

Génie Atomique

---

Cheikh M'Backé Diop  
Cédric Jouanne

# Éléments de physique nucléaire



*Imprimé en France*

EDP Sciences – ISBN(print): 978-2-7598-3150-0 – ISBN(ebook): 978-2-7598-3151-7  
DOI: 10.1051/978-2-7598-3150-0

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1<sup>er</sup> de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© EDP Sciences, 2024



# Table des matières

<b>Avant-propos .....</b>	<b>15</b>
<b>Descriptif général du cours .....</b>	<b>19</b>
<b>1 La physique nucléaire dans le contexte de la physique des réacteurs nucléaires.....</b>	<b>21</b>
1. Les échelles d'énergie, de distance et de temps .....	23
2. Grandeurs physiques d'intérêt, équations maîtresses, phénomènes physiques et données nucléaires .....	25
2.1. Le flux de particules et ses grandeurs dérivées.....	25
2.2. La concentration des nucléides et ses grandeurs dérivées.....	26
<b>2 Quelques faits expérimentaux .....</b>	<b>35</b>
1. Les expériences de diffusion .....	37
2. La découverte du neutron.....	43
3. La radioactivité.....	44
<b>3 Le noyau atomique – définitions et concepts fondamentaux .....</b>	<b>51</b>
1. Les constituants du noyau de l'atome.....	55
1.1. Nucléides naturels stables.....	55
1.2. Nucléides naturels instables.....	56
1.3. Éléments et nucléides artificiels instables.....	57
1.4. Les différents types de nucléides .....	57
1.5. Abondance isotopique .....	59
1.6. Classification des nucléides en physique des réacteurs nucléaires.....	63
2. Dimension, charge et masse du noyau atomique.....	66
2.1. Dimension et charge du noyau atomique.....	66
2.2. L'unité de masse atomique unifiée, la masse atomique, la masse nucléaire.....	69
2.3. Calcul du nombre de nucléides d'un type donné par unité de volume....	76
2.4. Calcul du nombre de nucléides d'un type donné par unité de volume d'un mélange .....	76

3. Défaut de masse, excès de masse, énergie de liaison – Stabilité du noyau atomique.....	78
3.1. Défaut de masse.....	79
3.2. Excès de masse.....	80
3.3. Énergie de liaison .....	80
3.4. Expression de l'énergie de liaison en fonction de l'excès de masse .....	83
3.5. Expression de l'énergie de séparation d'un neutron du reste du noyau atomique .....	85
3.6. Importance de la connaissance de l'énergie de liaison des noyaux atomiques dans le domaine de la physique des réacteurs.....	88
4. L'interaction nucléaire forte .....	88
4.1. Interaction forte et force nucléaire.....	90
4.2. Quelques caractéristiques de l'interaction nucléaire forte .....	92
Annexe I : détermination des « constantes de couplage » des interactions fondamentales.....	95
<b>4 La structure du noyau atomique .....</b>	<b>99</b>
1. Le modèle de la goutte liquide .....	102
1.1. La formule semi-empirique de la masse d'un nucléide.....	103
1.2. Série isobarique .....	107
1.3. Détermination des coefficients de la formule de Bethe-Weizsäcker.....	111
1.4. Énergie de séparation d'un nucléon et surstabilité du noyau atomique.....	112
2. Le modèle en couches .....	113
3. Le modèle du gaz de Fermi .....	129
4. Moments nucléaires électriques et magnétiques.....	132
Annexe I : raffinements des modèles nucléaires .....	133
1. Le modèle de la goutte liquide .....	133
2. Le modèle en couches .....	134
3. Approches de champ moyen.....	138
4. Effets collectifs et appariements.....	144
5. Déformation du noyau atomique.....	145
Annexe II : quelques rappels de mécanique quantique .....	151
1. Comportement corpusculaire et ondulatoire des particules .....	151

2. Dualité onde-corpuscule.....	152
3. Quantification des grandeurs physiques.....	155
4. Principe de correspondance.....	155
5. L'équation de Schrödinger.....	155
6. Description quantique d'une particule par un paquet d'ondes – Relation d'incertitude d'Heisenberg.....	156
7. Résolution de l'équation de Schrödinger dans le cas d'un potentiel central – Mise en évidence des nombres quantiques.....	159
8. Invariance, symétries et lois de conservation – Notion de parité de la fonction d'onde .....	167
Annexe III : détermination de l'énergie potentielle coulombienne dans le noyau atomique .....	170
<b>5 Radioactivité et stabilité du noyau atomique.....</b>	<b>171</b>
1. Grandeurs physiques caractéristiques de la radioactivité – Loi de décroissance radioactive .....	175
1.1. Constante de désintégration radioactive – Activité d'un radionucléide .....	175
1.2. Période.....	177
1.3. Vie moyenne.....	177
1.4. Rapport de branchement.....	178
2. La radioactivité alpha ( $\alpha$ ) .....	180
2.1. Mécanisme d'émission de particules $\alpha$ .....	180
2.2. La loi de Geiger-Nuttall.....	184
2.3. La formule de Viola-Seaborg.....	185
2.4. Aspects énergétiques de l'émission $\alpha$ .....	189
2.5. Limite de stabilité pour l'émission $\alpha$ .....	193
3. La fission spontanée.....	195
4. La radioactivité bêta ( $\beta$ ) .....	198
4.1. Cas de la désintégration « bêta moins » ( $\beta^-$ ).....	200
4.2. Cas de la désintégration « bêta plus » ( $\beta^+$ ).....	202
4.3. Cas particuliers de désintégration bêta .....	205
4.4. Types de transitions bêta.....	207
4.5. Spectre d'émission bêta .....	210

4.6. Constante de désintégration $\beta$ .....	215
5. La capture électronique .....	219
6. L'émission gamma ( $\gamma$ ).....	223
6.1. Types de transition gamma .....	223
6.2. Durées de vie des états excités.....	225
6.3. Transitions isomériques .....	232
7. La conversion interne.....	234
8. Émission de neutrons .....	237
9. Paraboles de masse, stabilité du noyau atomique .....	239
10. Radioactivité : Problème à deux corps et notion d'équilibre radioactif.....	249
Annexe I : la fonction de Fermi.....	258
Annexe II : résolution des équations générales de Bateman .....	259
Annexe III : résolution des équations de Bateman généralisées.....	263
Annexe IV : résolution des équations générales de Bateman dans une configuration hétérogène de deux milieux physiques radioactifs adjacents en interaction.....	268
<b>6 Les réactions nucléaires.....</b>	<b>273</b>
1. Réactions nucléaires et échelle des temps réactionnels .....	275
2. Les réactions nucléaires induites par les neutrons .....	277
3. Autres types de réactions nucléaires.....	282
3.1. Les réactions de spallation.....	282
3.2. Les réactions directes et réactions profondément inélastiques.....	288
3.3. Les réactions de fusion thermonucléaire.....	289
3.4. Les réactions photonucléaires .....	290
3.5. Les réactions nucléaires induites par des particules chargées.....	290
Annexe I : réactions nucléaires d'intérêt induites par des neutrons dans des structures d'installations nucléaires.....	291
<b>7 Énergétique des réactions nucléaires.....</b>	<b>293</b>
1. Énergie disponible.....	295
2. Relations cinématiques générales .....	297
2.1. Calcul de l'énergie des particules émises après collision dans le référentiel du laboratoire .....	299

2.2. Référentiels du laboratoire et du centre de masse.....	310
3. L'énergie de seuil .....	313
3.1. L'énergie de seuil dans le référentiel du centre de masse .....	313
3.2. L'énergie de seuil dans le référentiel du laboratoire .....	313
3.3. L'énergie de seuil effective .....	315
4. Les relations cinématiques dans le cas de la diffusion élastique et inélastique discrète des neutrons .....	318
Annexe I : rappel sur la définition de l'angle solide .....	326
Annexe II : cinématique d'une réaction à deux corps avec production d'une particule légère et d'une particule lourde.....	328
1. Énergies cinétiques des particules produites dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle de déviation dans le référentiel du centre de masse .....	329
2. Énergies cinétiques des particules produites dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle de déviation dans le référentiel du laboratoire .....	334
3. Relation entre les cosinus des angles de déviation dans les référentiels du laboratoire et du centre de masse .....	339
4. Détermination de l'énergie de seuil dans le référentiel du laboratoire à partir de l'énergie de seuil définie dans le référentiel du centre de masse.....	343
4.1. Hypothèse non relativiste .....	343
4.2. Hypothèse relativiste .....	344
Annexe III : calcul de l'énergie déposée dans la matière lors d'une réaction nucléaire .....	346
1. Cas des diffusions élastique et inélastique.....	346
2. Cas de la production de photons .....	348
3. Cas des réactions productrices de particules chargées .....	350
4. Cas des réactions productrices de neutrons ( $n,2n$ ), ( $n,xn$ ) .....	351
<b>8 Les sections efficaces des réactions nucléaires induites par les neutrons.....</b>	<b>355</b>
1. Notion de section efficace microscopique de diffusion – Approche géométrique et corpusculaire.....	359
1.1. Section efficace scalaire.....	359
1.2. Section efficace de diffusion simplement différentielle en angle dans le référentiel du centre de masse .....	361

1.3. Section efficace de diffusion doublement différentielle en angle dans le référentiel du centre de masse .....	363
1.4. Section efficace de diffusion différentielle en angle dans le référentiel du laboratoire .....	367
1.5. Section efficace différentielle en énergie – Loi de transfert énergétique dans le référentiel du laboratoire .....	371
1.6. La fraction d'énergie perdue par choc .....	372
1.7. Introduction de la variable « léthargie » .....	373
2. Approche ondulatoire .....	376
2.1. Forme de la fonction d'onde diffusée .....	382
2.2. Expression de la section efficace de diffusion élastique différentielle en angle .....	383
2.3. Expression de la section efficace de diffusion scalaire .....	388
2.4. Longueur de diffusion .....	397
2.5. Relation entre moment angulaire orbital et paramètre d'impact : approche semi-classique .....	400
2.6. Synthèse des différentes sections efficaces différentielles .....	403
2.7. Sections efficaces partielles et sections efficaces totales microscopiques d'interaction des neutrons .....	406
3. Sections efficaces macroscopiques .....	415
3.1. Définitions .....	415
3.2. Interprétation probabiliste de la section efficace macroscopique – Libres parcours moyens .....	420
4. Typologie des sections efficaces .....	422
5. Le modèle du noyau composé .....	428
6. Section efficace d'une résonance isolée .....	443
6.1. Expression de la section efficace de formation du noyau composé .....	443
6.2. Compléments sur les paramètres de résonance .....	457
6.2.1. Moment angulaire total, parité et facteur statistique .....	457
6.2.2. Notion de largeur réduite .....	458
7. Cas des résonances du domaine d'énergie « non résolu » .....	464
8. Fonction densité ou fonction force ( <i>strength function</i> ) .....	467
9. Espacement moyen des résonances et loi de distribution de l'espacement en énergie entre résonances .....	472

9.1. La densité des niveaux d'énergie du noyau composé .....	472
9.2. La loi de Wigner d'espacement des niveaux d'énergie.....	476
10. La distribution de probabilité des « largeurs neutroniques réduites » .....	479
11. Le formalisme de la « matrice R » et les formalismes dérivés .....	488
12. Résonance négative.....	490
13. Réactions nucléaires inverses et relation de réciprocité.....	493
14. Domaine du continuum.....	497
14.1. Le modèle optique .....	497
14.2. Distributions angulaires et énergétiques des particules émises.....	501
14.2.1. Le modèle statistique de Weisskopf .....	501
14.2.2. Le modèle de Hauser-Feshbach de la diffusion inélastique des neutrons .....	504
14.2.3. Les modèles de pré-équilibre .....	504
15. Expression générale de la production de particules secondaires .....	510
15.1. Section efficace de production gamma .....	511
15.2. Section efficace de KERMA.....	513
15.3. Section efficace de dommages.....	514
Annexe I : produit scalaire de deux vecteurs unitaires en coordonnées sphériques .....	519
Annexe II : détermination des énergies moyennes après collision du neutron diffusé et du noyau de recul.....	520
1. Cas de la diffusion élastique.....	520
2. Cas de la diffusion inélastique discrète .....	521
3. Cas de la diffusion inélastique continue.....	522
4. Détermination de la section efficace microscopique d'énergie moyenne totale transférée lors d'une collision tous processus considérés d'interaction du neutron avec un noyau atomique.....	527
Annexe III : détermination des énergies moyennes après collision du neutron diffusé et du noyau de recul.....	530
Annexe IV : détermination de la forme mathématique d'une résonance isolée .....	534
Annexe V : la « Théorie de la matrice R » : Principes généraux.....	537
Annexe VI : calcul des sections efficaces dans le domaine non résolu .....	551
Annexe VII : Équations de Schrödinger relative à deux particules en interaction ..	553

Annexe VIII : calcul de la variance de la loi de Porter et Thomas.....	557
Annexe IX : calcul du courant de probabilité.....	559
Annexe X : résolution de l'équation de Schrödinger avec décomposition de la fonction d'onde en ondes partielles.....	561
<b>9 La fission induite par les neutrons.....</b>	<b>567</b>
1. Description schématique de la fission nucléaire et grandeurs physiques associées.....	569
2. La déformation du noyau atomique et le paramètre de fissilité.....	575
3. La barrière de fission.....	581
4. La « dynamique » du phénomène de fission.....	589
5. Énergie libérée par la fission.....	599
6. Les neutrons prompts de fission.....	607
6.1. Le spectre de Maxwell.....	610
6.2. Le spectre de Watt.....	610
6.3. Le spectre de Madland-Nix ou « modèle Los Alamos ».....	613
6.4. Le spectre « FIFRELIN ».....	615
7. Les gamma prompts de fission.....	616
8. Les produits de fission.....	620
9. Les neutrons retardés.....	634
10. La fission ternaire.....	645
11. Les actinides mineurs.....	646
12. Les produits de fission et les actinides dans le contexte des réacteurs nucléaires.....	647
Annexe I : description de la déformation du noyau atomique.....	650
Annexe II : fragments de fission.....	656
Annexe III : calcul des probabilités d'émission des neutrons retardés.....	662
Annexe IV : énergie émise par une fission élémentaire.....	664
<b>10 Élargissement Doppler des résonances – Thermalisation des neutrons .....</b>	<b>671</b>
<i>A. L'élargissement Doppler des résonances .....</i>	<i>673</i>
1. Expression de la section efficace élargie à une température donnée.....	674
2. Comportements particuliers de la section efficace élargie .....	678
3. Loi de transfert en énergie et en angle.....	680



4. Le phénomène de la remontée en énergie à proximité d'une résonance ou « <i>upscattering</i> résonnant » .....	681
4.1. Critère d'une remontée en énergie possible du neutron diffusé .....	681
4.2. Probabilité de la remontée en énergie .....	683
5. La prise en compte des liaisons cristallines .....	688
6. Méthodes de calcul d'une section efficace élargie à une température donnée .....	689
<i>B. La thermalisation des neutrons</i> .....	695
1. Mouvements intra et intermoléculaires – Spectres de fréquence .....	697
2. Comparaison entre la section efficace scalaire de diffusion d'un neutron sur un atome lié et celle d'un atome libre .....	704
3. Modèle du gaz libre .....	706
4. Cas des liaisons moléculaires – Expressions générales de la section efficace différentielle de diffusion .....	711
5. Le formalisme de L. van Hove .....	721
6. Introduction des fonctions $S(\alpha, \beta)$ .....	723
7. La fonction intermédiaire de diffusion .....	725
8. Les expressions des sections efficaces différentielles utilisées en physique des réacteurs nucléaires .....	729
8.1. Section efficace différentielle de la diffusion élastique cohérente .....	729
8.2. Section efficace différentielle de la diffusion inélastique incohérente ..	730
8.3. Section efficace différentielle de la diffusion élastique incohérente .....	732
Annexe I : détermination de la section efficace « élargie » .....	734
<b>11 Interactions des photons avec la matière</b> .....	<b>739</b>
1. Phénomènes associés au passage des photons dans la matière .....	741
2. Effet photoélectrique .....	743
3. Diffusion Compton et diffusion Thomson .....	745
4. Diffusion Rayleigh ou diffusion cohérente .....	751
5. Création de paires ( $e^-$ , $e^+$ ) .....	752
6. Importance relative des trois processus d'interaction .....	755
7. Coefficient d'atténuation linéaire, coefficient d'atténuation massique et libre parcours moyen .....	758

8. Énergie cédée à la matière.....	764
8.1. Cas de l'effet photoélectrique .....	764
8.2. Cas de l'effet Compton.....	764
8.3. Cas de la création de paire .....	765
8.4. La section efficace totale d'absorption en énergie .....	766
8.4.1. Section efficace microscopique d'absorption en énergie ou section efficace microscopique de kerma .....	766
8.4.2. Section efficace macroscopique d'absorption .....	767
9. Réactions photonucléaires.....	767
9.1. Réactions photonucléaires ( $\gamma, xn$ ).....	767
9.2. La photofission ( $\gamma, f$ ).....	769
Annexe I : détermination de l'énergie de seuil de la production de paire ( $e^-, e^+$ ) dans le champ du noyau atomique .....	771
Annexe II : passage de la variable angulaire à la variable énergie dans l'expression de la section efficace de diffusion Compton (ou diffusion incohérente) .....	775
Annexe III : sources radioactives de photoneutrons.....	777
<b>12 Interactions des particules chargées avec la matière .....</b>	<b>779</b>
1. Phénomènes associés au passage des particules chargées dans la matière .....	781
2. Particules lourdes .....	783
2.1. La formule de Bohr.....	783
2.2. La formule de Bethe .....	788
2.3. Influence du milieu ralentisseur.....	789
2.4. Influence de l'énergie cinétique du projectile .....	789
2.5. Influence de la nature du projectile.....	790
2.6. Corrections de la formule de Bethe .....	791
2.7. Parcours dans la matière .....	791
2.8. Produits de fission .....	795
3. Électrons et positrons .....	795
3.1. Le processus collisionnel .....	796
3.2. La perte d'énergie par collision .....	797
3.3. La perte d'énergie par rayonnement de freinage ou Bremsstrahlung.....	798
3.4. Effet Čerenkov.....	801

3.5. Annihilation des positrons .....	801
3.6. Réactions électronucléaires ou électro-désintégration.....	802
4. Les réactions ( $\alpha,n$ ).....	802
Annexe I : approches calculatoires du transport des électrons dans la matière.....	810
Annexe II : pouvoirs d'arrêt des particules $\alpha$ dans différents matériaux .....	812
Annexe III : pouvoirs d'arrêt des protons dans différents matériaux .....	821
Annexe IV : pouvoirs d'arrêt des électrons dans différents matériaux .....	830
Annexe V : pouvoir d'arrêt pour des électrons ou positrons de haute énergie .....	841
Annexe VI : sources radioactives de neutrons produits par réactions ( $\alpha,n$ ) .....	844
<b>13 Les données nucléaires et atomiques .....</b>	<b>845</b>
<i>A. Les modes de représentation des sections efficaces .....</i>	<i>848</i>
1. La représentation ponctuelle .....	849
2. La représentation multigroupe.....	850
3. La représentation sous forme de tables de probabilité.....	852
4. Représentation des transferts énergétique et angulaire ponctuels.....	854
4.1. Cas d'une indépendance entre angle et énergie de déviation.....	854
4.2. Cas d'une dépendance entre angle et énergie de déviation .....	856
4.3. Cas général des sections efficaces doublement différentielles en angle et en énergie .....	856
5. Représentation des transferts énergétique et angulaire multigroupes .....	857
<i>B. Évaluations des données nucléaires et atomiques – Traitement pour les codes de transport de particules et d'évolution temporelle isotopique .....</i>	<i>857</i>
1. Les organismes de distribution des bases de données nucléaires et atomiques .....	858
2. Sections efficaces des neutrons et des photons : organisation de stockage et traitement .....	863
2.1. Les sections efficaces des neutrons.....	863
2.2. Sections efficaces des photons.....	865
2.3. Traitement des sections efficaces neutroniques et photoniques .....	865
2.3.1. Génération des sections efficaces ponctuelles.....	867
2.3.2. Génération des sections efficaces multigroupes .....	870
3. Données de décroissance radioactive et rendements de fission.....	872

4. Données de dosimétrie .....	875
5. Données relatives au transport des particules chargées .....	875
6. Domaine des énergies intermédiaires .....	876
7. Mesures de données nucléaires – Importance des données d’incertitudes .....	877
Annexe I : bases de données nucléaires et codes de calcul/traitement associés dans le domaine de la physique des réacteurs nucléaires et des autres systèmes nucléaires .....	881
Annexe II : les équations de Boltzmann et de Bateman généralisées – Grandeurs physiques associées .....	884
1. Notations et définitions des grandeurs physiques d’intérêt .....	884
2. L’équation de Boltzmann .....	887
3. Les équations de Bateman généralisées ou équations d’évolution .....	890
Annexe III : facteur de Westcott et notion d’intégrale de résonance .....	894
1. Le facteur de Westcott .....	896
2. Intégrale de résonance .....	897
<b>Quelques dates marquantes .....</b>	<b>903</b>
<b>Unités et constantes physiques .....</b>	<b>907</b>
<b>Liste des éléments et isotopes naturels associés .....</b>	<b>913</b>
<b>Acronymes – abréviations .....</b>	<b>919</b>
<b>Index .....</b>	<b>923</b>

# Avant-propos

Cet ouvrage constitue, en chacun des thèmes abordés, un effort de synthèse qui s'adresse principalement aux étudiant.e.s d'écoles d'ingénieurs<sup>1</sup> et de master en cursus de spécialisation axé sur le domaine de l'énergie nucléaire. Il peut cependant également intéresser des personnes suivant d'autres types de formations nucléaires académiques ou encore du secteur industriel.

Les ressources documentaires qui ont été consultées et utilisées pour en élaborer le contenu – texte et figures – sont référencées dans les notes de bas de page.

Les éléments de physique nucléaire présentés dans une optique d'étude de réacteurs nucléaires à fission ou à fusion se trouvent, le plus souvent, dans des articles dédiés<sup>2</sup> ou bien font l'objet d'un chapitre introductif d'ouvrages consacrés à leur physique. Le présent manuel en reprend la démarche, ce qui explique la place de choix faite ici au neutron et aux réactions nucléaires qu'il induit dans la matière, dans une gamme d'énergie allant jusqu'à vingt mégaelectronvolts (20 MeV). Naturellement, la diversité des rayonnements engendrés par ces réactions est prise en considération. Des incursions sont ponctuellement faites dans le domaine des énergies situées au-delà de cette limite, motivées, par exemple, par la conception de systèmes nucléaires hybrides couplant un accélérateur de protons dirigés sur une cible multiplicatrice de neutrons à un « cœur » constitué de matière fissile. Des liens étroits existent avec l'astrophysique nucléaire à travers des phénomènes comme celui de la nucléosynthèse<sup>3</sup>. L'exposé proposé des notions de base de la physique nucléaire est suffisamment général et large pour trouver son utilité dans des domaines d'application situés en dehors du champ de l'énergie nucléaire, tels que la médecine, l'étude de l'environnement, l'archéologie, la conservation du patrimoine, la sécurité, etc.<sup>4</sup>

---

<sup>1</sup> Tout particulièrement le *Génie Atomique* de l'Institut national des sciences et techniques nucléaires (INSTN).

<sup>2</sup> Par exemple : C. M. Diop, « Physique des réacteurs – Bases de la physique nucléaire », *Techniques de l'ingénieur*, BN3010 V2, 10 janvier 2016, « Physique des réacteurs – Les réactions nucléaires », *Techniques de l'ingénieur*, BN3011 V2, 10 juillet 2016, « Physique des réacteurs – Traitement des données nucléaires », *Techniques de l'ingénieur*, BN3012 V2, 10 janvier 2017 ; E. Bauge, C. De Saint Jean, S. Hilaire, A. Nicolas, « Physique des réacteurs – Modélisation et évaluation des sections efficaces », *Techniques de l'ingénieur* BN 3 008 V1, 10 juillet 2020 ; O. Sérot, « Physique des réacteurs – Modélisation et évaluation des observables de fission », *Techniques de l'ingénieur* BN 3 009 V1, 10 juillet 2020.

<sup>3</sup> J. Audouze, S. Vauclair, *L'astrophysique nucléaire*, PUF, Paris, 2003 ; L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, chapitre XVI « L'astrophysique nucléaire », Hermann, Paris, 1975, p. 503 et sq.

<sup>4</sup> A. Caillot, *La radioactivité au service de l'industrie et de l'environnement*, Éditions TEC & Doc, Paris, 2002.

Par ailleurs, il est opportun de rappeler que si la physique des réacteurs nucléaires recourt à la physique nucléaire, elle a été également, et continue de l'être, pour cette dernière, un moteur de progrès des connaissances, à la fois par l'exigence de précision demandée aux mesures expérimentales, portant notamment sur les sections efficaces neutroniques relatives à une grande variété de noyaux atomiques, et par le raffinement ciblé des modèles nucléaires devant rendre compte de l'interaction neutron-matière, comme par exemple la fission.

Le parti pris rédactionnel adopté a été, d'une part, de placer en annexe des développements calculatoires plus ou moins longs ou non essentiels en première lecture afin d'alléger le corps principal du texte, et d'autre part, de fournir des références d'ouvrages et d'articles permettant d'approfondir et d'actualiser la compréhension au plan théorique des concepts exposés, ainsi que d'accéder plus complètement à des données expérimentales ou calculées.<sup>5</sup> À travers ces références, on a aussi voulu tout autant rappeler des travaux fondateurs de la discipline et indiquer certaines des améliorations apportées à ce jour par les spécialistes aux modèles historiques, tels que le « modèle de la goutte liquide » et le « modèle en couches » décrivant le noyau atomique et ses propriétés ; ceux-ci conservent néanmoins toute leur valeur heuristique.

On constatera que la physique nucléaire, en l'état actuel de nos connaissances, est traitée par diverses approches, *ab initio*, semi-empiriques, microscopiques, hybrides combinant modèles microscopiques et macroscopiques, pour lesquels les mesures issues d'expériences ajustent les paramètres ou les valident. Elles recourent concomitamment à la physique classique, à la mécanique quantique et à des composants phénoménologiques. Par exemple, une théorie complète expliquant la structure du noyau atomique et ses propriétés n'existe pas encore, conduisant à faire appel à une modélisation à huit ou dix paramètres pour caractériser l'interaction nucléon-nucléon. Il en est de même pour la description des interactions entre des particules et le noyau atomique, bien que les formalismes physico-mathématiques établis et mis en œuvre soient d'une très haute sophistication. Chacune des approches mobilisées, de manière complémentaire, éclaire une partie de la réalité observée.

Il a été jugé utile de rappeler, en annexe du quatrième chapitre consacré à la structure du noyau atomique, quelques notions de mécanique quantique, sachant l'obstacle conceptuel que celle-ci constitue souvent pour appréhender les phénomènes physiques aux échelles subatomique, atomique et moléculaire. Cela d'autant plus que son interprétation reste au cœur d'une vive controverse, aux deux facettes scientifique et philosophique, qui s'est instaurée, au début du siècle dernier, entre les « idéalistes » ou « antiréalistes » de l'*École de Copenhague* impulsée par Niels Bohr d'un côté, et de l'autre, les « réalistes »

---

<sup>5</sup> Les auteurs du présent ouvrage, dont l'activité professionnelle se situe dans le domaine de la physique des réacteurs nucléaires, ne sont pas spécialistes des thématiques traitées dans chacune des références citées.

s'inscrivant dans la perspective de la pensée d'Albert Einstein, pour reprendre les termes du physicien théoricien Lee Smolin.<sup>6 7</sup>

Les applications numériques présentées en exemple dans ce livre utilisent des données issues de différentes bases de données existantes, ce qui explique qu'une même grandeur physique puisse avoir des valeurs quelque peu différentes selon les endroits où celles-ci sont rencontrées dans le texte. Du reste, cette variabilité numérique pointe les incertitudes qui affectent les valeurs attribuées aux données nucléaires et atomiques et l'amélioration continue dont elles font l'objet pour les besoins tant de la recherche fondamentale que pour ceux de la recherche appliquée et industrielle.

À noter que cohabitent ici les unités du système d'unités international (SI) et celles fréquemment employées dans le domaine nucléaire : on pense en particulier à l'électronvolt et ses multiples et sous-multiples, préférés au joule, pour l'énergie, ou encore, au choix du centimètre carré et du barn plutôt que du mètre carré pour les sections efficaces d'interaction particule-matière. Sont également indiqués entre parenthèses les équivalents anglais de certains termes usités.

Chacun des chapitres est autoportant vis-à-vis des notations adoptées ce qui n'exclut pas que quelques-unes d'entre elles leur sont communes. Les deux notations scientifiques équivalentes  $6.02214 \cdot 10^{23}$  et  $6.02214 \text{ E} + 23$  sont utilisées, la première plus souvent que la seconde. Pour des raisons de commodité d'écriture des changements de convention de notation sont ponctuellement effectués au sein d'un même chapitre.

La physique nucléaire expérimentale proprement dite sort du cadre du présent ouvrage ; elle est simplement évoquée *via* quelques schémas et références.

Je tiens tout d'abord à remercier Cédric Jouanne qui a accepté de prendre en charge la rédaction des chapitres 11 et 12, respectivement consacrés à l'interaction des photons et des particules chargées avec la matière, ainsi que pour sa collaboration à la mise au point de l'ensemble de l'ouvrage, notamment avec la réalisation de la plupart de ses figures à partir de données nucléaires actualisées.

Cédric Jouanne et moi-même remercions nos collègues qui ont pris de leur temps pour nous apporter d'une manière ou d'une autre leur aide et / ou nous faire un retour critique constructif sur ce manuel, ayant permis d'en améliorer à la fois le contenu et la présentation : Mireille Coste-Delclaux, Loïc de Carlan, Cyrille De Saint-Jean, Daniela Foligno, Frank Günsing, Tan-Dat Huynh, Olivier Litaize, Loredana Manducci, David Régnier, Olivier Sérot, Léonie Tamagno-Berge, Aimé Tsilanizara, Andrea Zoia. Nos

---

<sup>6</sup> L. Smolin, *La révolution inachevée d'Einstein – Au-delà du quantique*, Paris, Dunod, 2019 (traduit de l'anglais par M. Lachièze-Rey). Voir aussi C. Rovelli, *Helgoland – Le sens de la mécanique quantique*, Flammarion, Paris, 2021 (traduit de l'italien par S. Lem) et M. Bitbol, *Philosophie quantique – Le monde est-il extérieur ?*, Éditions Mimésis, Paris, 2023. Cette divergence de point de vue se répercute au niveau du vocabulaire par l'utilisation différenciée des termes « observable » introduit par W. Heisenberg et *beable* (« étrable ») par John S. Bell, ce dernier mot, peu usité, renvoyant au réel indépendamment d'une observation/mesure.

<sup>7</sup> Voir aussi A. Aspect, *Einstein et les révolutions quantiques*, CNRS Éditions, Paris, 2019.

remerciements vont aussi à tous les auteur.e.s dont les publications en ont permis l'élaboration<sup>8</sup>.

Nous exprimons notre reconnaissance à Joseph Safieh, Constance Coston et Laurent Véron, qui se sont succédé à la Direction du *Génie Atomique* de l'*Institut National des Sciences et des Techniques Nucléaires* (INSTN) à Saclay, pour avoir permis la publication de cet ouvrage dans la *Collection Génie Atomique*.

Cheikh M'Backé Diop

---

<sup>8</sup> Les auteurs portent bien entendu l'entière responsabilité des erreurs et des imperfections qui y subsistent.



# Descriptif général du cours

Le **chapitre 1** situe quelques-unes des notions clés de physique nucléaire dans le cadre de la physique des réacteurs nucléaires. Il mentionne les deux équations maîtresses de la neutronique (explicitées en annexe du chapitre 13), à savoir l'équation de Boltzmann (ou équation du transport) qui gouverne la propagation des neutrons (et des photons) dans la matière et les équations de Bateman généralisées qui décrivent le comportement des concentrations des nucléides d'un matériau soumis à l'irradiation neutronique (voire photonique) en fonction du temps, en y montrant l'implication des divers processus nucléaires. Le lecteur non particulièrement intéressé par ce domaine d'application peut directement se rendre au chapitre 2.

Le **chapitre 2** rappelle quelques-uns des faits expérimentaux ayant permis d'identifier et de caractériser les différents constituants du noyau atomique.

Le **chapitre 3** fournit une série de définitions et de propriétés fondamentales relatives au noyau atomique.

Les principaux modèles apportant une compréhension de la structure du noyau atomique sont décrits dans leurs grandes lignes dans le **chapitre 4**.

Le **chapitre 5** traite de la stabilité et de l'instabilité du noyau atomique et présente les principales caractéristiques des désintégrations radioactives (radioactivité).

Les **chapitres 6, 7 et 8** sont consacrés aux réactions nucléaires induites par les neutrons, leurs différents types, leurs propriétés énergétiques. Une place particulière est faite aux sections efficaces dont le comportement est étudié en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident sur un nucléide cible donné.

La fission nucléaire induite par un neutron est abordée plus en détail dans le **chapitre 9**, incluant la caractérisation des produits de fission ainsi que de l'émission des neutrons prompts, des neutrons retardés et des photons gamma.

Le **chapitre 10** est dédié à l'étude du comportement des sections efficaces neutroniques en fonction de la température, car, en toute généralité, celle-ci est variable en espace et dans le temps. Cet aspect est crucial lorsque l'on étudie le comportement de la population neutronique dans le cœur d'un réacteur nucléaire en situation normale ou accidentelle. Les deux phénomènes abordés sont l'« effet Doppler » et la « thermalisation » des neutrons

qui requièrent un traitement spécifique des sections efficaces d'interaction neutron-matière.

Les **chapitres 11** et **12** décrivent successivement les interactions des photons (gamma, rayons X) et des particules chargées (électrons, particules alpha en particulier) avec la matière. À la différence des neutrons, la propagation des photons dans la matière est gouvernée par leur interaction avec le cortège électronique des atomes du milieu traversé et celle des particules chargées par l'interaction avec le champ coulombien ambiant. Cependant, ces deux types de particules donnent lieu elles aussi, tout comme le neutron, à des réactions nucléaires que l'on présente.

Le **chapitre 13** est vu comme une transition en deux volets vers la physique des réacteurs nucléaires. Le premier esquisse les modes de représentation en fonction de l'énergie (principalement) des sections efficaces que l'on utilise usuellement en neutronique ; le second indique très schématiquement et succinctement la manière dont sont rassemblées et traitées les données nucléaires et atomiques sur les plans informatique, physique et numérique, en vue de leur utilisation dans les logiciels de neutronique. La problématique des incertitudes associées aux données nucléaires est également très brièvement évoquée.

# 1

## **La physique nucléaire dans le contexte de la physique des réacteurs nucléaires**



**La physique des réacteurs nucléaires**<sup>1</sup> a pour but de quantifier, à l'aide de modèles de physique-mathématique et de codes (ou logiciels) de calcul (ou simulation) – de neutronique, thermohydraulique, thermomécanique, physico-chimie, radioprotection, etc. – des grandeurs macroscopiques pertinentes permettant respectivement :

- de **caractériser l'état neutronique du cœur d'un réacteur nucléaire** en situations normale, incidentelle et accidentelle ;
- d'**évaluer l'effet des rayonnements sur la matière organique** – le vivant – et la **matière inerte** – les matériaux –, de manière générale sur **l'environnement**, et de prendre les mesures appropriées pour s'en protéger.

Dans le domaine des réacteurs nucléaires (réacteurs industriels, réacteurs expérimentaux, réacteurs embarqués<sup>2</sup>), les **neutrons** et les **photons** sont les deux principaux types de rayonnements à considérer sous les deux aspects que sont leur propagation dans la matière et les phénomènes physiques induits par leurs interactions avec les atomes (noyau et cortège électronique) du milieu traversé.

## 1. Les échelles d'énergie, de distance et de temps

Ainsi que le montre la **figure 1**, la gamme des énergies cinétiques des particules ici concernées s'étend de **0 à 20 MeV**. Le terme de « **particule** » employé dans cet ouvrage est générique, s'appliquant aussi bien à une « particule élémentaire » qu'à un « nucléide » ou un « atome » (voir chapitre 3). Selon leur énergie, les neutrons et les photons, particules électriquement neutres, ont des parcours dans la matière de l'ordre du centimètre ou de quelques centimètres voire de plusieurs mètres dans les milieux peu denses comme l'air. Les **particules chargées** – **électrons, protons, particules alpha** (ou hélions), etc., et **atomes de recul** ou **formés** –, résultant de l'interaction des neutrons et des photons<sup>3</sup> avec la matière, ont des parcours comparativement très petits, typiquement de quelques millimètres ou inférieurs au millimètre dans les milieux denses. Elles ne doivent pas être pour autant négligées, car leur présence affecte le milieu ambiant.

La gamme de temps à considérer est très vaste puisqu'elle va de  **$10^{-23}$  seconde**, temps caractéristique de réactions nucléaires, à plusieurs millions voire milliards d'années relativement à la radioactivité de radionucléides, ce que schématise la **figure 2**.

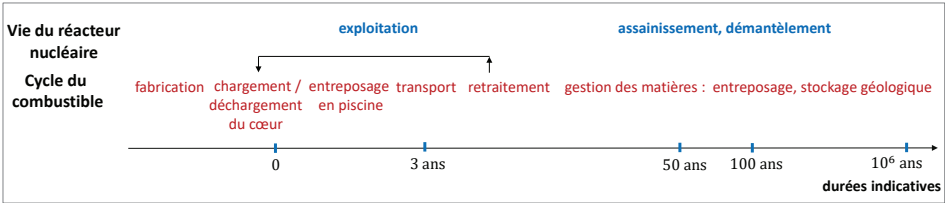
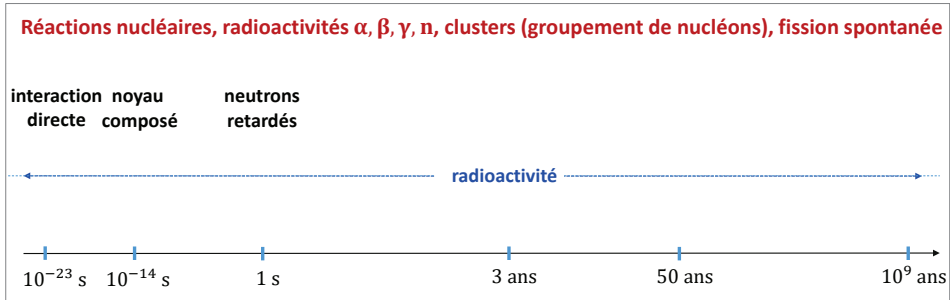
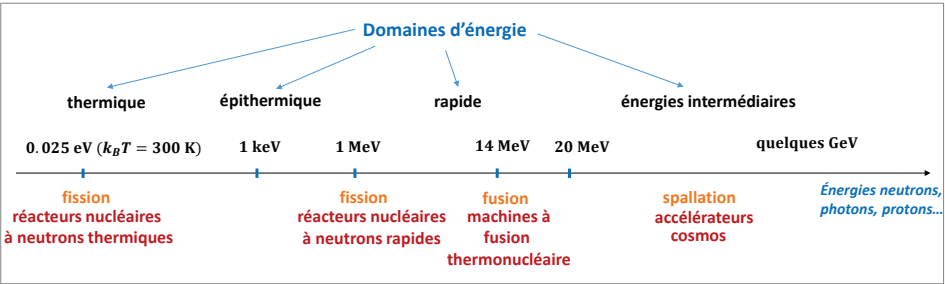
---

<sup>1</sup> Voir [http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA\\_Monographie4\\_Neutronique\\_2015\\_Fr.pdf](http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA_Monographie4_Neutronique_2015_Fr.pdf).

<sup>2</sup> Propulsion navale : sous-marin, porte-avion, réacteur pour engins spatiaux, voire installations lunaires et planétaires : voir *La neutronique*, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions Le Moniteur/CEA, 2013, 2015 (version anglaise), Paris, pp. 143-147, pp. 185-192, pp. 209-213.

<sup>3</sup> Les photons émis lors des processus nucléaires sont dénommés « gamma » et « rayons X » s'ils sont émis lors d'une transition d'un électron d'une couche électronique à une autre au sein du cortège électronique (voir chapitre 11).

La **figure 3** rappelle les échelles de temps associées à des étapes du **cycle du combustible nucléaire**.



<sup>4</sup> Voir entre autres les monographies relatives au combustible nucléaire publiées par le CEA et accessibles sur le lien <https://www.cea.fr/multimedia/Pages/editions/monographies-nucleaire.aspx>.

## 2. Grandeurs physiques d'intérêt, équations maîtresses, phénomènes physiques et données nucléaires

Dans les domaines d'applications précités, parmi les grandeurs physiques d'intérêt, deux sont fondamentales dans la mesure où les autres en sont dérivées : ce sont **le flux de particules** et **la concentration des nucléides**.<sup>5</sup>

### 2.1. Le flux de particules et ses grandeurs dérivées

Le flux de particules caractérise la propagation des particules dans le système physique étudié ; dans sa définition la plus exhaustive, il représente, à un instant considéré, le nombre des particules traversant, en un point de l'espace, l'unité de surface avec une énergie et une direction données. C'est l'**équation de Boltzmann** – ou **équation du transport** – qui régit le flux de particules dans la matière. En régime stationnaire (régime indépendant du temps, fréquemment rencontré dans les applications), choisi ici pour des raisons de simplicité<sup>6</sup>, cette équation peut être écrite sous la forme d'un bilan du nombre de particules présentes dans un volume élémentaire de l'espace des phases (espace, énergie, angle) :

$$\text{fuites} + \text{disparitions} = \text{arrivées} + \text{source}$$

La formalisation de la propagation des particules neutres auxquelles on s'intéresse, les neutrons et les photons, fait intervenir, par l'intermédiaire des grandeurs appelées sections efficaces (*cross sections*), les interactions particule-matière à savoir :

- les réactions nucléaires induites par un neutron et un photon (réactions photonucléaires) ;
- les interactions des photons avec le cortège électronique de l'atome.

En effet, les termes de disparitions et d'arrivées résultent de différents phénomènes physiques d'interaction particule-matière qui modifient l'état de la particule incidente, neutron ou photon, et celui du noyau ou de l'atome cible :

- le phénomène d'absorption fait disparaître la particule incidente ;
- le phénomène de diffusion modifie sa direction et son énergie (sauf cas particulier comme celui de la diffusion cohérente).

Selon la nature des particules incidentes, leurs énergies et les atomes cibles mis en jeu, ces phénomènes s'accompagnent ou non d'émission de particules (ou rayonnements) secondaires : photons, neutrons, particules chargées.

Des grandeurs physiques d'intérêt dérivées du flux de particules sont par exemple (outre le courant de particules) :

---

<sup>5</sup> Elles sont explicitées dans le chapitre 13.

<sup>6</sup> Une équation plus générale décrit l'évolution de la population neutronique en fonction du temps permettant d'étudier le système nucléaire considéré au cours de phases transitoires.

- les taux de réaction : taux d'absorption, taux de diffusion des particules ;
- les débits de dose ;
- les échauffements, c'est-à-dire l'énergie déposée dans la matière ;
- les dommages : production de gaz (hydrogène, hélium, etc.), déplacements d'atomes (« dpa »).

## 2.2. La concentration des nucléides et ses grandeurs dérivées

La concentration des nucléides permet de caractériser au cours du temps l'évolution de la composition isotopique du milieu sous irradiation. Elle s'exprime en nombre de nucléides par unité de volume à un instant donné au point de l'espace considéré. Les concentrations des nucléides sont gouvernées, en fonction du temps, par des équations différentielles couplées, **les équations généralisées de Bateman** – on dit aussi « **équations d'évolution** ». Celles-ci établissent à un instant quelconque la variation par unité de temps des concentrations des nucléides en un point donné de l'espace :

$$\text{variation par unité de temps de la concentration en nucléides} = \text{apparitions par unité de temps} - \text{disparitions par unité de temps}$$

Les termes d'apparitions et de disparitions de radionucléides résultent respectivement :

- des **réactions nucléaires** induites par les particules incidentes (neutrons, gamma, etc.) transmutant un nucléide de type  $j$  en un nucléide de type  $i$  ;
- des **phénomènes de décroissance ou désintégration radioactive** qui transforment également un nucléide en un autre.

Ainsi, la résolution des équations différentielles d'évolution exige de disposer, en plus des sections efficaces, des **données de décroissance radioactive (decay data)** qui caractérisent les processus de désintégration.

Des grandeurs physiques d'intérêt dérivées de la concentration d'un radionucléide sont par exemple :

- les **activités** (nombre de désintégrations par unité de temps) des radionucléides ;
- les **masses** des nucléides présents ;
- les **puissances résiduelles  $\alpha, \beta, \gamma, n$**  : ce sont les énergies émises suite aux différents processus de désintégration émettant des particules alpha ( $\alpha$ ), des particules bêta ( $\beta$ ), des photons gamma ( $\gamma$ ) et des neutrons ( $n$ ) ;
- les **sources de rayonnements  $\alpha, \beta, \gamma, X, n$** ... (spectres, intensités) ;
- les **radiotoxicités** des radionucléides.

Ainsi, ces équations de base qui gouvernent le transport des particules neutres dans la matière et l'évolution temporelle des concentrations des nucléides composant le milieu sous flux sont couplées et requièrent, pour être résolues, de déterminer l'occurrence des réactions particule-matière, l'énergétique des réactions nucléaires, la nature des nucléides et des particules produites dans les processus physiques à l'œuvre. Il faut par conséquent



étudier la structure des noyaux des atomes ainsi que les caractéristiques des processus nucléaires dont ils sont le siège : réactions et transmutations radioactives.

Les réactions nucléaires et la radioactivité sont caractérisées par les données physiques de base spécifiques mentionnées plus haut : sections efficaces, constantes de désintégrations radioactives, spectres d'émission de particules, etc., qui sont rassemblées dans des fichiers internationaux appelés « **évaluations** » (voir chapitre 13). Des expériences alliées à des modèles physico-mathématiques appropriés ont permis aux spécialistes, dénommés « **évaluateurs** », d'élaborer de tels fichiers.

S'agissant des sections efficaces des réactions nucléaires, ces expériences sont très schématiquement de deux types : **mesures microscopiques différentielles** et **mesures intégrales**<sup>7</sup>.

Les logiciels ou codes de calcul dans lesquels sont implémentées les méthodes qui résolvent les équations de Boltzmann et de Bateman précitées exploitent dans ce but les évaluations internationales de données nucléaires.

Le processus de « **qualification** »<sup>8</sup> de ces codes de calcul notamment, *via* le « **benchmarking** », permet d'effectuer une boucle d'amélioration sur les données nucléaires en mettant en œuvre des calculs de sensibilité et de propagation d'incertitudes associées aux données nucléaires sur les grandeurs macroscopiques d'intérêt (taux de réaction...)<sup>9</sup>.

La **figure 4** résume ce qui précède.

Les **figures 5, 6, 7, 8 et 9** montrent le type de chaîne de **nucléides « lourds »** (de numéro atomique élevé) considérée dans les études de physique du cœur d'un réacteur à eau sous pression (REP) ; elles combinent les processus radioactifs et les réactions nucléaires. Par fission, ces noyaux atomiques lourds conduisent à la formation de **produits de fission** qui initient d'autres chaînes de filiation radioactive par désintégration bêta ou capture électronique : les **transitions isobariques** (voir chapitre 5). L'ensemble de ces chaînes de filiation de noyaux lourds comportent les transitions radioactives que l'on retrouve dans les chaînes de filiation naturelles présentées dans le chapitre 2.

---

<sup>7</sup> *La neutronique, op. cit.*, pp. 21-41.

<sup>8</sup> W. L. Oberkampf, T. G. Trucano, C. Hirsch, « Verification, Validation, and Predictive Capability in Computational Engineering and Physics », *Appl. Mech. Rev.*, vol. 57, n° 5, September 2004, <https://doi.org/10.1115/1.1767847>.

<sup>9</sup> *La neutronique, op. cit.*, pp. 165-170.

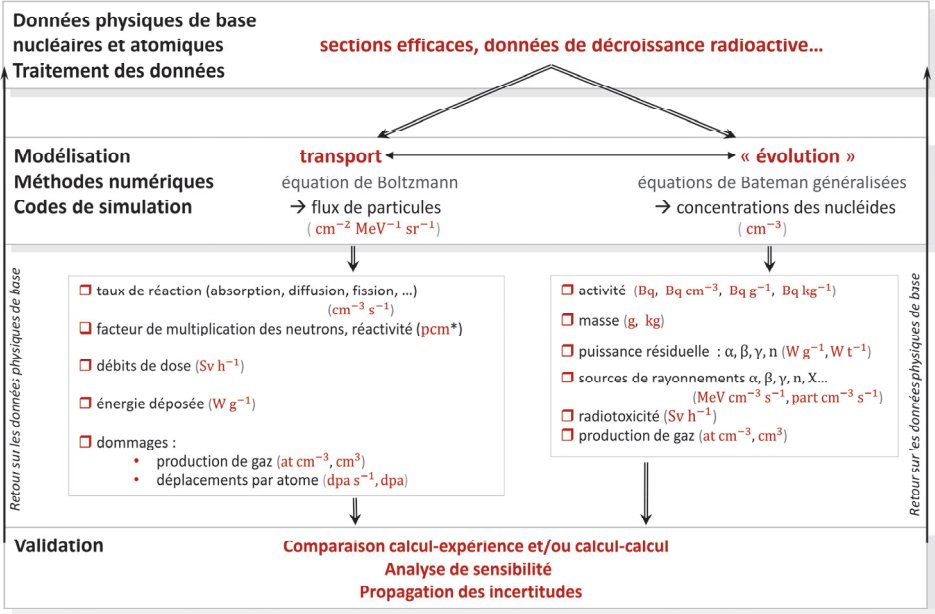


Figure 4. Les données physiques de base dans le contexte de la *physique des réacteurs nucléaires* ; la double flèche horizontale symbolise la rétroaction entre évolution isotopique (modification de la composition isotopique du milieu irradié au cours du temps) et transport (ou propagation) dans la matière, ici des neutrons principalement. Dans la pratique, les unités utilisées des grandeurs dérivées sont variables, comme l'indique leur juxtaposition dans les parenthèses de la figure. \* pcm : partie pour cent mille ( $\times 10^{-5}$ ).

Les études de **neutronique** et de **radioprotection**, qui utilisent directement les données nucléaires, fournissent les « **termes sources** » requis par d'autres disciplines : par exemple, la puissance produite dans le cœur du réacteur nucléaire par les réactions de fission pour la **thermohydraulique** (incidence sur la température du fluide caloporteur, etc.), le spectre en énergie des premiers atomes choqués par les neutrons pour la **science des matériaux sous irradiation** (création de défauts, dommages, etc.)<sup>10</sup>, l'énergie des photons émis par les processus radioactifs cédée au milieu ambiant pour la **physico-chimie** (phénomène de radiolyse, etc.), les taux de réactions nucléaires et spectres des rayonnements émis pour l'**instrumentation nucléaire** (déconvolution du signal, etc.). L'ensemble de ces disciplines avec leurs différents couplages concourent à la conception des installations nucléaires, à leur exploitation, à leur déconstruction, ainsi qu'à l'élaboration de leurs dossiers de sûreté.

<sup>10</sup> *Les matériaux du nucléaire* (ouvrage collectif), Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions du Moniteur/CEA, Paris, 2016 ; [https://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA\\_Monographie10\\_Materiaux-du-nucleaire\\_2016\\_Fr.pdf](https://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA_Monographie10_Materiaux-du-nucleaire_2016_Fr.pdf). Plus globalement voir les autres ouvrages de cette même collection : <https://www.cea.fr/multimedia/Pages/editions/monographies-nucleaire.aspx>.

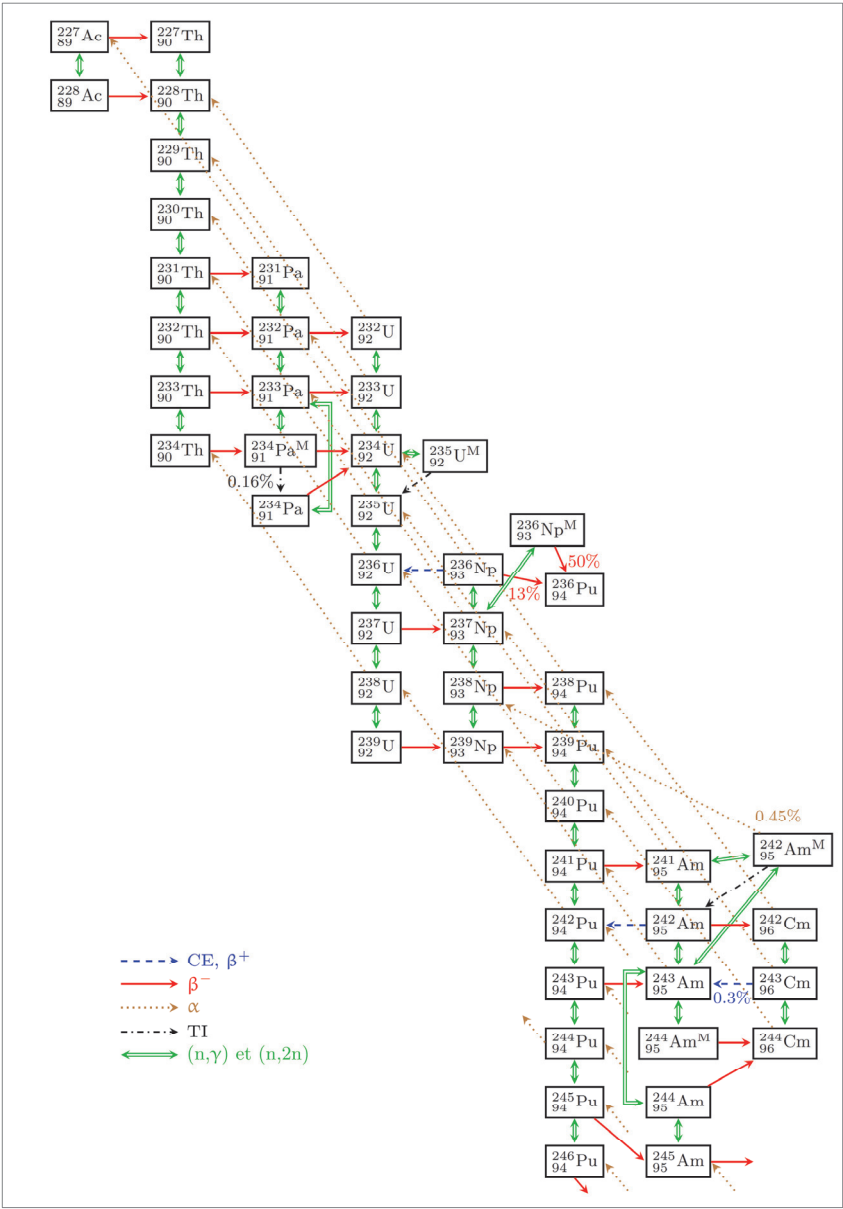


Figure 5. Chaîne de filiation isotopique relative aux nucléides lourds d'un combustible nucléaire soumis à l'irradiation neutronique : elle prend en compte à la fois les processus de désintégration radioactive ( $\alpha$ ,  $\beta^+$ ,  $\beta^-$ , capture électronique (CE), transition isomérique (TI)) et les réactions nucléaires induites par les neutrons, en particulier la capture neutronique radiative (n,  $\gamma$ ) et les réactions (n, 2n) ; les figures 6 et 7 suivantes complètent cette chaîne d'évolution respectivement à partir du thorium 232 (haut de la figure) et du curium 244 (bas de la figure). Cette chaîne générale permet de particulariser pour les calculs de neutronique de cœur des réacteurs nucléaires les chaînes spécifiques à un type de combustible donné et donc du cycle associé, illustrées par les figures 8 et 9.

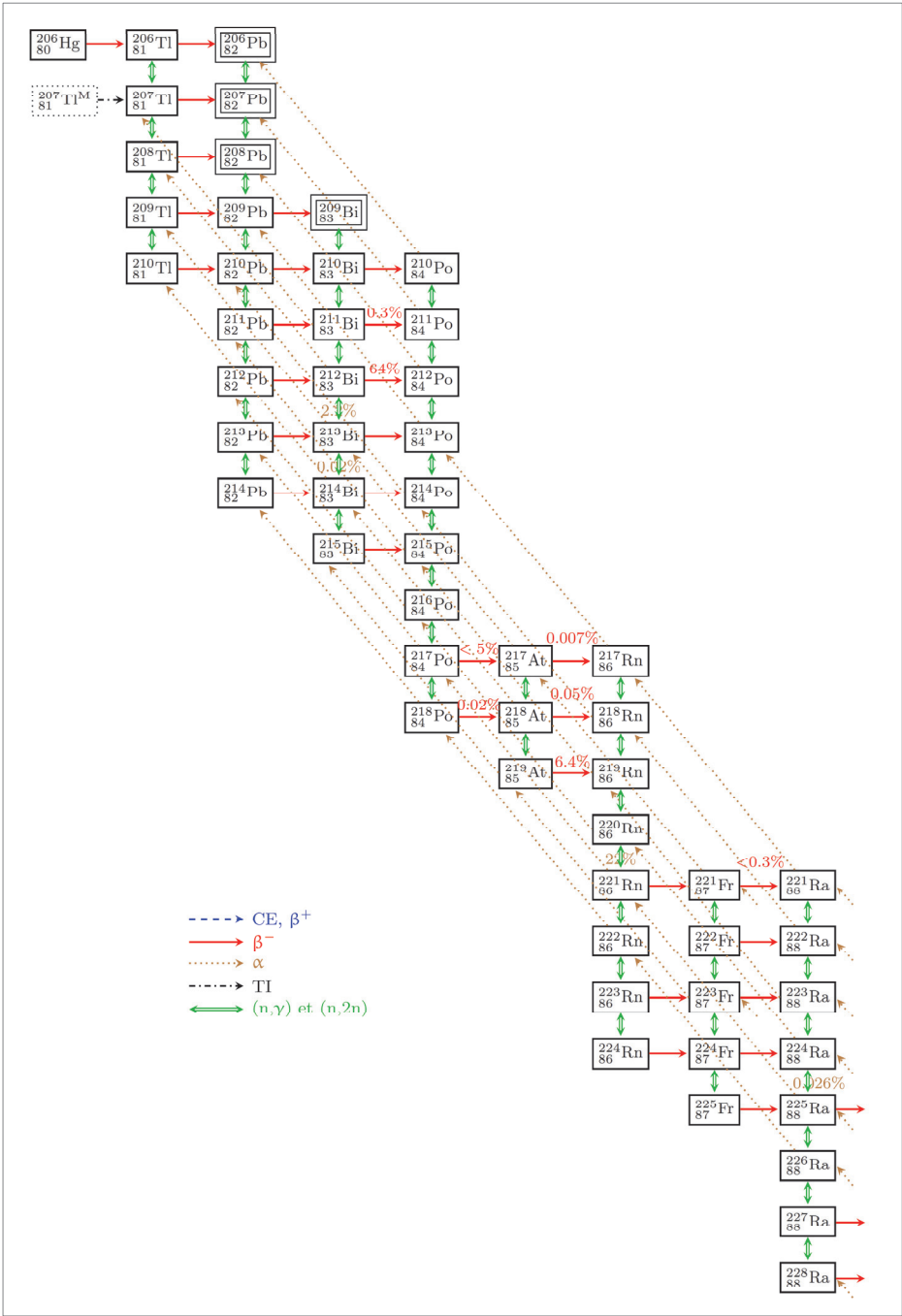


Figure 6. Chaîne de filiation isotopique relative aux nucléides lourds d'un combustible nucléaire soumis à l'irradiation neutronique, suite : voir légende figure 5.

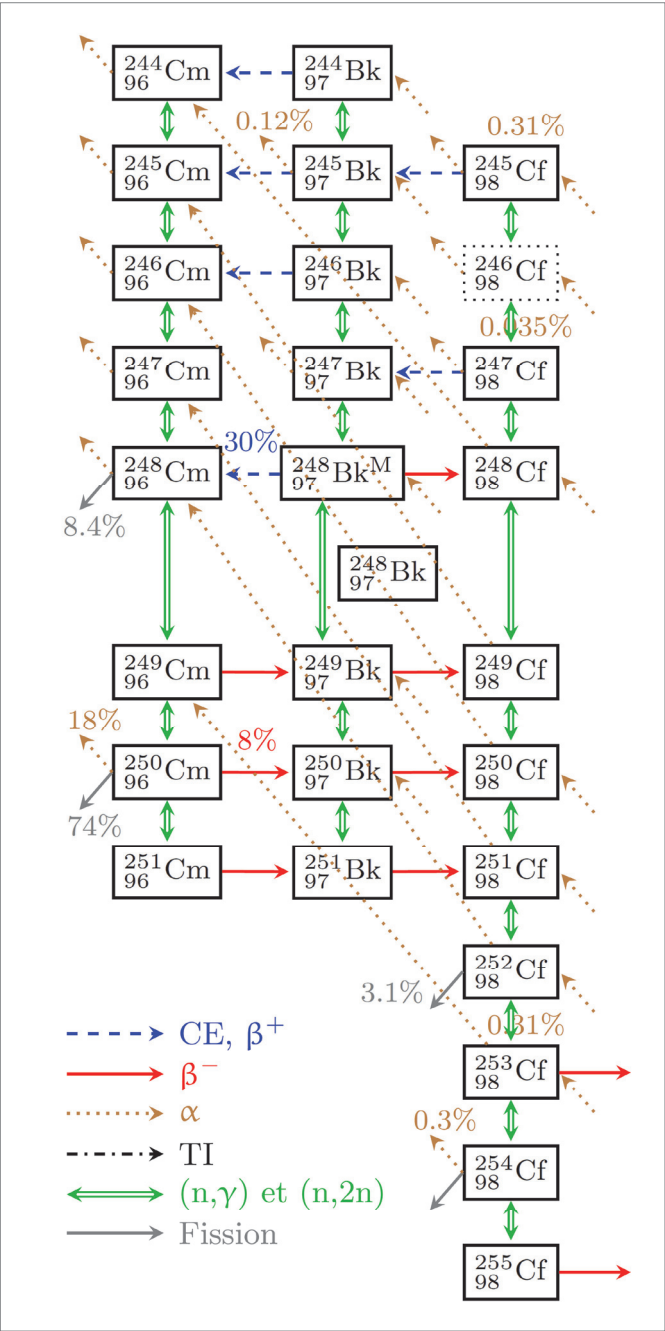


Figure 7. Chaîne de filiation isotopique relative auxnucléides lourds d'un combustible nucléaire soumis à l'irradiation neutronique, suite : voir légende figure 5.

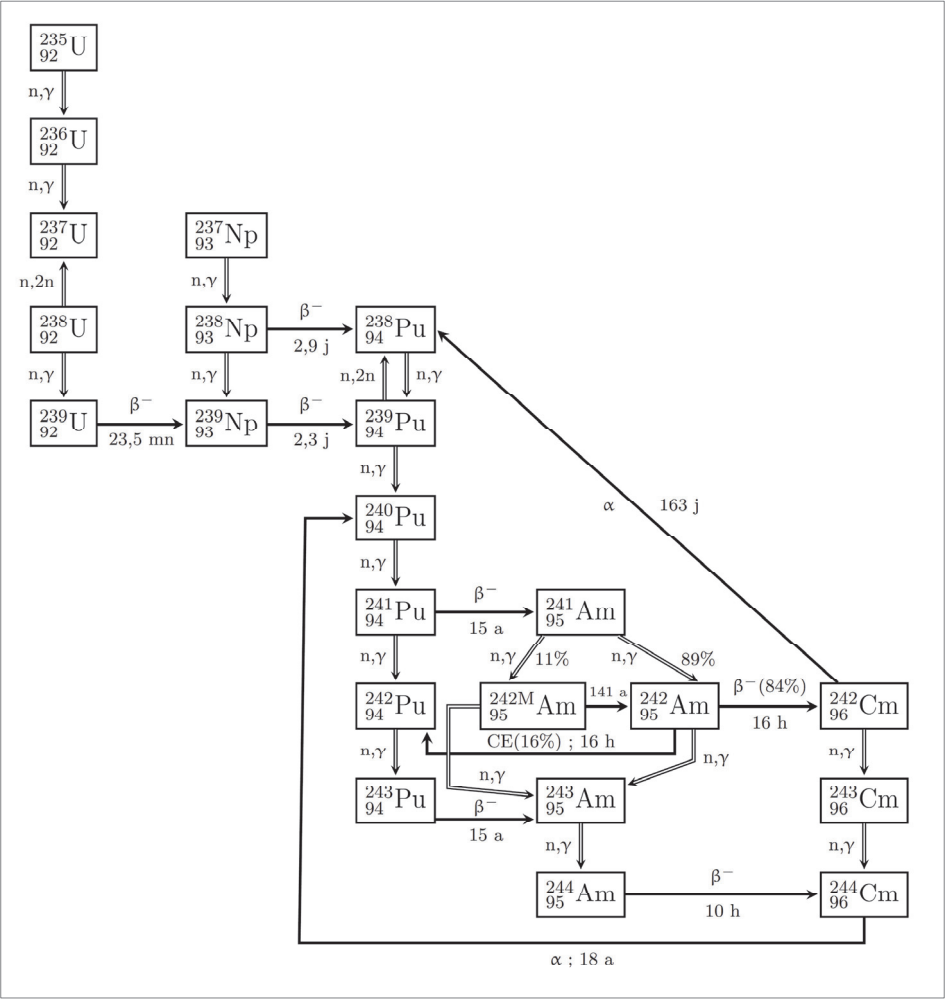


Figure 8. Chaîne d'évolution de l'uranium.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> P. Reuss, *Traité de Neutronique*, Hermann, Paris, 1985, p. 430.

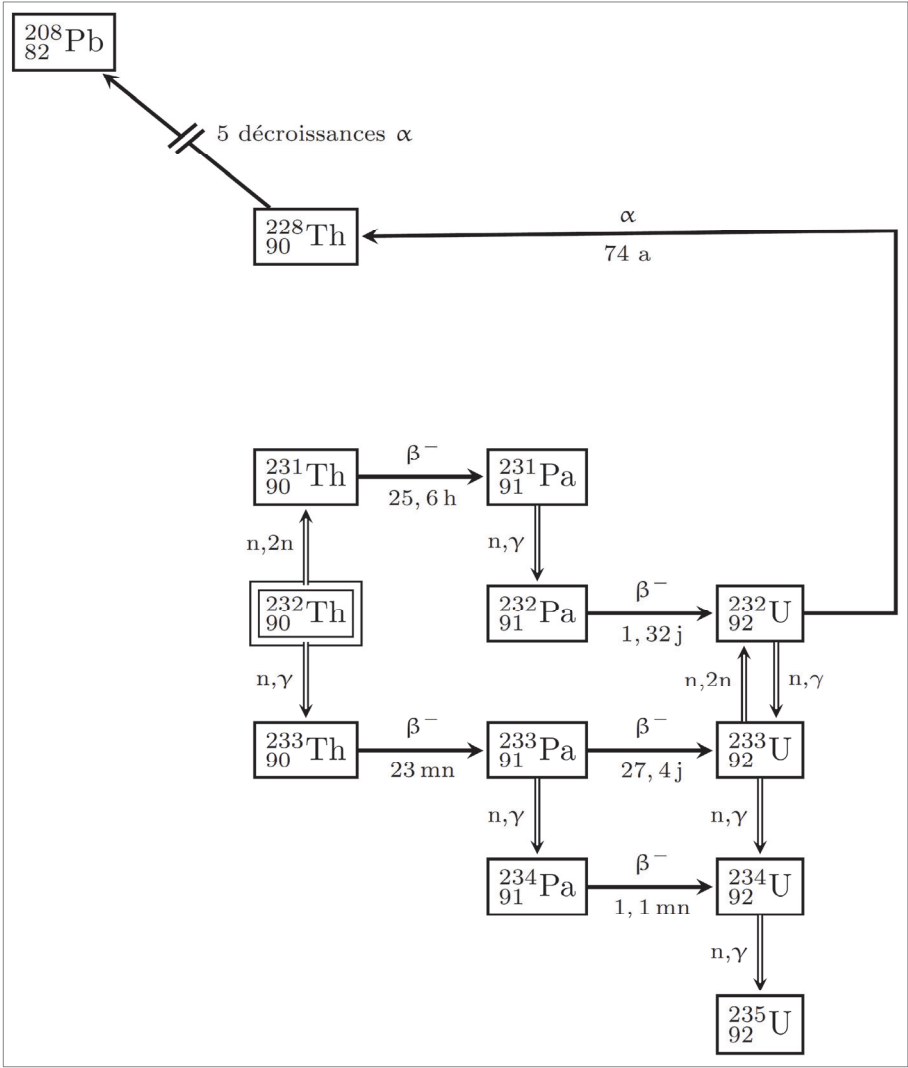


Figure 9. Chaîne d'évolution du thorium.<sup>12</sup>

<sup>12</sup> P. Reuss, *Traité de Neutronique*, op. cit., p. 431.





## **2**

### **Quelques faits expérimentaux**



Des **expériences** ont progressivement permis de mettre en évidence les propriétés du noyau atomique tout en manifestant, à l'échelle microscopique, la **double nature corpusculaire et ondulatoire** des particules (projectile et cible).<sup>1</sup> Elles peuvent être scindées en plusieurs catégories :

- expériences de **diffusion** ;
- mesures de **masses** ;
- mesures de **charges** ;
- mesures de **moments angulaires** ;
- expériences associées aux **phénomènes radioactifs**.

À partir d'un bref rappel de quelques-unes d'entre elles, on introduit de premières notions et de premiers ordres de grandeur relatifs à la dimension, la constitution, la forme et la nature stable ou instable du noyau atomique.

## 1. Les expériences de diffusion

Les expériences de diffusion consistent à envoyer un faisceau de particules sur une cible et à analyser la distribution des impacts sur un écran obtenue en comptabilisant sur cet écran le nombre d'impacts dans des angles solides élémentaires donnés autour de directions  $\vec{\Omega}$  s'appuyant sur un cône d'ouverture angulaire  $\theta$  comme l'illustrent les **figures 1 et 2**. Elles renseignent sur :

- l'ordre de grandeur des **rayons nucléaires** ;
- l'existence de l'**interaction forte/force nucléaire forte** responsable de la cohésion des constituants du noyau atomique ;
- la **portée** de cette force forte ;
- la **distribution de la masse** et de la **charge nucléaire**.

En 1911, Ernest Rutherford met en évidence l'existence d'un noyau atomique central en interprétant l'expérience de Hans Geiger et Ernest Marsden<sup>2</sup> sur les **déviations des particules  $\alpha$**  par une cible mince d'or (quelques micromètres d'épaisseur). La **figure 1** en illustre le principe. Cette expérience permet d'accéder à plusieurs informations :

- **Une première évaluation du rayon nucléaire :**

Pour un choc frontal, l'application du principe de conservation de l'énergie permet, en négligeant le recul du noyau, de déterminer la **distance minimale d'approche**,  $d_{min}$ , d'un noyau atomique  $a$  par une particule alpha<sup>3</sup> incidente – notée  $\alpha$  – d'énergie cinétique  $E_\alpha$ .

<sup>1</sup> voir annexe I du chapitre 4 sur les rappels de mécanique quantique.

<sup>2</sup> H. Geiger, E. Marsden, « On a diffuse reflection of the  $\alpha$ -particles », *Proc. Roy. Soc.*, 82, 1909, pp. 495-500, <https://doi.org/10.1098/rspa.1909.0054>.

<sup>3</sup> La particule  $\alpha$  est une particule chargée formée de 2 protons et 2 neutrons : voir chapitre 3.

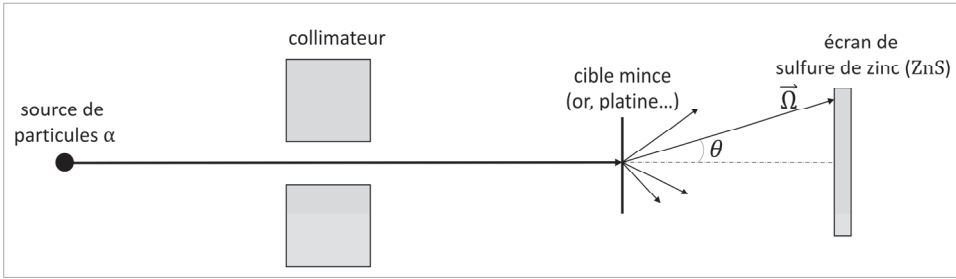


Figure 1. Schéma de principe d'expériences de diffusion des particules alpha par des cibles minces d'or et de platine ; elles ont été initialement réalisées par Hans Geiger et Ernest Marsden (1908<sup>4</sup> 1909<sup>5</sup> ...)<sup>6</sup>. L'écran en sulfure de zinc (ZnS) reçoit les particules  $\alpha$  diffusées aux différents angles  $\theta$ , permettant ainsi d'en caractériser la distribution angulaire ; celle-ci dépend de la nature des interactions qui ont lieu entre la particule alpha et les noyaux atomiques de la cible : interaction coulombienne et interaction nucléaire ; l'interaction nucléaire, qui est de courte portée, contrairement à l'interaction coulombienne, se manifeste de manière significative lorsque l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$  incidente est suffisamment élevée.

