und deduktive Funktion der axiomatischen Methode, wie eingangs (Abschnitt 2.3) genannt, in den Grundlagen der Mechanik Vorrang. Problematisch sind metamathematische Zielsetzungen nur dann, wenn sie Anlass für Einschränkungen in der physikalischen Semantik oder in der Auswahl der Theorieelemente sind. Im späteren Abschnitt 4.5 werde ich zeigen, dass diese Einschränkungen von Seiten der Stanfordschule um Patrick Suppes tatsächlich in den Grundlagen der Klassischen Mechanik vorgeschlagen wurden.

2.3.6 Metamathematik als Wahrheitsgarant?

Warum spielen die metamathematischen Kriterien, insbesondere das der Widerspruchsfreiheit, in Hilberts Axiomatik eine so bedeutende Rolle? Für Hilbert sind diese Kriterien Wahrheitsgaranten oder eine Art Ersatz für Wahrheitsbedingungen in einer instrumentalistisch behandelten Theorie. Sie haben in eine *grundlagensichernde Funktion*, die im Interesse des Fortbestandes der Theorie zu prüfen sind:

> „[... D]ie Frage nach der *Widerspruchslosigkeit* der Axiome [...] ist offenbar von höchster Wichtigkeit, weil das Vorhandensein eines Widerspruches in einer Theorie offenbar den *Bestand* [eigene Herv.] der ganzen Theorie gefährdet." (Hilbert [1917], S. 409).

Und an anderer Stelle wird der 'Bestand' sogar mit 'Existenz' verbunden:

> „Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren sie durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz."[64]

Der Nachweis, dass die zugrunde gelegten Axiome widerspruchslos und unabhängig voneinander sind, wird wie eine Rückversicherung dafür verstanden, dass dem mechanischen System keine logischen Fehler anhaften. Für die Theorie ist es eine Art *Gütesiegel*, wenn sie im logischen Sinn konsistent und sogar vollständig ist. Nicht zuletzt gilt bei vielen Logikern noch heute die *Prädikatenlogik erster Stufe* als das wichtigste Instrument zur begrifflichen Analyse, da sie die aussagekräftigste logische Sprache mit diesen

[63] So wird auch in Peckhaus [2001b] der axiomatische Weg als 'regressive Methode' erläutert, anlehnend an die Bemerkungen in Hilbert [1992], S. 18.

[64] Zitiert aus Frege [1976], S. 66. Zum 'methodologischen Instrumentalismus' vgl. hier Anm. 28, S. 14.

Gütesiegeln ist.[65] Ob allerdings durch implizite Definitionen die 'Existenz' der denotierten Objekte ausgesprochen wird, ist ein schwieriges und aktuell gebliebenes Erkenntnisproblem in der Philosophie der Mathematik, in dem nicht nur Frege und Hilbert unterschiedliche Auffassungen vertreten haben.[66]

Die Idee Hilberts ist dennoch so einfach wie wegweisend für *modelltheoretische* Beweisverfahren. In Hilbert [1903] wird gezeigt, dass die Merkmale der geometrischen Grundbegriffe und -relationen eindeutig auf Beziehungen des reellen Zahlenkörpers $\mathbb{R}$ abbildbar sind. Heute sagt man, die elementare Geometrie T_G hat *ein Modell* in der Struktur des reellen Zahlenkörpers S_R. Damit sind sämtliche Metatheoreme über die reellen Zahlen zugleich für diese Geometrie T_G gültig. So kann über die Konsistenz des reellen Zahlenkörpers, sollte sie nachgewiesen sein, auf die Widerspruchsfreiheit von T_G geschlossen werden.[67] Dieses Mittel der Einbettung in Strukturen, diese *Reinterpretation*[68] ist es, die einzelne Theorien miteinander vernetzen. Dadurch werden sie der Modelltheorie zugänglich und so neue Beweiswege von Theoremen eröffnet.[69] Vor allem ist es später Tarski gelungen, Hilberts Vollständigkeitsaxiom zu ersetzen und an seiner Stelle die *logische Vollständigkeit* der Euklidischen Geometrie nachzuweisen, wo gerade diese Methode der Modelleinbettung in den reellen Zahlenkörper zum Tragen kommt.[70] Das Instrument der Modelltheorie hat letztlich Tarski und seine Nachfolger in Stanford und Berkeley zur Untersuchung des logischen Zusammenhangs zwischen unterschiedlichen Geometrien und ihren mechanischen Modellen motiviert.[71]

Kurzum, Metamathematik spannt ein Sicherheitsnetz um den bereits gefestigten Aufbau der Theorie und sorgt für Kohärenz innerhalb der akzeptierten Theorien.[72] Das feste Vertrauen in die deduktive Sicherheit der Mathematik und Logik legitimiert dann auch dazu, die Metamathematik

[65] Siehe etwa als aktuelle Einschätzung eines Logikers Woleński [2002], S. 217.

[66] Siehe vor allem Shapiro [2005], S. 69 f. Die moderne Modelltheorie würde allerdings Existenz wie eine nominale Setzung begreifen: „Apart from using set theory, model theory is completely agnostic about what kind of things exist." (Hodges [2009], §1). Vermutlich ist das auch Hilberts Gebrauch von 'Existenz'.

[67] Die Kontroverse zwischen Hilbert und Frege besteht letztlich darin, ob es sich hierbei um einen echten logischen Schluss handelt. Siehe dazu vor allem Blanchette [2009], §§ 3, 4.

[68] Siehe Blanchette [2009], §2.

[69] Man vergleiche die historische Bemerkung in Hodges [2009], §2.

[70] Siehe insbes. die Ergebnisschrift Tarski [1959]; sowie Monk [1976], S. 351 f.; und Feferman und Feferman [2004], S. 74 f.

[71] Siehe etwa zusammenfassend Suppes [1988a], S. 85. Tarski selbst hat sich in Fragen zur Mechanik zurückgehalten. Lediglich in Tarski [1935c], S. 96 f., gibt es eine Erläuterung darüber, wie die Ergebnisse über die Begriffsvollständigkeit in der Euklidischen Geometrie auch die Grundbegriffe der Mechanik betreffen können.

[72] Vgl. die Bewertung in Shapiro [2005], S. 69. Dort auf S. 71 ist auch von einem 'Hilbert-style safety net' die Rede. Die absichernde Motivation zur axiomatischen Methode wird auch in Hilberts eigenen Worten hier auf Seite 35 deutlich.

und Modelltheorie in den Vordergrund der axiomatischen Methode zu stellen. Ausgehend von unproblematischen, 'guten' Theorien aus Sicht der Modelltheorie versucht man, logische Rekonstruktionen auf neuen Gebieten zu erzielen, die sich mit diesen Theorien vereinbaren lassen. Man modelliert die Klassische Mechanik durch *strukturell einfache* Hintergrundtheorien und sorgt für weitere Verflechtungen des Sicherheitsnetzes. Das ist Teil der semantischen Theorienauffassung nach Suppes, auch *Semantic View* genannt.

2.3.7 Axiome im Widerspruch zur Tatsache?

Prinzipien der Mechanik haben ihren letztgültigen Wahrheitsgaranten darin, dass sie ein möglichst passendes *Abbild* oder *Modell* der mechanischen Natur sind. Dass diese Abbildbeziehung niemals eindeutig sein kann, dass vielmehr eine „prinzipielle Mehrdeutigkeit der Interpretation mathematischer Symbole" erkannt wird, führt zu einer *hypothetischen, konventionalistischen Auffassung* von Theorien, über die ein breiter Konsens in der Mechanik des 19. Jahrhunderts besteht (C. Neumann, L. Boltzmann, H. Hertz, E. Mach) und die auch von denjenigen Nachfolgern im 20. Jahrhundert mitgetragen wird, die den prinzipienorientierten Aufbau der Mechanik untersucht haben (P. Volkmann, D. Hilbert, P. Duhem, G. Hamel).[73] Kein Naturprinzip bringt Selbstevidenz mit, die es unfehlbar machen würde. Die Möglichkeit nebeneinander stehender Hypothesen, die unterschiedlich interpretiert werden, die Möglichkeit eines Theorienpluralismus gehört zum neuen Selbstverständnis in der Wissenschaft zur Jahrhundertwende.[74]

Umso wichtiger ist nach Hamel ein *ergänzendes Metakriterium*, das für die Mechanik als Naturwissenschaft ein Korrektiv bildet. Kein mathematische Prinzip des Axiomensystems, so abstrakt es auch sein mag, darf sich dem jeweils intendierten Tatsachenbestand widersetzen. Ich nenne es das

> *Kriterium der faktischen Konsistenz:*
> "Die Folgerungen dürfen nicht mit den Erfahrungstatsachen in [sic] Widerspruch stehen" (Hamel [1967a], S. 2).

Dieses Metakriterium ist die Minimalanforderung zu einem konventionalistischen Verständnis von Theorieprinzipien.[75] Hamel selbst distanziert sich

[73] Zu dieser 'hypothetisch-konjekturalen' Auffassung von naturwissenschaftlichen Theorien siehe vor allem König und Pulte [1998], S. 1141 f.; von dort ist auch obiger Wortlaut entnommen.

[74] Siehe König und Pulte [1998], S. 1141; sowie Pulte [2005], S. 429 f. Man beachte dahingehend auch den Plural 'Systeme' in Hilberts Wortlaut hier auf Seite 19.

[75] Ganz ähnlich heißt es in Duhem [1908], S. 32: „Wenn dagegen gewisse dieser Folgerungen [aus Hypothesen] im deutlichen Widerspruch mit den Tatsachen, deren Gesetz die Theorie darstellen sollte, stehen, muss sie mehr oder minder modifiziert, vielleicht vollständig verworfen werden." Oder in Poincaré [1929], S. 65: „[Our] choice among all possible conventions is *guided* by experimental facts; but it remains *free* and is limited only by the necessity of avoiding all contradictions." Siehe aber auch Tarski [1944], S. 668.

zwar an anderer Stelle deutlich von der Auffassung, dass auch die mechanischen Prinzipien wie beliebige, zu deduktiven Alternativen stehende Setzungen oder Konventionen zu verstehen seien. In letzter Instanz müsse die Anschaulichkeit der Grundsätze bleiben, eine *Intuition*, die unmittelbar mit der sichtbaren Realität der trägen Körper verknüpft ist.[76] Doch in der Ausführung zum Kriterium der faktischen Konsistenz verteidigt er gerade diesen konventionalistischen Charakter von Axiomen. Es könne vielfach gelingen, gewisse Folgesätze eines Axiomensystems an den Anfang zu stellen, deduktive Wege umzukehren und Alternativen gegenüberzustellen.[77] Das bekannteste Beispiel ist etwa die deduktive Gegenüberstellung von Lagrange- und Hamiltonmechanik.[78]

So verlockend einfach das Kriterium der faktischen Konsistenz auch ist, so problematisch ist es in dieser Allgemeinheit. Die bisherigen Gütesiegel aus der Metamathematik zielen auf *innere* Kohärenz des Axiomensystems, *nachdem* erkannt wurde, dass das mechanische Bild zu den empirischen Tatsachen passt. Was Hamel nun fordert ist diese Kohärenz nach *außen*: Aussagen, die aus dem *Abbild* der Wirklichkeit folgen, sollen nicht mit denjenigen Aussagen im Widerspruch stehen, die durch empirische Belege direkt erfüllt sind.

Doch ist es nicht eher der Normalfall, dass zwischen Phänomen und Modell in einer gewissen Hinsicht immer widersprüchliche Aussagen entstehen? Die axiomenbasierte Mechanik hat es mit Gesetzmäßigkeiten *ceteris paribus* zu tun, was in den meisten Anwendungsfällen die empirische Passung mit der Wirklichkeit beträchtlich einschränkt.[79] Ohne Erklärung der zusätzlichen *Rand- oder Nebenbedingungen* würde jedes mechanische Axiom an der Wirklichkeit scheitern.

So erzwingen *Gleitreibungseffekte* in der Kinetik starrer Körper Widersprüche zum Prinzip der Energieerhaltung, Widersprüche, die nur selten durch konstruierte Fallunterscheidungen aufgelöst werden können.[80] Schon immer sind Reibungseffekte als ergänzende 'Unreinheiten' angesehen worden, die vom Vorbild idealtypischer Systeme der rationalen Mechanik abweichen: von der Mechanik der Himmelskörper.[81] Hamel etwa hat

[76] Vgl. Hamel [1909b], S. 360; und Hamel [1967b], S. 507.

[77] Vgl. Hamel [1967a], S. 2.

[78] Siehe etwa Hamel [1967a], S. 236, wo das Hamiltonprinzip auch für Systeme mit nichtholonomen Bedingungen diskutiert und eine strenge Äquivalenz der beiden Mechaniken postuliert wird.

[79] Zu Ceteris-paribus-Gesetzen siehe etwa Hüttemann [2007], S. 140.

[80] Das tiefliegende Problem mit Gleitreibungskräften beginnt damit, dass sie auf das gesamte Massensystem einwirken: Es sind *eingeprägte* Kräfte (siehe dazu Abschnitt 3.4.2). Anders als die Haftreibung können sie nicht einfach wie eine Reaktion auf die Massenwirkung ausgeklammert werden (vgl. Hamel [1967a], S. 73). Außerdem sind Gleitreibungskräfte immer abhängig von der Geschwindigkeit der Systemmassen. Damit ist das System nicht konservativ, die Randbedingung nicht-holonom.

[81] Vergleiche dazu die historische Betrachtung in Stäckel [1908], Abschn. 6: 'Reibung'; sowie Pulte [2005], S. 141.

alle Reibungseffekte als 'nichtaxiomatisch' abgetan und sich lediglich darauf beschränkt, sie als weitere materielle Ausgestaltung der Krafttypen zu charakterisieren. Gleitreibungsphänomene lassen sich nicht 'apriorisieren', sie lassen sich nicht zu einem allgemeinen Schema verarbeiten, sondern sie zeigen sich *nur* am vereinzelten Modell.

> „Übrigens sind die Coulomb-Morinschen Gesetze [der Gleitreibung] empirisch und haben keinen axiomatischen Charakter" (Hamel [1967a], S. 72).

In ähnlicher Weise enthalten die abstrakten Axiome der Mechanik teilweise so starke *Idealisierungen*, dass sie geradezu unrealistisch sind. Man denke allein an die traditionelle Reduktion von Körpern auf Punktmassen, wenn nur lineare Impulsvorgänge oder einfache kinematische Ausgangssituationen betrachtet werden. Drehmomente, Deformationen und Trägheitsmomente sind dann innerhalb dieser Idealisierung vollkommen irrelevant und werden weggelassen, obwohl das zu Widersprüchen führen kann, wenn speziellere Effekte, wie etwa Präzessionsbewegungen beim Kreisel, erklärt werden sollen.

Hamels Metakriterium ist zu pauschal formuliert. Grundsätzlich muss der *Modellierungsprozess*, der erst eine semantische Verbindung zwischen Prinzip und Tatsache herstellt, genauer untersucht werden. So lässt sich von vornherein anzweifeln, dass die Prinzipien selbst einen konkreten Objektbezug haben oder eine Objektbeschreibung enthalten.[82] Und ebenso lässt sich bezweifeln, ob die konzeptuelle Analyse in der axiomatischen Methode die Modellobjekte berücksichtigt. Die 'Folgerungen' aus den Axiomen, von denen Hamel spricht, enthalten nicht von selbst die vielen Anwendungen und Beispiele, die in den Lehrbüchern der Mechanik zu finden sind. Es muss eine Verbindung *ergänzt* werden, Randbedingungen, anschauliche Modelle, konkrete Messwerte, um einen Objektbezug von den Prinzipien her zu erreichen.[83] Mit Blick auf die axiomatischen Grundbegriffe der Mechanik in Kapitel 3 (insbesondere Abschnitt 3.6.3 und Teil 3.8) wird sich zeigen, dass der Bezug zum Modellierungsprozess eine *mehrdeutige Synthese* bleibt, die nicht auf die axiomatische Struktur reduziert werden kann, ohne dem Inhalt der Axiome etwas Wesentliches zu entziehen. In dieser Weise kommt der logische Begriff der 'Folgerung' an eine *systematische Grenze* und mit ihm der Sinn einer metamathematischen Untersuchung in der Mechanik.

Aus axiomatischer Sicht lässt sich dem Kriterium zustimmen, dass deduzierte Ergebnisse nicht mit anderen Gesetzen im Widerspruch stehen dürfen, bei denen ähnliche oder gleiche Idealisierungen vorausgesetzt werden. Diese Korrektur scheint meines Erachtens auch mit Hamels konventionalistischen Verständnis der mechanischen Prinzipien zusammenzugehen.

[82] Man siehe etwa Stöckler [1994], S. 52.

[83] Man kann diesen Mangel der Prinzipien als eine Art 'Unvollständigkeit' auf Anwendungsebene begreifen, wie in Stöckler [1994], S. 55.

Solange nämlich gleiche Voraussetzungen in Sachen Grundbegriffe, Hintergrundannahmen, Randbedingungen und Idealisierungen getroffen werden, wird nach außen hin derselbe anschauliche und sprachliche Rahmen gesetzt. *Dann* erst kann ein Widerspruch auf deduktivem Weg offensichtlich werden.

Die offen gebliebene Frage ist wiederum, ob durch eine solche deduktive Rekonstruktion überhaupt neue *empirische* Ergebnisse erzielt werden können. Ich meine, dass mit der axiomatischen Methode keine neuen Phänomenbereiche erschlossen werden. Sie ist ja in der wissenschaftlichen Praxis auch tatsächlich nicht das Mittel der Wahl.[84] Dagegen zeigt sie vielmehr ihre volle Berechtigung darin, interne Facetten eines mechanischen Theoriegebäudes offen zu legen. Das heißt wiederum nicht, dass die Axiomatik sich neuen Tatsachenbeständen oder neuen theoretischen Konstruktionen verschließen würde. Es handelt sich eher um einen zirkulären Prozess zwischen empirischer Anpassung und rationaler Setzung:

> „Das sagt nicht, dass sie [d.i. die Axiome der Mechanik] aus den Erfahrungstatsachen abgeleitet sein müssten: der menschliche Geist formuliert die Axiome im ständigen Blick auf die Tatsachen, denen er gerecht werden will, aber als gleichwertiger Partner.” (Hamel [1967a], S. 2).

Dennoch bleibt auch diese Bemerkung zu pauschal, weil nicht klar ausgesprochen wird, dass die Prinzipien, als Konventionen verstanden, in einem regressiven, übergeordneten Schritt des Erkenntnisprozesses hinzukommen und den empirischen Bestand nicht in Frage stellen.[85]

2.3.8 Die Formoffenheit des axiomatischen Standpunktes

Ein ganz wesentlicher Aspekt in der Betrachung der Hilbertschen Axiomatik ist die Repräsentation des Systems und der deduktiven Struktur. Das ist nichts anderes als die Frage nach der *Form* eines axiomatisierten Systems der Mechanik. Und in dieser Untersuchung ist es von zentralem Interesse, in welcher Weise die *Formalisierung* eines axiomatisierten Systems eine Rolle spielt, damit die Klassische Mechanik auf einer soliden Grundlage steht. Umso wichtiger scheint die Feststellung, dass Hilbert im Zusammenhang mit dem sechsten Problem niemals irgendeine 'äußere Form' der Darstellung vorgegeben hat. Die axiomatische Methode gibt keine logische Form vor, weder damals noch heute: Sie ist vollkommen formneutral oder *formoffen*.

Zur Erläuterung der Formoffenheit werden nun und in den noch folgenden Abschnitten einige Begriffe vorausgesetzt, die vorwiegend aus der mo-

[84] Man vergleiche Giere [1988], S. 88.

[85] Der direkte Vergleich von Axiomen mit Aussagen über konkrete Tatsachenbestände bleibt, wie schon in Hilberts Warnung (hier Seite 33), missverständlich. In Abschnitt 2.6.2 (und später im Kontext der Mechanik, Abschn. 4.4.2) werde ich zeigen, dass es dieser direkte Vergleich ist, welcher die axiomatische Methode immer wieder zweifelhaft macht.

dernen Logik stammen. Zur näheren Illustration dieser Terminologie habe ich den **Anhang B** ergänzt.

Informelle Beweise und informelle Darstellungen
Hilbert hat nie von einer 'formalen Axiomatik' gesprochen.[86] Hinzu kommt, dass Hilbert [1903] eine axiomatische Behandlung der Geometrie vorschlägt, die später, aus Sicht der formalisierten Semantik, als *informell* bezeichnet wird.[87] Demnach werden die Beweise umgangssprachlich geführt. Sie basieren auf Termsubstitutionen und auf aussagenlogischen wie syllogistischen Schlüssen.[88] Es sind Schlüsse, in denen allein auf Axiome und bewiesene Sätze explizit Bezug genommen wird und nicht im Detail auf eine syntaktisch reglementierte Deduktion aus einer Kette von Symbolen, die in einer Formel bzw. in einer funktionellen Aussage vorkommen.

Es ist wichtig zu beachten, dass der Begriff des 'Informellen' einer Deduktion erst dann erklärt werden kann, wenn man das Mittel der formalsemantischen Untersuchung gegenüberstellt. Gemeint sind Untersuchungen, die „sich mit der [formalisierbaren] Bedeutung und nicht nur mit den konfigurativen (syntaktischen) Momenten von Zeichen und geregelten Zeichenumformungen befassen".[89] Eine Umschreibung des Informellen muss vom Formalen ausgehen. So kommt nach Tarski der formale Charakter eines deduktiven Systems daher,

> „to disregard the meaning of the axioms and to take into account only their form."[90]

Eine *formalisierte Darstellung* legt also alle Beweisschritte syntaktisch lückenlos offen, ignoriert aber die Bedeutungen der Terme und Aussagen in allen Aussagefunktionen und in allen logischen Schlussverfahren wie etwa in Substitutionsverfahren oder in der Abtrennungsregel der Aussagenlogik. Folglich schließt eine *informelle Darstellung* weder die Bedeutungen der Terme und Aussagen aus, noch wird das formale Schlussverfahren selbst dargestellt.

Als eine treffende Erklärung des informellen Beweisverfahrens möchte ich daher die aus dem Logiklehrbuch Suppes [1957] vorschlagen, weil der

[86] Man vergleiche in Grattan-Guinness [2000a], S. 161.

[87] So etwa in Tarski [1994], S. 51; oder Stegmüller [1985], S. 37; vgl. auch Hintikka [1996], S. 3.

[88] Die *Aristotelischen Schlussformen* werden hierbei in einem einfachen Klassenkalkül realisiert. Die Syllogistik wird dann ein Unterbereich der Prädikatenlogik erster Stufe, in der nur einstellige Prädikate (kategorische Satzformen) vorkommen (siehe dazu etwa Hilbert und Ackermann [1972], Kap. 2., sowie in modelltheoretischer Fassung Hodges [1998]). Es darf allerdings nicht unerwähnt bleiben, dass die Übersetzung der Syllogistik in neuere Kalkülformen nicht im vollen Umfang gelingt (siehe dazu Stelzner und Stöckler [2001a], S. 7 f., sowie Kreiser [2001], S. 81 f.).

[89] Schneider und Stekeler-Weithofer [1995], S. 582.

[90] Zitiert aus Tarski [1994], S. 118; vergleiche historisch auch Lukasiewicz [1988], S. 81 f.

Autor sowohl ein exzellenter Kenner der formalen Semantik ist als auch durch die vielen Beispiele einen pragmatischen Blick für die Beweispraxis in der Mathematik zeigt, hier bezogen auf die Arithmetik.

> Ein *informeller Beweis* ist anhand folgender Vorschrift identifizierbar:
>
> „In an informal proof explicitly indicate *every* use of an axiom or previous theorem of arithmetic. Ordinarily suppress mention of logical rules of inference used".[91]

Der Begriff 'informell', wie er hier und im Folgenden verstanden wird, beinhaltet also zwei Arten des Vernachlässigens in der Repräsentationsform, zwei Arten der Formoffenheit: Zum einen wird das *Schlussverfahren* ausgeklammert, und zum anderen wird die *Bedeutungsebene* der Terme und Aussagen nicht aus dem Beweisverfahren ausgeschlossen.

Informell kann ohne Einschränkung jedes Gebiet der Mathematik, aber auch jedes Gebiet der Klassischen Mechanik genannt werden, das in einem Lehrbuch dargestellt ist. Ebenso steht es mit allen Werken des 20. Jahrhunderts zu den Grundlagen der Mechanik. So zeigen vor allem Hamels wie auch Nolls und Truesdells Beiträge diesen *informellen Umgang* mit Schlussverfahren in einer axiomatisierten Mechanik. Auch in den Grundlagen der Mechanik ist die logische Analyse vorerst ein Instrument zur begrifflichen Konstitution.[92]

Logisch-semantische Fragen zu Beweisverfahren, zum Folgerungsbegriff, zu deduktiven Systemen allgemein, gehen dagegen über diesen informellen Umgang mit logischen Schlussweisen hinaus. Sie erfordern eine *logische Struktur*, in der die Begriffe durch funktionelle Terme und Relationen festgelegt sind.[93] In diesem Sinne ist jedes formale Beweisverfahren von der logischen Struktur der Theorie abhängig. Das ist letztlich auch die Bedeutung, in der Suppes und andere Befürworter des Semantic Views von einer 'formalen Methode' sprechen und die sie auch für die Grundlagen der Klassischen Mechanik vertreten haben. Ich gehe hierauf in Abschnitt 2.5 weiter ein.

Keinesfalls ist die axiomatische Methode gleichzusetzen mit der Axiomatisierung der Logik oder mit einem logizistischen Bemühen, die Geometrie oder die Mechanik auf einen logischen Kalkül zu reduzieren. Wenn Hilbert diese metamathematischen, formalistischen Zielsetzungen des Logizismus Freges und Russells lobend erwähnt, dann weil die axiomatische Methode offen ist für eine streng deduktive Behandlung der Mathematik

[91] Zitiert aus Suppes [1957], S. 133. Suppes' Charakterisierung stimmt außerdem mit derjenigen in Tarski [1994], S. 51, überein.

[92] So festgestellt in Abschnitt 2.3.5.

[93] Mit diesem Begriff der 'logischen Struktur' ist die Standardsprache erster Stufe aus der Mathematischen Logik gemeint. Siehe etwa Monk [1976], S. 194, sowie zu seinem Ursprung die Tarski-Biographie Feferman und Feferman [2004], S. 119.

und Logik. Es wäre ein *weiterer* Formalisierungsschritt in der 'Tieferlegung des mathematischen Fundamentes' und im Sicherstellen widerspruchsfreier Systeme.[94]

Der Inhalt bestimmt die Form

Es ist wichtig zu beachten, dass die mathematische (oder auch logische) Form, ob sie nun das Ergebnis der axiomatischen Methode darstellt[95] oder bereits vorgegeben ist, nach Hilbert *vom Inhalt* der untersuchten Theorie her bestimmt sein muss. Was wie selbstverständlich klingt, kann nicht deutlich genug gesagt werden, wenn man berücksichtigt, dass die metamathematischen Zielsetzungen die Tendenz zu einer *formalisierten* Rekonstruktion haben.[96] Das wird besonders mit Blick auf den Semantic View deutlich, wo die Klassische Mechanik teilweise wie eine Anwendung des modelltheoretischen Instrumentariums behandelt wird. Es besteht dann die Gefahr, dass die axiomatische Methode als ein *Formalisierungsprogramm* missverstanden wird.[97] Dass dagegen nach Hilbert die Form dem Gegenstand inhaltlich gerecht werden muss, wird derzeit vor allem von Ulrich Majer betont:

> „According to Hilberts point of view (and contrary to the popular opinion) geometrical expressions like point, straight line and between are not completely meaningless symbols but have a certain intuitive content (or meaning) and this content has to be captured and represented by a system of axioms in a certain logical order and perfection" (Majer [2006a], S. 158).

Es lassen sich zwei Gründe dafür angeben, warum die axiomatische Methode einseitig mit einer formalisierten Semantik assoziiert wird:

1. Mit Hilberts Programm der 'finitistischen Metamathematik' wurde ein formallogischer Hintergrund entwickelt, um Fragen der absoluten Konsistenz in der Arithmetik zu begründen. Dieses Vorgehen ist allerdings weit entfernt von der Axiomatisierung einzelner mathematischer Theorien, insbesondere der Mechanik.[98] Auf den Unterschied

---

[94] So heißt es dahingehend in Hilbert [1917], S. 412: „Da aber die Prüfung der Widerspruchslosigkeit eine unabweisbare Aufgabe ist, so scheint es nötig, die Logik selbst zu axiomatisieren und nachzuweisen, dass Zahlentheorie, sowie Mengenlehre nur Teile der Logik sind. Dieser Weg, seit langem vorbereitet - nicht zum mindesten durch die tiefgehenden Untersuchungen von Frege - ist schließlich am erfolgreichsten durch den scharfsinnigen Mathematiker und Logiker Russell eingeschlagen worden."

[95] Nach Peckhaus [2001b], S. 76, und Tapp [2007], S. 133, ist diese 'Formgebung im Vollzug' die originale Intention Hilberts.

[96] Ich habe das bereits in Abschnitt 2.3.4 angedeutet.

[97] Dass dies tatsächlich in der Wissenschaftsphilosophie häufig der Fall gewesen ist, wird später (vor allem in Abschnitt 4.4.3) thematisiert.

[98] Siehe vor allem Corry [2006], S. 4 f. Es gibt durchaus Hinweise, dass auch wesentliche Aspekte der mechanischen Grundlagen von 'finitistischen' Fragen der Metamathematik betroffen sind. Das zeigt etwa Hilberts großes Interesse an einem allgemeingültigen Stetig-

zwischen theorienrelativer Widerspruchsfreiheit und absoluter Konsistenz einer logischen Theorie ist hier in Abschnitt 2.3.6 hingewiesen worden. Er markiert heute einen entscheidenden Unterschied zwischen Modelltheorie und Beweistheorie innerhalb der Logik. Bei Hilbert sind diese begrifflichen Unterschiede allerdings noch nicht deutlich.

2. Um den strukturgebenden Aspekt der Hilbertschen Axiomatik hervorzuheben, wird vielfach auf das 'Schema-Zitat' in einem Brief von Hilbert an Frege eingegangen, in dem er seine Vorstellung des impliziten Definierens näher erläutert:

   > „[E]s ist doch selbstverständlich eine jede Theorie nur ein Fachwerk oder Schema von Begriffen nebst ihren nothwendigen Beziehungen zueinander, und die Grundelemente können in beliebiger Weise gedacht werden. Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen, z.B. das System: Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger ..., denke und nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras auch von diesen Dingen. Mit anderen Worten: eine jede Theorie kann stets auf unendlich viele Systeme von Grundelementen angewandt werden." (Hilbert 1899 in Frege [1976], S. 67).

   Tatsächlich kommt hier die Idee einer Theorie als abstrakte Struktur von Zeichen zum Vorschein. Die Struktur der Euklidischen Geometrie wird durch unterschiedliche Modelle realisiert, je nachdem wie diese Strukturelemente interpretiert werden. Diese Lesart macht Hilbert [1903] ohne Zweifel zu einer Grundsäule der *modelltheoretischen Sichtweise* auf Theorien.[99] Allerdings daraus zu schließen, das Ziel der axiomatischen Methode sei, ein formalisiertes Schema einer Theorie zu extrahieren, wonach „mathematics becomes a *game*, whose pieces are graphical signs that are distinguished from one another by their form",[100] ist sicherlich eine historische und sachliche Verzerrung.[101]

keitsaxiom für die Mechanik und seine Betonung des Hamelschen Beweises des Kräfteparallelogramms aus diesem Axiom (vgl. Hilbert [1917], S. 409, sowie Hamels Beweis in Hamel [1912], S. 58 f.). Diese Hinweise zeigen Hilberts Offenheit für alle Bestrebungen zu einem einheitlichen Fundament in der Mathematik und in der Mechanik.

[99] Diese Konnotation wird beispielsweise in Schneider und Stekeler-Weithofer [1995], S. 39, deutlich. Auch Blanchette [2009], §2, und Hodges [2009], §2, tragen bereits ihre modelltheoretische Sicht in den historischen Kontext hinein.

[100] So der Wortlaut Dieudonnés, zitiert aus Corry [2006], S. 5. Diese vermeintliche Auffassung Hilberts von der Mathematik als ein 'Spiel mit Zeichenreihen' hält sich seitdem leider so hartnäckig, dass sie erst kürzlich, anlässlich Hilberts 150. Geburtstages, sein großer 'Exportschlager' genannt wurde (vgl. Ziegler und Loos [2011]).

[101] Zum historischen Missverständnis siehe vor allem Grattan-Guinness [2000a], S. 161 f., und Majer [2006a], S. 157 ff. sowie David Rowe in der Einleitung zu Hilbert [1992], S. ix.

> Sie wurde insbesondere durch das strukturalistische Programm der Mathematikergruppe *Nicolas Bourbaki* begünstigt, die sich in ihrer Methode stets auf Hilberts Axiomatik beziehen.[102]

„Ich will nichts als bekannt voraussetzen", so Hilbert in Frege [1976], S. 66. Doch meint er damit natürlich nicht, dass die geometrischen Axiome keiner inhaltlichen, umgangsspachlichen Erklärung außerhalb des strukturierten Systems bedürfen. Im Gegenteil wird vielmehr „die mathematische Begriffsbildung durch die Anschauung angeregt und von der Erfahrung geleitet" (Hilbert [1992], S.11). Axiome definieren lediglich diejenigen strukturellen Eigenschaften der Geometrie, welche hinreichen, um die anerkannten Theoreme eines Theoriebereiches zu folgern.

Problematisch ist diese strukturbezogene Sichtweise allerdings, wenn sich Zweifel anmelden, ob gewisse für die Axiomatik *wesentliche Inhalte* durch die Struktur nicht repräsentierbar sind. So wird (in Abschnitt 3.6.3) ein entscheidender Kritikpunkt an der modelltheoretischen Behandlung der Mechanik sein, dass das Mittel einer strukturbezogenen Semantik den Modellierungsprozess zu mechanischen Kräften nicht repräsentiert. Die Theorie der Klassischen Mechanik wird allein als Form gebendes Schema verstanden, das von kontextbezogenen Merkmalen und Sachverhalten abstrahiert ist.

2.4 Merkmale einer axiomatisierten Theorie

Die axiomatische Methode ist ein allgemeingültiger Weg, deduktive ökonomische Ordnung in mathematischen Theorien herzustellen. Zusammenfassend lässt sich ein Bild von einer wissenschaftlichen Theorie skizzieren, das aus der erfolgreichen Anwendung der axiomatischen Methode nach Hilbert resultiert. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zeichnet es sich durch vier Merkmale aus.

(1) Die Theorie eines Wissensgebietes ist ein abstraktes, *Form gebendes System*, bestehend aus Gesetzen, Randbedingungen und expliziten Definitionen sowie aus Grundgesetzen und Erklärungen, die nicht weiter begründbar sind, den so genannten *Axiomen*. Die inhaltliche Bedeutung der vorkommenden Terme und Größen darf zwar niemals ausgeklammert werden, dennoch sucht man mit der axiomatisierten Theorie nach einem logischem Schema, das durch inhaltliche Kontexte, durch anschauliche Modelle, zu ergänzen wäre.

(2) Jede Zusammensetzung zu einer Theorie ist eine vorläufige, *hypothetische*, die ganz aus den vorangehenden Prinzipien der Theorie bestimmt ist. Die Revidierbarkeit der Axiome schließt einen *Theorienpluralismus* in den Grundlagen der Mechanik nicht aus. Das Gebiet der

[102] Man vergleiche Dieudonné [1967], Corry [2006], S. 5, und Kambartel [1968], S. 170.

Klassischen Mechanik kann somit durch verschiedene 'Bilder', wie Hertz und Boltzmann sagen würden, realisiert werden. Die logische Frage hinter dieser Auffassung ist dann, ob diese Bilder im Nachhinein auch abbildungsgleich sind oder ob sie strukturelle Unterschiede aufweisen.

(3) Die logische Rekonstruktion ist das Resultat der regressiven Untersuchung einer bewährten Theorie wie die Klassische Mechanik. Sie zielt darauf ab, die Theorie besser zu verstehen. Dieser Anspruch wird unabhängig davon erhoben, ob den Prinzipien der Mechanik selbst empirische Gültigkeit oder Wahrheit zukommen mag. Die Repräsentationsformen der rekonstruierten Theorie sind daher erkenntnistheoretisch neutral. Die Theorien sind dann Objekte eines *logischen Instrumentes*, mit dem die einzelnen Theorielemente (Grundbegriffe und -gesetze) mathematisch miteinander verknüpft und vereinheitlicht werden. In diesem Sinn fixiert eine axiomatisierte Theorie die *wesentlichen Grundbegriffe* in Strukturen und legt die funktionellen Verknüpfungen zwischen ihnen offen.

(4) In der eben beschriebenen Weise der Tieferlegung und Festigung bestehender Begriffsstrukturen haben *metamathematische* Untersuchungen eine Bedeutung, etwa die Fragen nach der Widerspruchsfreiheit und der Unabhängigkeit der angenommenen Theorieprinzipien oder sogar nach der Vollständigkeit der Begriffe und Gesetze für ein spezielles Gebiet.

Meines Erachtens stimmen alle Grundlagenforscher der Klassischen Mechanik, die sich auf Hilbert berufen, in diesem Theorienkonzept überein. Die Unterschiede bestehen vielmehr darin, in welcher Rangordnung diese Merkmale der Theorie gesehen werden und wie sie im Einzeln erläutert werden. Und in erster Linie betrifft das die Exaktheit oder *Strenge der logischen Repräsentation* einer axiomatisierten Theorie. Auf diesen Aspekt des Logischen will ich nun genauer eingehen.

2.5 Abstufungen des Logischen in der Mechanik

Die Untersuchung von logischen Rekonstruktionen der Klassischen Mechanik macht es erforderlich, sich über verschiedene Präzisionsstufen der logischen Syntax bewusst zu werden. Einige Auseinandersetzungen in den Grundlagen der Mechanik, das hat sich schon im Zusammenhang mit der Metamathematik angedeutet, lassen sich schon dadurch besser verstehen, dass verschiedene Konzeptionen der 'logischen Strenge' entlarvt werden. Ich möchte im Folgenden drei Abstufungen des Logischen unterscheiden, drei *Standpunkte der Logizität*.[103]

I. Informelle Gebrauchslogik (Hilbert)

Die Art und der Umfang der repräsentierenden Sprache werden offen gelassen, solange die Gesetze mathematisch funktionalisiert sind. Das heißt, dass der logische Aufbau des Axiomensystems *informellen* Charakter hat.[104] Die Schlussweisen entspringen einer umgangssprachlichen 'Logica utens', in der die Folgerungen aussagenlogisch oder syllogistisch aus den Prämissen gefolgert werden können: Eine Folgerung darf nicht falsch sein, wenn die Prämissen als gültig akzeptiert werden. Dieses Kriterium bildet traditionell die Minimalanforderung des korrekten Schließens und wird als erste Näherung für den Untersuchungsgegenstand der Logik verstanden.[105] Die Gültigkeit der Argumente und der logischen Schlüsse wird nicht wahrheitsfunktional durch eine prädikatenlogische Semantik der vorkommenden Terme entschieden, sondern durch außersystematische Standards der logischen und mengentheoretischen Gültigkeit.[106] Hierzu gehören auch logische Substitutionsverfahren, die allerdings als rein algebraisch-numerische Umformungsregeln über Gleichungen behandelt werden. Mit anderen Worten, die logische Repräsentation erfordert keine feste Syntax, keine vorgeschriebene Objektsprache, sondern sie bleibt ein metasprachlicher Aspekt, der sich allein vom Gegenstand der Mechanik her als brauch-

[103] Ich möchte versuchen, die verschiedenen Logikbegriffe aus systematischen Gründen nur soweit einzuteilen, wie sie für die hier behandelte Klassische Mechanik in Betracht kommen. Natürlich kann die Logizität der Syntax unter ganz anderen Aspekten betrachtet werden, nach den Wahrheitswerten, nach Art des Systemkalküls, nach dem Umfang des Grundbereichs usw. (vgl. etwa Haack [1978], S. 4). Aus meiner Sicht überschneidet sich die folgende Gliederung nach logischer Strenge in der Mechanik nicht mit der Frage nach der metaphysischen Korrektheit einer oder mehrerer Logiken. Das ist die so genannte 'Monismus-Pluralismus-Debatte' in der Logik. (Zu dieser metaphysischen Frage der Logik siehe vor allem Haack [1978], Kap. 12.) Diese Einteilung entscheidet nicht über unterschiedliche Logiken, sondern beschreibt verschiedene Ausgestaltungen oder Repräsentationen derselben klassischen Logik in ihrer Anwendung auf die Mechanik.

[104] Auf den Begriff 'informell' bin ich bereits in Abschnitt 2.3.8 kurz eingegangen.

[105] So etwa in Hintikka und Sandu [2007], S. 13; aber auch Tarski [1935b], wo der modelltheoretische Folgerungsbegriff grundgelegt wird.

[106] Diese Umschreibung der 'Logica utens' gegenüber einer formalen 'Logica docens' ist Haack [1978], S. 14 ff., entnommen.

bar oder unbrauchbar erweist. In den meisten Fällen bleibt sie unthematisiert.[107]

Metamathematische Fragestellungen zur Mechanik nach Widersprüchlichkeit und Unabhängigkeit der Axiome lassen sich umgangssprachlich behandeln, weil einzelne Modelle konstruierbar sind. Gütekriterien der Entscheidbarkeit und der logischen wie begrifflichen Vollständigkeit sind dagegen sinnlos.[108] Sie setzen syntaktische Kriterien voraus, die von allen Modellen des Systems erfüllt werden müssen. Umgangssprachlich wie aussagenlogisch sind sie nicht erreichbar. Begriffe wie 'vollständige Axiome/Begriffe' oder 'abgeschlossene Systemmechanik' bleiben unbeweisbare Hypothesen.

II. Formale Wissenschaftssprache (Carnap)

Die Auffassung Carnaps und anderer, die in der Tradition des logischen Empirimus stehen (Reichenbach, Nagel, Feigl), wird heute als *Received View* verstanden, eine Bezeichnung, die auf Hilary Putnam zurückgeht.[109] Die programmatische Ausrichtung ist dabei keine geringere, als dass alle mathematischen Wissenschaften wie auch die Mechanik durch eine formalisierte logische Sprache vereinheitlicht werden sollen.[110] In der logizistischen Tradition Freges und Russells stehend, unterliegt die Wissenschaftssprache einem ausdrucksstarken Prädikatenkalkül, in dem der Grundbereich in theoretische und observable Terme der jeweiligen Theorie klassifiziert wird. Man spricht heute auch von der so genannten *Zweistufenkonzeption*, die in der Nachfolge des logischen Empirismus vernichtender Kritik ausgesetzt war.[111] Die impliziten Definitionen (Axiome) der Theorie sind so zu formalisieren, dass alle theoretischen Terme mit observablen Größen durch syntaktische Ableitungsregeln miteinander verknüpft sind. Diese so genannten Korrespondenzregeln repräsentieren die axiomatische Basis, auf der sich die *Verifikationsmethode* des logischen Empirismus erfüllt: keine empirische Bedeutung eines Terms ohne verifizierende Abbildung auf ein Ob-

[107] Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang Hilberts Kommentar zum informellen Gebrauch der Aussagenlogik, wenn er in seinem Lehrbuch zur formalen Logik auf die Axiome der Aussagenlogik zu sprechen kommt: „In einer Axiomatik irgendeines anderen Wissensgebietes werden die weiteren Sätze aus den Axiomen in der Regel durch das *inhaltliche logische Schließen* gewonnen [eigene Herv.]. Dass dieses hier durch die rein formalen Regeln [der Aussagenlogik] ersetzt wird, liegt daran, dass die logischen Schlussweisen selbst den Gegenstand der Untersuchungen bilden." (Hilbert und Ackermann [1972], S. 25) Man kann diesen Kommentar auch anders verstehen: Die Logik ist ein Spiegelbild der Axiomatik.

[108] Zu diesen Kriterien siehe etwa Monk [1976], Seiten 204, 233 und 349, sowie die Literatur in den Fußnoten 26 und 36.

[109] Siehe Suppe [1977a], S. 3.; König und Pulte [1998], S. 1146. Ich verzichte hier auf Primärquellen zum Received View, weil die Grundannahmen des logischen Empirismus hier nur am Rande thematisiert werden und möchte nur auf Suppe [1977a], S. 50-53, verweisen.

[110] Siehe Schneider und Stekeler-Weithofer [1995], S. 582.

[111] Siehe Suppe [1977a], Seiten 12 und 80–86.

jekt der physischen Realität.[112] Die wahrheitsfunktionale Semantik nach Tarski prägte somit die spätere Gesamtkonzeption des Received View.[113] Und aus diesem Grund ist es eigentlich irreführend, von einer 'syntaktischen Sichtweise' auf Theorien für den Received View gegenüber der 'semantischen Sichtweise' für den modelltheoretischen Ansatz zu sprechen.[114]

Der Received View ist ein *formalistischer Standpunkt*, in dem die wahrheitsfunktionale Semantik der Wissenschaftssprache möglichst genau entfaltet werden soll. Insbesondere wird die Trennung zwischen logischen und faktischen Sachverhalten (analytische und synthetische Aussagen) durch eigene modale Abstufungen im Kalkül präzisiert. Die einheitliche Wissenschaftssprache tritt somit als eine 'Logica docens' an, in der sich die theoretischen Elemente des Kalküls durch strenge Deduzierbarkeit bewähren. Alle metamathematischen Fragestellungen können in diesem Rahmen explizit behandelt werden. Eine Theorie ist somit Teil eines logischen Gesamtsystems der Wissenschaft.[115]

III. Die modelltheoretische oder semantische Sichtweise (Suppes)
Die modelltheoretische Position steht in ihren logischen Anforderungen an die axiomatisierte Theorie zwischen den ersten beiden Positionen: Beabsichtigt sind eine Präzisierung von **I** und eine Abschwächung von **II**.[116] Der logisch-syntaktische Rahmen zur Repräsentation der Mechanik wird offen gelassen und ist allein nach Nützlichkeitsaspekten zu entscheiden (wie in **I**). So ist es dem jeweiligen wissenschaftlichen Kontext und dem Fortschritt der Mathematisierung überlassen, ob informelle oder formalisierte Deduktionen betrachtet werden.[117] Zwingend ist dagegen nur die Auszeichnung einer *logischen Struktur* der Theorie, welche insbesondere die vorkommenden Grundbegriffe und -relationen enthält. In diesem Sinn handelt es sich um eine *eingeschränkt formalisierte* Darstellung. Durch diese Struktur kann der axiomatisierten Theorie ihre Menge an erfüllbaren Modellen im Sinne Tarskis zugeordnet werden. Die Menge dieser strukturerfüllenden Modelle ist diejenige außerlinguistische Entität, über die nun die Theorie definiert wird. Die Theorie wird nicht mehr über die syntaktische Repräsentation erklärt wie noch in **II**.[118] Pragmatische Aspekte der Handhabbarkeit und Nützlichkeit entscheiden über den Grad der logischen Formalisierung. Gleichzeitig behalten die Kriterien der modernen Modelltheorie ihre Gültigkeit und Anwendbarkeit. Die Zweistufenkonzeption zwischen

[112] Siehe Suppe [1977a], S. 13.

[113] Vgl. Suppe [1977a], Anm. 32, S. 16 und Anm. 240, S. 113.

[114] Man vergleiche Scheibe [1997], S. 45-47; oder Suppe [1998], S. 348.

[115] Man vergleiche Haack [1978], S. 15 f.

[116] Die Angabe von Primärquellen wird auf Kapitel 4 verschoben, wo detaillierter auf die Grundlagen der Klassischen Mechanik nach dieser Sichtweise eingegangen wird.

[117] Man vergleiche Suppe [1998], S. 347.

[118] Man vergleiche König und Pulte [1998], S. 1150; sowie Suppe [1977a], S. 222.

einem syntaktischen Vokabular aus Observablen und aus theoretischen Begriffen ist nicht erforderlich. Stattdessen werden *semantische* Beziehungen zwischen theoretischen Elementen und Modellobjekten informell erklärt, damit die Begriffe der Theorie empirische Bedeutung haben. Die Bedeutung der Strukturterme wird dann im Allgemeinen nicht weiter von der Syntax getrennt.

Metamathematische Aussagen zur Vollständigkeit und Entscheidbarkeit einer Theorie werden erst zugänglich, wenn in einem weiteren Schritt eine formalisierte Semantik zur logischen Struktur ergänzt wird.[119] Durch diesen Schritt wäre die semantische Sichtweise, was die Logizität der Rekonstruktionen betrifft, nicht mehr von **II** unterscheidbar.

Weitere Bemerkungen zur Dreiteilung

Die erste Position umfasst den schwächsten oder weitesten Begriff eines logischen Rahmens für eine wissenschaftliche Theorie, die zweite Position dagegen den engsten Begriff. Es ist also zu beachten, dass in der Diskussion um die logische Reichweite der Mechanik gefragt werden muss, welche Bedeutung der logischen Strenge im jeweiligen Kontext vorliegt. Ohne Zweifel sind alle großen Axiomensysteme zur Klassischen Mechanik im 20. Jahrhundert einem *informellen* Gebrauch von logischer Strenge (**I**) zuzuordnen: die Vorschläge von Georg Hamel, Walter Noll und Clifford Truesdell.[120] Hamels Fassung stand insbesondere in der Kritik, logisch ungenau zu sein und ist, wie wir sehen werden, der Anstoß für eine rigorose Fassung der Partikelmechanik nach modelltheoretischen Standards (**III**) gewesen: Das ist vor allem der Artikel McKinsey u. a. [1953].

Formallogische Vorschläge zur Mechanik nach den strengen Standards der Mathematischen Logik (**II**) fallen hierbei aus dem Rahmen, weil die Diskrepanz zwischen programmatischer Ausrichtung und Umsetzbarkeit enorm ist. Mit Hermes [1938] und Montague [1962] sind dennoch zwei weitreichende Versuche in Richtung einer formalen Axiomatisierung zu nennen. Sie können in dieser Arbeit allerdings nicht weiter berücksichtigt werden, weil es hier vielmehr um die direkte Abgrenzung zur informellen Behandlung der Axiome nach **I** geht. So ist der modelltheoretische Rahmen (**III**) von einer Kritik an formalisierten Rekonstruktionen in der Mechanik direkt betroffen, während der formalistische Standpunkt in seinen Zielsetzungen viel weiter entfernt bleibt.[121]

Obige Dreiteilung der Logizität habe ich mit dem Ziel verbunden, die logischen Besonderheiten der mechanischen Rekonstruktionen im 20. Jahrhundert deutlicher zu markieren. Die Übergänge sind aus historischer Sicht

[119] Siehe hierzu insbesondere Suppes [1992], S. 208; sowie Suppes [2002], S. 27.

[120] Das sind in erster Linie Hamel [1927], Noll [1959] und Truesdell [1991], um die wichtigsten Beiträge zu nennen.

[121] Ich glaube aber, dass sich eine Kritik am formalistischen Standpunkt (**II**) unmittelbar anschließen könnte. Meine Positionen und Argumente bleiben auch hierfür gültig.

eher fließend. Jede der drei Positionen betont in der zeitlichen Entwicklung von Hilberts axiomatischer Methode (seit etwa 1900) über den Received View (seit etwa 1925) bis hin zum modelltheoretischen Standpunkt (seit etwa 1950) lediglich einen besonderen logischen Aspekt in *demselben* hypothetischen Theorienkonzept, wie es in den vier Merkmalen des vorigen Abschnittes zusammengefasst ist. Das zeigt sich alleine darin, dass alle Positionen in unmittelbarem Bezug zur formalen Semantik nach Alfred Tarski stehen.[122] Es sind verschiedene Facetten oder Ausgestaltungen *einer klassisch* zu nennenden Logik.

Die These der formallogischen Grenze in der Klassischen Mechanik
Die Reichweite der logischen Formalisierung ist entscheidend durch den Fortschritt der logischen Semantik und der Modelltheorie beeinflusst. Offenbar ist es ein 'Paradigma' der modernen Logik, von einer systematischen Syntax zu einer ebenso systematischen Semantik fortzuschreiten.[123] Dieser Schritt beeinflusst gleichermaßen die axiomatische Methode wie auch die Grundlagen der Mechanik. Knapp gesagt ist die Motivation zur modernen Logik, dass nur „the syntactic form of an argument is visible for all to see, but the semantic form is not." (Hodges [2007], S. 47). Die logische Analyse der Begriffe soll aber genauso gut auf semantischer Bedeutungsebene stattfinden, ohne dass eine sperrige Syntax den Zugang zu logischen Folgerungen undurchsichtiger macht. Das garantiert Tarskis Konventionalisierung des Wahrheitsbegriffes nach rein formalen Kriterien: die kontextfreie (extensionale) Simulation der Übereinstimmung zwischen logischer Objekt- und Metasprache.[124] Diese Entwicklung hin zur *formalisierten Semantik* prägt den modernen Standard der Logizität. Die moderne Logik hat somit seit Freges axiomatischer Behandlung von deduktiven Systemen einen Schritt weg von der Gültigkeit von Argumenten, dargestellt in Regeln des natürlichen Schließens, und hin zur *Wahrheitsfunktionalität von Aussagen* mitgemacht.[125]

[122] „Carnap und auch Tarski bleiben damit zumindest zunächst im Rahmen des Denkmodells Hilberts, der meinte, geometrische, arithmetische oder mengentheoretische Strukturen in einem axiomatisch-deduktiven System implizit definieren zu können. Die beweistechnische Bedeutsamkeit axiomatischer Vollformalisierungen für die Mathematik steht allerdings ebensowenig in Frage wie die der theorieinternen Modelltheorie Tarskis für die mathematische Logik." (Schneider und Stekeler-Weithofer [1995], S. 585). Siehe auch Feferman und Feferman [2004], Seiten 69-75, zu Hilberts Einfluss auf Tarskis Beiträge in der Geometrie, Algebra und Arithmetik; ebd., Seite 95 über den Bezug zu Carnap sowie Seite 216 zu Tarskis Schüler Suppes.

[123] Nach Hodges [2007], Seiten 47 f. und 55 f.

[124] Siehe dazu insbes. Tarski [1936] sowie zusammenfassend Tarski [1944].

[125] So die Beurteilung in Haack [1978], S. 20, die sich an Kneale [1956] orientiert. Die Verschiebung von der traditionellen Linie der Logik als die Lehre vom korrekten Schlussfolgern, die „nichts als die formalen Regeln alles Denkens [...] ausführlich darlegt und strenge beweiset" (Kant [1787], S. IX), hin zur *metalogischen* Dimension durch einen präzisierten Wahrheits-, Folgerungs- und Modellbegriff ist für William Kneale insofern problematisch, weil er den metalogischen Bereich nicht mehr zur Logik zählt (vgl. ebd., S. 259). Ich kann diese Kritik

In dieser Arbeit wird unter anderem gezeigt, dass der Übergang von einem informellen Gebrauch der natürlichen Schlussweisen (**I**) hin zu einer modelltheoretischen Semantik (**III**) konzeptuelle Schwierigkeiten mitbringt, wenn es um empirische Axiome der Klassischen Mechanik geht. Dieser Übergang erweist sich als eine Einschränkung in der Bedeutung von mechanischen Grundbegriffen und ihren Axiomen. Die Beschränkung auf strukturerfüllende Modelle (im Sinne Tarskis) ist zugleich eine Beschränkung möglicher Systemmechaniken und ihrer empirischen Bedeutungen. Entscheidende *physikalische* Interpretationen, die ihrer Natur nach *informell* sind, werden regelrecht verloren.

So wird diese Arbeit die These stützen, dass es sich keinesfalls um ein Defizit der axiomatischen Methode selbst handelt, wenn in der modelltheoretischen Sichtweise physikalische Inhalte nicht repräsentiert werden, sondern um eine *einseitige Fehlinterpretation* der axiomatischen Methode als ein *Formalisierungsprogramm*. Dieses Resultat gelingt in Kapitel 4, nachdem Ziel und Reichweite in den Grundlagen der Mechanik des 20. Jahrhunderts mit dem Hintergrund des sechsten Problems Hilberts genauer untersucht werden (Kapitel 3). Aufschlussreich wird dabei die Kritik an Georg Hamels Axiomatisierung der Klassischen Mechanik sein, die aus der modelltheoretischen Fassung der Punktmechanik nach Patrick Suppes und anderen entstanden ist. Hieran wird die *Unvereinbarkeit* der beiden Standpunkte der Logizität (**I** gegenüber **III**) deutlich werden, wenn es um das Verständnis der 'Axiome der Mechanik' geht.

nicht nachvollziehen, sondern bin im Gegenteil davon überzeugt, dass die moderne Logik zwangsläufig ihre eigene 'Beweistheorie' und Metamathematik mit einschließt. Man schränkt den begrifflichen Reichtum der Logik gewaltsam und unnötig ein, wenn man sie 'objektsprachlich' definieren würde (so auch Hodges [2007], S. 44). Dennoch ist es wichtig zu bemerken, dass sich der Übergang von der traditionellen zur modernen formalen Logik als „Bruch und Ablösung dieser Logiktradition" (Stelzner und Stöckler [2001a], S. 7) darstellt. Dass ich hier auf diese Unterschiede im Zusammenhang mit der 'Logizität' von mechanischen Darstellungen nicht näher eingehe, hat seinen alleinigen Grund darin, dass die Zerlegung von Propositionen in die Funktion-Argument-Struktur bereits die hier relevante, neuartige Repräsentationsweise ausmacht. Siehe hierzu auch Gabriel [2001], S. 23.

2.6 Einwände gegen axiomatische Grundlagen der Mechanik

Die axiomatische Behandlung der Klassischen Mechanik ist in allen drei eben genannten Stufen der logischen Strenge nicht ohne hypothetisch-deduktives Theorienverständnis denkbar. Eine Kritik an der axiomatischen Methode auf dem Gebiet der Mechanik betrifft somit neben allen drei Spielarten der Logizität des vorherigen Abschnittes auch die Merkmale des Theorienbegriffs nach Abschnitt 2.4. Ich möchte im Folgenden versuchen, einige Einwände gegen Axiomatisierungen in der Physik vorzustellen, um sie auf mögliche Missverständnisse und unberechtigte Voraussetzungen hin zu prüfen.[126]

2.6.1 Der pragmatische Einwand: mangelnder Bezug zur Forschung und Didaktik der Mechanik

Man findet gelegentlich den Vorwurf, dass die axiomatische Methode auf dem Gebiet der Mechanik bisher sehr unergiebig gewesen sei. Nur wenige Autoren hätten sich überhaupt auf diesen Forschungsgegenstand ernsthaft eingelassen.[127] Ihre Zahl an Publikationen und Reaktionen innerhalb der mechanischen Forschung sei so gering, dass eine Relevanz für die wissenschaftliche Praxis faktisch auszuschließen sei. Dies betreffe auch den didaktischen Bereich der Klassischen Mechanik. Fast alle neueren Lehrbücher zur Mechanik sind nichtaxiomatisch aufgebaut, und doch sind dies die Bücher, aus denen wir Mechanik lernen, lehren und verstehen.[128] Deshalb seien die Grundlagen in der Summe kein ertragreicher, kein wissenschaftlich produktiver Forschungsgegenstand.

Richtig an diesem Argument ist, dass der Publikations- und Rezensionsumfang zur Axiomatik in der Klassischen Mechanik ausgesprochen gering ist und sich nur wenige Experten auf diesem Gebiet herausgestellt haben. In Truesdell und Toupin [1960], S. 789 f., werden auf gerade mal zwei Seiten die aktuelleren, relevanten Beiträge zu den Grundlagen der Mechanik aufgelistet, bei Mach [1897] angefangen bis Noll [1959]. Eine Aktualisierung bis zum heutigen Stand dürfte um vielleicht zwei Seiten länger werden. Man hat tatsächlich rückblickend den Eindruck, dass Hilberts sechstes Problem bis Mitte der 1950er nur bei einer verschwindend kleinen, interdisziplinären Gruppe aus Mathematikern und Philosophen Interesse geweckt hat. So sind die Grundlagen der Klassischen Mechanik bis heute stets Nebenschauplatz in der theoretischen Mechanik und in der Wissenschaftsphilosophie geblieben. Vor allem die damals revolutionären Entwicklun-

[126] Interessant ist, dass die meisten dieser Einwände bei Vertretern der axiomatischen Methode oder des Semantic Views zu finden sind, die ihre Positionen verteidigen wollen.

[127] „Do not so few people worry about such problems and are not so many of the worriers amateurs or even cranks?" (Bunge [1967a], S. 3)

[128] Siehe etwa Giere [1988], S. 88.

gen zur Quantenmechanik und zur relativistischen Mechanik haben einen großen Anteil daran gehabt, dass die axiomatische Behandlung der Klassischen Mechanik in der Breite vernachlässigt, als wissenschaftlich irrelevant beiseite gelassen wurde.[129]

> „Like all of his [d.i. Hilberts] problems concerning physical applications of mathematics, his proposal for mechanics has received little attention." (Truesdell und Toupin [1960], S. 230)

Dennoch halte ich das Argument für völlig verkehrt: „True but irrelevant", wie in Bunge [1967a], S. 3, knapp erwidert wird. Die Grundlagen der Mechanik dürfen nicht an der Breite ihrer konzeptuellen Leistungen gemessen werden. Auch der geringe Bezug zur wissenschaftlichen Forschung und Praxis ist nicht von Belang, wenn es allein darum geht, *bestehende* Theorien besser zu verstehen. Ein philosophisches Argument wird auch nicht deshalb verworfen, weil ihm bisher wenig Aufmerksamkeit gewidmet wurde. Wie mehrfach betont wurde, ist das Vorgehen regressiv, nach deduktiven ökonomischen Richtlinien wird reorganisiert. Die axiomatische Methode dann aber nach Kriterien des wissenschaftlichen Fortschrittes zu beurteilen, wird dem Gegenstand nicht gerecht.

Ebenso verkehrt ist es, der axiomatischen Methode Misserfolg auf dem Gebiet der Mechanik zu unterstellen, nur weil die meisten Lehrbücher nichtaxiomatisch oder bestenfalls 'voraxiomatisch' organisiert sind.[130] Es lassen sich heute wenige Lehrbücher nennen, die einen deduktiv-axiomatischen Aufbau der Mechanik aufweisen: Hamel [1912], Hamel [1967a], Desloge [1982] oder Truesdell [1991] sind solche Ausnahmen. Doch sind diese aus didaktischer Sicht eher zur vertiefenden als zur einführenden Lektüre geeignet.

> „Der Ausdruck ['axiomatische Methode'] bezeichnet den Weg zur Axiomatisierung eines Wissensgebietes, nicht seine axiomatische Präsentation in Lehrbuchform." (Peckhaus [2001b], S. 75)

Aus der Tatsache, dass Lehrbücher die Mechanik nicht axiomatisieren, wird kein Argument gegen die axiomatische Methode selbst, da eine didaktisch motivierte Organisation eines Wissensgebietes gewöhnlich anders strukturiert ist. Ich folge hier ganz der Auffassung in Arons [1997], dass der didaktische Schwerpunkt im *kognitiven Prozess des Erlernens* der bewährten

---

[129] Hierzu mehr in Kapitel 3.2, Seite 127.

[130] Der Begriff 'voraxiomatisch' ist Hamel [1927], S. 2, entnommen und meint die Verwendung von Prinzipien und Grundsätzen ohne den Formcharakter der implizit definierten Grundbegriffe (siehe dazu auch Hamel [1909b], S. 358, Anm. 1). So können etwa die in Fachkreisen sehr einflussreichen Werke Love [1897] und Sommerfeld [1967] als voraxiomatisch in diesem Sinn verstanden werden. Ebenso würde ich heutige Lehrbücher dazu zählen, die unreflektiert die Newtonschen Axiome der 'Principia' wiedergeben, um den deduktiv-rationalen Charakter der heutigen Mechanik anzudeuten: so etwa Daniel [1997] oder Ardema [2005], Kap. 5.

mechanischen Gesetze und der damit verbundenen Schwierigkeiten liegen muss.[131] Nur sofern die logisch-deduktive Analyse für die Erkenntnis der Schwierigkeiten zu den Grundbegriffen wie etwa 'Kraft' und 'Masse' dienlich sein kann, nur sofern sie zur Begriffsschärfung beitragen kann, hilft sie der didaktischen Leitlinie eines Lehrbuchs. Andernfalls stehen operationale, phänomenbasierte Kontexte und veranschaulichende Motive im Vordergrund. Didaktik und Axiomatik können sich also gegenseitig sogar in manchen Kontexten hinderlich sein. So wird etwa die komplexe Frage um die Axiomatisierung von Grundbegriffen in der Mechanik niemals den Anfang eines Lehrbuchs machen können, obwohl sie sachlich das Fundament der Mechanik bildet.

Beachtlich ist das Beispiel des historisch wichtigen Lehrbuchs ≫Theoretical Mechanics≪ von Augustus E. H. Love. In der damals viel beachteten und hoch gelobten ersten Auflage Love [1897] wird eine axiomatisierte Partikelmechanik dargestellt, die gleichsam konzeptuelle Vereinheitlichungen zur thematisch angrenzenden Elastizitätstheorie und Kontinuumsmechanik aufzeigt.[132] Im gleichen Zug wird aber die didaktische Zielsetzung im Vorwort betont. Doch muss der Autor mit seiner Umsetzung des didaktischen Ziels so unzufrieden gewesen sein, dass er die zweite Auflage Love [1906] völlig neu gestaltet hat: Alle Axiomatisierungsaspekte - einschließlich des Kapitels über die 'Principles of Dynamics' - sind verschwunden. Im Vorwort zur zweiten Auflage heißt es zu dieser Grunderneuerung:

> „The main objects in view in this rearrangement have been on the one hand to present the theory in a less abstract fashion and on the other hand to avoid long preliminary discussions."

Didaktische Ziele laufen also parallel zu den Grundlagen der Mechanik, bestimmen aber niemals deren Zielsetzungen der Rekonstruktion, der begrifflichen Reduktion oder der logischen Deduktion.[133] Vorab muss immer *ein* begrifflicher Rahmen (unter mehreren) festgelegt werden. Es muss einen Zugang zur Klassischen Mechanik geben, damit eine Axiomatik der Grundgesetze und -begriffe untersucht werden kann. Die Grundbegriffe müssen zunächst in ihrer Bedeutung für die Mechanik festgestellt werden, damit *anschließend* die Axiomatik der Grundgesetze und -begriffe untersucht werden kann.[134] Der Didaktiker sollte einem Weg der kognitiven

---

[131] Leitgedanke der didaktischen Analyse ist, „to bring out as clearly and explicitly as possible the conceptual and reasoning difficulties many students encounter and to point up aspects of logical structure that may not be handled clearly or well in substantial segments of textbook literature." (Arons [1997], S. vi)

[132] Siehe dazu auch hier Seite 189 in Abschnitt 3.8.4.

[133] Diese Zielsetzungen der axiomatischen Methode wurden hier unter 2.3 thematisiert.

[134] Lehrbücher bedienen sich Grundlagenfragen zur ergänzenden logischen Übung, zur Festigung des begrifflichen Verständnisses. Das ist durchaus ein tragfähiges Vorgehen. So findet man in Meschede [2002], S. 62, kleinere logische Argumentationsübungen, die das Verständnis der Grundprinzipien und -begriffe zur Mechanik testen: Auf der Basis der Newtonschen

statt der sachlogischen Reduktion folgen, um dem Leser einen ersten Gesamtüberblick verschaffen zu können.

> „One can start in some relatively unsophisticated way and help students refine the concepts by spiralling back to more rigorous definition as their grasp of the overall structure grows in later contexts." (Arons [1997], S. 58)

In diesem Sinne bleibt der axiomatisierte Lehrtext einem erfahrenen Leser vorbehalten, der den Inhalt unter deduktiven ökonomischen Aspekten restrukturiert sehen möchte.

2.6.2 Der sachbezogene Einwand: ein verfehltes Verständnis von physikalischen Theorien

Nichts könnte wohl die axiomatische Methode so sehr erschüttern wie der Vorwurf, sie sei auf dem Gebiet der physikalischen Wissenschaft nutzlos, weil die physikalische Theorie selbst keine axiomatische Rekonstruktion zulässt. Dieser Vorwurf, dass die Axiomatik auf dem Gebiet der Physik sinnlos sei, ist häufiger auch von einflussreichen Physikern und Mathematikern geäußert worden. Das hat sicherlich dazu beigetragen, dass Hilberts sechstes Problem so geringe Aufmerksamkeit erhalten hat und dass die Vertreter der axiomatischen Methode sich stets für ihr Vorgehen rechtfertigen mussten.

Die Kritik an dem verfehlten Theorienverständnis findet man bereits bei Hermann Weyl, der auch zu Hilberts Doktoranden zählte:

> „The harvest [d.i. aus Hilberts physikalischen Grundlagenstudien] however can hardly be compared with his achievements in pure mathematics. The maze of experimental facts which the physicist has to take into account is too manifold, their expansion too fast, and their aspect and relative weight too changeable for the axiomatic method to find a firm enough foothold, except in the thoroughly consolidated parts of our physical knowledge."[135]

Ich teile die Auffassung in Majer [2006a], dass hier ein grundsätzliches und für die axiomatische Behandlung von Theorien gefährliches Missverständnis vorliegt. Ohne Frage ist man im forschenden, explorativen Gebrauch von physikalischen Theorien auf die experimentelle Faktenlage angewiesen und muss auf neue Entwicklungen Bezug nehmen. Die Reflexion auf die logische Struktur einer bewährten Theorie, auf Aspekte der deduktiven

Definition der 'Quantity of Matter' soll etwa die Zirkularität der Massendefinition enthüllt werden, oder es soll an anderer Stelle diskutiert werden, ob es möglich ist, das Reaktionsprinzip aus den anderen Newtonschen Prinzipien herzuleiten.

[135] Das Zitat ist Majer [2006a], S. 174, entnommen.

Lücken und verborgenen Voraussetzungen, ist aber von dieser progressiven Tätigkeit zu unterscheiden. Beide Betrachtungsweisen einer Theorie widersprechen einander nicht.

> „In other words: the aim of [adopting] the axiomatic point of view in physics is not the progress of the research-front nor an extension of our empirical knowledge, but (like in mathematics) a *reflection* and *contemplation* of the logical structure of a given theory (taken from physics or elsewhere). This is to a good degree a *philosophical* task (and should not be condemned for this reason)." (Majer [2006a], S. 176)

Dieselbe Kritik an der Axiomatik wurde auch von John Synge geäußert. Das Besondere an seinem Einwand in Synge [1960], S. 5, ist, dass er die Rekonstruktionen der Klassischen Mechanik durch Hamel, Suppes und andere erwähnt, die Gebäudemetapher von Hilbert aufgreift und gleichzeitig ein eigentümliches Verständnis von Logik offenbart. Daher möchte ich den Einwand in voller Länge wiedergeben:

> „The word *logic* has a wide range of meanings, according to context, from the ordinary logic of daily intercourse, through the logic of the expert diagnostician or detective, to the basic logic of twentieth century mathematics, and beyond that to the more recent developments of mathematical logic. Physical concepts, being by their nature vague, cannot be treated with logical rigour. On the other hand, classical dynamics, if regarded as a purely mathematical theory, admits of an axiomatic basis, as developed by Hamel [1927] and others. [Hier werden in einer Fußnote McKinsey u. a. [1953], McKinsey und Suppes [1953a] und McKinsey und Suppes [1953b] als aktuelle Beiträge genannt.] Therefore it would seem right that any systematic treatment of classical dynamics should start with axioms, carefully laid down, on which the whole structure would rest as a house rests on its foundations.
> The analogy to a house is, however, a false one. Theories are created in midair, so to speak, and develop both upward and downward. Neither process is ever completed. Upward, the ramifications can extend indefinitely; downward, the axiomatic base must be rebuilt continually as our views change as to what constitutes logical precision. Indeed, there is little promise of finality here, as we seem to be moving towards the idea that logic is a man-made thing, a game played according to rules to some extent arbitrary."

Hier wird auch der Aufgabenbereich der Logik und der logischen Analyse missverstanden. Die Reorganisation der Klassischen Mechanik nach logischen Standards verleihe der Theorie etwas Statisches und Unabänderliches, was der wissenschaftlichen Entwicklung gerade hinderlich wäre. *Wenn dem so wäre*, müsste man Synge unbedingt zustimmen. Doch betrifft das 'Unabänderliche' und 'Feste' allein die *interne Struktur*, die zur axiomatisch-rekonstruktiven Analyse der Mechanik *festgelegt* wird. Sie bestimmt den Zusammenhang zwischen den *zugelassenen Grundbegriffen* und den *begriffskonstitutiven Axiomen*. Das heißt aber nicht, dass die axiomatisierte Theorie in einem eingefrorenen Zustand bleibt, um irgendwann 'vervollständigt' zu werden, was auch immer das bei Synge heißen mag. Im Gegenteil, es sind doch das Auffinden von begrifflichen Variationen oder das Entdecken von konzeptuellen Lücken wesentliche Ziele der Methode, wie Hilbert unter dem Stichwort 'Tieferlegung der Fundamente' betont hat.[136] Das Ergebnis der Rekonstruktion zeigt im Idealfall, welche logischen wie empirischen Grenzen der Theorie bestehen. Und genau dort würde der Zerlegungsprozess, der Reduktionsprozess oder der Prozess der Analogiebildung anfangen können. Der Vorwurf, "that the theory will not be changed at all *as a result of the axiomatics* [eigene Herv.]" (Synge [1960], S. 5) steht dem Sinn einer strengen Begriffsanalyse völlig entgegen. Hier werden also gleich zwei Begriffspaare miteinander vermischt: Zum einen wird die Festigkeit des Fundamentes mit Unveränderlichkeit gleichgesetzt, zum anderen die interne (strukturelle) Betrachtung einer Theorie mit der externen konventionalistischen Haltung gegenüber einer Mehrzahl alternativer Theorien.

Wie verfehlt Synges Kritik an logischen Analysen von physikalischen Theorien ist, zeigt sich vor allem darin, dass sie ein unabänderliches Vokabular an theoretischen Grundbegriffen zur Folge hätte. Wäre tatsächlich die axiomatische Fassung einer Theorie ein unveränderliches Diktum, so würden die Begriffe der Mechanik essentielle Eigenschaften der Natur repräsentieren, und Prinzipien hätten den Charakter von unumstößlichen Gewissheiten. Nichts läge der modernen Axiomatik ferner als zu einer Art 'Prinzipiencertismus' zurückzukehren, von dem sich die Mechanik im 19. Jahrhundert, vor allem durch die einflussreichen Beiträge von Carl G.J. Jacobi oder Carl Neumann, langsam loslösen konnte.[137] Synge offenbart uns sein dogmatisches Prinzipienverständnis.

Grundbegriffe und deren axiomatisierte Einführung haben einen systemrelativen und provisorischen Charakter. Weder sind sie für die Mechanik eindeutig festzulegen, noch fragt man nach ihrer 'objektiven Wirklich-

[136] Siehe hier Abschnitte 2.3.2 und 2.3.3, sowie Tapp [2007], S. 76 f.

[137] Zum Prinzipiencertismus in der Klassischen Wissenschaftsauffassung zur Zeit Newtons, Lagranges und Eulers siehe insbesondere Pulte [2005], Abschnitt II.2.1. Die Studie belegt detailliert die historische Entwicklung ab dem 19 Jh. hin zu einem hypothetischen, prinzipienfalliblen Verständnis der mechanischen Axiomatik. Ohne das moderne (konventionalistische) Prinzipienverständnis kann die axiomatische Methode Hilberts gar nicht begriffen werden, es ist gewissermaßen Bedingung für eine erfolgreiche 'Tieferlegung der Fundamente'. In ähnlicher Hinsicht folgert Pulte [2005], S. 437, aus seiner Untersuchung: „Die Hypothetisierung und Konventionalisierung einstiger mechanischer 'Axiome' sowie die Relativierung diesbezüglicher Geltungsansprüche wurde [...] als ein *Entdogmatisierungsprozess* [rekonstruiert], der weitere wissenschaftliche Entwicklung ermöglicht: An den 'Newtonschen' Bewegungsgesetzen hängt die Raum-Zeit-Theorie der klassischen Physik, und solange sie als sakrosankt galten, konnte es keine Entwicklung *über deren Rahmen hinaus* geben [eigene Herv.]."

keit'.[138] 'Masse' und 'Inertialsystem' etwa sind *für* die Theorie der Newtonschen Mechanik unentbehrlich und im wahrsten Sinne *grundlegend*, ohne dass sie dadurch einen absoluten und theorienübergreifenden Geltungsanspruch hätten. Vor allem Pierre Duhem hat an mehreren Beispielen aus der Wissenschaftgeschichte dieses konventionalistische Merkmal von physikalischen Systemen hervorgehoben.[139] Nicht zuletzt stellt er die begriffsreduzierende, ökonomische Aufgabe einer Theorie ihrer progressiven Aufgabe der Begriffserweiterung gegenüber, ohne diese beiden Seiten gegeneinander auszuspielen.[140] Reduktion im theorieinternen und begriffseinengenden Sinn und Fortschritt im externen, begriffserweiternden Sinn entsprechen „entgegengesetzten Bewegungen" (Duhem [1908], S. 170), die sich im Erkenntnisprozess stützen und für die einheitliche Festigung eines theoretischen Bildes sorgen.

> „Zumindest scheint es sicher, dass in unserer Epoche der zweite [erweiternde und explorative] Strom mächtiger sei als der erste, indem er unsere Theorien zu einer immer verwickelteren Auffassung der Materie, die immer reicher an Attributen wird, führt." (ebd., S. 171)

Auch das erklärt, weshalb der Wert der Axiomatik bis heute so wenig erkannt wurde.

2.6.3 Der logikkritische Einwand: die Irrelevanz der logischen Analyse

Synges Einwand gegen die axiomatisierte Mechanik beinhaltet einen generellen Angriff auf die Nützlichkeit der logischen Analyse selbst. Dieses Misstrauen gegenüber der Logik hat große Beliebtheit, gerade bei Physikern und Mathematikern, die den intuitiven und explorativen Charakter von physikalischen Theorien betonen.[141] Auch Hilbert war, wie hier auf Seite 33 gesehen, nicht frei von Bedenken, ob die axiomatische Methode als rekonstruktive Tätigkeit eigentlich streng auf die Physik anwendbar ist. In Hilbert [1905], S. 120, finden wir eine beachtlich kritische Notiz zu der Frage, ob die Mechanik einer logischen Tieferlegung überhaupt bedarf, wenn sie erst einmal durch eine gesicherte Theorie, beispielsweise durch den Lagrangeformalismus, grundgelegt ist. Denn

---

[138] Diese Bezeichnung ist Neumann [1870] entnommen, der ein Wegbereiter zum modernen konventionalistischen Theorienverständnis in den Grundlagen der Mechanik gewesen ist (vgl. hierzu insbes. Pulte [2005], Kap. VII.3.2). So heißt es ausführlich im Anschluss an seine zerlegende Analyse des Trägheitsprinzipes: „Objektive Wirklichkeit [...] würde [...] den Prinzipien einer [...] Theorie immer erst dann beizumessen sein, wenn wir nachweisen könnten, dass *diese* Prinzipien die *einzig möglichen* sind, dass neben *dieser* Theorie keine zweite denkbar ist, welche den Erscheinungen entspricht. Dass einer derartigen Anforderung zu genügen, außerhalb der menschlichen Fähigkeit liegt, bedarf wohl keiner Erläuterung." (Neumann [1870], S. 23).

[139] Vgl. insbes. Duhem [1908], Kap. 6, über die primären Qualitäten.

[140] Vgl. Duhem [1908], S. 170 f.

[141] Siehe etwa Wilder [1967], S. 115.

> „[...] es handelt sich für den forschenden Physiker nur darum, das bisherige System der Wissenschaften als gesicherten Untergrund parat zu haben; auf Untersuchungen der Zusammenhänge in diesem kommt es ihm zunächst gar nicht an. Sein Vorgehen ist aber auch logisch vollkommen berechtigt, da die Widerspruchslosigkeit der - wenn auch überflüssig vielen - Annahmen durch ihren Ausdruck im arithmetischen Gebiet garantiert ist. So lange dies Princip gewahrt ist, kann man beliebig weitreichende Annahmen machen, ob sie mit der Wirklichkeit übereinstimmen oder nicht; so finden Atom- und Molekularhypothesen ihre Berechtigung."

Der theoretisch arbeitende Physiker braucht die physikalische Theorie und die Mathematik als sichere Instrumente, um in seiner Forschungsarbeit voran zu kommen. Nach Hilberts Auffassung verleiht das Vertrauen in die Korrektheit der Mathematik 'hinter' den mechanischen Prinzipien die Freiheit zur Spekulation, Freiheit, die aus Sicht einer streng deduktiven Untersuchung der *inneren* Struktur der Mechanik nicht zulässig ist. Hier beschränkt man sich darauf, die logische Zulässigkeit der Hypothesen zu prüfen. Der 'forschende Physiker' und der Logiker gehen also zwei unterschiedliche Wege, der eine vorwärts, der andere rückwärts.[142] Die Frage ist nur, ob der Weg zurück überhaupt relevant ist.

Ähnliche Bedenken zur Relevanz der logischen Analyse äußert Weyl. Er vermutet, dass *anschauliche Modelle*, die in der Physik durchaus begriffskonstitutiv sein können, durch die moderne Axiomatik ausgeschlossen werden.

> „Men like Einstein or Niels Bohr grope their way in the dark toward their conceptions of general relativity or atomic structure by another type of experience and imagination than those of the mathematician, although no doubt mathematics is an essential ingredient. Thus Hilberts vast plans in physics never matured."[143]

In diesen beiden kritischen Äußerungen über den axiomatischen Weg in der Physik schimmert nun, deutlicher als in den vorherigen Einwänden, ein Aspekt hindurch, der besondere Beachtung verdient, weil er meines Erachtens die axiomatische Methode vor ernsthafte Rechtfertigungsprobleme stellt. Es ist die Frage nach der wissenschaftlichen Relevanz der logischen Ordnung von *empirisch* basierten Theorien:

> Warum soll ich ein bewährtes, gefestigtes Gebiet der *empirischen* Wissenschaften, die Klassische Mechanik, *logisch* rekonstruieren?

Ich glaube, damit sind zwei Teilprobleme verbunden, auf die ich zum Abschluss dieses Kapitels eingehen möchte, um die Axiome der Mechanik nach Hamel anschließend daran messen zu können.

---

[142] In Wilder [1967], S. 115, wird entsprechend von 'externen' gegenüber 'internen Anforderungen' bei der Entwicklung mathematischer Konzepte gesprochen.

[143] Das Zitat ist Majer [2006a], S. 174 f., entnommen.

1. **Das Rechtfertigungsproblem**
   Eine logisch geordnete Theorie muss auf die Korrektheit der zugrunde liegenden Mathematik und auf die empirische Bewährung der Prinzipien vertrauen. Das galt besonders für die Mechanik des beginnenden 20. Jahrhunderts, als bereits eine vorrangig instrumentalistische Haltung gegenüber der Darstellung und Begründung ihrer Prinzipien vorherrschte.[144] Doch wie sollen dann *empirisch* bedeutsame Prinzipien *allein* auf dem Boden von logischen Folgerungen gültig sein? - Das ist unmöglich. Man muss sich immer auch auf Anschauung oder Intuition zurückbeziehen.

2. **Das Erklärungsproblem**
   Bei aller logischen Rekonstruktionsbemühung bleibt unklar, inwiefern ein besseres Verständnis über die mechanische Natur erzielt wird. Was *erklärt* die axiomatisierte Mechanik? Oder was erklärt sie über die Natur besser? - Der Charakter der ökonomischen Ordnung durch Axiome legt nahe, dass es sich um eine eigene Art der *Vereinheitlichung* handelt.

2.7 Zum Rechtfertigungsproblem: Kritik am Instrumentalismus und Einberufung der Intuition

Logische Ableitungssicherheit kann nicht rechtfertigen, dass die zugrunde gelegte Theorie auch wirklichkeitstreu ist, dass sie 'wahr' ist. Der Instrumentalist kann sich also nicht auf die mathematische Gewissheit seiner Axiome und der aus ihnen folgenden Axiome berufen, um die Gültigkeit seines mechanischen Systems zu begründen. In der logischen Rekonstruktion kann nichts über die empirische Gültigkeit der Theorie selbst behauptet werden.

Pierre Duhem, selbst Befürworter eines Instrumentalismus im Umgang mit physikalischen Theorien, erkannte das Problem und hat zugleich auf eine ganz entscheidende Grenze der logischen Rekonstruktion hingewiesen.

> „Die Logik liefert [...] kein einwandfreies Argument für den, der der physikalischen Theorie eine vollständig widerspruchsfreie Ordnung

[144] Vergleiche dazu Abschnitt 1.2.3 und Teil 2.1, zu dem hier gebrauchten Begriff eines 'methodologischen Instrumentalismus' insbes. Anm. 28, S. 14. Wie fest eine instrumentalistische Haltung zur Jahrhundertwende bereits in der Mechanik verankert war, zeigt allein Voss [1901], das enzyklopädische Werk ≫*Die Prinzipien der rationellen Mechanik*≪. Bereits bei der Explikation des Gegenstandes der Mechanik spricht Voss davon, dass ihr die Aufgabe zukomme, „die Vorgänge in der Natur *durch nach bestimmten Gesetzen geordnete Zahlwerte*, deren Abhängigkeit durch das mathematische Bild der Funktion dargestellt wird, [zu] beschreiben" (ebd., S. 11). Durch Axiome entwerfen wir ein „Bild der Wirklichkeit [...], dessen *Brauchbarkeit* [eigene Herv.] durch die Erfahrung zu bestätigen, resp. weiter zu erproben bleibt" (ebd., S. 14). Anschließend heißt es noch deutlicher in Fußnote 20, dass „wenn man die Theorien der Mechanik nur als Bilder ansieht, deren Übereinstimmung mit der Erscheinung keineswegs *a priori* feststeht".

> auferlegen will. Wird man zureichende Gründe für diese Ordnung in dem Prinzip, das in dem Streben der Wissenschaft nach größter Ökonomie des Denkens ausgedrückt ist, finden? Wir glauben nein." (Duhem [1908], S. 132)

Logische Schlussverfahren bzw. metamathematische Kriterien werden *auf* Aussageformen bzw. *auf* ganze Theoriestrukturen angewendet. Das heißt, sie werden auf inhaltlich vorgegebene Propositionen und Terme angesetzt, damit über die Gültigkeit des Zusammenhangs zwischen Annahmen und Folgerung Urteile getroffen werden können.[145] Wie soll die Logik dann über die inhaltliche Gültigkeit der Axiome oder über die Berechtigung der Grundbegriffe und der verwendeten Modelle entscheiden? - Diese inhaltlichen Erwägungen kann die Logik nicht leisten.

Es zeigt sich also die Gefahr, die mit einem (methodologischen) Instrumentalismus verbunden ist: Wenn *allein* die Notwendigkeit eines logischen Schlusses als einziger Garant für die Korrektheit eines Axiomensystems angenommen wird, so wäre gar nichts darüber gesagt, ob ein entworfenes Bild tatsächlich mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Man hätte, wie Ajdukiewicz diesen Fall hypothetisch skizziert, gar keine Möglichkeit zu entscheiden, ob den physikalischen Begriffen und Gesetzen tatsächlich ein empirischer Befund zugrunde liegt.

> „Accordingly, if one were to confine oneself to the method of conventions and to that of deduction, one would possess no method of direct foundation and would be condemned either to fall into a *regressus ad infinitum*, or to use unfounded premises, thus committing the fallacy of *petitio principii*." (Ajdukiewicz [1960], S. 215)

Und umgekehrt, bezogen auf den empirischen Sachbestand, könnte die Mechanik durchaus logisch widersprüchliche Annahmen beinhalten, ohne dass damit ein Grund besteht, irgend eine der Annahmen abzulehnen.[146] Logik allein kann empirische Aussagen nicht falsifizieren.

Logische Grenzen der axiomatischen Methode

Umso wichtiger scheint es, die Grenzen der axiomatischen Methode festzustellen. Wie weit reicht nun die logische Analyse in der Klassischen Mechanik? - Drei Schlusspunkte wären zu nennen.

---

[145] Die Setzung der logischen Verfahren ist ein vom Physiker bewusst 'hergestelltes' Vorgehen, wie es in Duhem [1908], S. 132, heißt: „Die Logik legt augenscheinlich dem Physiker nur eine Bedingung auf: er darf die verschiedenen Klassifikationsverfahren, die er anwendet, nicht miteinander vermengen. Das heißt, wenn er zwischen zwei Gesetzen eine *gewisse Verbindung herstellt* [eigene Herv.], muss er ganz genau angeben, durch welche der angegebenen Methoden diese Verbindung gerechtfertigt wird."

[146] So auch die scharfsinnige Behauptung in Duhem [1908], S. 131: „Wenn man sich streng an rein logische Erwägungen hält, kann man den Physiker nicht hindern, verschiedene Gruppen von Gesetzen oder sogar eine einzige Gruppe von Gesetzen durch mehrere unvereinbare Theorien zu beschreiben, man kann den Mangel an Zusammenhang in der physikalischen Theorie nicht verurteilen."

- *Reflexive Klassifizierung der Naturgesetze:*
  Die axiomatische Methode ist reflexiv und setzt die empirische Angemessenheit der Prinzipien (nach bisherigem Wissensstand) voraus.[147]

Reflexive Klassifizierung zeichnet alle großen Werke zur logischen Rekonstruktion der Mechanik aus. Wenn etwa Duhem die 'naturgemäße Klassifikation' des Theoriengebäudes fordert,[148] wenn Neumann die 'bereits mit einiger Sicherheit' vorliegenden Axiome so rekonstruiert wissen will, dass eine bessere 'Entsprechung mit den empirischen Tatsachen' erkennbar ist,[149] wenn Hertz von den 'Bildern' der Mechanik neben der logischen 'Zulässigkeit' auch fordert, dass sie 'richtig' seien,[150] wenn Mach ähnlich wie Neumann und Hertz beim Aufbau der Mechanik von einer 'Nachbildung von Tatsachen' spricht,[151] oder wenn Volkmann in jedem Schritt der axiomatisierten Mechanik eine 'rückwirkende Versicherung' oder 'Verfestigung' der Grundlagen einfordert, durch welche das Abbild der Wirklichkeit 'objektiv' werde, sich der Realität annähere;[152] so sind dies Ausdrücke einer *gemäßigten* instrumentalistischen Auffassung von Theoriedarstellungen und -vernetzungen, die auf den Boden einer intersubjektiv vorliegenden und vermittelbaren Erfahrung hinweisen. In dieser Weise lässt sich auch Hilbert am besten verstehen, wenn es heißt:

> „Die Wirklichkeit wird also daraufhin untersucht, wie weit sie sich durch begriffliche Relationssysteme darstellen lässt. Von Physikern ist es ja oft hervorgehoben worden: Die Begriffssysteme sollen Abbilder der Beziehungen sein, die sich in der Wirklichkeit vorfinden. Dementsprechend kann auch in der mathematischen Naturwissenschaft von der Wahrnehmung nur das verwendet werden, was sich durch begriffliche Beziehungen deuten lässt, worüber also eine von der Wahl der Sinne *unabhängige Verständigung* möglich ist. Es werden letzten Endes nur solche Wahrnehmungen benutzt, [... über die] eine *objektive Verständigung* [eigene Herv.] am ehesten zu erreichen ist." (Hilbert [1992], S. 17)

- *Axiome als Konventionen:*
  Axiomensysteme sind für ein Gebiet nur in einem provisorischen Sinne grundlegend. Die axiomatische Methode kann keine absolute und einzigartige Darstellung der Mechanik finden.

[147] Dies wiederholt den ersten Punkt zu Beginn dieses Kapitels auf Seite 24.

[148] Vgl. Duhem [1908], S. 135 und S. 29

[149] Vgl. Neumann [1870], S. 3.

[150] Vgl. Hertz [1894], S. 2.

[151] Vgl. Mach [1897], S. 474.

[152] Vgl. Volkmann [1900], S. IV f., S. 22 und S. 40.

Selbst wenn ein Gebiet wie die Klassische Mechanik des starren Körpers als 'weitestgehend abgeschlossen' gilt, wie schon Hamel behauptet hat,[153] weil die Grundgesetze als abgesichert gelten und kein explorativer Fortschritt mehr zu erwarten ist, so werden doch immer wieder Revisionen im Gültigkeitsbereich des mechanischen Systems erforderlich. Das liegt bereits an der einfachen Tatsache, dass immer 'Umstände' auftreten, wie Duhem sagt,

> „in denen das Symbol den konkreten Dingen nicht mehr genügt, in denen das Gesetz nicht mehr genau die Erscheinungen anzeigt. Der Ausdruck des Gesetzes muss daher von Einschränkungen begleitet sein, die die Elimination dieser Umstände ermöglichen. Diese Einschränkungen kommen uns durch die Fortschritte der Physik zur Kenntnis." (Duhem [1908], S. 233 f.)

Die Korrektur der empirischen Reichweite eines mechanischen Gesetzes ist also keine Aufgabe der axiomatischen Methode. Es geht vielmehr darum, die bestehenden Bedeutungen präzise wiederzugeben. In diesem Sinn ist die empirische Reichweite eines Axioms stets nur provisorisch und von außen vorgegeben.[154]

Kann man erwarten, mit der axiomatischen Methode ein absolut gültiges Axiomensystem der Klassischen Mechanik zu finden? - Eher das Gegenteil ist der Fall: Mehrere Axiomensysteme, *mehrere Darstellungen* der Theorie werden durch die axiomatische Methode motiviert. Der Vergleich von unterschiedlichen Darstellungen bringt versteckte Annahmen, logische Äquivalenzen und Analogien zwischen verschiedenen Gegenstandsbereichen zum Vorschein.[155]

- *Anschaulichkeit der Axiome:*
  Eine logische Form kann niemals den direkten Bezug zum Gegenstandsbereich der mechanischen Axiome, zur empirischen Bedeutung der Terme und zum Begründungsziel der Axiomatisierung ersetzen.[156] Ein Axiom muss anschaulich bleiben, man muss eine Vorstellung von seinen Modellen haben.

So heißt es in Duhem [1908], S. 135:

> „Am Grunde unserer am klarsten formulierten, am strengsten abgeleiteten Lehren, finden wir immer wieder diesen ungeordneten Haufen von Tendenzen, Bestrebungen und Intuitionen. Es gibt keine Analyse, die so tiefgehend wäre, um sie voneinander zu trennen [...]."

[153] Man vergleiche hier Abschnitt 2.3.4.

[154] Ich werde dies in Abschnitt 3.5.1 anhand der Mechanik zu Beginn des 20. Jahrhunderts konkretisieren.

[155] So kommt es auch, dass einige Befürworter der axiomatischen Methode heute ihre vorrangige Stärke darin sehen, Analogien zwischen unterschiedlichen Anschauungen und Zugängen auswerten zu können (vgl. dazu insbesondere Schlimm [2006], S. 234).

[156] Das wurde bereits auf Seite 53 betont.

Auch nach meiner Auffassung muss jede Axiomatisierung in der Mechanik intuitiv zugänglich bleiben. Wie anders wollte man etwa 'Masse' axiomatisch begreifen, wenn nicht als ein intuitiv zugänglicher Begriff, dessen Nutzen darin besteht, die sichtbaren Stoffe auf *ein* kinetisches Merkmal zu reduzieren? - Ohne eine 'innere Anschauung' oder *Intuition* wäre der Begriff der Punktmasse gänzlich unverstanden.

Der vage Begriff der 'Intuition' soll hierbei keine Entschuldigung für einen nicht verstandenen Erkenntnisprozess zur Mathematisierung der Grundbegriffe sein. Er steht für einen eigenständigen Beitrag zu unserem Urteilsvermögen über die materielle Angemessenheit von mechanischen Bildern. Es soll dabei offen bleiben, ob der Intuition eine 'reine Anschauung' korrespondiert oder ein erkenntnistheoretisches 'Schema' im Kantischen Sinn. Ich behaupte nur, dass ein Axiom ohne jede Anschaulichkeit ein leeres Konstrukt ist. Intuition bleibt also durchaus etwas Negatives, eine von logischen Beurteilungen unabhängige, nicht-empirische Erkenntnisquelle, durch welche wir aber, im positivsten Sinn, unmittelbaren Bezug zur anschaulichen Wirklichkeit haben.[157] Diese Unmittelbarkeit macht sie zu einem irreduziblen Element bei der Konstruktion und Anwendung von Axiomen der Mechanik.

Auch Hilbert hat dieses provisorische und intuitive Verständnis von Theoriestrukturen eigens für physikalische Theorien im Blick gehabt. So etwas wie eine selbsterklärende und 'vollständig erfassbare' Struktur der Mechanik bleibt ein bloß gedankliches Konstrukt.

> „Das Ziel ist [...], die physikalischen Forderungen so vollständig zu formulieren, daß der analytische Apparat gerade eindeutig festgelegt ist. Dieser Weg ist also der einer Axiomatisierung, wie sie z.B. in der Geometrie durchgeführt worden ist. [...]
> Das oben angedeutete Verfahren der Axiomatisierung wird nun in der Physik gewöhnlich nicht genau so befolgt [...]. Man *mutmaßt* meistens den analytischen Apparat, bevor man noch das vollständige Axiomensystem aufgestellt hat, und kommt dann erst *durch die Interpretation* des Formalismus zur Aufstellung der physikalischen Grundrelationen [eigene Herv.]. Es ist schwer, eine solche Theorie zu verstehen, wenn man diese beiden Dinge, den Formalismus und seine physikalische Interpretation, nicht scharf genug auseinanderhält." (Hilbert u. a. [1928], S. 2 f.)

Diese Erklärung der physikalischen Axiomatisierung weist bereits die neue *semantische* Konnotation auf. Erst eine Interpretation oder ein Modell eröffnet den Zugang zur logischen Struktur (zum 'analytischen Apparat' in Hilberts Wortlaut).[158] Das heißt, nur auf der Bedeutungsebene kann die Struk-

[157] Diese Charakterisierung von 'Intuition' entnehme ich den Attributen aus Majer [2006b], Seiten 49, 56 und 60 f., die sich dort aus der Untersuchung von Kants und Hilberts Erkenntnistheorie ergeben haben.

[158] Siehe dazu Position III. in Abschnitt 2.5.

tur der mechanischen Grundbegriffe und -gesetze ersichtlich werden, und ohne die Bedeutungsebene bleibt sie gänzlich unverstanden.

Mit Blick auf Georg Hamels Antworten zum sechsten Problem (in Kapitel 3) steht der Rückzug zur Intuition synonym für die *synthetische Methode* in der Mechanik: dass die Termini der Prinzipien nur innerhalb eines veranschaulichenden Modells ihre empirische Bedeutung erhalten, sei es durch geometrische Erklärung der Kraft- und Massenverteilungen, sei es durch vereinfachende Annahmen, durch Randbedingungen, Idealisierungen und so weiter. Die Entscheidung zwischen verschiedenen konzeptuellen, mathematischen wie anschaulichen Zugängen kann durch keinen noch so raffinierten Formalismus allein getroffen werden. 'Intuition' bleibt wesentliches, *informelles* Gegenstück zur Formalisierung der Theorie, auch nachdem die Grundbegriffe mathematisch verstanden sind. In diesem Sinn entwickelt sich die Intuition hinter der physikalischen Begriffsbildung erst *gemeinsam* mit der Theorie.[159] Soll also ein Axiomensystem der Klassischen Mechanik gerecht werden, so muss diese synthetische Herangehensweise explizit benannt werden, wie es auch für Hamels Axiomatisierung der Mechanik charakteristisch ist.

2.8 Zum Erklärungsproblem: interne Vereinheitlichung

Es ist schwierig zu sagen, in welcher Weise eine axiomatisierte Mechanik Sachverhalte, Aussagen oder Theoreme besser erklärt als ihr 'genetischer' Vorgänger.[160] Die ablehnende Haltung vieler Physiker und Mathematiker kommt vor allem daher, dass nicht einmal klar ist, ob die axiomatisierte Mechanik empirische Sachverhalte besser erklären kann. Wenn sie nichts Zusätzliches erklären kann, ist sie für die wissenschaftliche Forschung uninteressant, geradezu überflüssig, denn Wissenschaft soll erklären können. Im Folgenden wird dieser Erklärungsaspekt hinter der Axiomatik betrachtet. Es wird deutlich werden, dass die axiomatische Methode interne Relationen der Theorie enger verknüpft und damit zur Vereinheitlichung und Festigung der Klassischen Mechanik beiträgt. Dies ist die eigenständige Erklärungsleistung der Axiomatik.

2.8.1 Erklären als Antwort auf Warum-Fragen

Anerkannter Indikator für eine wissenschaftliche Ereigniserklärung ist, dass sie Antwort auf eine 'Warum'-Frage gibt, von der Art

[159] So etwa William Feller, zitiert in Truesdell [1984b], S. 491: „The intuition develops with the theory". 'Intuition' wird entsprechend als ein 'systematischer, rationaler Prozess' des Verstehens einer Theorie umschrieben (vgl. ebd., S. 498 f.).

[160] Der Begriff 'genetische Methode' in der Mathematik stammt auch von Hilbert und meint soviel wie eine intuitiv erzeugte Begriffskonstruktion, ohne dass deduktive Merkmale die Begriffsbildung prägen. Siehe insbes. Hilbert [1900b], S. 180, und Hilbert [1905], S. 9-11.

»Warum ist Ereignis E eingetreten?«.[161]

Zum Beispiel fragt man mit »Warum führt die Erde eine Präzessionsbewegung aus?« nach der kausalen Ursache eines empirisch belegbaren Ereignisses. Die Theorie der Kreisel liefert eine Erklärung für ganze Ereignisklassen, die auch die Präzessionsbewegung der Erde umfasst. Doch bei aller Abstraktion und Verallgemeinerung ist es durchaus zweifelhaft anzunehmen, eine Axiomatisierung könne dazu beitragen, bessere *Realgründe* oder *kausale* Gründe für Ereignisse aus der mechanischen Natur anzugeben. Die axiomatische Methode sucht nicht nach Ereigniserklärungen, die sind ohne Axiomatisierung genauso gut möglich. Die erklärenden Gesetze der Mechanik sind bereits in sich stimmig, empirisch bestätigt und bewährt, wenn die axiomatische Methode zum Tragen kommt. Fragen von der Art »Warum haben Körper eine Masse?« sind dagegen sinnlos, unbeantwortbar. Denn die Masse wird in der axiomatischen Fassung der Klassischen Mechanik vielmehr zu einem irreduziblen Grundbegriff erhoben, was keine eigene Erklärungsleistung abgibt. Die implizite Definition der Masse greift nur einen konstitutiven Aspekt des Begriffes heraus.[162] Eine 'vertiefende' Erklärungssuche würde dagegen aus der Klassischen Mechanik herausführen und hinein in die Elementarteilchenphysik, in der die Prinzipien der Klassischen Mechanik nicht mehr gelten.

Die axiomatisierte Mechanik beantwortet Warum-Fragen, die das Begriffssystem der Klassischen Mechanik *als Ganzes, als eine Einheit* betreffen.

- Warum ist die Existenz eines Inertialsystems notwendig, damit die Gesetze der Newtonschen Mechanik gelten?
- Warum gilt das Gegenwirkungsprinzip (das dritte Newtonsche Axiom) in allen mechanischen Systemen?
- Warum ist die Mechanik der starren Körper, oder gar die Mechanik deformierbarer Systeme, nicht ohne zusätzliche Annahmen aus der Punktmechanik deduzierbar?
- Warum ist der Momentensatz ('Eulers Grundgesetz') ein eigenständiges Prinzip neben dem Newtonschen Grundgesetz?
- Warum ist die Mechanik der starren Körper in sich abgeschlossen und widerspruchsfrei?

Dies sind Fragen, die sinnvoll durch die axiomatische Behandlung der Mechanik thematisiert werden und durchaus beantwortet wurden. An die Stelle eines Explanandums für Ereignisse oder empirische Sachverhalte treten hier *deduktive* Verknüpfungen, die den *Gültigkeitsbereich* von Gesetzen

[161] Man vergleiche Hempel und Oppenheim [1948], S. 135 f.; oder auch Schurz [2007], S. 81.

[162] Vergleiche Abschnitt 2.3.1.

der Klassischen Mechanik präziser fassen. Ganze *Gesetzesklassen* werden im systematischen Zusammenhang betrachtet.