Dans le modèle initial de Rutherford, s'inspirant d'une idée du chimiste et médecin William Prout, le noyau atomique est formé uniquement de charges électriques positives élémentaires, chacune égale à la charge  $e$  de l'électron ; par conséquent, le noyau d'or possède une charge électrique égale à  $79e$  et la particule  $\alpha$  une charge égale à  $2e$  (l'unité de la charge électrique est le coulomb C). Sous ces conditions, en remarquant que la masse de la particule  $\alpha$  est petite devant celle du noyau cible d'or (dans un rapport de l'ordre de  $4/197 = 2.03 \cdot 10^{-2}$ ) on exprime que l'énergie cinétique initiale de la particule  $\alpha$  est convertie en totalité en énergie potentielle électrostatique à la distance  $d$  par la relation suivante<sup>7</sup> :

$$\frac{2e \times 79e}{4\pi\epsilon_0 d} \approx E_\alpha \quad (1.1)$$

<sup>4</sup> H. Geiger, E. Marsden, « On a the scattering of the  $\alpha$  particles by Matter », *Proceedings of the Royal Society of London*. Series A, Vol. 81, 546, August 1908, pp. 174-177, <https://doi.org/10.1098/rspa.1908.0067>.

<sup>5</sup> H. Geiger, E. Marsden, « On a Diffuse Reflection of the  $\alpha$  particles », *Proceedings of the Royal Society of London*. Series A, Vol. 82, 557, July 1909, pp. 495-500, <https://doi.org/10.1098/rspa.1909.0054>.

<sup>6</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, Hermann, Paris, 1975, p. 9.

<sup>7</sup> Rigoureusement, à la distance minimale d'approche  $d$  cherchée, l'énergie potentielle électrostatique est égale à l'énergie cinétique totale dans le référentiel du centre de masse : l'expression exacte est  $\frac{1}{2}M_0V_\alpha^2 = \frac{1}{2}M_\alpha v_\alpha^2 \frac{M_\alpha}{M_0} + \frac{2e \times 79e}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{M_0}{M_\alpha}$  où  $M_0 = \frac{M_\alpha M_{Au}}{M_\alpha + M_{Au}}$  est la masse réduite du système formé par la particule  $\alpha$  (de masse  $M_\alpha$ ) et le noyau atomique d'or (de masse  $M_{Au}$ ) éloignés d'une distance  $r$ ,  $V_\alpha$  est la vitesse initiale de la particule  $\alpha$  incidente dans le référentiel du laboratoire,  $v_\alpha$  est la vitesse instantanée de la particule  $\alpha$  incidente dans le référentiel du centre de masse. On retrouve donc l'expression (1.1) où  $E_\alpha = \frac{1}{2}M_\alpha V_\alpha^2$  pour  $v_\alpha = 0$  (valeur prise par la vitesse instantanée de la particule  $\alpha$  à la distance minimale d'approche  $d$  cherchée ; à cette même distance, le noyau atomique d'or a aussi une vitesse instantanée nulle) et  $M_0 \approx M_\alpha$  puisque  $M_\alpha \ll M_{Au}$ . Les particules chargées qui interagissent avec le noyau atomique adoptent des trajectoires hyperboliques. Pour ces différents aspects voir R. D. Evans, *Le noyau atomique*, traduction par André Bussière, Claude Stephan et Jean Vernotte Dunod, Paris, 1961, Appendice B ; le titre original de cet ouvrage fondamental est *The Atomic Nucleus*, MacGraw-Hill Inc., New-York, 1955 ; la version traduite en langue française ne comporte pas les chapitres consacrés à l'interaction des particules chargées et des photons avec la matière.

avec :  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$   $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ,  $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

### Exemple

Pour une particule  $\alpha$  incidente d'énergie  $E_\alpha = 5 \text{ MeV}$ , on en déduit la valeur de la distance minimale d'approche  $d$  :

$$d = \frac{2e \times 79e}{4\pi\varepsilon_0 E_\alpha} = \frac{2 \times 1.602 \cdot 10^{-19} \times 79 \times 1.602 \cdot 10^{-19}}{4 \times 3.14 \times 8.854 \cdot 10^{-12} \times 1.602 \cdot 10^{-19}} = 4.55 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 4.55 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$$

La distance  $d$  peut être aussi exprimée en **fermi**, noté fm, 1 fermi valant  $10^{-13} \text{ cm} = 10^{-15} \text{ m}$  :

$$d = 45 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 45 \text{ fm}$$

### ■ La mise en évidence de l'existence d'une force nucléaire forte :

La **distribution angulaire** des impacts peut être obtenue en considérant que le noyau de l'atome constitue un potentiel central coulombien engendré par une charge positive globale égale à  $Ze$ , où  $Z$  représente le nombre de charges positives présentes à l'intérieur du noyau atomique. Rutherford a obtenu, pour les particules de charge  $z$ , diffusées vers l'avant (matérialisées par les impacts), une loi de diffusion <sup>8 9 10</sup> qui s'exprime, pour une particule incidente par unité de surface sur une cible comportant un atome par unité de surface (on utilise souvent le  $\text{cm}^2$  comme unité de surface), par une densité de probabilité d'être déviée selon un angle  $\theta$  dans le référentiel du centre de masse :

$$h(\theta) = \frac{1}{16} \left[ \frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0 E_\alpha} \right]^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.2)$$

La grandeur  $h(\theta)$  dont l'unité est le  $\text{cm}^2 \text{ sr}^{-1}$  ( $\text{sr}^{-1}$  : par stéradian), représente le nombre d'impacts, donc de particules diffusées, par unité d'angle solide autour d'une direction donnée, par particule incidente et par noyau cible (centre diffuseur). Elle est connue sous le nom de **section efficace de Rutherford**. Il s'agit d'une **section efficace microscopique différentielle en angle** (voir chapitre 8, § 1),

### Remarque

Dans l'ancien système d'unités UES-CGS (unités électrostatique - centimètre, gramme, seconde) le facteur  $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$  présent dans le système d'unités international (SI) n'apparaît pas. En effet, dans le système UES-CGS la loi de Coulomb s'écrit simplement :

$$|\vec{F}| = \frac{zeZe}{r^2} = \frac{zZe^2}{r^2} \quad (1.3)$$

<sup>8</sup> E. Rutherford, « LXXIX. The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom », *Philosophical Magazine Series 6*, 21:125, 1911, pp. 669-688, <http://dx.doi.org/10.1080/14786440508637080>.

<sup>9</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., Appendice B, p. 652 et sq.

<sup>10</sup> L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, Éditions Mir, Moscou, 1969, p. 75 et sq.

où  $|\vec{F}|$  est le module de la force électrostatique  $\vec{F}$  que la particule  $\alpha$  exerce sur le noyau atomique située à la distance  $r$  (et réciproquement). L'énergie potentielle correspondante s'écrit :

$$\frac{zZe^2}{r} \quad (1.4)$$

Il en résulte que l'expression suivante de la section efficace de Rutherford prend la forme<sup>11</sup> :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left[ \frac{zZe^2}{2E_\alpha} \right]^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (1.5)$$

En raison de l'isotropie de la matière les relations (1.2) est indépendante de l'angle de  $\varphi$  de révolution autour de l'axe orienté spécifiant la direction de la particule  $\alpha$  incidente (voir figures 1 et 2) : tous les angles  $\varphi$  sont équiprobables pour une valeur donnée de l'angle de déviation  $\theta$  (les directions de diffusion correspondantes  $\vec{\Omega}$  s'appuient sur un cône dont le sommet est situé sur l'axe précité et dont l'angle d'ouverture est  $\theta$ ).

En augmentant progressivement l'énergie d'incidence des particules  $\alpha$  dans ces expériences de diffusion, telles que celle de la diffusion de particules  $\alpha$  d'énergie comprise entre 5 et 40 MeV sur une cible de plomb, on a constaté un écart entre la loi angulaire déduite des mesures et celle prédite par le calcul. L'écart observé est interprété comme la manifestation d'une interaction à très courte portée, c'est-à-dire agissant sur de très courtes distances, de l'ordre du fermi :  $1.5 \text{ fm} = 1.5 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ , et qui supplante l'interaction coulombienne.

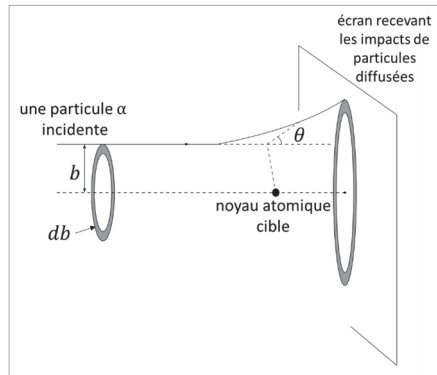


Figure 2. Schématisation de la diffusion d'une particule par un noyau cible (centre diffuseur) supposée ponctuelle ; les particules  $\alpha$  qui passent à l'intérieur de la couronne circulaire de rayon  $b$  et de largeur  $db$  sont diffusées à un angle correspondant compris entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ .<sup>12</sup>

Cette interaction qualifiée de « forte » – **interaction forte** – est considérée comme responsable de la cohésion du noyau atomique (voir chapitre 3). Ultérieurement, des

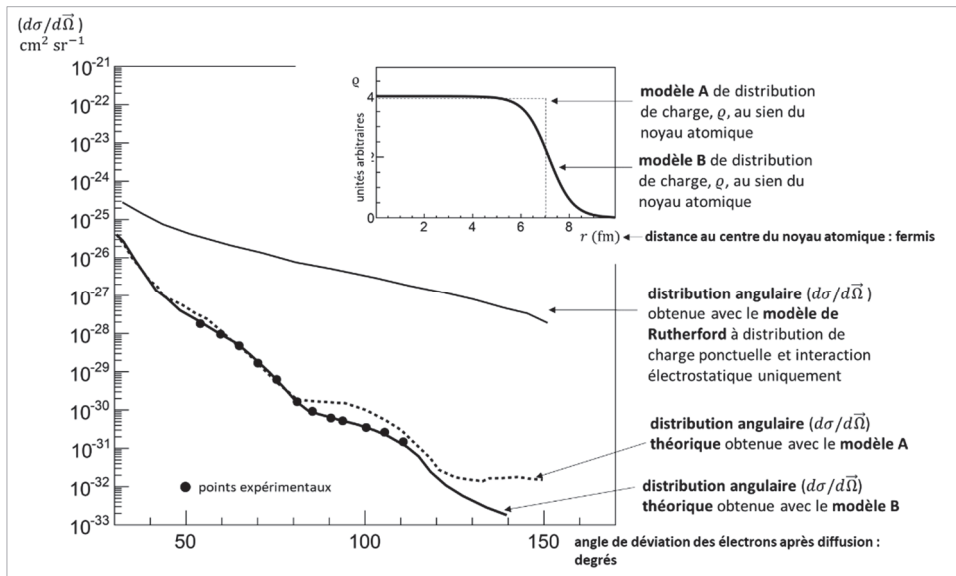
<sup>11</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit., p. 12, équation (1.4).

<sup>12</sup> *Ibid.*, p. 11, figure 1.2.

expériences de diffusion élastique d'électrons relativistes (150 MeV, par exemple : la **longueur d'onde de de Broglie** associée est  $hc/150 \text{ MeV} \sim 10^{-13} \text{ cm}$ ) sur des noyaux d'or ont permis de beaucoup mieux préciser la **distribution en charge nucléaire**  $q(r)$  des noyaux.

On verra dans les chapitres 8 et 10 que des formalismes théoriques permettent d'exprimer la grandeur  $d\sigma/d\Omega$  en fonction d'un potentiel  $V(r)$  associé à la distribution de charge au sein du noyau atomique. On modélise le potentiel nucléaire  $V(r)$  par différentes formes et l'on compare les valeurs calculées de  $d\sigma/d\Omega$  pour ces différents potentiels aux valeurs mesurées afin d'en déduire la forme rendant le mieux compte des résultats expérimentaux. C'est ce qu'illustre la **figure 3**.

La diffusion par les neutrons permet d'accéder à la distribution de la masse nucléaire. On fera l'hypothèse que le **rayon de masse** et le **rayon de charge** sont confondus. Il convient d'ores et déjà de noter que le rayon nucléaire intervient dans l'interprétation de nombreux faits expérimentaux : la diffusion des particules, l'énergie coulombienne emmagasinée dans les noyaux, les modèles de structure nucléaire, le déplacement des raies atomiques, les réactions nucléaires.



<sup>13</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit., p. 17, figure I.6.

Progressivement, expériences et théories précisent l'image grossière d'une mûre que l'on pourrait avoir du noyau atomique : un assemblage d'entités élémentaires, dénommées **nucléons**.

Toutefois, les noyaux atomiques ne sont pas nécessairement de forme sphérique, seule une minorité d'entre eux le sont. Les méthodes d'analyse mentionnées plus haut ne renseignent pas sur la forme du noyau en fonction du temps, mais sur sa forme moyenne dans le temps. L'étude de la distribution de charge dans le noyau atomique montre que les noyaux particuliers dits **magiques** ont la forme d'une sphère. Cependant, un noyau atomique sphérique n'est pas obligatoirement magique, comme le montre le cas du silicium 36. La forme des noyaux est en général plutôt oblongue, par exemple comme celle d'un ballon de rugby ; la **figure 4** montre les différentes formes.

E. Rutherford donne un nom aux nucléons du noyau atomique chargés positivement : **proton**<sup>14</sup>. Le proton est une particule quasi stable puisque sa période est estimée supérieure à  $10^{33}$  ans<sup>15</sup>. Sa taille est sujette à discussion, car selon la manière dont elle est mesurée, les valeurs obtenues diffèrent :  $\sim 0.831$  femtomètre ( $10^{-15}$  m),  $\sim 0.844$  et  $\sim 0.883$  femtomètre.<sup>16 17</sup>

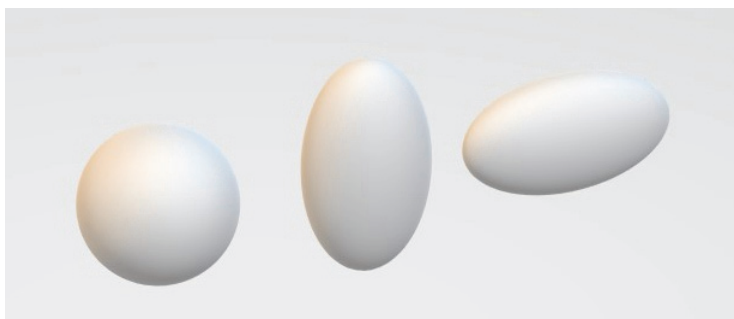


Figure 4. Exemple de formes différentes de noyaux atomiques. D'autres formes plus exotiques existent.<sup>18</sup>

<sup>14</sup> *Proton*, proposé par E. Rutherford, serait la forme simplifiée du terme initial « prouton » construit à partir du nom du chimiste William Prout, pour rendre hommage au caractère précurseur des travaux de ce dernier ; « proton » fait également référence au grec ancien : *prôtos* signifiant « premier » et le suffixe *on* dérivant de *ión* signifiant « allant ».

<sup>15</sup> B. Bajc, J. Hisano, T. Kuwahara, Y. Omura, « Threshold corrections to dimension-six proton decay operators in non-minimal SUSY SU(5) GUTs », *Nuclear Physics B*, Volume 910, 2016, pp. 1-22, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2016.06.017>.

<sup>16</sup> J. Bernauer, R. Pohl, « Le proton, un problème de taille », *Pour la Science*, n° 439, 2014, pp. 28-35.

<sup>17</sup> W. Xiong, A. Gasparian, H. Gao, *et al.*, « A small proton charge radius from an electron-proton scattering experiment », *Nature* 575, 2019, pp. 147-150, <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1721-2> ; D. Castelvechi, « How big is the proton? Particle-size puzzle leaps closer to resolution », *Nature* 575, 219, pp. 269-270, <https://doi.org/10.1038/d41586-019-03432-4>.

<sup>18</sup> Voir par exemple : <http://www.riken.jp/en/research/rikenresearch/highlights/7240/>.



## 2. La découverte du neutron

En 1930, Walther Bothe et Herbert Becker<sup>19</sup> observent un rayonnement particulièrement pénétrant (noté « n ») en bombardant du béryllium par des particules  $\alpha$  : **béryllium** +  $\alpha \rightarrow$  **carbone** + **n**, plus précisément :  ${}^9_4\text{Be} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{12}_6\text{C} + {}^1_0\text{n}$ . Cette expérience est reprise avec du bore : **bore** +  $\alpha \rightarrow$  **azote** + **n**, plus précisément :  ${}^{10}_5\text{B} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + {}^1_0\text{n}$ , en 1932 par F. et I. Joliot-Curie qui montrent que ce rayonnement est capable de communiquer une énergie supérieure à 1 MeV à des noyaux d'hydrogène d'un bloc de paraffine par exemple<sup>20</sup>.

Mais c'est à James Chadwick que l'on doit l'identification de ce rayonnement<sup>21 22 23</sup>, le **neutron**, symbolisé par la lettre « n », dont l'existence rend compte à la fois des **masses des noyaux**, de la **neutralité globale des atomes** (nombre de charges), des **diffusions observées** et des **moments cinétiques mesurés** tels que ceux de l'azote 14. Cette découverte du neutron a conduit à la notion fondamentale d'**isotope**<sup>24</sup> (voir chapitre 3).

Contrairement au proton, le neutron, lorsqu'il est seul, en dehors du noyau atomique, n'est pas une particule stable : sa durée de vie moyenne est de 877.75 secondes<sup>25</sup> (14.629 minutes) et par conséquent sa période de décroissance radioactive ou demi-vie est de 10.138 minutes. Sa taille est similaire à celle du proton.

Un noyau atomique est ainsi donc formé de **nucléons** de deux espèces différentes : l'une porte une charge positive, c'est le **proton**, l'autre, le **neutron**, est de charge électrique nulle, comme son nom le suggère.

Une force attractive à courte portée, mais puissante, la **force nucléaire**, s'exerce entre les nucléons, permettant de les maintenir ensemble dans un volume très petit de l'espace, et par conséquent de former le **noyau atomique**. Les électrons qui « tournent autour de ce

<sup>19</sup> « Walther Bothe and the Physics Institute: the early years of nuclear physics », <https://www.nobelprize.org/prizes/uncategorized/walther-bothe-and-the-physics-institute-the-early-years-of-nuclear-physics/>.

<sup>20</sup> I. Curie, F. Joliot, « Émission de protons de grande vitesse par les substances hydrogénées sous l'influence de rayons  $\gamma$  très pénétrants », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 194, 1932, pp. 273-275 (note du 18 janvier 1932).

<sup>21</sup> J. Chadwick, « Possible Existence of a Neutron », *Nature* 129, February 27, 1932, p. 312, <https://doi.org/10.1038/129312a0>.

<sup>22</sup> I. Curie, F. Joliot, « Preuves expérimentales de l'existence du neutron », *J. Phys. Radium*, 1933, 4 (1), pp. 21-33, <https://doi.org/10.1051/jphysrad:019330040102100>.

<sup>23</sup> J. Six, *La découverte du neutron*, Éditions du CNRS, Paris, 1987.

<sup>24</sup> Du grec « isos » « égal » et « topos » « lieu », même lieu, terme proposé par Frederick Soddy dans « Intra-atomic Charge », *Nature* 92, 1913, pp. 399-400 : « I call "isotopes" or "isotopic elements" because they occupy the same place in the periodic table ». They are chemically identical..., <https://doi.org/10.1038/092399c0>.

<sup>25</sup> F. M. Gonzalez et al. (UCN $\tau$  Collaboration), « Improved Neutron Lifetime Measurement with UCN $\tau$  », *Physical Review Letters* 127, 162501, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.162501>.

noyau » assurent la neutralité électrique de l'ensemble, alors dénommé **atome neutre** lorsque le nombre d'électrons est égal au nombre de protons et **ion** dans le cas contraire<sup>26</sup>.

### 3. La radioactivité

La **radioactivité** a été mise en évidence par Henri Becquerel<sup>27</sup> en 1896, en observant que les sels d'uranium émettaient un rayonnement capable d'impressionner des plaques photographiques. En 1898, Pierre et Marie Curie isolent pour la première fois des **éléments radioactifs**<sup>28</sup>, le **polonium** et le **radium**. La théorie des transformations radioactives est due à Ernest Rutherford et Frederick Soddy<sup>29</sup> auxquels on doit aussi l'identification des trois **séries** ou **familles radioactives** des **radioéléments naturels**<sup>30 31 32 33</sup>.

- La famille radioactive du **thorium 232** : le nombre de nucléons des noyaux appartenant à cette famille est un multiple de 4 :  $4m$ , avec  $m$  nombre entier, variant de  $m = 65$  avec le dubnium 260,  ${}^{260}_{105}\text{Db}$ , à  $m = 52$  pour le thallium 208,  ${}^{208}_{81}\text{Tl}$  ;

<sup>26</sup> On rappelle que l'**ion** est appelé **cation** si le nombre d'électrons est inférieur au nombre de protons et sa charge électrique est positive et **anion** si le nombre d'électrons est supérieur au nombre de protons ; ce rappel trouvera son utilité en particulier lorsque sera abordée la radioactivité bêta dans le chapitre 5.

<sup>27</sup> H. Becquerel, « Sur les radiations émises par phosphorescence », *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*, séance du 24 février 1896, pp. 420-421,

[https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel\\_pdf/CR1896\\_p420.pdf](https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel_pdf/CR1896_p420.pdf) et « Sur les radiations invisibles émises par les corps phosphorescents », séance du 1<sup>er</sup> mars 1896, pp. 501-502, [https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel\\_pdf/CR1896\\_p501.pdf](https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel_pdf/CR1896_p501.pdf).

<sup>28</sup> « Sur une substance nouvelle radio-active, contenue dans la pechblende », Note de P. Curie et Mme S. Curie. *C. R. T.127* (1898) 175-178 ; cette nouvelle substance (élément) est le « polonium », [https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Curie/Curie\\_pdf/Curie\\_1898lm.pdf](https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Curie/Curie_pdf/Curie_1898lm.pdf). Cette note qui a été présentée à l'Académie des sciences par Henri Becquerel, introduit par son titre même le terme « radio-active », accolant « radio » relatif aux radiations, au qualificatif « actif/active » antérieurement employé (voir note de Mme Skłodowska Curie, « Rayons émis par les composés de l'uranium et du thorium », présentée à l'Académie des sciences le 12 avril 1898, par M. Lippmann, *C.R. T. 126* (1898) 1101-1103). Le mot « radio-activité » apparaît dans la note intitulée « Sur une nouvelle substance fortement radio-active, contenue dans la pechblende (2) » signée M. P. Curie, Mme P. Curie, M. G. Bémont, encore présentée par H. Becquerel, à l'Académie des sciences : *C. R. T.127* (1898) 1215-1217 ; les auteurs ont baptisé cette nouvelle substance (élément), fortement radioactive, « radium », [https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Curie/Curie\\_pdf/CR1898\\_p1215-1217.pdf](https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Curie/Curie_pdf/CR1898_p1215-1217.pdf)

<sup>29</sup> E. Rutherford, F. Soddy, « Radioactive Change », *Philosophical Magazine and Journal of Science*, Volume 5, Issue 29, pp. 576-591, 1903, <https://doi.org/10.1080/14786440309462960> ; E. Rutherford, *Radio-activity*, second edition, Cambridge University Press, 1905,.

<sup>30</sup> Y. Chelet, *La radioactivité*, Nucléon-EDP Sciences, Paris, 2006.

<sup>31</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Paris, Dunod, 1961, chapitres 15, 16 et 17. Traduction partielle en langue française par A. Bussièrre, C. Stephan et J. Vernotte, de la version anglaise : *The atomic nucleus*, Mac Graw Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

<sup>32</sup> Voir aussi B. B. Boltwood, « Ultimate disintegration products of the radioactive elements; Part II, Disintegration products of uranium », *American Journal of Science* Vol. s4-23, 134, pp. 78-88, February 1907, <https://doi.org/10.2475/ajs.s4-23.134.78>.

<sup>33</sup> *Chart of the Nuclides*, Knolls Atomic Power Laboratory (KAPL), USA ; *Live Chart of Nuclides nuclear structure and decay data hart of the Nuclides*, AIEA, <https://nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html> ; Laboratoire national Henri Becquerel : <http://www.lnhb.fr/donnees-nucleaires/>.

cette chaîne de décroissance radioactive aboutit au plomb 208,  $^{208}_{82}\text{Pb}$ , qui est un nucléide stable.

- La famille radioactive de l'**uranium 238** : le nombre de nucléons des noyaux appartenant à cette famille est de la forme  $4m + 2$ , avec  $m$  nombre entier, variant de  $m = 65$  avec le dubnium  $^{262}_{105}\text{Db}$  à  $m = 52$  pour le thallium 206,  $^{206}_{81}\text{Tl}$  ; cette chaîne de décroissance radioactive aboutit au plomb 206,  $^{206}_{82}\text{Pb}$ , qui est un nucléide stable.
- La famille radioactive de l'**uranium 235** : le nombre de nucléons des noyaux appartenant à cette famille est de la forme  $4m + 3$ , avec  $m$  nombre entier, variant de  $m = 65$  avec le seaborgium,  $^{263}_{106}\text{Sg}$ , à  $m = 52$  pour le thallium 207,  $^{207}_{81}\text{Tl}$  ; cette chaîne de décroissance radioactive aboutit au plomb 207,  $^{207}_{82}\text{Pb}$ , qui est un nucléide stable.
- la famille radioactive du **neptunium 237** a été produite **artificiellement** ; le nombre de nucléons des noyaux appartenant à cette famille est de la forme  $4m + 1$ , avec  $m$  nombre entier, variant de  $m = 65$  avec le rutherfordium,  $^{261}_{104}\text{Rf}$ , à  $m = 52$  pour le plomb 209,  $^{209}_{82}\text{Pb}$  ; cette chaîne de décroissance radioactive aboutit au bismuth 209,  $^{209}_{83}\text{Bi}$ , qui est un nucléide stable.

Elles sont respectivement représentées par les **figures 5 à 8**.

F. et I. Joliot-Curie découvrent en 1934 la **radioactivité artificielle** en bombardant une feuille d'aluminium avec des particules  $\alpha$  : aluminium +  $\alpha \rightarrow$  phosphore + n, plus précisément :  $^{27}_{13}\text{Al} + ^4_2\text{He} \rightarrow ^{30}_{15}\text{P} + ^1_0\text{n}$ <sup>34</sup>. Le **phosphore** obtenu est **radioactif**, émettant une particule chargée positivement, le **positron** ou **positon**, « anti-électron » de charge positive/antiparticule de l'électron<sup>35</sup> : c'est un exemple de radioactivité dite « **bêta** » ( $\beta$ ).

La radioactivité observée manifeste donc le caractère instable de certains noyaux atomiques et il existe plusieurs types de radioactivité correspondant à l'émission au cours du temps de différents types de **rayonnements** : alpha ( $\alpha$ ), bêta ( $\beta$ ), gamma ( $\gamma$ )<sup>36</sup>, **neutrons** et de **groupements de nucléons** ou « **clusters** ».

<sup>34</sup> I. Curie, F. Joliot, « Un nouveau type de radioactivité », *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 198, p. 1934, pp. 254-256,

<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31506.image.f254#>.

<sup>35</sup> P. A. M. Dirac, « The Quantum Theory of the Electron », *Proceedings of The Royal Society of London*, A 1928 117, pp. 610-624 : le positron n'avait pas encore été observé expérimentalement et Dirac prédit donc l'existence de cette antiparticule.

<sup>36</sup> La dénomination des rayonnements alpha, bêta et gamma est due à E. Rutherford. G. Gamow y fait malicieusement écho par les initiales des noms, ordonnancés par ses soins, des auteurs d'un article publié en 1948 intitulé « The Origin of Chemical Elements » et signé R. A. Alpher, H. Bethe, G. Gamow in *Physical Review*, Volume 73, Number 7, April 1, 1948, pp. 803-804,

<https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.73.803>. Ce court papier propose une forme des équations différentielles couplées devant décrire l'évolution temporelle du nombre de nucléides des différentes espèces formées dans l'univers et où interviennent des sections efficaces de capture des neutrons.

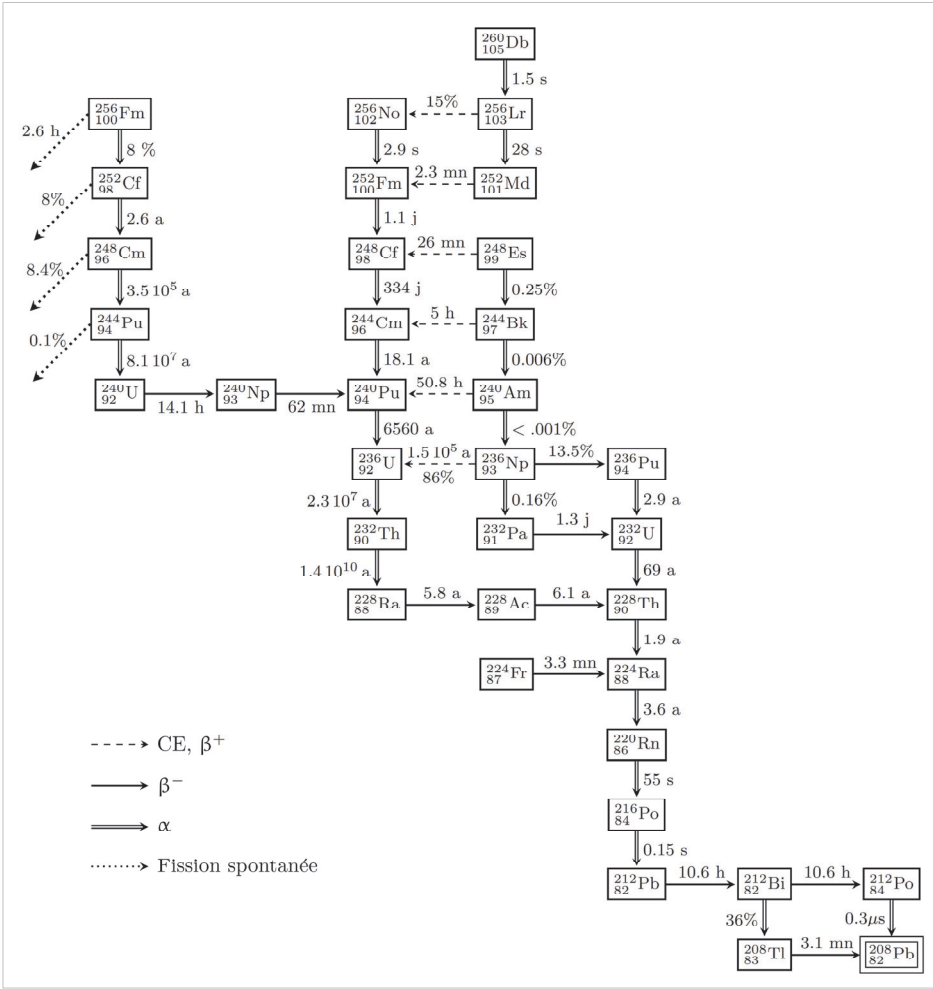


Figure 5. La chaîne de décroissance 4m, famille radioactive du thorium 232.

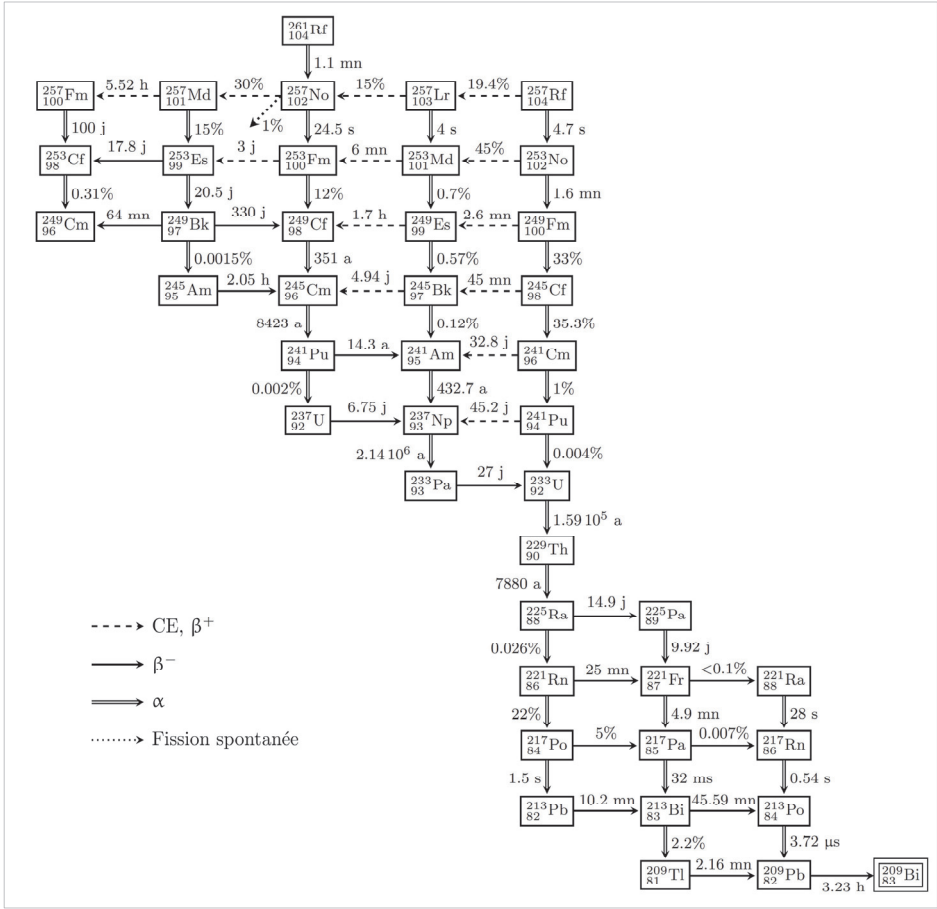


Figure 6. La chaîne de décroissance  $4m+1$ , famille radioactive du neptunium 237.

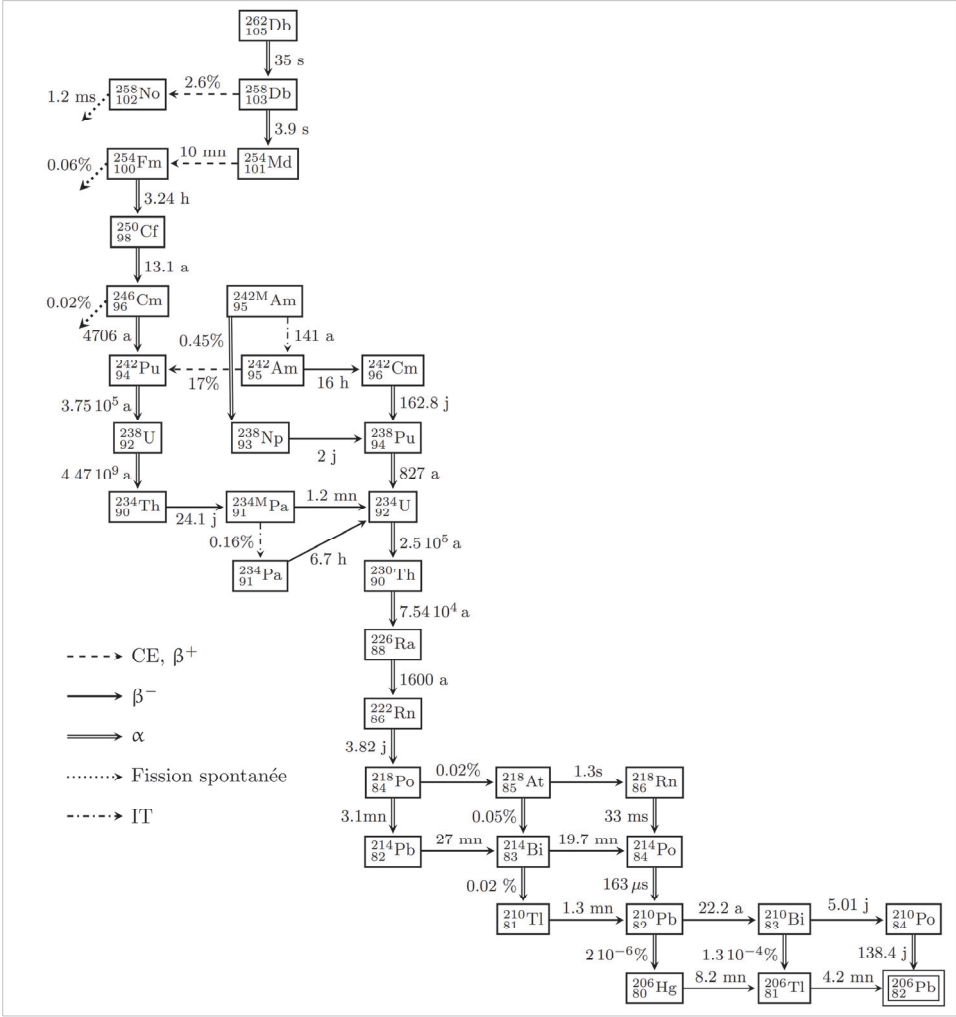


Figure 7. La chaîne de décroissance 4m + 2, famille radioactive de l'uranium 238.







# **3**

## **Le noyau atomique – Définitions et concepts fondamentaux**



La matière est constituée d'**atomes**. Le nombre d'atomes dans un objet donné varie selon sa nature et ses dimensions. Ainsi, le « vide » intergalactique contient-il moins de 10 atomes par mètre cube, mais l'univers visible contiendrait hypothétiquement de l'ordre de  $10^{80}$  atomes, le soleil  $10^{57}$ , la terre  $10^{51}$ , un centimètre cube d'air  $10^{21}$ , un gramme d'eau  $10^{24}$ , un être humain  $10^{28}$ , un gramme de fer  $10^{22}$ , un gramme d'uranium  $10^{21}$ . Des théories visant à expliquer la formation des atomes dans notre Univers par des processus nucléaires tels que la **nucléosynthèse** et la **production cosmogénique** ont été développées à partir de 1938,<sup>12 3 4 5 6 7</sup> etc. Par exemple, dans le cadre du « **modèle standard** » on discerne plusieurs phases de formation des éléments chimiques liées à la fois à la température et à la densité de matière :

- la **nucléosynthèse primordiale** durant laquelle les protons et les neutrons existent sans donner lieu à la construction d'édifices atomiques ;
- d'une seconde à trois minutes, la baisse de température permet la formation du deutérium, du tritium, et de quelques autres éléments légers à l'état de trace : lithium, béryllium, bore ;
- au-delà de trois minutes, les éléments chimiques plus lourds sont fabriqués par :
  - la **nucléosynthèse stellaire**, dans les étoiles ; il s'agit de réactions nucléaires référencées sous le nom de processus « s » pour *slow* correspondant à des temps réactionnels caractéristiques de 10 à 1 000 ans ;
  - la **nucléosynthèse explosive** (« **supernova** » et « **kilonova** » (collision d'étoiles à neutrons)) mettant en œuvre le processus « r », beaucoup plus rapide que le précédent, de l'ordre d'une seconde, s'exerçant au sein d'une matière extrêmement dense, responsable de la fabrication d'une part importante des éléments chimiques au-delà du fer (la moitié ?).<sup>8</sup>

<sup>1</sup> H. Bethe, C. L. Critchfield, « The Formation of Deuterons by Proton Combination », *Physical Review* 54, 248, 15 August 1938, pp. 238-254, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.54.248>.

<sup>2</sup> Georges Lemaître, *L'hypothèse de l'atome primitif – Essai de cosmogonie*, Éditions du Griffon, Neuchâtel, 1946.

<sup>3</sup> R. A. Alpher, H. Bethe, G. Gamow, « The Origin of Chemical Elements », *Physical Review* 73, April 1, 1948, pp. 803-804, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.803>.

<sup>4</sup> M. Goeppert-Mayer, E. Teller, « On the origin of elements », *Physical Review* 8, October 15, 1949, pp. 1226-1231, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.1226>.

<sup>5</sup> E. M. Burbidge, G. R. Burbidge, W. A. Fowler, F. Hoyle, « Synthesis of the Elements in Stars », *Rev. Mod. Phys.* 29, October 1, 1957, pp. 547-654, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.29.547>.

<sup>6</sup> G. R. Burbidge, E. M. Burbidge, W. A. Fowler, « The quest for origin of the elements », dans *Science*, vol. 226, 23 November 1984, pp. 922-934, <https://www.science.org/doi/10.1126/science.226.4677.922>.

<sup>7</sup> H. Reeves, P. K. Kuroda, *The origin of the chemical elements and the Oklo phenomenon*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

<sup>8</sup> Cela n'exclurait pas la production de noyaux légers dans les *kilonovae* également : A. Perego *et al.*, « Production of Very Light Elements and Strontium in the Early Ejecta of Neutron Star Mergers », *The Astrophysical Journal*, Volume 925, Number 1, January 20, 2022, pp. 1-16, <https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/ac3751>.

Ce modèle, bien que largement partagé dans la communauté scientifique, n'explique pas toutes les observations faites, ce qui conduit à interroger sa validité.<sup>9</sup>

Des recherches antérieures<sup>10</sup> avaient déjà permis de préciser les constituants de l'atome, formé d'une entité centrale, le **noyau atomique**, autour de laquelle « tournent » des **électrons**.

La matière présente plusieurs niveaux d'organisation et différentes tailles des entités qui la constituent, comme le schématise la **figure 1**.

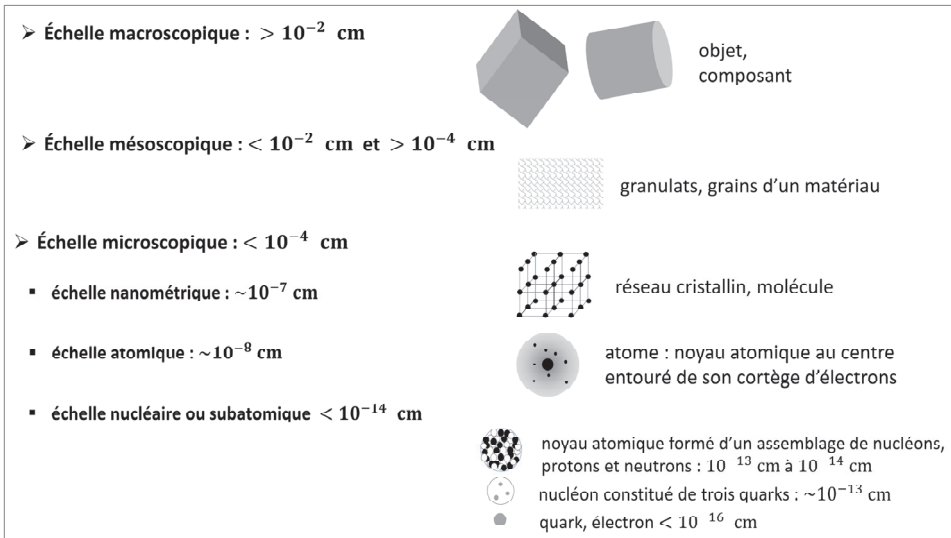


Figure 1. Les différentes échelles d'organisation/description de la matière.

Ce chapitre présente les différents constituants du noyau atomique ainsi que les différents types de noyaux existants. Il en précise les dimensions et la masse. Il introduit les notions fondamentales d'**énergie de liaison** et de **force nucléaire** qui rendent compte de la cohésion du noyau atomique.

<sup>9</sup> J.-M. Bonnet-Bidaud, T. Lepeltier, *Big Bang - Histoire critique d'une idée*, Éditions Gallimard/Folio, 2021.

<sup>10</sup> W. Heisenberg, *La physique du noyau atomique*, Albin Michel, Paris, 1954.

## 1. Les constituants du noyau de l'atome

On désigne un type d'atomes par le terme de **nucléide** (ou **nuclide**).<sup>11</sup> Un nucléide est formé de **nucléons** de deux types : les **protons** de charge électrique positive et les **neutrons** de charge électrique nulle. Le nombre total de nucléons, noté  $A$ , est la somme du nombre  $Z$  de **protons** et du nombre  $N$  de **neutrons**. L'**atome neutre** comporte un cortège électronique de  $Z$  **électrons**, porteurs d'une charge électrique négative, se déplaçant autour du noyau à des distances de l'ordre de l'angström ( $10^{-10}$  m). La charge électrique du proton est égale en valeur absolue à celle de l'électron et vaut  $e = 1.602\,176\,634\,10^{-19}$  C (coulombs). Dans les différents chapitres de l'ouvrage, les vocables « noyau atomique », « noyau atomique léger », « noyau atomique lourd », ou plus succinctement « noyau », « noyau léger », « noyau lourd », sont respectivement employés de manière équivalente à « nucléide », « nucléide léger », « nuclide lourd ».

$A$  est appelé **nombre de masse**,  $Z$  **numéro atomique**. On a :  $A = Z + N$ . Un nucléide  $X$  est noté conventionnellement :  ${}^A_ZX$  et parfois  ${}^AX_N$  où  $X$  est le nom ou le symbole de l'élément chimique considéré. Par exemple :

- ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^1_1\text{H}_1$ , désigne le nucléide **hydrogène** possédant 1 nucléon : 1 proton et 0 neutron ;
- ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}_8$ , désigne le nucléide **oxygène** possédant 16 nucléons : 8 protons et 8 neutrons ;
- ${}^{235}_{92}\text{U}$ ,  ${}^{235}_{92}\text{U}_{143}$  désigne le nucléide **uranium** possédant 235 nucléons : 92 protons et  $235 - 92 = 143$  neutrons.

Le neutron est parfois noté  ${}_0^1\text{n}$  et le proton  ${}_1^1\text{p}$ .

### 1.1. Nucléides naturels stables

Le nombre de **nucléides naturels stables** recensés dans le **tableau de Mendeleïev** (**tableau 1**), est de **266**, appartenant à **90** types d'atomes naturels appelés **éléments chimiques naturels**<sup>12</sup>.

Les éléments naturels ont un nombre de protons prenant successivement les valeurs 1 à 92, mais avec deux lacunes : le **technétium**,  $Z = 43$ , et le **prométhéum**  $Z = 61$  qui ont été (re)fabriqués artificiellement. Ils se répartissent selon les indications portées dans le **tableau 2**.

Le premier nucléide stable est  ${}^1_1\text{H}$ , l'**hydrogène 1**, pour lequel :  $A = 1, Z = 1, N = 0$ . Le dernier nucléide stable est le **bismuth 209**,  ${}^{209}_{83}\text{Bi}$ , pour  $A = 209, Z = 83, N = 126$ . Les quatre nucléides de nombres de protons et de neutrons impairs, ou nucléides « impairs-

<sup>11</sup> G. Guinier, « Qu'est-ce qu'un nucléide ? », *Bulletin de l'union des physiciens*, n° 685, Juin 1986, pp. 977-979.

<sup>12</sup> Y. Chelet, *La radioactivité*, Nucléon-EDP Sciences, Paris, 2006.

impairs », stables sont le **deutérium**,  $^2_1\text{H}$ , le **lithium** 6,  $^6_3\text{Li}$ , le **bore** 10,  $^{10}_5\text{B}$  et l'**azote** 14,  $^{14}_7\text{N}$ .

Tableau 1. Le « tableau de Mendeleïev » ou tableau périodique des éléments.<sup>13 14 15 16</sup>

H																	He														
Li	Be															B	C	N	O	F	Ne										
Na	Mg															Al	Si	P	S	Cl	Ar										
K	Ca	Sc												Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr			
Rb	Sr	Y												Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe			
Cs	Ba	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
Fr	Ra	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt									
Non métaux			Semi-métaux			Actinides																									
Métaux			Lanthanides																												

Tableau 2. Répartition des nucléides stables en fonction du nombre de neutrons  $N$  et du nombre de protons  $Z$ .

$A$	$Z$	$N$	Nombre de nucléides stables
pair	pair	pair	159
impair	pair	impair	53
impair	impair	pair	50
pair	impair	impair	4
Total			266

Remarque

Un nucléide pourra être également désigné en suffixant son nombre de masse à son nom ou bien à son symbole conventionnel : par exemple H1, H2, O16, U235, oxygène 16, uranium 235.

1.2. Nucléides naturels instables

Les nucléides naturels **stables** coexistent avec des nucléides naturels **instables** d’origines diverses, appelés **radionucléides**. Certains d’entre eux, d’une durée de vie très longue, étaient présents à la formation de la Terre, comme l’**uranium 238** et l’**uranium 235**.

<sup>13</sup> *Le traitement-recyclage du combustible nucléaire usé – La séparation des actinides – Application à la gestion des déchets*, Ouvrage collectif, Une monographie de la Direction de l’énergie nucléaire, Éditions Le Moniteur/CEA, Paris, 2008, p. 11.

<sup>14</sup> Voir aussi *Chart of the Nuclides*, Lockheed Martin, KAPL Inc., USA, 2002, par exemple.

<sup>15</sup> Pour tous les nucléides connus et leurs propriétés nucléaires voir :  
<https://www.iaea.org/resources/databases/livechart-of-nuclides-advanced-version>  
<https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html> ;  
<https://wwwndc.jaea.go.jp/CN14/sp/> (Japon) ; <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/> (USA) ;  
<https://www.nucleonica.com/wiki/index.php?title=Category%3AKNC> (Allemagne) ;  
<https://atom.kaeri.re.kr/nuchart/?zlv=2> (Corée).

<sup>16</sup> E. C. Simpson, « The 3D Nuclide Chart », 2020 J. Phys.: Conf. Ser. 1643 012168,  
<https://people.physics.anu.edu.au/~ecs103/chart3d>, <https://people.physics.anu.edu.au/~ecs103/chart>.

D'autres sont apparus par désintégration radioactive des précédents ; tel est le cas du **radium 226** ou du **polonium 210**. D'autres encore sont d'origine cosmogonique comme le **carbone 14**, formé dans les hautes couches atmosphériques sous l'action du rayonnement cosmique. Ces nucléides instables sont au nombre de 75. La **fission spontanée** des noyaux lourds (voir chapitre 5) est aussi productrice de nucléides naturels instables.

### 1.3. Éléments et nucléides artificiels instables

Des éléments et nucléides artificiels ont été fabriqués dans différentes sortes de dispositifs, tels que des réacteurs nucléaires. C'est en particulier le cas du **technétium**, du **prométhéum**, du **neptunium** du **plutonium** et de l'**américium**. Toutefois, ces éléments ont existé sur Terre avant de disparaître ; les **réacteurs naturels d'Oklo**<sup>17</sup> en sont un témoignage.

D'autres nucléides n'ayant jamais existé sur Terre ont été produits, comme par exemple l'**oganesson** (ex **ununoctium** ou **eka-radon**) en 2006, de numéro atomique  $Z = 118$ , de nombre de masse  $A = 294$  (176 neutrons) et d'une période de l'ordre de  $5.8 \cdot 10^{-4}$  s. Dans cet ordre d'idée, une hypothèse émise et explorée est l'existence d'un **îlot de noyaux superlourds de grande stabilité**, situé au-delà de l'**oganesson**  ${}^{294}_{118}\text{Og}$ <sup>18 19 20</sup>.

On particularise également les radionucléides qui se rapportent à la **radioactivité éteinte** : ce sont les radio-isotopes (formés par nucléosynthèse stellaire) qui ont existé dans le passé et qui se sont complètement désintégrés (ou « éteints »). Leur identification est relativement récente (à partir du début des années 1960) : on peut citer le béryllium 10, l'aluminium 26, le fer 60, l'iode 129, etc.<sup>21</sup>

Les radionucléides sont beaucoup plus nombreux que les nucléides stables : on en recense plus de trois milliers.

### 1.4. Les différents types de nucléides

On distingue plusieurs types de nucléides en fonction de critères que l'on affecte au numéro atomique  $Z$ , au nombre de neutrons  $N$  et au nombre de masse  $A$  :

- les **isotopes** :  $Z$  constant,  $N$  et donc  $A$  variables ; exemple :  ${}^{13}_7\text{N}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ ,  ${}^{15}_7\text{N}$ ,  $Z = 7$ ;

<sup>17</sup> R. Naudet et al., *Oklo : Des réacteurs nucléaires fossiles, étude physique*, Eyrolles, Paris, 1991.

<sup>18</sup> M. Lefort, « Nuclides far off the stability line and super-heavy nuclei in heavy-ion nuclear reactions », *Journal de Physique Colloques*, 1972, 33 (C5), pp. C5-73-C5- 102, <https://doi.org/10.1051/jphyscol:1972507>.

<sup>19</sup> Y. Oganessian, « Discovery of the island of stability for superheavy elements », *Proceedings of IPAC2017*, Copenhagen, Denmark, pp. 4848-4851, <http://accelconf.web.cern.ch/ipac2017/papers/frvaa1.pdf>.

<sup>20</sup> G. G. Adamian, N. V. Antonenko, A. Diaz-Torres, S. Heinz, « How to extend the chart of nuclides? », *Eur. Phys. J. A*, 2020, pp. 56-47, <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-020-00046-7>.

<sup>21</sup> K. D. McKeegan, M. Chaussidon, F. Robert, « Incorporation of Short-Lived  ${}^{10}\text{Be}$  in a Calcium-Aluminum-Rich Inclusion from the Allende Meteorite », *Science*, August 25, 2000, Vol 289, Issue 5483, pp. 1334-1337, <https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.289.5483.1334>.

- les **isotones** :  $N$  constant,  $Z$  et donc  $A$  variables ; exemple :  ${}^{14}_6\text{C}$ ,  ${}^{15}_7\text{N}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  $N = A - Z = 8$ ;
- les **isobares** :  $A$  constant ; exemple :  ${}^{14}_6\text{C}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ ;
- les **isodiaphères** :  $N - Z$  constant ; exemple :  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  $N - Z = 0$ ;
- les **isomères** :  $Z$  et  $N$  donc  $A$  constants, correspondant à un nucléide existant dans plusieurs états d'énergie, dont celui de plus faible énergie qualifié d'état fondamental et les autres d'états excités (de durée de vie finie) ; on parle alors de **noyaux/d'états métastables**, spécifiés par la notation « m » ajoutée à la suite du nombre de masse dans la désignation du nucléide ; exemples d'isomères :  ${}^{80\text{m}}_{35}\text{Br}$  isomère du nucléide brome 80,  ${}^{80}_{35}\text{Br}$  ;  ${}^{242\text{m}}_{95}\text{Am}$  isomère de l'américium 242,  ${}^{242}_{95}\text{Am}$ ,  ${}^{179\text{m}1}_{73}\text{Ta}$  à  ${}^{179\text{m}6}_{73}\text{Ta}$ , sont six isomères du tantale 179,  ${}^{179}_{73}\text{Ta}$  (la lettre m est suffixée par l'indice d'ordre de l'isomère : mi : i = 1,6).

On qualifie de **noyaux atomiques miroirs** des noyaux atomiques pour lesquels le passage de l'un à l'autre s'obtient par une interversion du nombre de protons et de neutrons. Par exemple  ${}^{15}_8\text{O}$  et  ${}^{15}_7\text{N}$  constituent une **paire isobarique** de **noyaux miroirs**. La radioactivité  $\beta^+$  produit de telles paires pour des radionucléides possédant un proton de plus que de neutrons. Ce n'est pas le seul processus nucléaire susceptible de produire de telles paires de noyaux miroirs<sup>22</sup>.

À un même élément correspondent plusieurs isotopes. Par exemple :

- ${}^1_1\text{H}$ , l'**hydrogène « léger »**,
- ${}^2_1\text{H}$ , le **deutérium** ou **hydrogène « lourd »**,
- ${}^3_1\text{H}$ , le **tritium**, radioactif,

appartiennent à l'élément chimique **hydrogène**. Les isotopes, stables ou instables, d'un même élément chimique diffèrent par leur masse et par leurs propriétés nucléaires.

Mais les isotopes d'un même élément chimique possèdent le même nombre d'électrons dans leurs cortèges électroniques respectifs et par conséquent présentent des propriétés chimiques identiques. Par exemple, le **carbone 14** (nucléide radioactif), le **carbone 13** (nucléide stable) et le **carbone 12** (nucléide stable) de l'élément carbone ont tous trois les mêmes propriétés chimiques.

Actuellement, environ 3 100 isotopes, stables, isomères et radionucléides sont recensés avec leurs propriétés (voir chapitre 13). Pour  $Z$  pair, il y a au moins deux valeurs de  $N$  donnant des isotopes stables. Une exception : le **béryllium** :  ${}^9_4\text{Be}$ . Pour  $Z$  impair, il n'y a jamais plus de deux isotopes stables.

Une stabilité remarquable existe pour des noyaux ayant pour  $Z$  ou  $N$  les valeurs suivantes : 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Ces numéros atomiques sont appelés **nombre « magiques »**. C'est par exemple le cas du **calcium**, (Ca) :  $Z = 20$ , du **nickel** (Ni) :  $Z = 28$ , de l'**étain**

<sup>22</sup> Il y a par exemple la réaction induite par un neutron sur un noyau atomique donné, ce dernier conservant le neutron et expulsant un proton (réaction notée (n, p), voir chapitre 8).



(Sn)  $Z = 50$ , du **plomb**  $Z = 82, N = 126$ . Les nucléides  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$  sont **doublement magiques**. Cette propriété de forte stabilité sera abordée dans le chapitre 4 consacré à la structure du noyau atomique.

Les nucléides situés loin de la vallée de stabilité, caractérisés par leur nombre excédentaire de neutrons ou de protons et corrélativement par des durées de vie très courtes, sont conventionnellement appelés **noyaux exotiques**.

On désigne aussi par le terme de **radio-isotope** un isotope qui est radioactif. Le terme **radioélément** est aussi rencontré dans la littérature, recouvrant plusieurs acceptions : (i) élément chimique dont tous les isotopes sont des radio-isotopes, (ii) radio-isotope, (iii) substance radioactive.

Si l'on fait abstraction du phénomène de fission spontanée dont la probabilité de se produire est très faible, le nombre de **radioéléments naturels** est relativement limité, parmi lesquels le radium, l'uranium, le thorium pour les noyaux lourds, le tritium, le carbone 14, le potassium 40 pour les éléments légers. Les **radioéléments artificiels** sont fabriqués dans des laboratoires et dans des réacteurs nucléaires, en nombre nettement supérieur au millier.

### 1.5. Abondance isotopique

La distribution des noyaux dans la nature en fonction des nombres caractéristiques :  $N$  (nombre de neutrons) et  $Z$  (nombre de protons) est illustrée par les **figures 2 et 3**.

On observe que l'écart  $N - Z$  entre le nombre de neutrons et le nombre de protons (qui sera expliqué au chapitre 5) varie approximativement comme  $A^{5/3}$  où  $A$  est le **nombre de masse** défini plus haut. L'excès de neutrons favorise la stabilité des noyaux en diminuant l'effet de la répulsion coulombienne.

Des tables et bases de données rassemblent les valeurs des **abondances** d'un élément chimique ou d'un nucléide d'un type donné rencontré dans la nature, c'est-à-dire sa quantité en nombre d'atomes rapportée à une référence fixée. Par exemple, pour l'hydrogène, le carbone, l'oxygène, le fluor et l'uranium, le **tableau 3** fournit les abondances isotopiques exprimées en % du nombre d'atomes dans l'élément chimique naturel considéré et la **figure 4** indique l'abondance isotopique naturelle relative en fonction du nombre de masse.

Des tables et bases de données recensent avec leurs caractéristiques détaillées, à des degrés divers, les isotopes connus à ce jour : **masses, états isomériques, modes de décroissance radioactive, intensités des rayonnements émis, spin, parité, période de décroissance radioactive**<sup>23</sup>.

<sup>23</sup> Voir chapitre 14. *The Nubase2016 evaluation of nuclear and decay properties*: [http://amdc.in2p3.fr/web/nubase\\_en.html](http://amdc.in2p3.fr/web/nubase_en.html) ; ENSDF (Evaluated Nuclear Structure Data File) data base <https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/> ; M. Wang *et al.*, « The Ame2016 Atomic Mass Evaluation », *Chinese Physics C*, 2017 (41) 030003 ; J. Meija *et al.*, « Atomic weights of the elements 2013 », *Pure Appl. Chem.* (IUPAC Technical Report), 2016, 88 (3), 265–291, <https://www.ciaaw.org/atomic-masses.htm> ; R.B. Firestone, *Tables of Isotopes*, Wiley, USA (avec C.D. ROM), 1996.

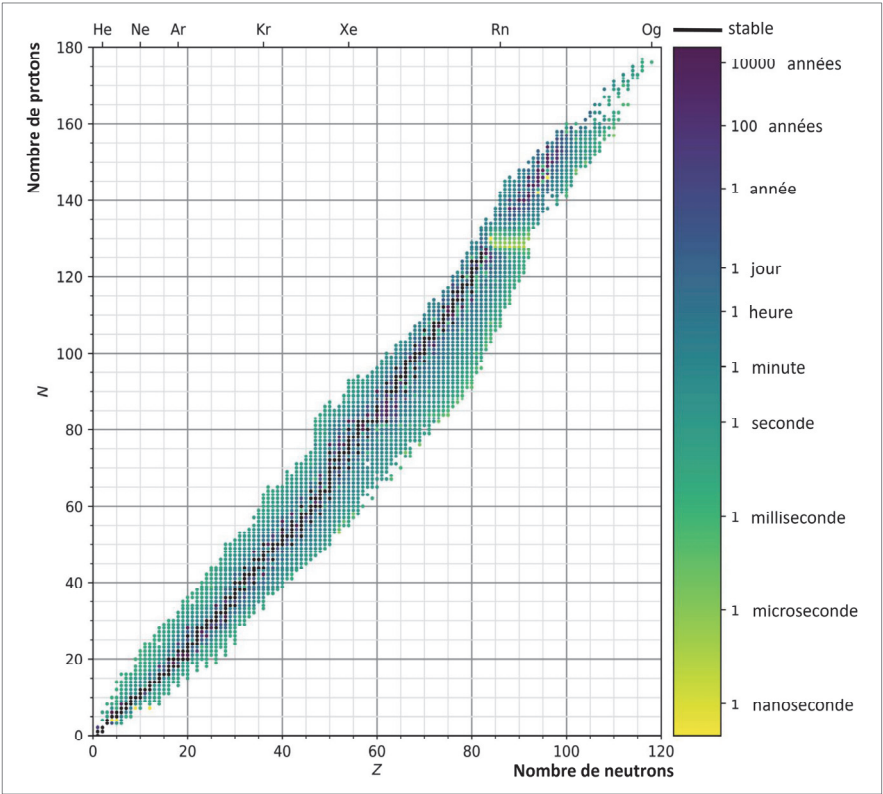
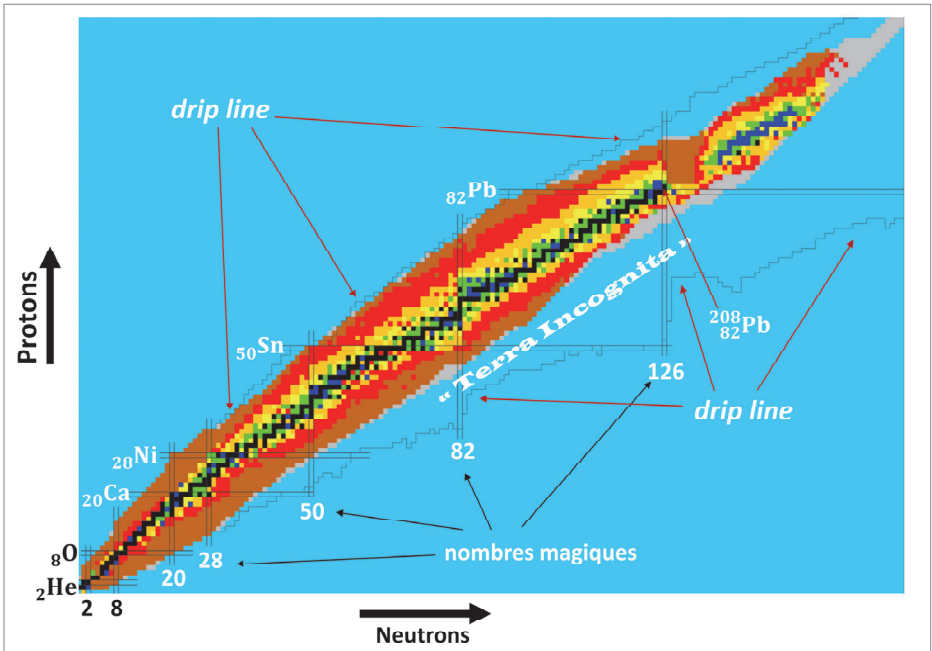


Figure 2. Ligne ou vallée de stabilité ; distribution des isotopes dans la nature en fonction de leurs nombres de protons et de neutrons<sup>24</sup>, dénommée « diagramme de Segré ».<sup>25</sup>

<sup>24</sup> G. Fea, « Tabelle Riassuntive e Bibliografia Delle Trasmutazioni Artificiali », *Il Nuovo Cimento* 12 G 1935, pp. 368-406, <https://doi.org/10.1007/BF02958685> ; voir aussi Luc Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, Hermann, Paris, 1975, p. 44.

<sup>25</sup> Compiled by Alfreda Segre, *Isotope chart (high atomic number end)*, LAMS-271, 1945 ; <https://www.ornl.gov/health-physics-museum/library/radionuclides.html>.



	$T < 1 \text{ s}$
	$1 \text{ s} \leq T < 2 \text{ min}$
	$2 \text{ min} \leq T < 1 \text{ h}$
	$1 \text{ h} \leq T < 1 \text{ j}$
	$1 \text{ j} \leq T < 1 \text{ an}$
	$1 \text{ an} \leq T < 10^9 \text{ ans}$
	stable
	inconnu
	pas de données disponibles

<sup>26</sup> Figure produite avec le logiciel JANIS (Java-based Nuclear Information Software) (JANIS) de OCDE/NEA, [https://www.oecd-neia.org/jcms/pl\\_39963/janis-downloads](https://www.oecd-neia.org/jcms/pl_39963/janis-downloads) et voir [http://irfu.cea.fr/Images/astlmg/4451\\_2.jpg](http://irfu.cea.fr/Images/astlmg/4451_2.jpg).

Tableau 3. Exemples d'abondances isotopiques en pourcentage (%) du nombre d'atomes dans l'élément chimique naturel considéré.

hydrogène		carbone		oxygène		fluor		uranium	
$^1_1\text{H}$	99.9885	$^{12}_6\text{C}$	98.93	$^{16}_8\text{O}$	99.757	$^{10}_9\text{F}$	100	$^{234}_{92}\text{U}$	0.0055
$^2_1\text{H}$	0.0115	$^{13}_6\text{C}$	1.07	$^{17}_8\text{O}$	0.038			$^{235}_{92}\text{U}$	0.72
				$^{18}_8\text{O}$	0.205			$^{238}_{92}\text{U}$	99.2745

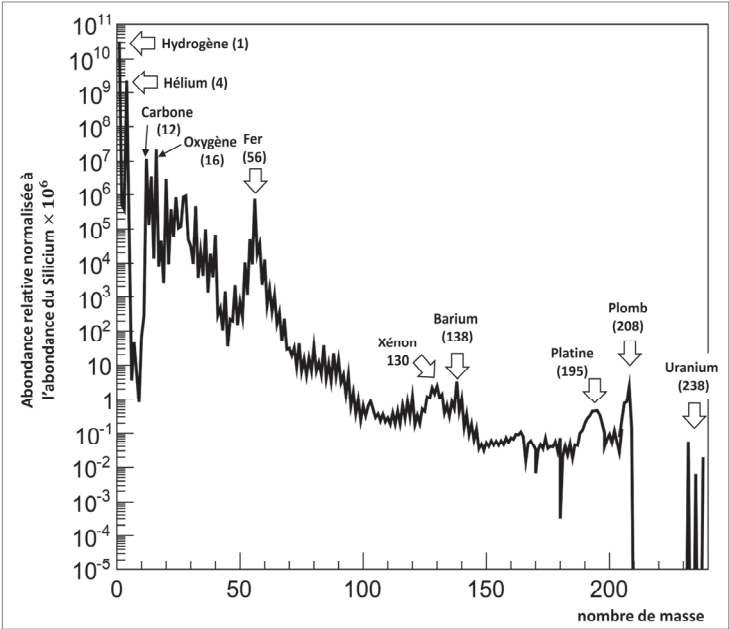


Figure 4. Courbe d'abondance relative (normalisée à  $10^6$  atomes de silicium) des nucléides dans le système solaire en fonction du nombre de masse (rappelé entre parenthèses pour les nucléides explicitement mentionnés sur la figure).<sup>27 28 29</sup>

<sup>27</sup> H. Palme, K. Lodders, A. Jones, « 2.2 - Solar System Abundances of the Elements », dans Editor(s): Heinrich D. Holland, Karl K. Turekian, *Treatise on Geochemistry* (Second Edition), Elsevier, 2014, pp. 15-36, <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-095975-7.00118-2>.

<sup>28</sup> H. Schatz, K. Blaum, « Nuclear masses and the origin of the elements », *Europhysics News*, volume 37, number 5, September-October 2006, pp. 16-21, p. 16, figure 1, <https://doi.org/10.1051/epn:2006502> ; E. Anders, N. Grevesse, « Abundances of the elements: Meteoritic and solar », *Geochimica et Cosmochimica Acta Cosmochim. Acta* 53, 1989, pp. 197-214. Cette courbe est considérée comme quasi universelle. Elle souffre de quelques exceptions, comme par exemple les météorites ou encore les éléments légers que sont le lithium, le béryllium et le bore formés par différentes voies dont les réactions de spallation induites par le rayonnement cosmique dans le milieu interstellaire et à la surface des étoiles.

<sup>29</sup> A. G. W. Cameron, « Abundances of the elements in the solar system », *Space Sci. Rev.* 15, 121–146 (1973). <https://doi.org/10.1007/BF00172440>.

## 1.6. Classification des nucléides en physique des réacteurs nucléaires

Dans le cadre de l'étude des systèmes nucléaires, on classe souvent les nucléides en quatre catégories :

- les **noyaux lourds** (NL), de numéro atomique supérieur à celui du platine, 78 ;
- les **produits de fission** (PF), issus des réactions nucléaires de fission, de numéro atomique  $Z$  inférieur ou égal à 78 <sup>30</sup> ;
- les **produits d'activation** (PA), issus des réactions nucléaires induites par des neutrons généralement ;
- les **produits de spallation** (PS), issus de réactions nucléaires induites par des particules neutres ou chargées à haute énergie ( $> 20$  MeV).

Les noyaux lourds formés par certaines réactions nucléaires à partir des noyaux d'uranium sont dénommés **transuraniens**, indiquant qu'ils ont des numéros atomiques supérieurs à 92, ou encore **actinides**, rappelant leur position dans la table de classification des éléments de Mendeleïev : éléments dont le numéro atomique est supérieur à celui de l'**actinium**, c'est-à-dire à 89.

Dans un combustible nucléaire, on distingue d'une part les **actinides majeurs** représentés par les isotopes de l'**uranium** et du **plutonium**, et d'autre part les **actinides mineurs** présents en quantités plus réduites : ce sont en particulier les isotopes du **neptunium**, de l'**américium** et du **curium**.

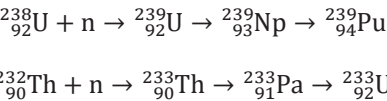
La **réaction nucléaire de fission induite par un neutron** sur un **noyau (lourd)** conduit à distinguer trois types de nucléides :

- **nucléide** (ou noyau) **fissile** : interagissant avec un neutron de basse énergie – dénommé « **neutron lent** » ou « **neutron thermique** », d'énergie cinétique inférieure à 1 eV typiquement –, le noyau lourd se fragmente généralement en deux morceaux qu'accompagne l'émission de neutrons. L' $^{235}_{92}\text{U}$ , le  $^{239}_{94}\text{Pu}$ , l' $^{233}_{92}\text{U}$  sont des **nucléides fissiles** ;
- **nucléide** (ou noyau) **fissile** : interagissant avec un neutron d'énergie élevée – dénommé « **neutron rapide** » d'énergie cinétique supérieure à 1 MeV typiquement –, le noyau lourd se fragmente généralement en deux morceaux qu'accompagne une

<sup>30</sup> Cette valeur « frontière » est indicative ; la probabilité de formation d'un produit de fission donné dépend de la nature du noyau qui fissionne et, pour une fission induite par neutron, de l'énergie cinétique de ce dernier : par exemple, pour l'uranium 235, on considère dans la pratique les produits de fission de numéro atomique inférieur ou égal à celui du thulium ( $Z = 69$ ) pour un neutron incident de basse énergie (énergie thermique) ; pour la fission induite par un neutron incident d'énergie élevée (plusieurs MeV) sur un noyau de plutonium 239, du platine ( $Z = 78$ ) peut être produit avec une très faible probabilité. On verra au chapitre 9 consacré à la fission que la probabilité de formation d'un produit de fission devient très faible lorsque l'on se rapproche de la région des noyaux lourds ou que l'on se rapproche de la région des noyaux « légers » ( $Z \sim 25$ ).

émission de neutrons. L’ $^{238}_{92}\text{U}$  et du  $^{240}_{94}\text{Pu}$  sont des **nucléides fissibles**. Tous les noyaux fissiles sont fissibles ;

- **nucléide** (ou noyau) **fertile** : interagissant avec un neutron, le noyau lourd après absorption de ce neutron conduit à la formation d’un **noyau fissile**. L’ $^{238}_{92}\text{U}$  et le  $^{232}_{90}\text{Th}$  sont des **nucléides fertiles** utilisés dans les réacteurs nucléaires :



Quelques exemples de nucléides jouant un rôle particulier dans le domaine nucléaire sont donnés dans le **tableau 4**.

Tableau 4. Quelques nucléides et leurs utilisations.<sup>31</sup>

Uranium	U235 : nucléide fissile constituant d’un combustible nucléaire (UO <sub>2</sub> ...). U238 : nucléide fertile constituant d’une couverture neutronique d’un réacteur à neutrons rapides. Dosimètre neutronique utilisé pour la détermination expérimentale de la fluence neutronique sur les structures d’un réacteur. U233 : nucléide fissile d’un combustible nucléaire d’une filière de réacteur nucléaire fondée sur le cycle Th232-U233.
Plutonium	Pu239 : nucléide fissile et fissible d’un combustible nucléaire.
Thorium	Th232 : nucléide <i>fertile</i> d’une filière fondée sur le cycle Th232-U233 (réacteurs à « sels fondus »).
Hydrogène	H1 : constituant de l’« eau légère » utilisée comme « modérateur » dans les REP et les REB, noyau ralentisseur des neutrons. H2 ou D : deutérium, constituant de l’« eau lourde » utilisée comme modérateur dans les réacteurs de type CANDU ou EL4. Producteur de neutrons et d’hydrogène léger par réaction nucléaire induite par des gamma.
Lithium	Li6 : nucléide producteur de tritium par réaction nucléaire. Impureté dans certains matériaux comme le graphite des UNGG. Utilisation envisagée pour assurer la régénération du combustible tritium au sein de la couverture tritigène d’un (futur) réacteur à fusion.
Béryllium	Be9 : constituant d’un matériau réflecteur de neutrons. Isotope utilisé pour la production de neutrons par réactions nucléaires induites par neutrons, particules α ou photons (fabrication de sources de neutrons à usages divers, dont le démarrage de réacteurs nucléaires).
Bore	B10 : utilisé comme élément neutrophage dans un cœur de réacteur à des fins de contrôle de la réactivité, dans les paniers des assemblages combustibles des châteaux de transport et des piscines de stockage comme mesure de prévention du risque de criticité, dans certains bétons pour limiter les débits de dose induits par une exposition aux neutrons.
Carbone	C12 : constituant du graphite, matériau modérateur et réflecteur des neutrons dans les réacteurs des filières UNGG et RBMK. C13 : comme le carbone 12, c’est un constituant du graphite. Isotope précurseur du carbone 14, nucléide radioactif, par réaction nucléaire de capture induite par des neutrons.

<sup>31</sup> Voir aussi : A. Caillot, *La radioactivité au service de l’industrie et de l’environnement*, Éditions TEC & Doc, Paris, 2002 ; D. Delacroix, J.-P. Guerre, P. Leblanc, *Guide pratique Radionucléides & Radioprotection*, CEA – EDP Sciences, 2<sup>e</sup> édition, 2006 ; *L’instrumentation et la mesure en milieu nucléaire*, Une monographie de la Direction de l’énergie nucléaire, ouvrage collectif, CEA – Éditions Le Moniteur, Paris-Saclay, 2018.

	C14 : utilisé pour la datation de vestiges archéologiques d'origine organique <sup>32</sup> .
<b>Azote</b>	N14 : constituant de l'air ; précurseur du carbone 14, radioactif, par réaction nucléaire induite par des neutrons. N16 : marqueur possible de la puissance du cœur d'un REP.
<b>Oxygène</b>	O16 : constituant de l'eau (modérateur) et des combustibles oxydes $\text{UO}_2$ et « MOX » (oxyde mixte uranium-plutonium) ; isotope cible de la réaction (n, p) produisant dans l'eau du circuit primaire d'un REP de l'azote 16. O17 : isotope cible des réactions ( $\alpha$ , n) dans le combustible productrices de neutrons.
<b>Sodium</b>	Na23 : utilisé comme modérateur dans les réacteurs à « neutrons rapides ». Na24 : produit d'activation neutronique du sodium 23, émetteur gamma ; produit d'activation neutronique de l'aluminium 27 constituant de gaines combustibles ou bien de caissons de réacteurs de recherche, par la réaction (n, $\alpha$ ).
<b>Phosphore</b>	P31 : isotope utilisé en dosimétrie neutronique selon la réaction (n, p), mesure de flux de neutrons rapides.
<b>Soufre</b>	S32 : isotope utilisé en dosimétrie neutronique selon la réaction (n, p), détermination de flux de neutrons rapides, mesure de l'activité du phosphore 32 formé.
<b>Cuivre</b>	Cu63 : isotope utilisé en dosimétrie neutronique selon la réaction (n, $\alpha$ ), détermination de flux de neutrons rapides, mesure de l'activité du cobalt 60 formé.
<b>Nickel</b>	Ni58 : isotope utilisé en dosimétrie neutronique selon la réaction (n, p), détermination de flux de neutrons rapides, mesure de l'activité du cobalt 58 formé.
<b>Fer</b>	Fe56 : principal élément des aciers constituant de nombreuses structures des réacteurs nucléaires dont la cuve ; utilisé dans certains cas comme matériau de protection contre les rayonnements. Fe 54 : isotope utilisé en dosimétrie neutronique selon la réaction (n, p), mesure de flux de neutrons rapides, mesure de l'activité du manganèse 54. Utilisé dans le suivi de la fluence des neutrons reçue par la cuve d'un REP, paramètre crucial pour évaluer la durée de fonctionnement d'un réacteur nucléaire.
<b>Cobalt</b>	Co59 : isotope présent comme impureté dans les aciers notamment, précurseur par activation neutronique du cobalt 60. Co60 : produit d'activation émetteur gamma, gênant du point de vue radioprotection. Utilisé dans les domaines médical et industriel.
<b>Ruthénium</b>	Ru106 : produit de fission indicateur du temps de refroidissement d'un combustible irradié, c'est-à-dire en général de la durée qui le sépare de l'instant de mise hors flux neutronique du cœur du réacteur.
<b>Iode</b>	I131 : produit de fission volatile, indicateur de rupture de gaine. Utilisé comme traceur pour établir des diagnostics médicaux relatifs à la thyroïde.
<b>Xénon</b>	Xe135 : produit de fission considéré en physique des réacteurs comme un « poison neutronique » en raison de sa très forte capacité à absorber les neutrons.
<b>Césium</b>	Cs137 : produit de fission indicateur du taux de combustion d'un combustible irradié.
<b>Technétium</b>	Tc99 : marqueur radioactif permettant de tracer la diffusion d'une substance à travers l'organisme. Produit dans des réacteurs de recherche à partir du molybdène 98.

<sup>32</sup> Pour cette invention, Willard Frank Libby reçut en 1960 le prix Nobel de chimie, <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/libby-lecture.pdf> ; voir aussi W. F. Libby, *Radiocarbon Dating*, Univ. Chicago Press, Chicago, 1952, W. F. Libby, *History of Radiocarbon Dating* : <https://www.osti.gov/etdweb/servlets/purl/20895301> ; J. Labeyrie, « Les méthodes de datation développées au CEA », *Revue Générale Nucléaire*, RGN, n° 6, 1989 ; C. A. Diop, *Physique nucléaire et chronologie absolue*, Initiations et études africaines n° XXXI, Université de Dakar, Dakar, NEA-IFAN, 1974 ; P. R. Giot, L. Langouet, *La datation du passé – La mesure du temps en Archéologie*, *Revue d'Archéométrie*, GMPCA, 1984 ; É. Roth, B. Petit (dir.), *Méthodes de datation par les phénomènes nucléaires naturels – Applications*, Masson, Paris, 1985.

## 2. Dimension, charge et masse du noyau atomique

Dans le chapitre 2 précédent, un ordre de grandeur de la dimension spatiale du noyau atomique avait été indiqué. Il s'agit à présent de la caractériser plus finement.

### 2.1. Dimension et charge du noyau atomique

Formalismes de calcul et expériences ont permis de proposer l'expression suivante pour la densité spatiale de charge  $\varrho(r)$  (C cm<sup>-3</sup>, coulombs par centimètre cube) en fonction du rayon courant du noyau atomique  $r$  :

$$\varrho(r) = \frac{\varrho_0}{1 + \exp \left[ \frac{r - R_c}{0,228a} \right]} \quad (2.1)$$

avec :

- $R_c = r_0 A^{1/3}$  (2.2)
  - $A$  : nombre de masse ;
  - $r_0$  : rayon nucléaire unitaire,  $r_0 = 1.1 \cdot 10^{-13}$  cm à  $1.5 \cdot 10^{-13}$  cm selon les auteurs ;
- $a \approx 2.2 \cdot 10^{-13}$  cm ;  $a$ , appelée **épaisseur de peau**, ou **paramètre de diffusivité** (*diffuseness parameter*), est la distance séparant l'abscisse à  $\varrho(r) = 0.9\rho_0$  et l'abscisse  $\varrho(r) = 0.1\rho_0$  : voir figure 4a ;
- $\varrho_0$  est une constante et s'exprime en C cm<sup>-3</sup> ;
- $R_c$  est le **rayon de charge nucléaire** dont on admettra qu'il coïncide avec le **rayon de la matière nucléaire**.

#### Remarque

Les physiciens nucléaires sont conduits à distinguer<sup>33 34</sup> :

- le **rayon de charge nucléaire**  $R_c = r_0 A^{1/3}$  d'un noyau supposé sphérique ; il est aussi noté «  $a$  » dans d'autres chapitres du présent ouvrage (à ne pas confondre avec l'épaisseur de peau «  $a$  ») ;
- le **rayon de voie** (*channel radius*) ou **rayon d'interaction**, ou **rayon nucléaire** (*nuclear radius*) ou **rayon de sphère dure** (*hard-sphere radius*), souvent noté  $a_c$  dans la littérature : il se rapporte au formalisme quantique de la « matrice R » (voir chapitre 8) qui décrit l'interaction, par exemple, d'un neutron avec un noyau atomique, introduisant les notions de région interne et de région externe séparées par une surface située à la distance

<sup>33</sup> M. Herman, A. Trkov (edited by), *ENDF-6 Formats Manual - Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII*, CSEWG Document ENDF-102, Report BNL-90365-2009 Rev.1, Brookhaven National Laboratory, USA, 2010, pp. 80-81.

<sup>34</sup> G. Noguère, *Contributions to the study of the unresolved resonance range of neutron-induced reactions*, HDR, Université Bordeaux-1, 2014, voir chapitre 3, pp. 24-25, chapitre 4, pp. 50-54, p. 324.



$a_c$  du centre du noyau atomique cible (voir chapitre 8) et à laquelle se raccordent les fonctions d'onde des deux régions du système en interaction. On trouve aussi le terme de **matching radius** indiquant aussi la distance à laquelle le potentiel nucléaire devient nul, correspondant donc au rayon d'action de la force nucléaire ;

- le **rayon de diffusion (scattering radius)**, également appelé **rayon de diffusion effectif (effective scattering radius)**, ou encore **rayon de diffusion potentielle (potential scattering radius)** ; ce rayon peut être particularisé en fonction des moments angulaires des entités en interaction. Il est utilisé pour calculer les sections efficaces neutroniques à basse énergie s'identifiant alors à la valeur absolue de la **longueur de diffusion** (voir chapitres 8 et 10).

Des expressions sont proposées :

- d'une part pour représenter ces paramètres en fonction de la nature des noyaux atomiques, comme par exemple <sup>35</sup> :

$r_0 = 1.295 - 2.7 \cdot 10^{-4} A$  (fm),  $a = 0.566 + 5 \cdot 10^{-9} A^3$  (fm) pour des noyaux atomiques plus lourds que le fer ;

$a_c = 0.123 [M^u(A, Z)]^{1/3} + 0.08$  ( $10^{-12}$  cm) où  $M^u(A, Z)$  est la masse atomique en unité de masse atomique du nucléide cible ( $A, Z$ ) ;

- d'autre part pour établir le lien entre ces paramètres, par exemple :  $a_c = 1.5(R_c + 7.0)a$ .

La **figure 5a** représente l'allure générale de la distribution de charge  $\rho(r)$  normalisée à  $\rho_0$  et la **figure 5b** pour différents nucléides.

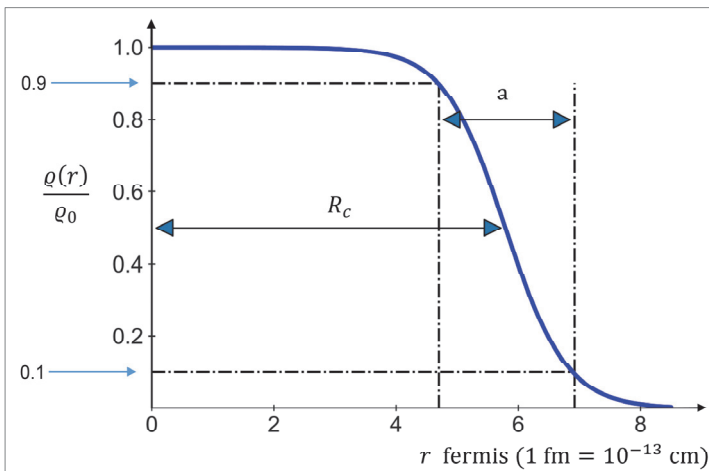


Figure 5a Paramètres de la densité de charge nucléaire au sein du noyau atomique.<sup>36</sup>

<sup>35</sup> B. Morillon, P. Romain, « Dispersive and global spherical optical model with a local energy approximation for the scattering of neutrons by nuclei from 1 keV to 200 MeV », *Physical Review C* 70, 014601, July 6, 2004, pp.1-6, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.70.014601>.

<sup>36</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit., p. 18.

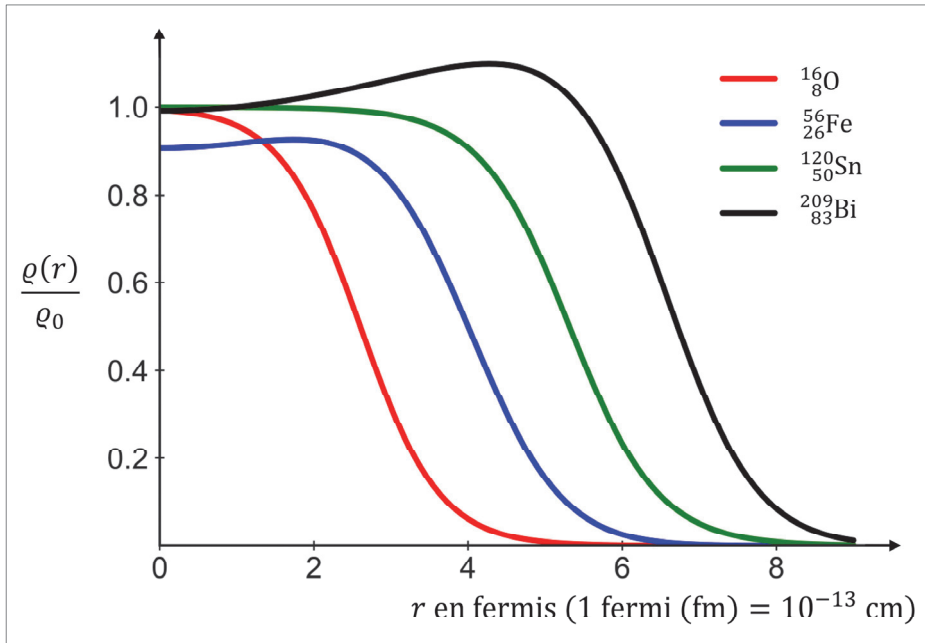


Figure 5b. La densité de charge nucléaire normalisée en fonction du rayon courant,  $r$ , du noyau atomique pour différents nucléides.<sup>37 38</sup>

La charge du noyau atomique est alors définie par l'expression :

$$\int_{V_{\text{noyau}}} \rho(r) dV_{\text{noyau}} = Ze \quad (2.3)$$

Historiquement, les masses des nucléides ont été déterminées de manière précise et systématique par Francis William Aston<sup>39</sup>. Par spectrométrie de masse, il mesura la masse de 250 atomes.

### Quelques ordres de grandeur

- Volume du noyau atomique du nucléide ( $A, Z$ ) assimilé à une sphère de rayon  $R_c$  :

<sup>37</sup> C. W. De Jager, H. De Vries, C. De Vries, « Nuclear charge- and magnetization-density-distribution parameters from elastic electron scattering », *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, Vol. 14, Issues 5–6, 1974, pp. 479-508, [https://doi.org/10.1016/S0092-640X\(74\)80002-1](https://doi.org/10.1016/S0092-640X(74)80002-1).

<sup>38</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit., p. 18.

<sup>39</sup> F. W. Aston, « Isotopes and Atomic Weights », *Nature*, Vol. 105, pp. 617-619, 1920, <https://doi.org/10.1038/105617a0> ; F. W. Aston, « The mass spectra of chemical elements », *Philosophical Magazine*, 39, 611-625, <https://doi.org/10.1080/14786440508636074> ; F. W. Aston, « A positive ray spectrograph », *Philosophical Magazine*, 38, 707-714, 1919, <https://doi.org/10.1080/14786441208636004>.

$$V(A, Z) = \frac{4}{3} \pi R_c^3 = \frac{4}{3} \pi [r_0 A^{1/3}]^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A$$

$$V(A, Z) = \frac{4}{3} 3.14 \times (1.1 \cdot 10^{-13})^3 \times 27 = 1.5 \cdot 10^{-37} \text{ cm}^3$$

- Nombre de nucléons du nucléide (A, Z) par unité de volume :

$$N_{nuc}(A, Z) = \frac{A}{\frac{4}{3} \pi R_c^3} = \frac{A}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A} = \frac{3}{4 \pi r_0^3}$$

$$N_{nuc}(A, Z) = \frac{3}{4 \times 3.14 \times (1.1 \cdot 10^{-13})^3} = 1.79 \cdot 10^{38} \text{ nucléons cm}^{-3}$$

- Masse volumique de la matière nucléaire du nucléide (A, Z) :

$$\rho_{nuc}(A, Z) = \frac{M(A, Z)}{N_{Av} \times V(A, Z)} = \frac{M(A, Z)}{N_{Av} \times \frac{4}{3} \pi r_0^3 A} = \frac{m(A, Z)}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A}$$

$$\rho_{nuc}(27, 13) = \frac{26.98}{6.022 \cdot 10^{23} \times 1.5 \cdot 10^{-37}} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$$

- Densité moyenne de charge nucléaire :

$$\rho_c(A, Z) = \frac{Ze}{V(A, Z)} = \frac{Ze}{\frac{4}{3} \pi r_0^3 A}$$

$$\rho_{nuc}(27, 13) = \frac{13 \times 1.602 \cdot 10^{-19}}{1.5 \cdot 10^{-37}} = 1.39 \cdot 10^{19} \text{ C cm}^{-3}$$

## 2.2. L'unité de masse atomique unifiée, la masse atomique, la masse nucléaire

La détermination de la masse des atomes fait l'objet d'une activité scientifique expérimentale et théorique qui se poursuit<sup>40</sup>, donnant lieu à des révisions successives<sup>41</sup> se traduisant non seulement par un affinement des valeurs de la masse des atomes, mais aussi par le changement de conventions adoptées pour les placer sur une échelle relative introduite pour son intérêt pratique. Le **nombre d'Avogadro**, que l'on peut voir comme un facteur de passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, y joue un rôle central.

<sup>40</sup> Voir par exemple, D. Lunney, J. M. Pearson, C. Thibault, « Recent trends in the determination of nuclear masses », *Rev. Mod. Phys.* 75, 1021 –August 20, 2003, pp. 1021-1082, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.1021>.

<sup>41</sup> À titre d'exemple : T. B. Coplen, H. S. Peiser, « History of the recommended atomic weight values from 1882 to 1997: a comparison of differences from current values to the estimated uncertainties of earlier values », *Pure & Appl. Chem.*, Vol. 70, No. 1, 1998, pp. 237-257, <http://dx.doi.org/10.1351/pac199870010237>.

### Remarque préliminaire

Dans la précédente convention du système international d'unités, le **nombre d'Avogadro**,  $N_{Av}$ , était défini comme le **nombre d'atomes de carbone 12 présents dans 12g (0.012 kg) de carbone 12** :  $N_{Av} = 6.022\,141\,99\,10^{23}$ . La définition de la mole, unité de quantité de matière, en découlait : la mole était définie comme la quantité de matière contenant autant d'entités élémentaires (atomes, molécules, ions, électrons, autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules) qu'il y a d'atomes dans 12 g de carbone 12, à savoir  $N_{Av} = 6.022\,141\,99\,10^{23}$  atomes.<sup>42</sup>

Donc la masse, notée  $M(12,6)$ , de  $N_{Av}$  atomes de carbone 12 de masse individuelle  $m(12,6)$  s'écrivait :

$$M(12,6) = m(12,6) \times N_{Av} = 12 \text{ g} \quad (2.4)$$

L'**unité de masse atomique unifiée**<sup>43</sup>,  $u$  ou  $uma$ , était définie comme le **1/12<sup>e</sup> de la masse de l'atome de carbone 12,  $^{12}_6C$ , non lié, au repos et dans son état fondamental** :

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} m(12,6) = \frac{1}{12} \frac{M(12,6)}{N_{Av}}$$

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} \times \frac{12 \text{ (g)}}{6.022\,141\,99\,10^{23}} = 1.660\,538\,73\,10^{-24} \text{ g} \equiv 1.660\,538\,73\,10^{-27} \text{ kg} \quad (2.5)$$

La **masse atomique du carbone 12**,  $M^u(12,6)$ , en unité de masse atomique est donc **exactement égale à 12 u**.

Depuis 2019<sup>44</sup>, le **nombre d'Avogadro**,  $N_{Av}$ , est défini « *comme la valeur numérique fixée de la constante d'Avogadro,  $N_A$ , lorsqu'elle est exprimée en mol<sup>-1</sup>.* » Cette valeur est prise conventionnellement égale à  $6.022\,140\,76\,10^{23}$ . Par suite, une mole contient exactement  $6.022\,140\,76\,10^{23}$  entités élémentaires (atomes, molécules, ions, électrons, autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules).

L'**unité de masse atomique unifiée**, ou plus succinctement **unité de masse atomique**, est alors définie en utilisant la constante d'Avogadro dont la valeur fixée (nombre d'Avogadro) est  $N_{Av} = 6.022\,140\,76\,10^{23} \text{ mol}^{-1}$  :

<sup>42</sup> Voir *Le Système international d'unités (SI)*, Bureau international des poids et mesures (BIPM), organisation intergouvernementale de la Convention du mètre, 8<sup>e</sup> édition 2006, pp. 24-25, [https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/si\\_brochure\\_8.pdf/632d85cd-cd9f-cfae-21d2-9ffcf2bb198](https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/si_brochure_8.pdf/632d85cd-cd9f-cfae-21d2-9ffcf2bb198). L'atome pris en référence pour fixer la masse atomique a changé dans le temps ; ont été successivement choisis l'hydrogène avec une masse atomique égale à 1 (John Dalton, 1805), l'oxygène 16 avec une masse atomique égale à 16 (Jean Stas, 1865), le carbone 12 lors de la 14<sup>e</sup> conférence générale des poids et mesures, Paris, 4-8 octobre 1971, voir Comptes-rendus des séances de cette conférence, p. 78.

<sup>43</sup> En biochimie cette même unité est aussi dénommée « dalton » de symbole « Da » en référence au chimiste et physicien John Dalton (1766-1844).

<sup>44</sup> Révision en date du 20 mai 2019 : voir *Le Système international d'unités (SI)*, Bureau international des poids et mesures (BIPM), organisation intergouvernementale de la Convention du mètre, 9<sup>e</sup> édition 2019, pp. 21-22, <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure>.

$$1 \text{ u} = \frac{1}{12} m(12,6) = \frac{1}{12} \frac{M(12,6)}{N_{Av}} = \frac{1}{12} \times \frac{12 \times 10^{-3} \text{ (kg mol}^{-1}\text{)}}{6.022 \ 140 \ 76 \ 10^{23} \text{ (mol}^{-1}\text{)}} \\ = 1.660 \ 539 \ 066 \ 60 \ 10^{-27} \text{ kg} \quad (2.6)$$

dans laquelle  $M(12,6)$  représente la masse molaire du carbone 12 dont la valeur  $M(12,6) = 12 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} = 12 \text{ g mol}^{-1}$  a été expérimentalement déterminée avec une incertitude relative de  $4.5 \ 10^{-10}$  ; le **nombre d'Avogadro** ou valeur numérique adoptée pour la **constante d'Avogadro**,  $N_{Av} = 6.022 \ 140 \ 76 \ 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  correspond à cette mesure de la masse molaire du carbone 12. Le rapport :

$$M_u = \frac{M(12,6)}{12} = 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1} \quad (2.7)$$

est appelé **constante de masse molaire**.

Le rapport :

$$m_u = \frac{m(12,6)}{12} \quad (2.8)$$

est appelé constante de masse atomique unifiée définissant l'unité de masse atomique unifiée u. On a donc la relation :

$$M_u = \frac{m(12,6) \times N_{Av}}{12} = m_u N_{Av} \quad (2.9)$$

Il convient de rappeler ici que l'équivalence masse-énergie constitue l'un des principes de la physique reformulée par A. Einstein. Une masse ( $m$ ) exprimée en kilogramme (système d'unités international SI) peut être également exprimée en unité d'énergie ( $E$ ) par multiplication par le carré de la vitesse de la lumière dans le vide,  $c^2$  :

$$E = mc^2 \quad (2.10)$$

On a, en considérant par exemple, l'unité de masse atomique :

$$1 \text{ u} \times c^2 \equiv 1.660 \ 539 \ 066 \ 60 \ 10^{-27} \times (2.997 \ 924 \ 58 \ 10^8)^2 = 1.492 \ 418 \ 10^{-10} \\ \text{kg} \qquad \qquad \qquad (\text{m s}^{-1})^2 \qquad \qquad \text{J (joules)}$$

En physique nucléaire, on utilise une unité d'énergie dérivée, l'**électronvolt** (eV) et ses multiples et sous-multiples :  $1 \text{ eV} = 1.602 \ 176 \ 634 \ 10^{-19} \text{ J}$ , d'où (voir **tableau 5**) :

$$1 \text{ u} \times c^2 \equiv \frac{1.4924468 \ 10^{-10}}{1.602 \ 176 \ 634 \ 10^{-19}} = 9.314 \ 94 \ 10^8 \text{ eV} = 931.494 \text{ MeV}$$

On peut ainsi écrire :

$$1 \text{ u} = 1.660 \ 539 \ 066 \ 10^{-27} \text{ kg} \equiv 931.494 \text{ MeV}/c^2 \quad (2.11)$$

Dans la pratique, on est conduit à manipuler également les masses en unité d'énergie ; il peut se trouver que le facteur  $c^2$  soit omis dans les notations utilisées pour désigner une masse en unité d'énergie.

Pour un nucléide de nombre de masse  $A$  et de numéro atomique  $Z$ , on adopte les notations du **tableau 5**.

La **masse molaire atomique**, ou plus succinctement la **masse atomique**,  $M(A, Z)$  d'un atome est la masse d'une mole de cet atome, c'est-à-dire la masse de  $N_{Av}$  atomes neutres de cet atome, exprimée en  $\text{g mol}^{-1}$  :

$$M(A, Z)(\text{g mol}^{-1}) = m(A, Z)(\text{g}) \times N_{Av} (\text{mol}^{-1}) \tag{2.12}$$

La **masse atomique** d'un atome neutre  $(A, Z)$ , de masse  $m(A, Z)$ , s'exprime en **unité de masse atomique** (u), notée ici  $M^u(A, Z)$ , donnée par le rapport adimensionnel :

$$M^u(A, Z) = \frac{m(A, Z)(\text{kg})}{1 \text{ u} (\text{kg})} = \frac{m(A, Z) (\text{kg})}{1.660\,539\,066\,60\,10^{-27} (\text{kg})} \tag{2.13}$$

Tableau 5. Notations utilisées.

$(A, Z)$	Atome ou noyau atomique de nombre de masse $A$ et de numéro atomique $Z$ .
$m(A, Z)$	Masse d'un atome $(A, Z)$ en g, kg.
$m(A, Z)c^2$	Masse d'un atome $(A, Z)$ en unités d'énergie : eV, keV, MeV.
$M(A, Z)$	Masse atomique de l'atome $(A, Z)$ en g, kg.
$M^u(A, Z)$	Masse atomique de l'atome $(A, Z)$ en unité de masse atomique.
$M^u(A, Z)c^2$	Masse atomique de l'atome $(A, Z)$ en unité d'énergie : eV, keV, MeV.
$\delta M(A, Z)$	Défaut de masse du noyau atomique $(A, Z)$ en g, kg.
$\delta M(A, Z)c^2$	Défaut de masse du noyau atomique $(A, Z)$ en unité d'énergie : eV, keV, MeV.
$B(A, Z)$	Énergie de liaison du noyau atomique $(A, Z)$ exprimée en unité d'énergie : eV, keV, MeV.
$B^u(A, Z)$	Énergie de liaison du noyau atomique $(A, Z)$ en unité de masse atomique.

La grandeur  $M^u(A, Z)$  est aussi appelée de manière plus explicite **masse atomique relative** ou **poids atomique** (*atomic weight* en anglais).<sup>45</sup>

On en déduit immédiatement la relation entre la masse atomique exprimée en unité de masse atomique,  $M^u(A, Z)$  et la masse atomique  $M(A, Z)$ , en tenant compte de la définition (2.12) :

<sup>45</sup> Se référer aux publications de la *Commission on Atomic Weights and Isotopic Abundances* (IUPAC) ; P. De Bièvre, H. S. Peiser, « Atomic Weight\* - The Name, its history, definition, and units », *Pure & Appl. Chem.*, Vol. 64, No. 10, 1992, pp. 1535-1543, <https://doi.org/10.1351/pac199264101535>.

$$\begin{aligned}
 M^u(A, Z) &= \frac{m(A, Z)(\text{kg})}{1 \text{ u}(\text{kg})} = \frac{m(A, Z)(\text{kg}) \times N_{Av}}{1 \text{ u}(\text{kg}) \times N_{Av}} \\
 &= \frac{M(A, Z)(\text{g mol}^{-1}) \times 1000}{1.660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27} \times 6.022\,140\,76 \cdot 10^{23}}
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

et par suite :

$$M^u(A, Z) \equiv M(A, Z) \text{ (g mol}^{-1}\text{)} \quad (2.15)$$

Par conséquent, la masse molaire atomique,  $M(A, Z)$ , d'un atome, exprimée en  $\text{g mol}^{-1}$ , coïncide avec la masse atomique,  $M^u(A, Z)$ .

### Exemples

Les bases de données<sup>46</sup> fournissent les masses atomiques suivantes en adoptant les notations du **tableau 5** :

- hydrogène « léger »  ${}^1_1\text{H}$  :  $M^u_{\text{H}} = 1.007\,825\,031\,90 \text{ u}$  ou  $M(1,1) = 1.007\,825\,031\,90 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- deutérium ou hydrogène « lourd »  ${}^2_1\text{H}$  :  $M^u_{\text{H}_2} = 2.014\,101\,777\,84 \text{ u}$  ou  $M(2,1) = 2.014\,101\,777\,84 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- béryllium  $9\,{}_4\text{Be}$  :  $M^u_{\text{Be}_9} = 9.012\,183\,06 \text{ u}$  ou  $M(9,4) = 9.012\,183\,06 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- carbone  $12\,{}_6\text{C}$  :  $M^u_{\text{C}_{12}} = 12.000\,000\,00 \text{ u}$  ou  $M(12,6) = 12.000\,000\,00 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- fer  $56\,{}^{56}_{26}\text{Fe}$  :  $M^u_{\text{Fe}_{56}} = 55.934\,935\,54 \text{ u}$  ou  $M(56,26) = 55.934\,935\,54 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- uranium  $234\,{}^{234}_{92}\text{U}$  :  $M^u_{\text{U}_{234}} = 234.040\,950\,3 \text{ u}$  ou  $M(234,92) = 234.040\,950\,3 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- uranium  $235\,{}^{235}_{92}\text{U}$  :  $M^u_{\text{U}_{235}} = 235.043\,928\,1 \text{ u}$  ou  $M(235,92) = 235.043\,928\,1 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- uranium  $238\,{}^{238}_{92}\text{U}$  :  $M^u_{\text{U}_{238}} = 238.050\,786\,9 \text{ u}$  ou  $M(238,92) = 238.050\,786\,9 \text{ g mol}^{-1}$ .

Ces définitions s'étendent aux autres entités : proton, neutron, électron, molécules, mélange d'éléments et de molécules. Le **tableau 6** rassemble les masses d'entités fréquemment rencontrées dans la suite.

Il ne faut donc pas confondre la masse atomique  $M(A, Z) \equiv M^u(A, Z)$  avec le nombre de masse  $A$ . Cependant, leurs valeurs respectives étant proches, il est commode et acceptable de les assimiler dans certaines applications numériques.

<sup>46</sup> <https://www-nds.iaea.org/amdc/>, <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>, par exemple.

La **masse molaire atomique d'un élément chimique naturel**,  $M(\text{élément naturel}, Z)$ , s'obtient en calculant la moyenne des masses atomiques des isotopes qui le constituent, c'est-à-dire en pondérant les masses molaires atomiques,  $M(A_i, Z)$ , de chacun de ces isotopes par leurs **abondances isotopiques** respectives,  $x_i$ , dans l'élément considéré, exprimées en pourcentage du nombre d'atomes :

$$M(\text{élément naturel}, Z) = \sum_i M(A_i, Z)x_i$$

(2.16)

Tableau 6. L'unité de masse et masses des constituants de l'atome : proton, neutron, électron en différentes unités usuelles.

	Masse en gramme, g	Masse en unité de masse atomique, u $\equiv$ uma	Masse en unité d'énergie, MeV
Unité de masse atomique	1 u = 1.660 539 066 60 10 <sup>-24</sup>	1	1 u $\times c^2$ = 931.494 102 42
Proton	$M_p$ = 1.672 621 923 69 10 <sup>-24</sup>	$M_p^u = \frac{1.672\,621\,923\,69\,10^{-24}}{1.660\,539\,066\,60\,10^{-24}}$ = 1.007 276 466 621 u	$M_p c^2 = M_p^u \times 931.494 =$ 938.272 088 16
Neutron	$M_n$ = 1.674 927 498 04 10 <sup>-24</sup>	$M_n^u = \frac{1.674\,927\,498\,04\,10^{-24}}{1.660\,539\,066\,60\,10^{-24}}$ = 1.008 664 91 95 u	$M_n c^2 = M_n^u \times 931.494 =$ 939.565 420 52
Électron (ou positron)	$M_e = 9.109\,383\,7015\,10^{-29}$	$M_e^u = 5.485\,799\,090\,65\,10^{-4}\,u$	$M_e c^2 = M_e^u \times 931.494 =$ 0.510 998 950
Atome d'hydrogène	$M_H = m(1,1)$ = 1.673 531 10 <sup>-24</sup>	$M_H^u = M^u(1,1)$ = 1.007 825 031 90 u	$M_H c^2 = M_H^u \times 931.494 =$ 938.783
Différence de masse entre neutron et atome d'hydrogène léger	$M_n - M_H = 1.396\,000\,10^{-27}$	$M_n^u - M_H^u = 8.406\,908\,10^{-4}\,u$	$M_n c^2 - M_H c^2 \equiv$ 0.783 098

Exemple 1

- Masse atomique de l'hydrogène naturel  
Les abondances isotopiques en nombre de noyaux respectivement de l'hydrogène léger et du deutérium sont respectivement :  $x_H = 99.9885\%$ ,  $x_{H2} = 0.0115\%$  ; l'on a :

$$M_{H\,\text{naturel}}^u = M_H^u x_H + M_{H2}^u x_{H2}$$

$$M_{H\,\text{naturel}}^u = 1.007\,825\,031\,90 \times 99.9885\,10^{-2}$$

$$+ 2.014\,101\,777\,84 \times 0.0115\,10^{-2}$$

$$= 1.007709 + 2.316217\,10^{-4} = 1.00794\,u$$

Exemple 2

- Masse atomique du fer naturel



Les abondances isotopiques en nombre de noyaux respectivement de fer 54, fer 56, fer 57 et de fer 58 sont respectivement :  $x_{\text{Fe}54} = 5.845 \%$ ,  $x_{56} = 91.754 \%$ ,  $x_{57} = 2.119 \%$ ,  $x_{58} = 0.282 \%$  ; l'on a :

$$\begin{aligned} M_{\text{Fe naturel}}^{\text{u}} &= M_{\text{Fe}54}^{\text{u}}x_{\text{Fe}54} + M_{\text{Fe}56}^{\text{u}}x_{\text{Fe}56} + M_{\text{Fe}57}^{\text{u}}x_{\text{Fe}57} + M_{\text{Fe}58}^{\text{u}}x_{\text{Fe}58} \\ M_{\text{Fe naturel}}^{\text{u}} &= 53.9396082 \times 5.845 \cdot 10^{-2} + 55.93493554 \times 91.754 \cdot 10^{-2} \\ &\quad + 56.93539195 \times 2.119 \cdot 10^{-2} + 57.9332736 \times 0.282 \cdot 10^{-2} \\ &= 3.152\,770\,099 + 51.322\,540\,755 + 1.206\,460\,955 \\ &\quad + 0.163\,371\,831 = 55.845\,143\,\text{u} \end{aligned}$$

Exemple 3

- Masse atomique de l'uranium naturel  
Les abondances isotopiques en nombre de noyaux respectivement de l'uranium 234, l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont respectivement :  $x_{\text{U}234} = 0.0054 \%$ ,  $x_{\text{U}235} = 0.7204 \%$ ,  $x_{\text{U}238} = 99.2742 \%$  et l'on a :

$$\begin{aligned} M_{\text{U naturel}}^{\text{u}} &= M_{\text{U}234}^{\text{u}}x_{\text{U}234} + M_{\text{U}235}^{\text{u}}x_{\text{U}235} + M_{\text{U}238}^{\text{u}}x_{\text{U}238} = \\ M_{\text{U naturel}}^{\text{u}} &= 234.040\,950\,3 \times 0.0054 \cdot 10^{-2} + 235.043\,928\,1 \times 0.7204 \cdot 10^{-2} \\ &\quad + 238.050\,786\,9 \times 99.2742 \cdot 10^{-2} \\ &= 1.26381 \cdot 10^{-2} + 1.693256 + 236.323 = 238.02891\,\text{u} \end{aligned}$$

Exemple 4

Calcul de l'abondance isotopique exprimée en pourcentage en masse ; le cas de l'uranium naturel comportant les trois isotopes :  ${}^{234}_{92}\text{U}$ ,  ${}^{235}_{92}\text{U}$  et  ${}^{238}_{92}\text{U}$  dont les abondances isotopiques en % en nombre d'atomes sont données dans le tableau 7.

Tableau 7. Détermination des abondances isotopiques en % en masse.

Abondances isotopiques de l'uranium naturel				
Isotopes	Abondance isotopique % en nombre d'atomes	Nombre d'isotopes de chaque type dans la mole $\times 6.022\,140\,76\,10^{23}$	Masse de chaque type d'isotope dans la mole ( $\text{g mol}^{-1}$ )	Abondance isotopique en masse
${}^{234}_{92}\text{U}$	0.0054	$3.251956\,10^{19}$	$234.040950 \times 0.0054$ $= 1.226382\,10^{-2}$	$\frac{1.24836\,10^{-2}}{238.02891}$ $= 0.00531 \%$
${}^{235}_{92}\text{U}$	0.7204	$4.338350\,10^{21}$	$235.043928 \times 0.7204$ $= 1.693\,256$	$\frac{1.69363}{238.028\,91}$ $= 0.7115 \%$
${}^{238}_{92}\text{U}$	99.2742	$5.97845\,10^{23}$	$238.050787 \times 99.2742$ $= 236.3236$	$\frac{236.3236}{238.028\,91}$ $= 99.28 \%$

Par définition, la masse atomique de l'uranium naturel  $M_{\text{U}} = 238.02891$  est la masse de  $N_{\text{Av}} = 6.022\,141\,99\,10^{23}$  atomes d'uranium naturel. Connaissant la masse atomique des isotopes  ${}^{234}_{92}\text{U}$ ,

$^{235}_{92}\text{U}$  et  $^{238}_{92}\text{U}$  on détermine les masses respectives de chacun de ces isotopes dans une mole d'uranium naturel et l'on en déduit alors leur abondance isotopique exprimée en pourcentage en masse, ce que montre le **tableau 7**.

### 2.3. Calcul du nombre de nucléides d'un type donné par unité de volume

Le milieu considéré étant constitué de nucléides d'un type unique  $(A, Z)$ , le nombre d'atomes  $N_{at}(A, Z)$  par unité de volume correspondant s'écrit :

$$N_{at}(A, Z) = \frac{N_{Av}}{M(A, Z)} x(A, Z) \rho \quad (2.17)$$

avec :

- $N(A, Z)$  : nombre d'atomes  $(A, Z)$  par  $\text{cm}^3$  ;
- $x(A, Z)$  : pourcentage en masse du nucléide  $(A, Z)$  dans l'élément naturel considéré ;
- $\rho$  : masse volumique en  $\text{g cm}^{-3}$  de l'élément naturel considéré ;
- $M(A, Z)$  : masse atomique du nucléide  $(A, Z)$  ;
- $N_{Av}$  : nombre d'Avogadro.

#### Exemple

Dans le cas de l'aluminium  $^{27}_{13}\text{Al}$   $\rho = 2.7 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $x(27,13) = 1$ , car il n'y a qu'un seul isotope naturel,  $M(27,13) = 26.98$  et l'on obtient :

$$N_{at}(A, Z) = \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{26.98} \times 1 \times 2.7 = 6.026 \cdot 10^{22} \text{ atomes cm}^{-3}$$

### 2.4. Calcul du nombre de nucléides d'un type donné par unité de volume d'un mélange

On considère un mélange homogène de nucléides de types  $i$  dont la fraction massique dans ce mélange est  $x_i$ . Les masses volumiques des matériaux purs formés de chacun de ces types de nucléides est  $\rho_i$ . Le mélange occupe un volume  $V$ . Les nucléides de type  $i$  occupent un volume  $V_i$  dans  $V$ . On veut déterminer le nombre  $N_i$  d'atomes de chaque type  $i$  de nucléides **par unité de volume**, à partir des  $x_i$  et des  $\rho_i$ . On désigne par  $\rho$  la masse volumique du mélange. D'après ce qui précède,  $N_i$  est donné par l'expression :

$$N_i = \frac{N_{Av}}{M_i} x_i \rho \quad (2.18)$$

où  $M_i$  est la masse atomique du nucléide  $i$ . Le produit  $\rho'_i = x_i \rho$  représente la masse volumique des nucléides de type  $i$  dans le mélange et l'on a :

$$\sum_i \rho'_i = \sum_i x_i \rho = \rho \sum_i x_i = \rho \times 1. = \rho \quad (2.19)$$

On exprime maintenant la masse volumique  $\rho$  du mélange en fonction des  $x_i$  et des  $\rho_i$ . Par définition, les pourcentages en masse  $x_i$  sont définis par :

$$x_i = \frac{\rho_i V_i}{\sum_i \rho_i V_i} \quad (2.20)$$

et la masse volumique du mélange s'écrit :

$$\rho = \frac{\sum_i \rho_i V_i}{V}, \quad V = \sum_i V_i, \quad \sum_i x_i = 1. \quad (2.21)$$

Donc :

$$x_i = \frac{\rho_i V_i}{\sum_i \rho_i V_i} = \frac{\rho_i V_i}{\rho V} \quad (2.22)$$

d'où :

$$\frac{x_i}{\rho_i} = \frac{V_i}{\rho V} \Rightarrow \sum_i \frac{x_i}{\rho_i} = \sum_i \frac{V_i}{\rho V} = \frac{\sum_i V_i}{\rho V} = \frac{1}{\rho} \quad (2.23)$$

Finalement,

$$\rho = \frac{1}{\sum_i \frac{x_i}{\rho_i}} \quad (2.24)$$

En reportant dans l'expression donnant  $N_i$  on obtient :

$$N_i = \frac{N_{Av}}{M_i} x_i \rho = \frac{N_{Av}}{M_i} x_i \frac{1}{\sum_i \frac{x_i}{\rho_i}} \quad (2.25)$$

où  $M_i$  est la masse atomique du nucléide  $i$  considéré.

### Exemple

Le **tableau 8** ci-dessous illustre ce qui précède dans le cas d'un matériau acier contenant du fer, du chrome, du nickel et du manganèse.

Tableau 8. Détermination des valeurs du nombre d’atomes par unité de volume ; l’unité atomes  $10^{-24} \text{ cm}^{-3}$  est utilisée lorsque les concentrations  $N_i$  sont multipliées par des sections efficaces microscopiques exprimées en *barn* :  $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$  (voir chapitre 8).

Elément naturel $i$	$x_i$ % en masse	$\rho_i$ $\text{g cm}^{-3}$	$\frac{x_i}{\rho_i}$	$\rho'_i = x_i \rho$ $\text{g cm}^{-3}$	$M_i$ u (ou $\text{g. mol}^{-1}$ )	$N_i$ atomes $\text{cm}^{-3}$	$N_i$ atomes $10^{-24} \text{ cm}^{-3}$
Cr	18	7.1	$2.535 \cdot 10^{-2}$	1.4	52.00	$1.62 \cdot 10^{22}$	$1.62 \cdot 10^{-2}$
Ni	11	8.9	$1.236 \cdot 10^{-2}$	0.86	58.69	$8.79 \cdot 10^{21}$	$8.79 \cdot 10^{-3}$
Mn	2	7.2	$2.778 \cdot 10^{-3}$	0.156	54.94	$1.71 \cdot 10^{21}$	$1.71 \cdot 10^{-3}$
Fe	69	7.86	$8.779 \cdot 10^{-2}$	5.375	55.85	$5.79 \cdot 10^{22}$	$5.79 \cdot 10^{-2}$
Total	100		$0.128 = \frac{1}{\rho}$	$\rho = 7.79$			

En physique nucléaire, c’est la **masse du noyau atomique** ou **masse nucléaire**, que l’on considère généralement. Elle se déduit de la **masse atomique** en soustrayant la masse des électrons atomiques à la masse atomique. Des calculs fins doivent prendre en compte l’énergie de liaison des électrons dans l’atome considéré.

3. Défaut de masse, excès de masse, énergie de liaison – Stabilité du noyau atomique

Le physicien F. W. Aston a observé lors de ses mesures des masses atomiques que les résultats obtenus ne vérifiaient pas la **loi d’addition des masses**. Autrement dit, la masse du nucléide carbone 12,  $^{12}_6\text{C}$ , n’est pas égale, mais inférieure à 3 fois la masse du nucléide hélium 4  $^4_2\text{He}$  ; elle n’est pas non plus égale, mais inférieure à 6 fois la masse du neutron  $^1_0\text{n}$  + 6 fois la masse de l’atome d’hydrogène  $^1_1\text{H}$ . C’est ce qu’illustre la **figure 6**.

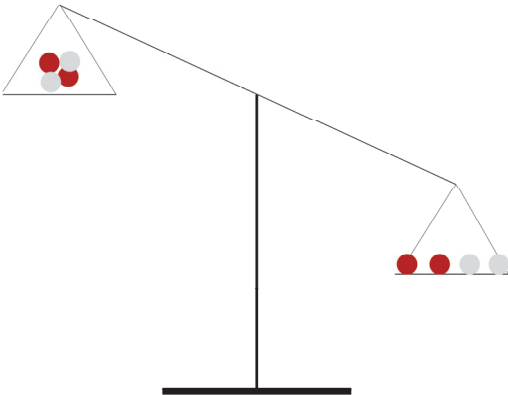


Figure 6. Exemple de l’atome d’hélium 4 : la balance penche du côté droit : la masse atomique de l’hélium 4,  $^4_2\text{He}$ , est inférieure à la somme des masses de ses constituants.

Le principe de l'équivalence masse-énergie posé par A. Einstein permet d'interpréter cette différence. Cette différence de masse  $\delta M < 0$ , observée, correspond à la contrepartie énergétique  $\Delta E = |\delta M|c^2$  exigée par la cohésion du noyau atomique. Une fraction de la matière nucléaire de l'ensemble des nucléons a été convertie sous une forme énergétique pour assurer le maintien des nucléons ensemble au sein du noyau atomique. Elle peut être comprise comme **l'énergie nécessaire pour déconstruire un noyau en ses protons et neutrons** qui le composent. Inversement, elle est équivalente à l'énergie qui serait libérée si ces protons et ces neutrons se recombinaient pour former ce même noyau.

L'équivalence masse-énergie et le principe de conservation de l'énergie permettent de définir et quantifier cette différence  $\delta M$  constatée et d'appréhender la stabilité du noyau atomique sans pour autant avoir à décrire dans le détail les phénomènes à l'œuvre au sein de celui-ci.

Plusieurs termes, diversement employés, se rattachent à la différence de masse  $\delta M$  :

- le **déficit de masse** ;
- l'**excès de masse** ;
- l'**énergie de liaison**.

### 3.1. Déficit de masse

C'est la quantité  $\delta M$  précédemment évoquée :

$$\delta M \equiv \delta M(A, Z) = M_{\text{noyau}}(A, Z) - (ZM_p + NM_n) \quad (3.1)$$

où  $M_{\text{noyau}}(A, Z)$  est la **masse du noyau atomique nu**, c'est-à-dire de l'atome  $(A, Z)$  dépouillé de tous ses électrons.

Elle est toujours **négative**. On peut l'exprimer en différentes unités : u, g, kg, eV, keV, MeV ...

#### Exemple

Dans le cas de **l'hélium 4**,  ${}^4_2\text{He}$ , on a approximativement, en utilisant la masse atomique ( $M({}^4_2\text{He}) \equiv M(4,2)$ ) à la place de la masse du noyau atomique (l'approximation porte sur la contribution, faible, des électrons à la masse atomique) :

$$\begin{aligned} \delta M({}^4_2\text{He}) &\approx M({}^4_2\text{He}) - (2M_p + 2M_n) \\ &\approx 4.002\,603 \text{ (u)} - (2 \times 1.008\,664 \text{ (u)} + 2 \times 1.007\,276 \text{ (u)}) \\ &\approx 4.002\,603 \text{ (u)} - 4.032\,979 \text{ (u)} = -3.037\,664 \cdot 10^{-2} \text{ u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta M({}^4_2\text{He}) &\approx -3.037\,664 \cdot 10^{-2} \times 1.660\,538\,73 \cdot 10^{-24} \text{ (g)} = -5.044\,158 \cdot 10^{-26} \text{ g} \\ &= -5.044\,158 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\delta M({}^4_2\text{He}) \approx -3.037\,664 \cdot 10^{-2} \text{ (u)} \times 931.494 \text{ (MeV)} = -28.295\,65 \text{ MeV}$$

### 3.2. Excès de masse

L'**excès de masse** (*mass excess*) est conventionnellement défini par l'expression :

$$\Delta M^u(A, Z) = M^u(A, Z) - A \quad (3.2)$$

#### Exemple

Dans le cas de l'hélium 4,  ${}^4_2\text{He}$ , on a :

$$\Delta M^u({}^4_2\text{He}) = 4.002\,603\,254\,15\,u - 4 = 0.002\,603\,254\,15\,u$$

On peut aussi l'exprimer en unité d'énergie :

$$\Delta M^u({}^4_2\text{He}) = 0.002\,603\,254\,15\,(u) \times 931\,494\,(\text{keV}) = 2424.91565\,\text{keV}$$

Selon les atomes, les valeurs de  $\Delta M^u(A, Z)$  peuvent être **positives** ou **négatives**.

### 3.3. Énergie de liaison

L'**énergie de liaison** (*binding energy*), notée  $B(A, Z)$ , est définie par l'expression suivante :

$$B(A, Z) = (ZM_p + NM_n)c^2 - M_{\text{noyau}}(A, Z)c^2 = -\delta M(A, Z)c^2 \quad (3.3)$$

Son signe, opposé à celui du défaut de masse  $\delta M(A, Z)c^2$ , est donc toujours **positif**.

#### Exemple

##### Photodésintégration du deutérium et de la capture radiative de l'hydrogène.

Cet exemple illustre le principe de l'équivalence masse-énergie, montre que le défaut de masse du noyau de deutérium correspond à l'énergie libérée dans le processus de formation du deutérium, et permet de comprendre la stabilité du deutérium.

La réaction de photodésintégration du deutérium,  ${}^2_1\text{H}$  noté aussi  ${}^2_1\text{D}$ , est une réaction nucléaire provoquée par l'interaction d'un rayonnement  $\gamma$  avec le noyau de cet atome (réaction dite photonucléaire). Il en résulte la production d'un noyau d'hydrogène (un proton),  ${}^1_1\text{H}$ , et d'un neutron, comme le montrent les écritures symboliques suivantes :



Cette réaction s'écrit encore conventionnellement (voir chapitre 6) :



Afin d'alléger l'écriture des processus nucléaires, on a noté le neutron  $n$  au lieu de  ${}^1_0n$ .

L'énergie de liaison du deuteron – ou deuton, nom donné au noyau de deutérium – étant de 2,23 MeV, le gamma incident doit avoir une énergie minimale de 2,23 MeV, pour le dissocier en ses deux constituants : un proton et un neutron.

Inversement, la capture d'un neutron par un atome d'hydrogène, c'est-à-dire la recombinaison d'un proton et d'un neutron pour former un deuteron, s'accompagne de l'émission d'un gamma d'au moins 2,23 MeV :



**L'énergie de liaison** manifeste l'**interaction forte** et la **force nucléaire** qui en résulte, c'est-à-dire l'interaction nucléaire responsable de la cohésion des nucléons au sein du noyau atomique. L'interaction forte sera abordée dans le chapitre 4 consacré à la structure du noyau atomique.

Dans la pratique, comme l'on mesure les masses atomiques  $M(A, Z)$ , on réexprime l'énergie de liaison  $B(A, Z)$  en fonction de la masse atomique :

$$M(A, Z)c^2 \approx (ZM_{\text{H}} + NM_{\text{n}})c^2 - B(A, Z) \quad (3.4a)$$

et

$$B(A, Z) \approx (ZM_{\text{H}} + NM_{\text{n}})c^2 - M(A, Z)c^2 \quad (3.4b)$$

Dans cette formule, on voit que l'on a remplacé la masse du proton par celle de l'atome d'hydrogène et la masse du noyau  $(A, Z)$  par la masse atomique de ce même nucléide.

Cependant, cette expression reste une approximation (une bonne approximation dans la plupart des cas), car elle néglige l'énergie de liaison de l'ensemble des électrons atomiques,  $B_e(A, Z)$  <sup>47</sup> :

$$B_e(A, Z) \cong 15.73 Z^{\frac{7}{3}} \text{ (eV)} \quad (3.5a)$$

Une meilleure approximation est<sup>48</sup> :

$$B_e(A, Z) = 14.4381 Z^{2.39} + 1.55468 \cdot 10^{-6} Z^{5.35} \text{ (eV)} \quad (3.5b)$$

Cette dernière représente donc, au maximum, de l'ordre de 3 keV par nucléon à comparer avec les 6 à 8 MeV, ordre de grandeur de l'énergie de liaison d'un nucléon dans le noyau atomique.

En toute rigueur, la masse  $M_{\text{noyau}}(A, Z)$  du noyau atomique nu se déduit de la masse atomique  $M(A, Z)$  par l'expression :

$$M_{\text{noyau}}(A, Z)c^2 = M(A, Z)c^2 - (ZM_{\text{e}}c^2 - B_e(A, Z)) \quad (3.6)$$

<sup>47</sup> L. L. Foldy, « A Note on Atomic Binding Energies », *Physical Review* 83, July 15, 1951, pp. 397-399, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.83.397>.

<sup>48</sup> D. Lunney, J. M. Pearson, C. Thibault, « Recent trends in the determination of nuclear masses », *op. cit.*, p. 1071.

D’où, en reportant cette dernière expression dans la relation (3.3) définissant l’énergie de liaison  $B(A, Z)$  en fonction de la masse du noyau atomique nu,  $M_{noyau}(A, Z)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} B(A, Z) &= (ZM_p + NM_n)c^2 - (M(A, Z)c^2 - (ZM_e c^2 - B_e(A, Z))) \\ B(A, Z) &= ZM_p c^2 + NM_n c^2 - M(A, Z)c^2 + ZM_e c^2 - B_e(A, Z) \\ B(A, Z) &= Z(M_p c^2 + M_e c^2 - B_e({}_1^1\text{H})) + NM_n c^2 - M(A, Z)c^2 - B_e(A, Z) + ZB_e({}_1^1\text{H}) \end{aligned}$$

En remarquant que  $M_H c^2 = M_p c^2 + M_e c^2 - B_e({}_1^1\text{H})$ , où  $B_e({}_1^1\text{H}) \approx 13.6 \text{ eV}$ , est l’énergie de liaison de l’électron dans l’atome d’hydrogène,  $B(A, Z)$  s’écrit :

$$B(A, Z) = ZM_H c^2 + NM_n c^2 - M(A, Z)c^2 - B_e(A, Z) + ZB_e({}_1^1\text{H}) \tag{3.7}$$

En négligeant les deux derniers termes relatifs aux énergies de liaison de l’électron, on retrouve bien :

$$B(A, Z) \approx (ZM_H + NM_n)c^2 - M(A, Z)c^2 \tag{3.8}$$

On utilise également l’énergie de liaison par nucléon<sup>49</sup> :  $B(A, Z)/A$ .

Exemples

Tableau 9. Exemples de valeurs d’énergies de liaison.

	${}_1^1\text{H}$	${}_2^4\text{He}$	${}_6^{12}\text{C}$	${}_{26}^{56}\text{Fe}$	${}_{126}^{208}\text{Pb}$	${}_{92}^{235}\text{U}$
$\Delta M^u(A, Z) \times 931.494 \text{ MeV}$	7.288 970 50	2.424 915 65	0.0	−60.605 35	−21.748 455	40.920 456
$B(A, Z) \text{ MeV}$	0.0	28.29566	92.16172	492.258	1636.43	1783.863
$B(A, Z)/A \text{ MeV}$	0.0	7.073 915	7.680 144	8.790 323	7.867 452	7.590 907

Les **figures 7a et 7b** ci-après montrent la variation de l’énergie de liaison par nucléon  $B(A, Z)/A$  en fonction du nombre de masse  $A$ . On observe qu’il existe une région de valeurs de  $A$  élevées où les noyaux sont susceptibles de subir le phénomène de **fission nucléaire** et d’autres, pour les faibles valeurs de  $A$ , où la **fusion thermonucléaire** est théoriquement possible.

Dans le chapitre 5 consacré à la **radioactivité**, on verra cependant que le critère de transition d’un nucléide radioactif vers un autre nucléide (déplacement vers la vallée de stabilité) n’est pas nécessairement que l’énergie de liaison du second soit plus grande que celle du premier.

<sup>49</sup> Voir par exemple : <https://nds.iaca.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.



### 3.4. Expression de l'énergie de liaison en fonction de l'excès de masse

On désigne par  $B^u(A, Z)$  l'énergie de liaison du noyau  $(A, Z)$  en unité de masse atomique. Par définition on a :

$$B^u(A, Z) = ZM_H^u + NM_n^u - M^u(A, Z) \quad (3.9)$$

avec  $M^u(A, Z) = A + \Delta M^u(A, Z)$  d'après (3.2).

L'on en déduit l'expression de l'énergie de liaison en fonction de l'excès de masse  $\Delta M^u(A, Z)$ , en unité de masse atomique :

$$B^u(A, Z) = ZM_H^u + NM_n^u - A - \Delta M^u(A, Z) \quad (3.10)$$

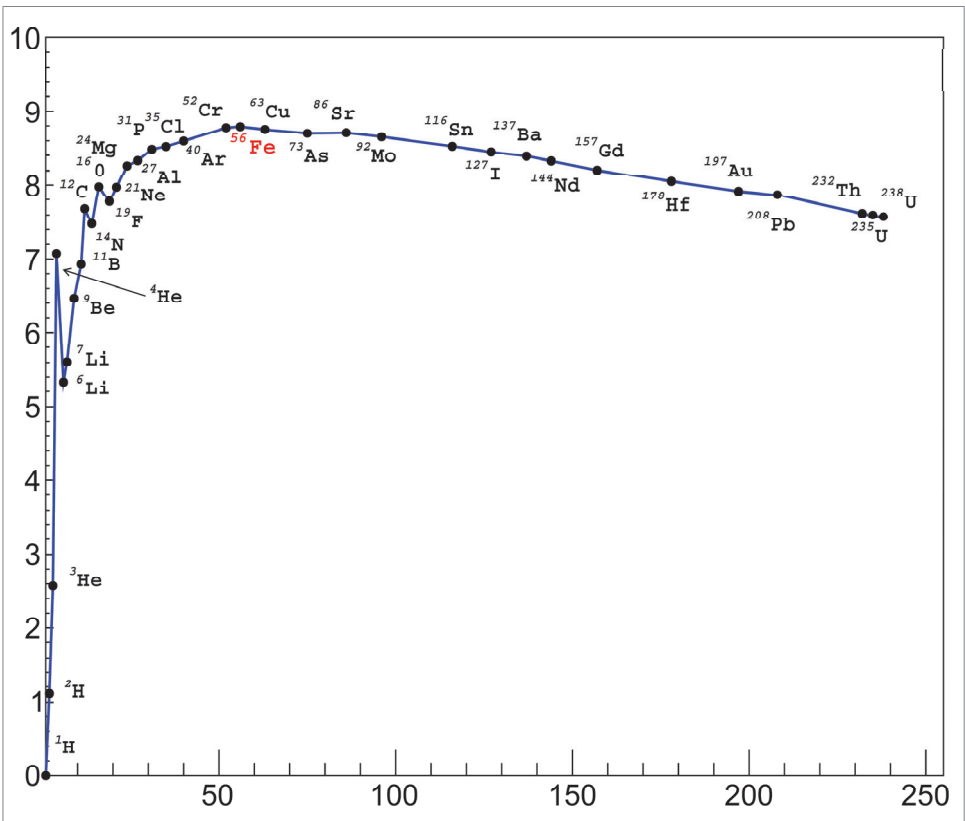


Figure 7a. Variation de l'énergie de liaison par nucléon (en ordonnée, Mev) en fonction du nombre de masse  $A$  (en abscisse).

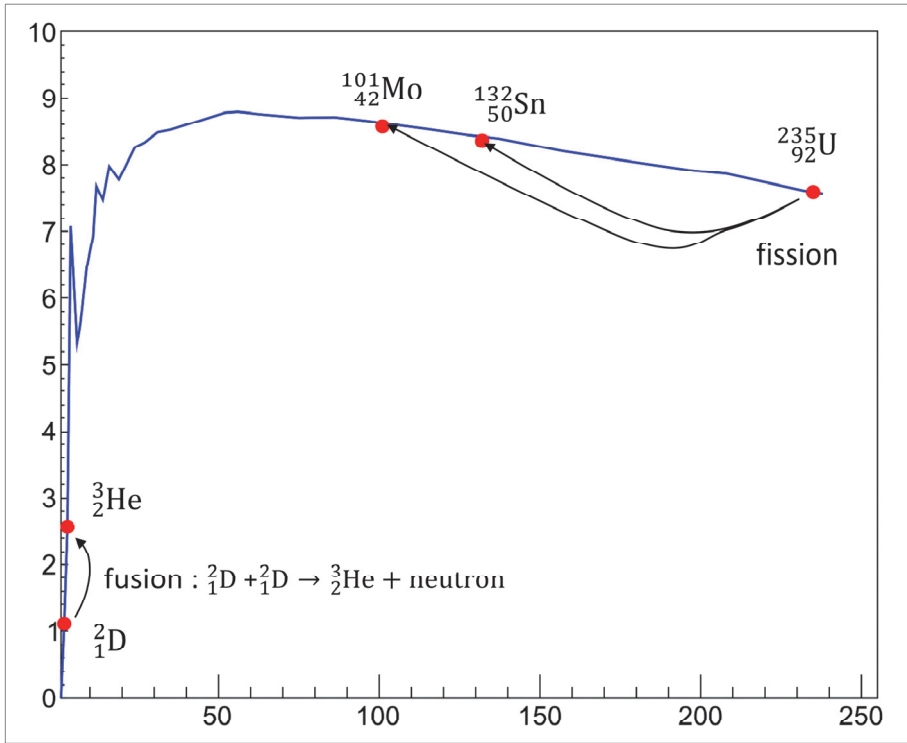


Figure 7b. Variation de l'énergie de liaison par nucléon (en ordonnée, MeV) en fonction du nombre de masse  $A$  (en abscisse) ; des exemples de processus nucléaires de fission et fusion y sont indiqués ; les noyaux atomiques légers tels que le deutérium, le tritium, l'hélium, etc. peuvent être formés par fusion thermonucléaire de noyaux légers (voir chapitre 6), tels que les deutérons, et par fission « ternaire » (en trois entités distinctes) de noyaux lourds (voir chapitre 9).

Sachant que  $1 \text{ u} = 931.494 \text{ MeV}/c^2$ , on exprime cette même énergie de liaison en unité d'énergie par les formules suivantes :

$$B(A, Z)(\text{MeV}) = B^u(A, Z) \times 931.494 \quad (3.11)$$

**Exemple : calcul de l'énergie de liaison du nucléide hélium 4,  ${}^4_2\text{He}$**

Pour l'hélium 4 :  $A = 4$  et  $Z = 2$

Les valeurs des masses  $M^u({}^4_2\text{He}) \equiv M^u(4, 2)$ ,  $M^u_{\text{H}}$ ,  $M^u_{\text{n}}$  sont extraites d'une base de données nucléaires :

$$\begin{aligned} M^u({}^4_2\text{He}) &\equiv M^u(4, 2) = 4.002\,603\,254\,15 \text{ u} \\ M^u_{\text{H}} &= 1.007\,825\,032 \\ M^u_{\text{n}} &= 1.008\,664\,915 \end{aligned}$$

L'expression (3.2) donne :  $\Delta M^u({}^4_2\text{He}) = 4.002\,603\,254\,15 \text{ u} - 4 = 0.002\,603\,254\,15 \text{ u}$

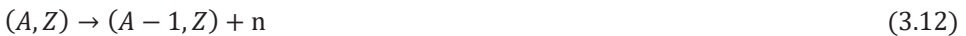
L'expression (3.10) s'écrit numériquement comme :

$$B^u({}_2^4\text{He}) = 2 \times 1.007\,825\,032 + 2 \times 1.008\,664\,915 - 4 - 2\,603\,254\,15\,10^{-3} = 3.037\,666\,10^{-2}\,u$$

En unité d'énergie, on obtient immédiatement :  $B({}_2^4\text{He}) = 3.037\,666\,10^{-2}(u) \times 931.494\,(\text{MeV}) = 28.295\,65\,\text{MeV}$

### 3.5. Expression de l'énergie de séparation d'un neutron du reste du noyau atomique

L'énergie de séparation d'un neutron est l'énergie nécessaire pour extraire ce neutron du noyau atomique auquel il appartient (dans la littérature on parle aussi de l'**énergie de séparation du « dernier proton »** ou du **« dernier neutron »** faisant ainsi référence au nucléon le moins lié au reste du noyau (voir chapitre 4). On considère un noyau atomique  $(A, Z)$  de nombre de masse  $A$ , comportant  $N$  neutrons et  $Z$  protons et l'on étudie donc la transition nucléaire :



où  $A = N + Z$  par définition.

À l'instar de la démarche adoptée en chimie, on détermine l'**énergie disponible «  $Q$  »** de la transition définie par la différence des masses du 1<sup>er</sup> membre et du 2<sup>e</sup> membre de cette transition nucléaire. L'énergie de séparation, souvent notée  $S_n$  dans la littérature, est alors définie par l'égalité :

$$S_n = -Q_n \quad (3.13)$$

On a par définition :

$$Q_n = [Z M_H c^2 + N M_n c^2 - B(A, Z)] - [Z M_H c^2 + (N - 1) M_n c^2 - B(A - 1, Z) + M_n c^2] \quad (3.14)$$

avec :

- $B(A, Z)$  l'énergie de liaison du noyau  $(A, Z)$  possédant  $N$  neutrons ;
- $B(A - 1, Z)$  l'énergie de liaison du noyau  $(A - 1, Z)$  résultant de la perte d'un neutron par le noyau  $(A, Z)$  et donc ne possédant plus que  $N - 1$  neutrons.

On obtient immédiatement :

$$Q_n = B(A - 1, Z) - B(A, Z) \quad (3.15)$$

On effectue à présent le passage en unité de masse atomique  $u$  et on utilise (3.2) pour exprimer l'énergie disponible  $Q$  en fonction des excès de masse :

Noyau atomique ( $A, Z$ )	Noyau atomique ( $A - 1, Z$ )
On a :	On a :
$B^u(A, Z) = ZM_H^u + NM_n^u - M^u(A, Z)$	$B^u(A - 1, Z) = ZM_H^u + (N - 1)M_n^u - M^u(A - 1, Z)$
$M^u(A, Z) = A + \Delta M^u(A, Z)$	$M^u(A - 1, Z) = (A - 1) + \Delta M^u(A - 1, Z)$
d'où :	d'où :
$B^u(A, Z) = ZM_H^u + NM_n^u - A - \Delta M^u(A, Z)$	$B^u(A - 1, Z) = ZM_H^u + (N - 1)M_n^u - (A - 1) - \Delta M^u(A - 1, Z)$

Puisque par définition  $M_n^u = 1 + \Delta M_n^u$ , on en déduit  $Q_n$  en unité de masse atomique  $u$ , notée  $Q_n^u$  :

$$Q_n^u = B^u(A - 1, Z) - B^u(A, Z) \quad (3.16)$$

$$Q_n^u = -\Delta M^u(A - 1, Z) + \Delta M^u(A, Z) - \Delta M_n^u \quad (3.17)$$

On peut exprimer  $Q_n$  en MeV à partir de sa valeur en unité de masse atomique :

$$Q_n(\text{MeV}) = Q_n^u \times 931.494 (\text{MeV}) \quad (3.18)$$

De façon analogue, à partir de la transition  $(A, Z) \rightarrow (A - 1, Z - 1) + p$ , on détermine l'énergie de séparation d'un proton :

$$Q_p = [Z M_H c^2 + N M_n c^2 - B(A, Z)] - [(Z - 1) M_H c^2 + N M_n c^2 - B(A - 1, Z - 1) + M_p c^2] \quad (3.19)$$

$$Q_p = -B(A, Z) + B(A - 1, Z - 1) \quad (3.20)$$

avec :

- $B(A, Z)$  l'énergie de liaison du noyau  $(A, Z)$  ;
- $B(A - 1, Z - 1)$  l'énergie de liaison du noyau  $(A - 1, Z - 1)$  résultant de la perte d'un proton par le noyau  $(A, Z)$  et donc ne possédant plus que  $Z - 1$  protons, mais conservant les  $N$  neutrons.

L'énergie de séparation du proton,  $S_p$ , s'écrit :

$$S_p = -Q_p \quad (3.21)$$

### Exemple

**Calcul de l'énergie de séparation du neutron du béryllium  $9, {}_4^9\text{Be}$**

On écrit la réaction nucléaire correspondante :  ${}^9_4\text{Be} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + n$ .

D'après les tables de données, on a :

$$\begin{aligned}\Delta M^u({}^9_4\text{Be}) &= 1.2183 \times 10^{-2} \text{ u} ; \Delta M^u({}^8_4\text{Be}) = 5.3052 \times 10^{-3} \text{ u} ; \Delta M^u_n = M^u_n - 1 \\ &= 8.6652 \times 10^{-3} \text{ u} \\ Q^u_n &= -5.3052 \times 10^{-3} \text{ u} + 1.2183 \times 10^{-2} \text{ u} - 8.6652 \times 10^{-3} \text{ u} \\ Q^u_n &= -1.7874 \times 10^{-3} \text{ u, soit en unité d'énergie :} \\ Q_n &= -1.7874 \times 10^{-3} \times 931.494 = -1.665 \text{ MeV}\end{aligned}$$

Par ailleurs, les tables de données nucléaires fournissent aussi les énergies de liaison ici des béryllium 9 et 8 :

$$B({}^9_4\text{Be}) = 58.167 \text{ MeV}, \quad B({}^8_4\text{Be}) = 56.501 \text{ MeV}$$

d'où :

$$Q_n = -58.167 + 56.501 = -1.666 \text{ MeV},$$

valeur en accord avec celle précédemment déduite de  $Q^u_n$ .

On en déduit la valeur de l'énergie de séparation :  $S_n = -Q_n = 1.666 \text{ MeV}$ .