Man kann sich darüber streiten, ob hier nach kausalen Erklärungszusammenhängen gesucht wird oder ob es sich um rechtfertigende Begründungen, um *Glaubensgründe* handelt.[163] Die Frage nach dem realen Erklärungspotential hängt empfindlich davon ab, ob man die hier relevanten Glaubensgründe auf Realgründe reduziert. Das Zerreißen eines Gummibandes hat, um ein Beispiel zu geben, seinen realen Grund darin, dass beidseitig die Muskelkraft der Hände und Arme eine Überdehnung des Bands bewirkt haben. Die schmerzliche Reaktion des Bands auf die Hände ist eine spürbar reale Folge des Zerreißens. Doch wird man kaum das Gegenwirkungsprinzip als Realgrund für diesen dynamischen Vorgang nennen, sondern eher als Begründung des Modellierungsverfahrens. Die Reduktion von Glaubensgründen auf Realgründe ist also bei Prinzipien nur schwer einzusehen.[164] Sie ist unter anderem davon abhängig, ob auf der Ebene der abstrakten Prinzipien selbst ein realistischer Bezug zur Natur behauptet wird.[165]

2.8.2 Erklären als Vereinheitlichung

Diese angedeuteten Schwierigkeiten, das Erklärungspotential einer axiomatisierten Theorie zu beschreiben, setzt sich fort bei der Suche nach einem Erklärungsmodell. Die deduktive vernetzende Funktion der Axiomatisierung legt zunächst nahe, dass eine abstrahierte Version des *deduktiv-nomologischen* Modells der Erklärung (kurz: DN-Modell) vorliegt. Abstrakter wäre dieses Modell insofern zu nennen, als es sich um keine Ereigniserklärung handelt, sondern um eine eigentümliche Gesetzeserklärung. Während nun Hempel und Oppenheim [1948] dieses Modell der Gesetzeserklärung nur beispielhaft skizziert, wird etwa in Schurz [2007] vorgeschlagen, wie es analog zur Ereigniserklärung aussieht. Grob gesagt wird ein Gesetz G dadurch erklärt, dass es eine logische Folgerung aus den Axiomen der Theorie und partikularen Randbedingungen ist.

Mir geht es nicht darum, das DN-Modell der Gesetzeserklärung in Frage zu stellen. Unklar scheint mir aber, ob es auf die reflexive Zielsetzung der Axiomatisierung zutrifft. Sowohl das Explanandum G als auch das Expla-

[163] Zum Begriff ’Realgrund’ versus ’Glaubensgrund’ siehe auch Schurz [2007], S. 81. Man spricht demnach von einem Glaubensgrund, wenn er zu dem Glauben veranlasst, dass ein Ereignis tatsächlich eingetreten ist oder eintreten wird.

[164] Eine weitere Übersicht gibt etwa Schurz [2007], Kap. 5.

[165] Das wäre an dieser Stelle der Einstieg in die *Realismusdebatte* um Grundgesetze, die ich hier auslassen möchte. In jedem Fall sei darauf hingewiesen, dass die Ontologie hinter den Gesetzen und hinter den Phänomenen keinesfalls gleichgesetzt werden darf. (Siehe dazu Stöckler [1994], S. 56.) Letztlich ist das der Grund, weshalb ich die Diskussion um ’Ontologien’ in den Grundlagen der Mechanik für weniger zielführend halte als die Diskussion um Anschauungen und Zugänge, weshalb ich auch nicht von ’Ontologien’ sprechen möchte.

nans, die Theorie, sind hierbei bereits bekannt. Es werden also keine neuartigen Gesetze deduziert, und die Theorie wird nicht *extern* erweitert. Axiomensysteme erklären nicht dadurch, dass weitere Sätze oder Theoreme gefolgert werden. Der entscheidende Unterschied zum gewöhnlichen deduktiven Verständnis ist, dass neue Erklärungen durch *interne* Verknüpfungen entstehen, ohne dass der Gegenstandsbereich erweitert wird. Statt einer Konjunktion neuer Folgerungsgesetze werden *disjunktiv* weitere Antezedenzbedingungen zur Theorie ergänzt. Ich werde auf diesen Aspekt des 'deduktiven Arguments' der Erklärung (nach Schurz [2007], S. 73) in Abschnitt 4.3.2 zurückkommen und schematisch erläutern.

Meines Erachtens läuft Erklären durch Axiomatisieren am ehesten auf die Vereinheitlichung der Theorie hinaus: auf Festigung der Grundannahmen, auf deduktive wie reduktive Verknüpfungen zwischen Annahmen und Folgerungen.[166] Nach dem *Vereinheitlichungsansatz* wissenschaftlicher Erklärung, der vor allem durch Friedman [1974] und Kitcher [1981] bekannt wurde, steht neben dem deduktiven Zusammenhang auch das wissenschaftliche Verstehen einer Theorie im Vordergrund. Das Verstehen ist Ergebnis einer Erklärung, in der die Zahl der unverstandenen Merkmale eines Systems minimiert wird.[167] Leitgedanke ist, dass „[a] world with fewer independent phenomena is, other things equal, more comprehensible than one with more" (Friedman [1974], S. 15).

Je mehr also die Gesetze zu einer Theorie vereinheitlicht sind, desto besser lässt sich mit ihr ein Phänomen oder eine Regularität erklären. Newtons Theorie der Gravitation vereinheitlicht Keplers Gesetze zu einem einzigen Kraftgesetz, die kinetische Gastheorie vereinheitlicht die Gasgesetze zu einem mechanischen Verhalten der beteiligten Gasmoleküle, die wie Punktmassen behandelt werden.[168] Die Kontinuumsgleichung nach Euler und Cauchy vereinheitlicht das dynamische Verhalten von Flüssigkeiten und deformierbaren Feststoffen.[169] Lagranges Prinzip der virtuellen Arbeit ermöglicht die Vereinheitlichung verschiedenster mechanischer Massensysteme, indem nur ein einziges dynamisches Reaktionsverhalten des Systems vorausgesetzt wird.

Es mag durchaus sein, dass unterschiedliche Argumentationsmuster die

[166] Siehe dazu die Funktionen der axiomatischen Methode in Abschnitt 2.3.

[167] Man vergleiche Friedman [1974], S. 15. In Stöckler [2000], ein Plädoyer für einen pragmatischen Vereinheitlichungsansatz in der Physik, heißt es prägnant auf Seite 181: „Erfolgreiche Vereinheitlichungen verringern die Menge der nicht begründbaren Annahmen und erzeugen so Verstehen". Als klassischen Vorläufer dieses Erklärungsbegriffes möchte ich erneut auf Neumann [1870] hinweisen. So heißt es dort auf Seite 13: „Und wenn wir vorhin sagten, der Physiker habe die Aufgabe, die Erscheinungen, welche sich in der Natur darbieten, zu *erklären*, so werden wir uns gegenwärtig in dieser Beziehung genauer ausdrücken müssen, indem wir sagen, er habe die Aufgabe, jene Erscheinungen zurückzuführen auf möglichst wenige *willkührlich* zu wählende Principien, mit anderen Worten, sie zurückzuführen auf möglichst wenige *unbegreiflich* bleibende Dinge".

[168] Diese Beispiele nennt Friedman [1974], Seiten 9 und 14. Siehe auch Kitcher [1981], S. 513.

[169] Gemeint ist das Grundgesetz (**CM1**) aus Abschnitt 3.3.5.

Art der Vereinheitlichung und damit verschiedene Erklärungen bestimmen.[170] Die axiomatische Methode beschränkt sich allerdings darauf, nur logische Argumentationsschemen zuzulassen und sie vom materiellen Gehalt eines Arguments zu trennen.[171] Dass der materielle Gehalt der Axiome, Definitionen und Erläuterungen zur Klassischen Mechanik, von der logischen Beweisstruktur getrennt wird, ist wie in allen mathematischen Disziplinen eine wesentliche Voraussetzung dafür, dass die axiomatische Methode gelingt. Dadurch ist sie überhaupt in allen Abstufungen der logischen Strenge (nach Abschnitt 2.5) anwendbar.

Es geht also vielmehr darum, welche *Art* der Vereinheitlichung in der Axiomatik tatsächlich vorliegt. Eine gesetzesartige oder *nomologische Vereinheitlichung* besteht darin, die Zahl der Gesetze aus verschiedenen Bereichen auf wenige, fundamentalere Gesetze zu reduzieren, um ein breiteres Spektrum an erklärbaren Phänomenen abzudecken.[172] Über die wissenschaftliche Berechtigung dieses Vorgehens kann es kaum Zweifel geben, die theoretische Physik gibt ein Fülle an Erklärungserfolgen dieser Art her. Als Kriterium einer echten nomologischen Vereinheitlichung kann gerade dieser reduktive Erfolg angesehen werden:

> „Die vereinigte Theorie muss Aussagen machen können, die vor der Vereinigung noch nicht ableitbar waren. Dieser Vorhersageerfolg wird sicherlich auch in einer empiristischen Wissenschaftstheorie als Erfolg des Einheitsstrebens anerkannt." (Stöckler [2000], S. 172).

Der Unterschied zur nomologischen Vereinheitlichung ist allerdings, dass die axiomatische Methode eine *innertheoretische* Vereinheitlichung vorsieht: Die 'Aussagen', die wir nach der Axiomatisierung treffen, haben gewiss *keine neuartige empirische* Bedeutung, sondern sorgen eher für zusätzliche 'innertheoretische' Verknüpfungen. In diesem Sinne wird das Problem der Erklärung durch Axiome in Hintikka [2009], §10, verdeutlicht und mit der Frage verbunden, inwiefern überhaupt logische Analysen wissenschaftlich erklären. Dort und in Halonen und Hintikka [1999] wird ein Vereinheitlichungsbegriff skizziert, der geeignet erscheint, die Erklärungsleistung axiomatisierter Theorien treffend zu beschreiben.

Demnach erklären Axiomensysteme durch *Offenlegen von Interpolationsschemen* innerhalb eines Gegenstandsbereichs: Man entwickelt *Zwischengesetze* innerhalb der Theorie, die die deduktiven Zusammenhänge zwischen Annahmen und Folgerungen enger knüpfen. Das können etwa Theoreme sein, die den Grenzprozess zwischen verschiedenen Systemmechaniken beschreiben. So ist das Prinzip von der Existenz einer Flächenkraft ein solches

[170] Siehe Kitcher [1981], insbes. §5, dort 'Argument Patterns' genannt.

[171] Hierauf wird auch in Halonen und Hintikka [1999], S. 30 f., hingewiesen und gleichzeitig kritisiert, dass erklärende, 'materielle' Argumentstrukturen mit logischen Schlussweisen vermischt werden, was in Kitchers Variante einige Unklarheiten hinterlässt.

[172] Siehe Stöckler [2000], S. 170, wo noch genauere Unterscheidungen vorgeschlagen werden.

Interpolationsschema, weil hiermit die Klassische Mechanik der Kontinua und der Punktmassen logisch miteinander verknüpft werden (dazu mehr im kommenden Kapitel). Diese Zwischengesetze können auch verallgemeinerte Schemen sein, die aus Gesetzesformen und Zusatzbedingungen entstehen.[173] Das wären so genannte 'konstitutive Gleichungen', die verschiedene Materiestrukturen nach der Art ihrer Reaktion auf Kraftwirkungen zusammenfassen (hierauf gehe ich in Abschnitt 5.1 kurz ein). Oder es werden mechanische Anwendungen durch spezielle Gesetze mit Randbedingungen klassifiziert.[174] So schafft Interpolation, wie Hintikka anlehnend an ein logisches Theorem nach William Craig sagt,[175] zwar keine physikalisch neuartigen Theoreme, denn der physikalisch gültige Grundbereich wird nicht erweitert. Man schafft dafür neue 'Covering Laws', neue Repräsentationstheoreme und Deduktionswege auf bewährtem Gebiet. Daher ist diese Art der Vereinheitlichung am treffendsten eine innere oder *interne Vereinheitlichung* zu nennen. Mir scheint dieser Ansatz vielversprechend, weil sich zeigen wird, dass auch die folgenden Axiomatisierungen der Mechanik diese Erklärungsleistung widerspiegeln.

2.9 Ein Fazit: Informelle versus formale Axiomatik in den Grundlagen der Mechanik

Die Untersuchung zielt auf die Frage ab, was die logisch-axiomatische Rekonstruktion der Klassischen Mechanik leisten kann und wo die natürlichen Grenzen dieses Vorhabens liegen. Dieses Kapitel geht dabei von den methodologischen Anforderungen aus, die sich aus Hilberts axiomatischer Methode an die Grundlagen der Mechanik des beginnenden 20. Jahrhundert ergeben haben (Abschnitt 2.3). Neben der begrifflich-konstitutiven Rekonstruktion eines mechanischen Systems, das durch informelle, implizite Definitionen zu repräsentieren ist, sind deduktive und metamathematische Gütekriterien an die Theorie der zentrale Bestandteil der Methode. Das sind vorrangig Fragen nach der Unabhängigkeit der Axiome und nach der Widerspruchsfreiheit des Systems, während die Forderung nach begrifflicher und logischer Vollständigkeit noch in Hilberts eigenen Erläuterungen unklar und unerreicht blieb. Einwände, die der axiomatischen Metho-

[173] Man vergleiche zu diesen Schemen Halonen und Hintikka [1999], S. 43 f., dort auch wie lokale 'Covering Laws' behandelt.

[174] Bekanntestes Beispiel ist sicherlich der Kreisel als Anwendung der Drehbewegungen und Trägheitsmomente. Oft werden in der der Statik verschiedene Träger eingeführt, Gelenkträger, das Getriebe, der biegsame belastete Träger usw., je nachdem, wie weit die Anwendung der Momentenwirkungen schon fortgeschritten ist. Man vergleiche dazu etwa Hamel [1912], §32: 'Systeme aus einer endlichen Anzahl starrer Körper'.

[175] Gemeint ist das 'Interpolationstheorem' der Modelltheorie (vgl. etwa Monk [1976], Kap. 22). In Halonen und Hintikka [1999], S. 44 f., wird es explizit verwendet, um die Bildung von Zwischengesetze schematisch zu illustrieren.

de verschiedenste Vorwürfe der wissenschaftlichen Unzulänglichkeit machen, konnten damit eingeschränkt werden, dass der regressive und instrumentalistische Kern der Methode nicht verstanden wird (Abschnitt 2.6). Es handelt sich - wie die philosophische Analyse selbst - um eine 'Tätigkeit zweiter Ordnung', die keine explorativen Ziele verfolgt, sondern die vielmehr auf eine interne Vereinheitlichung der Theorie hinausläuft, einerseits als deduktiv-vernetzende 'Tieferlegung der Fundamente', andererseits als reduktiv-zerlegende Grundlegung verstanden (Abschnitt 2.3.2).

So zeigt sich nun, dass es beim Anwenden der axiomatischen Methode auf die Klassische Mechanik, beim Beantworten des sechsten Problems Hilberts, mehrere Richtungen gibt, an denen man sich orientieren kann.

I. Physikalische Begriffsbildung

Welche physikalischen, anschaulichen Annahmen basieren auf den Axiomensystemen zur Klassischen Mechanik? - Das ist die Frage nach verschiedenen konzeptuellen, prinzipienorientierten Darstellungen der Mechanik selbst. Wir werden im folgenden Kapitel 3 sehen, dass alle Axiomgruppen zur Klassischen Mechanik entscheidend von der seit Beginn der rationalen Mechanik begleiteten Grundanschauung von *diskreten Punktmassen* einerseits gegenüber der Vorstellung von *kontinuierlich* verteilten Elementen zu einem Körper andererseits geprägt sind. Diese anschauliche Gestaltung wird somit direkt mit der theoretischen Vernetzung durch die Axiome verbunden sein. Es ist der physikalisch-konzeptuelle Aspekt des Hilbertschen Problems, der vorrangig von Georg Hamel angegangen und ausführlich beantwortet wurde. Die Axiomatisierung der Mechanik betrifft also zuallererst das implizite Definieren der mechanischen Grundbegriffe, wie es hier in Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 erläutert wurde.

II. Deduktive Grenzübergänge

Daran knüpft sich sogleich das Erklärungsproblem des vorigen Abschnittes 2.8 an: Welche Regularitäten der mechanischen Natur lassen sich durch interne Vereinheitlichung des Axiomensystems besser erklären? - Auch hier werden sich erste Antworten in Hamels Deduktionsthese im kommenden Kapitel finden lassen. Erklärungen werden *relativ zu* der vorausgesetzten Systemmechanik erzielt, indem logische Grenzübergänge und Deduktionen aus anderen Grundgesetzen aufgezeigt werden.[176] Das bemerkenswerteste Ergebnis in den Grundlagen der Klassischen Mechanik, das bereits zur Jahrhundertwende entwickelt und von Hamel in axiomatische Gestalt gebracht wurde, ist die Einsicht, dass die Grundgesetze und -begriffe je nach Systemmechanik ganz unterschiedlich ausfallen können, obwohl alle

[176] Der Begriff 'Systemmechanik' meint hierbei die jeweilige Ausgestaltung der Mechanik von einer Menge an Grundbegriffen und Axiomen (impliziten Definitionen) für einzelne Körper hin zu einer vorläufigen Gesamtheit, die mehrere Körper ('Massensysteme') umfasst. Siehe hierzu Abschnitte 3.1 und 3.4.

die eine Klassische Mechanik repräsentieren. Entsprechend muss es relativ zum vorausgesetzten System mehrere Grenzübergänge innerhalb der Klassischen Mechanik geben.

III. Logische Repräsentationsform
Welche *formgebenden* Strukturen oder Gesetze begleiten die Axiomatisierung? - Das ist nicht nur eine Frage nach der Analyse der Grundbegriffe. Es werden zudem metatheoretische Kriterien der Logizität beansprucht, die den Grundlagenforscher dazu bewegen, von einer 'logischen Deduktion' zu sprechen. Es wurden hier drei Standpunkte der Logizität in Abschnitt 2.5 vorgeschlagen und eng mit dem hypothetischen Theorienbegriff verknüpft. Es liegt nahe zu fragen, welche der drei logischen Formgebungen einer axiomatischen Repräsentation der Mechanik am besten gerecht wird. Die Entscheidung über die Relevanz von metamathematischen Merkmalen, wie in Abschnitt 2.3.4 erläutert, ist hierbei besonders zu berücksichtigen.

Gerade die Auswahl der Repräsentationsform (**III.**) ist eine Entscheidung zwischen formaler und informeller Axiomatik. Sie ist bei Hilbert nicht entschieden und wird hier in Kapitel 4 aufgegriffen, kann aber nicht in aller Ausführlichkeit behandelt werden. Ich behaupte lediglich, dass neue bemerkenswerte Aspekte in Georg Hamels Grundlagen dazu anregen, zu einem offenen informellen Axiomatisierungsweg zurückzukehren.

Bemerkenswert für diesen Gegensatz zwischen informeller und formalisierter Axiomatik ist ein Grundlagenstreit, der Mitte der 1950er zwischen Vertretern der Stanford-Berkeley Schule (McKinsey, Suppes und Tarski) und den Mitbegründern der modernen Kontinuumsmechanik (Hamel, Noll und Truesdell) in der Auffassung um die Klassische Mechanik zu einer unvereinbaren Konfrontation geführt und bis heute keine einheitliche Konvention hervorgebracht hat. Es wird sich, wie ich in Kapitel 4 behaupte, eine ganz neuartige Sichtweise auf diese Phase der Grundlagendiskussion in der Mechanik ergeben.

- Auf der einen Seite verfolgen die Vertreter der Kontinuumsanschauung den axiomatischen Weg mit der Absicht, die taditionellen Bereiche der Mechanik *physikalisch* zu vereinheitlichen. Die Motivation zur Axiomatik liegt also in der Suche nach einem Begriffsfundament, das ein möglichst breites Spektrum der traditionellen Mechanik abdecken soll. *Informelle* Repräsentation wird dabei ohne inhaltliche Beschränkung in Kauf genommen.

- Auf der anderen Seite stehen die Vertreter einer logisch orientierten Schule, die mit der modernen Modelltheorie eine *methodologische* Vereinheitlichung in Aussicht stellen. Ein deduktiver Grenzübergang (in **II.**) wird nur als modelltheoretischer Beweis akzeptiert. Damit das Instrumentarium der Modelltheorie greifen kann, beschränken sich die

> Autoren zunächst auf die Rekonstruktion der einfachen Punktmechanik. Eine *formalisierte* Darstellung der Axiome wird auf Kosten inhaltlicher Beschränkungen in Kauf genommen.

Es bleibt letztlich ein Streit zwischen *methodischer und physikalischer Einheitlichkeit* in der Mechanik. Ohne Zweifel hat die 'Formoffenheit' der axiomatischen Methode, wie hier in Abschnitt 2.3.8 erläutert, dazu beigetragen, dass zwei Bedeutungen der logischen Rekonstuktion in der Mechanik nebeneinander laufen. Es sind zwei *Ausrichtungen*, zwei Interpretationen der axiomatischen Methode.

Hilbert selbst hat, in Anbetracht der damals schwierigen Fragen auf dem Gebiet der Mengenlehre und der Logik einerseits und andererseits in der Frage nach einem mathematischen Fundament der gesamten Mechanik, keine Entscheidung zugunsten einer Ausrichtung treffen wollen. So beachte man die Betonung des 'und' in folgendem Auszug aus Hilbert [1905], S. 5:

> „Diese gewaltigen Schwierigkeiten können in der That nicht anders behoben werden, als durch einen neuen strengen Aufbau der mathematischen Disciplinen **und** der Logik selbst, den der Mathematiker im Interesse seiner eigenen Wissenschaft in die Hand nehmen muß."

Die weitere Untersuchung richtet somit den Blick auf diese zwei Richtungen der logischen Rekonstruktion innerhalb der Klassischen Mechanik, mit dem Ziel, ihre Reichweiten und Schwierigkeiten aus neutraler Sicht deutlich zu machen.

3 Hamels Grundlagen der Mechanik: Antworten auf Hilberts Problem

3.1 Einleitende Übersicht: Die Rekonzeption der Klassischen Mechanik durch Georg Hamel

Es bleibt immer eine bewusste Entscheidung, dem Weg der axiomatischen Methode zu folgen, um die Klassische Mechanik nach logischen Kriterien zu rekonstruieren.[1] Mit einem Axiomensystem werden Grundbegriffe aufgestellt. Es werden notwendige Begriffsmuster in Form von impliziten Definitionen hervorgehoben, von denen man nachweisen kann, dass sie das Gerüst der Mechanik tragen können. Eine sichere Struktur an Grundbegriffen zu erkennen, aus dem Labyrinth an Formalismen und Methoden der Mechanik, stellt eine immense systematische Schwierigkeit dar, die keineswegs erst im 20. Jahrhundert deutlich wurde. Das vorherige Kapitel zur methodologischen Seite einer axiomatischen Behandlung der Mechanik legt nahe, dass bereits der gesetzte logische Rahmen, der Standard der Logizität, ganz wesentlich die Ausgestaltung der Axiome mitbestimmt. Die Schwierigkeit der axiomatischen Methode äußert sich bereits darin, ob man sich für eine formale oder für eine informelle Darstellung von 'Axiomen der Klassischen Mechanik' entscheidet.

Dieses Kapitel wird nun den *physikalischen* Hintergrund zum sechsten Problem Hilberts beleuchten und zeigen, dass es durchaus liegen gebliebene *konzeptuelle* Unklarheiten innerhalb der Klassischen Mechanik sind, die in das Zeitalter der neuen Mechaniken (Quantenmechanik und Relativitätstheorie) hineingetragen wurden und bis Mitte des 20. Jahrhunderts einen Prioritätenstreit zwischen Punkt- und Kontinuumsmechanik hervorbrachten. Es bleibt, auf Ebene der Grundbegriffe, ein Gegensatz zwischen Punkt- und Kontinuumsanschauung, der die Klassische Mechanik entweder als Theorie der Fernwirkung oder als Nahwirkungstheorie von Trägheitskräften begreiflich macht.

Die voraxiomatische Phase: rationale Mechanik zur Jahrhundertwende

Die Kommentierung des Hilbertschen Problems (Abschnitt 3.2) wird zunächst zeigen, dass die Rekonzeption der Mechanik unmittelbar mit der Frage verbunden ist, ob die dynamischen Grundbegriffe durch eine Punktmassenvorstellung oder durch eine Kontinuumsanschauung be-

[1] Für C. Truesdell ist es eine solche Entscheidung zur axiomatischen Methode gewesen: „After studying those notes [d.i. die Notizen zu Hilberts Vorlesungen], in my own exposition from 1952 onward I followed Hilbert's lead, not in detail but in standpoint and program [...].” (Truesdell [1984a], S. 137).

stimmt sind. Die Zusammenfassung der damals anerkannten Begriffsschemen (Abschnitte 3.3) wird deutlich machen, dass diese Frage auf *disjunktive* Lösungen mit mehreren nebeneinander stehenden Axiomatisierungen von *Systemmechaniken* hinausläuft. Der Begriff 'Systemmechanik' stammt von Georg Hamel und meint eine Gruppe von Begriffen und Gesetzen, die notwendig sind, um die Kinetik von Massensystemen in einer vorläufigen Gesamtheit darzustellen. Schon zur Jahrhundertwende war bekannt, wie ich erläutern werde, dass es mehrere solcher Systemmechaniken gibt, die jeweils irreduzibel sind und unabhängigen Zugängen zur Klassischen Mechanik entsprechen. In Hilberts Problem wird schließlich auch die Frage thematisiert, wie die Systemmechaniken logisch ineinander übergehen, wie so genannte Grenzprozesse oder *Grenzübergänge* gestaltet werden können.

Ein mechanisches System zu axiomatisieren und diese Grenzübergänge zwischen den Systemmechaniken durchzuführen, beinhaltet eigentlich zwei unterschiedliche Probleme. Grundlagenforscher wie Hilbert und andere nach ihm denken diese beiden Probleme zusammen, als erfolgreiche Anwendung der axiomatischen Methode auf die Klassische Mechanik. Ein Rückblick auf den Zustand der Mechanik zur Jahrhundertwende wird aber zeigen, dass beide Probleme zum Teil schon beantwortet wurden. So werden uns vor allem Ludwig Boltzmanns Beiträge in den Grundlagen der Mechanik den philosophischen Gegensatz zwischen Atomismus und Phänomenalismus im Hilbertschen Problem erläutern können (Abschnitt 3.5.2). Außerdem betrachte ich die Grundlagendiskussion bei Aurel Voss, Paul Stäckel und Paul Volkmann (Abschnitt 3.5.3). Sie wird die pragmatische Lehrbuchmeinung zum Grenzübergang zwischen Punktmasse und Kontinuum verdeutlichen, die bis heute den physikalischen Umgang mit dem Anschauungsgegensatz zwischen Punkt- und Kontinuumsmechanik bestimmt.

Georg Hamels Lösungsskizze

Nach Vorgabe des Hilbertschen Problems gelang es *Georg Hamel*, sowohl die Klassische Mechanik nach der axiomatischen Methode umfassend zu organisieren, als auch Antworten zu möglichen Grenzprozessen zwischen den damals bewährten Systemmechaniken zu geben. Er rekonzeptualisiert *und* schafft logische Verbindungen zwischen den Systemmechaniken. In diesem Sinn ist Hamels Beitrag ein vorrangiges Beispiel für die Ausführung der axiomatischen Methode auf einem empirischen Wissensgebiet.

Die Klassische Mechanik wird gleich in mehreren Hinsichten intern vereinheitlicht:

- Auf der Basis verschiedener Ausführungen des Newtonschen Grundgesetzes können die vier Systemmechaniken - die Punktmechanik, die Mechanik starrer Körper, die klassische Kontinuumsmechanik und die analytische Mechanik - axiomatisch gefasst werden (Abschnitt 3.6).

- Es werden je nach Systemmechanik einzelne Prinzipien aus anderen, 'tiefer liegenden' Prinzipien deduziert. Sie verlieren dadurch den Charakter von irreduziblen Grundprinzipien. Vorrangiges Beispiel ist das Newtonsche Gegenwirkungsprinzip: Es ist in der Kontinuumsmechanik kein Axiom, sondern ein deduzierbarer Satz. Auf der anderen Seite findet Hamel das von ihm genannte 'Boltzmannaxiom', das zur Formulierung des Momentensatzes notwendig ist. Die Prinzipien werden also nach *ökonomischer* Rücksicht organisiert (Abschnitt 3.7).

- Auf dem Weg der Kontinuitätshypothese kann die von Hilbert kommentierte Grenzgangfrage in der Grundlagen positiv beantwortet werden. Die Prinzipien werden nach *logischer* Rücksicht organisiert, wie es die axiomatische Methode vorgegeben hat (Abschnitt 3.7.5).

- Es gelingt teilweise der Nachweis, dass die vier Systemmechaniken zueinander *unabhängige* Zugänge zu ein und derselben Klassischen Mechanik sind (Abschnitt 3.8).

Für Clifford Truesdell sind Hamels Grundlagen bereits das wegweisende Anzeichen dafür gewesen, die Klassische Mechanik vom Kontinuumsansatz her zu verstehen. Im Übrigen sei

> „Professor Hamel the only living person, who has made a significant contribution to the axiomatic and conceptual foundations of mechanics."[2]

Vereinzelt gab es weitere Zeitgenossen Hamels, die sich bis Mitte des 20. Jahrhunderts mit den Grundlagen der Mechanik intensiv beschäftigt haben.[3] Sachlich und historisch stellen sich Truesdells Einschätzungen und seine eigene Rekonzeptionen allerdings als so überzeugend heraus, dass ich mich in erster Linie auf Hamels Werk beziehe, um dies als *erste Antwort* zur Axiomatisierung der gesamten Klassischen Mechanik zu verstehen:

> „[Hamel] must be regarded as the pioneer in twentieth-century axiomatic studies of mechanics." (Truesdell [1992], S. 18)

Auch aktuelle Studien zur Geschichte der Kontinuumsmechanik bestätigen die durchaus vernachlässigte, aber doch vorrangige Rolle Hamels in den Grundlagenfragen des 20. Jahrhunderts. In Maugin [2013], S. 28, wird hinsichtlich der Prinzipienforschung zur Mechanik Hamel gemeinsam in einer Reihe mit Saint-Venant, Hertz, Duhem, Mach und Hellinger genannt.

[2] Truesdell im Jahr 1952, abgedruckt in Truesdell [1984d], S. 522.

[3] Hierzu wären P. Painlevé, R. Marcolongo, M. Born, C.G. Pendse, H. Hermes und H. Simon zu nennen. Später kommt die Stanford-Schule um J.C. McKinsey und P. Suppes hinzu. Sie alle beziehen sich nicht explizit auf Hilberts Problem, haben unterschiedlichste Motivationen, um nur *einzelne Aspekte* der Klassische Mechanik zu rekonstruieren. Man vergleiche zur Übersicht etwa Benvenuto [1991], S. 10, und die Bibliographie in Truesdell und Toupin [1960], S. 788 ff.

Die wissenschaftsphilosophische Dimension der Hamelschen Grundlagen

Es wird mir in dieser Untersuchung der Hamelschen Lösung zum sechsten Problem Hilberts weniger um eine historische Einordnung in die Mechanik des 20. Jahrhunderts gehen, sondern vielmehr um ihre wissenschaftsphilosophische Relevanz. Welche Erkenntnisse über die logische Struktur der Klassischen Mechanik konnten gewonnen werden? - Welche Schwierigkeiten sind im Prozess der Axiomatisierung aufgetreten, die eine strenge Ausführung der axiomatischen Methode begrenzen? - Kurzum, wie weit reicht die logische Rekonstruktion für eine gefestigte empirische Theorie wie die Klassische Mechanik?

Dieses Kapitel ist zentral den Resultaten von Georg Hamel in den Grundlagen der Klassischen Mechanik gewidmet, weil ich davon überzeugt bin, in seinen axiomatischen Ausführungen konstruktive Antworten gefunden zu haben. Mit Ausnahme einzelner Aspekte in McKinsey u. a. [1953] und Truesdell [1984d] gibt es jedoch keine Rezensionen zu den Hamelschen Ergebnissen, selbst von denjenigen Wissenschaftsphilosophen nicht, die sich intensiv mit Grundlagenfragen beschäftigt haben.[4] Insofern soll dieses und das noch folgende Kapitel einen Anstoß dazu sein, das Hamelsche Werk wissenschaftsphilosophisch zu beleuchten.

So fasse ich hier nicht nur eine Auswahl an deduktiven Ergebnissen zusammen, die ich als 'Theoreme' wiedergebe, und erläutere nicht nur Hamels Untersuchungen zur Unabhängigkeit der jeweiligen Systemmechaniken. Ich werde auch seine Argumente für den *Kontinuumszugang* betrachten, der vor allem von Nolls und Truesdells Axiomatisierung der Kontinuumsmechanik fortgesetzt wurde.[5] Dazu heißt es einleitend in Hamels ≫*Über die Grundlagen der Mechanik*≪:

> „Der am wenigsten begangene, und doch eigentlich am nächsten liegende Weg ist der, die Mechanik von der Betrachtung des *Volumelementes* aus aufzubauen. Denn so allein kommt man zu einer allgemeinen Mechanik, die nachher sowohl bei Zugrundelegung der Kontinuitätshypothese, als auch bei atomistischen Vorstellungen, für starre Körper wie für feste oder flüssige in gleicher Weise anwendbar ist." (Hamel [1909a], S. 351)

Tatsächlich ist diese Argumentation innerhalb der Mechanik neuartig. Es wird zunächst der Anspruch einer 'allgemeinen Mechanik' erhoben, die so umfangreiche Konzeptionen bereitstellt, dass alle anderen klassischen Systeme als Teilbereiche enthalten sind. Das könne einzig der Zugang aus der

[4] Hierauf werde ich genauer im anschließenden Kapitel 4 eingehen.

[5] Diese Entwicklungslinie, von Hilberts Problem über Hamels und Nolls Beiträge, hin zu den Axiomen der Kontinuumsmechanik in Noll [1959] und hin zur umfassenden axiomatisierten Fassung der rationalen Mechanik im ersten Teil von Truesdell [1991], ist in Truesdell [1984d] und Ignatieff [1996] dokumentiert worden. Siehe auch hier Abschnitt 5.1.

'Kontinuitätshypothese' leisten. Schließlich soll mit diesem Zugang die *Deduzierbarkeit* der klassischen Systeme gezeigt werden können. Und das wiederum begründe die Vorrangigkeit der Kontinuumsmechanik. Dies ist ein logisches Argument,[6] das Hamel, Noll und Truesdell gegen pragmatisch gesinnte Theoretiker richten, die den beliebten und einfacheren punktmechanischen Zugang wählen und den Grenzübergang zwischen den Systemmechaniken nicht weiter begründen. Die explizite Deduktion zu diesem Argument ist letztlich der mathematische Anteil, der den lösbaren und von Hamel *gelösten Aspekt* des Hilbertschen Problems darstellt.

Doch ist das Argument so zwingend, dass alle Lehrbücher zur Klassischen Mechanik neu strukturiert werden müssten? - Natürlich sind die Lehrbuchdarstellungen nicht im logischen Sinne 'falsch'. Es wird hier gezeigt, dass die Entscheidung für die Kontinuitätshypothese davon abhängig ist, ob man

1. eine axiomatische Reflexion der Grundbegriffe zur Klassischen Mechanik akzeptiert. Dann lässt man sich auf die Suche nach umfassenden Begriffen und impliziten Definitionen ein, die idealerweise den bisherigen Gesetzeskanon der Klassischen Mechanik logisch sicher und inhaltlich eindeutig tragen können. Die Grundlagen suchen nach einer allgemeingültigen und schlüssigen Mechanik. Alle konzeptuellen Spitzfindigkeiten sind relevant, und jeder Pragmatismus ist den Grundlagen fremd.

2. Außerdem ist das Argument davon abhängig, ob man die Klassische Mechanik den angrenzenden Gebieten der Elastizitätstheorie, der Hydromechanik oder der Technischen Mechanik phänomenalistisch annähert. Als empirische Wissenschaft soll die Klassische Mechanik offen und erweiterbar sein. Neuere Forschungsbereiche aus der Kontinuumsmechanik, etwa zu Plastizitäts- und Viskositätseffekten und zu technischen Anwendungen, spielen dann ebenso eine Rolle (Abschnitt 3.9).

Gerade die zweite Voraussetzung (2.) muss in Truesdells lebhaften, teilweise auch polemischen Kommentierungen mitgedacht werden. Die Grundlagen der Mechanik stehen in der Tradition einer *rationalen Mechanik*, die nach mathematisch allgemeinen Konzeptionen sucht, um die Natur phänomenalistisch zu begreifen.[7]

In Hamels Grundlagenschriften wird eine Grenze vom mathematischen Formalismus zurück zur *Intuition* deutlich. Auf Ebene der Grundbegriffe

[6] Unter (**VI**) in Abschnitt 3.7.1 wird dies verdeutlicht.

[7] Man vergleiche insbesondere Truesdell [1958] und die Einleitungen zu Truesdell und Toupin [1960] und Truesdell und Noll [2004]. Der Gebrauch dieses Begriffs 'Phänomenalismus' entstammt der Wissenschaftsphilosophie des 19. Jahrhunderts (Mach, Boltzmann u.a.): „that physics should describe relations of experience as much as possible" (Pojman [2009], §1). Siehe dazu insbesondere Abschnitt 3.5.2.

zur Mechanik - Raum, Zeit, Masse und Kraft - befinden sich immer *methodische* und *anschauliche Erwägungen* für das eine oder andere Bild, jedes für sich genommen sinnvoll und begründbar. Zentral ist die Frage um die Vorrangstellung von Punkt- oder Kontinuumsanschauung in der Mechanik. Hier ist *keine* mathematische oder physikalische Antwort auf das Hilbertsche Problem möglich. Es bleibt eine *methodologische Entscheidung*.

Die *informelle* und *nicht formalisierbare Seite* der mechanischen Grundlagen ist also eine entscheidende Grenze der logischen Rekonstruktion und wurde mehrfach von Hamel erläutert. Diese Grenze wird an zwei Charakteristiken der Hamelschen Grundlagen deutlich.

Die 'synthetische Methode': Dem studierten Techniker Georg Hamel ist selbstverständlich, dass die Mechanik als empirische Wissenschaft in erster Linie auf anschauliche und konstruktive Modelle angewiesen ist, die nicht im Formalismus der Axiome enthalten sein können. Jede kinetische Untersuchung ist eine *unzerlegbare Synthese* aus Intention, Idealisierung, Prinzipienanwendung, geometrischer Modellierung und Formalisierung. 'Wir sind es, die die Natur gedanklich nach unseren Grundprinzipien zerlegen', so die Grundidee der synthetischen Methode (Abschnitt 3.6.2).

Der Kraftbegriff: Im festen Glauben an die Newtonsche Konzeption der rationalen Mechanik, welche erstmals die Kraft als dynamisches Explanans in die Reihe der Grundbegriffe eingeführt hat, sagt Hamel selbstbewusst:

> „Ich habe die Begriffe *Kraft* und *Masse* wieder in ihre alten Rechte eingesetzt. Wir haben diese *Dinge* unzweifelhaft nötig, ohne sie gibt es keine Mechanik" (Hamel [1909a], S. 354).

Dies ist als Angriff gegen positivistische, formalistische und konventionalistische Bedeutungsverschiebungen am Kraftbegriff (Mach, Kirchhoff, Hertz, Poincaré, Jaumann u.a.) zu verstehen. Seine Konzeption des Kraftbegriffs umfasst sowohl die formalistische Seite (als implizite Definition) und die empirische Bedeutungsebene, die nicht voneinander getrennt werden dürfen. 'Kraft' steht synonym für das Erkennen einer Körperbeschleunigung. Als bekennender Kantianer spricht Hamel auch von einer 'Form der Erkenntnis a priori'.[8] Ohne die Modellierung aus der Anschauung und Erfahrung wäre nach Hamel die reine Form des Newtonschen Kraftgesetzes bedeutungslos (Abschnitt 3.6.3).

„[Axiome] sind geformte Erfahrung", wäre die Kurzfassung.[9] Aber im

[8] In Hamel [1909b], Seiten 362 und 382.

[9] Siehe Hamel [1967b], S. 507 f.

Gegensatz zur Natur ist diese Erfahrung niemals eindeutig gegeben.[10] Die Naturvorgänge werden immer vom Hintergrund der mechanischen Aufgabe, der Erwartungen, der bestehenden Theoriefassungen und Modellierungen erkannt. Der Versuch, die empirische Bedeutung der mechanischen Axiome zu formalisieren, wäre demnach sinnlos.

Hamels Beiträge zum Kraftbegriff und zur synthetischen Auffassung der Mechanik bieten eine beachtliche Fallstudie, die formalistische und metamathematische Strömungen in der Wissenschaftstheorie Anfang und Mitte des 20. Jahrhunderts in Frage stellt. Gemeint sind etwa der logische Empirismus des Wiener Kreises, die modelltheoretische Strömung der Stanfordschule um Patrick Suppes oder das Sneed-Stegmüllersche Programm des Strukturalismus. Lange vor wissenschaftsphilosophischen Kritiken an formalistischen Programmen durch etwa Norwood Hanson, Stephen Toulmin, Thomas Kuhn und anderen hat Georg Hamel mit seiner fachkundigen Weitsicht die Grenzen eines solchen Unternehmens am Beispiel der sicher geglaubten Klassischen Mechanik aufgezeigt.

3.2 Zur physikalischen Seite des sechsten Problems

> „Durch die Untersuchung über die Grundlagen der Geometrie wird uns die Aufgabe nahe gelegt, *nach diesem Vorbilde diejenigen physikalischen Disciplinen axiomatisch zu behandeln, in denen schon heute die Mathematik eine hervorragende Rolle spielt; dies sind in erster Linie die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Mechanik.*" (Hilbert [1900a], S. 272)

Die Klassische Mechanik ist nach dem Original des sechsten Problems nur ein Bereich von vielen aus der Physik, die laut Hilbert einer axiomatischen Behandlung bedürfen. Es wurde bereits am Ende von Abschnitt 2.2 betont, dass es Hilbert um die Erweiterung der axiomatischen Methode auf außermathematische Gebiete ging. Es wird eine offene und allgemeine Aufgabe gestellt, mit der Hilberts Optimismus gegenüber der Axiomatik zum Ausdruck kommt.

Dennoch wird aus Hilberts eigener Kommentierung zum sechsten Problem, sofern es sich nun auf die Klassische Mechanik bezieht, ein zentraler Aspekt der *mathematischen Modellierung* der mechanischen Natur deutlich. Es geht um den historisch entwickelten Gegensatz der punktmechanischen Anschauung gegenüber der Mechanik unendlich vieler Massenelemente, die als ein Kontinuum von Raumpunkten veranschaulicht werden. Hilbert beweist in der Kommentierung zum sechsten Problem ein übergeordnetes Verständnis der Mechanik, das die Grundfesten der gesamten Disziplin

[10] Damit spiele ich auf das empiristische Bekenntnis Machs an: „Wenn wir von Ursache und Wirkung sprechen, so heben wir willkürlich jene Momente heraus, auf deren Zusammenhang wir bei Nachbildung einer Thatsache in der für uns wichtigen Richtung zu *achten* haben. In der Natur gibt es keine Ursache und keine Wirkung. Die Natur ist nur *einmal* da." (Mach [1897], S. 474)

hinterfragt. Sie thematisiert genau diese *logische Zulässigkeit von Punkt- und Kontinuumsansatz* in der Mechanik.

> „Über die Grundlagen der Mechanik liegen von physikalischer Seite bedeutende Untersuchungen vor; ich weise hin auf die Schriften von *Mach*, *Hertz*, *Boltzmann* und *Volkmann*. So regt uns beispielsweise das *Boltzmann*sche Buch über die Principe der Mechanik an, die dort angedeuteten Grenzprozesse, die von der atomistischen Auffassung zu den Gesetzen über die Bewegung der Kontinua führen, streng mathematisch zu begründen und durchzuführen. Umgekehrt könnte man die Bewegung über die Gesetze starrer Körper durch Grenzprozesse aus einem System von Axiomen abzuleiten suchen, die auf der Vorstellung von stetig veränderlichen, die Parameter zu definierenden Zuständen eines den ganzen Raum stetig erfüllenden Stoffes beruhen - ist doch die Frage nach der Gleichberechtigung verschiedener Axiomensysteme stets von hohem prinzipiellen Interesse." (Hilbert [1900a], S. 272)

Hilberts betonter Hinweis auf Ludwig Boltzmanns Beiträge zu den mechanischen Grundlagen darf historisch und sachlich als Ursprung für die Problemstellung gesehen werden: Es ist die Frage nach der Begründung eines *physikalischen* Kontinuums.[11] Sie stellt eine auf den ersten Blick *eigenständige* physikalische Problemstellung neben der Axiomatisierung der Mechanik dar. Ihre Gemeinsamkeit besteht in der Referenz auf die damals vielfältigen und teilweise mehrdeutigen Grundbegriffe und -gesetze der Klassischen Mechanik, die einer revidierenden Prüfung bedürftig waren. Die axiomatische Methode soll, so Hilberts Zutat, als Instrument zur deduktiven Ordnung der Grundbegriffe dienen.

Im Folgenden wird es mir darauf ankommen, den konzeptuellen Teil des eben beschriebenen Grenzprozesses so zu erläutern, dass die historisch überholte 'Mechanistik' in der Physik des 19. Jahrhunderts von der zeitlosen, logischen Rekonstruktion der rationalen Mechanik getrennt wird. Zu diesem Zweck muss auf die überlieferten Grundlagen mit Beginn des 20. Jahrhunderts, die Hilberts Problem und Hamels Antworten unmittelbar und nachweislich beeinflusst haben, genauer eingegangen werden. Dann zeigt sich einerseits die Stärke einer axiomatischen Rekonstruktion der Mechanik. Die logischen Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den systematischen Darstellungen der Klassischen Mechanik lassen sich exakt bezeichnen und werden dadurch verständlicher. Andererseits wird dann auch deutlich, dass die Richtung, in welche die Antworten auf Hilberts

[11] Zu dieser Einschätzung siehe Corry [2006], S. 16; Corry [2004], S. 64; sowie Wilson [2013], Seiten 53 und 86. Es wäre eine vorschnelle Fehlinterpretation zu meinen, es ginge Hilbert primär darum, wie die Grundgesetze der Mechanik aus der statistischen Mechanik begründet werden können, nur weil in der ursprünglichen Problemstellung die 'Wahrscheinlichkeitsrechnung' genannt wird. Die kinetischen Gastheorien nach Maxwell und Boltzmann werden gesondert von den 'Grundlagen der Mechanik' kommentiert. Ich gehe hierauf in Abschnitt 5.2.2 ein.

sechstes Problem gehen, bereits mit der Grundkonzeption zwischen Punktmassen und kontinuierlichem Körper *entschieden* ist.

Mathematische Fassung des Hilbertschen Problems

Ungeachtet der historischen Dimension kann das Hilbertsche Problem auch mathematisch knapp gefasst werden, steht doch laut Überschrift die 'mathematische Behandlung der Axiome' im Vordergrund. Bezeichne ϕ irgendeine mechanische Größe, sei es eine kinematische Größe wie den Ort, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung oder den Verzerrungszustand eines Körpers, oder aber eine dynamische Größe wie die wirkende Kraft, die Energiedichte oder den Spannungszustand an der Körperoberfläche. Dann kann der Körper einerseits als homogenes Medium[12] der Dichte μ, bestehend aus einer Gesamtheit von *infinitesimal* vielen Punkten, die eine unzertennliche Umgebung des Körpers bilden, vorgestellt werden: kurz, der Körper bildet ein irreduzibles *Kontinuum*. In diesem Fall ist die Gesamtgröße Φ_{CM} über alle ϕ durch ein *echtes Integral* über alle infinitesimalen Volumenelemente dV, in denen ϕ bezeichnet ist, zu bestimmen, ist also von der Form

$$\Phi_{CM} = \int_V \phi \, \mu \, dV.$$

Andererseits kann ein Körper wie eine Ansammlung von *diskreten*, *abzählbaren* Punktelementen $p_i, \; i \in \mathbb{N}$, vorgestellt werden, denen jeweils kleinste *Punktmassen* $m(p_i)$ im Körper zugeordnet sind.[13] Die Gesamtgröße Φ_{PM} über alle ϕ ist dann als diskrete *Summe* aller Punktmassen im Körper, denen im Einzelnen diese physikalische Größe $\phi(p_i) = \phi_i$ zugeordnet wird, zu ermitteln:

$$\Phi_{PM} = \sum_i \phi_i.$$

Man beachte, dass im Kontinuumsfall die Größe $\phi\,(dx,dy,dz,t)$ von den infinitesimalen Koordinaten der Raumumgebung $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ zur Zeit t abhängig ist. Man spricht auch von einer *Feldkonzeption*.[14] Im punktmechanischen Fall wird die Größe ϕ_i durch einzelne ausdehnungslose *Partikel* $p_i(x, y, z, t)$ mit festen Koordinaten x, y, z zur Zeit t repräsentiert. Am Ort der Partikel befinden sich dann die einzelnen Punktmassen m_i. Ontologisch gesprochen wäre in dem einen Fall die Raumumgebung selbst Träger der

[12] Die homogene Verteilung der Materie ist bereits eine entscheidende Idealisierung, die spezifische Materialien im Vorfeld mit einem konstanten Maß der 'Masse' eingrenzt (vgl. Truesdell und Toupin [1960], S. 233 und S. 465 f.) und die hier nur der Veranschaulichung dient. Aus axiomatischer Sicht ist die konstante Dichte bereits Ausdruck der *Kontinuitätshypothese* (siehe etwa Voss [1901], §11; Hamel [1927], S. 8; Truesdell und Toupin [1960], §16; sowie hier Abschnitt 3.7.1).

[13] Die p_i sollen keine Impulskoordinaten sein. Ich orientiere mich dabei an der Bezeichnung aus McKinsey u. a. [1953] (siehe auch hier Abschnitt 4.5.3).

[14] Die mathematische Definition dieses Feldbegriffes stammt aus der Differentialgeometrie; siehe insbes. Truesdell und Toupin [1960], S. 248.

physikalische Größe ϕ, in dem anderen Fall wären es die atomaren Punktmassen.[15]

Hilberts sechstes Problem ist in dieser mathematisierten Fassung letztlich die Frage, unter welchen logisch-mathematischen wie anschaulichen Voraussetzungen Φ_{PM} und Φ_{CM} *übereinstimmen* und dieselben mechanischen Gesetzmäßigkeiten hervorbringen. So gesehen umfasst das sechste Problem durchaus die gesamte Physik: Die Mathematisierung der Physik ist somit im *weitesten* Sinne das, was noch heute unter diesem Problem verstanden wird.[16] Im *engeren* Sinne meint Hilbert die 'klassischen' fundierenden Elemente einer Mechanik der sichtbaren Körper. Die nächsten Abschnitte werden erläutern, dass es gerade diese Elemente sind, die von Hamel aufgegriffen werden.

3.3 Die Begriffsvielfalt in der rationalen Mechanik des beginnenden 20. Jahrhunderts

In welchem Zustand befanden sich die Grundlagen der Mechanik, als Hilbert die Frage nach dem physikalischen Grenzübergang gestellt hat? - Was die *Reichweite* und *Klassifizierung* der mechanischen Gesetze betrifft, war die Mechanik alles andere als einheitlich und eindeutig. Dabei galten die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der Punktmechanik, der Mechanik starrer Körper und der linearen Elastizitätstheorie[17] als gesichert und verstanden: Sie waren einzelne, abgeschlossene Gebiete der mathematischen Physik. Deshalb ist es durchaus berechtigt, in ihrer gemeinsamen Schnittmenge, der kinetischen Beschreibung sichtbarer fester Körper, von einer '*klassisch*' gewordenen Mechanik zu sprechen.[18]

[15] Diese ontologische Gegenüberstellung von Feld und Punkt bzw. von 'Raum' und 'Atom' findet man auch in Hilbert [1992], §2.4: 'Physikalische Begriffsbildungen'.

[16] „The mechanics of infinitely many mass points (be it in its continuum version or in its discrete, atomistic version), in any case, comprises all of physics. The sixth problem, therefore, in some sense simply fomulates the task of mathematizing physics and of making it just one more branch of mathematics." (Sauer [1999], S. 9)

[17] Die lineare Elastizitätstheorie beschränkt sich in der genäherten Entwicklung des mathematischen Zusammenhanges zwischen den Spannungs- und Dehnungszuständen eines Körpers auf die *linearen* Terme, wie es bereits im eindimensionalen Hookeschen Gesetz zum Ausdruck kommt. Sie basiert also auf einer idealisierenden Annahme der festen Materie, die im 20. Jahrhundert durch die genauere, nicht-lineare Kontinuumsbeschreibung von Körpern erweitert wurde. Zur Begriffsbildung siehe etwa Müller und Timpe [1906], S. 26 und S. 30; sowie Cross [1994], S. 1027.

[18] Vgl. Wilson [1998], S. 251 und hier Anm. 5 in Abschn. 2.1. Tatsächlich ist der Begriff der 'Klassischen' Mechanik erst zur zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts entstanden, in Abgrenzung zu den neueren Mechaniken. So verstanden etwa in Synge [1960], S. 1.; oder Truesdell [1976b], S. 127: „The word 'classical' has two senses in scientific writing; (1) acknowledged as being in the first rank or authority, and (2) known, elementary, and exausted [...]. In the twentieth century mechanics based upon the principles and concepts used up to 1900 acquired the adjective 'classical' in its second and pejorative sense, largely because of the rise of quantum mechanics and relativity."

Dennoch herrschte bis zur Jahrhundertwende in einzelnen Kreisen mathematischer Physiker, hauptsächlich aus dem deutsch- und französischsprachigen Raum, ein reges Interesse an den Grundlagen dieser klassisch verstandenen *rationalen Mechanik*. So bestand größte Unklarheit darüber, welche Bilder oder Modelle der mechanischen Wirklichkeit die logisch einfachsten sind, welche besonders kohärent sind und welche allgemeiner oder grundlegender sind als andere. Man beanspruchte, die bestehenden Theorien der Mechanik auf ihre logische Reichweite und gegenseitige Deduzierbarkeit hin zu überprüfen, um dadurch eine größere Einheitlichkeit in der Mechanik zu erzielen.

Kaum ein anderes Zeitdokument kann dieses Einheitsstreben besser dokumentieren als die umfangreichen und vielbeachteten Bandreihen der ≫*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*≪, seit 1898 unter anderem von Felix Klein herausgegebene Artikel zu Schwerpunktthemen der Mathematik und Physik, von damals namhaften Wissenschaftlern der jeweiligen Gebiete verfasst. Sie werden als 'historisches Barometer' (nach Grattan-Guinness [2000b], S. 756) dienen können. Beispielhaft für das damalige Bedürfnis nach lexikalischer Sicherung der wissenschaftlichen Begriffssysteme ist der vierte Band über Mechanik. Er beginnt mit dem Versuch einer 'philosophischen Begründung', wie sich Klein ausdrückt: Aurel Voss' ≫*Prinzipien der rationellen Mechanik*≪ von 1901.[19] Der Artikel ist eine wichtige 'voraxiomatische' Orientierung für Hamel gewesen, wie es einleitend in Hamel [1927] heißt. Ebenso wertvoll für diese Untersuchung sind die Ausführungen im Artikel Stäckel [1908], die von Hamel rezensiert wurden[20] und seine Grundlagen ebenfalls beeinflusst haben.

Gleich zu Beginn macht Voss deutlich, dass auch er dieses Thema nicht ohne die Verlegenheit angehen konnte, die schon Hertz in seiner berühmten Einleitung[21] zum Ausdruck gebracht hat. Es kann nicht die Absicht sein, eine einzige verbindliche Auswahl an Prinzipien der Mechanik zu treffen oder die 'vorliegenden logischen Schwierigkeiten' beseitigen zu wollen, sondern es geht allein darum, auf die verschiedenen Darstellungen der Mechanik hinzuweisen.[22] Hierbei versteht er als rationelle Mechanik, „vollständig klare Bilder der Erscheinungen in mathematischer Darstellung zu liefern" (Voss [1901], S. 16), die deduktiv bei obersten Grundsätzen zu den idealisierten Objekten der mechanischen Wirklichkeit beginnt und deren Pendant, die angewandte Mechanik, sich daran anschließt.[23]

[19] Man vergleiche die Vorrede zu Band 4-1 (Mechanik) der Enzyklopädie, S. VII. Zum Einfluss Voss' auf Hilberts axiomatisches Verständnis der Mechanik siehe Corry [2004], Abschn. 1.3.6.

[20] Siehe ebd., S. 436.

[21] Siehe Hertz [1894], S. 8.

[22] Vgl. Voss [1901], S. 9.

[23] Vgl. Voss [1901], S. 11 f. Der traditionelle Begriff der 'Rational Mechanics' geht auf das Vorwort von Newton [1687] zurück, das den Kraftbegriff ins Zentrum der dynamischen Untersuchung von Bewegungsabläufen stellt und paradigmatischen Einfluss auf die Mechanik

Rationale Mechanik enthält also hier die Bedeutung einer *Rekonstruktion* nach logischen, ökonomischen und systematisierenden Aspekten. Beachtlich ist nun, dass Voss die *mechanischen Grundbegriffe und -gesetze* nach verschiedenen semantischen und anschaulichen Kategorien unterteilt, die auch teilweise zueinander ausschließend sind. Hier sind die mechanischen Grundbegriffe und -gesetze bereits schon in der Weise systematisiert, wie sie auch in Hamels Axiomen der Mechanik wiederzufinden sind. Mir geht es also in diesem Teil 3.3 zum einen darum, eine *Bestandsaufnahme* zur Klassischen Mechanik Anfang des 20. Jahrhunderts zu machen. Um Hamels Axiomatisierung zu verstehen, musste ich die konzeptuellen Voraussetzungen, die bestehenden Grundgesetze wie auch ihre Gegensätzlichkeiten und Lücken, aus historischer Sicht zusammenfassen. Zum anderen hat die 'Begriffsvielfalt' in diesem Teil einen systematischen Aspekt. Es handelt sich um diejenigen Grundbegriffe und -gesetze, die in dieser fundierenden wie alternativen Zusammensetzung auch heute noch kaum beachtet werden. Sie bilden *eigenständige Wege* in die Klassische Mechanik. Hier will ich also die klassischen Elemente der verschiedenen *Systemmechaniken in voraxiomatischer Fassung* vorstellen.

3.3.1 Kinematische Grundbegriffe

Jede Bewegungslehre setzt 'phoronomische Grundbegriffe' voraus: mathematisierte Vorstellungen von Ort, Zeit und den Bewegungsgrößen der Geschwindigkeit und Beschleunigung. Sie sind durch *stetig differenzierbare* und *eindeutige Ortsfunktionen*

$$\vec{s}(t),\ \vec{v}(t) = \frac{d\vec{s}}{dt},\ \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$$

zu arithmetisieren, was „zu unseren fundamentalsten Anschauungen zu gehören [scheint]" (Voss [1901], S. 30). Neben der Forderung nach einem mathematisch absoluten Koordinatensystem betont Voss die Notwendigkeit, dass die kinematischen Grundgrößen durch ein festgelegtes *Bezugssystem* zu beschreiben sind.

Eine besondere Rolle spielt in diesem Zusammenhang das *Trägheitsprinzip* oder *Newtons erstes Axiom*: dass ein Körper im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung verharrt, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt.[24] Es wäre ohne einen Rahmen, in dem die mechanischen Grundbegriffe invariant gegenüber linearen Transformationen bleiben, gänzlich un-

des 18. Jahrhundert hatte (siehe Fraser [1994], S. 984; Pulte [2005], Seiten 139 u. 144). Bis Anfang des 20. Jahrhunderts wurde in diesem Kontext 'rationell' gleichbedeutend mit 'rational' verwendet.

[24] Im Wortlaut bei Newton [1687], S. 19: „**Law I.** Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon."

verstanden.[25] Das heißt, jede dynamische Beschreibung der Körper setzt ein *Inertialsystem* voraus, das im mathematisierten Rahmen einem *affinen Euklidischen Vektorraum* entspricht und die gerichteten Größen durch Vektoren repräsentiert. Zur Jahrhundertwende reift also die Einsicht, dass das Trägheitsprinzip keineswegs eine bloße Deduktion aus dem Newtonschen Grundgesetz für den kräftefreien Fall ist. Es ist als eine *logische* oder systematisch motivierte *Konvention* zu verstehen, wenn die *Existenz* eines Inertialsystems postuliert wird, in welchem inertiale Kräfte (Trägheitskräfte) von einem fiktiven Beobachter erkannt werden.[26] Corioliskräfte, Zentrifugalkräfte oder verlorene Kräfte im gekoppelten Massensystem können aufgrund der Beschleunigung des Bezugssystemes *relativ* zum Massensystem als *fiktive* Kräfte (*Trägheitskräfte*) entlarvt werden.[27] Die prinzipielle Notwendigkeit, Inertialsysteme festzulegen, um Trägheitskräfte zu erkennen und die Gesetze der Mechanik objektiv zu beschreiben, weiß auch Stäckel [1908], S. 488, zu betonen:

> „Die für die Diskussion der Differentialgleichungen der Bewegung so wichtige Prinzipe: der Schwerpunktsatz, der Flächensatz, der Satz von der lebendigen Kraft verlieren im allgemeinen ihre Gültigkeit bei der relativen Bewegung."

3.3.2 Statische Grundbegriffe

Die Theorie der Statik untersucht die Bedingungen, unter denen sich ein als starr angenommener Körper in einem ruhenden Gleichgewicht befindet. Die Untersuchung präzisiert also zum einen den Grundbegriff des *Kräftegleichgewichts*, der allgemein durch das Verschwinden der resultierenden äußeren *Kraft* $\vec{F}_n^{ext}$ auf den n-ten starren Teilkörper eines Massensystems zum Ausdruck kommt:

$$\vec{F}_n^{ext} + \sum_i \vec{F}_{n,i} = 0 \quad (\mathbf{S1}).$$

Zum anderen treten bei starren ausgedehnten Körpern, je nach Angriffslinie der statischen Kräftepaare relativ zum Massenmittelpunkt[28] des n-ten

[25] Siehe Voss [1901], S. 33. Die prinzipielle Notwendigkeit eines Bezugssystems für reine Bewegungsgrößen zu fordern, geht auf Neumann [1870] zurück (vgl. dazu Pulte [2005], S. 426).

[26] Vgl. Voss [1901], S. 38, dort aber auch der Vermerk, dass eine „allgemeine Konvention" noch nicht erreicht sei. „Überdies ist es eine *Täuschung*, wenn man glaubt, dass sich in der *Erfahrung* dasselbe [Trägheitsprinzip] *nachweisen* lasse."(ebd., S. 54)

[27] „Es ist aber zu bemerken, dass dies [d.i. die Scheinkraft] in Wahrheit gar keine Kraft ist. Es ist ein Glied massenkinematischen Ursprungs" (Hamel [1912], S. 99).

[28] Für gewöhnlich wirkt nur *die Schwerkraft* als äußere Kraft auf das statische Massensystem. Dann kann der *Massenmittelpunkt* $\vec{r}^* = \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{m_{ges}}$ mit dem *Schwerpunkt* eines Körpers identifiziert werden. Siehe dazu Hamel [1912], S. 211.

Teilkörpers *Momente* $\vec{M}_n = \vec{a} \times \vec{F}_n$ auf, die im nichtstatischen Fall Drehungen und Kippungen erzeugen. Zu ihrer eindeutigen Definition hat sich

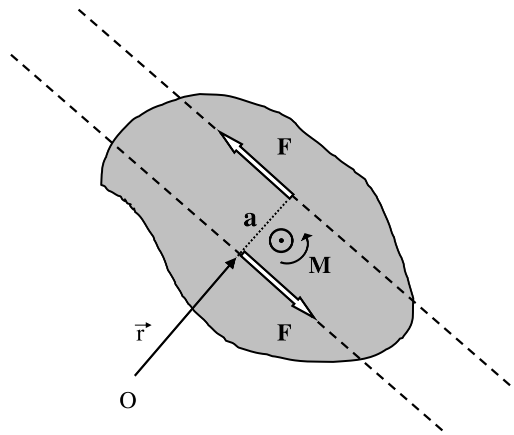


Abb. 1: Das Kräftepaar und seine Momentenwirkung

für die Statik (nach Louis Poinsot) *das Kräftepaar* als fundamental herausgestellt.[29] So ist ein Kräftepaar aus zwei gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften vom Betrag F, deren Wirkungslinien den Abstand a zueinander haben, in der Wirkung auf einen starren Körper einem *Einzelmoment* vom Betrag $M = a \cdot F$ äquivalent. (Man betrachte dazu Abbildung 1.)

Momentenwirkungen stellen in der Statik eine eigenständige, von Gleichung **(S1)** *unabhängige* Gleichgewichtsbedingung dar:

$$\vec{M}_n^{ext} + \sum_i \vec{M}_{n,i} = 0 \quad (\mathbf{S2}).$$

Die Eigenständigkeit wird allein schon durch die Tatsache klar, dass **(S2)** als 'Hebelgesetz' für starre Körper bis auf Archimedes zurückverfolgt werden kann und den wohl „ältesten Bestandteil menschlichen Wissens aus der Mechanik darzustellen" scheint.[30]

Für die *Technische Mechanik* ist es selbstverständlich, die Mechanik von den statischen Grundbegriffen aufzubauen, für die Physik eher ungewöhnlich. Die Physik fasst die Statik meistens als Grenzfall der Kinetik starrer

[29] Siehe Voss [1901], S. 42; Sommerfeld [1967], S. 112.

[30] Zitiert aus Hamel [1912], S. 221. Die Formulierungen, insbesondere die Unabhängigkeit der Momentengleichung **(S2)** für die Statik, sind im Wesentlichen Hamel [1912], Kap. 5 'Statik', entnommen. Die lange Entwicklungsgeschichte der statischen Grundsätze kann hier nicht weiter verfolgt werden. Die erste axiomatische Fassung der Statik geht (gemäß Hamel [1927]) auf Robert Marcolongo zurück. Aktuelle Lehrbücher der Technischen Mechanik wie Brommundt und Sachs [1991] benutzen weiterhin die axiomatisierte Statik nach Hamel.

Systeme auf und entwickelt zuerst die Systemdynamik.[31] Dennoch ist es physikalisch und historisch richtig, wenn Voss und Stäckel betonen, dass der *starre Körper* eine idealisierende Erfindung der Statik ist, um „die Vorstellung einer ihrer geometrischen Konfiguration nach unveränderlichen Substanz" (Voss [1901], S. 42) in die Beschreibung statischer Phänomene einzuführen.[32]

Streng genommen kann aber der dynamische Kraftbegriff der Statik nicht zugrunde gelegt werden, würde dies doch eine „Rekursion auf eine Bewegung, die gar nicht zustande kommt" (Voss [1901], S. 43) bedeuten. Die Verteilung der trägen Masse eines Körpers hat auch keine Relevanz für das Zustandekommen eines Kräftegleichgewichts, weil der Angriffspunkt der wirkenden Kräfte beliebig verlegt werden kann.[33] Aus dieser konzeptuellen Schieflage zwischen Statik und Kinetik von Massenelementen entspringt die lange Tradition, den vektoriellen Charakter der *statischen Kraft*, insbesondere das *Gesetz des Kräfteparallelogramms*, aus einfacheren, meist algebraischen Axiomen nachzuweisen.[34] Ohne hierbei ins Detail zu gehen sei erwähnt, dass auch Georg Hamel eine erweiterte Axiomatisierung des statischen Kraftbegriffes auf der Basis der Stetigkeit von vektoriellen Größen vorgeschlagen hat.[35]

3.3.3 Dynamische Grundbegriffe

Jede konzeptuelle Untersuchung der Klassischen Mechanik muss auf Newton [1687] zurückweisen. Dabei ist gar nicht die Einführung der *Kraft* als ein wissenschaftskonstitutiver Begriff (neben anderen) das Neuartige der »*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*«, wie es uns manchmal die Newton-Rezeption in Lehrbüchern glauben lässt. Kraft wird als ein allgemeiner *Grundbegriff* eingeführt, zur *einheitlichen mathematischen* Repräsentation der physikalischen Realität (z.B. der Trägheit, der Gravitation, der Reibung). In dieser übergeordneten Rolle steht Kraft für den Neubeginn zu einer Wissenschaft der 'Rational Mechanics', wie es im Sinne des Vorworts der »*Principia*« verstanden wird.[36]

---

[31] Zum Begriff 'Technische Mechanik' siehe Stäckel [1908], S. 445, und ebd. S. 510 zur Unterscheidung des statischen Ansatzes vom dynamischen.

[32] Siehe auch Stäckel [1908], S. 539 und 543.

[33] Siehe Stäckel [1908], S. 540.

[34] Zum historischen Überblick siehe Voss [1901], S. 44, und aktueller Benvenuto [1991], Kap. 4.

[35] Siehe Hamel [1903] und Hamel [1912], Nr. 45: 'Beweis des Parallelogrammsatzes auf Grund gewisser einfacher Axiome'. Dies ist meines Erachtens das einzige Resultat von Hamel, das von Hilbert als wertvoller Beitrag zur Axiomatisierung der Mechanik erwähnt wird: so etwa in Hilbert [1905], S. 122, oder in Hilbert [1917], S. 409.

[36] Zu dieser Charakterisierung siehe etwa Duhem [1912], Seite 40 ff.; Fraser [1994], S. 984. Dass in Jammer [1957], S. 125 von einer Konzeption 'a priori' bei Newton gesprochen wird, ist eher als eine Kantische Färbung zu verstehen, die selbst in Kants transzendentaler Be-

Schon zu Newtons Zeiten als metaphysischer, okkulter Begriff kritisch diskutiert, reifte dennoch die Einsicht, dass es sich bei der beschleunigenden Kraft um einen *unabhängigen* und *irreduziblen* Begriff der Mechanik handelt, unverzichtbar zur mathematischen Beschreibung von physikalischen Systemen.[37] In Newton [1687] wird dieser Grundbegriff als das 'zweite Axiom' eingeführt:

> „**Law II.** The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed." (Newton [1687], S. 19)

Im Zentrum der Dynamik einer trägen Masse steht das *Newtonsche Kraftgesetz*, nach Hamel auch das **Newtonsche Grundgesetz (NG)** genannt.[38] Es postuliert die Existenz einer *Kraft* $\vec{F}$, sofern die Masse m eine Beschleunigung $\vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$ erfährt:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \mathbf{m} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \qquad (\mathbf{NG}).$$

An dieses Grundgesetz knüpfen sich eine Vielzahl an Interpretationen.[39] Handelt es sich um ein empirisch belegtes *Naturgesetz* (wie bei Volkmann oder später Hamel)? Ist es eine *explizite* Definition der Kraft aus Masse und Beschleunigung (wie bei Kirchhoff und Hertz)? Eine Definition der Masse (wie nach Mach)? Eine *Konvention* zur begrifflichen Ordnung der Mechanik (Jacobi, Poincaré)? Oder eine *implizite* Definition, ein abstraktes *Schema* zur Einführung von Kraftfunktionen in die Mechanik (Hilbert, wie später auch Hamel)?[40] - Bis heute wird je nach Vorlieben des Lehrbuchautors, je nach physikalisch-didaktischem und mathematisch-logischem Hintergrund, dieses Grundgesetz unterschiedlich interpretiert.[41] Aurel Voss favorisiert, wie viele zur Jahrhundertwende, die Kirchhoffsche Interpretation: die Elimination des Kraftbegriffs zugunsten einer positivistischen Mechanik.[42] Ich möchte an dieser Stelle aber nur auf die Interpretationsvielfalt

gründung der Newtonschen Mechanik problematisch bleibt. Man vergleiche hierzu Pulte [2005], Seiten 227 u. 233 f.

[37] Siehe dazu Duhem [1912], Seite 42 f.; sowie Pulte [2005], S. 143.

[38] Kontrovers diskutiert wurde die historische Frage, inwieweit dieses Gesetz in Newtons 'zweitem Axiom' und seinen Erläuterungen enthalten ist, da es in algebraischer Gesetzes*form* erst in Euler [1752], S. 195, explizit vorkommt. Aus diesem Grunde wird es in Truesdells Schriften konsequent 'Eulers Grundgesetz' genannt. Zur Verbreitung des Grundgesetzes unter Newtons Namen hat nachweislich der große Erfolg von Mach [1897] beigetragen. Zu dieser wissenschaftshistorischen Diskussion siehe etwa Szabó [1987], Kap. 1; Pulte [2005], S. 173 f.; Coelho [2010], S. 94 und Truesdell [1976a], S. 60.

[39] Man vergleiche dazu Jammer [1957], Eisenbud [1958], Hoyer [1977] und mit Bezug auf aktuelle Lehrbücher Coelho [2011].

[40] Tatsächlich wird in Hilbert [1905], S. 132, vom 'Newtonschen Bewegungsaxiom' gesprochen und die vorkommenden Größen rein algebraisch verstanden, was sicherlich Hilbert als Urheber dieser Interpretation nahe legt.

[41] Zur Aktualität dieser Interpretationsfragen siehe vor allem Butterfield [2007], §1.1: 'Why classical mechanics?'.

[42] Siehe Voss [1901], Seiten 12, 13 und S. 49, Anm. 124.

hinweisen, weil sie ein wesentlicher Beweggrund für Hamel gewesen ist, einen mehrdeutigen Kraftbegriff an den axiomatischen Anfang der Klassischen Mechanik zu stellen.

3.3.4 Die Dynamik der Punktmassen

Im Zentrum jeder dynamischen Betrachtung steht die Frage, was im Newtonschen Grundgesetz die *Masse* m bedeuten soll. Wie wird die Körpermasse veranschaulicht oder modelliert? Diese Frage beeinflusst unmittelbar die Konzeption und Reichweite des Kraftbegriffs, der über **(NG)** mit der Masse verbunden ist.

So betont Voss die unumstößliche Vorrangigkeit der *Punktmasse* als analytisches Element der dynamischen Betrachtung von Körpern, die sie seit Euler und Lagrange erhalten hat.[43] Dabei hat die Punktmasse nicht die reale Bedeutung eines Atoms oder Korpuskels wie später in Laplaces, Naviers und Poissons Korpuskulartheorien, sondern sie ist ein mathematisches Instrument. Punktmassen referieren auf geometrisch ausgezeichnete Raumpunkte oder Partikel.

Geht man nun zur Dynamik mehrerer Punkte über, befindet man sich bereits in einem *System* von Massenpunkten. Unter *inneren Kräften* werden dann die zwischen zwei Punktmassen gegeneinander auf zentraler Verbindungslinie wirkende *Fernkräfte* verstanden. Den inneren Kräften eigentümlich ist, dass sie offenbar „aus der Beschaffenheit des Systems selbst hervorgehen" (Stäckel [1908], S. 450). *Äußere* Kräfte werden von außen auf das Punktsystem eingeprägt, „wenn man ein unvollständiges System, das heißt, einen Teil eines Systems für sich betrachtet" (ebd., S. 450).

Als Anwendungserfolge der Punktdynamik sind alle Fälle zu nennen, in denen die Massenelemente gegenüber der Ausdehnung des Gesamtsystems verschwindend klein sind. Die Dynamik der Himmelskörper ist das vorrangige Beispiel.[44] Jede Körperbewegung, bei der man auf die Dynamik der *Massenschwerpunkte* reduziert, gehört dazu.[45] In diesen Fällen ist die Dynamik des Punktsystems aus i Punktmassen durch das Kraftgesetz der linearen Impulsänderung

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i = \vec{F} \quad \textbf{(PM1)}$$

und durch den Momentensatz der Drehimpulsänderung bestimmt:

$$\frac{d}{dt}\sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \vec{M} \quad \textbf{(PM2)}.$$

[43] Siehe Voss [1901], S. 24.

[44] So wird Newton [1687] häufig als ein Werk der Punktdynamik verstanden, obwohl dort je nach Anwendungsfall von Korpuskeln, Partikeln und Körpern gesprochen wird.

[45] Man vergleiche Stäckel [1908], S. 452.

So können auch *starre Körper* nach diesen Grundgesetzen wie Systeme einzelner Schwerpunktmassen behandelt werden, wenn man sich die starren Verbindungen zwischen den Massen als 'masselos' denkt.[46] Diese Punktmassenreduktion ist die eine Seite des unklaren Zwischenzustands, den der starre Körper innerhalb der Klassischen Mechanik einnimmt. Die andere Seite folgt in Abschnitt 3.3.6.

Logisch unklar war vor allem, ob der Momentensatz **(PM2)** eine *Folgerung* der linearen Impulserhaltung **(PM1)** ist. Daniel Bernoulli, Lagrange, d'Alembert, Poisson, Kirchhoff, Mach und Hertz auf der einen Seite haben seine Reduzierbarkeit vertreten. Auf der anderen Seite standen etwa James Bernoulli, Euler, Boltzmann, Volkmann, Stäckel, Hamel, Noll und Truesdell.[47] Die Auffassungen gingen je nach mechanischem Kontext stark durcheinander. Die erste, *logische* Klärung ist auch Hamel zu verdanken, wie wir sehen werden: *Nur* in der Punktmechanik ist **(PM2)** eine Folgerung aus **(PM1)**.

3.3.5 Die Dynamik kontinuierlicher Massen

Die Aufhebung der punktmechanischen Idealisierung führt unmittelbar zur Konzeption eines kontinuierlich zusammengesetzten Körpers. Mathematisch verstanden, als echte Teilmenge des reellen dreidimensionalen Zahlenkörpers $\mathbb{R}^3$, ist es nicht möglich, von einer abzählbaren Menge von Punkten zum *Kontinuum* aus überabzählbar unendlich vielen Punkten zu gelangen.

> „Es ist leicht zu sehen, dass man auf diesem Wege nicht unmittelbar zu der Vorstellung der Bewegung eines kontinuierlich mit Masse erfüllten Raumes kommt." (Voss [1901], S. 24 f.)

Dieses mathematische Argument markiert für viele Grundlagenforscher bereits hinreichend die Unabhängigkeit der Kontinuumssichtweise von der eben skizzierten punktmechanischen Herangehensweise.[48] Auf Augustin Cauchy zurückgehend sind bei dieser Darstellung nicht mehr einzelne innere Fernkräfte zwischen Punktmassen relevant. Der Dynamik eines kontinuierlichen Mediums werden nun *Kontaktkräfte* zugrunde gelegt, die auf ganze Flächenelemente des Mediums wirken.[49] An einem k-ten *Oberflächen-*

[46] Siehe Stäckel [1908], S. 474.

[47] Die Namen habe ich der Fallstudie Truesdell [1968] entnommen.

[48] Weiter ausgearbeitet findet man dieses Argument in Truesdell und Toupin [1960], S. 227; Truesdell [1952], S. 80; in Noll [1959], S. 266; und Bunge [1967a], S. 155.

[49] Siehe historisch etwa Voss [1901], S. 28, Müller und Timpe [1906], S. 18; und aktueller Truesdell [1992]. Die Notation, die je nach Lehrbuch und Epoche sehr unterschiedlich ausfällt, orientiert sich primär an Hamel [1912], berücksichtigt aber auch die modernere Tensorschreibweise aus Fung und Tong [2001].

element dA_k des Körpers wirkt so die Kontakt- oder Flächenkraft

$$\vec{F}_k = \int \sigma \, dA_k.$$

In der physikalischen Bedeutung handelt es sich bei σ um einzelne Elemente des *Spannungstensors*

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

mit den *Schubspannungen* als Diagonalelemente σ_i und den *Scherspannungen* τ_{ij} als Nichtdiagonalelemente.

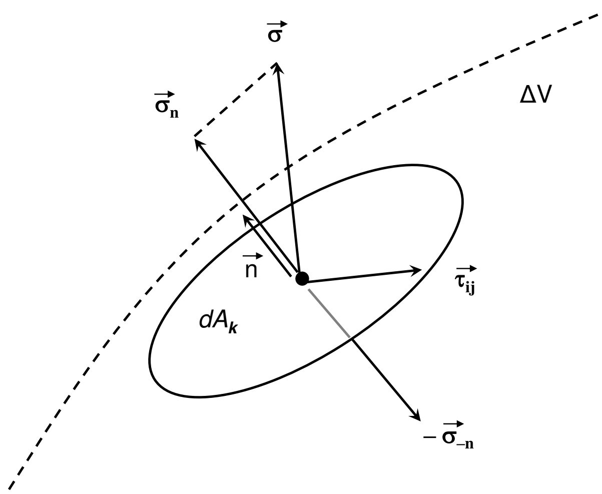


Abb. 2: Geometrische Vorstellung von Schub- und Scherspannung

Die externen Kräfte wirken nun als *Volumenkräfte* F_{ext} auf das gesamte Körperkontinuum, das zur Vereinfachung eine isotrope Massenverteilung mit infinitesimalen Massenelementen $dm = \mu \, dV$ besitzt.

Von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Kontinuumsmechanik ist Cauchys Nachweis, dass ein beliebig orientierter Spannungszustand an dA_k durch drei Spannungsvektoren $\vec{\sigma}_n^i = (\sigma_i \cdot \vec{n}, \tau_{ij} \cdot \vec{n}, \tau_{ij} \cdot \vec{n})\,,\ i, j \in 1, 2, 3$ in normaler Richtung $\vec{n}$ zu dA_k eindeutig beschrieben wird:

$$\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n} \quad \textbf{(Cauchys 1. Theorem)}.$$[50]

[50] Man siehe etwa Hamel [1912], S. 321; Truesdell [1992], S. 17, wo es als 'Fundamentaltheorem' Cauchys bezeichnet wird; in Lehrbuchform Fung und Tong [2001], S. 71; und mithilfe des Richtungskosinus des Normalenvektors ausgedrückt etwa Hamel [1912], S. 321 oder Müller und Timpe [1906], S. 19.

Aus den unendlich vielen Spannungszuständen am Körper wird demnach eine eindeutige Auswahl getroffen: die Normalenrichtungen an den Oberflächen. Diese Normalenrichtungen beziehen sich auf ein körperfestes Koordinatensystem, wodurch eine numerische Behandlung der Spannungskomponenten überhaupt erst möglich wird. (Man betrachte dazu auch die Abbildung 2 zur Veranschaulichung.)

Die Kontaktkräfte werden noch weiter auf den Tensor σ reduziert. So müssen im *statischen* Gleichgewichtszustand die Scherspannungen an beliebigen Flächenelementen entgegengesetzt gleich groß sein. Mathematisch äußert sich das darin, dass σ *symmetrisch* ist und maximal nur sechs statt neun unterschiedliche Spannungskomponenten auftreten. Andernfalls gäbe es nichtstatische Momente auf den infinitesimal kleinen dA_k:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \textbf{(Cauchys 2. Theorem)}.$$

Neben Cauchys Theoremen als statische Grundsätze lauten die **dynamischen Grundgesetze** der Kontinua:

$$\vec{F}_{Res} = \sum \vec{F}_{ext} + \nabla \cdot \sigma \quad \textbf{(CM1)}$$

$$\vec{M}_{Res} = \oint (\vec{r} \times \sigma)\, dA + \int (\vec{r} \times \vec{F}_{ext})\, dV \quad \textbf{(CM2)}.$$ [51]

In Worten besagt **(CM1)**, dass die ingesamt wirkende Kraft sich aus der Summe aller Volumenkräfte und der Quellstärke der Oberflächenspannungen zusammensetzt. Das zweite Grundgesetz **(CM2)**, der *Momentensatz*, besagt: „[D]as Moment der Massenbeschleunigungen ist gleich dem Moment der räumlich verteilten Kräfte vermehrt um das Moment der an der Oberfläche angreifenden äußeren Spannungen.“ (Hamel [1909a], S. 365).

Der Status von **(CM1)** als mechanisches Grundgesetz galt zur Jahrhundertwende als gesichert. Ebenso gab es bereits mehrere Begründungsversuche für **(CM1)**. Bei allen Begründungen wurde die Auffassung vertreten, dass der Schluss von der Statik zur Kinetik *zusätzliche Annahmen* wie das d'Alembertsche Prinzip oder das Prinzip der virtuellen Arbeit erfordert.[52]

Dagegen blieben analoge Begründungen des Momentensatzes **(CM2)** zur Jahrhundertwende noch vage und unbestimmt. Wie beim statischen Fall (**(S2)** in 3.3.2) wurde vom elastostatischen Momentengleichgewicht

[51] Man vergleiche Stäckel [1908], S. 550; Müller und Timpe [1906], S. 21 f.; Truesdell [1992], S. 17; oder aktuell Fung und Tong [2001], Seiten 70 und 135, dort wird (**CM1**) als 'Eulers Bewegungsgleichung' bezeichnet. Nach Truesdell und Toupin [1960], §205, werden die Gleichungen auch *'Cauchys erstes und zweites Bewegungsgesetz'* genannt.

[52] Der einfachste Weg ist in Stäckel [1908], S. 550, zu finden: Vom statischen Fall schließt man auf die Kinetik mithilfe des d'Alembertschen Prinzips, indem die Trägheitskräfte als $-\vec{F}_{Res}$ ergänzt werden. Das erste Cauchy-Theorem geht als Randbedingung in **(CM1)** deduktiv ein. Für die anderen Begründungsversuche und ihren historischen Ursprüngen siehe Müller und Timpe [1906], §3b: 'Die Spannungsgleichungen'; sowie Hellinger [1913], Seiten 615 und 630.

$\vec{M}_{Res} = 0$ ausgegangen.[53] Ein zu **(CM1)** analoger Schluss auf die Kinetik war noch unklar: Über die Unabhängigkeit des zweiten Cauchy-Theorems oder über eine mögliche Reduktion auf **(CM1)** konnte nur spekuliert werden. Eine sichere Begründung im Sinne einer *lückenlosen, informellen Deduktion* gelingt erst Hamel und ist ein entscheidener Beitrag zum Hilbertschen Problem.

Es bleibt zu bemerken, dass die Dynamik der Kontinua den Spannungstensor als abstraktes Element voranstellt, dessen Koeffizienten durch die Grundgleichungen im Allgemeinen nicht vollständig bestimmt werden können. Materialspezifische Gesetze, so genannte 'konstitutive Gleichungen', müssen ergänzt werden. Sie legen den Grad der Idealisierung der Materialbeschreibung fest.[54] Die klassischen *Spannungs-Dehnungsbeziehungen* (das 'Hookesche Gesetz') für Elastika etwa sind ein Beispiel für eine konstitutive Relation. Sie bestehen unabhängig von den hier vorgestellten Gesetzen der Trägheitsmerkmale eines Kontinuums. Über die konstitutiven Gleichungen gelangt man zu materialspezifischen Mechaniken: starre, elastische, plastische, fluide, viskose Körper und so weiter. Dieser 'phänomenalistische' Materialbezug der Kontinuumsmechanik bringt es mit sich, dass es sich um die allgemeinste Systemmechanik handelt. Sie ist als Theorie aller ausgedehnten Materialien niemals abgeschlossen, mathematisch wie konzeptuell sehr komplex.[55] Der Bezug zur *Elastizitätstheorie* und zur *Hydrodynamik* ist ihr sachlich wie historisch wesentlich.[56]

3.3.6 Die Dynamik starrer Körper

Den ausgedehnten starren Körper stellt man sich aus unendlich vielen Massenpunkten zusammengesetzt vor, bei dem man die Festigkeit 'übertreibt',[57] da keine Dehnung der einzelnen Massenverbindungen zugelassen wird. Die Starre sorgt dafür, dass alle inneren Spannungen und Potentiale vernachlässigt werden können.[58] Mit dieser Idealisierung ist er das zentrale Objekt der Klassischen Mechanik eines Lagrange, d'Alembert oder Euler.

[53] Siehe vor allem Müller und Timpe [1906], S. 22 f.

[54] Der Begriff der 'Constitutive Equations' in dieser Bedeutung wurde von Noll und Truesdell verbreitet. Siehe etwa Noll [1958], S. 3; Truesdell und Toupin [1960], S. 233; Truesdell und Noll [2004], S. 44; oder Truesdell [1966], S. 3 f.; sowie hier Abschnitt 5.1.1.

[55] Viele Lehrbücher zur Kontinuumsmechanik beginnen mit einem Kapitel über mathematische Grundlagen zur Tensoranalysis und Differentialgeometrie (etwa Sommerfeld [1992] oder Fung und Tong [2001]).

[56] Siehe dazu Hellinger [1913], §2: 'Der Begriff des Kontinuums'. So kommt es auch, dass einige Lehrbücher (wie etwa Sommerfeld [1992]) die lineare Kontinuumsmechanik ganz materialspezifisch behandeln.

[57] So die Umschreibung in Hamel [1967a], S. 55.

[58] Siehe dazu Hamel [1967a], S. 55. Auf Hamel geht schließlich die Charakterisierung der starren Körper über innere Spannungen zurück, wie ausführlich in 3.7.5 erläutert wird. Es handelt sich um die zentrale Begrifflichkeit beim Grenzübergang von elastischen zu starren Medien.

Ursprünglich handelt es sich um eine technische Konstruktion zur Vereinfachung von mechanischen Vorgängen fester Stoffe und Maschinen.[59] Dabei schwebt der starre Körper ambivalent zwischen der Anschauung von diskreten Massenmittelpunkten und einem Massenkontinuum. Es gibt endliche wie infinite Merkmale der starren Körperdynamik. Genau das macht ihn aus Sicht der Grundlagen schwierig zu interpretieren.

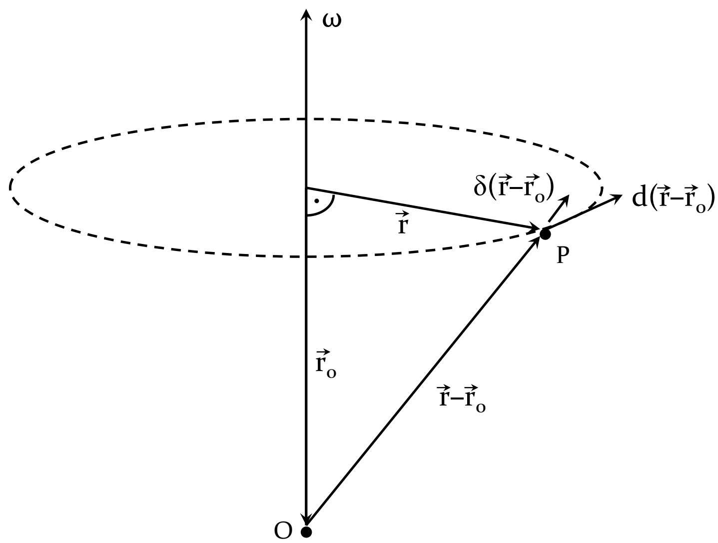


Abb. 3: Die kinematischen Größen am starren Körper

Für die Kinematik des starren Körpers denke man sich ein masseloses ausgedehntes Objekt. Es treten also keine Trägheitseffekte auf. Die Starre sorgt dafür, dass die Bewegung eines beliebigen Punktes im Körper durch sechs Freiheitsgrade, drei für die Translation und drei für die Rotation um den translatierenden Punkt, vollständig bestimmt ist. Die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes im starren Körper lässt sich allein aus der *Eulerschen Geschwindigkeitsformel* ermitteln:

$$\frac{d(\vec{r}-\vec{r}_0)}{dt} = \frac{\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)}{\delta t} + \vec{\omega} \times (\vec{r}-\vec{r}_0) \quad (\mathbf{EGF}).$$

Hierbei bezeichnet ω die Drehgeschwindigkeit des Körpers und $\vec{r}-\vec{r}_0$ den Relativvektor zwischen dem ruhenden Inertialsystem in Richtung $\vec{r}_0$ und dem mitbewegten (nicht-inertialen) Körpersystem in Richtung $\vec{r}$, wie in Abbildung 3 veranschaulicht.[60]

[59] Vgl. Stäckel [1908], §25b: 'Zur Entstehungsgeschichte der Dynamik starrer Körper'.

[60] Siehe dazu etwa Hamel [1912], Seiten 349 und 401; Synge [1960], S. 29; oder Hamel [1967a],

Die endlichen Freiheitsgrade der Bewegung machen den starren Körper noch nicht direkt zu einem Objekt der Partikelmechanik. Die Übertragung von **(EGF)** auf dynamische Massenwirkungen zeigt allerdings einzelne Reduktionsmöglichkeiten. Man beschränkt sich hierbei auf Anwendungen, bei denen die kinetisch relevanten Bestandteile eines starren Körpers durch Massenschwerpunkte modelliert werden. Dadurch wird die gesamte Dynamik mathematisch wie anschaulich auf eine reine 'Schwerpunktmechanik' vereinfacht. Diese Einschänkung sorgt dafür, dass der starre Körper seine punktmechanischen Charakteristiken zeigt. Der Exkurs unten wird dieses Vorgehen mit den dazugehörigen Grundgleichungen erläutern.

Allgemein wird die Dynamik des starren Massenkontinuums nur durch die sechs Impulsgleichungen

$$\frac{d}{dt}\int dm\,\vec{v} = \vec{F} \qquad \textbf{(RBM1)}$$

und

$$\frac{d}{dt}\int dm(\vec{r}\times\vec{v}) = \vec{M} \qquad \textbf{(RBM2)}$$

beschrieben.[61] Hierbei bezeichnen $\vec{r}$ und $\vec{v}$ den Orts- und Geschwindigkeitsvektor am Massenelement dm. Entsprechend den sechs Feiheitsgraden lässt sich jedes kinetische Problem des einzelnen starren Körpers eindeutig lösen. Man beachte, dass es sich um Massen*integrale* handelt, also um ein Kontinuum mit homogener Massenverteilung. Dennoch ist die Gesetzesstruktur analog den Grundgleichungen der Partikelmechanik **(PM1)** und **(PM2)** aus Abschnitt 3.3.4: Aus den Summen sind Integrale geworden. Satz **(RBM2)**, der *Momentensatz für starre Körper*, wird in der Literatur häufig als das *Eulersche Gesetz* bezeichnet.[62]

Die starre Massenkonstitution in den Grundgleichungen wird durch konstante *Trägheitsmomente* in Form des *Trägheitstensors* **I** relativ zu einem festen Koordinatensystem (x, y, z) im Körper beschrieben:[63]

$$\mathbf{I} = \int dm\vec{r}^{\,2} := \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{matrix} A = \int dm(y^2+z^2), & B = \int dm(z^2+x^2), & C = \int dm(x^2+y^2), \\ D = \int dmyz, & E = \int dmzx, & F = \int dmxy. \end{matrix}$$

S. 377. Zum historischen Ursprung bei Euler siehe auch Truesdell und Toupin [1960], S. 350; und Xambó [2008].

[61] Vgl. Stäckel [1908], S. 572; oder aktueller Synge [1960], S. 66; Truesdell und Toupin [1960], S. 531.

[62] Zurückgehend auf Euler [1790], §§ 1012 ff.: 'Allgemeine Formeln für die Bewegung starrer durch beliebige Kräfte angetriebener Körper'. Zum historischen Hintergrund des Eulerschen Gesetzes siehe Truesdell [1964] und Xambó [2008].

[63] Siehe zum Folgenden auch Stäckel [1908], S. 560; oder Synge [1960], S. 32.

Die Trägheitsmomente (auch Flächenmomente genannt) sind Ausdruck der kontinuierlichen Ausdehnung starrer Körper. Sie werden als Flächenintegrale jeweils aus der Geometrie des Körpers ermittelt und haben wegen der Massenträgheit, wie der Name andeuten soll, rückwirkenden Einfluss auf die Drehbewegung des Körpers.[64]

Die beiden dynamischen Impulsgleichungen galten zur Jahrhundertwende des starren Körpers als gesicherte Grundlage. Unklar war allerdings, wie weit die punktmechanischen Merkmale des starren Körpers verallgemeinert werden können. Gelingt eine Reduktion des Eulerschen Gesetzes **(RBM2)** auf **(RBM1)**, wie es im punktmechanischen Fall schon diskutiert wurde? Oder sind die Grundgleichungen voneinander unabhängig? Zu welchen Gleichungssystemen der starren Körperdynamik gibt es eindeutige und berechenbare Lösungen? - Das sind Fragen, die den unbestimmten Zwischenzustand des starren Körpers zwischen endlichen und infiniten Merkmalen der Dynamik ausmacht. Und darum geht es physikalisch in Hilberts Problem. Hamel hat, wie später auch Noll und Truesdell, den starren Körper als 'das' Objekt der Klassischen Mechanik gesehen. Er konnte zeigen, dass die Merkmale starrer Körper aus der Kontinuumshypothese gefolgert werden können.

Exkurs: Die Schwerpunktmechanik starrer Körper

Die kinematische Bewegungsgleichung **(EGF)** für starre Körper führt dazu, dass man zur Vereinfachung als Körpersystem in $\vec{r}$ den *Schwerpunkt*

$$\vec{r}^* = \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{m_{ges}}$$

des Körpers wählt. Der Vorteil ist, dass ein direkter Bezug zur einfachen Punktmechanik als 'Schwerpunktmechanik' hergestellt wird. Selbst die Trägheitsmomente **I** können durch genäherte Summierung $\sum_i m_i \vec{r}^2$ bei homogener Massenverteilung berechnet werden. Gebundene Systeme aus mehreren starren Körpern werden dann ebenso durch Schwerpunktmassen modelliert und reduzieren sich auf diskrete Punktsysteme.[65]

Diese Punktauffassung von starren Körpern wird noch dadurch verstärkt, dass nun die Bewegungsgleichungen für die Translation des Massenmittelpunktes und die Rotation um diesen Punkt voneinander unabhängig behandelt werden können. Die Bewegungsgleichungen sind:

$$m \frac{d}{dt} \vec{v}^* = \vec{F} \quad (\mathbf{RBM3}),$$

[64] Zur Veranschaulichung: Auf ein Rad, dessen Drehachse nicht durch seinen Schwerpunkt geht, wirken die 'Deviationsmomente' D, E oder F auf das Radlager. Als Reaktion wirken dann Lagerdrucke, die zu Achsenschwingungen führen (siehe dazu Hamel [1912], Nr. 218, S. 338 f.).

[65] Siehe Stäckel [1908], Seiten 474 und 543; und Synge [1960], S. 35.

$$\frac{\delta \vec{L}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M} \qquad (\mathbf{RBM4}).$$ [66]

Dabei bezeichnet $\vec{L}$ den *Drehimpuls* des Körpers, definiert durch

$$\vec{L} = \int dm(\vec{r} \times \vec{v}) = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega},$$

bzw. für Punktmassen:

$$\vec{L} = \sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}.$$ [67]

Gleichungen **(RBM3)** und **(RBM4)** sind letztlich nur eine algebraische Anwendung von **(EGF)** auf obigen Drehimpulsvektor $\vec{L}$. Diese Gleichungen gelten jetzt unabhängig davon, ob man den starren Körper von der Punktmasse her oder vom Massenkontinuum her konzipiert.[68]

Es gibt also einen entscheidenden Unterschied gegenüber den allgemein gelassenen **(RBM1)** und **(RBM2)**: Gleichungen **(RBM3)** und **(RBM4)** trennen Schwerpunktbewegung und Rotationen um den Schwerpunkt kinematisch voneinander. Bei dieser Vereinfachung wird aber in Kauf genommen, dass die Gleichungen *kinetisch*, d.h. unter Berücksichtigung der Kräfte- und Momentenwirkungen inertialer Massenelemente, *nicht alle* mechanischen Fälle umfassen können. *Wechselwirkungen* zwischen internen (infinitesimalen) Kräften sowie Momentenwirkungen zwischen Schwerpunktmasse und anderen Massenelementen des Körpers werden mathematisch ausgeklammert.[69] Daher ist diese Reduktion auf eine Schwerpunktmechanik aus diskreten Punktmassen des starren Körpers nicht der allgemeine Fall.

[66] So etwa Stäckel [1908], S. 574; Hamel [1912], S. 424; oder Synge [1960], Seiten 66 u. 68.

[67] Siehe Stäckel [1908], S. 572; Synge [1960], S. 35 und S. 67.

[68] Siehe etwa Xambó [2008], S. 296. Die gesamte Kreiseltheorie setzt diese Unabhängigkeit voraus, wie etwa in Sommerfeld [1967], S. 117, betont wird.

[69] Man denke an das Beispiel in Anmerkung 64. Weitere Beispiele in Hamel [1967a], Abschnitt 115, 'Die Bewegungsgleichungen'. In Hamel [1912], S. 414 f., heißt es: „Kinematisch erscheinen die Aufgaben: die Bewegung des Schwerpunktes und die Drehung um den Schwerpunkt zu bestimmen, vollständig getrennt zu sein; dynamisch wird das allerdings nicht immer der Fall sein: Es kann, wie z.B. beim Luftwiderstand, die Summe der äußeren Kräfte noch von der Stellung und Bewegung um den Schwerpunkt abhängen (infolgedessen Einfluss der Rotation auf die Bewegung eines Geschosses, eines Tennisballes), ebenso kann aber auch $\vec{M}$ von der Lage und Bewegung des Schwerpunktes abhängen."

3.4 Systematische Prinzipien der rationalen Mechanik

Alle bisherigen Grundbegriffe und -gesetze werden bei Georg Hamel den Status von 'Axiomen' in unterschiedlichen Aufbauten oder 'Zugängen' zur Klassischen Mechanik erhalten. Dabei hat sich in dieser Zusammenfassung bereits gezeigt, dass sich auf der Ebene der Anschauung zwischen Punktmasse, starrem Körper oder Massenkontinuum die Gesetzmäßigkeiten deutlich in Gestalt und Bedeutung unterscheiden. Das ist nach meiner Auffassung kein historisches Phänomen der rationalen Mechanik zur Jahrhundertwende. Jeder, der die axiomatische Methode auf die Klassische Mechanik anwendet, steht zu Beginn vor der Herausforderung, diese Begriffsvielfalt durch implizite Definitionen[70] zu reorganisieren. Die logisch ambivalente Konzeption *des Körpers* in der Klassischen Mechanik und die damit verbundenen Vorstellungen von *Masse* und *Kraft* sind der zeitlose, wissenschaftsphilosophische Aspekt in den Grundlagen.

Von den implizit definierten Begriffsschemen aus sind nun diejenigen Elemente der Mechanik zu ergänzen, die zum deduktiven Ausbau einer *Systemmechanik* hinreichen. Diese Sätze und Aussagen betreffen die *Rückwirkung* auf ein Massenelement durch die Gesamtheit von Elementen, die zu einem unbestimmten Massen*system* zusammengefasst sind.[71] Die Dynamik steckt nicht in isolierten Einzelkörpern, sondern in der Massenwirkung und in der Reaktion von *mehreren* Elementen aufeinander. Tatsächlich, so würde ich behaupten, sind es erst diese systematischen Prinzipien der Mechanik, die intern vereinheitlichen: *keine logische Rekonstruktion ohne Prinzipien über das Massensystem*.[72] Die Relevanz dieser Systemprinzipien für jeden logischen Rekonstruktionsversuch sei deshalb im Folgenden illustriert, sofern sie die hier behandelten Grundlagen der Mechanik betreffen.

Das Systemverständnis der rationalen Mechanik kommt besonders bei Paul Volkmann zum Ausdruck und wird zweifellos Hilberts und Hamels axiomatische Auffassung der Mechanik beeinflusst haben. Es wurde zum Beispiel in Abschnitt 3.3.4 zur Punktmechanik erklärt, dass die Begriffstrennung zwischen inneren und äußeren Kräften nur über das gesamte Massensystem definiert werden kann. Volkmann objektiviert darüber hinaus das Massensystem als 'Träger' dieser Reaktion, wenn es heißt:

> „So sind innere Kräfte solche Kräfte, die durch *die Natur* [eigene Herv.] des Massensystems gegeben sind, äussere Kräfte solche Kräfte, die nicht dadurch gegeben sind" (Volkmann [1900], S. 120).

Klassische rationale Mechanik *ist* Systemmechanik und damit mathematischen Prinzipien und einem deduktiven Aufbau unterworfen. „Wir be-

[70] Zum Begriff der 'impliziten Definition' siehe Abschnitt 2.3.1.

[71] So die Bedeutung des Begriffs 'Systemmechanik' in Hamel [1912], §22: 'Übergang zur Systemmechanik', dort erstmals so genannt; später vor allem in Hamel [1927].

[72] Zu diesem Gebrauch von innerer Vereinheitlichung im Zusammenhang mit der axiomatischen Methode siehe Abschnitt 2.8.

vorzugen die *logische* Stellung [eigene Herv.] der Mechanik innerhalb des wissenschaftlichen Systems" (Volkmann [1900], S. 42). Und so will Volkmann betonen, dass die rationale Mechanik eine

> „[...] Grunddisciplin [ist], welche den physikalischen Einzeldisciplinen vorauszuschicken ist. Diese Definition der Mechanik ist eine systematische d.h. sie hat Beziehung zu dem Aufbau des Systems" (ebd., S. 42).