Pour l'extraction d'un proton, on a :  ${}^9_4\text{Be} \rightarrow {}^8_3\text{Li} + p$

L'énergie de liaison du lithium 7 formé est :

$$B({}^8_3\text{Li}) = 41.277 \text{ MeV et } Q_p = -58.167 + 41.277 = -16.889 \text{ MeV}$$

En conséquence, l'énergie de séparation du proton d'un noyau de béryllium 9 est :

$$S_p = -Q_p = 16.889 \text{ MeV}$$

### Remarques

- À l'instar de la réaction nucléaire induite par un photon sur un noyau de deutérium examinée au paragraphe 3.3, les réactions nucléaires (3.22) et (3.23) peuvent être déclenchées par des photons d'énergie au moins égale respectivement à 1.666 MeV et 16.889 MeV. De manière plus générale, on a ainsi les égalités suivantes entre les énergies  $Q(\gamma, x)$  des réactions nucléaires  $(\gamma, x)$  induites par des photons ( $\gamma$ ) et les énergies de séparation,  $S_x$ , d'un nucléon ou d'un groupe de nucléons ( $x$ ) :
  - $x = n$ , un neutron :  $S_n = -Q(\gamma, n)$  (3.22)
  - $x = p$ , un proton :  $S_p = -Q(\gamma, p)$  (3.23)
  - $x = 2n$ , deux neutrons :  $S_{2n} = -Q(\gamma, 2n)$  (3.24)
  - $x = 2p$ , deux protons :  $S_{2p} = -Q(\gamma, 2p)$  (3.25)
  - $x = t$ , un triton :  $S_t = -Q(\gamma, t)$  (3.26)
  - $x = \alpha$ , une particule alpha :  $S_\alpha = -Q(\gamma, \alpha)$  (3.27)
- Les énergies de séparation déterminées correspondent à des valeurs moyennes et non pas à celles qui seraient relatives spécifiquement à des nucléons individualisés au sein du noyau atomique.
- La valeur de l'énergie de séparation d'un neutron ou d'un proton est relativement proche de la valeur de l'énergie de liaison moyenne par nucléon pour des noyaux atomiques de nombre de

masse  $A$  suffisamment élevé  $A \gtrsim 110$ . Par exemple, pour l'uranium 235, on a  $B/A \approx 7.6$  MeV,  $S_n \approx 5.3$  MeV et  $S_p \approx 6.7$  MeV. Pour les faibles valeurs de  $A$ , la différence est très significative : par exemple pour l'hélium 4,  $B/A \approx 7$  MeV,  $S_n \approx 20.6$  MeV et  $S_p \approx 19.8$  MeV.

### 3.6. Importance de la connaissance de l'énergie de liaison des noyaux atomiques dans le domaine de la physique des réacteurs

L'énergie de liaison intervient dans la détermination de l'énergie du neutron à l'issue des réactions nucléaires, et donc en particulier dans le traitement du transport des neutrons dans la matière.<sup>50</sup>

L'énergie disponible dans une **désintégration radioactive** ou une **réaction nucléaire** requiert également sa connaissance. Par conséquent, l'énergie de liaison intervient aussi dans la détermination de la **puissance résiduelle** délivrée par la décroissance radioactive des produits de fission et des actinides générés dans un combustible nucléaire irradié. La puissance résiduelle est une grandeur fondamentale en physique des réacteurs nucléaires, car sa valeur conditionne la puissance nominale du réacteur, le dimensionnement des circuits de refroidissement, les délais des opérations de déchargement des assemblages du cœur.

On verra dans le chapitre 4 suivant qu'il existe un modèle – le **modèle de la goutte liquide** – qui propose une formulation semi-empirique permettant d'accéder à l'énergie de liaison des noyaux atomiques par le calcul. Sa valeur particulièrement élevée pour certains noyaux atomiques s'explique par des propriétés quantiques dans le cadre d'un autre modèle nucléaire, le **modèle en couches**.

## 4. L'interaction nucléaire forte

Dans l'état actuel de nos connaissances, il existe dans la nature quatre types d'interactions rappelées dans le **tableau 10**. Le cadre général théorique actuel dans lequel sont usuellement décrites et étudiées trois des interactions fondamentales est le « modèle standard »<sup>51</sup> qui comporte :

- l'**électrodynamique quantique (QED : *Quantum Electrodynamics*)** qui étudie l'**interaction électromagnétique** alliant l'électromagnétisme et la mécanique quantique ;
- la **chromodynamique quantique (QCD : *Quantum Chromodynamics*)** qui décrit l'**interaction forte** ;

<sup>50</sup> *La neutronique* (ouvrage collectif), Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions du Moniteur/CEA, Paris, 2013, 2015, <https://www.cea.fr/multimedia/Pages/editions/ouvrages/monographies-nucleaire/neutronique.aspx>.

<sup>51</sup> J. Léon, *La construction de la matière : le modèle standard*, Ellipses, Paris, 2016.

- la **théorie électrofaible** qui décrit l’**interaction faible** et unifie la description des forces électromagnétique et nucléaire faible.

La relativité générale **traite** la gravitation.

Tableau 10. Les quatre interactions fondamentales ; 1 fm  $\equiv$  1 fermi = 1. 10<sup>-13</sup> cm. Les grandeurs g<sub>w</sub> et g<sub>s</sub> apparaissant dans les expressions des potentiels nucléaires renvoient respectivement aux notions de « charge nucléaire faible » et « charge nucléaire forte » par analogie à la charge électrique e. Dans le cadre de la théorie quantique des champs, les forces qui s'exercent entre entités en interaction résultent de l'« échange » de particules virtuelles comme l'illustre la figure 8 dans le cas d'une interaction forte entre deux nucléons. Ce sont les masses de ces particules qui interviennent dans l'expression du paramètre  $\mu$  : m représente donc la masse des bosons intermédiaires pour le potentiel associé à l'interaction faible et les masses respectivement des pions et des gluons pour l'interaction forte (voir tableau 11) et 1/ $\mu$ , correspond à la portée de l'interaction considérée<sup>52</sup>. Il est à noter que les expressions de g<sub>w</sub> et g<sub>s</sub> dépendent des modèles d'interaction choisis. On donne en annexe I quelques indications sur la détermination des constantes de couplage.

Interaction / force	Gravitationnelle	Électro-magnétique	Nucléaire faible (weak interaction)	Nucléaire forte (strong interaction)
Particules	graviton (?)	photon	bosons « intermédiaires » W <sup>+</sup> , W <sup>-</sup> , Z <sup>0</sup>	gluons pions
Type	attraction	attraction ou répulsion	transmutation	attraction, transmutation
Action entre	toutes les particules	particules chargées	quarks, leptons	quarks, nucléons
Action sur	masse	charge électrique	« charge faible » (saveur des quarks, nature des nucléons)	« charge forte » (couleur des quarks, nature des nucléons)
Portée	infinie	infinie	< 10 <sup>-2</sup> fm	~ 1.4 fm
Potentiel	$\frac{Gm^2}{r}$  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$	$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$\propto g_w^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}$  $\mu = mc^2/\hbar c$	$\propto g_s^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}$  $\mu = mc^2/\hbar c$
Constante de couplage / intensité	$\alpha_G = 6. \cdot 10^{-39}$	$\alpha = 1/137$	$\alpha_w \cong 10^{-5}$	$\alpha_s \cong 14.8$

À l'échelle nucléaire et dans le domaine d'énergie qui intéresse la physique des réacteurs nucléaires classiques, trois des quatre interactions sont concernées : **interaction**

<sup>52</sup> Voir l'explication fournie dans : C. Le Sech, C. Ngô, *Physique nucléaire – Des quarks aux applications*, 2<sup>e</sup> édition, Dunod, 2020, p. 6.

**électromagnétique** (émission de photons), interaction **nucléaire faible** (radioactivité  $\beta$ ), **interaction nucléaire forte**.

C'est cette dernière interaction qui rend compte de la cohésion du noyau. Les autres forces ne peuvent en effet pas expliquer la cohésion des nucléons au sein du noyau : pour une distance entre nucléons de 2 fm ( $2 \cdot 10^{-13}$  cm), l'interaction gravitationnelle est environ  $10^{36}$  fois inférieure à l'énergie de liaison caractéristique de l'ordre de 8 MeV d'un nucléon dans le noyau atomique ; l'interaction magnétique entre proton et neutron correspondant à leurs moments magnétiques intrinsèques fournit une énergie potentielle de l'ordre de 0.3 MeV, tout en observant que la force magnétique peut-être attractive ou répulsive selon que les spins des nucléons concernés sont parallèles ou antiparallèles.<sup>53</sup>

#### 4.1. Interaction forte et force nucléaire

Comme l'indique le **tableau 11**, les nucléons (neutron, proton) sont construits à partir de particules plus élémentaires : les **quarks**. Le **gluon** est considéré comme le « véhicule » de l'interaction forte, à l'instar du photon pour l'interaction électromagnétique. À l'heure actuelle, l'interaction forte est interprétée, comme signalé plus haut, dans le cadre de la **chromodynamique quantique**. Il convient donc de distinguer deux niveaux :

- celui de l'**interaction forte** proprement dite qui s'exerce à l'intérieur de chaque **nucléon** (et également de chaque méson) et qui maintient ensemble les quarks qui les forment ;
- celui de la **force nucléaire** qui s'exerce entre les nucléons eux-mêmes assurant la cohésion du noyau atomique, maintenant ensemble, grâce à l'action des **pions**, les nucléons qui le constituent. C'est pour cette raison que la **force nucléaire** est qualifiée parfois de **force forte résiduelle** pour la distinguer de l'interaction forte proprement dite. Les nucléons sont mobiles au sein du noyau atomique possédant une énergie cinétique estimée à une valeur d'environ 20 MeV (voir chapitre 4 § 3).

La **force nucléaire** présente aussi la particularité de devenir répulsive lorsque la distance entre deux nucléons devient inférieure à environ 0.3 fermi.<sup>54</sup>

Le libre parcours moyen  $\lambda$  d'un nucléon dans le noyau est évalué à environ  $1.5 \cdot 10^{-12}$  cm ce qui représente une distance importante comparée à la dimension du noyau atomique, de l'ordre du fermi, soit  $10^{-13}$  cm. En toute rigueur, ce libre parcours moyen dépend de l'énergie cinétique du nucléon au sein du noyau atomique<sup>55</sup>. Approximativement, en se référant aux définitions du chapitre 8, relatives aux sections efficaces microscopiques et macroscopiques ainsi qu'au libre parcours moyen, on peut estimer  $\lambda$  à partir de l'expression suivante :

<sup>53</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, pp. 337-338.

<sup>54</sup> Rappel : 1 fermi =  $10^{-13}$  cm, de manière abrégée, il est noté fm.

<sup>55</sup> K. Kikuchi, M. Kawai, *Nuclear Matter and Nuclear Reactions*, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 35-41.



$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} \quad (4.1)$$

où :

- $N$  est le nombre de nucléons par unité de volume de matière nucléaire :  $N \approx 1.8 \cdot 10^{38}$  nucléons  $\text{cm}^{-3}$  (voir § 2) ;
- $\sigma$  est la section efficace moyenne microscopique d'interaction d'un nucléon avec un autre nucléon ; par exemple en prenant  $\sigma \approx 3.7 \cdot 10^{-27} \text{ cm}^2 \equiv 3.7$  barns, on obtient la valeur indicative  $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-12} \text{ cm}$  mentionnée plus haut.

Le mouvement des nucléons dans le noyau atomique a pour conséquence, dans la plupart des cas, de le déformer (de l'écarter d'une forme idéalisée parfaitement sphérique). On constate également que les nucléons et le noyau atomique possèdent des moments angulaires qui jouent un rôle déterminant dans les propriétés qu'on lui observe.

La construction d'une théorie générale restituant les propriétés du noyau atomique (par exemple leurs énergies de liaison) et prédictive de caractéristiques observées de réactions nucléaires (par exemple énergie et distribution angulaire des entités résultantes des réactions nucléaires) suppose l'étude de l'**interaction nucléon-nucléon**, interaction à deux corps.

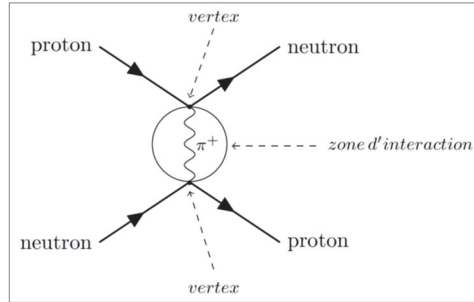
Cette interaction nucléon-nucléon doit être envisagée non seulement lorsque ceux-ci sont libres (cas des expériences de diffusion neutron-proton, neutron-neutron ou proton-proton, par exemple), mais aussi au sein de la matière nucléaire du noyau atomique.

Plusieurs physiciens se sont attachés à imaginer les mécanismes à l'œuvre dans l'**interaction nucléon-nucléon** et à modéliser celle-ci (voir **figure 8**). C'est ainsi que la **force nucléaire** s'exerçant entre deux nucléons, désignée également par le vocable de **force d'échange**, a été qualifiée selon le nom de ces physiciens : **force d'Heisenberg**, **force de Majorana**, **force de Barlett**, **force de Wigner**, **force de Yukawa**, **force de Brink-Boeker**. On doit à Hideki Yukawa<sup>56 57</sup> d'avoir proposé, en 1935, avant l'avènement de la chromodynamique quantique, une théorie reposant sur les concepts de **quantum de champ** et d'**échange de particules** (voir **figure 8**) rendant compte de certaines propriétés nucléaires observées. Par la suite, ont été introduites des **interactions phénoménologiques effectives** avec les **potentiels de Skyrme** (1956) et **de Gogny** (1980) dans le cadre d'une approche théorique visant à expliquer la structure des noyaux atomiques appelée **théorie du champ moyen** qui sera évoquée dans le chapitre 4. On y verra que le problème général à résoudre est un problème à «  $\mathcal{N}$  corps ».

<sup>56</sup> H. Yukawa, « On the Interaction of Elementary Particles. I », *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, Vol. 17, 1935 pp. 48-57, [https://doi.org/10.11429/ppmsj1919.17.0\\_48](https://doi.org/10.11429/ppmsj1919.17.0_48).

<sup>57</sup> G. C. Wick, « Range of Nuclear Forces in Yukawa's Theory », *Nature*, Vol. 142, 1938, pp. 993-994, <https://doi.org/10.1038/142993b0>.

Figure 8. Diagramme (diagramme de Feynman) d'interaction forte entre un proton et un neutron ; la particule échangée ici est un pion  $\pi^+$  émis par le proton qui devient un neutron et absorbé par un neutron qui devient un proton.<sup>58</sup>



#### 4.2. Quelques caractéristiques de l'interaction nucléaire forte

- **L'indépendance de charge** : la force nucléaire est spécifique aux particules faisant partie de la famille des hadrons, en particulier les neutrons et les protons. Des expériences de diffusion sur une cible d'hydrogène ont permis de mesurer les sections efficaces des réactions proton-proton et neutron-proton montrant qu'elles sont du même ordre de grandeur ; cela signifie que la force nucléaire est la même pour un neutron et pour un proton, par conséquent, qu'elle est indépendante de la charge électrique. Cette propriété est aussi appelée **symétrie de charge** dans la littérature.
- **La dépendance de spin** : il a été montré que les nucléons possèdent un moment angulaire – le spin – (voir l'expérience de Stern et Gerlach<sup>59</sup>) et que l'interaction forte dépendait du moment angulaire relatif des partenaires de la réaction.
- L'application du « **principe d'exclusion de Pauli** »<sup>60</sup> interdit à un ensemble de nucléons (qui sont des **fermions**) identiques de posséder les mêmes nombres quantiques ; cela explique que :
  - le système **n-p**, noyau de deutérium, possède un **état lié** puisque que les deux nucléons impliqués sont de nature différente ;
  - le système **n-n** ne possède pas d'état lié : inexistence d'une entité stable formée uniquement de deux neutrons ;
  - le système **p-p** ne possède pas d'état lié : inexistence d'une entité stable formée uniquement de deux protons.

<sup>58</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit., pp. 58-61.

<sup>59</sup> W. Gerlach, O. Stern, « Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld », *Zeitschrift für Physik* 9, 1922, pp. 349-352. <https://doi.org/10.1007/BF01326983> ; H. Schmidt-Böcking, « The Stern-Gerlach experiment re-examined by an experimenter », *Europhysics News*, Vol. 50, Number 3, May-June 2019, p. 15-19, <https://doi.org/10.1051/epn/2019302>.

<sup>60</sup> W. Pauli, *Principle and quantum mechanics*, Nobel Lecture, December 13, 1946, <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/pauli-lecture.pdf>.

- Il n'y a pas d'interpénétrabilité entre les nucléons :
  - à très courte portée, pour une distance inférieure à 0.7 ou 0.8 fm, la force nucléaire est **répulsive** ; ce caractère répulsif a été postulé pour préserver l'indépendance de charge observée de la force nucléaire ;
  - la force nucléaire décroît en fonction de la distance  $r$  : en  $r^{-6}$  entre 0.9 et 2 fm ;
  - la force de répulsion coulombienne devient dominante entre deux protons de 2 à 2.5 fm.

Tableau 11 (page suivante). Constituants élémentaires de la matière. Toutes les particules élémentaires qui constituent la matière connue n'y figurent pas : les leptons sont au nombre de 6 et les quarks également au nombre de 6 ; les bosons, vecteurs des interactions fondamentales, sont au nombre de 12. Les leptons sont classés en familles dénommées « saveurs » : on définit ainsi trois saveurs de leptons ; dans le même ordre d'idées, les 6 quarks correspondent à six saveurs – « *Up* (u), *Down* (d), *Charm* (c), *Strange* (s), *Top/Truth* (t), *Bottom/Beauty* (b) ; (Haut, Bas, Étrange, Charme, Dessous/Beauté, Dessus/Vérité) – et sont dotés d'une propriété quantique spécifique : la « couleur ». Chaque particule possède son antiparticule dont la charge électrique, si elle n'est pas nulle, est de signe opposé ; une particule élémentaire neutre est sa propre antiparticule. Outre les neutrons et les protons formés de trois quarks, ou les bosons ou mesons formés de deux quarks, il existe d'autres hadrons « exotiques » comportant quatre ou cinq quarks (tetraquarks ou pentaquarks).

particules élémentaires	fermions obéissent à la statistique de Fermi-Dirac	leptons	électron : $e^-$ positron : $e^+$	masse : $0.511 \text{ MeV}/c^2$ charge* : - 1 ; +1 spin : 1/2 durée de vie : stable
			neutrino électronique : $\nu_e$ antineutrino électronique : $\bar{\nu}_e$	masse : $< 0,0000022 \text{ MeV}/c^2$ charge : 0 spin : 1/2 durée de vie : stable
		quarks	u (Up)	masse : 1,5 à 4,0 $\text{MeV}/c^2$ charge : +2/3 spin : 1/2 durée de vie : stable
			d (Down)	masse : 4 à 8 $\text{MeV}/c^2$ charge : -1/3 spin : 1/2 durée de vie : stable
	bosons obéissent à la statistique de Bose-Einstein  vecteurs des interactions fondamentales	interaction électrofaible	photon : $X, \gamma$	masse : 0 charge : 0 spin : 1 durée de vie : stable
			$W^-, W^+$	masse : $80.4 \text{ GeV}/c^2$ ** charge : -1, +1 spin : 1 durée de vie : $3. \cdot 10^{-25} \text{ s}$
			$Z^0$	masse : $91.187 \text{ GeV}/c^2$ charge : 0 spin : 1 durée de vie : $3. \cdot 10^{-25} \text{ s}$
			Higgs : $H^0, H^+$	masse : $125 \text{ GeV}/c^2$ charge : 0 Spin : 0 Durée de vie : $\sim 10^{-24} \text{ s}$
		interaction forte	gluon	masse : 0 charge : 0 spin : 1 durée de vie : stable
		interaction gravitationnelle	graviton ?	Masse : 0 charge : 0 spin : 2 durée de vie : stable
particules composites : hadrons	baryons (fermions)	nucléons	neutron (ddu) : n	masse : $939.565 \text{ MeV}/c^2$ charge : 0 spin : 1/2 durée de vie : 877,7 s
			proton (uud) : p	masse : $938,272 \text{ MeV}/c^2$ charge : 1 spin : 1/2 durée de vie : stable
	mésons (bosons)	légers	pion : $\pi^0, \pi^-, \pi^+$	Masse : 134.97, 139.57, 139.57 $\text{MeV}/c^2$ charge : 0, -1, +1 spin : 0 durée de vie : $8.4 \cdot 10^{-17} \text{ s}, 2.610^{-8} \text{ s}, 2.610^{-8} \text{ s}$

\* Charge électrique en unité de charge électronique.\*\* Une évaluation récente questionne à nouveau le « modèle standard »<sup>61</sup>.

<sup>61</sup> CDF Collaboration, T. Aaltonen *et al.*, « High-precision measurement of the W boson mass with the CDF II detector », *Science*, Vol 376, Issue 6589, April 7, 2022, pp. 170-176, <https://www.science.org/doi/epdf/10.1126/science.abk1781>.

## Annexe I : détermination des « constantes de couplage » des interactions fondamentales

La mise sur une échelle commune de l'intensité des quatre interactions fondamentales est obtenue à travers des « **constantes de couplage** » qui leur sont affectées, définies comme le rapport entre la force (unité : N) s'exerçant entre deux particules de même type multipliée par le carré de la distance les séparant,  $d$  (unité  $m^2$ ), et une grandeur commune exprimée en  $N m^2$ , à savoir :

$$\hbar c = \frac{h}{2\pi} c = \frac{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ (J s)}}{2 \times 3.14159} \times 2.997924 \cdot 10^8 \text{ (m s}^{-1}\text{)} = 3.16 \cdot 10^{-26} \text{ (N m}^2\text{)} \quad (\text{I} - 1)$$

où  $h$  est la constante de Planck ( $\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \equiv 6.5827 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$ ) et  $c$ , la vitesse de la lumière dans le vide. Comme  $\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34} \equiv 6.5827 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$ , on a aussi :

$$\begin{aligned} \hbar c &= 6.5827 \cdot 10^{-22} \times 2.997924 \cdot 10^8 = 1.973 \cdot 10^{-13} \text{ MeV m} \\ &\equiv 197.3 \cdot 10^{-11} \text{ MeV m} \quad (\text{I} - 2) \end{aligned}$$

La valeur  $197.3 \text{ MeV fm}$  (fm : fermi  $10^{-15} \text{ m}$ ) est très utilisée dans la pratique.

### Remarque

Pour des raisons pratiques, dans le domaine de la physique des particules, il faut noter l'usage du « système d'unités naturelles » (SUN) dans lequel  $\hbar = c = 1$ .

Par exemple, dans ce système :

- le mètre, 1 m, vaut :

$$\frac{1 \text{ (m)}}{\hbar c \text{ (MeV m)}} = \frac{1}{1.973 \cdot 10^{-13}} = 5.067 \cdot 10^{-12} \text{ MeV}^{-1} \quad (\text{I} - 3)$$

- la seconde, 1 s, vaut :

$$\frac{1 \text{ (s)}}{\hbar \text{ (MeV s)}} = \frac{1}{6.5827 \cdot 10^{-22}} = 1.5119 \cdot 10^{21} \text{ MeV}^{-1} \quad (\text{I} - 4)$$

La constante de couplage relative à l'interaction  $x$  est définie par le rapport :

$$\alpha_x = \frac{F_x(r)r^2}{\hbar c} \quad (\text{I} - 5)$$

où  $r$  est la distance entre les deux particules considérées en interaction et  $F(r)$  la force issue du potentiel d'interaction concerné.

On voit donc que si la force d'interaction  $F(r)$  est inversement proportionnelle au carré de la distance, alors  $\alpha$  est une constante, ce qui est le cas pour les interactions gravitationnelle et électromagnétique.

Ce n'est plus le cas pour les potentiels nucléaires relatifs à l'interaction forte et à l'interaction faible qui présentent une décroissance exponentielle. Pour ces interactions, les valeurs de  $\alpha$  sont déterminées pour une distance  $r$  donnée ou bien dans la région dans laquelle la force  $F(r)$  prend une forme asymptotique.

#### ▪ Interaction gravitationnelle entre deux protons

La force gravitationnelle,  $F_{G,p}$ , qui s'exerce entre deux protons de masse  $M_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg s'écrit :

$$F_{G,p} = G \frac{M_p M_p}{d^2}, \quad G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (\text{I} - 6)$$

On en déduit la constante de couplage de l'interaction gravitationnelle,  $\alpha_G$  :

$$\alpha_G = \frac{F_{G,p} d^2}{\hbar c} = \frac{G M_p^2}{\hbar c} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \times (1.672621 \cdot 10^{-27})^2}{3.16 \cdot 10^{-26}} = 5.9 \cdot 10^{-39} \quad (\text{I} - 7)$$

#### ▪ Interaction électrostatique entre deux protons

La force électrostatique,  $F_{E,p}$ , qui s'exerce entre deux protons s'écrit :

$$F_{E,p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_p q_p}{d^2} \quad (\text{I} - 8)$$

où :

- $\epsilon_0$  est la permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$  ;
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$  est la constante de Coulomb ;
- $q_p$  est la charge électrique du proton :  $q_p = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

On en déduit la constante de couplage électrostatique,  $\alpha_E$  :

$$\begin{aligned} \alpha_E = \frac{F_{E,p} d^2}{\hbar c} &= \frac{q_p^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{(1.602 \cdot 10^{-19})^2}{4 \times 3.14159 \times 8,854 \cdot 10^{-12} \times 3.16 \cdot 10^{-26}} \\ &= 7.3 \cdot 10^{-3} \cong \frac{1}{137} \quad (\text{I} - 9) \end{aligned}$$

C'est la « **constante de structure fine** », grandeur adimensionnelle, relative à l'interaction électromagnétique.

### ■ Cas de l'interaction forte

La constante de couplage,  $\alpha_s$ , pour cette interaction s'écrit :

$$\alpha_s \propto \frac{g_s^2}{\hbar c} \quad (\text{I} - 10)$$

La détermination des grandeurs  $g_s$  n'est pas immédiate<sup>62</sup> et dépend du formalisme théorique utilisé. Ainsi, le formalisme de Yukawa conduit à la valeur  $\alpha_s \cong 14.8$ . Dans la littérature, pour l'interaction forte on trouve la constante<sup>63</sup> :

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{\hbar c} \left( \frac{M_\pi}{2M_p} \right)^2 = 0.08 \quad (\text{I} - 11)$$

Cela expliquerait la valeur  $\alpha_s = 1$  prise par certains auteurs, située entre 0.08 et 14.8.

### Remarque

La portée  $d$  d'une force peut être estimée par la longueur d'**onde de Compton réduite**, ou **rayon de Compton**,  $\hbar/mc$ , associée à la particule échangée de masse  $m$  ; on en déduit par exemple que des pions échangés, dans une interaction forte, ont une masse au repos de l'ordre de 140 MeV, la portée de la force correspondante étant prise égale à 1.4 fm ( $1.4 \cdot 10^{-15}$  m)<sup>64</sup> :

$$d \simeq \frac{\hbar}{mc} \Rightarrow mc^2 = \frac{\hbar c}{d} = \frac{3.16 \cdot 10^{-26}}{1.4 \cdot 10^{-15}} = 1.41 \cdot 10^{-10} \text{ J} \cong 140 \text{ MeV} \quad (\text{I} - 12)$$

### ■ Cas de l'interaction faible

La remarque faite sur la détermination de la constante de couplage de l'interaction forte vaut également pour le cas de l'interaction faible. La constante de couplage,  $\alpha_w$ , pour cette interaction s'écrit sous la forme :

$$\alpha_w \propto \frac{g_w^2}{\hbar c} \quad (\text{I} - 13)$$

où  $g_w$  est appelée « **constante universelle de Fermi** ».

<sup>62</sup> G. Ebel, A. Müllensiefen, H. Pilkuhn, F. Steiner, D. Wegener, M. Gourdin, C. Michael, J. L. Petersen, M. Roos, B. R. Martin, G. Oades, J. J. De Swart, « Compilation of coupling constants and low-energy parameters », *Nuclear Physics B*, Vol. 33, Issue 2, 1971, pp. 317-378, [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(71\)90293-8](https://doi.org/10.1016/0550-3213(71)90293-8).

<sup>63</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit., p. 118. D'autres estimations que celle indiquée ici ont été faites.

<sup>64</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit., pp. 58-61.

La valeur  $g_w = 1.41 \cdot 10^{-62} \text{ J m}^3 \equiv 8.8 \cdot 10^{-5} \text{ MeV fm}^3$  indiquée dans le tableau 10 correspond au phénomène de décroissance bêta décrit par la théorie de Fermi<sup>65</sup> :

$$\alpha_w = g_w \frac{M_p^2 c}{\hbar^3} = \frac{g_w \left( \frac{M_p c}{\hbar} \right)^2}{\hbar c} \quad (\text{I} - 14)$$

$$\alpha_w = \frac{1.41 \cdot 10^{-62} \times \left( \frac{1.672621 \cdot 10^{-27} \times 2.997924 \cdot 10^8}{1.0546 \cdot 10^{-34}} \right)^2}{3.16 \cdot 10^{-26}} \approx 1.04 \cdot 10^{-5}$$

### Remarque

L'interaction faible ne se réduit pas à ce mode de désintégration bêta et rassemble d'autres phénomènes prenant place dans la théorie plus générale de Weinberg-Salam. Cela conduit à définir une autre constante adimensionnelle associée à l'interaction faible.<sup>66</sup>

<sup>65</sup> K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, 1988, pp. 282-286.

<sup>66</sup> K. S. Krane, *op. cit.*, p. 705.



# 4

## La structure du noyau atomique



Une théorie de la **structure du noyau atomique** doit rendre compte de ses propriétés, à savoir :

- la stabilité des noyaux atomiques ;
- les moments angulaires des noyaux atomiques ;
- l'existence d'isomères et d'isotopes ;
- l'excès de neutrons ;
- les énergies de désintégration radioactive ;
- les réactions nucléaires : existence et occurrence ;
- la densité nucléaire ;
- la forme des noyaux atomiques.

Le noyau atomique constitue un **système quantique**. La démarche idéale serait de pouvoir caractériser l'état de chacun des nucléons du noyau dans l'espace des états quantiques possibles en résolvant l'**équation de Schrödinger**<sup>1</sup> avec l'**hamiltonien**  $H$  associé au noyau atomique (voir annexe II) :

$$H = \sum_{i=1}^A E_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^A V_{ij} \quad (1)$$

avec :

- $A$  le nombre de nucléons du noyau atomique considéré ;
- $E_i$  l'énergie cinétique du nucléon  $i$  ;
- $V_{ij}$  le potentiel d'interaction entre le nucléon  $i$  et le nucléon  $j$  (en toute rigueur, il existe des termes additionnels de corrélation reflétant les interactions à 3 corps et plus, supposées ici négligeables).

On constate donc qu'il s'agit d'un « problème à  $N$  corps » (ici  $A$  nucléons) faisant intervenir l'interaction nucléon-nucléon  $V_{ij}$ . La résolution de l'équation (1) ci-dessus est restée longtemps inaccessible pour deux raisons :

- la complexité du problème à  $N$  corps et celle de la forme du potentiel nucléaire réel imposant l'utilisation de puissants moyens de calcul pour traiter numériquement cette équation ;
- l'interaction nucléon-nucléon  $V_{ij}$  demeure imparfaitement connue ; comme cela a été mentionné dans le chapitre 3 (§ 4), elle résulte des propriétés des constituants des nucléons eux-mêmes (quarks et autres particules élémentaires) et elle est étudiée dans le cadre de la **chromodynamique quantique** (*Quantum ChromoDynamics*, QCD). Cela explique l'élaboration de modèles phénoménologiques ou semi-empiriques dans la mesure où, parallèlement à des considérations théoriques, ils mobilisent à la fois une approche qualitative guidée par une image ou représentation inspirée d'un autre

<sup>1</sup> E. Schrödinger, « An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules », *Physical Review* 28, December 1, 1926, pp. 1049-1070, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.28.1049>.

domaine de la physique, par exemple, et des résultats expérimentaux. Ils font intervenir des **paramètres phénoménologiques** clés dont les valeurs sont déduites de mesures.

Trois de ces modèles, « classiques », sont passés en revue dans la suite afin d'appréhender la structure du noyau atomique.

- Le **modèle de la goutte liquide** (*liquid-drop model*, **LDM**), dû initialement à George Gamow<sup>2</sup>, puis Niels Bohr et John Archibald Wheeler, qui rend compte en particulier de l'énergie de liaison du noyau atomique. Ce modèle qui assimile le noyau atomique à un liquide de nucléons, à l'instar d'un liquide formé de molécules, est aussi qualifié de **modèle collectif** par opposition au **modèle en couches**.
- Le **modèle en couches** (*shell model*) qui appartient à la classe des **modèles** dits à **particule indépendante** (ou **individuelle**) (*independent particle models*) élaboré notamment par Maria Goeppert-Mayer<sup>3</sup> <sup>4</sup>. Ce modèle, fondé sur la résolution de l'équation de Schrödinger<sup>5</sup> avec des hypothèses simplificatrices, rend compte des propriétés énergétiques, angulaires et spectroscopiques des noyaux atomiques, ainsi que de la surstabilité de certains d'entre eux.
- Le **modèle du gaz de Fermi** qui renseigne sur la profondeur du puits de potentiel nucléaire et l'énergie cinétique des nucléons au sein du noyau atomique.

Chacun de ces modèles explique une partie des propriétés observées du noyau atomique, et par conséquent ils doivent être considérés comme des éclairages complémentaires de la réalité. Ils possèdent chacun une vertu heuristique justifiant leur présentation. On évoquera succinctement, en annexe I, quelques-unes des améliorations qui leur ont été apportées ainsi que les théories actuelles dont le caractère prédictif peut (ou pourra) être vérifié grâce à l'exploitation des superordinateurs en résolvant le problème à  $N$  corps.

## 1. Le modèle de la goutte liquide

Ce modèle fait l'hypothèse de l'existence d'une **force nucléaire** (liée à l'interaction forte, voir chapitre 3, § 4) s'exerçant entre les  $A$  nucléons du noyau atomique. D'autre part :

- le noyau atomique est assimilé à une **gouttelette de matière incompressible** ;
- la force entre nucléons **est indépendante du *spin*** (moment angulaire intrinsèque des nucléons) **et de la charge électrique** : c'est-à-dire qu'elle s'exerce entre neutrons, entre protons et entre neutrons et protons ;

<sup>2</sup> G. Gamow, « Mass defect curve and nuclear constitution », *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 126, Issue 803, March 03, 1930, pp. 632-644, <https://doi.org/10.1098/rspa.1930.0032>.

<sup>3</sup> M. Goeppert-Mayer, « On Closed Shells in Nuclei », *Physical Review* 74, 3, August 1, 1948, pp. 235-238, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.235>.

<sup>4</sup> H. A. Bethe, R. F. Bacher, « Nuclear physics: A. – Stationary states of nuclei », *Reviews of Modern Physics*, Vol. 8, n° 2, April 1936, pp. 82-229, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.8.82>.

<sup>5</sup> Voir quelques rappels de mécanique quantique fournis en annexe II.

- la force nucléaire a un **court rayon d'action**, on dit aussi une **courte portée**.

Le modèle de la **goutte liquide** permet d'expliquer les propriétés suivantes :

- la densité constante des noyaux, avec un rayon  $R = r_0 A^{1/3}$  ;
- l'excès de neutrons  $(N - Z)$  proportionnel à  $A^{5/3}$  pour les nucléides stables ;
- le comportement de l'énergie de liaison par nucléon  $(B(A, Z)/A)$  en fonction de  $A$  ;
- les différences de masse des familles isobariques ;
- l'énergétique des désintégrations  $\alpha$  et  $\beta$  ;
- l'énergétique de la fission des nucléides de  $A$  impair ;
- la limite supérieure du nombre  $N$  de neutrons et du nombre  $Z$  de protons dans la nature.

### 1.1. La formule semi-empirique de la masse d'un nucléide

Ce modèle, qui s'inspire des propriétés d'une goutte de liquide formée de molécules, conduit à une expression semi-empirique, donnant la masse  $M(A, Z)$  d'un nucléide de nombre de masse  $A$  contenant  $N$  neutrons et  $Z$  protons, due à Carl Friedrich von Weizsäcker<sup>6</sup> :

$$M(A, Z)c^2 = ZM_{\text{H}}c^2 + NM_{\text{n}}c^2 - B(A, Z) \quad (1.1)$$

où  $B(A, Z)$  est l'**énergie de liaison du noyau** atomique  $(A, Z)$  définie dans le chapitre 3 § 3.3.

L'idée de base de ce modèle est de décomposer l'énergie de liaison  $B(A, Z)$  du noyau de la manière suivante :

$$B(A, Z) = B_0 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \quad (1.2)$$

où chacun des termes  $B_i$  a une signification physique bien précise.

- $B_0$  est le **terme d'énergie de volume**. L'on considère en première approximation que la cohésion des nucléons entre eux est directement liée au volume de la matière nucléaire. Cette cohésion résulte de la **force nucléaire** (voir chapitre 3, § 4.). La courbe de l'énergie de liaison par nucléon  $B/A$  (voir chapitre 3, § 3) montre en effet que pour  $A \geq 16$  celle-ci varie relativement peu en fonction de  $A$ . Le volume d'un noyau atomique s'écrit, en admettant que celui-ci ait une forme sphérique :

$$V_{\text{noyau}} = \frac{4}{3}\pi R_c^3 = \frac{4}{3}\pi \left[ r_0 A^{1/3} \right]^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A \quad (1.3)$$

donc proportionnel au nombre de masse  $A$ . On peut donc écrire :  $B_0 = a_v A$ , où  $a_v$  est un coefficient de proportionnalité, qui s'interprète comme l'énergie de liaison par

<sup>6</sup> C. F. von Weizsäcker, « Zur Theorie der Kernmassen », *Zeitschrift für Physik*, Vol. 96, Issue 7-8, 1935, pp. 431-458, <https://doi.org/10.1007/BF01337700>.

nucléon dans une matière nucléaire infinie électriquement neutre et sans considération de moments angulaires. On verra que sa valeur peut être déterminée à partir de mesures de l'énergie de liaison. Il existe plusieurs estimations du coefficient  $a_v$  ; son ordre de grandeur est  $a_v = 14 \text{ MeV}$ .

- $B_1$  est le **terme d'« énergie de surface »** : il s'agit de tenir compte du fait que les nucléons situés à la périphérie du noyau, ayant moins de voisins, présentent un déficit d'énergie de liaison par rapport à un nucléon placé au cœur du noyau atomique.  $B_1$  est donc un terme, de signe négatif, proportionnel au nombre de nucléons situés à la surface du noyau atomique. Il est raisonnable d'assimiler ici un nucléon à une sphère de rayon  $r_0$ . Le nombre de nucléons présents à la surface du noyau de rayon  $R_c = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  est par conséquent égal à :

$$\frac{\text{surface du noyau}}{\text{section droite du nucléon}} = \frac{4\pi R_c^2}{\pi r_0^2} = \frac{4\pi r_0^2 A^{\frac{2}{3}}}{\pi r_0^2} = 4A^{\frac{2}{3}} \quad (1.4)$$

et donc,

$$B_1 = -a_s A^{\frac{2}{3}} \quad (1.5)$$

Comme  $a_v$ , le coefficient de proportionnalité  $a_s$  est évalué à l'aide de résultats expérimentaux mesurant l'énergie de liaison des noyaux atomiques. Ce coefficient a une valeur de l'ordre de  $a_s = 13 \text{ MeV}$ .

- $B_2$  est le **terme d'« énergie coulombienne »** : il a pour origine la force de répulsion coulombienne s'exerçant au sein du noyau atomique entre les protons. L'énergie coulombienne mise en jeu correspond à un déficit d'énergie de liaison. Un calcul d'électrostatique conduit à son expression (voir annexe III) :

$$B_2 = -\frac{3}{5} \frac{(eZ)^2}{R_c} = -\frac{3}{5} \frac{(eZ)^2}{r_0 A^{\frac{1}{3}}} = a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (1.6)$$

La valeur du coefficient  $a_c$  est obtenue ci-après en ayant adopté la valeur conventionnelle  $r_0 = 1.45 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  :

$$a_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} = \frac{3}{5} \frac{M_e c^2}{r_0} = \frac{2.82 \cdot 10^{-13} (\text{cm})}{1.45 \cdot 10^{-13} (\text{cm})} 0.511 (\text{MeV}) = 0.595 \text{ MeV}$$

où  $M_e$  est la masse au repos de l'électron :  $M_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ .

- $B_3$  est le **terme d'« énergie d'asymétrie »**. Contrairement aux trois termes précédents, l'origine de celui-ci est de nature quantique, liée au **principe d'exclusion de Pauli** (voir

chapitre 3 § 4.2). Si l'on considère un noyau comportant  $Z$  protons et  $N$  neutrons, les états quantiques de plus basse énergie (états de plus faible énergie cinétique et de plus forte énergie potentielle) sont occupés par  $Z$  protons et  $N = Z$  neutrons soit  $2Z$  nucléons. Les  $N - Z$  neutrons restants occuperont des états de plus forte énergie cinétique et de moins forte énergie potentielle et auront donc une énergie de liaison plus faible que les  $2Z$  premiers nucléons. Ce déficit d'énergie de liaison qui affecte  $(N - Z)$  nucléons représentant une fraction  $(N - Z)/A$  de la matière nucléaire<sup>7</sup> s'écrit :

$$B_3 = -a_a \frac{(N - Z)^2}{A} = -a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \quad (1.7)$$

Le coefficient  $a_a$  est de l'ordre de 19 MeV.

- $B_4$  est le **terme d'« énergie d'appariement »**. Il s'agit d'un autre terme contribuant à l'énergie de liaison, mais, comme précédemment, de nature quantique. Il exprime le fait qu'il existe une énergie de liaison différentielle entre un noyau de  $A$  pair et un noyau de  $A$  impair, dépendant de la parité du nombre de nucléons de chaque type : neutron et proton.  $B_4$  est souvent notée  $\delta$  ( $\delta > 0$ ) :

$$\delta \approx a_p \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}}, a_p \approx 33.5 \text{ MeV} \quad (1.8)$$

On a :

$B_4 = \delta = 0$  pour  $A$  impair : cas  $Z$  impair,  $N$  pair, ou cas  $Z$  pair,  $N$  impair,

$B_4 = +\delta$  pour  $A$  pair,  $Z$  pair,  $N$  pair,

$B_4 = -\delta$  pour  $A$  pair,  $Z$  impair,  $N$  impair.

### Remarque

Un coefficient  $B_5$  de « **magie** » pourrait aussi être ajouté pour les noyaux magiques particulièrement stables dont l'existence a déjà été signalée dans les chapitres 2 (§ 1) et 3 (§ 1.3).

Finalement, on obtient l'expression semi-empirique de l'énergie de liaison :

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm a_p \frac{1}{A^{\frac{3}{4}}} \quad (1.9a)$$

L'énergie de liaison moyenne par nucléon  $B(A, Z)/A$  est par suite :

<sup>7</sup> Pour une explication plus approfondie, voir L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit. pp. 171-174.

$$\frac{B(A, Z)}{A} = a_v - a_s A^{-\frac{1}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^3} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A^4} \pm a_p \frac{1}{A^4} \quad (1.9b)$$

La **figure 1** ci-dessous décrit la variation de l'énergie de liaison moyenne par nucléon (1.9b) et celle de ses différentes composantes en fonction du nombre de masse  $A$ . Elle montre, toute proportion gardée, que l'énergie moyenne de liaison par nucléon,  $B/A$ , varie relativement peu avec le nombre de masse  $A$ .

Ce constat résulte de la courte portée de la force nucléaire d'où découle qu'un nucléon interagit essentiellement avec ses proches voisins et non avec les nucléons qui sont trop éloignés de lui au sein du noyau atomique. Cela traduit la propriété de saturation de la force nucléaire ou de l'énergie moyenne de liaison par nucléon.

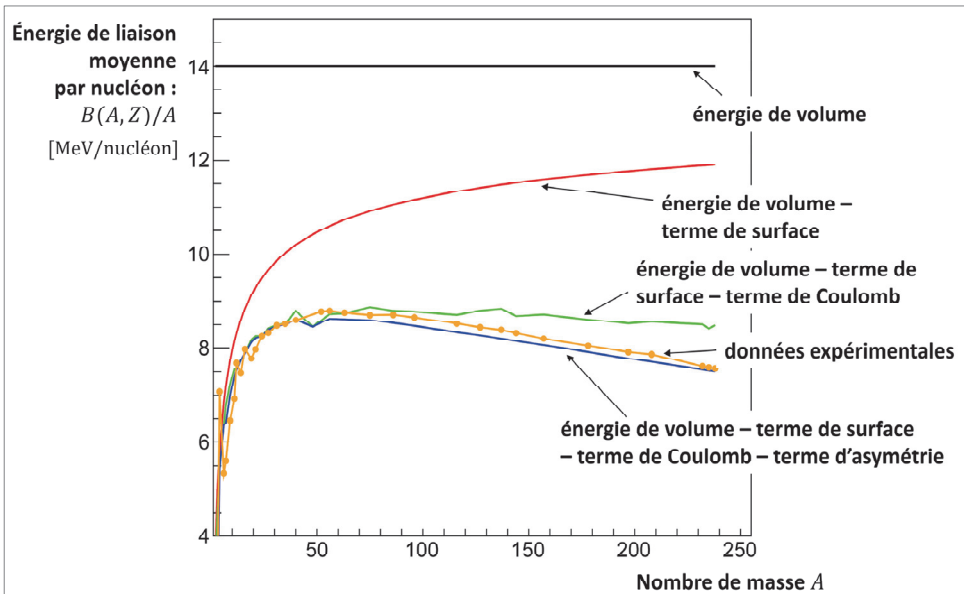


Figure 1. Variation de l'énergie de liaison moyenne (en MeV) par nucléon,  $B/A$  et celle de ses différentes composantes dans la formule semi-empirique de von Weizsäcker en fonction du nombre de masse  $A$ .<sup>8</sup>

La **formule semi-empirique de la masse atomique** issue du **modèle de la goutte liquide** ou « **formule de Bethe-Weizsäcker** » s'écrit finalement :

$$M(A, Z)c^2 = ZM_Hc^2 + (A - Z)M_nc^2 - a_v A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^3} + a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \mp \delta \quad (1.10)$$

<sup>8</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, p. 419.



## 1.2. Série isobarique

Les nucléides de nombre de masse  $A$  donné constituent une chaîne de nucléides dénommée **série isobarique**. Le passage spontané d'un nucléide de la chaîne à l'un de ses voisins résulte de processus radioactifs ( $\beta^-$ ,  $\beta^+$ , capture électronique) présentés dans le chapitre 5. Pour l'étude de certaines propriétés du noyau atomique, il est utile d'exprimer dès à présent la masse atomique  $M(A, Z)c^2$  des nucléides d'une série isobarique, donc pour  $A$  constant, comme une fonction continue du numéro atomique  $Z$  de la forme :

$$M(A, Z)c^2 = uA + vZ + wZ^2 \pm \delta \quad (1.11)$$

où les coefficients  $u, v, w$  sont déterminés par identification avec l'expression (1.10) :

$$u = M_n c^2 - (a_v - a_a - \frac{a_s}{A^{\frac{1}{3}}}) \quad (1.12)$$

$$v = -4a_a - (M_n c^2 - M_H c^2) \quad (1.13)$$

$$w = \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{A^{\frac{2}{3}}}{\frac{4a_a}{a_c}} \right) \quad (1.14)$$

L'expression (1.11) étant du second degré en  $Z$ , elle présente un extremum donné par :

$$\frac{\partial(M(A, Z)c^2)}{\partial Z} = 0 \Leftrightarrow v + 2wZ = 0 \quad (1.15)$$

Cet extremum existe donc pour :

$$Z = Z_0 = -\frac{v}{2w} \quad (1.16)$$

Cet extremum est un minimum, car la dérivée seconde de (1.11) est positive :

$$\frac{\partial^2(M(A, Z)c^2)}{\partial Z^2} = 2w > 0 \quad (1.17)$$

le coefficient  $w$  étant positif d'après (1.14).

La valeur  $Z = Z_0$  pour laquelle la masse  $M(A, Z)$  est minimale pour un nombre de masse  $A$  fixé est la charge nucléaire **de l'isobare le plus stable**.

L'isotope de numéro atomique  $Z_0$  est donc le plus stable de la série isobarique puisque sa masse est la plus faible. La valeur de  $Z_0$  que l'on obtient ainsi n'est pas nécessairement un nombre entier. L'isotope le plus stable est *a priori* celui dont le numéro atomique se rapproche le plus de  $Z_0$ . Toutefois, le constat de cette proximité n'est pas toujours suffisant

et il convient d'examiner plus précisément les caractéristiques des deux isotopes qui encadrent l'isotope fictif de numéro atomique  $Z_0$  pour déterminer le véritable isotope le plus stable de la série isobarique. On en donne deux exemples ci-après en anticipant sur les phénomènes de désintégration bêta (voir chapitre 5 § 4).

### Exemple 1

On considère la série isobarique  $A = 139$  ( $A$  impair) suivante qui résulte de la radioactivité  $\beta^-$  :



On détermine  $Z_0$  en utilisant (1.17), (1.14) et (1.15) ; en prenant les valeurs  $a_c = 0.595$  MeV,  $a_a = 19$  MeV,  $M_n c^2 - M_H c^2 = 0.78$  MeV on obtient :

$$Z_0 = -\frac{v}{2w} = \frac{4a_a + (M_n c^2 - M_H c^2)}{2 \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{A^{\frac{2}{3}}}{4a_a} \right)} = \frac{4 \times 19 + 0.78}{2 \frac{4 \times 19}{139} \left( 1 + \frac{139^{\frac{2}{3}}}{4 \times 19} \right)} = \frac{76.78}{2 \times 0.661} = 58.07$$

Par conséquent, au vu de ce résultat, le cérium  $139$ ,  ${}^{139}_{58}\text{Ce}$ , serait *a priori* l'isotope le plus stable. Or tel n'est pas le cas ; l'isotope le plus stable de cette série est en réalité le lanthane  $139$ ,  ${}^{139}_{57}\text{La}$ . En effet, celui-ci comporte 82 neutrons ( $139 - 57 = 82$ ) ce qui en fait un **noyau dit magique** dans le cadre du **modèle en couches** fondé sur la mécanique quantique (couche quantique fermée, à l'instar des couches électroniques fermées ou complètes de l'atome) ; le  ${}^{139}_{57}\text{La}$  présente une surstabilité et sa masse est inférieure à celle prévue par la formule de Bethe-Weizsäcker.

### Exemple 2

On considère la série isobarique  $A = 94$  ( $A$  pair) suivante qui résulte de la radioactivité  $\beta^-$  :



Comme pour l'exemple 1, on détermine  $Z_0$  en utilisant (1.17) :

$$Z_0 = -\frac{v}{2w} = \frac{4a_a + (M_n c^2 - M_H c^2)}{2 \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{A^{\frac{2}{3}}}{4a_a} \right)} = \frac{4 \times 19 + 0.78}{2 \frac{4 \times 19}{94} \left( 1 + \frac{94^{\frac{2}{3}}}{4 \times 19} \right)} = \frac{76.78}{2 \times 0.939} = 40.86$$

Par conséquent, au vu de ce résultat, le niobium  $94$ ,  ${}^{94}_{41}\text{Nb}$ , serait *a priori* l'isotope le plus stable. Or, tel n'est pas le cas ; l'isotope le plus stable de cette série est en réalité le zirconium  $94$ ,  ${}^{94}_{40}\text{Zr}$ . En effet, celui-ci est un noyau pair-pair (40 protons et 54 neutrons) ce qui en fait un noyau plus stable que son successeur immédiat, le  ${}^{94}_{41}\text{Nb}$ , qui est un noyau impair-impair ; dans le cadre du modèle en couches fondé sur la mécanique quantique, on explique que l'appariement de nucléons confère une plus grande stabilité au noyau atomique. Ici aussi, par ce facteur de stabilité accrue, la masse du  ${}^{94}_{40}\text{Zr}$  est inférieure à celle prévue par la formule de Bethe-Weizsäcker.

Dans l'expression (1.11) les valeurs possibles de  $\delta$  énoncées précédemment (voir relation (1.8)) conduisent à différencier les cas des séries isobariques de  $A$  impair et celles de  $A$  pair.

- Cas  $A$  impair,  $\delta = 0$ , une seule parabole de masse existe, donnée par :

$$M(A, Z)c^2 = uA + vZ + wZ^2 \quad (1.18)$$

- Cas  $A$  pair, deux sous-cas sont à distinguer :

- $A$  pair,  $Z$  pair,  $N$  pair, alors :

$$M(A, Z)c^2 = uA + vZ + wZ^2 - \delta \quad (1.19)$$

- $A$  pair,  $Z$  impair,  $N$  impair, alors :

$$M(A, Z)c^2 = uA + vZ + wZ^2 + \delta \quad (1.20)$$

Dans le cas  $A$  pair, des séries isobariques peuvent comporter non pas un seul isobare stable, mais deux voire trois : pour  $A = 40$ , il y a deux isobares stables, le calcium 40 ( $^{40}_{20}\text{Ca}$ ) et l'argon 40 ( $^{40}_{18}\text{Ar}$ ) ; pour  $A = 124$ , trois isobares stables sont identifiés, le xénon 124 ( $^{124}_{54}\text{Xe}$ ), le tellure 124 ( $^{124}_{52}\text{Te}$ ) et l'étain 124 ( $^{124}_{50}\text{Sn}$ ), comme le montre la **figure 2**.

En reprenant (1.16), (1.13) et (1.14), il est possible d'établir une équation de la vallée de stabilité, c'est-à-dire la fonction  $Z_0 = f(A)$  qui donne le numéro atomique  $Z_0$  des nucléides stables en fonction du nombre de masse  $A$  :

$$Z_0 = -\frac{v}{2w} = \frac{4a_a + (M_n c^2 - M_H c^2)}{2 \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{\frac{2}{A^{\frac{2}{3}}}}{\frac{4a_a}{a_c}} \right)} = \frac{4a_a \left[ 1 + \frac{(M_n c^2 - M_H c^2)}{4a_a} \right]}{2 \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{\frac{2}{A^{\frac{2}{3}}}}{\frac{4a_a}{a_c}} \right)}$$

soit :

$$Z_0 = \frac{A}{2} \left[ \frac{1 + \frac{(M_n c^2 - M_H c^2)}{4a_a}}{1 + \frac{\frac{2}{A^{\frac{2}{3}}}}{\frac{4a_a}{a_c}}} \right] \equiv f(A) \quad (1.21)$$

On en déduit l'**excès de neutrons**  $N - Z_0$  en fonction du nombre de masse  $A$  :

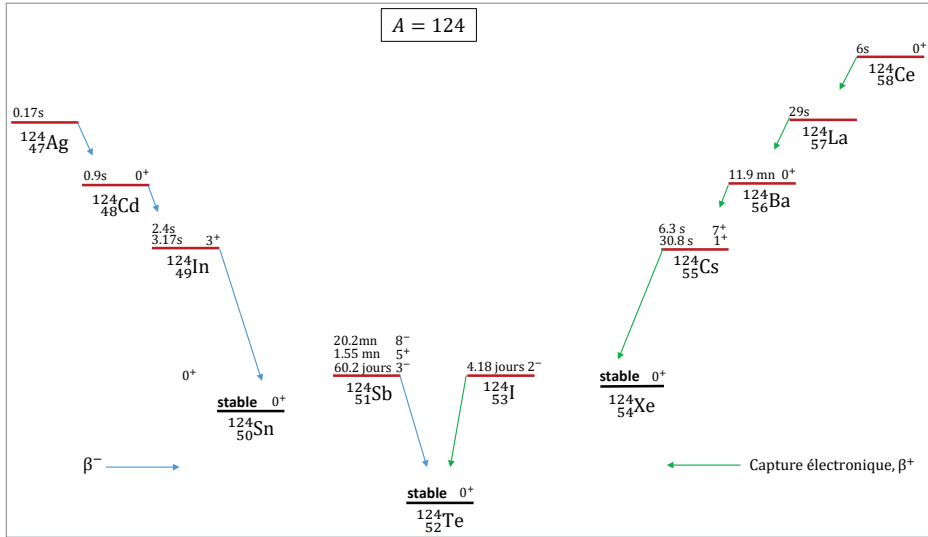


Figure 2. Série isobarique  $A = 124$  comportant les trois isobares stables, le xénon 124 ( $^{124}_{54}\text{Xe}$ ), le tellure 124 ( $^{124}_{52}\text{Te}$ ) et l'étain 124 ( $^{124}_{50}\text{Sn}$ )<sup>9</sup>. On constate que les transitions radioactives mentionnées  $\beta^-$  sur la partie gauche, et  $\beta^+$  et capture électronique sur la partie droite transmutent spontanément et successivement les radionucléides de la série isobarique en direction de la vallée de stabilité définie dans le chapitre 3. Les durées indiquées au-dessus de chacun des traits figurant les noyaux sont des périodes de décroissance radioactive qui dépendent du niveau d'énergie affecté de son moment angulaire à partir duquel les émissions bêta ou la capture électronique sont susceptibles de se produire.

$$N - Z_0 = A - 2Z_0 = A - 2 \frac{A}{2} \left[ \frac{1 + \frac{(M_n c^2 - M_H c^2)}{4a_a}}{1 + \frac{A^{\frac{2}{3}}}{\frac{4a_a}{a_c}}} \right] \quad (1.22)$$

$$N - Z_0 = A^{\frac{5}{3}} \times \frac{a_c}{4a_a} \left[ \frac{1 - \frac{(M_n c^2 - M_H c^2)}{a_c A^{\frac{2}{3}}}}{1 + \frac{A^{\frac{2}{3}}}{\frac{4a_a}{a_c}}} \right] \quad (1.23)$$

$$N - Z_0 = k(A)A^{\frac{5}{3}} \quad (1.24)$$

où  $k(A)$  est faiblement variable avec  $A$ .

<sup>9</sup> D'après R. B. Firestone *et al.*, *Tables of Isotopes*, *op. cit.*, p. 3998.

On retrouve approximativement la **ligne de stabilité** de la figure 1 du chapitre 3.

En prenant  $a_c = 0.595$  MeV,  $a_a = 19$  MeV,  $M_n c^2 - M_H c^2 = 0.782$  MeV, on obtient :

$$N - Z_0 = \frac{0.595}{4 \times 19} \left[ \frac{1 - \frac{0.782}{0.595 A^{\frac{2}{3}}}}{1 + \frac{A^{\frac{2}{3}}}{4 \times 19 \cdot 0.595}} \right] A^{\frac{5}{3}} = 7.83 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{1 - \frac{1.31}{A^{\frac{2}{3}}}}{1 + 7.83 \cdot 10^{-3} A^{\frac{2}{3}}} \right] A^{\frac{5}{3}} \quad (1.25)$$

$$k(A) = 7.83 \cdot 10^{-3} \left[ \frac{1 - \frac{1.31}{A^{\frac{2}{3}}}}{1 + 7.83 \cdot 10^{-3} A^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (1.26)$$

### 1.3. Détermination des coefficients de la formule de Bethe-Weizsäcker

Les coefficients  $a_v, a_s, a_c, a_a, \delta$  ont fait l'objet de diverses évaluations que l'on trouve dans la littérature<sup>10</sup>.

En supposant que le coefficient  $a_c$  a été préalablement estimé (voir relation (1.6) par exemple), alors une évaluation du coefficient  $a_a$  peut être faite en utilisant l'équation donnant l'isobare le plus stable en supposant celui-ci connu :

$$Z_0 = -\frac{v}{2w} = \frac{4a_a + (M_n c^2 - M_H c^2)}{2 \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{\frac{2}{A^{\frac{2}{3}}}}{\frac{4a_a}{a_c}} \right)} \quad (1.27)$$

Les coefficients  $a_c$  et  $a_a$  étant connus, les autres coefficients  $a_v$  et  $a_s$  peuvent alors être déterminés à partir de l'expression de l'**énergie de liaison moyenne par nucléon**  $B/A$  (pour  $A$  impair) :

$$\frac{B}{A} = a_v - a_s \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{2}{3}}} - a_a \left( 1 - \frac{2Z}{A} \right)^2 \quad (1.28)$$

et des valeurs  $(B/A)_{exp}$  expérimentales établies pour deux noyaux distincts de  $A$  impair.

<sup>10</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, p. 417.

### 1.4. Énergie de séparation d'un nucléon et surstabilité du noyau atomique

On rappelle (voir chapitre 3 § 3.5) que l'énergie de séparation  $S_n(A, Z)$  (*resp.*  $S_p(A, Z)$ ) d'un neutron (*resp.* proton) est le travail nécessaire pour extraire un neutron (*resp.* proton) d'un noyau atomique contenant  $Z$  protons et  $N = A - Z$  neutrons. On a vu que  $S_n(A, Z)$  et  $S_p(A, Z)$  peuvent être déterminées à partir des énergies :

$$S_n(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 1, Z) \quad (1.29)$$

$$S_p(A, Z) = B(A, Z) - B(A - 1, Z - 1) \quad (1.30)$$

#### Exemple

Si l'on considère le plomb 208, le plomb 207 et le thallium 207, leurs énergies de liaison respectives sont :  $B(208, 82) = 1636.492$  MeV,  $B(207, 82) = 1629.124$  MeV,  $B(207, 81) = 1628.474$  MeV, et l'on obtient :

$$S_n(208, 82) = 1636.492 - 1629.124 = 7.368 \text{ MeV.}$$

$$S_p(208, 82) = 1636.492 - 1628.474 = 8.018 \text{ MeV.}$$

La **figure 3** montre l'écart observé entre l'énergie de séparation  $S_n(A, Z)$  calculée à l'aide du modèle de la goutte liquide et l'énergie de séparation  $S_n(A, Z)$  déterminée expérimentalement.

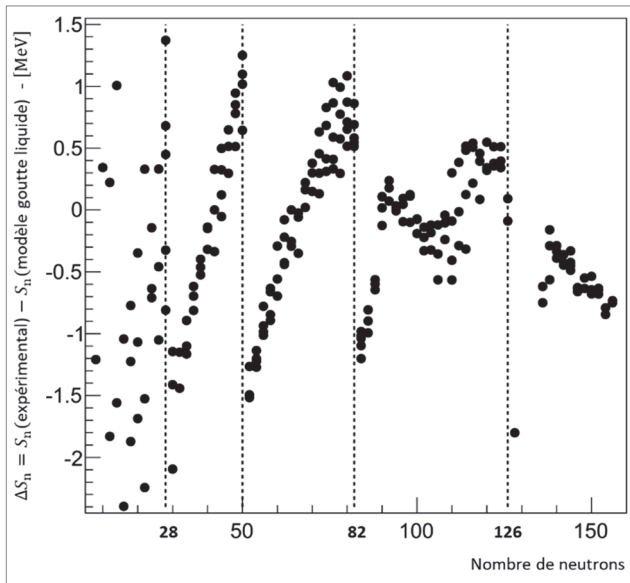


Figure 3. Écarts entre l'énergie de séparation d'un neutron (en MeV) déterminée par l'expérience et le calcul avec le modèle de la goutte liquide, fonction du nombre de neutrons du noyau atomique.<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Actualisation de R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 422, figure 3.6.

Ces changements brusques de valeurs de  $S_n(A, Z)$  traduisent une surstabilité des noyaux ayant un nombre de neutrons égal à l'un des nombres magiques 2, 8, 20, 50, 82, 126 (ces nombres magiques ont déjà été mentionnés dans le chapitre 3). Ce phénomène ne peut pas être expliqué par le modèle de la goutte liquide. Il s'agit d'effets quantiques qui seront restitués par le modèle en couches présenté dans la section suivante.

## 2. Le modèle en couches

Plusieurs faits expérimentaux restent inexpliqués par le modèle nucléaire précédent :

- la variation de l'énergie de liaison du dernier nucléon en fonction du nombre de masse ;
- l'existence de capture radiative  $(n, \gamma)$  résonnante « anormalement » petite pour  $N = 50, 82, 126$  ;
- l'émission de particules  $\alpha$  avec un spectre d'énergie discret.

### Exemple

On considère la désintégration  $\alpha$  de l'américium 241 :  ${}^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow {}^{237}_{93}\text{Np} + {}^4_2\text{He}$ . On observe expérimentalement 3 populations de particules  $\alpha$  :

$$E_{\alpha 0} = 5.542 \text{ MeV}, E_{\alpha 1} = 5.483 \text{ MeV}, E_{\alpha 2} = 5.441 \text{ MeV}.$$

On peut les corrélérer à l'existence de niveaux d'énergie discrets, d'énergie  $E_i^*$ , dans le noyau atomique  ${}^{237}_{93}\text{Np}$ . En appliquant les lois de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion, on montre que l'énergie  $E_i^*$  de ces niveaux d'énergie s'exprime en fonction de l'énergie cinétique  $E_{\alpha i}$  des particules  $\alpha$  émises et de l'énergie disponible  $Q_\alpha$  de la désintégration (voir chapitre 5, § 2) :

$$E_{\alpha i} \approx \frac{Q_\alpha - E_i^*}{1 + \frac{M_\alpha}{M_{\text{Np}237}}} \Rightarrow E_i^* \approx Q_\alpha - E_{\alpha i} \left( 1 + \frac{M_\alpha}{M_{\text{Np}237}} \right), i = 0, 1, 2$$

En utilisant les valeurs des énergies de liaison des nucléides impliqués dans le processus de désintégration ci-dessus, à savoir  $B(\text{Np}237) = 1795.331 \text{ MeV}$ ,  $B(\text{He}4) = 28.2969 \text{ MeV}$ ,  $B(\text{Am}241) = 1817.992 \text{ MeV}$ , on détermine à l'aide de la relation ci-dessus exprimant  $E_{\alpha i}$ , deux états d'énergie du noyau :  $E_1^* = 59.5 \text{ keV}$  et  $E_2^* = 103 \text{ keV}$  (on a pris pour l'application numérique  $\frac{M_\alpha}{M_{\text{Np}237}} \approx \frac{4}{237}$ ). À l'émission d'une particule  $\alpha$  d'énergie  $E_{\alpha 0} = 5.542 \text{ MeV}$  correspond la formation du  ${}^{237}_{93}\text{Np}$  dans son état fondamental.

Ces faits indiquent qu'à l'instar des électrons de l'atome les nucléons sont distribués sur des couches quantiques identifiées par une série de nombres quantiques.<sup>12</sup>

<sup>12</sup> L'existence de discontinuités de l'énergie de liaison a été signalée en 1934 par W. M. Elsasser « Sur le principe de Pauli dans les noyaux – II »... *J. Phys. Radium*, 1934, 5 (8), pp.389-397, <https://hal.science/jpa-00233250> (voir note en fin d'article qui concerne l'énergie de liaison du plomb 208) ; cette observation est confirmée dans W. M. Elsasser « Sur le principe de Pauli dans les noyaux – III »... *J. Phys. Radium*, 1934, 5 (12), pp. 635-339, <https://doi.org/10.1051/jphysrad:01934005012063500>

On considère qu'un nucléon donné du noyau se déplace librement dans le champ moyen central (force attractive centrale) créé par les  $A - 1$  autres nucléons. Il décrit une « **orbite nucléaire** » d'énergie et de moment angulaire bien définis. En raison du **principe d'exclusion de Pauli** (voir chapitre 3 § 4.2) qui empêche un nucléon de posséder des caractéristiques quantiques identiques – les **nombre quantiques** définis plus loin – à celles d'un autre nucléon du même noyau atomique, le libre parcours moyen d'un nucléon dans le noyau atomique (trajet moyen parcouru sans entrer en collision avec les autres nucléons du noyau atomique) vaut plusieurs fois le rayon nucléaire. Cela permet de supposer que les nucléons se déplacent au sein du noyau atomique sans interagir entre eux. L'équation de Schrödinger à laquelle satisfait la fonction d'onde  $\psi_q(\vec{r}, t)$  associée au nucléon considéré s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_q(\vec{r}, t) = H_q \psi_q(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

avec :

- $H_q = E_q + V_q$  ;
- $q$  l'indice repérant un nucléon particulier dans le noyau des  $A$  nucléons ;
- $E_q$  l'énergie cinétique du nucléon dans le noyau atomique ;
- $V_q$  le potentiel d'interaction qui s'exerce entre le nucléon  $q$  et les  $A - 1$  autres nucléons du noyau.

En négligeant l'interaction entre deux nucléons et en introduisant un potentiel nucléaire moyen,  $V$ , vu par chacun des nucléons, on remplace donc le problème à  $\mathcal{N}$  corps par un problème à un seul corps :

$$H = \sum_{i=1}^A E_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^A V_{ij} \rightarrow \tilde{H} = \sum_{i=1}^A E_i + V \quad (2.2)$$

Le **modèle en couches** est aussi appelé **modèle à particule indépendante**. Il a été initialement élaboré, séparément et parallèlement, par Maria Goeppert-Mayer aux États-Unis et Hans Suess en Allemagne.<sup>13 14 15 16</sup>

On considère par conséquent qu'un nucléon de masse  $M$ , au sein du noyau atomique, est soumis à l'action d'un potentiel central symétrique  $V(\vec{r}) = V(r)$ , ne dépend donc que de

<sup>13</sup> K. E. Johnson, « From Natural History to the Nuclear Shell Model: Chemical Thinking in the Work of Mayer, Haxel, Jensen, and Suess », *Physics in Perspective*, 6, 2004, pp. 295-309. L'idée d'une structure nucléaire en couches a eu des précurseurs : K. Guggenheimer, « Remarques sur la constitution des noyaux atomiques - I », *J. Phys. Radium*, 5 (6), 1934, pp.253-256, <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00233263/document> ; J. H. Bartlett, Jr., « Structure of Atomic Nuclei », *Physical Review* 41, August 1, 1932, p. 370, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.41.370.2>.

<sup>14</sup> M. Goeppert-Mayer, « On Closed Shells in Nuclei I », *Physical Review* 74, August 1, 1948, pp. 235-239, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.74.235>.

<sup>15</sup> M. Goeppert-Mayer, « On Closed Shells in Nuclei II », *Physical Review* 75, June 15, 1949, pp. 1969-1970, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.1969>.

<sup>16</sup> O. Haxel, J. H. D. Jensen, H. E. Suess, « On the "Magic Numbers" in Nuclear Structure », *Physical Review* 75, June 1, 1949, p. 1766, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.1766.2>.



la distance  $r$  à l'origine de celui-ci. Au nucléon est associée une fonction d'onde  $\varphi(\vec{r})$  qui obéit, en régime stationnaire, à l'équation de Schrödinger :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + V(r) \right] \varphi(\vec{r}) = E \varphi(\vec{r}) \quad (2.3)$$

où  $E$  est l'énergie totale du nucléon (voir annexe II).

Plusieurs potentiels centraux sont candidats pour représenter le champ nucléaire d'attraction au sein du noyau. Celui qui donnerait des résultats plus proches de la réalité est le potentiel de **Woods-Saxon**<sup>17</sup> :

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp \left[ \frac{r - R_c}{0,228a} \right]} \quad (2.4)$$

où  $r$  est la variable radiale dans le noyau atomique,  $R_c = 1.27A^{1/3}$ ,  $a = 2.9$  fermi,  $V_0 = 51 \text{ MeV} \mp 7 \text{ MeV}$  selon qu'il s'agit des neutrons ou des protons. Il est représenté sur la **figure 4** : on remarquera sa forme inversée de celle de la densité de la matière nucléaire du noyau atomique (voir chapitre 3 § 2).

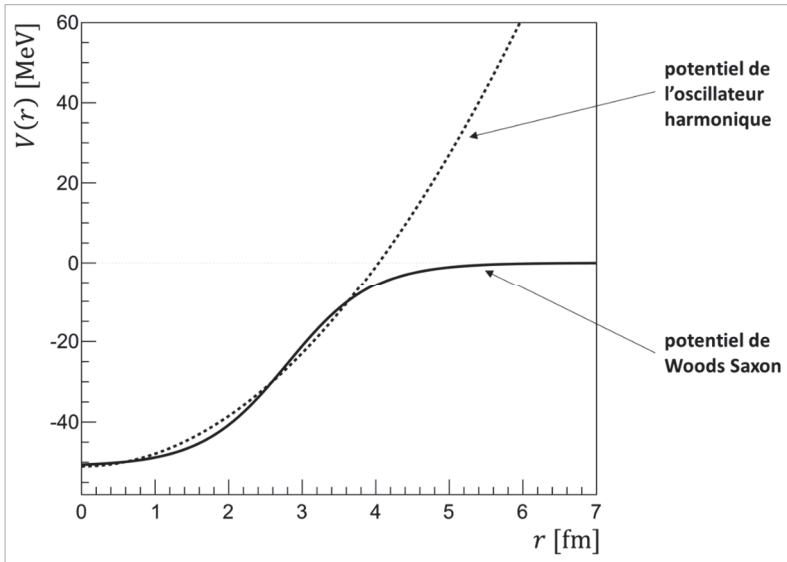


Figure 4. Modélisations du potentiel nucléaire : le modèle de Saxon-Woods et le modèle de l'oscillateur harmonique.<sup>18</sup>

<sup>17</sup> R. D. Woods, D. S. Saxon, « Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering », *Physical Review* 95, 1954, p. 577, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.95.577>.

<sup>18</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH, Germany, 2007, p. 177.

Des potentiels de forme plus simple se prêtent à des calculs analytiques tout en mettant en évidence des propriétés observées importantes : existence de **niveaux d'énergie** et de **moments angulaires** en particulier.

Tel est le cas d'une représentation du potentiel nucléaire par le potentiel de l'oscillateur harmonique isotrope  $V(r)$  défini par :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 \quad (2.5)$$

où  $V_0$  est la profondeur du puits de potentiel nucléaire et  $\omega$  la pulsation du mouvement classique.

Le nucléon de masse  $M$  est donc supposé soumis à une force centrale  $F$  dérivant du potentiel  $V(r)$  :

$$F = -\nabla V(r) \text{ avec } V(r) = \frac{1}{2} k r^2, \quad F = -k|\vec{r}|, \quad k > 0 \quad (2.6)$$

où l'on a posé :

$$k = M \omega^2 \text{ soit } \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad (2.7)$$

En se plaçant dans un référentiel spatial en coordonnées sphériques :  $\vec{r} \equiv (r, \theta, \varphi)$ , la résolution de l'équation de Schrödinger avec ce potentiel fournit les solutions suivantes (voir annexe II : « Quelques rappels de mécanique quantique »)<sup>19</sup> :

$$\varphi_{n,l,m}(\vec{r}) = Y_l^m(\theta, \varphi) \exp\left(-\frac{\kappa^2 r^2}{2}\right) r^l (a_0 + a_2(kr)^2 + \dots + a_\gamma(kr)^\gamma) \quad (2.8)$$

avec :

$$\kappa = \sqrt{\frac{M\omega}{\hbar}} \quad (2.9)$$

■  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  est une harmonique sphérique, représentant la partie angulaire de la fonction d'onde associée à un nucléon ;

<sup>19</sup> M. Cottereau, F. Lefebvres, *Recueil de problèmes de physique nucléaire et de physique des particules*, Paris, Masson et Cie, Paris, 1971, « Problème 19, Modèle en couches des noyaux », pp. 230-251 ; C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Tome I, Herman, Paris, 1973, pp. 535-541.

▪  $\exp\left(-\frac{\kappa^2 r^2}{2}\right)r^l(a_0 + a_2(kr)^2 + \dots + a_\gamma(kr)^\gamma)$  est une expression dépendant de la variable spatiale  $r$  : elle représente la partie radiale de la fonction d'onde associée au nucléon ;

▪  $\gamma$  est un entier pair :

▪

$$\gamma = 2(\nu - 1) \quad (2.10)$$

avec  $\nu = 1, 2, 3 \dots$  ( $\nu$  nombre entier) ;

▪ on montre que les coefficients  $a_i$  de la partie polynômiale s'expriment par récurrence en fonction de  $E, \hbar, \omega, l$  et  $\gamma$ .

Le **nombre quantique principal**  $n$  est défini par la relation (2.11) suivante :

$$n = l + \gamma = l + 2(\nu - 1) \quad (2.11)$$

d'où :

$$\gamma = n - l \quad (2.12)$$

La fonction d'onde  $\varphi_{n,l,m}(\vec{r})$  se réécrit donc comme :

$$\varphi_{n,l,m}(\vec{r}) = Y_l^m(\theta, \varphi) \exp\left(-\frac{\kappa^2 r^2}{2}\right) r^l (a_0 + a_2(kr)^2 + \dots + a_{n-l}(kr)^{n-l}) \quad (2.13)$$

On montre que l'énergie totale du nucléon est donnée par l'expression :

$$E_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega \quad (2.14)$$

Le quantum d'énergie  $\hbar \omega$  est déterminé par le fait que la pulsation  $\omega$  est reliée à la taille du noyau atomique. Pour établir cette relation dans le cas du modèle de l'oscillateur harmonique, on écrit que l'énergie potentielle  $\frac{1}{2}kr^2 \equiv \frac{1}{2}M\omega^2 r^2$  représente une moitié de l'énergie totale du nucléon dans le noyau.<sup>20</sup> En moyenne, pour un niveau quantique  $n$  d'énergie fixé, on a ainsi l'égalité :

$$\left\langle \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 \right\rangle_n = \frac{1}{2}E_n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega \quad (2.15)$$

soit :

$$M\omega^2 \langle r^2 \rangle_n = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega \quad (2.16)$$

---

<sup>20</sup> S. S. M. Wong, *Introductory Nuclear Physics*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998, pp. 240-243.

avec la définition générique de  $\langle r^2 \rangle$  :

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_{V_{\text{noyau}}} r^2 \varrho(r) dV_{\text{noyau}}}{\int_{V_{\text{noyau}}} \varrho(r) dV_{\text{noyau}}} \quad (2.17)$$

où  $\varrho(r)$  représente la densité spatiale de charge. Sous l'hypothèse que le noyau est sphérique de rayon  $R_c = r_0 A^{1/3}$  et d'une densité de charge  $\varrho_0$  constante pour  $r \leq R_c$  et nulle pour  $r > R_c$ , on a :

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty r^2 \varrho(r) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty \varrho(r) 4\pi r^2 dr} = \frac{4\pi \varrho_0 \int_0^\infty r^4 dr}{\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_0} = \frac{3}{5} R^2 \quad (2.18)$$

Il faut tenir compte de tous les états possibles occupés par les neutrons et les protons du noyau atomique de nombre de masse  $A$  considéré. Tous calculs faits, cela conduit à l'expression (2.19a) ci-dessous de  $\hbar\omega$  :

$$\hbar\omega = \frac{1}{A} \frac{\hbar^2}{M \langle r^2 \rangle} \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} A \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{A} \frac{\hbar^2}{M \frac{3}{5} R^2} \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} A \right)^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{A} \frac{\hbar^2}{M \frac{3}{5} (r_0 A^{1/3})^2} \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} A \right)^{\frac{4}{3}} \quad (2.19a)$$

$$\hbar\omega \approx \frac{5}{4} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\hbar^2}{M r_0^2} A^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{4} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{(1.054571 \cdot 10^{-34})^2}{1.672 \cdot 10^{-27} \times (1.2 \cdot 10^{-15})^2} = 6.6 \cdot 10^{-12} A^{-\frac{1}{3}} \text{ (J)} \quad (2.19b)$$

Comme 1 joule (1 J) équivaut à  $6.24 \cdot 10^{18}$  eV, on obtient :

$$\hbar\omega \approx 6.6 \cdot 10^{-12} \times 6.24 \cdot 10^{18} A^{-\frac{1}{3}} = 4.12 \cdot 10^7 A^{-\frac{1}{3}} \text{ eV} = 41.2 A^{-\frac{1}{3}} \text{ (MeV)} \quad (2.20)$$

La relation (2.20) peut être grossièrement interprétée de la manière suivante : les noyaux atomiques possèdent tous un potentiel nucléaire d'une profondeur similaire, de l'ordre de 41 MeV ; cela provient de l'hypothèse d'un potentiel moyen pris comme la moyenne des interactions à deux corps (nucléon-nucléon) sur l'ensemble de la matière nucléaire. La dépendance en fonction du nombre de nucléons  $A$  est donc relativement faible ; les niveaux d'énergie se positionnent selon (2.14) et (2.20) à l'intérieur de ce puits de potentiel d'une profondeur fixe ; on en déduit que les couches quantiques seront d'autant plus resserrées que le noyau est lourd (de valeur de  $A$  élevée), c'est-à-dire qu'il comporte plus de nucléons. La relation (2.20) reflète bien une diminution de la distance entre deux niveaux d'énergie consécutifs lorsque le nombre de nucléons  $A$  croît. Des calculs plus rigoureux effectués à partir du potentiel de Woods-Saxon conduisent à un potentiel nucléaire d'une profondeur d'environ  $V_0 = 50$  MeV auquel s'ajoutent des termes correctifs, en particulier le terme

d'asymétrie entre le nombre de protons et de neutrons,  $V_{as}$ , qui dépend de la nature du nucléon et donné approximativement par les relations :

$$V_{as} = + 25 \frac{N - Z}{A} \text{ MeV pour les neutrons} \quad (2.21a)$$

$$V_{as} = - 25 \frac{N - Z}{A} \text{ MeV pour les protons} \quad (2.21b)$$

### Exemples

Pour le plomb 208, on a :

$$|V_{as}| = 25 \frac{126 - 82}{208} \approx 5.3 \text{ MeV}$$

Par suite, pour les protons le puits de potentiel est d'une profondeur de  $V_0 - |V_{as}| = 50 - 5.3 = 44.7 \text{ MeV}$  et pour les neutrons il est d'une profondeur  $V_0 + |V_{as}| = 50 + 5.3 = 55.3 \text{ MeV}$ .

Pour l'oxygène 17, on a :

$$|V_{as}| = 25 \frac{9 - 8}{17} \approx 1.47 \text{ MeV}$$

Par suite, pour les protons le puits de potentiel est d'une profondeur de  $V_0 - |V_{as}| = 50 - 1.47 = 48.5 \text{ MeV}$  et pour les neutrons il est d'une profondeur  $V_0 + |V_{as}| = 50 + 1.47 = 51.47 \text{ MeV}$ .

Ces résultats établissent que l'état d'un nucléon individuel dans le noyau atomique (puits de potentiel), auquel est associée la fonction d'onde  $\varphi(\vec{r})$ , est quantifié, c'est-à-dire que son énergie et ses différents moments angulaires prennent des valeurs discrètes – les **nombre quantiques** – obéissant à des **règles de sélection** imposées par l'existence de solutions physiquement acceptables de l'équation (2.3) (se reporter à l'annexe II pour plus de détails). Ces nombres quantiques sont précisés ci-après.

- **Le nombre quantique principal  $n$**  : il prend des valeurs entières  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ . Compte tenu du potentiel représentatif (potentiel à symétrie sphérique) du champ nucléaire attractif de courte portée, la solution de l'équation de Schrödinger comporte une partie radiale et une partie angulaire auxquelles correspondent respectivement le **nombre quantique radial  $\nu$**  et le **nombre quantique orbital  $l$**  du nucléon considéré tels que (voir (2.11) *supra* et aussi Annexe II § 7, équation (7-32)) :

$$n = l + 2(\nu - 1) \quad (2.22)$$

- **Le nombre quantique orbital (azimutal)  $l$**  : il est associé au moment angulaire  $\vec{l}$  du nucléon considéré dans le noyau atomique et prend les valeurs entières suivantes :

$$\|\vec{l}\| \equiv l = 0, 1, \dots, n \quad (2.23)$$

Pour identifier ce moment angulaire, la nomenclature conventionnelle adoptée (en anglais) est indiquée dans le **tableau 1** :

Tableau 1. Nomenclature associée au moment angulaire  $l$ .

$l$	0	1	2	3	4	5	6
Symbole	s	p	d	f	g	h	i
Signification	<i>sharp</i>	<i>principal</i>	<i>diffusive</i>	<i>fundamental</i>	suite de l'alphabet		

- **Le nombre quantique magnétique orbital  $m_l$**  : il est la composante de  $l$  dans une direction donnée (celle imposée par un champ magnétique extérieur par exemple). Les valeurs possibles de  $m_l$  sont :

$$m_l = -l, -l + 1, \dots -1, 0, 1, \dots l - 1, l \tag{2.24}$$

- **Le nombre quantique de spin  $s$** <sup>21</sup> : les particules élémentaires qui obéissent à la **statistique de Fermi-Dirac**<sup>22</sup> et au **principe d'exclusion de Pauli**<sup>23</sup>, comme les protons et les neutrons, possèdent un moment angulaire intrinsèque,  $\vec{s}$ , dénommé **spin**, dont la valeur du module est :

$$\|\vec{s}\| \equiv s = \frac{1}{2} \tag{2.25}$$

- **Le nombre quantique magnétique de spin  $m_s$**  : il est la composante de  $s$  suivant une direction donnée (par exemple celle imposée par un champ magnétique extérieur) :

$$m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \tag{2.26}$$

- **Le nombre quantique de moment angulaire total pour une seule particule** : le moment angulaire total,  $\vec{j}$ , d'un nucléon est la somme du moment orbital et du spin et a deux valeurs positives possibles pour une valeur fixée de  $l$  :

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \tag{2.27}$$

$$\|\vec{j}\| \equiv j = \|\vec{l} + \vec{s}\| \rightarrow j = l + s \text{ et } j = l - s \tag{2.28a}$$

(valeurs demi-entières :  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ , etc.) ; pour  $l = 0$ , il prend une seule valeur positive :

$$j = s = \frac{1}{2} \tag{2.28b}$$

<sup>21</sup> Ne pas confondre le spin noté «  $s$  » avec la notation «  $s$  » du relatif au moment angulaire  $l = 0$ .  
<sup>22</sup> Distribution statistique de fermions indiscernables sur les niveaux d'énergie d'un système à l'équilibre thermodynamique : voir § 3 Modèle de Fermi ; F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*, MacGraw-Hill Book Company, 1965, p. 341 et sq.  
<sup>23</sup> W. Pauli, *Principle and quantum mechanics*, Nobel Lecture, December 13, 1946, <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/pauli-lecture.pdf>.

- Le **nombre quantique magnétique de moment angulaire total pour une seule particule**  $m_j$  : il est la composante de  $\vec{j}$  selon une direction donnée (celle imposée par exemple par un champ magnétique extérieur). On a :

$$m_j = -j, -(j-1), \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, (j-1), j \quad (2.29)$$

Pour  $l = 0$ ,  $m_j$  peut prendre deux valeurs :

$$m_j = -\frac{1}{2}, \quad m_j = +\frac{1}{2} \quad (2.30)$$

- Le **nombre quantique radial**  $\nu$  : il est attaché à la partie radiale de la solution de la fonction d'onde (voir équation (2.11)). Il représente le nombre de nœuds de la fonction d'onde radiale  $\nu = 1, 2, 3 \dots$
- La **parité**,  $\pi$ , de l'état quantique du nucléon correspond à la parité de sa fonction d'onde lorsque l'on change  $\vec{r}$  en  $-\vec{r}$ . Compte tenu de l'expression de sa fonction d'onde (2.8), on voit que cette parité est donnée par celle des harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  et que par conséquent :

$$\pi = (-1)^l \quad \text{pour tout } l \quad (2.31)$$

On constate donc que  $\pi$  est positive (notée +) lorsque  $l$  est pair, et négative (notée -) lorsque  $l$  est impair.

- Le **nombre quantique de spin isobarique**  $T_z$

Le nucléon existe selon 2 états de **spin isobarique** (ou **spin isotopique** ou **isospin**), respectivement :

$$T_z = +\frac{1}{2} : \text{proton}, \quad T_z = -\frac{1}{2} : \text{neutron}, \quad T_z = -\frac{1}{2}(N - Z) : \text{noyau quelconque} \quad (2.32)$$

L'**isospin** permet de distinguer le proton du neutron vis-à-vis de l'interaction forte.

Le nombre quantique principal  $n$  spécifie une **couche** de nucléons du noyau atomique dans laquelle chaque nucléon occupe une **sous-couche** déterminée par le nombre quantique orbital  $l$ . Chaque sous-couche présente une **dégénérescence**, c'est-à-dire des états quantiques occupables, correspondant aux valeurs possibles du moment magnétique et du spin pour  $n$  et  $l$  fixés. Chaque nucléon est ainsi identifié par le sextuplet  $(n, l, j, m, s, \pi)$ .

### Remarques

- On observe qu'il n'y a pas de niveau d'énergie nulle.
- La relation (2.22) montre que l'on peut affecter à chaque couche  $n$  une parité :

$$\pi_n = (-1)^n \quad (2.33)$$

$$\text{En effet : } \pi_n = (-1)^n = (-1)^{l+2(\nu-1)} = (-1)^{2(\nu-1)}(-1)^l = 1 \times (-1)^l = (-1)^l \quad (2.34)$$

L'application du modèle en couches à la structure du noyau atomique avec l'oscillateur harmonique est illustrée par les schémas de la **figure 5** et les **tableaux 2 et 3** ci-après décrivant les niveaux d'énergie caractérisés par les différents nombres quantiques définis plus haut.

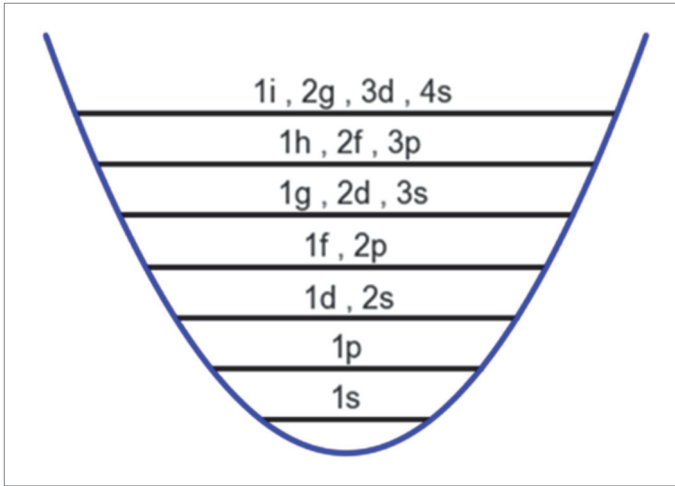


Figure 5. Illustration du modèle en couches obtenu avec l'oscillateur harmonique à 3 dimensions ; le chiffre désigne le nombre quantique radial  $\nu$ , et la lettre le nombre quantique orbital (ou azimutal)  $l$ . À chacune des lignes horizontales correspond un niveau d'énergie  $E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{3}{2} \right)$ , spécifié par le nombre quantique principal  $n$ .<sup>24</sup>

L'état quantique d'un nucléon est génériquement noté :

$$\nu^l j \pi \quad (2.35)$$

Dans le cadre de ce modèle, le nombre total de nucléons sur une couche quantique  $n$  est :

$$d_n = (n+1)(n+2) \quad (2.36)$$

Le **tableau 2** détaille la construction des états quantiques dans le cas où le potentiel nucléaire est modélisé par l'oscillateur harmonique. Pour effectuer cette construction, on examine successivement les possibilités d'obtenir une valeur fixée du nombre quantique principal  $n$ . Par exemple selon (2.22), la valeur  $n = 2$  ne peut être obtenue qu'avec deux combinaisons des valeurs des nombres quantiques  $\nu$  et  $l$  : pour  $\nu = 2$  et  $l = 0$  ou bien pour  $\nu = 1$  et  $l = 2$ .

<sup>24</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit. p. 202.



Tableau 2. Construction des états quantiques nucléaires pour les deux premières valeurs du nombre quantique principal  $n$ .

Nombre quantique principal $n$	Nombre quantique radial $\nu$	Nombre quantique orbital $\ell$	$j$	$\nu^{lj\pi}$	$m_j$	Nombre d'états quantiques
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$1s^{\frac{1}{2}+}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$	2
1	1	1	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$	$1p^{\frac{1}{2}-}$ $1p^{\frac{3}{2}-}$	$-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$ $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}$	6

Tableau 3. Construction des états quantiques nucléaires (suite), les valeurs du nombre quantique principal  $n$  allant jusqu'à 4.

Nombre quantique principal $n$	Nombre quantique radial $\nu$	Nombre quantique orbital $l$	Nomenclature $\nu^{lj\pi}$ des états	Nombre d'états pour $l$ donné	Nombre d'états pour $n$ donné, $d_n$	Parité de la couche $n$ $\pi_n = (-1)^n$	$D_N = \sum_{n=0,N} d_n$	$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$
0	1	0	$1s^{\frac{1}{2}+}$	2	2	+	2	$\frac{3}{2}\hbar\omega$
1	1	1	$1p^{\frac{1}{2}-}, 1p^{\frac{3}{2}-}$	6	6	-	8	$\frac{5}{2}\hbar\omega$
2	2	0	$2s^{\frac{1}{2}+}$	2	12	+	20	$\frac{7}{2}\hbar\omega$
	1	2	$1d^{\frac{3}{2}+}, 1d^{\frac{5}{2}+}$	10				
3	2	1	$2p^{\frac{1}{2}-}, 2p^{\frac{3}{2}-}$	6	20	-	40	$\frac{9}{2}\hbar\omega$
	1	3	$1f^{\frac{5}{2}-}, 1f^{\frac{7}{2}-}$	14				
4	3	0	$3s^{\frac{1}{2}+}$	2	30	+	70	$\frac{11}{2}\hbar\omega$
	2	2	$2d^{\frac{3}{2}+}, 2d^{\frac{5}{2}+}$	10				
	1	4	$1g^{\frac{7}{2}+}, 1g^{\frac{9}{2}+}$	18				

Le **tableau 3** donne pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  les niveaux quantiques du noyau atomique, sans en expliciter les **dégénérescences**, ou subdivisions d'un niveau quantique en plusieurs « sous-niveaux », induites par les valeurs prises par le moment magnétique et le spin.

### Exemple de l'oxygène 17

L'énergie des couches quantiques est donnée par l'expression (2.14) dans laquelle, en vertu de (2.20)  $\hbar\omega \approx 41 \frac{1}{17^{1/3}} = 15.95 \text{ MeV}$  :  $E_0 = 23.91 \text{ MeV}$ ,  $E_1 = 39.86 \text{ MeV}$ ,  $E_2 = 55.81 \text{ MeV}$ . On remarque que la valeur de l'énergie  $E_2$  ainsi prédite n'est pas réaliste, car elle est supérieure à la profondeur, de l'ordre de 41 MeV, du puits de potentiel nucléaire associé au modèle de l'oscillateur harmonique. Pour retrouver l'énergie correcte de ce niveau d'énergie, il faudrait utiliser un modèle de potentiel nucléaire plus réaliste. Il faut ainsi attirer l'attention sur le fait que la **figure 6** ne signifie pas que les neutrons et les protons sont spatialement séparés en deux régions au sein d'un noyau atomique stable : ils forment une population « mélangée » de nucléons.

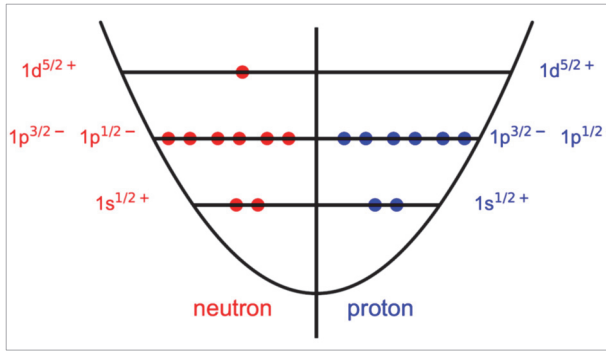


Figure 6. Structure quantique du noyau de l'oxygène 17.<sup>25</sup>

La **figure 7** présente une vue plus générale de la structure des niveaux quantiques occupés par les nucléons au sein du noyau atomique. Elle est cependant moins complète que la **figure 11** similaire présentée dans l'annexe I.

Le **moment angulaire total**  $\vec{J}$  d'un noyau atomique comportant  $A$  nucléons, appelé aussi (de manière un peu trompeuse) **spin du noyau** (qu'il ne faut donc pas confondre avec le spin intrinsèque d'un nucléon), est déterminé par la somme des  $A$  moments angulaires totaux  $\vec{j}_i$  tels que définis par la relation (2.27a) :

$$\vec{J} = \sum_{i=1,A} \vec{j}_i = \sum_{i=1,A} \vec{l}_i + \vec{s}_i \quad (2.37)$$

La **parité**  $\pi$  d'un **noyau atomique** est obtenue par le produit des parités,  $\pi_i$ , des  $A$  nucléons qui le composent :

<sup>25</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit. p. 204.

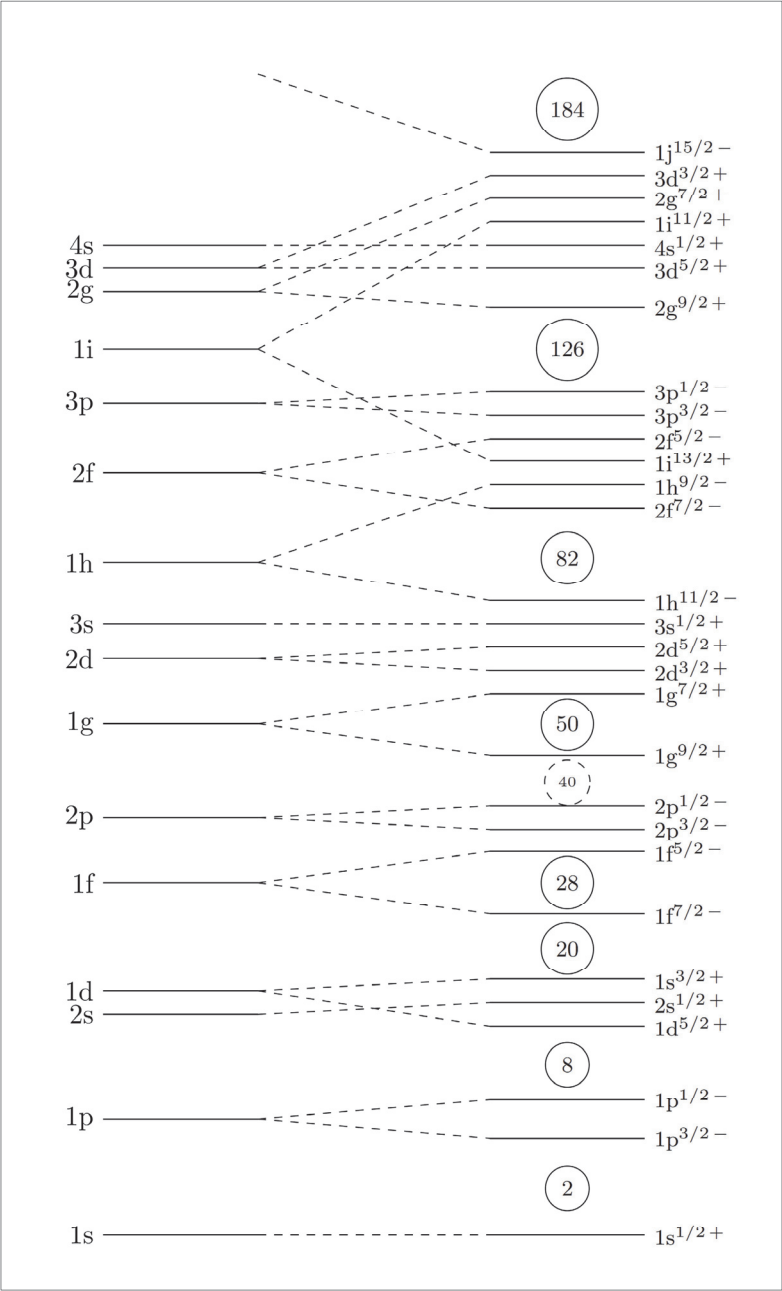


Figure 7. Structure quantique générale du noyau atomique découlant du modèle en couches faisant apparaître la dégénérescence des niveaux d'énergie ; se reporter au tableau 1 pour la nomenclature des niveaux quantiques.

$$\pi = \prod_{i=1,A} \pi_i = \prod_{i=1,A} (-1)^{l_i} \quad (2.38)$$

L'état nucléaire d'un noyau atomique est noté  $J^\pi$ .

On distingue plusieurs cas de figure relatifs à la parité des nombres de protons et de neutrons qui constituent le noyau atomique.

- Les **noyaux pair-pair**, c'est-à-dire de nombre de protons pair et de nombre de neutrons pair, considérés dans leur état fondamental, possèdent un moment angulaire et une parité :  $J^\pi = 0^+$ .

### Exemples

Hélium 4 :  $J^\pi = 0^+$  ; fer 56 :  $J^\pi = 0^+$ .

- Les **noyaux impair-impair**, c'est-à-dire de nombre de protons impair et de nombre de neutrons impair, considérés dans leur état fondamental, possèdent un moment angulaire et une parité déduits des caractéristiques angulaires et de parité,  $j_{proton}^{\pi_{proton}}$  et  $j_{neutron}^{\pi_{neutron}}$ , des états quantiques respectivement du proton célibataire et du neutron célibataire ; on a :

$$\pi_{proton} = (-1)^{l_{proton}} \text{ et } \pi_{neutron} = (-1)^{l_{neutron}}$$

La parité du noyau atomique est alors obtenue par le produit de ces deux parités :

$$\pi = \pi_{proton} \pi_{neutron} = (-1)^{l_{proton}} \times (-1)^{l_{neutron}} \quad (2.39)$$

Le moment angulaire du noyau atomique est déterminé en composant les moments angulaires  $\vec{j}_{proton}$  et  $\vec{j}_{neutron}$  du proton et du neutron célibataires :

$$\vec{J} = \vec{j}_{proton} + \vec{j}_{neutron} \quad (2.40)$$

et les valeurs pouvant être prises par  $\vec{J}$  sont les suivantes :

$$\left| j_{proton}^{\pi_{proton}} - j_{neutron}^{\pi_{neutron}} \right| \geq J \geq \left| j_{proton}^{\pi_{proton}} + j_{neutron}^{\pi_{neutron}} \right| \quad (2.41)$$

ce qui signifie que plusieurs valeurs du moment angulaire sont *a priori* possibles. On s'appuie sur les données expérimentales pour déterminer celle qu'il convient de retenir.

### Exemples

Deutérium  ${}^2_1\text{D}$  :  $J^\pi = 1^+$  ; bore  ${}^{10}_5\text{B}$  :  $J^\pi = 3^+$  ; cuivre  ${}^{64}_{29}\text{Cu}$  :  $J^\pi = 1^+$ .

- Les noyaux ayant un nombre de nucléons **impair** ont le moment angulaire et la parité du nucléon célibataire :
  - si nombre de protons pair et nombre de neutrons impair :  $J = j_{neutron}^{\pi_{neutron}}$ ,  $\pi_{neutron} = (-1)^{l_{neutron}}$  ;
  - si nombre de neutrons pair et nombre de protons impair :  $J = j_{proton}^{\pi_{proton}}$ ,  $\pi_{proton} = (-1)^{l_{proton}}$  ;

### Exemples

Hydrogène,  ${}^1_1\text{H} : J^\pi = \frac{1}{2}^+$  ; tritium,  ${}^3_1\text{H} : J^\pi = \frac{1}{2}^+$  ; aluminium 27,  ${}^{27}_{13}\text{Al} : J^\pi = \frac{5}{2}^+$  ; manganèse 55,  ${}^{55}_{25}\text{Mn} : J^\pi = \frac{5}{2}^-$ .

### Remarques

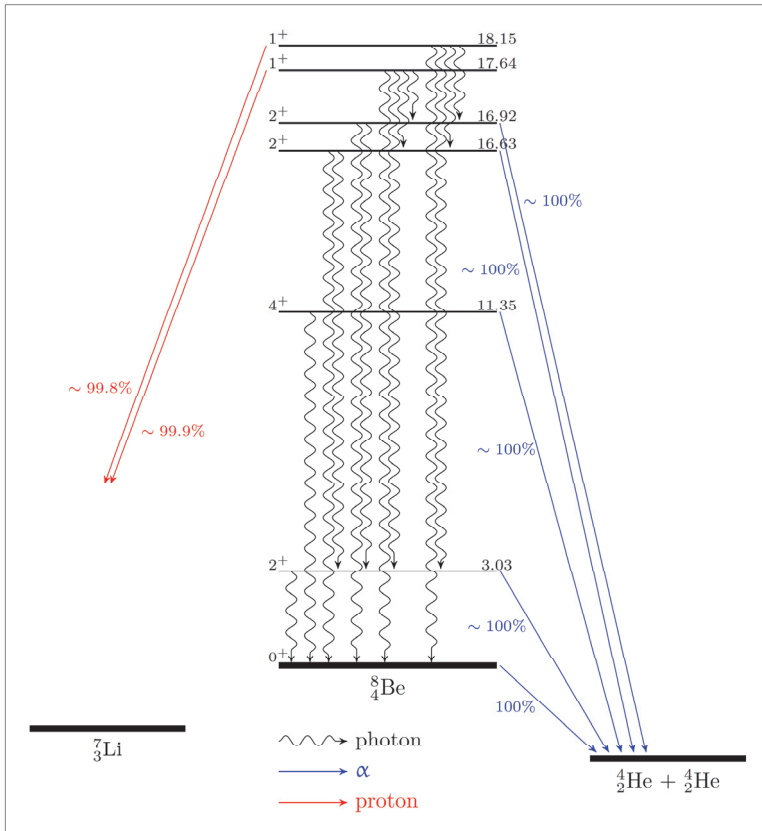
- On constate que le modèle de l'oscillateur harmonique retrouve les trois premiers **nombre magiques** qui caractérisent une surstabilité du noyau atomique, à savoir  $D_N = 2, 8, 20$  correspondant à l'**hélium 4** (2 protons et 2 neutrons), à l'**oxygène 16** (8 protons et 8 neutrons) et au **calcium 40** (20 protons et 20 neutrons). Pour reproduire les autres nombres magiques, il faut utiliser un potentiel d'interaction forte plus réaliste tel que celui de Woods-Saxon. Dans ce cas, on met en évidence les autres nombres magiques :
  - le **calcium 48** (20 protons et 28 neutrons) ;
  - le **nickel 48** (28 protons et 20 neutrons) moins radioactif qu'initialement prévu (mais de période très faible : 2.1 millisecondes) ;
  - le **rhodium 103** (45 protons et 58 neutrons), seul isotope stable du rhodium ;
  - le **plomb 208** (82 protons et 126 neutrons), doublement magique.
- On observe que les énergies des états quantiques figurant dans le tableau 3 sont des valeurs propres dégénérées, puisqu'à chacune d'entre elles correspondent plusieurs états quantiques, c'est-à-dire vecteurs propres ou fonctions d'onde propres qui caractérisent respectivement les nucléons occupant ces niveaux d'énergie. L'annexe I indique que cette dégénérescence doit être levée pour pouvoir se rapprocher de la réalité.
- Les moments angulaires influent sur la stabilité du noyau atomique ou l'occurrence d'une réaction nucléaire donnée. Plus précisément, ces transformations du noyau atomique sont également contraintes par la **conservation du moment angulaire** et de la **parité** à côté des autres lois de conservation, quantité de mouvement et énergie totale. Si l'on considère une transformation nucléaire menant d'un noyau initial A, de moment angulaire  $J_A$ , à un noyau final B, de moment angulaire  $J_B$ , *a priori* la variation du moment angulaire  $\Delta J$  est comprise entre deux valeurs :

$$|J_A - J_B| \leq \Delta J \leq |J_A + J_B| \quad (2.42)$$

Excepté dans le cas où  $J_A = J_B$ , le changement de moment angulaire le plus probable est en général celui correspondant à la plus petite valeur possible de  $\Delta J$  et donc à  $\Delta J = |J_A - J_B|$ .

On peut illustrer le rôle joué par le moment angulaire dans une transformation nucléaire sur l'exemple du noyau de béryllium 8 représenté sur la **figure 8**. Par conservation du moment

angulaire et de la parité, les niveaux quantiques  $2^+$  à 3.03 MeV, 11.35 MeV, 16.63 MeV, et 16.92 MeV peuvent se désexciter en émettant 2 noyaux d'hélium 4, ou particules  $\alpha$ , le moment angulaire et la parité de ces deux particules étant  $0^+$  (leur fonction d'onde est symétrique, voir annexe II paragraphe 8). *A contrario*, les niveaux excités  $1^+$  à 17.64 MeV et 18.15 MeV qui sont donc de moment impair ne peuvent pas conduire à la production de ces deux particules  $\alpha$  dont les moments orbitaux sont pairs, et les voies de désexcitation restant possibles sont l'émission d'un proton préférentiellement et de gamma soit de 17.64 MeV sur le niveau fondamental, soit de 14.6 MeV sur le niveau excité de 3.03 MeV pour ce qui concerne le niveau d'énergie à 17.64 MeV et 18.15 MeV sur le niveau fondamental, soit de 15.12 MeV sur le niveau excité de 3.03 MeV pour ce qui concerne le niveau d'énergie à 18.15 MeV.



**Figure 8.** Représentation du noyau de béryllium 8 avec quelques-uns de ses niveaux excités et de leurs modes de désexcitation (d'après la base de données ENSDF, mise à jour de 2004 et la Live Chart of Nuclides nuclear structure and decay data de l'AIEA) ; les énergies des niveaux retenus ici sont : 3.03 MeV, 11.35 MeV, 16.63 MeV, 16.92 MeV, 17.64 MeV, 18.15 MeV indiqués sur le côté droit ; à gauche les moments angulaires correspondants :  $2^+$ ,  $4^+$ ,  $2^+$ ,  $2^+$ ,  $1^+$  et  $1^+$  ; le niveau fondamental a un moment angulaire  $0^+$ .<sup>26</sup>

<sup>26</sup> La comparaison de la figure 8 à une référence ancienne montre les progrès réalisés par la spectroscopie nucléaire : F. Ajzenberg, T. Lauritsen, « Energy Levels of Light Nuclei. IV », *Rev. Mod. Phys.* 24, 321-402, October 1, 1952, p. 336, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.24.321>.

### 3. Le modèle du gaz de Fermi

Le modèle du « gaz de Fermi »<sup>27,28</sup> permet de déterminer l'**énergie cinétique maximale et moyenne des nucléons** au sein du noyau atomique et la **profondeur du puits de potentiel nucléaire**. L'hypothèse sur laquelle repose ce modèle est que le noyau atomique est son assimilation à un **gaz de fermions**. On rappelle que  $n$  particules de spin  $\frac{1}{2}$  (fermions) enfermées dans un volume  $V$  en équilibre avec un thermostat à la température  $T$  sont distribuées selon le spectre  $F(E)$  (normalisé à l'unité) suivant représenté sur la **figure 9** :

$$F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{E - E_F}{kT}\right]} \quad (3.1)$$

où  $E_F$  est l'**énergie de Fermi**. On montre que l'énergie de Fermi s'écrit dans le cas non relativiste comme :

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} = \frac{\hbar^2}{2M} \left( \frac{3\pi^2 n}{V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.2)$$

où  $p_F$  : désigne l'**impulsion de Fermi**.

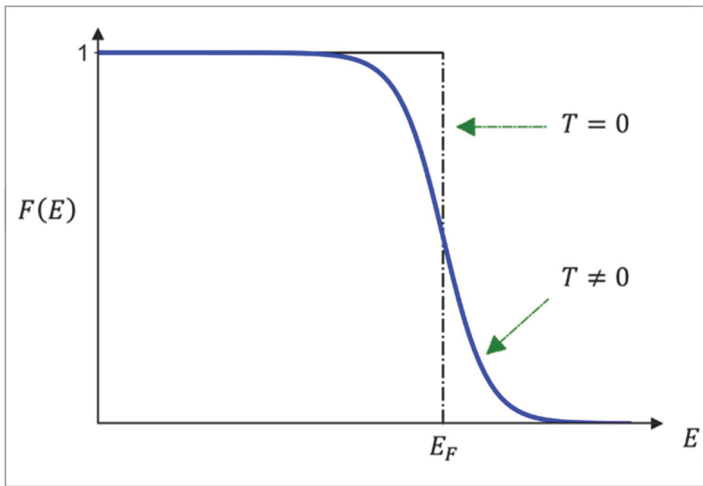


Figure 9. Distribution en énergie de Fermi d'un gaz de fermions à une température  $T$  donnée (spectre normalisé à l'unité).

<sup>27</sup> H. Euler, « Über die Art der Wechselwirkung in den schweren Atomkernen », *Zeitschrift für Physik*, 105, 1937, pp. 553-575, <https://doi.org/10.1007/BF01371561>.

<sup>28</sup> R. Huby, « Investigations on the Binding Energy of Heavy Nuclei », *Proc. Phys. Soc. A* 62, 1949, pp. 62-71, <https://doi.org/10.1088/0370-1298/62/1/309>.

Le noyau atomique est considéré comme un système de volume  $V$ , comportant deux gaz de Fermi, l'un contenant  $Z$  protons et l'autre  $N$  neutrons. À l'aide du **modèle du gaz de Fermi** appliqué au noyau, on détermine la profondeur approximative du puits de potentiel nucléaire<sup>29</sup>. En admettant que le noyau atomique est d'une forme sphérique, son volume  $V$  est :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A \quad (3.3)$$

En supposant  $Z \approx N = A/2$ , alors on calcule avec (3.2) les énergies de Fermi,  $E_F(Z)$  et  $E_F(N)$  respectivement pour les protons et les neutrons :

$$\begin{aligned} E_F(Z) \approx E_F(N) &\approx \frac{\hbar^2}{2M_p} \left( \frac{3\pi^2 Z}{V} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2M_p} \left( \frac{3\pi^2 \frac{A}{2}}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\hbar^2}{2M_p r_0^2} \left( \frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{(1.055 \cdot 10^{-34} \text{ (J.s)})^2}{2 \times 1.67210 \cdot 10^{-27} \text{ (kg)}} \left( \frac{9 \times 3.14}{2} \right)^{2/3} \frac{1}{(1.25 \cdot 10^{-15} \text{ (m)})^2} \times \frac{1}{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ (J)}} \approx 37 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (3.4)$$

On montre également que :

- l'énergie cinétique totale des neutrons dans le noyau,  $T(N)$ , s'écrit :

$$T(N) = \frac{3}{5} N E_F \quad (3.5)$$

- pour l'ensemble des  $A$  nucléons en supposant  $N = Z$ , l'énergie cinétique totale  $T(A)$  est :

$$T(A) = \frac{3}{5} A E_F \quad (3.6)$$

On en déduit que l'énergie cinétique moyenne d'un nucléon se mouvant dans le noyau atomique vaut approximativement :

$$\frac{T(A)}{A} = \frac{\frac{3}{5} A E_F}{A} = \frac{3}{5} E_F \approx 22 \text{ MeV} \quad (3.7)$$

En prenant en considération l'énergie de séparation du nucléon,  $S_n$  (de l'ordre de 8 MeV), la profondeur approximative du puits de potentiel nucléaire  $V_0$  est (voir **figure 10**) :

$$V_0 = E_F + S_n = 37 \text{ MeV} + 8 \text{ MeV} = 45 \text{ MeV} \quad (3.8)$$

<sup>29</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit. p. 227.



valeur cohérente avec celle précédemment indiquée en commentant la relation (2.20).

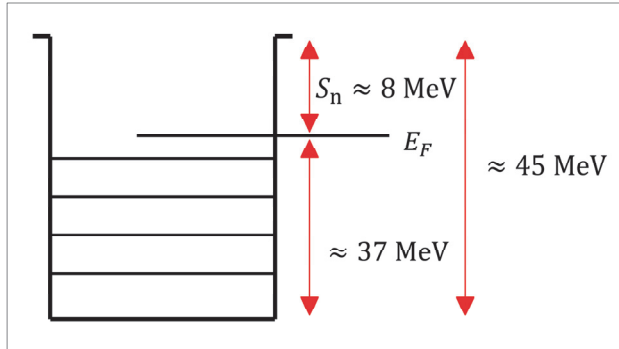


Figure 10. Représentation schématique du puits de potentiel nucléaire indiquant les couches pouvant être occupées par les nucléons du noyau atomique jusqu'au niveau correspondant à l'énergie de Fermi.

### Remarque

L'énergie cinétique d'un nucléon dans le noyau atomique peut être estimée de manière indicative en considérant que sa longueur d'onde associée,  $\lambda$ , doit être de l'ordre de grandeur de la dimension du noyau atomique, sa fonction d'onde devant rester « confinée » dans le domaine délimité par la portée de la force nucléaire.<sup>30</sup> La relation de de Broglie reliant la grandeur corpusculaire qu'est la quantité de mouvement du nucléon dans le noyau atomique,  $p$ , à sa caractéristique ondulatoire  $\lambda$ , on a :

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightarrow p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \sqrt{2ME} = \frac{h}{\lambda} \rightarrow E = \frac{h^2}{2M\lambda^2} \quad (3.9)$$

où  $M = 1.675 \cdot 10^{-27}$  kg est la masse du nucléon,  $E$  son énergie cinétique au sein du noyau atomique, et  $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  J s, la constante de Planck.

En prenant  $\lambda \approx 6 \text{ fm} = 6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ , on obtient :

$$E \text{ (MeV)} = \frac{[6.626 \cdot 10^{-34}]^2}{2 \times 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ (kg)} \times (6 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2 \times 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ (J MeV}^{-1}\text{)}} = 22.7 \text{ MeV}$$

C'est un ordre de grandeur cohérent avec celui issu de l'application du modèle de Fermi.

Le modèle en couches et le modèle de Fermi conduisent à faire la distinction entre :

- les niveaux quantiques d'énergie occupés par les nucléons au sein du noyau atomique dans son état fondamental, situés en-dessous de l'énergie de Fermi, ce sont les **niveaux d'énergie liés ou états liés**,
- et niveaux occupables d'énergie plus élevée, quantiquement définis, situés au-dessus de l'énergie de Fermi, appelés **niveaux d'énergie non liés ou états non liés**.

<sup>30</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 337.

## 4. Moments nucléaires électriques et magnétiques

En plus des moments angulaires du noyau atomique définis dans le cadre du modèle en couches, il existe d'autres moments nucléaires de nature électrique et magnétique. En effet, les constituants du noyau, protons et neutrons, se meuvent à l'intérieur du noyau atomique et possèdent des caractéristiques électromagnétiques. Cela a pour conséquence l'existence de moments associés aux nucléons et au noyau pris dans son ensemble.

- Les **moments multipolaires électriques** dont l'important **moment quadrupolaire**. La forme du noyau atomique est fortement corrélée à l'existence de ces moments. Par exemple, à une distribution de protons asymétrique correspond un moment quadrupolaire électrique positif ou négatif. En première approximation, le noyau a respectivement une forme **oblongue** (*oblate*) ou une forme de **disque aplati** (*prolate*) (voir figure 4 du chapitre 2 et annexe I § 5).
- Le **moment dipolaire magnétique**. Tout se passe comme si le champ magnétique créé par le proton (ou le neutron) était dû à un dipôle magnétique. On désigne habituellement le moment dipolaire magnétique par la lettre  $\mu$  et l'unité utilisée est le **magnéton nucléaire**  $\mu_N$  :

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p c^2} = 5,050\,783\,53 \times 10^{-27} \text{ J T}^{-1} \text{ ou A m}^2 \quad (4.1)$$

Pour le proton et le neutron, on a

$$: \mu_p = 2,79275 \mu_N, \mu_n = -1,91248 \mu_N \quad (4.2)$$

Des relations sont établies d'une part, entre les moments dipolaires magnétiques et le moment angulaire total d'un noyau atomique<sup>31 32</sup>, et d'autre part, entre les moments multipolaires électriques et ce même moment angulaire total.<sup>33 34 35</sup> Il faut souligner l'importance fondamentale des moments nucléaires dans les propriétés des noyaux atomiques et des réactions nucléaires. Les moments nucléaires renseignent ainsi sur :

- la **structure et la forme du noyau atomique** ;
- les **phénomènes de désintégration radioactive** ;
- les **réactions nucléaires** ;
- les **effets atomiques** observés en présence d'un champ magnétique : « **effet Zeeman** », « **effet Paschen-Back** » révélant la structure atomique hyperfine... ;
- les **effets moléculaires** : les spectres de rotation moléculaire...
- 

<sup>31</sup> K. S. Krane, *Introductory nuclear physics, op. cit.*, pp. 125-127.

<sup>32</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.* pp. 158-175.

<sup>33</sup> S. G. Prussin, *Nuclear physics for applications, op. cit.*, chapitre 8, pp. 205-243.

<sup>34</sup> K. S. Krane, *Introductory nuclear physics, op. cit.*, pp. 127-131.

<sup>35</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.* pp.175-186.

## Annexe I : raffinements des modèles nucléaires

Le modèle de la goutte liquide tout comme le modèle en couches restent d'actualité, ainsi qu'en témoignent diverses publications récentes. Ils ont été raffinés pour accroître leur capacité prédictive, par exemple de la masse des noyaux atomiques superlourds ou encore les niveaux d'énergie des noyaux atomiques. Les facteurs correctifs apportés aux différents formalismes existants résultent de comparaisons avec l'expérience (mesures de masses, de moments angulaires, de spectres d'émission de rayonnements, etc.).

### 1. Le modèle de la goutte liquide

S'agissant du **modèle de la goutte liquide**, il est souvent considéré, dans la littérature, que l'une des plus importantes améliorations est celle apportée par Vilen Mitrofanovich Strutinski<sup>36 37</sup> : elle réside dans l'ajout d'un terme correctif à l'énergie de liaison de nature quantique relatif à l'existence de niveaux d'énergie, en plus de celui déjà indiqué d'appariement de nucléons. Un autre terme correctif a aussi été introduit sous le nom d'« **énergie Wigner** »<sup>38</sup> caractérisant une énergie de liaison accrue pour les noyaux dont les nombres de neutrons et de protons sont égaux ( $N = Z$ ), cet effet étant plus prononcé pour les noyaux impair-impair que pour les noyaux pair-pair.<sup>39</sup> L'énergie de liaison est alors obtenue par une approche mixte combinant **approches macroscopique** (« mac ») et **microscopique** (« mic »), et incorporant l'ensemble des termes correctifs précités<sup>40 41 42</sup> :

$$B(A, Z) = B_{mac}(A, Z) + \delta B_{mic}(A, Z) \text{ avec } \delta B_{mic}(A, Z) \\ = \delta B_{appariement}(A, Z) + \delta B_{couche}(A, Z) \quad (I - 1.1)$$

À titre illustratif :  $\delta B_{mic} \approx 2.4$  MeV pour l'oxygène 16 ( $A = 16, Z = 8, N = 8$ ) dont l'énergie de liaison est de 128 MeV et  $\delta B_{mic} \approx -1.13$  MeV pour l'uranium 238 ( $A = 238, Z = 92, N = 146$ ) dont l'énergie de liaison est de 1801.64 MeV.

La formule de Bethe-Weizsäcker donne toujours lieu à des travaux de recherche conduisant à l'élaboration de modèles de la goutte liquide plus sophistiqués tels que le « *generalized*

<sup>36</sup> V. M. Strutinsky, « Shell effects in nuclear masses and deformation energies », *Nuclear Physics* A95, 1967, pp. 420-442, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(67\)90510-6](https://doi.org/10.1016/0375-9474(67)90510-6).

<sup>37</sup> V. M. Strutinsky, « “Shells ” in deformed nuclei », *Nuclear Physics* A122, 1968, pp. 1-33, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(68\)90699-4](https://doi.org/10.1016/0375-9474(68)90699-4).

<sup>38</sup> W. Satula, D. J. Dean, J. Gary, S. Mizutori, W. Nazarewicz, « The origin of the Wigner energy », *Phys. Lett. B*, 407, 1997, pp. 103-109, [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)00711-9](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00711-9).

<sup>39</sup> G. Royer, « On the coefficients of the liquid drop model mass formulae and nuclear radii », *Nuclear Physics A*, Elsevier, 2008, 807, pp.105-118, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2008.04.002>.

<sup>40</sup> P. Möller, A. J. Sierka, T. Ichikawa, H. Sagawa, « Nuclear ground-state masses and deformations: FRDM (2012) », *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, Vol. 109-110, May-July 2016, pp. 1-204, <https://doi.org/10.1016/j.adt.2015.10.002>.

<sup>41</sup> B. Cauchois, H. Lü, D. Boilley, G. Royer, « Uncertainty analysis of the nuclear Liquid drop model », *Physical Review C*, 2018, 98 024305 (1-13), <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.98.024305>.

<sup>42</sup> A. E. L. Dieperink, P. Van Isacker, « Shell corrections to a liquid-drop description of nuclear masses and radii », *Eur. Phys. J. A* 42, 2009. <https://doi.org/10.1140/epja/i2009-10869-3>.

*liquid drop model* » (GLDM) ou encore le « *modified generalized liquid drop model* » (MGLDM).<sup>43</sup>

## 2. Le modèle en couches

Le modèle en couches présenté plus haut avec le **potentiel de l'oscillateur harmonique** (OH) reproduit bien les premiers nombres magiques correspondant à la « fermeture » des couches de nucléons : 2, 8 et 20. Il ne reproduit en revanche pas les nombres magiques 28, 50, 82 et 126 d'une part, et d'autre part il ne rend pas compte de tous les niveaux d'énergie observés. Il a donc été raffiné en ajoutant deux termes supplémentaires visant à retrouver les niveaux d'énergie révélés par l'expérience. Comme on va le voir, chacun de ces termes lève la dégénérescence des états d'énergie pour lesquels le moment angulaire orbital est non nul  $\vec{l} \neq \vec{0}$ .

La **figure 4** montre que le potentiel de l'oscillateur OH ne représente qu'imparfaitement le potentiel réaliste de Woods-Saxon, en particulier quand la distance au centre du noyau atomique devient très grande, ce potentiel tend vers 0, traduisant la saturation de la force nucléaire forte et la finitude du noyau atomique, ce qui n'est pas le cas du potentiel OH. Le potentiel OH est « corrigé » par l'ajout d'un terme attractif dit d'**effet de bord**, proposé par Sven Gösta Nilsson<sup>44,45</sup> de la forme  $V_{Nil} = D \vec{l} \cdot \vec{l}$  où  $D$  est une constante et  $\vec{l}$  le moment angulaire orbital du nucléon :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + V_{Nil} = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + D \vec{l} \cdot \vec{l} \quad (\text{I} - 2.1)$$

où :

$$\vec{l} \cdot \vec{l} \equiv \vec{l}^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad (\text{I} - 2.2)$$

$|\vec{l}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}$  étant le module de  $\vec{l}$ .

Ce terme additionnel manifeste donc une attraction d'autant plus grande que  $l$  a une valeur élevée. On montre qu'il a aussi une incidence sur l'énergie d'un état quantique concerné levant sa dégénérescence.

En effet, en prenant pour exemple le niveau quantique de nombre quantique principal  $n = 2$  du **tableau 3**, l'énergie totale de celui-ci, égale à  $E_{n=2} = 7/2 \hbar \omega$  en l'absence de la

<sup>43</sup> Voir par exemple : S. Cht. Mavrodiev, M. A. Deliyergiyev, « Modification of the nuclear landscape in the inverse problem framework using the generalized Bethe-Weizsäcker mass formula », *International Journal of Modern Physics E*, Vol. 27, Issue 2, 2018, id. 1850015-708 (1-53), <https://doi.org/10.1142/S0218301318500155> ; K. P. Santhosh, T. A. Jose, « Theoretical investigation on double- $\alpha$  decay from radioactive nuclei », *Physical Review C* 104, 064604, 2021, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.104.064604>.

<sup>44</sup> B. E. Chi, « Single-particle energy levels in a Nilsson well », *Nuclear Physics* 83, 1966, pp. 97-144, [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(66\)90344-0](https://doi.org/10.1016/0029-5582(66)90344-0).

<sup>45</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH, Germany, 2007, pp. 234-242.

prise en compte du terme d'effet de bord (potentiel OH seul), se subdivise à présent en deux nouvelles énergies (valeurs propres)  $E_{n=2,l=0}$  et  $E_{n=2,l=2}$  déterminées par l'expression :

$$E_{n,l} = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega + D\hbar^2 l(l+1) = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega - \kappa\mu\hbar^2 l(l+1) \hbar\omega \quad (\text{I} - 2.3)$$

où  $D = -\kappa\mu\hbar\omega$  où  $\kappa$  et  $\mu$  sont deux paramètres du modèle de Nilsson ajustés pour retrouver les niveaux d'énergie mesurés. Des valeurs typiques de ces deux paramètres sont indiquées dans le **tableau 4**.

Tableau 4 : Exemples de valeurs des paramètres du modèle de Nilsson par domaine de valeurs du nombre  $N$  de neutrons et du nombre  $Z$  de protons du noyau atomique.

	$N, Z < 50$	$50 < N, Z < 82$	$82 < N, Z < 126$	$Z < 82$	$N < 126$
$\kappa$	0.08	0.0637	0.0637	0.0577	0.0635
$\mu$	0.	0.60	0.42	0.65	0.325

On obtient :

- $l = 0, E_{2,0} = \frac{7}{2} \hbar\omega$  : l'énergie de l'état quantique 2s est inchangée ;
- $l = 2, E_{2,2} = \frac{7}{2} \hbar\omega - 6D\hbar^2 = \frac{7}{2} \hbar\omega - 6\kappa\mu\hbar^2 \hbar\omega$  : l'énergie de l'état quantique 1d est modifiée.

On observe que l'énergie  $E_{2,2}$  de l'état quantique 1d est inférieure à celle,  $E_{2,0}$ , de l'état quantique 2s.

Pour le niveau quantique de nombre quantique principal  $n = 3$ , on trouve :

- $l = 1, E_{3,1} = \frac{9}{2} \hbar\omega - 2D\hbar^2 = \frac{9}{2} \hbar\omega - 2\kappa\mu\hbar^2 \hbar\omega$  ;
- $l = 3, E_{3,3} = \frac{9}{2} \hbar\omega - 12D\hbar^2 = \frac{9}{2} \hbar\omega - 12\kappa\mu\hbar^2 \hbar\omega$ .

On observe de nouveau que l'énergie  $E_{3,3}$  de l'état quantique 1d est inférieure à celle,  $E_{3,1}$ , de l'état quantique 2s. De manière générale, la valeur de  $E_{n,l}$  la plus petite est celle qui correspond à la valeur du moment angulaire orbital  $l$  la plus grande.

Un second terme de couplage a été introduit entre le moment angulaire de spin  $\vec{s}$  et le moment angulaire orbital  $\vec{l}$  dénommé **couplage spin-orbite** :  $V_{so} = C\vec{l} \cdot \vec{s}$  avec  $C = -2\kappa\hbar\omega$ .

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 + V_{so} = -V_0 + \frac{1}{2} M\omega^2 r^2 + C\vec{l} \cdot \vec{s} \quad (\text{I} - 2.4)$$

Le produit scalaire  $\vec{l} \cdot \vec{s}$  se déduit de l'expression du moment angulaire total du nucléon :  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$  d'où, en élevant cette expression au carré, on déduit :

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2) = \frac{1}{2}\hbar^2[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (\text{I} - 2.5)$$

Comme  $s = 1/2$ , alors :

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (\text{I} - 2.6)$$

Ce couplage induit lui aussi une levée de la dégénérescence pour chaque valeur de  $l$  ( $l \neq 0$ ) puisqu'il existe pour une valeur de  $l$  donnée deux valeurs possibles du moment angulaire total  $j$  :  $j = l - 1/2$  et  $j = l + 1/2$ . Les énergies totales associées aux nouveaux niveaux quantiques sont données par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} E_{n,l,j} &= \left( n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega + C \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \\ &= \left( n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega - 2\kappa \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar\omega \end{aligned} \quad (\text{I} - 2.7)$$

Pour l'état quantique  $n = 1$  du tableau 3, on a :

$$l = 1, j = l - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow E_{1,1,1/2} = \frac{9}{2} \hbar\omega + C \times \frac{\hbar^2}{2} \times (-2) = \frac{9}{2} \hbar\omega + 2\hbar^2 \kappa \hbar\omega$$

$$l = 1, j = l + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow E_{1,1,3/2} = \frac{9}{2} \hbar\omega + C \times \frac{\hbar^2}{2} \times 1 = \frac{9}{2} \hbar\omega - \kappa \hbar^2 \hbar\omega$$

Les deux termes ajoutés ensemble au potentiel OH conduisent à :

$$V(r) = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + V_{so} = -V_0 + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + D \vec{l} \cdot \vec{l} + C \vec{l} \cdot \vec{s}$$

Les valeurs propres associées sont données par l'expression suivante :

$$E_{n,l,j} = \left( n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega + D \hbar^2 l(l+1) + C \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \quad (\text{I} - 2.8)$$

$$E_{n,l,j} = \left( n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega - \kappa \mu \hbar^2 l(l+1) \hbar\omega - \kappa \hbar^2 \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \hbar\omega \quad (\text{I} - 2.9)$$

Ainsi pour  $n$  et  $l$  donnés, on a :

$$j = l - \frac{1}{2}, E_{n,l,j} = \left( n + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega - \kappa \mu \hbar^2 l(l+1) \hbar\omega + \kappa \hbar^2 (l+1) \hbar\omega \quad (\text{I} - 2.10)$$

$$j = l + \frac{1}{2}, E_{n,l,j} = \left(n + \frac{3}{2}\right) \hbar \omega - \kappa \mu \hbar^2 l(l+1) \hbar \omega - \kappa \hbar^2 l \hbar \omega \quad (I - 2.11)$$

La **figure 11** montre les raffinements apportés au modèle en couches lorsque l'on passe du potentiel nucléaire de l'oscillateur modélisé par l'oscillateur harmonique seul au potentiel qui prend en compte l'effet de bord et le couplage spin-orbite. Cela conduit à une description beaucoup plus fine des niveaux d'énergie quantiques (levée de la dégénérescence).

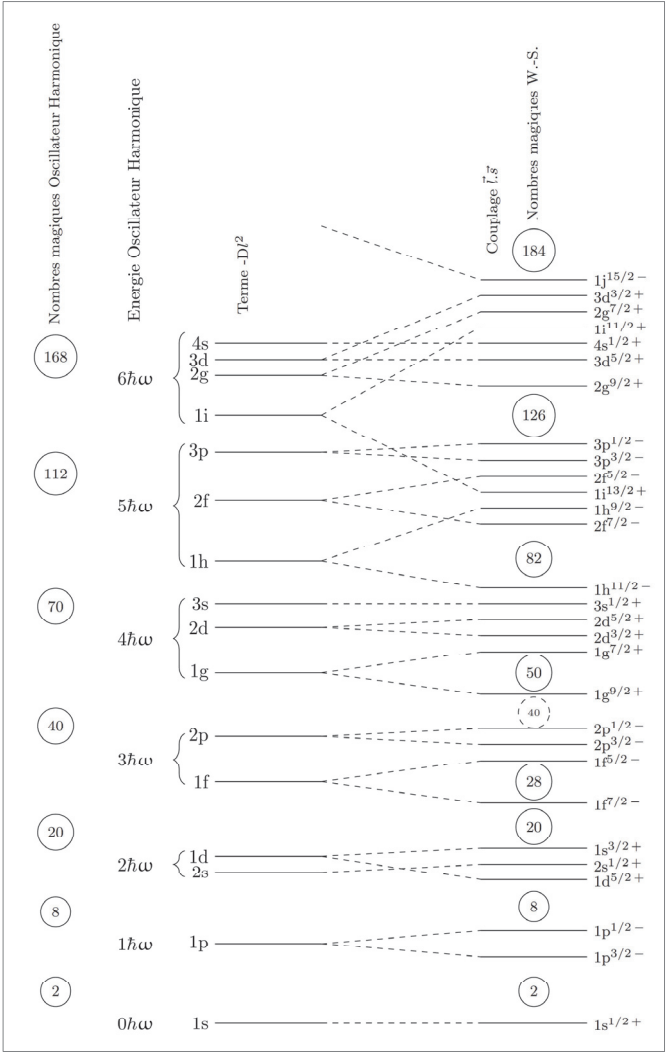


Figure 11. Illustration des améliorations apportées au modèle de l'oscillateur harmonique (OH) par la prise en compte de l'effet de bord et du couplage spin-orbite : *sur la gauche* les nombres magiques obtenus avec l'OH seul, et *sur la droite* les nombres magiques « vrais » retrouvés grâce aux améliorations précitées.

### 3. Approches de champ moyen

On a vu précédemment que dans le modèle en couches le potentiel nucléaire moyen, dans lequel se meuvent les nucléons du noyau atomique, était défini *a priori* à partir de considérations phénoménologiques et de données expérimentales. Conservant la même approche de type **champ moyen** qui a fait la preuve de sa fécondité pour accéder à (ou prédire) la structure du noyau atomique (niveaux d'énergie, moments angulaires, etc.), les physiciens théoriciens ont cherché à bâtir une théorie générale de la structure du noyau atomique, c'est-à-dire non phénoménologique et qui ne se donne pas une forme *a priori* du potentiel nucléaire vu par l'ensemble des nucléons du noyau atomique. Leur démarche a donc consisté à adopter une approche microscopique pour construire un champ de potentiel nucléaire commun à l'ensemble des nucléons du noyau. L'objectif visé est ainsi de faire émerger ce potentiel nucléaire moyen à partir des interactions élémentaires entre nucléons du noyau atomique.

#### *Le « problème $\mathcal{N}$ corps » et l'interaction nucléon-nucléon*

On a précédemment vu que cette ambition suppose d'être capable de traiter le problème de  $\mathcal{N}$  corps en interaction tout en ayant caractérisé cette interaction. Il a été également indiqué que la QCD ne permet pas actuellement de dériver aisément l'interaction entre deux ou plusieurs nucléons. De leur côté, les expériences de diffusion nucléon-nucléon [(p,n), (p,p)...], qui ont toute leur utilité, ne renseignent qu'incomplètement sur l'interaction nucléon-nucléon au sein du noyau atomique.

Cela explique que des théoriciens aient choisi provisoirement une voie médiane consistant à produire, par une double démarche microscopique et phénoménologique, une interaction nucléon-nucléon, qualifiée d'**effective**, leur permettant de construire le **champ moyen** vu par les nucléons du noyau atomique.<sup>46 47</sup> L'hamiltonien  $H$  du système physique formé par les  $A$  nucléons du noyau atomique est donc approché par un hamiltonien « effectif »  $H^{eff}$  résultant du potentiel  $V_{ij}^{eff}$  associé à l'interaction nucléon-nucléon effective :

$$H = \sum_{i=1}^A E_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^A V_{ij} \rightarrow H^{eff} = \sum_{i=1}^A E_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j=1}^A V_{ij}^{eff} \quad (I - 3.1)$$

Cette **interaction effective** doit suffisamment fidèlement décrire les collisions possibles entre deux nucléons au sein du noyau atomique sachant que celles-ci sont peu fréquentes en raison du principe d'exclusion de Pauli : les états finaux susceptibles d'être occupés après collision par les nucléons partenaires sont le plus souvent indisponibles, car déjà occupés par les autres nucléons du noyau atomique.

<sup>46</sup> R. J. Eden, N. C. Francis, « Theory of Nuclear Models », *Physical Review* 97, 1366-1379, March 1, 1955,

<sup>47</sup> K. A. Brueckner, C. A. Levinson, « Approximate Reduction of the Many-Body Problem for Strongly Interacting Particles to a Problem of Self-Consistent Fields », *Physical Review* 97, March 1, 1955, pp. 1344-1352, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.97.1344>.



Il a été signalé dans le chapitre 3 qu'il existait plusieurs expressions de cette interaction effective proposées par différents auteurs. Les plus courantes sont l'**interaction effective de Skyrme**<sup>48</sup> et l'**interaction effective de Gogny**<sup>49 50</sup> de portée finie<sup>51</sup>. Leur forme mathématique est complexe. Elles font intervenir des approximations notamment relatives à la **densité de la matière nucléaire**,  $\rho$ , grandeur physique dont dépend fortement l'interaction nucléon-nucléon, de sorte que l'on peut expliciter la double dépendance de l'interaction nucléon-nucléon par l'écriture :  $V_{ij}^{eff} = V_{ij}^{eff}(\vec{r}_i - \vec{r}_j, s_i, T_{\zeta i}, s_j, T_{\zeta j}, \rho)$  où les variables du triplet  $(\vec{r}_i, s_i, T_{\zeta i})$  (resp.  $j$ ) correspondent respectivement à la position spatiale, au spin et à l'isospin du nucléon  $i$  (resp.  $j$ ).

Les interactions effectives de Skyrme et Gogny dépendent de paramètres (8 dans le cas de Skyrme<sup>52</sup>, 10 dans le cas de Gogny<sup>53</sup>) dont les valeurs sont obtenues par ajustement sur des mesures.

### *La construction du champ moyen et la résolution de l'équation de Schrödinger*

Hormis pour des systèmes formés d'un nombre réduit de nucléons, la mise en œuvre d'une approche *ab initio*<sup>54</sup> reste actuellement inaccessible en raison de la puissance de calcul très élevée requise.

Le principe de la méthode de construction du champ moyen est donné par la **méthode de Hartree-Fock (HF)** dédiée aux noyaux pair-pair<sup>55</sup>.

Elle considère que la fonction d'onde,  $\Psi_{HF}$ , d'un noyau atomique formé de  $A$  nucléons, à l'état fondamental, peut s'exprimer comme un produit des fonctions d'onde (orbitales),  $\phi_{\alpha_{i,i=1,A}}$ , de chacun des  $A$  nucléons du noyau atomique selon un « **déterminant de Slater** » initialement introduit par John Clarke Slater<sup>56</sup> pour représenter la fonction d'onde d'un atome à partir de celles de ses électrons :

<sup>48</sup> P. Klüpfel, P.-G. Reinhard, T. J. Bürvenich, J. A. Maruhn, « Variations on a theme by Skyrme: A systematic study of adjustments of model parameters », *Physical Review C* 79, 034310 (1-23) –March 13, 2009, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.79.034310>.

<sup>49</sup> J. Dechargé, D. Gogny, « Hartree-Fock-Bogolyubov calculations with the D 1 effective interaction on spherical nuclei », *Physical Review C* 21. 4, 1980, pp. 1568-1593, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.21.1568>.

<sup>50</sup> J.-F. Berger, M. Girod, D. Gogny, *Computer Physics Communications*, 63, Issues 1-3, February 1991, pp. 365-374, [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(91\)90263-K](https://doi.org/10.1016/0010-4655(91)90263-K).

<sup>51</sup> J. Meyer, « Interactions effectives, théories de champ moyen, masses et rayons nucléaires », *Annales de Physique*, 28, N° 3, EDP Sciences, 2003, pp. 1-113, <https://doi.org/10.1051/anphys:2003006>.

<sup>52</sup> J.-F. Berger, « Approches de champ moyen et au-delà », *École thématique, École Joliot Curie « Les noyaux en peines formes »*, 10<sup>e</sup> session, du 16-21 septembre 1991, Maubuisson, (France), pp. 42-116, p. 43.

<sup>53</sup> *Ibid.*, p. 44.

<sup>54</sup> Ici, résolution numérique « pas à pas » de l'équation de Schrödinger, sans introduction de données empiriques.

<sup>55</sup> *Ibid.*, p. 69.

<sup>56</sup> J. C. Slater, « The Theory of Complex Spectra », *Physical Review* 34, November 15, 1929, pp. 1293-1322, pp. 1299-1300, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.34.1293>

$$\Psi_{HF}(x_1, x_2, \dots, x_A) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \phi_{\alpha_1}(x_1) \phi_{\alpha_2}(x_1) \dots \phi_{\alpha_i}(x_1) \dots \phi_{\alpha_A}(x_1) \\ \phi_{\alpha_1}(x_2) \phi_{\alpha_2}(x_2) \dots \phi_{\alpha_i}(x_2) \dots \phi_{\alpha_A}(x_2) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \\ \phi_{\alpha_1}(x_i) \phi_{\alpha_2}(x_i) \dots \phi_{\alpha_i}(x_i) \dots \phi_{\alpha_A}(x_i) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \vdots \\ \phi_{\alpha_1}(x_A) \phi_{\alpha_2}(x_A) \dots \phi_{\alpha_i}(x_A) \dots \phi_{\alpha_A}(x_A) \end{vmatrix} \quad (\text{I} - 3.2)$$

où :

- $\frac{1}{\sqrt{A!}}$  est un facteur de normalisation ;
- $x_i$  représente le triplet  $(\vec{r}_i, s_i, T_{\zeta_i})$  dont les variables correspondent respectivement à la position spatiale, au spin et à l'isospin du nucléon  $i$  ;
- $\alpha_i$  représente le quadruplet des nombres quantiques  $(v, l, j, m)$  du nucléon  $i$ .

Les fonctions d'onde (orbitales)  $\phi_{\alpha_{i,i=1,A}}$  sont obtenues par minimisation de l'énergie totale  $E$  du noyau atomique donnée à partir de l'équation Schrödinger par l'expression formelle (voir formalisme de la mécanique quantique) :

$$E = \frac{\langle \Psi_{HF} | H^{eff} | \Psi_{HF} \rangle}{\langle \Psi_{HF} | \Psi_{HF} \rangle} \quad (\text{I} - 3.3)$$

L'énergie  $E$  est une fonctionnelle de la densité de la matière nucléaire.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange est utilisée pour minimiser l'expression ci-dessus.

Cette opération aboutit à un système de  $A$  équations de Schrödinger couplées appelées « équations de Hartree-Fock » de la forme :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta + U_{HF}(\phi_\alpha) \right] \phi_{\beta_i}(x) = \epsilon_{\beta_i} \phi_{\beta_i}(x), i = 1, 2, \dots, A \quad (\text{I} - 3.4)$$

où :

- $U_{HF}(\phi_\alpha)$  est le champ moyen qui dépend à la fois du potentiel d'interaction nucléon-nucléon effectif  $V_{ij}^{eff}$  et des fonctions d'onde propres  $\phi_\alpha$  associées à chacun des nucléons ;
- $\phi_{\beta_i}(x)$  est la fonction d'onde propre du nucléon repéré par l'indice  $\alpha = \beta_i$  ;
- $\epsilon_{\beta_i}$  est un paramètre-valeur propre apparaissant dans le formalisme de minimisation de l'énergie de l'état quantique  $\alpha = \beta_i$  et s'interprète comme l'énergie correspondant à  $\phi_{\beta_i}(x)$  encore dénommée « énergie à une particule ».

Ces équations présentent la particularité d'être non linéaires, car le potentiel moyen  $U_{HF}$  dépend de la densité de la matière nucléaire, c'est-à-dire des nucléons au sein du noyau atomique, qui elle-même dépend des fonctions d'ondes propres  $\phi_\alpha$  recherchées, d'où la notation  $U_{HF}(\phi_\alpha)$  figurant dans l'équation de Schrödinger ci-dessus. Le système d'équations est résolu par itérations à partir d'une solution initiale arbitraire : les fonctions d'onde issues de la résolution de l'équation de Schrödinger avec le potentiel OH permettent ainsi de déterminer la densité nucléaire, puis le champ moyen qui en dépend. Les équations couplées sont résolues avec ce premier champ moyen conduisant à de nouvelles valeurs des fonctions d'onde  $\phi_\alpha$  et des valeurs propres  $\epsilon_\alpha$  correspondantes. Ces nouvelles fonctions d'onde  $\phi_\alpha$  sont utilisées dans l'itération suivante pour recalculer le champ moyen, et ainsi de suite jusqu'à ce que la convergence soit atteinte.