Dieses 'Vorausschicken' der Mechanik meint gerade ihre logische Stellung zwischen reiner Mathematik und Physik: Sie beschreibt mathematisch idealisierte Systeme, unabhängig von jeder korpuskularen oder phänomenologischen Anschauung der Wirklichkeit. Mit instrumentalistischen Modellen der sichtbaren Körpern stellt die rationale Mechanik des beginnenden 20. Jahrhunderts autonome, logisch gültige Systeme bereit, unabhängig von ehrgeizigen mechanistischen Analogien als auch von anderen neuartigen Mechaniken wie der Quantenmechanik oder der Relativitätstheorie.[73] Schon damals bestand aus Sicht der Grundlagenforschung *kein logischer* Dissens zwischen Klassischer Mechanik und anderen Mechaniken. Ich komme später (Abschnitt 3.7.1) darauf zurück.

3.4.1 Zum Gegenwirkungsprinzip: innere Kräfte

Das dritte Axiom Newtons, oft auch Reaktionsprinzip oder *Gegenwirkungsprinzip* genannt, „[enthält] für die Betrachtung von materiellen Systemen gerade den wichtigsten Teil der *Newton*schen Mechanik".[74] Tatsächlich handelt es sich hierbei um das neuartige Prinzip innerhalb des Newtonschen Systems.[75] Nach Volkmann bedeutet das Reaktionsprinzip nun der erste und naheliegenste Versuch, eine Lücke in unserem unvollständigen Wissen über das mechanische System zu schließen:

> „Dieser Grundsatz weist uns darauf hin, dass die ausschliesslich an das Studium einer Actio geknüpfte Betrachtung der Wirklichkeit unvollständig bleibt und der Natur der Sache nach unvollständig bleiben muss. Actionen, Wirkungen treten in der Natur niemals isolirt auf, mit ihnen treten stets zusammen Reactionen, Gegenwirkungen auf. Diese müssen bei einer vollständigen Untersuchung einer Erscheinung aufgesucht werden, und wenn ihre Existenz nicht gleich sichtbar und deutlich in Erscheinung treten sollte, dann muss sie gefordert werden." (Volkmann [1900], S. 83)

Das Reaktionsprinzip bleibt also eine Interpretation der mechanischen Wirklichkeit, etwas *systematisch* Ergänztes. Es ist Anfang, erste Näherung

[73] Siehe hierzu insbes. Fraser [1994], S. 894.

[74] Zitiert aus Voss [1901], S. 56. Im Original lautet das Gegenwirkungungsprinzip: „**Law III.** To every action there is always opposed an equal action: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts."(Newton [1687], S. 19).

[75] Siehe dazu etwa Jammer [1957], S. 127.

einer ganzheitlichen Betrachtung des mechanischen Vorgangs.[76] Mit dem systematisch Ergänzten dringt man zu dem vor, was einem Mechanismus *wesentlich* ist, wie Volkmann und später Hamel sagen: nicht als etwas Essentielles und Evidentes in der Natur, sondern als eine selbst gesetzte, in die Natur hineinprojizierte Zusammenfassung. In diesem konventionalistischen Sinn ist es nach Volkmann entscheidend, beim logisch-axiomatischen Aufbau nach den wesentlichen Aspekten eines Bildes zu fragen und nicht nach irgendeiner Vollständigkeit, die unerreicht bleibt.[77]

In der ursprünglichen Version bei Newton ist das Gegenwirkungsprinzip weder auf Partikel noch auf Fernkräfte spezifiziert.[78] Doch wurde es in der weiteren historischen Entwicklung der rationalen Mechanik inhärent der punktmechanischen Anschauung zugeordnet.[79] Die Himmelsmechanik freier Punktmassen hatte eine vorbildliche Wirkung auf alle weiteren Entwicklungen der rationalen Mechanik.[80] Und so beinhaltet die universelle Korpuskulartheorie nach Laplace und Poisson,

> „die Naturerscheinungen zurückzuführen auf unveränderliche, anziehende oder abstoßende Kräfte, deren Intensität allein von den Entfernungen der punktförmig gedachten Moleküle abhängt." (Stäckel [1908], S. 449).

In der Beschränkung auf Punktmassen begründet das Gegenwirkungsprinzip also eine „Mechanik der Fernkräfte" (Voss [1901], S. 26), die im 19. Jahrhundert eng mit der atomistischen Vorstellung der Materie verbunden wurde. Ihr gegenüber steht die phänomenologische Vorstellung von kontinuierlich verteilten Körpern und Feldern, die in einer mathematischen Theorie der Nahwirkung mittels der Begriffe von Oberflächenspannungen und Kontaktkräften beschrieben werden.[81] Hamel betont zu Recht, dass *beide* Krafttypen - Fernkräfte und Kontaktkräfte - vom Reaktionsprinzip umfasst werden, „die durcheinandergemengt zu haben ein Verdienst der Punktmechanik ist" (Hamel [1909a], S. 353).

In der punktmechanischen Version, die in Ludwig Boltzmanns Mechaniklehrbuch Boltzmann [1897], ≫*Vorlesungen über die Principe der Mechanik*≪, streng durchgeführt wird, ist das *volle Gegenwirkungsprinzip* **(GW)** durch drei Teilprinzipien gekennzeichnet. Sie sind dort erstmals explizite 'Grundannahmen' und sind unverändert in Hamels Axiomatisierung eingegan-

---

[76] Eine ähnliche epistemologische Ansicht auch in Stäckel [1908], S. 451.

[77] Siehe dazu Volkmann [1900], Seiten 44, 229 u. 243. Der Wortlaut Hamels hier auf Seite 43 weist in dieselbe Richtung.

[78] Siehe dazu vor allem Truesdell [1984d], S. 538; oder Volkmann [1900], S. 85.

[79] Duhem [1912], S. 26, Jammer [1957], S. 94, und Wilson [1998], S. 255, sehen in Roger Joseph Boscovich den Urheber einer punktmechanischen Interpretation aller Naturerscheinungen, Duhem [1912], Seiten 27 und 40, Stäckel [1908], S. 449, und Voss [1901], S. 26 vor allem in Pierre-Simon Laplace den Initiator der mechanistischen Korpuskulartheorie.

[80] So Stäckel [1908], S. 472; Müller und Timpe [1906], S. 6; und Voss [1901], S. 26.

[81] Siehe dazu Voss [1901], S. 28.

gen.[82] Bezeichne dazu $\vec{f}_{1,2}$ diejenige innere Kraft, die von einer Punktmasse m_2 aus auf m_1 wirke.

Das Gegenwirkungsprinzip der Punktmechanik **(GW)** besteht aus folgenden Axiomen:

(G1) $\vec{f}_{2,1} = -\vec{f}_{1,2}$: Die Gegenkraft $\vec{f}_{2,1}$ hat denselben Betrag wie $\vec{f}_{1,2}$ und ist ihr entgegengesetzt gerichtet.

(G2) $\vec{r}_1 \times \vec{f}_{2,1} = -\,\vec{r}_2 \times \vec{f}_{1,2}$: Die inneren Kräfte $\vec{f}_{2,1}$ und $\vec{f}_{1,2}$ wirken parallel auf ihrer gemeinsamen Verbindungslinie $\vec{r}_{2,1}$. Man kann auch sagen, die inneren Momente des Kräftepaares $\vec{f}_{1,2}$ und $\vec{f}_{2,1}$ heben sich auf.

(G3) Die Kraft ist *nur* vom Ort der materiellen Punkte $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ abhängig: $\vec{f}_{1,2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$.

Die folgende Abbildung 4 illustriert die Konzeption.

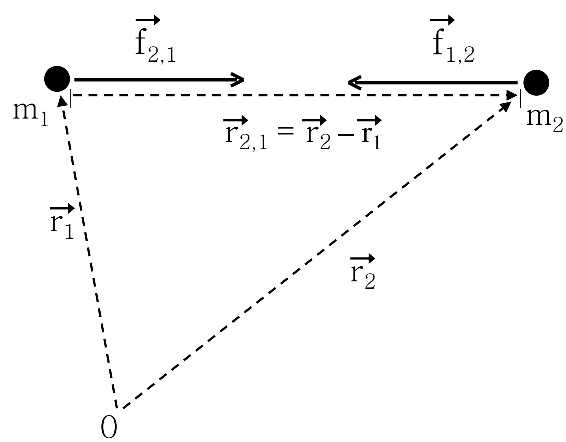


Abb. 4: Verbildlichung des Gegenwirkungsprinzips in der Punktmechanik

Diese Annahmen definieren den Begriff der 'inneren Zentralkraft' rein *formal*, ohne die funktionale Abhängigkeit der Kraft zum Verbindungsabstand $\vec{r}_{1,2}$ genauer zu kennzeichnen.[83] Diese Abhängigkeit, die etwa im Fall der Gravitationskraft

$$\vec{f}_{1,2} = \frac{C}{\vec{r}^{\,n}_{1,2}} \quad \text{mit } n = 2$$

wäre, ist für den einzelnen Anwendungsfall zu ergänzen. Erst dadurch, dass ein spezifisches Kraftgesetz mit einem $n \in \mathbb{N}$ angenommen wird,

[82] Siehe Hamel [1927], S. 25; Hamel [1967a], S. 51.

[83] Siehe Müller und Timpe [1906], S. 7, sowie Boltzmann [1905], S. 264.

erfüllt sich die Laplacesche Idee einer universellen Partikelmechanik, „*alle* Vorgänge der Natur auf Wirkungen materieller Punkte aufeinander, wie sie *nach dem Schema* [eigene Herv.] des Gravitationsgesetzes erfolgen, zurückzuführen" (Voss [1901], S. 26).

Die Partikelmechanik hatte also bereits zur Jahrhundertwende eine axiomatisierte Grundlage. Sie wird seitdem mit den drei *Newtonschen Axiomen* identifiziert, hier mit

1. dem Trägheitsprinzip (in 3.3.1),
2. **(PM1)** (in 3.3.4) und
3. dem vollen Gegenwirkungsprinzip **(GW)**

bezeichnet. Daher hat die Punktmechanik in Lehrbüchern auch häufig den Namen *Newtonsche Mechanik*.

In Hamels Axiomatisierung wird das Gegenwirkungsprinzip (**(G1)** bis **(G3)**) konsequent als Ausgestaltung der inneren Kraft verstanden. Es ist als Axiom innerhalb der Punktmechanik zu fordern, um den Begriff der *inneren* Kraft *implizit zu definieren*. Äußere Kräfte werden dann systemisch nicht weiter erklärte Kräfte.[84]

Markante Eigenart der punktmechanischen Axiomatik ist, dass auf ihrer Grundlage zentrale Erhaltungssätze *gefolgert* werden können: die Erhaltung des Drehimpulses im Momentensatz **(PM2)** und der Satz von der Energieerhaltung.[85] Es gab allerdings schon zur Jahrhundertwende eine Diskussion über die Gültigkeit der Deduktion von **(PM2)**. Eine axiomatisierte Fassung, die dem heutigen Lehrbuchstandard entspricht, stammt von Paul Volkmann.[86] In diesem Beweis zeigt er, dass **(PM2)** aus den Newtonschen Axiomen *ohne* Gegenwirkungsprinzip folgerbar ist, wenn zusätzlich angenommen wird, dass die inneren Kräfte keinen Gesamtdrehmoment auf das Punktsystem ausüben:

$$\vec{M}_{Ges} = \sum_{i,j;\, i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{f}_{i,j} = 0 \quad \textbf{(G4)}.$$[87]

[84] Entsprechend die Fußnote in Stäckel [1908], S. 450: „*Innere Kräfte* nennt man häufig nur die gegenseitigen Wirkungen der Punkte des Systems, die nach dem Gesetze der Aktion und Reaktion erfolgen, und alle anderen Kräfte heissen *äussere Kräfte*". So ist die Unterscheidung bis heute geblieben (siehe dazu Wilson [1998], S. 254 f.).

[85] Siehe Stäckel [1908], §7: 'Die Differentialgleichungen der Bewegungen'; sowie in einer lückenlosen Deduktion Hamel [1967a], §I.8: 'Die Punktmechanik'.

[86] In Volkmann [1900], Kap. III.2: 'Die Flächensätze und ihre Consequenzen'.

[87] Ursprünglich geht dieses Theorem auf Poisson zurück (siehe dazu Truesdell [1984d], S. 540, Truesdell [1964], S. 156. und Truesdell [1968]). Auch in Boltzmann [1897], S. 113, wird **(G4)** ohne Deduktion als notwendige Bedingung behauptet. Der *axiomatische* Charakter der Aussage **(G4)** wurde hingegen von Volkmann explizit hervorgehoben und als 'Erweiterung' des Gegenwirkungsprinzips für sämtliche Massensysteme postuliert (siehe Voss [1901], S. 56). Dabei ist allerdings zu beachten, dass Volkmann unter 'Reaktionsprinzip' nur **(G1)** und **(G3)**

Nach Volkmann ist das Momentengleichgewicht **(G4)** für alle Massensysteme gültig: „ob dieselben aus diskreten Massenpunkten oder aus kontinuierlichen Massenanordnungen bestehen, ist gleichgültig" (Volkmann [1900], S. 120). Ein solch *pragmatischer* Grenzübergang wurde später von Verfechtern der Kontinuumsanschauung (Hamel, Truesdell, Noll) abgelehnt, er sei in dieser pauschalen Allgemeinheit *logisch* nicht berechtigt. Er müsse vielmehr mathematisch nachgewiesen oder zumindest postuliert werden.[88] Ich werde später (Abschnitt 3.9) darlegen, dass es eine *Entscheidung* für oder gegen diesen pragmatischen Grenzübergang bleibt. Die Entscheidung ist von der zugrunde liegenden Anschauung des Körperlichen in Punktelemente oder in Oberflächenelemente abhängig. Es ist ein mathematisch *unlösbarer* Aspekt des Hilbertschen Problems.

Aus Sicht der Kontinuumsanschauung, die erstmals bei Hamel axiomatisch geordnet vorgestellt wird, hat das Gegenwirkungsprinzip die einfache Bedeutung von *Druck und Gegendruck* an einem Körper. Jede Kontaktkraft erzeugt eine entgegengesetzte Kontaktkraft. Für externe Kräfte (Volumenkräfte) stellt es allerdings eine „über jede Erfahrung hinausgehende Erweiterung dar" (Hamel [1909a], S. 353), die für die Kontinuumsmechanik „gleichgültig" erscheint (ebd., S. 353). Externe Kräfte zu charakterisieren überschreitet gewissermaßen die selbst gesetzte Systemgrenze. In der Terminologie der Spannungszustände gilt also nur für Kontaktkräfte, dass die entgegengesetzen Druckwirkungen gleich groß sind:[89]

$$\vec{\sigma}_{\vec{n}} = -\vec{\sigma}_{-\vec{n}} \qquad \textbf{(GC)}.$$

In Hamel [1909a], S. 360, wird schließlich gezeigt, das **(GC)** aus dem ersten Grundgesetz der Kontinuumsdynamik[90] deduziert werden kann, ein Theorem, das auf Woldemar Voigt zurückgeht. Walter Noll kann außerdem zeigen, dass das Gegenwirkungsprinzip unabhängig von punkt- oder kontinuumsmechanischen Prämissen zu einer Folgerung aus allgemeineren Invarianzeigenschaften aller dynamischen Operatoren wird. Ich komme auf diese Ergänzungen noch im Einzelnen zurück.

3.4.2 Der Gültigkeitsbereich des d'Alembertschen Prinzips

Innerhalb der systematischen Prinzipien der Mechanik nimmt das *d'Alembertsche Prinzip* eine eigenartige Sonderrolle ein. Es formuliert die generellen Bedingungen, unter denen die *Kinetik* eines Massensystems auf sei-

versteht (vgl. Volkmann [1900], S. 120). Der Begriff 'Erweiterung' ist also irreführend. Streng genommen zeigt Volkmann nur, dass aus dem *vollen* Gegenwirkungsprinzip Aussage **(G4)** folgt: $(\mathbf{G1})$, $(\mathbf{G2})$, $(\mathbf{G3}) \Rightarrow (\mathbf{G4})$.

[88] Als Übersicht zu diesem Aspekt siehe vor allem Szabó [1987], §1.3: 'Der Momenten- oder Drallsatz'.

[89] Man vergleiche mit der Abbildung aus 3.3.5.

[90] Das ist (**CM1**) in Abschnitt 3.3.5.

ne *Statik* zurückgeführt werden kann.[91] Ursprünglich von Jean-Baptiste d'Alembert nur für Schwerpunktmassen und für starre Körper erdacht, blieb noch zur Jahrhundertwende unklar, ob und warum sein Gültigkeitsbereich auch auf Systeme der Kontinua erweitert werden kann.

Die Vorstellung ist, dass einzelne Massenelemente des Systems zunächst durch starr gedachte und masselose Verbindungen zusammengesetzt sind. Ohne äußere Krafteinwirkung sind die Massenelemente im statischen Gleichgewicht: Es gelten **(S1)** und **(S2)** aus Abschnitt 3.3.2. Wenn nun dem 'gebundenen System'[92] Kräfte $d\vec{F}_i^e$ *eingeprägt* werden, führen die Massenelemente infolge ihrer Massenträgheit und der gegenseitigen starren Bindungen *inertiale Kräfte* $-dm_i \cdot \vec{a}_i$ ('Trägheitskräfte') aufeinander aus. Die Beschleunigungen $\vec{a}_i$ wirken den eingeprägten Kräften $d\vec{F}_i^e$ entgegen, daher das Minuszeichen. Das d'Alembertsche Prinzip besagt nun, dass die *Reaktionskräfte* $-d\vec{F}_i^r$, die als Gegenreaktion im sich selbst überlassenen System auftreten (deswegen auch hier das negative Vorzeichen), im Gleichgewicht sind:

$$-d\vec{F}_i^r = d\vec{F}_i^e - dm_i \cdot \vec{a}_i \,.$$[93]

Diese „rein logische Überlegung" (Voss [1901], S. 77) ist eine Aussage über unbekannte, unsichtbare Systemreaktionen und macht es deswegen schwierig, sie sowohl inhaltlich als auch formal zu erfassen. Es ist nicht klar, welche Objekte das Prinzip umfassen kann. Hierzu seien nur einige Aspekte genannt:

- Seit jeher mit Vagheit behaftet, ist die dunkle Bezeichnung 'verlorene Kraft' für diese 'negative' Systemreaktion ein weiterer Ausdruck der Unanschaulichkeit dieses Prinzips.[94] Verlorene Kräfte sind etwas, das sich der Anschauung entzieht. Sie können nicht nur interne/externe Kräfte in der Punktmechanik, sondern auch Oberflächenkräfte (Spannungen, Drucke) oder Haftreibungen umfassen. Die begriffliche Unterscheidung in eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte bringt somit eine ganz andere Funktionalität der Massendynamik zum Ausdruck. Die Kräfte sind von grundlegend anderem *Typ*.[95]

- Andererseits scheint aber die besondere Stärke des d'Alembertschen Prinzips darin zu liegen, dass es die Dynamik eines starr verbunde-

[91] Siehe etwa Volkmann [1900], S. 334; Hamel [1912], S. 300, und nicht zuletzt die originale Fassung in d'Alembert [1899], S. 57 f.

[92] So der Ausdruck in Stäckel [1908], S. 542. In Volkmann [1900], S. 334, wird auch von 'bedingten' gegenüber 'freien' Systemen gesprochen. Die ursprünglichen Fallbeispiele sind gekoppelte Pendelmassen, die als Reaktionskräfte gegenseitige Spannungen in den Verbindungen ausüben (siehe dazu Szabó [1987], Teil 1C).

[93] Hierbei folge ich der Darstellung aus Hamel [1912], S. 302.

[94] Siehe dazu die Anmerkung in Voss [1901], S. 78

[95] So auch später die Auffassung in Hamel [1909a], S. 353 und 379.

nen Massensystems beschreibt, ohne irgendein Wissen über die materielle Natur der Kräfte und Massen vorauszusetzen.

> „In der Mechanik aber liegt gerade der große Fortschritt, den wir *d'Alembert* verdanken, darin, dass die aus den Verbindungen hervorgehenden Reaktionen eingeführt werden, *ohne dass nach ihrer physikalischen Legitimation gefragt wird*." (Stäckel [1908], S. 555)

In diesem d'Alembertschen Bild der Klassischen Mechanik scheint also der Gegensatz zwischen Punkt- und Kontinuumsanschauung ausgeklammert (was nicht heißen soll, dass er gelöst sei).

- Ferner geht das Prinzip aus der so genannten *synthetischen Methode* hervor. Diese Verwendung von 'synthetisch' in Abgrenzung von 'analytischen' Methoden orientiert sich an Eulers berühmter Vorrede zum ersten Teil seiner »*Mechanica*«, Euler [1736], und in diesem Zusammenhang ist sie auch bei Voss, Stäckel, Duhem und später vor allem bei Hamel zu finden. Dabei soll zum Ausdruck kommen, dass bei jeder Deduktion der Kraftfunktionen nicht nur vom anschaulichen *geometrischen Einzelfall* auszugehen ist, sondern dass die analytischen Folgerungen auch „auf Grund dieser Angaben" im modellierten Einzelfall erzielt werden, wie es in Duhem [1912], S. 170, heißt. Die formalen Methoden der Differentiale und Integrale, die Mittel der *Analysis*, sind also zur Bestimmung der Kraftfunktionen allein nicht konstitutiv. Somit setzt jede synthetische Behandlung des d'Alembertschen Prinzips voraus, dass die Statik des *einzelnen Systems zuvor* geometrisch erfasst ist.[96] Der weitere Schluss auf die Kräfteverteilungen wird dann nur für dieses spezielle Modell entwickelt.[97]

- Weil es eine Aussage über *gebundene* (unfreie) Körper enthält, gilt es als gesichert, dass das d'Alembertsche Prinzip nicht nur das Newtonsche Gegenwirkungsprinzip enthält, sondern darüber hinausgeht.[98] Andererseits bleibt unklar, was diese Erweiterung physikalisch ausmacht.

> „Was dieser weitere, über Newton hinausgehende Inhalt des

[96] Siehe Hamel [1909a], S. 351, oder Hamel [1967a], S. 218.

[97] So ist es auch in d'Alemberts ursprünglicher Fassung des Prinzips vorgesehen. Siehe dazu Voss [1901], S. 79; und Duhem [1912], S. 176. Damit bleibt allerdings die Verwendung von 'synthetisch' sowohl als methodische, begründungstheoretische Bezeichnung als auch in Abgrenzung zur 'analytischen' Mechanik unklar. Ebensowenig wie der synthetische Ansatz auf arithmetisierte Kraftkomponenten verzichten kann, ist die funktionale Bestimmung von Zwangsbedingungen im analytischen Ansatz niemals frei von geometrischen Begründungsmomenten. Es handelt sich also um eine innermathematische und keine wissenschaftstheoretische Akzentuierung, wie schon bei Euler selbst (vgl. dazu Pulte [2005], S. 188). Ich gehe hierauf im übernächsten Abschnitt 3.4.4 weiter ein.

[98] Siehe Volkmann [1900], S. 335, und Stäckel [1908], S. 542

> D'Alembert-Langrange'schen Prinzips physikalisch bedeutet, das wird schwer zu sagen sein." (Volkmann [1900], S. 360)

Es ist vor allem Hamel zu verdanken, die Allgemeingültigkeit des d'Alembertschen Prinzips geklärt und von diversen Missverständnissen befreit zu haben.[99] Demnach stellt es einen *unabhängigen* methodologischen Ansatz zur Klassischen Mechanik dar.

In der punktmechanischen Anschauung ist das Prinzip *rein formal* nicht vom Newtonschen Grundgesetz **(NG)** unterscheidbar.[100] Das mag dazu geführt haben, dass es schon zur Jahrhundertwende teilweise gleichbedeutend mit dem Newtonschen Gegenwirkungsprinzip behandelt wurde.[101] Sicherlich hat das Fehlen einer *eigenständigen Form* zu den semantischen Unklarheiten beigetragen.

3.4.3 Das Prinzip der virtuellen Arbeiten

Mit dem *Prinzip der virtuellen Verrückungen* hat Joseph-Louis Lagrange der Klassischen Mechanik ihre „analytische Formvollendung" gegeben.[102] Bekanntlich handelt es sich um ein differentielles Variationsprinzip von so erheblicher Allgemeinheit, mathematischer Abstraktion und deduktiver Aussagekraft, dass Lagrange von einer »*Mécanique Analytique*« schon im Buchtitel spricht, also den Begriff des 'Analytischen' für seine gesamte Mechanik gewählt hat.[103] An dieser Bedeutung als *analytisches* Prinzip hat sich bis Beginn des 20. Jahrhunderts nichts Wesentliches geändert.

Als *Axiom der Statik* umfasst das Prinzip der virtuellen Verrückungen die Aussage, dass alle virtuell gedachten Verschiebung der angreifenden (eingeprägten) Kräfte an einem Massensystem zusammen verschwinden. Das System verrichtet, wie man auch sagt, in der Summe keine virtuelle Arbeit:[104]

$$\sum_i \vec{F}_i^e \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta A = 0.$$

Der Übergang zur *Kinetik* gelingt dann durch die Verknüpfung des Prinzips der virtuellen Arbeit mit dem d'Alembertschen Prinzip, was auch als das *Lagrangesche Prinzip* bezeichnet wurde. Die virtuelle Arbeit der Systemre-

[99] So vor allem in Hamel [1909a], S. 382; und Hamel [1967a], S. 220. Siehe dazu auch die Bemerkung in Hellinger [1913], S. 670, Heun [1914], S. 417, und aktueller Szabó [1987], S. 41.

[100] Siehe Heun [1914], S. 417 und Hamel [1912], S. 302.

[101] So etwa in Love [1897], S. 101. Siehe dazu Beispiel (*4c*) hier Abschnitt 3.6.3.

[102] So der Wortlaut in Volkmann [1900], S. 335; siehe auch Voss [1901], S. 67.

[103] Man siehe insbesondere Pulte [2005], S. 187.

[104] Diese Formulierungen sind Volkmann [1900], S. 335, Voss [1901], S. 67, und Hamel [1912], §54: 'Das Prinzip der virtuellen Arbeiten', entnommen.

aktionen (der 'verlorenen Kräfte') muss in der Summe verschwinden.[105]

$$\sum_i (\vec{F}^e - m\vec{a})_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0.$$

Die enorme Leistungsfähigkeit der Variationsprinzipien galt schon zur Jahrhundertwende als gesichert.

> „Denn woher stammt die Überzeugung von der unbeschränkten Gültigkeit des Prinzips [der virtuellen Arbeiten]? Zum Teil doch gewiss aus der unzähligemal geprüften Übereinstimmung mit der Erfahrung und der Möglichkeit, [...] die Frage auch bei allgemeineren Voraussetzungen erledigen zu können, sowie aus der Gleichförmigkeit der Resultate bei ganz verschiedenen Ansätzen." (Voss [1901], S. 73)

Dasselbe trifft auch auf die Nichtreduzierbarkeit und Unbeweisbarkeit des Prinzips zu.[106] Zudem galt es damals schon als erwiesen, dass die gesamte Mechanik starrer Körper und sämtliche Erhaltungssätze hieraus deduziert werden können.

Vielmehr noch reicht gerade wegen der eben genannten 'Gleichförmigkeit ihrer Resultate' die Allgemeingültigkeit der analytischen Prinzipien über die Klassische Mechanik von Punktmassen und starren Körpern hinaus. So wird, schon auf Lagrange zurückgehend, der Geltungsbereich des Prinzips der virtuellen Arbeit auf deformierbare Kontinua erweitert, indem der Körper von seinen festen Bindungen für den Moment der Betrachtung losgelöst wird.[107] Alle wirkenden Kräfte werden dann als eingeprägte Kräfte reinterpretiert. Mit dieser Annahme, die später bei Hamel zum axiomatischen Grundsatz des '*Befreiungsprinzips*' erhoben wird, können nicht nur die Gesetze für Kontinua aufgestellt werden, sondern es kann auch die Mechanik der starren Körper für die Spezialisierung starrer Verbindungen zwischen beliebigen Massenelementen des Kontinuums *gefolgert* werden.[108]

> „[Das Lagrangesche Prinzip] ist imstande, die bisher vorgetragenen Grundlagen der Mechanik vollständig zu ersetzen, wenn wir beachten, dass wir es in der Hand haben, auch beliebige Ausschnitte eines Systems als solches zu betrachten und Bewegungsbeschränkungen

[105] Siehe Volkmann [1900], S. 338; Voss [1901], S. 78; und Hamel [1912], S. 474. Viele aktuelle Lehrbücher verstehen das d'Alembertsche und das Lagrangesche Prinzip synonym, obwohl das historisch nicht korrekt ist (siehe dazu Hamel [1967a], S. 219).

[106] Zur Jacobischen Kritik der Beweisversuche Lagranges und zur wissenschaftshistorischen Entwicklung hin zur konventionalistischen Auffassung der analytischen Prinzipien siehe insbesondere Pulte [1998].

[107] Die axiomatische Forderung dieser Allgemeingültigkeit des Prinzips der virtuellen Arbeiten lässt sich erstmals in Voss [1901], S. 72, finden. Siehe auch Stäckel [1908], S. 531.

[108] Man siehe dazu insbesondere Hellinger [1913], S. 619, sowie in genauerer Durchführung bei Hamel [1967a], S. 81 f.

> aufzuheben, wodurch frühere Reaktionskräfte zu eingeprägten Kräften werden, die freilich als Unbekannte einzuführen sind." (Hamel [1912], S. 475)

Tatsächlich ist die axiomatische Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Arbeiten auf die Kontinuumsmechanik gerade von Hilbert stark favorisiert worden.[109] Die Frage, ob dieses Axiom selbst aus elementaren Sätzen der Analysis begründbar ist, muss als *analytische Kommentierung* des Hilbertschen Problems verstanden werden. Es ist letztlich die Frage, ob die Variationsprinzipien den Grenzprozess zum Kontinuum lückenlos zulassen oder ob der Grenzübergang weiteren Stetigkeitsbedingungen unterliegt; eine Frage, die zweifellos von zentralem Interesse für Hilbert gewesen ist.[110] So kommentiert Hellinger diesen analytischen Teil des Hilbertschen Problems folgendermaßen:

> „Man hat seither auch auf den weiteren der Behandlung erschlossenen Gebieten der Mechanik der Kontinua das Prinzip der virtuellen Verrückungen zur Geltung gebracht und hat sich dabei häufig, wie *Lagrange*, auf die Vorstellung gestützt, dass man das Kontinuum durch Systeme von endlich vielen Massenpunkten, und gleichzeitig alle physikalischen Vorgänge im Kontinuum durch entsprechende Vorgänge *in diesen approximierenden Systemen annähern kann* [eigene Herv.]; freilich scheint eine *axiomatische* Präzisierung dieses Zusammenhanges, die vor allem die zur Umwandlung jener Analogisierungen *in strenge Deduktionen notwendigen Stretigkeitsforderungen* [eigene Herv.] zu postulieren hätte, bisher nicht gegeben worden zu sein. Man mag es daher inzwischen vorziehen, für die Mechanik der Kontinua das eingangs formulierte Prinzip selbst als *oberstes Axiom* an die Spitze zu stellen [...]" (Hellinger [1913], S. 616).

Kurzum, Hamel wird nicht mit neuartigen Axiomen antworten, sondern den erkenntnislogisch unabhängigen Zugang zur Klassischen Mechanik durch die analytischen Prinzipien präzisieren. Darin besteht ein weiterer Aspekt seiner Antwort auf Hilberts sechstes Problem. Was zuvor vermutet wurde erhält nun Platz als eigenes gesichertes Axiomensystem:

> „[... Hamel] gibt dort [d.i. in Hamel [1912]] eine vollständige Axiomatik der Kontinua, die das eine Grundprinzip [der virtuellen Arbeiten], wie es hier genutzt wird, in einer Reihe unabhängiger Sätze auflöst" (Hellinger [1913], S. 616).

[109] In Hellinger [1913] wird dieser Aufbau skizziert, mit expliziter Bezugnahme auf Hilberts Ideen aus seinen Vorlesungen (siehe dazu die Fußnote auf Seite 604).

[110] Siehe dazu insbesondere Majer [2006a], Abschnitt 4.2: 'The axiomatic structure of mechanics and the logical analysis of its principles'.

3.4.4 Die analytischen Systemprinzipien und der Gegensatz analytisch - synthetisch in den Grundlagen der Mechanik

Mit Beginn des 20. Jahrhunderts blickte man bereits auf ein breites Spektrum an analytischen Prinzipien der Mechanik, von denen die Äquivalenz zum Lagrangeschen Variationsprinzip bereits gesichert war.[111] Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sollten sie in diesem Zusammenhang erwähnt werden, um deutlich zu machen, dass es nicht die eine analytische Systemmechanik gegeben hat, die in den Grundlagen diskutiert wird. Das sind vor allem

- die *Parametermethode* nach Lagrange. Dieser Aufbau, der Massensysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden bestimmt, wird auch auf Kontinua erweitert.
- die *Lagrangegleichungen*, die (für holonome Systeme) als äquivalent zum Hamiltonprinzip erkannt sind;
- neben dem (Lagrangeschen) Prinzip der virtuellen Arbeit weitere differentielle Minimalprinzipien: das *Gaußsche Prinzip* des kleinsten Zwanges und *Hertz' Prinzip* der geradesten Bahn;
- und die energetischen, *integralen* Variationsprinzipien: das *Hamiltonsche Prinzip* und das Prinzip der kleinsten Wirkung nach Leibniz, Maupertuis und Euler.

Mit Blick auf Hamels Untersuchungen in den Grundlagen der Mechanik muss allerdings betont werden, dass dieser analytische Teil der mechanischen Grundlagen methodisch erst *nach* Rekonzeptualisierung der 'synthetisch' gewonnenen Grundbegriffe eintritt. Ein bewährter Begriffskanon der Klassischen Mechanik muss bereits in eine 'primäre Ordnung' gebracht sein, durch geometrische, idealisierende und algebraisch vereinfachte Modellierungen, die den Begriffen ihre 'erste' empirische Bedeutung verleihen. In diesem Sinn wurde schon in Abschnitt 3.4.2 von der 'synthetischen Methode' innerhalb der rationalen Mechanik gesprochen, und in diesem Sinn besteht eine semantische Abhängigkeit des analytischen Herangehens an die Mechanik vom synthetischen Herangehen.[112]

So wird auch verständlich, weshalb die energetischen Prinzipien erst in Hamel [1927] und Hamel [1967a] *deduktiv* untersucht werden, nachdem eine elementare synthetische Grundlage (mit Hamel [1909a] und Hamel [1912]) geschaffen war. Hier scheint eine unterschiedliche Priorität zu Hilberts eigenen Vorstellungen vorzuliegen, dessen Ideen in den Grundlagen

[111] Man siehe hierzu vor allem die Übersicht in Voss [1901], Kap. IV: 'Die speziellen Prinzipien der rationellen Mechanik'.

[112] Ich hier sehe hier eine Analogie zur Abhängigkeit der axiomatisierten Theorie von ihren 'genetischen Vorgängern' (vgl. Abschnitt 2.4), auf die ich allerdings in diesem Rahmen nicht weiter eingehen kann.

eher von der analytischen Konzeption ausgehen.[113] So kann man aus einigen Lehrwerken des 20. Jahrhunderts, denen die konventionalistische Wende im Prinzipienverständnis deutlich anzumerken ist, den Eindruck gewinnen, als wäre die Reihenfolge eine Frage des persönlichen Geschmacks. Doch nicht nur didaktisch, nicht nur historisch, sondern vor allem systematisch sind die Grundbegriffe und -anschauungen *zu* Newtons oder Eulers Gesetzesformen der Klassischen Mechanik *vorrangig*.[114] Die analytische Mechanik ist kein von diesen Grundbegriffen *semantisch* unabhängiger Zugang, der als eigenständige Systemmechanik frei von angrenzenden Begriffsbedeutungen wäre. Daher habe ich im vorherigen Abschnitt von einem 'erkenntnislogisch unabhängigen Zugang' zur Klassischen Mechanik gesprochen, um den übergeordneten, 'semantisch enthobenen' Charakter der analytischen Mechanik anzudeuten.

Unklar bleibt an dieser Rangfolge, was und wieviel an den Prinzipien der Klassischen Mechanik eigentlich 'analytisch' ist. Im *traditionellen* Sinn der rationalen Mechanik bei Euler und Lagrange sind es Prinzipien,

> „die sich der höheren Analysis, d.h. der Variationsrechnung bedienen, um aus ihnen die Bewegungsgleichungen eines Körpers oder, allgemeiner, aller Körper eines mechanischen Systems abzuleiten." (Pulte [2005], S. 189).

Dass die analytischen Prinzipien in der Lage sind, ganze Gesetzesgruppen der Mechanik und analoge Beziehungen zu anderen Gebieten der Physik herzustellen, wurde seit jeher als der große logische Vorzug angesehen. Ein analytisches Prinzip scheint eine Art „*Metagesetz*" zu sein, „das auf *alle* Bereiche der Natur angewandt werden könne" (Pulte [2005], S. 191). Diese Einordnung in einen systemübergeifenden Gegenstandsbereich musste mit einer „semantischen Entladung" (ebd., S. 154) der mechanischen Grundbegriffe einhergehen, wie auch mit einem „Anschauungsverlust gegenüber den älteren, synthetischen Prinzipien" (ebd., S. 193). Die analytische Mechanik ist demnach bereits von ihrer historischen Herkunft her als „*formale* Integration" (ebd., S. 154) in einen breiteren mathematischen Kontext zu verstehen.

[113] Man betrachte dazu insbesondere Hilberts eigene Skizzen zu einer axiomatisierten Mechanik in Hilbert [1905], §2: 'Begründungen der Mechanik'. Sie sind zentral von den Variationsprinzipien her ausgerichtet. Hamel selbst hat sich bereits zur Zeit seiner Habilitation bei Karl Heun intensiv mit den Variationsprinzipien der Mechanik beschäftigt (siehe vor allem Hamel [1904a] und Hamel [1904b]). Die Vorrangigkeit der synthetischen Methode in der Mechanik bleibt somit eine bewusste Setzung.

[114] In dieser Reihenfolge sind die meisten Lehrbücher und Enzyklopädien zur Klassischen Mechanik strukturiert. Selbst in Hilbert [1905] wird **(NG)** an den Anfang der dynamischen Grundgesetze gestellt. Was die historische Entwicklung der analytischen Prinzipien betrifft, so möchte ich nur auf Pulte [2005] (vor allem einleitend Abschnitt 4.2.5: 'Prinzipieninflation und systematisch-deduktive Organisation') verweisen, wo eingehend erläutert wird, dass die analytischen Prinzipien seit Ende des 18. Jahrhunderts einer 'deduktiven Praxis des mathematischen Physik' entspringen, bei der die einheitliche Naturordnung der mechanischen Gesetze durch weitere theoretische Organisation auf eine *höhere*, abstraktere Ebene verlagert wird.

Die Distanzierung vom gemeinsamen 'synthetischen Boden' der mechanischen Grundgesetze ist meines Erachtens ein synonymer Ausdruck für ein formalistisches Prinzipienverständnis seit Anfang des 20. Jahrhunderts.[115] Der begriffliche Gegensatz zwischen 'analytisch' und 'synthetisch' verliert seine innermathematische Akzentuierung insofern, als ein mechanisches Prinzip sowohl aus mathematischen als auch aus empirischen Beweggründen revidiert werden kann. Eine logische Rekonstruktion *kann* somit jeden Anschauungsverlust billigend in Kauf nehmen, wenn ihre semantisch entladenen Axiome als *formaler* Ausgangspunkt begriffen werden und die empirische Bedeutung der Größen nur noch hintergründig vorhanden ist. Axiome, implizite Definitionen, sind dann bloße Begriffsschemen, ein mathematisches Substrat.[116] Und das 'Analytische' der Mechanik erhält dann Bedeutungsähnlichkeit mit 'formaler Repräsentation' durch Gesetzesschemen und 'analytische' Funktionen.[117] Es wird, um die Kapitelüberschrift in Hamel [1967a], S. 281, zu benennen, zu einer 'mathematischen Durcharbeitung' der zuvor semantisch aufgefüllten Gesetzesschemen.

Mit anderen Worten, der innermathematische Gegensatz zwischen synthetischer und analytischer Methode gerät durch die Konventionalisierung der Grundlagen der Mechanik in den Hintergrund, während *formale* gegenüber *informellen* Kriterien der mechanischen Repräsentation die relevante Akzentuierung aufweisen. Deshalb, meine ich, muss jede Axiomatisierung der Klassischen Mechanik im 20. Jahrhundert vom Standpunkt der vorliegenden Logizität der Rekonstruktion aus beurteilt werden.[118] Der *System*charakter der rekonstruierten Mechanik wird am Maß der logischen Schlüssigkeit innerhalb der Theorie deutlich: vom Prinzip zum Theorem, vom Theorem zur Differentialgleichung des konkret vorliegenden Modells und zur funktionalen Lösung.

Ebenso logisch ambivalent steht es mit der Qualität der Antworten, die auf das sechste Problem Hilberts erwartet werden können. So *divergent* die grundlegenden Begriffsstrukturen der Klassischen Mechanik gewesen sind,[119] so unterschiedlich können die Ausführungen des physikalischen

[115] Auf die formalistische Interpretation von mechanischen Prinzipien bin ich in Abschnitt 2.7 eingegangen.

[116] In Abschnitt 2.3.8 habe ich versucht deutlich zu machen, dass die formalistische Interpretation der impliziten Definition von Hilbert und anderen in dieser Einseitigkeit keinesfalls intendiert wurde.

[117] So wird 'analytische Mechanik' aktuell in Butterfield [2004], §2, anhand des Funktionenspektrums der Mathematik charakterisiert. Demnach ist sie ein Instrument zur Suche von 'analytischen Funktionen', welche den kinetischen Zustand eines Systems exakt beschreiben. Auf diesem Weg sei es gelungen, ein „general scheme" (ebd., S. 9) zu formulieren (wie etwa die Lagrangeschen Gleichungen), in der *alle* mechanischen Systeme repräsentiert werden können. In der Funktionalisierung und Schematisierung der mechanischen Systeme auf endliche Parameter, bei einem variablen Grundbereich, liegt die besondere Leistung ('merit' in ebd., S. 26) der analytischen Mechanik.

[118] Siehe hierzu Abschnitt 2.5.

[119] Siehe hier Teil 3.3.

Grenzüberganges zwischen den verschiedenen Systemmechaniken aussehen. Auf unterschiedliche Erwartungen, Zielsetzungen und Ausführungen, denen jeweils eine gewisse Vereinfachung des Problems anhaftet, will ich nun im Folgenden eingehen, bevor ich die weitere Zusammensetzung zu einer umfassenden Rekonstruktion durch Hamel vorstellen werde.

3.5 Pragmatische Antworten: der Verzicht auf Teile der Problemstellung

3.5.1 Das Ende der Mechanistik

> „Nun hat sich aber doch der Standpunkt der Mechanistik nicht durchführen lassen; man ist genötigt worden, die Physik auf neue Grundlagen zu stellen und in den Begriffsbildungen noch viel weiter von der Wahrnehmung abzugehen, als es bei der Mechanistik geschieht.” (Hilbert [1992], S. 41)

Zur Jahrhundertwende gab es bereits *die eine* Klassische Mechanik. Es ist die Theorie zur dynamischen Beschreibung der makroskopischen Körper als träge und schwere Massen. Dagegen bestand zur damaligen Zeit, das sollen die vorigen Abschnitte gezeigt haben, ein immenses Durcheinander an Repräsentationen und Anschauungen innerhalb dieser Theorie, und zwar gerade auf der Ebene der Grundbegriffe. Es gab nicht und es gibt nicht *die eine Darstellung*, das eine 'Bild' der Mechanik, wie Hertz sagte. Die axiomatische Methode soll gerade in dieser Hinsicht einen *regressiven* Dienst erweisen, um die unterschiedlichen Repräsentationen miteinander nach Kriterien der logischen Deduzierbarkeit zu vergleichen.[120] Aus keinem anderen Grund wollte bereits Hertz die üblichen Bilder der Klassischen Mechanik, das dynamische und das energetische Bild, seinem positivistischen Bild voranschicken: um sie „vergleichen [zu] können in Bezug auf ihre Zulässigkeit, ihre Richtigkeit und ihre Zweckmäßigkeit” (Hertz [1894], S. 5).

Die unterschiedlichen Repräsentationen der Mechanik müssen dabei von dem Status der Klassischen Mechanik *innerhalb* der Physik getrennt werden. Inwieweit die Klassische Mechanik eine *Grundlage der gesamten Physik* sein kann, ist eine viel weitergehende Frage als die Auseinandersetzung mit den Grundlagen in der Mechanik. Es geht dann darum, ob die mechanischen Bilder auf andere physikalische Disziplinen übertragen werden können, in erster Linie auf die 'klassischen' Bereiche der Elektrodynamik, Thermodynamik oder Optik, aber auch auf Disziplinen, die sich mit der Mechanik überschneiden wie die Elastizitätstheorie oder die Hydrodynamik. Die Vorstellung, dass die Bilder der Mechanik als erfolgreiche Erklärung in der *gesamten* Physik dienen und somit eine vorrangige Position

[120] Siehe hier Abschnitt 2.3.5.

haben, ist damals auf einen breiten Konsens unter physikalischen Wissenschaftlern gestoßen. Das ist der '*Standpunkt der Mechanistik*',

> „dass nur Theorien, denen mechanische Prinzipien als Grundlage dienen, im Stande sind, beruhigende Erklärung der Erscheinungen zu gewähren".[121]

Neuartige Entdeckungen, 'Anomalien' aus der Radioaktivität und Atomphysik stellten den überragenden Gültigkeitsbereich der mechanischen Prinzipien außerhalb der sichtbaren Phänomene völlig in Frage. *Analoge* Übertragungen der mechanischen Prinzipien auf einzelne Gebiete der Physik wurden nun grundsätzlich angezweifelt. Die Idee einer *universellen Korpuskulartheorie*, wie sie Laplace noch vorschwebte, einer *einzigen* r^{-n}-Gesetzesform für alle 'Weltkörper' und Phänomene, ist unerreichbar.[122]
Es wäre aber ein Missverständnis zu meinen, der 'Paradigmenwechsel' in der damaligen Physik betreffe die Grundlagen der Mechanik. Er betrifft die globale Frage der Reichweite, mit der mechanische Modelle *auf die Physik* angewandt werden können. Wenn im Zuge der Krisen in der Physik der Standpunkt der Mechanistik vollends aufgegeben werden musste, so doch keinesfalls die alte Gültigkeit der mechanischen Grundlagen in der Welt der sichtbaren Körper.

> „Verloren geht sie [d.i. die Klassische Mechanik] nur als universeller reduzierender Partner." (Scheibe [2006], S. 140)

Im Gegenteil, ein Grundlagenforscher wie Georg Hamel nahm die relativistische Mechanik mit Neugier und Gelassenheit auf, weil er wusste, dass es seinem reflexiven Vorhaben, die 'alten Rechte'[123] der Klassischen Mechanik

[121] Coloman Szily, zitiert in Bierhalter [1992], S. 26. Es gab allerdings deutliche Unterschiede, wie weit die Mechanistik in der Physik geht. In der radikalen Fassung steht die Mechanik der Zentralkräfte in „vollständige[r] Analogie" (Boltzmann [1904], S. 163) mit anderen physikalischen Gesetzen. Vor allem sollte der zweite Hauptsatz der Thermodynamik punktmechanisch begründet werden. So müssen die mechanischen Analogien den zweiten Hauptsatz modellieren, *ohne* dass statistische Mittelwerte über die Partikelzahl den Hauptsatz der Thermodynamik verwendet werden. Größen wie die Wärmemenge, Entropie und Temperatur wären dann letztlich nur noch definierbare Symbole. Dieser mechanistische Anspruch wird bei Boltzmann deutlich abgeschwächt in Richtung einer statistischen Mechanik (siehe auch Bierhalter [1992], S. 72). Auch in Hilbert [1992], S. 40, wird rückblickend der 'Standpunkt der mechanistisch-atomistischen Theorie' in dieser moderaten Form verstanden.

[122] Ein beeindruckendes Zeitdokument, das uns diesen Krisenzustand in der Physik regelrecht nachempfinden lässt, sind die Kapitel 7 bis 9 von Poincaré [1906]. Die obige, pathetische Umschreibung der Mechanistik bezieht sich auf folgende Passage auf Seite 131: „Das Gesetz, nach dem diese Kräfte als Funktionen der Entfernung variieren, ist vielleicht nicht das Newtonsche Gesetz, aber es ist ein ähnliches; statt des Exponenten -2 haben wir wahrscheinlich einen anderen Exponenten, und aus dieser Änderung des Exponenten geht alle Verschiedenheit der physikalischen Erscheinungen hervor, die mannigfachen Zustände und Empfindungen, die ganze Welt der Farben und des Schalles, die uns umgibt, mit einem Wort, die ganze Natur."

[123] So die Umschreibung in Hamel [1909a], S. 254. Dann ist es keine Ignoranz oder Abkehr, wenn in Hamel [1927] die Relativitätstheorie nur kurz und grob behandelt wird. Sie verdient einfach eine „selbstständige Darstellung" (ebd., S. 2).

wiederzuentdecken, gar nicht entgegensteht.

Sofern also in Hilberts sechstem Problem die Verteidigung des Standpunktes der Mechanistik enthalten ist, die Mathematisierung der gesamten Physik auf der Grundlage der Mechanik, so will ich hier von einem *überholten, aussichtslosen* Aspekt des Problems sprechen. Er ist vom physikalischen Aspekt, der Grenzfallbetrachtung in der Mechanik, und vom logisch-axiomatischen Aspekt zu trennen, die eine *theorieinterne*, reflexive Behandlung der Klassischen Mechanik bedeuten.[124]

Ich möchte daher zu diesen beiden zeitlosen Aspekten des Hilbertschen Problems zurückkehren. Im Rückblick auf Hilberts Kommentierung des sechsten Problems (hier auf Seite 92) ist aufgefallen, dass die Klärung des Grenzübergangs zwischen Punkt- und Kontinuumsmechanik mit axiomatischen Mitteln eine *eigene Überzeugung* oder Auffassung darstellt. Es ist die Überzeugung in die Lösungsstärke der axiomatischen Methode, die von allen geteilt wird, die unmittelbar (Hamel, Noll, Truesdell) oder mittelbar (die Stanfordschule um Suppes) zum sechsten Problem beigetragen haben.

Diese Überzeugung wird nicht wie selbstverständlich von allen geteilt, die sich den Grundlagen der Mechanik zugewandt haben. Es muss in der Diskussion um das sechste Problem beachtet werden, dass die *axiomatische Lösung* und die *physikalische Lösung* ganz verschiedene Wege einschlagen können.

1. So kann jemand eine Axiomatisierung der Mechanik als wissenschaftlichen Fortschritt begrüßen, den physikalischen Grenzübergang allerdings als irrelevant oder unwesentlich erachten (*physikalischer Pragmatismus*).

2. Oder man kann den physikalischen Grenzübergang in den Vordergrund stellen, die Axiomatisierung der Mechanik aber nur vage behandeln (*logischer Pragmatismus*).

Ich möchte diese pragmatischen oder vereinfachten Antworten als philosophische Positionen vorstellen, weil sie einzelne Facetten des Hilbertschen Problems herausgreifen, in späteren Positionen wiederzufinden sind und teilweise alternative Antworten zu Hamels umfassender Lösungsskizze darstellen.[125]

[124] Ich behaupte die Trennbarkeit, muss aber eingestehen, dass ich den Einfluss dieses Standpunktes der Mechanistik auf Hilberts Problemstellung nicht so gründlich untersuchen konnte, wie es vielleicht nötig wäre. Es gibt einige Hinweise darauf, dass Hilbert die Mechanistik, wie schon Poincaré, als ein Programm einer allgemeinen Kontinuumsmechanik begreift: eine universelle Feldtheorie, welche die Elastizitätstheorie, Hydro- und Elektrodynamik mit einschließt; so etwa in Hilbert [1992], S. 40.

[125] Dass das gesamte sechste Problem und Lösungsideen dazu entweder ignoriert oder abgelehnt wurden, muss hier wohl nicht weiter als eigene 'Position' erwähnt werden. Für die methodologische Kritik siehe Teil 2.6.

3.5.2 Boltzmanns Atomismus-Phänomenalismus-Debatte

Die zweite Position, die ich hier logischen Pragmatismus in den mechanischen Grundlagen nennen möchte, geht auf Ludwig Boltzmann zurück. Er darf, wie schon in Teil 3.2 erwähnt, eigentlicher Gründer der *konzeptuellen* Problemstellung des *Grenzprozesses* gesehen werden. Konzeptuell soll dieser Grenzprozess insofern heißen, als Boltzmann beim Grenzübergang, bei der wechselseitigen Überführung von der Punkt- in die Kontinuumsmechanik, auf keine bloß mathematische Limesbildung abzielt. Der Prozess umfasst vielmehr die *physikalische* Begriffsbildung, die epistemologische wie anschauliche Dimensionen mit einbezieht. Diese voraxiomatische Konzeptualisierung steht somit für Boltzmann im Vordergrund und wird unabhängig von der axiomatischen Rekonstruktion der Mechanik verstanden.

Grundsätzlich ist Boltzmann von der Notwendigkeit und Unverzichtbarkeit eines atomistischen Herangehens an die gesamte Physik überzeugt.[126] Jede Anwendung von infinitesimal-kontinuierlichen Größen, so sein Argument, ist in der Natur diskontinuierlich und durch endliche Maße und Zahlen zu interpretieren. Deshalb skizziert die Analysis in der Anwendung auf die Natur stets ein atomistisches Bild.[127] Boltzmann bestreitet zwar nicht, dass Körper durch ein Cantorsches Kontinuum als aktual unendliche Menge modelliert werden können. Das physikalische Kontinuum stelle aber vielmehr einen in die Natur hineinprojizierten 'Grenzübergang' dar,[128] etwas, dem man sich „beliebig nähern kann, ohne es jemals zu erreichen" (Boltzmann [1897], S. 6).

Das klarste Bild des Atomismus ist nach Boltzmann nun die klassische Punktmechanik, die er an den Anfang seines mechanischen Systems stellt.[129] Sie repräsentiert die von Boltzmann so genannte 'alte Mechanik'. Das ist zum einen die Mechanik der *Kräfte* auf Punktmassen und starre Körper im Gegensatz zum energetischen Ansatz. Zum anderen beinhaltet die 'alte Mechanik' die analoge Übertragung der mechanischen Grundgesetze auf weitere Kontexte der Physik, vor allem auf die Elektrodynamik, Optik, Thermodynamik und nicht zuletzt auf die kinetische Gastheorie und statistische Physik. In dieser zweiten Bedeutung beinhaltet sie die *mechanistische Sichtweise*, die klassischen Kraftgesetze an den Anfang aller physikalischen Disziplinen zu stellen. Sie prägt Boltzmanns philosophische Auffassung von der Mechanik.[130]

Ich habe im vorigen Abschnitt schon erklärt, dass dieser mechanistische Aspekt im Kontext des sechsten Problems als überholt gelten muss.

[126] Siehe dazu Wilholt [2002].

[127] Dieses Bild wird grob in Boltzmann [1897], S. 5, beschrieben; siehe auch Voss [1901], Anm. 57, S. 28.

[128] Siehe dazu das Zitat und die Erläuterung in Scheibe [2006], S. 93.

[129] Siehe Boltzmann [1897], S. 4 f.

[130] Siehe etwa Boltzmann [1900], S. 76; Boltzmann [1905], S. 275; sowie Hilbert [1992], S. 40.

Mit Entwicklung der Quantenmechanik und Relativitätstheorie stand für die Grundlagen der Mechanik fest, dass sich die physische Welt der ganz großen und der ganz kleinen Körper nicht mehr in dieses mechanistische Idealbild einfügen lassen.[131] So war zur Jahrhundertwende klar, dass Grenzbetrachtungen nur *innerhalb* der klassischen Theorie idealisierter makroskopischer Körper sinnvoll sein können. Der Geltungsbereich der klassischen Physik wurde durch die neueren Theorien deutlich *eingeschränkt*. Niemand, der im 20. Jahrhundert die Grundlagen der Mechanik untersucht hat, wollte das mechanistische Ideal wieder aufbauen. Im Gegenteil, es wird *wegen* der neuen Atom- und Quantenphysik *gegen* die realistische Anwendung der Partikelmechanik und *für* die phänomenalistische Kontinuumssicht in der Mechanik argumentiert.[132]

Auch Boltzmann war davon überzeugt, dass die regressive Sicht auf die 'alte' Mechanik notwendig bleibt, nicht wegen eines archivarischen Interesses, sondern um die bewährten Beziehungen, Strukturen und Anschauungen zu erhalten, die für Analogiebetrachtungen in der Physik von Nutzen sind. So heißt es eindrucksvoll in Boltzmann [1900], S. 76:

> „Fürwahr, wenn ich auf alle diese Entwicklungen und Umwälzungen zurückschaue, so erscheine ich mir wie ein Greis an Erlebnissen auf wissenschaftlichem Gebiete! Ja, ich möchte sagen, ich bin allein übrig geblieben von denen, die das Alte noch mit voller Seele umfaßten [...]. Ich betrachte es als meine Lebensaufgabe, durch möglichst klare, *logisch geordnete Ausarbeitung der Resultate* der alten classischen Theorie [...] dazu beizutragen, daß das viele Gute und *für immer Brauchbare* [eigene Herv.], das meiner Überzeugung nach darin enthalten ist, nicht einst zum zweitenmale entdeckt werden muß, was nicht der erste Fall dieser Art in der Wissenschaft wäre."

Um dieser 'Ausarbeitung der Resultate' willen ist Boltzmann, wenn es um die Grundlagen der Mechanik geht, wahrhaft ein *Theorienpluralist* gewesen.[133] Es ging ihm stets um die Darstellung und Konkurrenz alternativer Bilder, um sich dem Wesentlichen, dem 'für immer Brauchbaren' eines Grundkonzeptes nähern zu können.[134] Mit diesem Ziel begrüßt er Alternativen zur Punktmechanik, die vor allem in einer auf der *Kontinuumsanschauung* basierenden Mechanik bestehen. Innerhalb der Mechanistik ist sie der anschauliche Gegensatz zum Atomismus und wurde von Boltzmann,

[131] Zum Wandel in der Atomismusfrage durch die moderne Atomphysik siehe insbesondere Stöckler [2012], S. 147.

[132] Siehe etwa Hamel [1909a], S. 351, und Noll [1959], S. 266, und Truesdell und Toupin [1960], S. 228. Dieses Argument gegen die Partikelsicht wird später (Abschnitt 3.7.1) genauer betrachtet.

[133] Siehe Scheibe [2006], S. 91.

[134] 'Wesentlich' ist hier wieder im Sinne Volkmanns und Hamels aus Abschnitt 3.4.1 gemeint. Man siehe insbesondere das einleitende Plädoyer in Boltzmann [1897], S. 4 f.

Mach und anderen als eine allgemeine *Phänomenologie* in der Physik verstanden.[135] So ist die Phänomenologie durch drei Merkmale gekennzeichnet:

(i) Die mechanischen Bilder beschreiben die wahrnehmbaren Erscheinungen als ausgedehnte, kontinuierliche Körper.[136]

(ii) Abstrakte, stark idealisierte Modelle sind „so spät als möglich ein[zu]führen, und während wir sie früher postulierten, werden wir sie jetzt möglichst an die Erfahrung anknüpfen und unsere Resultate daraus zu deduzieren suchen".[137]

(iii) In der *formalen, mathematischen* Fassung der Phänomenologie wird, auf Poincaré zurückgehend, der Unterschied zum Atomismus dahingehend charakterisiert, dass die Grundgesetze durch partielle (anstatt gewöhnlicher) Differentialgleichungen beschrieben werden.[138]

Insbesondere die mathematische Phänomenologie - Merkmal (iii) - wurde zur Jahrhundertwende in den Grundlagen der Mechanik kontrovers diskutiert. Ein wesentlicher Aspekt des sechsten Problems Hilberts besteht letztlich darin, wie dieser formale *Grenzübergang* von gewöhnlichen zu partiellen Differentialgleichungen in der Mechanik erreicht werden kann.[139]

Für Boltzmann stellt sich der mathematisch-axiomatische Teil des Hilbertschen Problems gar nicht, weil der physikalisch-*konzeptuelle* Teil des Problems bereits für ihn hinreichend *aufgelöst* wurde. Wenn er in Boltzmann [1905], ≫*Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik*≪, versucht, die phänomenologische Kontinuumssicht zu skizzieren und der Punktmechanik gegenüberzustellen, so besteht seine Begründung allein im konkreten erfahrungsbezogenen Bild. Die Mathematisierung könne hierbei sogar die Klarheit des Bildes nur verschleiern. „Wir müssen [...] aus dem Bilde selbst den Beweis liefern" (Boltzmann [1905], S. 266), so seine phänomenologische Orientierung. Boltzmanns Skizze enthält gerade die anschaulichen Elemente (Merkmale und Relationen), die für den physikalischen Grenzübergang von der Kontinuums- zur Punktmechanik erforderlich sind.

135 Siehe Scheibe [2006], S. 82; oder Pojman [2009], §1.

136 Siehe etwa Boltzmann [1897], Seiten 2 u. 103; Boltzmann [1905], S. 297; Boltzmann [1900], S. 91; sowie Scheibe [2006], S. 82.

137 Zitiert aus Boltzmann [1905], S. 272. Aus diesem Grund hat Boltzmann mit der Phänomenologie ein *induktives* statt deduktives Vorgehen verbunden, wie er es in Boltzmann [1905] nennt. Dennoch betont er mehrfach, dass eine bedingungslose sensualistische Mechanik unmöglich ist (siehe etwa Boltzmann [1900], S. 90).

138 Siehe dazu Boltzmann [1897], S. 3; Voss [1901], S. 25 und Scheibe [2006], S. 82.

139 So dokumentiert Hilbert selbst in Hilbert [1992], Kap. 2, den Unterschied zwischen Punkt- und Kontinuumsanschauung. Für ihn ist der mechanikübergreifende Grenzübergang in die Physik ein 'Ideal' der Mechanistik, ausgezeichnet durch 'Eleganz und Übersichtlichkeit' (ebd., S. 41), aber ein Ideal, das in dieser Allgemeinheit aufgegeben werden musste.

Mit anderen Worten, infinitesimale Grenzübergänge, die rein mathematisch begriffen werden, sind für Boltzmann gegenüber Konzeptionen, die aus der Anschauung gewonnen werden, zweitrangig.[140] So seien arithmetische Gesetze „[...] weniger geeignet, wesentlich neue Perspektiven zu zeigen; sie sind *schlechte heuristische Wegweiser* [eigene Herv.]" (Boltzmann [1900], S. 90). Ebenso können „bloß formale Analogien" zwischen mathematischen Theorien den täuschenden Eindruck von Gründlichkeit erzeugen, obwohl „ihre Gesetze der in der klassischen Physik üblichen klaren und eindeutigen Fassung, ihre Schlüsse der dort herausgearbeiteten Strenge entbehrten".[141]

Hamels spätere Lösungsskizze mathematisiert die heuristische Konzeption des Grenzübergangs aus Boltzmann [1905] und stellt die Grundbegriffe axiomatisch dar. Hierbei sind ihm die intuitiven Überlegungen Boltzmanns eine Inspiration für den axiomatischen Aufbau nach der Kontinuitätshypothese gewesen.[142] Boltzmann hätte keine Einwände gegen eine solch nachträgliche Mathematisierung des Grenzübergangs. Er würde aber vermutlich den Erfolg dieser Mathematisierung *nicht als Argument gegen* die Punktmechanik gelten lassen. Deutlichkeit und Konsequenz eines phänomenologischen Bildes wird nach Boltzmann nicht durch logisch-deduktive Strenge erreicht. Vielmehr ist der Bezug zur Erfahrungswelt das entscheidende Klärungsmoment, das Boltzmann ergänzt wissen will.

> „Da aber die deduktive Darstellung [...] den Mangel hat, dass sie so lange Zeit hindurch gar nicht an die Erfahrung anknüpft und vielmehr den Schein des Willkürlichen erweckt, so würde es mich sehr freuen, wenn es jemandem gelänge, der deduktiven Darstellung eine induktive an die Seite zu stellen, welche gleich einfach und naturgemäß vorginge und doch das innere geistige Bild in gleicher Deutlichkeit und Konsequenz hervortreten ließe." (Boltzmann [1905], S. 301)

Boltzmanns Diskussion der Grundlagen macht den *intuitiven* Prozess der Begriffsbildung deutlich, der bei allen logischen Rekonstruktionen und auch bei Grenzübergängen zwischen alternativen Zugängen zur Klassischen Mechanik Anfangs- und Endpunkt bleiben muss, wie schon im vorigen Kapitel zur axiomatischen Methode (2.7 und 2.9) festgestellt. Der Rückzug zur Intuition ist gleichermaßen die Gegenposition zu *einseitigen Formalisierungen* der mechanischen Grundlagen. Er soll später wieder in anderen Kontexten auftreten. Es ist die Frage danach, ob und inwiefern 'formal' zu nennende Axiomatisierungen[143] mit einem *inhaltlichen Verlust* einhergehen.

---

[140] Man vergleiche Wilholt [2002], §2: 'The indispensability of atomism', dort mit weiteren Belegen.

[141] Zitiert aus Boltzmann [1900], S. 87. Diesen Einwand erhebt er dort gegen energetische Analogiebetrachtungen in der Physik, die in genau dieser formalen Hinsicht 'oberflächlich' seien.

[142] Siehe dazu insbes. Abschnitt 3.3.5.

[143] Im Sinne der Abstufungen von Abschnitt 2.5.

Boltzmanns Untersuchung verweist uns weit in die philosophischen Probleme der modernen Logik hinein, in eine Debatte, die erst Mitte des 20. Jahrhunderts in den Grundlagen der Mechanik entfacht wird (Kapitel 4).

3.5.3 Die Lehrbuchversion des Grenzübergangs

Die logisch-axiomatische Behandlung der Klassischen Mechanik und die Problematisierung des Grenzübergangs zwischen Punkt- und Kontinuumsauffassung sind voneinander unabhängige Fragen, die erst in Hilberts Problem zusammengeführt werden. Und so findet man die Auffassung, man könne durch die Axiomatisierung der Mechanik weitere Erkenntnisse bei Grenzfallbetrachtungen gewinnen, ohne sich in der Anschauung zwischen Phänomenalismus und Atomismus entscheiden zu müssen. Sie geht einher mit einer pragmatischen Lösung des Grenzübergangs, wie sie vor allem in vielen Lehrbüchern der Klassischen Mechanik seit Anfang des 20. Jahrhunderts weit verbreitet ist: Wegen ihrer Einfachheit werden die Grundbegriffe punktmechanisch eingeführt und anschließend auf den Kontinuumsansatz samt seinen konstitutiven Gleichungen *direkt* übertragen. Ein Problem des Grenzübergangs im logischen Sinne kommt nicht vor. Ich möchte diese Position '*physikalischen Pragmatismus*' nennen und einige ihrer Facetten vorstellen.

Mathematische Form vor physikalischer Semantik (Voss)

Aurel Voss ist in vielerlei Hinsicht ein Fürsprecher der axiomatischen und mathematischen Ideen Hilberts gewesen.[144] In Voss [1901], S. 28 f., findet man eine Reformulierung des sechsten Problems vor dem Hintergrund des rein mathematischen Gegensatzes zwischen Nah- und Fernwirkungstheorie.[145] Hiernach wird die Partikelmechanik als Fernwirkungstheorie verstanden. Diskrete räumlich getrennte Punktelemente üben instantane Kraftwirkungen aufeinander aus, die im Idealfall durch einfache (gewöhnliche) Differentialgleichungen repräsentiert werden können. Die Kontinuumsmechanik dagegen führt die Dynamik der Volumenelemente auf Kontaktkräfte zurück und ist insofern eine Nahwirkungstheorie, als sie „an die Stelle [der Teilchen] Relationen zwischen [partiellen] Differentialausdrücken, welche die Beziehungen zwischen den benachbarten Teilchen regeln" (Voss [1901], S. 29) setzt. Für Voss ist nun in diesem Problem die physikalisch-konzeptionelle Frage der Mechanik von ihrer mathematischen Fassung getrennt, da nur die mathematische Gestalt relevante Antworten auf die Konstitution der Körper geben könne:

[144] Siehe dazu vor allem seine umfangreichen Ausführungen in Voss [1908], S. 77 ff.; sowie Corry [2004], S. 66 f.

[145] Die Untersuchung dieses Gegensatzes wurde im vorigen Abschnitt unter (iii) als 'mathematischer Phänomenalismus' (nach Poincaré) eingeführt.

> „Die allgemeinen Ansichten über den *erkenntnistheoretischen Wert der atomistischen Vorstellung*, die durch Fernkräfte verbundene Punkte annimmt, und der *phänomenologischen Auffassung des Kontinuums* werden dadurch [d.i. durch die mathematischen Theorien beider mechanischen Grundauffassungen] auch gegenwärtig nur *mittelbar* beeinflusst. [...] Entscheidend wird diejenige Ansicht sein, welche die größten Erfolge aufzuweisen hat." (Voss [1901], S. 28 f.)

So wäre nach Voss die Frage des 'größten Erfolgs' damit geklärt, dass die Grenzfallbetrachtung eine *mathematische Form* erhält und die Gültigkeitsbereiche der Punkt- und Kontinuumsmechanik durch eine axiomatische Gestalt jeweils gefestigt sind. Ein 'Anschauungsproblem' wird in dieser mathematisierten Fassung gar nicht mitgedacht.[146]

Typisch an dieser Auffassung ist die Vorstellung, dass nur die mathematische Formgebung und nicht die philosophische oder erkenntnistheoretische Frage nach dem Grenzübergang einen begrifflichen Fortschritt erzielen könne. Dass man die mathematische Form der Naturgesetze von erkenntnistheoretischen Einflüssen zu trennen habe, ist nicht nur in der positivistischen Tradition der Mechanik zu finden, sondern später auch in den Grundlagenbeiträgen der semantischen Sichtweise auf wissenschaftliche Theorien.[147]

Die Irrelevanz des Grenzprozesses für Systemmechaniken (Volkmann)
Deutlicher wird Paul Volkmann, wenn er dem Problem der Grenzübergänge in der Klassischen Mechanik jede physikalische Relevanz abspricht.

> „Es wird für viele Gebiete, welche die Erscheinungen der ponderabeln Materie behandeln, vollkommen gleichgültig sein, ob wir hypothetische Annahmen über die Konstitution der Materie machen oder nicht." (Volkmann [1900], S. 16)

Den Grenzübergang zwischen Punkt- und Kontinuumsauffassung auszuführen kann für die Klassische Mechanik als „gänzlich unwesentlich bezeichnet werden [...]",

> „[denn indem] wir auf das Vollständige zugunsten des Wesentlichen verzichten, haben wir nichts anderes getan, als eine für den systemati-

[146] Das soll nicht heißen, dass Voss eine formalistische Position zur axiomatischen Methode einnehmen würde. In Voss [1908], S. 77, wird hervorgehoben, dass Hilberts 'rein logischer Standpunkt' (wie er dort sagt) ohne Anschauungsbezug nutzlos und unmöglich wäre. Einerseits überzeugt von der logizistischen Idee einer Reduktion auf 'symbolische Mathematik', stellt sich Voss andererseits vehement gegen Poincarés polemischen Vergleich der axiomatisierten Zahlenlehre mit einem innovationslosen Schachspiel nach festen Regeln (siehe dazu ebd., Seiten 87 u. 90).

[147] Exemplarisch hierfür heißt es in McKinsey u. a. [1953], S. 256: „[W]e consider it possible to sparate mechanics from such epistemological and experimental questions." Diese *erkenntnistheoretische* Annahme bleibt fragwürdig. Auf weitere kritische Annahmen des Semantic Views komme ich in Teil 4.5 zu sprechen.

> schen Aufbau der Physik so wichtige formelle Mechanik hervorgehoben gegenüber einer in keiner Beziehung zum systematischen Aufbau der Physik stehenden materiellen Mechanik." (ebd., S. 44)

Im Anwendungsbereich der sichtbaren festen Körper handelt es sich um „gröbere Erscheinungen" (Volkmann [1900], S. 242), für die eine atomistische Betrachtung „unnöthig erscheint" (ebd., S. 243). Volkmann will also diejenigen Begriffe für 'fundamental' oder 'wesentlich' erklären, die sich relativ zum jeweiligen Anwendungsbereich als nützlich erweisen. Die reale, materielle Beschaffenheit der Körper wie auch die statistische Mittelung der Kontinuumsgleichungen aus einem punktdynamischen Ensemble spielen deshalb für die 'klassische' Mechanik, für „dieses mittlere Gebiet" (ebd., S. 243), keine oder bestenfalls eine zweitrangige Rolle.[148] Es fördert sogar die logisch-axiomatische Betrachtung der Mechanik, wenn der Anwendungs- und Gegenstandsbereich eingeschränkt wird:

> „Wenn man als *eine* der Aufgaben der theoretischen Physik die begriffliche Durcharbeitung physikalischer Gebiete, d.h. die Darstellung der logischen Verhältnisse von Voraussetzung und Folge, von Forderung und Festsetzung in ihnen ansehen kann, dann ist es sehr wesentlich zu wissen, ob die atomistische Anschauung für das Verständnis gewisser Erscheinungen belanglos ist oder nicht." (Volkmann [1900], S. 243)

Diese pragmatischen Sicht Volkmanns auf den physikalischen Grenzübergang ist einwandfrei. Eine logisch-mathematische Klärung der Grundbegriffe der Mechanik kann nicht heißen, dass die stoffliche Zusammensetzung der Körper in die theoretische Deduktion eingehen muss. Vielmehr können *mehrere* Axiomatisierungen, die unterschiedliche Körpertypen beschreiben, nebeneinander stehen, ohne dass ein Widerspruch entsteht: Sie sind in unterschiedlichen Anwendungsbereichen relevant. Eine Systemmechanik formulieren heißt immer, das scheint mir Volkmanns wichtigste Botschaft zu sein, logische Grenzen selbst zu *setzen* und zu *benennen*. Keine Mechanik kann logisch wie konzeptuell so 'vollständig' sein, dass sie keiner Erweiterung mehr über die Setzungen hinaus fähig wäre. Diese Grenze kann mit Blick auf das sechste Problem Hilberts nicht deutlich genug gezogen werden.

[148] Volkmann hat insbesondere die mechanistischen Ansätze Poissons und Naviers im Blick, die eine materielle Grundlegung der Elastizitätstheorie aus der Punktmechanik versucht haben. Allerdings ist es nicht möglich, Volkmann zu folgen, wenn diese „Zurückführung von Druckkräften auf Fernkräfte und umgekehrt von Fernkräften auf Druckkräfte [...] mathematisch keine Schwierigkeit" (Volkmann [1900], S. 84) bereiten soll. Im Gegenteil, sind diese älteren Deduktionen ausgesprochen kompliziert und enthalten eine Reihe kontraintuitiver Adhoc-Hypothesen (vgl. insbes. Müller und Timpe [1906], S. 9 und S. 35).

Der naive Grenzübergang für starre Körper (Stäckel)
Es wurde bereits bemerkt, dass zumindest für die rein kinematische Beschreibung starrer Körper der Unterschied zwischen Partikel- und Kontinuumssicht keine Bedeutung hat.[149] Paul Stäckel findet hierfür eine Begründung, die er bis d'Alembert zurückverfolgen kann. Die eigentümliche modellübergreifende Beschreibung in der mathematisierten Mechanik bringt es mit sich, dass von der materiellen Zusammensetzung der Körper abstrahiert wird.

> „Es ist charakteristisch für die Kinetik des starren Körpers, dass die durchaus unabhängig von jeglicher Annahme über die *physikalische Konstitution* des starren Körpers aufgebaut wird; wenn man bei der *Methode des Grenzüberganges* [...] von einem System mit einer endlichen Anzahl materieller Punkte ausgeht, die starr miteinander verbunden sind, so ist für das Endergebnis der Rechnung gleichgültig, wie man sich diese starren Verbindungen realisiert denkt, bei den Rechnungen hat man es nämlich lediglich mit *Gleichungen* zu tun, die ausdrücken, dass der Körper sich genau wie ein Raumteil bewegt, dessen Punkte mit Masse belegt sind." (Stäckel [1908], S. 541).

In dem Wortlaut kommt die instrumentalistische Idee einer formal dargestellten und begründeten Mechanik zum Vorschein. Mechanische Grundgesetze geben ein interpretierbares, ergänzungsbedürftiges Schema ab. Allein sagen sie nichts über diese und jene Beschaffenheit der physischen Natur aus.[150] Diese Eigenart wird als Rechtfertigung dafür genommen, den Grenzübergang in der Klassischen Mechanik außer Acht lassen. Dann genügt es, nach der '*Methode des Grenzübergangs*', wie Stäckel es nennt, das Summenzeichen für diskrete Punktelemente $\sum m_i$ *direkt* in ein Integral über infinitesimale Massenelemente $\int dm$ umzuwandeln.[151] Dieser Übergang bereitet für starre Körper keine physikalische Ungenauigkeit, weil die starren Verbindungen der Punktelemente ohne Einschränkung als masselos angenommen werden.[152]

Was Stäckel hier ausspricht ist die bis heute gängige *Lehrbuchauffassung* des Grenzübergangs: dass der mathematische Schritt zum Infinitesimalen unproblematisch ist, weil die physikalische Bedeutung des Übergangs irrelevant ist. Vielbeachtete Beispiele hierfür wären etwa Love [1897], Volk-

[149] Man vergleiche Abschnitt 3.3.6.

[150] Als wissenschaftstheoretischer Standpunkt siehe etwa Toulmin [1953], S. 79; oder Giere [1988], S. 76.

[151] „Man kann [...] die Anzahl der bewegten Punkte über alle Grenzen wachsen lassen; dabei gehen die Summen in Integrale über, und an die Stelle der Differenzengleichungen treten Differentialgleichungen, an die Stelle der gewöhnlichen Differentialgleichungen partielle Differentialgleichgungen. Während man im 18. Jahrhundert mit solchen Grenzgängen naiv und sorglos umging, sind sie im 19. Jahrhundert bewusst und mit voller Strenge vorgenommen worden" (Stäckel [1908], S. 532).

[152] Siehe Stäckel [1908], S. 555, und das Zitat hier auf Seite 117.

mann [1900], Synge [1960], Goldstein u. a. [2006] und Meschede [2002].[153] Bemerkenswert ist am letzten Beispiel, dass es heißt, der Übergang zum Kontinuum im Fall der starren oder deformierbaren Körper sei „logisch einwandfrei" (Meschede [2002], S. 1). Dieses Logikverständnis ignoriert jedoch jede dynamische Bedeutung der Massenelemente und bleibt nur bei starren Verbindungen der Punktelemente angemessen. Es ist unkritisch. Für den Fall der deformierbaren Kontinua wird sich die Behauptung sogar als grob ungenau, ja als falsch herausstellen. Es ist diese logische Lücke, die erst in der axiomatischen Gegenüberstellung von Punkt- und Kontinuumsmechanik sichtbar wird.

[153] In der genannten Reihenfolge siehe jeweils §72 'Conception of a body'; S. 139; S. 35; S. 207 und S. 74.

3.6 Die Axiome der Mechanik bei Hamel

„[I]n the concept of force lies the chief difficulty in the whole of mechanics."
(Hamel 1952, zitiert in Truesdell [1984d], S. 524)

Georg Hamel (1877-1954), Hilberts Schüler und Mitarbeiter des Göttinger Instituts zur Jahrhundertwende, hat sich bis Mitte des 20. Jahrhunderts den Ruf des 'großen Lehrmeisters der Mechanik' erworben, nicht zuletzt für seine umfangreichen Untersuchungen zu den Grundbegriffen und -strukturen der Klassischen Mechanik.[154] Mit obiger Äußerung aus einem Brief an Truesdell will er behaupten, dass der Kraftbegriff zentraler Fixpunkt der systematischen Behandlung der Mechanik sein muss. Alle konzeptuellen Schwierigkeiten, die mit der Klassischen Physik verbunden sind, die Begriffe des Raumes, der Zeit, der Masse und der Energie, sind hierin enthalten. Die Explikation des Kraftbegriffes *als quantitative* physikalische Größe, seine Interpretation als *semantisches Element* zur Beschreibung von Bewegungsabläufen in der Natur, sowie die technische Einteilung in verschiedene *Krafttypen*, sind zugleich Ausgangspunkt und Ergebnis der axiomatischen Behandlung.[155] 'Sag mir, wie du eine Kraft benennst, und ich sage dir, was du unter Mechanik versteht', hätte Hamel auch sagen können. Es handelt sich um einen vielschichtigen Grundbegriff einer vieldeutigen Theorie.

Das gesamte Werk Georg Hamels zu den Grundlagen der Mechanik steht in unmittelbarem Einfluss des Hilbertschen Problems und der modernen Axiomatik. Hierzu sind in erster Linie Hamel [1909a], Hamel [1909b], das Lehrbuch »*Elementare Mechanik*« (Hamel [1912]), Hamel [1916], Hamel [1927] und das späte Lehrbuch »*Theoretische Mechanik*« (Hamel [1967a]) zu

[154] Man vergleiche etwa Szabó [1987], S. 24. Der Blick auf eine Biographie über Hamel zeigt, dass gerade zur Zeit der Jahrhundertwende sowohl die Vorlesungen als auch die wissenschaftliche Arbeit Hilberts unmittelbaren Einfluss auf Hamel gehabt haben müssen (vgl. etwa Schmeidler [1955], Horstmann [2004] oder O'Connor und Robertson [2004]). Der Fokus auf die Grundlagen soll aber nicht heißen, dass hier das gesamte wissenschaftliche Werk Hamels betrachtet werden kann. Hamels Name wird heute in der Klassischen Mechanik vor allem mit der verallgemeinerten Lagrangegleichung für nicht-holonome Systeme aus Hamel [1904a], der 'Boltzmann-Hamel-Gleichung', in Verbindung gebracht (siehe etwa das Lehrbuch Greenwood [2003], historisch Bremer [2011]). Vereinzelt wird in der Physik auf die Beziehung zwischen räumlicher Symmetrie und den dynamischen Erhaltungsgrößen für starre Körper nach Hamel [1904a] hingewiesen (siehe etwa Wigner [1967], S. 15). Hamel ist in Kreisen der Technischen Mechanik und Kontinuumsmechanik für seine Beschreibung von infinitesimalen Dehnungszuständen in Hamel [1912], dem 'Almansi-Hamel-Tensor', bekannt (siehe etwa Fung und Tong [2001], S. 99). Ich werde historische Fragen zur Person Hamels außer Acht lassen, insbesondere zu seinem zweifelhaften Einfluss zur Zeit des Dritten Reichs als Vorsitzender des damaligen Mathematischen Reichsverbandes. Sein wissenschaftliches Werk zeigt jedenfalls keinen Bezug zu seiner späteren Mitbegründung einer 'Deutschen Mathematik'.

[155] So heißt es auch in Benvenuto [1991], S. 7, als Resumee zum historischen 'Rätsel' um den Kraftbegriff in der Mechanik: „In fact, the essential feature of mechanics is not the constant and inevitable use of the concept of force, but the recurrent conflict about its interpretation". Dieselbe Einschätzung ist auch in Jammer [1957], S. 7, zusammengefasst.

zählen. Vor allem der Enzyklopädieartikel Hamel [1927], »*Die Axiome der Mechanik*«, darf als umfangreichste Skizze zu einer Lösung des Hilbertschen Problems auf dem Gebiet der Klassischen Mechanik gesehen werden.

Ich möchte im Folgenden nicht nur die wichtigsten Resultate Hamels zur Beantwortung des sechsten Problems Hilberts dokumentieren, sondern es soll vor allem auch deutlich werden, dass Hamel ein *informelles Verständnis* der axiomatischen Methode für die Klassische Mechanik entwickelt hat. Das beinhaltet die Vorstellung, dass eine Naturwissenschaft wie die Klassische Mechanik semantische Elemente enthält, die niemals im Formalismus aufgelöst werden können.[156] Ich werde zeigen, dass es sich um eine *entschiedene Sichtweise* Hamels auf die Wissenschaft der Mechanik *neben* anderen axiomatischen Gestaltungswegen handelt. Es ist insbesondere ein Fehlverständnis, wenn ihm später Kritiker Schwächen in der logischen Konzeption vorwerfen.[157]

Die Axiomatisierungen nach Hamel bewahren die traditionellen Unterschiede in den Konzeptionen, vor allem von 'Kraft' und 'Masse', und gleichzeitig können deduktive Verknüpfungen zwischen den Systemmechaniken deutlicher hervortreten. Die logische Rekonstruktion der klassischen Elemente der Mechanik ist also gerade *nicht* als ein 'abschließendes' Formalisierungsprogramm zu verstehen. Mechanische Grundbegriffe enthalten 'synthetische' Merkmale, die Theorie und Anwendung so miteinander verbinden, dass sie das Charakteristische für den systematischen Aufbau der Mechanik zeigen. In diesem Sinn ist die Synthesis in den Grundbegriffen *irreduzibel* und lässt sich nicht auf formale Eigenarten der Begriffsstruktur oder der konstitutiven Gesetze zurückführen. Hamel setzt also *Grenzen* der sinnvollen Formalisierung. So beinhaltet seine logische Rekonzeption gleichfalls eine *Kritik an formalistischen Richtungen*, die vor und auch nach seiner Zeit das Verständnis der Mechanik als wissenschaftliche Theorie dominiert haben.

3.6.1 Hamels axiomatische und physikalische Leistungen auf dem Gebiet der Klassischen Mechanik

Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sollen Hamels wichtigste Beiträge zu den Grundlagen der Mechanik so dargestellt werden, dass die neue axiomatische Sicht auf das traditionelle Werk der Mechanik deutlich wird. Zu diesem Zweck möchte ich zunächst diejenigen Einzelaspekte herausgreifen, die unmittelbar die axiomatische Methode betreffen.

I. Die Axiomatisierung der Systemmechaniken

Die Axiomatisierung der Klassischen Mechnik ist der wichtigste und umfassendste Beitrag zu Hilberts Problem, aus dem sich Hamels weitere Re-

[156] Zu diesem Begriff des 'Informellen' siehe hier Abschnitt 2.5.

[157] Darauf werde ich zentral in Kapitel 4 eingehen.

sultate in den Grundlagen der Mechanik ergeben. Beachtlich ist hierbei der ’gemeinsame Untergrund’ des Newtonschen Grundgesetzes, das als notwendige Bedingung für alle weiteren Systemmechaniken vorauszusetzen ist. Der vielseitige Theorienaufbau beginnt mit der Konzeption des Körpers. Dieser kann bei einem *synthetischen* Aufbau der Klassischen Mechanik als *Kontinuum*, als *starrer Körper* und als *Punktmasse* aufgefasst werden, oder der Körper wird in der *analytischen* Betrachtung zu einem semantisch wie materiell *unbestimmten* Punktelement. Je nachdem, wie der Aufbau zu einem System gewählt wird, ergeben sich *unterschiedliche Grundbegriffe*. Hamel axiomatisiert die verschiedenen Zugänge und stellt sie *disjunktiv* nebeneinander. Seine umfangreichen Lehrbücher Hamel [1912] und Hamel [1967a] zeigen Hamels persönliche Vorliebe für die Kontinuumsbegriffe und für die analytische Mechanik nach Lagrange, da sie alle Systemmechaniken im vollen Umfang logisch erfassen können. Sie werden dem Forschungscharakter in der Mechanik gerecht.

II. Die Rekonzeptualisierung des Kraftbegriffes
Das Newtonsche Gesetz hat in der axiomatischen Fassung Hamels zwei nicht aufeinander reduzierbare Bedeutungen. Einerseits ist es ein offenes algebraisches *Schema*, eine *implizite* Definition, die durch kontextbezogene Beschleunigungs*gesetze* zu ergänzen ist. Andererseits hat die Kraft ihre *empirische Bedeutung* darin, dass sie erst in der materiellen Umgebung durch eine kinematische Veränderung erkannt wird. Ihr wird begleitend eine Anschauung von den materiellen Zuständen zugeordnet: statische, dynamische wie geometrische Bedingungen. Somit kann jede Kraft zwar auf eine Form gebracht werden. Kraft kann aber durch keine explizite Definition eindeutig beschrieben, kann nicht auf *ein* formales Schema reduziert werden. Dieser Gedanke setzt *Grenzen der Formalisierung* bei der mechanischen Modellbildung.

III. Die deduktive Vernetzung der Systemmechaniken
Dieser Beitrag beinhaltet letztlich die physikalische Seite des Hilbertschen Problems. Die Grenzübergänge zwischen Kontinua, starren Körpern und Punktmassen werden deduktiv auf die notwendigen Voraussetzungen hin untersucht. Der dabei allgemeinste Weg wird über die Eigenschaften des Spannungstensors charakterisiert. So kann Hamel zeigen, dass die Prinzipien der Punktmechanik und der Mechanik starrer Körper zu schwach sind, um aus ihnen die Mechanik der Kontinua zu entwickeln. Der umgekehrte Weg vom Kontinuum zur Punktmasse ist dagegen durch einschränkende Annahmen möglich. Hamel findet interne Relationen zwischen den Darstellungen der Klassischen Mechanik, die derartige Übergänge offenlegen.

IV. Die reduktive Verknüpfung der Systemmechaniken
Die Axiomatisierungen machen offenkundig, dass je nach Anschauung und

je nach Wahl der Grundbegriffe *unterschiedliche Prinzipien* vorliegen. Sie bestätigen das Ergebnis aus Teil 3.3, dass es nicht das eine Bild der Klassischen Mechanik geben kann. Dafür lassen sich physikalische wie mathematische Gründe angeben. So kann Hamel belegen, dass innerhalb der Mechanik der Kontinua und der starren Körper das *Gegenwirkungsprinzip* (Newtons drittes Axiom) für Kontaktkräfte aus anderen Grundgesetzen ableitbar ist. Den Charakter eines unabhängigen Axioms hat das Gegenwirkungsprinzip in der Punktmechanik und weiterhin für alle Arten von Fernkräfte.

V. Metamathematische Betrachtungen

Hamels metamathematische Untersuchungen fallen gering aus und haben eine zweitrangige Rolle. Sie beschränken sich auf Fragen der Unabhängigkeit und der Widerspruchsfreiheit der Systemaxiome. In dieser Ausrichtung hat die Metamathematik in Hamels Axiomatisierung den Sinn, die axiomatische Struktur auf Notwendigkeit und Invarianz abzusichern.

Zweitrangig soll hierbei heißen, dass die metamathematische Reflexion der Mechanik immer an außerlogische Grenzen gerät, wenn konkrete Modellierungen in Betracht kommen. So schließen Hamels Ergebnisse zur Widerspruchsfreiheit der Mechanik starrer Körper Reibungseffekte und Stoßprozesse völlig aus, da sie stets zu Widerspüchen führen. Nach Hamel sind diese Gesetze nur empirisch und nicht systematisch begründbar. Sie sind daher nicht axiomatisierbar.[158] Hierin verbirgt sich die Vorstellung, dass die Metamathematik bei *kontrafaktischen* Belegen aus der Erfahrung ungültig und sogar unsinnig ist.

3.6.2 Die Struktur des Axiomensystems der Klassischen Mechanik

In diesem und den noch folgenden Abschnitten wird versucht, Hamels Rekonstruktion der Klassischen Mechanik so vorzustellen, dass ihre eigene Qualität der Antwort auf Hilberts Problem, die Axiomatisierung der Mechanik, deutlich wird. Dabei richtet sich mein Blick insbesondere auf die Umsetzung und Grenze des *deduktiv-formalen Aspekts* in der axiomatisierten Mechanik und nicht auf einzelne Darstellungen der Prinzipien und Axiomgruppen. Das Vorhaben, in diesem Rahmen alle Axiome Hamels zu rezipieren, wäre uferlos und wenig aussichtsreich für das Verständnis der axiomatischen Struktur. Meine Untersuchung betrachtet somit nur diejenigen besonderen *'Axiome der Mechanik'* bei Hamel, welche die axiomatische Methode Hilberts und das Problem des Grenzübergangs unmittelbar aufgreifen.

Um dennoch einen Einblick über Gestalt und Form der noch weitestgehend unbekannten Grundlagenschriften Hamels zu geben, sind im **Anhang C** einige Axiomgruppen aus Hamels »*Die Axiome der Mechanik*« ab-

[158] Zum Ausschluss modellierungsbezogener Gesetze siehe Abschnitt 2.3.7, zum Systemcharakter von Axiomatisierungen den Anfang von Teil 3.4.

gedruckt, die zu den hier behandelten Fragen in direktem Zusammenhang stehen **(nicht in der E-Book-Fassung enthalten)**.

Abbildung 5 soll vorab einen Überblick über die Struktur der Klassischen Mechanik geben, die dann im Weiteren erklärt wird. Die Abbildung bezeichnet diejenigen *Axiomgruppen*, die thematisch abgegrenzte Begriffsmuster enthalten.[159] Hiernach werden vier *Systemmechaniken* unterschieden, die jeweils unterschiedlichen Zugängen, Begründungen, Darstellungen oder Aufbauten der Mechanik entsprechen. Diese Bezeichnungen variieren vielfach bei Hamel, meinen aber die nebeneinanderstehenden Repräsentationen, die jeweils zueinander unabhängige Begriffsstrukturen bereitstellen.

Zur Einteilung in synthetische und analytische Systemmechaniken
Im Gegensatz zu den 'voraxiomatischen Darstellungen' der Systemmechaniken[160] fallen die drei *synthetischen* Axiomgruppen auf: Die Axiome konstituieren hierbei die jeweiligen Bestimmungsmerkmale des kontinuierlichen Mediums, des starren Körpers und des Massenpunkts, die als notwendig erachtet werden, um den Körper im kinetischen Zusammenhang zu beschreiben. Sie sind vom *analytischen* Zugang zur Klassischen Mechanik getrennt. Wie schon vor ihm Duhem, Voss oder Stäckel sieht auch Hamel darin gegensätzliche Vorgehensweisen, so dass er auch von der synthetischen gegenüber der analytischen Methode spricht.[161] Er weiß allerdings die Gegensätzlichkeit für mechanikinterne Bestimmungsmerkmale klarer auszugestalten. Demnach geht man beim synthetischen Herangehen von der geometrischen Anschauung aus, um elementare *statische Modelle* zu entwickeln. Aus der statisch angenommenen Geometrie des Systems müssen die *eingeprägten* Kräfte und Momente bestimmt werden.

> „Die synthetische Methode besteht nun einfach darin, dass man für jeden einzelnen Körper den Schwerpunktsatz und den Momentensatz aufstellt [...].“ (Hamel [1912], S. 458)

Streng genommen ist die synthetische Methode also dem *Zugang vom starren Körper*, über starr verbundene und statisch ausgeglichene Massen, entnommen und wird für die anderen Systemmechaniken verallgemeinert.[162] Aus diesem Grund weist Hamel dem allgemeinen Vorgehen, ein System gedanklich für einen Zeitpunkt in einen Gleichgewichtszustand 'erstarren'

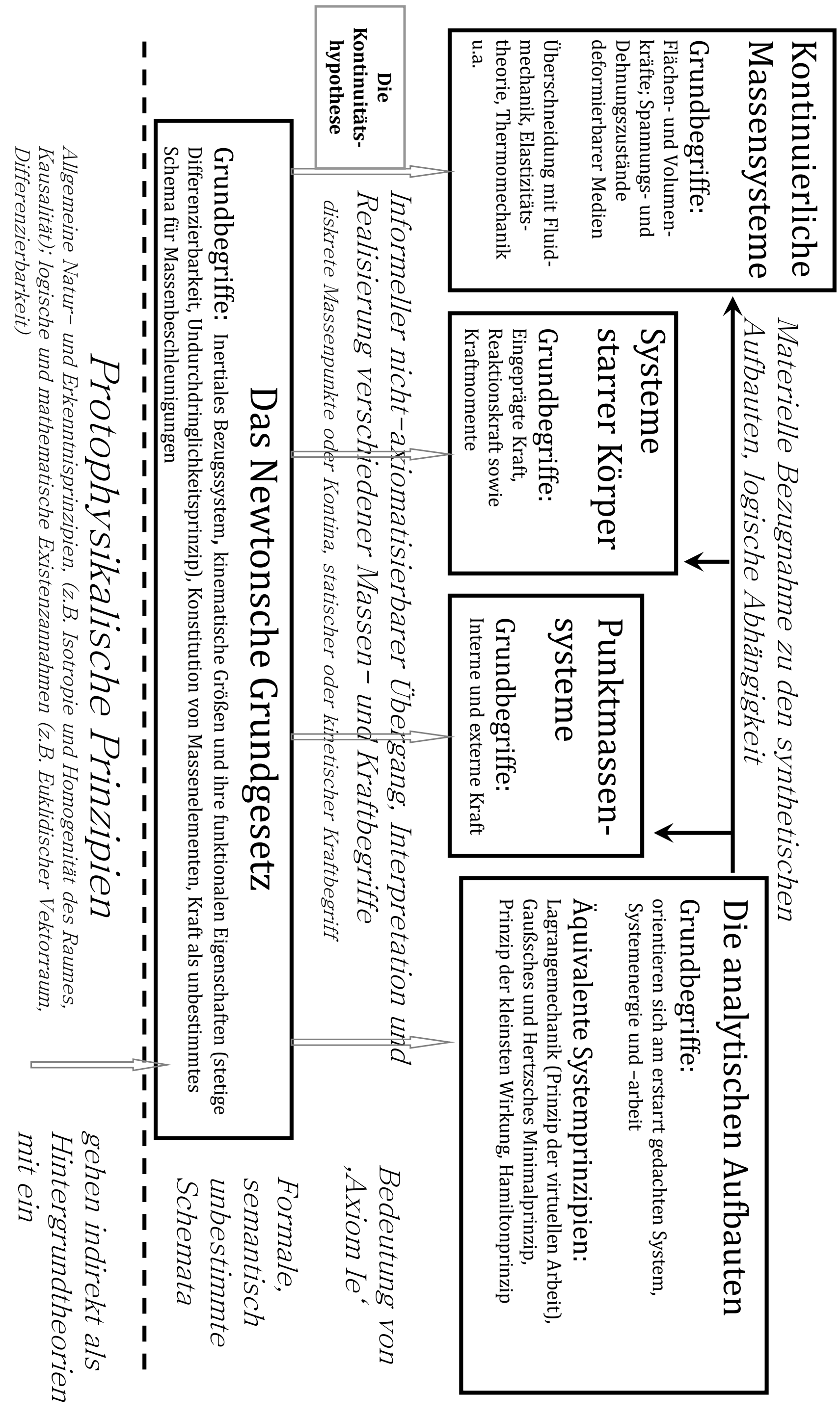
[159] Die Gliederung orientiert sich an Hamel [1927], Abschnitt II: 'Die Klassische Mechanik'. Nichtklassische Mechaniken wie die Relativitätstheorie oder 'Nicht-Boltzmannsche' Mechaniken werden dort im Anschluss berücksichtigt, müssen hier allerdings ausgelassen werden.

[160] Siehe hier Teil 3.4.

[161] Siehe dazu hier Abschnitte 3.4.2 und 3.4.4, sowie Duhem [1912], S. 176 f.; Stäckel [1908], Seiten 571 u. 576; Voss [1901], S. 10 f.

[162] Vgl. Hamel [1916], S. 60, dort 'stereomechanischer Weg der Begründung' genannt.

Abb. 5: Die Axiomgruppen der Klassischen Mechanik nach Hamel [1927]



zu lassen, um die eingeprägten Kräfte am Modell zu veranschaulichen, ein eigenes *Erstarrungsprinzip* zu, das den wesentlichen Bestandteil der synthetischen Methode ausmacht und auf beliebige nicht-starre Systemmassen übertragbar ist. Für das mechanische System heißt das,

> „man stört das Gleichgewicht nicht, wenn man sich den Teil in der Lage, in der er sich befindet, erstarrt denkt (hierin liegt die Bedeutung des starren Körpers für die allgemeine Mechanik)".[163]

Genau wie die synthetische Methode selbst handelt es sich hierbei allerdings um kein Naturprinzip oder -gesetz, sondern um ein *Erkenntnisprinzip*. Dieser Unterschied wird in Hamels Axiomensystemen nicht deutlich gezogen. Das Erstarrungsprinzip wird als ein eigenes bedeutungsgebendes Axiom behandelt. Schon hier wird ein rationalistischer wie operationaler Zug der Hamelschen Axiomatik deutlich: Prinzipien der Natur entspringen einer 'formgebenden Erkenntnisquelle a priori',[164] die gleichzeitig zu notwendigen Anleitungen für das Auffinden von mechanischen Gesetzen erklärt werden. Als solch semantische Anweisungen erhalten sie den Eindruck von festen Begründungsinstanzen statt konventionalistischer Setzungen: Sie werden in Hamel [1927] gleichberechtigt zu den Gesetzesformen der Mechanik, den eigentlichen Axiomen, gereiht. Die 'Notwendigkeit' der Erkenntnisprinzipien bleibt nicht nur unbegründet, sondern wird synonym für etwas Unbegründbares. Außerdem findet man eine Bedeutungsgleichsetzung von 'denknotwendig' und 'naturnotwendig', die einen weiteren problematischen und unkritischen Teil der Axiomenstruktur nach Hamel ausmacht. Ich komme später darauf zurück, wenn es um die allgemeinen Erkenntnisprinzipien der Naturbeschreibung geht (Seite 145 folgende).

Die analytische Methode wird nun von Hamel mit Lagrange in Verbindung gebracht.[165] Sie entspricht einer entgegengesetzten Anleitung zur mechanischen Beschreibung. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten, das am Anfang dieser Anleitung steht, verfolgt man das „Ziel, über die Reaktionskräfte allmählich Einsicht zu erhalten, anstatt, wie früher, über sie von vornherein aus der Anschauung Aussagen zu machen" (Hamel [1927], S. 26). Der analytische Zugang ist insofern abstrakter, als die zu suchenden eingeprägten Kräfte zunächst „rein mathematisch definiert sind: die berühmten Lagrangeschen Parameter" (Hamel [1916], S. 62). Dieses 'Weniger' an Anschaulichkeit heißt, dass die kinetischen Grundbegriffe *beliebig* aus einer der synthetischen Systemmechaniken ausgewählt werden können.

> „Lagrange geht auch von Punkten aus, aber das ist ganz unwesentlich, er könnte geradeso gut von Volumelementen reden, und eigent-

[163] Zitiert aus Hamel [1927], S. 16. Siehe dazu auch Hamel [1912], S. 238.

[164] Nach Hamel [1912], S. 7.

[165] Siehe etwa Hamel [1927], S. 26 und Hamel [1916], S. 61.

> lich meint er später auch immer solche, wenn er von 'corps' spricht."
> (Hamel [1916], S. 61)

Insofern verbindet Hamel mit der analytischen Vorgehensweise einen „umgekehrten Schritt" (ebd., S. 62) zur synthetischen: Die abstrakten Parameter müssen *durch* die mathematische Analyse erst die Bedeutung von Reaktionskräften erhalten können, ohne dass sie zuvor der Anschauung entnommen wären. Wesentlich ist dabei das *Prinzip der Befreiung*, das gerade diese Umkehrung der eingeprägten Kräfte in Reaktionskräfte axiomatisch fordert.[166]

Auch hier sieht man, dass ein eigenes Axiom dazu dient, den Formalismus zu *interpretieren*. Das Befreiungsprinzip ist eine methodische Anleitung, den Kraftgrößen mechanische Bedeutung zu geben. Insofern wird die vage und traditionsbeladene Dichotomie 'analytische/synthetische Methode' bei Hamel für die Klassische Mechanik trennscharf gezogen. Die Gegensätzlichkeit der Anleitungen, wie sie in Hamels Begriffspaar 'Erstarrungsprinzip/Befreiungsprinzip' zum Ausdruck kommt, steht synonym für zwei gegensätzliche Herangehensweisen an ein und demselben Mechanismus. Sie geben demselben Mechanismus differenzierte *Bedeutungen in* der Theorie der Klassischen Mechanik.