Dans cette démarche de calcul, motivée par la non-linéarité du problème à résoudre, les fonctions d'onde et les énergies associées à chaque nucléon d'une part et le champ moyen d'autre part sont calculés *en même temps*. Elle assure du même coup une parfaite *cohérence* entre ces différentes grandeurs, d'où la dénomination de **méthode autocohérente** ou **autoconsistante** (*self-consistent methods*). Il en découle que les états quantiques diffèrent *a priori* d'un noyau atomique à l'autre.

### Remarques

- Le formalisme précédent fait intervenir la densité de la matière nucléaire sous deux aspects :

- la **densité nucléaire locale**  $\varrho(\vec{r})$  en un point  $\vec{r}$  de la matière nucléaire, définie par :

$$\varrho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A |\phi_{\alpha_i}(\vec{r})|^2 \quad (\text{I} - 3.5)$$

puisque  $|\phi_{\alpha_i}(\vec{r})|^2$  représente la densité de probabilité de présence du nucléon  $i$  au point  $\vec{r}$  ;

- la **densité nucléaire non locale**  $\varrho(\vec{r}, \vec{r}')$  en un point  $\vec{r}$  de la matière nucléaire, définie par :

$$\varrho(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_{i=1}^A \phi_{\alpha_i}(\vec{r}) \phi_{\alpha_i}^*(\vec{r}') \quad (\text{I} - 3.6)$$

La façon dont ces densités sont traitées dans le calcul du champ moyen repose sur des approximations qu'impose la complexité des calculs. Par exemple, le calcul de la **densité nucléaire locale**  $\varrho(\vec{r})$  peut être effectué sous l'« **approximation de la densité locale** » (*Local Density Approximation*, LDA) qui suppose que localement un noyau atomique est une portion de matière nucléaire infinie dont la densité est celle du noyau au point  $\vec{r}$  considéré.

Le formalisme HF<sup>57</sup> fait apparaître le champ moyen,  $U_{HF}$ , comme une somme de trois composantes (par simplicité d'écriture, la variable  $x$  est réduite à la variable spatiale  $\vec{r}$ ) :

- une **composante « directe »**,  $U_{HF}^{dir}$ , de la forme :

<sup>57</sup> J.-F. Berger, « Approches de champ moyen et au-delà », *op. cit.*, pp. 70-75.

$$U_{HF}^{dir}(\vec{r}) = \int V^{eff}(\vec{r} - \vec{r}', \rho(\vec{r})) \rho(\vec{r}') d\vec{r}' \quad (I - 3.7)$$

qui s'interprète comme le potentiel créé au point  $\vec{r}$  par les nucléons situés aux points  $\vec{r}'$  ;

- une **composante**  $U_{HF}^{ech}(\vec{r}, \vec{r}')$ , dite d'« **échange** », de la forme :

$$U_{HF}^{ech}(\vec{r}, \vec{r}') = -V^{eff}(\vec{r} - \vec{r}', \rho(\vec{r})) \rho(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (I - 3.8)$$

est d'origine quantique, liée à l'indiscernabilité des nucléons ;

- une **troisième composante**  $U_{HF}^{rea}(\vec{r})$ , dite de « **réarrangement** », de la forme :

$$U_{HF}^{rea}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \int \frac{\partial V^{eff}(\vec{r}' - \vec{r}'', \rho(\vec{r}))}{\partial \rho(\vec{r})} [\rho(\vec{r}') \rho(\vec{r}'') - \rho(\vec{r}', \vec{r}'') \rho(\vec{r}'', \vec{r}')] d\vec{r}' d\vec{r}'' \quad (I - 3.9)$$

qui prend en compte la variation de l'interaction effective en fonction du nombre de nucléons présents au point  $\vec{r}$ .

On montre que les  $A$  ( $i = 1, A$ ) équations de Schrödinger couplées à résoudre se réécrivent alors comme :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \phi_{\alpha_i}(\vec{r}) + U_{HF}^{dir}(\vec{r}) \phi_{\alpha_i}(\vec{r}) + \int U_{HF}^{ech}(\vec{r}) \phi_{\alpha_i}(\vec{r}') d\vec{r}' + U_{HF}^{rea}(\vec{r}) \phi_{\alpha_i}(\vec{r}) = \epsilon_{\alpha_i} \phi_{\alpha_i}(\vec{r}) \quad (I - 3.10)$$

- La méthode HF permet aussi de déterminer l'énergie de l'état fondamental,  $E_{HF}$ , du noyau atomique et du même coup son énergie de liaison  $B_{HF} = -E_{HF}$ . Partant de l'expression  $E = \frac{\langle \Psi_{HF} | H^{eff} | \Psi_{HF} \rangle}{\langle \Psi_{HF} | \Psi_{HF} \rangle}$ , et en utilisant l'expression de  $\Psi_{HF}$  donnée par le **déterminant de Slater**, on établit que  $E_{HF}$  s'exprime par la somme algébrique de trois composantes, l'une cinétique,  $[E_c]_{\alpha_i \alpha_i}$ , et les deux autres potentielles, respectivement notées  $[U_{HF}^{dir}]_{\alpha_i \alpha_i}$  et  $[U_{HF}^{ech}]_{\alpha_i \alpha_i}$  (l'indice double  $\alpha_i \alpha_i$  provient du formalisme matriciel adopté) :

$$E_{HF} = \sum_{i=1}^A [E_c]_{\alpha_i \alpha_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A [U_{HF}^{dir}]_{\alpha_i \alpha_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A [U_{HF}^{ech}]_{\alpha_i \alpha_i} \quad (I - 3.11)$$

Par ailleurs, en multipliant les équations HF par la fonction d'onde conjuguée  $\phi_{\alpha_i}^*(\vec{r})$  et en intégrant sur la variable spatiale  $\vec{r}$ , on obtient :

$$\epsilon_{\alpha_i} = [E_c]_{\alpha_i \alpha_i} + [U_{HF}^{dir}]_{\alpha_i \alpha_i} + [U_{HF}^{ech}]_{\alpha_i \alpha_i} + [U_{HF}^{rea}]_{\alpha_i \alpha_i} \quad (I - 3.12)$$

En remplaçant la composante cinétique  $[E_c]_{\alpha_i \alpha_i}$  issue de (I - 3.12) dans l'expression de  $E_{HF}$  (I - 3.11), on obtient :

$$E_{HF} = \sum_{i=1}^A \left[ \epsilon_{\alpha_i} - \frac{1}{2} ([U_{HF}^{dir}]_{\alpha_i \alpha_i} + [U_{HF}^{ech}]_{\alpha_i \alpha_i}) - [U_{HF}^{rea}]_{\alpha_i \alpha_i} \right] \quad (I - 3.13)$$

Cette expression montre que la méthode HF ne constitue pas un modèle à particules indépendantes, contrairement au cas du modèle en couches avec le potentiel OH imposé, puisque :

$$E_{HF} \neq \sum_{i=1}^A \epsilon_{\alpha i}$$

(I – 3.14)

Exemple

Résultats numériques obtenus pour le plomb 208 (<sup>208</sup><sub>82</sub>Pb), noyau **doublement magique**, et concernant les **neutrons**<sup>58</sup>.

- La décomposition de l'énergie totale  $E_{HF}$  pour les neutrons du noyau de plomb 208 est explicitée dans le **tableau 5** :

Tableau 5 : Composantes de l'énergie totale  $E_{HF}$  relative aux neutrons

	$\sum_{i=1}^{126} \epsilon_{\alpha i}$	$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{126} [U_{HF}^{dir}]_{\alpha_i}$	$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{126} [U_{HF}^{ech}]_{\alpha_i}$	$-\sum_{i=1}^{126} [U_{HF}^{rea}]_{\alpha_i}$	$E_{HF}$
Totale (MeV)	-3186.9	991.3	2557.7	-1297.7	-935.5
	$\frac{\sum_{i=1}^A \epsilon_{\alpha i}}{126}$	$\frac{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^A [U_{HF}^{dir}]_{\alpha_i}}{126}$	$\frac{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^A [U_{HF}^{ech}]_{\alpha_i}}{126}$	$\frac{-\sum_{i=1}^A [U_{HF}^{rea}]_{\alpha_i}}{126}$	$\frac{E_{HF}}{126}$
Par neutron (MeV/ 126)	-25.3	7.9	20.3	-10.3	-7.4

- L'énergie de liaison totale des neutrons dans le noyau de plomb 208 s'écrit :

$$B_{HF} = -E_{HF} = 935.5 \text{ MeV}$$

- L'énergie cinétique totale des neutrons s'obtient en utilisant (I – 3.12) et les valeurs du **tableau 5** ci-dessus :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^A [E_c]_{\alpha_i \alpha_i} &= \sum_{i=1}^A \epsilon_{\alpha i} - \left\{ [U_{HF}^{dir}]_{\alpha_i \alpha_i} + [U_{HF}^{ech}]_{\alpha_i \alpha_i} + [U_{HF}^{rea}]_{\alpha_i \alpha_i} \right\} \\ &= -3186.9 - (2 \times 991.3) - (2 \times 2557.7) + 1297.7 = 2613.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

soit  $2613.5 / 126 = 20.7 \text{ MeV}$  par neutron.

Cette valeur de l'énergie cinétique par neutron est en accord avec l'ordre de grandeur établi dans le cadre du modèle de Fermi (voir relation (3.7) ainsi que l'application numérique de (3.9)).

L'énergie de liaison totale du plomb 208 étant évaluée à 1636 MeV, on en déduit que l'énergie de liaison associée aux protons est égale à  $1636 - 935.5 = 700.5 \text{ MeV}$ .

<sup>58</sup> J.-F. Berger, « Approches de champ moyen et au-delà », *op. cit.*, p. 74.

#### 4. Effets collectifs et appariements

En fait, la **méthode HF** présente un certain nombre d'insuffisances<sup>59</sup> lorsque l'on veut l'étendre à un noyau atomique quelconque, c'est-à-dire non magique. En effet, plusieurs phénomènes physiques ne sont pas couverts par le modèle HF.

Il s'agit tout d'abord de l'existence d'un couplage entre les états quantiques excités de basse énergie et l'état fondamental. Ce couplage est représenté par un terme supplémentaire d'interaction résiduelle s'ajoutant au champ moyen dans l'expression de l'hamiltonien du noyau atomique. L'importance de cette interaction résiduelle est variable d'un noyau à l'autre, et dépend de l'écart en énergie  $\Delta$  qui existe entre l'état fondamental et le premier niveau excité. Dans un noyau magique,  $\Delta$  est de l'ordre de 4 à 6 MeV alors qu'il est généralement inférieur à 1 MeV dans un noyau non magique (voir **figure 12**).

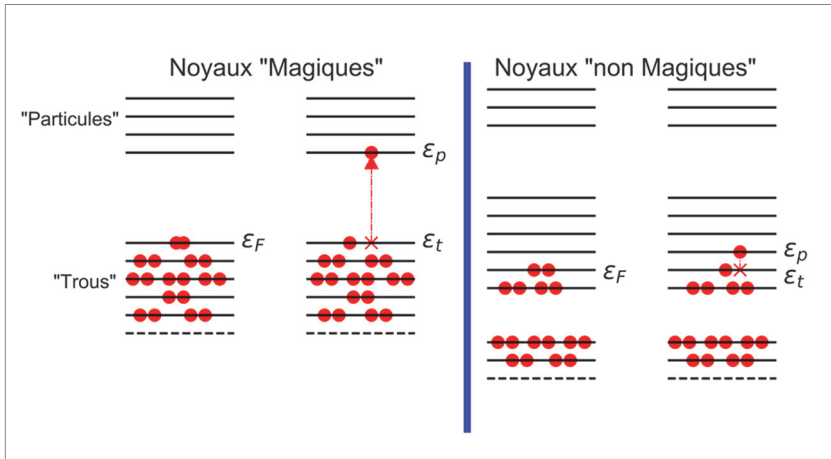


Figure 12. Représentation schématique de l'occupation des niveaux à une particule dans l'état fondamental d'un noyau et dans un état excité à une particule-un trou dans le cas d'un noyau magique et d'un noyau non magique<sup>60</sup> :  $\Delta = \epsilon_p - \epsilon_t$ .

Dans ce dernier cas, peuvent se manifester des excitations collectives et/ou individuelles de nucléons du noyau atomique. À l'instar des molécules, les noyaux atomiques sont le siège **d'excitations de types rotationnel et vibrationnel** dans lesquels les **moments électriques multipolaires** créés par les protons sont impliqués à travers la forme qu'ils confèrent au noyau atomique.

Une autre observation est la tendance que présentent deux nucléons identiques de spins opposés à s'apparier. Cela a incité les théoriciens à construire un formalisme reposant non plus sur des particules individuelles indépendantes, mais sur des paires indépendantes de nucléons.

<sup>59</sup> J.-F. Berger, « Approches de champ moyen et au-delà », *op. cit.*, p. 75.

<sup>60</sup> D'après J.-F. Berger, « Approches de champ moyen et au-delà », *op. cit.*, figure 9, p. 51.

La **méthode** permet de prendre en compte les corrélations indiquées ci-dessus *via* une interaction résiduelle s'ajoutant à l'hamiltonien du noyau atomique et en introduisant la notion de *quasi-particules* pour représenter à la fois le trou laissé par un nucléon dans sa couche quantique initiale du noyau dans son état fondamental, et le nucléon lui-même placé sur le niveau excité considéré : le trou et le nucléon correspondant représentent deux quasi-particules.

## 5. Déformation du noyau atomique

L'étude des **moments multipolaires** – notamment **quadrupolaire** ( $Q_{qdr}$ ) et **octupolaire** ( $Q_{oct}$ ) – du noyau atomique a permis d'en expliquer la diversité des formes observées et leurs liens avec leurs différents modes d'excitation. Ainsi, en règle générale, le noyau atomique se déforme au cours du temps au gré du déplacement notamment des protons en son sein ; sa forme s'écarte de la forme sphérique réservée aux noyaux magiques, prenant en moyenne une forme spécifique, par exemple celle d'un **ellipsoïde aplati (oblate)** lorsque  $Q_{qdr} < 0$  et d'un **ellipsoïde oblong (prolate)** pour  $Q_{qdr} > 0$ , comme le montre la **figure 13**.

Des auteurs interrogent la pertinence de l'application de la notion de forme parfaitement définie à des noyaux doublement magiques.<sup>61</sup> <sup>62</sup> Il a également été confirmé avec le nickel 78, de période radioactive 0.1 seconde, que la notion de nombre magique reste valable loin de la vallée de stabilité.<sup>63</sup> <sup>64</sup>

Afin de reproduire les formes du noyau atomique, il est d'usage de représenter le rayon nucléaire,  $R = R(\theta, \varphi, t)$ , en fonction de variables angulaires  $\theta$  et  $\varphi$ , spécifiant une direction donnée, et temporelle  $t$ , sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques  $Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi)$  de la forme :

$$R(\theta, \varphi, t) = R_0 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}(t) Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \quad (\text{I} - 5.1)$$

où  $R_0$  est la valeur moyenne du rayon du noyau sphérique de même volume et  $\alpha_{\lambda\mu}(t)$  les amplitudes de déformation à l'instant  $t$ . La **figure 14** montre les **formes du noyau**

<sup>61</sup> A. Poves, F. Nowacki, Y. Alhassid, « Limits on assigning a shape to a nucleus », *Physical Review C* 101, 054307, May 11, 2020, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.101.054307>.

<sup>62</sup> « Sphérique et déformé : la "schizophrénie" des noyaux magiques se confirme à Alto », 15 novembre 2016, <https://in2p3.cnrs.fr/en/node/1313> ;

<sup>63</sup> A. Gottardo, D. Verney, C. Delafosse, F. Ibrahim, B. Roussière, C. Sotty, S. Roccia, C. Andreoiu, C. Costache, M.-C. Delattre, I. Deloncle, A. Etile, S. Franchoo, C. Gaulard, J. Guillot, M. Lebois, M. MacCormick, N. Marginean, R. Marginean, I. Matea, C. Mihai, I. Mitu, L. Olivier, C. Portail, L. Qi, L. Stan, D. Testov, J. Wilson, and D. T. Yordanov, « First Evidence of Shape Coexistence in the  $^{78}\text{Ni}$  Region: Intruder  $O_2^+$  State in  $^{80}\text{Ge}$  », *Physical Review Letters* 116, 182501, 2016 ; <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.182501>.

<sup>64</sup> R. Taniuchi *et al.*, «  $^{78}\text{Ni}$  revealed as a doubly magic stronghold against nuclear deformation », *Nature*, Vol. 569, 2019, pp. 53-58, <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1155-x> ; “Les deux visages du Nickel 78 confirmés”, 22 mai 2019, <https://in2p3.cnrs.fr/fr/cnrsinfo/les-deux-visages-du-nickel-78-confirmez>.

**atomique** associées aux différents **moments électriques multipolaires** en fonction de l'ordre  $\lambda$  du développement du rayon nucléaire sur la base des harmoniques sphériques.

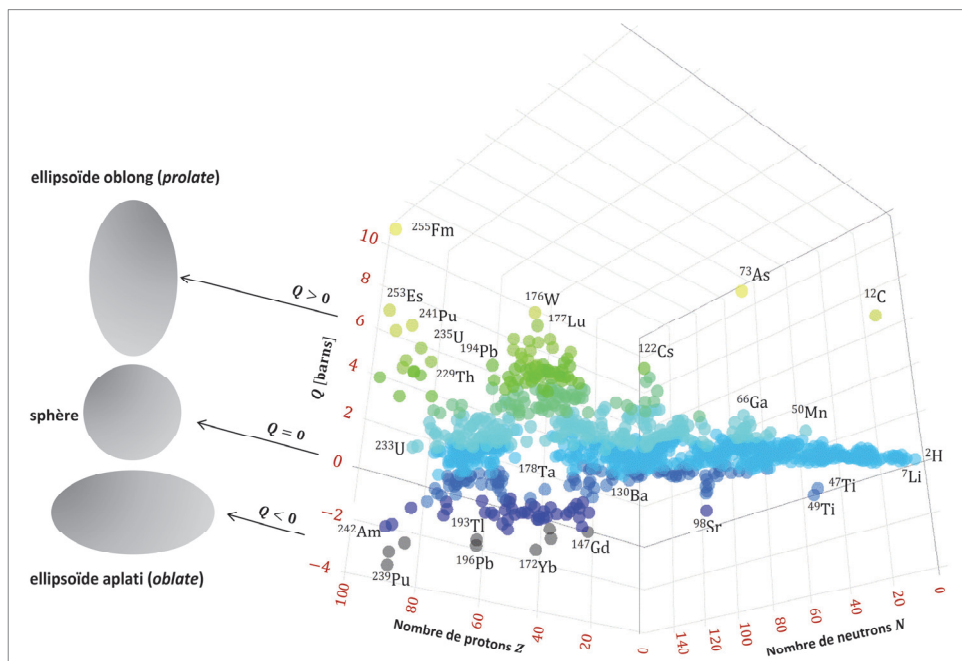


Figure 13. Les formes ellipsoïdales aplatie (*oblate*) et oblongue (*prolate*) du noyau atomique induites par le moment quadrupolaire (à la dimension d'une surface :  $\text{m}^2$ ,  $\text{cm}^2$ , barns...) en vis-à-vis d'une cartographie des nucléides en fonction de la valeur de leurs moments quadrupolaires ; seuls quelques-uns des nucléides sont explicitement indiqués<sup>65 66 67</sup>.

On verra dans le chapitre 9 une application de la méthode de champ moyen HFB à l'étude du phénomène de fission et de ses mécanismes qui met en jeu de très **grandes déformations du noyau atomique**. La méthode HFB, partant de la donnée de l'interaction nucléon-nucléon, offre un cadre unifié de détermination de la structure des noyaux dans leur état fondamental et dans leurs états excités.<sup>68</sup>

<sup>65</sup> Voir aussi R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 186, d'après C. H. Townes, H. M. Foley, W. Low, « Nuclear Quadrupole Moments and Nuclear Shell Structure », *Physical Review* 76, November 1, 1949, pp. 1415-1416, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.1415>.

<sup>66</sup> A. N. Bohr, B. R. Mottelson, *Collective and individual-particle aspects of nuclear structure*, København, Denmark, 1957, <https://cds.cern.ch/record/213298/files/p1.pdf>.

<sup>67</sup> Figure réalisée avec l'outil graphique : <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/lc3d.html>.

<sup>68</sup> J. -F. Berger, M. Girod, D. Gogny, « Time-dependent quantum collective dynamics applied to nuclear fission », op. cit.



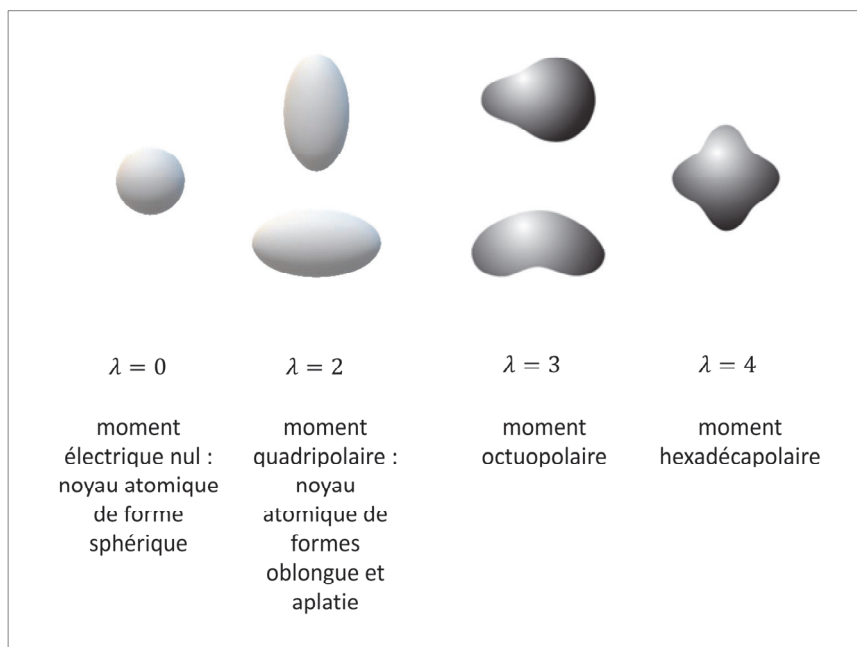


Figure 14. Les différentes formes du noyau atomique en relation avec ses moments multipolaires.<sup>69</sup>

On verra dans le chapitre 9 une application de la méthode de champ moyen HFB à l'étude du phénomène de fission et de ses mécanismes qui met en jeu de très **grandes déformations du noyau atomique**. La méthode HFB, partant de la donnée de l'interaction nucléon-nucléon, offre un cadre unifié de détermination de la structure des noyaux dans leur état fondamental et dans leurs états excités.<sup>70</sup>

Il est enfin utile de mentionner que la matière nucléaire, selon les conditions physiques dans lesquelles elle se trouve plongée, offre une disposition spatiale variable. En fonction de la valeur prise par un « paramètre de phase physique », qui est le rapport  $b/r$  entre l'étalement  $b$  de la fonction d'onde associée à l'état quantique d'un nucléon et la distance moyenne  $r$  entre nucléons, la matière nucléaire se présente sous des formes variées représentées sur la **figure 15**. Les « **noyaux exotiques** », situés loin de la vallée de stabilité, qui revêtent certaines des formes représentées sur la figure 14 (grande extension spatiale, halo, etc.), et produits artificiellement grâce à des installations expérimentales telles que le GANIL de Caen, font l'objet d'analyses qui renseignent plus finement sur la structure nucléaire<sup>71</sup>, permettant ainsi d'améliorer les modèles qui visent à la décrire. On note aussi

<sup>69</sup> D'après B. J. P. Gall. « Super et hyper déformations du noyau atomique : du discret au continu », *Annales de Physique*, 24, 1999, pp. 1-93, <https://doi.org/10.1051/anphys:199906001>.

<sup>70</sup> J. -F. Berger, M. Girod, D. Gogny, « Time-dependent quantum collective dynamics applied to nuclear fission », *op. cit.*

<sup>71</sup> Voir par exemple, I. Matea, *Décroissance  $\beta$  et moments magnétiques comme outils pour sonder la structure nucléaire. Étude des noyaux riches en neutrons autour de  $N = 40$* , Thèse de doctorat, Université de Caen, 2003.

l'observation d'un système nucléaire constitué de quatre neutrons ou « **tetraneutron** ». <sup>72 73</sup>

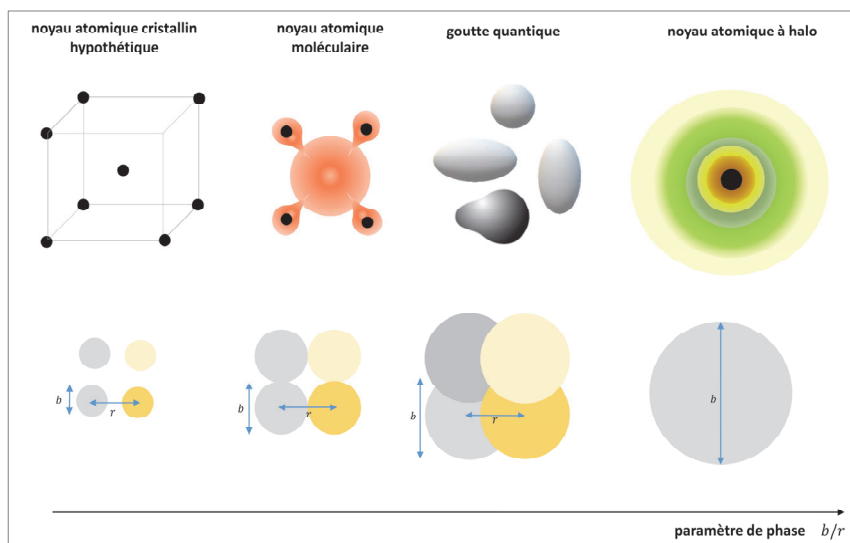


Figure 15. La variété des formes de la matière nucléaire. <sup>74</sup>

### Remarque <sup>75</sup>

On observe que pour les noyaux atomiques stables le rapport  $N/Z$  du nombre de neutrons au nombre de protons est compris entre 1 et 1.5, les énergies de séparation du dernier neutron et du dernier proton étant voisines de l'ordre de 6 à 8 MeV. De même leurs distributions spatiales sont similaires, en accord avec les caractéristiques fournies au paragraphe 2 du chapitre 3. Le puits de potentiel « vu » par les protons est un peu moins profond que celui « vu » par les neutrons en raison de l'action du champ coulombien : c'est ce qu'illustre le schéma (a) de la **figure 16**, pour lequel neutrons et protons forment un gaz spatialement homogène de nucléons (au sens de Fermi).

Lorsqu'un noyau atomique donné est progressivement enrichi en neutrons, comme le montre le schéma (b) de la figure 15, il finit par devenir instable. Les nucléides instables présentent un ratio  $N/Z$  compris approximativement entre 0.6 et 5, ainsi par exemple pour l'oxygène 24 dont la période de désintégration est de 65 millisecondes,  $N/Z = 24/8 = 3$ , pour l'azote 23 dont la période de désintégration est de 14 millisecondes,  $N/Z = 23/7 = 3.28$ , pour le carbone 22 dont la période de désintégration est de 9 millisecondes,  $N/Z = 22/6 = 3.66$ , pour l'hélium 8 dont la période de désintégration est de 119 millisecondes,  $N/Z = 8/2 = 4$ .

<sup>72</sup> M. Duer, T. Aumann, R. Gernhäuser, *et al.* « Observation of a correlated free four-neutron system », *Nature* 606, 2002, pp. 678-682. <https://doi.org/10.1038/s41586-022-04827-6>.

<sup>73</sup> F. Miguel Marques, J. Carbonell, « The quest for light multineutron systems », *European Physical Journal A*, 57 (3), EDP Sciences, 2021, p.105, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03164419>.

<sup>74</sup> D'après J.-P. Ebran, E. Khan, « Le noyau : entre liquide et cristal », *Dossier Pour la science*, n° 93, 05 octobre 2016.

<sup>75</sup> I. Tanihata, « Reactions with Radioactive Ion Beams », *Nuclear Physics A* 654, 1999, pp. 235c-251c, [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(99\)00256-0](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(99)00256-0).

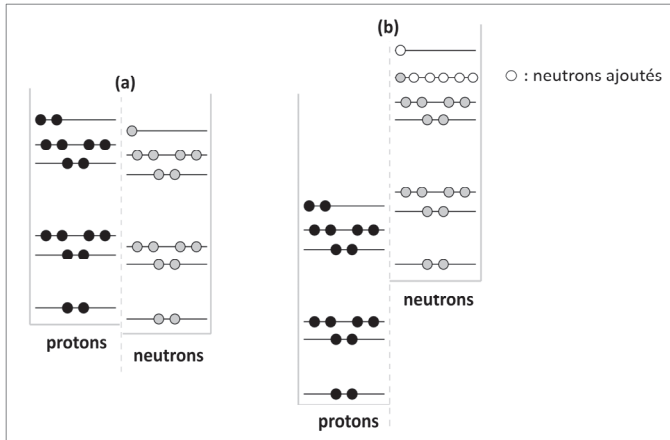


Figure 16. Illustration schématique du positionnement respectif des protons et des neutrons dans le puits de potentiel nucléaire au sein d'un noyau atomique stable (a) et instable (b).

L'ajout d'un nombre significatif de nucléons induit deux effets :

- le « creusement » du puits de potentiel associé aux protons au sein du noyau atomique qui s'accompagne d'un renforcement de l'attraction proton-neutron ( $p - n$ ) au détriment de l'interaction répulsive coulombienne ; ce puits de potentiel devient plus profond que celui qui est associé aux neutrons ; il s'ensuit que l'énergie de séparation peut varier considérablement, de 40 MeV pour un proton à une valeur nulle pour un neutron ;
- le prolongement significatif de la distribution spatiale des neutrons (plusieurs fois la dimension de la distribution relative au noyau atomique stable) lorsque ceux-ci ont une énergie de séparation inférieure à l'ordre du MeV constituant alors une **peau** à la surface du noyau atomique ou formant un **halo** en périphérie du noyau atomique<sup>76</sup> (voir annexe I § 5) :
  - halo à 1 neutron pour le béryllium 11 et le carbone 19 ;
  - halo à 2 neutrons pour l'hélium 6, le lithium 11, béryllium 14, le bore 19, le carbone 22 ;
  - halo à 4 neutrons pour l'hélium 8.

De même, il a été observé des halos à 1 proton pour le bore 8 et le phosphore 26, à 2 protons pour le néon 17 et le soufre 27. L'existence de halos mixtes neutron-proton fait l'objet d'investigations.<sup>77</sup> On comprend dès lors que des neutrons ne peuvent pas être indéfiniment ajoutés à un noyau atomique donné, car le noyau atomique qui en résulte devient de plus en plus instable, se désintégrant par exemple par un processus radioactif bêta ou bien émission d'un neutron.<sup>78</sup>

<sup>76</sup> F. Uchiyama, « Is a neutron halo nothing but a large neutron skin? », arXiv:nucl-th/0309080, 2002.

<sup>77</sup> A. S. Demyanova *et al.*, « Possible existence of neutron-proton halo in  ${}^6\text{Li}$  » dans *The 3<sup>rd</sup> International Conference on Particle Physics and Astrophysics, KnE Energy & Physics*, 2018, pp. 1-9, <https://doi.org/10.18502/ken.v3i1.1715>.

<sup>78</sup> En physique des réacteurs nucléaires, un cas rencontré de compétition entre ces deux processus possibles de désintégration est celui de l'azote 17 de période 4,17 secondes, formé par capture d'un neutron par l'oxygène 17, isotope stable de l'oxygène présent dans l'eau qui constitue le modérateur des réacteurs à eau sous pression (voir tableau de l'annexe I du chapitre 6).



## Annexe II : quelques rappels de mécanique quantique

Lorsqu'un terrien observe la Lune avec un télescope, il n'en perturbe pas de manière décelable la trajectoire. En d'autres termes, à l'échelle macroscopique, il est possible de caractériser avec une grande précision un objet (sa trajectoire, sa vitesse, etc.) par des observations que l'on consigne sous forme de diverses mesures qui n'en affectent ni l'intégrité ni le comportement.

*A contrario*, on ne dispose pas d'un microscope suffisamment puissant pour observer une entité à l'échelle microscopique, telle qu'un électron, un noyau atomique, sans en perturber le comportement. Un moyen d'accéder à ses caractéristiques est de la faire interagir avec un dispositif afin de procéder à des mesures appropriées. Il n'est alors plus possible de déterminer avec précision, comme à l'échelle macroscopique, à la fois la position et la vitesse de cette entité. Une autre particularité réside dans le fait qu'une entité microscopique manifeste conjointement un comportement corpusculaire et ondulatoire. L'appareil physico-mathématique développé par les théoriciens pour étudier les particules à l'échelle microscopique est la **mécanique quantique**<sup>82 83 84 85 86 87</sup>. Dans un certain nombre de situations, le physicien nucléaire adopte une approche dite « **semi-classique** » qui combine la mécanique classique et la mécanique quantique. Le fait de ne pouvoir observer directement au réel à l'échelle microscopique soulève de délicates questions relatives à la notion de mesure, à celle de matière, à l'interprétation des observations issues des expériences, à la capacité prédictive des formalismes nucléaires élaborés et plus généralement à la « connaissabilité » du réel avec ses incidences d'ordre philosophique.<sup>88</sup>

### 1. Comportement corpusculaire et ondulatoire des particules

L'étude des phénomènes à l'échelle **microscopique** – c'est par exemple le cas des échelles moléculaire, atomique et subatomique – requiert de faire appel à la **mécanique quantique**.

L'approche dite « **classique** » de la physique s'est attachée à considérer et étudier deux catégories d'objets :

- la matière dont les propriétés sont expliquées par la théorie des corps (ou théorie corpusculaire) qui regroupe la mécanique des corps macroscopiques et la mécanique statistique (théorie cinétique des gaz par exemple) ;

<sup>82</sup> L. de Broglie, *Ondes, Corpuscules, Mécanique ondulatoire*, Éditions Albin Michel, Paris, 1945.

<sup>83</sup> A. Messiah, *Mécanique quantique*, Tome I, Paris, Dunod, 1995, Nouvelle édition.

<sup>84</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Tomes I et II, Herman Paris, 1973.

<sup>85</sup> J.-L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2008.

<sup>86</sup> C. Ngô, H. Ngô, *Physique quantique – Introduction*, Dunod, Paris, 2005.

<sup>87</sup> A. Aspect, *Einstein et les révolutions quantiques*, CNRS Éditions, Paris, 2019.

<sup>88</sup> Voir par exemple E. Schrödinger, *Physique quantique et représentation du monde*, Éditions du Seuil, Paris, 1992 ; traduction de deux articles de E. Schrödinger : « Science et humanisme » (1951) et « La situation actuelle en mécanique quantique » (1935) ; de nombreux ouvrages traitent de ces questions. «

- le rayonnement dont les propriétés sont expliquées par la théorie ondulatoire réalisant une synthèse entre l'optique, l'électricité et le magnétisme.

Cependant la recherche de l'explication de faits observés et non interprétables dans le cadre de la physique classique a conduit à la naissance de nouveaux concepts permettant d'en proposer une interprétation.

Ces faits expérimentaux sont :

- **le rayonnement du corps noir**<sup>89</sup> montrant que les échanges d'énergie entre matière et rayonnement se font de manière discontinue ou « discrète » par absorption et émission de « quanta » d'énergie, noté  $E$ , porté par un « grain de lumière » ou photon :

$$E = h\nu \quad (\text{II} - 1.1)$$

$h$  : constante de Planck,  $h = 6.62606876 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 4.13566727 \cdot 10^{-21} \text{ MeV s}$

$\nu$  : fréquence du photon ;

- **l'effet photoélectrique** (voir chapitre 11, § 2) responsable de l'émission de rayons X d'énergies discrètes par l'atome ;
- **l'effet Compton** (voir chapitre 11, § 3) : diffusion d'un photon par un atome qui en modifie la trajectoire et l'énergie tel un corpuscule.

Ces trois faits ne peuvent pas être interprétés par la théorie ondulatoire. A. Einstein a proposé de revenir à une conception corpusculaire de la lumière (les photons sont des corpuscules de lumière) pour expliquer ces phénomènes.

Inversement, **l'expérience des fentes de Young**<sup>90 91</sup> se comprend dans une approche ondulatoire.

## 2. Dualité onde-corpuscule

C'est ainsi qu'apparaît le **concept de dualité** de la matière au sens matière et rayonnement : elle est **à la fois onde et corpuscule**<sup>92</sup> et entre ces deux manifestations, il existe un lien de nature statistique. Par exemple, dans l'expérience des fentes de Young, on peut dire que la probabilité d'impact des photons sur la cible est directement liée à l'intensité de l'onde lumineuse.

<sup>89</sup> M. Planck, *The theory of heat radiation*, P. Blakiston's Son & Co, Traduction autorisée en anglais de Morton Masius, Philadelphia, 1914, <https://www.gutenberg.org/files/40030/40030-pdf.pdf>.

<sup>90</sup> V. Jacques, *Source de photons uniques et interférences à un seul photon. De l'expérience des fentes d'Young au choix retardé*, Thèse de doctorat, ENS Cachan, 13 novembre 2007.

<sup>91</sup> Voir aussi l'expérience des fentes de Young réalisées avec des électrons, C. Jönsson, « Electron Diffraction at Multiple Slits », *American Journal of Physics*, Vol. 42, Issue 1, 1974, pp. 4-11 : traduction en anglais du papier original de l'auteur paru en 1961 dans *Zeitschrift für Physik* 161, pp. 454-474, <https://doi.org/10.1119/1.1987592>.

<sup>92</sup> L.de Broglie, *Ondes, Corpuscules, Mécanique ondulatoire*, op. cit., p. 98 et sq.

Les relations de Planck-Einstein et celles de de Broglie traduisent ce concept de dualité dans laquelle la **constante de Planck**  $h$  joue un rôle fondamental : c'est en effet cette « constante » qui donne aux ondes leur caractère corpusculaire et aux corpuscules leur caractère ondulatoire.

- **Relations de Planck-Einstein** : elles s'appliquent à la lumière

$$\begin{array}{lll} \text{paramètres corpusculaires :} & E = h\nu \quad (1) & \text{paramètres ondulatoires :} \\ & E, \vec{p} & \nu, \vec{k} \\ & \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad (2) & \end{array}$$

$E$  : énergie du corpuscule (photon) ;

$\vec{p}$  : impulsion du corpuscule de module  $|\vec{p}| \equiv p = mv$ ,  $v$  : vitesse de la particule ;

$\nu$  : fréquence de l'onde associée au corpuscule ;

$\omega$  : pulsation  $\omega = 2\pi\nu$  ;

$\hbar$  : constante de Planck rationalisée,  $\hbar = h/2\pi = 1.054571 \cdot 10^{-34} \text{ J}$ .

Par ailleurs, on a :

$$|\vec{p}| \equiv p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar |\vec{k}| \equiv \hbar k \quad (\text{II} - 2.1)$$

$\lambda$  : longueur d'onde du photon ;

$c$  : vitesse du photon ;

$\vec{k}$  : vecteur d'onde ;

$|\vec{k}| \equiv k$  : nombre d'onde.

- **Relation de de Broglie**

Alors que les relations de Planck-Einstein associent **un corpuscule à une onde**, la **relation de de Broglie**<sup>93</sup> associe **une onde à un corpuscule**, appelée **onde de matière** :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{II} - 2.2)$$

### Exemples

**Cas d'un grain de poussière** dont les caractéristiques sont les suivantes :

Masse :  $10^{-15} \text{ kg}$ , diamètre : 1 micromètre ( $1\mu = 10^{-6} \text{ m}$ )

Vitesse :  $1 \text{ mm s}^{-1}$  ( $10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ )

Sa longueur d'onde associée vaut :

---

<sup>93</sup> *Ibid.*, p. 100 et sq.

$$\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{10^{-15} \times 10^{-3}} = 6.6 \cdot 10^{-16} = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ \AA} \ll 1\mu \text{ (dimension du grain de poussière)}$$

Cas d'un neutron thermique :

Masse,  $M_n = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  ; température :  $T = 300 \text{ K}$  ( $\sim 20^\circ\text{C}$ )

Énergie cinétique :

$$E_n = \frac{1}{2} M_n v_n^2 = \frac{3}{2} k_B T \tag{II - 2.3}$$

où  $k_B$  est constante de Boltzmann :  $1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J s}^{-1}$

d'où :

$$|\vec{p}| = M_n v_n = \sqrt{2 M_n E_n} = \sqrt{3 M_n k_B T}$$

et la longueur d'onde associée vaut :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3 M_n k_B T}} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1.67 \cdot 10^{-27} \times 1.38 \cdot 10^{-23} \times 300}} = 1.45 \cdot 10^{-10} = 1.45 \text{ \AA}$$

La valeur de  $\lambda$  est ici de l'ordre des dimensions atomiques : des phénomènes pourront donc être observés, par exemple lors de la diffraction de neutrons thermiques par un cristal (voir chapitre 10).

Lorsque la vitesse  $v$  de la particule d'énergie  $E$  considérée tend vers la vitesse de la lumière  $c$ , on a :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} \xrightarrow{v \rightarrow c} \frac{hc}{E} \tag{II - 2.4}$$

Le **tableau 6** permet de comparer les longueurs d'onde de de Broglie pour différentes énergies pour une particule donnée et entre particules pour une énergie donnée.

Tableau 6 : longueurs d'onde de de Broglie du photon, de l'électron et du proton pour différentes énergies de 100 keV à 10 GeV.

Énergie MeV	Longueur d'onde de de Broglie ( $10^{-15} \text{ m}$ )		
	Photon	Électron	Proton
0.1	$1.2 \cdot 10^4$	3701	90
0.5	$2.5 \cdot 10^3$	1421	40
1	$1.2 \cdot 10^3$	872	29
10	120	118	9
100	12	12	2.8
1000	1.2	1.2	0.73
$10^4$	0.12	0.12	0.11



### 3. Quantification des grandeurs physiques

Le deuxième concept qui s'impose est celui de la « **quantification** » des grandeurs physiques associée au caractère discontinu des phénomènes observés à l'échelle microscopique par opposition au caractère continu des phénomènes physiques traités par la physique classique. Ainsi, les électrons d'un atome existent dans des **états d'énergie discontinus** ou « **discrets** » ; il en est de même des nucléons au sein du noyau atomique. Les moments angulaires des nucléons dans le noyau prennent aussi des valeurs discrètes.

### 4. Principe de correspondance

Ce principe a été énoncé clairement dans sa forme première par le physicien Niels Bohr en 1923. Le **principe de correspondance** exprime l'idée que :

- la théorie classique est macroscopiquement correcte ;
- la théorie quantique tend asymptotiquement vers la théorie classique pour les grands nombres quantiques ;
- une analogie formelle existe entre théorie quantique et théorie classique.

Les **principes de conservation de la physique classique** restent valables dans le cadre de la physique quantique, à savoir :

- la conservation de l'énergie qui découle de l'uniformité supposée du temps ;
- la conservation de l'impulsion (ou quantité de mouvement) qui découle de l'homogénéité de l'espace ;
- la conservation du moment cinétique qui découle de l'isotropie de l'espace.

### 5. L'équation de Schrödinger

Au concept classique de trajectoire, on fait correspondre le concept de **fonction d'onde**  $\psi(\vec{r}, t)$ . Elle s'interprète comme l'amplitude de probabilité de présence du corpuscule au point  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ .

On postule que la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t)$  d'un système quantique définit complètement son état dynamique : on connaît  $\psi$  à l'instant  $t_0$  initial et on en déduit  $\psi(\vec{r}, t)$  à un instant  $t$  ultérieur en résolvant l'**équation de Schrödinger** :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II} - 5.1)$$

où  $H$  est l'**hamiltonien** du système physique étudié, c'est-à-dire l'opérateur associé à l'énergie totale du système considéré :  $H$  est la somme d'un terme cinétique ( $E$ ) et d'un terme potentiel  $V(\vec{r})$ .<sup>94</sup>

---

<sup>94</sup> L'équation de Schrödinger peut être déduite de l'équation décrivant la propagation d'une onde, l'équation de d'Alembert.

On verra dans la suite que résoudre cette équation en **régime stationnaire** (indépendant du temps) revient à rechercher les valeurs propres  $E$  et les fonctions propres  $\varphi(\vec{r})$  de l'opérateur hamiltonien  $H$  :

$$H \equiv -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\vec{r}) \quad (\text{II} - 5.2)$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta + V(\vec{r}) \right] \varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (\text{II} - 5.3)$$

Les valeurs propres  $E$  correspondent aux états d'énergie possibles que peut occuper la particule étudiée de masse  $M$ .

Il existe plusieurs modèles de puits de potentiel nucléaire<sup>95</sup> :

- le **puits carré** :  $V(r) = -V_0$  pour  $r < a$ ,  $V(r) = 0$  pour  $r > a$  (II – 5.4)
- le **puits gaussien** :  $V(r) = -V_0 e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}$  (II – 5.5)
- le **puits exponentiel** :  $V(r) = -V_0 e^{-2\left(\frac{r}{a}\right)}$  (II – 5.6)
- le **puits de Yukawa** :  $V(r) = -V_0 \frac{e^{-2\left(\frac{r}{a}\right)}}{(r/a)}$  (II – 5.7)
- le **puits de Woods-Saxon** : voir relation (2.5) du paragraphe 2.

L'équation de Schrödinger est partiellement traitée dans le paragraphe 7 dans le cas d'un potentiel central à symétrie sphérique, illustrant la quantification de l'énergie et des moments angulaires.

## 6. Description quantique d'une particule par un paquet d'ondes – Relation d'incertitude d'Heisenberg

On considère une particule de masse  $M$  d'énergie cinétique  $E$  et d'énergie potentielle nulle, c'est-à-dire qu'elle n'est soumise à aucune force. L'**équation de Schrödinger** s'écrit alors :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II} - 6.1)$$

On remarquera que cette équation est la forme quantique de l'équation classique (correspondance formelle : voir principe de correspondance) :

$$E = \frac{p^2}{2M} \quad (\text{II} - 6.2)$$

dans le cas non relativiste où  $E$  est l'énergie cinétique de la particule.

<sup>95</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, p. 344.

La règle de correspondance est :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{II} - 6.3)$$

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (\text{II} - 6.4)$$

En mécanique quantique,  $E$  et  $\vec{p}$  sont par conséquent représentés par des opérateurs différentiels agissant sur la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t)$ .

Dans le cas présent, la solution de l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\psi(\vec{r}, t) = \text{Constante} \times e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (\text{II} - 6.5)$$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2M} \quad (\text{II} - 6.6)$$

C'est une onde plane de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$ . D'après la relation de de Broglie, la condition  $\omega = \hbar k^2 / 2m$  exprime que  $E$  et  $\vec{p}$  vérifient la relation  $E = p^2 / 2M$ .

Une telle onde plane est la représentation ondulatoire d'un faisceau parallèle de particules de même masse et se déplaçant à la même vitesse. Elle représente aussi un état dynamique stable comme celui de l'électron d'un atome assujéti à sa couche quantique ou encore de manière similaire d'un nucléon au sein du noyau atomique.

La question qui se pose est à présent celle de la représentation d'une particule isolée qui se déplace « librement »<sup>96</sup>. Pour obtenir sa représentation ondulatoire, on a recours au **principe de superposition** qui stipule que toute combinaison linéaire d'ondes planes est aussi solution de l'équation de Schrödinger. Par suite, la fonction d'onde attachée à un corpuscule s'écrit :

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d\vec{k} \quad (\text{II} - 6.7)$$

et est aussi solution de (II - 5.1). Cette fonction d'onde représente le **paquet d'ondes** associé à la particule de masse  $M$  considérée. Elle est de carré sommable contrairement à l'onde strictement monochromatique (II - 6.5).

On montre que les coefficients  $c(\vec{k})$  s'obtiennent à partir de la transformée de Fourier. Par exemple à une dimension d'espace, on a :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{i(kx - \omega t)} dk \quad (\text{II} - 6.8)$$

<sup>96</sup> Voir L. de Broglie, *Ondes - Corpuscules - Mécanique ondulatoire*, op. cit., pp. 128-156.

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, 0) e^{ikx} dx \quad (\text{II} - 6.9)$$

Par exemple à une dimension d'espace, on montre que la partie réelle de  $\psi(x, t)$  à un instant donné a la forme représentée sur la **figure 18**.

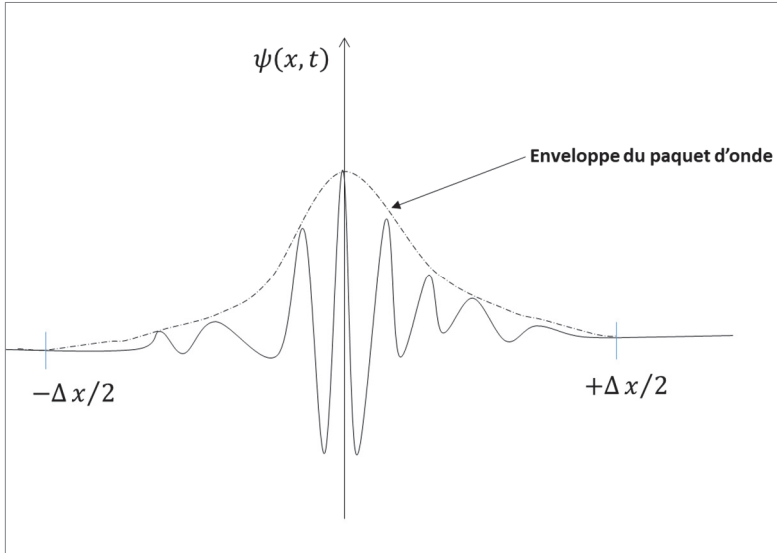


Figure 18. Représentation d'une fonction d'onde résultant de la superposition d'ondes planes : son étendue spatiale est limitée.

W. Heisenberg a montré que<sup>97</sup> :

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (\text{II} - 6.10)$$

Autrement dit, à un instant  $t$  donné, la position de la particule est connue avec une incertitude  $\Delta x$ , et son impulsion avec une incertitude  $\Delta p$ . Sa probabilité de présence dans le domaine  $\Delta x$  autour d'une position  $x$  (centre du paquet d'onde) est élevée et elle est quasiment nulle en dehors (ne pas confondre ici  $\Delta$  avec le symbole similaire de l'opérateur laplacien figurant dans l'équation de Schrödinger).

On a aussi, compte tenu de la relation (II – 2.1) :

$$\Delta x \cdot \Delta k \gtrsim 1 \quad (\text{II} - 6.11)$$

Les relations (II – 6.7), (II – 6.8), (II – 6.9), (II – 6.10) et (II – 6.11) représentent la superposition d'une infinité d'ondes dont les vecteurs d'onde  $k$  sont compris dans

<sup>97</sup> Voir aussi L. de Broglie, *Ondes - Corpuscules – Mécanique ondulatoire*, op. cit., pp. 128-139.

l'intervalle  $[\bar{k} - (\Delta k/2), \bar{k} + (\Delta k/2)]$  où  $\bar{k}$  est la valeur moyenne de ces derniers ; à cette dispersion spectrale correspond une dispersion spatiale  $\Delta x$  de la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  autour de la position  $x$ . On voit ainsi qu'il est impossible de déterminer avec une très grande précision à la fois sa position et sa vitesse.

### Exemple

Un exemple simple montre que la relation d'incertitude ne joue pas, dans la pratique, à l'échelle macroscopique. On considère le grain de poussière précédemment caractérisé : masse :  $10^{-15}$  kg ; diamètre : 1 micromètre,  $1\mu = 10^{-6}$  m ; vitesse :  $1 \text{ mm s}^{-1} = 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ .

Si sa position est connue à  $10^{-3}\mu$  près, soit  $\sim 10^{-9}$  m, alors l'incertitude sur l'impulsion  $p = mv = 10^{-15} \text{ kg m s}^{-1}$  est :

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{10^{-34}}{10^{-9}} = 10^{-25} \text{ kg m s}^{-1}$$

Donc  $\Delta p \ll p$  et dans la pratique, on ne sait pas, aujourd'hui, atteindre de telles précisions.

## 7. Résolution de l'équation de Schrödinger dans le cas d'un potentiel central – Mise en évidence des nombres quantiques

On conserve les notations du paragraphe 2. Un nucléon de masse  $M$  a une fonction d'onde obéissant à l'équation de Schrödinger suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r}, t) \quad (\text{II} - 7.1)$$

où les variables  $\vec{r}$  et  $t$  désignent respectivement la position spatiale et le temps,  $V(\vec{r}) = V(r)$  un potentiel central à symétrie sphérique. L'établissement des états stationnaires conduit à rechercher des solutions factorisées de l'espace et du temps de la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})\chi(t) \quad (\text{II} - 7.2)$$

En reportant dans (1) et en divisant chacun des deux membres par le produit  $\varphi(\vec{r})\chi(t)$ , on obtient :

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\varphi(\vec{r})} \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(r) \quad (\text{II} - 7.3)$$

Cette égalité doit être réalisée pour tout  $t$  et pour tout  $\vec{r}$ , donc :

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\varphi(\vec{r})} \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(r) = E \quad (\text{II} - 7.4)$$

où  $E$  est une constante à déterminer.

On a donc les deux équations suivantes à résoudre :

$$\frac{i\hbar}{\chi(t)} \frac{\partial \chi(t)}{\partial t} = E \quad (\text{II} - 7.5)$$

$$-\frac{1}{\varphi(\vec{r})} \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \varphi(\vec{r}) + V(r) = E \quad (\text{II} - 7.6)$$

que l'on peut encore écrire :

$$H\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}), \quad H \equiv \frac{\hbar^2}{2M} \Delta + V(r) \quad (\text{II} - 7.7)$$

La solution de l'équation (II - 7.5) s'écrit :

$$\chi(t) = C e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = C e^{-i\omega t} \quad (\text{II} - 7.8)$$

où  $C$  est une constante arbitraire.

En prenant  $C = 1$ , on a immédiatement :

$$\psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{II} - 7.9)$$

L'équation (II - 7.7) est une équation aux valeurs propres. Les valeurs propres de l'opérateur  $H$  sont notées  $E_q$ , et  $\varphi_q(\vec{r})$  les fonctions propres correspondantes. Les propriétés mathématiques de  $H$ ,  $E_q$  et  $\varphi_q(\vec{r})$  permettent de développer  $\varphi(\vec{r})$  sur la base de fonctions constituées par les fonctions propres  $\varphi_q(\vec{r})$  :

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_q c_q \varphi_q(\vec{r}) \quad (\text{II} - 7.10)$$

On indique dans la suite les grandes lignes de la démarche suivie pour déterminer les fonctions propres  $\varphi_q(\vec{r})$  et qui fait apparaître les nombres quantiques conditionnant l'existence de solutions réelles.<sup>98</sup>

On se place en **coordonnées sphériques** de sorte que l'on peut écrire :

$$\varphi_q(\vec{r}) = \varphi_q(r, \theta, \phi); \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \phi < 2\pi \quad (\text{II} - 7.11)$$

En explicitant le laplacien en coordonnées sphériques, l'équation de Schrödinger indépendante du temps (II - 7.7) s'écrit :

---

<sup>98</sup> Se reporter aux ouvrages de mécanique quantique pour un exposé complet de cette résolution ; voir aussi R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, Appendice C.

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \varphi_q(r, \theta, \phi) + \frac{2M}{\hbar^2} [E - V(r)] \varphi_q(r, \theta, \phi) = 0 \quad (\text{II} - 7.12)$$

Comme le potentiel est à symétrie sphérique, on recherche des solutions factorisées de la forme :

$$\varphi_q(r, \theta, \phi) = F(r)G(\theta, \phi) \quad (\text{II} - 7.13)$$

dont l'indice  $q$  sera explicité plus loin.

En remplaçant (II - 7.13) dans (II - 7.12) et en divisant par le produit  $F(r)G(\theta, \phi)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F(r)}{\partial r} \right) + \frac{2Mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] \\ + \frac{1}{G(\theta, \phi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right] \\ = 0 \end{aligned} \quad (\text{II} - 7.14)$$

Cette équation devant toujours être vraie, cela impose :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F(r)}{\partial r} \right) + \frac{2Mr^2}{\hbar^2} [E - V(r)] \\ = - \frac{1}{G(\theta, \phi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right] \\ = \text{constante} \quad (\text{II} - 7.15) \end{aligned}$$

Cette constante est écrite  $l(l+1)$  où  $l$  est un entier, et elle résulte de la résolution de l'équation en  $\theta$  qui est l'équation de Legendre en imposant la contrainte que les solutions sont physiques. On a donc :

$$- \frac{1}{G(\theta, \phi)} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial G(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right] = l(l+1) \quad (\text{II} - 7.16)$$

La signification physique de  $l$  sera également précisée plus loin.

On recherche pour cette équation une solution de la forme :  $G(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , ce qui conduit à l'équation suivante en remplaçant dans (II - 7.16), puis en divisant par le produit  $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$  :

$$\sin^2 \theta \left[ \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1) \right] = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} \quad (\text{II} - 7.17)$$

Cette équation devant toujours être vraie, cela impose :

$$\sin^2 \theta \left[ \frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1) \right] = - \frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = \text{constante} \quad (\text{II} - 7.18)$$

On note  $m^2$  cette constante dont les valeurs seront déterminées ultérieurement ainsi que sa signification physique.

Finalement, l'équation de Schrödinger initiale (II – 7.7) a été décomposée en trois équations différentielles distinctes à résoudre :

▪ **l'équation radiale :**

$$\frac{1}{F(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF(r)}{dr} \right) + \frac{2Mr^2}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2Mr^2} \hbar^2 \right] = 0 \quad (\text{II} - 7.19)$$

▪ **l'équation polaire :**

$$\frac{1}{\Theta(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0 \quad (\text{II} - 7.20)$$

▪ **l'équation azimutale :**

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (\text{II} - 7.21)$$

**Traitement de la partie angulaire :**

L'intégration de (II – 7.21) donne :

$$\Phi(\phi) = e^{\pm im\phi} \quad (\text{II} - 7.22)$$

Compte tenu de l'unicité et de la périodicité de la solution cherchée,  $m$  doit être un **entier** positif, négatif ou nul. On l'appelle **nombre quantique magnétique**. L'équation (II – 7.20) est l'**équation de Legendre**. On montre que si  $l$  est un **entier positif ou nul** et  $l \geq |m|$ , alors il existe une **seule solution finie, continue et physiquement acceptable** pour toutes les valeurs de  $\theta$ . Le nombre  $l$  à valeurs entières positives ou nulles apparaissant dans cette équation est appelé **nombre quantique de moment angulaire**. La **figure 18** ci-dessous



illustre les valeurs autorisées prises par le nombre quantique magnétique  $m$  ( $|m| \leq l$ ) pour la valeur  $l = 2$ .

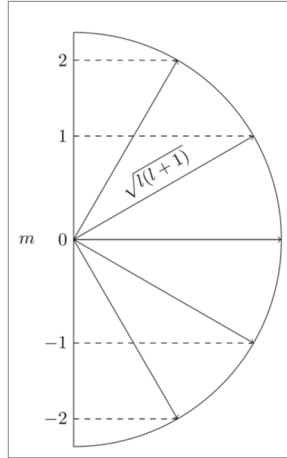


Figure 18. Valeurs autorisées prises par le nombre quantique magnétique  $m$  ( $|m| \leq l$ ) pour la valeur  $l = 2$  :  $m = -2, -1, 0, +1, +2$ .

Pour une valeur donnée de  $l$ , il y a donc  $2l + 1$  valeurs de  $m$ . Pour  $m = 0$ , les solutions de (II – 7.20) sont les **polynômes de Legendre**  $P_l(\cos \theta)$  :

$$\begin{aligned}
 l = 0 \quad P_0(\cos \theta) &= 1 \\
 l = 1 \quad P_1(\cos \theta) &= \cos \theta \\
 l = 2 \quad P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \\
 l = 3 \quad P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\
 \dots \quad \dots
 \end{aligned}$$

Pour  $m \neq 0$  et  $l \geq |m|$ , en posant  $\mu = \cos \theta$ , les solutions de (II – 7.20) sont les **fonctions de Legendre**  $P_l^m(\mu)$  :

$$P_l^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{d\mu^{|m|}} P_l(\mu) \quad (\text{II} - 7.23)$$

La solution angulaire globale  $G(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$  s'écrit donc :

$$G(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) = A_{lm} P_l^m(\mu) e^{\pm im\phi} \quad (\text{II} - 7.24)$$

où  $A_{lm}$  est une constante de normalisation, et  $l = 0, 1, 2, \dots$  et  $|m| \leq l$ .

On constate que  $G(\theta, \phi)$  est une **harmonique sphérique** notée conventionnellement  $Y_l^m(\theta, \phi)$ .

Les harmoniques sphériques ont pour expressions :

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \cos(m\phi) \quad (\text{II} - 7.25)$$

La **figure 19** permet de visualiser les grandeurs  $|Y_l^m(\theta, \phi)|^2$ .

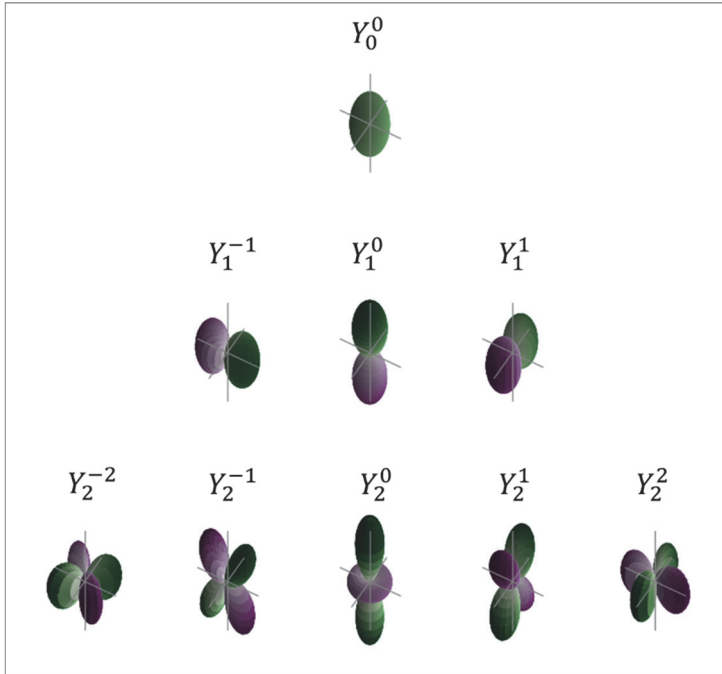


Figure 19. Représentation des carrés des modules des premières harmoniques sphériques.<sup>99</sup>

**Les harmoniques sphériques**  $Y_l^m(\theta, \phi)$  sont donc les fonctions propres de l'opérateur du moment (cinétique) orbital  $\vec{l}^2$  de sorte que l'on peut écrire<sup>100</sup> :

$$\vec{l}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m(\theta, \phi) \quad (\text{II} - 7.25)$$

$$l_z Y_l^m(\theta, \phi) = m\hbar Y_l^m(\theta, \phi) \quad (\text{II} - 7.26)$$

<sup>99</sup> Voir aussi S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH, Germany, 2007, p. 173.

<sup>100</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Tomes I, op. cit., p. 672.

où  $l_z$  est la composante selon l'axe Oz du repère cartésien par rapport auquel le système de coordonnées sphériques a été défini. Cette composante est égale à  $\sqrt{l(l+1)}$  sachant que  $-l \leq m \leq +l$ , comme l'illustre la figure 18 pour la valeur  $l = 2$ .

### Traitement de la partie radiale

Pour résoudre à présent l'équation radiale (II – 7.19) on pose :

$$R(r) = rF(r) \quad (\text{II} - 7.27)$$

L'équation (II – 7.19) devient :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2M}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{l(l+1)}{2Mr^2} \hbar^2 \right] R(r) = 0 \quad (\text{II} - 7.28)$$

$F(r) = R(r)/r$  doit être finie en tout point et s'annuler à l'infini, ce qui impose que  $R(r)$  doit être nulle à l'origine (en  $r = 0$ ), finie en tout point sauf éventuellement à l'infini à condition de croître moins vite que  $r$ .

On observe que l'équation (II – 7.25) est similaire à l'équation relative au mouvement d'une particule dans un potentiel  $U(r)$  défini par la relation (II – 7.26) et représenté sur la figure 20 :

$$U(r) = V(r) + \frac{l(l+1)}{2Mr^2} \hbar^2 \quad (\text{II} - 7.29)$$

On vérifie en effet que le terme :

$$\frac{l(l+1)}{2Mr^2} \hbar^2 \quad (\text{II} - 7.30)$$

a bien la dimension d'une énergie.

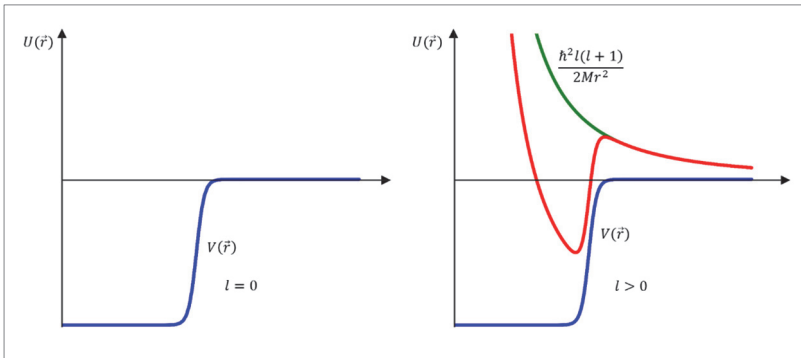


Figure 20. Le potentiel nucléaire  $U(\vec{r})$  et ses composantes nucléaire  $V(\vec{r})$  et centrifuge  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}$  ; pour le moment angulaire nul,  $l = 0$ , la barrière centrifuge est inexistante.

La résolution de l'équation radiale (II – 7.25) avec un potentiel  $V(r)$  harmonique isotrope conduit à la détermination des niveaux d'énergie  $E_n$  :

$$E = E_n = \hbar\omega \left[ l + 2(\nu - 1) + \frac{3}{2} \right] = \hbar\omega \left[ n + \frac{3}{2} \right] \quad (\text{II} - 7.31)$$

avec :

$$n = l + 2(\nu - 1), \quad \nu \geq 1 \quad (\text{II} - 7.32)$$

$\nu$  est un nombre entier, c'est le **nombre quantique radial**.

La relation (II – 7.33) définit le **nombre quantique principal**  $n$ .

La formule (II – 7.32) montre que l'énergie totale,  $E_n$ , du nucléon au sein du noyau atomique est quantifiée.

En reprenant l'expression (2.13), la fonction d'onde  $\varphi_q(\vec{r}) \equiv \varphi_{n,l,m}(\vec{r})$  se réécrit comme :

$$\begin{aligned} \varphi_{n,l,m}(\vec{r}) &\equiv Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= Y_l^m(\theta, \varphi) \exp\left(-\frac{\kappa^2 r^2}{2}\right) r^l (a_0 + a_2(\kappa r)^2 + \dots + a_{n-l}(\kappa r)^{n-l}) \end{aligned} \quad (\text{II} - 7.33)$$

La fonction d'onde totale  $\varphi(\vec{r})$  de la particule est donc, en accord avec (II – 7.10), une combinaison linéaire des fonctions propres  $\varphi_{n,l,m}(\vec{r})$ . On constate que l'indice  $q$  apparaissant dans (II – 7.10) correspond au triplet des nombres quantiques  $(n, l, m)$ .

### Remarque

On doit avoir la condition de normalisation suivante, indiquant que la probabilité de trouver la particule dans tout l'espace est égale à 1 (on rappelle que  $|\varphi(\vec{r})|^2$  s'interprète comme la probabilité de présence de la particule au point  $\vec{r}$  considéré) :

$$\int_{\text{tout l'espace}} |\varphi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1 \quad (\text{II} - 7.34)$$

Les harmoniques sphériques qui décrivent la partie angulaire de la fonction d'onde  $\varphi(\vec{r})$  étant normalisées à l'unité, cela impose pour la partie radiale :

$$\int_0^\infty |F_{n,l}(r)|^2 r^2 dr = 1 \quad (\text{II} - 7.35)$$

Ces relations permettent de déterminer les coefficients  $a_0, a_2$ , etc. du polynôme de l'expression (II – 7.30) de la fonction d'onde associée au nucléon.

Les densités de probabilité  $|\varphi_{n,l,m}(\vec{r})|^2$  correspondant aux fonctions propres  $\varphi_{n,l,m}(\vec{r})$  trouvées prennent des formes variées qui dépendent des valeurs des nombres quantiques  $n, l$  et  $m$ <sup>101</sup> ; une illustration de leur partie radiale est donnée par la **figure 21**.

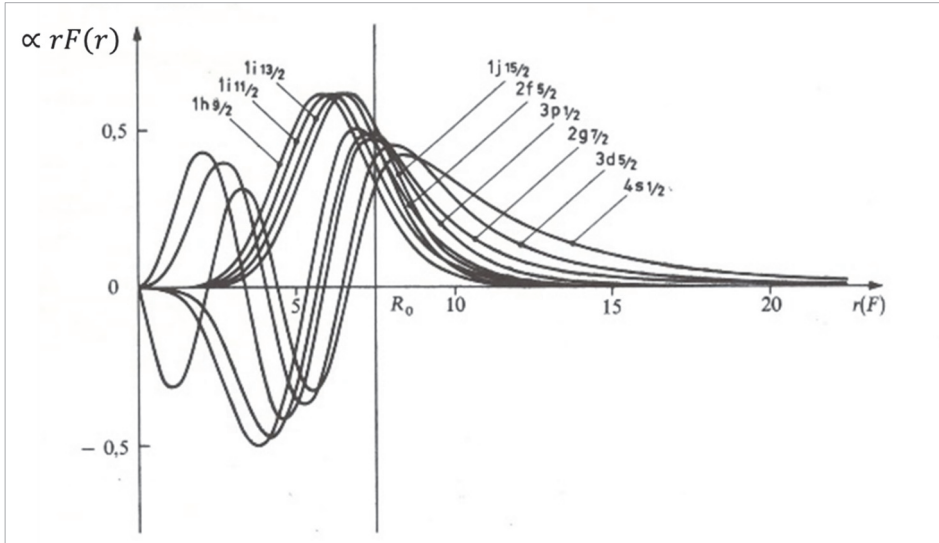


Figure 21. Représentation de la fonction d'onde radiale d'un nucléon en fonction de l'état quantique qu'il occupe.<sup>102</sup>

## 8. Invariance, symétries et lois de conservation<sup>103</sup> – Notion de parité de la fonction d'onde

Dans la nature, il existe des « **symétries continues** »<sup>104</sup> comme la **translation** des variables spatiales, la **rotation** faisant intervenir les variables angulaires ou encore la **translation** dans le temps. L'étude de l'**invariance** ou non des **lois physiques** vis-à-vis de ces **opérations de symétrie** revêt une importance fondamentale. On montre ainsi, par exemple en mécanique lagrangienne, que la **conservation de l'impulsion** découle de l'**uniformité de l'espace**, la **conservation de l'énergie** de l'**uniformité du temps** et la **conservation du moment cinétique** de l'**isotropie de l'espace**. Une conséquence en est la reproductibilité d'une expérience en différents lieux et à des époques différentes.

À côté de ces symétries continues coexistent des « **symétries discrètes** » telles que la « **conjugaison de charge** » (ou « symétrie de charge »,  $\mathbb{C}$ ) qui transforme une charge électrique en son opposée et le « **renversement du temps** » ( $\mathbb{T} : t \rightarrow -t$ ). L'opération de

<sup>101</sup> Voir par exemple : J.-L. Basdevant, J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Éditions de l'École Polytechnique, Palaiseau, 2008, p. 238.

<sup>102</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, op. cit. p. 213.

<sup>103</sup> *Symétries et Physique nucléaire*, École Joliot-Curie de Physique Nucléaire, IN2P3-CEA, 5<sup>e</sup> session, Maubuisson, 15-19 septembre 1986.

<sup>104</sup> F. Laloë, *Symétries continues*, EDPSciences, Les Ulis, 2021.

parité, notée  $\mathbb{P}$  en est une autre. L'opération de parité consiste par exemple en une transformation de la position spatiale  $\vec{r}$  en la position  $-\vec{r}$  et d'examiner son impact sur la fonction d'onde de la particule considérée (ici d'un nucléon du noyau atomique). En termes mathématiques, on caractérise cette opération par un opérateur de parité noté  $\mathbb{P}$  que l'on applique à la fonction d'onde  $\varphi(\vec{r})$  du nucléon ; on peut distinguer les cas de figure suivants :

- $\mathbb{P}\varphi(\vec{r}) = \varphi(-\vec{r}) = \varphi(\vec{r})$  : la fonction d'onde est symétrique, la parité de la particule, ou parité intrinsèque, prend la valeur  $\pi = +1$ , aussi notée « + » ;
- $\mathbb{P}\varphi(\vec{r}) = \varphi(-\vec{r}) = -\varphi(\vec{r})$  : la fonction d'onde est antisymétrique, la parité intrinsèque de la particule prend la valeur  $\pi = -1$ , aussi notée « - ».

On voit sur (II – 7.33) que la partie spatiale (dépendance en  $r^l$ ) de la fonction d'onde ne change pas par une opération de symétrie  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  par rapport à l'origine si  $l$  est pair. Elle change de signe lorsque  $l$  est impair.