Zu den mathematischen Hintergrundtheorien der Klassischen Mechanik
Soeben wurde bereits deutlich, dass Hamel die mechanischen Grundbegriffe nicht ohne ihre 'Erkenntnisquellen', wie es in Hamel [1912], S. 3, heißt, und nicht ohne die methodische Vorgehensweise formuliert. Umso auffälliger ist, dass allen Systemmechaniken ein 'gemeinsamer Untergrund'[167] vorausgeht. Mit dem *Newtonschen Grundgesetz* werden die begrifflichen, formalen wie methodischen Voraussetzungen bezeichnet, die allen Systemmechaniken angehören und für ihre Aufbauten notwendig sind. Ich werde im kommenden Abschnitt 3.6.3 darauf eingehen. Zusätzlich zu diesen Bedingungen der Mechanik gibt es allgemeine Prinzipien der naturwissenschaftlichen Erkenntnis und formale mathematische Theorien, die allen mechanischen Untersuchungen vorausgehen. Sie werden hier *protophysikalische Prinzipien* genannt.[168]

---

[166] „Das Prinzip kann so formuliert werden: 'Betrachten wir ein beliebiges System und fassen eine bestimmte seiner Bedingungsgleichungen $f = 0$ und den ihr zugehörigen Parameter λ ins Auge. Stellen wir daneben ein System von einem höheren Freiheitsgrad, indem wir diese eine Bedingungsgleichung fortlassen, sonst aber ganz das alte beibehalten, so bewegt sich dieses befreite System nach formal denselben Gleichungen wie das erste System, nur dass das λ jetzt eine eingeprägte Kraftgröße ist. Dieses λ ist also bei dem befreiten System durch die physikalischen und kinematischen Bedingungen desselben eindeutig bestimmt.'" (Hamel [1916], S. 62). Man vergleiche auch Axiom II.4 in Hamel [1927], S. 26, sowie Hamel [1967a], S. 73. In dieser Bedeutung wurde es auch in Brommundt und Sachs [1991] aufgenommen.

[167] So die Bezeichnung in Hamel [1967b], S. 508.

[168] Anlehnend an Bunge [1967a], S. 85.

Unverzichtbar sind die mathematischen Hintergrundtheorien zur Klassischen Mechanik. Kein Ortszustand kann ohne einen *Euklidischen Vektorraum* beschrieben werden, der ein inertiales Bezugssystem für eine mechanische Situation bereitstellt.[169] Mit dem Festsetzen eines Inertialsystems wird die „logische Existenz" (Hamel [1909a], S. 354) des *absoluten* Raums und der Zeit postuliert. Diese Forderung ist nichts anderes als die axiomatische Aussage des *ersten Newtonschen Axioms*, des Trägheitsprinzips.[170] In Hamel [1909b], S. 363, wird diese logische Existenz unmittelbar auf Neumanns Untersuchung über einen 'Körper Alpha' bezogen. Nur relativ zu diesem ersten Körper, der im Inertialsystem ruht, können überhaupt kinematische Zustände eines Objektes erkannt werden. Die Äquivalenzklasse aller zulässigen inertialen Raumkoordinaten ist, genauso wie der ruhende Körper Alpha, ein „unverzichtbarer theoretischer Begriff" (Pulte [2005], S. 425). Selbst als ideelles Objekt hat er die Funktion der gedanklichen Orientierung im Modellierungsprozess. In diesem außerempirischen Sinn ist Hamels 'logische Existenz' gemeint, wenn es „diesen Körper logisch als einen notwendigen Grundbegriff der Mechanik [gibt]" (Hamel [1909b], S. 363).

Vom Euklidischen Vektorraum ausgehend, sind weitere Merkmale der Raum-Zeit-Struktur wesentlich: Raum und Zeit sind homogen, der Raum isotrop, d.h. „alle Richtungen und alle Stellen des Raumes sind einander gleichwertig".[171] Das *Prinzip der Kontinuität* beinhaltet ferner die mathematische Forderung, dass die kinematischen Größen stetig und differenzierbar sind für infinitesimal kleine Orts- und Zeitintervalle.[172] Von zentraler Bedeutung für die Kontinuumsmechanik ist dabei die *Undurchdringlichkeit* der Raumpunkte, die Eindeutigkeit der Ortsfunktionen: Anfangs- und Endzustand eines Körperelementes müssen eindeutig aufeinander abbildbar sein.[173]

Anschaulich beinhaltet das Kontinuitätsprinzip das, was Hamel die '*Grundanschauung der Mechanik*' nennt:

> „In der ganzen materiellen Natur herrschen Spannungen (Drucke), welche längs eines jeden Flächenelementes die sich dort berührenden materiellen Teile aufeinander ausüben" (Hamel [1912], S. 6).

Hamel will mit diesem Grundsatz sicher stellen, dass der phänomenalistische Zugang zur Mechanik keine *logischen* Zweifel über die Existenz von Flächenkräften (Spannungen) bis in infinitesimal kleine Massenelemente hinein erzeugt. Ohne diese Existenzbehauptung wäre eine Kontinuumsmechanik unmöglich. Um dieser Grundanschauung mehr Form zu verleihen,

[169] Vgl. Hamel [1927], S. 2.

[170] Man vergleiche mit Abschnitt 3.3.1.

[171] Zitiert aus Hamel [1912], S. 89; siehe auch ebd., S. 6., und Hamel [1912], S. 5.

[172] Siehe Hamel [1912], S. 6.

[173] Daher gehört dieser funktionale Aspekt in Hamel [1927] durchaus zu den 'Axiomen' der Mechanik. Die axiomatische Bedeutung zur Beschreibung von Deformationszuständen wird etwa in Truesdell und Toupin [1960], §16: 'Continuity', dargestellt.

ist es Grundaxiom der Kontinuumssicht oder die '*Kontinuitätshypothese*': Es gibt (im logischen Sinn) flächenhaft verteilte Kräfte $dF = \sigma\, dA$.[174]

Zu den erkenntnistheoretischen Prinzipien: Hamels Apriorismus
Die ausführlichste Darstellung der Erkenntnistheorie zur Mechanik findet man im ersten Kapitel von Hamel [1912] und in Hamel [1909b]. Für eine axiomatische Behandlung der Mechanik kann sie auch weggelassen werden,[175] weil sie über den hypothetischen Charakter des Axiomensystems hinaus die Überzeugung Hamels in eine *tieferliegende Begründungsinstanz* der mechanischen und mathematischen Regularitäten darstellt. Es geht ihm hierbei um eine „Wiedereinführung apriorischer Elemente" (Hamel [1912], S. 11) in die Mechanik, „[...] also nicht durch die Erfahrung gegebener (vielleicht wohl von ihr angeregter), sondern durch anschauliches Denken selbst geschaffener Elemente des wissenschaftlichen Erkennens" (ebd., S. 4). Die denknotwendige Begründungsebene ist gleichbedeutend mit einem „ersten formgebenden Akt" (ebd., S. 1) in jeder theoretischen Naturforschung. Für diese Formgebung gebraucht Hamel die Kantischen Wendungen von der 'Bedingung der Möglichkeit von Erfahrung', dem 'transzendentalen Bestandteil vor unserer Erfahrung', die 'jeder Konvention überhoben' sind.[176]

Zu den erkenntnistheoretischen Prinzipien zählt Hamel etwa das *Prinzip der Klassifikation*: dass jedes Gesetz das Ergebnis einer gedanklichen Klassifizierung von Phänomenmerkmalen ist.[177] Dazu reiht sich das *Prinzip der Zerlegung*: dass die Klasse an Bewegungserscheinungen in idealisierte, momentane Ausschnitte zerlegt und wieder zusammengesetzt werden muss.[178] Weiteres Prinzip im Erkenntnisprozess mechanischer Vorgänge ist u.a. das des *zureichenden Grundes*: „Alles Geschehen muss seine erkennbare Ursache haben, durch die es eindeutig bestimmt ist."[179]

Ich kann die protophysikalischen Prinzipien nicht im Einzelnen kommentieren, sondern will nur eine Vorstellung von ihrer Rolle als semantische Begründungsstruktur in der Mechanik vermitteln. Es soll deutlich werden, dass die Entstehung der mechanischen Gesetze zu einer mathematischen Form durch operationale, methodische und logische Vorschriften begriffen wird. Dieser Anteil an Vorschriften ist für Hamel

> „das aller Naturwissenschaft Übergeordnete, das erst die Möglichkeit der Erfahrung (der Messung) gibt, das also einer festen Begründung *vor aller Erfahrung*, a priori, wie Kant sagt, bedarf" (Hamel [1912], S. 4).

[174] Siehe Hamel [1927], S. 8; und in Hamel [1967b], S. 513. Zur Form vergleiche hier Abschnitt 3.3.5.

[175] So auch Hamel [1909a], S. 354.

[176] So die Wortlaute in Hamel [1912], Seiten 4 u. 9 sowie Hamel [1909b], S. 361.

[177] Siehe Hamel [1912], S. 1.

[178] Siehe Hamel [1912], S. 5. Aus Hamel [1909a], S. 386, wird deutlich, dass die Aussage das Eulersche 'Schnittprinzip' der Statik (siehe etwa Brommundt und Sachs [1991], S. 1) enthält.

[179] Zitiert aus Hamel [1927], S. 6; siehe auch Hamel [1912], Seiten 2 u. 88.

Diese 'aprioristische' Abhebung vom konventionalistischen Charakter aller geometrischen und mechanischen Axiome hin zu einer weitergehenden transzendentalphilosophischen Begründung ist dabei als Hamels persönliche Überzeugung zu verstehen, die keinesfalls zusammen mit der Axiomatik akzeptiert werden *muss*.

Problematisch wird Hamels protophysikalische Begründung allerdings dadurch, dass an anderer Stelle Erkenntnisse 'a priori' leichtfertig mit 'denknotwendigen' Erkenntnissen gleichgesetzt werden.[180] Hier kann Hamel nicht überzeugen, insbesondere deswegen nicht, weil man den Eindruck gewinnt, dass die hypothetische Setzung der Prinzipien auf eine letzte 'denknotwendige' Stufe der Begründung zurückgeführt werden soll. So bleibt der protophysikalische Begründungsversuch eher ein dogmatischer Abschluss als eine logische Reduktion von mechanischen Grundsätzen. Dieses Spannungsverhältnis zwischen Apriorismus und Konvention bleibt in Hamels Prinzipienstruktur unaufgelöst.[181] Es setzt sich ohne Frage fort in Hamels aprioristischer Begründung des Kraftbegriffs als implizite Definition, auf die ich im kommenden Abschnitt eingehen werde.

Die Erkenntnisprinzipien sind, so meine ich, wie semantische, konventionelle Ordnungsprinzipien zu verstehen und in dieser Funktionalität sinnvoll und berechtigt. Unverständlich bleibt dann aber auch, warum Hamels Axiomatik erkenntnistheoretische und mechanisch-mathematische Prinzipien teilweise als gleichwertige *deduktive* Voraussetzungen von *gleichem Aussagetyp* behandelt. So wird zum Beispiel das Prinzip des zureichenden Grundes als Voraussetzung dafür erklärt, dass aus der Zahl der Freiheitsgrade eines Körpers die Zahl der Reaktionskräfte eindeutig bestimmt sind.[182] Der Zusammenhang zwischen Bewegungseinschränkungen und Reaktionskräften wird zunächst axiomatisch gefordert.[183] Für die Eindeutigkeit der Zuordnung sorgt dabei die Umschreibung des Prinzips vom zureichenden Grund, dass jede Dimension der Bewegungsbeschränkung durch eine dynamische Größe derselben Dimension bestimmt ist.[184] Es bleibt aber unklar, wie diese Umschreibung aus dem allgemeinen Prinzip des zureichenden Grundes 'folgen' soll. Der 'Schluss' auf die Eindeutigkeit der unbekannten Systemreaktionen ist alles andere als 'zweifellos exakt',

[180] „Als *a priori oder denknotwendig bezeichne ich* [...] gewisse - logisch durchaus nicht beweisbare [...] Urteile [...], die zum Teil jeder Mensch instinktiv anwendet und anwenden muß, damit er überhaupt Erfahrung erwerben kann [...]" (Hamel [1909b], S. 361). Zur Problematisierung von 'a priori' und 'notwendig' siehe vor allem Patzig [1988], S. 18 ff.; zum Begriff 'Apriorismus' Anmerkung 61 in Kapitel 2.

[181] Für Hinweise auf dieses Spannungsverhältnis bedanke ich mich bei Professor Helmut Pulte.

[182] Siehe Hamel [1912], S. 88; und Hamel [1916], S. 61.

[183] Vgl. Hamel [1912], S. 87 und Hamel [1927], S. 15

[184] Im Wortlaut: „Wenn man weiß, dass eine gesuchte Mannigfaltigkeit bestimmter Dimension ν ausschließlich und eindeutig durch eine Gesamtheit anderer Größen bestimmt ist und *diese* Gesamtheit eine *einzige* ausgezeichnete Mannigfaltigkeit νter Dimension bestimmt, so ist die gesuchte Mannigfaltigkeit mit dieser identisch." (Hamel [1912], S. 88).

obwohl Hamel gerade das behauptet. Denn hier wird ein *erkenntnistheoretisches* Prinzip in ein Prinzip über Freiheitsgrade an ausgedehnten Körpern umformuliert, und diese *physikalischen* Größen sind von ganz anderem semantischen *Typ*. Sie haben eine andere Bedeutung innerhalb der mechanischen Theorie.

Auch im Zusammenhang mit dem eben genannten Erstarrungsprinzip (Seite 140) sind ähnliche Schlussweisen vorgekommen, die auch auf informeller Ebene unklar bleiben. So sei das Erstarrungsprinzip logisch äquivalent zum Gegenwirkungsprinzip (Prinzip von Druck und Gegendruck) für den statischen Fall starrer Körper.[185] Auch hier wird leichtfertig ein Schluss von einem Erkenntnisprinzip zu einem physikalischen Prinzip hergestellt. Beim Befreiungsprinzip der Lagrangeschen Parametermethode sind ähnliche typenübergreifende Schlussweisen in Hamels Deduktionen zu finden.

Kurzum, die Überschneidung von erkenntnistheoretischen, mathematischen und mechanischen Prämissen scheint eine *systematische Schwachstelle* in Hamels informeller Axiomatisierung zu sein.[186] Mario Bunge hat sicherlich Recht, dass protophysikalische Annahmen jede Deduktion eher abschwächen.

> „[Protophysics] is fragmentary rather than unitary: it is not a single theory or even a set of contiguous theories but an heterogeneous assortment of principles and theories; consequently it has by itself no great deductive power." (Bunge [1967a], S. 85)

Letztlich ist sich Hamel auch darüber im Klaren und betont die Redundanz der Protophysik, sofern sie keine logisch-mathematischen Voraussetzungen an die Mechanik stellen.

> „Nach der heutigen durch Hilbert endgültig ausgesprochenen Auffassung definieren die Axiome die Begriffe, soweit sie für eine mathematische Behandlung in Frage kommen. Die noch bestehende Freiheit in ihrer Realisierung dient dazu, den Begriffen solche physikalische Bedeutung zu geben, dass ein mit der Erfahrung übereinstimmendes Weltbild entsteht." (Hamel [1927], S. 3)

Diese 'Freiheit in der Realisierung' ist der *nichtlogische* und *nichtformalisierbare* Anteil in der Axiomatik. Das wird umso deutlicher, wenn man sich auf das konzentriert, in was jeder Aufbau der Klassischen Mechanik mündet und nach Hamel ihre Schwierigkeit ausmacht: im Kraftbegriff.

[185] Siehe dazu Hamel [1912], S. 238.

[186] Das ist dennoch eine Schwachstelle, die meines Erachtens durch eine deutlichere Taxonomie der Axiomgruppen behoben werden kann. Siehe dazu Abschnitt 4.5.5.

3.6.3 Das Newtonsche Grundgesetz: der gemeinsame Untergrund

Georg Hamels Interpretation des Newtonschen Grundgesetzes der Mechanik **(NG)** ist originell und vielschichtig.[187] Nach meiner Einschätzung beinhaltet sie einen beträchtlichen Anteil an der Lösung des sechsten Problems. Dass Newtons Grundgesetz bisher nicht auf die verschiedenen Bilder des physischen Körpers (die 'Masse'), nicht auf die vieldeutige Kinematik des Körpers (die 'Bewegungsänderung') und vor allem nicht auf die verschiedenen Kraftbegriffe in den klassischen Systemmechaniken bezogen wurde, sondern stattdessen immer nur auf jeweils einzelne, *unvermittelte* Bedeutungen gebracht wurde, ist nach Hamel der entscheidende Grund, dass 'Kraft' ein „verdächtiges Objekt" (Hamel [1909b], S. 357) in der Mechanik geblieben ist. Ich möchte im Folgenden verdeutlichen, wie der mehrdimensionale 'Aufbau' der Axiome *und* der 'gemeinsame Untergrund' (so die Ausdrücke in Hamel [1967b], S. 508) in Newtons Kraftgesetz nach Hamel zu begreifen ist:

I. **(NG)** ist die unbestimmte *Form* eines Kraftgesetzes und gibt die Funktionalität der darin enthaltenen Terme vor: Das ist sein 'aprioristischer' Anteil.

II. **(NG)** ist ein *Natur*gesetz, es hat empirische, anschauliche Bedeutung.

III. **(NG)** hat *in* einer Systemmechanik jeweils andere 'synthetische' Gestalt: Hier ist es ein Kraft*gesetz*. Die semantische Ergänzung zur Systemmechanik ist dabei ein notwendiger und *informeller* Prozess.

In der Gemeinsamkeit als *ein* Grundgesetz findet man nicht nur eine eigenständige Rehabilitierung von 'synthetischen Aussagen a priori' in der Mechanik. Sondern darin verbirgt sich auch die Kritik Hamels an einem einseitigen *formalistischen* Verständnis der Mechanik. Die Synthese enthält schließlich die wesentliche *konstruktive Neubewertung* der axiomatischen Methode in den Grundlagen der Mechanik.

(I) Das Grundgesetz ist eine implizite Definition der Kraft

Newtons Grundgesetz behält bei Hamel den vorrangigen Stellenwert, den es auch bei Volkmann, Voss und Stäckel hat. Der neue Gedanke ist nun, dass die Gleichung

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (\mathbf{NG})$$

[187] Zum Newtonschen Grundgesetz siehe hier Abschn. 3.3.3. In Hoyer [1977], S. 294, werden zwei Erläuterungen des Grundgesetzes bei Hamel, einmal als implizite Definition der Kraft und als empirisches Naturgesetz, unvermittelt nebeneinander gestellt. Coelho [2010] und Coelho [2011] erwähnen nur den 'aprioristischen' Anteil in Hamels Kraftdefinition. Mit Ausnahme von Truesdell [1984d] ist mir keine Kommentierung der Kraftinterpretation bekannt, die Hamels Bezug zu den Systemmechaniken berücksichtigt.

keine bestimmte Systemmechanik oder Anschauung voraussetzt, sondern ein für den Kraftbegriff der Klassischen Mechanik *allgemeines* wie *notwendiges Schema* einführt: $'m'$ und $'\vec{a}'$ und die dazugehörigen Parameter (Ort, Zeit, Geschwindigkeit usw.) werden zu einer Kraftfunktion $'\vec{F}'$ verknüpft. Im Sinne der axiomatischen Methode „enthält [das Grundgesetz] die implizite Definition der Kraft" (Hamel [1967b], S. 512). Damit wird zunächst nur die *formale* Seite des Grundgesetzes angesprochen, wie die Terme algebraisch zusammenzusetzen sind. In der Kraftfunktion kommt nicht zum Ausdruck, wie die algebraischen Terme semantisch bestimmt werden. Sie sind semantisch unbestimmt. Das 'Enthaltensein' in Hamels Worten darf also wörtlich genommen werden: Es muss noch etwas *ergänzt* werden.

> „Wollten wir die axiomatische Methode rein zur Darstellung bringen, so könnten wir dies erste Kapitel sehr kurz fassen: Das Newtonsche Gesetz lautet in Worten: 'Masse mal Beschleunigung ist gleich der geometrischen Summe der Kräfte', und wir hätten nur noch wenige Bemerkungen hinzuzufügen. Denn die axiomatische Methode verlangt gar nicht, die benutzten Begriffe von vornherein zu definieren; nur die Beziehungen zwischen ihnen interessieren, weil aus ihnen allein logisch weiter geschlossen wird."[188]

Ein Großteil der Interpretationsschwierigkeiten um das Grundgesetz geht nach Hamel darauf zurück, dass versucht wird zu definieren, *was* eine Kraft *ist*. Dabei ist das 'Kraftsein' undefinierbar, es wird lediglich die 'logische Existenz' einer Kraft postuliert, so wie schon beim Begriff des (absoluten) Raums und der Zeit.[189] So

> „braucht die axiomatische Methode der Mechanik nicht zu fragen, was Masse, Beschleunigung, Kraft bedeuten, es genügt die oben ausgesprochene Beziehung [**(NG)**], die nur noch in eine mathematische Form zu bringen ist" (Hamel [1967a], S. 6).

Damit will Hamel keinesfalls behaupten, dass jede Interpretation überflüssig wäre, sondern dass es sich aus axiomatischer Sicht um einen nachfolgenden Schritt handelt, der eine „begriffliche Analyse der Axiome" (ebd., S. 6) beinhaltet.

Die schematische, inhaltsleere Verknüpfung von $'m'$ und $'\vec{a}'$ zu $'\vec{F}'$ in **(NG)** ist für Hamel nun gleichbedeutend mit einem logischen Anteil 'a priori' des Grundgesetzes, der erst noch mit empirischem Inhalt 'gefüllt' werden muss.[190] Wie schon zuvor bei den allgemeinen Erkenntnisprinzipien aller Naturwissenschaften (Abschnitt 3.6.2) versteht er auch diesen formgebenden Anteil in **(NG)** als ein Erkenntnisprinzip der Naturanschauung:

---

[188] Zitiert aus Hamel [1967a], S. 6. Ein weiterer Wortlaut über Hamels Bekenntnis zur funktionalen Eigenart der impliziten Definition wurde bereits auf Seite 31 in Abschnitt 2.3.1 wiedergegeben.

[189] Siehe den vorigen Abschnitt 3.6.2 zu den mathematischen Hintergrundtheorien.

[190] Man vergleiche dazu insbesondere Hamel [1909b], S. 361 f., und Hamel [1912], S. 7 f.

Der damit verbundene Begriff der Kraft ist „ein Gedankending und keine Naturerscheinung" (Hamel [1912], S. 56). Tatsächlich ist Hamels 'aprioristische' Interpretation auch antirealistisch: Kräfte werden von uns in die Naturvorgänge hineinprojiziert und sind nicht einfach da.[191] Somit wird das Newtonsche Kraftgesetz einer realistischen Interpretation vorgeordnet und eine eindeutige Zuordnung zwischen Kraft und realer Kausalursache ganz abgelehnt.

> „Kraft gleich Ursache der Bewegung ist keine Definition, höchstens bei geeigneter Präzision des Wortes Ursache eine ungefähre Umschreibung [des Grundgesetzes]. Wahre Ursachen einer Bewegung sind andere physikalische oder materielle Erscheinungen".[192]

Die philosophische Schwierigkeit, die mit Hamels Apriorismus und seinem konventionalistischen Verständnis von Theorien verbunden ist, bleibt ohne Zweifel bestehen. Ich behaupte allerdings, dass hier, in diesem speziellen Fall der *Form* des Newtonschen Grundgesetzes (**NG**), ein Wissen über alle denkbaren Gegenstände der sinnlichen Erfahrung enthalten und damit dem semantischen Gehalt durch die Erfahrung vorgeordnet ist. Um in der Klassischen Mechanik *eine* Kraft zu identifizieren, muss eine von der räumlichen Umgebung isolierte Körperbeschleunigung gedanklich erfasst werden. Die Allgemeingültigkeit beruht darauf, dass man keine empirischen Tatsachen über bestimmte sinnlich wahrnehmbare Körper zur Begründung erkannt haben muss. Sie beruht vielmehr auf einer reinen, abstrakten Anschauung. Der formale Anteil in (**NG**) enthält also durchaus ein Wissen a priori im Kantischen Sinn.[193] Gerade diese den Systemmechaniken vorgeordnete Rolle eines Schemas a priori macht das Grundgesetz zur impliziten Definition der Kraft.

Weil das Newtonsche Grundgesetz in Hamels Rekonstruktion als gemeinsame Form für Massenbeschleunigungen allen Systemmechaniken vorausgeht, für alle Ausbauten in der Klassischen Mechanik notwendig ist, kann man durchaus von einer 'tieferliegenden' rationalen Begründungsinstanz sprechen.

> „Endlich möchte ich noch betonen, daß der von mir vertretene Apriorismus der Natur keinerlei Spezialgesetze vorschreibt; es handelt sich um *Formen* unserer Erkenntnis, in die sich jedes Spezialgesetz bringen läßt." (Hamel [1909b], S. 362)

(II) Das Grundgesetz ist ein anschauliches Naturgesetz

In der Idee der impliziten Definition von Kräften sieht Hamel eine Rück-

[191] Sie sind erst recht nicht eindeutig gegeben. Man müsste eigentlich genauer sagen, dass Kraftterme erst *durch* die Modellierung eindeutig festgelegt werden.

[192] Zitiert aus Hamel [1927], S. 5. Vgl. dazu auch Hamel [1912], S. 56, und Hamel [1967a], S. 7.

[193] Man vergleiche hierzu Patzig [1988], Seiten 19 u. 24.

kehr zu Newtons ursprünglicher Intention eines Axioms als Bestandteil der rationalen Mechanik.[194]

> „Die Kritik [etwa durch Mach, Poincaré, Kirchhoff, Hertz u.a.] hat nur die aprioristische Aufstellung der Newtonschen Grundbegriffe und Axiome als metaphysisch und dogmatisch gebrandmarkt, und, da die Logik nicht allein vermag, jenen unentbehrlichen Begriffen Inhalt zu geben, verlangt, dieselben durch die *Erfahrung* zu begründen." (Hamel [1909b], S. 359)

Als bloße Form wären die Grundbegriffe völlig bedeutungslos, ohne Bezug zur Erfahrung.

> „Aber Newton wollte ja kein rein logisches System aufbauen, und das will *keine* Naturwissenschaft." (ebd., S. 359)

Der Kraftbegriff der Klassischen Mechanik kann sich also nicht in der bloßen Form eines Naturgesetzes erschöpfen. Seine Bedeutung und Angemessenheit zeigt sich in der *Ausgestaltung zu* Modellen und Bildern der mechanischen Wirklichkeit. Der inhaltliche semantische Anteil des Gesetzes muss aus der empirischen Anschauung stammen. Er betrifft die *Interpretation* des Grundgesetzes und unterscheidet sich von dessen formalen Bestandteilen darin, welche anschaulichen Daten der mechanischen Körper verwendet werden, um zu den jeweiligen Kraftgrößen zu gelangen. Diese Ausgestaltung des Kraftbegriffs führt schließlich zu den unterschiedlichen Systemmechaniken.

> „[Newton] weiß, dass eine Klasse von Bewegungserscheinungen kausal mit gewissen anderen Daten, ihren Ursachen, verknüpft sein muss; als Ausdruck für die Ursachen jener Bewegungserscheinungen wird die Kraft definiert. Die berühmten leges motus sind dann wirklich Gesetze und keine bloßen Definitionen." (Hamel [1909b], S. 359)

Es ist somit kein Widerspruch, das Grundgesetz als implizite Definition der Kraft zu verstehen *und zusätzlich* seine empirische Erfüllbarkeit zu behaupten. Es sind gewissermaßen zwei *irreduzible* Merkmale des Grundgesetzes. Das Auffinden eines Kraftausdruckes wird mittels eines konkreten Bewegungsvorganges in einem *anschaulichen Modell* erreicht. Dies erläutert Hamel häufiger mit dem gerade (Abschnitt 3.6.2) erwähnten Klassifikationsprinzip: „Der Mensch muss 'zerschneiden' und anders wieder zusammenfügen, um aus dem Beobachtungsmaterial die Kraft zu gewinnen" (Hamel [1912], S. 53). Das mag sich zwar wie eine Selbstverständlichkeit anhören, ist aber, wie Hamel vielfach betont, entscheidend für das Verständnis der Mechanik als *empirische* Wissenschaft. Die Form des Newtonschen Gesetzes muss durch die veranschaulichte Anwendung, durch das vorliegende idealisierte Modell der Wirklichkeit begleitet werden, damit diese Form *Bedeutung* haben kann.

[194] Siehe dazu Abschnitt 3.3.3.

Das Erkennen einer Kraft als „gesetzesmäßige[r] Ausdruck für eine Massenbeschleunigung" (Hamel [1912], S. 48) ist also immer ein synthetischer und kein formaler Prozess. Hamel betont häufig, dass Kraft kein Massenbeschleunigungs-*Term*, sondern ein echtes Naturgesetz, ein „Massenbeschleunigungs-*Gesetz*" ist.[195] Beim Modellieren und Aufstellen des Gesetzes findet der semantische Bezug zur Wirklichkeit erst statt, während die Form der impliziten Definition wie ein rationales Ordnungsprinzip der reinen Anschauung verstanden wird. Der semantische Übergang zur Wirklichkeit wird von Hamel entsprechend mit einer *zusätzlichen* Tätigkeit assoziiert, mit dem 'Auffinden eines Ausdrucks für eine Klasse von Bewegungserscheinungen'.

> „Wenn es uns gelungen ist, bei einer Klasse von Bewegungserscheinungen einen typischen Ausdruck für die Massenbeschleunigung zu finden, so wollen wir diesen Ausdruck eine Kraft nennen, oder genauer ein Kraftgesetz." (Hamel [1912], S. 53)

Nach Hamel ist es eine Art „konstruktives Denken" (Hamel [1912], S. 4), um über den Kraftbegriff die Verbindung zur Wirklichkeit erst herzustellen. Damit wendet er sich entschieden von einem bloß *formalen, algebraisch definierten* Kraftbegriff ab, wie er vor allem mit Gustav Kirchhoff in Verbindung gebracht wird.

> „Es sei aber nochmals [...] darauf hingewiesen, dass *Kraft nicht einfach ein neues Wort für Massenbeschleunigung ist* (wie *Kirchhoff* glaubte). Kraft ist etwas ganz Neues, das durch vereinte Wirkung von Anschauung, Erfahrung und schöpferischer Tätigkeit des Menschen aus dem Massenbeschleunigungsbegriff hervorgegangen ist, aber nimmermehr mit ihm identifiziert werden darf." (Hamel [1912], S. 53)

(III) Das Grundgesetz wird je nach Systemmechanik unterschiedlich ausgestaltet

Hamels Lehrbücher stellen die elementaren Beschleunigungsgesetze der Klassischen Mechanik vor. Hier sollen nur einige Beispiele genannt werden, an denen die synthetische Verbindung zu **(NG)** deutlich wird. Sie sollen zeigen, dass dem formal Gegebenen etwas fehlt, was erst durch die Modellierung hinzugedacht wird.

1. Die berühmte Entdeckung Newtons, dass die Keplerschen Gesetze der Planetenbewegungen zu einem einzigen Beschleunigungsgesetz von der mathematischen Form

$$\vec{a} = -\vec{e}_r \frac{M}{r^2}$$

[195] Zitiert aus Hamel [1912], S. 48. Siehe dazu auch Hamel [1967a], Kap. I, §2, Nr. 4: 'Klasse und Beschleunigungsgesetz', und §7, Nr. 20: 'Die drei ersten Axiomgruppen'; sowie Hamel [1967b], Kap. I: 'Das Newtonsche Grundgesetz'.

zusammensetzbar sind, führt zu einem Gesetz der Massenbeschleunigung, das ganz *unabhängig* von der Massenträgheit bestimmt ist.[196] Die gesamte *statische* Betrachtung von Kräftepaaren setzt die einkomponentige Erdbeschleunigung $\vec{g}$ als wesentliches 'Axiom der Schwere' voraus, um die Gewichtskraft als unabhängige äußere Kraft einzuführen. Dieser statische Kraftbegriff hat eine ganz andere Bedeutung als der *kinetische*, der die Trägheitswirkungen von Massen untereinander berücksichtigt: Das '$\vec{a}$' in **(NG)** kann einerseits Fallbeschleunigung und andererseits Trägheitsreaktion bedeuten.

> „So aufgefasst wäre die Behauptung [der Bedeutungssynonymie] direkt falsch, da die Kräfte bei der Bewegung oft anders sind als in der Ruhe." (Hamel [1927], S. 4)

2. Illustrativ ist auch folgendes Beispiel: Bei einer Pendelbewegung mit Fadenlänge r wird die Fadenspannung durch die Massenbeschleunigung vom Betrag
$$a = -r \cdot \omega^2$$
bestimmt. Die Spannung führt im Allgemeinen aber *nicht* zu einer eindeutigen Zentrifugalkraft.[197] Man erhält unterschiedliche Kraftterme je nachdem, ob der Pendelkörper durch seinen Massenschwerpunkt ersetzt wird oder nicht. Dies motiviert die Unterscheidung in ein partikelartiges, idealisiertes Pendel ('mathematisches Pendel') und ein Pendel mit ausgedehnten Massenverteilungen ('physikalisches Pendel'), bei dem Trägheitsmomente und somit nicht-diagonale Deviationsmomente auftreten können. Diese erzeugen eine Drehbewegung um den Schwerpunkt. Die Entscheidung, ob der Körper als Schwerpunktmasse oder als starrer Körper modelliert wird, geht dem kinetischen Kraftgesetz voraus und bestimmt das Ergebnis.

3. Das Beschleunigungsgesetz einer durch eine Masse gespannten Feder, das aus der Periodizität der ungedämpften Schwingung folgt, ermöglicht, eine weitere Klasse an Bewegungserscheinungen auf die Form
$$a = -x \cdot \omega^2$$
zu bringen. Hierbei ist die Beschleunigung von der Elongation x der Feder abhängig, und die Kreisfrequenz bildet mit der Körpermasse m die Beziehung $\omega^2 = \frac{\lambda}{m}$, mit λ als ein federspezifischer Proportionalitätsfaktor. Zwar *formidentisch* mit dem 'a' des vorherigen Beispiels,

[196] Siehe etwa die ausführliche Darstellung in Hamel [1912], Kap. 4: 'Die Elemente der Himmelsmechanik'. In Hamel [1967a], §I.4.: 'Die Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne', wird die Unabhängigkeit zwischen Schwere und Massenträgheit logisch nachgewiesen.

[197] Vgl. Hamel [1912], Seiten 99 u. 307 ff.

ist es dennoch ein ganz anderer Typ von Bewegungsgröße als die Zentrifugalbeschleunigung.[198]

4. Die Entscheidung darüber, ob die mechanische Situation durch Punktelemente oder durch kontinuierliche Massen bzw. starre Körper beschrieben werden *soll*, konstatiert unterschiedliche *funktionale Ausgestaltungen* der Beschleunigungsfunktion.

Allen Beispielen ist gemeinsam, dass die Beschleunigungsterme nicht aus der Struktur von (**NG**) gefolgert werden können. Sie beinhalten den gesamten Modellierungsprozess. Doch wird über **(NG)** von einem Beschleunigungsterm auf ein spezielles Kraftgesetz geschlossen. Das Newtonsche Grundgesetz bleibt somit indirekt *Bestandteil* des speziellen Kraftgesetzes.

Die Modellierung unter 4. oben verdient besondere Beachtung. Hierin vereinigt sich die vielfältige Realisierung des Grundgesetzes in den unterschiedlichen *Systemmechaniken* der Punktmassen, der starren Körper oder der Kontinua. Ich kann hier nur auf die offensichtlichsten Unterschiede hinweisen.

(4a) In der *punktmechanischen Anschauung* enthält das Grundgesetz die Bedeutung von Massen, die im Schwerpunkt linear beschleunigt werden. Infinitesimale Massenelemente dm und Kraftkomponenten $d\vec{F}$ sind bedeutungslos und werden durch diskrete Elemente ersetzt. Die Entscheidung, alle Massenobjekte als diskrete Punktelemente zu interpretieren, wird also *vor* Aufstellung der systematisierten Mechanik getroffen. Zu beachten gilt, dass der semantische Übergang zur Punktmechanik an der formalen Struktur von **(NG)** nicht erkennbar ist:

$$\vec{a}_i = \frac{1}{m_i}\vec{F}_i.$$

In einem Vielteilchensystem kann bestenfalls ein Index $i \in \{1, \ldots, n\}$ auf *diese* Punktmassen hinweisen.

(4b) In der *Kontinuumsanschauung* beinhaltet das Beschleunigungsgesetz die Spannungszustände, die für alle infinitesimal kleinen Volumina dV zu berücksichtigen sind. Somit hat es die veränderte Form

$$\vec{a} = \frac{1}{\mu}[\sum F_{ext} + \lim_{dV \to 0} \int \sigma_{\vec{n}}\, dA] \quad (\mathbf{NGC}),$$

wobei $\mu = \frac{dm}{dV}$ die Massendichte des Raumbereiches bezeichnet.[199]

[198] Vgl. Hamel [1912], §8: 'Die schwingende Feder. Die Masse als Trägheitsfaktor'.

[199] Siehe etwa Hamel [1927], S. 8; oder Hamel [1912], S. 318. Zum Spannungsbegriff vergleiche man hier Abschn. 3.3.5.

(4c) Der Übergang zur Kinetik der *starren Körper* erfordert eine Interpretation des Grundgesetzes in Ausdrücken von eingeprägten Kräften und Reaktionskräften. In diesem Fall ist das Grundgesetz *formidentisch* mit dem d'Alembertschen Prinzip (siehe hier 3.4.2) und hat jetzt eine allgemeinere, kinetische Bedeutung. Massenbeschleunigung *und* der *Verlust* an Massenbeschleunigung, der Anteil an Reaktionskraft in einem zusammengesetzten Massensystem, sind in derselben Gesetzesform enthalten.[200]

Diese eigenartige Formidentität hat nach Hamel zu einer missverständlichen Vereinfachung geführt, die häufiger in Lehrbüchern zu finden ist. Die Massenverteilung und Kraftarten der punktmechanischer Sichtweise können auf das d'Alembertsche Prinzip übertragen werden, was allerdings eine semantisch ungenaue Einschränkung beinhaltet.

> „Einige Lehrbuchautoren trivialisieren es. Sie sagen, nach dem Newtonschen Grundgesetz gilt $dm\vec{a} = d\vec{F}$, das d'Alembertsche Prinzip ist nichts als eine Umstellung $d\vec{F} - dm\vec{a} = 0$. Eine solche Ansicht ist geradezu eine Beleidigung für d'Alembert".[201]

Zusammenfassend will ich behaupten, dass Hamel den 'gemeinsamen Untergrund' zum Newtonschen Grundgesetz als eine synthetische Satzmenge a priori charakterisiert und dass diese Charakterisierung auch ihre Berechtigung hat. Es handelt sich um Satzmengen mit formalen Anteilen, die allgemein und für die Mechanik notwendig sind, die nicht aus der Erfahrung begründet werden können, deren Inhalte allerdings immer aus einer anschaulichen Konstruktion hervorgehen.

Es gibt leider viele Stellen in Hamels Schriften, die unterschiedliche Bedeutungen von 'synthetisch' in der Mechanik miteinander vermischen und seine Position abschwächen. So ist es nicht der 'induktiv-synthetische' Aufbau der Mechanik,[202] der hierbei charakteristisch ist. Auch die transzendentalphilosophische Kennzeichnung von 'rein synthetischen Urteilen', in denen der Subjektbegriff durch das Prädikat eine Erweiterung erfährt und somit nicht aus Regeln der Logik und nicht aus seiner Bedeutung in der

[200] Das soll nicht heißen, dass man das d'Alembertsche Prinzip nicht für starre Verbindungen von Massenelementen differenzierter gestalten kann. Sommerfeld [1967], S. 53, berücksichtigt eine atomare Gitterstruktur an *Punktmassen*, auf die das Prinzip anzuwenden ist: Die Reaktionskräfte dF_i^r werden dann durch *interne* Kraftkomponenten $\sum_j F_{i,j}^r$ ersetzt. Aber auch hier wäre bereits eine semantische Vorentscheidung für Punktmassen getroffen. Der allgemeine Fall des d'Alembertschen Prinzips wird durch die Gesetzesform **(NG)** dagegen nicht zum Ausdruck gebracht.

[201] Zitiert aus Hamel [1967a], S. 220. Man vergleiche auch Szabó [1987], Abschnitt 1C.

[202] So zu finden in der Einleitung zu Hamel [1967a], zurückgehend auf Newtons wissenschaftstheoretische Bedeutung der Synthese und Analyse (siehe dazu Pulte [2005], S. 120). Zu unterschiedlichen Verwendungsweisen von 'synthetisch' im Zusammenhang mit rationaler Mechanik siehe auch ebd., S. 228 f.

verwendeten Sprache erschlossen werden kann, reicht weit über den spezifischen Gegenstandsbereich der Mechanik hinaus.[203] Es ist der methodische, innermathematische Gebrauch von 'synthetisch', der hierbei von Bedeutung ist. Hamel stellt die *'synthetische Methode'* jeder logischen Rekonstruktion voran (wie hier in Abschnitt 3.6.2, Seite 140 erläutert), um zu verdeutlichen, dass der Erkenntnisprozess in der Mechanik zur geometrischen Modellierung, zu anschaulichen wie idealisierenden Interpretationen einen aufzeigbaren Rückbezug haben muss. Da nun dieser gedankliche Prozess zwar von der Erfahrung 'angeleitet' wird, aber durchaus formale Anteile vor der Erfahrung hat, möchte ich von *synthetischen Grundsätzen a priori* in Hamels Axiomatik sprechen.

3.6.4 Das Grundgesetz ist mehr als seine logische Struktur

Die epistemologischen, die anschaulichen und modellierenden Merkmale gehören zum allgemeinen *kinetischen* Kraftbegriff dazu. Der Übergang zu einer der Systemmechaniken ist ein *nicht formalisierbarer*, aber dennoch aufzeigbarer Schritt. Dies wird von Hamel an mehreren Stellen unmissverständlich, wenn auch etwas umständlich, zum Ausdruck gebracht. Insbesondere das **Axiom (Ie)**, das in Hamel [1927], S. 3, dem Formausdruck für das Newtonsche Grundgesetz vorangestellt wird, repräsentiert diesen kinetischen Kraftbegriff:

> „Die Kräfte $d\vec{k}$ sind durch ihre 'Ursachen' bestimmt, d. h. durch Variable [sic], welche den geometrischen und physikalischen Zustand der umgebenden Materie darstellen. Diese Abhängigkeit ist eindeutig und im allgemeinen stetig und differenzierbar".[204]

Man darf wohl durchaus bestreiten, dass es sich hierbei um eine implizite Definition handelt, weil zum einen die Bestimmungsmerkmale der 'Variablen' völlig unklar bleiben und weil nicht gesagt wird, ob diese Variablen unter allen Umständen auffindbar sind.[205] Es ist vielmehr eine *rationale Anleitung*, nach der ein Kraftgesetz identifiziert werden kann. Entsprechend heißt es weiter in Hamel [1927], S. 5:

> „Zu jeder Bewegungsklasse ist unter Elimination der Einzelbewegung anhaftenden individuellen Konstanten ein gesetzmäßiger Ausdruck zu

[203] Man vergleiche Hamel [1912], S. 8, anlehnend an Kants Verwendung.

[204] In Hamel [1912], S. 56, heißt es weiter erläuternd: „Wir wollen nun den Inbegriff aller Merkmale, d.h. Erscheinungen und Daten physikalischer, chemischer oder geometrischer Natur an materiellen Objekten, auf Grund deren wir imstande sind, das Vorhandensein einer Kraft zu behaupten, die Ursache der Kraft oder auch die Ursache der betreffenden Bewegungsklasse nennen."

[205] In diesem Sinne hat auch Truesdell das Axiom durchaus kritisch gesehen: „[...] Hamel's 'axiom' is too vague because he does not delimit what he calls 'the geometrical and physical state of the surrounding matter' and does not give a precise meaning to 'determined' [...]" (Truesdell [1984d], S. 562).

> finden, der dem Axiom Ie genügt, d.h. eine Funktion der geometrischen und physikalischen Variablen des Punktes und seiner Umgebung ist (z.B. durch Übergang von den Keplerschen Gesetz zu den Newtonschen Gravitationsgesetzen). Es ist eine Erfahrungstatsache, dass diese Elimination und Klassifikation durch Bildung der Beschleunigung gelingt."

'Suche ein Modell, das alle Massenwirkungen durch einen eindeutigen Beschleunigungsterm darstellt, und du hast ein Kraftgesetz gefunden', das soll die Aussage sein. Es ist meines Erachtens gerade die Behauptung der *Irreduzibilität* der synthetischen Methode, mit der die Realität einer Kraft in der Natur nachgewiesen wird und ohne die man nur eine allgemeine Form des Kraftgesetzes a priori erkennen würde.

Im Rahmen des noch zu diskutierenden *semantischen* (oder modelltheoretischen) Ansatzes zur Mechanik um John McKinsey und Patrick Suppes wurde das Axiom **(Ie)** als unklar zurückgewiesen. Es sei für kein Beweisverfahren und für keine Problemstellung innerhalb der Grundlagen nützlich. Somit sei es unzureichend, um als echtes Axiom gelten zu können.[206] Hamel selbst und Truesdell haben auf diese Bemerkung mit Unverständnis reagiert. Die Autoren seien zu weit 'entfernt' vom inhaltlichen Gegenstand der Klassischen Mechanik. In Truesdells brieflichen Kommentar heißt es dazu knapp:

> „The axiom [Ie] there faulted as being unnecessary is fundamental for the construction of the entire theory of mechanics, namely, for the definition of concepts just named." (Truesdell [1984d], S. 524).

Gemeint sind gerade die je nach Systemmechanik variierenden Kraftbegriffe (interne/externe Kraft, eingeprägte Kraft/Reaktionskraft bzw. Volumenkraft/Flächenkraft), wie zuvor eingehend erläutert. Wer eine Grundlage aller klassischen Systemmechaniken beschreiben will, muss neben der Kraft als Schema (implizite Definition) die verschiedenen Begriffsbedeutungen mit in die Axiomatisierung eingehen lassen. Und wenn die strukturbezogene Semantik dies nicht erreicht, dann ist sie schlichtweg das falsche Instrument zur Rekonstruktion der Klassischen Mechanik.

Georg Hamel war es wohl nicht mehr die Mühe wert, auf die Kritik eingehender Stellung zu nehmen als in dem Kurzbericht Hamel [1954]:

> „Aber eine allgemeine Mechanik kann so [d.i. durch die Axiomatisierung nach McKinsey u. a. [1953]] nicht erreicht werden. Das zeigt am deutlichsten die Anm. 3 zu S. 253. Verff. können nicht einsehen, was ein Axiom des Ref. über die 'Ursachen' (heute sagt er 'Merkmale') einer Kraft bedeuten solle. *Dabei hängt gerade daran alles* [eigene Herv.], sowohl die Unterscheidung der inneren von den äußeren Kräften, wie

[206] Man vergleiche dazu die Fußnote 3 in McKinsey u. a. [1953], S. 253 f.: „One does not see how this axiom could intervene in the proofs of theorems, or in the solution of problems."

> die der Eingeprägten [sic] von den Reaktionskräften. Und noch vieles mehr."

Die Mechanik ist nichts ohne die explizierten, bedeutungsgebenden Modelle, sie ist nichts ohne umgangssprachlich erklärte 'Erfüllbarkeitsbeziehungen', die auch in der Modelltheorie im Hintergrund mitgedacht werden müssen: Das wäre aus meiner Sicht die direkte Verteidigung des Axioms **(Ie)** gewesen.

Vor Veröffentlichung von McKinsey u. a. [1953] versucht Truesdell in einem Brief die Autoren mit derselben Einschätzung aufzuklären:

> „[T]here is no meat in Newtons's second law when it is regarded as a *mathematical* axiom. Mathematically it is only a definition; its real content [...] is 'epistemological and experimental'. [... Hamel] clearly refers to the *interpretation*, (*natural* science), not the formal system." (Truesdell [1984d], S. 520)

Hamel und Truesdell, Befürworter des Kontinuumszuganges zur Mechanik, und die Vertreter der modelltheoretischen Sichtweise haben keine gemeinsame Sprachebene: *Ihre Sichtweisen sind unvereinbar*, so meine These, die ich im nachfolgenden Kapitel 4 weiter ausführe. Sie mussten sich missverstehen, weil die Modelltheorie sich an metatheoretischen Konventionen und nicht an der physikalischen Begriffsbildung orientiert. Am Kraftbegriff wird dieser methodologische Gegensatz offenkundig und bleibt unaufgelöst bestehen. Es sind unterschiedliche Konventionen, verschiedene Schwerpunkte innerhalb der axiomatischen Methode, die entweder auf methodologische oder physikalische Einheitlichkeit abzielen.[207]

Für Georg Hamel kann die axiomatische Methode nur dahingehend erfolgreich sein, dass sie die vielfältigen Bezüge zur Anschauung, zu semantischen Anleitungen und zu Modellierungsprozessen nicht ausklammert. Sie sind *nichtmathematischer* Natur und gehören inhärent zur Wissenschaft der Mechanik. Der Versuch, den Kraftbegriff auf einen explizit definierten, algebraischen Term zu reduzieren, so wie bereits Kirchhoff das Grundgesetz interpretiert hat, würde die Bedeutung des Kraftbegriffes als systematische Erklärungsinstanz für die Mechanik gänzlich eliminieren.

> „Diese Auffassung ist unhaltbar. Wäre sie richtig, dann wäre die Mechanik keine Naturwissenschaft, sondern eine Tautologie!"[208]

---

[207] Darauf habe ich bereits in 2.3.6 und 2.3.8 hingewiesen und in 2.9 zusammengefasst.

[208] Zitiert aus Hamel [1967a], S. 7. Die übertriebene Wendung der 'Tautologie' wurde von H. Poincaré provoziert, in Kommentierung der logizistischen Auffassung von Mathematik: „If [...] all the propositions it [d.i. 'the science of mathematics'] enunciates can be deduced one from another by rules of formal logic, why is not mathematics reduced to an immense tautology?" (Poincaré [1929], S. 31). Auch in Hilbert [1992], S. 4 f., wird direkt auf Poincarés Redewendung Bezug genommen und Hilberts Ablehnung gegenüber einer rein analytischen Auffassung der 'genetischen Methode' deutlich.

Das ist eine überspitzte Umschreibung für die Position, dass die Mechanik weder mathematisiert noch bis zum 'gemeinsamen Untergrund' in *formale* Konventionen zerlegt werden kann.

Diese Kritik richtet sich durchaus zurück an Hilbert, der an eine umfassende Mathematisierung der Klassischen Mechanik durch die axiomatische Methode glaubte.[209] Dieser machte selbst Andeutungen, dass der Kraftbegriff (wie bei Hertz) nicht mehr als eine zweckmäßige Definition zur Vereinfachung kinetischer Aufgaben wäre, mathematisch reduzierbar auf eine Differentialgleichung.[210] Auch folgende kritische Bemerkung weist in Richtung Hilbert zurück, wenn man versuchen wollte, metamathematische Gütekriterien als einzige Garanten für die Richtigkeit der Theorie heranzuziehen.[211]

> „[N]iemand wird behaupten wollen, dass sich sein Glaube an die Sätze der Geometrie nur auf ihre erst neuerdings und nur bedingt erwiesene Widerspuchslosigkeit stütze, oder aber darauf, dass sie bequem sind, auf die Erfahrung angewendet zu werden. Ich meine, er ist unmittelbar aus der Anschauung von der Richtigkeit ihrer Grundsätze überzeugt. Und ähnlich steht es meiner Meinung nach mit gewissen Grundbegriffen der Mechanik" (Hamel [1909b], S. 360).

Hamel setzt also hier eine *Grenze* der logischen Theoriebildung. Kein metasprachliches Kriterium kann die durch Anschauung, durch Intuition gewonnene Überzeugung in die Richtigkeit der theoriebildenden Begriffe ersetzen. Diese These wurde bereits im Zusammenhang mit der axiomatischen Methode allgemein festgestellt und wird hier anhand der Klassischen Mechanik bestätigt.[212]

Jede Rekonstruktion, in der eine metamathematisch motivierte Formalisierung vor (oder über) die anschaulich begründete Gültigkeit der Terme und Gleichungen gestellt wird, schränkt die empirischen Bedeutungen der beteiligten Begriffe ein. Die so genannte *Intension* eines Begriffs wird dann zugunsten einer mechanischen Gesetzes*form* begrenzt. Deswegen kann keine Formalisierung den Bereich der Klassischen Mechanik umfassend darstellen. Sie bleibt nur einseitig auf einen abstrakten unspezifischen Gegenstandsbereich beschränkt. Diese Grenzsetzung umfasst die zentrale Erkenntniskritik an der logischen Rekonstruktion der Klassischen Mechanik nach McKinsey und Suppes. Denn dort lässt sich gerade dieser *metamathematische Methodenmonismus* wiederfinden, mit dem ein verbesserter Stan-

[209] Man vergleiche mit Hilberts Äußerung hier, Abschnitt 2.3.4 auf Seite 43.

[210] „Wenn wir von Kräften in der Physik sprechen, so ist das nur eine besondere Ausdrucksform für die Differentialgesetze" (Hilbert [1992], S. 87). Siehe auch Hilbert [1905], S. 132, sowie Hertz [1894], S. 19.

[211] Über diese metatheoretischen Konventionen der axiomatischen Methode Hilberts wurde in den Abschnitten 2.3.4 und 2.3.6 berichtet.

[212] Siehe dazu Abschnitt 2.7.

dard der logischen Genauigkeit und Strenge in der Mechanik beansprucht wird.

3.7 Die deduktive Vernetzung in Hamels Grundlagen der Mechanik

Wenn ich nun Hamels deduktive Beiträge zu den Grundlagen der Mechanik vorstelle, so ist dies eine Auswahl von invarianten Grundaspekten. Invariant sollen die Ergebnisse heißen, weil die folgenden Theoreme sich zwar an Hamel [1909a] orientieren, aber dieselben Ergebnisse auch in Hamel [1912], Hamel [1927], Hamel [1967b] und Hamel [1967a] in anderen Gestaltungen, teilweise auch zugänglicher, wiedergegeben sind. Beachtlich ist also, dass *alle* zentralen Aspekte der Hamelschen Grundlegung bereits in »*Über die Grundlagen der Mechanik*« von 1909 vorkommen.

Ich möchte nun die Feststellung aus dem einleitenden Teil 3.1 illustrieren, dass Hamel das Hilbertsche Problem der Axiomatisierung *und* des Grenzübergangs zwischen den Systemmechaniken lösen und beantworten konnte. Hieraus wird die weitere Behauptung zur axiomatischen Methode aus Teil 2.8 am Fallbeispiel 'Klassische Mechanik' ersichtlich werden: Hamel erzielte unmittelbar die 'Tieferlegung der Fundamente', die auch Hilbert für die Grundlagen der Mechanik im Sinn hatte. Die bewährten Gesetzmäßigkeiten werden auf ihre logischen Voraussetzungen hin und auf ihre Abhängigkeiten zueinander besser verstanden. Die Klassische Mechanik wird stärker systematisiert, die internen Beziehungen enger verknüpft. So hat Hamel zwar, was die Grundlagen betrifft, nichts Neues über die mechanische Natur entdeckt, aber durchaus über die Art und Weise, *wie* wir sie beschreiben können.

3.7.1 Hamels Deduktionsthese und Ablehnung der Punktanschauung

Hamels zentraler Ansatz kann kurz und bündig zusammengefasst werden.

> **Hamels Deduktionsthese:**
> Die Punktmechanik und die Mechanik der starren Körper können mittels der *Kontinuumssicht* (d.h. unter Annahme der *Kontinuitätshypothese*) deduktiv erschlossen werden. Die Übergänge zu den einzelnen Systemmechaniken gelingen durch einschränkende Bedingungen, die an die *inneren Spannungszustände* eines Körpers geknüpft sind. Alle dazu notwendigen Annahmen lassen sich zudem in *axiomatischer* Form angeben.[213]

Hamels Motivation ist, die Restrukturierung der Klassischen Mechanik aus der Kontinuumssicht zu zeigen und der Punktmechanik, die damals schon

[213] Zur Kontinuumssicht siehe hier Abschnitt 3.6.2, Seite 144.

in den Lehrbüchern als Grundlage der gesamten Mechanik verbreitet wurde, gegenüberzustellen.[214]

> „Der am wenigsten begangene, und doch eigentlich am nächsten liegende Weg [d.i. zur deduktiven Begründung der Mechanik] ist der, die Mechanik von der Betrachtung des *Volumelementes* aus aufzubauen. Denn so allein kommt man zu einer allgemeinen Mechanik, die nachher sowohl bei Zugrundelegung der Kontinuitätshypothese, als auch bei atomistischen Vorstellungen, für starre Körper wie für feste oder flüssige in gleicher Weise anwendbar ist." (Hamel [1909a], S. 351)

Eine wichtige Invariante in Hamels Werk ist nicht bloß die Sympathie für Technische Mechanik, die vorrangig den Kontinuumsansatz gewählt hat, sondern gleichermaßen seine ablehnende Haltung gegenüber der Punktanschauung in der Mechanik. Das mag zwar als persönliche Abneigung gesehen werden. Es geht Hamel aber darum, dass der punktmechanische Zugang als mögliche Grundlage der gesamten Kinetik träger Massen, unter der man allgemein Klassische Mechanik versteht, unzureichend ist. Hierfür nennt und wiederholt er mehrfach folgende erkenntnislogische Gründe:

(I) Der *bewährte Anwendungsbereich* der Punktmechanik ist nur begrenzt auf Modelle, in denen die Idealisierung zu Punktmassen auch gültig ist. Dazu zählen zum einen die Himmelsmechanik und zum anderen die älteren Korpuskulartheorien. Beide seien aber nach Hamel kein zeitgemäßer Gegenstand für aktuelle Fragen an die Mechanik.

> „Dass unsere Lehrbücher sonst noch immer die Punktmechanik traktieren, ist ein seltsamer Anachronismus: Punktmechanik passte ausgezeichnet ins 18. Jahrhundert, aber nicht mehr in unsere Zeit, für die weder das Planetenproblem die einzige eines Mathematikers würdige Aufgabe der Mechanik ist, noch auch das Molekül die Quintessenz einer naturwissenschaftlichen Anschauung".[215]

(II) Die damals *aktuelle* Atomphysik zeige, dass sie mit der „wirklichen" phänomenologischen Betrachtung mechanischer Modelle, der „Physik der nichtstarren Medien" (Hamel [1909a], S. 351), keine Gemeinsamkeiten habe. Die atomistische Anschauung verliere damit ihre Gültigkeit im phänomenologischen Anwendungsbereich der ausgedehnten trägen Massen der Klassischen Mechanik. Wenn etwa mit der Lorentzkraft auf Elektronen das Gegenwirkungsprinzip in der Atomphysik in Frage gestellt wird, so trifft das nicht die Klassische Mechanik, sondern zeige vielmehr, dass sie nicht durch atomphysikalische Gegenstandsbereiche erweitert werden darf.

[214] So etwa bei Boltzmann [1897], Love [1897] oder Volkmann [1900].

[215] Zitiert aus Hamel [1912], S. IV; man vergleiche auch Hamel [1909a], S. 350.

> „[O]b daher die Elektroniker recht haben oder nicht, berührt die Grundlagen der Mechanik nicht im geringsten." (Hamel [1909a], S. 353)

Die Atomphysik beendet zwar die umfassende Mechanistik des 19. Jahrhunderts, die Wissenschaft von ausgedehnten Körpern, von Massenkontinua, bleibt allerdings vollkommen intakt.

Beachtlich ist, dass Hamel in diesen beiden Argumenten die aktuellen Fragen und Modelle der Klassischen Mechanik gegen die Punktanschauung einbezieht. Er sucht *erweiterte Anwendungen* der Klassischen Mechanik. Solche Erweiterungen sind in der Kontinuumsmechanik, in der Mechanik deformierbarer und plastischer Medien zu finden. Grundbegriffe und -anschauungen der Mechanik müssen sich an neuen wissenschaftlichen Zweigen orientieren. Die Vereinheitlichung zielt also auf eine *verallgemeinerte* Mechanik ab. Deshalb spricht Hamel beim Kontinuitätsprinzip auch von der „Grundanschauung der Mechanik".[216]

(III) Die Mechanik der Punktmassen ist so stark von realen Körpern abstrahiert und idealisiert, dass sie *inhaltlich mager und arm* bleibt. Sie ist nur dann geeignet, wenn der Körper durch Translationsbewegungen seines Schwerpunktes modelliert werden kann und sämtliche Momente wegrationalisiert werden.[217] Daher stellt die Punktmechanik nach Hamel etwas Künstliches und „ad hoc Zurechtgemachtes" (Hamel [1909a], S. 351) dar. Ebenso polemisch heißt es dort:

> „[W]as man praktisch unter Punktmechanik versteht, ist nichts anderes als der Schwerpunktsatz."

Besonders zeigt sich die Armut der Punktmechanik darin, dass diskrete Punktelemente allein nicht hinreichen, um Spannungszustände eines Körpers zu beschreiben.[218] Damit kann die Deduktion aus der Punktmechanik ohne Zusatzannahmen darüber, wie die Flächenelemente und Spannungszustände konstruiert werden, nicht gelingen. Und um diesen Grenzübergang geht es gerade bei der Deduktion der Systemmechaniken.

> „Es ist [...] noch nicht befriedigend gelungen, aus diesen Anschauungen den Begriff des Spannungstensors zu entwickeln." (Hamel [1927], S. 25)

[216] Siehe dazu insbesondere Hamel [1912], S. 6.

[217] Siehe dazu auch Abschnitt 3.3.4.

[218] Der Term $\vec{\sigma}_n\, dA$ kommt in der Newtonschen Grundgleichung, unten **(NGC)** genannt, nicht vor. Er wird Null gesetzt ist, weil der Spannungsbegriff ohne Flächenlemente dA sinnlos ist.

(IV) Die punktmechanische Axiomatisierung nach Boltzmann wird in Hamel [1927] kompakter gefasst und zeichnet sich durch ihre Einfachheit aus. Das ist auch der didaktische Grund für ihre Beliebtheit in einführenden Lehrbüchern, dessen ist sich Hamel durchaus bewusst.[219] Wenn aber der Anspruch besteht, den Grenzübergang zwischen den Systemmechaniken mathematisch exakt durchzuführen, dann muss das Argument der Einfachheit zugunsten der *deduktiven Zulässigkeit* weichen. Und gerade dieser Übergang ist von diskreten Punktmassen zu Kontinua nicht lückenlos möglich: Der 'pragmatische Übergang' zum Kontinuum, der hier in Abschnitt 3.5.3 erklärt wurde, sei eine „intellektuelle Unreinlichkeit".[220] Warum nicht gleich vom Spannungstensor und von Kontaktkräften an Volumina ausgehen? - Den Grenzübergang zum Kontinuum heuristisch vom diskreten Punkt auszuführen hieße,

> „[...] man benutzt die Punktanschauung, um bequem die Fundamentalsätze zu gewinnen und sie [d.i. die Punktanschauung] dann fortzuwerfen" (Hamel [1927], S. 26).

(V) Letzten Endes kann man sich stets auf das Argument des mathematischen Phänomenalisten berufen, das bereits in den Abschnitten 3.3.5 und 3.5.2 vorgestellt wurde. Aus einem Kollektiv an Punkten kann logisch niemals ein Kontinuum an infinitesimalen Flächen- und Volumenlementen entstehen. Wenn die Klassische Mechanik aber die Mechanik ausgedehnter Körper ist,[221] dann muss jede Rekonstruktion ausgedehnte Elemente als Grundbegriffe einführen.

> „Therefore, if we are to represent finite physical bodies by a model consisting in an aggregate of mass-points having only finitely many different masses, only a finite number of mass-points may be used, and thus necessarily *almost all of space is void of matter*." (Truesdell und Toupin [1960], S. 465)

Das sind die hauptsächlichen Argumente, die nicht nur von Hamel, sondern von allen Befürwortern der Kontinuumsanschauung in der Mechanik immer wieder hervorgebracht werden.[222] Was Georg Hamels Überzeugung in die Kontinuumsmechanik betrifft, so fällt sie letzten Endes mit dem Erfolg seiner Deduktionsthese zusammen.

---

[219] Man vergleiche Hamel [1912], S. IV.

[220] So der Wortlaut in Hamel [1912], S. IV.; siehe dazu auch Hamel [1909a], S. 351.

[221] So etwa Truesdell und Toupin [1960], S. 228, im Andenken an Hamels Appell für die Kontinuumssicht: „Classical mechanics is the mechanics of extended bodies."

[222] Ein lebhafter Appell für die Kontinuumssicht und gegen die Punktmechanik sind insbesondere die Einleitungen zu Truesdell und Toupin [1960], zu Truesdell [1952] und zu Noll [1959].

Tatsächlich kann mit der Deduktion der Punktmechanik aus dem Kontinuumsansatz *erstmals ein logisches Argument* für die Überlegenheit der Kontinuumssicht angegeben werden.

(VI) Die Deduktionsthese ist gültig und beweisbar, das heißt: Die Punktmechanik ist eine *logische Folgerung* aus dem Kontinuumszugang.

Ich möchte im Folgenden Hamels logisch-deduktive Resultate zur Klassischen Mechanik vorstellen und daher die punktmechanische Sichtweise vorerst verlassen, um sie am Ende (Abschnitt 3.8.3 und folgende) mit diesem logischen Argument neu zu bewerten. Es wird sich zeigen, dass sie dennoch eine *gleichberechtigte, unabhängige* Sichtweise bleibt, obwohl konzeptuell zu schwach, in ihrer logischen Reichweite zu begrenzt, um erweiterte Systeme (starre Körper, ideale Flüssigkeiten, deformierbare Medien) deduktiv zu begründen.

3.7.2 Deduktionen aus dem Grundgesetz

Die entscheidende Neufassung der Klassischen Mechanik besteht darin, das Newtonsche Grundgesetzes **(NG)** in der Kontinuumsvariante auszuformulieren und die Folgerungen für die Systemmechaniken festzustellen. Wie schon in Abschnitt 3.6.2 (zu den mathematischen Hintergrundtheorien) erklärt, berücksichtigt die Kontinuumsfassung des Newtonschen Grundgesetzes die Existenz von infinitesimalen Massenelementen, von Volumenkräften $\vec{F}_{ext}$ und Oberflächenkräften $\vec{\sigma}_n\, dA$. Diese Entscheidung wird bei Hamel in der Kontinuitätshypothese zusammengefasst und geht der Systemmechanik in der Begründungsreihenfolge voraus.[223] Die Kontinuumshypothese äußert sich wiederum im ausgestaltetem Grundgesetz der Form

$$\mu\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} + \lim_{dV \to 0} \int \vec{\sigma}_n\, dA \quad (\mathbf{NGC}).$$

Zuvor ist, wie im vorigen Teil 3.6 erläutert wurde, die Axiomgruppe zum Newtonschen Gesetz dahingehend offen geblieben, als die Formulierungen sowohl die Kontinuums- als auch die Partikelsicht berücksichtigen. Die folgenden Gesetze und Prinzipien orientieren sich nun aber allein an der Kontinuumsfassung aus den Abschnitten 3.3.5 und 3.4.1.[224]

Theorem 1 (Hamel, Voigt):
Aus **(NGC)** folgt
(i) (**CM1**), das **1. Grundgesetz der Kontinuumsmechanik**,

$$\vec{F}_{Res} = \sum \vec{F}_{ext} + \nabla \cdot\, \sigma;$$

[223] Man siehe dazu Abschnitt 3.6.2 und in 3.6.3 Beispiel (4b).

[224] Im Original siehe insbesondere Hamel [1909a], §2: 'Folgerungen aus Axiomgruppe I bis VI'. Ich bin hierbei insbesondere von der Bezeichnung **(CM1)** zu **(NGC)** übergegangen, um den impliziten Bezug zum Newtonschen Grundgesetz deutlicher zu machen.

(ii) (**GC**), das **Gegenwirkungsprinzip für Kontaktkräfte** ('Prinzip von Druck und Gegendruck'),

$$\vec{\sigma}_{\vec{n}} = -\vec{\sigma}_{-\vec{n}};$$

(iii) und das **1. Gesetz von Cauchy**,

$$\vec{\sigma}_n = \sigma \cdot \vec{n}.$$

In Worten besagt dieses Theorem, dass die logische Existenz von Spannungen und der infinitesimale Grenzübergang der Volumina im Newtonschen Kraftgesetz *implizit* das erste Grundgesetz, **(GC)** und Cauchys erstes Gesetz enthalten. Die Gesetze stehen also untereinander in einer logischen Abhängigkeitsbeziehung. Insbesondere sieht Hamel in der Deduktion von **(GC)** bestätigt, dass die Gleichheit von Druck und Gegendruck „zu den allerprimitivsten Erfahrungen" (Hamel [1909a], S. 353) gehört. Bereits über den sinnlichen Druck am eigenen Muskel ist der Inhalt des Prinzips erfahrbar und ist unmittelbar erfahrungsbezogenes Definiens der Kraft.[225] Das Theorem erfüllt und bestätigt eine einfache Erfahrung über die mechanische Natur.

Formulierung des Schwerpunktsatzes für Kontinua

Der Divergenzterm $\nabla \cdot \sigma$ in **(CM1)** ist Ausdruck für die kontinuierlich verteilte Stärke der Spannungen, die den Körper durchdringt. Hamel betont mehrfach, dass bei Betrachtung der Schwerpunktbeschleunigung a^* die Grundgleichung **(NGC)** *äquivalent* zum Schwerpunktsatz für Kontinua ist:

$$\mu \cdot a^* = \sum \vec{F}_{ext} + \oint \vec{\sigma}_n \, dA, \;\; \text{mit } a^* := \frac{1}{\mu} \int dm \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Hier treten nach Ausführung des Grenzübergangs in **(NGC)** nur noch *äußere* Spannungen an der Oberfläche auf. Die besondere Eleganz des Schwerpunktsatzes besteht darin, dass es zur Bestimmung von Massenbeschleunigungen, die angenähert durch den Schwerpunkt gehen, keiner *inneren* Spannungen bedarf.[226]

> „Darin liegt aber nicht die Hauptaussage des Schwerpunktsatzes, dass man nur äußere Kräfte zu betrachten braucht, um [$\mu \cdot a^*$] bestimmen zu können, sondern darin, dass man dazu der inneren Spannungen nicht bedarf, dass diese vielmehr in dem Ausdruck des Schwerpunktsatzes nicht vorkommen." (Hamel [1909a], S. 362)

[225] So etwa in Hamel [1912], Nr. 39: 'Über den Druck'.

[226] Allerdings gilt dies für die externen Kräfte $\vec{F}_{ext}$ streng genommen nur, wenn beim Grenzübergang das volle Gegenwirkungsprinzip für externe Kräfte zusätzlich angenommen wird. Denn bei der Zerlegung in infinitesimale Elemente des Körpers werden an den Schnittbereichen die inneren zu äußeren Kräften, die sich gegenseitig aufheben müssen, damit der Grenzübergang gelingen kann. Auf diese Feinheit wird in Hamel [1909a], S. 361 f., hingewiesen.

Ich werde gleich zeigen, dass die Redundanz von inneren Spannungen auch für den Momentensatz das charakteristisch Einfache der Punktmassen und der starren Körper darstellt. Den Begriff der *inneren Spannung* zur Beschreibung idealisierter mechanischer Systeme zu verwenden ist die *neuartige Vereinheitlichung*, die zuerst in Hamels Axiomatik vorkommt.

3.7.3 Das Boltzmann-Axiom: Deduktion des Momentensatzes

> „Abgesehen von einer Andeutung Boltzmanns dürfte unser Weg neu sein." (Hamel [1909a], S. 352)

Ludwig Boltzmann hat darauf hingewiesen, dass die phänomenologische Zerlegung eines Körpers in kleinere (infinitesimale) Volumenelemente alle statischen Gleichgewichtsbedingungen zu berücksichtigen hat.[227] Diese statischen Gleichgewichte müssen folglich nicht bloß die wirkenden inneren Kräfte betreffen, sondern davon unabhängig auch die verschiedenen inneren Momente an den Trennflächen der infinitesimalen Volumina. Alle inneren Momente, alle inneren Scherspannungen, müssen sich in der Summe im Gleichgewicht halten.

Für Georg Hamel war der Vortrag Boltzmann [1905] eine Inspiration zu seinem axiomatischen Vorhaben. Er bezeichnet diese Grenzfallbetrachtung mit dem Namen 'Boltzmann-Axiom', da dort erstmals der *unabhängige und axiomatische Charakter* dieser Überlegung aufgezeigt werde, obwohl sie, wie Hamel wusste, auf Cauchy zurückgeht.[228] Es darf allerdings nicht unerwähnt bleiben, dass diese Namensgebung Hamels nicht allgemein anerkannt ist, sondern sich nur noch vereinzelt in der deutschsprachigen Literatur zur Technischen Mechanik finden lässt.[229]

Das Boltzmann-Axiom fordert nun das statische Gleichgewicht aller inneren Momente im Grenzfall $\Delta V \to 0$.

(Bolzmann-Axiom):

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int \sum_i \vec{r}_i \times d\vec{F}_i \;=\; 0 \quad (\mathbf{BA}).$$

[227] Diese Überlegungen findet man in Boltzmann [1905], S. 296 bis 298.

[228] Zu dieser Namensgebung Hamels siehe auch Hamel [1912], S. IV, und Hamel [1927], S. 9. Der axiomatische Charakter dieser Überlegung wird bei Boltzmann dadurch kenntlich, dass er nicht weiter aus der Erfahrung beweisbar ist und bekannte Sätze aus der Elastizitätstheorie folgerbar sind. Diese Grundsätze seien „keineswegs a priori evident" (Boltzmann [1905], S. 298) und „finden ihre Rechtfertigung nur in der nachherigen Übereinstimmung der aus ihnen entwickelten Sätze der Erfahrung" (ebd., S. 297 f.).

[229] Einzige mir bekannte Ausnahmen sind Hellinger [1913], S. 619; Szabó [1987], S. 28; und das Lehrbuch zur Kontinuumsmechanik Betten [1993], S. 63. Truesdells Ablehnung der Namensgebung dürfte entscheidenden Einfluss darauf gehabt haben, dass der Satz in der englischsprachigen Lehrbuchliteratur nur als 'Cauchys Theorem' vorkommt. Er hat die ursprüngliche Idee historisch weit früher bei Cauchy, Fresnel und Poisson zugeordnet und ist als einer der wenigen Fachkundigen auch mit Hamels Werk vertraut gewesen. Man siehe dazu insbesondere Truesdell und Toupin [1960], S. 546.

> Direkt bezogen auf die inneren Spannungszustände kann es durch Schubspannungen an gedachten Oberflächen dA_i des Körpers formuliert werden:
>
> $$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\sum_i \vec{r}_i \times \sigma \right) dA_i \, = \, 0.$$
>
> Damit gleichbedeutend ist die Aussage, dass die inneren Spannungszustände kein 'Wirbelfeld' erzeugen:
>
> $$\vec{\nabla} \times \sigma = 0.$$

Die Unterscheidung äußere/innere Scherspannungen bzw. Momente bezieht sich allerdings auf das jeweils betrachtete Volumenelement ΔV im Grenzprozess von (**BA**) und ist deshalb nicht eindeutig: die dA_i sind infinitesimal kleine Oberflächen, die im Grenzübergang beliebig verkleinert werden. In Hamel [1909a], S. 358, wird diese Uneindeutigkeit axiomatisch damit begründet, dass alle äußeren Spannungen an einer gedachten Oberfläche stets auch als innere Spannungen „eines erweiterten Systems angesehen werden [können]". Dies zeigt zumindest die Idealität und Systemabhängigkeit des Begriffs der 'inneren Spannung'. Gleichermaßen schwierig ist, dass hier ein Prinzip als ein infinitesimaler Grenzprozess formuliert wird: Es besteht aus einer analytischen Konstruktion, in der die physikalische Bedeutung in den Hintergrund gerät.

Trotz der theoretischen Schwierigkeit des Axioms findet es seine volle Berechtigung in Hamels Versuch, den *Momentensatz* (**CM2**), das 2. Grundgesetz der Mechanik,

$$\vec{M}_{Res} = \oint (\vec{r} \times \sigma) \; dA + \int (\vec{r} \times \vec{F}_{ext}) \, dV$$

algebraisch zu rekonstruieren.[230] Algebraisch soll heißen, dass aus dem Grundgesetz (**NGC**), das die Kraftwirkung $\vec{F}_{Res} = \mu \cdot \vec{a}$ für Kontinua beschreibt, nun das Vektorprodukt der resultierenden Kraft gebildet wird, das *resultierende Moment* am Körper

$$\vec{M}_{Res} = \vec{r} \times \vec{F}_{Res} = \vec{r} \times \mu\vec{a}.$$

Diese algebraische Konstruktion zeigt, ob und unter welchen Bedingungen das Momentengesetz aus (**NGC**) mathematisch *folgt*, eine Frage, die in den Grundlagen der Mechanik damals unklar war.[231]

Hintergrund dieser Deduktion ist Hamels Überzeugung, dass (**NGC**) *und* der Momentensatz (**CM2**) die Grundlage der *gesamten* Klassischen Mechanik darstellen. Von dieser Überzeugung will Hamel keineswegs abweichen, sondern sie festigen und ihre Voraussetzungen prüfen.

[230] Zu dieser Form des Momentensatzes siehe Abschnitt 3.3.5.

[231] In Abschnitt 3.3.5 wurde bereits darauf hingewiesen.

> „Mit Aufstellung des Schwerpunkt- und [Momentensatzes] sind die *allgemeinen* Grundlagen der Mechanik erledigt." (Hamel [1909a], S. 368)

Wäre der Momentensatz nun eine logische Folgerung aus (**NGC**), so würde diese algebraische Deduktion ohne Zusatzbedingungen gelingen. Hamel kann nun zeigen, dass dies nicht der Fall ist, sondern zur Aufstellung des allgemeinen Momentensatzes zusätzlich (**BA**) notwendig ist.

> **Theorem 2 (Hamel)**:[232]
> **(i)** Aus (**NGC**) *und* (**BA**) folgt (**CM2**).
> **(ii)** (**BA**) ist äquivalent mit **Cauchys 2. Theorem**, der *Symmetrie des Spannungstensors*, für alle inneren Spannungszustände:
>
> $$\tau_{ij} = \tau_{ji}.$$

Deduktion **(ii)** ist für Hamel später der Anlass gewesen, die Symmetrie des Spannungstensors als Boltzmann-Axiom zu bezeichnen.[233] Der Momentensatz ist somit eine vom Grundgesetz **(NGC)** *unabhängige Gesetzesform* der Klassischen Mechanik.

> „Da [**BA**] eine Aussage ist, die offenbar von den Behauptungen [aus dem Grundgesetz ...] ganz unabhängig ist, [...] so kann der eigentliche Momentensatz nicht aus diesem gewonnen werden. Um also den Momentensatz behaupten zu können, bedarf es eines besonderen *Axioms: Die Spannungsdyade* [d.i. der Spannungstensor] *ist symmetrisch.*" (Hamel [1912], S. 325)

Diese Eigenständigkeit des Momentensatzes gehört mittlerweile zum gewöhnlichen Lehrbuchstandard in der modernen Kontinuumsmechanik und der Technischen Mechanik.[234]

Wird damals wie heute in physikalischen Lehrbüchern Gegenteiliges über den Drehimpuls-, Flächen- oder Momentensatz behauptet, so liegt speziell eine *punktmechanische* Anschauung zugrunde, in der keine Spannungszustände am Körper betrachtet werden. Dann gelingt die Deduktion des Momentensatzes **(PM2)** aus dem Grundgesetz **(PM1)** ohne Weiteres, weil die Symmetrie des Spannungstensors durch das Gegenwirkungsprinzip *ersetzt* ist, nach welchem sich alle inneren Kräftepaare gegenseitig ausgleichen.[235] Diese Deduktion ist aus Sicht der Kontinuitätshypothese nicht gültig. Hamels Theorem ist logischer Garant für die Unabhängigkeit des

[232] Man vergleiche mit Hamel [1909a], S. 365.

[233] Siehe etwa Hamel [1912], §39: 'Das zweite (Boltzmannsche) Grundgesetz'. Die Aussage ist unmittelbare Konsequenz der Wirbelfreiheit des Spannungsfeldes (siehe die dritte Fassung von **(BA)**).

[234] So findet man etwa in Fung und Tong [2001], S. 136, dasselbe Ergebnis: „Thus, if the stress tensor is symmetric, the law of balance of moment of momentum is identically satisfied."

[235] Siehe hier S. 114 f. von Abschnitt 3.4.1.

Momentensatzes und des 2. Gesetzes Cauchys in der Klassischen Mechanik.

Die Kontinuumssichtweise liefert also *eine andere logische Anordnung* der Grundgesetze als es in der Punktanschauung der Fall ist: Während dort das Gegenwirkungsprinzip **(GC)** aus dem Newtonschen Grundgesetz **(NGC)** deduzierbar ist, der Momentensatz **(CM2)** dagegen nicht, kann hier der Momentensatz **(PM2)** aus dem Grundgesetz **(PM1)**, dagegen *nicht* das Gegenwirkungsprinzip deduziert werden. Aus dieser logischen Asymmetrie kann man sogar zu der Behauptung tendieren, dass *je nach* Grundanschauung andere *Strukturen* der Klassischen Mechanik vorliegen. Ich möchte allerdings weiterhin von verschiedenen Zugängen und Darstellungen *einer* Klassischen Mechanik sprechen. Ich werde am Ende des Kapitels auf diese markante Asymmetrie zurückkommen.

3.7.4 Die Energieerhaltung als drittes Fundamentalgesetz

> „[E]s giebt meines Wissens kein Lehrbuch der Mechanik, welches sich von vornherein auf den Standpunkt der Energielehre stellte, und den Begriff der Energie vor dem Begriff der Kraft einführte.[...] Aber die Möglichkeit eines solchen Planes hat schon den Begründern der Energielehre eingeleuchtet" (Hertz [1894], S. 17).

Es mag überraschen, dass die grundlegende Rolle der Energieerhaltung in Hamels Rekonstruktion der Klassischen Mechanik immer nahezu beiläufig behauptet wird und hier, bei den allgemeinsten Sätzen der Mechanik, keine Erwähnung findet. Ist der Energiesatz neben Schwerpunkt- und Momentensatz nicht das dritte irreduzible Grundprinzip der Mechanik?[236]

Tatsächlich scheint sich Hamel in dieser Frage nicht festzulegen, das Problem scheint nicht eindeutig lösbar. In seinem früheren Lehrbuch Hamel [1912] wird den Begriffen 'Energie' $\frac{1}{2}\int dm\vec{v}^{\,2}$ und 'Arbeit' $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ fundamentale Bedeutung zugeschrieben, die allerdings von den Begriffen 'Kraft' und 'Moment' abhängig erscheinen. In der Punktmechanik zumindest

> „können wir mit ihm [d.i. dem Energieerhaltungssatz] kein Problem lösen, das wir nicht auch mit der Newtonschen Grundgleichung hätten erledigen können." (ebd., S. 135).

Mit dieser Bemerkung bezieht sich Hamel auf die allgemein bekannte Deduktion der Energieerhaltung für punktmechanische dynamische Systeme,

[236] Die fundamentale und irreduzible Erhaltungsgröße der Energie ist mit Blick auf die Kontinuumsmechanik vor allem durch C. Truesdell hervorgehoben worden (etwa in Truesdell [1968], S. 241, und Truesdell [1991], S. 82).

wenn keine Reibungseffekte berücksichtigt werden.[237] 'Arbeit' bzw. 'Energie' scheinen also aus dem Kraftbegriff explizit definierbare Größen zu sein, hätten also keinen axiomatischen Charakter.

Die fundamentale Rolle der Energieerhaltung wird bei Hamel hingegen an drei Merkmalen deutlich:

1. Der Energiebegriff hat einen unbegrenzten systemischen Anwendungsbereich, er lässt sich „auf alle Naturerscheinungen ausdehnen" (Hamel [1912], S. 135). Insbesondere Systemübergange von mechanischen zu elektrischen oder thermodynamischen Eigenschaften werden somit durch die „formale Kraft" (ebd., S. 135) der Energieerhaltung vereinfacht. Zum innermechanischen Standardbeispiel für eine systematische Vereinfachung zählt schon bei Hamel die energetische Behandlung der *Kreiseltheorie* starrer Körper.[238]

2. Die energetischen Minimalprinzipien (Hamilton, Maupertuis u.a.) und das Lagrangeprinzip der virtuellen Arbeit führen implizit den Energiebegriff ein.[239] Durch sie können die Grundgleichungen der Mechanik deduktiv *ersetzt* werden. So wird insbesondere in Hamel [1967a] die gesamte Klassische Mechanik kontinuierlicher Systeme analytisch aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit aufgebaut.[240] Anschauliche Grundkonzeption ist dabei allein die Kinematik des starren Körper nach der Eulerschen Bewegungsgleichung **(EGF)**, hier in Abschnitt 3.3.6 vorgestellt.

   > **Theorem 3 (Hamel)**:
   > Ausgehend von der kinematischen Konstitution des *starren Körpers* können mittels des *Prinzips der virtuellen Arbeiten* und durch Befreiung der starren Randbedingungen[241] alle Grundgesetze der Klassischen Mechanik (also die Sätze (**NGC**), **(GC)**, (**BA**), (**CM2**) und das Prinzip der *Energieerhaltung*) deduziert werden.

   In diesem Sinn zeigt Hamel, wie durch die analytische Methode nach Lagrange ein alternativer und erkenntnislogisch *unabhängiger Zugang* gegenüber den synthetischen Aufbauten entstanden ist und die „ganze Mechanik als eine einheitliche Wissenschaft erscheinen" (Hamel

[237] Eine exemplarische Deduktion findet sich etwa in Hamel [1967a], §I.8: 'Die Punktmechanik'. Reibungseffekte auszuschließen heißt, dass die Kräfte nicht explizit von der Partikelgeschwindigkeit abhängen (man vergleiche dazu mit Axiom (**G3**) in Abschnitt 3.4.1). Ohne diese Forderung kann der Energieerhaltungssatz nicht deduziert werden.

[238] Siehe dazu Hamel [1912], §48: 'Massenkinematik des starren Körpers'.

[239] Siehe insbes. Hamel [1912], §56: 'Die Lagrangeschen Gleichungen'.

[240] Man vergleiche mit Hamel [1967a], §III.6: 'Nochmals der starre Körper'. Zum Prinzip der virtuellen Arbeiten siehe hier Abschnitt 3.4.3.

[241] Das ist das 'Befreiungsprinzip' nach Hamel, wie hier in Abschnitt 3.4.3 vorgestellt.

[1967a], S. V) kann.[242]

3. Die Systemmechaniken lassen sich durch das Verrichten von Arbeit der *inneren Spannungen* voneinander unterscheiden und klassifizieren. Darauf werde ich gesondert im folgenden Abschnitt eingehen.

Kurzum, der energetische Aufbau der Klassischen Mechanik und das Energieprinzip bleiben fundamental neben der dynamischen Beschreibung durch Kraftgesetze.[243] Kann Hamel zwar logisch bestätigen, dass die Energieprinzipien hinreichen, die gesamten Grundlagen der Mechanik darzustellen, bleibt die Unabhängigkeit gegenüber den synthetischen Aufbauten dennoch eine offene Frage. Wenn jedenfalls Heinrich Hertz schon früher die Idee zu einer *rein* energetischen Mechanik skizziert, wie im Anfangszitat angedeutet, so ist Hamels Antwort entschieden ablehnend, insofern die implizite Definition des Kraftbegriffes (das Newtonsche Grundgesetz) dem Energiebegriff gegenüber vorrangig bleibt.

> „'Definieren' kann man *nach* Begründung der Mechanik [eigene Herv.] Begriffe wie Arbeit, lebendige Kraft." (Hamel [1909b], S. 358)

3.7.5 Der deduktive Übergang zu den anderen Systemmechaniken

Die Spannungszustände eines Körpers zu charakterisieren, um Materialien in einem gemeinsamen mechanischen Schema zu vereinheitlichen, die eigentlich ganz unterschiedlichen Phänomenbereichen und -gesetzen unterliegen, gehört zu der ursprünglichen Motivation der Elastizitätstheorie.[244] Auch heute sind Spannungen neben Dehnungszuständen an Körperelementen der Ausgangspunkt zur mathematischen Beschreibung von *idealisierten Materialien*.[245] Georg Hamels kontinuumsmechanischer Zugang zu den Grundbegriffen der Klassischen Mechanik fügt sich lückenlos in diese Tradition ein. Er schlägt das allgemeine Konzept der *inneren Spannung* aus der Kontinuumssichtweise vor, um die idealisierten Massensysteme der Klassischen Mechanik zu beschreiben.

> „Die einzelnen Systeme werden jetzt des Weiteren durch die Eigenschaften ihrer Spannungsdyade [d.i. ihres Spannungstensors] charakterisiert, und damit setzt die von der sonstigen Physik prinzipiell nicht mehr zu trennende *spezielle Mechanik* ein." (Hamel [1909a], S. 368)

[242] Man siehe dazu hier die Abschnitte 3.4.4 und 3.6.2.

[243] So auch in Hamel [1927], S. 9, genannt.

[244] Siehe dazu insbesondere die originale Idee in Cauchy [1823].

[245] Man vergleiche insbesondere Truesdell und Toupin [1960], S. 233. Ich gehe in Abschnitt 5.1.1 auf weiterführende materialspezifische Konzeptionen in der Kontinuumsmechanik kurz ein.

Dieses Konzept der inneren Spannung stellt ein reduzierendes, ein vereinheitlichendes Element im axiomatischen Aufbau der Klassischen Mechanik dar. Es klärt folgende Fragen:

1. Welche einschränkenden Randbedingungen und Zusatzhypothesen spezialisieren zu den klassischen Systemmechaniken der starren Körper und der Punktmechanik?

2. Welche idealisierten Massensysteme können nicht mehr aus den Grundprinzipien der Klassischen Mechanik deduziert werden?

Beide Fragen können einfach beantwortet werden. Körper, in denen die inneren Spannungszustände einen Anteil an *mechanischer Arbeit*

$$d\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

verrichten, gelten als *elastische* bzw. plastische Materialien. Starre Verbindungen zwischen Punktelementen in einem Körper übertragen dagegen diese Energie vollständig, ohne innere Arbeit zu leisten oder Wärme zu erzeugen bzw. aufzunehmen.[246] Auch die Spannungszustände idealer inkompressibler Flüssigkeiten leisten keine innere Arbeit: Scherspannungen treten nicht auf (Inkompressibilität), und der normalgerichtete Druck ist an allen Stellen im Medium gleich. Bei Punktmassen kann gar nicht von inneren Spannungszuständen gesprochen werden, da gar keine Flächenkräfte vorkommen.

In dieser Weise kann die Kontinuumsmechanik durch die Konzeption der Arbeit innerer Spannungen die Klassischen Systemmechaniken *implizit* definieren: *Die Klassische Mechanik beschreibt Körper, die keine innere Arbeit leisten*.[247] Das folgende Theorem orientiert sich in etwas abgewandelter Form an Hamel [1909a], S. 369. Tatsächlich setzen spätere Beweisgänge[248] andere Voraussetzungen und entsprechen somit nicht dieser ursprünglichen Fassung.

Theorem 4 (Hamel):
Die Axiome der Klassischen Mechanik mit Kontinuitätshypothese seien gültig. Zusätzlich gelten folgende einschränkende Bedingungen:

(i) Die an einem beliebigen Massenelement dm angreifenden *inneren Spannungen* verrichten keine Arbeit am Körper. Das

[246] Zu dieser thermodynamischen Beschreibung innerer Spannungsarbeit siehe Hamel [1912], S. 572.

[247] Siehe vor allem die Zusammenfassung in Hamel [1927], §13: 'Unterscheidung der Systeme nach dem Charakter der Spannungsdyade'; sowie Hamel [1909a], S. 368 f.

[248] Etwa in Hamel [1912], Nr. 286: 'Die Arbeit der inneren Kräfte', oder in Hamel [1967a], Nr. 82: 'Der Spannungstensor'.

heißt, die Summe aller virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{r}$ durch innere Spannungsgrößen ist Null:

$$\int_V (\nabla \cdot \sigma\,) \cdot \delta\vec{r}\, dV = 0.^{249}$$

(ii) Die virtuellen Verschiebungen $\delta\vec{r}$ sind von möglichen Systemreaktionen (Reaktionskräften) unabhängig.

(iii) Die Verschiebungen $\delta\vec{r}$ sind invariant gegenüber linearen Transformationen und Drehungen relativ zum Bezugssystem.

Dann *folgen* die klassischen Systemmechaniken: die *Mechanik starrer Körper* und die *Punktmechanik* (neben weiteren klassischen Systemen wie die Mechanik inkompressibler Flüssigkeiten).

Alle Beweisgänge führt Hamel nach Art einer 'Logica docens', einer informellen umgangssprachlichen Logik, ohne dass er sich in formal-algebraische Details verliert.[250] Physikalisch wird mit diesem Theorem zum einen eine 'Tieferlegung' im Sinne der axiomatischen Methode erreicht: Ausgehend von der Kontinuumshypothese wird 'das Klassische' der Mechanik durch die mathematischen Zusatzbedingungen **(i)** bis **(iii)** begrifflich klar umgrenzt. Die inneren Bedingungen zur Klassischen Mechanik werden offensichtlicher.

Andererseits zeigt sich hier ein *Lösungsweg* zu Hilberts Problem des *Grenzübergangs* zwischen den klassischen Systemmechaniken. Dass die Punktmechanik allein schon als 'Nulllösung' $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$ folgt, zeigt erneut ihre Eigenart gegenüber den anderen Systemmechaniken.[251] Es wird zudem verständlich, warum die Erstarrung der inneren Verbindungen zwischen den Körperelementen die Mechanik starrer Körper ergibt: Es folgt nicht nur das Nullwerden sämtlicher Dehnungszustände,[252] sondern

[249] Zur Vereinfachung sei hier auf den Anteil $\int \vec{\sigma}_n \cdot \delta\vec{r}\, dF$ durch die *äußeren* Spannungszustände verzichtet, wie es in der Darstellung auf Seite 370 von Hamel [1909a] auch etwas beiläufig gehandhabt wird. Eine genauere Begründung besteht in der Zusatzbedingung, dass auch an der Oberfläche keinerlei Verrückungen zugelassen werden: $(\delta\vec{r}\,)_0 = 0$. So etwa in Hamel [1967a], Nr. 82: 'Der Spannungstensor'.

[250] Zu diesem informellen Standard der Logizität vergleiche mit Abschnitt 2.5.

[251] Dieses formale Argument gegen die Punktmechanik entspricht (III) aus Abschnitt 3.7.1.

[252] Im Detail heißt das, die Variation der *Elastizitätskoeffizienten* e_{ij} ist immer Null:

$$\delta\, e_{ij} = \delta \left(\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \right) = 0,$$

das heißt

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = 0$$

für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Man vergleiche dazu auch Fung und Tong [2001], S. 102.

darüber hinaus erzeugen die einschränkenden Bedingungen **(i)** bis **(iii)** die Eulersche Bewegungsgleichung **(EGF)** aus Abschnitt 3.3.6, die implizit die kinematische Konstitution des starren Körpers definieren.

Bemerkenswert ist auch, dass nun erklärt werden kann, warum sich alle formalen Transformationseigenschaften des Spannungstensors durch die Erstarrungsbedingung (**Theorem 4**) auf den *Trägheitstensor* (siehe dazu auch Abschnitt 3.3.6) übertragen. Die Massenträgheit ist eine Reaktion auf die Erstarrung der inneren Verbindungen zwischen den Massenelementen im Körper. Diese Gemeinsamkeit zwischen Spannungen und Trägheitsmomenten bleibt allerdings ein Merkmal *aller* symmetrischen Tensoren zweiter Stufe, so dass Hamel vorsichtig nur von einer formalen 'Analogie' und nicht von einer gerichteten Deduktion spricht.[253]

Bei aller Schlüssigkeit der Deduktion ist auffällig, dass die Arbeitsfreiheit der inneren Spannungen in den Begriffen der virtuellen Verrückungen beschrieben ist. Damit drängt sich umso mehr die Frage auf, ob es sich bei dem Grenzübergang vom Kontinuum zum starren Körper um eine echte *Top-Down-Deduktion* handelt. Streng genommen wird hier die analytische Methode der virtuellen Arbeit auf die synthetisch ermittelten Systemmechaniken angewendet. Eine Deduktion allein aus der Kontinuitätshypothese müsste aber eigentlich *unabhängig* von der analytischen Methode erfolgen. Offenbar bestätigt sich in Hamels Theorem erneut die *übergeordnete* Rolle der analytischen Methode der virtuellen Arbeit, indem sie auch zwischen den 'synthetisch' gewonnenen Zugängen logisch vermitteln kann, ohne dabei frei von deren konzeptionellen Grundlagen zu sein.

[253] Siehe Hamel [1912], S. 384.

3.8 Metamathematische Resultate

Georg Hamel steht ganz in der Hilbertschen Tradition der axiomatischen Methode. Sein Anspruch geht dabei über die Explikation der notwendigen Grundbegriffe und -gesetze zur Klassischen Mechanik hinaus, indem er die Axiomatisierung durch metamathematische Untersuchungen nachträglich überprüft. Die behauptete Notwendigkeit der Axiome soll erneut nachgewiesen werden. Die hauptsächlichen Ergebnisse dazu findet man in seinen Grundlagenschriften Hamel [1909a] und Hamel [1927], während sie in seinen Lehrbüchern nur beiläufig erwähnt werden. Hier steht vielmehr die Entwicklung der mechanischen Gesetze im Vordergrund und nicht die Frage ihrer logischen Berechtigung.

Auffällig ist allerdings, dass dem metamathematischen Aspekt der Hilbertschen Methode eine systematische Grenze auf dem Gebiet der Mechanik gesetzt wird. Ich habe sie bereits im Zusammenhang mit der axiomatischen Methode und mit dem Kraftbegriff vorgestellt und plausible Gründe angeben können.[254] Dennoch will ich sie hier erneut zusammenfassen.

1. Metamathematik behandelt die Axiome abseits ihrer physikalischen Bedeutung. Allein die formalen oder funktionalen Gesetzesschemen der Mechanik sind der Metamathematik zugänglich. Dazu passt Hamels Erklärung, dass alle Aussagen weggelassen werden, die sich ausschließlich durch ihre empirischen Modelle begründen lassen.

   > „Die logische Unabhängigkeit der Axiome ist dadurch zu erweisen, dass man *logisch* widerspruchsfreie Mechaniken angibt, die einzelne Axiome erfüllen, wobei *die Übereinstimmung mit der Erfahrung außer Acht bleibt* [eigene Herv.]" (Hamel [1927], S. 35).

   Hamel hat hierbei in erster Linie Reibungseffekte (dissipative Kräfte) im Sinn, die bei allen mechanischen Vorgängen eine systematisch ungreifbare und isolierte Rolle spielen.

2. Damit ist klar, dass metamathematische Kriterien (Unabhängigkeit, Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit usw.) keine *physikalische* Relevanz haben. So wäre es etwa sinnlos zu fragen, ob die Grundgesetze der Mechanik über die jeweils akzeptierten Modellierungsannahmen hinaus noch widerspruchsfrei sind. Dass ein Modell eines mechanischen Prozesses in bestimmter Hinsicht widersprüchlich zu weiteren Grundannahmen ist, dürfte eher der Normalfall sein. Die Vielzahl möglicher Modellierungen in der Physik und Chemie ist niemals abgeschlossen und reicht immer in Bereiche außerhalb der Mechanik. Empirische Abgeschlossenheit kann keine wissenschaftliche Disziplin erreichen.

[254] Siehe hier die Abschnitte 2.3.5 bis 2.3.7 und 3.6.4.

> „Da in Form von Ursachen die ganze Physik in die Mechanik hineinspiegelt, kann Widerspruchslosigkeit nur teilweise nachgewiesen werden, soweit sich nämlich über die durch Ursachen bedingten Kräfte Bestimmteres angeben lässt".[255]

3. Und so wird letzten Endes auch deutlich, dass die Metamathematik *keinen Wahrheitsgaranten* auf empirischem Gebiet der Mechanik erheben kann. Ein solcher Anspruch bleibt auch für die Grundlagen der Mechanik mehr als zweifelhaft, wo die Gültigkeit der Prinzipien nach außen (empirisch) und innen (mathematisch) gefestigt ist. Metamathematik kann weder gegen physikalische Tatsachen noch gegen mathematische Lücken argumentieren, sondern lediglich die innere Notwendigkeit der bereits dargestellten Theorieelemente für die jeweilige Systemmechanik aufzeigen.

Mit diesen Einschränkungen im Blick konzentriert sich Hamel auf einzelne Fragen der *Unabhängigkeit* und *Widerspruchsfreiheit* für eine Auswahl von Axiomgruppen, um ihre grundlegende Bedeutung für die Klassische Mechanik zu bestätigen.

3.8.1 Fragen der Widerspruchsfreiheit

Was die Widerspruchsfreiheit betrifft, verfolgt Hamel eine eigenwillige Konzeption, die mit der späteren modelltheoretischen Methode nur indirekt verknüpft ist. Eine klare Konvention ist nicht zu finden.[256] Allerdings lässt sich die Grundidee für die Mechanik aus dem expliziten Beweisgang in Hamel [1909a], §4: 'Die Widerspruchslosigkeit der Axiome', entnehmen.

Für gewöhnlich (d.h. sowohl heuristisch, als auch modelltheoretisch) wird ein Axiomensystem als widerspruchsfrei (konsistent) angesehen, wenn sich ein Modell angeben lässt, in dem alle betreffenden Axiome derart realisiert sind, dass keine widersprüchlichen Aussagen folgen.[257] Widerspruchsfreiheit in diesem semantischen Sinn wird also implizit als Merkmal der Logizität eines Axiomensystems verstanden: Jede Aussagenmenge ist bereits widerspruchsfrei, die in dem Axiomensystem des logischen Kalküls selbst erfüllbar ist.[258] Bezogen auf die Mechanik heißt dies lediglich, eine

[255] Zitiert aus Hamel [1927], S. 40; man siehe dazu auch das Zitat hier auf Seite 43.

[256] Dafür wurde er schon frühzeitig kritisiert. Siehe McKinsey u. a. [1953], Anm. 14, S. 268. Vermutlich hat er die Konzeption bei A. Mayer und E. Zermelo aufgegriffen, die er für ihre 'Vorarbeiten' in dieser Frage der Widerspruchsfreiheit namentlich erwähnt.

[257] Man betrachte dazu etwa Hilberts ursprüngliche Idee im Zitat Seite 41. Der gewöhnliche Konsistenzbegriff wird in der Modelltheorie damit untermauert, dass jede durch ein Axiomensystem erfüllbare Menge an interpretierten Aussagen widerspruchsfrei sein muss. Das heißt, es können keine Widersprüche deduziert werden. Man spricht dann von Korrektheit ('Soundness') eines Axiomensystems (siehe dazu etwa Monk [1976], Seiten 189 und 197).

[258] In dieser prägnanten Form etwa in Ebbinghaus u. a. [1992], S. 91.

Anwendung anzugeben, in der alle Axiome so vorkommen, dass keine widersprüchlichen Aussagen zu einzelnen Aussagen der Anwendung gebildet werden können. Nach dieser Konvention wird später in McKinsey u. a. [1953] die Widerspruchsfreiheit der Punktmechanik gezeigt.

Hamels Verständnis einer widerspruchsfreien Mechanik geht nun weit darüber hinaus. Von allen kinematischen Größen, durch die wir die mechanische Wirklichkeit beschreiben (Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenelementes), ist anzunehmen, dass sie durch *reguläre* Funktionen repräsentiert werden: Funktionen, die zu jedem Systemzustand eindeutig, stetig und differenzierbar sind und stets endliche Werte annehmen.[259] Die Klassische Mechanik ist somit dann widerspruchsfrei, wenn sich diese Regularität auf die dynamischen Größen (Systemkräfte, -massen und Gesamtenergie) überträgt: Alle Differentialgleichungen und Randbedingungen führen im Rahmen der angenommenen mechanischen Gesetze zu *eindeutigen* und *endlichen Lösungen*. Widerspruchsfreiheit in diesem speziellen Sinn kann Hamel tatsächlich für eine eingeschränkte Mechanik starrer Körper nachweisen.[260]

Theorem 5 (Mayer, Zermelo, Painlevé, Hamel)
Neben dem Axiomensystem der *Mechanik starrer Körper* gelten folgende einschränkende Bedingungen:

(i) Die Reaktionskräfte sind stets von endlicher Größe.

(ii) Stoßprozesse mit instantanen Geschwindigkeitsänderungen werden ausgeschlossen.

(iii) Effekte der Gleitreibung zwischen den starren Massen (die Coulombschen Reibungsgesetze) sind auszuschließen.

Dann ist die Mechanik *widerspruchsfrei*.

Es wird zum Verständnis der Konzeption beitragen, der Frage nachzugehen, weshalb die obigen Bedingungen widersprüchlich zur axiomatischen Behandlung der Mechanik sein können, wobei die erste Einschränkung **(i)** offensichtlich ist. Was den Ausschluss von Stoßprozessen betrifft **(ii)**, so lassen sich zwar durchaus die gewöhnlichen Impulserhaltungssätze bei linearem elastischen oder inelastischen Stoß aus den Axiomen der starren Körper und Punktmassen deduzieren.[261] Schwierigkeiten entstehen aber dann, wenn man versucht, die instantane Richtungsumkehr für den singulären Zeitpunkt des Stoßes t_0 zu erklären. Denn ein Stoß bewirkt im Grenzfall $dt \to t_0$ eine über alle Grenzen wachsende Verzögerung bzw. Beschleunigung an jedem Körperelement. Eine 'Momentankraft' oder Stoßkraft F, die diese instantane Geschwindigkeitsänderung $dv = \frac{F}{m}dt > 0$

[259] Die regulären Funktion, wie sie in Hamel [1909a], S. 356, axiomatisch gefordert wird, meint entsprechend heutiger Terminologie eine holomorphe Funktion.

[260] Vergleiche Hamel [1909a], S. 352; und Hamel [1927], S. 41.

[261] Siehe dazu etwa Hamel [1912], Nr. 295: 'Der gerade, zentrale Stoß'.

erzeugt, müsste streng genommen über alle Grenzen steigen, was eine Verletzung der Energieerhaltung bedeuten würde.[262]

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, werden Stoßprozesse in der Mechanik häufig nur durch ein genähertes zeitliches Impulskonzept beschrieben: In winzig kurzer Zeit wird eine enorm große, aber endliche Kraft erzeugt, so dass der Impuls angenähert konstant und endlich bleibt.[263] Mit diesem Impulskonzept würde aber das Axiom der Undurchdringlichkeit verletzt sein. Denn bei einem endlichen Stoßintervall Δt treten Uneindeutigkeiten in der Zuordnung der Massenpunkte auf, wenn die Massenelemente während des Intervalls Δt vor- und zurückbewegt werden bzw. denselben Ort einnehmen.[264] Als Bestandteil einer konsistenten Systemmechanik müssen somit Stoßprozesse an Körpern ausgeschlossen werden. Das zumindest macht Hamels Bedingung **(ii)** verständlich. Die mathematische und physikalische Beschreibung der Stoßwechselwirkung in der Klassischen Mechanik bleibt allerdings bis heute konzeptuell unklar und fordert die philosophische Reflexion über unsere Beschreibung der sichtbaren Natur bis hin zur Konzeption dessen, was genau unter einer 'Wirkung' zu verstehen ist, heraus.[265]

Ähnliche Konzeptionsschwierigkeiten treten bei Gleitreibungseffekten auf **(iii)**. Auch hier ist die Energieerhaltung wegen der zerstreuenden Kraftwirkung verletzt. In der Mechanik des 19. Jahrhunderts wurden schon deswegen idealisierte Systeme vorangestellt. Derartige Reibungseffekte gehörten in den Bereich der technischen Approximation, die erst *nach* der rationalen Beschreibung Wertkorrekturen hervorbringen.[266] Das kategorische Ausschließen von Reibungseffekten hängt insbesondere damit zusammen, dass diese Gesetze eine funktionale Abhängigkeit von der momentanen Geschwindigkeit eines Körpers und von der Druckwirkung zwischen den reibenden Körpern fordert.[267] Paul Painlevé hat zeigen können, dass *modellspezifische* Abhängigkeiten (Druck, Material, Geometrie der Anordnung) zu einer Vielzahl von irreduziblen Fallunterscheidungen führen. Je nach

[262] Siehe dazu etwa Voss [1901], S. 56; Ansätze zu diesen Überlegungen gehen bereits auf Euler [1790], §§ 166–169, zurück. In Mach [1897], S. 323, wird die Momentankraft als Erklärungsinstanz von Stoßprozessen ausgeschlossen.

[263] Siehe dazu Voss [1901], S. 57; und Hamel [1967a], S. 394.

[264] Siehe dazu Hamel [1909a], S. 391, zum 'Axiom der Undurchdringlichkeit' hier Abschnitt 3.6.2, 'Zu den mathematischen Hintergrundtheorien'.

[265] Man vergleiche etwa mit Butterfield [2007], S. 2; Butterfield [2004], S. 4, sowie Wilson [2006], Seiten 2 – 5.

[266] Siehe dazu Stäckel [1908], §6: 'Reibung', sowie hier Abschnitt 2.3.7.

[267] Nach dem empirisch ermittelten *Coulomb-Morinschen Gesetz* der Gleitreibung bestimmt sich der Reibungskoeffizient R, der auf einen bewegten Körper der Geschwindigkeit $\vec{v}$ wirkt, zu $R = Nf(v, N)$, wobei N der Normaldruck ist, der beim Gleiten von dem Körper auf die Oberfläche ausgeübt wird, und f ein Proportionalitätsfaktor abhängig von v und N. Die analytische Schwierigkeit des Reibungsgesetzes besteht darin, dass die Größe f nur in einzelnen Fällen durch eine von v und N unabhängige Konstante genähert werden kann (siehe etwa Hamel [1967a], S. 72; und Stäckel [1908], Anm. 75, S. 472).

Modell können unterschiedliche, teilweise uneindeutige und sich widersprechende Ergebnisse erzielt werden.[268] Dies führte zu der Einsicht, dass Reibungseffekte einen rein empirischen Charakter haben und nicht in ein gemeinsames analytisches Schema passen. Reibungseffekte sind aus empirischen, faktischen Gründen niemals widerspruchsfrei. Axiomatisierungen müssen aber aus systematischem Grund diese *faktische Konsistenz* erfüllen. Also, so der Schluss Hamels, sind Reibungsgesetze wegen ihrer Strukturlosigkeit nicht axiomatisierbar, sind selbst 'nicht axiomatisch'.[269]

3.8.2 Fragen der Unabhängigkeit

Deutlich einfacher und zugänglicher sind Hamels wenige Untersuchungen über die Unabhängigkeit einzelner Axiomgruppen: Die Axiome der Mechanik starrer Körper und die Axiome der Mechanik der Kontinua.[270] Grundsätzlich ist Hamel davon überzeugt, dass alle seine Axiomgruppen unabhängig voneinander sind, es sei denn, es handelt sich um Begriffsdefinitionen und systemübergreifende Erklärungen, worauf in Einzelfällen hingewiesen wird. Deshalb beschränkt er sich auf diejenigen Axiome, deren Unabhängigkeit nicht offensichtlich ist, um ihre Notwendigkeit für den Aufbau des Gesamtsystems zu verdeutlichen.[271]

> **Hamels Unabhängigkeits-Hypothese:**
> Jede der drei synthetischen Systemmechaniken - von der Kontinuitätshypothese, vom starren Körper oder von Punktmassen aus - und die analytische Mechanik bilden jeweils zueinander *unabhängige Zugänge* zur Klassischen Mechanik.

Der Unabhängigkeitsnachweis gelingt, wenn ein widerspruchsfreies mechanisches *Modell* $M_{\setminus A_0}$ angegeben werden kann, in dem alle Axiome des Systems realisiert sind mit Ausnahme des betreffenden Axioms A_0, dessen Unabhängigkeit behauptet wird. Dadurch wird der logische Anspruch der Unabhängigkeit erfüllt, dass A_0 nicht aus den anderen Axiomen gefolgert werden kann: Man finde innerhalb von $M_{\setminus A_0}$ einfach eine gegenteilige bzw. widersprüchliche Aussage zu A_0.[272] Diese Entsprechung mit dem logischen Anspruch der Unabhängigkeit ist allerdings *informell* zu nennen, weil wir

[268] In Hamel [1967a], S. 543 ff., wird ein solches Modell exemplarisch diskutiert und die Komplexität der vielen möglichen Fallunterscheidungen demonstriert.

[269] Hierauf bin ich bereits in 2.3.7 eingegangen. Man vergleiche mit dortigen Zitaten.

[270] Siehe Hamel [1909a], §I.3: 'Die Symmetrie der Spannungsdyade'; und §II.3: 'Die Unabhängigkeit der Axiome'; sowie Hamel [1927], S. 35.

[271] Die Unabhängigkeit der analytischen Mechanik bleibt bei Hamel eine Hypothese, die vor allem aus der Einteilung in verschiedene 'Aufbauten' oder 'Axiomgruppen' in Hamel [1927] ersichtlich wird. Siehe hierzu auch Abschnitte 3.4.4 u. 3.6.2.

[272] Vergleiche dazu mit Hilberts ursprünglicher Idee, zitiert in Abschnitt 2.3.4. Das ist übrigens auch der Grund, warum die Unabhängigkeit der Axiome durch eine Prüfung ihrer Widerspruchslosigkeit bedingt ist (siehe dazu etwa Hamel [1909a], S. 366).

keinen formal-semantischen Folgerungsbegriff vorliegen haben, über welchen eine exakte Definition der Unabhängigkeit im Sinne der Modelltheorie möglich wäre.[273]

Zwei Beispiele: 1. Das Trägheitsprinzip
Ein vielbeachtetes Beispiel ist der Nachweis der Unabhängigkeit des Trägheitsprinzips von allen weiteren Axiomen der Mechanik.[274] Wäre das Bezugssystem beliebig, egal ob beschleunigt oder gleichförmig bewegend, egal ob ein Raum- oder ein Körpersystem, und hält man nun an Newtons Grundgesetz fest, dass die resultierende Kraft $\vec{F}$ sich aus den Beschleunigungsgesetzen auf eine Punktmasse m zusammensetzt ($\vec{F} = m \sum_i \vec{a}_i$): so wäre die *inertiale Kraft* auf die Masse m an Position $\vec{s}$ allgemein gegeben als

$$\vec{F} = -m \cdot (\ddot{\vec{s}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{s}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{s} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{s})).$$ [275]

Es treten also weitere Beschleunigungsterme auf. Ohne ein inertiales Bezugssystem wäre weder der Bezug zu einer Kraftwirkung noch zur Kräftefreiheit eindeutig. Es ist der ruhende oder gleichförmig sich bewegende 'Körper Alpha' notwendig, relativ zu dem die kinematischen Größen der Massen bestimmt werden. Die Beschränkung auf Inertialsysteme ist also notwendig, um real eingeprägte Kräfte von Reaktions- und Trägheitskräften zu unterscheiden. Zusammengefasst:

> „[Newton's law $\vec{F} = m\vec{a}$, d.i. **(NG)**] *cannot* be valid relative to *every* frame of reference. In fact, one can always construct frames relative to which the particle will undergo any motion prescribed at will. Newton's law is valid only in certain preferred frames, which are called *inertial frames.*" (Noll [2004], S. 16).

Klassische Mechanik wird somit als diejenige physikalische Theorie definiert, in der Trägheitsmerkmale von Massen eine Rolle spielen. In diesem Sinn ist also das Postulat von der Existenz eines Inertialsystems ein *unabhängiges* Axiom.[276]

Klassische Mechanik basiert immer auf der *Wahl praktisch geeigneter* Koordinatensysteme, um die Systemdynamik passend zu beschreiben. Diese praktische, empirisch günstige Auswahl an Inertialsystemen macht die Klassische Mechanik logisch ungreifbar und schwierig zu interpretieren:

[273] Zu diesem formalen Unabhängigkeitsbegriff siehe etwa Monk [1976], S. 370. Eine einfache Anwendung zur logischen Unabhängigkeit eines Axioms wird etwa in Suppes [1957], S. 70 f., demonstriert.

[274] Man vergleiche hier Abschnitt 3.3.1. Er wird von Hamel in dieser Weise nicht ausgeführt, Hamel [1909a] und Hamel [1909b] zeigen aber völlige Übereinstimmung mit dieser Konzeption. Man vergleiche auch hier Abschnitt 3.6.2, Seite 143.

[275] Man vergleiche etwa Synge [1960], S. 45.

[276] Siehe dazu insbesondere die Axiomatisierung in Truesdell [1991], §13: 'The Axioms of Inertia. Euler's Laws of Motion'.

> „The difficulty of identifying an inertial frame by experiment is well known. This difficulty, however, is not reflected in the formalism of the subject. Rather, it arises from the fact that *in practice* force is generally measured by acceleration; that is, by the balance of linear momentum in the form [**(NG)**]. If this is the case, in order to determine the force one must first, and independently, verify that his frame is inertial, which results in a circularity. *This is a problem of interpretation, not of formalism* [eigene Herv.] [...]" (Truesdell und Toupin [1960], S. 533).

In jedem Fall ist die Existenz eines Inertialsystems *logisch nicht* auf das Newtonsche Grundgesetz **(NG)** reduzierbar. Die häufig in Lehrbüchern zu findende Behauptung, aus der Kräftefreiheit 'folge' die gleichförmige Bewegung der Masse, ist aus axiomatischer Sicht nicht korrekt.[277] Ursache dieses Irrtums ist häufig die unachtsame Verwechslung des Euklidischen Vektorraumes als Repräsentant des *physikalischen* Bezugssystems mit einem Kartesischen Koordinatensystem, das zur *mathematischen* Orientierung in einem mechanischen Modell eingeführt wird.

> „Part of the [...] confusion results from [the] failure to distinguish a frame of reference from co-ordinate system. Physicists often do likewise, but their basic understanding of the subject saves them from error and vacuity." (Truesdell [1984d], S. 544)

Oft wird in Lehrbüchern diesen Existenzaussagen weniger Bedeutung beigemessen als es eine axiomatische Rekonstruktion notwendig macht. Wäre diese Unterscheidung zwischen Bezugssystem und Modell gleichgültig, könnte der Kraftbegriff tatsächlich wie eine bloß *explizite* Definition verstanden werden, als eine von der empirischen Bedeutung abgehobene Form. Von dieser *formalistischen* Vereinheitlichung ist die Axiomatisierung nach Hamel aber weit entfernt.[278]

2. Das Boltzmannaxiom

Ein Beispiel von Hamel wäre der Nachweis, dass das Boltzmannaxiom (**BA**) unabhängig von den anderen Grundprinzipien ist.[279] In der Grundgleichung (**NGC**) und in dem Momentensatz (**CM2**) wird der Spannungstensor zunächst algebraisch in symmetrische und antisymmetrische Anteile umgeformt. Anschließend zeigen weitere analytische Umformungen, dass sich dieselben Terme des Spannungstensors ergeben, mit Ausnahme eines

[277] Man vergleiche exemplarisch etwa Greiner [2007], S. 123. Nachdem dort das Trägheitsprinzip als der „Spezialfall" '$\vec{F} = 0$' des zweiten Axioms erklärt wurde, definiert man *anschließend* (auf S. 126 f.) „Inertialsysteme" als diejenigen „Koordinatensysteme", in denen das zweite Axiom erfüllt ist. Auch in der philosophischen Reflexion findet man gelegentlich diese Behauptung, etwa in Kuhn [1989], S. 17, Anm. 14; aber auch in McKinsey u. a. [1953], S. 260, was noch in Abschnitt 4.5.3 diskutiert wird.

[278] Siehe hier Abschnitte 3.6.3 und 3.6.4, sowie Truesdell und Toupin [1960], S. 533.

[279] Vgl. Hamel [1909a], S. 365 f.; und Hamel [1927], S. 39.

weiteren Anteils, der aus der Nichtsymmetrie des Tensors folgt: tangentiale Oberflächenspannungen, die eine Rotationswirkung auf den gesamten Körper ausüben. (**BA**) ist also unabhängig von den anderen Axiomen, weil ohne (**BA**) ein Spannungsterm hinzukommt, der ein physikalisches Ungleichgewicht bezeichnet.

Der Nachweis ist also bei Hamel eine formale Überlegung, die ganz vom empirischen Charakter des Modells abstrahiert. So wird letztlich ein *nicht-klassisches* Modell erwogen, um die Notwendigkeit und Unabhängigkeit der klassischen Axiome der Mechanik zu zeigen.[280] In gleicher Weise kann die Unabhängigkeit des Newtonschen Grundgesetzes einfach damit bestätigt werden, dass auf die Existenz nicht-Newtonscher Kraftsysteme hingewiesen wird: etwa auf die relativistische Mechanik.[281]

3.8.3 Punkt- versus Kontinuumssicht: der unlösbare Gegensatz der Klassischen Mechanik

Ich möchte zum Abschluss dieser metamathematischen Betrachtungen auf die dynamischen Prinzipien der kontinuierlichen Körper und der Punktmassen eingehen. Beide Zugangsweisen bleiben voneinander getrennt. Hier kennzeichnet die Metamathematik den offen gebliebenen *Gegensatz der Darstellungen* in der Klassischen Mechanik, der selbst nach Hamels Antworten auf Hilberts Problem bestehen bleibt. Der Gegensatz wird vor allem daran ersichtlich, dass die Axiome je nach Kontinuums- oder Punktauffassung unterschiedliche *logische Positionen* in der entsprechenden Systemmechanik einnehmen. Auch nach Klärung des Grenzübergangs zur Mechanik starrer Körper bleibt die Entscheidung für eine der beiden Anschauungen unaufgelöst.[282]

Was also eingangs (Teil 3.3) als Begriffsvielfalt in der Klassischen Mechanik bezeichnet wurde, wird in der axiomatisierten Rekonstruktion nach Hamel (Teil 3.6) und nun in der metamathematischen Reflexion bestätigt. Es gibt unterschiedliche, *unabhängig* zu nennende Herangehensweisen; es gibt verschiedene Bilder oder Anschauungen selbst in der sicher und eindeutig geglaubten Klassischen Mechanik, die logisch nicht weiter aufgelöst werden können, weil sie jeweils irreduzible Grundkonzeptionen auf dem Boden des Newtonschen Grundgesetzes darstellen. Georg Hamel hat diese Alternativen durch seine verschiedenen Systemaxiome umso deutlicher gesehen und bewahrt. Kann die axiomatische Methode zwar keine neue mathematische Naturphilosophie der Mechanik, keine neue

[280] Deshalb werden die Unabhängigkeitsfragen in Hamel [1927] zum Bereich der 'Nichtklassischen Mechaniken' gezählt. Hier wird unter anderem das Boltzmannaxiom zunächst ausgeklammert.

[281] Siehe Hamel [1927], S. 37; Hamel [1967b], S. 512.

[282] Diese 'logische Asymmetrie' wurde bereits am Ende von Abschnitt 3.7.3 festgestellt.

rationale Mechanik begründen,[283] so findet die Klassische Mechanik in Hamels Grundlagen eine neue Ebene der inneren Vereinheitlichung. Die folgende tabellarische Gegenüberstellung zeigt deutlich, was hiermit gemeint ist.

Dynamische Grundgesetze aus der Kontinuumssicht

Axiom	**Art der Unabhängigkeit**	Abschn.
Das Trägheitsprinzip	fordert die Festlegung des Inertialsystems zur Identifizierbarkeit von Massenbeschleunigungen	3.3.1
Das Newtonsche Grundgesetz (**NGC**) bzw. (**CM1**)	unabhängig von allen Gesetzen und Systemmechaniken; als implizite Definition der Kraft diesen vorgeordnet	3.3.5, 3.6.3, 3.7.2
Der Momentensatz (**CM2**)	unabhängig vom Newtonschen Grundgesetz; die Notwendigkeit des *Boltzmannaxioms* macht den Momentensatz zu einem unabhängigen Grundgesetz	3.3.5, 3.7.3
Der Energiesatz	hypothetische, postulierte Unabhängigkeit; gilt nicht für den Energiebegriff selbst	3.7.4

Dynamische Grundgesetze aus der Punktanschauung

Axiom	**Art der Unabhängigkeit**	Abschn.
Das Trägheitsprinzip	fordert die Festlegung des Inertialsystems zur Identifizierbarkeit von Massenbeschleunigungen	3.3.1
Das Newtonsche Grundgesetz (**NG**) bzw. (**PM1**)	unabhängig von allen Gesetzen und Systemmechaniken; als implizite Definition der Kraft diesen vorgeordnet	3.3.3, 3.3.4
Das volle Gegenwirkungsprinzip	**(G1) - (G3)** bezeichnen das Gleichgewicht der inneren Kräfte- und Momente; definieren implizit die innere Kraft	3.4.1

Dargestellt sind nur die unabhängigen Grundgesetze, die *Axiome*, je nach Grundanschauung: nach der Kontinuumssicht einerseits und andererseits nach der Partikelsicht. Es gibt demnach einen *Prinzipiengegensatz* in der Klassischen Mechanik, der seinen Ursprung in verschiedenen *Interpretationen des Körperlichen* hat. Je nachdem, welche Interpretation des Körperlichen auf der Basis des Newtonschen Grundgesetzes *gewählt* wird, haben einzelne grundlegende Sätze den logischen Status eines echten Prinzips oder eines ableitbaren Satzes. Der Interpretationsgegensatz bleibt dabei das

[283] Siehe Pulte [2005], S. 86 f.

formal Unauflösbare in der Beantwortung des sechsten Problems. Jede Semantik der Klassischen Mechanik, jede Rekonstruktion des Körperlichen, läuft zwangsläufig auf diese Gegenüberstellung hinaus. Sie weist weit über Hamels Werk und Wirkung hinaus und bleibt heute ebenso aktuell.

Aus *Sicht des Kontinuums* sind die dynamischen Prinzipien zur Erhaltung der inertialen Kontaktkraft, des Drehmomentes und der Energie die irreduziblen Grundlagen, an die jede weitere mechanische Beschreibung anknüpft.

> „By them [d.i. 'specialists in mechanics'], classical mechanics is based on three fundamental laws, assertings the conservation of *force, torque,* and *work*, or, in other terms, of *linear momentum*, *moment of momentum,* and *energy*. They regard [the principle of moment of momentum, d.i. den Momentensatz] itself as the statement of the second basic law. They do not regard the principle of moment of momentum as a consequence of the principle of linear momentum or of 'Newton's Laws' [...]." (Truesdell [1968], S. 241 f.)

Auffällig ist nun, dass aus der *Punktanschauung* eine deutlich vereinfachte Struktur der Massendynamik entstanden ist: Weder der Momentensatz, noch die Energieerhaltung sind grundlegende Prinzipien. Sie sind vielmehr aus dem Grundgesetz und dem vollen Gegenwirkungsprinzip *deduzierbar*. Das ist die übliche Darstellung, wie sie in den Lehrbüchern zur Klassischen Mechanik für Physiker zu finden ist.[284] Sie lässt sich meines Erachtens in zwei Schritte gliedern.

I. Typischerweise geht man zunächst von der Punktanschauung aus und *deduziert* aus den Newtonschen Axiomen die Energieerhaltung und den Momentensatz für *endlich* viele Massenelemente. Diese Deduktion ist aufgrund der Algebra von endlichen Summen über Massen und Kräfte mathematisch einfach zu handhaben.

> **Theorem:** *Der Momentensatz der Punktmechanik*
> Aus Newtons Grundgesetz (**NG**) und dem vollen Gegenwirkungsprinzip **(G1) - (G3)** *folgt* **(PM2)**:
>
> $$\frac{d}{dt}\sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \vec{M}.$$

II. Anschließend werden im infinitesimalen Grenzübergang die deduzierten Gesetze auf ein Kontinuum von Massen mit angreifenden

[284] In Truesdell [1964] und Truesdell [1968] wird Joos [1958] als repräsentatives Beispiel für diese Physikersicht genommen. Es seien hier noch einige aktuellere Lehrbücher erwähnt: Sommerfeld [1967], Desloge [1982], Goldstein u. a. [2006] oder Greiner [2007]. Die Liste kann beliebig verlängert werden, die Lehrbücher sind hierbei austauschbar. Eine logische Rekonstruktion des Beweisganges findet sich hier in Anhang B, Seite 284.

Oberflächenkräften *übertragen*. Der Momentensatz für Punktelemente (**PM2**) wird dann *direkt* zum 2. Grundgesetz (**CM2**) bzw. zu Eulers Gesetz für starre Körper (**RBM2**):

$$\frac{d}{dt}\int dm(\vec{r}\times\vec{v}) = \vec{M}.^{285}$$

Dieses Vorgehen wurde gerade von Forschern aus der Technischen Mechanik und Kontinuumsmechanik Mitte des 20. Jahrhunderts heftig kritisiert, allen voran von Clifford Truesdell, aber Georg Hamel muss nach diesen Ausführungen zweifellos zur den ersten Kritikern gezählt werden. Dabei findet gar nicht die formale Deduktion selbst (**I**) den Anstoß: „No one can criticise this statement [d.i. die Deduktion] or its proof." (Truesdell [1968], S. 240). Auch in Hamels Lehrbüchern finden wir Abschnitte zur Punktmechanik, in denen diese Deduktion klar dargestellt ist.[286] *Innerhalb* der Punktmechanik kann kein Einwand erhoben werden.

Es ist der Schritt **II**, gegen den protestiert wird: gegen die Herabstufung des *allgemeinen* Momentensatzes für *beliebige Körper* zu einem abgeleiteten Prinzip der Punktanschauung. Dieser methodologische Schritt nehme der Wissenschaft der rationalen Mechanik an Genauigkeit und Allgemeinheit, wo sie zwingend sei. Wie es in Truesdell [1964], S. 155, heißt, muss der Momentensatz für Kontinua grundgelegt werden, ob nun für starre oder elastische Körper, um „unabhängig von der Natur der Wechselwirkungskräfte und der stofflichen Zusammensetzung" eine vollständige und allgemeine Beschreibung der Kinetik eines beliebigen Körpers aufzustellen.

Der Blick zur Rechtfertigung der kontinuumsmechanischen Axiomatik richtet sich primär auf *erweiterte Systeme* der Elastizitätstheorie und Festigkeitslehre der Technischen Mechanik. Denn warum sonst wäre der Momentensatz überhaupt als redundant anzusehen, wenn nicht durch eine Einschränkung der betrachteten Modelle in der Mechanik?

> „The answer is to be sought, as always, in the *practice*, not the philosophy, of the subject. The tenet, that Newton's Laws [...] in any of their forms suffice, can be held only by those who limit their attention to mass-points, rigid bodies, and certain other special systems. Any modern theorist knows this and sees at once the evasions used in typical treatments, such as that of Joos above described, to get the form [d.i. (**CM2**)] suitable for deformable bodies." (Truesdell [1968], S. 260)

Truesdell wirft also den Vertretern der Punktanschauung eine verzerrende Einschränkung in der Sache vor, zugunsten einer praktischeren, didaktisch

[285] Man vergleiche 3.3.5 und 3.3.6; sowie Truesdell [1968], S. 241

[286] Siehe Hamel [1912], Nr. 108: 'Ableitung des Momentensatzes für beliebige Systeme'; und Hamel [1967a], §I.8: 'Anhang zu Kapitel I. Die Punktmechanik'.

leichteren Herangehensweise an die Mechanik. Hier ist dieser Einwand bereits im Zusammenhang mit Hamels Verteidigung der Kontinuitätshypothese begegnet.[287] Die Kontinuitätshypothese zeigt eine *grundsätzlich andere Perspektive* auf die Wissenschaft der Mechanik auf.

Mit unüberhörbarer Resignation stellt Truesdell fest, wenn er auf die Punktdarstellung des Eulerschen Momentensatzes[288] schaut, dass Mitte des 19. Jahrhunderts durch den großen Einfluss von Poisson, Kirchhoff, Mach oder Thomson

> „[...] a fundamental change had occurred in mechanics, not in the subject but in the *teaching* of it. To describe this change would require another essay, perhaps a boring one, but nevertheless one that ought to be written, for, unlike most historical studies, it would show us how a subject dies." (Truesdell [1968], S. 268).

Ist also die Unabhängigkeitsfrage des Momentensatzes eine pragmatische Entscheidung, oder ist sie in der physikalischen Sache begründet? - Es ist, so meine These, eine *formal unlösbare, intuitive Entscheidung* zwischen zwei gegensätzlichen Sichtweisen, die allerdings den Gesamtaufbau der Klassischen Mechanik grundlegend mitbestimmt. Ich möche zunächst versuchen, das Argument dieser Partikelsicht nochmals so zu verdeutlichen, dass anschließend die Unvereinbarkeit mit der Kontinuumssicht (nach Hamel, Truesdell oder Noll) offensichtlich wird.

3.8.4 Das Argument für eine erweiterte Punktanschauung

In Abschnitt 3.5.3 wurde bereits bemerkt, dass dieses Vorgehen, den physikalischen Grenzübergang 'pragmatisch' zu behandeln, eine Tradition hat, die bis ins 19. Jahrhundert hineinreicht. Provokanter kommentiert Truesdell:

> „[... The] mass-point is so ingrained in paedagogical repetition that even today many textbook strive to foster an illusion that Newton's laws suffice as a basis for mechanics." (Truesdell und Toupin [1960], S. 534).

Können sich Generationen von Physikern, Mathematikern und Technikern geirrt haben? - Das folgende Argument entnehme ich den pragmatischen Darstellungen der vielen Lehrbücher. Es ist gewiss lückenhaft, wird aber hier bereits verdeutlichen können, dass die Punktmassen-Sichtweise überzeugend ist und offensichtliche Stärken hat.

- **Didaktische Prämisse:** Die Punktmechanik ist eine mathematisch einfache Theorie, weil sie mit *abzählbaren* dynamischen Größen und

[287] Siehe Abschnitt 3.7.1, dort insbesondere Argument **(IV)**.

[288] Siehe hier Abschnitt 3.3.4.

Termen operiert. Insofern ist sie didaktisch vorrangig gegenüber kontinuierlichen Darstellungen der dynamischen Größen, die partielle Differential- und Integralgleichungen erfordern. Deshalb ist die Punktmechanik auf umfassendere Systemmechaniken zu erweitern, *wenn* dabei keine groben physikalischen Fehler auftreten.

- **Physikalische Prämisse:** Es ist davon auszugehen, dass die inneren Massenelemente und starren Verbindungen in einem klassischen starren Körper keinerlei Beiträge zum Gesamtmoment oder zur Gesamtenergie haben. Oder in den Worten Truesdells gesagt:

  > „If we try to follow the physicists here, we see that for them the principle of moment of momentum serves *to obviate the need for specifying the mutual forces among the particles of a rigid or deformable body*. It is enough that the mutual forces contribute nothing to the resultant torque." (Truesdell [1968], S. 243).

  Im Falle des zentralen Gegenstandes der Klassischen Mechanik, dem starren Körper, treten keine groben physikalischen Fehler auf.

⇒ **Schluss:** Die Punktmechanik ist zu erweitern. Das heißt, es ist legitim, die Punktmechanik *auch* als didaktischen Ausgangspunkt für komplexe Systemmechaniken zu nehmen, wie etwa für starr aufgefasste *Kontinua*. Alle physikalischen Größen $\Phi(m_i, ...)$ und Terme, die von den Summen der Punktmassen m_i abhängen, werden einfach durch kontinuierliche Integrale ersetzt:

$$\sum_i \Phi(m_i, ...) \;\Rightarrow\; \int \Phi(dm, ...)\, dm.$$

Physiker, die dieses 'Argument für eine erweiterte Punktanschauung' befürworten, können sich auch darauf berufen, dass der Schluss des Argumentes von vielen Lehrbuchautoren vertreten wird, die in die Technische Mechanik und Elastizitätstheorie einführen wollen.[289] Auf diese Weise werden alle Trägheitsmomente (Flächenmomente) bei starren Körpern[290] direkt

[289] Das wohl wichtigste *historische* Beispiel wäre Kirchhoff [1876]. Dort findet sich neben der analytischen Behandlung der Punktmechanik ein eigenes Kapitel über die Grundbegriffe der Elastizitätstheorie ('Elfte Vorlesung'). Neben der Punktmechanik Love [1897] setzt der Autor mit seinem Werk ≫*A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity*≪, Love [1927], für ein halbes Jahrhundert den mathematischen Standard in der linearen Elastizitätstheorie. Mit Blick auf W. Thomsons und P. Taits ≫*Elements of Natural Philosophy*≪ bemerkt M. Wilson: „[P]oint-mass-like formulations appear to be 'foundational' within historical textbooks [...] simply because a proper framework for articulating C[ontinuum] M[echanics] principles directly lay beyond their technical reach. But their intended 'world view' was one of continua, not point masses" (Wilson [2009], S. 177). Speziell für den deutschsprachigen Raum sind Arnold Sommerfelds Mechanikbände Sommerfeld [1967] und Sommerfeld [1992] zu nennen, die den Lehrbuchstandard Mitte des 20. Jahrhundert sowohl für die Klassische Punktmechanik als auch für die Mechanik deformierbarer Medien gesetzt haben. Ein aktuelles Beispiel aus der Technischen Mechanik wäre Brommundt und Sachs [1991].

[290] Siehe dazu Abschnitt 3.3.6.

der Theorie zugänglich gemacht, ohne dass ein physikalischer Fehler entstanden wäre. Biegungsmomente etwa, die in der Elastostatik von fundamentaler Bedeutung sind, haben einen grundsätzlich infinitesimalen Charakter: integrale Flächenmomente, die Idealisierung durch die Bernoulli-Hypothese, die Spannungszustände für einzelne (infinitesimale) Fasern während der Biegung, sowie das Elastizitätsmodul für den jeweiligen Stoff.[291] Diese Begriffe sind also eigentlich *bedeutungslos* in der Punktmechanik. Doch durch den obigen 'Schluss' lässt sich der Schritt zu infinitesimalen Elementen *direkt*, ohne logische Begründung erreichen. Man kommt gar nicht auf die Idee, eine Begründung aus der Punktmechanik zu vermuten.

Vom empirischen Hintergrund der Mechanik zeigt das 'Argument für die erweiterte Punktanschauung' eine ehrliche Gelassenheit: Es können keine Widersprüche zu Erfahrungstatsachen auftreten, und weitere 'nichtklassische' Phänomenbereiche des Körperlichen soll keine Theorie der Klassischen Mechanik abdecken. Kritischer sehen das alle Wissenschaftler und Philosophen (Hamel und Truesdell mit eingeschlossen), die auf die unterschiedlichen *Interpretationsschwierigkeiten* der Klassischen Mechanik hinweisen wollen. Ebenso beurteilt Mark Wilson diesen Gegensatz:

> „Many modern texts treat continua as large swarms of point masses simply because this approach provides a 'quick and dirty' way of getting some key classical models up and running, without needing to worry about delicate foundational considerations. Handy appeals to the necessity of 'idealization' camouflage some otherwise awkward *non sequiturs*." (Wilson [1998], S. 258).

Die strukturelle Analogie zum kontinuierlichen Fall

Wie aber lässt sich die 'Erweiterung der Punktanschauung' aufrechterhalten, wenn wir auf die unterschiedlichen *logischen* Positionen der jeweiligen Grundgesetze von Punkt- und Kontinuumsmechanik blicken? Hamels Deduktion des Momentensatzes für Kontinua hat doch zeigen können, dass das Gleichgewicht der inneren Scherspannungen für alle Massenelemente dm eine *notwendige unabhängige* Aussage beinhaltet: das Boltzmannaxiom.[292] Können wir also aus logischen Gründen ausschließen, dass die Punktanschauung auf Kontinua übertragbar ist?

Hierauf kann mit einer *strukturellen Analogie* zur Hamelschen Deduktion erwidert werden.[293] Dazu muss man beachten, dass in der Ableitung des

[291] Man vergleiche etwa Brommundt und Sachs [1991], §. 2.8: 'Gleichungen der Balkenbiegung'.

[292] Siehe Abschnitt 3.7.3.

[293] Ich spreche hier bewusst von einer Analogie, weil die Axiome zunächst völlig unterschiedliche Bedeutungen in ihren Systemmechaniken haben. Ebenso heißt es in Truesdell [1952], S. 80: „[The volume-element viewpoint] postulates the laws of continuum mechanics as plausible *analogues* of the mass-point equations."

Momentensatzes für Punktmassen die Aufhebung des Gesamtmomentes

$$\vec{M}_{Ges} = \sum_{i,j;\, i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{f}_{i,j} = 0 \quad \textbf{(G4)}$$

den entscheidenen Schritt darstellt. Die inneren Momente der Punktelemente stehen nach dem Gegenwirkungsprinzip in einem symmetrischem Verhältnis zueinander.[294] Auffällig ist nun, dass diese Symmetrie eine strukturelle Analogie mit der infinitesimalen Aussage des Boltzmannaxioms

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int \sum_i \vec{r}_i \times d\vec{F}_i \; = \; 0 \quad (\mathbf{BA})$$

aufzeigt. Es handelt sich um die Symmetrie des Spannungstensors, Cauchys 2. Theorem, das zu (**BA**) äquivalent ist.[295] Aus Sicht der Punktmechanik kann man also durchaus behaupten, dass die Newtonschen Axiome eine dem Kontinuumsbild *analoge Struktur* wiedergeben. Die Nahwirkungstheorie des Kontinuums wird durch die Fernwirkungstheorie der Punktmassen *ersetzt*, weil für die idealisierten makroskopischen Körper der Klassischen Mechanik (starre masselose Verbindungen zwischen den Punktmassen m_i) keine *relevanten physikalischen* Unterschiede auftreten.

Auf diesem Weg ließe sich schließlich auch eine punktmechanische Interpretation des *Spannungsbegriffs* als 'Kraft pro Flächenelement' erklären.[296] Ein Spannungszustand ist der konstante Grenzwert, der entsteht, wenn das Flächenelement dA und die angreifende Kraft dF in gleichbleibendem Verhältnis auf den Flächenmittelpunkt zusammengezogen werden. Man *definiert* somit

$$\sigma := \lim_{\substack{dA \to 0 \\ dF \to 0}} \left(\frac{dF}{dA} \right) .$$

Auch aktuell wird die punktmechanische Konzeption von ausgedehnten Körpern und Flächenkräften als philosophische Alternative diskutiert:

> „Cauchy's 'stress' turns out to be the novel ingredient that renders the mechanics of continua quite distinct from other formulations of classical mechanics [...]. Popular books often encourage the impression that 'stress' is merely a synonym for 'force', but Cauchy's tensor actually supplies an abstract replacement for the naïve idea that a 'point' [...] might possess an 'infinitesimal surface' upon which the surrounding materials can tug and shear in different directions." (Wilson [1998], S. 258).

[294] Man vergleiche Abschnitt 3.4.1.

[295] Siehe 'Theorem 2' in Abschnitt 3.7.3.

[296] Diese punktmechanische Interpretation findet man bereits in Love [1897], §§ 121, 122.

Die punktmechanische Rekonzeption des Spannungsbegriffes scheint allerdings etwas künstlich Zurechtgemachtes, mehr ein entfernter Ersatz der ursprünglichen Idee Cauchys zu flächenhaften Kontaktkräften. Trotz der aufgezeigten Strukturanalogie kann die Punktinterpretation nicht darüber hinwegtäuschen, dass Cauchys Spannungsbegriff ein *vereinheitlichendes* mathematisches Konzept zur Dynamik von unterschiedlichen Körpern mit berandeten *orientierten Oberflächen* darstellen soll.[297] Der Unterschied zwischen Normal- und Scherspannungen auf eine beliebige Oberfläche kann nur beschrieben werden, wenn der Spannungsvektor relativ zur orientierten Fläche, zur Flächennormalen, betrachtet wird. Erst dann zeigt sich das mathematische Charakteristikum der Spannung als symmetrischer Tensor.[298]

Dagegen gibt obige punktmechanische Definition von σ nur einen *betragsmäßigen Ersatz* für die Oberflächenkraft bei homogener, beliebig orientierter Massenverteilung. Sämtliche Flächenorientierungen müssten noch weiter definiert werden. Die punktmechanische Rekonstruktion der Kontinuumskonzepte mag zwar technisch gesehen keine nennenswerten Schwierigkeiten bereiten. Worauf es allerdings hier ankommt ist die Tatsache, *dass weitere Annahmen gemacht* werden müssen, die axiomatischen Charakter haben. Annahmen dieser Art wurden bereits in Born [1915] und Born [1922] im Zusammenhang mit atomaren Gitterstrukturen untersucht, und sie werden neuerdings in Murdoch [1983] unabhängig von speziellen Gitterstrukturen genannt.

Intuitiv eingängig ist etwa Murdochs axiomatische Forderung, dass kleinste noch der klassischen Physik unterliegende Körper, *orientierte kubische Zellen* ('ϵ-Zellen' genannt) einen Ersatz für orientierte, materielle Flächen bilden, auf die innere Fernkräfte wirken. Insbesondere die in Murdoch [1983], S. 169 f., vorgestellte Definition des Spannungszustandes

$$\sigma_\epsilon = \sum_{i,j} F_{ij}/A_\epsilon$$

ermöglicht die Deduktion 'punktmechanischer Merkmale' des Spannungstensors unter der Annahme, dass die internen Kräfte F_{ij} nur auf dem Bereich der orientierten Flächen A_ϵ einen wirksamen Beitrag haben und al-

[297] Siehe dazu Abschnitt 3.7.5, sowie Butterfield [2004], Seiten 8 und 36. Dort wird zusätzlich gegen die globale Punktanschauung in den Grundlagen der Mechanik argumentiert, weil der punktmechanische Ersatz von Kontaktkräften die Wechselwirkungsbeiträge uneindeutig lässt. Es müsste zum Beispiel zusätzlich angenommen werden, dass mikroskopische Mittelungen der Fernkräfte keinen äußeren Momentenbeitrag haben.

[298] Man vergleiche Cauchys 1. und 2. Theorem in Abschnitt 3.3.5. Die Notwendigkeit der relativen Orientierung wird bereits in Cauchy [1823], S. 11, deutlich ausgesprochen, selbst bei Betrachung infinitesimal kleiner Repräsentanten einer Spannung: „[...] [P]our établir les équations d'équilibre de ce corps solide, il suffira d'écrire qu'il y a équilibre entre les forces motrices qui sollicitent un élément infiniment petit *dans les sens des axes coordonnées*, et les composantes orthogonales des pressions ou tensions extérieures *qui agissent contre les faces de cet élément* [eigene Herv.]."

le anderen inneren Kraftwirkungen sich nach dem Gegenwirkungsprinzip aufheben. Die Symmetrie des Spannungstensors, Cauchys 2. Theorem, bleibt allerdings auch hierbei ein nichtredundantes Axiom zur Beschreibung des Momentensatzes.[299]

Ein punktmechanischer Ersatz der Spannungsgröße ist bereits in Born [1922], S. 545 f., deduziert worden, mit dem gewaltigen Anspruch, die gesamte Kristallphysik - und dazu gehören für Born auch elastostatische wie kontinuumsmechanische Resultate - durch formale Eigenschaften der atomaren Gitterstruktur zu repräsentieren.[300] So wird der Spannungstensor entsprechend durch gittersymmetrische Potentiale an den gedachten Oberflächen der Elementarzellen rekonstruiert. Es gelingt unter anderem die Reduktion der Symmetrieeigenschaft des Spannungstensors auf symmetrische Eigenschaften des Gitterpotentials. „Man muss also", heißt es in Born [1915], Seite 545, „zur eindeutigen Festlegung der absoluten Dimension des Gitters die Existenz von Grenzflächen berücksichtigen". Die Flächenorientierung gehört also auch hier zu den *irreduziblen Zusatzannahmen* in der punktmechanischen wie atomphysikalischen Rekonstruktion der kontinuumsmechanischen Grundterme.

Kurz gesagt, die punktmechanische Rekonstruktion des kontinuumsmechanischen Kraftbegriffes bleibt eine *nachfolgende* Ergänzung, eine Erweiterung, die *ohne* Zusatzaxiome unklar und verzerrt erscheint. Bei aller Berechtigung kann sie nicht darüber hinwegtäuschen, dass sie von einer grundlegend anderen Begriffsstruktur und Anschauung der Mechanik ausgeht, die mit keiner formalen Reduktion die kontinuumsmechanische Anschauung aufheben kann. In diesem Sinn weist Mark Wilson zu Recht darauf hin, dass „[t]he mathematical characteristics of such 'contact forces' are rather different from those of the action-at-a-distance types" (Wilson [1998], S. 258). Es wird das Resultat von *weiteren* Axiomatisierungen sein, diesen Grenzprozess aus der Punktmechanik, ebenso wie aus der statistischen Physik, aus der Atomgittertheorie oder aus der kinetischen Gastheorie zu deduzieren.[301]

Das pragmatische Argument für eine erweiterte Punktanschauung lässt sich offenbar nur didaktisch rechtfertigen. Logische und physikalische Einwände, die aus der Kontinuumssicht entstehen, machen die punktmechanische Verallgemeinerung dagegen unschlüssig und kompliziert. Eine strenge Widerlegung der erweiterten Punktanschauung kann allerdings nicht gelingen. Selbst wenn man auf beide Sichtweisen dieselben logischen Standards ansetzt, bleiben sie unvereinbar.

[299] Siehe Murdoch [1983], S. 172 f.

[300] Siehe Born [1922], S. 534, Anm. 10; und Born [1915], S. 2.

[301] Auf diese Art der punktmechanischen Vernetzungsprogramme gehe ich später in Abschnitt 5.2.3 ein.

3.9 Ein Fazit: Der Gegensatz der Anschauungen in der Punkt-Kontinuumsdebatte

Die Punktmechanik ist zwar ein strukturell und konzeptuell vereinfachtes Analogon zur Kontinuumssicht. Sie bleibt allerdings als Fernwirkungstheorie begrenzt auf idealisierte Körper: Punktmassen, starre Körper, ideale Flüssigkeiten und andere wirbelfreie inkompressible Medien, harmonische Oszillatoren und so weiter. Damit kann sie die erweiterte Perspektive zu physikalisch umfassenderen Systemmechaniken nur lückenhaft repräsentieren; ein Defizit, das gerade von Physikern und Didaktikern zugunsten der einfacheren Struktur in Kauf genommen wird.

Den Vertretern der Kontinuumsmechanik wird es dennoch nicht gelingen können, mit kritischem Blick auf die idealisierten Objekte der Klassischen Mechanik die punktmechanische Herangehensweise an die Physik auf *logischem* Weg zu widerlegen. Auch Truesdell spricht von einem „viewpoint”, dessen logische Zulässigkeit in den Grundlagen als „purely heuristic” (Truesdell [1952], S. 80) zu verstehen sei.

Der punktmechanische Zugang ist logisch unabhängig. Seine Einfachheit zeigt in vielen idealisierten Anwendungen klaren Nutzen. Hamel, Truesdell und Noll konnten gegen die eigenständige, pragmatische Sichtweise vom Boden der Punktmechanik aus allein mit Argumenten vorgehen, die für das einheitliche Gesamtbild der Grundbegriffe- und prinzipien sprechen. Diese Argumente, hier in Abschnitt 3.7.1 zusammengetragen, überzeugen denjenigen, der die methodologische Motivation zur Kontinuumssicht mitberücksicht. Wie so häufig ist also die Entscheidung zugunsten einer der beiden Anschauungen an *methodologische Bedingungen* geknüpft.

Der kontinuumsmechanische Zugang, als eine Anschauung oder als Interpretation verstanden, hat systematischen Vorrang gegenüber dem punktmechanischen Zugang, wenn folgende methodologische Zielsetzungen verfolgt werden.

I. Systemerweiterungen

Die dynamische Beschreibung deformierbarer Körper gehört zum *erweiterten* Bereich der rationalen Mechanik. Wie Truesdell immer wieder betont ist die Beschreibung von Deformationseigenschaften der Materie historisch wie aktuell die Motivation dafür, infinitesimale Momentengleichgewichte für alle Materialien grundlegend zu beschreiben.[302] Schon Euler hat mit dieser erweiterten Perspektive auf Dehnungszustände den Momentensatz stets als unabhängiges Prinzip behandelt.[303] Ausgangspunkt aller elastostatischen Betrachtungen, wie etwa das Biegungsverhalten von Körpern, sind

[302] „But in *elasticity* Newton's laws never have been and never can be sufficient: The simplest problems of elasticity rest essentially upon the balance of moments” (Truesdell [1968], S. 260). „*Everyone* in the eighteenth century who studied problems of elasticity invoked the principle of moments” (Truesdell [1968], S. 262).

[303] Siehe vor allem Truesdell [1964], S. 154; sowie Butterfield [2004], S. 36, Anm. 27.

immer Kräfte- *und* Momentenbilanz.[304] Die daran anknüpfende Kinetik der Massenelemente kann die gleichermaßen fundamentale Behandlung der Trägheitsmomente nicht ignorieren. Der *phänomenologische* Blick ist hier ein empiristisches Gebot und erzwingt die feldtheoretische Konzeption.[305]

So überragt der kontinuumsmechanische Zugang immer die bestehenden klassischen Objekte der Mechanik. Er ist geeignet, um systematische Erweiterungen der klassischen Grundprinzipien und -relationen zu erforschen. Truesdell [1952] zeigt deutlich, an welchen Gesetzen und Begriffen die Klassische Mechanik und lineare Elastizitätstheorie durch damals aktuelle Forschungsergebnisse auf nicht-lineare Effekte (Plastizität und Viskosität) hin zu erweitern wäre. Folgende einleitende Worte erläutern diese Perspektive:

> „In classical mechanics in this general sense occur two subjects of intensive current research: plastic deformation and turbulent flow. [...] I hope that what little I can present [...] will encourage the reader to question the all too common assumption that because physical matter is composed of molecules, a theory based on the crudest and most unrealistic molecular hypothesis is automatically preferable to any continuum theory. Indeed, I contend that gross phenomena are most naturally, accurately, and elegantly represented by gross hypotheses alone." (ebd., S. 81).

II. Fundierungsstreben

Zentrale Ausrichtung in Hamels Werk besteht darin, Hilberts sechstes Problems zu beantworten: die Klassische Mechanik axiomatisch zu fassen und die Frage des Grenzüberganges zwischen den verschiedenen Systemmechaniken zu klären. Beide Aspekte fallen in der Frage zusammen, welche *Grundbegriffe* der Klassischen Mechanik sich am besten eignen, die anderen Systemmechaniken logisch zu deduzieren. Wer wie Hamel, Noll und Truesdell diesen Fundierungsanspruch erhebt, wird in der Kontinuumsbegründung der Klassischen Mechanik eine *logische und konzeptuelle Überlegenheit* erkennen. Nicht zuletzt hat erstmals Hamel zeigen können, dass die feldtheoretischen Begriffe der Kontinuumsmechanik allgemein genug sind, um die klassischen Systemmechaniken folgen zu lassen.

> „The realization that the axioms of classical mechanics should be phrased in terms of continuous media rather than mass-points is not

[304] Man vergleiche zur Statik hier Abschnitt 3.3.2.

[305] Das wurde bereits in Abschnitt 3.5.2 deutlich und hat sich nun, besonders durch Hamels Untersuchungen, bestätigen können. Truesdell gebraucht sogar den phänomenologischen und feldtheoretischen Zugang zur Klassischen Mechanik synonym: „Theories expressed in terms of the field concept are called *phenomenological*, because they represent the immediate phenomena of experience, not attempting to explain them in terms of corpuscles or other inferred quantities." (Truesdell und Toupin [1960], S. 227)

> new. At the suggestion of Felix Klein, such a formulation was constructed long ago by Hamel. In this more general theory it is not force, but *stress*, which is of principal importance." (Truesdell [1952], S. 80).

Mit dem umfassenden Konzept der Spannung sind nur *einschränkende Randbedingungen* nötig, um die tragenden Begriffsschemen der Klassischen Mechanik zu deduzieren.[306] Dagegen sind für den Aufbau über die Punktelemente *erweiternde* Zusatzannahmen erforderlich: Es müssen zusätzliche und teilweise fragwürdige Definitionen zu Flächenkräften erklärt werden, um die Dynamik realer Körper zu erfassen. Die Fundierung zu einer einheitlichen Klassischen Mechanik erfordert allgemeine Grundbegriffe, die in der punktmechanischen Sicht fehlen:

> „[T]he 'lack of reality' in point masses may merely demonstrate that they do not provide the best *foundation* for *a satisfactory* classical mechanics [eigene Herv.]" (Wilson [1998], S. 255).

Ein Schluss

Ich möchte zusammenfassend an Duhems Bemerkung erinnern, dass die Grundlage eines jeden Gebietes der Wissenschaft von Bestrebungen, von Tendenzen, von Erwartungen und Intuitionen geprägt ist, unzerlegbar und eher durch *heuristische* Begründungsmomente zugänglich.[307] Der Gegensatz zwischen der Kontinuumssichtweise und der Punktanschauung innerhalb der Klassischen Mechanik ist ein hervorragendes Beispiel. Man mag von 'Sichtweisen' (Truesdell), von 'Zugängen' und 'Anschauungen' (Hamel) oder von 'Interpretationen' (Wilson) sprechen: Es ändert nichts an den subtilen Divergenzen, die einem auf *Ebene der Grundbegriffe* begegnen. Epistemologische, logische, methodologische Erwägungen prägen die Entscheidung für eine unabhängige Systemmechanik.

Es macht von einem logischen Standpunkt aus auch keinen Sinn, von einer 'wahren' Sichtweise im Fall der Kontinuumsmechanik zu sprechen, von einer 'falschen' im Fall der Punktmechanik, wie es manchmal Truesdell provoziert hat.[308] Man kann durchaus eine pragmatische Herangehensweise an die Grundbegriffe der Mechanik wählen. *Wenn* allerdings die obigen Bedingungen **(I)** und **(II)** - physikalische Allgemeinheit und logische Fundierung in der Rekonstruktion der mechanischen Grundbegriffe - angenommen werden, *dann* ist diese pragmatische Entscheidung unschlüssig. Das ist bei Truesdell mit 'falscher' Sicht gemeint: dass die Punktmechanik keinen *allgemeinen, schlüssigen* Begriffsrahmen zur dynamischen Beschreibungen ausgedehnter Körper bereitstellen kann. Diese Allgemeinheit und methodologische Schlüssigkeit wird durch obige Bedingungen gefordert.

[306] Vor allem das Verschwinden innerer Arbeit, wie in Abschnitt 3.7.5 erklärt.

[307] Siehe hier Abschnitt 2.7.

[308] Siehe etwa Truesdell [1952], S. 80.

Erst dann zeigt sich der harte Gegensatz der Systemmechaniken, der einem geradezu 'widersprüchlich' vorkommt:

> „The corpuscular theories and the field theories are mutually contradictory as direct models of nature".[309]

In diesem Sinne sind die Grundlagen der Mechanik *pragmatismusfeindlich* zu nennen. Sie sollen vielmehr zur philosophischen Reflexion der logisch-mathematischen Grenzen in der Physik beitragen; Grenzen, die durch ein zu pragmatisches Herangehen leichtfertig überspielt werden. Ich teile somit Wilsons Schlussbemerkung, dass

> „the deep philosophical heritage of classical mechanics is better appreciated if its basic internal tensions are more sympathetically understood." (Wilson [1998], S. 259).

Was bleibt ist ein *Gegensatz der Anschauungen*, ein unlösbarer *Interpretationsstreit*. Er steht am Anfang und am Ende der Grundlagenfragen, die Hamels Antworten zu Hilberts sechstem Problem und zur axiomatischen Methode motiviert haben: die internen Beziehungen zwischen den bewährten Gesetzen und Begriffen der Klassischen Mechanik besser zu verstehen.

[309] Zitiert aus Truesdell und Toupin [1960], S. 227. Truesdells Anstoß für diesen logischen Gegensatz ist das mathematische Argument, dass eine abzählbare Punktmenge niemals ein mathematisches Kontinuum ergibt (siehe dazu (V) in Abschnitt 3.7.1).

4 Einschränkungen und Übertreibungen: die Kontroverse um Hamels Grundlagen

4.1 Einleitende Übersicht

In diesem und dem noch folgenden Kapitel werde ich eine Auswahl an aktuell gebliebenen Themen um das Hilbertsche Problem und um den Lösungsvorschlag von Georg Hamel diskutieren. Welche wissenschaftsphilosophischen, welche physikalischen und welche methodologischen Lehren können wir aus dem Hilbertschen Problem und Hamels ersten Antworten ziehen? Meine Positionen sind in den meisten Fällen unmittelbare Schlussfolgerungen aus dem bisher Gesagten. Mein Hauptaugenmerk liegt dabei auf tatsächlichen und denkbaren Reaktionen auf Hamels Axiomatisierungen, da ich davon überzeugt bin, dass hierdurch Unklarheiten, Missverständnisse und nicht zuletzt mögliche Übertreibungen der axiomatischen Methode deutlicher zutage treten. Im Resultat schlage ich einen konstruktiven Umgang mit axiomatischen Aufbauten vor. Damit meine ich, dass es eine erkenntnistheoretische Bereicherung ist, wenn mehrere nebeneinander stehende Rekonstruktionen deduktiv vermittelt werden.

Beginnen werde ich mit wissenschaftsphilosophischen Resultaten aus Hamels Axiomatisierung der Mechanik, weil sie die weitere Diskussion mitgestalten. So zeigt Hamels Werk, dass die Rekonstruktion der Klassischen Mechanik unterschiedliche Zugänge und Anschauungen der Grundbegriffe beinhalten muss, damit ihre Zusammenhänge logisch weiter untersucht werden können. In wissenschaftsphilosophischen Diskussionen zur Klassischen Mechanik werden häufig anwendungsbezogene Modellierungsfragen mit rekonstruktiven Theoriebeschreibungen in einen künstlichen Gegensatz gestellt, um anschließend den Sinn einer logischen Analyse in Frage zu stellen. Dieser Einwand birgt allerdings die Gefahr, dass zu einseitig auf den praxisbezogenen, nützlichen Aspekt einer Theoriestruktur fokussiert wird, ohne der schematischen Formulierungsweise einen eigenständigen Platz einzuräumen.[1] Die vielseitige Interpretierbarkeit von Grundelementen und -gesetzen, der 'synthetische Charakter' empirischer Gesetzesformen, wie Hamel sagen würde, wird durch diesen Einwand eher verschleiert, gegen die eigentliche Intention der Kritiker.

So erhalten die Gesetzesformen ohne Grund etwas Mystisches, Ungreifbares, auf was man sich nicht eindeutig beziehen könne. Doch die Betonung

[1] In dieser Richtung sehe ich vor allem Mark Wilson, Ronald Giere, Stephen Toulmin, die unmittelbar zur Axiomatisierung in der Mechanik Stellung genommen haben, im weiteren Sinn aber auch Norwood Hanson und Thomas Kuhn.

der epistemologischen wie semantischen Seite von Gesetzesanwendungen, die Betonung des *Bedeutungskontextes* eines Gesetzes, ist *kein* Argument gegen den Formalismus, und schon gar nicht gegen den reflexiven Prozess der Axiomatisierung.[2] Die Argumentation muss zeigen können, ob sie von einem *logischen* Standpunkt der Grundlagen aus oder vom *anwendungsbezogenen* Standpunkt her ausgeht. Beide Standpunkte miteinander zu vermischen ist häufig Ursprung von argumentativen und sachlichen Unklarheiten.

Eine logische Rekonstruktion ist meines Erachtens so lange fruchtbar und förderlich, wie sie den synthetischen Charakter der mechanischen Grundbegriffe berücksichtigt.[3] Andernfalls besteht die Gefahr, dass dem Inhalt der Gesetze, ihrem möglichen Bedeutungsgehalt, etwas Wesentliches entzogen wird. Dies gilt vor allem, wenn man eine Theorie auf ihre formalisierten Gesetze beschränkt. Mit dieser These kehre ich schließlich zur Diskussion um den logischen Standard einer Theorie zurück.[4] Innerhalb der Klassischen Mechanik - und das gilt sicher erst recht für jede empirische Wissenschaft - genügt eine *informelle* Behandlung der logischen Deduktionen. Um ein Axiomensystem der Mechanik zu formulieren, genügt ein informeller Standard der Logizität.

Jede mengentheoretische Übersetzung enthält die Gefahr einer formalistischen Übertreibung, weil sie unüberwindbare Schwierigkeiten zeigt, den Bedeutungsgehalt eines Prinzips oder Axioms wiederzugeben. Mit dieser Position wende ich mich gegen die *semantische* (oder *modelltheoretische*) *Sichtweise* auf wissenschaftliche Theorien. Sie ist Mitte des 20. Jahrhunderts durch Patrick Suppes und anderen aus Stanford und Berkeley bekannt geworden. In ihrer Gründungsphase wurde damit der Anspruch erhoben, logisch ambivalente Formulierungen in Hamels Axiomen der Punktmechanik zu präzisieren.[5] Dabei wird die Theorie als die Menge ihrer logischen Modelle nach Alfred Tarski verstanden und das Axiomensystem durch eine formale Struktur beschrieben. Die provokante These dieser Sichtweise ist nun, dass die formale Struktur zur Identifikation der Theorie hinreichen würde. Allein schon die vielfältigen Modellierungsmöglichkeiten des Kraftbegriffs[6] machen diese These mehr als fragwürdig. Die empirischen Modelle der Klassischen Mechanik werden zugunsten der logischen Analyse beschränkt und minimalisiert. Es besteht die Gefahr eines *inhaltlichen Verlustes* durch diesen modelltheoretischen Zugang.

Problematisch bleibt, dass Tarskis metamathematischer Methodenmo-

[2] Insofern greife ich in diesem Kapitel die Einwände aus dem früheren Teil 2.6 wieder auf, um jetzt zielgenauer anhand der Klassischen Mechanik zu argumentieren.

[3] Zum 'synthetischen Charakter' siehe Abschnitt 3.6.3.

[4] In Abschnitt 2.5 habe ich drei Konzeptionen der Logizität einer Theorie unterschieden, die in meiner Untersuchung bestimmend sind.

[5] Das ist insbesondere der Artikel McKinsey u. a. [1953].

[6] Siehe hier Abschnitt 3.6.3.

nismus in der semantischen Sichtweise auf alle physikalischen Theorien übertragen wird. Die methodologische Einheitlichkeit der Modelltheorie und ihre Handlichkeit bei Rekonstruktionsaufgaben sollten damals der Hauptanreiz sein, sich auch auf außermathematischem Gebiet primär von metasprachlichen und nicht von physikalischen Zielsetzungen leiten zu lassen. Doch meines Erachtens werden damit metalogische Zielsetzungen nach Widerspruchslosigkeit, Unabhängigkeit oder sogar nach vollständiger Beweisbarkeit übertrieben: Sie sind für empirische Theorien keine zwingenden Gütekriterien, nach denen für oder gegen einen Zugang zur Klassischen Mechanik entschieden wird. Dass die Punktmechanik vielleicht widerspruchsfrei sein mag, macht sie als Theorie nicht empirisch angemessener als eine andere Systemmechanik, die eventuell nicht widerspruchsfrei ist.[7]

Hatte Hilbert selbst noch offen gelassen, ob die axiomatische Methode in Richtung Begriffskonstitution oder metalogischer Analyse geht, so scheint sich mit Blick auf Hamels Lösung eine klare Richtung zu ergeben.[8] *Keine Axiomatisierung zum Preis eines Inhaltsverlustes*, so der hieraus resultierende Leitgedanke. Die modelltheoretische Sichtweise zeigt uns diese Grenze der sinnvollen Formalisierung von Theorien auf.

4.2 Reaktionen auf Hamels Axiomatisierung der Klassischen Mechanik

Die Überschrift soll nicht den Eindruck erwecken, als habe es tatsächlich eine breite Diskussion um Hamels Axiome der Mechanik gegeben. Dem war nicht so. Wie ich schon in Teil 3.1 erwähnt habe, wird Hamels Werk mit Ausnahme von einzelnen Grundlagenforschern und Logikern nicht zur Kenntnis genommen. Auch aktuellere Untersuchungen um Hilberts Problem gehen nicht auf sein Werk ein.[9] Derzeit erkennt Mark Wilson die 'Pionierleistung' Hamels in den Grundlagenproblemen,[10] diskutiert Hamels Beitrag aber nicht, um die konzeptionellen Differenzen innerhalb der Klassischen Mechanik zu verdeutlichen. Zu den Gründen komme ich im folgenden Teil.

Doch erheben sich jetzt, nach nunmehr einem Jahrhundert, Stimmen für

[7] Man denke nur an das mehrfach hier angesprochene Phänomen der Gleitreibungseffekte (Abschnitte 2.3.7 und 3.8.1).

[8] Zu diesem methodologischen Aspekt bei Hilbert siehe Abschnitt 2.9.

[9] In Corry [2004], S. 178, wird zwar Hamels Werk erwähnt, aber eine wenn auch kurze Diskussion der Inhalte, als erste Lösung des Hilbertschen Problems, 'überschreite die Reichweite' seines wissenschaftshistorischen Buchs. Völlig ignoriert wird Hamels Beitrag in Bunge [1967a], wenn es auf Seite 128 heißt: „When the foundations of mechanics are mentioned most physicists think of *Mach*, a few of *Hertz*, practically none of the modern work by *McKinsey* and *Suppes*, *Noll*, and *Truesdell*."

[10] Siehe Wilson [2013], S. 48, vermutlich anlehnend an Truesdells Bemerkungen, wie sie auch hier in Abschnitt 3.1 wiedergegeben sind.

eine Philosophie der Mechanik, die bei Hamels Grundlagen ansetzt, dort eine Anfangsperspektive sucht und weiterentwickelt wird. Diesem Ansatz folgend, will ich die philosophische Diskussion um die Grundlagen der Mechanik bei Hamels Lösungsvorschlag zu Hilberts Problem anfangen. Ich glaube, es wäre zunächst aufschlussreich, wenn Gründe dafür gesucht werden, warum Hamels Grundlagen so geringe Aufmerksamkeit in Kreisen der theoretischen Physik und der Philosophie erhalten haben. Die 'Reaktionen' beinhalten also reale wie mögliche Einwände, Kommentierungen und Fortsetzungen zu Hamels Beitrag.

Hamels persönliches Umfeld

Mir ist nicht bekannt, dass Hamel selbst den Kontakt zu wissenschaftsphilosophischen Kreisen (wie vor ihm etwa Boltzmann und Hilbert) aktiv gesucht hat. Als erfolgreicher Wissenschaftler auf dem Gebiet der Technischen Mechanik, mit Lehrstühlen in Brünn und später Berlin, waren seine Studien zur Axiomatisierung allein vom Gebiet der Mechanik her motiviert und führten auch nicht hierüber hinaus zu anderen Bereichen der Physik.[11] Er war überzeugt davon, dass die Mechanik einer rationalen Reorganisation bedarf, und hierfür hat er wie selbstverständlich die axiomatische Methode gewählt. Sich mit wissenschaftsphilosophischen Fragen zu den mechanischen Grundbegriffe auseinanderzusetzen, war dabei eher ein privater Anspruch Hamels, was ihm auf Seiten seiner technischen Kollegen bald den Ruf eines 'tiefgründigen Kenners der Mechanik' einbrachte.[12] Über eine kritische Auseinandersetzung mit Hamels Axiomen zur Mechanik während der Publikationsphase seitens der technischen und mathematischen Kollegen fehlen allerdings jegliche Hinweise.

Auch Hilbert selbst hat nicht dazu beigetragen, dass Hamels Antworten auf sein sechstes Problem Aufmerksamkeit erhalten.[13] Bekanntlich gibt es von ihm keine eigenen Veröffentlichungen zur Axiomatisierung der Klassischen Mechanik, wofür die unterschiedlichsten Gründe zu nennen wären, auf die ich hier aber nicht eingehen kann. Jedenfalls sollte man den Wert der Hamelschen Beiträge nicht daran messen, ob sie von Hilbert selbst kom-

[11] Neben Hilbert in Göttigen hat der persönliche Kontakt zu Richard von Mises in Brünn Hamels Interesse für erkenntnistheoretische Fragen zur Mechanik belebt, wie aus Hamel [1909b], S. 357 Anm.1, hervorgeht.

[12] Siehe dazu Schmeidler [1955], S. 3. Wie schon zu Beginn von Teil 3.7 erwähnt, dürfen die frühen Artikel Hamel [1909a] und Hamel [1909b] als Weichenstellung für das gesamte spätere Werk angesehen werden, es gibt in Fragen der Grundbegriffe keine gravierenden Revisionen. Vermutlich fallen Hamels philosophische Studien eher in die Phase seiner Promotion in Göttingen und seiner Habilitation in Karlsruhe.

[13] Interessierte Notiz genommen hat Hilbert durchaus, das belegt etwa sein handschriftlicher Hinweis auf Hamel [1909a], der von Hilbert in das Skript Hilbert [1905] nachträglich ergänzt wurde. In einem Brief datiert vom 9.4.1912 (im Hilbert-Nachlass der Staatsbibliothek Göttingen, Cod.Ms.D.Hilbert 131) bedankt sich Hamel für die 'freundlichen Zeilen', die Hilbert ihm zu seinem gerade erschienenen Lehrbuch übersendet hat.

mentiert wurden.[14]

Die physikalische Fachwelt
Das fehlende Interesse seitens der Physiker ist dagegen deutlicher ersichtlich. Was sowohl die Axiomatisierung als auch die physikalischen Grenzfallbetrachtungen betrifft, so galten sie als fachinterne theoretische Probleme, von denen keine aussichtsreichen neuartigen Forschungshorizonte zu erwarten waren. Ich glaube, dass kein Physiker den anschaulichen Gegensatz der Systemmechaniken als echte 'Anomalie' wahrgenommen hätte. Vielmehr wurde deutlich, dass mit den damals neuartigen quantenhaften Eigenschaften der Materie die Grenzen mechanistischer Modellierungsmöglichkeiten erreicht wurden.[15] Die theoretische Physik stand vor der Herausforderung, neue Grundbegriffe und -gesetze der Mikrowelt zu finden, neue Begriffsstrukturen, von denen man wusste, dass sie nicht mit den klassischen Konzepten kommensurabel sein würden.

> „In the first half of the twentieth century, the quantum and relativity revolutions tended to distract physicists, and thereby philosophers, from these and similar problems. The excitement of developing the new theories, and of debating their implications for natural philosophy, made it understandable, even inevitable, that the foundational problems of classical mechanics were ignored."[16]

Mit anderen Worten, in der Welt der forschenden Physik war es mit Fug und Recht kein Mittel der Wahl, den regressiven Weg zu gehen, um die klassischen Elemente und ihre internen Ambivalenzen zu rekonstruieren. Auch der Lehrbetrieb hat sich wie bisher mit pragmatischen Lösungen bei Grenzprozessen zufrieden geben können.

Der logische Empirismus
So kann es nicht verwundern, wenn auch die damals einflussreichste Strömung der Wissenschaftsphilosophie, der logische Empirismus, keine Notiz genommen hat. Mit der Idee einer universellen 'Wissenschaftslogik' wurde gleichzeitig die Notwendigkeit verbunden, physikalische Theorien logisch so zu rekonstruieren, dass versteckte metaphysische Annahmen aufgedeckt werden. Dieser 'Received View' des Logischen Empirismus, wie er vor allem in den Schriften Rudolf Carnaps zu finden ist, fordert von Beginn an formale und axiomatische Präzision in der Darstellung einer physi-

[14] Diesen Hinweis verdanke ich einer Mitteilung von Professor Ulrich Majer. Offenbar war es eher eine außergewöhnliche Auszeichnung, wenn Hilbert jemanden in seinen Veröffentlichungen oder Vorlesungen namentlich erwähnt hat. Siehe hierzu auch Anm. 35 in Abschnitt 3.3.2.

[15] Hierauf bin ich bereits in Teil 3.5 eingegangen.

[16] Zitiert aus Butterfield [2007], S. 3. Siehe dazu auch hier Abschnitt 3.5.2.

kalischen Theorie.[17] Die programmatische Ausrichtung des logischen Empirismus beinhaltete aber zunächst die allgemeine Konzeption einer Wissenschaftssprache, von der aus die anschließenden Fallbeispiele aus den wissenschaftlichen Disziplinen ergänzt und angepasst werden sollten. Einzelsysteme, umfassende Beispiele waren also *zunächst* nicht im Blickfeld, als damals die allgemeinen Rahmenbedingungen des Programms untersucht wurden.

Dass also Hamels Werk von Carnap und anderen nicht erwähnt wird, hat gewiss keine physikalischen oder systematischen Gründe, auch wenn es unterschiedliche Auffassungen geben dürfte. Ein echter Streitpunkt wäre sicherlich Hamels Interpretation des Kraftbegriffs als neue Variante eines 'synthetischen Urteils a priori', wie hier in Abschnitt 3.6.3 gesehen. Urteile dieser Art sind nach Hamel nicht nur möglich, sondern praktische Bedingung jeder mechanischen Wissenschaft. Sie wurden aber vom logischen Empirismus bekanntlich abgelehnt.[18]

Hamel hat dem Instrument der formallogischen Rekonstruktion auf dem Gebiet der Physik einen deutlich geringeren Stellenwert beigemessen als Carnap und andere, nicht zuletzt weil er in der 'synthetischen Methode' der Mechanik eine unüberwindbare logische Grenze gesehen hat. Es wäre durchaus sinnvoll und aufschlussreich, den Received View und die damaligen Grundlagen der Mechanik in den Kontext der logischen Formalisierung einer physikalischen Theorie zu stellen. Ich bin überzeugt, dass hier viele Gemeinsamkeiten mit späteren Rekonstruktionen von Teilen der Klassischen Mechanik aufgedeckt werden können, die der modelltheoretischen Sichtweise entspringen.

„I have not studied the works of Carnap", bedauert auch später noch Truesdell, weil er sich nicht in der Lage sieht, die Weggabelung zwischen formalistischen, semantischen und informellen Beschreibungen der Klassischen Mechanik historisch zurückzuverfolgen. Aber:

> „Some who have done so [...] say [...] he advocated use of formal logic in regard to existing informal theories not as an end in itself but to clear up questionable points, mainly regarding foundations, in ordinary mathematical treatments." (Truesdell [1984d], S. 506)

In dieser programmatischen Ausrichtung der formalen Logik, ob sie nun im Detail erfüllbar ist oder nicht, sehe auch ich die volle Berechtigung eines formalistischen Ansatzes, wie ihn der Received View begreift. Sie beinhaltet die alte Vorstellung der logischen Begriffsanalyse, die in Hilberts Axiomatisierung an erster Stelle verankert ist: die Grundbegriffe einer Theorie durch implizite Definitionen mathematisch zu präzisieren.[19]

---

[17] Siehe dazu Abschnitt 2.5, Neurath u. a. [1929], S. 310; Carnap [1934], §§ 25 u. 73; sowie Suppe [1977a], Seiten 12 und 63.

[18] Siehe etwa Neurath u. a. [1929], S. 307.

[19] Siehe dazu die ursprüngliche Auffassung in Neurath u. a. [1929], S. 310.

Hamels Grundlagen der Mechanik als Ausgangspunkt wissenschaftsphilosophischer Kritik

So blieb es bei einzelnen Grundlagenforschern aus der Philosophie, Mathematik und Logik Mitte des 20. Jahrhunderts, die den Wert der Grundlagen nach Hamel erkannten und versuchten, sie in unterschiedlichen Richtungen zu verbessern und zu erweitern. Das sind mit direktem Bezug auf Hamels Schriften Clifford Truesdell und Patrick Suppes, ohne direkte Auseinandersetzung mit Hamels Axiomen auch Hans Hermes und Walter Noll. Die Motivationen aller Nachfolger sind sehr verschieden, mit unterschiedlichsten Vorstellungen von der axiomatischen Methode. Während etwa Truesdell und Noll wie schon Hamel versuchen, weitere alternative Rekonstruktionen in der Kontinuumsmechanik zu erzielen, stehen bei Hermes und Suppes logische und metamathematische Zielsetzungen im Vordergrund. Es ging darum, einen neuartigen logischen Formalismus (den typenlogischen und den mengentheoretischen Kalkül) auf die Mechanik anzuwenden.

Ich möchte im Folgenden die Axiomatisierung Hamels in einen allgemeinen Kontext der Wissenschaftsphilosophie stellen, um damit anschließend verdeutlichen zu können, dass der Gegensatz zwischen Begriffsanalyse und Metamathematik in der axiomatischen Methode unaufgelöst bleibt. Es handelt sich um zwei Schwerpunkte und Ausgestaltungen, die in Hamels Axiomen noch nicht festgelegt sind. Das wird meine Behauptung stützen, dass die Axiomatisierung der Mechanik ein *logisch informeller* Prozess ist, wenn sie vorrangig auf regressive Begriffsanalyse abzielt.

Zugegeben, Georg Hamels eigene Ausführungen sind schwerfällig, kurz und vage, gerade dann, wenn er die Fachsprache der Mechanik verlässt und erkenntnistheoretische wie naturphilosophische Perspektiven eröffnet. Dennoch glaube ich, dass Hamel diese wichtige Dimensionen der regressiven Theoretisierung in der Mechanik so ausgeführt hat, dass sie eine bleibende Perspektive für weitere Axiomatisierungen, auch in anderen Gebieten der mathematischen Wissenschaften, aufzeigen kann.

4.3 Wissenschaftsphilosophische Perspektiven von Hamels Grundlagen der Mechanik

4.3.1 Wilsons Problem mit Axiomatisierungen der Klassischen Mechanik

Antworten auf Hilberts sechstes Problem können nicht eindeutig ausfallen. Die Klassische Mechanik hat auf der Ebene seiner grundlegenden Begriffsschemen etwas Ungreifbares, ja etwas Gespenstisches, da je nach Modell und Anschauung immer ein bestimmtes Merkmal der dynamischen Körper hervorgehoben wird, ein anderes Merkmal dagegen in den Hintergrund tritt. Eine zentrale Feststellung Mark Wilsons in der aktuellen Diskussion um die Klassische Mechanik des 20. Jahrhunderts ist, dass trotz der scheinbaren Abgeschlossenheit der Theorie man niemals zu allgemeingültigen Begriffsschemen gelangt, da wir bei jedem Modellierungsprozess mit unvermeidbaren Mehrwertigkeiten ('multi-valuedness') der mechanischen Grundbegriffe, wie er es nennt, konfrontiert werden: und zwar „in the sense that our different patches will often describe the same physical system in mutually incompatible ways" (Wilson [2006], S. 5).

Ein Körper ist *je nach gesetztem Modellierungsfokus* entweder ein Massenpunkt, ein starrer Körper oder ein Kontinuum. Und selbst diese Einteilung kann keine absolute, statische Setzung sein: In einem weiteren Anwendungskontext wäre es etwa erforderlich, den starren Körper wieder als eine Zusammensetzung aus Punktmassen mit Potentialen zu konzipieren. Zum Verständnis des Restitutionskoeffizienten bei Kollisionen etwa oder zur Erklärung von Schallausbreitungen durch die Kollision muss die absolute Starre zugunsten minimaler Dehnungen weichen und der Körper als flexibles Kontinuum modelliert werden.[20] Für effektive Modellierungen innerhalb der Klassischen Mechanik werden demnach Beschreibungslücken ('descriptive gaps'), Begründungsschleifen ('foundational loopings'), und Übergänge zwischen verschiedenen Begriffsstrukturen stillschweigend hingenommen.[21]

Das feste Zugrundelegen einer begrifflichen Struktur wäre also nach Wilson, mit anwendungsbezogenem Blick auf die Klassische Mechanik, wie sie in der physikalischen Praxis üblich ist, nicht nur unnütz, sondern geradezu realitätsfern.[22] Die Beschreibung der makroskopischen Welt der trägen Massen scheint ohne semantische Mehrwertigkeiten der Grundbegriffe nicht möglich. Nicht anders lässt sich verstehen, dass die Klassische Mechanik überhaupt in drei etablierten Systemmechaniken der Punktmassen, der starren Körper und Kontinua beschrieben wird, die alle in Hilberts

[20] Zu den Restitutionskoeffizienten siehe etwa Hamel [1912], S. 445; zur Theorie der Wellenausbreitung in elastischen Medien und Flüssigkeiten etwa Sommerfeld [1992], §13; Fung und Tong [2001], Kap. 7.8 –7.10.

[21] So genannt in Wilson [2009], S. 174, und Wilson [2006], S. 4.

[22] Siehe vor allem Wilson [2009], S. 174; Wilson [2013], Seiten 48 f., 57 f. und 104.

eigener Kommentierung gewissermaßen den mehrdimensionalen Zugang zu dem Problem der Grenzprozesse eröffnen.[23]

Wilsons Hinweis ist richtig, dass man von einer Axiomatisierung der Klassischen Mechanik verlangen könne, diese verschiedenen Zugänge[24] gleichermaßen zu umfassen, um logische Grenzübergänge zwischen den Zugängen darstellen zu können. Dabei werden diese Zugänge direkt mit makroskopischen gegenüber feinskalierten, mikroskopischen Anwendungsbereichen in Verbindung gebracht, mit ΔL gegenüber ΔL^* bezeichnet.

> „Prima facie, we might reasonably expect that it should prove possible to formalize any of our three basic ontologies independently of one another, placing them on their own bottoms, as it were. Thus Hilbert probably anticipated that we should be able to frame *distinct axiomatic encapsulations* [eigene Herv.] for point masses, rigid bodies and flexible bodies and then proceed to investigate how ably such formalisms relate to one another under ΔL to ΔL^* shifts." (Wilson [2013], S. 56)

Wilson erwägt hier eine Repräsentation der Klassischen Mechanik, die letztlich in Hamels ≫*Axiome der Mechanik*≪ tatsächlich umgesetzt wurde, ohne aber hierauf Bezug zu nehmen. Die Klassische Mechanik unterliegt demnach einem gemeinsamen Untergrund an protophysikalischen, epistemologischen und dynamischen Prinzipien unter dem Begriff des 'Newtonschen Grundgesetzes'. Von dort aus lässt sich die Mechanik je nach methodologischen und anschaulichen Erwägungen zu einem System ausbilden, dem verschiedene Grundgesetze und -begriffe entsprechen.[25] In Hamels Fassung sind diese unterschiedlichen Zugänge, Grundbegriffe und Systemmechaniken axiomatisch gefasst. Dennoch bleibt Wilson reserviert gegenüber axiomatischen Darstellungen in der Klassischen Mechanik.

> „Indeed, Hilberts own lectures in 1905 [d.i. Hilbert [1905]] and the pioneering efforts of his student, Georg Hamel, comprised early landmarks along this long and tortuous development. [Hier wird auf Hamel [1967a] hingewiesen.] The only anti-Hilbertian moral we will extract from our examination is that a descriptive regime can often address large-scale objects more successfully if its underpinnings are structured in an overall 'theory facade' manner somewhat at odds with standard axiomatic expectations." (Wilson [2013], S. 48)

[23] Man vergleiche auch hier Abschnitt 3.2. Ich bin davon überzeugt, dass die 'Mehrwertigkeit' auf semantischer Ebene stattfindet und nicht die Aufgabe des *Bivalenzprinzips* der klassischen Logik beinhaltet. Diese Eingrenzung ist bei Wilson nicht deutlich.

[24] Er spricht von 'Ontologien', vermutlich im Quineschen Sinn, dass der jeweils intendierte Grundbereich, auf den die Variablen der mechanischen Gesetze referieren, die ontologischen Voraussetzungen festlegt. Ich habe am Ende von Abschn. 2.3.3 darauf hingewiesen, dass ontologische Bekenntnisse zu Fehlvorstellungen in den Grundlagen führen können.

[25] Siehe hier Teil 3.6.

Wilson hat also ein Problem mit dem überlieferten Axiomatisierungsstandard, weil es lediglich darum gehe, die fundamentale Struktur der Theorie (die 'Theoriefassade') soweit zu repräsentieren, dass die jeweiligen „modeling techniques can be located" (ebd., S. 57). Und gerade „from an applicational point of view" (ebd., S. 57) sei die axiomatische Methode bisher nicht in der Lage, flexible Rekonzeptionen anzubieten, die Verschiebungen von einer Systemmechanik zur anderen mitmachen würden:

> „But axiomatic presentations rarely include provisos for ontology shifts. Instead, we anticipate that their *formal tenets* [eigene Herv.] will supply behavioral principles applicable to its ontology in all circumstances, even if, in real-life practice, we would normally escape such descriptive straightjackets in favor of some revised treatment [...]. " (Wilson [2013], S. 56)

Ich glaube, dass Wilsons Schluss auf die realitätsferne 'Zwangsjacke' der aktuellen Axiomatisierungen in der Klassischen Mechanik richtig *wäre, wenn* die Gründe hierfür stimmen würden, dass die axiomatische Methode nur 'formalen Grundsätzen' folgt. Aus 'anwendungsbezoger Sicht', mehr noch „from the perspective of brute pragmatics" (ebd., S. 104), müsste dann ein axiomatisches Vorhaben an der Realität scheitern. Ich halte dies aber für eine Fehleinschätzung der axiomatischen Methode.

Der anwendungsbezogene gegenüber dem formalen Standpunkt

Es wurde hier mehrfach illustriert, dass Grundlagenforscher und Logiker pragmatische Begründungen von anwendungsorientierten Darstellungen zurückweisen. Sie bemessen die Darstellung der Mechanik daran, ob sie sich als ein logisch fundiertes Begriffsschema eignet. Und die kann womöglich alles andere als handlich, nützlich und didaktisch greifbar sein. Ihre Zielsetzung beschränkt sich darauf, die Klassische Mechanik intern zu vereinheitlichen, ihre Struktur besser zu verstehen.[26] So gesehen argumentiert Wilson gar nicht gegen die Grundlagendiskussion, sondern schätzt ihre Zielsetzung nur falsch ein, wenn er behauptet, es sei „unwise to push a formalism's axiomatized coverage beyond the limits of its real-life modeling effectiveness" (Wilson [2013], S. 57).

Außerdem ist es völlig unklar, ob und wie eine Formalisierung seine eigenen Anwendungen bezeichnen kann. Es scheint offensichtlich, dass keine Gesetzesform irgendwelche bedeutungsgebenden Relationen mitführen kann, um „den Bereich ihrer eigenen Anwendungen zu konstituieren".[27] Das ist die ganz naive Feststellung, dass eine *Aussageform* '$P(x)$' nicht *zeigen* kann, dass sie in einem Modell als Aussage 'a ist ein Partikel', in einem anderen Modell als Aussage 'Aristoteles ist ein Philosoph' realisiert

[26] Das wurde bereits hier in 3.1 und 3.9 betont. Man vergleiche auch mit dem 'pragmatischen Einwand' in 2.6. Zur internen Vereinheitlichung siehe 2.8.

[27] So Kambartel [1968], S. 168, mit Bezug auf Hilberts Erklärung über mathematische Strukturen, die hier auf Seite 54 zu finden ist.

werden kann. Die Erfüllbarkeitsbeziehung, nach der 'a' für 'x' und 'ist ein Partikel' für 'P' substituiert wird, bekommt durch außersprachliche Bedeutungsträger ihren Wahrheitsgehalt, nicht die Substitution selbst macht die Aussage wahr.[28] '$P(x)$' ist also bloß logische Form, *ist* weder das Modell, noch *zeigt* es eine mögliche Modellmenge.[29]

Auch Hamel scheint diese Überlegung gehabt zu haben, wenn er in Hamel [1909b], S. 358, auf 'reine Logik' zu sprechen kommt und sie als Instrument zur Untersuchung von prädikativen Satzformen versteht:

> „[I]nhaltlich aber entstammen die Axiome und damit auch die Begriffe [der Mechanik] ganz anderen Erkenntnisquellen als der reinen Logik. [...] Denn reine Logik hat es mit Sätzen zu tun; Sätze aber sagen Beziehungen aus zwischen Begriffen, *geben aber die Begriffe selbst nicht* [eigene Herv.]. Reine Logik gibt nur eine Form, die verschiedenen Inhalt haben kann."

Es ist zu bezweifeln, dass ein Formalismus alle seine 'intendierten empirischen Anwendungen' bezeichnen kann. Keine umgangssprachliche Semantik und schon gar keine extensionale Erfüllbarkeitsrelation auf eine abstrakte Modellmenge kann das leisten. Wilson trifft also wieder nicht die Grundlagendiskussion, wenn es heißt:

> „[C]onventional axiomatized theories are expected to supply principles that can govern even the bad spots within *their ranges of empirical coverage* [eigene Herv.]" (Wilson [2013], S. 57).

Es wird nötig sein, den formalen Bezug vom anwendungsorientierten Bezug zu den Grundlagen der Mechanik deutlicher voneinander zu trennen. Für beide Standpunkte muss deutlicher definiert werden, was es heißt, sich auf einen Formalismus der Klassischen Mechanik zu beziehen. Ich werde auf diese Differenzierung in Teil 4.4 zurückkommen.

So stichhaltig die Argumentation Wilsons auch sein mag, würde man die Prämissen akzeptieren, so kann ich doch nicht einsehen, warum die Grundlagen der Mechanik aus einer anwendungsbezogenen Perspektive zu rekonstruieren sind. Abgesehen davon bin ich mir sicher, dass so etwas wie 'anwendungsbezogene Grundlagen', würde es überhaupt gelingen sie zu skizzieren, inkonsequent und obsolet erscheinen müssten. Wissenschaftsphilosophen mit einer anwendungsbezogenen, explorativen und

[28] Die logische *Wahrheitskonvention* nach Tarski [1936] definiert diese formale Abhängigkeit für syntaktisch abgeschlossene Objektsprachen. Diese präzise Rekonstruktion Tarskis ist epistemologisch neutral, wie auch Haack [1978], S. 110 f., mit Tarski [1944] erklärt, und kann in formalen Anwendungen keinesfalls in Frage gestellt werden. Ich bezweifle nur (entsprechend Haack [1978], S. 113 f.) die übertragene Anwendung der Konvention auf 'faktische Wahrheiten' im Bereich der Naturwissenschaften, die durch 'außer-sprachliche' Bedeutungsträger simuliert werden müssten. Dort kann die Semantik nichts aussagen. Hierauf gehe ich in Teil 4.5 weiter ein.

[29] Siehe dazu Kambartel [1968], S. 197.

didaktischen Sicht auf die Klassische Mechanik bemühen sich zu wenig, die regressive Eigenart des Fundierungsstrebens in den Grundlagen nachzuvollziehen. Die Befürworter der axiomatischen Methode, die ein Gehör in der Wissenschaftsphilosophie gefunden haben - und das sind vor allem die Verteidiger des Semantic Views nach Suppes u.a. - haben im Gegenzug in der Vergangenheit zu wenig Aufwand betrieben, diesem Vorwurf der realitätsfernen Zwangsjacke entgegenzutreten, so meine Einschätzung. Die folgenden Abschnitte sollen ein Anstoß dazu sein, wie die axiomatischen Bemühungen in den Grundlagen neben dem pragmatisch orientierten Anwendungsbezug bestehen können.

4.3.2 Das disjunktive Axiomensystem der Klassischen Mechanik

Ein flexibler Formalismus in der Klassischen Mechanik wird nicht erst durch Mark Wilson in die Wissenschaftsphilosophie gebracht. Neuartig ist allerdings, dass er, wie er sagt, die 'Erwartung' an axiomatischen Repräsentationen daran misst, ob die vielseitigen, mehrdeutigen Zugänge zur Klassischen Mechanik sichtbar werden. Diese axiomatische Ausgestaltung ist zu Teilen Georg Hamel gelungen. Ich will sie hier an drei Merkmalen kenntlich machen.

- **Pluralität der axiomatischen Zugänge**
  Das ist zum einen die Einsicht, dass es nicht *die eine* Axiomatisierung der Klassischen Mechanik geben kann. Das betrifft sowohl die Prinzipien und Grundbegriffe als auch die geometrischen, anschaulichen Realisierungen, welche bei Hamel unter der 'synthetischen Methode' zusammengefasst sind.[30] Erinnert sei hier nur an Hamels Vorstellung, was alles der Kraftbegriff in der Mechanik bedeuten *kann*. Die Form (oder Struktur) des Newtonschen Grundgesetzes $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ bedeutet je nach Modellierung als Punktmasse, als starrer Körper oder als Kontinuum, und je nach statischen oder kinematischen Voraussetzungen an $\vec{F}$, etwas völlig Verschiedliches. Äußerlich lässt sich der Struktur des Newtonschen Grundgesetzes nicht ansehen, ob es in einem punktmechanischen Modell angewendet wird, d.h. m als Schwerpunktmasse interpretiert wird, oder ob es etwa nach dem d'Alembertschen Prinzip durch Massenelemente m mit starren Verbindungen realisiert wird.[31] Das Kraftgesetz ist also immer eine implizite Definition, eine *Struktur*, die aber *ohne* Interpretation innerhalb einer Systemmechanik nichts ist.

[30] Ich bin hierauf in Teil 3.6 näher eingegangen.

[31] Dieses Beispiel wurde in Abschnitt 3.6.3 genauer erklärt.

- **Der hypothetisch-synthetische Charakter der mechanischen Axiome**
  Die 'Pluralität der Zugänge' scheint eine Besonderheit aller empirischen Theorien zu sein. Man kann auch sagen, der Formalismus ist nicht streng von seinen vielfältigen Interpretationen unterscheidbar. Eine Interpretation als *bedeutungsvolle* Repräsentation der Klassischen Mechanik hat neben logisch-semantischen Elementen auch *anschauliche* und *kreative* Elemente, die nicht extensional erfassbar sind. Das heißt, sie lassen sich nicht durch funktionale Zuordnungen bezeichnen. Im Gegensatz zu mathematischen Theorien muss die empirische Bedeutung zur Form ergänzt werden.[32]
  Das Nebeneinander mehrerer Anschauungen und Formalismen ist eine *Forderung* der physikalischen Korrektheit. Wenn also die Klassische Mechanik synthetische Bestandteile besitzt, dann muss das *in* den Axiomen der Mechanik zum Ausdruck kommen, und sei es als *explizite* Forderung. Die axiomatische Forderung ist dann aber selbst nichts Statisches, Unveränderliches, sondern eher eine *Hypothese*. Sie bleibt durch die axiomatische Methode stets revidierbar, mit allen systematischen Konsequenzen für die Theorie.

- **Informalität der empirischen Aussagen**
  Indem das 'Hypothetische' der empirischen Wissenschaft der Mechanik in die Axiome explizit aufgenommen wird, verliert die axiomatische Methode unmittelbar den Status eines formalisierten Systems. Die Klassische Mechanik ist kein vollständig formalisierbares System, das auch nur partiell mit vermeintlich 'vollständigen' Begrifflichkeiten abgeschlossen werden kann. Empirische Forderungen sind Angelegenheit der Umgangssprache und keine Sache einer mehr oder minder formalisierten Semantik. Die Sprache und Logik der axiomatisierten Mechanik bleibt also *informell*.[33] Und wenn die 'Vollständigkeit' eines Begriffssystems der Mechanik axiomatisch behauptet wird, dann handelt es sich bestenfalls um eine formal unbeweisbare Hypothese.

Ich glaube, dass diese Besinnung auf informelle und synthetische Elemente eines Axiomensystems keine methodologischen Nachteile oder Einschränkungen bedeuten. Die einzige Preisgabe wäre der metamathematische Nachweis einer begrifflichen oder systematischen 'Vollständigkeit' der Mechanik. Die Frage nach begrifflicher und deduktiver Vollständigkeit außer Acht zu lassen, heißt aber keinesfalls, die axiomatische Methode selbst aufzugeben. Man setzt einfach die systematischen Anforderungen nicht so hoch an, indem man metamathematische Zielsetzungen zunächst ausklam-

[32] Man vergleiche hier mit demselben Ergebnis aus Abschnitt 2.7.

[33] Dass es auf einen informellen Gebrauch logisch-semantischer Beweisverfahren hinausläuft, wurde bereits in Abschnitt 2.5 thematisiert.

mert. Vollständigkeit im *logisch* verstandenen Sinn scheint ohnehin kein erreichbares Gütesiegel von mechanischen Theorien zu sein, im Gegensatz zu Fragen der Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit, die auch informell geführt werden können.[34]

Das hypothetische Theorienverständnis, das der axiomatischen Methode nach Hilbert zugrunde liegt, beinhaltet die Vorstellung, dass die einzelnen unabhängigen Axiome sich zu einer einheitlichen und eindeutigen Konjunktion zusammensetzen, die dann gemeinsam mit allen Folgerungen *die Theorie* bilden.[35] Nach Hamels Konzeption können dagegen mechanische Prinzipien und Grundbegriffe auch *disjunktiv* zueinander stehen. Das ist insofern mit dem hypothetischen Theorienverständnis vereinbar, als eine Disjunktion an Voraussetzungen die Gesamtheit der Folgerungen aus den Grundsätzen der Theorie nicht verändert. Die Theorie wird lediglich durch weitere Alternativen bereichert. Verschiedene Zugänge zur Klassischen Mechanik nebeneinanderzustellen ist keine Inkonsequenz in der axiomatischen Methode.

So kann, um das Hauptbeispiel der Kraft zu wiederholen, nach Hamel *eine Form* des Kraftgesetzes unterschiedlich in Systemmechaniken realisiert werden: als Flächenkraft *oder* Fernkraft *oder* als eingeprägte Kraft, Reaktionskraft und so weiter.[36] Ebenso kann etwa derselbe Begriff der Masse durch verschiedene Formen dargestellt werden: als Volumenintegral *oder* als diskrete Summe aus Punktelementen. Die *Auswahl* der Systemprinzipien und -begriffe bestimmt, auf *welche Art und Weise* die Folgerungsmenge der bewährten Gesetze und Modelle aufgestellt wird, nicht dagegen den Umfang der gesamten Folgerungsmenge für alle berücksichtigten Alternativen. Das will ich im Folgenden schematisch verdeutlichen.

Schematische Übersicht am Sequenzenkalkül

Disjunktive Differenzierungen, Alternativen *innerhalb* eines grundlegenden Begriffsschemas zu erkennen und diese auch in implizite Definitionen zu fassen: dieser Ansatz zeigt über die mechanik-internen Probleme hinaus die ursprünglich regressive Idee der axiomatischen Methode auf.[37] Es wird die Vielheit der Repräsentationen gesucht, und es wird die Vielheit beibehal-

[34] Man vergleiche methodologisch mit Abschnitt 2.3.4 und physikalisch mit Teil 3.8.

[35] Die Merkmale dieses Theorienkonzeptes wurden hier in 2.4 dargestellt. Das strukturelle Substrat ist der Theoriebegriff der mathematischen Logik, der über die Konvention der *logischen Folgerung* nach Tarski [1935b] definiert wird: Eine *Theorie T* ist die Menge aller Aussagen, die aus der in der prädikatenlogischen Sprache formalisierten Axiomenmenge *gefolgert* werden kann. Siehe diese standardisierte Form etwa in Monk [1976], S. 208, sowie historisch Feferman und Feferman [2004], S. 280.

[36] Um dem Hypothetischen der Kraftgesetze im Axiomensystem Ausdruck zu verleihen, hat Hamel zu dem leider völlig missverstandenen Kraftaxiom (**Ie**) geführt, das bereits in 3.6.4 thematisiert wurde. In diesem hypothetischen Sinn sind in (**Ie**) 'ursächliche' Bestimmungsmerkmale als 'Variablen' jeweils zu *entdecken*, bis am Ende der Analyse von einer Kraft gesprochen werden kann. Ich werde in 4.5.4 nochmals darauf zurückkommen.

[37] Zum regressiven Vorgehen in der axiomatischen Methode siehe 2.3.5.

ten anstatt Eindeutigkeit und Vollständigkeit der logischen Konsequenzen innerhalb eines Theoriegebildes zu erkunden. Auch schematisch lässt sich illustrieren, dass diese disjunktive Sicht auf die Theoriebildung mit dem reduktiv-zerlegenden Vorgehen der 'Tieferlegung der Fundamente' konform ist.[38]

Am Sequenzenkalkül der klassischen Aussagenlogik nach Gerhard Gentzen wird diese Umkehrung der Blickrichtung besonders deutlich. So kann nämlich eine logische Disjunktion '$\vee$' entweder im Antezedenz ($\vee\mathbf{A}$) oder im Sukzedenz ($\vee\mathbf{S}$) eingeführt werden.[39] Die Sukzedenzeinführung einer Disjunktion ist zunächst völlig voraussetzungslos. Eine Formel Ψ lässt sich ohne weitere Annahmen als Alternative der bereits dargestellten Formel $\Phi \in \Gamma$ ergänzen:

$$(\vee\mathbf{S}) : \quad \frac{\Gamma \quad \Phi}{\Gamma \quad \Phi \vee \Psi}$$

($\vee\mathbf{S}$) zeigt, dass jede 'Oder-Einführung' im Sukzedenz eine Aussage logisch abschwächt: Man wird vor eine bewertete Alternative gestellt. In dieser 'vorwärts' gerichteten Sicht auf alternative Konsequenzen einer Theorie wird durch die Einführung einer Disjunktion weniger ausgesagt. Die Theorie wird abgeschwächt.

Vielmehr ist die Folgerungsmenge als Konjunktion von Aussagen zu begreifen, so dass die Zusammenfassung aller logischen Konsequenzen die hypothetisch-deduktive Theorie bildet.[40] Die Verstärkung zu einer kompakten Folgerungsmenge kommt durch die Schlussregel der 'Und-Einführung' im Sukzedenz ($\wedge\mathbf{S}$) zum Ausdruck:

$$(\wedge\mathbf{S}) : \quad \frac{\begin{array}{cc}\Gamma & \Phi \\ \Gamma & \Psi\end{array}}{\Gamma \quad \Phi \wedge \Psi}$$

[38] Die folgende Illustration soll nicht als deduktiv-nomologisches Erklärungsmodell missverstanden werden, sondern lediglich die unterschiedliche Begründungsstruktur verdeutlichen. Dass ich den deduktiven Aspekt der axiomatischen Methode nicht mit einem Erklärungsmodell für wissenschaftliche Propositionen verbinde, wurde bereits in Abschnitt 2.8 diskutiert.

[39] Siehe etwa Ebbinghaus u. a. [1992], S. 76; sowie in der ursprünglichen Fassung Gentzen [1934], S. 221.

[40] Vgl. Anm. 35 in diesem Abschnitt. Die logische Konjunktion von Folgerungen einer Theorie sind bereits in der ursprünglichen Idee einer logischen Wissenschaftssprache verankert. (Man vergleiche dazu etwa Carnap [1934], S. 37 f., sowie die Einwände in Suppe [1977a], S. 32 f.) Auch W.V. Quine, der bekanntlich wie P. Duhem eine holistische Bedeutungstheorie vertreten hat und in seiner Philosophie der Logik der modelltheoretischen Konzeption von Axiomensystemen folgt, versteht die Menge an Ausdrucksformen als Konjunktion von Konsequenzen. So heißt es etwa in Quine [1991], S. 93: „Verfehlt wäre auch die Annahme, dass *kein* Einzelsatz einer Theorie seine abtrennbare empirische Bedeutung hat. [...] In jedem Fall wird es [...] Einzelsätze geben - und zwar lange theoretische Sätze -, die sicherlich ihre eigene empirische Bedeutung haben, denn *durch Konjunktion* [eigene Herv.] können wir aus einer ganzen Theorie einen Einzelsatz bilden."

Im Gegensatz dazu ist in der *Antezedenzeinführung* ($\vee$**A**) nun die Blickrichtung umgekehrt auf die *Voraussetzungen* des Schlusses gerichtet. Wenn eine Formel χ sowohl aus $\Phi \in \Gamma$ als auch aus $\Psi \in \Gamma$ folgt, dann auch aus der Disjunktion $\Phi \vee \Psi$:

$$(\vee\mathbf{A}): \quad \begin{array}{ccc} \Gamma & \Phi & \chi \\ \Gamma & \Psi & \chi \\ \hline \Gamma & \Phi \vee \Psi & \chi \end{array}$$

Die Beweisstruktur ($\vee$**A**) verdeutlicht das *regressive* Vorgehen beim Aufbau einer Grundlage. Der Blick richtet sich hierbei nicht auf die Schlussformel χ, die in diesem Fall symbolisch für den unbestimmten Gesamtbereich der Klassischen Mechanik steht. Man sieht sozusagen 'rückwärts' auf die Sammlung der logisch zulässigen Alternativen im Antezedenz. Sie sorgen für die Vielheit, die für das Verständnis der Mechanik nach Hamel unabwendbar ist. Auf den eindeutigen 'Schluss', auf das χ, kommt es nicht an, können doch auch unterschiedliche Gesetzesformen die Konsequenz innerhalb der Klassischen Mechanik hervorrufen. Der Preis dieser regressiven Perspektive ist deshalb, dass die Vollständigkeit der Theorie als deduktiv abgeschlossene und formalisierte Gesamtheit wenig aufschlussreich ist. Abgeschlossenheit oder Vollständigkeit der Folgerungsmenge wird hierbei aus dem Blickfeld genommen.

4.4 Der anwendungsbezogene Blick auf die Klassische Mechanik

Seit Mitte des 20. Jahrhunderts gab und gibt es eine breite Diskussion in der Wissenschaftsphilosophie über die Art und Weise, wie eine wissenschaftliche Theorie die Wirklichkeit repräsentieren kann und vor allem, wie sie selbst zu repräsentieren ist.[41] Man reagierte dabei auf überzogene Formalisierungstendenzen bei Rekonstruktionen von wissenschaftlichen Theorien. Der formale Anspruch war beeinflusst von der logizistischen Tradition zur Jahrhundertwende, vom Received View des logischen Empirismus sowie von der späteren modelltheoretische Variante nach Patrick Suppes, Bas van Fraassen und anderen.