L'**opération de parité** peut s'appliquer à d'autres grandeurs physiques comme les **moments angulaires**. Pour les états quantiques associés à un puits de potentiel harmonique, traité plus haut, la parité du moment angulaire est  $(-1)^l$  qui est celle de l'harmonique sphérique  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , composante angulaire de la fonction d'onde. De manière générale, on a vu que la parité d'un système formé de plusieurs particules (*c.-à-d.* le noyau atomique) est égale au produit des parités de ses constituants (voir relation (2.38)).

Il est à noter que le respect des lois de conservation, par exemple la conservation de la parité, induit que toutes les transformations d'un état quantique initial vers un état quantique final ne sont pas possibles. D'où l'application de « **règles de sélection** » qui permettent d'identifier les transitions d'état possibles.

Les physiciens et théoriciens sont conduits à examiner également si des phénomènes physiques tels que la radioactivité ou les réactions nucléaires préservent ou non ces symétries. Si tel n'est pas le cas, on parle alors de « **brisure de symétrie** » ou de « **violation de symétrie** ». Un cas montrant que l'**interaction faible** ne conserve pas la parité est celui de la décroissance radioactive bêta (voir chapitre 5, § 4) du cobalt 60.<sup>105</sup> <sup>106</sup> Dans cet exemple précis, la violation de la parité se manifeste par le constat que les électrons (particules bêta) résultant de la désintégration radioactive du cobalt 60, dans un champ magnétique imposé, sont émis préférentiellement dans la direction opposée à celle du champ magnétique. Un autre exemple emblématique est la brisure de symétrie (ou violation de symétrie) entre **matière** et **antimatière** – « **violation de symétrie  $\mathbb{CP}$**  ») – qui est un problème ouvert quant à l'élucidation de sa cause : serait-elle due aux

<sup>105</sup> [https://indico.in2p3.fr/event/15050/attachments/46322/57877/200610\\_clefs\\_CEA\\_numero\\_54\\_David\\_Lhuillier\\_violation\\_de\\_parite\\_Chien-Shiung\\_Wu.pdf](https://indico.in2p3.fr/event/15050/attachments/46322/57877/200610_clefs_CEA_numero_54_David_Lhuillier_violation_de_parite_Chien-Shiung_Wu.pdf).

<sup>106</sup> T. D. Lee, C. N. Yang, « Question of Parity Conservation in Weak Interactions », *Physical Review* 104, 254-258, 1956, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.104.254>.

<sup>107</sup> C. S. Wu *et al.*, « Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay », *Physical Review* 105, 1413-1415, February 15, 1957, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1413>.

comportements différents respectifs du **neutrino** et de son antiparticule, l'**antineutrino** ?<sup>108</sup>

Une **parité** est aussi affectée en propre à chaque type de particule. On définit arbitrairement la parité intrinsèque de l'électron comme étant paire. Un certain nombre de considérations appuyées sur l'expérience conduisent à attribuer une parité paire au proton, au neutron et au neutrino.

---

<sup>108</sup>[https://www.cnrs.fr/sites/default/files/press\\_info/2020-04/CP%20antimatiere%20neutrinos\\_web.pdf](https://www.cnrs.fr/sites/default/files/press_info/2020-04/CP%20antimatiere%20neutrinos_web.pdf) ; Collaboration T2K, « Constraint on the Matter-Antimatter Symmetry-Violating Phase in Neutrino Oscillations », *Nature*, Vol 580, April 16, 2020, pp. 339-344, <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2177-0>.

### Annexe III : détermination de l'énergie potentielle coulombienne dans le noyau atomique<sup>109</sup>

Dans la formule empirique de masse de Bethe-Weizsäcker, l'énergie coulombienne du noyau atomique contenant  $Z$  protons de charge positive  $e$  est déterminée en admettant que ceux-ci sont répartis de manière uniforme au sein de ce noyau supposé avoir une forme sphérique. La densité de charge électrique du noyau atomique est donc :

$$\rho_c = \frac{Ze}{V_{\text{noyau}}} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi(r_0 A^{1/3})^3} = \frac{3Ze}{4\pi r_0^3 A} \quad (\text{III} - 1)$$

où :

$$R = r_0 A^{1/3} \quad (\text{III} - 2)$$

On considère une sphère chargée de rayon  $r$ , de densité de charge  $\rho_c$ , à laquelle on veut ajouter une couronne élémentaire uniformément chargée,  $dq$ , de même densité de charge :

$$dq = \rho_c 4\pi r^2 dr \quad (\text{III} - 3)$$

Le travail nécessaire pour ajouter  $dq$  depuis l'infini, en concentrant la sphère chargée en son centre, s'écrit :

$$dE_c = \rho_c \frac{4}{3}\pi r^3 (\pi r^2 dr) \frac{1}{r} = \rho_c^2 \frac{4}{3}\pi^2 r^4 dr \quad (\text{III} - 4)$$

En intégrant de 0 à  $R$ , on obtient :

$$E_c = \frac{16}{3 \times 5} \pi^2 \rho_c^2 R^5 \quad (\text{III} - 5)$$

qui correspond à l'énergie potentielle d'interaction coulombienne au sein du noyau atomique.

En remplaçant  $\rho_c$  et  $R$  par leurs expressions respectives (III – 1) et (III – 2), on obtient :

$$E_c = \frac{16}{3 \times 5} \pi^2 \left( \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right)^2 R^5 = \frac{3 Z^2 e^2}{5 R} = \frac{3 Z^2 e^2}{5 r_0 A^{1/3}} \quad (\text{III} - 6)$$

<sup>109</sup> A. E. S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955, p. 283.



# 5

## **Radioactivité et stabilité du noyau atomique**



On a vu dans les précédents chapitres qu'il existe des noyaux atomiques stables et des noyaux atomiques instables : les **radionucléides** ou **radio-isotopes** ou encore **isotopes radioactifs** (voir en particulier chapitre 2, figures 5 à 8). Le terme « **radioactivité** » désigne de manière générique le phénomène par lequel un noyau atomique instable se transforme spontanément en un autre noyau atomique en émettant des rayonnements. La succession de ces transformations aboutit *in fine* à un nucléide situé dans la **vallée de stabilité** (voir chapitre 3). Les **figures 1a et 1b** fournissent une vue schématique globale des différents types de processus radioactifs dont les radionucléides en fonction de leur nature sont le siège.

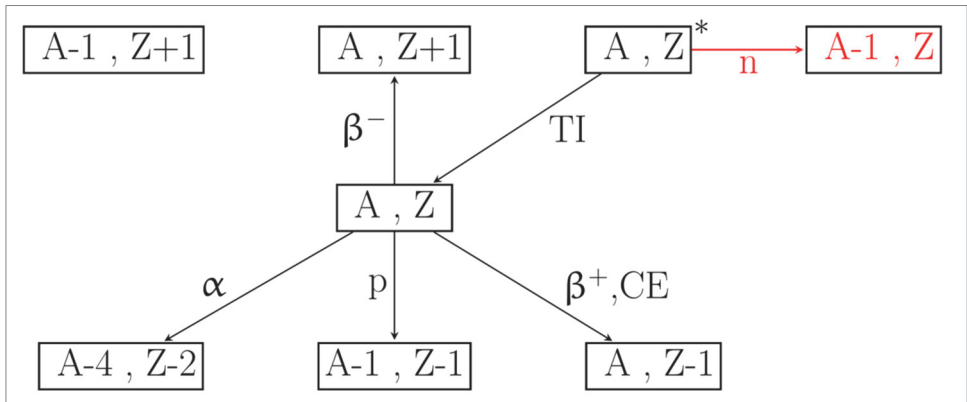


Figure 1a. Les différents modes de décroissance radioactive. Ils s'accompagnent généralement d'une émission gamma. (TI : transition isomérique, p : proton, n : neutron, CE : capture électronique). Les différentes caractéristiques (particules émises, périodes, rapports de branchements, spectres, etc.) de ces modes de décroissance radioactive sont accessibles dans des bases de données telles que la « *Live Chart of Nuclides* » éditée par l'AIEA.<sup>110</sup>

Il convient de rappeler que les **transmutations nucléaires**, qu'elles soient **spontanées** – cas de la **radioactivité** – ou **provoquées** – cas des **réactions nucléaires** qui seront abordées dans la prochaine section – sont soumises aux principes de conservation :

- de l'énergie totale d'un système isolé ou placé dans un champ extérieur constant (donc ne dépendant pas du temps) ;
- de l'impulsion (ou de la quantité de mouvement) ;
- du moment cinétique total ;
- de la charge électrique avant et après le processus physique ;
- de la parité ;
- du spin isotopique.

L'application de ces principes alliée à la prise en compte des caractéristiques de la structure du noyau atomique (voir chapitre 4.) aide à la compréhension du phénomène de transformation nucléaire, et par conséquent à la prédiction du résultat d'un tel processus : nature des particules produites, leurs énergies, etc. Inversement, on a vu sur l'exemple de

<sup>110</sup> <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.



émission  $\alpha$ , fission spontanée, émission  $\beta^-$  et  $\beta^+$ , capture électronique, émission gamma, conversion interne, émission de neutrons. Les deux dernières sections traitent respectivement la « parabole de masse » associée à la radioactivité bêta et le problème de la radioactivité « à deux corps », c'est-à-dire à deux noyaux radioactifs. On trouvera en annexe le traitement des équations de la radioactivité relatives à un nombre quelconque de radionucléides ainsi que des équations de Bateman généralisées c'est-à-dire avec prise en compte des réactions nucléaires induites par un neutron.

## 1. Grandeurs physiques caractéristiques de la radioactivité – Loi de décroissance radioactive

En 1902, E. Rutherford et F. Soddy ont mis en évidence la **loi de décroissance exponentielle** dans la durée de l'« **activité** » d'un corps radioactif.<sup>112</sup> En effet, ils cherchaient à interpréter leurs expériences réalisées sur les éléments appartenant à la famille radioactive du thorium. C'est au mathématicien Harry Bateman (1910) que l'on doit l'établissement du formalisme général de résolution des équations régissant le comportement des **filiales radioactives**, et plus précisément les concentrations des nucléides qui les composent, en fonction du temps, dites **équations de Bateman**.<sup>113</sup> En physique des réacteurs nucléaires, on emploie couramment l'expression « **équations d'évolution** », faisant ainsi référence au combustible nucléaire dont la composition isotopique évolue avec le temps, non seulement par décroissance radioactive des radionucléides présents, mais également par transmutation par réactions nucléaires. Les quatre grandes familles radioactives, celles du thorium, de l'uranium, de l'actinium et du neptunium (artificielle) ont déjà été présentées dans le chapitre 1.

### 1.1. Constante de désintégration radioactive – Activité d'un radionucléide

Soit  $N(\vec{r}, t)$  le nombre de nucléides par unité de volume ( $\text{cm}^{-3}$  par exemple), de même nature, présents en un point donné  $\vec{r}$  du milieu considéré à un instant  $t$  donné : cette grandeur physique  $N(\vec{r}, t)$  est appelée concentration des nucléides concernés au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ . Pour éviter des lourdeurs d'écriture, la variable spatiale  $\vec{r}$  sera omise dans la suite de ce chapitre (sauf dans l'annexe III) et la concentration des nucléides sera simplement notée  $N(t)$ .

On appelle **constante de désintégration totale** la probabilité par unité de temps qu'un atome se désintègre (c'est donc une densité de probabilité), tous processus de décroissance

<sup>112</sup> E. Rutherford, F. Soddy, « Radioactive Change », *Philosophical Magazine and Journal of Science*, article cité chapitre 2 § 3, p. 580-581, <https://doi.org/10.1080/14786440309462960>. Cette loi ouvre la voie à la mise au point de méthodes de datations radiométriques ayant permis, entre autres, de reconsidérer l'âge estimé des roches terrestres et de la Terre proprement dite : E. Rutherford, « Origin of actinium and the age of the earth », *Nature*, vol. 123, 1929, p. 313-314, <https://doi.org/10.1038/123313b0> ; L. Badash, « Rutherford, Boltwood, and the Age of the Earth: The Origin of Radioactive Dating Techniques », *American Journal of Science*, Vol. 112 (3), Jun. 21, 1968, pp. 157-169, <https://www.jstor.org/stable/986161> ; C. Patterson, C., Tilton, G., and Inghram, « Age of the Earth », *Science* 121, 69, January 21, 1955, <https://www.science.org/doi/10.1126/science.121.3134.69>.

<sup>113</sup> H. Bateman, « The solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations », *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, Vol. 15, 1910, pp. 423-427.

radioactive confondus. On la désigne habituellement par la lettre  $\lambda$ . Elle est caractéristique d'un isotope donné. Son unité est l'inverse d'un temps, s'exprimant souvent en  $s^{-1}$ .

### Remarque

Les expressions « **désintégration radioactive** » et « **décroissance radioactive** » sont équivalentes et indifféremment employées ici. Il en est de même pour « constante de décroissance radioactive » et « constante de désintégration radioactive », « loi de décroissance radioactive » et « loi de désintégration radioactive ». Par un raccourci de langage on utilise également les expressions « constante radioactive », « constante de désintégration », « constante de décroissance » qui se rapportent aux phénomènes de radioactivité ou de désexcitation du nucléide concerné. Le terme de « **transition** » (transition alpha, transition bêta, transition gamma...) est également employé, caractérisant au cours de ces transformations radioactives le passage d'un état quantique initial à un état quantique final des nucléides concernés. Le choix des termes utilisés est dicté par le contexte.

Le produit  $A(t) = \lambda N(t)$  représente le nombre de désintégrations qui se sont produites par unité de volume et par unité de temps au temps  $t$  en un point donné de l'espace. On appelle  $A(t)$  l'**activité** du nucléide considéré.

L'unité d'activité est le **becquerel** : 1 désintégration par seconde. Cependant, l'ancienne unité, le **curie** (Ci), reste parfois en usage :  $1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10}$  désintégrations par seconde.

On considère un intervalle de temps élémentaire  $dt$  et l'on écrit la variation  $dN$  du nombre d'isotopes  $N(t)$  durant cette durée :

$$dN = -\lambda N(t)dt \quad (1.1)$$

On en déduit immédiatement par intégration :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{unités : cm}^{-3} \quad (1.2a)$$

où  $N_0$  est le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant initial  $t_0$  :  $N(t_0) = N_0$ .

L'activité correspondante s'exprime donc comme :

$$A(t) = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{unités : cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (1.2b)$$

On a supposé ici qu'il n'y avait pas d'apports extérieurs de noyaux nouveaux ni d'autres phénomènes (réactions nucléaires) que celui de la décroissance radioactive des noyaux atomiques du type initialement considéré.

### Remarque

Les expressions (1.2a) et (1.2b) peuvent tout à fait s'appliquer à des volumes définis de matière, au quel cas il s'agirait respectivement d'un nombre de nucléides et d'un nombre de désintégrations par unité de temps :  $N(t)$  et  $A(t)$  seraient des grandeurs physiques intégrées en espace.

1.2. Période

La **période de décroissance radioactive**  $T$ , ou « **demi-vie** » (*half-life*), est la durée à l'issue de laquelle le nombre initial  $N_0$  de noyaux du radionucléide considéré est divisé par 2 :

$$N(t = T) = N_0 e^{-\lambda T} = \frac{N_0}{2} \tag{1.3}$$

On en déduit :

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \tag{1.4}$$

Les périodes couvrent une plage de temps très vaste allant par exemple de  $10^{-22}$ s (cas du fluor 15) à 4,5 milliards d'années (cas de l'uranium 238).

1.3. Vie moyenne

La vie moyenne  $\tau$  d'un nucléide est obtenue en écrivant :

$$\tau = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{1.5}$$

et

$$\tau = \frac{T}{\ln 2} = \frac{T}{0,693} = 1,44 T \tag{1.6}$$

car  $f(t)dt = e^{-\lambda t} \lambda dt$  représente la probabilité pour un noyau radioactif d'être encore présent à l'instant  $t$ , puis de se désintégrer entre  $t$  et  $t + dt$  ;  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$  est la densité de probabilité de désintégration du noyau atomique à l'instant  $t$ ,  $\lambda$  s'interprétant comme la densité de probabilité de désintégration par unité de temps.<sup>114</sup>

Exemple

Le **tableau 1** rassemble les constantes de décroissance radioactive de quelques radionucléides.

**Tableau 1. Exemples de valeurs de constante de décroissance radioactive, de période ou demi-vie et de vie moyenne de radionucléides.**

	Constante de décroissance radioactive $\lambda$	Période radioactive ou demi-vie $T$	Vie moyenne $\tau$
Tritium : ${}^3_1\text{H}$ ou ${}^3_1\text{T}$	$1.78 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$ $\cong 5.61 \cdot 10^{-2} \text{ ans}^{-1}$	$3.89 \cdot 10^8 \text{ s}$ $\cong 12.32 \text{ ans}$	$5.61 \cdot 10^8 \text{ s} \cong 17.8 \text{ ans}$
Béryllium 8 : ${}^8_4\text{Be}$	$8.46 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$	$8.19 \cdot 10^{-17} \text{ s}$	$1.18 \cdot 10^{-16} \text{ s}$

<sup>114</sup> Remarque :  $\int_0^{\tau=\frac{1}{\lambda}} \lambda dt = 1$  ; on admet que  $\lambda$  est indépendante du temps : S. Pommé *et al.*, « Is decay constant? », *Applied Radiation and Isotopes* 134, 6, 2018, <https://doi.org/10.1016/j.apradiso.2017.09.002>.

Carbone 14 : $^{14}_6\text{C}$	$5.55 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$ $\cong 1.21 \cdot 10^{-4} \text{ ans}^{-1}$	$1.8 \cdot 10^{11} \text{ s}$ $\cong 5730 \text{ ans}$	$2.6 \cdot 10^{11} \text{ s} \cong 8268 \text{ ans}$
Azote 16 : $^{16}_7\text{N}$	$9.719 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$	$7.13 \text{ s}$	$10.29 \text{ s}$
Iode 131 : $^{131}_{55}\text{I}$	$1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ $\cong 8.64 \cdot 10^{-2} \text{ jours}^{-1}$	$6.93 \cdot 10^5 \text{ s}$ $\cong 8.02 \text{ jours}$	$1 \cdot 10^6 \text{ s} \cong 11.57 \text{ jours}$
Uranium 238 : $^{238}_{92}\text{U}$	$4 \cdot 9^{-18} \text{ s}^{-1}$ $\cong 1.55 \cdot 10^{-10} \text{ ans}^{-1}$	$1.41 \cdot 10^{17} \text{ s}$ $\cong 4.468 \cdot 10^9 \text{ ans}$	$2.03 \cdot 10^{17} \text{ s}$ $\cong 6.447 \cdot 10^9 \text{ ans}$

1.4. Rapport de branchement

Il faut noter que des radionucléides possèdent plusieurs modes de désintégration en compétition. La constante de désintégration est une grandeur additive. Si un noyau atomique donné présente plusieurs modes  $i$  de décroissance radioactive possibles, chacun caractérisé par sa constante de désintégration  $\lambda_i$ , alors la constante de désintégration totale  $\lambda$  de ce noyau s'écrit :

$$\lambda = \sum_i \lambda_i$$

(1.7)

Le rapport de branchement  $\eta_i$ , relatif au mode de décroissance  $i$ , est défini par le rapport :

$$\eta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

(1.8)

Remarque

Avec (1.4), l'expression (1.7) se réécrit :

$$\frac{\ln 2}{T} = \sum_i \frac{\ln 2}{T_i} \Rightarrow \frac{1}{T} = \sum_i \frac{1}{T_i}$$

(1.9)

Par conséquent, les périodes de désintégration radioactive partielles ne sont pas additives contrairement aux constantes de désintégration radioactive correspondantes. Ainsi pour  $i = 2$ , on a :

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \Leftrightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \Rightarrow T = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

(1.10)

Exemple

La **figure 2** montre deux phénomènes radioactifs en compétition : la capture électronique (CE, voir § 5) et la désintégration alpha ( $\alpha$ , voir § 2) du curium 243 ( $^{243}_{96}\text{Cm}$ ).



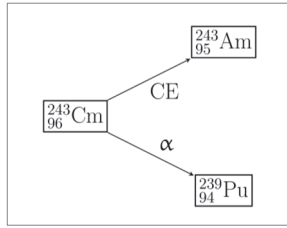


Figure 2. Décroissances radioactives concurrentes du curium 243,  $^{243}_{96}\text{Cm}$  : capture électronique (CE) et émission d'une particule alpha ( $\alpha$ , noyau d'hélium 4).

Les constantes de désintégration et rapport de branchement respectifs sont :

$$\lambda = 7,549 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1} \Rightarrow T = \frac{0.693}{7,549 \cdot 10^{-10}} = 9.18 \cdot 10^8 \text{ s} = 29.1 \text{ années}$$

$$\lambda = \lambda_{\alpha} + \lambda_{\text{CE}}$$

$$\lambda_{\alpha} = 7,527 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1} \quad \eta_{\alpha} = \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda} = 99.71 \cdot 10^{-2}$$

$$\lambda_{\text{CE}} = 2.189 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1} \quad \eta_{\text{CE}} = \frac{\lambda_{\text{CE}}}{\lambda} = 0.29 \cdot 10^{-2}$$

Les périodes partielles correspondantes sont :

$$T_{\alpha} = \frac{\ln 2}{\lambda_{\alpha}} = \frac{0.693}{7,527 \cdot 10^{-10}} = 9.2 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 29.19 \text{ années}$$

$$T_{\text{CE}} = \frac{\ln 2}{\lambda_{\text{CE}}} = \frac{0.693}{2.189 \cdot 10^{-12}} = 3.165 \cdot 10^{11} \text{ s} \approx 10839 \text{ années}$$

En toute rigueur, il faudrait ajouter la fission spontanée (voir § 3). La probabilité de ce processus est très faible ; en effet, les valeurs suivantes respectivement du rapport de branchement  $\eta_{\text{fs}}$  de la constante de désintégration  $\lambda_{\text{fs}}$  et de la période radioactive  $T_{\text{fs}}$  sont :

$$\eta_{\text{fs}} = \frac{\lambda_{\text{fs}}}{\lambda} = 5.3 \cdot 10^{-11}, \quad \lambda_{\text{fs}} = 3.857 \cdot 10^{-20} \text{ s}^{-1},$$

$$T_{\text{fs}} = \frac{\ln 2}{\lambda_{\text{fs}}} = \frac{0.693}{3.857 \cdot 10^{-20}} = 1.79 \cdot 10^{19} \text{ s} \approx 5.69 \cdot 10^{11} \text{ années} !$$

On verra que la fission spontanée ne doit pas toujours être négligée dans le contexte des réacteurs nucléaires.

Il est à noter que les processus de désintégration sont le plus souvent accompagnés de l'émission de rayonnements gamma, participant ainsi à la désexcitation du noyau radioactif : en effet, cette transformation nucléaire débouche généralement sur l'un des niveaux excités du noyau atomique fils, qui ensuite se désexcite en des temps très brefs (de l'ordre de la nanoseconde, picoseconde, femtoseconde...).

Des exceptions existent cependant parmi lesquelles le tritium, le béryllium 10, le carbone 14, le silicium 32 et le calcium 41.

## 2. La radioactivité alpha ( $\alpha$ )

La radioactivité alpha ou désintégration alpha identifiée par Ernest Rutherford<sup>115</sup> est du type :



### 2.1. Mécanisme d'émission de particules $\alpha$

Son mécanisme trouve une explication dans les théories de George Gamow<sup>116</sup>, Ronald Wilfred Gurney et Edward Uhler Condon<sup>117</sup> (1929) et a fait l'objet par la suite de plusieurs études théoriques<sup>118</sup>. L'émission  $\alpha$ , qui s'interprète dans le cadre de la mécanique quantique, résulte du franchissement de la barrière de potentiel nucléaire par « **effet tunnel** » de l'ensemble de nucléons  ${}_2^4\text{He}$ . Une approche adoptée pour déterminer la constante de désintégration radioactive consiste à représenter le potentiel nucléaire d'un noyau atomique comportant  $Z$  protons par un modèle simple de « puits » carré à symétrie sphérique dans lequel se trouve plongé le groupement de quatre nucléons (2 protons, 2 neutrons) (voir **figure 3**) :

- pour  $r \leq R_c$ , donc à l'intérieur du noyau atomique, le potentiel nucléaire est constant :

$$U(r) = U_0 \quad (2.2)$$

- pour  $r > R_c$ , donc à l'extérieur du noyau atomique, la particule  $\alpha$  formée ressent le champ coulombien :

$$U(r) = \frac{2eZ}{r} \quad (2.3)$$

<sup>115</sup> E. Rutherford, T Royds, « The Nature of the  $\alpha$  Particle from Radioactive Substances », *Philosophical Magazine* 17, 1909, pp. 281-286, <https://doi.org/10.1080/14786440208636599>.

<sup>116</sup> G. Gamow, « Zur Quantentheorie des Atomkernes », *Zeitschrift für Physik*, Vol. 51, 1928, pp. 204-212, <https://doi.org/10.1007/BF01343196>.

<sup>117</sup> R. W. Gurney, E. U. Condon, « Quantum Mechanics and Radioactive Disintegration », *Physical Review* 33, 127, February 1, 1929, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.33.127>.

<sup>118</sup> Voir par exemple : M. A. Preston, « The Theory of Alpha-Radioactivity », *Physical Review* 71, June 15, 1947, pp. 865-877, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.865>.

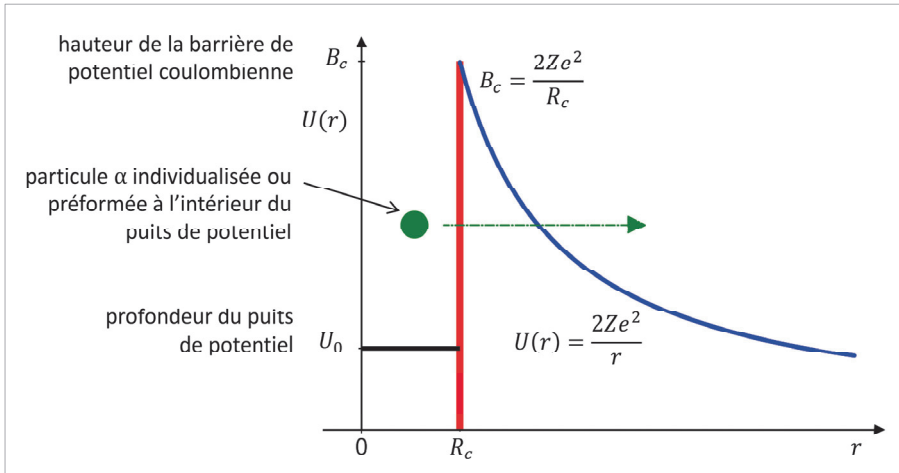


Figure 3. Mécanisme d'émission d'une particule alpha selon la théorie de Gamow, Gurney et Condon<sup>119</sup> : franchissement de la barrière coulombienne par « effet tunnel » (ligne pointillée verte).

La probabilité d'émission d'une particule  $\alpha$  par unité de temps ou constante de désintégration  $\lambda_\alpha$ , est alors donnée par le produit du nombre de fois par unité de temps  $n_c$ , où le groupement des quatre nucléons se présente à la frontière du puits de potentiel  $U_0$  en  $r = R_c$ , par le facteur de transmission  $T_G$  de la particule  $\alpha$  à travers la barrière de potentiel nucléaire.<sup>120</sup> Celui-ci résulte de la résolution de l'équation de Schrödinger relative à la particule  $\alpha$  traversant la barrière de potentiel. On a donc :

$$\lambda_\alpha = p_f n_c T_G \quad (2.4)$$

où  $p_f$  est la probabilité que se préforme une particule  $\alpha$  dans le noyau atomique considéré (par exemple  $p_f = 0.1$ ).

### • Détermination du terme $n_c$

Le nombre de fois par unité de temps,  $n_c$ , où le groupement des quatre nucléons se présente à la frontière du puits de potentiel  $U_0$  en  $r = R_c$  peut être estimé par le rapport de la vitesse  $v_{\alpha, \text{int}}$  de la particule  $\alpha$  préformée au sein du noyau atomique à la dimension caractéristique du noyau  $2R_c$  :

$$n_c = \frac{v_{\alpha, \text{int}}}{2R_c} \quad (2.5)$$

<sup>119</sup> D'après R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, p. 682, Figure 9. ; W. E. Meyerhof, *Éléments de physique nucléaire*, Dunod, Paris, 1970, p. 154.

<sup>120</sup> P. Falk-Vairant, *Contribution à l'étude des schémas de désintégration de quelques émetteurs  $\alpha$* , Thèse de doctorat, Faculté des sciences de l'Université de Paris, 17 juin 1953.

La vitesse  $v_{\alpha,\text{int}}$  est estimée en supposant que la particule  $\alpha$  préformée se trouve dans un état stationnaire dans un puits de potentiel nucléaire de profondeur infinie, ce qui implique que la longueur d'onde  $\lambda_{\alpha,\text{int}}$  associée à cette pré-particule  $\alpha$  a pour expression :

$$\lambda_{\alpha,\text{int}} = 2R_c \quad (2.6)$$

Or, la relation de de Broglie appliquée à la particule  $\alpha$  s'écrit :

$$\lambda_{\alpha,\text{int}} = \frac{h}{p_{\alpha,\text{int}}} = \frac{h}{M_\alpha v_{\alpha,\text{int}}} \quad (2.7)$$

La vitesse  $v_{\alpha,\text{int}}$  se déduit de (2.6) et (2.7) :

$$v_{\alpha,\text{int}} = \frac{h}{2R_c M_\alpha} = \frac{\pi \hbar}{R_c M_\alpha} \quad (2.8)$$

### Exemple

Pour  $R_c = 8 \text{ fm}$  :

$$v_{\alpha,\text{int}} \approx \frac{3.14 \times 1.054 \cdot 10^{-34}}{8 \cdot 10^{-15} \times 6.64 \cdot 10^{-27}} \approx 6.2 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$$

L'énergie cinétique correspondante est  $E_{\alpha,\text{int}} = 0.8 \text{ MeV}$  qui est un ordre de grandeur.

On obtient par la relation (2.5) :

$$n_c = \frac{v_{\alpha,\text{int}}}{2R_c} = \frac{6.2 \cdot 10^6}{16 \times 10^{-15}} \approx 4 \cdot 10^{20} \text{ fois s}^{-1}$$

### Remarque

L'inverse de  $n_c$ ,  $\tau_c$ , est le temps séparant deux « impacts » successifs contre les « murs » du puits de potentiel :

$$\tau_c = \frac{1}{n_c} = 2.5 \cdot 10^{-21} \text{ s}$$

### • Détermination du facteur $T_G$

Dans le cadre de ce modèle, on montre que pour une énergie cinétique  $E_\alpha$  de la particule  $\alpha$  émise (voir **figure 3**), le coefficient de transmission  $T_G$  correspondant s'écrit :

$$T_G \simeq e^{-Y} \quad (2.9a)$$

$$Y = \frac{8\pi Zze^2}{hV} \left[ \arccos \left( \frac{E}{B_c} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{E}{B_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left( 1 - \frac{E}{B_c} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.9b)$$

où :

- $E = \frac{1}{2}MV^2$  : énergie cinétique de la particule relative de masse réduite  $M$  correspondant au couple particule  $\alpha$  et noyau résiduel et de vitesse  $V$ .
- $B_c$  : hauteur de la barrière potentiel nucléaire en  $r = R_c$  :

$$B_c = \frac{Zze^2}{R_c} (\text{C}^2 \text{ m}^{-1}) \rightarrow B_c = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 R_c} (\text{J}) \quad (2.10)$$

### Exemple

Pour le curium 244 émetteur de particules  $\alpha$  on a dans différentes unités :

$$B_c = \frac{Zze^2}{R_c} = \frac{94 \times 2 \times (1.602 \cdot 10^{-19})^2}{7.6 \cdot 10^{-15}} = 6.35 \cdot 10^{-22} \text{ C}^2 \text{ m}^{-1}$$

$$B_c = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0 R_c} = \frac{94 \times 2 \times (1.602 \cdot 10^{-19})^2}{4 \times 3.14 \times 8.854 \cdot 10^{-12} (\text{C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}) \times 7.6 \cdot 10^{-15}} = 5.71 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$B_c = \frac{5.71 \cdot 10^{-12}}{1.602 \cdot 10^{-13} (\text{J MeV}^{-1})} = 35 \text{ MeV}$$

Dans le cas des ondes « s » (moment angulaire  $l = 0$ ) de la particule  $\alpha$  à la fois à l'intérieur du noyau et à l'extérieur, on obtient :

$$\Upsilon \simeq \frac{4\pi^2 Zze^2}{hV} - \frac{8\pi}{h} \sqrt{2Zze^2 MR_c} \quad (2.11)$$

Dans le cas d'une barrière de potentiel très haute, c'est-à-dire lorsque  $R_c$  tend vers 0, le second terme devient négligeable et le coefficient de transmission  $T_G$  devient :

$$T_G \equiv G \simeq \exp \left[ -\frac{4\pi^2 Zze^2}{hV} \right] \quad (2.12)$$

appelé **facteur de Gamow**.

Dans la littérature, on l'exprime également en fonction de la **constante de structure fine**, facilitant les calculs numériques :

$$\frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (2.13)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière. Ainsi, en posant  $\beta = V/c$ , on a :

$$G \simeq \exp \left[ -\pi \frac{2Zz}{137\beta} \right] \quad (2.14)$$

On voit immédiatement que la barrière de potentiel nucléaire est infranchissable si :

$$\frac{2Zz}{137\beta} \gg 1 \quad (2.15)$$

Le second terme de (2.11) permet d'étudier la variation de la probabilité de transmission à travers la barrière de potentiel en fonction du rayon du noyau atomique : cette probabilité augmente avec la dimension du noyau atomique, ce qui est conforme aux observations expérimentales.

La **figure 4** illustre l'impact de la présence de la barrière centrifuge associée à l'existence de moments orbitaux non nuls, elle accroît la hauteur de la barrière d'un facteur :

$$\frac{l(l+1)}{2Mr^2} \hbar^2 \quad (2.16)$$

Comme elle varie en  $1/r^2$ , elle voit son impact s'amenuiser pour devenir négligeable à partir de valeurs suffisamment élevées de  $r$ .

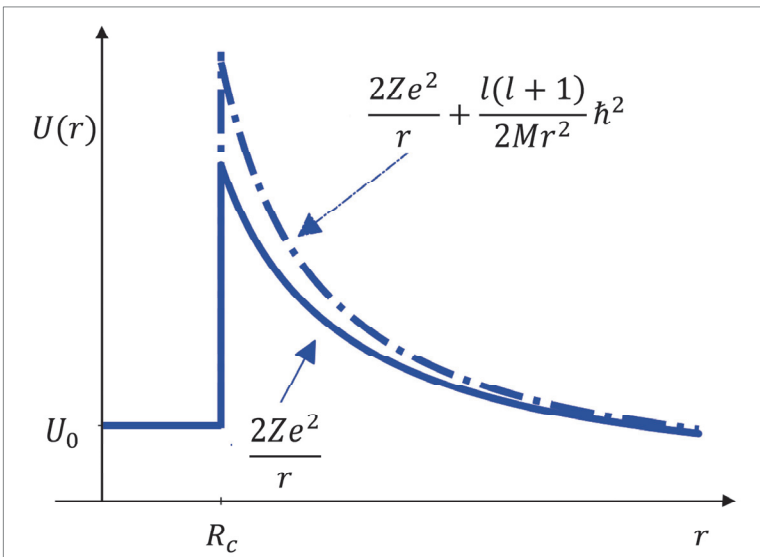


Figure 4. Barrière coulombienne et barrière centrifuge.<sup>121</sup>

Plusieurs formules semi-empiriques ont été proposées pour déterminer les périodes des émetteurs  $\alpha$ . On peut montrer qu'elles reviennent à utiliser un développement au 1<sup>er</sup> ordre de (2.9a).

<sup>121</sup> D'après D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 685, figure 10.

## 2.2. La loi de Geiger-Nuttall

Elle a été établie antérieurement aux travaux de George Gamow, par Hans Geiger et John Mitchell Nuttall<sup>122 123</sup> à partir de résultats expérimentaux, reliant la période de décroissance radioactive alpha,  $T = \ln 2 / \lambda$ , à l'énergie cinétique  $E_\alpha$  de la particule  $\alpha$  émise :

$$\ln T = 2,3 \left( a + \frac{b}{\sqrt{E_\alpha}} \right) \quad (2.17)$$

où  $a = a(Z)$  et  $b = b(Z)$  sont des constantes paramétrées par le numéro atomique  $Z$  de la série isotopique considérée et lissées sur les données expérimentales.

Elle dérive du lien établi entre le parcours des particules  $\alpha$  dans la matière et la constante de désintégration d'une substance radioactive donnée. En effet, H. Geiger a corrélié (« règle de Geiger ») ce parcours à l'énergie initiale,  $E_\alpha$ , de la particule  $\alpha$ .

### Remarque

Dans la littérature, on trouve souvent la relation (2.17) écrite sous la forme :

$$\ln T = 2,3 \left( a + \frac{b}{\sqrt{Q_\alpha}} \right) \quad (2.18)$$

où l'énergie disponible de la désintégration  $\alpha$ ,  $Q_\alpha$ , est substituée à l'énergie cinétique  $E_\alpha$ .

On note dès à présent que plus  $Q_\alpha$  (ou  $E_\alpha$ ) est grande plus la période  $T$  est courte, ainsi que l'extrême sensibilité de  $T$  à  $Q_\alpha$ .

### Exemple

**Période de décroissance radioactive des isotopes du thorium  $^{232}_{90}\text{Th}$  et  $^{224}_{90}\text{Th}$  :**

$^{232}_{90}\text{Th}$  :  $Q_\alpha = 4.1 \text{ MeV}$  ;  $T = 1,4110^{10} \text{ ans}$

$^{224}_{90}\text{Th}$  :  $Q_\alpha = 7.4 \text{ MeV}$  ;  $T = 1,05 \text{ s}$

## 2.3. La formule de Viola-Seaborg

En disposant de plus de mesures et en prenant en compte quelques propriétés quantiques des nucléons au sein du noyau atomique, Victor Viola et Glenn Seaborg<sup>124</sup> améliorent la

<sup>122</sup> H. Geiger, J. M. Nuttall, « The ranges of the  $\alpha$  particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation », *Philosophical Magazine*, Series 6, Vol. 22, 130, 1911, pp. 613-621, <https://doi.org/10.1080/14786441008637156>.

<sup>123</sup> H. Geiger, J. M. Nuttall, « The ranges of  $\alpha$  particles from uranium », *Philosophical Magazine*, Series 6, Vol. 23, 135, 1912, pp. 439-445, <https://doi.org/10.1080/14786440308637238>.

<sup>124</sup> V. E. Viola, G. T. Seaborg, « Nuclear systematics of the heavy elements II - Lifetimes for alpha, beta and spontaneous fission decay », *Journal of Inorganic and Nuclear Chemistry* 28, 1966, pp.741-760, [https://doi.org/10.1016/0022-1902\(66\)80412-8](https://doi.org/10.1016/0022-1902(66)80412-8). L'établissement de « systématiques » telles que (2.19) fait intervenir la notion d'« hindrance factor » qui se rapporte au fait que l'émission  $\alpha$  peut amener le noyau atomique

formule originelle de Geiger-Nuttall. Sa forme est voisine de (2.18), mais avec des termes supplémentaires ou correctifs :

$$\log T \text{ (s)} = \frac{a(Z)}{\sqrt{Q_{\alpha, \text{eff}} \text{ (MeV)}}} + b(Z) + \log F \quad (2.19)$$

dont les constantes sont ajustées sur les données expérimentales relatives aux noyaux atomiques :

- $84 \leq Z \leq 98$  et  $N > 126$ 
  - $a(Z) = 2.11329 Z - 48.9879$
  - $b(Z) = -0.390040 Z - 16.9543$
  - $\langle \log F \rangle$  : 1.066 pour les noyaux  $Z$  pair –  $N$  impair ; 0.772 pour les noyaux  $Z$  impair –  $N$  pair et 1.114 pour  $Z$  impair –  $N$  impair ; 0 pour les noyaux pair-pair ;
- $N < 126$ 
  - $a(Z) = 2.42151 Z - 62.3848$
  - $b(Z) = -0.59015 Z - 4.2109$
  - $\langle \log F \rangle$  : 0.560 pour tous les noyaux autres que noyaux pair-pair pour lesquels  $\log F = 0$  ;
- $Q_{\alpha, \text{eff}}$  représente la somme de l'énergie cinétique  $E_{\alpha}$  de la particule  $\alpha$  émise, de l'énergie cinétique de l'atome de recul et enfin d'un terme correctif d'« écran » associé au cortège électronique.<sup>125</sup>

Les **figures 5 et 6** montrent les « systématiques » obtenues pour  $\log T$  défini par (2.19) illustrant la tendance précédemment mentionnée de la diminution de la période radioactive des noyaux atomiques émetteurs  $\alpha$  avec l'augmentation de l'énergie disponible  $Q_{\alpha}$  (ou  $Q_{\alpha, \text{eff}}$ ) et donc de  $E_{\alpha}$ .

---

résultant à être formé non pas dans son état fondamental, mais dans un état excité : voir C. J. Gallagher Jr, J. O. Rasmussen, « Alpha-decay hindrance-factor calculations », *Journal of Inorganic and Nuclear Chemistry*, Vol. 3, Issue 6, January 1957, pp. 333-344, p. 333, [https://doi.org/10.1016/0022-1902\(57\)80038-4](https://doi.org/10.1016/0022-1902(57)80038-4).

<sup>125</sup> *Ibid.*, p. 333.



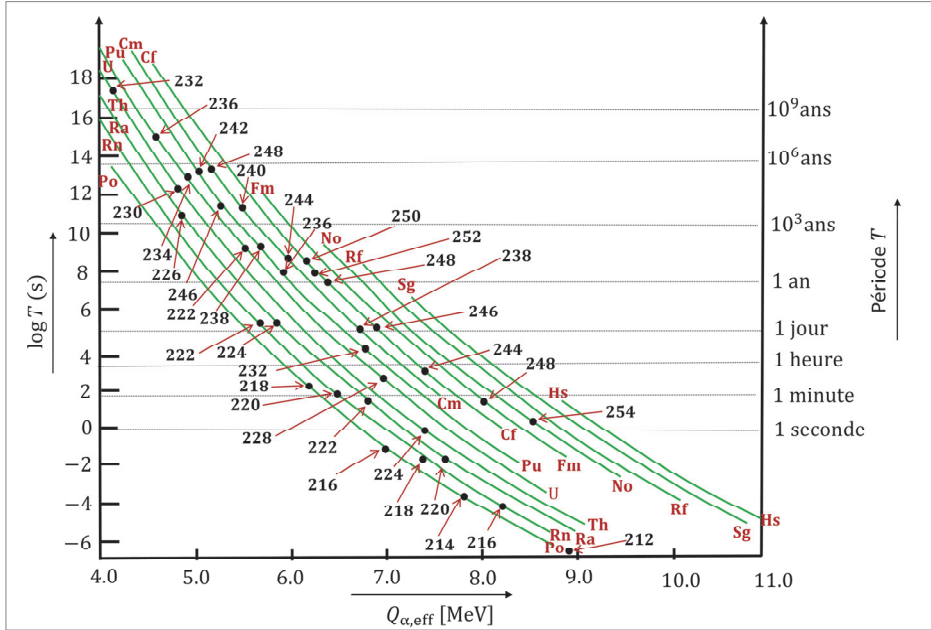


Figure 5. Logarithme à base 10 des périodes des noyaux atomiques pair-pair émetteurs  $\alpha$ , de nombre de neutrons  $N > 126$ , en fonction de l'énergie  $Q_{\alpha,\text{eff}}$  mise en jeu dans une désintégration  $\alpha$  (voir relation (2.19)). Les points approximativement positionnés et associés à des valeurs du nombre de masse  $A$  correspondent à des données expérimentales.<sup>126</sup>

<sup>126</sup> D'après V. E. Viola, G. T. Seaborg, *op. cit.*, figure 1, p. 745.

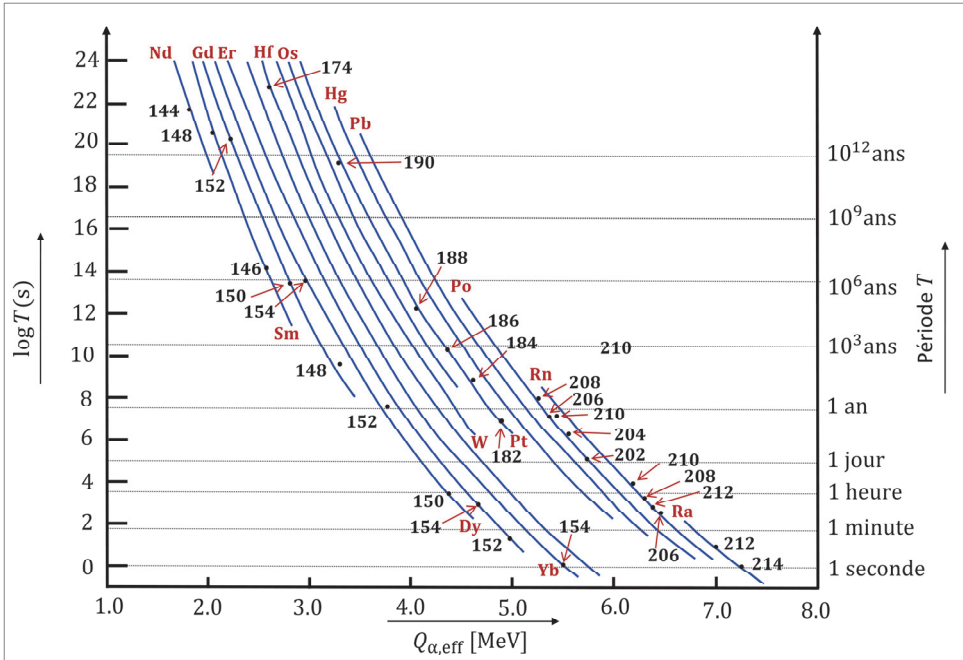


Figure 6. Logarithme à base 10 des périodes des noyaux atomiques pair-pair émetteurs  $\alpha$  possédant un nombre de neutrons  $N < 126$ , en fonction de l'énergie  $Q_{\alpha, \text{eff}}$  mise en jeu dans une désintégration  $\alpha$  (voir relation (2.19)). Les points approximativement positionnés et associés à des valeurs du nombre de masse  $A$ , correspondent à des données expérimentales.<sup>127</sup>

Ces systématiques continuent d'être affinées, par exemple en prenant en compte les effets de **magie**<sup>128</sup>, et visant, entre autres, à en étendre leur domaine d'application aux noyaux superlourds<sup>129 130</sup>. Des travaux sont entrepris pour mieux cerner le domaine de validité de la loi de Geiger-Nuttall<sup>131</sup> et pour tenter de la généraliser<sup>132</sup>.

### Remarque

Un mode de désintégration radioactive consistant en l'**émission concomitante de deux particules  $\alpha$**  dans deux directions opposées a été prédit par des simulations numériques ayant porté sur le

<sup>127</sup> D'après V. E. Viola, G. T. Seaborg, *op. cit.*, figure 2, p. 746.

<sup>128</sup> J. Dechargé, L. Pangault, *Une formule semi-empirique de la période alpha des noyaux pair-pair*, Rapport CEA-R-5672, 1994.

<sup>129</sup> H. Koura, « Phenomenological formula for alpha-decay half-lives », *Journal of Nuclear Science and Technology*, 49:8, 2012, pp. 816-823, <https://doi.org/10.1080/00223131.2012.704158>.

<sup>130</sup> A. I. Budaca, R. Budaca, I. Silisteanu, « Extended systematics of alpha decay half-lives for exotic superheavy nuclei », *Nuclear Physics A* Vol. 951, July 2016, pp. 60-74, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2016.03.048>.

<sup>131</sup> C. Qi, *et al.*, « On the validity of the Geiger-Nuttall alpha-decay law and its microscopic basis », *Physics Letters B* 734, 2014, pp. 203-206, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.05.066>.

<sup>132</sup> C. Qi, R. J. Liotta, R. Wyss, « Generalization of the Geiger-Nuttall law and alpha clustering in heavy nuclei », *Journal of Physics: Conference Series* 381, 012131, 2012, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/381/1/012131/pdf>.

polonium 212 et le radium 224.<sup>133</sup> Leurs périodes radioactives estimées sont de l'ordre de  $10^{33}$  ans expliquant la difficulté d'une mise en évidence expérimentale, et qui contrastent avec celle du béryllium 8 d'environ  $10^{-16}$  s.

Dans la suite, on reprend les notations des chapitres 3 et 4 relatives à un nucléide  ${}^A_ZX$  et désignant sa masse atomique,  $M({}^A_ZX)$ , son énergie de liaison,  $B({}^A_ZX)$ , ainsi que l'énergie disponible,  $Q$ , d'un processus nucléaire auquel il est soumis tel que la désintégration radioactive.

#### 2.4. Aspects énergétiques de l'émission $\alpha$

La transition du type :  ${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2\text{He}$  est possible si  $Q_\alpha > 0$ , soit si :

$$Q_\alpha = M({}^A_ZX)c^2 - [M({}^{A-4}_{Z-2}Y)c^2 + M({}^4_2\text{He})c^2] > 0 \quad (2.20)$$

En utilisant la définition de la masse atomique, on a :

$$\begin{aligned} Q_\alpha = [ZM_Hc^2 + (A - Z)M_nc^2 - B({}^A_ZX)] \\ - \{[(Z - 2)M_Hc^2 + ((A - 4) - (Z - 2))M_nc^2 - B({}^{A-4}_{Z-2}Y)] \\ + [2M_Hc^2 + 2M_nc^2 - B({}^4_2\text{He})]\} \end{aligned}$$

$$Q_\alpha = -B({}^A_ZX) + B({}^{A-4}_{Z-2}Y) + B({}^4_2\text{He}) \quad (2.21a)$$

Le critère  $Q > 0$  posé dans l'introduction se réduit donc ici à une condition sur les énergies de liaison :

$$Q_\alpha > 0 \Leftrightarrow B({}^{A-4}_{Z-2}Y) + B({}^4_2\text{He}) > B({}^A_ZX) \quad (2.21b)$$

##### Exemple



$$B({}^{242}_{96}\text{Cm}) = 1823.405 \text{ MeV}, B({}^{238}_{94}\text{Pu}) = 1801.324 \text{ MeV}, B({}^4_2\text{He}) = 28.2969 \text{ MeV}$$

$$Q_\alpha = -1823.405 + 1801.324 + 28.2969 = 6.62 \text{ MeV} > 0$$

Cette désintégration  $\alpha$  se produit par conséquent spontanément.

On a vu dans le précédent chapitre (chapitre 4, § 2) que le noyau atomique du nucléide  $Y$  résultant de la désintégration  $\alpha$  pouvait être formé dans un état excité (noté par un astérisque) :

$${}^A_ZX \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y^* + {}^4_2\text{He} \quad (2.22)$$

<sup>133</sup> F. Mercier, J. Zhao, J.-P. Ebran, E. Khan, T. Nikšić, and D. Vretenar, « Microscopic Description of  $2\alpha$  Decay in  ${}^{212}\text{Po}$  and  ${}^{224}\text{Ra}$  Isotopes », *Physical Review Letter*, 127, 012501, 2 July 2021, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.012501>.

Plusieurs niveaux d'énergie d'excitation  $i$  du noyau Y existent dont les énergies sont notées  $E_i^*$ . Afin d'alléger l'écriture des équations qui suivent on note  $M_X$ ,  $M_Y$  et  $M_\alpha$  les masses atomiques respectives des nucléides X, Y et de la particule  $\alpha$ .

On cherche à déterminer l'énergie des particules  $\alpha$  émises. Pour cela, en supposant que le noyau atomique  ${}^A_ZX$  est initialement au repos<sup>134</sup>, on applique les lois de conservation (en hypothèse non relativiste).

- de l'énergie totale :

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + E_i^* + M_\alpha c^2 + E_Y + E_{\alpha i} \quad (2.23)$$

$$Q_\alpha - E_i^* = E_Y + E_{\alpha i} \quad (2.24)$$

- de l'impulsion :

$$\vec{p}_X = \vec{p}_Y + \vec{p}_{\alpha i} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{p}_Y + \vec{p}_{\alpha i} \Leftrightarrow \vec{p}_Y = -\vec{p}_{\alpha i} \quad (2.25)$$

$$|\vec{p}_Y| = p_Y = |\vec{p}_{\alpha i}| = p_{\alpha i} \Leftrightarrow \sqrt{2M_Y E_Y} = \sqrt{2M_\alpha E_{\alpha i}} \quad (2.26)$$

Ces relations montrent immédiatement que l'énergie cinétique  $E_{\alpha i}$  de la particule  $\alpha$  émise dépend de l'énergie d'excitation  $E_i^*$ .

De (2.26) on déduit :

$$E_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{\alpha i} \quad (2.27)$$

En remplaçant (2.27) dans (2.24), on obtient :

$$Q_\alpha - E_i^* = \frac{M_\alpha}{M_Y} E_{\alpha i} + E_{\alpha i} = \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}\right) E_{\alpha i} \quad (2.28)$$

d'où l'on tire l'énergie cinétique  $E_{\alpha i}$  de la particule  $\alpha$  émise :

$$E_{\alpha i} = \frac{Q_\alpha - E_i^*}{1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}} \quad (2.29)$$

Inversement, l'énergie d'excitation  $E_i^*$  se déduit de l'énergie cinétique  $E_{\alpha i}$  par la relation (2.30) :

---

<sup>134</sup> Les référentiels du laboratoire et du centre de masse sont dans ce cas confondus (voir chapitre 7).

$$E_i^* = Q_\alpha - E_{\alpha i} \left( 1 + \frac{M_\alpha}{M_Y} \right) \quad (2.30)$$

### Remarque

En toute rigueur, dans les relations (2.23) à (2.30), il faudrait substituer  $Y^*$  à  $Y$  puisque le noyau atomique du nucléide est supposé produit dans un état excité. Ainsi, avant désexcitation, l'impulsion et l'énergie cinétique du nucléide  $Y^*$  dans le référentiel du laboratoire s'écrivent respectivement :  $\vec{p}_{Y^*} = M_{Y^*} \vec{v}_{Y^*}$  et  $E_{Y^*} = \frac{1}{2} M_{Y^*} v_{Y^*}^2$ , avec  $M_{Y^*} c^2 = M_Y c^2 + E_i^*$ .

Par suite, la relation (2.29) aurait dû être remplacée par :

$$E_{\alpha i} = \frac{Q_\alpha - E_i^*}{1 + \frac{M_\alpha}{M_{Y^*}}} = \frac{Q_\alpha - E_i^*}{1 + \frac{M_\alpha c^2}{M_Y c^2 + E_i^*}} \quad (2.31)$$

En fait, dans les relations (2.23) à (2.30), on a implicitement supposé  $E_{Y^*} = \frac{1}{2} M_{Y^*} v_{Y^*}^2 \approx \frac{1}{2} M_Y v_Y^2 = E_Y$  et  $\vec{p}_{Y^*} = M_{Y^*} \vec{v}_{Y^*} \approx M_Y \vec{v}_Y = p_Y$  : cela signifie que ces deux grandeurs ont été supposées être très peu affectées par l'état d'excitation du noyau atomique du nucléide  $Y$ . Dans le cadre des situations considérées ici, cela est justifié par le fait que l'on a  $E_i^* \ll M_Y c^2$  :  $E^*$  peut atteindre des valeurs de quelques MeV au plus qui sont à comparer *a minima* à la masse au repos en unité d'énergie du neutron ou du proton  $\approx 939$  MeV. On constate aussi que la déduction de  $E_i^*$  à partir d'une mesure de  $E_{\alpha i}$  sera plus précise, mais mathématiquement plus compliquée avec la relation (2.31) qu'avec la relation (2.30), l'équation à résoudre étant alors du deuxième degré :

$$E_i^{*2} + (E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2) E_i^* + E_{\alpha i} M_Y c^2 + E_{\alpha i} M_\alpha c^2 - Q_\alpha M_Y c^2 = 0 \quad (2.32)$$

La solution physique en est :

$$E_i^* = \frac{-(E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2) + \sqrt{(E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2)^2 - 4(E_{\alpha i} M_Y c^2 + E_{\alpha i} M_\alpha c^2 - Q_\alpha M_Y c^2)}}{2}$$

$$E_i^* = \frac{-(E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2) + \sqrt{(Q_\alpha - E_{\alpha i})^2 + M_Y c^2 + 2M_Y c^2(Q_\alpha - E_{\alpha i}) - 4E_{\alpha i} M_\alpha c^2}}{2}$$

$$E_i^* = \frac{-(E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2) + \sqrt{(Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2)^2 - 4E_{\alpha i} M_\alpha c^2}}{2}$$

$$E_i^* = \frac{-(E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2) + \sqrt{(Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2)^2 \left[ 1 - \frac{4E_{\alpha i} M_\alpha c^2}{(Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2)^2} \right]}}{2}$$

Soit finalement :

$$E_i^* = \frac{-(E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2) + (Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2) \sqrt{\left[ 1 - \frac{4E_{\alpha i} M_\alpha c^2}{(Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2)^2} \right]}}{2} \quad (2.33)$$

Pour  $M_Y \gg M_\alpha$ , et constatant que  $Q_\alpha - E_{\alpha i} \ll M_Y c^2$ , la relation approchée (2.30) peut-être retrouvée à partir de (2.33) ; en effet, dans ce cas :

$$\frac{4E_{\alpha i}M_\alpha c^2}{(Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2)^2} \ll 1 \quad (2.34)$$

et le développement au premier ordre de la racine carrée de (2.33) conduit à :

$$E_i^* \approx \frac{-(E_{\alpha i} - Q_\alpha + M_Y c^2) + (Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2) \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{4E_{\alpha i}M_\alpha c^2}{(Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2)^2} \right]}{2} \quad (2.35)$$

$$E_i^* \approx \frac{2Q_\alpha - 2E_{\alpha i} - \frac{2E_{\alpha i}M_\alpha c^2}{Q_\alpha - E_{\alpha i} + M_Y c^2}}{2} \quad (2.36)$$

$$E_i^* \approx Q_\alpha - E_{\alpha i} - E_{\alpha i} \frac{\frac{M_\alpha c^2}{M_Y c^2}}{\frac{Q_\alpha - E_{\alpha i}}{M_Y c^2} + 1} \quad (2.37)$$

Comme déjà signalé plus haut, l'énergie disponible et l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$  émise sont petites devant la masse au repos en unité d'énergie du nucléide Y, alors  $Q_\alpha - E_{\alpha i} \ll M_Y c^2$  et (2.37) devient :

$$E_i^* \approx Q_\alpha - E_{\alpha i} - E_{\alpha i} \frac{M_\alpha c^2}{M_Y c^2} = Q_\alpha - E_{\alpha i} \left( 1 + \frac{M_\alpha}{M_Y} \right) \quad (2.38)$$

Cette même remarque est reprise dans un cadre plus général au paragraphe 2 du chapitre 7 consacré à l'énergétique des réactions nucléaires.

### Exemple de spectre d'émission $\alpha$

La **désintégration  $\alpha$  du curium 244** s'écrit :  ${}^{244}_{96}\text{Cm} \rightarrow {}^{240}_{94}\text{Pu} + {}^4_2\text{He}$  ou  ${}^{244}_{96}\text{Cm} \rightarrow {}^{240}_{94}\text{Pu} + \alpha$ . Elle est détaillée sur la **figure 7**.

En appliquant (2.29), on a :

$$E_{\alpha i} \approx \frac{5.901 - E_i^*}{1 + \frac{4}{240}}, \quad i = 1, 9$$

où le rapport des masses  $M_\alpha$  et  $M_Y$  a été assimilé au rapport des nombres de masse respectifs de la particule  $M_\alpha$  et du nucléide Y formé.

La **figure 7** indique les valeurs de  $E_i^*$  ainsi que les rapports de branchements associés. Avec (2.29), on aboutit au **tableau 2**.

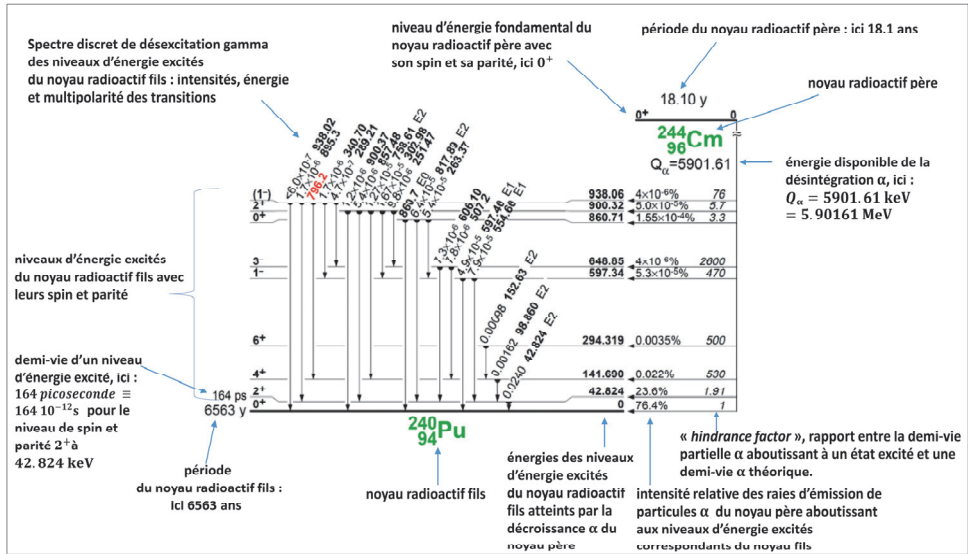


Figure 7. Description fine des transitions  $\alpha$  :  $^{244}_{96}\text{Cm} \rightarrow ^{240}_{94}\text{Pu} + ^4_2\text{He}^{135}$

Tableau 2. Spectre des particules  $\alpha$  émises par le Curium 244.<sup>136</sup>

$E_i^*$ keV	Branchement %	$Q_\alpha - E_i^*$ MeV	$E_\alpha$ MeV
936.06	$4 \cdot 10^{-6}$	4.96	4.88
900.32	$5 \cdot 10^{-5}$	5.00	4.92
860.71	$1.55 \cdot 10^{-4}$	5.04	4.96
648.85	$4 \cdot 10^{-6}$	5.25	5.16
597.34	$5.3 \cdot 10^{-5}$	5.30	5.21
294.319	$3.5 \cdot 10^{-3}$	5.61	5.51
141.69	$2.2 \cdot 10^{-2}$	5.76	5.66
42.824	23.6	5.85	5.76
0 (état fondamental)	76.4	5.90	5.80

### 2.5. Limite de stabilité pour l'émission $\alpha$

On considère toujours la désintégration  $\alpha$  (2.1). Pour déterminer la **limite de stabilité** du du nucléide X de nombre de masse atomique  $A$  et de numéro atomique  $Z$  vis-à-vis de l'émission  $\alpha$ , c'est-à-dire, la valeur de  $A$  à partir de laquelle cette émission est possible spontanément (sans apport d'énergie extérieure), la démarche consiste à déterminer l'énergie disponible  $Q_\alpha$  de la désintégration  $\alpha$  à l'aide de la formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker et d'exprimer le critère  $Q_\alpha > 0$  (voir plus haut). Dans le calcul ci-après,  $B$  symbolise toujours l'énergie de liaison de l'entité mise entre parenthèses (voir chapitres 3 et 4) et  $\delta B$  une petite variation de cette énergie de liaison.

<sup>135</sup> R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, Volume I & II, Wiley, USA 1996, CD ROM, p. 9876.

<sup>136</sup> R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., p. 9876.

On a :

$$Q_\alpha = -B(X) + B(Y) + B(\alpha) \quad (2.39)$$

soit :

$$Q_\alpha = B(\alpha) - \delta B \quad \text{avec} \quad \delta B = B(X) - B(Y) \quad (2.40)$$

En prenant la formule semi-empirique de masse de von Weizsäcker comme une fonction continue de  $Z$  et de  $A$ , son développement au premier ordre donne :

$$Q_\alpha = B(\alpha) - \frac{\partial B}{\partial Z} \Delta Z - \frac{\partial B}{\partial A} \Delta A \quad (2.41)$$

Comme  $\Delta Z = 2$  et  $\Delta A = 4$  pour une désintégration  $\alpha$ , on a :

$$Q_\alpha = B(\alpha) - \frac{\partial B}{\partial Z} \times 2 - \frac{\partial B}{\partial A} \times 4 \quad (2.42)$$

Les termes de dérivées sont calculés à partir de la formule de Bethe-Weizsäcker (voir relations (1.9a) et (1.10) du chapitre 4) et l'on obtient :

$$Q_\alpha = 28.3 - 4a_v + \frac{8}{3}a_s A^{-\frac{1}{3}} + 4a_c \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - 4a_a \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 \quad (2.43)$$

Suite à une série de calculs numériques effectués en fonction des valeurs du nombre de masse  $A$ , on déduit que  $Q_\alpha > 0$ , c'est-à-dire que l'émission spontanée d'une particule  $\alpha$  est théoriquement possible si approximativement  $A > 150$ <sup>137</sup>. En effet, les désintégrations  $\alpha$  sont plutôt observées pour les nucléides lourds (de masse atomique  $> 200$ ). Les nucléides émetteurs  $\alpha$  que sont le cérium 142, l'osmium 147, l'osmium 148, l'osmium 149 et le gadolinium 152 constituent des exceptions.

L'émission  $\alpha$  est importante en physique des réacteurs nucléaires, entre autres parce qu'elle est l'une des composantes de la **puissance résiduelle**. Sa contribution relative augmente en fonction du temps de refroidissement. Les particules  $\alpha$  produites dans le combustible nucléaire s'accumulent au cours du temps constituant un gaz d'hélium dont la pression, lorsque qu'elle devient élevée, peut engendrer des dommages. On peut aussi noter que l'émission  $\alpha$  des actinides induit, par réactions ( $\alpha, n$ ) sur des nucléides légers comme l'oxygène, l'aluminium, le carbone, le bore, le silicium, etc., une production de neutrons (voir le chapitre 12). Cette source de neutrons doit être prise en considération par exemple dans le transport d'un combustible irradié ou le transport/stockage/entreposage d'un colis de déchets vitrifiés.

<sup>137</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH, Germany, 2007, pp. 123-125.



### 3. La fission spontanée

Le phénomène de fission, soit induite par un neutron, soit spontanée, est traité dans le chapitre 9. Ici, on présente quelques caractéristiques de la **fission spontanée** éventuelle d'un nucléide en deux fragments (plus rarement trois) en tant que phénomène radioactif.

Ce processus de désintégration est en compétition avec d'autres, notamment la désintégration  $\alpha$ . Il a été mis en évidence en 1940 par deux physiciens soviétiques, Gueorgui Nikolaïevitch Flerov et Konstantin Antonovich Petrjak.<sup>138</sup>

On considère la fission spontanée symétrique d'un nucléide  $(A, Z)$  pair-pair, en situation de scission (fragments de fission représentés par deux sphères de charge  $Z/2$  tangentes), et on utilise à nouveau la formule semi-empirique de masse de Bethe-Weizsäcker.

La **limite de stabilité** d'un nucléide  $(A, Z)$  vis-à-vis de la fission spontanée est donnée par la condition exprimant que l'énergie disponible  $Q_{fs}$  de la réaction de fission spontanée doit être au moins égale à l'énergie coulombienne  $E_c$  en situation de sphères tangentes auxquelles sont assimilés les deux fragments de fission, soit :

$$Q_{fs} \geq E_c \quad E_c = 0,262a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (3.1)$$

Comme :

$$Q_{fs} = M(A, Z) - 2M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) \quad (3.2)$$

soit :

$$Q_{fs} = -0,26a_s A^{\frac{2}{3}} + 0,37a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (3.3)$$

alors, en faisant apparaître le **paramètre de fissilité**  $Z^2/A$  (voir figure 5), la condition (3.1) devient :

$$\frac{Z^2}{A} \geq 2,4 \frac{a_s}{a_c} \approx 53 \quad (3.4)$$

avec :  $a_s = 13 \text{ MeV}$  et  $a_c = 0,59 \text{ MeV}$  (voir chapitre 4 § 1).

On voit que cette **limite supérieure de stabilité** dépend des énergies coulombiennes et de surface de la formule de masse de Bethe-Weizsäcker. Une approche plus rigoureuse et plus précise, due à Bohr et Wheeler, donne :  $Z^2/A \geq 44$ . Ainsi, les noyaux atomiques pour lesquels  $Z^2/A < 44$  sont stables vis-à-vis de la fission spontanée pour de petites déformations.

<sup>138</sup> G. Flerov, K. A. Petrjak, « Spontaneous Fission of Uranium », *Physical Review* 58, 89, July 1, 1940, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.58.89.2>.

De fortes déformations vont donner avantage aux forces coulombiennes sur les forces de tension de surface. La **figure 8** représente les nucléides qui fissionnent spontanément en fonction du paramètre  $Z^2/A$ . On constate que pour les valeurs de  $Z^2/A$  supérieures à 42 les nucléides deviennent très instables vis-à-vis de la fission spontanée.

V. E. Viola et G. T. Seaborg<sup>139</sup> déjà cités pour leurs études de la désintégration  $\alpha$  ont également proposé une expression empirique donnant la période de fission spontanée, en années, des nucléides trans-radium, en fonction du paramètre de fissilité  $Z^2/A$ .

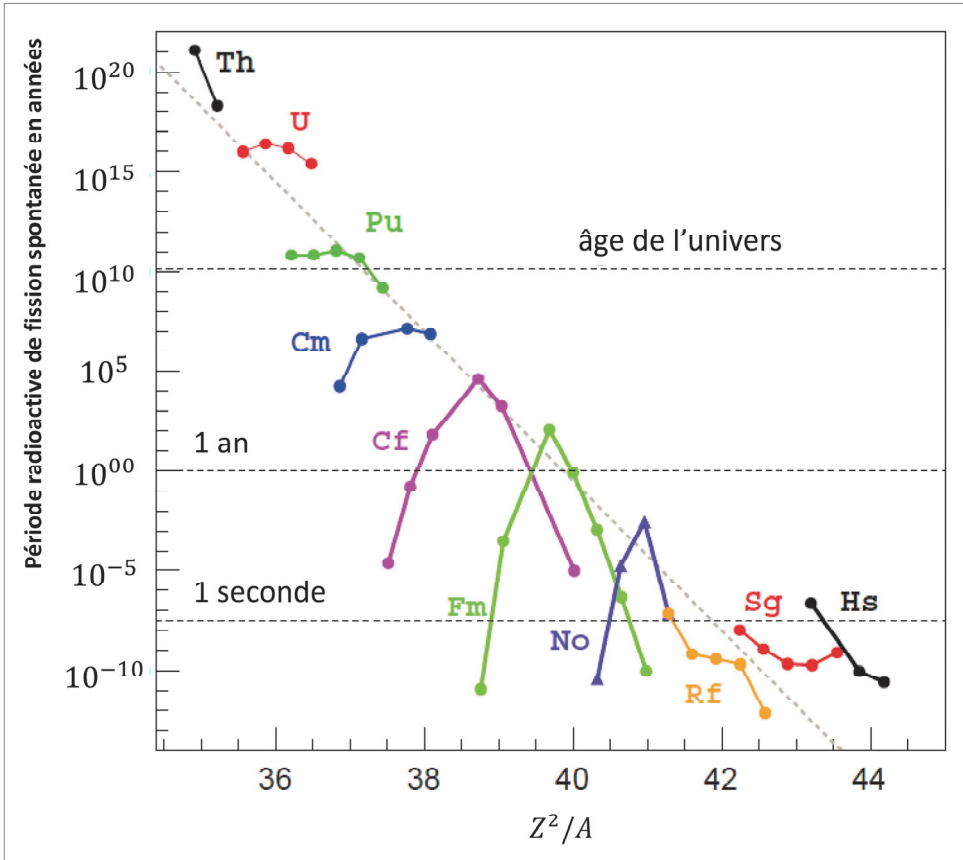


Figure 8. Période radioactive (en unité d'année) de noyaux pair-pair en fonction du paramètre de fissilité  $Z^2/A$ .

On reviendra sur ce paramètre de fissilité dans le chapitre 9 consacré à la fission induite par un neutron sur un nucléide. Comme cette dernière, la fission spontanée conduit à la formation de **produits de fission**.

<sup>139</sup> V. E. Viola, G. T. Seaborg, « Nuclear systematics of the heavy elements II - Lifetimes for alpha, beta and spontaneous fission decay », *op. cit.*, figure 2, p. 745 et sq.