Man kann die Gruppe an Kritikern im Kontext einer 'Weltschauungsanalyse' zusammenfassen, mit der namentlich Stephen Toulmin, Norwood Hanson und Thomas Kuhn gemeint sind.[42] Allen in der Gruppierung ist die

[41] Dabei ist der Begriff der 'wissenschaftlichen Theorie' viel unbestimmter als in der hypothetisch-deduktiven Variante aus Abschnitt 2.4. Er steht hier synonym für ein „conceptual device for systematically characterizing the state-transition behaviour of systems" (Suppe [1998], S. 344).

[42] So etwa in Suppe [1977a], S. 125 f. Als umfassende Reaktion auf überlieferte Konventionen der Wissenschaftsauffassung wird die Position dieser und anderer Autoren auch als 'New Philosophy of Science' bezeichnet (so etwa in König und Pulte [1998], S. 1149).

Auffassung gemeinsam, dass die epistemologische Seite des Verstehens einer wissenschaftlichen Theorie bisher unzureichend berücksichtigt und ein statisches, verzerrtes Bild von Theorien abgegeben wurde. Der Gebrauch von Theorien in der wissenschaftlichen Praxis, die historische Entwicklung wissenschaftlicher Theorien, eigenständige pragmatische wie soziologische Faktoren im Umfeld einer wissenschaftlichen Gemeinschaft sind ausschlaggebend für das heutige Verständnis der Theorieninhalte.[43] Auf diese Gemeinsamkeit, die ich mit einer *anwendungsbezogenen Blickrichtung* auf Theorien identifizieren würde, möchte ich im Folgenden eingehen. Sie umfasst das entscheidende Merkmal der *irreduziblen Synthese* in Gesetzesschemen, die nicht nur in Hamels Schriften über Klassische Mechanik zum Ausdruck kommt, sondern jetzt auch in Wilsons Kritik an bisherigen axiomatischen Repräsentationen wiederkehrt. Daran wird gleichzeitig der problematische Schluss Wilsons und anderer erkennbar, dass die axiomatische Methode selbst für das inhaltliche Defizit in der Anwendung verantwortlich sei; ein Schluss, der auf einer einseitigen, verzerrten Vorstellung der axiomatischen Methode beruht.

4.4.1 Kuhn über das Newtonsche Grundgesetz

In Kuhn [1977] wird das Defizit einer formalen Repräsentation unmittelbar am Newtonschen Grundgesetz verdeutlicht. Kuhns Argumentation ist dabei dieselbe, mit der sich schon Hamel gegen formalistische Tendenzen in der Klassischen Mechanik gerichtet hat.[44] In der wissenschaftlichen Anwendung der Mechanik assoziiert man mit allgemeinen Gesetzesformen wie $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ mehr als in jeder formallogischen Repräsentation zum Ausdruck kommen kann. Jede Reduktion auf formale Repräsentationen wird gerade dann zum Problem, wenn sich herausstellt, dass es sich um Gesetzesschemen handelt, „schematic forms whose detailed symbolic expression *varies from one application to the next* [eigene Herv.]" (ebd., S. 465). Kuhn erklärt wie schon Hamel, dass man je nach Anschauung, je nach epistemologischem Zugang zur Mechanik, das Grundgesetz anders interpretiert. Nicht zuletzt sei es auch eine Frage der Interessen in der jeweiligen Forschungsgemeinschaft, wie ein Prinzip angewendet wird.

Die vielseitige Repräsentierbarkeit der Klassischen Mechanik zeigt sich besonders dann, wenn man auf realistische mechanische Probleme zu sprechen kommt.

> „More interesting mechanical problems, for example the motion of a gyroscope, would display still greater disparity between $f = ma$ and the actual symbolic generalization to which logic and mathematics are applied [...]. Though uninterpreted symbolic expressions are the com-

[43] Man vergleiche insbes. Suppe [1977a], S. 126; sowie König und Pulte [1998], S. 1149.

[44] Siehe dazu Abschnitt 3.6.4.

> mon possession of the members of a scientific community, and though it is such expressions which provide the group with an entry point for logic and mathematics, it is *not* to the shared generalization that these *tools are applied* but to one or another *special version* of it [eigene Herv.]. In a sense, each such class requires a new formalism." (Kuhn [1977], S. 465)

Wegen der vielseitigen Versionen ('versions') oder Richtungen ('routes'), die ein gewählter Formalismus (von mehreren) einnehmen kann, ist der empirische Inhalt des Formalismus, wie schon bei Duhem und Quine, das Ergebnis einer ganzheitlichen Anwendung des wissenschaftlichen Begriffsapparates. Oder anders gesagt, es gibt keine ausgezeichnete methodologische Richtung, die den mechanischen Inhalt vom formalen Schema trennen oder auf das formale Schema reduzieren würde: „Empirical content must enter formalized theories from the top as well as the bottom" (ebd., S. 466). Wegen dieser epistemologischen Unbestimmtheit nennt Kuhn die Grundbegriffe und -gesetze der Mechanik 'quasi-analytisch'.

In Kuhn [1989] wird diese Unbestimmtheit weiter ausgeführt und der Kantische Terminus des „synthetic a priori" (ebd., S. 20) für das Newtonsche Grundgesetz wiederbelebt.[45] Hier skizziert Kuhn das hypothetische Szenario zweier Entwicklungen der Klassischen Mechanik, in denen ein und derselbe Formalismus unterschiedlich interpretiert und bewertet wird. Im Zentrum des Szenarios steht das Verhältnis von Entdeckung und Setzung, wenn man das Newtonsche Grundgesetz und das Gravitationsgesetz isoliert betrachtet. In einem Fall ('first route') können etwa empirische Evidenzen für das Newtonsche Gravitationsgesetz entdeckt werden, um dann auf das Newtonsche Grundgesetz als theoretisches Prinzip, als implizite Definition, zu schließen. Im anderen Fall ('second route') wird die Gültigkeit des Grundgesetzes zunächst empirisch belegt, zum Beispiel über die Gewichtskraft und Fallbeschleunigung, um anschließend auf die theoretische Gültigkeit des Gravitationsgesetzes zu schließen.

> „The two routes differ in what must be stipulated about nature in order to learn Newtonian terms, what can be left instead for empirical adequacy. On the first route the Second Law enters stipulatively, the law of gravitation empirically. On the second, their epistemic status is reversed."[46]

[45] Für den Hinweis auf diese Überlegungen Kuhns danke ich Professor Paul Hoyningen-Huene.

[46] Zitiert aus Kuhn [1989], S. 20. Meines Erachtens ist dieses Szenario innerhalb der Klassischen Mechanik einzigartig. Sowohl in Hamel [1967a], S. 25, als auch in Simon [1947], S. 900, wird erklärt, dass die beiden Gesetze in einem logischen Sinn voneinander *unabhängig* sind. Das heißt, das eine Gesetz kann ohne Annahme des anderen Gesetzes aus weiteren empirischen Hypothesen deduziert werden, ohne dass widersprüchliche Aussagen zur Newtonschen Mechanik entstehen. Hamel und Simon weisen dem Grundgesetz dennoch eine fundamentalere Bedeutung als dem Gravitationsgesetz zu. Das Gravitationsgesetz ist eher eine Ausgestaltung des Kraftbegriffes, ein *Spezialgesetz* zum Kraftschema (so wurde es schon hier

Die anwendungsbezogene Argumentation Kuhns gegen einseitige formale Repräsentationen ist völlig berechtigt. Die Art und Weise, wie ein Begriff innerhalb der Klassischen Mechanik eingeführt wird, etwa als theoretischer oder als empirischer Terminus, kann niemals vom gewählten Formalismus vorgegeben werden.[47] Kein Formalismus kann von selbst seine eigene Richtigkeit oder Angemessenheit aufzeigen. Er kann nur durch eine informelle Semantik der empirisch relevanten Konventionen und Anschauungen begründet werden. In diesem Sinn überschneidet sich Kuhns Verständnis von synthetischen Gesetzesformen a priori mit Hamels Position in seinen Grundlagen der Mechanik.[48]

Auch Toulmin hat vielfach auf diese *Anwendungslücke* im formalistischen Verständnis von Theorien hingewiesen.

> „No abstract, formal, system [...] can ever specify - still less *guarantee* - its own empirical relevance, or range of application." (Toulmin [1977], S. 606)
>
> „[T]he physics is not in the formulae, as [...] we are often inclined to suppose, any more than being able to find your way about is part of a map." (Toulmin [1953], S. 97)

Die Anwendungslücke bleibt ein entscheidendes Repräsentationsproblem in der aktuellen Diskussion um wissenschafliche Modelle. Auf sie wird immer wieder in neuen Kontexten und Diskussionen um eine 'Theorie der Repräsentation' hingewiesen.[49] Sie ist nichts anderes als ein '*Problem des verlorenen Inhalts*', wie es in Muller [2009] genannt wird. Ein Verlust an Attributen, Kontexten, an bedeutungsgebenden Akzentuierungen, ein Verlust an Intension tritt auf, wenn man beansprucht, die formalisierte Theorie selbst könne ihre unterschiedlichen Anwendungsbereiche extensional bezeichnen.

Ich glaube, dass dieses eigentlich alte Problem des verlorenen Inhaltes auf eine bleibende Grenze in der formalen Gestaltung von wissenschaftlichen Theorien hinweist. Sie regt insbesondere dazu an, die verschiedenen, historisch gewachsenen Gebrauchsweisen von 'Formalisierung' in Mathematik, Logik, Mechanik bzw. in Physik klarer zu differenzieren.[50] Eine solche Untersuchung, die auf Formalisierungen ausgerichtet ist, wäre notwen-

---

in Abschnitt 3.6.3 erläutert). Wann immer dagegen eine Massenbeschleunigung veranschaulicht wird, ist das Grundgesetz als *a priori* gültig erkannt. Im zweiten Szenario würde daher aus Rationalitätsgründen niemand das Grundgesetz im Falle einer Anomalie ändern, auch wenn der Wissenschaftsgemeinschaft nach Kuhn [1989], S. 21, diese 'Freiheit' zugestanden wird.

[47] Hierbei richtet Kuhn sich gegen den Sneed-Stegmüllerschen Strukturalismus, der die empirische Bedeutung von Termen als modelltheoretische Belegung relativ zur jeweils vorausgesetzten Theoriestruktur kennzeichnet (siehe Kuhn [1989], Anm. 15, S. 17 f.).

[48] Siehe dazu hier Seite 156 in Abschn. 3.6.3.

[49] So etwa in Frigg [2006], insbesondere §4.1: 'Some straightforward objections'.

[50] So der richtige Schluss in Schlimm [2006], S. 249.

dig, um weitere Missverständnisse aufzudecken, eine Untersuchung, die in diesem Rahmen nur andeutungsweise möglich ist.

4.4.2 Toulmin über die Eigenständigkeit von Anwendung und Grundlage

Problematisch wird die anwendungsbezogene Sichtweise gerade dann, wenn die logische Rekonstruktion ihre *Eigenständigkeit* gegenüber pragmatischen und explorativen Zielsetzungen der Wissenschaft und Didaktik zu verlieren droht. Dass die Darstellung einer Theorie allein den epistemischen Lernprozess fördern oder eine enzyklopädische Zusammenfassung für denjenigen liefern soll, der über die pädagogische Zielsetzung hinausgehen möchte, ändert nichts an der Tatsache, dass für gewöhnlich *ein Formalismus bezeichnet* wird, bei allen konzeptuellen Unschärfen, die in der Anwendung zu Tage treten. Was angewendet wird, sind Grundgesetze und Prinzipien, die immer in einer *momentanen* statischen Form vorkommen. Keine Begriffsentwicklung, kein Bedeutungswandel kann daran etwas ändern.

Tatsächlich kann aber der Eindruck entstehen, dass die theoretischen Grundlagen keine eigenständige Relevanz haben, wenn etwa das Erlernen eines „required cluster of terms" allein damit verbunden wird, einen „licensed practitioner of the field" (Kuhn [1989], S. 15) zu produzieren. Für theoretische Grundlagen würde das streng genommen heißen, dass eine Revision des Anwendungsbereichs, und sei es durch didaktische Beschränkung auf eine Standardauswahl an relevanten Anwendungen, den Formalismus selbst revidieren könnte. Das Szenario ist aber kaum vorstellbar: Nur weil die kontinuumsmechanischen Grundbegriffe keine Modellierungen in der Atomphysik bereitstellen, ist der Formalismus nicht widerlegt. Kuhns Überlegung zum Lernprozess eines Begriffschemas der Mechanik zielt vielmehr auf wissenschaftliche Umwälzungen ab, in denen der Formalismus für einzelne Anomalien als *unanwendbar* erkannt wird, er betrifft dagegen nicht die Variation der Anwendungsreichweite einer 'normalwissenschaftlichen' Konzeption.[51]

Man darf die Grundlagenprobleme, so meine Überzeugung, nicht an ihrer Anwendbarkeit messen. Das hieße, die konzeptuelle Stärke der reflexiven Analyse zu unterschätzen. Logische Rekonstruktionen setzen ein, wenn bereits ein bewährtes Begriffsschema vorliegt. Der eingeschränkte Fokus auf Anwendungskontexte und auf pragmatische Verwendungsweisen des Begriffsschemas hat das Misstrauen gegen die axiomatische Metho-

[51] Hierauf bin ich bereits in Abschnitt 3.5.1 eingegangen. Das Szenario der Umwälzung wird auch in Kuhn [1989], S. 21 f., am Beispiel der Mechanik skizziert. Die neuen Gesetzesschemen „attach to nature differently" nach der Revision, eine Übersetzbarkeit der Begriffsinhalte wird ausgeschlossen. Das kann aber niemals heißen, dass die Reichweite des alten Formalismus komplett eliminiert wird, und nur ein solcher Fall würde jede Grundlagendiskussion über klassische Systeme überflüssig machen.

de gefördert.[52] So wird auch Wilsons Argumentation für eine 'vielseitige Theoriefassade', wie in 4.3.1 vorgestellt, diffus und unklar. Es wird nicht deutlich, warum die geforderte Vielseitigkeit gegen eine axiomatische Gestaltung sprechen würde. Es ist daher erforderlich, die anwendungsbezogene Sichtweise als forschungsrelevantes, pragmatisches Verständnis der Mechanik deutlicher von einer reflexiven Sicht der Rekonzeption zu trennen, die sich auf Fragen und Resultate in den Grundlagen der Mechanik richtet.

Bemerkenswert klar und differenziert wird dagegen der anwendungsbezogene Standpunkt von Stephen Toulmin herausgearbeitet und dem formalistischen Verständnis von Mechanik entgegengestellt. Im Anwendungskontext einer physikalischen Forschungsgemeinschaft sind „actual explanatory missions" (Toulmin [1977], S. 609) gefragt, die letztlich einen pragmatischen Umgang mit Grundlagenfragen erzwingen. Das gilt dann auch für die zentralen Grenzprozesse der Klassischen Systemmechaniken in Hilberts sechstem Problem. Regressive Fragen zu vermeiden, sobald man sich auf einen anwendungssicheren Begriffsrahmen einigen konnte, ist eher der Normalfall wissenschaftlicher Praxis.[53]

> „In practice [...] actual natural sciences tolerate a substantial degree of logical 'gappiness', incoherence, and even inconsistency. [...] [P]hysicists are perfectly well able to live with these contradictions and learn to recognize in what situations each kind of calculation is appropriate." (Toulmin [1977], S. 609)

Wir können nicht erwarten, dass der Modellierungs- und Anwendungsprozess lückenlos dargestellt wird, dass alle Termsubstitutionen, alle aussagenlogischen und syllogistischen Schlüsse offen gelegt werden, wenn sie auch im Hintergrund vorhanden sind und für Modellierungen gültig bleiben. Umgangssprachliche Gebrauchslogik bestimmt den wissenschaftlichen Diskurs, bei dem allein die richtige Verwendung der theoretischen Terme in der Anwendung geprüft wird.[54]

> „[The] inference is not deduced from the laws of motion, but drawn in accordance with them, that is as an application of them. [...] It is the *terms* appearing in the statements at one level, not the statements themselves, which are logically linked to the statements in the level below." (Toulmin [1953], S. 76)

Toulmin spricht an anderer Stelle von '*Inference-tickets*' (anlehnend an Gilbert Ryle), wenn eine 'Folgerung' zwischen Prinzip auf höherer Ebene der

---

[52] Zu den Einwänden gegen die axiomatische Methode und den damit verbundenen Missverständnissen siehe Teil 2.6.

[53] Ich bin darauf in Teil 3.5 mit Bezug auf die Frage der Grenzprozesse in der Mechanik eingegangen.

[54] Dies wurde bereits in Abschnitt 2.8 mit Blick auf das Erklärungspotential der mechanischen Grundlagen festgestellt.

formalen Hierarchie und der faktischen Aussage auf unterer Ebene festgestellt wird. Das Ticket wird immer dann eingelöst, wenn terminologische Charakteristiken zwischen beiden Ebenen identifiziert werden.[55]

Eigenständigkeit in der Anwendung von Theorien kann allerdings nur bedeuten, dass keine formale Theorie von sich aus zeigt, ob sie in der wissenschaftlichen Praxis sinnvoll anwendbar ist. Gerade die Tradition des logischen Empirismus hat hierbei die Sonderrolle der rationalen Mechanik als mathematisierte Erfahrungswissenschaft auf alle wissenschaftlichen Gebiete verallgemeinert, ohne zu beachten, dass dieser Weg der Rationalisierung eine für empirische Wissenschaften *untypische* Eigenart der Klassischen Mechanik geblieben ist.[56] Ein echtes Repräsentationsproblem entsteht dann, wenn dieser Prozess der Rationalisierung der mechanischen Prinzipien mit einem *Formalisierungsprozess* assoziiert wird. Die syntaktischen wie semantischen Methoden der Prädikatenlogik erster und höherer Stufe werden hierbei zur rigorosen Anwendung gebracht und stehen synonym für ein rationales Rekonstruktionsprogramm.

> „The crucial defect of the traditional approach [...] lies in its equation of the 'rational' with the 'logical'. By declining to admit into philosophical discussion any intellectual relation *that is not amenable to formal analysis* [eigene Herv.], the Viennese empiricists eliminated from philosophy [...] the whole question of how conceptual problems of a nonformal kind arise and are dealt with rationally within scientific enterprises." (Toulmin [1977], S. 611)

So kommt Toulmin zu dem richtigen Schluss, dass jedes Rekonstruktionsbemühen dann (und nur dann) angezweifelt werden muss, wenn der Anwendungsbezug zum Teilbereich der *formalen* Repräsentation wird. Formalisierte Rekonstruktionen und Axiomatisierungen behalten ihre eigenständige Berechtigung als reflexives Instrument, die Begriffsstruktur besser zu verstehen, *unabhängig* von aktuellen Anwendungsproblemen. Anwendungskontexte sind und bleiben „essentially *non*mathematical and *in*formal" (Toulmin [1977], S. 612). Was also Toulmin zu Recht kritisiert ist, wenn die Formalisierung auf den Anwendungsbereich, auf die empirische Bedeutungsebene hin *übertragen* wird. Ein solches Vorhaben kann Toulmin bis zum Received View des Wiener Kreises zurückverfolgen. Die Vorstellung des „single axiomatic edifice" (ebd., S. 606) in der Gestalt einer einheitlichen Wissenschaftssprache, die selbst empirische Bedeutungen durch

[55] „[T]he principle finds its application, not as a major premise in a syllogistic argument from the generalization to particular instance, but as the 'inference-ticket', to use a phrase of Ryle's, which entitles us to argue from the circumstances of the phenomenon to its characteristics." (Toulmin [1953], S. 83)

[56] Siehe dazu Toulmin [1977], S. 602 und S. 610. „Yet the very formal perfection of theoretical mechanics ought surely to have ruled it out as the 'type example' of natural science, and prevented us from extrapolating conclusion about the 'logical structure' of mechanics, so as to apply to natural sciences generally. Rather, we need to recognize how *exceptional* a science mechanics really is." (ebd., S. 610)

formale Erfüllbarkeitsrelationen auf theoretische Termini konstatiert, muss als *formale Übertreibung* abgelehnt werden: ein schlichtweg „misleading picture of the intellectual content of natural science" (ebd., S. 611).[57]

Auch diese fragwürdige Vorstellung ist in Wilsons Kritik an Axiomatisierungen der Mechanik (Abschnitt 4.3.1) wiederzufinden, wenn er von 'empirischer Abdeckung' durch die Axiome spricht. Eine empirische Abdeckung, die womöglich noch 'vollständig' ist, kann keine Axiomatisierung leisten. Dies zu fordern ist eine überzogene Erwartung. Begriffskonzeptionen zu reflektieren, reduktive wie deduktive Verknüpfungen zu erzeugen, metamathematische Fragestellungen zu klären, das sind regressive Zielsetzungen.[58] Der empirische Inhalt der Begriffe wird dabei nicht in Frage gestellt.

4.4.3 Axiomatisierung als Teil eines Formalisierungsprogrammes

Toulmins Resümee kann nach meiner Auffassung eine entscheidende Bedeutungsverzerrung der 'axiomatischen Methode' identifizieren. Es handelt sich um die mittlerweile gefestigte Vorstellung, dass jede Axiomatisierung ein *formaler* Prozess der logischen Rekonstruktion wäre. Man findet diese Vorstellung etwa als Voraussetzung zu Mario Bunges ≫*Foundations of Physics*≪ in der Weise, dass die physikalische Sprache durch die Prädikatenlogik zu formulieren ist.[59] Man findet sie auch in Suppe [1977a], der ausführlichen Einleitung zum Symposiumsbericht ≫*The Structure of Scientific Theories*≪:

> „Strictly speaking axiomatization and formalization are not equivalent notions, the former being contained in the latter." (ebd., S. 111, Anm. 231).

Die Vorstellung, Axiomatisierung sei ein formaler Prozess, tritt aktuell, wie gesehen, in Wilson [2013] wieder auf, in der Bezeichnung 'vollständiges' wie 'formales Lehrgebäude'.

[57] Diese Vorstellung eines 'formalisierbaren Inhaltes' ist fest verankert in der Konzeption der Carnapschen 'Wissenschaftssprache'. Die empirische Bedeutung der nichtlogischen Termini einer Theorie wurde später, etwa in Carnap [1958a], über die metasprachliche Konvention der *Tarski-Semantik* beschrieben. Dass nun der 'Gehalt' einer Theorie, seine *Intension*, durch den formalen Kalkül selbst beurteilt werden könne, gehört in der Tat zu einer Invariante der Wissenschaftsphilosophie Carnaps. Ich möchte dazu eine frühere Erklärung aus Carnap [1934], S. 37 f., wiedergeben, die ganz typisch den Inhalt einer Aussage logisch begreifbar machen soll: „Wollen wir feststellen, was ein Satz $\mathfrak{S}_1$ (inhaltlich gesprochen) besagt, ohne dass wir den Bereich des Formalen verlassen und zur inhaltlichen Deutung des Satzes übergehen, so müssen wir untersuchen, welche Sätze Folgen von ihm sind. Dabei können wir jedoch diejenigen Sätze außer Acht lassen, die aus jedem Satz folgen, also die analytischen Sätze. Die nicht-analytischen Folgen von $\mathfrak{S}_1$ bilden den Gesamtbereich dessen, was aus $\mathfrak{S}_1$ 'herauszuholen' ist. Wir definieren deshalb: unter dem (logischen) *Gehalt* von $\mathfrak{S}_1$ [...] verstehen wir die Klasse der nicht-analytischen Sätze [...], die Folgen von $\mathfrak{S}_1$ [...] sind."

[58] Siehe hier Teil 2.3.

[59] Siehe insbes. Bunge [1967a], § 1.1: 'Language'.

Es ist in keiner Weise gerechtfertigt zu behaupten, dass die axiomatische Methode mit Bezug auf physikalische Theorien ein formales Vorgehen wäre. Sie ist als Instrument der mathematischen Rekonzeption bestenfalls *Teil* eines Formalisierungsprozesses, erfüllt sich aber nicht darin, wenn wir von der Klassischen Mechanik und von empirischen Wissenschaften sprechen. Dirk Schlimm hat bereits früher auf dieselbe Schieflage hingewiesen, mit Kritik an Äußerungen von Bas van Fraassen. Wer sich etwa auf Hilberts axiomatische Methode bezieht, findet keine Rechtfertigung für eine formalisierte Behandlung von Theorien. Hilbert selbst, das wurde hier mehrfach betont, hat weder eine Formalisierung in den Grundlagen der Mechanik vorgesehen, noch überhaupt die Mathematik und Logik als ein Zeichenspiel betrachtet:

> „[I]t appears to be a result of conflating axiomatization with formalization. [... An] axiomatization in the sense of Hilbert [...] is neither formulated in the language of first-order logic, nor uses explicitly stated rules of inference".[60]

Mit dem Hintergrund der reichhaltigen Konzeption in Hamels Grundlagen der Mechanik halte ich es für eine unbegründete und schwerwiegende Einschränkung, die axiomatische Methode als Formalisierungsprogramm zu verstehen. Es ist eine schlichtweg formalistische Übertreibung, die der Methode in der Wissenschaftsphilosophie keinen guten Ruf beschert hat. Die überzogene Betonung des Formalismus hat sogar zu der Auffassung geführt, dass Axiomatisierungen im Kontext von neuen Entdeckungen hinderlich sein können:

> „An interesting question for all branches of mathematics, and their respective histories, is the extent to which formalization, *including* axiomatization [eigene Herv.], has helped or hindered the finding of new results. In classical mechanics the restrictions seem to have been quite severe [...]" (Grattan-Guinness [2006], S. 61).

Es ist zu klären, wie die axiomatische Methode ihre formalistische Interpretation erhalten konnte, die ihr heute unberechtigterweise anhaftet. Patrick Suppes, vorrangiger Verfechter der modelltheoretischen (oder semantischen) Sichtweise auf wissenschaftliche Theorien, hat stets die axiomatische Methode in der Wissenschaftsphilosophie vertreten und zur Diskussion gestellt. Man muss durchaus sehen, dass Suppes den informellen Ursprung der Methode (bei Pasch, Hilbert u.a.) gründlich untersucht hat.[61] Als ein Schüler Alfred Tarskis ist er überzeugt von der modelltheoretischen Behandlung der Mathematik und Logik. Es gehört zu seiner besonderen Leistung, Perspektiven eröffnet zu haben, wie die Modelltheorie

[60] Zitiert aus Schlimm [2006], S. 242. Zu Hilberts Formoffenheit siehe hier vor allem die Abschnitte 2.3.8 und 2.9.

[61] Anstatt einer langen Liste an Veröffentlichungen zur axiomatischen Methode möchte ich nur auf Suppes [2002] verweisen, wo das Kapitel § 2.4, ein Nachdruck von Suppes [1992], eine historische Perspektive auf die axiomatische Sichtweise illustriert, mit vielen eindrucksvollen

für alle mathematischen Wissenschaften und für die Wissenschaftsphilosophie umgesetzt werden kann.[62] Zielsetzung ist, strengere Begriffs- und Beweisverfahren in der Wissenschaftsphilosophie einzuführen, die dennoch natürlich ('natural'), einfach ('simple') und sachdienlich ('pertinent') behandelt werden können. Daher werden als repräsentierende Elemente einer wissenschaftlichen Theorie *ihre nicht-linguistischen metasprachlichen Modelle*, verstanden im modelltheoretischen Sinn nach Alfred Tarski, in den Vordergrund gestellt.[63] Es gibt allerdings deutliche Anzeichen dafür, dass gerade durch die modelltheoretische Sichtweise nach Suppes u.a. das Verständnis der axiomatischen Methode einseitig in Richtung Formalisierung verschoben wird. Diese Einseitigkeit werde ich im folgenden Teil 4.5 verdeutlichen.

Die Axiomatisierung hat eine formale Konnotation durch die modelltheoretische Sichtweise erhalten, auch wenn Suppes viel Mühe betrieben hat, dieser Auffassung entgegenzuwirken und eine *relative* Verbesserung gegenüber dem unhandlichen Received View[64] zu betonen.

> „The use of such [d.i. axiomatic] methods permits us to bring to the philosophy of science the standards of rigor and clarity that are an accepted part of the mathematical sciences. A conservative prediction is that they will continue to be applied in foundational work throughout this century, even when surrounded by a context of informal philosophical or scientific analysis. Such a mixture of the formal and informal [...] is both desirable and necessary, in the sense that many significant ideas in the philosophy of science are not expressed in a way that makes them suitable to formulate in terms of systematic axioms." (Suppes [2002], S. 49)

Es bleibt dennoch Suppes' Überzeugung, dass nur durch die mengentheoretische Übersetzung von informell behandelten Axiomensystemen der Standard der Präzision in der logischen Begriffsanalyse verbessert werden könne.

> „[T]here is an approach to an axiomatic formalization of such theories [d.i. 'empiricially significant scientific theories'] that is quite precise and satisfies all the standards of rigor of modern mathematics. From a formal standpoint the essence of this approach is to add axioms of set theory to the framework of elementary logic, and then to axioma-

Rekonstruktionen nach Archimedes, Euklid, Ptolemäus, Jordanus, Newton u.a. Im Anschluss stehen die „modern formal conceptions" (ebd., S. 46) nach Pasch, Hilbert, Frege, Tarski u.a., die durch prädikatenlogische und mengentheoretische Mittel erreicht werden.

[62] Siehe etwa Feferman und Feferman [2004], Seiten 216 und 232.

[63] Siehe dazu vor allem Suppes [1967], S. 57 f., woraus auch die hier übersetzten Attribute entnommen sind; Suppes [1960], S. 289 f.; Suppes [2002], Seiten 3 f. und S. 20 f. Zur historischen Übersicht siehe König und Pulte [1998], S. 1150 oder in der Gegenüberstellung zum Received View Suppe [1998], S. 348.

[64] 'Awkward linguistic formulation' in Suppes [1967], S. 59, und Suppes [2002], S. 5.

tize scientific theories within this set-theoretical framework." (Suppes [2002], S. 30), (Suppes [1992], S. 209 f.).

Zugegeben, es mag sich nur um eine Frage des angemessenen Stils handeln, ob die Axiome nun prädikatenlogisch, mengentheoretisch oder umgangssprachlich implizit definiert werden sollen. Was mir allerdings mehr als fragwürdig erscheint ist die Behauptung Suppes' und anderer, der mengentheoretische Standard der Axiomatisierung in der Klassischen Mechanik[65] sei in irgendeiner Weise 'angemessener', um 'systematische Axiome' (was immer Suppes damit im obigen Wortlaut zum Ausdruck bringen will) zu erzeugen oder zu repräsentieren. Darüber hinaus scheint mir die Feststellung *eines* Standards der 'Strenge und Klarheit' für alle mathematischen Wissenschaften eine Illusion.

Ich möchte im folgenden Teil anhand der Überlegungen von Suppes zu Hamels Kraftbegriff diese Bedenken erläutern, um für eine *Rückbesinnung* zum *informellen* Ursprung der axiomatischen Methode zu plädieren. Damit ist die Vorstellung gemeint, die ich bereits in Abschnitt 2.3.8 und Teil 2.5 angedeutet habe: dass die Bedeutungsebene der physikalischen Terminologie einen integralen Bestandteil des mathematischen Formalismus ausmacht und nicht durch metamathematische Beweisverfahren eingegrenzt oder wegrationalisiert werden darf. Wer wie Georg Hamel dem Gegenstand der Mechanik *inhaltlich gerecht* werden will, kann den formalen Standard der Mengenlehre oder der Prädikatenlogik nicht streng einhalten. Wer physikalische Grenzfallbetrachtungen zwischen provisorisch abgegrenzten Systemmechaniken vornehmen will, kann keine dafür 'angemessenere' Sprache als die Umgangssprache finden. Hierfür stehen die drei Merkmale aus Abschnitt 4.3.2, die Hamels 'disjunktive Sicht' auf die Klassische Mechanik ausmachen: Pluralität der Zugänge, der synthetische Charakter der Grundgesetze und die informelle Behandlung von Anwendungen.

[65] In den Abschnitten 2.3.8 und 2.5 spreche ich von einer *eingeschränkt formalisierten Darstellung*, die sich auf strukturelle Eigenschaften der Modellmenge beschränkt und die Beweisverfahren hintergündig informell behandelt.

4.5 Ein Plädoyer für informelle Axiome der Mechanik

4.5.1 Die Anfänge des Semantic Views und der historische Gegensatz zu Hamels Axiomensystem in den 1950ern

Die Artikelreihe McKinsey u. a. [1953], McKinsey und Suppes [1953a] sowie McKinsey und Suppes [1953b] wird als Pionierarbeit der modelltheoretischen oder semantischen Sichtweise auf physikalische Theorien verstanden, die vor allem durch Patrick Suppes weiterentwickelt wurde.[66] Die in McKinsey u. a. [1953] dargestellte Axiomatisierung der Partikelmechanik bildet ein paradigmatisches Beispiel für die strukturalistische Repräsentation einer empirischen Theorie. Sie hat über die wissenschaftsphilosophische Diskussion hinaus Aufmerksamkeit erhalten und ist auch heute noch Ausgangspunkt philosophischer und logisch-semantischer Diskussionen.[67]

Die Schrift McKinsey u. a. [1953] ist, wie sich zeigen wird, gleich in mehreren Hinsichten eine Provokation und hat schon vor ihrer Veröffentlichung im »*Journal of Rational Mechanics and Analysis*« bei den Mitherausgebern Truesdell und Hamel für Unverständnis, ja sogar für Verärgerung gesorgt. Der genehmigte Artikel enthält folgenden ergänzten Kommentar Truesdells:

> „The communicator is in complete disagreement with the view of classical mechanics in this article. He agrees, however, that strict axiomatization of general mechanics - not merely the degenerate and conceptually insignificant special case of particle mechanics - is urgently required. While he does not believe the present work achieves any progress whatever toward the precision of the concept of force, which always has been and remains still the central conceptual problem, and indeed the only one not essentially trivial, in the foundation of classical mechanics, he hopes that publication of this paper may arouse the interest of students of mechanics and logic alike, thus perhaps leading eventually to a proper solution of this outstanding but neglected problem." (McKinsey u. a. [1953], S. 253).

Mir geht es im Folgenden weder darum, die polemischen Angriffe auf die semantische Sichtweise weiterzuführen, noch darum, den Gegensatz zu den überlieferten Grundlagen weiter zu kommentieren. Truesdell [1984d] dokumentiert die Auseinandersetzung und zeigt den *physikalischen* Gegen-

[66] Siehe etwa Suppe [1998], S. 348; Moulines [2008], Seiten 134 u. 137; sowie Muller [2009].

[67] Zur Rezeption in der strukturalistischen Strömung siehe etwa Stegmüller [1985], S. 107; Sneed [1971], S. 113; über den Strukturalismus hinausgehend Synge [1960], S. 5; Truesdell und Toupin [1960], S. 789; Bunge [1967b]; Bunge [1967a], S. 130; Suppe [1977a], S. 66; Simonyi [2004], S. 26 f.; und Mainzer [2004]. Auseinandersetzungen mit den mechanischen Grundlagen in der Schriftenreihe sind Truesdell [1984d] sowie Simon [1954], zusammengefasst in Simon [1977], S. 346. Aktuelle philosophische Diskussion um die 'McKinsey-Sugar-Suppes-Axiomatisierung' der Partikelmechanik findet man etwa in Thomson-Jones [2004], Muller [2009] oder in van Fraassen [2010].

satz von Punkt- und Kontinuumsanschauung auf das deutlichste.[68] Er wurde hier in den Teilen 3.8 und 3.9 ausführlich behandelt. Es geht mir nun vielmehr darum zu beachten, dass die beiden Seiten, die holistische, phänomenalistische Sichtweise auf die Klassische Mechanik nach Truesdell, Hamel und Noll einerseits und die Vertreter der semantischen Sichtweise auf strukturell minimalisierte Theorien andererseits, *unvereinbare methodologische Standpunkte* vertreten, mit entgegengesetzten Ausrichtungen und Zielsetzungen der axiomatischen Methode. Während die eine Seite nach umfassenden Begriffsstrukturen für die gesamte Mechanik sucht, schlägt die andere Seite vor, von formal einfachsten Strukturelementen auszugehen, um metamathematische Gütekriterien besser zu beurteilen.[69]

Das will ich im Folgenden an drei miteinander verknüpften Aspekten der semantischen Sichtweise verdeutlichen, wobei der letzte Aspekt bereits in Abschnitt 3.6.4 diskutiert wurde und sich hier als entscheidender Gegensatz im Verständnis von Mechanik als wissenschaftliche Theorie herausstellt. *Erstens* hat sich der Semantic View auf den punktmechanischen Zugang zur Mechanik festgelegt, *zweitens* werden verborgene Existenzbehauptungen durch die Modelltheorie in die Mechanik gebracht, welche die Struktur der Theorie durchaus verändern, und *drittens* wird ein formalistischer Präzisionsstandard eingefordert, der nur teilweise durch die Mechanik erfüllbar ist.

4.5.2 Die Berufung auf den punktmechanischen Zugang zur Mechanik

Wie schon mehrfach hier erklärt, gab es von Seiten der Kontinuumsmechanik erhebliche Einwände gegen die theoretische Vorrangstellung eines punktmechanischen Zugangs.[70] Das mündete damals schon in der Feststellung, das Axiomensystem nach McKinsey u. a. [1953] - hier abgekürzt mit $\mathbf{PM}_{\mathrm{MSS}}$ - sei nicht innovativ. Die Autoren hätten nichts gravierend Neues zur Punktmechanik zu sagen. Mit folgender Bemerkung wollte Hamel ursprünglich eine Veröffentlichung verhindern.

> „[...T]o have set classical mechanics upon a more rigorous foundation, I cannot regard as justified at all. Their considerations in this regard offer nothing new; in fact they represent a considerable step backward insofar as they restrict the subject to the most meager mechanics of points and leave the concept of force in vague generality. Nevertheless, in the

[68] Auch der Review Bunge [1986], S. 521, unterstreicht die destruktive Beurteilung: „This essay, previously unpublished, undertakes to demolish the entire line initiated in 1953 by the late logician J.C.C. McKinsey and his then students A.C. Sugar and Patrick Suppes, and continued by the 'structuralist' school of J. Sneed, W. Stegmüller, C. U. Moulines, and a few others, including R. Montague and E.W. Adams."

[69] Diese Unvereinbarkeit der methodologischen Standpunkte verallgemeinert den logischen Gegensatz zwischen formalen und informellen Ansprüchen in der rationalen Mechanik, wie er hier in Teil 2.9 angedeutet und in Abschnitt 3.6.4 am Kraftbegriff konkretisiert wurde.

[70] Siehe vor allem Abschnitt 3.7.1.

> concept of force lies the chief difficulty in the whole of mechanics. [...] I think the presentation should be made more transparent; the basic idea should be expressed clearly and not choked by formulae." (Hamel 1952, zitiert in Truesdell [1984d], S. 523 f.)

Unbeeindruckt von Hamels Kommentar wird von Seiten McKinseys die logische Klärung der punktmechanischen Grundbegriffe beansprucht und die Konzeption einer mathematischen Grundlage für alle Systemmechaniken beiseite geschoben.

> „We are of the opinion, [...] that, as a preliminary to any adequate treatment of the mechanics of extended bodies, it is desirable (or perhaps even necessary) to present classical particle mechanics in a clear and precise form".[71]

Man fokussiere sich darauf, ein Instrument zur strengeren Beweisführung vorzuschlagen, um die logische Struktur des Axiomensystems deutlicher offen zu legen. Es gehe in der Modelltheorie darum, verborgene Annahmen zu entlarven, lückenlose Deduktionen zu garantieren und metamathematische Aussagen über das Axiomensystem zu erzielen. Dies sind in McKinsey u. a. [1953] Resultate über die Widerspruchsfreiheit und Begriffsunabhängigkeit von $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$. Deswegen bestehe der einzige Anspruch darin, „to present an old subject in a mathematical rigorous way, not to create a new and unwanted branch of mechanics" (ebd., S. 254 f.).

Schließlich kann McKinsey noch mit der Autorität Alfred Tarskis absichern, dass die physikalischen Bedenken Truesdells und Hamels keine Sorge bereiten sollten: Die Artikel seien 'logisch und methodologisch einwandfrei', 'mathematisch interessant'.[72] In letzter Konsequenz sei daher auch die Kritik nicht angemessen, dass allein die eingeschränkte Punktmechanik axiomatisiert wird.[73] Die didaktische Zugänglichkeit der Punktmechanik und ihre gewohnt einfache Anwendbarkeit wird dem Vorwurf der mangelnden Allgemeinheit entgegengehalten.[74]

Ich halte McKinseys und Suppes' Erklärung in zwei Richtungen für unzureichend.

I. Pragmatische Rechtfertigungen

Man findet in Suppes' Werk wiederholt einen eigenartigen Rückzug auf

[71] McKinsey 1952, zitiert in Truesdell [1984d], S. 525. Siehe die entsprechende Motivation in McKinsey u. a. [1953], S. 254.

[72] Siehe dazu Truesdell [1984d], Seiten 522 u. 525 f.

[73] „[W]ith regard to Hamel's criticism that our treatment is restricted to 'the most meager mechanics of points', it does not appear reasonable to us to object to a scientific paper on the ground that it has not accomplished something which the authors were not even trying to accomplish: one does not criticize a paper on linear differential equations for not also covering nonlinear differential equations." (McKinsey 1952, zitiert in Truesdell [1984d], S. 526)

[74] Wie es auch noch in Suppes [2002], S. 322, heißt, ist die Punktmechanik „practical for concrete results".

pragmatische Argumente für die modelltheoretische Analyse des punktmechanischen Zugangs. Die Idealisierungen zu endlichen Punktmassen seien „on pragmatic grounds" (McKinsey u. a. [1953], S. 254) entschieden worden, „to simplify mathematics". In vielen Anwendungen sei die Beschränkung auf endliche Mengen von Partikel deutlich natürlicher und angemessener.[75] Diese Aspekte der Natürlichkeit und Angemessenheit ('convenience' bzw. 'pertinence') spielen später in der Motivation zum Programm des Semantic Views eine dominante Rolle.[76] Meine vorhergehende Argumention (aus 4.4.2) sollte aber verdeutlicht haben, dass pragmatische und anwendungsbezogene Begründungen in der Grundlagendiskussion zur Mechanik nicht ausschlaggebend sind. Sie passen nicht zum regressiven Blick in der axiomatischen Methode, bei der interne Zusammenhänge der Klassischen Mechanik im Vordergrund stehen und nicht der natürliche und gewöhnliche Umgang aus Sicht des forschenden Physikers.

II. Die Vorauswahl von minimalisierten Strukturen
Mit modelltheoretischen und metamathematischen Standards versucht man in der semantischen Sichtweise, *strukturell einfache* Repräsentationen zu finden. Deshalb beginnt ihre Rekonstruktion der Klassischen Mechanik beim punktmechanischen Zugang. Hier gelingt die einfache logische Struktur durch die *endliche* Menge von Punktelementen P als Grundbereich für eine *minimale* Anzahl an Funktionen und Variablen t, m, s und f: respektive sind das Zeitvariable, Massenterm, Orts- und Kraftfunktion. Sie bilden gemeinsam mit den Axiomen die *logische Struktur* $\langle P, T, m, s, f\rangle$ der Punktmechanik $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$. Ich gehe im **Anhang A** weiter auf die Struktur der Punktmechanik ein, eine genauere Kenntnis davon ist aber für die folgende Argumentation nicht erforderlich.

Ich halte diese Beschränkung auf logisch oder strukturell motivierte Grundtermini für unbegründet und für eine gefährliche Verzerrung. Sie hat zur Folge, dass axiomatische Konzeptionen der Kontinuumsmechanik nicht in gleicher Weise berücksichtigt werden können. Nicht anders lässt sich Suppes' Meinung verstehen, Nolls spätere Axiomatisierung der Kontinuumsmechanik (Noll [1959]) beinhalte zu *komplizierte* Grundbegriffe, um für eine semantische Rekonstruktion zugänglich zu sein.[77]

Besonders fragwürdig erscheint Suppes' Vorauswahl für minimale Strukturen, wenn man beachtet, dass die Axiome Nolls bereits in mengentheoretischer Sprache formuliert sind. Das lässt sich nur durch die *metamathematische* Ausrichtung des Semantic Views begreiflich machen. Mit

[75] Siehe McKinsey u. a. [1953], S. 259.

[76] Siehe dazu die Angaben von Suppes' Schriften in Fußnote 63 des vorherigen Abschnitts.

[77] In Suppes [1974], S. 467 f., wird rückblickend betont, es ginge um eine 'logisch akzeptable' Darstellung, „without any assumptions about the mathematical nature of the objects being considered left implicit". Im Gegenzug erfordere etwa die Axiomatisierung der Kontinuumsmechanik nach Noll [1959] „a highly sophisticated and developed mathematical framework" (ebd., S. 468).

dem Instrumentarium der Tarski-Semantik, als methodologisches 'Sicherheitsnetz' (wie in Abschnitt 2.3.6 erläutert), konzipiert und beurteilt man Theorien anhand von Konventionen der logischen Folgerung, der Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit, der logischen Kompaktheit oder Begriffsvollständigkeit, wie sie in der mathematischen Logik entwickelt wurden. Entsprechend sind auch die beweistheoretischen Resultate in McKinsey u. a. [1953] metamathematischer Art. So wird etwa die Unabhängigkeit der dynamischen Grundbegriffe f und m in $\mathbf{PM_{MSS}}$ nachgewiesen.

Überzeugt von der modelltheoretischen Ausrichtung der axiomatischen Methode, heißt es auch später noch:

> „What is needed is an analysis of the concept of force in the style of Tarskis classic article, *What is elementary geometry?* [d.i. Tarski [1959]]." (Suppes [1974], S. 467).

Wenn sich Suppes auf diese Ergebnisschrift Tarskis bezieht und auf die Mechanik überträgt, orientiert er sich an Tarskis bahnbrechendem *metamathematischen* Resultat der logischen und begrifflichen Vollständigkeit der Euklidischen Geometrie.[78] Der methodologische Gegensatz zwischen Begriffskonstitution in der Tradition der rationalen Mechanik und Metamathematik in der Tradition des Semantic Views bleibt unaufgelöst. Er ist auch meines Erachtens nicht lösbar, sondern lässt die axiomatische Methode nach Hilbert in unterschiedliche Ausgestaltungen zerfallen.

4.5.3 Verborgene Redundanzbehauptungen

Unabhängig vom Anspruch einer rigorosen Repräsentation der Punktmechanik werden von den Begründern der semantischen Sichtweise tatsächlich auch physikalisch-konzeptuelle Neuerungen eingeführt. Sie wurden zum Teil von Truesdell und Hamel nicht verstanden, weil sie im modelltheoretischen Instrumentarium verankert sind, das ihnen fremd war.[79]

1. Bezugssysteme gegenüber Koordinatensystemen

Nach der semantischen Sichtweise repräsentiert ein mengentheoretisch formuliertes *Modell* die logische *Struktur* $\langle P, T, m, s, f\rangle$ der Punktmechanik.[80] In diesem Modell von $\mathbf{PM_{MSS}}$ finden die Mengenobjekte nach McKinsey

[78] Tarski reaxiomatisiert die Geometrie in einer Weise, die gegenüber Hilberts Axiomen den Vorteil hat, ohne explizites Vollständigkeitsaxiom auszukommen. Siehe dazu insbesondere Abschnitt 2.3.4.

[79] McKinsey und Suppes [1953a], Seiten 49 und 53, verdeutlichen die ursprüngliche Motivation, die Grundbegriffe der Punktmechanik mengentheoretisch zu rekonstruieren und sie damit als Elemente einer strukturerfüllenden Modellmenge zu behandeln. Das Unverständnis darüber auf der anderen Seite wird in Truesdell [1984d], S. 529, deutlich.

[80] Siehe McKinsey u. a. [1953], S. 258; McKinsey und Suppes [1953a], S. 50; sowie Suppes [1957], S. 294.

u. a. [1953], S. 257, folgende Standardinterpretation: P ist der Grundbereich an Partikeln p_i (die p_i sind keine Impulskoordinaten), T die Menge aller Zeitpunkte, $s(p, t)$ ist der Ort des Partikels p zur Zeit t bezogen auf das ausgewählte Koordinatensystem, $m(p)$ ist die Masse des Partikels p und $f(p, t, i)$ die i-te Kraft auf p zur Zeit t.

Wie aber werden Bezugssysteme eingeführt? - Der logisch einfachen Struktur der punktmechanischen Grundbegriffe folgend, wird in McKinsey u. a. [1953], S. 255, ein Kartesisches Koordinatensystem als *modellierende Instanz* eines Inertialsystems aufgefasst. Das Koordinatensystem *realisiert* die logische Struktur von $\mathbf{PM_{MSS}}$ im modelltheoretischen Sinn. Erst in einem *weiteren* Abstraktionsschritt wird in McKinsey und Suppes [1953b] die Gesamtheit aller galileiinvarianten Koordinatensysteme als eine *Strukturklasse* vorgestellt. Ein Inertialsystem ist also eine Äquivalenzklasse von Strukturen bezüglich linearer Transformationen der kinematischen Größen. Indem bis zur Strukturklasse abstrahiert wird, erfüllt der Semantic View die begriffliche Unterscheidung zwischen Koordinatensystem und Bezugssystem.[81]

Entscheidend ist nun, dass die *Existenz* eines Inertialsystems indirekt im realisierenden Modell der Punktmechanik $\mathbf{PM_{MSS}}$, in dem Kartesischen Koordinatensystem, behauptet wird. Die Existenz des Bezugssystems ist sozusagen in der Struktur verborgen. Wenn also in Truesdell [1984d], S. 544, ein fehlendes Axiom unterstellt wird, das die Existenz einer Kraft in einem Inertialsystem behauptet, dann ist dies der mengentheoretischen Verborgenheit von Existenzannahmen zu verschulden. Es wird zwar kein logischer Fehler gemacht, dafür gerät die physikalische Bedeutung der modelltheoretischen Struktur in den Hintergrund.

Eine Struktur, wird sie einmal dargestellt, enthält bereits ihre 'mögliche' Existenz. Allerdings muss hierbei gefragt werden, ob durch diese semantischen Konzepte ein klärender Vorteil gegenüber der umgangssprachlichen Existenzforderung, etwa als einfaches Axiom,[82] geschaffen wird. Ich meine, dem ist nicht so. Existenzvoraussetzungen sollten vielmehr durch die logisch-semantische Untersuchung offen gelegt werden als sie hinter einer Struktur oder einem Modell zu verstecken.[83] Bleibt doch die Modelltheo-

[81] Zu diesem Unterschied vergleiche man auch hier Abschnitt 3.3.1, zu möglichen Missverständnissen Abschnitt 3.8.2, Beispiel 1, 'Das Trägheitsprinzip'.

[82] Das wäre dann das Trägheitsprinzip in der Form 'Es existiert ein Inertialsystem, in dem eine kräftefreie Punktmechanik realisierbar ist.', frei nach Truesdell [1984d], S. 547.

[83] In Truesdell [1984d], S. 531, mündet dieses Missverständnis in einem abschätzigen Urteil, mathematische Logik bestehe meistenteils darin, „[to] repeat preceding verbal definitions and assertions". Das kann nur damit verstanden werden, dass einem Mathematiker wie Truesdell es allein um die 'Modellierung physikalischer Objekte' (ebd., S. 529) geht, um die Begriffskonstitution selbst. Für die Begriffsanalyse reicht ihm eine 'informelle' umgangssprachliche Semantik aus. Jede formalisierende Zielsetzung der mathematischen Logik bleibt Truesdell somit verborgen. Damit repräsentiert er die Mehrzahl forschender Physiker und Mathematiker. Vom physikalischen Gehalt her beurteilt, bleibt ihm nur der Ausruf '[P]lease, no semantics!' (ebd., S. 558), um schließlich zusammenzufassen: „There is no point in laboring the concept 'frame of reference', for it was well (though not universally) understood long before anyone

rie gegenüber der Existenz der Objekte völlig 'agnostisch', um einen Ausdruck aus Hodges [2009] zu verwenden. Abgesehen von der hintergründigen Mengenlehre selbst und der syntaktisch offen gelegten Struktur, kann die Modelltheorie keine empirischen Bedeutungen, keine physikalischen Objekte neben Mengenobjekten repräsentieren, die nicht schon informell eingeführt werden. Das macht sie nach meinem Verständnis gerade zu *keinem* vorrangigen Instrumentarium der logischen Rekonstruktion auf dem Gebiet der Mechanik.

Die Existenz eines physikalischen Objektes zeigt sich darin, dass ein *Modell* der logischen Struktur vorliegt. Und dieses 'Vorliegen' ist entweder als eine Setzung oder als das Ergebnis einer logischen Folgerung zu verstehen. Der Semantic View kann Existenzbehauptungen dabei nicht durch Mengen repräsentieren und gleichzeitig ihrem selbst gestellten Anspruch der *Sprachunabhängigkeit* genügen: auf ein *syntaktisches* Vokabular von der Art '$\exists x\, \phi(x)$' zu verzichten. Sobald ein Modell '$P(a)$' aus der Modellmenge herausgegriffen wird, so dass '$P(a) \models \exists x\, \phi(x)$', so wird bereits die Existenz eines Objektes 'a' mit der Eigenschaft 'P' behauptet. Die semantische Sichtweise wirft sozusagen die Leiter (das syntaktische Vokabular) fort, auf der sie auf die Ebene der Modelle geklettert ist.[84] Das wird auch schon an der Umschreibung des 'Modellseins' in der Modelltheorie nach Feferman und Feferman [2004], S. 280, deutlich:

> „Model theory is the subject concerned with the question: For a *given language* L and axiom system in L, which structures M, if any, *are models* of the system? [eigene Herv.] [... M]*odel theory* is a part of metamathematics; it is an *informal* mathematical theory whose subject matter is *formal theories and their models*."

2. Die Reduktion des Gegenwirkungsprinzips

Die 'wahrscheinlich einzig wertvolle' Erneuerung[85] besteht in einer physikalischen Reduktionsbehauptung. Im *achten Theorem* von McKinsey u. a. [1953] wird mit modelltheoretischen Mitteln aufgezeigt, wie die systematische Unterscheidung zwischen externen und internen Kräften aufgehoben werden kann. Es besagt, dass es stets ein fiktives Modell mit zusätzlichen *verborgenen* Punktmassen gibt, in welchem allein ausgeglichene Paare *eines* Krafttyps '$f(p, t, i)$' vorkommen.

Zu beachten ist nun, dass man in der semantizistischen Linie häufiger die Behauptung findet, man könne das Gegenwirkungsprinzip **(GW)**, wie es in Abschnitt 3.4.1 dargestellt wurde, als eine theoretische '*Spezialisierung*' des Kraftbegriffes betrachten. Da **(GW)** die Unterscheidung in externe

alive today was born." (ebd., S. 548).

[84] Dieses Wittgensteinsche Bild ist Halvorson [2012] entnommen, in der aktuell die Abgrenzung des Semantic Views vom Received Views erneut in Frage gestellt wird. Siehe auch Hodges [2009], §5: 'Models and modelling'.

[85] So die Beurteilung Hamels in Truesdell [1984d], S. 524; ebenso in Hamel [1954].

und interne Kräfte *implizit* definiert, werde diese Unterscheidung auf Ebene der *Axiome* von $\mathbf{PM_{MSS}}$ überflüssig. Man könne dann die Unterscheidung nachträglich *explizit* definieren. Semantizisten berufen sich dabei zum einen auf Anwendungsmöglichkeiten des Newtonschen Kraftgesetzes ohne **(GW)**: Wenn etwa eine Kanonenkugel oder eine Rakete abgefeuert wird, könne die Gegenwirkung auf die Erdmasse praktisch vernachlässigt werden.[86] Zum anderen wird auf die Gültigkeit dieses achten Theorems verwiesen.[87] Eigenartig bleibt jedoch, dass Suppes schon in Suppes [1957] und schließlich in Suppes [2002] grundlos zur gewöhnlichen Axiomatisierung mit vollem Gegenwirkungsprinzip **(GW)** zurückkehrt.

Nach meiner Auffassung sind bei aller modelltheoretischen Gültigkeit dennoch Zweifel darüber angebracht, welche Modelle als 'existent' gelten sollen: die Modelle mit 'realen' Punktmassen oder das erweiterte System mit 'verborgenen' Partikeln. Weil die Modelltheorie auch hier darüber schweigt, was diese verborgenen Objekte der Mengenlehre sind, halte ich die Reduktion auf einen einzigen Krafttyp für physikalisch nicht haltbar. Wegen der vielbeachteten Resonanz dieses Theorems habe ich den **Anhang A** ergänzt, in dem diese Behauptung und meine Bedenken weiter ausgeführt werden.

Letztlich kann ich keine physikalischen Gründe für oder gegen die semantische Rekonstruktion der Punktmechanik finden. Allerdings scheinen semantische Rekonstruktionen den physikalischen Gehalt, die vielfältigen Konnotationen der Grundbegriffe hinter der logischen Struktur, eher zu verbergen als offen zu legen. Und in diesem Fall würden sie der reduzierenden Funktion der axiomatischen Methode (so in Teil 2.3, Seite 34, genannt) vielmehr entgegenstehen. In dieser Hinsicht wäre eine semantische Rekonstruktion ohne ersichtlichen Wert.

4.5.4 Die These der metamathematischen Präzision

Ohne ein abschließendes Urteil in dieser Frage möchte ich nun mein Hauptanliegen zum Semantic View nochmals thematisieren: die eingeschränkte Zielsetzung des modelltheoretischen Methodenmonismus. Für Hamel und Truesdell bestand die eigentliche Provokation von Seiten der Begründer der semantischen Sichtweise darin, dass Hamels Axiomatisierung der Klassischen Mechanik als teilweise unklar bezeichnet wurde. Dieser Angriff wird mit der Behauptung verbunden, man habe einen formalen Standard der Präzision einführen wollen, der beweistheoretische Vorteile gegenüber einer informellen, hintergründigen Gebrauchslogik bietet, der aber keine logizistische Sperrigkeit und Sachfremde zeigt. Man kann von einem *gemäßig-*

[86] So das Beispiel schon in McKinsey u. a. [1953], S. 260; dort mit dem betonten Hinweis, man 'wolle' nicht immer, dass **(GW)** in allen Anwendungen gültig ist.

[87] Siehe etwa Stegmüller [1985], S. 113 f., wo das Gegenwirkungsprinzip als 'spezielles Kraftgesetz' behandelt wird. Ähnlich Bunge [1967a], S. 137, wo mit dem 'achten Theorem' die logische Unabhängigkeit des Gegenwirkungsprinzips von der Punktmechanik erklärt wird.

ten Formalisierungsanspruch reden, da man einerseits versucht, die strukturellen Eigenschaften der Modellmenge möglichst formal zu behandeln, andererseits aber die logische Folgerungsstruktur im Hintergrund lässt.[88] Der Semantic View beansprucht also einen neuen Repräsentationsstandard, der mathematisch präzise und leicht handhabbar ist. Die Klassische Punktmechanik in McKinsey u. a. [1953] ist damit zu einem paradigmatischen Miniaturbeispiel geworden, wie das modelltheoretische Instrumentarium auf empirische Theorien anwendbar gemacht werden kann.

Nach dem Received View des logischen Empirismus ist die Theorie der Klassischen Mechanik als ein syntaktisch-linguistischer Apparat in der Prädikatenlogik erster oder höherer Stufe zu rekonstruieren. Die Art der syntaktischen Repräsentation wird nun im Semantic View für irrelevant erklärt. Man verzettele sich in terminologische Schwierigkeiten, die nicht nur unpraktisch, sondern auch völlig wissenschaftsfern seien.[89] Es reiche aus, die impliziten Definitionen der Theorie mittels einer *naiven Mengenlehre* zu repräsentieren. Man greift nur einen Repräsentanten aus der Menge aller realisierenden Modelle einer Struktur heraus.[90] Die *Theorie* $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$ wird dann mit der Modellmenge (samt logischer Struktur) identifiziert. Theorien sind also 'außer-linguistische' Entitäten, die syntaktisch (objektsprachlich) allein durch eine Realisation der logischen Struktur sichtbar werden.[91] Frederick Suppe fasst zusammen, indem er richtigerweise von der 'Nützlichkeit' der Modelltheorie spricht, nicht etwa von einer dogmatischen Notwendigkeit, wie sie jedem axiomatischen Vorhaben entgegenstehen würde.[92]

> „Theories are extralinguistic entities which can be described by their linguistic formulations. The propositions in a formulation of a theory thus provide true descriptions of the theory, and so the theory qualifies as a model for each of its formulations. [...] This suggests that the semantic techniques of model theory [...] will be useful in analyzing the structure of scientific theories.“ (Suppe [1977a], S. 222)

[88] Siehe vor allem die Abschnitt 2.3.8 und Teil 2.5; sowie Suppes [1957], S. 255 und altuell Moulines [2008], S. 134. Suppes spricht vom 'formalen Standpunkt' meistens bei pädikatenlogischen (syntaktischen) Strukturübersetzungen (siehe dazu Suppes [1957], Seiten 247 und 254, dort insbes. Anmerkung *; sowie Suppes [1967], S. 58).

[89] Siehe etwa Suppes [1957], S. 248 f.; Suppes [1967], S. 56 - 58 oder Suppes [2002], S. 4, dort und in S. 25 f. auch mit einigen Beispielen aus der Mathematik, die ich hier auslassen möchte.

[90] Die Richtung weist der vielzitierze Slogan 'To axiomatize a theory is to define a set-theoretical predicate' (vgl. Suppes [1957], S. 249 oder Suppes [2002], S. 30). Der Inhalt des Slogans ist bereits in McKinsey und Suppes [1953a], S. 49, zu finden.

[91] Siehe dazu vor allem Suppes [1960], S. 289; Suppes [2002], S. 20. In Suppes [1957], S. 253, wird die 'logische' Bedeutung von 'Modell' als *Struktur* verstanden. Das zeigt, wie eng die Begrifflichkeiten miteinander verwandt sind. Zu neueren Begriffsvarianten dieser anfänglichen Konzeption der semantischen Sichtweise bei Suppes siehe etwa Halvorson [2012].

[92] Ich bin auf den offenen Umgang mit axiomatischen Rekonstruktionen in Abschnitt 2.6.2 näher eingegangen.

Gemessen an diesem modelltheoretischen Standard zur axiomatischen Analyse von wissenschaftlichen Theorien hätten Hamels Axiome der Punktmechanik ein Defizit aufgewiesen.

> „[...] Hamel's axiomatization does not satisfy the set-theoretical criteria developed in this chapter." (Suppes [1957], S. 295)

Vielmehr noch wird insbesondere das tragende und schwerfällige Axiom **(Ie)** aus Hamel [1927], das die Bedeutung der Kraftgößen umschreibt, völlig missverstanden. Aus Sicht einer Formanalyse, wie es der Modelltheorie eigen ist, wird es in McKinsey u. a. [1953], Anm. 3 auf S. 253 f., als redundant und nichtssagend abgetan. Hier ist nochmals der originale Wortlaut:

> „[...A]lthough Hamel's formulation of mechanics is rightly regarded as one of the clearest existing treatments of the subject, we find [...] the following strange axiom: 'Die Kräfte $d\vec{k}$ sind durch ihre 'Ursachen' bestimmt, d. h. durch Variable, welche den geometrischen und physikalischen Zustand der umgebenden Materie darstellen. Diese Abhängigkeit ist eindeutig und im allgemeinen stetig und differenzierbar.' One does not see how this axiom could intervene in the proofs of theorems, or in the solution of problems."

Ich glaube, dass der Gegensatz zwischen einer allgemeinen, phänomenalistischen Kontinuumsmechanik und der semantischen Sichtweise auf Klassische, 'miniaturisierte' Mechanik unvereinbar ist, wie ich schon in Abschnitt 3.6.4 ausgeführt habe. An den unterschiedlichen Kommentierungen des Axioms **(Ie)** wird besonders deutlich, dass es sich nicht nur um einen physikalischen, sondern vor allem um einen *methodologischen* Gegensatz handelt. Die Semantiker beharrten auf die Unklarheit und Nutzlosigkeit dieses Axioms, weil es nicht die Form einer impliziten Definition zeigt. Begriffe wie 'Variable' und 'Zustand' bleiben formal unklar, nicht weiter aus Grundbegriffen der Struktur definierbar.[93] Hamels und Truesdells Protest richtete sich im Gegenzug auf die physikalische Bedeutung, die mit dem Kraftaxiom verbunden wird. Bei aller Unbestimmtheit dieses Axioms, die Truesdell durchaus mitkritisierte, 'hängt gerade daran alles' (Hamel), weil es die Idee einer 'synthetischen' Wissenschaft der Mechanik zum Ausdruck bringt.[94] Ist doch das Axiom gerade die indirekte Behauptung, dass physikalische Interpretationen der Kraft ein informeller Gedankenprozess ist. So wird die axiomatische Methode in ganz unterschiedlichen Richtungen an der Klassischen Mechanik ausgestaltet: einerseits unter Vorgabe des umfassenden mechanischen Gegenstandbereichs, andererseits unter Anleitung formaler wie metamathematischer Kriterien, die strukturell einfache Grundbegriffe erzwingen.

[93] Siehe dazu den Briefwechsel in Truesdell [1984d], S. 525 f.

[94] Siehe die Wortlaute in Abschnitt 3.6.4, Seite 157.

Extensionalisierung des Kraftbegriffs?
Die Punktmechanik wird also an ihrer mengentheoretischen Formalisierbarkeit gemessen. Auch in Simon [1954], ein kritischer Bericht über McKinsey u. a. [1953], wird diese Ausrichtung begrüßt. Herbert Simon behauptet, eine mengentheoretische Übersetzung von Axiom **(Ie)** sei realisierbar.[95] Das halte ich aber für unmöglich. Die Idee der synthetischen Gesetzesform a priori bleibt in der semantischen Sichtweise unverstanden. Die Sprache der Mengenlehre ist von Natur aus *extensional*. Das heißt, eine funktionale Beziehung zwischen verschiedenen Elementen wird zu einer Menge so zusammengefasst, dass die Elemente dieser Menge nur dadurch identifiziert werden können, *dass* sie in dieser Beziehung stehen. Jede davon zusätzliche Bedeutung der Relation, in der die Elemente stehen, ihre *Intension*, bleibt in der Sprache der Mengenlehre unberücksichtigt. Die Mengenlehre identifiziert also die *Extension* eines Begriffes (oder einer Beziehung) mit einer Menge, die unter einen formalen Repräsentanten von der Art '$\phi(x, y, z, \ldots)$' fällt.[96] In der Mengenlehre eine Theorie zu repräsentieren heißt, funktionale Beziehungen zu finden. Und das ist gewiss nicht die universelle Aussage des Axioms **(Ie)**, wie es ursprünglich von Hamel intendiert war. Simon täuscht sich, wenn er meint, eine mengentheoretische Form zu haben, um etwas zu repräsentieren, das etwas eigentlich Informelles und Anschauliches behauptet.

4.5.5 Ein Fazit: Zurück zu den informellen Ursprüngen der axiomatischen Methode

In metamathematischen Fragen nach logischer Präzision gibt es meines Erachtens kein vorgegebenes 'Richtig' oder 'Falsch'. Es handelt sich um Konventionen.[97] So gibt es auch keinen Grund, das Formalisierungsprogramm des Semantic Views für falsch oder verfehlt zu erklären. Haben die Autoren sich doch explizit auf einen miniaturisierten Ausschnitt der Klassischen Mechanik beschränkt, um das modelltheoretische Instrumentarium

[95] Siehe Simon [1954], Anm. 6, S. 342. Wenn es dort nämlich heißt, dass es relevant sei, die operationale und physikalisch realisierbare Seite eines Axiomensystems mit einzubeziehen, wie er selbst in der Axiomatisierung von Simon [1947] vorstellt, dann ist er nicht weit von Hamels Systemen entfernt. Dass dieser Prozess aber aufs Neue als Formalisierung von **(Ie)** gesehen wird, zeigt den übertriebenen Optimismus in die Mengensprache. Wenn man Simon hier wörtlich nimmt, heißt sein Vorschlag, eine 'Theorie von allem' zu finden.

[96] Man spricht in der naiven Mengenlehre hierbei von *Komprehension* und in der axiomatisierten Fassung von einem *Aussonderungsschema* (siehe auch hier im Anhang A.2). Das Identitätskriterium für gleiche Elemente (bzw. für gleiche Mengen) wird in der axiomatischen Mengenlehre auch *Extensionalitätsprinzip* genannt: Zwei Mengen sind dann gleich, wenn ihnen dieselben Elemente angehören. Man vergleiche etwa Ebbinghaus [1994], Seiten 12 und 30 f.

[97] Die semantische Wahrheitskonvention ist von Alfred Tarski nach dem Aspekt der formalen Korrektheit und dem der materiellen Angemessenheit in Aussageformen definiert. Siehe insbesondere Tarski [1936], Seiten 448 und 476; sowie Tarski [1944].

anwendbar zu machen, um metamathematische Fragen der Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit in der Mechanik zu klären. Es gibt aber auch keinen *physikalischen* Grund, die Axiomatisierung auf formale Kriterien der Grundbegriffe zu beschränken. Der Semantic View hat die Zielsetzung in der Axiomatisierung der Mechanik von der informellen Begriffsanalyse in Richtung einer metamathematischen Systemanalyse verschoben. Mit dem allgemeinen Anspruch, die axiomatische Methode durch Modelltheorie auszugestalten, um die logische Rekonstruktion von wissenschaftlichen Theorien, die über den extensional erfassbaren Gegenstandsbereich hinaus empirische Bedeutung haben, präzise und einfach zu ermöglichen, muss er scheitern. Der Semantic View bleibt eine besondere Perspektive auf das strukturell Grundlegende einer wissenschaftlichen Theorie. Er kann nicht darüber hinwegtäuschen, dass jede Begriffsanalyse in den Grundlagen der Mathematik und Mechanik ein informeller Prozess bleibt. Jede Formalisierung der empirischen Bedeutungsebene und der anschaulichen Konstruktionen bleibt ein kühner Versuch ohne Aussagekraft.

Hilbert selbst hat es offen gelassen, ob die axiomatische Methode auf empirischem Gebiet eher im Bereich der Begriffsanalyse bleibt oder in metamathematische Richtungen geht.[98] Ich glaube, die einzige Vermittlung zwischen den verschiedenen Positionen zur Rekonstruktion der Klassischen Mechanik besteht in der Feststellung, *dass* überhaupt *andere Zielsetzungen* mit der axiomatischen Methode verbunden werden.[99] Es gibt diese *unterschiedlichen Ausgestaltungen* der axiomatischen Methode. Allerdings gibt es keinen Vorrang in der Taxonomie einer axiomatischen Systembeschreibung, da die Richtung niemals logisch entschieden werden kann. So muss die Zielsetzung erst recht genannt werden, um Missverständnisse zu vermeiden.

Walter Noll, der Mitte des 20. Jahrhunderts eine neuartige Deduktion der Klassischen Mechanik aus den kontinuumsmechanischen Ansatz gefunden hat, war in dieser Debatte um die 'wahren' Axiome der Klassischen Mechanik unentschieden. Er verstand beide Positionen und verwendete für sein mathematisches Werk eine ebenso mengentheoretische Form, ohne sich in metamathematischen Untersuchungen zu verlieren. Umso bemerkenswerter ist, dass er in der Einleitung zu Noll [1963], S. 135, diese unterschiedlichen Zielsetzungen benennt.

> „Le logicien entreprend de donner des formalisation complètes en utilisant le symbolisme de la logique formelle. Il est interéressé plus dans la structure formelle d'une théorie que dans son contenu physique. L'accent du logicien est concentré sur les méta-théorèmes et non sur les théorèmes de la théorie.
>
> Le physicien, au contraire, s'il fait l'axiomatique, entreprend d'ordonner les phénomènes d'expérience d'une façon assez logique sans

[98] Siehe dazu Teil 2.9.

[99] Siehe dazu insbes. die Ergebnisschrift Toulmin [1977], S. 605.

> exclure son intuition et sans être trop préoccupé des questions de rigueur. L'accent du physicien est concentré sur le contenu physique d'une théorie et non sur la structure formelle."

Schließlich beeindruckt wieder Pierre Duhems weitsichtiges Verständnis der Mechanik, wenn er mit Blick auf die analytische Mechanik nach Kirchhoff und Hertz schon zu demselben Schluss kommt. Ihm gebürt hier in dieser Sache das Schlusswort, dem ich nichts Eigenes mehr hinzufügen möchte.

> „[...Die] Dynamik geht von Gleichungen, die *definitionsgemäß* gelten, aus und entfaltet sich in vollkommener Ordnung und unfehlbaren Schlussketten; aber die Ursache ihrer Strenge ist auch die ihrer Unfruchtbarkeit: sie schreibt nur Identitäten hin; um diese Identitäten in synthetische Urteile umzuformen, die uns etwas über die Körper und deren Bewegungen lehren, muss sie ihre analytische Strenge zertrümmern; im Augenblick, wo sie die speziellen vom Physiker betrachteten Kräfte behandelt, muss sie all das experimentell Anschauliche wieder hereinnehmen, von dem sie in ihrer Grundlegung den allgemeinen Kraftbegriff entkleidet hatte." (Duhem [1912], S. 155 f.)

5 Weitere Perspektiven zu einer axiomatisierten Klassischen Mechanik

> „Es wird allezeit interessant und lehrreich bleiben, den Naturgesetzen einen neuen vorteilhaften Gesichtspunkt abzugewinnen, sei es, dass man aus demselben diese oder jene einzelne Aufgabe leichter auflösen könne, oder dass sich aus ihm eine besondere Angemessenheit offenbare." (Gauß [1877], S. 25)

Diese Arbeit soll ein Beitrag zur philosophischen Auseinandersetzung mit den Begriffsschemen der Klassischen Mechanik sein. Der Schwerpunkt liegt auf der axiomatischen Methode nach Hilbert, auf dem sechsten Problem und dem Lösungsansatz bei Hamel. Es mag sich in vieler Hinsicht um einen historischen Rückblick handeln. Doch zeichnen sich Perspektiven ab, die nach meiner Einschätzung aktuell zu wenig oder gar nicht in der philosophischen Diskussion Beachtung gefunden haben. In Bezug auf die Mechanik ist die axiomatische Methode kein formalistisches Instrument, sondern ein informelles, mathematisches Herangehen zur Begriffsklärung. Mit ihr wird versucht, die unterschiedlichen Begriffsschemen und Darstellungen, die teilweise disjunktiv nebeneinander stehen, miteinander zu verknüpfen. Das Verständnis der Mechanik wird durch logische Begründung dieser Querverbindungen, Reduktionen und Interpretationen bereichert. Wenn man es so sieht, hat die axiomatische Methode einen philosophischen Hintergrund. Als Teil einer metamathematischen Untersuchung der Wissenschaft stellt sie, wie Bunge sagt, eine 'Tätigkeit zweiter Ordnung' dar. Mit ihren Instrumentarium reflektiert man die Konzeption der Theorie auf ihre Reichweiten und Grenzen, um neue Perspektiven zu erkennen, um logische wie konzeptuelle Unklarheiten des Altbewährten zu identifizieren. Davon lebt die Methode, und das macht sie weiterhin attraktiv.

Die einleitenden Worte von Carl Friedrich Gauß zu seinem Minimalprinzip, die ich oben als Leitgedanke an den Anfang dieses Schlusskapitels gestellt habe, weisen uns den Weg, wie mit bewährten Prinzipien kreativ umzugehen ist. Die Wissenschaft der Mechanik wird durch neue, prinzipiengeleitete Zugänge belebt, an neue Grenzen gestoßen. Gauß hat gezeigt, dass man dafür die axiomatische Methode nicht zwingend benötigt. Doch sie ist ein hilfreiches Instrument, wenn die Bilder und Gesetze unübersichtlich werden. Eine weitere 'Tieferlegung' im Hilbertschen Sinn zu erzielen, die Klassische Mechanik um ein neues mathematisches Bild der Natur zu bereichern, gerade dann, wenn es schwierig wird, die vielen Annahmen und theoretischen Randbedingungen zu überschauen: in diesem Dienst steht die axiomatischen Methode.

So ist Georg Hamels Werk zur Axiomatisierung der Mechanik bisher nur punktuell und eingeschränkt ins Interesse der Wissenschaftsphilosophie geraten. Diese Arbeit soll deswegen ein Beitrag zur philosophischen Reflexion der Klassischen Mechanik sein, in der die Stärken der axiomatischen Methode deutlich werden, Stärken, die ganz besonders in Hamels informellen Axiomatisierungen zum Ausdruck kommen. Keineswegs bleibt die axiomatische Behandlung der Mechanik bei Hamel stehen, und noch viel weniger wäre damit jede Klärung der mechanischen Grundlagen abgeschlossen. Die Vorstellung eines statischen Schematismus steht der kreativen, rekonstruktiven wie auch der instrumentalistischen Ausrichtung der Tätigkeit des Axiomatisierens sogar völlig entgegen. Die Wissenschaftsphilosophie gewinnt mit Hamels Werk einen guten, einen wichtigen Ausgangspunkt für rekonstruktive Analysen der Klassischen Mechanik.

Axiomatisierungen und metamathematische Untersuchungen setzen, wie die philosophische Tätigkeit selbst, eher parallel zu den Forschungszweigen an. Als Metakritik der Begriffsreichweite entziehen sie sich der unmittelbaren Forschungslandschaft. Deshalb macht es wenig Sinn, von zukünftigen Aussichten oder gar von weitergehenden Programmen für eine Axiomatisierung der Mechanik zu sprechen. Ich glaube nicht, dass die konzeptuellen Probleme der Mechanik allein vom Forschungsstand vorgegeben sind. Die Begriffe der Mechanik beinhalten vielmehr eine theoretische Eigenständigkeit, die sie zu Grundelementen einer zweckfreien Naturbetrachtung machen. Sie bleiben auch heute Teil einer traditionellen Philosophia Naturalis. So wird die axiomatische Methode in Forscherkreisen wohl stets ein Legitimationsproblem haben. Gerade in ihrer Anwendung auf empirische Theorien bleibt die Gefahr, dass Axiomatisierungen missverstanden und sogar für irrelevant erklärt werden: ist hierbei doch der regressive Blick wesentlich, der immer zu weiteren Fragen anregt, selbst wenn der Naturforscher kein neues Phänomen zu erkennen meint. Doch wer kann schon sagen, ob diese Fragen nicht irgendwann für die Naturwissenschaft relevant werden?

Zu diesem Ende hin sollen weitere Perspektiven aufgezeigt werden, die sich unmittelbar aus meiner Untersuchung des Bereichs 'Axiomatische Methode und Grundlagen der Mechanik im 20. Jahrhundert' ergeben haben. Ich möchte betonen, dass diese Perspektiven keinesfalls die weitere Richtung einer axiomatischen Untersuchung der Mechanik bestimmen müssen. Sie sind eher eine Fortsetzung der hier skizzierten Problemstellungen und können nur angedeutet werden.

5.1 Nolls und Truesdells Rekonstruktion der Kontinuumsmechanik

Walter Noll und Clifford Truesdell haben die Grundlagen der Mechanik gleich in mehreren Rücksichten weiterentwickelt und reformuliert.[1] Gemeinsam mit Hamel sind sie überzeugt von der konzeptuellen Stärke einer axiomatisierten Darstellung der Kontinuumsmechanik und Thermodynamik. Ihre Arbeiten zur rationalen Mechanik, verstanden als eigenständige, mathematisch-deduktive Wissenschaft aller sichtbaren Naturerscheinungen, zielen auf Fundierung und Verallgemeinerung der mechanischen Begriffsstrukturen.[2] Wie schon Hamel versuchen auch Noll und Truesdell, die konzeptuelle Eigenständigkeit des Kontinuumsansatzes der Mechanik gegenüber dem punktmechanischen Zugang zu verteidigen und die Punktmechanik als alleinige Basis einer Mechanik ausgedehnter Körper zurückzuweisen.

Mit dieser gemeinsamen Ausrichtung sind ganz neuartige Rekonstruktionen gelungen, die einerseits zu Hilberts Problem der mechanischen Grenzprozesse Antwort geben, andererseits auch die axiomatische Fassung der Klassischen Mechanik mitgestalten. Im Folgenden wird auf einige besondere Merkmale dieser Neufassung der Kontinuumsmechanik nach Noll und Truesdell hingewiesen.

5.1.1 Orientierung an materialspezifischen Merkmalen

Tatsächlich war das ursprüngliche Ziel zu einer modernen Kontinuumsmechanik gewaltig. Noll und Truesdell erkannten die bloß näherungsweise Gültigkeit der älteren *linearisierten* Elastizitätstheorie.[3] Es ging ihnen um nicht weniger als einen mathematischen Rahmen, in dem *nicht-lineare* Deformations- und Spannungszustände, wie sie etwa in ansiotroper Materie (z.B. Zellstoff), in 'hyperelastischen' Materialien (z.B. Gummi), viskoelastischen Flüssigkeiten oder in plastischen Dehnungen entstehen, durch elementare Begriffe eingeführt werden. Diese Allgemeinheit kann nur durch

[1] Historisch nicht zu unterschätzen ist der persönliche Kontakt zu Hamel und Istvan Szabò in Berlin Anfang der 1950er, der sicherlich entscheidende fachliche Gemeinsamkeiten geprägt hat. Man vergleiche mit Truesdells Vorwort von Noll [1974] und Ignatieff [1996], S. 25.

[2] In Abschnitt 3.9 habe ich von 'Fundierungsstreben' und 'Systemerweiterung' gesprochen, die als methodologische Bedingungen die Grundlagen der Mechanik kennzeichnen. Zum Begriff der 'rationalen Mechanik' bei Truesdell siehe vor allem Truesdell [1958] und Fraser [1994], S. 985.

[3] Wie schon in Fußnote 17 aus Kapitel 3.3 angedeutet geht die linearisierte Theorie der Elastizität von infinitesimal kleinen Deformationen aus, die näherungsweise als lineare Abhängigkeit zwischen Anfangs- und Endkonfiguration des Körpers beschrieben werden. Die Erweiterung zur nicht-linearen Elastizitätstheorie heißt also, man hat keine linearisierte 'Näherung' in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung und lässt diskrete ('finite') Deformationszustände zu. Siehe dazu insbesondere Truesdell [1958], S. 735; Truesdell [1952], S. 83; sowie Truesdell und Noll [2004], S. 2.

die funktionale Beschreibung der charakteristischen Spannungs- und Dehnungstensoren gelingen. Idealisierte ('einfache') Materialien, wie etwa isotrope Festkörper oder ideale Flüssigkeiten behalten ihre volle Berechtigung innerhalb ihrer Gültigkeitsgrenzen, werden nun aber durch spezielle Tensoreigenschaften charakterisiert. Sie können von 'anisotropen' und 'hypoelastischen' Stoffeigenschaften in *einem einzigen* Rahmen unterschieden werden. Folgende Textpassagen machen diese Zielsetzung deutlich.

> „[E]ach non-linear theory is designed to predict more completely the behavior of a narrower class of natural materials." (Truesdell und Noll [2004], S. 3)

> „Mechanics as a whole is non-linear; the special parts of mechanics which are linear may seem nearer to common sense, but all this indicates that good sense in mechanics is uncommon. We should not be resentful if materials show character instead of docile obedience." (Truesdell [1958], S. 735)

> „Experimental scientists, who had to deal with real materials, developed a science of non-classical materials called rheology. But they did not succeed in fitting their experimental results into a general mathematical framework." (Noll [1958], S. 198)

Spezifische Materialeigenschaften werden nun durch so genannte *konstitutive Gleichungen* ('constitutive equations') beschrieben. Diese können sowohl den Charakter von einschränkenden Randbedingungen ('constraints') für die Bewegungszustände eines Körpers haben, als auch den dynamischen Prozess als Zusammenhang zwischen Bewegungs- und Spannungszustand beschreiben: „to denote specializing hypotheses intended to model ideally the response of natural substances".[4] Einfache konstitutive Gleichungen sind hier im Zusammenhang mit Hamels Deduktionstheorem vorgekommen (Abschnitt 3.7.5). Ein Körper mit isotroper Massenverteilung wird z.B. starr genannt, wenn keine infinitesimalen Verzerrungen am Körper vorkommen: Alle Komponenten des Elastizitätstensors sind Null. Ein Körper hat eine isotrope Massenverteilung, wenn die Orientierung der Materialoberflächen zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungsbeziehungen gleichgültig ist.[5] Die Klassifizierung aller Stofftypen durch Deformations- und Spannungsänderungen ist wesentliche Aufgabe der nicht-linearen Kontinuumsmechanik ('Non-linear Field-Theory').

Die *konzeptuelle Erweiterung* in Noll [1958] besteht hierbei vor allem darin, dass allgemeine Prinzipien in *tensorieller* Form repräsentiert werden können, aus denen "the most general constitutive equation for all materials is derived" (ebd., S. 198). Anschließend können verschiedene Materialtypen durch weitere Restriktionen am Spannungstensor definiert werden.

[4] Das Zitat ist Truesdell [1984d], S. 562, entnommen. Man vergleiche dazu auch Noll [1958], Seiten 198 u. 208; Truesdell [1984d], S. 562 f.; Bunge [1967a], Seiten 42 u. 154; und in Lehrbuchform Fung und Tong [2001], S. 550.

[5] Siehe etwa Truesdell und Toupin [1960], S. 700.

Die allgemeinste konstitutive Gleichung beschränkt dabei nur die Form eines Spannungstensors auf kinematische Zustände der topologischen Umgebung des Körperausschnitts.[6] Bei Noll und Truesdell erhält die Aussage einen axiomatischen Charakter, weil sie eine Bedingung a priori darstellt, wie überhaupt Spannungen und Deformationen bestimmbar sind. In dieser Bedeutung hat sie Ähnlichkeit mit Hamels kontroversem Axiom **(Ie)**, enthält dafür aber mathematisch differenzierte Zuordnungen, wie eine Kraft durch die 'umgebende Materie' bestimmt sein kann.[7]

Besondere Bedeutung in dieser Neukonstruktion hat das Prinzip der Objektivität ('*Principle of Objectivity*'), später auch '*Principle of material frame-indifference*' genannt. Kurz gesagt beinhaltet es in mathematisierter Darstellung, dass alle konstitutiven Größen und Gleichungen der Kontinuumsmechanik invariant unter beliebigen Bezugssystemwechsel bleiben. 'Objektivität' drückt das Prinzip insofern aus, als „the material properties of a body should not depend on the observer, no matter how he moves" (Noll [1958], S. 209). Für die Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik und Thermodynamik - 'Spannung' ('Kontaktkraft'), 'Deformation', 'Wärme' und 'physikalische Arbeit' - gibt es keine ausgezeichneten Bezugssysteme.[8]

> **Principle of Objectivity / Principle of Material Frame-Invariance (Noll, Oldroyd)**: „The constitutive laws governing the internal interactions between the parts of the system should not depend on whatever external frame of reference is used to describe them." (Noll [2004], S. 17)

Entscheidende neue Perspektive ist dabei, dass Beschleunigungsgesetze $\vec{a}(t)$ und somit Trägheitskräfte als $m \cdot \vec{a}(t)$, wie auch externe Volumkräfte auf ganze Massensysteme, *nicht* systeminvariant (nicht 'frame-indifferent') sind, dass dagegen nach dem Prinzip der Objektivität interne Spannungen systeminvariant sein *sollen*. Diese Forderung lässt sich damit rechtfertigen, dass nur innere Kräfte die Dynamik der Systemwirkung auf äußere Kräfte erklären.[9] Die Klassische Mechanik, verstanden als Mechanik der Trägheitsmerkmale von Körpern, wird nun zu einer speziellen Klasse von Bewegungserscheinungen der räumlichen Euklidischen Geometrie. Das Newtonsche Grundgesetz **(NG)** bildet dabei ein *unabhängiges konstitutives* Axiom aller klassischen Systeme. Trägheitskräfte sind nur noch für Inertialsysteme *durch* **(NG)** *definiert*.[10] Das Newtonschen Grundgesetzes ist nunmehr eine *implizite Definition* von inertialen Bezugssystemen.

[6] Siehe dazu Noll [1958], S. 210; Truesdell [1991], Seiten 200 – 204; sowie Truesdell [1984d], S. 564.

[7] Man vergleiche hier zum Axiom (Ie) die Abschnitte 4.5.4 und 3.6.4.

[8] Siehe dazu Noll [1958], S. 209; Noll [1959], S. 280; Noll [1963], S. 55; Truesdell und Toupin [1960], S. 703; Truesdell und Noll [2004], Seiten XI und 45 f.; Truesdell [1991] §11: 'Frame-Indifference'; Bunge [1967a], S. 88; in Lehrbuchform etwa Fung und Tong [2001], S. 543 f.

[9] Siehe hier Teil 3.4.

[10] Siehe vor allem Noll [1963], S. 54 f.

Diese Eigenart aller Trägheitsgrößen, nicht bezugssystem-invariant zu sein, macht gewissermaßen ihre formale wie konzeptuelle Schwierigkeit aus.[11] Das Paradoxe, das Ungreifbare der Klassischen Mechanik ist, dass die Erhaltung der inertialen Größen (Impuls, Drehmoment und kinetische Energie) nur in Inertialsystemen gelten, dass aber nach dem Prinzip der Objektivität alle dynamischen Größen *innerhalb eines beliebigen* Bezugssystems (interne Kontaktkräfte und Momente etwa) invariant sind. Diese Neuausrichtung bestätigt die Notwendigkeit, die schon Hamel betont hat, systemisch *externe* und *interne* Kräfte in der rationalen Mechanik streng auseinander zu halten, ganz im Sinn einer axiomatischen Grundlegung.

> „If we wish to stay in the realm of classical mechanics we may resolve the paradox by sacrificing the objectivity of external body forces while retaining the objectivity of the essential types of forces, the contact forces and the mutual body forces." (Noll [1959], S. 279)

Die Gesetze der Klassischen Mechanik sind also nur dann gültig, wenn das Bezugssystem zuvor als Inertialsystem *festgelegt* wird. Der konzeptuelle Fortschritt Nolls ist nun, dass *alle klassischen* Systeme durch Systeminvarianzen beschrieben werden. Die axiomatische Fassung diese Rekonstruktion kann also durch die erneute Unterscheidung in interne und externe Systemgrößen eine paradox erscheinende Situation auflösen.

5.1.2 Verallgemeinerte Axiome der Kontinuumsmechanik

Im Rahmen dieser verallgemeinerten Konzeption der Kontinuumsmechanik werden von Noll und Truesdell neue 'Axiome der Mechanik' formuliert. Hier sind in erster Linie Noll [1959] und Noll [1963] zu nennen, die sich unmittelbar auf die Klassische Mechanik von Trägheitsmerkmalen zurückbeziehen. Zusätzlich ist Noll [1958] der erste Entwurf zu einer materialbezogenen Klassifizierung der Kontinuumsmechanik mittels konstitutiver Gleichungen. Gemeinsam mit Nolls Axiomen bilden sie die neue Grundlage zu der umfassenden Axiomatisierung der Kontinuumsmechanik in Truesdell [1991].

Es ist mir in dieser Arbeit nicht möglich, auf den axiomatischen Aufbau einzugehen. Bis auf die wenigen historischen Anmerkungen in Truesdell [1984d] gibt es allerdings auch noch keine Untersuchung darüber, inwieweit die 'Axiome der Mechanik' von Hamel in der axiomatischen Konzeption von Noll und Truesdell zu 'klassischen Spezialfällen träger Kontinua' werden, inwiefern sie sogar ersetzt, reduziert oder verfeinert werden.[12]

[11] Siehe dazu vor allem Noll [1959], S. 279; Noll [2007], Seiten 16 – 18; Truesdell [1991], Seiten 57 f. u. 70; Truesdell [1984d], S. 545 f.; Truesdell und Toupin [1960], Seiten 482, 530 u. 533; sowie das zweite Beispiel hier in Abschnitt 3.8.2.

[12] Dass Hamels Axiome nur eingeschränkt gültig sind, wie Noll (nach Ignatieff [1996], S. 107) behauptet hat, ist offensichtlich. Es gilt auch als historisch sicher, dass Nolls Untersuchungen aus seinen Hamel-Studien und den Fragen zu Hilberts sechsten Problem erwachsen

Ich meine, dass sich in der Bedeutung der Grundbegriffe zur Klassischen Mechanik viele Gemeinsamkeiten zeigen. Das betrifft insbesondere das Konzept zur Massenverteilung von Kontinua und die axiomatische Behandlung der klassischen Bewegungsgleichungen (entsprechend Abschnitt 3.3.5). Auffälligster Unterschied zu Hamels Axiomatisierung ist die Verallgemeinerung der Grundbegriffe zu schematischen Tensoreigenschaften. Besonders die differenzierteste und umfassend erläuternde Darstellung Truesdell [1991] führt *bezugsinvariante Größen* der Klassischen Mechanik axiomatisch ein: Masse, interne Systemkräfte und physikalische Arbeit.[13]

Unklar bleibt, ob die neuartige Orientierung an konstitutiven Gleichungen der Materialtypen eine eigenständige Axiomatisierung bedeutet oder ob die Axiomatisierung in den klassischen Systemmechaniken enthalten ist. Dazu müsste geklärt werden, was für besondere Naturhypothesen konstitutive Gleichungen sind. Sie scheinen eher von protophysikalischer Art zu sein, methodologische und erkenntnislogische Vorraussetzungen zur Mechanik, was es schwierig macht, sie mit physikalischen Prinzipien zu verknüpfen.[14] Die Schwierigkeit mit epistemologischen Vorschriften in der Mechanik ist bereits bei Hamels Axiomen zur Statik und zur analytischen Dynamik aufgetreten.[15] Ich halte es für möglich, dass konstitutive Gleichungen *formale Ausgestaltungen* von Hamels Axiom **(Ie)** sind. Sie eröffnen *Untersysteme*, in denen bestimmte Materialtypen logisch zugänglich und abgegrenzt werden. Insofern besteht meines Erachtens die axiomatische Verallgemeinerung und Erweiterung der modernen Kontinuumsmechanik darin, dass epistemologische (protophysikalische) Prinzipien differenzierter gefasst und in mehrere voneinander unabhängige Prinzipien (konstitutive Relationen) gebracht werden können. Ob es damit einen Gegensatz zu Hamels Aussage des synthetischen Kraftbegriffes a priori gibt, muss ich an dieser Stelle offen lassen.

5.1.3 Eine neue Sicht auf die Klassische Mechanik

Truesdell hielt Hamels Theoreme zu Hilberts Problem der Grenzübergänge in verschiedenen Rücksichten für verbesserungsfähig. So ist es offenbar eine unrealistische Beschränkung, wenn Grenzprozesse als mathematischer Limes an Körperoberflächen konstruiert werden. Das 'Boltzmannaxiom' ist

sind (nach Ignatieff [1996], S. 99). Allerdings nehmen seine Schriften weder Bezug zu Hamels Werk, noch schien es ihm die Mühe wert zu sein, seine Axiomatisierungen einem breiten Publikum, mit Interessen in Didaktik, Physik oder Wissenschaftsphilosophie, zugänglich zu machen. (Man vergleiche dazu insbes. ebd., S. 111 f.)

[13] Siehe insbes. ebd., §12: 'Axioms of Mechanics', S. 60 ff.

[14] Siehe Bunge [1967a], Seiten 42, 86 f. und 154. Eine umfassende Klärung der Bedeutung von konstitutiven Gleichungen gelingt allerdings nicht. Es wird dort eher negativ von 'ungewöhnlichen Definitionen' (S. 42) gesprochen, die entweder protophysikalische, epistemologische oder materialspezifiscbe Hypothesen sein können.

[15] Siehe Abschnitte 3.6.2 und 3.4.3.

ursprünglich von Hamel als mathematischer Limes formuliert worden. Das beschert der Aussage des Axioms gewisse konzeptuelle Vagheit. Nicht alle analytischen Voraussetzungen werden explizit genannt. Und überhaupt bleibt unklar, ob ein 'Naturprinzip' durch einen mathematischen Limes beschrieben werden kann.[16]

Auch Hamels Grenzfallbetrachtung (hier Theorem 4 in Abschnitt 3.7.5), dass die Punktmechanik und die Mechanik starrer Körper aus der Kontinuumsmechanik folgen, hinterlässt Unklarheiten. Eine wichtige und starke Voraussetzung ist dort die analytische Aussage, dass die inneren Spannungen keine virtuelle Arbeit verrichten sollen. Kann die Deduktion auch ohne analytische Prinzipien formuliert werden? - Außerdem kann man fragen, ob die drei Voraussetzungen (i) bis (iii) des Theorems nicht in einem einzigen Prinzip enthalten sein können. Sie können durchaus, und es ist ohne Zweifel eine weitere, 'tiefer liegende' Lösung des Hilbertschen Problems der Grenzübergänge, die auf Noll [1963] zurückgeht. Nach Benvenuto [1991], S. 11, ist mit Nolls Deduktion - Mitte des 20. Jahrhunderts - ein „true turning point in the history of axiomatization of mechanics" erreicht.[17]

Nach Noll basiert jede Klassische Mechanik auf dem Axiom, dass die physikalische Arbeit eines Systems 'objektiv' ist, und zwar im Sinn der Bezugsinvarianz, wie es im 'Prinzip der Objektivität' zum Ausdruck kommt (siehe den vorherigen Abschnitt).

> **Axiom (NA):**
> „Pour un processus dynamique le travail est objectif. C'est-à-dire, pour tout corps B le travail $W(B,t)$ [...] est invariant par changement de repère arbitraire" (Noll [1963], S. 52).

Axiom **(NA)** und das folgende Theorem, auf deren formale Umsetzung ich hier nicht eingehen möchte,[18] beinhalten mehr als die Voraussetzungen zu Hamels Theorem, die sich auf die Klassische Mechanik beschränken. Es handelt sich um *Systemaussagen*, und eine Deduktion - ohne konstitutive Gleichungen - wird somit auch auf allgemeine Eigenschaften dynamischer Systeme kommen.

> **Theorem (Noll):**
> **(NA)** ist äquivalent zum resultierenden Kräfte- und Momenten*gleichgewicht* aller systeminternen Kräfte.

[16] Siehe vor allem Truesdell [1984d], Seiten 540 f. u. 549, sowie zum Boltzmannaxiom hier Abschnitt 3.7.3.

[17] Diese Überzeugung wird auch in Truesdell [1984a], S. 137, in Truesdell [1984d], S. 548, und in Dampier [1979], S. 24, zum Ausdruck gebracht.

[18] Sie werden bereits in Noll [1959] allgemein verständlich dargelegt. Weitere Ausführungen, auch des folgenden Theorems, wären Truesdell [1991], S. 62 f., sowie Dampier [1979], dort aber nur für punktmechanische Systeme.

Bezeichne $\vec{f}_B$ eine systeminterne Kraft, die auf den Teilkörper B des kontinuierlichen Systemvolumens V wirkt. Dann ist Nolls Axiom **(NA)** gleichbedeutend mit folgenden Beziehungen:

$$\int_V d\vec{f}_B = 0 \quad (\mathbf{1})$$

$$\int_V \vec{r} \times d\vec{f}_B = 0 \;\; (\mathbf{2}).$$

Entscheidend an diesem Resultat ist sein Systemcharakter: „Toutes les autres lois générales de la dynamique classique sont des conséquences des deux lois fondamentales [d.i. **(1)** und **(2)**]" (Noll [1963], S. 53). **(NA)**, **(1)** und **(2)** sagen nichts darüber aus, wie die Kräfte beschaffen sein müssen, sondern sie erfüllen sich vollständig als Systemgrößen, die durch weitere konstitutive Relationen spezifiziert werden:

- Ohne externe Kraftgrößen sind sie mit den grundlegenden Axiomen **(S1)** und **(S2)** der Statik aus Abschnitt 3.3.2 gleichwertig. Das heißt, für alle starren Kontinua werden die Erhaltungssätze erfüllt.
- Zusammen mit dem Trägheitsprinzip und mit Newtons Grundgesetz **(NG)** bildet **(NA)** die Grundlage für die *klassischen Systemmechaniken*, die schon Hamel deduziert hat:

  (i) Für Punktmassenverteilungen beinhalten sie das volle Gegenwirkungsprinzip **(G1) – (G3)**. Die dynamischen Grundgesetze **(PM1)** und **(PM2)** (in Abschnitt 3.3.4) sind durch Beschränkung auf endliche Punktmassen gültig.[19]

  (ii) Entsprechend sind die analogen Grundgleichungen **(RBM1)** und **(RBM2)** (aus Abschnitt 3.3.6) und für beliebige Kontinua träger Massen nach **(CM1)** und **(CM2)** (aus Abschnitt 3.3.5) ebenfalls gültig.[20]

Außerdem finden wir in Nolls Deduktion die Bestätigung, dass die Momentenerhaltung und damit der Momentensatz selbst eine *unabhängige* Grundgröße in der Klassischen Mechanik darstellt.[21]

> „The proof of Noll's theorem makes it clear that the balance of forces expresses the invariance of the working under translations, while the

[19] Siehe dazu insbes. Noll [1963], S. 54; und Dampier [1979], S. 27 f.

[20] Man beachte aber, dass insbesondere die Symmetrie des Spannungstensors (Cauchys 2. Theorem bzw. das Boltzmannaxiom) nicht ersetzbar wird, weil über die Beschaffenheit der Oberflächenkräfte bis auf die Gesamterhaltung nach **(1)** und **(2)** keine Folgerungen gewonnen werden können. Hierfür sind weitere Annahmen nötig, u.a. über die Normalenorientierung der internen Spannungszustände, die in Noll [1959] begründet werden; in Truesdell [1991], S. 172, und in Truesdell [1984d], S. 551, auch als 'Hamel-Noll-Theorem' behandelt.

[21] Zum Reduktionsproblem des Momentensatzes siehe Abschnitte 3.3.4 und 3.8.3.

> balance of torques expresses the invariance of the working under rotations. Since rotations and translations may be chosen independently in a change of frame, no relations between the two principles can be expected except in degenerate cases." (Truesdell [1991], S. 63)

Nolls Theorem zeigt eine weitere Deduktion von Systemeigenschaften aus Transformationseigenschaften der zugrunde liegenden Raumzeitgeometrie. Damit wäre es eine weitere Problemstellung, den genaueren Zusammenhang zu angrenzenden Theorien zu untersuchen, in denen ähnliche Transformationsprinzipien zu neuen Perspektiven in der Naturbeschreibung geführt haben. Gemeint ist vor allem der Bezug zum Einsteinschen Prinzip der raumzeitlichen Kovarianz von Ereignissen in der relativistischen Mechanik. Offenbar hat es mit dem Prinzip der Objektivität gewisse Ähnlichkeit, wenngleich ich hierzu keine genaueren Angaben machen kann.[22]

5.2 Erweiterungen von punktmechanischen Systemen

Die Punktmechanik zeigt als axiomatisierte Grundlage der gesamten Mechanik deutliche Repräsentationsmängel. Gerade die punktmechanische Behandlung von kontinuierlichen Dichte- und Kraftverteilungen, wie sie in der Kontinuumsmechanik an den Anfang gestellt werden, ist ergänzungsbedürftig. Deduktive Lücken und funktionale Unklarheiten müssen in Kauf genommen werden.[23] Allerdings darf nicht der Eindruck entstehen, als wären die Begriffe der Kontinuumsmechanik der einzige Rahmen, in dem die Grundlagen der Klassischen Mechanik Bestand haben. Es würde selbst Hamels Fundierungsstreben völlig widersprechen, wenn nicht versucht wird, die *physikalischen Zusatzannahmen* zu explizieren, mit denen die Punktmechanik eine umfassende Grundlage der klassischen Bereiche der Physik darstellen kann.

Umso wichtiger ist die Feststellung, dass der punktmechanische Zugang in der aktuellen Physik die dominierende Rolle eingenommen hat. Das liegt ohne Zweifel an ihrer intuitiven und erfolgreichen Modellierung von atomaren und molekularen Materiestrukturen. In semiklassischer Idealisierung werden atomare (und eigentlich quantenmechanische) Vorgänge durch Partikelelemente mit Wechselwirkungspotential modelliert.[24] Schon in Born [1922] findet man den Punktmassen-Realismus, ohne den heute

[22] Hinweise hierauf findet man in Noll [1959], S. 279, und in Bunge [1967a], S. 88.

[23] Dieses Resumee wurde bereits in Abschnitt 3.9 festgehalten.

[24] Siehe etwa Gallavotti [2006], S. 1, oder Goldstein u. a. [2006], Seiten 257 und 605, für die punktmechanische Interpretation einer mehratomigen Dynamik in der Klassischen Mechanik. Ein Beispiel aus der Festkörperphysik wäre die Theorie der Gitterschwingungen, in der zunächst die klassischen Bewegungsgleichungen des n-Teilchensystems mit Wechselwirkungspotential aufgestellt werden (siehe etwa Czycholl [2000], §3).

eine physikalische Theorie der sichtbaren Materie nicht mehr vorstellbar wäre:

> „Die eigentlich festen Körper *sind* also aus Atomen aufgebaute Raumgitter [eigene Herv.]. Daher ist die moderne Atomtheorie des festen Zustandes eine 'Dynamik der Kristallgitter'." (ebd., S. 529).

Von dieser physikalischen Motivation ausgehend, will ich abschließend auf einige Entwicklungen der Punktmechanik hinweisen, welche sich hier im Zusammenhang mit dem sechsten Problem Hilberts unmittelbar anschließen.

5.2.1 Die Verbindung zur Hamiltonmechanik

Die Klassische Mechanik hat mit der Hamiltonformulierung eine wesentliche Erweiterung und eigenständige Fortsetzung erfahren, die in allen Gebieten der theoretischen Physik Anwendung findet. Sie bietet Aufschluss über systematische Fragen nach Variablenreduktionen oder nach Integrierbarkeit und Separierbarkeit von partiellen Differentialgleichungen der Bewegungen. Eigene, neue Zielsetzungen stehen nunmehr im Vordergrund: ob die Dynamik eines Teilchensystems analytisch lösbar ist oder ob das System auf lange Sicht eine stabile Entwicklung nimmt. Auch Symmetrieeigenschaften und Erhaltungsgrößen können mit diesem einheitlichen Formalismus elegant verknüpft werden. Vor allem Stabilitätsfragen zum Dreikörper-Problem waren es, die bis zur heutigen Hamiltonmechanik als 'Theorie der Phasenraumgeometrie' (nach Arnold) entwickelt wurden, mit grundlegenden Ansätzen bei Hamilton selbst, bei Jacobi und Poincaré, sowie im 20. Jahrhundert erweitert von Cartan, Birkhoff, Kolmogorov, Arnold, Moser und Marsden zur Mechanik von instabilen Systemen.[25]

Die vielseitige Anwendbarkeit, die über die Klassische Mechanik hinausgeht, ist nicht nur der große Nutzen der Hamiltonmechanik, sondern bildet aus Sicht der Grundlagen auch die Schwierigkeit, wie sie mit der Klassischen Mechanik als Wissenschaft der Massenbeschleunigungen konzeptuell verknüpft ist.[26] Ich möchte diese Schwierigkeit im Folgenden etwas näher erläutern.

Für gewöhnlich wird die Hamiltonmechanik aus dem Lagrangeschen Prinzip oder, äquivalent dazu, aus dem Hamiltonschen Prinzip deduziert.[27] Die Umformung hat den rein mathematischen Hintergrund, dass

[25] Siehe die Einleitung zu Abraham und Marsden [1978], aber auch die Übersichten in Goldstein u. a. [2006], S. 263, und Arnold [1989], S. 161, sowie historisch Fraser [1994], S. 978; Wilson [1994], S. 1057.

[26] In Abschnitt 3.4.4 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die systemübergreifende Eigenständigkeit der analytischen Mechanik schwierig zu erfassen ist, was mit Blick auf die Hamiltonmechanik noch verschärft wird.

[27] Zum Lagrangreschen Prinzip siehe hier Abschnitt 3.4.3. Das Hamiltonsche Prinzip besagt bekanntlich aus, dass das Wegintegral der Lagrangefunktion L einen stationären Wert

von den Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten eines Teilchensystems mit n Freiheitsgraden $(q_i, \dot{q}_i)_{i=1\ldots n}$, die in den Lagrangeschen Gleichungen vorkommen, zu Punkten im $2n$-dimensionalen *Phasenraum* mit Ortskoordinaten und den dazu konjugierten Impulskomponenten $(q_i, p_i)_{i=1\ldots n}$ transformiert wird. (Die p_i bedeuten hier verallgemeinerte Impulskoordinaten und keine Partikel.) Diese Legendre-Transformation von Koordinaten, ein Spezialfall der so genannten kanonischen Transformationen, führt zu den *kanonischen* (oder Hamiltonschen) *Gleichungen*, die Impuls- und Ortskomponenten des Phasenraums miteinander verknüpfen:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

wobei $H(p_i, q_i, t) = \sum_i p_i q_i - L$ die Hamiltonfunktion bezeichnet.[28]

Die Transformation der Systemdynamik hat ihren Nutzen in der Frage, ob es integrierbare Lösungen der partiellen Differentialgleichungen gibt, die der mechanischen Aufgabe zugrunde liegen. Vor der Transformation, im Euklidischen Vektorraum, ergeben sich die Lösungen aus den n Lagrangeschen Bewegungsgleichungen der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Das sind partielle Differentialgleichungen *zweiter Ordnung*, die unmittelbar mit Massenbeschleunigungen $\ddot{q}_i$ operieren. Nach der Transformation in den Phasenraum unterliegen die dynamischen Variablen der symplektischen Geometrie, in der die Euklidische Geometrie nur noch einen Spezialfall darstellt. Die Dynamik wird dabei auf $2n$ unabhängige partielle Differentialgleichungen *erster Ordnung* übertragen, die einfacher lösbar sind und redundante Variablen ('Konstante der Bewegung') offen zeigen können.[29] An der dynamischen Entwicklung einer Phasenraummenge können systematische Aussagen über invariante Größen ('kanonische Invarianten') des me-

annimmt: $\delta \int L dt = 0$. (Vorausgesetzt wird dabei, dass alle eingeprägten Kräfte ein Potential besitzen und somit $L = T - U$ ist, die Differenz aus kinetischem Energieterm und dem Anteil der potentiellen Energie; siehe etwa Hamel [1967a], S. 235.)

[28] Man vergleiche etwa Goldstein u. a. [2006], Seiten 367 und 407; Hamel [1967a], Seiten 283 und 288; Gallavotti [2006], S. 4.

[29] Siehe Goldstein u. a. [2006], Seiten 364 und 402; Hamel [1967a], Seiten 282 und 285; sowie zur symplektischen Geometrie Arnold [1989], S. 201 f. Genauer wird die Dynamik nunmehr durch einen 'Phasenraumfluss' der Punktmassen von n Freiheitsgraden nach der einheitlichen, kanonischen Vorschrift

$$\frac{d}{dt}\eta = I\frac{\partial H}{\partial \eta}$$

beschrieben. Hierbei bezeichnet η den $2n$-dimensionalen Phasenraumvektor zu einem festen Zeitpunkt $t = 0$, $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ die symplektische Transformationsmatrix bei Vorhandensein einer Euklidischen Metrik. Vgl. etwa Goldstein u. a. [2006], S. 373; Arnold [1989], S. 204.

chanischen Systems elegant erschlossen werden. Inertiale Massenbeschleunigungen sind dagegen erst im Nachhinein bestimmbar, nachdem die Bewegungsgleichungen analytisch gelöst sind.

Die konzeptuelle Frage bleibt, ob die Hamiltonmechanik etwas rein Deduziertes aus der Lagrangemechanik für Punktsysteme ist. Dafür würde sprechen, dass die mathematische Struktur durch die Legendre-Transformation in den Phasenraum unverändert bleibt.[30] Andererseits ergibt sich ein 'völlig anderer Blickwinkel' (entsprechend Goldstein u. a. [2006], S. 364) auf die dynamischen Variablen des Systems. So bietet die Phasenraumgeometrie die Möglichkeit, unterschiedlichste dynamische Systeme zu untersuchen (auch aus der Quantenmechanik oder aus der statistischen Mechanik) und bleibt somit nicht auf klassische Punktmassensysteme beschränkt. Mir scheint die konzeptuelle Anbindung zu den Grundbegriffen und -gesetzen der klassischen Punktmechanik nicht in allen Merkmalen geklärt zu sein, und ich glaube, dass eine axiomatisierte Darstellung der Hamiltonmechanik hierüber Aufschluss geben kann.

In Abraham und Marsden [1978] wird die Hamiltonmechanik unabhängig von der Lagrangemechanik für Punktsysteme aus Axiomen der Phasenraumstruktur entwickelt. Und auch in Arnold [1989], eine mathematische Darstellung der gesamten analytischen Mechanik, wird dem unabhängigen Aufbau der Hamiltonmechanik Rechnung getragen. Dennoch bleibt der indirekte Bezug zu den klassischen Beschleunigungsgesetzen unklar: Es muss deutlich werden, unter welchen Bedingungen auf Kraftelemente im Phasenraum geschlossen werden kann. Die Zielsetzungen der Hamiltonmechanik sind, gemeinsam mit der Art der Repräsentation physikalischer Systeme im Phasenraum, durch eigene Axiome zu kennzeichnen, um den regressiven Übergang zur Dynamik von Massenbeschleunigungen klarer zu gestalten.

5.2.2 Die Verbindung zur statistischen Physik

Mit der Hamiltonschen Beschreibung von Punktmassen im Phasenraum werden vor allem physikalische Vielteilchensysteme zugänglich, die im Allgemeinen mit den Gesetzen der klassischen statistischen Physik erschlossen werden.[31] Doch wie bei der Hamiltonmechanik bleibt die 'klassische Dynamik' von Punktelementen eher im Hintergrund. Sie wird vielmehr stillschweigend vorausgesetzt und ist noch durch zusätzliche wahrscheinlichkeitstheoretische Bedingungen verzweigt. Auch hier, glaube ich,

[30] In Goldstein u. a. [2006], S. 385, wird vom 'physikalischen Gehalt' gesprochen, der unter einer kanonischen Transformation unverändert bleibt. Das halte ich für missverständlich. In Curiel [2009] wird genauer erläutert, dass trotz der strukturellen Isomorphie zwischen Lagrange- und Hamiltonmechanik Bedeutungsunterschiede in der Terminologie vorliegen. Es liegen unterschiedliche Semantiken vor. Insbesondere werden aus Teilchengeschwindigkeit und -impuls andere Systemaussagen ermittelt als in der Lagrangemechanik.

[31] Siehe dazu etwa Frigg [2012], S. 328 f.

kann die axiomatische Methode Klarheit bringen, zumindest in dieser partiellen Zielsetzung, die Verbindung zwischen Punktdynamik und statistischer Mechanik durch Offenlegen der vielfältigen Annahmen klarer zu fassen.

Ohne Zweifel war es auch das weit entfernte Ziel in Hilberts sechstem Problem, die statistischen Annahmen in den verschiedenen Gebieten der Physik zu vereinheitlichen; wird doch in Hilbert [1900a] die 'Wahrscheinlichkeitsrechnung' selbst neben 'der Mechanik' explizit erwähnt.[32] Man sollte aber nicht daraus schließen, das sechste Problem ziele nur auf die Erklärung ab, wie statistische Mechanik möglich ist, das hätte Hilbert dann auch so gesagt. Es war sowohl Hilbert als auch Boltzmann klar, dass die Verbindung der beiden Gebiete zur statistischen Mechanik ein weiterer Schritt bedeutet, der *neben* oder *nach* den klassischen Systemmechaniken und der Wahrscheinlichkeitstheorie axiomatisch gefasst wird. Hilberts Kommentar lautet entsprechend, es sei

> „wünschenswert, daß mit der logischen Untersuchung derselben [d.i. Wahrscheinlichkeitsrechnung] zugleich eine strenge und befriedigende Entwickelung der Methode der mittleren Werte in der mathematischen Physik, speciell in der kinetischen Gastheorie Hand in Hand gehe" (Hilbert [1900a], S. 272).

Die klassische statistische Physik war zu Hilberts Zeit und ist heute erst recht ein ebenso weitläufiges Gebiet wie die Klassische Mechanik, was an ihrer umfangreichen reduktiven Zielsetzung in allen Gebieten der Physik liegt. In einem groben Umriss wird sie durch ihr Ziel charakterisiert, das dynamische Verhalten eines makroskopischen Körpers durch den Bezug zu seinen mikroskopischen Konstituenten wiederzugeben.[33] 'Klassisch' ist dieses Verhältnis insoweit zu nennen, als die Bewegung der Korpuskel nach Gesetzen der klassischen Dynamik modelliert werden. Das Gebiet ist zudem 'statistisch' zu nennen, da das Verhältnis im Allgemeinen nur über wahrscheinlichkeitstheoretische Annahmen und Mittelungsprozesse erreichbar ist. Insbesondere spricht man von 'statistischer Mechanik', wenn die Molekülmenge als ein *Ensemble* begriffen wird, d.h. als ein makroskopisches Objekt im Phasenraum, das mit den mikroskopischen Zuständen nur über probabilitische Grundannahmen verknüpft ist. 'Wahrscheinlichkeit' bildet dann ein unabhängiges und eigenständiges Konzept zur Naturbeschreibung.[34]

Die verschiedenen Modellierungsweisen an Mittelungsprozessen über Teilchenensembles machen allerdings jede axiomatische Fassung der klas-

[32] Man vergleiche mit dem Wortlaut in Abschnitt 3.2.

[33] Bei dieser Begriffsklärung folge ich Uffink [2007], S. 923.

[34] Siehe dazu Uffink [2007], Seiten 929, 943 und 952. Die statistische Mechanik war bereits im 19. Jahrhundert die realistische Alternative zum 'mechanistischen Standpunkt', von dem hier in Abschnitt 3.5.1 die Rede ist.

sischen statistischen Physik im Ganzen zu einem unerreichbaren Ziel.[35] Das kann aber keineswegs heißen, dass axiomatische Fassungen über statistische Grenzprozesse für spezielle physikalische Gesetze unmöglich wären. So liegen zahlreiche Vorschläge zu einer axiomatischen Thermodynamik und statistischen Mechanik vor.[36] Bereits die informelle Voranstellung aller Definitionen, der semantischen Voraussetzungen und Grundgesetze zur Thermodynamik, wie sie beispielsweise in Huang [1987] zu finden sind, kann als ein wichtiger Schritt in Richtung axiomatischer Verständlichkeit und Übersichtlichkeit gesehen werden.[37]

Ich meine, dass axiomatische Rekonstruktionen in der statistischen Physik besonders aufschlussreich sind, wenn sie physikalische Grenzübergänge behandeln, wie sie im Hilbertschen Problem thematisiert werden und die noch am ehesten Kontakt zur klassischen Punktmechanik haben: Und das ist, wie schon Hilberts Kommentar zum sechsten Problem zeigt, in erster Linie die *kinetische Gastheorie nach Maxwell und Boltzmann*. Treffend wird auch im Vorwort zu Huang [1987] von einer deduktiven Sonderrolle dieser Theorie gesprochen, die sie für eine axiomatische Repräsentation neben der Klassischen Mechanik auszeichnet.

> „[T]he classical kinetic theory of gases is the only known special case in which thermodynamics can be derived nearly from first principles, i.e., molecular dynamics. A study of this special case will help us understand why statistical mechanics works."

Grundsätzliche Voraussetzung zur kinetischen Gastheorie ist, Eigenschaften der so genannten Verteilungsfunktion ('distribution function') $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ für molekulare Zustände zu finden, welche im Phasenraum für n Teilchen die Normierungsbedingung

$$\int f(\vec{q}, \vec{p}, t) d^3q d^3p = n$$

erfüllen.[38] Die Größe $f(\vec{q}, \vec{p}, t) d^3q d^3p$ definiert die Wahrscheinlichkeit dafür, wie viele Moleküle das Phasenraumelement $\left(d^3q, d^3p\right)$ zur Zeit t einnehmen.[39] Mit der Verteilungsfunktion wird eine physikalische Größe $\Psi(\vec{q}, \vec{p}, t)$ dann durch den Mittelwert über den Impulsraum beschrieben:

$$\overline{\Psi} := \frac{\int \Psi(\vec{q}, \vec{p})\, f\, d^3q d^3p}{\int f\, d^3q d^3p}.$$

[35] Siehe Uffink [2007], S. 923.

[36] Eine Literaturübersicht ist in Uffink [2007], Seiten 923 und 940.

[37] Man vergleiche auch die Motivation in Huang [1987], Seite 6.

[38] Hierbei bezeichnet $\vec{q} = (q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{21} \ldots, q_{n1}, q_{n2}, q_{n3})$ die 3 Ortskomponenten der n Punktmassen im Phasenraum. Man beachte, dass f keine Kraftfunktion bezeichnet.

[39] Man vergleiche dazu Huang [1987], S. 52; sowie Uffink [2007], Seiten 927, 945 und 948.

Eine axiomatische Zusammenstellung der strukturellen Voraussetzungen zur Theorie der kinetischen Gaspartikel wird in Truesdell und Muncaster [1980] vorgeschlagen. Axiomatischen Charakter haben hiernach auch Modellierungsannahmen, welche die Verteilungsfunktion f bestimmbar machen, wenn mikroskopische Stoß- bzw. Streuprozesse der Moleküle betrachtet werden. Neben dem Stoßzahlansatz und Annahmen über die Art der Korrelation zwischen den Verteilungsfunktionen oder über die funktionale Beschaffenheit des Wechselwirkungspotentials[40] ist es insbesondere die *Boltzmanngleichung*, die als Grundgesetz in jede kinetische Theorie eingeht. Es handelt sich um eine nichtlineare Integralgleichung, welche die kinetische Bedingung für den Teilchenfluss im Phasenraum angibt. In kompaktester Form wird die Boltzmanngleichung durch den binären Kollisionsoperator $\mathbf{C}(f, \bar{f})$ wie folgt formuliert:[41]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathbf{C}(f, \bar{f}).$$

Paradoxerweise ist die Grundannahme der binären Kollision der Moleküle in einem dünnen Gas nicht mit den Axiomen der Newtonschen Punktmechanik vereinbar.[42] Die Vernachlässigung der übrigen Wechselwirkungsbeiträge ist streng genommen nicht durch die Vektorsumme aller n Kraftbeiträge $\sum_{i,j\in n} F_{ij}$ in einem Vielteilchensystem erfüllbar. Um Widersprüche zu vermeiden, muss das Vernachlässigen als eigene Modellierungsannahme für dünne Gase explizit gestellt werden. Auch hier wäre meines Erachtens eine axiomatische Gegenüberstellung der Hypothesen der kinetischen Gastheorie einerseits und der Axiome der klassischen Punktmechanik andererseits ein wichtiger Beitrag zum Verständnis des physikalischen Grenzübergangs zwischen idealem Punktsystem und atomaren Gasen. Boltzmanns und Gibbs spätere Verallgemeinerungen, die Einschränkungen zur Maxwell-Boltzmann-Verteilung für das thermodynamische Gleichgewicht, die Ergodenhypothese oder die Annahmen zum H-Theorem: Sie alle können dann in weiteren regressiven Schritten mit den punktmechanischen Prämissen deduktiv verglichen werden.[43]

---

[40] Siehe neben Truesdell und Muncaster [1980], S. 92 f., auch Uffink [2007], S. 948 f.; Huang [1987], Seiten 56 u. 62;

[41] Siehe etwa Huang [1987], S. 62; Uffink [2007], S. 964; Harris [1971], Seiten 23 u. 33; Truesdell und Muncaster [1980], S. 131, und insbes. Boltzmann und Nabl [1907], S. 515. Sämtliche Integranden über die jeweils zugrunde liegende Streurate und der zwei beteiligten Verteilungsfunktionen f und $\bar{f}$ bei der Teilchenkollision sind hierin enthalten, auf die ich hier nicht eingehen will.

[42] So etwa die Erläuterung in Truesdell [1984c], S. 77, bzw. Truesdell und Muncaster [1980], S. 102; entsprechend auch Harris [1971], S. 19 f. Dahingehend ist auch Boltzmann und Nabl [1907], S. 505 f., bemerkenswert, wenn dort die 'Vereinbarkeit' der Kollisionsannahmen mit 'den allgemeinen Bewegungsgleichungen der Mechanik' zur Diskussion gestellt wird: eine weitere, offensichtliche Ähnlichkeit mit Hilberts Problemstellung.

[43] Zu diesen Gesetzen siehe etwa Huang [1987], Seiten 62 und 74 f.; sowie Uffink [2007], Seiten 955 u. 964 f. Ich muss eingestehen, dass eine axiomatische Gegenüberstellung von

5.2.3 Physikalische Rekonzeptionen der kontinuumsmechanischen Grundbegriffe

Die kinetische Theorie der Nichtgleichgewichtszustände dünner Gase und Flüssigkeiten ist mittlerweile so weit entwickelt, dass selbst die Grundbegriffe und -gleichungen der Hydrodynamik, allen voran der Spannungstensor und die Navier-Stokes-Gleichung, mittels der Dynamik von Partikelmengen repräsentiert werden können. Der Grenzübergang zu Festkörpern wäre dann durch approximative Verdichtung der Partikelverteilungen mathematisch zu beschreiben.[44] Die Modellierung berücksichtigt, dass die Moleküle infolgedessen auch in ihrem Phasenraumfluss 'erstarren', die mittlere freie Weglänge gegen null läuft. Dann wäre von der kinetischen Gastheorie ein weiterer Übergang zur Kontinuumsmechanik erreicht, auch wenn dabei die klassische Punktmechanik im Hintergrund bleibt. Eine lückenlose Deduktion ist mir bisher allerdings nicht bekannt.

Ein weiterer Ansatz besteht darin, die Analogie zwischen klassischen Molekülen als Punktmassen und ausgedehnten Kontinua direkt zu suchen, indem die feste molekulare Gitterstruktur implizit vorausgesetzt wird. Zusammengesetzt durch ein inneres elekromagnetisches Wechselwirkungspotential $V(\vec{x}_j, \vec{x}_k) := V_{jk}$, dem eine Kraftwirkung

$$F_{jk} = -\nabla_{\vec{x}_j} V_{jk}\left(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|\right)$$

entspricht, ist dann das zugrunde gelegte Wechselwirkungspotential des n-gliedrigen Molekülgitters von der Form

$$U(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} V_{jk}\left(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|\right).$$ [45]

Die deduktive Vernetzung besteht dann darin, die Begriffe der Kontinuumsmechanik aus den Atomgittereigenschaften zu rekapitulieren.

Es sollte aber nicht der Eindruck entstehen, als stände die statistische Mechanik in Konkurrenz zu den klassischen Systemmechaniken, vor allem nicht zur Kontinuumsmechanik. Ihre Zielsetzungen wie ihre Gebrauchsweisen sind unterschiedlich, wenn sie im Ergebnis auch von denselben makroskopischen Objekten sprechen.

> „Continuum physics stands in no contradiction with structural theories, since the equations expressing its general principles may be identified with equations of exactly the same form in sufficiently general

Punktmechanik und kinetischer Gastheorie womöglich im Detail ausgearbeitet wurde, mir bisher aber nicht bekannt ist. Eine Deduktion der Boltzmanngleichung (nach Harold Grad), die sämtliche punktmechanische 'Ad-Hoc-Annahmen' offenlegt, ist in Harris [1971], Teil 2-2, wiedergegeben. Die meisten Lehrbücher zur statistischen Physik thematisieren diese Überschneidungen mit den Annahmen der klassischen Punktmechanik nicht explizit.

[44] Siehe etwa Cercignani u. a. [1994], § 3.8 und Kap. 11: 'Hydrodynamical Limits'; sowie Huang [1987], Kap 5: 'Transport Phenomena'.

[45] Siehe etwa Czycholl [2000], S. 17; bzw. Noll [1955], S. 629 und Born [1922], S. 534.

> statistical mechanics. If this identification is just, the variables that are basic in continuum mechanics may be regarded as averages or expected values of molecular actions."[46]

Die Eigenständigkeit der kontinuumsmechanischen Betrachtung besteht nun darin, dass die molekulare Struktur (anders als noch in der kinetischen Gastheorie) in diesen Anwendungsbereichen keine Rolle spielt.[47] Die axiomatischen Fassung dieser „different conceptual frames" (Truesdell [1984c], S. 75) würde die Eigenständigkeit der Anwendungsbereiche bestätigen, die durch unterschiedliche Grundgrößen und -gesetze zum Ausdruck kommen. Die Gegenüberstellung von statistischem und kontinuumsmechanischem Zugang zeigt erneut den logisch disjunktiven Aufbau der klassischen Elemente der Mechanik,[48] ohne dass damit irgendeine Reduktion erklärt wäre.

Umso mehr motiviert das Hilbertsche Problem die Möglichkeit, den Grenzübergang von den Grundgesetzen der statistischen Mechanik zur Kontinuumsmechanik durchzuführen. Tatsächlich ist hier ein ganz wesentliches Ergebnis in Noll [1955] erzielt worden, das wieder als *eigenständiger Beitrag zur Lösung* des Hilbertschen Problems betrachtet werden kann.

> **Theorem (Irving, Kirkwood, Noll):**
> Unter Voraussetzung eines Systems klassischer punktförmiger Teilchenensembles lassen sich alle Grundgesetze der Kontinuumsmechanik aus der statistischen Mechanik deduzieren.

Kontinuumsmechanische Grundbegriffe (Massendichte, Geschwindigkeit, Spannungstensor, Energiedichte und Wärmestromdichte) werden nach diesem Theorem durch Erwartungswerte der mikrokanonischen Zustandssummen im Phasenraum repräsentierbar. Beachtlich ist vor allem, dass das Wechselwirkungspotential des Gesamtsystems explizit den Axiomen der inneren Zentralkräfte (d.i. dem Gegenwirkungsprinzip) genügen soll, wie sie hier in Abschnitt 3.4.1 dargestellt wurden.[49] Hier enthalten die Annahmen der statistischen Mechanik explizit diejenigen der Punktmechanik.

Um dieser theoretischen Überschneidung und der Bedeutung der Punktmechanik in der modernen Physik besonders Rechnung zu tragen, gibt es vereinzelt weitere Bemühungen, den gesamten Begriffskanon der Kontinuumsmechanik direkt durch die Punktmechanik zu redefinieren, *ohne* auf statistische Mittelungsprozesse zurückzugreifen.[50] Bereits Max Born

[46] Zitiert aus Truesdell und Noll [2004], S. 5; siehe auch Truesdell [1984c], S. 75.

[47] Vor allem definiert man Punktmassen und ihre elektromagnetischen Potentiale in einer Größenordnung, in der quantenmechanische Effekte nicht zum Tragen kommen (siehe dazu etwa Born [1922], S. 531; oder Noll [1955], S. 627 f. In Murdoch [1983], S. 166, wird die Größenordnung von 10^{-5} Meter für kristalline Elementarzellen im Festkörper geschätzt.

[48] Siehe dazu Abschnitt 4.3.2.

[49] Man vergleiche Noll [1955], S. 629.

[50] Hier wäre aktuell Murdoch [2012] zu nennen, das sich unmittelbar an der kontinuumsme-

hat (mit Born [1915] bzw. Born [1922]) theorieübergreifende Rekonstruktionen aus der Punktmechanik erzielt, die selbst mit den älteren korpuskularen Elastizitätstheorien Naviers und Cauchys vereinbar sind. Die Untersuchungen sind eine erste punktmechanische Begründung von physikalischen Feststoffen und in diesem Sinne die *erste punktmechanische Lösung* des sechsten Problem Hilberts.[51] Auch hier wäre es ein weiterer Schritt, die von Born vorgeschlagenen Repräsentationen genau in allen Voraussetzungen und Grundannahmen axiomatisch zu fassen, um die Unterschiede und Gemeinsamkeiten mit den klassischen Systemmechaniken deutlicher hervorzuheben.

Borns Verzicht auf statistische Mittel ist, wie er selbst sagt, mit seinem Glauben verbunden, dass „die Mittelwertbildung nur ein Eingeständnis mathematischer Ohnmacht" (Born [1915], S. 13) sei. Es komme darauf an, die makroskopischen ('phänomenologischen') Gesetze als „Bedingung dafür" zu sehen, „dass die Gleichungen der Molekularvorgänge auflösbar sind" (ebd., S. 13). Dieser Prozess der Reduktion auf wenige phänomenologische Variablen habe auch er seinem Lehrer David Hilbert zu verdanken, der in seinen Vorlesungen viele Andeutungen in diese Richtung gemacht habe.

So kann man sich letzten Endes nicht des Eindrucks erwehren, dass die Grundlagen der Mechanik im 20. Jahrhundert auch eine Folge von persönlicher Überzeugung und Überlieferung sind. Sie sind ein Prozess, angestoßen von wenigen Mathematikern und Naturforschern, die an die Stärke der axiomatischen Methode und an die Ausdruckskraft der rationalen Mechanik geglaubt haben. Vor allem Grundlagenforscher wie Truesdell, Noll, Hamel, Born, Suppes und Tarski sind es gewesen, die immer wieder Orientierung in Hilberts mathematischem Werk oder durch persönliche Überlieferungen gefunden haben. Es bleibt ein eigenes Phänomen, dass Hilberts vereinheitlichendes Streben in allen mathematischen Wissenschaften immer wieder ein sicherer Ausgangspunkt wissenschaftsphilosophischer Betrachtungen bleiben wird.

chanischen Linie Truesdells und Nolls orientiert, um eine entsprechende punktmechanische Übersetzungen vorzuschlagen.

[51] So die Einschätzung in Truesdell [1976b], S. 129. Man vergleiche auch mit der Zielsetzung in Born [1915], S. 3 f.

Anhang

A Der Versuch, das Gegenwirkungsprinzip aus der Punktmechanik zu eliminieren

A.1 Der Beweisgang des achten Theorems

In Abschnitt 4.5.3 wurde darauf hingewiesen, dass McKinsey u. a. [1953] eine inhaltliche Erneuerung vorschlägt. Zum System der Punktmechanik wird als einziges dynamisches Axiom das Newtonsche Grundgesetz angenommen, *ohne* das volle Gegenwirkungsprinzip **(G1)-(G3)**, wie es hier in Abschnitt 3.4.1 für die Punktmechanik dargestellt wurde. Das sehen wir am Axiomensystem in McKinsey u. a. [1953], S. 258, wo als einziges Kraftgesetz $P6$ vorkommt:

> „A system $\langle \mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{m}, \mathbf{s}, \mathbf{f} \rangle$ which satisfies Axioms P1-P6 is called an *n-dimensional system of particle mechanics* [...].
>
> *Kinematical Axioms*
>
> Axiom P1. P is a nonempty, finite set.
> Axiom P2. T is an interval of real numbers.
> Axiom P3. If p is in P and t is in T, then $s(p,t)$ is an n-dimensional vector such that $d^2/dt^2 s(p,t)$ exists.
>
> *Dynamical Axioms*
>
> Axiom P4. If p is in P, then $m(p)$ is a positive real number.
> Axiom P5. If p is in P and t is in T, then $f(p,t,1), f(p,t,2), \ldots$ $\ldots, f(p,t,i), \ldots$ are n-dimensional vectors such that the series $\sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i)$ is absolutely convergent.
> Axiom P6. If p is in P and t is in T, then
>
> $$m(p)\frac{d^2}{dt^2}s(p,t) = \sum_{i=1}^{\infty} f(p,t,i).\text{"}$$

Um die Terminologie der semantischen Sichtweise einzuhalten, nennen wir das Axiomensystem $P1$ bis $P6$ gemeinsam mit der *Struktur* $\langle P, T, m, s, f \rangle$ die *Theorie* $\mathbf{PM_{MSS}}$, oben als 'System' bezeichnet. (Auf die Bedeutungen der Funktionen $s(p,t)$, $m(p)$ und $f(p,t,i)$ wurde hier auf Seite 228 hingewiesen.)

Im achten Theorem wird nun mit modelltheoretischem Mittel bewiesen, dass

- das volle Gegenwirkungsprinzip **(G1)-(G3)** eliminiert werden kann.

⇒ Das heißt, die klassische Partikelmechanik $\mathbf{PM^C}$ vom Strukturtyp

$$\langle P, T, m, s, f_{int}, f_{ext}\rangle$$

wäre auf die *strukturell* vereinfachte Partikeltheorie $\mathbf{PM_{MSS}}$ mit der Struktur

$$\langle P, T, m, s, f\rangle$$

reduziert, *ohne* dabei zulässige Modelle und intendierte Anwendungen einzubüßen.

⇒ Waren **(G1)-(G3)** in $\mathbf{PM^C}$ noch *implizite* Definitionen der 'internen Kräfte' einer Punktmechanik, echte Kraftaxiome, so können sie nun in $\mathbf{PM_{MSS}}$ *explizit* definiert werden. Gemäß dieser logischen Abhängigkeit der Grundbegriffe von der Gesamtkonzeption kann also nun die Unterscheidung zwischen 'externen' und 'internen' Kräften (f_{ext} und f_{int}) *auf Ebene der Axiome* fallengelassen werden.

McKinsey, Sugar und Suppes behaupten somit, gegenüber der axiomatischen Grundlegung durch Boltzmann, Volkmann, Hamel u.a. eine deduktive und zugleich inhaltliche Reduktion erzielt zu haben.

Im Folgenden möchte ich erläutern, dass bei aller formalen Gültigkeit des Theorems die physikalische Interpretation fragwürdig bleibt. Wie schon zu Beginn von Abschnitt 4.5.3 erwähnt, hatten auch Hamel und Truesdell Schwierigkeiten, dem Gedankengang im Original zu folgen. Ich will daher zunächst versuchen, Inhalt und Beweisgang des Theorems zugänglicher zu machen, um anschließend (in A.2) eine eigene Beurteilung abzugeben.

Zur Ausführung des Theorems

Zunächst wird eine '*Newtonsche Partikelmechanik*' explizit definiert:

Definition: $\mathbf{PM_{MSS}}$ wird ein *Newtonsches System* genannt, wenn

(1) zwei geordnete Partikel-Teilmengen

$$(A_1, A_2) = \{(p, i), (q, j) \subseteq P \times I\}$$

existieren, die abbildungsgleich (isomorph) zueinander sind; und

(2) die induzierten Kräfte $f(p, t, i)$ über A_1 und $f(q, t, j)$ über A_2 zueinander *ausgeglichen* sind.[1]

[1] Die Autoren sprechen dann bei $P \times I$ von einer 'ausbalancierten' Menge (balanced set). Dieser Umweg über Partikelmengen soll Uneindeutigkeiten in den Kraftzuordnungen vermeiden. Siehe dazu McKinsey u. a. [1953], S. 262.

Der Begriff der 'ausgeglichenen Kräfte' ('balanced forces') definiert *explizit* die internen Kräfte. Ihm entspicht das volle Gegenwirkungsprinzip **(G1)-(G3)**.[2] Man beachte, dass wir *nicht* von der Theorie $\mathbf{PM^C}$ sprechen, in der das Merkmal der ausgeglichenen Kräfte aus den *impliziten* Definitionen **(G1)-(G3)** direkt folgen würde. Die Behauptung ist nun, übersetzt in diese Systembegriffe, dass jede Partikelmechanik ohne Gegenwirkungsprinzip ein *Untersystem* einer Newtonschen Mechanik ist, also Untersystem einer Punktmechanik *mit* Gegenwirkungsprinzip:

> **Theorem:** *„Every system of particle mechanics is a subsystem of a Newtonian system."* (McKinsey u. a. [1953], S. 266).

Das achte Theorem stellt also eine *Reduktion* einer begrifflich komplexeren Struktur $\langle P, T, m, s, f_{int}, f_{ext}\rangle$ der Theorie $\mathbf{PM^C}$ auf die einfachere Struktur

$$\langle P \cup P^*, T, m, s, f\rangle\ ,\ P, P^* \neq \emptyset$$

dar, in der allerdings *zusätzliche Partikel* P^* vorkommen. Der Umfang der Struktur wird nur bezüglich der Partikelmenge vergrößert (man sagt auch: der *Grundbereich* ist umfangreicher), so dass den Funktionen der Struktur bei gleichen Bedeutungen ein erweiterter Definitionsbereich zugeschrieben werden. Um diesen Strukturunterschied zu kennzeichnen, werde ich im Folgenden von der Theorie $\mathbf{PM_{MSS}}$ gegenüber der Theorie $\mathbf{PM^*_{MSS}}$ mit erweitertem Grundbereich $P \cup P^*$ sprechen.

Man beachte, dass beide Theorien $\mathbf{PM_{MSS}}$ und $\mathbf{PM^*_{MSS}}$ *denselben Strukturtyp* haben. Sie enthalten dieselben Grundterme. Dennoch werden sie durch unterschiedliche Modelle repräsentiert: Es ist $P \subsetneqq P \cup P^*$, was hier das Merkmal eines *Subsystems* ist.[3] Ein 'Subsystem' entspricht somit dem in der Modelltheorie üblichen Begriff einer *Unterstruktur*.[4] Auch der modelltheoretische Begriff der 'Reduktion' orientiert sich an Unterstruk-

[2] Das Gegenwirkungsprinzip wird in McKinsey u. a. [1953], S. 261, folgendermaßen definiert: „[...T]he i^{th} *force acting on* p *and the* j^{th} *force acting on* q *balance each other* if the following conditions are satifsfied for every t in T:
(1) $f(p,t,i) = -f(q,t,j)$
(2) $[(s(p,t) - s(q,t)) \times (f(p,t,i) - f(q,t,j)) = 0.]$"
(G3), die Forderung, dass die Kraftwirkung nur vom Ort des jeweiligen Punktes p abhängt, ist in der Struktur des Kraftterms $f(p,t,i)$ enthalten.

[3] Damit gelangt man zu folgendem formalen Begriff eines Subsystems: „Let $\Gamma = \langle P, T, m, s, f\rangle$ be a system of particle mechanics; let P' be a non-empty subset of P; and let m', s', and f' be the functions m, s, and f with their first arguments restricted to P': thus m', for example, is defined only over P', and, for all p in P', $m'(p) = m(p)$. Then we call $\Gamma' = \langle P', T, m', s', f'\rangle$ a *subsystem* of Γ." (McKinsey u. a. [1953], S. 265)

[4] Es sollte hierbei die modelltheoretische Definition im Blick behalten werden: Eine Struktur $\mathfrak{A} = \langle A, O^A, R^A\rangle$ wird *Unterstruktur* von $\mathfrak{B} = \langle B, O^B, R^B\rangle$ genannt, wenn (i) $A \subseteq B$, (ii) $O^A = O^B \uparrow {}^m A$, (eine so genannte Restriktion auf das m-Tupel von A, d.h. die m-stelligen Funktionsterme in $\mathfrak{A}$ bewirken dasselbe wie die m-stelligen Funktionsterme der Struktur $\mathfrak{B}$, eingeschränkt auf den Bereich von $\mathfrak{A}$); und (iii) $R^A = R^B \cap {}^m A$, die analoge Restriktion für Relationen. (Die Definition ist Monk [1976], S. 328, entnommen.)

turen. Obiges Theorem behauptet also *eine modelltheoretische Reduktion auf* $\mathbf{PM_{MSS}}$.

Wir gehen nun von dieser Theorie $\mathbf{PM_{MSS}}$ aus, von der Partikelmechanik ohne Gegenwirkungsprinzip und erinnern uns, dass in $\mathbf{PM_{MSS}}$ die Unterscheidung zwischen $'f_{int}'$ und $'f_{ext}'$ (zunächst) aufgehoben ist. Sie soll in $\mathbf{PM_{MSS}}$ *explizit* definiert werden, mit obiger Definition der ausbalancierten Kräfte. Explizite ('proper') Definitionen ergänzen im Unterschied zu den impliziten Definitionen ('Axiomen') keine Grundbegriffe zur Theorie. Sie sind, wie häufig gesagt wird, *nicht kreativ*, weil sie dem begrifflichen Umfang der Theorie nichts hinzufügen, sondern der Definiens setzt sich allein aus vorausgesetzten Grundtermen zusammen. Deshalb sind explizite Definitionen in jeder logisch geordneten Theorie *eliminierbar*, eine unproblematische Eigenart von logisch rekonstruierten Theorien.[5] Es wird also behauptet, dass die Theorie $\mathbf{PM_{MSS}}$ - ohne Gegenwirkungsprinzip - immer durch Subsysteme realisiert wird, die sich zu einer Theorie $\mathbf{PM^C}$ - mit Gegenwirkungsprinzip - erweitern lassen. Gelingt dieser formale Beweis, so wäre das Gegenwirkungsprinzip redundant.

Der Beweisgang sieht dabei vor, dass zwei Modelle M und M^* konstruiert werden, die sich beide aus der Struktur von $\mathbf{PM^*_{MSS}}$ zusammensetzen und folglich die Theorie der Punktmechanik erfüllen:

$$M, M^* \models \mathbf{PM^*_{MSS}}.$$

Die Konstruktion muss dabei so ausfallen, dass

1. M^* zusätzliche ('verborgene') Partikel enthält, die nicht zu M gehören ($M \cap M^* \neq \emptyset$); und

2. dass die vereinigte Modellmenge, die 'mengentheoretische Summe' aus beiden Modellen, $M \cup M^*$, nur ausbalancierte Kräfte enthält.[6]

Weil nun M^* mengentheoretisch mächtiger als M sein muss (da nach Konstruktion des Modelles mehr Partikel benötigt werden, denen ausgleichende Kräfte zugeordnet werden können), ist M per Definition ein Subsystem von M^*. Und so kann jedes Modell von $\mathbf{PM_{MSS}}$ durch ein Newtonschen System ersetzt werden unter Hinzunahme weiterer Partikel, von denen ausbalancierende Kraftkomponenten ausgehen. Der Schluss auf alle Subsysteme gelingt dann durch Induktion über P, wobei es beliebig ist, wie umfangreich die zusätzliche Partikelmenge P^* für jeden Induktionsschritt ist.

Der einfachste Fall, dass M nur aus einem Partikel besteht und nur die $x, y-$Ebene betrachtet wird, ist in McKinsey u. a. [1953], S. 266 f.,

[5] Vgl. etwa Suppes [1957], S. 154 ff.; und Monk [1976], S. 209 f.

[6] Streng genommen ist diese 'Summe' noch zu definieren. In McKinsey u. a. [1953], S. 264f., werden dafür Systemverkettungen eingeführt ('concatenations'), die hier ausgelassen sind, weil sie der anschaulichen Idee nichts hinzufügen.

formal dargestellt. Ich habe ihn in der folgenden Abbildung 6 veranschaulicht. Die fett schwarzen Elemente gehören zur Struktur von M, das ist $\langle\{p_1\}, T, m, s_1, f_1\rangle$; die grauen Elemente gehören zu M^*, also $\langle\{p_2, p_3, p_4, p_5\}, T, m, s_1, f_1\rangle$.

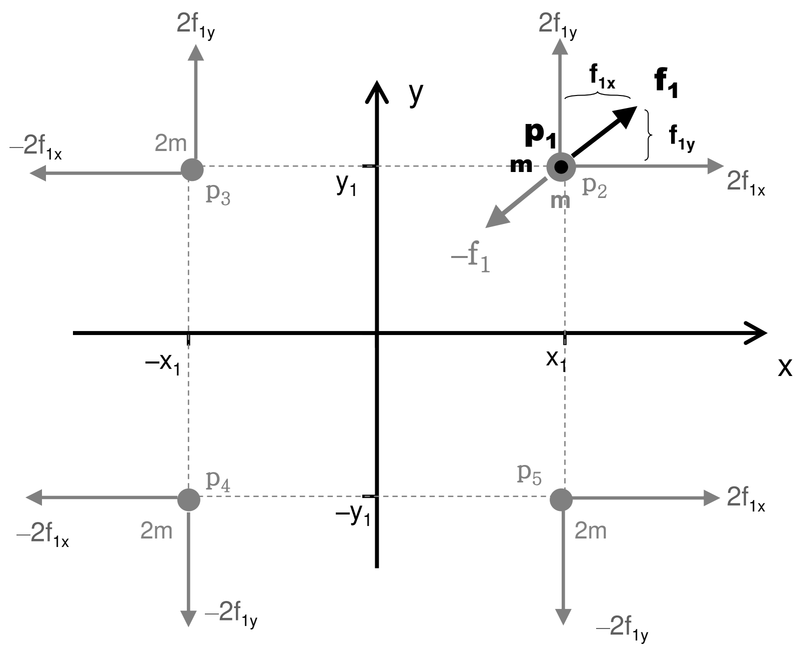


Abb. 6: Veranschaulichung der Beweiskonstruktion im ‚achten Theorem'

A.2 Die negative Bewertung des Versuches

Es wurde gezeigt, dass in der modelltheoretischen Beweisfassung die Unterscheidung zwischen internen Kräften vom Typ $f_{int}(p, q, t, i)$ und externen Kräften vom Typ $f_{ext}(p, t, i)$ der Punktmechanik redundant ist. Interne Kräfte lassen sich nun explizit in $\mathbf{PM_{MSS}}$ definieren. Das Gegenwirkungsprinzip erscheint dann als eine Spezialisierung und nicht mehr als 'echtes' Axiom. Alle Partikelmodelle lassen sich nun zu einem Modell mit *'verborgenen Partikeln'* erweitern, in dem nur noch ausgeglichene Kräfte *eines Typs* $f(p, t, i)$ herrschen.

Aus *logischer* Sicht sind der Beweis und der Inhalt des Theorems - sofern die vorangehenden Definitionen akzeptiert werden - völlig einwandfrei. Es ist nur eine technische Frage, dieses Theorem, so man wollte, in das Gewand der syntaktischen Logik zu hüllen, um alle formalistischen Zweifel auszuräumen.

1. Eine seltsame Legitimation in Hertz's verborgenen Massen
Zunächst treten aber Zweifel auf, was die Berechtigung der zusätzlichen 'verborgenen' Partikel angeht. „Concealed particles" (McKinsey u. a. [1953], S. 265) in eine Mechanik einzuführen, hat eine Tradition, die vor allem mit dem System von Hertz [1894] in Verbindung gebracht wird. Dort wird die Idee verfolgt, die Dynamik eines Massensystems auf kinematische Zustände von verborgenen, hypothetischen Massenelementen zurückzuführen.[7] Herman Rubin hat die Autoren auf eine gewisse Ähnlichkeit ('reminiscence') mit dem achten Theorem hingewiesen, so die Fußnote in McKinsey u. a. [1953], S. 265.

Sicherlich wäre eine detaillierte Untersuchung der abstrakten, mathematischen Umsetzung nach Hertz in diesem Zusammenhang wünschenswert. Es reichen allerdings wenige Blickpunkte, um die vermutete Ähnlichkeit zu verwerfen.

- Vorrangige Zielsetzung in der eigentümlichen Hertzschen Mechanik ist die *Elimination* des Kraftbegriffes überhaupt. Das Newtonsche Grundgesetz ist hierbei kein Axiom, sondern wird zu einer *expliziten* Definition, indem die Dynamik des Systems aus den Trägheitsmerkmalen der realen ('sichtbaren', wie Hertz sie nennt) und der verborgenen Massenelemente erklärt wird. Alle zusätzlichen Annahmen sind als geometrische Randbedingungen mithilfe des Gaußschen Minimalprinzips zu *folgern*. Es wurde hier in Abschnitt 3.5 deutlich gemacht, dass es den Architekten der Mechanik im 19. Jahrhunderts um eine allgemeingültige Mechanistik ging, in welcher der als metaphysisch angesehene Kraftbegriff nur noch ein funktionales Schema ist, ohne eigene physikalische Bedeutung und nur zur Vereinfachung der Mechanik gedacht. Insbesondere hatte Hertz, als er die verborgenen Punktmassen einführte, ein physikalisch zulässiges 'Bild' (hier Modell) im Sinn: die kinematische Konstitution eines Teilsystems von Punktmassen aus der ihn umgebenden materiellen Struktur zu erklären.[8]

  Diese Motivation ist in der modelltheoretischen Version der Punktmechanik weder erkennbar noch beabsichtigt. Hier wird der Kraftbegriff - d.i. der Term '$f(p,t,j)$' - gar nicht aus der erweiterten Struktur von $\mathbf{PM}^*_{\mathbf{MSS}}$ eliminiert, sondern tritt noch in Form des Newtonschen Grundgesetzes $P6$ auf. Zwar tritt nur noch ein Krafttyp auf, doch seine 'Existenz' wird auch in der erweiterten Theorie $\mathbf{PM}^*_{\mathbf{MSS}}$ mit verborgenen Partikeln P^* vorausgesetzt.

- Heinrich Hertz kann aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung und

[7] Man vgl. hierzu einleitend Hertz [1894], S. 30 ff.

[8] Siehe Hertz [1894], S. 41. Man vergleiche auch Hertz' Definition der 'dynamischen Systeme' in ebd., S. 197.

> dem Trägheitsprinzip[9] das volle Gegenwirkungsprinzip wie auch das Newtonsche Grundgesetz *herleiten*.[10] Entscheidend bei dieser Herleitung ist, dass sich für *beliebige* (freie) Systeme und für deren Teilsysteme *die Form* einer Bewegungsgleichung ergibt, in der die funktionalen Größen den Sinn der *Kraft- und Momentenerhaltung* haben.[11] Dann (und nur dann) ist die Reduktion des Gegenwirkungsprinzipes gelungen, weil es in diesen Erhaltungsgesetzen enthalten ist. Dann wäre die Unterscheidung zwischen internen und externen Kräften nur noch ein Schritt der expliziten Definition, ein Schritt, den Hertz aber gar nicht mehr gehen wollte.

Mit anderen Worten, die systemischen Voraussetzungen und Grundprinzipien sind bei Hertz viel mächtiger und allgemeiner als in der mageren Partikeltheorie $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$. Dieser *Voraussetzungsfehler* in der Deduktion ist auch schon anderen passiert[12] und tritt hier zweifellos erneut auf.

2. Die Durchdringlichkeit der Partikel

Selbst wenn die Strategie, verborgene Elemente zu Hilfe zu nehmen, nicht in Frage gestellt wird, bleiben physikalische Bedenken gegen das formal korrekte Theorem. Solch ein störender Nebeneffekt ist, dass offenbar das *Prinzip der Undurchdringlichkeit* seine Gültigkeit verliert.[13] Die Konstruktion zum achten Theorem erfordert, dass mehrere unterscheidbare Partikel sich zu derselben Zeit an demselben Ort befinden und nicht mehr eindeutig identifizierbar sind. In dem anschaulichen Beispiel oben (Abb. 6) ist der verborgene Massenpunkt p_2 am selben Ort wie p_1. Das wird genau dann eine *logische* Schwierigkeit, wenn versucht wird, $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$ als Ausgangstheorie für eine Erweiterung zur Mechanik der starren und deformierbaren Körper zu verwenden. Denn das Prinzip der Undurchdringlichkeit ist ein notwendiges und tragendes Axiom zur *funktionalen* Beschreibung jeder *Gestaltsänderung* eines Kontinuums, und sei es auch die Gestalt des 'Starrseins' eines Massensystems.[14] Die Überschneidung von Massenpunkten in einem

[9] Sie sind zusammengesetzt zu seinem 'Grundgesetz', das einzige, das 'der Erfahrung entnommen' sei: „Jedes freie System beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn" (Hertz [1894], S. 162).

[10] Zum Gegenwirkungsprinzip siehe Hertz [1894], S. 213 ff., zum Grundgesetz ebd., S. 223 f.

[11] Man vergleiche dazu Nr. 442 auf S. 204 f. in Hertz [1894]. Auf Seite 219 f. wird die Bewegungsgleichung auf den Fall verallgemeinert, dass beschleunigende Kräfte auf das System wirken, woraus sich schließlich das Newtonsche Grundgesetz ergibt.

[12] Etwa in Voss [1901], S. 56.

[13] Seien p_i wieder Partikel, t die Zeitvariable und $s(p_i, t)$ der Ort eines Partikels p_i zur Zeit t. Das 'axiom of impenetrability' lautet dann in der Version von McKinsey u. a. [1953], S. 260: „If p_1 and p_2 are distinct members of P, and if t is in T, then $s(p_1, t) \neq s(p_2, t)$."

[14] Man vergleiche dazu Hamel [1909a], S. 356; Hamel [1927], S. 2 und Hamel [1967a], S. 11. In Truesdell und Toupin [1960], §16, ist es eine funktionale Folgerung aus dem fundamentalen Kontinuitätsprinzip, das den Anfang jeder kinematischen Beschreibung deformierbarer Mas-

Kontinuum zu verbieten ist Voraussetzung dafür, eine eindeutige Konfiguration von Massenelementen zu identifizieren und dynamische Verschiebungen funktional zu beschreiben.

3. Der Fehlschluss auf ein mögliches System

Am achten Theorem lässt sich ein Typ von Beweisverfahren erkennen, der meines Erachens etwas völlig Unerlaubtes darstellt. Die Modelle von $\mathbf{PM_{MSS}}$ sind streng genommen das, worüber gesprochen werden kann, sie sind das 'aktuell Gegebene'. Mit P^* irgendwelche 'Gespenster-Partikel' einzuführen, die über die Partikelmenge $P \subset \mathbf{PM_{MSS}}$ hinaus *möglich* sind, beweist nichts von den *tatsächlichen* Eigenschaften der Strukturelemente in $\mathbf{PM_{MSS}}$. Ein modelltheoretischer Beweis muss immer *'top-down'* erfolgen, vom Gegebenen 'hinunter' zu differenzierenden Merkmalen. Eine Schlussfolgerung kann nicht 'bottom-up' stattfinden, indem eine Theorie $\mathbf{PM^*_{MSS}}$ mit erweitertem Grundbereich $P \cup P^*$ eingeführt wird. Das möchte ich an folgenden Punkten verdeutlichen.

- Welche Modellmenge erfüllt *diese* Partikelmechanik: ein Modell von $\mathbf{PM_{MSS}}$ oder vom 'möglichen' System $\mathbf{PM^*_{MSS}}$? - Die Modelltheorie stellt die 'Existenz' von möglichen gegenüber wirklichen Modellen einer Struktur nicht dar.[15] Es muss *diese Theorie* $\mathbf{PM_{MSS}}$ dargestellt werden, durch Angabe eines Modells. Und dann kann keine andere, *mögliche* Theorie ihren Platz einnehmen. Die *physikalische Bedeutung* der Erweiterung $\mathbf{PM^*_{MSS}}$ kann die Modelltheorie also nicht liefern.

- Man beachte, dass nicht einmal gesagt wird, wie viele verborgene Partikel P^* zu jedem $p \in P$ zu ergänzen sind. Die Partikelmengen sollen nach Vereinbarung nur endlich abzählbar sein. Aber kann bei einer 'Bottom-up'-Einführung von zusätzlichen Strukturen nicht jedes Merkmal erklärt werden? Kann nicht jede externe Kraft als interne Kraft in einem *möglichen erweiterten* System existieren? - Sie kann, und das besagt bereits die ganz allgemeine Mengenlehre als das mathematische Universum, welches der Modelltheorie zugrunde liegt.
  Gehen wir von $\mathcal{ZF}$ aus, der axiomatisierten Mengenlehre nach *Zermelo und Fraenkel*. Die Theorie liefert die umfassendste Hintergrundsprache, mit der die gewöhnliche Mathematik repräsentierbar ist. Was in $\mathcal{ZF}$ sinnvoll ist, ist auch in der Modelltheorie sinnvoll und umgekehrt.[16] Stellen wir uns nun auf den Standpunkt von $\mathbf{PM^*_{MSS}}$ und

sensysteme darstellt. Siehe dazu auch hier Abschnitt 3.6.2, Seite 143: 'Zu den mathematischen Hintergrundtheorien'.

[15] Das gilt insbesondere für die semantische Sichtweise, wenn sie das logische Vokabular für irrelevant erklärt. Auf diesen Eigenart wurde bereits in Abschnitt 4.5.3 hingewiesen.

[16] Diese Aussage ist nicht so simpel, wie sie scheint, weil wir sozusagen 'von außen' auf die gesamte Mathematik schauen. Tatsächlich sind erhebliche Anstrengungen damit verbunden, diese Aussage zu garantieren. Man vgl. dazu das 'Reflektionsprinzip' in Ebbinghaus [1994], Kap 10: Es besagt grob, dass die axiomatische Mengenlehre 'mächtig' genug ist, um seine

betrachten dessen Modellmenge $\mathfrak{M}^*_{PM}$, in der alle Newtonschen Partikelsysteme für die Partikelzahl $P \cup P^*$ realisiert seien. Nach Konstruktion gilt:

$$\mathfrak{M}^*_{PM} \models \mathbf{PM}^*_{\mathbf{MSS}}.$$

Damit ist auch jede Unterstruktur von $\mathbf{PM}^*_{\mathbf{MSS}}$ erfüllt:

$$\mathfrak{M}^*_{PM} \models \mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}.$$

Es lässt sich also *jede Substruktur von* $\mathbf{PM}^*_{\mathbf{MSS}}$ *aussondern* (wenn keine logischen Widersprüche entstehen). Das garantiert bereits das so genannte *Aussonderungsaxiom* (Aus) in $\mathcal{ZF}$:[17]

> **(Aus)**: Zu allen Mengen $x_1, \ldots, x_n$ gibt es (genau) eine Menge y, die gerade diejenigen Elemente z von x_i enthält, für welche die Beziehung $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ zutrifft.[18]

Mit anderen Worten, *einzelne* Modelle von $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$ sind aus $\mathbf{PM}^*_{\mathbf{MSS}}$ bereits aus rein logischem (oder genauer: aus mengentheoretischem) Grund konstruierbar. Wir sagen mit dem Theorem streng genommen nichts über eine Punktmechanik aus, sondern umschreiben ein Merkmal aller abstraktesten Mengensysteme.
In diesem metalogischen Sinn läuft das Beweisverfahren völlig fehl. Wir haben nichts Inhaltliches, weil die Methode 'top-down' aus logischen Gründen immer gelingt. Wir sagen nichts über *diese* Theorie $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$ aus.

- Der Fehlschluss von möglichen oder bloß denkbaren Entitäten auf Eigenschaften realer Objekte hat eine lange Tradition. In Hamel [1967a], Nr. 96 ('Kritische Bemerkungen'), und Hamel [1967b], S. 520, werden 'Scheinbeweise' des *d'Alembertschen Prinzips* $dm\vec{a} = d\vec{K}_E + d\vec{K}_R$, die von D'Alembert und J. Bernoulli stammen, vorgestellt und ihre Ungültigkeit entlarvt.[19] Der eine Beweis benutzt ein begriffliches Konstrukt, in dem Körper ohne Massen vorkommen, für Hamel ein 'Gespenst' (ich übernehme oben also Hamels Redewendung von Gespensterteilchen). Unzulässig sei es dann, in einem Beweis den Gespenstern Gleichgewichtsbedingungen zuzuweisen, die für gewöhnlich nur für reale Massen gelten.[20] Ein Beweis mit Partikeln ohne Massen habe keinen Realitätsbezug, er bleibe im Bereich des Möglichen.

eigenen Modelle (sog. 'innere Modelle') zu produzieren.

[17] Man vgl. Ebbinghaus [1994], S. 31.

[18] Setze hier für $x_1, \ldots, x_n$ die Strukturelemente von $\mathbf{PM}^*_{\mathbf{MSS}}$ und für $\phi(z, x_1, \ldots, x_n)$ die mengentheoretische Prädikation, die eine Struktur von $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$ (ohne interne Kräfte) realisiert. Dann ist nach **(Aus)** die Menge $\{z \in x_i \mid \phi(z, x_1, \ldots, x_n)\}$ konstruierbar, und hierzu würde dann auch $\mathbf{PM}_{\mathbf{MSS}}$ gehören.

[19] Zum inhaltlichen Verständnis vergleiche man auch hier Abschnitt 3.4.2, Seite 115.

[20] Vgl. Hamel [1967a], S. 222.

> Das sei zu wenig, um *ein Naturprinzip* zu begründen. Ähnlich stehe es mit d'Alemberts Begründung, in der die Reaktionskräfte $d\vec{K}_R$ als 'mögliche', eingeprägte Kräfte $d\vec{K}'_E$ interpretiert werden:
>
> > „Der Haupteinwand aber liegt darin, dass 'möglich' gleich 'wirklich' gesetzt wird, denn es ist nur sicher, dass die Bewegung $dm\vec{a} = d\vec{K}_E + d\vec{K}'_E$ möglich ist, aber nicht, dass sie wirklich ist."
> > (Hamel [1967a], S. 221).

Wenn in Hertz [1894], Abschnitt 5, oder in Boltzmann [1897], §26, die Mechanik von Teilsystemen mit verborgenen Massen betrachtet wird, ist von Beginn an deutlich unterschieden, ob die konstitutiven Bewegungsgleichungen sich auf das Gesamtsystem oder auf Teilsysteme beziehen. Erst in Bezug auf eine *zuvor festgelegte* Gesamtstruktur können physikalisch sinnvolle Modellaussagen entwickelt werden. Das war den großen Architekten der rationalen Mechanik mehr als klar.[21] Umso erstaunlicher ist es, dass dieses 'Verwischen' von unterschiedlichen Strukturen in der Anwendung der Modelltheorie auf die Mechanik auftritt.

[21] So wird in Hertz [1894], S. 197, sogar explizit zwischen 'System' selbst und 'Modellen' als physikalische Realisationen des Systems unterschieden. Ebenso wird in Boltzmann [1897], S. 93, der Energieerhaltungssatz als invariante Systemgröße motiviert, wodurch das 'Modell' der verborgenen Massen erst seine Berechtigung bekommt: Verborgene Punktmassen haben, so Boltzmanns Deduktion, immer einen systemischen, messbaren 'Effekt', der sich in der Gesamtenergie äußert.

B Zur logischen Ausgestaltung in der Mechanik

Jede Untersuchung der Logizität von Repräsentationsformen setzt im hohen Maß die Standardterminologie zur formalen Syntax und Semantik voraus. Sie wurde auch hier in den Teilen 2.3.8, 2.5, 4.4.3 und 4.5 ohne genauere Erläuterungen verwendet. Mit dem folgenden Anhang zum Begriffspaar des 'Formalen/Informellen' einer Darstellung in der Mechanik ist meine Hoffnung verbunden, den Leserinnen und Lesern den Zusammenhang zur Standardterminologie genauer zu illustrieren, wenn auch der Blick in ein Lehrbuch der mathematischen und symbolischen Logik dadurch nicht ersetzt werden kann.[1]

B.1 Syntax, Semantik und formale Repräsentationen

Formale und informelle Repräsentationen

Eine Repräsentation wird hier in Abschnitt 2.3.8 (nach A. Tarski, R. Carnap und Nachfolgern wie P. Suppes) **formal** genannt, wenn

- **(F1)** die Theorie zu einem syntaktischen Kalkül aus bedeutungsleeren Zeichenreihen rekonstruiert wird; und/oder wenn
- **(F2)** in die physikalische Sprache logische Operatoren und Folgerungsstrukturen mit einbezogen werden.

Die Verknüpfung 'und/oder' (lat. 'vel') soll hierbei zum Ausdruck bringen, dass **(F1)** und **(F2)** nicht voneinander unabhängig sind, das wird im Folgenden noch deutlich gemacht.

Informell heißen dementsprechend *nicht*-formale Repräsentationen: in denen also weder die Bedeutungen der Terme von der Symbolisierung getrennt noch logisch-deduktive Merkmale in der Sprache objektiviert werden.

Der Begriff 'formal' in diesem eng gefassten Sinn trifft zunächst auf **formalisierte Sprachen** zu, wie sie in Carnap [1934], Kap. I.A, und Tarski [1936], §2 ('Formalisierte Sprachen'), grundgelegt sind. Von fundamentaler Bedeutung ist hierbei der Unterschied zwischen der *Objekt*- und der *Metasprache* der logischen Untersuchung, das heißt

[1] Einführende Lehrbücher zur modernen Logik setzen 'mathematische' und 'symbolische' Logik häufig gleich, obwohl diese historisch verschiedenen Motivationen entspringen (für eine genauere Differenzierung siehe etwa Gabriel [2001], S. 22 f.). Ein Grund für die Gleichsetzung muss in den logischen Schriften Alfred Tarskis gesehen werden. Tarski gilt als Urheber der formalisierten Semantik für jede Art von Symbolsprache. Seine eigenen logischen Untersuchungen sind dabei auf dem Gebiet der Mathematik geblieben.

> „zwischen der Sprache, *von* der wir sprechen, und der Sprache, *in* der wir sprechen, sowie auch zwischen der Wissenschaft, die Gegenstand der Betrachtung ist, und der Wissenschaft, in der die Betrachtung angestellt wird [...]." (Tarski [1936], S. 460)

Eine Formalisierung wird zunächst nur für die Objektsprache verlangt, welche dann zu einer festgelegten **Syntax** aus Zeichenelementen eines logischen Kalküls rekonstruiert wird. Die Metasprache dieses Kalküls umfasst dann die bedeutungsgebenden Elemente, mit denen wir ausdrücken, wie von den designierten Zeichen gesprochen wird. In ihr wird die **Semantik** der formalisierten Sprache zum Ausdruck gebracht. Wenn auch die Bedeutung der vorkommenden Termini und Regeln des Kalküls in gleichem Maße eindeutig reglementiert wird, dass allein durch formale Merkmale der Syntax die *Wahrheitsbedingungen* der Kalkülaussagen erfasst werden, so spricht man auch von einer *formalisierten* Semantik.[2]

Das Hauptmerkmal des 'Formalen' einer Logik liegt somit in der Ausgestaltung einer Syntax zu einem logischen Kalkül, in welchem die Regeln des korrekten Schließens allein

> „von der syntaktischen Struktur der Sätze abhängen. *So wird die Logik zu einem Teil der Syntax* [...]. Der Unterschied zwischen den syntaktischen Regeln im engeren Sinn und den logischen Schlussregeln ist nur der Unterschied zwischen *Formregeln* und *Umformungsregeln*." (Carnap [1934], S. 2).

In diesem inklusiven Sinn aller Urteils- und Schlussformen zur Syntax deckt sich obige Charakterisierung des 'Formalen' einer Repräsentation durch **(F1)** und **(F2)** mit Carnaps 'formaler Syntax', wenn es dort heißt:

> „*Formal* soll eine Theorie, eine Regel, eine Definition od. dgl. heißen, wenn in ihr auf die Bedeutung der Zeichen (z.B der Wörter) und auf den Sinn der Ausdrücke (z.B. der Sätze) nicht Bezug genommen wird, sondern nur auf Art und Reihenfolge der Zeichen, aus denen die Ausdrücke aufgebaut sind." (ebd., S. 1).

Der Fokus auf die objektsprachlichen Formregeln macht verständlich, weshalb Suppes und andere Begründer der *modelltheoretischen* (oder *semantischen*) Sichtweise auf wissenschaftliche Theorien später eine formale Repräsentation nur an dem Anteil dieser *syntaktischen* Ausgestaltung messen. Die semantische Auffassung wurde dann sogar 'informell' genannt, weil sie für die *syntaktische* Struktur der Theorie keinerlei Vorgaben macht, sondern allein für die mengentheoretisch gefasste *Modellstruktur* der Metasprache.[3]

---

[2] Man vergleiche insbes. mit den generellen Erklärungen in Schneider und Stekeler-Weithofer [1995].

[3] Dass hier eine Ambivalenz im Gebrauch von 'informellen' Repräsentationen in der modelltheoretischen Sichtweise bleibt, darauf wird hier in Abschnitt 4.5.4 hingewiesen.

Die folgenden Ausführungen werden, wie schon in Teil 2.5 erklärt, illustrieren können, dass die Bezeichnung 'informell' hierbei unglücklich ist. Es handelt sich beim modelltheoretischen Standpunkt vielmehr um einen abgeschwächten oder *gemäßigten* Formalisierungsanspruch, mit dem der semantische Teil der Theorie dennoch mit aller formalen Strenge betrachtet wird.

Zur syntaktischen Struktur einer Theorie
Die Syntax der betrachteten Objektsprache zu reglementieren, umfasst nun mehrere Formgestaltungen, die nach Tarski [1936], S. 458 f., in 'Eigenschaften' der formalisierten Sprache zusammengefasst sind.[4]

I. **Deskriptive Formregeln**, die zum einen den Aufbau der objektsprachlichen *Ausdrücke* aus dem logischen und nichtlogischen Vokabular (Zeichenelementen) induktiv oder rekursiv festlegen; und die zum anderen den Aufbau einer *Aussage* (eines Satzes) aus den Ausdrücken und *Aussagenformen* festlegen;

II. die Auswahl an **Axiomen** der jeweiligen wissenschaftlichen Theorie, wie auch die Axiome des deduktiven *Kalküls*, die allerdings nicht explizit, sondern nur hintergründig vorhanden sind;

III. die logisch-syntaktischen **Schlussregeln**.

Aus dieser Einteilung wird bereits ersichtlich, dass die syntaktische Formalisierung **I** der formalen Repräsentation nach **(F1)** entspricht und die Darstellung der Deduktionen **III** wiederum dem Merkmal **(F2)** der formalen Ausgestaltung. Die beiden Eigenschaften **I** und **III** bestimmen letztlich die Ausgestaltung der Axiome, so dass **II** hinsichtlich der Logizität eine unabhängige Eigenschaft *axiomatisierter Systeme* darstellt. Axiomensysteme können genauso gut informell behandelt werden.

Zu I: Formregeln
Die Formregeln werden über dem Alphabet der Objektsprache $\mathcal{L}$ definiert, das sich für *prädikatenlogische Kalküle* zum Quartupel $\langle \mathbf{L}, \mathcal{V}, \mathcal{O}, \mathcal{P} \rangle$ zusammensetzt, der 'syntaktischen Struktur' von $\mathcal{L}$.[5]

[4] Man vergleiche ebenso in ausführlicher Fassung Carnap [1934], Kap. I u II, sowie in Kurzform Carnap [1958b], S. 102 f. Historisch relevant ist vor allem Hilbert und Ackermann [1972], Kap. III.10 ('Axiomatik wissenschaftlicher Theorien').

[5] Man vergleiche Monk [1976], S. 162 f. und Ebbinghaus u. a. [1992], S. 14 ff. Den Zeichen müssen *intuitiv* vorgegebene Bedeutungen zukommen, die sich aus den theoretischen Zielsetzungen der logischen Rekonstruktion ergeben. „Den Zeichen, die in der betrachteten Sprache auftreten, schreiben wir immer ganz konkrete und für uns verständliche Bedeutungen zu." (Tarski [1936], S. 459). Was hier nur eine Randbemerkung wert ist, kann in Bezug auf Hilberts Formoffenheit der axiomatischen Methode (Abschnitt 2.3.8) nicht deutlich genug gesagt werden.

Hierbei bezeichnet die Menge

$$\mathcal{O} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n, f_{11}(v_0), f_{12}(v_0), \ldots, f_{21}(v_0, v_1), \ldots, f_{ni}(v_0, \ldots, v_{n-1})\}$$

die zulässigen *Operations*symbole und (außerlogischen) *Konstanten*, die numerischen *Funktionsterme* der jeweiligen mathematischen Theorie. (Konstanten werden als 'nullstellige' Funktionsterme aufgefasst.) Die Elemente $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{V}$ gehören zur Menge der numerischen Variablen der Theorie.

Gemeinsam mit der *Identitätsrelation* $v_0 = v_1 \in \mathbf{L}$ und der Multiplikationsoperation $f(v_0, v_1) := v_0 \cdot v_1$ können hiermit bereits physikalische Funktions*gleichungen* der Art $\mathbf{h = 1/2 \cdot g \cdot t^2}$ oder $\mathbf{F = k \cdot x}$ zum Ausdruck gebracht werden. Dasselbe gilt für sämtliche *Gesetzesformen*, die aus elementaren arithmetischen Operationen wie Addition, Subtraktion, Division, Exponentiation usw. im Funktionsterm hervorgehen.

Die Menge $\mathcal{P} = \{P_{11}(v_0), P_{12}(v_0), \ldots, P_{21}(v_0, v_1), \ldots P_{ni}(v_0, \ldots, v_{n-1})\}$ enthält die für die Theorie charakteristischen *Prädikate* (Relationen) mit der Stellenzahl $1, 2, \ldots, n$, die *elementaren* **Aussagefunktionen** (manchmal auch 'Primformeln' genannt). Beispielsweise wird die Ordnungsrelation $x < y$ zwischen zwei Zahlen x und y, die für alle arithmetischen Theorien unverzichtbar ist, als zweistelliges Prädikat (zweistellige Relation) aufgefasst. Auch *mechanische Prädikationen* gehören hierzu, zum Beispiel die Eigenschaft, dass ein numerischer Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ ein materieller Punkt ist; oder die Beziehung, dass ein Massenelement m Teil eines ausgedehnten Körpers k ist. Jene Eigenschaft wird syntaktisch etwa durch '$\mathbf{Mp(x)}$' bzw. diese Beziehung durch '$\mathbf{Kp(m, k)}$' symbolisiert. In der formalisierten Semantik geht es häufig darum zu zeigen, dass den mechanischen Prädikaten *arithmetische Modelle* unterliegen. Dann können die Prädikate (Aussagefunktionen) auf numerische Funktionen zurückgeführt werden.

Zu den logischen Konstanten $\mathbf{L}$ zählen die aussagenlogischen Verknüpfungen 'nicht' ($\neg$), 'und' ($\wedge$), 'oder' ($\vee$), die syntaktische (materiale) Implikation 'wenn - dann' ($\rightarrow$), die Bijunktion 'genau dann - wenn' ($\leftrightarrow$), wie auch die prädikatenlogischen Quantoren 'Für alle' ($\forall$) und 'Es existiert' ($\exists$). (Reduktionen in der Operatorenzahl lasse ich hier unerwähnt.) Über für gewöhnlich induktiv eingeführte Formregeln können nun die **Aussagen** (Sätze) der formalisierten Sprache syntaktisch erklärt werden. Aus elementaren Sätzen, die aus einfachen Prädikationen '$\mathbf{Masse(m_1)}$', '$\mathbf{Kraft(f_1)}$' usw. bestehen, werden mittels logischer Operatoren zusammengesetze Satzmengen gebildet.

Die Variablenmenge $\mathcal{V}$ kann auf numerische Variablen v_i beschränkt bleiben: dann liegt eine Prädikatenlogik *erster* Stufe vor. Sofern allerdings Variablen V_i auch Teilmengen der syntaktisch erklärten Prädikate bezeichnen, und damit auch Prädikaten*variablen*, spricht man von einer Prädikatenlogik *zweiter* Stufe. Diese ist bei Weitem ausdrucksstärker und hat den Vorteil, dass auch komplexe mathematische Kalküle, wie etwa die Differential- und Integralrechnung, die Vektoranalysis und die Variationsrechnung syntaktisch exakt und getreu dem 'informellen Original' repräsentiert werden können, während dagegen in erster Stufe schwerfällige längliche Symbolisierungen erforderlich sind, die sogar im Fall der Repräsentation von Differentialgleichungen als 'unmöglich' erklärt wurden.[6]

Zu II: Axiome (implizite Definitionen)
In der Formulierung der Axiome der betreffenden Theorie fallen die deskriptive (**I**) und die deduktive Aufgabe (**III**) der *axiomatischen Methode* zusammen. Bei umfassender Formalisierung sind alle *Grundbegriffe* **Aussagefunktionen** und alle Axiome exakt gebildete Aussagen. Alle 'Axiome der Klassischen Mechanik' sind syntaktisch eindeutig reglementierte Aussagen, *implizite Definitionen*, die allein aus dem Vokabular (nach **I**), den funktionalen Grundbegriffen der Mechanik, gebildet sind.[7]

Um ein (nicht ganz triviales) Beispiel für eine Formalisierung zu geben, das für die axiomatische Einführungen aller kinematischen Größen der Mechanik (Geschwindigkeit und Beschleunigung) unverzichtbar ist, definiere ich die Eigenschaft der *Differenzierbarkeit* von f an der Stelle x_0, $\frac{d}{dx}f(x)|_{x_0}$, als ein dreistelliges Prädikat in der Sprache erster Stufe: '$\mathbf{Diff}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x_0}, \mathbf{y})$'.[8] Sei dazu $y = f(x)$ eine einstellige Funktion über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und $\Delta(x, y) := |x - y|$ die Abstandsfunktion über $\mathbb{R}$. Zunächst ist sicherzustellen, dass $\Delta(x, y)$ eine elementare Funktion ist.[9] Da aber die arithmetischen Grundoperationen '$+, -, \times, \div$' und die Fallunterscheidung elementar sind, so auch die Funktion

$$\Delta(x, y) := \begin{cases} x - y & \text{falls } x - y > 0; \\ -(x - y) & \text{falls } x - y < 0. \end{cases}$$

Damit lässt sich das Grenzwertprädikat 'Lim$(f(x), x_0, y)$' formalisieren ('f ist stetig in x_0'):

$$\text{Lim}\big(f(x), x_0, y\big) \leftrightarrow \forall x \forall u \,\big(u > 0 \rightarrow \exists v \,\big(v > 0 \,\wedge\, \Delta(x, x_0) < v \rightarrow$$
$$\rightarrow \exists y \, \Delta(y, f(x_0)) < u\big)\big).$$

[6] Siehe dazu insbes. Simpson [1999], Abschn. I.4. Die Unmöglichkeitserklärung bezieht sich allein auf die 'Standardformalisierung' in der ersten Stufe (siehe dazu insbes. Suppes [2002], S. 27, sowie Suppes [1992], S. 207). Anstelle einer Formalisierung zweiter Stufe wird von Seiten der semantischen Sichtweise eine mengentheoretische Metasprache vorgeschlagen. Die Motivation zur formalen Repräsentation in der Sprache zweiter Stufe ist bereits in Carnap [1934], Kap. III, zu finden. Die Syntax führt nahezu unverändert in die heutige Logik zweiter Stufe über.

[7] Siehe dazu insbes. Hilbert und Ackermann [1972], S. 111.

[8] Hierbei orientiere ich mich an Hermes [1938], S. 9 und Ebbinghaus u. a. [1992], S. 53.

[9] 'Elementar' ist hierbei im Sinne der Berechenbarkeitstheorie zu verstehen (vgl. Monk [1976], Kap. I.2).

Die Differenzierbarkeit geht nun aus der gewöhnlichen Definition des Differenzenquotienten hervor, wobei $y = f'(x_0)$ implizit als ein Grenzwert eingeführt wird:

$$\mathbf{Diff}(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x_0}, \mathbf{y}) \leftrightarrow \mathrm{Lim}\Big(\frac{\Delta(f(x), f(x_0))}{\Delta(x, x_0)}, x_0, y\Big).$$

Nicht explizit erwähnt, aber immer *hintergründig* vorhanden, sind dabei Axiomensysteme, die als mathematische Voraussetzungen in die physikalische Theorie eingehen.[10] So ist die axiomatisierte Theorie des *Euklidischen Vektorraums* zur Formulierung jeder Darstellung der Klassischen Mechanik unverzichtbar. Für jede arithmetische Theorie sind die Axiome der *natürlichen Zahlen* mit *Schema zur vollständigen Induktion* erforderlich.[11] Für jede mechanische Theorie sind die Körperaxiome der reellen Zahlen unverzichtbar. Streng genommen gehören die formalen Axiome der Aussagen- und Prädikatenlogik dazu (z.B. die logischen Axiome nach Frege, dargestellt in Monk [1976], Seiten 117 u. 171), mit denen für jede Aussagenmenge *allgemeingültige* Theoreme beweisbar sind.

Zu III: Schlussregeln

Für die syntaktischen Deduktionsverfahren der Prädikatenlogik sind folgende *Schlussregeln* unverzichtbar.[12]

(α) *Abtrennungsregel* ('Modus Ponens'): Aus ϕ und $\phi \to \psi$ kann ψ deduziert werden.

(β) Die *Generalisierungsregel*: Aus ϕ kann $\forall x \phi$ deduziert werden.

(γ) *Substitutionsregeln* für syntaktisch korrekte Ersetzungen von Termausdrücken, von Prädikatenausdrücken und von ganzen Aussagen.[13]

[10] In diesem Sinne spreche ich auch in Abschnitt 3.6.2 von 'mathematischen Hintergrundtheorien', auch wenn dort ein informeller Standard der Logizität angenommen wird.

[11] Deswegen wird bereits in Carnap [1934] das Beweisverfahren über 'vollständige Induktion' zu den syntaktischen Schlussverfahren gezählt. Heute weiß man, dass die Eingrenzung des 'Induktionsaxioms' und des 'Komprehensionsaxioms' in zweiter Stufe verschiedene logische Repräsentationen der gewöhnlichen Mathematik eröffnet. Einzelne Einschränkungen können sogar exakten beweistheoretischen Standards genügen und deduktive Unvollständigkeit wie Inkonsistenz vermeiden. Das trifft vor allem in dem System RCA_0 zu, das für formale Repräsentationen von physikalisch relevanten Differential- und Integralgleichungen von besonderem Interesse ist (siehe dazu v.a. Simpson [1999], Kap. I).

[12] Man vergleiche etwa Carnap [1934], S. 29; Tarski [1936], S. 471, Suppes [1957], Seiten 32 u. 59, Monk [1976], S. 171. Substitutionsverfahren werden hierbei unterschiedlich behandelt, von rein syntaktischen Schlussregeln (wie in Ebbinghaus u. a. [1992]) bis hin zu semantischen Formregeln, die sogar die Generalisierungsregel ersetzen sollen (siehe dazu Carnap [1934], Kap. I.B, und Carnap [1958b], Kap. 12).

[13] Ein Beispiel für eine Regel der Termsubstitution wäre: Falls $x = t$ eine Prämisse ist, kann die Aussagefunktion $\phi[x]$ in allen Vorkommen der (freien) Variable x durch $\phi[t]$ ersetzt werden. Vgl. dazu etwa Ebbinghaus u. a. [1992], S. 82; Monk [1976], S. 176.

Die syntaktische Schlussweise nach (α) entspricht dem, was im logischen Sinn mit *'ableitbar'* oder *'beweisbar'* gemeint ist. Beweise über die Abtrennungsregel erfolgen rein formal: weder die Bedeutung der vorkommenden Termini noch die Gültigkeit (Wahrheit) der Grundannahmen leisten zur Korrektheit des Beweises irgendeinen Beitrag. Streng syntaktische Beweise sind länglich und umständlich, zudem inhaltlich deutlich eingeschränkter als 'semantische Beweise' über die Gültigkeit der Aussagenmengen. Deshalb findet man recht früh in der Entwicklung der formalisierten Semantik die Feststellung, dass der gewöhnliche Folgerungsbegriff viel weiter als der syntaktische Ableitungsbegriff ist.[14] Eine logische Folgerung ist ein Begriff der Metasprache und setzt unter anderem die Gültigkeit der vorausgesetzen Aussagenmenge voraus.

Für die hier relevanten Ausgestaltungen ist die syntaktische Beweisbarkeit ein zu restriktives formales Kriterium, als dass es einer 'allgemeinen Wissenschaftssprache' angehören könnte.[15] Aus diesem Grund ist die Verschiebung von Beweisverfahren hin zur formalisierten Semantik und zur Modelltheorie ein für die Repräsentation wissenschaftlicher Theorien unkritischer Schritt gewesen. Hinsichtlich der formalen Ausgestaltung findet, wie ich gleich illustrieren möchte, durch Annahme von Folgerungsstrukturen an Stelle von syntaktischen Beweisstrukturen allerdings keine relevante Abschwächung statt. Die Frage nach der formalen/informellen Ausgestaltung wird nun vielmehr auf eine metasprachliche Ebene verschoben.

B.2 Tarskis Welt: Erfüllbarkeit, Modell und Struktur

B.2.1 Der formale Wahrheitsbegriff und logische Vollständigkeit

Die Illustrationen dieses ergänzten Abschnittes zur formalisierten Semantik nach Alfred Tarski sollen die These verdeutlichen, dass der logische Modellbegriff per Konstruktion nicht über *formal* zu nennende Kriterien der Repräsentationsweise hinauskommen kann. Der *Bedeutungs*bezug, der materielle Gehalt der Mechanik, wird in der modelltheoretischen Behandlung nicht objektiviert. Vielmehr sind die Modelle 'neutral' gegenüber synthetischen Prozessen und Methoden in der Theoriebildung. Das führt an verschiedenen Stellen (Abschnitt 3.6.4 und Teil 4.5) zu der Behauptung, dass eine formalisierte Semantik niemals den synthetischen Bedeutungsgehalt eines physikalischen Begriffes wie 'Masse' oder 'Kraft' erfassen kann.

In Tarski [1936] wird anhand mehrerer Formelsprachen von unter-

[14] Vgl. Carnap [1934], S. 35 f., sowie Tarski [1935b], S. 405 f.

[15] Ausdruck dieser Einschränkung ist meines Erachtens bereits das 'Toleranzprinzip' in Carnap [1934], Abschn. 17.: dass die allgemeine Syntax zur Klärung von repräsentativen Fragen immer auch durch eine „geeignete Einteilung" (ebd., S. 45) begleitet sein muss, damit die Formalisierung gelingen kann. Das umfasst natürlich auch den Beweisbegriff selbst, wenngleich Carnap den syntaktischen Schluss hier noch für 'grundlegend' erachtet (siehe ebd., S. 36 und S. VII).

schiedlichster Komplexität illustriert, dass die Begriffe des 'Bezeichnens', des 'Deduzierens' - und insbesondere der Begriff des 'Wahrseins' einer Aussage - nur sinnvoll und angemessen in der Metasprache definierbar sind. In der Metasprache wird *über* die Objekte und Operationen gesprochen, die in der Objektsprache durch syntaktische Regeln festgelegt sind. Entscheidend ist nun, dass die Definition des Wahrheitsbegriffs für beliebige Zeichensysteme nur für 'formal korrekt' zu nennende Kriterien angegeben werden kann.[16] 'Formal' heißt ein Kriterium hierbei, wenn der Bezug auf eine syntaktisch fest reglementierte Satzstruktur[17] mittels einer funktionalen *Abbildung* simuliert wird. Das korrekte Übersetzen einer Aussage in die Metasprache ist selbst der alleinige Gegenstand dieser Abbildung. Und so hat das Operieren seine Gültigkeit in *jedem Kontext*, zu jeder Bedeutung der einzelnen Satzkomponenten. Die Gültigkeit ist *unabhängig* von der materiellen Bedeutung der vorkommenden Terme. Tarski spricht hierbei von einer *Konvention* ('Konvention W'), weil nichts verbieten kann, den Wahrheitsbegriff durch andere pragmatische Zielsetungen auszuzeichnen. Allerdings gilt es,

> „die Intention zu erfassen, welche in der sog. 'klassischen' Auffassung der Wahrheit enthalten ist ('wahr - mit der Wirklichkeit übereinstimmend') im Gegensatz z.B. zu der 'utilitaristischen' Auffassung ('wahr - in gewisser Hinsicht nützlich')" (Tarski [1936], S. 448).

So ist das Wahrheitsprädikat durch eine **Erfüllbarkeitsrelation** bestimmt: eine Beziehung zwischen denjenigen Ausdrücken, von denen gesprochen wird (Objektsprache) und den Repräsentanten, die für diese Objekte stehen und infolge *dieser* Repräsentation den Satz in der Metasprache 'wahr' machen.[18]

> **Konvention W:** „Eine formal korrekte, in den Termini der Metasprache formulierte Definition des Symbols '**Wr**' [d.i. das Zeichen für das Wahrheitsprädikat] werden wir eine *zutreffende Definition der Wahrheit* nennen, wenn sie folgende Folgerungen nach sich zieht:
>
> (α) alle Sätze, die man aus dem Ausdruck '$x \in \mathbf{Wr}$ dann und nur dann, wenn p' gewinnt, indem man für das Symbol x einen strukturell-deskriptiven Namen [d.i. eine rekursiv aufzählbare Zeichenkette] einer beliebigen Aussage der betrachteten Sprache und für das Symbol 'p' den Ausdruck, welcher die Übersetzung dieser Aussage in die Metasprache bildet, einsetzt;

[16] So die Chakterisierung in Tarski [1936], S. 448, und Tarski [1944], S. 665.

[17] Tarski [1944], S. 670, verwendet 'Struktur' noch als einen syntaktischen Zeichenkatalog wie nach Carnap [1934]. Die 'Struktur' im späteren modelltheoretischen Verständnis, wie sie auch unten erklärt wird, ist dagegen ein interpretierter Zeichenkatalog.

[18] Um diese Erfüllbarkeitsrelation angemessen zu repräsentieren, ist es also erforderlich, dass die Metaspache umfangreich genug ist, um die Objektsprache im Ganzen zu umfassen (vgl. Tarski [1936], S. 522, sowie Tarski [1944], S. 675).

(β) die Aussage 'für ein beliebiges x - wenn $x \in \mathbf{Wr}$, so $x \in \mathbf{As}$' [d.i.: x gehört zur Menge aller ableitbaren Sätze der vorliegenden Zeichensprache]" (Tarski [1936], S. 476 f.).

Durch die Konvention **W** ist der Wahrheitsbegriff *angemessen* ('materially adequate'), wenn der Wahrheitsbegriff diesen Aspekt des Erfüllens einer Aussage so repräsentiert, dass alle Sätze der Form 'x ist *wahr* genau dann wenn p' behauptet werden können, wobei p durch einen Satz und x durch einen Namen für diesen Satz zu ersetzen ist.[19] *Formal korrekt* ('formally correct') ist er zudem, wenn die obige Konvention derart erfüllt wird, dass die Übersetzung mithilfe einer *effektiv* bestimmbaren Erfüllbarkeitsrelation definierbar ist.[20] So kann jede Repräsentation aus der Struktur der vorkommenden Satzformen unmittelbar durch Aufstellung der Erfüllbarkeitsrelation, „as a binary relation between functions [d.i.: Prädikate der Objektsprache] and sequences of objects" (Tarski [1944], S. 697), angegeben werden. Dann gehören alle wahren Aussagen (von selbst) zur Aussagenmenge des Axiomensystems im Sinne der Konvention **W**(β).

Die semantische Ambivalenz der Aussagefunktionen: Mit anderen Worten, die Erfüllbarkeitsrelation führt syntaktisch erklärte *Aussagefunktionen* - Aussageschemen, deren Bedeutungen bislang nur informell behandelt worden sind - zu *wahren Aussagen* über. Gleichermaßen wird die (symbolische) Logik der Aussagefunktionen zu einer formalisierten Semantik überführt.[21] Man kann daher sagen, die gewöhnliche *Gebrauchslogik*, die in Mechaniklehrbüchern zum Einsatz kommt, besteht in einer 'Logik der Aussageschemen mit informeller Semantik'.[22]

Nicht nur Hilbert und Ackermann [1972] ist in ursprünglicher Fassung ein logischer Kalkül der Ausdrucksformen. Schon im vorausgehenden, epochalen Klassiker der symbolischen Logik, den »*Principia Mathematica*« von A. Whitehead und B. Russell, wird uns die semantische Ambivalenz im Umgang mit 'der Behauptung von Aussagefunktionen' deutlich gemacht, wenn wir Aussagefunktionen mit gewöhnlichen Formeln der Mathematik (und Mechanik) vergleichen.

> „When what we assert contains a real variable, we are asserting a wholly undetermined one of all the propositions that result from giving various values to the variable. It will be convenient to speak of such assertions as *asserting a propositional function*. The ordinary formulae of mathematics contain such assertions; for example
>
> $$"sin^2 x + cos^2 x = 1"$$

[19] Vgl. Tarski [1936], S. 453 und Tarski [1944], S. 668 f.

[20] 'Effektiv' heißt hier rekursiv aufzählbar im Sinne der Berechenbarkeitstheorie. Siehe dazu Monk [1976], Kap. 1.

[21] Man vgl. insbes. Tarski [1936], S. 478 f.

[22] Das werde ich in Abschnitt B.3.2 noch am Beispiel illustrieren.

> does not assert this or that particular case of the formula, nor does it assert that the formula holds for all possible values of x, though it is equivalent to this latter assertion; it simply asserts that the formula holds, leaving x wholly undetermined; and it is able to do this legitimately, because, however x may be determined, a true proposition results. Although an assertion containing a real variable does not, in strictness, assert a proposition, yet it will be spoken of asserting a proposition except when the nature of the *ambiguous assertion* [eigene Herv.] involved is under discussion.“ (Whitehead und Russell [1910], S. 19)

Die wahrheitsfunktionale Semantik löst gerade die eben beschriebene Mehrdeutigkeit auf, schließt diese informelle Lücke, indem nunmehr die formalen Bedingungen für die Wahrheit (Gültigkeit) von Aussagen in Betracht kommen.

Zur deduktiven Vollständigkeit: Der semantische Wahrheitsbegriff verknüpft nun im Idealfall zwei sprachliche Ebenen funktional miteinander, mit der Klarheit und Eindeutigkeit einer *abgeschlossenen* und korrekten Definition. Es kann damit geprüft werden, ob das 'Wahrsein' eines Satzes aus dem rekursiven, funktionalen Aufbau der syntaktisch reglementierten Sprache bestimmt ist.[23] Das kommt der Berechenbarkeit des Wahrheitsbegriffes gleich, und in diesem Fall spricht man von einer **logischen Vollständigkeit** des Axiomensystems.

> *Kriterium der logischen Vollständigkeit einer formalisierten Theorie*: Alle Sätze, die formal korrekt aufgestellt und deduziert werden können, sind 'wahr' in diesem logischen System. Und umgekehrt ist jeder Satz, von dem behauptet wird, dass er 'wahr' im Sinne der Konvention **W** ist, auch aus dem Zeichenkalkül ableitbar. Oder in den Worten Carnaps:
>
> > „Ein vollständiges $\mathfrak{K}$ [d.i. ein Systemkalkül aus Axiomen] lässt sozusagen keine Frage offen, jeder Satz wird bejaht oder verneint [...]“ (Carnap [1934], S. 151).

Der logische Vollständigkeitsbegriff bezieht sich also auf die deduktive wie begriffliche Abgeschlossenheit der in einem Axiomensystem gültigen (wahren) Aussagen. In der formalisierten Fassung einer Theorie ist das eine ganz entscheidende Motivation zur logischen Rekonstruktion überhaupt: Von Frege über Hilbert bis hin zu Carnap und Tarski zeichnet die metamathematische Beurteilung nach deduktiver wie begrifflicher Vollständigkeit das oberste Richtmaß in der Grundlegung und Theoretisierung eines Wissensgebietes aus. Die Beurteilung nach Vollständigkeit fällt nun bei

[23] So die ursprüngliche Intention und das Verständnis von 'Klarheit' nach Tarski [1936], Seiten 450 und 456.

Tarski mit der formalen Korrektheit des Wahrheitsbegriffs zusammen.[24] Umso mehr ist die 'vollständige' Formalisierung der Mechanik in Frage zu stellen, wenn es deutliche Anzeichen dafür gibt, dass jede systematische Vollständigkeit unerreichbar bleibt, wie es hier auch an mehreren Stellen angedeutet wird.[25]

Es gilt als erwiesen, dass nur diejenigen Kalküle, die höchstens die Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik erster Stufe haben, vollständig in diesem logischen Sinne sein können.[26] Der Wahrheitsbegriff ist allerdings über die *Konvention* **W** in Tarski [1936] bewusst umfangreicher gekennzeichnet worden: Seine Bedeutung muss allgemein *für beliebige Systeme* greifen, gerade dann, wenn die Vollständigkeit im Sinne der Konvention geprüft werden soll.[27]

B.2.2 Die logische Folgerung und der Modellbegriff

Die für eine prädikatenlogische Sprache $\mathcal{L}$ eigens zu bestimmende Erfüllbarkeitsrelation legt eindeutig fest, wie über die Zeichen gesprochen werden muss. Mit ihr wird festgelegt, was die Terme in der Symbolsprache *bedeuten* und wodurch die Aussagen 'wahr' sind: „[A] sentence is true if it is satisfied by all objects, and false otherwise" (Tarski [1944], S. 667). Die Konvention läuft auf den heute geläufigen, logischen *Interpretationsbegriff* hinaus.[28] Die Interpretation $\mathfrak{I}$ einer Formelsprache gibt an, von welchen Objekten gesprochen wird und hat als wesentliches Element den semantischen Erfüllbarkeitsbegriff.

> *Definition:* Eine **Interpretation** $\mathfrak{I}$ von $\mathcal{L}$ ist das mengentheoretische Paar
>
> $$\mathfrak{I} : (\mathfrak{A}, \beta),$$
>
> wobei $\mathfrak{A}$ die **Struktur** ist, welche diejenigen Objekte enthält, durch die sämtliche Terme und Aussagefunktionen in $\mathcal{L}$ über die Erfüllbarkeitsrelation
>
> $$\beta : \mathcal{L} \mapsto \mathfrak{A} = (\mathbf{A}, O^A, R^A)$$

[24] Siehe Tarski [1936], S. 474 f.

[25] Siehe vor allem Abschnitt 2.3.4. Eine historische Übersicht zum logischen Vollständigkeitsbegriff in der modernen Logik gibt Mancosu u. a. [2004], Kap. 1.4 und 5.3. Bemerkenswert differenziert ist eine längere Erklärung zum Vollständigkeitsbegriff in Tarski [1930], S. 390 f., wo Tarski die theoretische Relevanz der Vollständigkeit alleine für 'elementare Disziplinen' hervorhebt. Für komplexere Theorien spiele sie bislang 'keine Rolle', was in dem 'anschaulich plausiblen Glauben' an die 'Unvollständigkeit' dieser Systeme begründet sei.

[26] Das ist der Inhalt des sogenannten 'Vollständigkeitssatzes'. Siehe dazu Monk [1976], S. 204, und Ebbinghaus u. a. [1992], Kap. 5.

[27] Die Leistung in den späteren Kapiteln von Tarski [1936] ist der Nachweis, wie für höherstufige Sprachen auf der Grundlage dieser Konvention die Unvollständigkeit des Kalküls folgt. Siehe dazu auch die Motivation in Tarski [1930], S. 390.

[28] Siehe dazu etwa Ebbinghaus u. a. [1992], S. 36, und Monk [1976], S. 216.

ersetzt werden. In dem Fall, dass eine Aussage $\phi \in \mathcal{L}$ interpretierbar ist, wird die Struktur **Modell** der Aussagenmenge aus $\mathcal{L}$ genannt. Dann gilt $\phi \in \mathbf{Wr}$, d.h. sie ist eine *wahre* Aussage.

Mit der Interpretation geben wir also an, wie wir über die vorkommenden Zeichen aus $\mathcal{L}$ sprechen. Unter dieser Bedingung sind die Formelzeichen, die in der Metasprache durch die **Struktur** $\mathfrak{A} = (\mathbf{A}, O^A, R^A)$ gegeben sind, inhaltlich sinnvolle Terme geworden. Die Menge **A** der Struktur, auch *Grundbereich* genannt, enthält mengentheoretische Objekte, die für die außerlogischen Konstanten $c_i \in \mathcal{O}$ der Syntax eingesetzt werden. So kann es sich im Kontext der Klassischen Mechanik auch um Massen*elemente* m_i handeln, die der Aussagenfunktion $\vec{F} = \sum_i m_i \cdot \vec{a}_i$ eine physikalische Bedeutung geben. Entsprechend bezeichnen O^A und R^A die Objektmengen über **A**, welche die Operationssymbole aus $\mathcal{O}$ und die Prädikate $\mathcal{P}$ erfüllen.[29] In diesem Sinn ist in Tarski [1935b] von einem **Modell** die Rede.

Um das Beispiel des vorherigen Abschnitts B.1 aufzugreifen, wird die Aussagefunktion '*Diff*$(f(x), x_0, y)$', dass die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist und ihre Ableitung existiert, durch die Struktur

$$\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, f^R(x) = \mathbf{x^2}, \alpha^R, x^R, x_0^R, y^R, \Delta^R, \mathrm{Lim}^R, <, +, -, \times, \div, 0, 1)$$

mit elementaren Funktionen (z.B. mit der quadratischen Funktion) und Relationen über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllt.

$$\mathfrak{R} \models \mathrm{Diff}(f(x), x_0, y).$$

Offenbar ist die Stuktur ein metasprachliches Substrat oder ein Repräsentant des syntaktischen Systems, das aus uninterpretierten Formelzeichen über $\mathcal{L}$ besteht. Dieses Substrat bildet die formale Basis für die 'bewahrheitende' Interpretation. Deshalb ist es durchaus zulässig, Interpretation und Struktur synonym zu verstehen.[30]

Wie schon beim Wahrheits- und Modellbegriff besteht die Vorgabe Tarskis darin, die 'formalen' Merkmale am gewöhnlichen Folgerungsbegriff zu

[29] Vgl. etwa Monk [1976], S. 194, sowie Tarski [1994], S. 114.

[30] So etwa in Feferman und Feferman [2004], S. 279: „By an *interpretation* of $\mathcal{L}$ is meant a *structure* consisting of a domain of objects for each basic kind of variable as well as an interpretation of the relation, operation, and constant symbols of $\mathcal{L}$ by actual relations between, operations on, and members of the domain of objects and the appropriate kind [...]". Oftmals werden auch 'Struktur' und 'Modell' synonym verwendet (vgl. etwa Ebbinghaus u. a. [1992], S. 36 und S. 39; Monk [1976], S. 194 ff.). Allerdings ist der Strukturbegriff vielmehr als eine Äquivalenzklasse aus allen zulässigen Modellen einer Theorie zu verstehen. Kambartel bringt diesen Gedanken deutlich auf den Punkt: „[...] ≫[G]ilt≪ ein formales Axiomensystem bei geeigneter Interpretation seiner Variablen für ein bestimmtes konkretes Modell, so überträgt sich diese Geltung in natürlicher Weise auch auf alle damit strukturgleichen Modelle. In einer formalaxiomatischen Beschreibung wird daher stets von allen über das Strukturelle hinausgehenden Eigenschaften abstrahiert. Das kann dann so ausgedrückt werden: Formale Axiomensysteme haben nur Strukturen zum Gegenstand." (Kambartel [1968], S. 173).

rekonstruieren; d. h. der Begriff soll für die „Form von Aussagen", ganz allgemein, „für eine umfassende Klasse von formalisierten Sprachen" (Tarski [1935b], S. 407) definiert sein. 'Formal' scheint hierbei von Tarski auch als a priori entscheidbar verstanden zu sein, indem „diese [Folge-]Beziehung durch empirisches Wissen [...] in keiner Weise beeinflusst" (ebd., S. 408) werden kann. Das Formale und a priori Entscheidbare der **logischen Folgerung** ist hierbei *unabhängig* von materiellen Merkmalen der vorkommenden Aussagefunktionen und Begriffe.[31]

Wenn X aus K 'logisch folgt' (symbolisch: $\mathbf{K} \models \mathbf{X}$),

(α) „kann es niemals vorkommen, dass die Klasse K aus lauter wahren Sätzen besteht, zugleich aber die Aussage X falsch ist";

(β) muss die Folgebeziehung *invariant* sein gegenüber unterschiedlichen *Interpretationen* der betroffenen syntaktischen Aussagen; d.h. wenn man

> „die Bezeichnung der erwähnten Gegenstände in den betrachteten Aussagen überall durch Bezeichnungen irgendwelcher anderer Gegenstände ersetzt." (Tarski [1935b], S. 408).

Wir sehen, dass der formalisierte Wahrheitsbegriff der logischen Folgerung *vorgeordnet* ist: Wenn die Prämissen wahr sind (in einer modelltheoretischen Struktur), dann auch die Konklusion. Aus der bisherigen semantischen Grundlegung Tarskis erklärt sich dann, dass die Folgebeziehung sich auf Modelle einer formalisierten Sprache bezieht.

> *Definition:* „Die Aussage X **folgt logisch** aus den Aussagen der Klasse K dann und nur dann, wenn jedes Modell der Klasse K zugleich ein Modell der Klasse X ist" (ebd., S. 409).[32]

Ein einfaches Beispiel aus der Mechanik für eine Folgerung in dem hier genannten Sinn wäre etwa, dass die Aussage der Energieerhaltung aus der linearen Impulserhaltung für zwei Punktmassen m_1 und m_2 vor und nach einem nichtelastischen Stoß folgt. Dazu sei ϕ die Aussage

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2,$$

[31] Mit dieser Unabhängigkeit der Folgerung vom 'begrifflichen Inhalt' der Aussagen (nach Gabriel [2001], S. 29) löst sie sich vom modalen Aspekt des gewöhnlichen, traditionellen Folgerungsbegriffes ab (siehe historisch auch Lukasiewicz [1988], S 81 f.). Ein *modallogischer* Unterschied zwischen notwendigen und möglichen Urteilen kann mit dem 'formal' zu nennenden Folgerungsbegriff allein nicht dargestellt werden. In Tarski [1935b], S. 410 f., wird die Beschränkung auf die formale Folgerung mit der Frage verbunden, was eigentlich zu den 'außerlogischen' Konstanten im Grundbereich $\mathbf{A}$ zählen kann. Die genaue Kennzeichnung von logischen und außerlogischen Konstanten ist eine bleibende Kontroverse in der Philosophie der Logik.

[32] Symbolisch würden wir heute mit einer Klasse M von Modellen die Folgerung so definieren: $K \models X \;\Leftrightarrow_{df}\;$ Für alle M : (Für alle $Y \in K: \; M \models Y \Rightarrow M \models X$) .

ψ stehe für die Energieerhaltung beim Zusammenstoß:

$$\frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot v_2^2.$$

Aus der mengentheoretisch gefassten Theorie der Newtonschen Mechanik $\mathbf{NM}$ kann ψ aus ϕ gefolgert werden:

$$\{\mathbf{NM}, \phi\} \models \psi.$$

Die Folgerung ist hierbei 'formal' zu nennen, weil alle Modelle von $\{\mathbf{NM}, \phi\}$ simultan die Aussage ψ erfüllen. Die außerlogischen Konstanten $m_1, m_2, u_1, u_2, v_1, v_2$ behalten ihre intuitive Bedeutung als Massen- und Geschwindigkeitselemente, werden nun aber *allein* durch ein arithmetisches (extensionales) Modell erfüllt. Die Zeichen stehen für reelle Zahlenwerte. Für die Gültigkeit der Folgerung ist die materielle Bedeutung nicht relevant, sondern nur die (metasprachliche) *Substitution* der vorkommenden außerlogischen Konstanten zu einem Modell von ϕ und ψ. In diesem Sinn ist die materielle Bedeutung *in* der Folgerung aufgehoben. Die 'Richtigkeit' der Folgerung bleibt dagegen von pragmatischen Vorentscheidungen (geometrisch-anschauliche, experimentelle wie begriffliche Voraussetzungen) abhängig. Ob es sich *tatsächlich* um ein *mechanisches* Modell handelt, wird in der formalisierten Folgerung nicht widergespiegelt.

B.2.3 Theorien im modelltheoretischen Sinn

Sämtliche Sätze oder Aussagen einer axiomatisierten Theorie sind durch die Axiome der konstruierten Theorie bereits interpretiert. Es leuchtet daher ein, den Theoriebegriff über die metasprachliche Semantik zu verstehen. Nach der *semantischen* (oder *modelltheoretischen*) Sichtweise stehen das Modell und die Folgerungen aus dem Modell beim Theorieaufbau im Vordergrund, nicht dagegen die Deduktion oder der logische Beweis selbst, was einem syntaktischen Theoriebegriff entsprechen würde. Zur Begriffsklärung sei der *semantische Theoriebegriff*, wie er in der mathematischen Logik verwendet wird, nochmals vorgestellt.[33]

> **Eine Theorie T** ist nach modelltheoretischem Verständnis ein Paar $(\Gamma, \mathcal{L})$, wobei Γ eine Aussagenmenge über der Sprache $\mathcal{L}$ ist, und für jeden aus dem logischen Vokabular syntaktisch korrekt aufgebauten Satz ϕ gilt, dass er zu Γ gehört, wann immer ϕ

[33] Angelehnt an die standardisierte Formulierung etwa in Monk [1976], S. 208. Historisch ist dieser Theoriebegriff bereits in Tarski [1935a], S. 28 Anm. 1, zu finden. Es sei noch bemerkt, dass der Theoriebegriff nicht mit dem Begriff der 'Modell-Theorie' verwechselt werden sollte, tatsächlich eine - wie Feferman und Feferman [2004], S. 280, meint - „unfortunate common terminology in logic [...]. The primary examples of structures dealt with in model theory come from metamathematics, and in that respect, *model theory* is a part of metamathematics; it is an *informal* mathematical theory whose subject matter is *formal theories and their models*."

aus Γ *gefolgert* werden kann. Kurz, für jeden Satz $\phi \in \mathbf{T}$ gilt:
$\phi \in \Gamma$ genau dann wenn $\Gamma \models \phi$.

Man beachte, dass der Theoriebegriff unmittelbar den semantischen Aufbau der logischen Folgerung voraussetzt. Außerdem wird Γ als ein deduktiv geordnetes System verstanden, bestehend aus einer abzählbaren Menge von Grundsätzen Γ_0, den *Axiomen* der Theorie. Alle Sätze, die aus Γ_0 gefolgert werden, gehören auch zur Theorie.

Mit der Definition einer Theorie erfüllt sich auch die Vorstellung, dass die logische *Struktur einer Theorie* eine Art semantisches 'Substrat' ist, das zu einem Modell der Theorie wird, sofern die Elemente der Sprache im Sinne dieser Struktur interpretiert werden.[34] Dann ist es zulässig, auch die *modelltheoretische* (oder semantische) Variante einer logischen Rekonstruktion zu den *formalen* Repräsentationen einer Theorie zu zählen, wie ich es hier in den Teilen 2.5 und 4.5 dargestellt habe. Die Struktur der Theorie, die eine Modellmenge realisiert, wie auch die Beweisbarkeit und Folgerungen aus der Modellmenge, wird hierbei mit aller formalen Strenge differenziert, während syntaktische wie beweistheoretische Ausgestaltungen zweitrangig behandelt werden. In diesem Sinne bleiben in der modelltheoretischen Sichtweise die formalen Merkmale (**F1**) und (**F2**) aus Abschnitt B.1 - wenn auch in einem abgeschwächten Sinn - erhalten.

B.3 Informelle Repräsentationen in der Klassischen Mechanik

Im letzten Teil dieses Anhangs geht es mir darum, die informellen Merkmale eines gewöhnlichen Beweisverfahrens in der theoretischen Mechanik regressiv zu identifizieren und an den Formbestimmungen der modernen Logik kenntlich zu machen. An einem abschließenden Beispiel aus der Newtonschen Mechanik soll der Unterschied eines informellen Beweises zu formalisierten Rekonstruktionen deutlich gemacht werden.

B.3.1 Mechanische Prädikation: zwei formale Einschränkungen

Mechanische Prädikationen sind bei informeller Ausgestaltung der Klassischen Mechanik zwei ganz wesentlichen Einschränkungen unterworfen.

(M1) Reduzieren auf elementare Funktionen: Auch mechanische Prädikate mit nichtnumerischen Objekten x zählen zur syntaktischen Prädikatenmenge $\mathcal{P}$ aus Teil B.1. So kann etwa das Prädikat 'Kraft(x)' in der Bedeutung 'x ist eine Kraft' eingeführt werden; oder die Relation 'Mp(x) $\wedge$ Mp(y) $\wedge$ Stoß(x, y)' in der Bedeutung: 'Der materielle Punkt x stößt auf

[34] „A structure is said to be a model of an axiom system if each of its axioms is true in the structure." (Feferman und Feferman [2004], S. 280).

den materiellen Punkt y', um hieraus komplexere dynamische Begriffe wie 'Kraftstoß' oder 'Drehmoment' zu definieren.

Mit syntaktischen Darstellungen wie diese am Beispiel der Mechanik lässt sich eine 'allgemeine Wissenschaftssprache' skizzieren, die sowohl mathematische wie auch empirische Kontexte gleichermaßen logisch exakt behandelt. Gemeinsame strukturelle Merkmale zwischen verschiedenen Grundbereichen aus der Physik und Mathematik werden mit aller formalen Strenge dargestellt.[35] Die spätere Einschränkung nach der *semantischen* (oder modelltheoretischen) *Auffassung* gegenüber der vorherigen 'syntaktischen Sichtweise' besteht letztlich darin, dass mechanische Prädikationen *nicht* formal repräsentiert werden, weil sie zu sperrig, unhandlich und letztlich zu unsachgemäß seien.[36] Die *physikalische* Bedeutung verbirgt sich vielmehr hinter den strukturerfüllenden *Modellen* der algebraischen und arithmetischen *Funktionen*, wie sie den gewöhnlichen Gleichungen und Formeln der Mechanik entnommen werden. Anstelle einer eigens rekonstruierten Objektsprache steht nun die Modellstruktur, die in mengentheoretischer Gestalt extensional zu beschreiben ist. Explizit eingeführte mechanische Prädikate sind also zwingend auf *elementare* Funktionen zurückzuführen, für die *per Konstruktion* arithmetische wie mengentheoretische Modelle vorliegen.

> „I claim, that the concept of model in the sense of Tarski may be used without distortion as a fundamental concept [...]. In this sense I would assert that (the meaning of) the concept of model is the same in mathematics and the empirical sciences. [...]
> To define a model formally as a set-theoretical entity, which is a certain kind of ordered tuple consisting of a set of objects and relations and operations on these objects, is not to rule out the kind of physical model which is appealing to physicists. The physical model may be simply taken to define the set of objects in the set-theoretical model." (Suppes [2002], S. 21)

(M2) Funktionalisieren statt Aussagen bilden: Eine weitere Einschränkung, die ebenso wie **(M1)** eine 'semantische Verlagerung' beinhaltet, betrifft den einfachen Umgang mit erfüllbaren Aussagen. Die Konstruktion eines Satzes wie z.B.

$$\forall x_0, x_1, x_2, t\, \exists r\ \Big(\vec{a}(x_0, x_1, x_2, t) = r \land \vec{F}(x_0, x_1, x_2, t) = m \cdot \vec{a}(x_0, x_1, x_2, t)\Big)$$

[35] Man vergleiche dazu insbes. die logischen Analysen in Carnaps Monographien Carnap [1934], Carnap [1958a] und Carnap [1958b]. Siehe auch hier Abschnitt 2.5.

[36] Mechanische Prädikationen findet man etwa in den formalen Darstellungen von Hermes [1938] und Montague [1962]. Zur semantischen Sichtweise siehe hier v.a. Abschnitt 4.4.3.

bildet gerade *nicht* den Gegenstand der mathematischen Behandlung von Klassischer Mechanik. Vielmehr sind es *Aussagefunktionen* von der Art

$$(*) \quad \vec{F}(x_0, x_1, x_2, t) = m \cdot \vec{a}(x_0, x_1, x_2, t),$$

also Schemata oder Gesetzesformen mit *freien* (ungebundenen) Variablen x_0, x_1, x_2, t. *Die Gesetze der Mechanik sind Aussageschemen*. Dabei ist die *Funktionalisierung* der mechanischen Größen zu Aussageschemen unverzichtbar, um die Begriffe *implizit definieren* zu können.

Hier gibt es also erhebliche Einschränkungen in der formalen Ausgestaltung: Vom Standpunkt einer wahrheitsfunktionalen Semantik (nach Tarski) macht der Übergang zu der deduktiv zulässigen Aussagenmenge *aus den Schemen* den eigentlichen Anfang der logischen Analyse aus. Dann geht es um Fragen wie: Welche formalen und deduktiven Voraussetzungen rechtfertigen die Gültigkeit (Wahrheit) einer Allaussage, einer Existenzaussage aus Gleichung $(*)$ usw.? - Die Konventionalisierung von gültigen Aussagen durch rekursiv definierte, metasprachliche Erfüllbarkeitsrelationen, welche von 'materiellen' Bedeutungsunterschieden absehen, ist gerade das entscheidende Ergebnis einer formalisierten Semantik.[37] Auf die Weise werden Systemvergleiche nach metamathematischen Kriterien (Widersprüchlichkeit, Unabhängigkeit, Entscheidbarkeit und deduktive Vollständigkeit) beurteilbar.

Die Beweispraxis der Mechanik untersucht dagegen nur *Umformungen* der Aussagefunktionen aus gegebenen Axiomen der Theorie. Eine rekursive Systematisierung der Semantik ist hierbei nicht erforderlich. Dann ist es verständlich, dass nicht nur die Umformungen informell behandelt werden, sondern dass auch die physikalische Bedeutungsebene in den Bereich der strukturerfüllenden Modelle 'verwiesen' wird, wie es die modelltheoretische (oder semantische) Sichtweise verlangt. Es ist dann aber auch verständlich, wenn wir nur noch über *vorinterpretierte*, durch Modelle realisierte Formeln sprechen, wie es auf *informelle Ausgestaltungen* von mechanischen Repräsentationen zuftrifft.

Zusammenfassend will ich behaupten, dass diese beiden Einschränkungen (**M1**) und (**M2**) hinreichend die Negation des Merkmals (**F1**) aus Teil B.1 charakterisieren: Die mechanischen Größen und Gleichungen werden durch eine intuitive Bedeutung beschrieben. In informeller Ausgestaltung ist die mechanische Bedeutung der Aussageschemen nicht von der sprachlichen Syntax getrennt.

[37] Siehe dazu oben, Seite 274 f., sowie ergänzend Mancosu u. a. [2004], S. 129; Berka und Kreiser [1983], S. 391; in technischer Ausführung Tarski [1936], Seiten 471, 478 und 497.

B.3.2 Informelle Beweisverfahren in der Klassischen Mechanik

Wenden wir uns nun dem informellen Beweisverfahren selbst zu, anlehnend an (**F2**) aus Teil B.1. In der Beweispraxis der Mechanik werden die syntaktischen Schlussregeln nicht explizit genannt. Obgleich sie 'im Prinzip' vorkommen, werden sie zur Vereinfachung und Abkürzung ausgelassen.

Das betrifft auch alle *syllogistischen Schlussformen* und Enthymeme, die immer dann zur Anwendung kommen, wenn *über* Theoreme der Mechanik gesprochen wird. Es ist aber leicht einzusehen, dass syllogistische Schlussweisen niemals den Standard von Beweisverfahren *in* Theoremen der mechanischen Lehrbücher bilden.[38] Eine Schlussweise wie

> ≫Alle ausgedehnten Körper haben eine träge Masse.
> Alle trägen Massen werden durch das Newtonsche Grundgesetz beschrieben.
> Also werden alle ausgedehnten Körper durch das Newtonsche Grundgesetz beschrieben.≪

kann nichts zu der *funktionalen* Verbindung der Begriffe 'ausgedehnter Körper' und 'träge Masse' in der Formel $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ergänzen. Argumentative wie syllogistische Schlussformen sind vielmehr Teil einer gewöhnlichen *Gebrauchslogik*[39], die in den *erläuternden Texten* der Lehrbücher Anwendung findet: gewissermaßen in der Meta-Metasprache zur Mechanik.

Um nun einen realistischen Fall eines informellen Beweisverfahrens in der theoretischen Mechanik zu illustrieren, möchte ich den Beweisgang des *Momentensatzes* aus den Axiomen der Punktmechanik so rekonstruieren, dass die Einschränkungen in der syntaktischen Beweisstruktur deutlich werden, Einschränkungen, die sogar in allen mechanischen Lehrbüchern vorkommen, die einen Anspruch auf logisch-axiomatische Genauigkeit erheben.[40]

> **Theorem:** *Der Momentensatz der Punktmechanik*
> Aus Newtons Grundgesetz (**NG**) und dem vollen Gegenwirkungsprinzip **(G1) - (G3)** *folgt* (**PM2**):
>
> $$\frac{d}{dt}\sum_i m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \vec{M}^{ext};$$
>
> oder in Worten: 'Jede Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Punktmassensystems wird durch ein resultierendes äußeres Moment hervorgerufen.'

[38] Siehe dazu hier Abschnitt 1.2.4 sowie Toulmin [1953], Abschn. 2.2.

[39] So auch die Umschreibung in Tarski [1944], S. 672, für alle 'semantisch geschlossenen' Sprachsysteme, einschließlich der natürlichen Umgangssprache.

[40] Ich entnehme den Beweisgang daher Hamel [1967a], S. 52 f. Hier wird der Momentensatz der Punktmechanik in Abschnitt 3.8.2 diskutiert.

Die 'Folgerung' entspricht hierbei einem gewöhnlichen nicht-formalisierten Konzept, das allerdings durch die semantische Folgerungsstruktur ersetzbar ist. Ich möchte das Theorem nun so beweisen, dass die informelle Ausgestaltung offensichtlich wird. Zur Abkürzung steht '**BV**' für eine 'Beweisvoraussetzung' und '(⇒)' für einen informellen Folgerungsschritt. '**K**' ist ein erläuternder Kommentar, der gar nicht zum Beweis selbst gehört, und '**IV**' steht für eine 'informelle Vorinterpretation', die nicht im Beweis genannt wird, allerdings bei einer formalisierten Darstellung explizit vorkommen müsste.

Beweis des Momentensatzes

K1: Alle Axiome der Newtonschen Mechanik können vorausgesetzt werden.[41] Deshalb 'gilt' das Newtonsche Grundgesetz (**NG**), das 2. Newtonsche Axiom, angewandt auf eine Punktmassenwolke, auf ein Vielteilchensystem.

BV1:

$$\sum_j m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \sum_{\substack{k \\ j \neq k}} \vec{F}_{k,j} \quad (\mathbf{NG}) \text{ bzw. } (\mathbf{PM1}).$$

IV1: Das Axiom ($\mathbf{NG}$) wird als *Punktmassensystem* interpretiert, was bereits die Auswahl des syntaktischen Vokabulars bestimmt: Wir wenden Summen aus abzählbar vielen Punktmassen (Index 'j') und Kräften $F_{k,j}$ (interne Kraft von Masse m_k auf Masse m_j) auf das *Aussageschema* $\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{F}$ an. Streng genommen handelt es sich bei diesem Schritt bereits um eine *Termsubstitution*, angewandt auf das Aussageschema. Man hätte ja auch im Fall eines infinitesimalen Massenelementes das Schema durch $dm \cdot \vec{a} = d\vec{F}$ *ersetzen* können. (**NG**) wird also wie (**PM1**) interpretiert.[42]

IV2: Es wird implizit die Gültigkeit des Trägheitsprinzips (des 1. Newtonsche Axiom) vorausgesetzt: 'Es gibt die Struktur eines Euklidischen Vektorraums, in dem das *inertiale Bezugssystem* unserer Betrachtung realisiert ist'.

BV2: Explizite Definition des Gesamtmoments:

$$\mathbf{M} := \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

IV3: Die Definition ist, formal betrachtet, nicht implizit und deshalb kein Axiom, weil im Definiens nur Grundbegriffe der Newtonschen Mechanik vorkommen. Informell ist die Bedeutung des Gesamtmoments

[41] Zur Newtonschen Mechanik siehe hier Seite 114.

[42] Zu (**PM1**) vergleiche hier Abschnitt 3.3.4. Zur infinitesimalen Darstellung siehe Hamel [1912], S. 65, sowie hier Abschnitt 3.6.4, S. 154 f.

M bereits zuvor geklärt. Eine implizite Voraussetzung ist dagegen die Unterscheidung zwischen 'externer' und 'interner Kraft', die sich auf die explizite Definition von 'externen' und 'internen Momenten' (M^{ext} und M^{int}) überträgt.[43] Als Axiom findet man die Aussage etwa in Hamel [1909a], S. 357:

> „Es gibt Kräfte, deren Ursachen ausschließlich in den Zuständen oder Vorgängen des Systems selbst zu suchen sind, solche Kräfte heißen *innere Kräfte*. Alle andern Kräfte sollen *äußere Kräfte* heißen."

K3: **BV2** hat entsprechend wieder den Status eines Aussageschemas, welches nach **IV1** für ein Punktmassensystem interpretiert werden muss. Andernfalls gäbe es gar keinen Beweis zu führen, weil die Aussage des Theorems bereits in der Definition enthalten wäre.[44] Man hätte dann einfach:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{m} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}\right) - \mathbf{v} \times \mathbf{m} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}\right).$$

Um diesen Unterschied zu verdeutlichen, habe ich das Aussageschema **BV2** mit fetten Symbolen versehen und den *interpretierten* Momentensatz des Punktmassensystems mit '$\vec{M}^{ext}$'. So ist also der nächste Beweisschritt eine informelle Folgerung aus der *Einsetzung* der Syntax für ein Punktmassensystem in die rechte Seite von **BV2**. Am Ende des Beweises ergibt sich dann die Identität mit dem äußeren Gesamtmoment $\vec{M}^{ext}$. In Lehrbüchern heißt dieser Schritt: 'Wir bilden das Vektorprodukt $\vec{r} \times m\vec{a}$ und summieren über alle Massenelemente'.

($\Rightarrow$ **1**):

$$\mathbf{M} = \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \vec{r}_j \times \vec{F}_{k,j}.$$

K4: Die folgenden Schritte sind streng genommen *Äquivalenzen* ('$\Leftrightarrow$'), Folgerungen in beiden Richtungen, die durch *Einsetzung* (Termsubstitution) von algebraischen *Identitäten* ('$v_0 = v_1$') in das Aussageschema ($\Rightarrow$ **1**) entstehen.[45] In Lehrbüchern wird dagegen abkürzend die eine Seite ('$\mathbf{M} :=$') ausgelassen und anstatt äquivalenter Gleichungen gleiche Terme und Aussagefunktionen eingesetzt: also direkt die *Gleichheit* ('$=$') verwendet. Dass hierbei keine Umformungsfehler entstehen, sichert die logische *Theorie der Identität*, welche ebenfalls zu den

[43] Siehe hier Teil 3.3.4 und Goldstein u. a. [2006], S. 5.

[44] Dieser semantische Unterschied wird in den Lehrbüchern durchaus beachtet, ohne darauf deutlich hinzuweisen. Siehe etwa stellvertretend für 'die Lehrbücher' Goldstein u. a. [2006], Seiten 3 und 6 f.

[45] Vergleiche hier Abschnitt B.1, S. 270.

mathematischen Hintergrundtheorien der Mechanik gezählt werden muss. Aus ihr geht hervor, dass in jeder Logik erster Stufe die Formel

$$x = y \rightarrow (\phi(x) \rightarrow \phi(y))$$

allgemeingültig ist. Das heißt, alle Gleichsetzungen werden wie *Termsubstitutionen* behandelt.[46] Ein formalisierter Beweis würde also den Beweisgang über Termsubstitutionen nur deutlich verlängern, ohne dass eine inhaltliche Erweiterung dargestellt wird.

($\Rightarrow$ **2**):

$$\sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} \vec{r}_j \times \vec{F}_{k,j} = \sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} \vec{r}_j \times \left(\vec{F}_j^{ext} + \vec{F}_{k,j}^{int}\right).$$

BV3: Zu allen internen Kräften $\vec{F}_{k,j}^{int}$ gehören nach **(G1)** des Gegenwirkungsprinzips (des 3. Newtonschen Axioms)[47] entgegengesetzte Reaktionskräfte:

$$\vec{F}_{k,j}^{int} = -\vec{F}_{j,k}^{int} \quad (\mathbf{G1}).$$

($\Rightarrow$ **3**):

$$\sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} \vec{r}_j \times \left(\vec{F}_{k,j}^{ext} + \vec{F}_{k,j}^{int}\right) = \sum_{j} \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j^{ext} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{k \\ j\neq k}} (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{k,j}^{int}\right).$$

K5: Die Halbierung der Summe ergibt sich aus der Substitution von **(G1)** und Aufzählung aller Summanden. In allen Schritten werden wieder abkürzend die Rechengesetze der elementaren Vektorrechnung vorausgesetzt (entsprechend **IV2**).

BV4: Interne Momentenpaare heben sich nach dem Gegenwirkungsprinzip (**G2**) gegenseitig auf.

$$(\vec{r}_j - \vec{r}_k) \times \vec{F}_{k,j}^{int} = 0 \quad (\mathbf{G2}).$$ [48]

($\Rightarrow$ **4**):

$$\sum_{\substack{j,k \\ j\neq k}} \vec{r}_j \times \left(\vec{F}_{k,j}^{ext} + \vec{F}_{k,j}^{int}\right) = \sum_{j} \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{ext} := \vec{M}^{ext}.$$

[46] Siehe dazu insbes. Tarski [1994], S. 57, sowie Hilbert und Ackermann [1972], S. 104.

[47] Zu **(G1)-(G3)** siehe hier Abschnitt 3.4.1.

[48] Alternativ kann auch **(G4)** aus dem Gegenwirkungsprinzip bewiesen werden, ein Lemma, auf das ich jetzt nicht genauer eingehe (siehe dazu aber hier Seite 114, Anm. 87 und Seite 189).

K6: Am Ende von ($\Rightarrow$ **4**) steht also das äußere Moment, wie es auch (explizit) definiert ist. Aus ($\Rightarrow$ **1**) und ($\Rightarrow$ **4**) ergibt sich nun 'per Kettenschluss' die Aussage, dass nur das äußere Moment einen Beitrag zum Gesamtmoment des Systems hat:

($\Rightarrow$ **5**):

$$\sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \vec{r}_j \times \vec{F}_{k,j} = \vec{M}^{ext}.$$

K7: Im letzten Schritt wird nun **BV1** auf ($\Rightarrow$ **5**) angewendet. Weil keine internen Momente mehr auftreten, kann gemäß **K3** so umgeformt werden, dass das Differential $\frac{d}{dt}$ vor der Summe steht (unten mit $= \ldots =$ für weitere 'Kettenschlüsse' gekennzeichnet). Damit wäre das Theorem bewiesen:

($\Rightarrow$ **6**):

$$\vec{M}^{ext} = \sum_j \vec{r}_j \times m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = \ldots = \frac{d}{dt} \sum_j m_j (\vec{r}_j \times \vec{v}_j).$$

Die Ausführlichkeit dieses informellen Beweisganges variiert je nach Lehrbuch. Die ausführlichste axiomatisierte (informelle) Darstellung ist sicherlich in Desloge [1982], S. 227 f., zu finden, während etwa Hamel [1967a] nur explizit auf die jeweilige Verwendung der Axiome hinweist und sämtliche algebraischen Umformungen auslässt. Nirgends ist der Beweisgang also in dieser vorgestellten Länge zu finden, da hier der Bezug zur formalen Ausgestaltung verdeutlicht werden soll.

Es fällt schließlich auf, dass Axiom **(G3)** in keinem Schritt zur Anwendung gekommen ist. Ist das Axiom deshalb redundant? - Keinesfalls, die Annahme, dass sämtliche Kräfte allein Funktionen des Ortes sind, gehört zu einer entscheidenden *impliziten Voraussetzung* dafür, dass sich die inneren Momente in Schritt ($\Rightarrow$ **4**) gegenseitig ausgleichen. Bei nichtstarren, kontinuierlichen Medien ist **(G3)** nicht immer erfüllt, weil auch Orts*änderungen* $\delta(\vec{r}) \neq 0$ die wirkenden Spannungszustände beeinflussen. Wie in Abschnitt 3.8.3 diskutiert, ist das der wesentliche Grund dafür, den Momentensatzes zu einem Axiom und nicht zu einer Folgerung zu erklären.

Abschließend möchte ich nochmals festhalten, dass sich sämtliche informelle Beweisverfahren (im Sinne von **(F2)**) auf *aussagenlogische Folgerungen mit Termsubstitutionen in den Aussagefunktionen* reduzieren. So wurde es hier auch in den Abschnitten 1.2.4, 2.3.8 und in 2.5 behauptet. Insofern ist dieser Beweis des Momentensatzes auch für andere Beweisgänge in der Mechanik repräsentativ. Bei Umformungen, in denen (partielle) Differential- und Integralgleichungen beteiligt sind, verkompliziert sich zwar das Verfahren, allerdings ändert sich die logische Folgerungsstruktur nicht im Geringsten. Das wäre dennoch durch weitere Rekonstruktionen von komplexeren Beweisverfahren in der Mechanik zu verdeutlichen.

Die Druckfassung dieses Buches enthält auf den Seiten 289 bis 302 einen weiteren Anhang mit dem Titel »Auszüge aus Georg Hamels Schriften«, der aus urheberrechtlichen Gründen nicht in der E-Book-Fassung enthalten sein darf.

Literaturverzeichnis

[Abraham und Marsden 1978] ABRAHAM, Ralph ; MARSDEN, Jerrold E.: *Foundations of Mechanics*. 2. Auflage. Redwood City, Menlo Park, Reading, 1978

[Ajdukiewicz 1960] AJDUKIEWICZ, Kazimierz: The Axiomatic Systems from the Methodological Point of View. In: *Studia Logica* 9 (1960), S. 205–220

[Aleksandrov 1971] ALEKSANDROV, P. S.: Einleitende Bemerkungen zu den Hilbertschen Problemen. In: ALEKSANDROV, P. S. (Hrsg.): *Die Hilbertschen Probleme*. Leipzig, 1971 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 252), S. 17 – 21

[Ardema 2005] ARDEMA, Mark D.: *Newton-Euler Dynamics*. New York, 2005

[Arnold 1989] ARNOLD, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2. Auflage. New York, Berlin, Heidelberg, 1989

[Arons 1997] ARONS, Arnold B.: *Teaching Introductory Physics*. New York, Chichester, Brisbane, 1997

[Bartels 2007] BARTELS, Andreas: Wissenschaftlicher Realismus. In: BARTELS, Andreas (Hrsg.) ; STÖCKLER, Manfred (Hrsg.): *Wissenschaftstheorie*. Paderborn, 2007, S. 199–220

[Benvenuto 1991] BENVENUTO, Eduardo: *An Introduction to the History of Structural Mechanics. Part I: Statics and Resistance of Solids*. New York, Berlin, Heidelberg, 1991

[Berka und Kreiser 1983] BERKA, Karel ; KREISER, Lothar: Syntax - Semantik. Einführender Kommentar zu Kap. XII. In: BERKA, Karel (Hrsg.) ; KREISER, Lothar (Hrsg.): *Logik-Texte*. 3. Auflage. Berlin, 1983, S. 384–395

[Bernhardt und Wussing 1971] BERNHARDT, H. ; WUSSING, H.: Vorwort zur deutschen Ausgabe der Hilbertschen Probleme. In: ALEKSANDROV, P.S. (Hrsg.): *Die Hilbertschen Probleme*. Leipzig, 1971 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 252), S. 3–16

[Betten 1993] BETTEN, Josef: *Kontinuumsmechanik. Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Berlin, Heidelberg, New York, 1993

[Bierhalter 1992] BIERHALTER, Günter: Von L. Boltzmann bis J.J. Thomson: die Versuche einer mechanischen Grundlegung der Thermodynamik (1866-1890). In: *Archive for History of Exact Sciences* 44 (1992), S. 25–75

[Blanchette 2009] BLANCHETTE, Patricia: The Frege-Hilbert-Controversy. In: ZALTA, Edward N. (Hrsg.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Erstveröffentlichung in 'Fall' 2007, Neuausgabe 'Fall', 2009. – URL `http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/frege-hilbert/`. – Zugriffsdatum: 10.3.2011

[Boltzmann 1897] BOLTZMANN, Ludwig: *Vorlesungen über die Principe der Mechanik - I. Teil*. Leipzig, 1897

[Boltzmann 1900] BOLTZMANN, Ludwig: Über die Entwicklung der Methoden der theoretischen Physik in neuerer Zeit. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8 (1900), S. 71–95

[Boltzmann 1904] BOLTZMANN, Ludwig: *Vorlesungen über die Principe der Mechanik - II. Teil*. Leipzig, 1904

[Boltzmann 1905] BOLTZMANN, Ludwig: Über die Grundprinzipien und Grundgleichungen der Mechanik (Vorlesungen gehalten im Jahre 1899). In: *Populäre Schriften*. Leipzig, 1905, S. 253 – 307

[Boltzmann und Nabl 1907] BOLTZMANN, Ludwig ; NABL, Josef: Kinetische Theorie der Materie. In: SOMMERFELD, Arnold (Hrsg.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften - mit Einschluss ihrer Anwendungen. Erster Teilband.* Bd. 5: Physik. Leipzig, 1907, S. 493–558

[Born 1915] BORN, Max: *Dynamik der Kristallgitter*. Leipzig, Berlin, 1915

[Born 1922] BORN, Max: Atomtheorie des festen Zustandes (Dynamik der Kristallgitter). In: SOMMERFELD, Arnold (Hrsg.): *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften - mit Einschluss ihrer Anwendungen. Dritter Teilband* Bd. 5: Physik. Leipzig, 1922, S. 527–781

[Bremer 2011] BREMER, Hartmut: Heun und Hamel - Repräsentanten der Mechanik um 1900. In: *GAMM-Mitteilungen* 34 (2011), Nr. 2, S. 194–200

[Brockhaus 1957] BROCKHAUS, Verlag F. A. (Hrsg.): *Brockhaus ABC der Naturwissenschaft* *und Technik*. 4. Auflage. Leipzig, 1957

[Brommundt und Sachs 1991] BROMMUNDT, Eberhard ; SACHS, Gottfried: *Technische Mechanik - Eine Einfürung*. 2. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, 1991

[Bunge 1967a] BUNGE, Mario: *Foundations of Physics*. Berlin, Heidelberg, New York, 1967 (Springer Tracts in Natural Philosophy Volume 10)

[Bunge 1967b] BUNGE, Mario: Physical Axiomatics. In: *Reviews of Modern Physics* 39 (1967), Nr. 1, S. 463–474

[Bunge 1986] BUNGE, Mario: Review of C. Truesdell: An Idiot's Fugitive Essays On Science. In: *The British Journal for the Philosophy of Science* 37 (1986), Nr. 4, S. 520–523

[Butterfield 2004] BUTTERFIELD, Jeremy: Between Laws and Models: Some Philosophical Morals of Lagrangian Mechanics (Preprint). In: *Philsci-Archive: Archive for Preprints in Philosophy of Science* (2004). – URL `http://philsci-archive.pitt.edu/1937/1/BetLMLag.pdf`. – Zugriffsdatum: 27.01.2014

[Butterfield 2007] BUTTERFIELD, Jeremy: On Symplectic Reductions in Classical Mechanics. In: BUTTERFIELD, J. (Hrsg.) ; EARMAN, J. (Hrsg.): *Philosophy of Physics, Part A*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, 2007 (Handbook of the Philosophy of Science), S. 1–131

[Carnap 1934] CARNAP, Rudolf: *Logische Syntax der Sprache*. Wien, New-York, 1934

[Carnap 1958a] CARNAP, Rudolf: *Introduction to Semantics and Formalization of Logic*. Cambridge, Mass., 1958

[Carnap 1958b] CARNAP, Rudolf: *Introduction to Symbolic Logic and its Applications*. New York, 1958

[Cauchy 1823] CAUCHY, Augustin L.: Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. In: *Bulletin de la Société Philomatiques* (1823), S. 9–13. – URL `http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k901948/f308`. – Zugriffsdatum: 01.06.2012

[Cercignani u. a. 1994] CERCIGNANI, Carlo ; ILLNER, Reinhard ; PULVIRENTI, Mario: *The Mathematical Theory of Dilute Gases*. New York, Berlin, Heidelberg, 1994 (Applied Mathematical Sciences 106)

[Coelho 2010] COELHO, Ricardo L.: On the Concept of Force: How Understanding its History can Improve Physics Teaching. In: *Science and Education* 19 (2010), S. 91–113

[Coelho 2011] COELHO, Ricardo L.: Conceptual Problems in the Foundations of Mechanics. In: *Science and Education* (2011), S. 1–20

[Cohen und Nagel 1949] COHEN, Morris R. ; NAGEL, Ernest: *An Introduction to Logic and Scientific Method*. London, 1949 (Nachdruck der ersten vollständigen Ausgabe von 1934)

[Corry 2004] CORRY, Leo: *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918) - From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*. Dordrecht, Boston, London, 2004

[Corry 2006] CORRY, Leo: On the Origins of Hilbert's Sixth Problem: Physics and the Empiricist Approach to Axiomatization. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, Madrid, 2006, S. 1679 – 1718. – URL `http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/`. – Zugriffsdatum: 09.11.2008. (Angegebene Seitenzahlen beziehen sich auf das URL-Dokument: S. 1 - 22.)

[Cross 1994] CROSS, J. J.: Theories of elasticity. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Hrsg.): *Companion Encyclopedia of the Mathematical Sciences. Volume 2*. Baltimore, London, 1994, S. 1023–1033

[Curiel 2009] CURIEL, Erik: Classical Mechanics Is Lagrangian; It Is Not Hamiltonian; The Semantics of Physical Theory Is Not Semantical (Preprint). In: *Philsci-Archive: Archive for Preprints in Philosophy of Science* (2009). – URL `http://philsci-archive.pitt.edu/4916/1/curiel-cm-lag-not-ham.pdf`. – Zugriffsdatum: 22.06.2010

[Czycholl 2000] CZYCHOLL, Gerd: *Theoretische Festkörperphysik*. Braunschweig, Wiesbaden, 2000

[DaCosta und Doria 1991] DACOSTA, Newton C. A. ; DORIA, F. A.: Undecidability and Incompleteness in Classical Mechanics. In: *International Journal of Theoretical Physics* 30 (1991), Nr. 8, S. 1041–1073

[d'Alembert 1899] D'ALEMBERT, Jean-Baptiste ; KORN, A. (Hrsg.): *Abhandlung über Dynamik (1743)*. Leipzig, 1899 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 106)

[Dampier 1979] DAMPIER, Margaret: The Laws of Mechanics. In: *The Mathematical Gazette* 63 (1979), S. 19–30

[Daniel 1997] DANIEL, Herbert: *Physik 1. Mechanik, Wellen, Wärme*. Berlin, New York, 1997

[Desloge 1982] DESLOGE, Edward A.: *Classical Mechanics. Part I*. New York, Chichester, Brisbane, 1982

[Dieudonné 1967] DIEUDONNÉ, Jean A.: The Work of Nicolas Bourbaki. In: *The American Mathematical Monthly* 77 (1967), S. 134–145

[DuBois-Reymond 1882] DUBOIS-REYMOND, Emil: *Über die Grenzen des Naturerkennens und die sieben Welträtsel*. 5. Auflage. Leipzig, 1882

[Duhem 1908] DUHEM, Pierre: Ziel und Struktur der physikalischen Theorien. In: SCHÄFER, L. (Hrsg.): *Pierre Duhem, Ziel und Struktur der physikalischen Theorien*. Übersetzung von F. Adler; Hamburg 1998. Hiernach die Seitenangaben. Erste deutsche Ausgabe, Leipzig, 1908 (Französ. Erstveröff.: La Théorie Physique, son Objet et sa Structure. Paris 1906)

[Duhem 1912] DUHEM, Pierre: *Die Wandlungen der Mechanik und der mechanischen Naturerklärung*. Leipzig, 1912 (Deutsche Übers. von Ph. Frank; französ. Erstveröff.: L'Évolution de la Mécanique. Paris 1903)

[Ebbinghaus u. a. 1992] EBBINGHAUS, H.-D. ; FLUM, J. ; THOMAS, W.: *Einführung in die mathematische Logik*. Dritte Auflage. Mannheim, Leipzig, Wien, 1992

[Ebbinghaus 1994] EBBINGHAUS, Heinz-Dieter: *Einführung in die Mengenlehre*. Dritte Auflage. Mannheim, Leipzig, Wien, 1994

[Eisenbud 1958] EISENBUD, Leonard: On the Classical Laws of Motion. In: *American Journal of Physics* 26 (1958), S. 144–159

[Euler 1736] EULER, Leonhard: Mechanica sive motus scientia analytice exposita - Tomus I. In: WOHLFERS, J. (Hrsg.): *Leonhard Eulers Mechanik oder Analytische Darstellung von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläuterungen - Teil 1*. Greifswald 1848. Deutsche Übersetzung von Wohlfers. Lateinische Erstveröffentlichung Petersburg, 1736 (Opera Omnia E15)

[Euler 1752] EULER, Leonhard: Découverte d'un Nouveau Principe de Mechanique. Opera Omnia E177. In: *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* 6 (1752), S. 185–217. – URL `http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek/digital/struktur/02-hist/1750/jpg-0600/00000189.htm`. – Zugriffsdatum: 06.11.2010

[Euler 1790] EULER, Leonhard: Theoria Motus Corporum Solidorum Seu Rigidorum. In: WOHLFERS, J. (Hrsg.): *Leonhard Euler's Mechanik oder Analytische Darstellung von der Bewegung mit Anmerkungen und Erläuterungen - Teil 3*. Greifswald 1853. Deutsche Übersetzung von Wohlfers, hiernach die Seiten- und Kapitelangaben. Lateinische Erstveröffentlichung Greifswald, 1790 (Opera Omnia E289)

[Ewald 1974] EWALD, Günter: *Geometrie*. Göttingen, 1974

[Feferman und Feferman 2004] FEFERMAN, Anita B. ; FEFERMAN, Solomon: *Alfred Tarski - Life and Logic*. Cambridge, New York, Melbourne, 2004

[van Fraassen 2010] FRAASSEN, Bas C. van: Logic and the Philosophy of Science. In: GUPTA, A. (Hrsg.) ; BENTHEM, J. van (Hrsg.): *Journal of the Indian Council of Philosophical Research. Special Issue*. 2010, S. 1–14

[Fraser 1994] FRASER, Craig G.: Classical Mechanics. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Hrsg.): *Companion Encyclopedia of the Mathematical Sciences. Volume 2*. Baltimore, London, 1994, S. 971–986

[Frege 1879] FREGE, Gottlob: Begriffsschrift. In: ANGELELLI, I. (Hrsg.): *Gottlob Frege, Begriffschrift und andere Aufsätze*. Zweite Auflage, Hildesheim 1964. Erstveröffentlichung Halle, 1879

[Frege 1976] FREGE, Gottlob ; GABRIEL, Gottfried (Hrsg.) ; HERMES, Hans (Hrsg.) ; KAMBARTEL, Friedrich (Hrsg.): *Wissenschaftlicher Briefwechsel*. Hamburg, 1976 (Nachgelassene Schriften und Wissenschaftlicher Briefwechsel, Band 2)

[Freudenthal 1971] FREUDENTHAL, Hans: Axiomatik. In: RITTER, J. (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 1: A-C*. Basel, 1971, S. 749–751

[Friedman 1974] FRIEDMAN, Michael: Explanation and Scientific Understanding. In: *The Journal of Philosophy* 71 (1974), S. 5–19

[Frigg 2006] FRIGG, Roman: Scientific Representation and the Semantic View of Theories. In: *Theoria* 55 (2006), S. 46–65

[Frigg 2012] FRIGG, Roman: Grundprobleme der Statistischen Mechanik. In: ESFELD, Michael (Hrsg.): *Philosophie der Physik*. Berlin, 2012, S. 325–341

[Fung und Tong 2001] FUNG, Y. C. ; TONG, Pin: *Classical and Computational Solid Mechanics*. Singapore, New Jersey, London, 2001

[Gabriel 1972] GABRIEL, Gottfried: Definition. In: RITTER, J. (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 2: D-F*. Basel, 1972, S. 36–42

[Gabriel 2001] GABRIEL, Gottfried: Traditionelle und moderne Logik. In: [Stelzner und Stöckler, 2001b], S. 21–34

[Gallavotti 2006] GALLAVOTTI, Giovanni: Classical Mechanics. In: FANÇOISE, Jean-Pierre (Hrsg.) ; NABER, G. (Hrsg.) ; TSUN, T. (Hrsg.): *Encyclopedia of Mathematical Physics - Vol. 1*. Amsterdam, 2006, S. 1–32

[Gauß 1877] GAUSS, Carl F.: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. In: *Carl Friedrich Gauss - Werke Band 5*. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1877 (Hiernach die Seitenangabe. Erstveröffentlichung im Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 4, 1829), S. 25–28

[Gentzen 1934] GENTZEN, Gerhard: Untersuchungen über das logische Schließen. In: BERKA, Karel (Hrsg.) ; KREISER, Lothar (Hrsg.): *Logik-Texte*. S. 206–262. 3. Auflage 1983. Berlin. Erstveröffentlichung in zwei Teilen in Mathematische Zeitschrift, Bd. 39 (2): 176-210 u. Bd. 39 (3): 405-431, 1934

[Giere 1988] GIERE, Ronald N.: *Explaining Science*. Chicago, London, 1988

[Goldstein u. a. 2006] GOLDSTEIN, Herbert ; POOLE, Charles P. ; SAFKO, John L.: *Klassische Mechanik*. Dritte Auflage. San Francisco, Weinheim, 2006

[Grattan-Guinness 2000a] GRATTAN-GUINNESS, Ivor: Mathematics and Symbolic Logic: Some Notes on an Uneasy Relationship. In: *History and Philosophy of Logic* 20 (2000), S. 159–167

[Grattan-Guinness 2000b] GRATTAN-GUINNESS, Ivor: A Sideways Look at Hilbert's Twenty-three Problems of 1900. In: *Notices of the American Mathematical Society* 47 (2000), S. 752–757

[Grattan-Guinness 2006] GRATTAN-GUINNESS, Ivor: Classical mechanics as a formal(ised) science. In: [Löwe u. a., 2006], S. 51–68

[Greenwood 2003] GREENWOOD, Donald T.: *Advanced Dynamics*. Cambridge, New York, Melbourne, 2003

[Greiner 2007] GREINER, Walter: *Klassische Mechanik I. Kinematik und Dynamik der Punktteilchen, Relativität*. 8. Auflage. Frankfurt a.M., 2007

[Haack 1978] HAACK, Susan: *Philosophy of Logics*. Cambridge, London, New York, 1978

[Halbfass 1971] HALBFASS, Wilhelm: Apriorismus. In: RITTER, J. (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 1: A - C*. Basel, 1971, S. 476 – 477

[Halonen und Hintikka 1999] HALONEN, Ilpo ; HINTIKKA, Jaakko: Studies in the Logic of Explanation. In: *Synthese* 120 (1999), S. 27–47

[Halvorson 2012] HALVORSON, Hans: What scientific theories could not be. In: *Philosophy of Science* 79 (2012), S. 183–206

[Hamel 1903] HAMEL, Georg: Über die Zusammensetzung von Vektoren. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 49 (1903), S. 362–371

[Hamel 1904a] HAMEL, Georg: Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 50 (1904), S. 1–57

[Hamel 1904b] HAMEL, Georg: Über virtuelle Verschiebungen in der Mechanik. In: *Mathematische Annalen* 59 (1904), S. 416–434

[Hamel 1909a] HAMEL, Georg: Über die Grundlagen der Mechanik. In: *Mathematische Annalen* 66 (1909), S. 350 – 391. – URL `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/`. – Zugriffsdatum: 30.10.2012

[Hamel 1909b] HAMEL, Georg: Über Raum, Zeit und Kraft als apriorische Formen der Mechanik. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18 (1909), S. 357 – 385

[Hamel 1912] HAMEL, Georg: *Elementare Mechanik - ein Lehrbuch*. Leipzig, Berlin, 1912

[Hamel 1916] HAMEL, Georg: Über das Prinzip der Befreiung bei Lagrange. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 25 (1916), S. 60 – 65

[Hamel 1927] HAMEL, Georg: Die Axiome der Mechanik. In: GEIGER, H. (Hrsg.) ; SCHEEL, K. (Hrsg.): *Handbuch der Physik*. Berlin, 1927 (Band V: Grundlagen der Mechanik, Mechanik der Punkte und Starren Körper, hrsg. v. R. Grammel), S. 1 – 42

[Hamel 1954] HAMEL, Georg: Kurzbericht über McKinsey u. a. [1953]. In: *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete. Band 50*. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954, S. 182

[Hamel 1967a] HAMEL, Georg: *Theoretische Mechanik - Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik*. Zweite Auflage (Erste Aufl. 1949). Berlin, Heidelberg, New York, 1967

[Hamel 1967b] HAMEL, Georg: Übersicht über die Grundlagen der Mechanik. In: *Theoretische Mechanik*. Zweite Auflage (Erste Aufl. 1949). Berlin, Heidelberg, New York, 1967 (Nach einem Vortrag im Seminar für Mechanik an der Techn. Hochschule Berlin im SoSe 1943), S. 507–525

[Harris 1971] HARRIS, Stewart: *An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation*. New York, Chicago, San Francisco, 1971

[Hellinger 1913] HELLINGER, Ernst: Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua. In: KLEIN, Felix (Hrsg.) ; MÜLLER, Conrad (Hrsg.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften - mit Einschluss ihrer Anwendungen. Vierter Teilband*. Bd. 4: Mechanik. Leipzig, 1913, S. 601–694

[Hempel und Oppenheim 1948] HEMPEL, Carl G. ; OPPENHEIM, Paul: Studies in the Logic of Explanation. In: *Philosophy of Science* 15 (1948), Nr. 2, S. 135–175

[Hermes 1938] HERMES, Hans: *Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik*. Dissertation an der Univ. Münster, 1938 (Neu erschienen in: *Forschung zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften*, hrsg. v. H. Scholz, Hildesheim 1970, S. 1 - 49.)

[Hertz 1894] HERTZ, Heinrich ; P. LENARD., Herausgegeben von (Hrsg.): *Die Prinzipien der Mechanik - in neuem Zusammenhange dargestellt*. (Zweite Auflage von 1910). Leipzig, 1894

[Heun 1914] HEUN, Karl: Ansätze und allgemeine Probleme der Systemmechanik. In: KLEIN, Felix (Hrsg.) ; MÜLLER, Conrad (Hrsg.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften - mit Einschluss ihrer Anwendungen. Zweiter Teilband* Bd. 4. Leipzig, 1914, S. 359–504

[Hilbert und Ackermann 1972] HILBERT, D. ; ACKERMANN, W.: *Grundzüge der theoretischen Logik*. Sechste Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, 1972 (Erste Auflage von 1928)

[Hilbert u. a. 1928] HILBERT, D. ; NEUMANN, J. v. ; NORDHEIM, L.: Über die Grundlagen der Quantenmechanik. In: *Mathematische Annalen* 98 (1928), Nr. 1, S. 1–30

[Hilbert 1900a] HILBERT, David: Mathematische Probleme. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 3 (1900), S. 253–297

[Hilbert 1900b] HILBERT, David: Über den Zahlbegriff. In: *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8 (1900), S. 180–183

[Hilbert 1903] HILBERT, David: *Grundlagen der Geometrie*. Zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage. Leipzig, 1903

[Hilbert 1905] HILBERT, David: *Logische Prinzipien des mathematischen Denkens*. Bibliothek des Mathematischen Institutes der Universität Göttingen, 1905 (Unveröffentlichtes Manuskript der Vorlesung vom Sommersemester 1905, ausgearbeitet von Ernst Hellinger)

[Hilbert 1906] HILBERT, David: *Mechanik*. Bibliothek des Mathematischen Institutes der Universität Göttingen, 1906 (Unveröffentlichtes Manuskript der Vorlesung vom Wintersemester 1905-06, ausgearbeitet von Ernst Hellinger)

[Hilbert 1917] HILBERT, David: Axiomatisches Denken. In: *Mathematische Annalen* 78 (1917), S. 405–415

[Hilbert 1992] HILBERT, David ; ROWE, David E. (Hrsg.): *Natur und mathematisches Erkennen*. Basel, Boston, Berlin, 1992 (Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen)

[Hintikka 1996] HINTIKKA, Jaakko: *The Principles of Mathematics Revisited*. Cambridge, 1996

[Hintikka 2009] HINTIKKA, Jaakko: What is the axiomatic method? In: *Synthese* 183 (2009), Nr. 1, S. 69–85. – URL `http://dx.doi.org/10.1007/s11229-009-9668-8`

[Hintikka und Sandu 2007] HINTIKKA, Jaakko ; SANDU, Gabriel: What is Logic? In: JACQUETTE, Dale (Hrsg.): *The Philosophy of Logic*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, 2007 (Elsevier Handbook of the Philosophy of Sciences), S. 13–40

[Hodges 1998] HODGES, Wilfrid: The Laws of Distribution for Syllogisms. In: *Notre Dame Journal Of Formal Logic* 39 (1998), Nr. 2, S. 221–230

[Hodges 2007] HODGES, Wilfrid: The Scope and Limits of Logic. In: JACQUETTE, Dale (Hrsg.): *The Philosophy of Logic*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, 2007 (Elsevier Handbook of the Philosophy of Sciences), S. 41–63

[Hodges 2009] HODGES, Wilfrid: Model Theory. In: ZALTA, Edward N. (Hrsg.): *The*

Stanford Encyclopedia of Philosophy. Erstveröffentlichung in 'Winter' 2001, Neuausgabe 'Fall', 2009. – URL http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/model-theory/. – Zugriffsdatum: 24.07.2011

[Hölder 1924] HÖLDER, Otto: *Die mathematische Methode - Logisch erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik*. Berlin, 1924

[Horstmann 2004] HORSTMANN, Frank: Georg Hamel (1877-1954). In: KNOBLOCH, Eberhard (Hrsg.): ≫*The shoulders on which we stand*≪ *– Wegbereiter der Wissenschaft: 125 Jahre Technische Universität Berlin*. Berlin, Heidelberg, 2004, S. 58 – 61

[Hoyer 1977] HOYER, Ulrich: Ist das zweite Newtonsche Bewegungsaxiom ein Naturgesetz? In: *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie* 7 (1977), Nr. 2, S. 292–301

[Hoyningen-Huene 2007] HOYNINGEN-HUENE, Paul: Reduktion und Emergenz. In: BARTELS, Andreas (Hrsg.) ; STÖCKLER, Manfred (Hrsg.): *Wissenschaftstheorie*. Paderborn, 2007, S. 177–197

[Huang 1987] HUANG, Kerson: *Statistical Mechanics*. Second edition. New York, Chichester, Brisbane, 1987

[Hüttemann 2007] HÜTTEMANN, Andreas: Naturgesetze. In: BARTELS, Andreas (Hrsg.) ; STÖCKLER, Manfred (Hrsg.): *Wissenschaftstheorie*. Paderborn, 2007, S. 135–153

[Ignatieff 1996] IGNATIEFF, Yurie A.: *The Mathematical World of Walter Noll. A Scientific Biography*. Berlin, Heidelberg, New York, 1996

[Jammer 1957] JAMMER, Max: *Concept of Force. A Study in the Foundation of Dynamics*. Cambridge, Mass., 1957

[Jané 2006] JANÉ, Ignacio: What ist Tarski's Common Concept of Consequence? In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 12 (2006), Nr. 1, S. 1–42

[Joos 1958] JOOS, Georg: *Theoretical Physics*. Dritte Auflage. London, Glasgow, 1958

[Kambartel 1968] KAMBARTEL, Friedrich: *Erfahrung und Struktur. Bausteine zu einer Kritik des Empirismus und Formalismus*. Franfurt a.M., 1968

[Kant 1786] KANT, Immanuel: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. In: POLLOK, K. (Hrsg.): *Immanuel Kant, Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Mit einer Einleitung des Herausgebers; Hamburg 1997. Erstveröffentlichung Riga, 1786 (Seitenangaben nach der Originalausgabe)

[Kant 1787] KANT, Immanuel: *Kritik der reinen Vernunft (2. Auflage)*. Nachdruck der Textausgabe der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften (Band III, 1904/11), Berlin 1968. Erstveröffentlichung Riga, 1787 (Seitenangaben nach der Originalausgabe der zweiten Auflage [B])

[Kirchhoff 1876] KIRCHHOFF, Gustav: *Vorlesungen über Mechanik*. Leipzig, 1876

[Kitcher 1981] KITCHER, Philip: Explanatory Unification. In: *Philosophy of Science* (1981), Nr. 48, S. 507–531

[Kneale 1956] KNEALE, William: The Province of Logic. In: LEWIS, H. D. (Hrsg.): *Contemporary British Philosophy - Personal Statements (Third Series)*. London, New York, 1956, S. 235–262

[König und Pulte 1998] KÖNIG, Gert ; PULTE, Helmut: Theorie. In: RITTER, J. (Hrsg.) ; GRÜNDER, K. (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 10: St - T*. Basel, 1998, S. 1128 – 1154

[Kreiser 2001] KREISER, Lothar: Klassische und nichtklassische Logik. In: [Stelzner und Stöckler, 2001b], S. 81–91

[Kuhn 1977] KUHN, Thomas S.: Second Thoughts on Paradigms. In: [Suppe, 1977b], S. 459–499

[Kuhn 1989] KUHN, Thomas S.: Possible Worlds in History of Science. In: ALLÉN, S. (Hrsg.): *Possible Worlds in Humanities, Arts, and Sciences*. Berlin, 1989, S. 9–32

[Love 1897] LOVE, Augustus Edward H.: *Theoretical Mechanics - An Introductory Treatise On the Principles of Dynamics*. 1. Auflage. Cambridge, 1897

[Love 1906] LOVE, Augustus Edward H.: *Theoretical Mechanics - An Introductory Treatise On the Principles of Dynamics*. 2. Auflage. Cambridge, 1906

[Love 1927] LOVE, Augustus Edward H.: *A Mathematical Treatise Theory of Elasticity*. 4. Auflage. Cambridge, 1927

[Löwe u. a. 2006] LÖWE, Benedikt (Hrsg.) ; PECKHAUS, Volker (Hrsg.) ; RÄSCH, Thoralf

(Hrsg.): *Foundations of the Formal Sciences IV: The History of the Concept of the Formal Sciences*. London, 2006. (Studies in Logic, Volume 3)

[Lukasiewicz 1988] LUKASIEWICZ, Jan: Zur Geschichte der Aussagenlogik. In: PEARCE, D. (Hrsg.) ; WOLEŃSKI, J. (Hrsg.): *Logischer Rationalismus*. Frankfurt a.M., 1988 (Erstveröffentlichung in Erkenntnis 5 [1935], 111-131), S. 76–91

[Lyre 2006] LYRE, Holger: Kants "Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft": gestern und heute. In: *Deutsche Zeitschrift für Philosophie* 54 (2006), Nr. 3, S. 1 – 16

[Mach 1897] MACH, Ernst: *Die Mechanik - in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*. 3. Auflage. Leipzig, 1897

[Mainzer 2004] MAINZER, Klaus: Mechanik. In: MITTELSTRASS, Jürgen (Hrsg.): *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. 2004, S. 823–826

[Majer 2006a] MAJER, Ulrich: Hilbert's Axiomatic Approach to the Foundations of Science - A Failed Research Program? In: HENDRICKS, V.F. (Hrsg.) ; JØRGENSEN, K. F. (Hrsg.) ; LÜTZEN, J. (Hrsg.) ; PEDERSEN, S. A. (Hrsg.): *Interactions: Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930*. 2006, S. 155–184

[Majer 2006b] MAJER, Ulrich: The Relation of Logic and Intuition in Kant's Philosophy of Science, Particularly Geometry. In: CARSON, Emily (Hrsg.) ; HUBER, Renate (Hrsg.): *Intuition and the Axiomatic Method*. 2006 (The Western Ontario Series in Philosophy of Science, Volume 70), S. 47–66

[Mancosu u. a. 2004] MANCOSU, Paolo ; ZACH, Richard ; BADESA, Calixto: The Development of Mathematical Logic from Russell to Tarski: 1900-1935 (final draft). In: HAAPARANTA, Leila (Hrsg.): *The Development of Modern Logic*. Oxford, 2004, S. 1–179

[Maugin 2013] MAUGIN, Gérard A.: *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century - A Concise Historical Perspective*. Dordrecht, Heidelberg, New York, 2013

[McKinsey u. a. 1953] MCKINSEY, J.C.C. ; SUGAR, A. ; SUPPES, P.: Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics. In: *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 2 (1953), S. 253–272

[McKinsey und Suppes 1953a] MCKINSEY, J.C.C. ; SUPPES, P.: Philosophy and the Axiomatic Foundations of Physics. In: *Proceedings of the Eleventh International Congress of Philosophy* 6 (1953), S. 49–53

[McKinsey und Suppes 1953b] MCKINSEY, J.C.C. ; SUPPES, P.: Transformations of Systems of Classical Particle Mechanics. In: *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 2 (1953), S. 273–289

[Meschede 2002] MESCHEDE, Dieter (Hrsg.): *Gerthsen Physik*. 21. Auflage. Berlin, Heidelberg, 2002

[Monk 1976] MONK, J. D.: *Mathematical Logic*. New York, Heidelberg, Berlin, 1976 (Graduate Texts in Mathematics 37)

[Montague 1962] MONTAGUE, Richard: Deterministic Theories. In: THOMASON, Richmond H. (Hrsg.): *Formal Philosophy - Selected Papers of Richard Montague*. New Haven, London, 1974, S. 303-259. Decisions, Values and Groups 2, Oxford, 1962, S. 303–359

[Moser 1998] MOSER, Paul K.: A Priori. In: CRAIG, Edward (Hrsg.): *Routledge Encyclopedia of Philosophy. Volume 1*. London, 1998, S. 3–6

[Moulines 2008] MOULINES, C. U.: *Die Entwicklung der modernen Wissenschaftstheorie (1890-2000). Eine historische Einführung*. Hamburg, 2008

[Müller und Timpe 1906] MÜLLER, Conrad H. ; TIMPE, Anton: Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie. In: KLEIN, Felix (Hrsg.) ; MÜLLER, Conrad (Hrsg.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften - mit Einschluss ihrer Anwendungen. Vierter Teilband* Bd. 4: Mechanik. Leipzig, 1906, S. 1–54

[Muller 2009] MULLER, F. A.: Reflections on the revolution at Stanford. In: *Synthese* (2009), S. 1–29. – URL `http://dx.doi.org/10.1007/s11229-009-9669-7`

[Murdoch 1983] MURDOCH, A. I.: The Motivation of Continuum Concepts and Relations From Discrete Considerations. In: *The Quarterly Journal Of Mechanics and Applied Mechanics* 36 (1983), S. 163 – 187

[Murdoch 2012] MURDOCH, A. I.: *Physical Foundations of Continuum Mechanics*. Cambridge, New York, Melbourne, 2012

[Neumann 1870] NEUMANN, Carl: *Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*. Leipzig, 1870

[Neurath u. a. 1929] NEURATH, Otto ; HAHN, Hans ; CARNAP, Rudolf: Wissenschaftliche Weltauffassung - Der Wiener Kreis. In: *Veröffentlichungen des Vereines Ernst Mach*. Wien, 1929, S. 299 – 317

[Newton 1687] NEWTON, Isaac: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nach der amerikanischen Erstveröffentlichung (1848), aus dem Lateinischen übersetzt von Andrew Motte. Lat. Erstveröff.: London, 1687 (Great Minds Paperback Series, New York, 1995, hiernach die Seitenangaben)

[Noll 1955] NOLL, Walter: Die Herleitung der Grundgleichungen der Thermodynamik der Kontinua aus der statistischen Mechanik. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 4 (1955), S. 627–646

[Noll 1958] NOLL, Walter: A Mathematical Theory of the Mechanical Behaviour of Continuous Media. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 2 (1958), S. 197–226

[Noll 1959] NOLL, Walter: The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics. In: HENKIN, Leon (Hrsg.) ; TARSKI, Alfred (Hrsg.) ; SUPPES, Patrick (Hrsg.): *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics*. Amsterdam, 1959 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Symposium at Berkeley, 1957. Abgedruckt in Noll [1974]), S. 266–281

[Noll 1963] NOLL, Walter: La Mécanique Classique, Basée sur un Axiome d'Objectivité. In: DESTOUCHES, J.-L. (Hrsg.) ; AESCHLIMANN, F. (Hrsg.): *La Méthode Axiomatique dans les Mécaniques Classiques et Nouvelles*. Paris, 1963 (Vortrag am Colloque International in Paris 1959. Abgedruckt in Noll [1974]), S. 47 – 56

[Noll 1974] NOLL, Walter: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. New York, Heidelberg, Berlin, 1974

[Noll 2004] NOLL, Walter: *Five Contributions to Natural Philosophy*. Pittsburgh, 2004 (Online-Preprint, herausgeg. v. Mathematischen Institut d. Carnegie Mellon Univ.). – URL `http://www.math.cmu.edu/~wn0g/FC.pdf`. – Zugriffsdatum: 30.01.2010

[Noll 2007] NOLL, Walter: *On the Concept of Force*. Pittsburgh, 2007 (Online-Preprint, herausgeg. v. Mathematischen Institut d. Carnegie Mellon Univ.). – URL `http://www.math.cmu.edu/~wn0g/Force.pdf`. – Zugriffsdatum: 29.06.2010

[O'Connor und Robertson 2004] O'CONNOR, J.J. ; ROBERTSON, E.F.: Georg Karl Wilhelm Hamel. In: *MacTutor History of Mathematics*. St. Andrews, 2004 (Online-Archiv zur Geschichte der Mathematik). – URL `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hamel.html`. – Zugriffsdatum: 25.04.2011

[Pasch 1882] PASCH, Moritz: *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig, 1882

[Patzig 1988] PATZIG, Günther: Immanuel Kant: Wie sind synthetische Urteile a priori möglich? In: SPECK, Josef (Hrsg.): *Grundprobleme der großen Philosophen. Philosophie der Neuzeit II*. Dritte Auflage. Göttingen, 1988, S. 9–70

[Peckhaus 2001a] PECKHAUS, Volker: *Der nationalsozialistische 'neue Begriff' von Wissenschaft am Beispiel der 'Deutschen Mathematik' - Programm, Konzeption und politische Realisierung*. Erlangen, Paderborn, 2001 (Online-Version der Magisterarbeit an der Philosophischen Fakultät der RWTH Aachen von 1984). – URL `http://darwin.bth.rwth-aachen.de/opus3/volltexte/2009/2696/pdf/2696.pdf`. – Zugriffsdatum: 01.02.2010

[Peckhaus 2001b] PECKHAUS, Volker: Die regressive Methode. In: [Stelzner und Stöckler, 2001b], S. 65–80

[Peirce und Woleński 1987] PEIRCE, David ; WOLEŃSKI, Jan: Vorwort und Einleitung der Herausgeber. In: *Logischer Rationalismus. Philosophische Schriften der Lemberg-Warschauer Schule*. Frankfurt a.M., 1987, S. 7–19

[Poincaré 1906] POINCARÉ, Henri: *Wert der Wissenschaft*. Leipzig, 1906 (Deutsche Übersetzung von E. Weber)

[Poincaré 1929] POINCARÉ, Henri: *Foundations of Science. Science and Hypothesis, The Value of Science, Science and Methods*. New York, 1929 (Englische Übersetzung von G. B. Halsted)

[Pojman 2009] POJMAN, Paul: Ernst Mach. In: ZALTA, Edward N. (Hrsg.): *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Erstveröffentlichung in 'Summer' 2008, Neuausgabe 'Winter', 2009. – URL `http://plato.stanford.edu/entries/ernst-mach/`. – Zugriffsdatum: 09.05.2010

[Popper 1956] POPPER, Karl: Three Views Concerning Human Knowledge. In: LEWIS, H. D. (Hrsg.): *Contemporary British Philosophy - Personal Statements (Third Series)*. London, New York, 1956, S. 357–388

[Pulte 1998] PULTE, Helmut: Jacobi's Criticism of Lagrange: The Changing Role of Mathematics in the Foundations of Classical Mechanics. In: *Historia Mathematica* 25 (1998), S. 154–184

[Pulte 2004a] PULTE, Helmut: Wissenschaft (Teil III: Ausbildung moderner Wissenschaftsbegriffe im 19. und 20. Jh.). In: RITTER, J. (Hrsg.) ; GRÜNDER, K. (Hrsg.) ; GABRIEL, G. (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 12: W - Z*. Basel, 2004, S. 922 – 947

[Pulte 2004b] PULTE, Helmut: Wissenschaftstheorie, Wissenschaftsphilosophie. In: RITTER, J. (Hrsg.) ; GRÜNDER, K. (Hrsg.) ; GABRIEL, G. (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 12: W - Z*. Basel, 2004, S. 973 – 982

[Pulte 2005] PULTE, Helmut: *Axiomatik und Empirie - Eine wissenschaftstheoriegeschichtliche Untersuchung zur Mathematischen Naturphilosophie von Newton bis Neumann*. Darmstadt, 2005

[Quine 1991] QUINE, Willard Van O.: Fünf Marksteine des Empirismus. In: *Theorien und Dinge*. Frankfurt a. M., 1991 (von J. Schulte ins Deutsche übersetzt; engl. Erstveröff.: 'Theories and Things'. Cambridge, Mass. 1981), S. 89–96

[Quine 1994] QUINE, Willard Van O.: Perspectives on Logic, Science and Philosophy (Interview with B. Edmister and M. O'Shea). In: *Harvard Review of Philosophy* (1994), S. 47 – 57

[Rodríguez-Consuegra 1994] RODRÍGUEZ-CONSUEGRA, F. A.: Mathematical logic and logicism from Peano to Quine, 1890-1940. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Hrsg.): *Companion Encyclopedia of the Mathematical Sciences. Volume 1*. Baltimore, London, 1994, S. 617–628

[Sauer 1999] SAUER, Tilman: The Relativity of Discovery: Hilbert's First Note on the Foundations of Physics. In: *Archive for History of Exact Sciences* 53 (1999), S. 529–575

[Scheibe 1997] SCHEIBE, Erhard: *Die Reduktion physikalischer Theorien - ein Beitrag zur Einheit der Physik (Teil I)*. Berlin, Heidelberg, New-York, 1997

[Scheibe 2006] SCHEIBE, Erhard: *Die Philosophie der Physiker*. München, 2006

[Schlimm 2006] SCHLIMM, Dirk: Axiomatics and Progress in the Light of 20th Century Philosophy of Science and Mathematics. In: [Löwe u. a., 2006], S. 233–253

[Schmeidler 1955] SCHMEIDLER, Werner: Zum Gedächtnis an Georg Hamel. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 58 (1955), S. 1–5

[Schneider und Stekeler-Weithofer 1995] SCHNEIDER, Hans J. ; STEKELER-WEITHOFER, Pirmin: Semantik, semantisch. In: RITTER, J. (Hrsg.) ; GRÜNDER, K. (Hrsg.): *Historisches Wörterbuch der Philosophie, Band 9: Se - Sp*. Basel, 1995, S. 581 – 593

[Schurz 2007] SCHURZ, Gerhard: Wissenschaftliche Erklärung. In: BARTELS, Andreas (Hrsg.) ; STÖCKLER, Manfred (Hrsg.): *Wissenschaftstheorie. Ein Studienbuch*. Paderborn, 2007, S. 69–88

[Shapiro 1994] SHAPIRO, Steward: Metamathematics and computability. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Hrsg.): *Companion Encyclopedia of the Mathematical Sciences. Volume 1*. Baltimore, London, 1994, S. 644–655

[Shapiro 2005] SHAPIRO, Steward: Categories, Structures, and the Frege-Hilbert-Controversy: The Status of Meta-Mathematics. In: *Philosophia Mathematica* 13 (2005), S. 61–77

[Simon 1947] SIMON, Herbert A.: Axioms of Newtonian Mechanics. In: *Philosophical Magazine* 35 (1947), S. 888–905

[Simon 1954] SIMON, Herbert A.: Discussion: The Axiomatization of Classical Mechanics. In: *Philosophy of Science* 21 (1954), S. 340–343

[Simon 1977] SIMON, Herbert A. ; COHEN, R. S. (Hrsg.) ; WARTOFSKY, M. W. (Hrsg.): *Models Of Discovery*. Dordrecht, Boston, 1977 (Boston Studies In the Philosophy of Science, Vol. 54)

[Simonyi 2004] SIMONYI, Károly: *Kulturgeschichte der Physik*. Dritte Auflage. Frankfurt a.M., 2004

[Simpson 1999] SIMPSON, Stephen G.: *Subsystems Of Second Order Arithmetic*. Berlin, Heidelberg, New York, 1999 (Perspectives in Mathematical Logic)

[Sneed 1971] SNEED, Joseph D.: *The Logical Structure of Mathematical Physics*. Dordrecht, 1971

[Sommerfeld 1967] SOMMERFELD, Arnold: *Mechanik*. 8. Auflage. Frankfurt a.M., 1967 (Vorlesungen über Theoretische Physik, Band I)

[Sommerfeld 1992] SOMMERFELD, Arnold: *Mechanik der deformierbaren Medien*. 6. Auflage. Frankfurt a.M., 1992 (Vorlesungen über Theoretische Physik, Band II)

[Stäckel 1908] STÄCKEL, Paul: Elementare Dynamik der Punktsysteme und Starren Körper. In: KLEIN, Felix (Hrsg.) ; MÜLLER, Conrad (Hrsg.): *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften - mit Einschluss ihrer Anwendungen. Erster Teilband* Bd. 4: Mechanik. Leipzig, 1908, S. 435–684

[Stegmüller 1985] STEGMÜLLER, Wolfgang: *Theorie und Erfahrung. Zweiter Teilband: Theorienstrukturen und Theoriendynamik*. Zweite Auflage. Berlin, Heidelberg, New York, 1985 (Probleme und Resultate der Wissenschaftsphilosophie und Analytischen Philosophie, Band 2. Erstauflage 1973)

[Stelzner und Stöckler 2001a] STELZNER, Werner ; STÖCKLER, Manfred: Vorwort zu Stelzner und Stöckler [2001b]. Paderborn, 2001, S. 7–17

[Stelzner und Stöckler 2001b] STELZNER, Werner (Hrsg.) ; STÖCKLER, Manfred (Hrsg.): *Zwischen traditioneller und moderner Methode - Nichtklassische Ansätze*. Paderborn, 2001. (Perspektiven der analytischen Philosophie)

[Stöckler 1994] STÖCKLER, Manfred: Theoretische Modelle. Beispiele zum Verhältnis von Theorie, Modell und Realität in der Physik des 20. Jahrhunderts. In: SANDKÜHLER, Hans.-Jörg (Hrsg.): *Theorien, Modelle und Tatsachen*. Frankfurt/M., 1994, S. 46–60

[Stöckler 2000] STÖCKLER, Manfred: Why unifiy? Bemerkungen zur Einheit der Physik. In: KÜPPERS, Bernd-Olaf (Hrsg.): *Die Einheit der Wirklichkeit*. München, 2000, S. 165–183

[Stöckler 2012] STÖCKLER, Manfred: Demokrits Erben. Der Atomismus zwischen Philosophie und Physik. In: ESFELD, Michael (Hrsg.): *Philosophie der Physik*. Berlin, 2012, S. 137–157

[Suppe 1998] SUPPE, Frederic: Scientific Theories. In: CRAIG, Edward (Hrsg.): *Routledge Encyclopedia of Philosophy. Volume 9*. London, 1998, S. 344–355

[Suppe 1977a] SUPPE, Frederick: In Search For Philosophic Understanding of Scientific Theories. Siehe [Suppe, 1977b], S. 1–232

[Suppe 1977b] SUPPE, Frederick (Hrsg.): *The Structure of Scientific Theories*. Urbana, Chicago, London, 1977

[Suppes 1957] SUPPES, Patrick: *Introduction to Logic*. New York, 1957

[Suppes 1960] SUPPES, Patrick: A Comparison of the Meaning and Uses of Models in Mathematics and the Empirical Sciences. In: *Synthese* 12 (1960), Nr. 29, S. 287–301

[Suppes 1967] SUPPES, Patrick: What is a Scientific Theory? In: MORGENBESSER, Sidney (Hrsg.): *Philosophy of Science Today*. New York, 1967, S. 55–67

[Suppes 1974] SUPPES, Patrick: The Axiomatic Method in the Empirical Sciences. In: HENKIN, Leon (Hrsg.): *Proceedings of the Tarski Symposium*. Providence, 1974, S. 465–479

[Suppes 1988a] SUPPES, Patrick: Philosophical Implications of Tarski's Work. In: *Journal of Symbolic Logic* 53 (1988), Nr. 1, S. 80–91

[Suppes 1988b] SUPPES, Patrick: Representation Theory and the Analysis of Structure. In: *Philosophia Naturalis* 25 (1988), S. 254–268

[Suppes 1992] SUPPES, Patrick: Axiomatic Methods in Science. In: *Nature, Cognition and System* 2 (1992), S. 205–232

[Suppes 2002] SUPPES, Patrick: *Representation and Invariance of Scientific Structures*. Stanford, 2002

[Synge 1960] SYNGE, John L.: Classical Dynamics. In: FLÜGGE, S. (Hrsg.): *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960 (Handbuch für Physik (Volume III/1)), S. 1–225

[Szabó 1987] SZABÓ, István: *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*. Dritte Auflage. Basel, Boston, Stuttgart, 1987

[Tapp 2007] TAPP, Christian: *An den Grenzen des Endlichen: erkenntnistheoretische, wissenschaftsphilosophische und logikhistorische Perspektiven auf das Hilbertprogramm*. Dissertationsschrift der LMU München, 2007. – URL `http://edoc.ub.uni-muenchen.de/archive/00006523/01/Tapp_Christian.pdf`. – Zugriffsdatum: 21.03.2010

[Tarski 1930] TARSKI, Alfred: Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften. I. In: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 37 (1930), S. 361–404

[Tarski 1935a] TARSKI, Alfred: Grundzüge des Systemenkalküls, erster Teil. In: GIVANT, Steven R. (Hrsg.) ; MCKENZIE, Ralph N. (Hrsg.): *Alfred Tarski - Collected Papers* Bd. 2. Basel, Boston, Stuttgart, 1986, 1935, S. 27–50

[Tarski 1935b] TARSKI, Alfred: Über den Begriff der logischen Folgerung. In: BERKA, Karel (Hrsg.) ; KREISER, Lothar (Hrsg.): *Logik-Texte*. S. 404 - 413. 3. Auflage Berlin 1983 (hiernach die Seitenangaben). Erstveröffentlichung in: Hermann et Cie (Hrsg.), Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique, Bd. VII (Logique), S. 1 - 11. Paris, 1935

[Tarski 1935c] TARSKI, Alfred: Untersuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe. In: *Erkenntnis* 5 (1935), S. 80–100

[Tarski 1936] TARSKI, Alfred: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. In: BERKA, Karel (Hrsg.) ; KREISER, Lothar (Hrsg.): *Logik-Texte*. S. 445 - 546. 3. Auflage Berlin 1983 (hiernach die Seitenangaben). Deutsche Erstveröffentlichung der aus dem Polnischen übersetzten, erstmals 1933 gedruckten Arbeit in: Studia Philosophica, Bd. 1, S. 261 - 405,, 1936

[Tarski 1944] TARSKI, Alfred: The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics. In: GIVANT, Steven R. (Hrsg.) ; MCKENZIE, Ralph N. (Hrsg.): *Alfred Tarski - Collected Papers* Bd. 2. Basel, Boston, Stuttgart, 1986, 1944, S. 665–699

[Tarski 1959] TARSKI, Alfred: What is Elementary Geometry? In: HENKIN, Leon (Hrsg.) ; TARSKI, Alfred (Hrsg.) ; SUPPES, Patrick (Hrsg.): *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics*. Amsterdam, 1959 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), S. 16–29

[Tarski 1994] TARSKI, Alfred: *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*. 4. Auflage. New York, Oxford, 1994 (Erste Auflage 1941. Vierte Auflage neu herausgegeben von Jan Tarski für die Reihe Oxford Logic Guides, Bd. 24)

[Thomson-Jones 2004] THOMSON-JONES, Martin: Models and the Semantic View. In: *Philosophy of Science* 73 (2004), Nr. 5, S. 524–535

[Toulmin 1953] TOULMIN, Stephen: *The Philosophy of Science*. London, Melbourne, Sydney, 1953 (Seitenangaben beziehen sich auf den Nachdruck von 1967)

[Toulmin 1977] TOULMIN, Stephen: The Structure of Scientific Theories (Postscript). In: [Suppe, 1977b], S. 600–614

[Truesdell und Muncaster 1980] TRUESDELL, C. A. ; MUNCASTER, R. G.: *Fundamentals of Maxwell's Kinetic Theory of Simple Monatomic Gas - Treated as a Branch of Rational Mechanics*. New York, London, Toronto, 1980

[Truesdell und Noll 2004] TRUESDELL, C. A. ; NOLL, W. ; ANTMAN, Stuart (Hrsg.): *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Dritte Auflage. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 2004 (Erstveröffentlichung im Handbuch für Physik, Bd. III/3, 1965)

[Truesdell und Toupin 1960] TRUESDELL, C. A. ; TOUPIN, R. A.: The Classical Field Theories. In: FLÜGGE, S. (Hrsg.): *Principles of Classical Mechanics and Field Theory*. Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960 (Handbuch für Physik, Volume III/1), S. 226–793

[Truesdell 1952] TRUESDELL, Clifford A.: A Program of Physical Research in Classical Mechanics. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* (1952), Nr. 3, S. 79–95

[Truesdell 1958] TRUESDELL, Clifford A.: Recent Advances in Rational Mechanics. In: *Science* 127 (1958), Nr. 3301, S. 729–739

[Truesdell 1964] TRUESDELL, Clifford A.: Die Entwicklung des Drallsatzes. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* (1964), Nr. 44, S. 149–158

[Truesdell 1966] TRUESDELL, Clifford A.: Rational Mechanics Of Materials. In: *Six Lectures in Natural Philosophy*. New York, Berlin, Heidelberg, 1966, S. 1–22

[Truesdell 1968] TRUESDELL, Clifford A.: Whence the Law of Moment of Momentum? In: *Essays in the History of Mechanics*. New York, Berlin, Heidelberg, 1968, S. 239–271

[Truesdell 1976a] TRUESDELL, Clifford A.: History of Classical Mechanics. Part I, to 1800. In: *Naturwissenschaften* (1976), Nr. 63, S. 53–62

[Truesdell 1976b] TRUESDELL, Clifford A.: History of Classical Mechanics. Part II, the 19th and 20th Centuries. In: *Naturwissenschaften* (1976), Nr. 63, S. 119–130

[Truesdell 1984a] TRUESDELL, Clifford A.: Conceptual Analysis (1978). In: *An Idiot's Fugitive Essays On Science*. New York, Berlin, Heidelberg, 1984, S. 133–138

[Truesdell 1984b] TRUESDELL, Clifford A.: Is There a Philosophy of Science? (1973). In: *An*

Idiot's Fugitive Essays On Science. New York, Berlin, Heidelberg, 1984, S. 471–502

[Truesdell 1984c] TRUESDELL, Clifford A.: Statistical Mechanics and Continuum Mechanics (1973, 1979). In: *An Idiot's Fugitive Essays On Science*. New York, Berlin, Heidelberg, 1984, S. 72–79

[Truesdell 1984d] TRUESDELL, Clifford A.: Suppesian Stews (1980/81). In: *An Idiot's Fugitive Essays On Science*. New York, Berlin, Heidelberg, 1984, S. 503–579

[Truesdell 1991] TRUESDELL, Clifford A.: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*. Zweite Auflage. Boston, San Diego, New York, 1991

[Truesdell 1992] TRUESDELL, Clifford A.: Cauchy and the modern mechanics of continua. In: *Revue d'histoire des sciences* 45 (1992), Nr. 1, S. 5–24

[Uffink 2007] UFFINK, Jos: Compendium of the Foundations of Classical Statistical Physics. In: BUTTERFIELD, J. (Hrsg.) ; EARMAN, J. (Hrsg.): *Philosophy of Physics, Part A*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, 2007 (Handbook of the Philosophy of Science), S. 923 – 1074

[Volkmann 1900] VOLKMANN, Paul: *Einführung in das Studium der Theoretischen Physik*. Leipzig, 1900

[Voss 1901] VOSS, Aurel: Die Prinzipien der rationellen Mechanik. In: KLEIN, Felix (Hrsg.) ; MÜLLER, Conrad (Hrsg.): *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften - mit Einschluss ihrer Anwendungen. Erster Teilband* Bd. 4: Mechanik. Leipzig, 1901, S. 1–120

[Voss 1908] VOSS, Aurel: *Über das Wesen der Mathematik*. Leipzig, Berlin, 1908

[Weaver 1994] WEAVER, George: Model Theory. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Hrsg.): *Companion Encyclopedia of the Mathematical Sciences. Volume 1*. Baltimore, London, 1994, S. 670–679

[Whitehead und Russell 1910] WHITEHEAD, Alfred N. ; RUSSELL, Bertrand: *Principia Mathematica. Volume I*. Cambridge, 1910

[Wigner 1967] WIGNER, Eugene: Symmetries and Conservation Laws. In: *Symmetries and Reflections. Scientific Papers of Eugene P. Wigner*. Bloomington, London, 1967, S. 14–27

[Wilder 1967] WILDER, Raymond L.: The Role of the Axiomatic Method. In: *The American Mathematical Monthly* 74 (1967), Nr. 2, S. 115–127

[Wilholt 2002] WILHOLT, Torsten: Ludwig Boltzmann's Mathematical Argument for Atomism. In: HEIDELBERGER, M. (Hrsg.) ; STADLER, F. (Hrsg.): *History of Philosophy of Science - New Trends and Perspectives*. Dordrecht, 2002 (Vienna Circle Institute Yearbook 9/2001), S. 199–211

[Wilson 1994] WILSON, Curtis: The three-body problem. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Hrsg.): *Companion Encyclopedia of the Mathematical Sciences. Volume 2*. Baltimore, London, 1994, S. 1054 – 1062

[Wilson 1998] WILSON, Mark: Classical Mechanics. In: CRAIG, Edward (Hrsg.): *Routledge Encyclopedia of Philosophy. Volume 7*. London, 1998, S. 251–259

[Wilson 2006] WILSON, Mark: A Funny Thing Happened on the Way to the Formalism (Preprint). In: *Philsci-Archive: Archive for Preprints in Philosophy of Science* (2006). – URL `http://philsci-archive.pitt.edu/id/eprint/2745`. – Zugriffsdatum: 05.04.2010

[Wilson 2009] WILSON, Mark: Determinism and the Mystery of the Missing Physics. In: *British Journal for the Philosophy of Science* 60 (2009), S. 173–193

[Wilson 2013] WILSON, Mark: What Is "Classical Mechanics" Anyway? In: BATTERMAN, Robert (Hrsg.): *The Oxford Handbook of Philosophy of Physics*. Oxford, New York, Auckland, 2013, S. 43–106

[Woleński 2002] WOLEŃSKI, Jan: Metalogical Properties, Being Logical and Being Formal. In: *Logic and Logical Philosophy* 10 (2002), S. 211–221

[Wuensch 2012] WUENSCH, Daniela: David Hilbert zum 150. Geburtstag. Die Vereinheitlichung der Naturkräfte. In: *Physik in unserer Zeit* 43 (2012), Nr. 2, S. 91–95

[Xambó 2008] XAMBÓ, Sebastià: Euler and the Dynamics of Rigid Bodies. In: *Quaderns D'Històra de L'Enginyeria* 9 (2008), S. 279–303

[Ziegler und Loos 2011] ZIEGLER, Günter M. ; LOOS, Andreas: David Hilbert: der Einstein der Mathematik. In: *Die Zeit vom 12.01.2011* (2011). – URL `http://www.zeit.de/2012/03/David-Hilbert`. – Zugriffsdatum: 01.03.2012

Sachregister

Bei einigen Einträgen beschränken sich die Seitenangaben nur auf die *Definition* des Begriffs, auf eine *Explikation* oder auf die jeweils behandelten *Grundbegriffe* zu dem Eintrag. Das ist dann in Klammern oder als Untereintrag gekennzeichnet.

Ableitung (*Definition*), 273
Anschauung
- als Erkenntnisquelle, *siehe* Intuition
-sverlust, 122 f.
Gegensatz der -en, 40, 82, 85 f., 91, 117, 129 Anm., 182 ff., 192 ff., 201, 224
Kontinuums-, 83, 115, 128, 144, 154, 160 ff.
Punkt-, 160 ff., 169, 183 ff.
reine -, 75, 150
Anwendungsbezogene Sichtweise, 21, 198, 204 ff., 212 ff.
Apriorismus, 11, 44 Anm., 145 f., 150
Arbeit (phys.), 39, 118 f., 169 ff., 194 Anm., 241, 244
Atomismus, 26 Anm., 127 ff.
Atomphysik, 125, 128, 161, 191, 216
Aussage
-funktion (*Explikation*), 271, 282 f.
-nlogik, *siehe* Logik
Definition, 269 f.
synthetische - a priori, *siehe* Urteil
Axiom
- im formalen Sinn, *siehe* Definition (implizite)
- im materiellen Sinn, 12 f.
Definition, 14 f.
Axiomatische Methode, *siehe* Methode
Axiomatische Sichtweise, 17, 23, 28 f., 33, 220
Axiomensystem (*Explikation*), 28, 34 ff., 269

Befreiungsprinzip, 119, 143, 147, 170 Anm.
Bildtheorie (nach Hertz), 13
Boltzmannaxiom, 87, 166 ff., 181, 183, 188 f., 243 f.
Brückengesetz, III, 2, 38
Zwischengesetz, 80 f.

D'Alembertsche Prinzip, 104, 115 ff., 155 f., 208, 265
Darstellung
formale -, 3, 20, 25, 42, 50 ff., 267 ff.
- in der Mechanik, II, 9 f., 19 f., 42, 60, 81 ff., 85, 113, 118, 123, 129 f., 132 Anm., 134, 138, 149, 175, 181, 201 f., 206 f., 213 ff., 243
informelle -, 19, 41, 51 ff., 76, 209 ff., 222, 267
- in der Mechanik, II, 3, 7, 9, 42, 52, 60, 81 ff., 85, 90, 105, 137, 147 f., 152, 156 ff., 198, 203, 210, 233 f., 251, 281 ff.
mengentheoretische -, 38 Anm., 59, 220 ff., 271 Anm., 277 f., 282
- in der Mechanik, 224 ff., 257 ff.
Deduktion, *siehe* Ableitung
Definition
explizite -, 31, 37 Anm., 39 f., 55, 260, 285
- der Energie, 170
- der internen Kraft, 230, 258 ff.
- einer Kraft, 100, 138, 158, 181
implizite -, 17, 29 ff., 37, 43, 46, 54, 58, 61 Anm., 64 Anm.,

77, 81 f., 85, 89 f., 110, 123, 146, 202, 210, 222, 231 f., 260, 271, 283, 285
- der Energie, 170
- der Kontaktkraft, 165
- der Kraft (Schema), 100, 138, 148 ff., 156, 171, 183, 208, 214
- der Systemmechaniken, 172
- der internen Kraft, 114, 183, 230, 258 f.
- des starren Körpers, 174
- von geometrischen Relationen, 30
- von inertialen Bezugssystemen, 241

Didaktik der Mechanik, 63 ff., 100, 122, 163, 186 f., 192, 206 f., 216 f., 225
Drehimpuls, *siehe* Impuls (Dreh-)
Drehmoment, *siehe* Moment
Dynamik (*Explikation*), 100, 110

Elastizität
    -skoeffizienten, 173
    -stheorie, 65, 89, 94, 105, 124, 126, 133, 166, 171, 185, 187, 193, 239 f., 255
Energie, 40, 169 ff., 248
    -erhaltung, 48, 114, 169 f., 178, 183, 266
Erfüllbarkeitsrelation, 274 f.
Erklärungsmodell
    - der Vereinheitlichung, *siehe* Vereinheitlichung
    Explikation, 76 ff.
    deduktiv-nomologisches -, 21, 78 f., 211 Anm.
Erstarrungsprinzip, 142 ff., 147
Euklidianisches Ideal, 12
Euklidische Geometrie, *siehe* Geometrie
Eulersche Gesetz, *siehe* Momentensatz
Extension/Intension (*Definition*), 44 Anm., 233

Feldkonzeption, 93, 126 Anm., 193
Folgerungsbegriff (logische), 277 ff.
Formalisierung, *siehe* Darstellung (formale -)
Funktionalisierung (bei Gesetzen und Aussagen), 18, 24 f., 57, 123 Anm., 271, 282 f.

Galilei-Invarianz, 228
Gegenwirkungsprinzip, 77 f., 87, 111 ff., 117 f., 139, 147, 161, 164 f., 168 f., 184, 229 f., 245, 254, 257 ff., 284, 287 f.
Geometrie
    (Euklidische) -, 5, 15, 17, 19, 27, 30 f., 36, 41 f., 46, 54, 75, 91, 227, 241, 248, 272
    Differential-, 93, 105
    nichteuklidische -, 11 Anm., 13 Anm.
    symplektische (Phasenraum-) -, 247 f.
Gleichgewicht
    dynamisches -, *siehe* D'Alembertsche Prinzip
    Kräfte-, *siehe* Kraft
    Momenten-, *siehe* Moment (*Definition*)
    statisches -, 97 f., 104, 116, 166
Gleitreibung, *siehe* Reibungseffekte
Gravitationsgesetz, 79, 113, 152, 157, 214
Grenzübergang, 2, 17, 22, 38, 82 f., 86 f., 89, 94, 105 Anm., 120, 124, 126, 138, 160, 162 f., 182, 193, 243 f., 249, 252 ff.
    pragmatischer -, 86, 115, 126, 134 f., 184 ff.
Grundsatz, *siehe* Axiom

Hamiltonmechanik, *siehe* Mechanik
Hilberts sechstes Problem, 2, 120, 250 f.
    mechanistisch, 126
    methodologisch, 19, 26 ff.
    physikalisch, 91 ff.
Hypothese, 13, 16, 20, 32, 42, 47, 55, 58, 68 Anm., 70, 133, 172, 209 f., 214, 243, 252
    Unabhängigkeits-, 179

Idealisierung, II, 21, 43, 76, 90, 95, 111, 121, 145, 151, 156
- bei kontinuierlichen Systemen, 93 Anm., 94, 105, 166, 171, 178, 188 f., 240
- zum starren Körper, 99, 105
- zur Punktmasse, 49, 102, 153, 161 f., 192, 226, 246

Impuls
Dreh-, 101, 107 ff., 114, 168
linearer -, 49, 101 f., 107, 177 f., 248, 251

Inference-Ticket, 217
Instrumentalismus, 14, 39, 45, 71 ff., 82, 134
Intension/Extension (*Definition*), 233
Interpolation, 81
Interpretation (logische), 277 f.
Intuition, 11 Anm., 21 Anm., 48, 71 f., 74 f., 89, 130, 159, 194, 235

Kinematik
Definition, 8 Anm.
Grundbegriffe, 96

Kinetik (*Definition*), 8 Anm., 109
Konsistenz (logische), *siehe* Widerspruchsfreiheit
Konstante (logische/nicht-logische), 270, 279 Anm.
Konstitutive Gleichung (Relation), 9, 16, 17, 81, 105, 131, 240 ff.
Konstruktion, 7, 9, 12, 21 Anm., 40, 75, 90, 148, 152, 155
Kontinuitätshypothese (-prinzip), 87 ff., 93, 130, 144, 160 f., 164, 168, 172 f., 179, 186, 263
Kontinuumsmechanik, *siehe* Mechanik (Kontinuums-)
Konvention (*Explikation*), 13
Konventionalismus, 13 f., 19, 24 f., 40, 47 f., 68, 90, 112, 119 Anm., 122, 142, 146, 150
Kräftegleichgewicht, 8, 97 f., 116

Kraft
-begriff, 99 f.
-gesetz, *siehe* Newtonsche Grundgesetz
äussere (externe) -, *siehe* Fernkraft
eingeprägte -, 9, 48 Anm., 116 ff., 140 ff., 155, 157, 210, 247 Anm., 266
Fern-, 101 f., 112, 132 f., 139, 165 Anm., 190, 210, 229
Flächen-, 103, 116, 144, 164, 172, 185, 189 f., 210, 245
Gewichts-, 8, 97, 153, 214
innere (interne) -, 113 f., 116, 155, 183, 190, 229 f., 242 ff., 258 ff.
kinetische -, 8, 153, 156
Kontakt-, 102, 104, 112, 115, 131, 139, 163 f., 184, 190, 241 f.
Reaktions-, 116 f., 120, 142 f., 146, 155, 157, 173, 210, 266
Schwer-, *siehe* Gewichtskraft
statische -, 8, 99, 153
Volumen-, 103, 164

Lagrange-Prinzip, 79, 118 f., 170, 247
Lagrangemechanik, *siehe* Mechanik

Logik
Explikation, 57, 61 Anm.
Aussagen-, 18, 51, 57 f., 211, 217, 270
Prädikaten-, 19, 45, 51 Anm., 57, 210 Anm., 218, 219 ff., 231, 267 ff.

Logischer Empirismus, 58, 91, 201 f., 212, 218, 231
Logizismus, 18, 52, 58, 132, 158 Anm., 212, 230
Logizität, III, 14, 18 f., 57, 60 ff., 83, 85, 123, 176, 198, 267 ff.
formaler Standpunkt der -, II, 16, 58 ff., 269 ff.
informeller Standpunkt der -, 19, 57 ff., 173, 179, 186, 267
modelltheoretischer Standpunkt der -, 25, 41, 59 ff., 83, 198, 220 ff., 268, 271 Anm., 273 ff.

Masse
-nkontinuum, *siehe* Mechanik (Kontinuums-)
-nschwerpunkt (*Definition*), 97 Anm., 108

Punkt-, *siehe* Mechanik (Punkt-)
schwere -, 124, 153
träge -, 7 f., 31, 93, 100 ff., 107 ff., 116, 153 f., 174, 180, 204, 245, 249
Material frame-indifference (principle), *siehe* Objektivitätsprinzip
Mathematisierung, 23, 44, 59, 75, 129, 132
- der Klassischen Mechanik, 93 ff., 159
- des Grenzübergangs, 130 Anm., 134, 173, 243
- der Physik, 94, 126
Mechanik
- der starren Körper (*Grundbegriffe*), 105 f.
analytische - (*Grundbegriffe*), 118 ff.
disjunktiver Aufbau der -, 22, 86, 138, 208 ff.
Hamilton-, 48, 121, 247 ff.
Himmels-, 48, 101, 112, 152, 161
Hydro- (Fluid-), 89, 173, 239
Klassische - (*Definition*), 5, 20, 24, 94, 163 Anm.
Kontinuums- (*Grundbegriffe*), 102 f.
Lagrange-, 24, 36, 48, 69, 118, 121, 123 Anm., 248 f.
Materialspezifische -, 89, 105, 162, 172, 239 ff.
Newtonsche -, I, 69, 114, 214, 259, 285
Punkt- (*Grundbegriffe*), 101 f.
Quanten-, 17, 64, 85, 111, 128, 201, 246, 249, 254
rationale - (*Explikation*), 4, 6, 16, 44, 89, 95 f., 110, 192, 227
Relativistische -, 17, 64, 85, 111, 125, 128, 182, 246
System- (*Definition*), 82 Anm., 86, 110 f.
Technische -, 2, 8, 89, 98, 136, 161, 166, 168, 185, 187, 200
Mechanistik, 92, 124 ff., 162, 262
Metamathematik, 24, 45 f., 56, 61 Anm., 159, 199, 203, 219, 222, 224 ff., 230 ff., 237, 276, 280 Anm., 283
- in den Grundlagen der Mechanik, 42 ff., 48, 58, 139, 175 ff., 209, 226 f.
finitistische, 53
Kriterien der - (*Explikation*), 40 ff., 276
Metaphysik, 11 f., 34 Anm., 57 Anm., 100, 151, 201, 262
Methode
analytische -, 117, 121, 123, 140 ff., 170, 174
axiomatische - (*Explikation*), 17 f., 23 ff., 28 ff.
genetische -, 76 Anm., 158 Anm.
regressive -, 45 Anm.
synthetische -, 10, 76, 90, 117 f., 121 ff., 140 f., 156 f., 208
Modell
anschauliches -, 10, 49, 55, 70, 76, 90, 140, 151
mengentheoretisches (logisches) -, 18, 46, 54, 59, 62, 198, 206 f., 221, 227 f., 231 f., 258 ff., 277 ff.
Modelltheoretische Sichtweise, *siehe* Semantische Sichtweise
Modelltheorie (*Explikation*), 40 Anm., 41, 54, 59, 229, 280 Anm.
Moment
-engleichgewicht, 98, 105, 115, 192, 287
-ensatz, 77, 101, 104, 107, 114, 166, 167 ff., 183 ff., 245, 284 f.
Definition, 98

Newtons 1. Axiom, *siehe* Trägheitsprinzip
Newtons 2. Axiom, *siehe* Newtonsche Grundgesetz
Newtons 3. Axiom, *siehe* Gegenwirkungsprinzip
Newtonsche Grundgesetz, 7, 77, 86, 100 f., 138, 143, 148 ff., 164 f., 171, 181 ff., 205, 208, 213 f., 241, 257, 262, 285

Objekt-/Metasprache, 57, 61, 159, 199, 207, 219, 231, 267 ff.
Objektivitätsprinzip, 241 f.
Ontologie, 40, 78 Anm., 205 Anm.

Pragmatische Sichtweise
- auf den Grenzübergang, *siehe* Grenzübergang
- auf die Grundlagen der Mechanik, 6, 59, 63, 89, 126 ff., 191 f., 194 f., 206, 216 ff., 225 f.
Prinzip, *siehe* Axiom
- der Klassifikation, 145, 151
- des zureichenden Grundes, 145 f.
Protophysik, 143, 145 ff., 243
Punktmechanik, *siehe* Mechanik

Quantenmechanik, *siehe* Mechanik

Reaktionsprinzip, *siehe* Gegenwirkungsprinzip
Received View, 58 f., 201 f., 212, 218, 221, 231, 282
Reduktion (*Explikation*), 37 f.
Reibungseffekte, 48, 49, 139, 170, 175, 177 ff., 199 Anm.
Rekonstruktion
logische - (*Explikation*), 10, 29 f.
Relativistische Mechanik, *siehe* Mechanik
Repräsentation, *siehe* Darstellung
-sform, 9 ff., 38, 52, 56, 83
-sproblem, 7 ff., 215, 218
-stheorem, 39, 81

Schema (Gesetzesschema), *siehe* Aussagefunktion
Schlussregeln (logische), 272, 284
Schnittprinzip, 145 Anm.
Schwerpunktsatz, 97, 140, 162, 165
Semantik (*Explikation*), 268 f.
Semantische Sichtweise (Semantic View), 11 Anm., 21 Anm., 54, 59 ff., 132, 158, 198 f., 220 ff., 257, 264 Anm., 268, 271 Anm., 280 f., 283
Spannung
-stensor, 103 f., 138, 162, 168, 171, 181, 190 f., 240, 245, 253
innere -, 39, 160, 167 f., 172, 245 Anm.
Scher-, 103 f., 166 f., 172, 188 f.
Schub-, 103, 167
Statik, 8 Anm., 9, 81 Anm., 104, 116 ff., 145, 245
Grundbegriffe, 97 f.
Elastostatik, 188, 192
Struktur (logische), *siehe* Theorie
Strukturalismus, 55 Anm., 91, 215, 223
Syllogistik, 18 f., 51, 284
Syntaktische Deduktion, 51, 58
Syntaktische Sichtweise, *siehe* Received View
Syntax, 11, 34 Anm., 57 f., 207, 229, 231 Anm., 268 f.
Systemmechanik, *siehe* Mechanik

Theorie
- der Mechanik (*Explikation*), 4 ff.
-npluralismus, 13, 47, 55, 128
Definition (modelltheor.), 280 f.
disjunktiver Aufbau einer -, 79, 210 ff.
Hintergrund-, 31, 47, 143 f.
Logische Struktur der - PM_{MSS}, 226 f., 257
Logische Struktur einer - (*Explikation*), 17 f., 31 f., 52, 59, 210 Anm., 278 f.
Trägheitsmoment, 49, 81 Anm., 107 f., 153, 174, 187, 193
Trägheitsprinzip, 37, 69 Anm., 96 f., 144, 180 f., 183, 228 Anm., 245, 263

Unabhängigkeit (logische)
- in den Grundlagen der Mechanik, 153, 166, 179 ff., 214 Anm., 225, 227, 230 Anm., 241, 245
Definition, 40
Undurchdringlichkeitsprinzip, 144, 178, 263

Urteil (synthetisches - a priori), 12, 148, 155 f., 202, 214 f., 233, 243

Vereinheitlichung, 15 f., 33, 71, 76 ff., 82 f., 86, 110, 162, 166, 181, 206, 250
Vollständigkeit
- in den Grundlagen der Mechanik, 21, 42, 111 f., 133, 209
-saxiom (Hilbert), 41, 46
Begriffs-, 32, 36 Anm., 58, 81, 227
logische (deduktive) -, 32, 35, 42, 46, 211, 227, 276 f.
primitive -, 32 Anm.

Wahrheit
-sbedingung, 16, 45, 47
-sbegriff (formal), 18, 61, 207 Anm., 233 Anm., 273 ff.
-sfunktionale Semantik, 42, 57 ff., 61, 273 ff.
Widerspruchsfreiheit (logische)
- in den Grundlagen der Mechanik, 44, 71, 139, 176 ff., 225
Definition, 40, 45 f.
relative/absolute -, 40 Anm., 54
Wissenschaftssprache, 58 f., 202, 211 Anm., 218, 273, 282

Zahlenkörper (reelle), 31, 36, 46, 102
Zwischengesetz, *siehe* Brückengesetz

Die Mathematisierung der Natur ist heute in keinem anderen Gebiet der Physik so fortgeschritten und zugleich durch eine lange Tradition so gefestigt wie in der Klassischen Mechanik. Dabei verbergen die mathematische Exaktheit und Sicherheit der mechanischen Grundgesetze - der so genannten Axiome - philosophische Schwierigkeiten, die an der Einheitlichkeit und Abgeschlossenheit der Klassischen Mechanik zweifeln lassen.

Dieses Buch orientiert sich an einer entsprechenden Problemstellung des Göttinger Mathematikers David Hilbert (1862-1943) und diskutiert erstmals den umfassenden Lösungsansatz des Mechanik-Experten Georg Hamel (1877-1954). Diese Untersuchung führt zu der Feststellung, dass die Frage nach jeder Einheitlichkeit und Genauigkeit von Grundgesetzen mit klar bezeichneten Grenzen der Formalisierung von naturwissenschaftlichen Theorien zusammenfällt.

Das Buch verbindet als wissenschaftstheoretische Studie Elemente der Philosophie, Physik und Logik.

Logos Verlag Berlin

ISBN 978-3-8325-4292-4