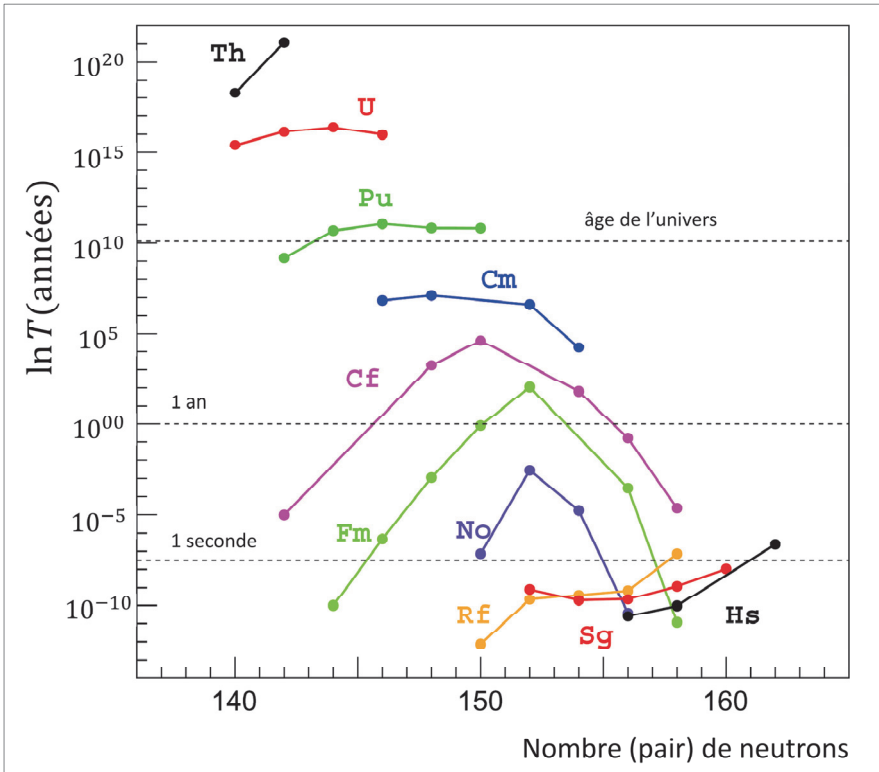


Figure 9. Logarithme à base 10 de la période de fission spontanée exprimée en années en fonction du nombre de neutrons pour les éléments lourds ( $Z$ -pair,  $N$ -pair). Les points indiquent les valeurs expérimentales et les lignes pleines sont les prédictions de la relation empirique proposée :  $\log[T(\text{années})] = -3.344Z^2/A + 133.86 + 6.884\delta$  où  $\delta$  est un paramètre ajusté prenant en compte des effets de structure nucléaire.

Les références<sup>140 141</sup> fournissent la liste des nucléides sièges de la fission spontanée à partir du thorium 230.

### Exemple

Pour l'uranium 235, on a :

- période :  $T = 7,04 \times 10^8$  ans ;
- constante de désintégration totale :  $\lambda = 3,12 \times 10^{-17}$  ;
- rapport de branchement pour la fission spontanée :  $\eta = 0,26 \times 10^{-6}$  .

<sup>140</sup> C. Wagemans (sous la direction de), *The nuclear fission process*, CRC Press, London, 1991, p. 37 ; en page 514 tableau 3, des valeurs de la constante de décroissance pour la fission spontanée sont également fournies.

<sup>141</sup> E. Segrè, « Spontaneous Fission », *Physical Review*, Vol. 86, Number 1, April 1, 1952, pp. 21-28, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.86.21>.

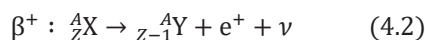
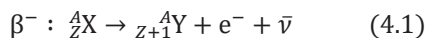
On constate sur cet exemple que la fission spontanée est beaucoup moins probable que la désintégration  $\alpha$  qui est le processus concurrent.

La fission spontanée, tout comme la fission induite par neutron s'accompagne d'une émission de plusieurs neutrons (environ 2 à 3 en moyenne selon le nucléide lourd). Cette source de neutrons, à l'instar de celle induite par les réactions ( $\alpha, n$ ), est à prendre en considération dans certaines études de sûreté-criticité et de radioprotection se rapportant par exemple au stockage et au transport du combustible nucléaire.

## 4. La radioactivité bêta ( $\beta$ )

L'émission d'électrons par de la matière radioactive avait été affirmée dès 1900 par Henri Becquerel<sup>142</sup> et Ernest Rutherford<sup>143</sup>. Les travaux visant à caractériser ce type de radioactivité (loi d'atténuation dans la matière, spectre en énergie, nucléides émetteurs, etc.) furent poursuivis notamment par Otto von Bayer, Otto Hahn et Lise Meitner<sup>144</sup>, William Wilson<sup>145</sup>. Ce sont Enrico Fermi<sup>146</sup> et Wolfgang Pauli qui, en 1934-1935, apportent le cadre théorique d'interprétation de la **radioactivité bêta**, c'est-à-dire de ce phénomène d'émission « spontanée » d'électrons et/ou de positrons par certains radionucléides.

Il existe deux types de désintégration  $\beta$  :



<sup>142</sup> Comptes-rendus de l'Académie des sciences, séance du 24 février 1896, « Sur les radiations émises par phosphorescence », pp. 420-421 ; [https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel\\_pdf/CR1896\\_p420.pdf](https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel_pdf/CR1896_p420.pdf), séance du 1<sup>er</sup> mars 1896 ; « Sur les radiations invisibles émises par les corps phosphorescents », pp. 501-502, [https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel\\_pdf/CR1896\\_p501.pdf](https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Becquerel/Becquerel_pdf/CR1896_p501.pdf)

<sup>143</sup> E. Rutherford, « Uranium Radiation and the Electrical Conduction produced by it », *Philosophical Magazine* 47, 1899, pp. 109-163, <https://doi.org/10.1080/14786449908621245> ; d'autres physiciens comme Walter Kaufmann (1902) et Heinrich Schmidt (1906), William Wilson (1909), etc., y ont consacré des travaux expérimentaux portant sur l'atténuation de ces particules chargées dans la matière et leur spectre dont la forme était sujette à controverse dans la communauté des physiciens de l'époque : était-il monoénergétique ? discret ? continu ?

<sup>144</sup> O. Hahn, L. Meitner, « Über die Absorption der  $\beta$ -Strahlen einiger Radioelemente », *Physikalische Zeitschrift* 9: 321-323, 1908a ; O. von Bayer, O. Hahn, « Eine neue  $\beta$ -Strahlung beim Thorium X; Analogie in der Uran- und Thoriumreihe », *Physikalische Zeitschrift* 11: 448-493, 1910 ; pour une bibliographie plus complète, voir : A. Franklin, « The Prehistory of the Neutrino », dans *Proceedings of History of the Neutrino*, Paris, September 5-7, 2018, <http://neutrinohistory2018.in2p3.fr>, <http://neutrinohistory2018.in2p3.fr/proceedings/franklin.pdf>.

<sup>145</sup> W. Wilson, « On the Absorption of Homogeneous  $\beta$  Rays by Matter, and on the Variation of the Absorption of the Rays with Velocity », *Proceedings of the Royal Society* A82, 1909, pp. 612-628, <https://doi.org/10.1098/rspa.1909.0067>.

<sup>146</sup> E. Fermi, « Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi "beta" », *La Ricerca Scientifica*, anno IV, Vol. II, N. 12, 31 dicembre 1933, pp. 1-19 (voir également *The Collected papers of E. Fermi* (Note e memorie), Vol. I, Italy, 1921-1938, Emilio Segrè *et al.* editors, The University Chicago Press, Roma, 1961, pp. 559-575) ; E. Fermi, « Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen. I », *Zeitschrift für Physik*, 88.3-4, 1934, pp. 161-177 (voir également E. Fermi, *Collected papers, op. cit.*, pp. 575-590), traduction en anglais de Fred. L. Wilson sous le titre « Fermi's Theory of Beta Decay », dans *American Journal of Physics* 36, 1968, p. 1150 .

où  $\nu$  est un **neutrino** et  $\bar{\nu}$  un **antineutrino**, l'antiparticule du neutrino (voir tableau 11 du chapitre 3).

On remarque que le nombre de masse  $A$  est laissé inchangé par ces deux transitions : ce sont des **transitions isobariques**.

Dans une désintégration  $\beta^-$ , un quark **d** du neutron devient un quark **u** en émettant un électron et un antineutrino, et dans une désintégration  $\beta^+$  un quark **u** du proton devient un quark **d** en émettant un positron et un neutrino.<sup>147</sup> Le neutrino et l'antineutrino se distinguent par des attributs quantiques, tels que le **nombre leptonique**, dont l'étude sort du cadre de cet ouvrage. L'antineutrino et le neutrino apparaissant dans les transformations (4.1) et (4.2) sont aussi appelés antineutrino électronique et neutrino électronique, notés dans la littérature respectivement  $\bar{\nu}_e$  et  $\nu_e$ , afin de les distinguer des antineutrinos et neutrinos associés à d'autres particules élémentaires, les « **muons** » et les « **tausons** » (ou **lepton tau**). Il a été établi expérimentalement que la masse au repos des neutrinos/antineutrinos est non nulle<sup>148</sup> ; cependant, elle a une très faible valeur (voir tableau 11 du chapitre 3) et on admettra dans la suite, sauf mention contraire, qu'elle est nulle afin de simplifier certains calculs.

Par ailleurs, un processus rare de **double désintégration bêta** a été mis en évidence<sup>149</sup>, par exemple :  $^{130}_{52}\text{Te} \rightarrow \beta^-\beta^- + ^{130}_{54}\text{Xe} + 2\bar{\nu}$  dont la période radioactive est estimée à  $2.2 \cdot 10^{21}$  ans ; ce type de transition présente un grand intérêt pour la physique des particules élémentaires afin de mieux appréhender la nature des neutrinos (et des antineutrinos).

L'émission  $\beta$  résulte d'un processus nucléaire distinct de l'interaction forte. La probabilité d'émission des couples  $(e^-, \bar{\nu})$  ou  $(e^+, \nu)$  est beaucoup plus faible que la probabilité d'émission d'un gamma associée à l'interaction électromagnétique. Le terme d'**interaction faible** est utilisé pour caractériser l'émission  $\beta$  du noyau atomique en raison de sa faible intensité comparée à celles de l'interaction électromagnétique et de l'interaction forte (voir tableau 10 et annexe I du chapitre 3). Les périodes de désintégration des nucléides qui sont

<sup>147</sup> Initialement, le processus de désintégration bêta observé semblait violer les lois de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et du spin ; pour ne pas renoncer à ces lois de conservation, W. E. Pauli a postulé l'existence d'une autre particule émise lors d'une transition bêta, mais non encore détectée, dans une lettre adressée aux participants à la conférence de Tübingen sur la radioactivité, en date du 4 décembre 1930 ([https://cds.cern.ch/record/83282/files/meitner\\_0393.pdf](https://cds.cern.ch/record/83282/files/meitner_0393.pdf)). Cette particule, difficilement détectable en raison de sa probabilité d'interaction avec la matière extrêmement faible, sera baptisée « neutrino » (terme italien, « petit neutre » en français) par le physicien Edoardo Amaldi pour la distinguer du « neutron » ; la confirmation expérimentale de l'existence du neutrino/antineutrino a été établie par : C. L. Cowan Jr., F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, A. D. McGuire, « Detection of the Free Neutrino: a Confirmation », *Science* Vol. 124, Issue 3212, July 20, 1956, pp. 103-104, <https://science.sciencemag.org/content/124/3212/103>, qui a été précédée par une proposition d'expérience (F. Reines, C. L. Cowan, Jr., « A Proposed Experiment to Detect the Free Neutrino », *Physical Review* 90, May 1, 1953, pp. 492-493, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.90.492.2>) et une première expérience (F. Reines, C. L. Cowan, Jr., « Detection of the Free Neutrino », *Physical Review* 92, November 1, 1953, pp. 830-831, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.92.830>).

<sup>148</sup> Y. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), « Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos », *Physical Review Letter* 81, 24 August 1998, pp. 1562-1567 ; S. Fukuda *et al.*, « The Super-Kamiokande detector », *Nuclear Instruments and Methods in Physics A*, Vol. 501, Issues 2-3, 1 April 2003, pp. 418-462, [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(03\)00425-X](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(03)00425-X).

<sup>149</sup> K. S. Krane, *Introductory nuclear physics*, John Wiley & Sons, New York, 1988, pp. 298-302.

le siècle de l'interaction faible vont de la fraction de seconde à plusieurs milliards d'années, alors que pour l'interaction forte l'émission radioactive peut intervenir dès  $10^{-20}$  s (mais également après plusieurs millions ou milliards d'années comme l'a précédemment montré l'exemple de la désintégration  $\alpha$  du thorium 232).

La constante de désintégration radioactive bêta  $\lambda_\beta$  correspond au cumul des probabilités de transitions possibles par unité de temps,  $\lambda_{i \rightarrow f}$ , de l'état quantique initial ( $|i\rangle$ ) du nucléide radioactif père considéré vers les états quantiques finaux ( $|f\rangle$ ) du nucléide fils, dont les expressions sont fournies par la « **règle d'or de Fermi** » :

$$\lambda_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2 \rho_f \equiv \frac{2\pi}{\hbar} |P|^2 \rho_f \quad (\text{s}^{-1}) \quad (4.3)$$

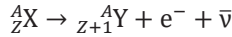
où :

- $\rho_f$  représente la densité des états quantiques finaux accessibles du noyau fils ;
- $H_\beta$  est l'hamiltonien associé à la désintégration bêta<sup>150 151</sup> ;
- $|P|^2 = |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2$  est l'élément de matrice de la transition considérée de l'état quantique initial  $i$  du nucléide radioactif vers un état quantique final  $f$ .

Ce formalisme quantique est sous-jacent aux caractéristiques de la désintégration bêta présentées dans la suite qui concernent notamment les **règles de sélection des transitions bêta** et la détermination des **spectres bêta**.

#### 4.1. Cas de la désintégration « bêta moins » ( $\beta^-$ )

La transition  $\beta^-$  :



est possible si l'énergie disponible de cette transition est positive  $Q_{\beta^-} > 0$ , soit, en utilisant les **masses atomiques** (se reporter au chapitre 3), si :

$$Q_{\beta^-} = M({}^A_Z X)c^2 - [M({}^A_{Z+1} Y)c^2 - M_e c^2] - M_{\bar{\nu}} c^2 > 0 \quad (4.4)$$

- $M({}^A_Z X)$  : masse atomique de l'atome  ${}^A_Z X$  ;
- $M({}^A_{Z+1} Y)$  : masse atomique de l'atome  ${}^A_{Z+1} Y$  ;
- $M_e$  : masse au repos de l'électron ;
- $M_{\bar{\nu}}$  : masse au repos de l'antineutrino.

#### Remarques

- L'électron  $e^-$  émis dans cette désintégration radioactive est généralement noté  $\beta^-$ .
- $M_{\bar{\nu}} \approx 0$  : la masse au repos de l'antineutrino est négligeable ici.

<sup>150</sup> L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, Hermann, Paris, 1975, annexe IX, pp. 319-330.

<sup>151</sup> E. Fermi, *Nuclear Physics*, University of Chicago Press, 1950.

- Le nucléide  ${}_{Z+1}^A\text{Y}$  au moment de sa formation est un ion positif (cation) qui possède  $Z + 1$  protons mais  $Z$  électrons. C'est la raison pour laquelle sa masse atomique est égale à celle de l'atome neutre  ${}_{Z+1}^A\text{Y}$  diminuée de la masse (au repos) d'un électron,  $M_e$  (à l'énergie de liaison près de l'électron dans l'atome : voir chapitre 3, § 3.3.3).

On obtient donc :

$$Q_{\beta^-} = M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z+1}^AY)c^2 \quad (4.5)$$

$$Q_{\beta^-} > 0 \text{ si}$$

$$M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z+1}^AY)c^2 > 0 \quad (4.6)$$

soit si :

$$M({}_Z^AX)c^2 > M({}_{Z+1}^AY)c^2 \quad (4.7)$$

En remplaçant les masses atomiques par leurs expressions en fonction des énergies de liaison, on aboutit à une nouvelle expression de ce critère :

$$Q_{\beta^-} = [ZM_Hc^2 + (A - Z)M_nc^2 - B({}_Z^AX)] - [(Z + 1)M_Hc^2 + (A - (Z + 1))M_nc^2 - B({}_{Z+1}^AY)] > 0 \quad (4.8)$$

$$Q_{\beta^-} = M_nc^2 - M_Hc^2 + B({}_{Z+1}^AY) - B({}_Z^AX) > 0 \quad (4.9)$$

$$\text{avec : } M_nc^2 - M_Hc^2 = 0.78246 \text{ MeV} = 782.48 \text{ keV}$$

L'expression (4.9) montre une différence par rapport à la relation équivalente (2.21) obtenue pour la désintégration  $\alpha$  : elle comporte un terme supplémentaire qui est la différence entre la masse (en unité d'énergie)  $M_nc^2$  du neutron et celle de la masse (en unité d'énergie) de l'atome d'hydrogène  $M_Hc^2$  ; cette différence traduit donc le fait que contrairement à la désintégration  $\alpha$  la nature des nucléons n'est pas intégralement conservée pour tous les nucléons dans la transition  $\beta$  puisqu'un neutron du noyau atomique initial se « transforme » en un proton avec émission d'un électron. Ce terme additionnel étant positif (il vaut 782.48 keV) il s'ensuit qu'une transition  $\beta^-$  n'impose pas nécessairement que l'énergie de liaison du nucléide final soit supérieure à l'énergie de liaison du nucléide initial contrairement au cas de la désintégration  $\alpha$ .

### Exemple

La décroissance bêta du plutonium 241 vers l'état fondamental de l'américium 241, représentée sur la **figure 10**, s'écrit :



On dispose des données suivantes fournies par les tables de données nucléaires :

$$B(^{241}_{94}\text{Pu}) = 1818754 \text{ keV}, B(^{241}_{95}\text{Am}) = 1817992 \text{ keV}$$

En utilisant (4.9), on a :

$$Q_{\beta^-} = 782.48 + 1817992 - 1818754 \approx 20 \text{ keV} > 0$$

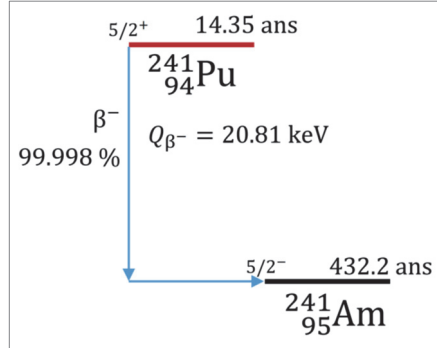


Figure 10. Transition bêta du plutonium 241 vers l'état fondamental de l'américium 241 ; la période du  $^{241}_{94}\text{Pu}$  est de 14.35 années.

Cette transition a donc lieu spontanément puisque  $Q_{\beta^-} > 0$ . On observe de plus que cette transition est spontanément possible bien que l'énergie de liaison de l'américium 241 soit inférieure à celle du plutonium 241. Autrement dit, la condition  $Q_{\beta^-} > 0$  peut être satisfaite lorsque la transition aboutit à un nucléide d'énergie de liaison plus faible que le nucléide initial.

Les bases de données fournissent la répartition, en moyenne, de l'énergie disponible entre le bêta ( $E_{\beta^-}$ ) et l'antineutrino ( $E_{\bar{\nu}}$ ) émis et le noyau atomique de recul ( $E_{recul}$ ) :

$$E_{\beta^-} = 5.227 \text{ keV} ; E_{\bar{\nu}} = 15.553 \text{ keV} ; E_{recul} \approx 0.$$

Cette répartition montre que l'antineutrino emporte environ 74 % de l'énergie disponible et le  $\beta^-$  le complément soit 26 % ; dans cette désintégration radioactive, il n'y a pas d'émission de rayonnement gamma, car elle aboutit à près de 100 % sur l'état fondamental de l'américium 241, comme l'indique la figure 10. Le noyau de recul ayant une masse très grande comparativement à celle du  $\beta^-$ , l'énergie cinétique,  $E_{recul}$ , qu'il acquiert corrélativement à l'émission du  $\beta^-$  est quasiment nulle.

#### 4.2. Cas de la désintégration « bêta plus » ( $\beta^+$ )

La transition  $\beta^+$  :



est possible si l'énergie disponible de cette transition est positive  $Q_{\beta^+} > 0$ , soit, en utilisant les masses atomiques, si :

$$Q_{\beta^+} = M(^A_Z\text{X})c^2 - [M(^A_{Z-1}\text{Y})c^2 + M_e c^2] - M_e c^2 - M_\nu c^2 > 0 \quad (4.10)$$



- $M({}_Z^AX)$  : masse atomique de l'atome  ${}_Z^AX$  ;
- $M({}_{Z-1}^AY)$  : masse atomique de l'atome  ${}_{Z-1}^AY$  ;
- $M_e$  : masse au repos du positron ;
- $M_\nu$  : masse au repos du neutrino.

### Remarques

- Le positron  $e^+$  émis dans cette désintégration radioactive est généralement noté  $\beta^+$ .
- $M_\nu$  : la masse au repos du neutrino est négligeable ici, et l'on prend  $M_\nu \approx 0$ .
- $M_e$  : la masse au repos du positron est supposée égale à celle de l'électron.
- Le nucléide  ${}_{Z-1}^AY$  est, au moment de sa formation, un ion négatif (anion) possédant  $(Z - 1)$  protons et  $Z$  électrons. Par conséquent, sa masse atomique est égale à celle de l'atome neutre  ${}_{Z-1}^AY$  augmentée de la masse de l'électron  $M_e$ .

On obtient donc :

$$Q_{\beta^+} = M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z-1}^AY)c^2 - 2M_e c^2 \quad (4.11)$$

et  $Q_{\beta^+} > 0$  si :

$$M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z-1}^AY)c^2 - 2M_e c^2 > 0 \quad (4.12)$$

soit si :

$$M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z-1}^AY)c^2 > 2M_e c^2 = 2 \times 0.511(\text{MeV}) = 1.022 \text{ MeV} \quad (4.13)$$

La différence des masses atomiques des nucléides impliqués dans la transition  $\beta^+$  doit être supérieure à deux fois la masse au repos du positron (ou de l'électron) pour que celle-ci puisse se produire.

Selon la démarche similaire à celle suivie pour la transition  $\beta^-$ , il est possible d'établir un critère faisant intervenir les énergies de liaison.

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+} = [ZM_H c^2 + (A - Z)M_n c^2 - B({}_Z^AX)] \\ - [(Z - 1)M_H c^2 + M_e c^2 + (A - (Z - 1))M_n c^2 - B({}_{Z-1}^AY)] - M_e c^2 \\ > 0 \end{aligned}$$

$$Q_{\beta^+} = M_H c^2 - M_n c^2 - 2M_e c^2 - B({}_Z^AX) + B({}_{Z-1}^AY) > 0 \quad (4.14)$$

D'où la condition :

$$M_H c^2 - M_n c^2 - B({}_Z^AX) + B({}_{Z-1}^AY) > 2M_e c^2 = 2 \times 0.511 \text{ MeV} = 1.022 \text{ MeV} \quad (4.15)$$

Les relations (4.14) ou (4.15) contrastent donc avec la relation (4.9) relative à la désintégration  $\beta^-$  commentée plus haut (§ 4.1), puisqu'en effet la transition  $\beta^+$  impose au nucléide final d'avoir une énergie de liaison supérieure à celle du nucléide initial :

$$B({}_{Z-1}^AY) > B({}_Z^AX) + M_n c^2 - M_H c^2 + 2M_e c^2$$

Exemple

On considère la décroissance bêta de l’oxygène 14 vers l’état fondamental de l’azote 14 :



représentée sur la **figure 11**.

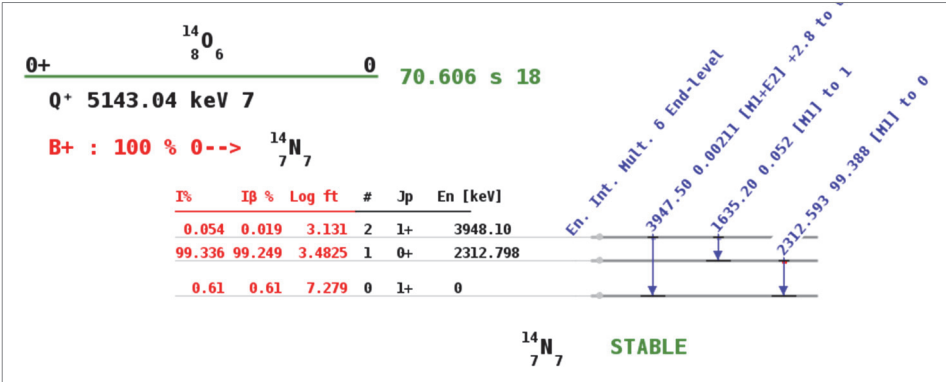


Figure 11. Transition bêta de l’oxygène 14 de période 70.6 s vers l’état fondamental de l’azote 14 qui est un nucléide stable.<sup>152</sup> La valeur  $Q^+ = 5143.04$  keV affichée sur le schéma n’est pas celle de la transition  $\beta^+$  mais celle de la capture électronique (voir § 5) qui aboutit au même noyau fils, mais dont le seuil énergétique est plus bas. Le symbole Jp représente le moment angulaire du niveau d’énergie considéré du noyau fils suivi de sa parité. Dans les bases de données nucléaires, les informations relatives à la capture électronique et à la désintégration  $\beta^+$  sont regroupées. Dans le cas présent, la transition  $\beta^+$  est largement dominante sur la capture électronique (plus de 99 % des transitions) aboutissant aussi dans à peu près 99 % des cas sur le niveau d’énergie à 2312.798 keV du noyau d’azote 14 ; ce dernier se désexcite (en  $68 \cdot 10^{-15}$  s ou 68 fs) en émettant un gamma d’énergie presque équivalente de 2312.593 keV (la différence correspond à l’énergie cinétique communiquée au nucléide  $^{14}\text{N}$  formé (ou nucléide de recul)).

On dispose des données suivantes fournies par les bases de données nucléaires :

$B(^{14}_8\text{O}) = 98.7353 \text{ MeV}, B(^{14}_7\text{N}) = 104.6626 \text{ MeV}$

$Q_{\beta^+} = -0.782 - 2 \times 0.511 - 98.7353 + 104.6626 = 4.123 \text{ MeV} > 0$

En utilisant le critère exprimé par rapport à  $2M_e c^2$ , on a :

$$M_{\text{H}c^2} - M_{\text{n}c^2} + B(^{14}_7\text{N}) - B(^{14}_8\text{O}) =$$
$$-0.782 + 104,658 \text{ (MeV)} - 98,731 \text{ (MeV)} = 5,144 \text{ (MeV)} > 1,022 \text{ MeV}$$

Cette transition  $\beta^+$  est donc possible spontanément. Les bases de données nucléaires fournissent également la répartition, en moyenne, de l’énergie disponible entre le bêta ( $E_{\beta^+}$ ), les gamma ( $E_\gamma$ ) et le neutrino ( $E_\nu$ ) émis et le nucléide de recul ( $E_{\text{recul}}$ ).

<sup>152</sup> <https://nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.

Comme on l’a mentionné dans la légende de la figure 11, les informations des transitions  $\beta^+$  et de capture électronique (voir § 5.2) aboutissant au même noyau fils sont regroupées de sorte que pour les deux processus pris ensemble on a :

$$E_{\beta^+} = 776.219 \text{ keV} ; E_{\gamma} = 3321.556 \text{ keV} ; E_{\nu} = 1046.495 \text{ keV} ; E_{recul} \approx 0.233 \text{ keV}$$

Dans la transition globalisée  $\{\beta^+ + \text{capture électronique}\}$ , l’énergie emportée par le neutrino représente en moyenne 20.35 % de l’énergie totale disponible " $Q^+$ " = 5143.04 keV, par le positron  $\beta^+$  15.09 %, par les gamma 64.56 %, par le nucléide formé  $4.53 \cdot 10^{-3} \%$ .

4.3. Cas particuliers de désintégrations bêta

▪ Radionucléides émetteurs bêta de période longue

En général, les périodes des émetteurs  $\beta$  varient approximativement entre  $10^{-3}$  seconde à quelques années. Mais il y a des exceptions telles que celles figurant dans le **tableau 3**.

Tableau 3. Émetteurs  $\beta$  de grande période radioactive.

Radionucléide	Période radioactive années	Radionucléide	Période radioactive années
$^{10}\text{Be}$	$1.5 \cdot 10^6$	$^{99}\text{Tc}$	$2.1 \cdot 10^5$
$^{14}\text{C}$	$5.73 \cdot 10^3$	$^{107}\text{Pd}$	$6.5 \cdot 10^6$
$^{40}\text{K}$	$1.27 \cdot 10^9$	$^{126}\text{Sn}$	$1.0 \cdot 10^5$
$^{60}\text{Fe}$	$1.5 \cdot 10^6$	$^{129}\text{I}$	$1.6 \cdot 10^6$
$^{79}\text{Se}$	$6.5 \cdot 10^4$	$^{135}\text{Cs}$	$2.3 \cdot 10^6$
$^{93}\text{Zr}$	$1.5 \cdot 10^6$	$^{166\text{m}}\text{Ho}$	$1.2 \cdot 10^3$

▪ La désintégration du neutron

Le neutron libre, hors du noyau atomique, n’est pas stable et se désintègre par transition  $\beta^-$  :

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu} \tag{4.16}$$

avec une période égale à 10.25 minutes, comme l’indique la **figure 12**.

Dans le cœur d’un réacteur et plus généralement dans un milieu suffisamment dense, cette période de désintégration du neutron qui s’y propage est très grande devant la durée moyenne séparant deux collisions successives qu’il y subit, de l’ordre de  $10^{-5}$  s ; il s’ensuit que la décroissance radioactive du neutron est négligée lorsque l’on traite son cheminement dans la matière dans un tel cas.

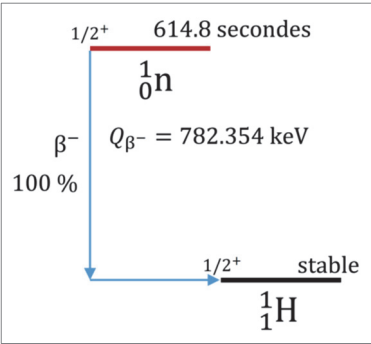


Figure 12. La désintégration du neutron « libre » par transition bêta ; sa période de désintégration est évaluée ici à 614.8 secondes soit 10. 247 minutes.<sup>153</sup>

▪ les désintégrations bêta du cuivre 64

Le cuivre 64, de période 12.7 heures, a la particularité selon la **figure 13** d’être à la fois émetteur  $\beta^-$  et  $\beta^+$  :

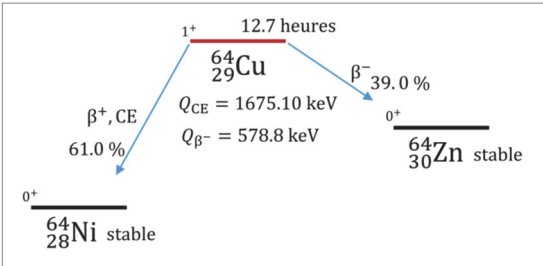


Figure 13. Désintégrations  $\beta^+$ , capture électronique et  $\beta^-$  du cuivre  ${}^{64}_{29}\text{Cu}$  ; la capture électronique (CE) est un processus en compétition avec l’émission  $\beta^+$ .

On verra plus loin, dans le paragraphe 5, qu’un troisième type de désintégration intervient : la **capture électronique**, qui est un processus en compétition avec l’émission  $\beta^+$ .

▪ la désintégration bêta du carbone 14

Le carbone 14 est un émetteur  $\beta^-$ , comme le spécifie la **figure 14** :

<sup>153</sup> D’après R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., p. 245. Une mesure récente donne 10.138 minutes : voir F. M. Gonzalez et. al. (UCNτ Collaboration), « Improved Neutron Lifetime Measurement with UCNτ », *Physical Review Letters* 127, 162501, October 13, 2021, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.162501>.

<sup>154</sup> D’après R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., pp. 1519-1520.

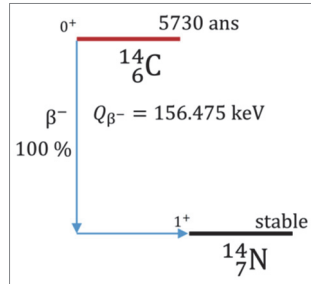


Figure 14. La désintégration  $\beta^-$  du carbone 14.<sup>155</sup>

Sa période est de 5 730 ans. Contrairement à la grande majorité des désintégrations bêta, celle du carbone 14 n'est pas accompagnée d'une émission de gamma : la transition débouche systématiquement sur l'état fondamental du noyau d'azote 14.

#### 4.4. Types de transitions bêta

Les types de transitions bêta se réfèrent à la catégorisation des états quantiques du noyau atomique fils susceptibles d'être atteints à partir du noyau atomique père (X) radioactif bêta. En effet, le passage de l'état quantique du noyau père à un état quantique du noyau fils (Y) est soumis à des conditions portant sur la conservation ou non de grandeurs physiques telles que le moment angulaire et la parité.

Le traitement théorique quantique de la désintégration bêta a ainsi conduit à établir des **règles de sélection** respectivement de **Fermi** et de **Gamow-Teller** qui déterminent l'état final de la transition  $\beta$  compte tenu de l'état quantique du noyau initial.

- La conservation du moment angulaire implique :

$$\vec{J}_X = \vec{J}_Y + \vec{L}_{\beta\nu} + \vec{S}_{\beta\nu} \quad (4.20)$$

avec :

- $\vec{J}_X$  : moment angulaire du noyau initial X radioactif  $\beta$ ,  $J_X = |\vec{J}_X|$  ;
- $\vec{J}_Y$  : moment angulaire du noyau résultant Y,  $J_Y = |\vec{J}_Y|$  ;
- $\vec{L}_{\beta\nu}$  : moment angulaire de l'ensemble  $\{\beta + \text{neutrino(ou antineutrino)}\}$ ,  $L_{\beta\nu} = |\vec{L}_{\beta\nu}|$  ;
- $\vec{S}_{\beta\nu}$  : spin intrinsèque de l'ensemble  $\{\beta + \text{neutrino(ou antineutrino)}\}$ ,  $S_{\beta\nu} = |\vec{S}_{\beta\nu}|$  ;  $\vec{S}_{\beta\nu} = \vec{S}_\beta + \vec{S}_\nu$  ;

<sup>155</sup> D'après R. B. Firestone *et al.*, *Tables of Isotopes*, *op. cit.*, p. 336.

où  $\vec{s}_\beta$  et  $\vec{s}_\nu$  sont les spins intrinsèques respectivement de la particule  $\beta$  et du neutrino (ou de l'antineutrino)  $\nu$  ;  $|\vec{s}_\beta| = s_\beta = 1/2$  et  $|\vec{s}_\nu| = s_\nu = 1/2$  sachant que ces types de particules sont des fermions, donc de spin demi-entier.

- La conservation de la parité s'écrit :

$$\pi_X = (-1)^{L_{\beta\nu}} \pi_Y \quad (4.21)$$

Ces règles de sélection définissent des transitions qualifiées de « **permises (allowed)** » lorsque  $\Delta I = 0$  (sans changement de parité), conformément aux règles de sélection initialement posées par Fermi, et d'« **interdites (forbidden)** » ( $\Delta I = \pm 1$ , changement de parité) proposées par George Gamow et Edward Teller<sup>156</sup>, en modifiant les règles de Fermi qui ne permettaient pas de rendre compte de toutes les transitions bêta observées. Le qualificatif « **interdites** » utilisé peut déconcerter : en effet, il ne signifie pas que les « **transitions interdites** » sont des transitions impossibles, mais qu'elles se produisent moins facilement que les « **transitions permises** ». Par ailleurs, des subdivisions sont apparues dans les classes principales définies ci-dessus : **transitions « interdites » d'un ordre donné, transitions « super-permises »** (voir **tableau 4a**), **transitions « favorisées (favored) »** et « **non favorisées (unfavored) »**.<sup>157</sup>

Sur (4.21), on constate donc que si les nucléides X et Y ont la même parité, alors  $L_{\beta\nu}$  doit avoir une valeur paire, dans le cas contraire  $L_{\beta\nu}$  doit prendre une valeur impaire. Pour les valeurs  $L_\beta$  éventuellement prises par le moment angulaire  $\vec{L}_{\beta\nu}$  de l'ensemble  $\{\beta + \text{neutrino ou (antineutrino)}\}$ , on a les correspondances suivantes :  $L_{\beta\nu} = 0$ , **transitions permises** ;  $L_{\beta\nu} = 1$ , **transition interdite du 1<sup>er</sup> ordre** ;  $L_{\beta\nu} = 2$ , **transition interdite du 2<sup>e</sup> ordre** ;  $L_{\beta\nu} = 3$ , **transition interdite du 3<sup>e</sup> ordre**, etc.

Pour la valeur du spin intrinsèque,  $S_{\beta\nu}$ , de l'ensemble  $\{\beta + \text{neutrino(ou antineutrino)}\}$ , on a les correspondances ci-après :

- $S_{\beta\nu} = 0$  : **transition de Fermi**, la particule  $\beta$  et le neutrino/antineutrino sont émis avec des spins antiparallèles :  $S_\beta = s_\beta - s_\nu = 1/2 - 1/2 = 0$  ;
- $S_{\beta\nu} = 1$  : **transition de Gamow-Teller**, la particule  $\beta$  et le neutrino/antineutrino sont émis avec des spins parallèles :  $S_\beta = s_\beta + s_\nu = 1/2 + 1/2 = 1$ .

<sup>156</sup> G. Gamow, E. Teller, « Selection Rules for the  $\beta$  Disintegration », *Physical Review* 49, p. 895, June 15, 1936, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.49.895>.

<sup>157</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical nuclear physics*, Springer Verlag, New York, 1979, p. 718 et sq. : « We call a transition favored if the nucleon which changes its charge remains in the same level ; the transition is unfavored if the nucleon must change its level » : « On qualifie une transition de favorisée si le nucléon qui change de charge reste sur le même niveau ; la transition est défavorable si le nucléon doit changer de niveau » ; par exemple la transition  $\beta^- \text{ } ^6_2\text{He} \rightarrow \text{ } ^6_3\text{Li}$  est une transition favorisée ; en règle générale les transitions  $\beta^+$  sont défavorisées, tout en présentant des exceptions pour les noyaux de nombre de masse de la forme  $4k + 2$  ( $k$  nombre entier) et dans lesquels un des deux noyaux de la transition a un nombre égal de protons et de neutrons (par exemple :  $^{18}_9\text{F} \rightarrow ^{18}_8\text{O}$ ) ou bien des noyaux miroirs qui diffèrent d'une charge unité, à l'exception de la transition  $^3_1\text{H} \rightarrow ^3_2\text{He}$ .

D’après (4.20), les valeurs de  $L_{\beta\nu}$  sont déterminées par la relation :

$$\vec{L}_{\beta\nu} = \vec{J}_X - \vec{J}_Y - \vec{S}_{\beta\nu} \tag{4.22}$$

Par suite :

- Pour  $S_{\beta\nu} = 0$ ,  $|J_X - J_Y| \leq L_{\beta\nu} \leq J_X + J_Y$  (4.23)

- Pour  $S_{\beta\nu} = 1$ , deux cas de figure se présentent :

- $|J_X - J_Y| - 1 \leq L_{\beta\nu} \leq J_X + J_Y + 1$  si  $J_X \neq J_Y$  (4.24)

- $0 \leq L_{\beta\nu} \leq J_X + J_Y + 1$  si  $J_X = J_Y$  (4.25)

Le **tableau 4a** montre quelques exemples de différents types de transitions bêta.

Tableau 4a. Exemples de différents types de transitions  $\beta$  ; le moment angulaire et la parité sont indiqués entre parenthèses et l’astérisque « \* » désigne un état excité.<sup>158</sup>

Noyau initial	Noyau final	Mode d’émission prédominant
${}^6_2\text{He} (0^+)$	${}^6_3\text{Li} (1^+)$	Transition permise Gamow-Teller
${}^{14}_8\text{O} (3/2^+)$	${}^{14}_7\text{N}^* (3/2^+)$	Transition permise Fermi
${}^1_0\text{n} (1/2^+)$	${}^1_1\text{H} (1/2^+)$	Transition permise Gamow-Teller et Fermi, types mélangés
${}^{35}_{16}\text{S} (3/2^+)$	${}^{35}_{17}\text{Cl} (3/2^+)$	Transition permise Gamow-Teller et Fermi, types mélangés
${}^{91}_{39}\text{Y} (1/2^-)$	${}^{91}_{40}\text{Sr} (5/2^+)$	Transition interdite du 1 <sup>er</sup> ordre Gamow-Teller
${}^{38}_{17}\text{Cl} (2^-)$	${}^{38}_{18}\text{Ar}^* (2^+)$	Transition interdite du 1 <sup>er</sup> ordre Gamow-Teller et Fermi, types mélangés
${}^{10}_4\text{Be} (3^+)$	${}^{10}_5\text{B} (0^+)$	Transition interdite du 2 <sup>e</sup> ordre Gamow-Teller

À titre illustratif supplémentaire, le cas de la désintégration de l’oxygène 14 est détaillé dans le **tableau 4b** en se référant à la **figure 11** présentée plus haut.

Certaines de ces transitions bêta sont dites **super-permises**, se produisant entre **noyaux miroirs** ( $Z_1 = N_2$ ,  $N_1 = Z_2$ ), comme par exemple :  ${}^7_3\text{Li} \xrightarrow{\beta^-} {}^7_4\text{Be}$ ,  ${}^3_1\text{H} \xrightarrow{\beta^-} {}^3_2\text{He}$ ,  ${}^{14}_8\text{O} \xrightarrow{\beta^+} {}^{14}_7\text{N}$  (voir **tableau 4b**), etc.

Elles concernent usuellement les **transitions bêta de Fermi**  $0^+ \rightarrow 0^+$  (sans changement d’isospin). Cependant, des **transitions bêta Gamow-Teller** qualifiées par analogie de **super-permises** ont été identifiées :  ${}^6_2\text{He} \xrightarrow{\beta^-} {}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{18}_{10}\text{Ne} \xrightarrow{\beta^+} {}^{18}_9\text{F}$ ,  ${}^{100}_{50}\text{Sn} \xrightarrow{\beta^+} {}^{100}_{49}\text{In}$  ( ${}^{100}_{50}\text{Sn}$  est un

<sup>158</sup> W. E. Meyerhof, *Éléments de physique nucléaire*, Dunod, Paris, 1970, p. 174.

noyau doublement magique),  $^{58}_{28}\text{Ni} \xrightarrow{\beta^+} ^{58}_{27}\text{Co}$  ( $^{58}_{28}\text{Ni}$  est aussi un noyau doublement magique).<sup>159 160 161</sup>

Tableau 4b. Les types de transitions  $\beta$  et capture électronique relatifs à la décroissance radioactive de l’oxygène 14 vers l’azote 14.<sup>162</sup>

Transitions { $\beta^+$  + capture électronique (CE)} :  
 $^{14}_8\text{O} \rightarrow ^{14}_7\text{N} + e^+ + \nu$

niveaux d’énergie atteints du noyau fils  $^{14}_7\text{N}$  dans la transition radioactive

moment angulaire et parité des niveaux d’énergie excités du noyau fils  $^{14}_7\text{N}$  atteints dans la transition radioactive

#	$\langle E_{\beta^+} \rangle$ [keV]	$I_{\beta^+}$ (abs) [%]	$\langle E_{\text{EC}} \rangle$ [keV]	$I_{\text{EC}}$ (abs) [%]	Niveau Fils [keV]	$J^\pi$	$\log ft$	Type transition
1	64.37 9	0.019 1	(1194.94)	0.035 1	3948.10 10	1 <sup>+</sup>	3.131 17	permise
2	770.55	99.249 10	(2830.24)	0.087 1	2312.798 11	0 <sup>+</sup>	3.4825 2	super permise
3	1870.95	0.61 1	(5143.04)		0	1 <sup>+</sup>	7.279 8	permise

↑  
énergie disponible dans le cas d’une capture électronique selon le niveau d’énergie atteint du noyau fils  $^{14}_7\text{N}$  dans la transition :  
 $E_{\text{EC}} = Q^+ (= 5143.04 \text{ keV}) - \text{énergie du niveau excité}$   
(0 pour le niveau fondamental, 2312.798 keV et 3948.10 keV)

4.5. Spectre d’émission bêta

Les figures 15a, 15b, 15c et 15d représentent les spectres  $\beta^-$  et  $\beta^+$  ainsi que les antineutrinos  $\bar{\nu}$  et neutrinos  $\nu$  respectivement associés, relatifs à ces deux types de désintégrations possibles du cuivre 64 <sup>163</sup> :  $^{64}_{29}\text{Cu} \xrightarrow{\beta^-} ^{64}_{30}\text{Zn}$  et  $^{64}_{29}\text{Cu} \xrightarrow{\beta^+} ^{64}_{28}\text{Ni}$ .

On constate d’une part que ces spectres sont **continus** en énergie<sup>164 165</sup> et d’autre part qu’ils sont bornés par une énergie  $E_{\text{max}}$  pour laquelle le nombre de particules  $\beta$  émises devient nul. Fermi a élaboré une théorie permettant de déterminer le spectre en énergie des  $\beta$  émis.

<sup>159</sup> B. A. Brown, « The nuclear shell model towards the drip lines », *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Vol. 47, Issue 2, 2001, pp. 517-599, p. 583, [https://doi.org/10.1016/S0146-6410\(01\)00159-4](https://doi.org/10.1016/S0146-6410(01)00159-4).

<sup>160</sup> C. B. Hinke, M. Böhmer, P. Boutachkov, *et al.*, « Superalowed Gamow–Teller decay of the doubly magic nucleus  $^{100}\text{Sn}$  », *Nature*, Vol. 486, 2012, pp. 341-345, <https://doi.org/10.1038/nature11116>.

<sup>161</sup> N. Shimizu, T. Togashi, Y. Utsuno, « Gamow–Teller transitions of neutron-rich  $N = 82, 81$  nuclei by shell-model calculations », *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Vol. 2021, Issue 3, March 2021, 033D01, 1-15, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptab022>.

<sup>162</sup> D’après <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html> : sélectionner l’oxygène 14.

<sup>163</sup> D’après <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html#ID> : sélectionner le cuivre 64 ; voir aussi R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, p. 587, figures 1.3 et 1.4, p. 605.

<sup>164</sup> C. D. Ellis, W. A. Wooster, « The  $\beta$ -ray Type of Disintegration », *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 22, 1925, pp. 849-860, <https://doi.org/10.1017/S030500410001447X>.

<sup>165</sup> C. Bisch, *Étude de la forme des spectres  $\beta$* , Thèse de doctorat, Université de Strasbourg, 2014.



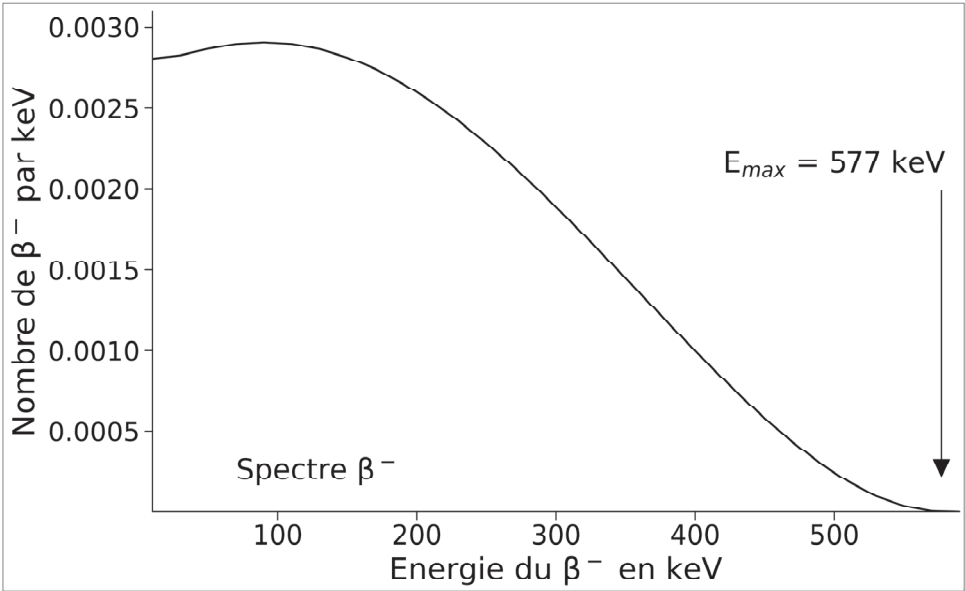


Figure 15a. Spectre en énergie des électrons émis, relatif à la transition  $\beta^-$  du cuivre 64 ; spectre normalisé à l'unité.

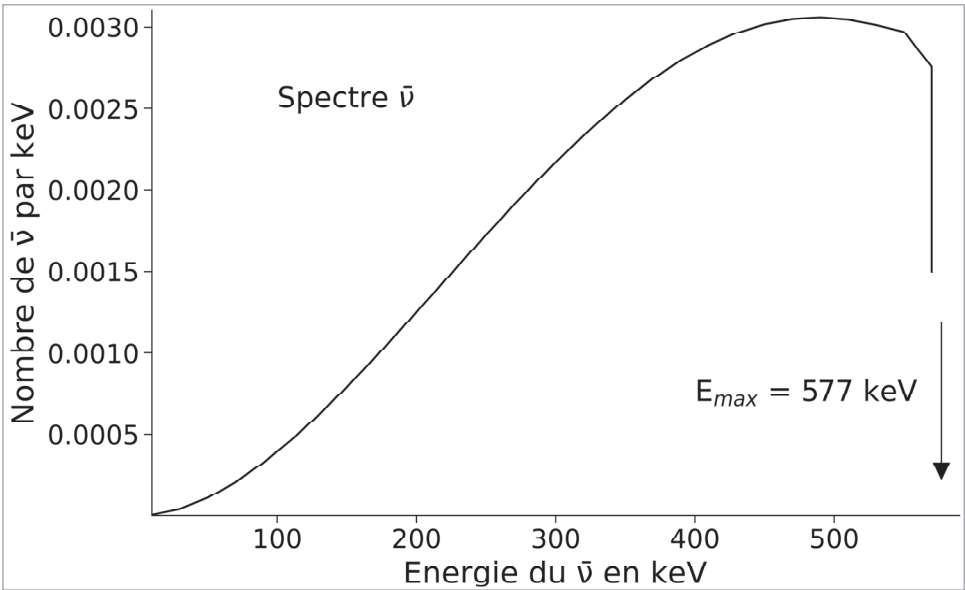


Figure 15b. Spectre en énergie des antineutrinos,  $\bar{\nu}$ , émis, relatif à la transition  $\beta^-$  du cuivre 64 ; spectre normalisé à l'unité.

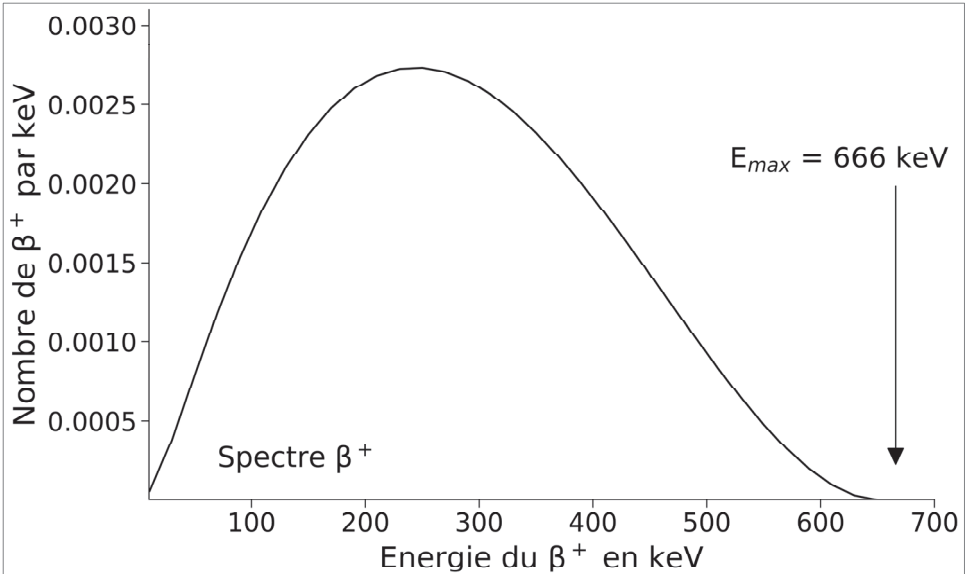


Figure 15c. Spectre en énergie des positrons émis, relatif à la transition  $\beta^+$  du cuivre 64 ; spectre normalisé à l'unité.

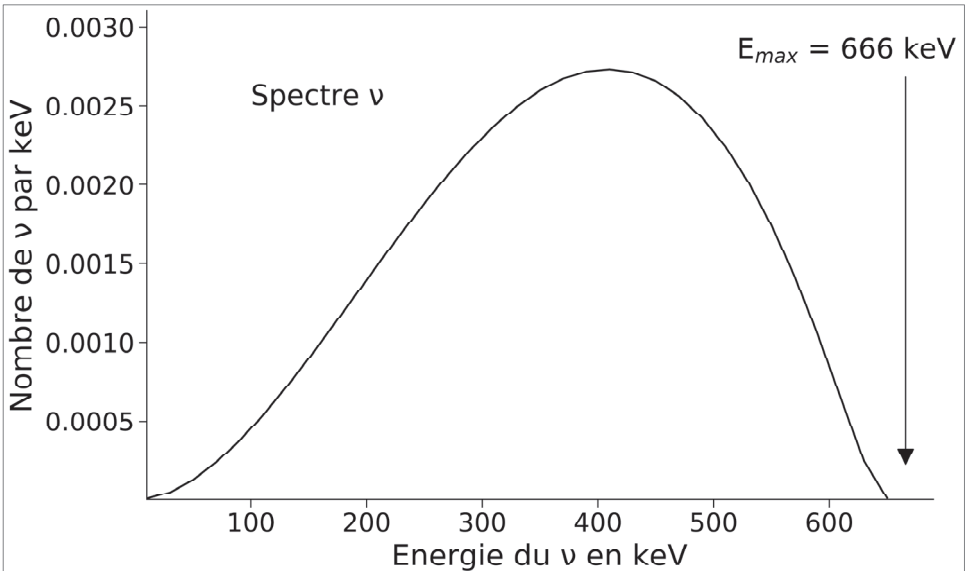


Figure 15d. Spectre en énergie des neutrinos,  $\nu$ , émis, relatif à la transition  $\beta^+$  du cuivre 64 ; spectre normalisé à l'unité.

L'expression du spectre bêta résulte d'un traitement quantique qui fait intervenir une probabilité de transition entre l'état initial que constitue le noyau radioactif initial et les

états finaux possibles du noyau atomique nouveau formé (voir la règle d'or de Fermi (4.3)). On adopte les notations suivantes :

- $E$  est l'énergie cinétique de la particule  $\beta$  émise, en MeV ; en unité de masse au repos de l'électron,  $M_e c^2 = 0.511$  MeV, son énergie totale  $W$  s'écrit :

$$W = 1 + \frac{E}{0.511} \quad (4.26)$$

- on désigne par  $W_0$  l'énergie maximale ( $E_{max}$ ) de la particule  $\beta$ , en unité  $M_e c^2$  :

$$W_0 = 1 + \frac{E_{max}}{0.511} \quad (4.27)$$

- $p$  est la quantité de mouvement du  $\beta$  émis. En unité de quantité de mouvement  $M_e c$ , elle est notée  $\eta$  :

$$\eta = \frac{p}{M_e c} = \sqrt{W^2 - 1} \quad (4.28)$$

- $N(\eta)$  est le nombre de particules  $\beta$  émises par unité de quantité de mouvement à la valeur  $\eta$  ou spectre des bêta émis exprimé en fonction de la quantité de mouvement adimensionnelle  $\eta$  ; on peut, par un changement de variable, l'exprimer en fonction de l'énergie  $E$  du bêta émis.

L'existence du champ coulombien joue de manière différenciée sur un  $\beta^+$  et un  $\beta^-$ . Dans la théorie, cet effet est pris en compte par la **fonction de Fermi**  $F(Z, \eta)$  qui dépend à la fois du numéro atomique  $Z$ , du noyau fils et de la quantité de mouvement  $\eta$  de la particule  $\beta$  <sup>166</sup> (voir annexe I). Le spectre des particules bêta émises,  $N(\eta)$ , est donné par l'expression suivante <sup>167</sup> :

$$\begin{aligned} N(\eta) d\eta &= \frac{64\pi^4 M_e^5 c^4 g^2}{h^7} |P|^2 F(Z, \eta) \eta^2 (W_0 - W)^2 d\eta \\ &= \frac{M_e^5 c^4 g^2}{2\pi^3 \hbar^7} |P|^2 F(Z, \eta) \eta^2 (W_0 - W)^2 d\eta \end{aligned} \quad (4.29)$$

où :

- $g = 0.88 \cdot 10^{-4}$  MeV.f<sup>3</sup> : **constante de Fermi** ;
- $P$  : matrice dont les éléments  $\langle f | H_\beta | i \rangle$  caractérisent le **passage de l'état initial «  $i$  » à un état quantique final «  $f$  » du nucléide** qui se transforme (souvent notée  $M$  dans la littérature) ; ils font intervenir les fonctions d'onde associées à ces états (voir relation (4.3) plus haut).

<sup>166</sup> Voir *Tables for the analysis of beta spectra*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 13, 1952, en particulier p. 21 et sq. ; voir aussi E. Fermi, « Tentativo di una teoria dell'emissione dei raggi "beta" », *La Ricerca Scientifica*, op. cit., pp. 9-11.

<sup>167</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op.cit, p. 604.

Le spectre des bêta  $N(\eta)$  est représenté sur la **figure 16a** qui traduit bien l'impact de la fonction de Fermi.

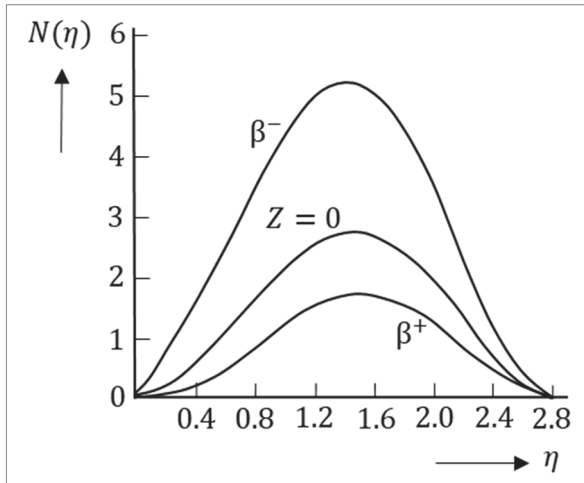


Figure 16a. Représentation de  $N(\eta)$  pour les transitions  $\beta^+$  et  $\beta^-$  illustrant l'effet coulombien modélisé par la fonction de Fermi  $F(Z, \eta)$ , cas  $Z = 20$  correspondant au calcium.<sup>168</sup>

On montre la proportionnalité :

$$\sqrt{\frac{N(\eta)}{\eta^2 F(Z, \eta)}} \propto (W_0 - W) \quad (4.30)$$

Le formalisme mathématique donnant le spectre en énergie des  $\beta$  émis fait l'objet de représentations graphiques appelées **droites de Kurie** dont l'intérêt est d'une part la détermination de l'énergie  $E_{max}$  de l'émission  $\beta$ , et d'autre part la mise en évidence de l'écart entre théorie et expérience, comme l'illustre la **figure 16b**.

L'expression précédente de  $N(\eta)$  n'est valable que pour les transitions permises, pour lesquelles  $|P| \approx 1$ . Deux auteurs, N. B. Gove et M. J. Martin<sup>169</sup>, proposent une expression plus générale en introduisant un facteur coulombien  $S_n(Z, W)$  visant à traiter à la fois les transitions permises et interdites ( $n = 0$  transition permise,  $n = 1$  transition interdite une fois,  $n = 2$  transition interdite deux fois, etc.). Sont pris également en compte l'effet d'écran du nuage électronique de l'atome et l'influence de la distribution de la charge dans le noyau.

<sup>168</sup> J. L. Lawson, J. M. Cork, « The Radioactive Isotopes of Indium », *Physical Review* 57, 982, June 1, 1940, pp. 982-994, figure 14, p. 994 ; R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op.cit, p. 602, figure 3.1, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.57.982>.

<sup>169</sup> N. B. Gove, M. J. Martin, *log-f Tables for Beta Decay*, *Nuclear Data Tables* 10, 205-317, 1971, [https://doi.org/10.1016/S0092-640X\(71\)80026-8](https://doi.org/10.1016/S0092-640X(71)80026-8).

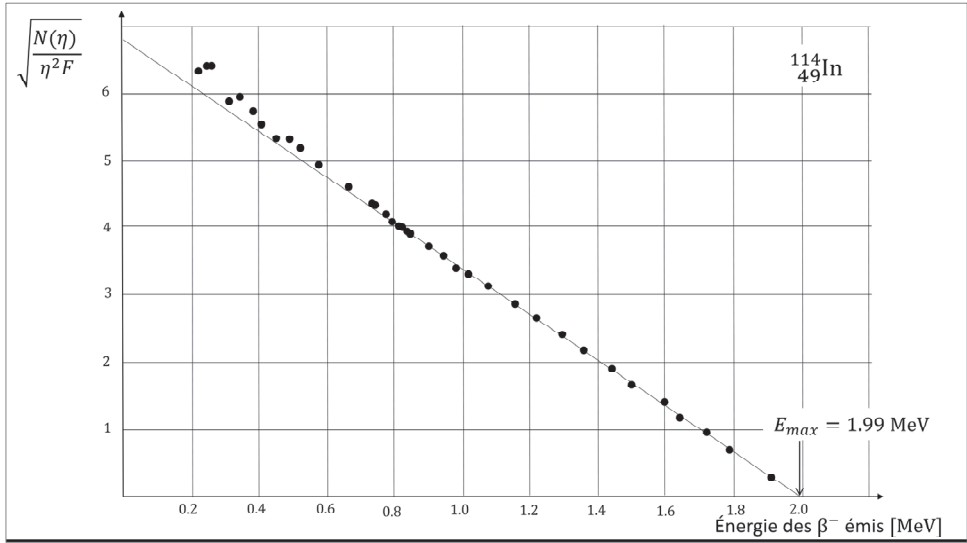


Figure 16b. « Droite de Kurie » relative au cas de la désintégration  $\beta$  de l'indium (premier état métastable de période 49.5 jours, état fondamental de période 71.9 secondes) :  $^{114}_{49}\text{In} \rightarrow ^{114}_{50}\text{Sn} + e^- + \bar{\nu}^{170}$  ; les énergies des abscisses correspondent aux milieux des intervalles  $[\eta, \eta + d\eta]$ .

Compte tenu de la relation entre les variables  $E$  et  $W$ , le nombre de bêta  $N(E)$  émis par unité d'énergie s'écrit alors :

$$N(E) = \frac{\eta (W_0 - W)^2 S_n(Z, W)}{0.511 \int_1^{W_0} \eta (W_0 - W)^2 S_n(Z, W) dW} \quad (4.31)$$

Quant à l'énergie moyenne du spectre bêta,  $\bar{E}$ , elle est donnée par l'expression :

$$\bar{E} = 0.511 \frac{\int_1^{W_0} (W - 1) \eta (W_0 - W)^2 S_n(Z, W) dW}{\int_1^{W_0} \eta (W_0 - W)^2 S_n(Z, W) dW} \quad (4.32)$$

#### 4.6. Constante de désintégration $\beta$

La constante de désintégration  $\lambda_\beta$  de l'émission  $\beta$  s'obtient par intégration du spectre de bêta émis  $N(W)dW$  sur les énergies réduites  $W$  (en passant de la variable  $\eta$  à la variable  $W$ ) :

$$\lambda_\beta = \frac{M_e^5 c^4 g^2}{2\pi^3 \hbar^7} |P|^2 \int_1^{W_0} (W - 1) \eta (W_0 - W)^2 F(Z, W) dW = \frac{|P|^2}{\tau_0} f(Z, W) \quad (4.33)$$

avec :

<sup>170</sup> D'après R. D. Evans, *Le noyau atomique, op.cit.*, p. 606, Figure 3.3.

$$f(Z, W) = \int_1^{W_0} (W - 1) \eta (W_0 - W)^2 F(Z, W) dW \quad (4.34)$$

$$\tau_0 = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{M_e^5 c^4 g^2} \quad (4.35)$$

On voit que  $\lambda_\beta$  est approximativement proportionnelle à  $W_0^5$ .

On constate également que  $\lambda_\beta$  s'exprime en fonction de la grandeur adimensionnelle  $f(Z, W)$ , notée  $f$  dans la suite, appelée **fonction intégrale de Fermi**<sup>171</sup> (voir annexe I) :

$$\lambda_\beta = \frac{M_e^5 c^4 g^2}{2\pi^3 \hbar^7} |P|^2 f \quad (4.36)$$

La période  $T$  correspondante s'écrit par conséquent :

$$T = (\ln 2) \frac{2\pi^3 \hbar^7}{M_e^5 c^4 g^2 |P|^2 f} = 0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{M_e^5 c^4 g^2 |P|^2 f} \quad (4.37)$$

La fonction intégrale de Fermi étant sans dimension, le produit  $fT$ , noté  $ft$ , a donc la dimension d'un temps<sup>172</sup> :

$$ft = 0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{M_e^5 c^4 g^2 |P|^2} \quad (4.38)$$

On considère, pour des raisons pratiques, le logarithme (à base 10) du produit de la fonction intégrale de Fermi  $f \equiv f(Z, W)$  et de la période  $T$  :  $\log_{10} [fT]$  qui a la dimension d'un temps ;  $\log_{10} [fT]$  est souvent noté  $\log (ft)$  pour les différentes transitions :

$$\log (ft) = \log \frac{0.693 \tau_0}{|P|^2} = \log 0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{M_e^5 c^4 g^2 |P|^2} \quad (4.39)$$

Les valeurs les plus courantes de  $\log (ft)$  se situent entre 3 et 14.<sup>173</sup>

### Exemples

- Le cas de la désintégration bêta le plus simple est sans doute celui du neutron déjà mentionnée :  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  ; dans ce cas particulier, les fonctions propres du neutron et du proton sont quasi identiques et par suite on a :  $|P|^2 = |\langle f | H_\beta | i \rangle|^2 = 1$ . De plus, la fonction de Fermi vaut

<sup>171</sup> Voir les représentations graphiques de  $f$  dans R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, Vol. I & II, Wiley, USA 1996, CD ROM, p. 14188 et sq.

<sup>172</sup> E. J. Konopinski, « Beta-Decay », *Rev. Mod. Phys.* 15, October 1, 1943, pp. 209-246, p. 224, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.15.209>.

<sup>173</sup> V. E. Viola, G. T. Seaborg, « Nuclear systematics of the heavy elements II - Lifetimes for alpha, beta and spontaneous fission decay », *op. cit.*, p. 743.

- 1 et  $ft = t \equiv T$ . La période de désintégration du neutron a été mesurée, donnant la valeur  $T = 613.9$  s, et il s'ensuit  $ft = 613.9$  s.
- Pour le tritium,  ${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + e^- + \bar{\nu}$ , de période  $T \equiv t = 12$  ans,  $ft \approx 1000$  s,  $\log(ft) = 3$ ; on a pour ce cas-ci approximativement  $|P|^2 = |\langle f|H_\beta|i\rangle|^2 \approx 1$ .
  - Pour l'hélium 6,  ${}^6_2\text{He} \rightarrow {}^6_3\text{Li} + e^- + \bar{\nu}$ , de période  $T \equiv t = 806.7$  ms,  $ft \approx 830$  s,  $\log(ft) = 2.9$ .
  - À noter le cas singulier de l'indium 115 :  ${}^{115}_{49}\text{In} \rightarrow {}^{115}_{50}\text{Sn} + e^- + \bar{\nu}$  pour lequel  $\log(ft) = 23,2$  et  $ft = 1.58489 \cdot 10^{23}$ .

Remarque

De manière similaire, la constante de Fermi  $g$  peut être aussi déduite d'une mesure de  $ft$  relative à la **transition super-permise de Fermi**  $0^+ \rightarrow 0^+$  en utilisant l'expression (4.34); ainsi par exemple<sup>174</sup>, en considérant la transition  $0^+ \rightarrow 0^+$  de  ${}^{14}_8\text{O} \xrightarrow{\beta^+} {}^{14}_7\text{N}$  pour laquelle  $ft = 3200$  s et en observant que dans ce cas  $|P|^2 = |\langle f|H_\beta|i\rangle|^2 = 2$ :

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{0.693 \frac{2\pi^3 \hbar^7}{M_e^5 c^4 ft |P|^2}} = \sqrt{0.693 \frac{2\pi^3 (\hbar c)^7}{(M_e c^2)^5 ft c \times 2}} \\ &\approx \sqrt{\frac{0.693 \times 2 \times (3.14)^3 (1.973 \cdot 10^2 \text{ (MeV fm)})^7}{(0.511 \text{ (MeV)})^5 \times 3200 \times 2.998 \cdot 10^8 \times 10^{15} \text{ (fm s}^{-1}\text{)} \times 2}} = \sqrt{\frac{4.99 \cdot 10^{17}}{6.68 \cdot 10^{25}}} \\ &= 8.64 \cdot 10^{-5} \text{ MeV fm}^3 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Cette valeur est assez proche de celle indiquée dans l'annexe I du chapitre 3 abordant la détermination des constantes de couplage.

Le **tableau 5** résume la classification des transitions avec leurs plages approximatives respectives de variation de  $\log(ft)$ .

Tableau 5. Classification des transitions bêta et plages indicatives de variation correspondante de  $\log(ft)$ .  
\* Voir plus haut la définition usuellement donnée d'une transition super-permise.

Type de transition	Changement de moment angulaire : $\Delta J$	Changement de parité : $\Delta \pi$	$\log(ft)$
Super-permise*	0	+ (non)	< 3.5
Permise	0, $\pm 1$	+ (non)	3.6–5.9
1 <sup>re</sup> interdite	0, $\pm 1$ , $\pm 2$	– (oui)	6.0–10
2 <sup>e</sup> interdite	$\pm 2$ , $\pm 3$	+ (non)	10–13
3 <sup>e</sup> interdite	$\pm 3$ , $\pm 4$	– (oui)	> 15

Les **figures 17a et 17b** <sup>175</sup> complètent les informations fournies dans le **tableau 5**.

<sup>174</sup> R. Bouchez, R. Nataf, « Sur les transitions  $\beta$  et la structure nucléaire. III. Les transitions superpermises », *J. Phys. Radium*, 14 (4), 1953, pp. 217-225, p. 224, <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00234722>.

<sup>175</sup> B. Singh, J. L. Rodriguez, S. S. M. Wong, J. K. Tuli, « Review of  $\log ft$  values in  $\beta$  decay », *Nuclear Data Sheets*, Vol. 84, Issue 3, July 1998, pp. 487-563, <https://doi.org/10.1006/ndsh.1998.0015>.

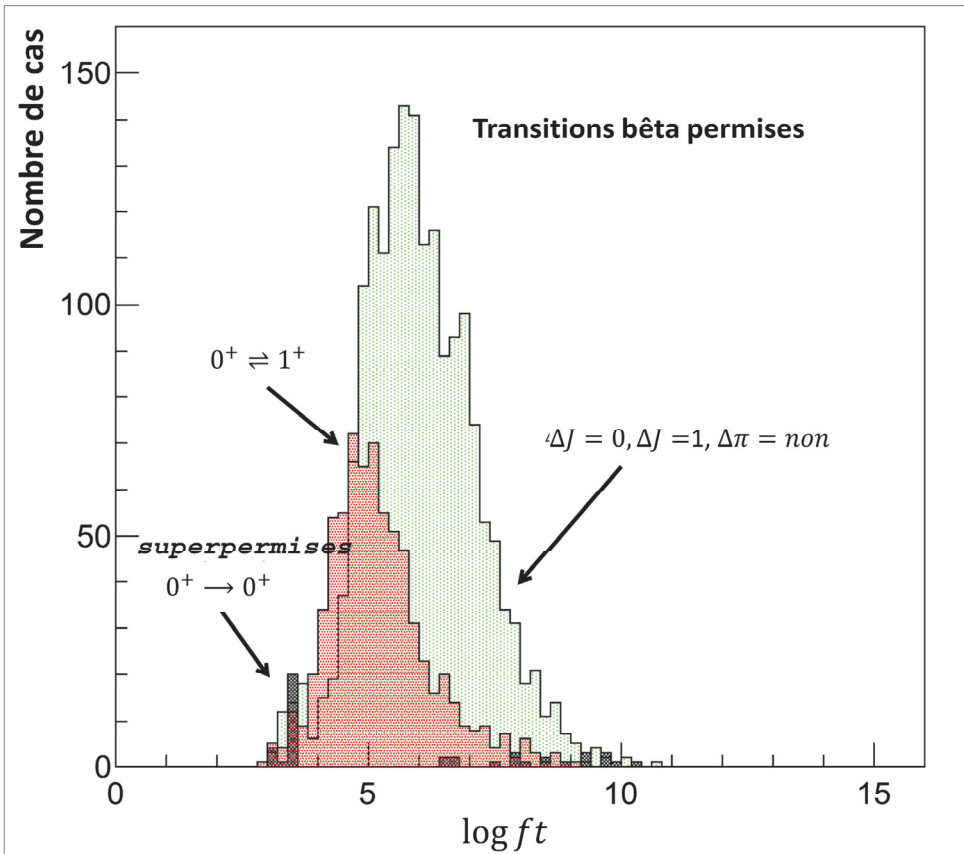


Figure 17a. Histogramme des transitions bêta, « permises » en fonction du paramètre  $\log(ft)$  sur un ensemble d'environ 3 900 transitions.



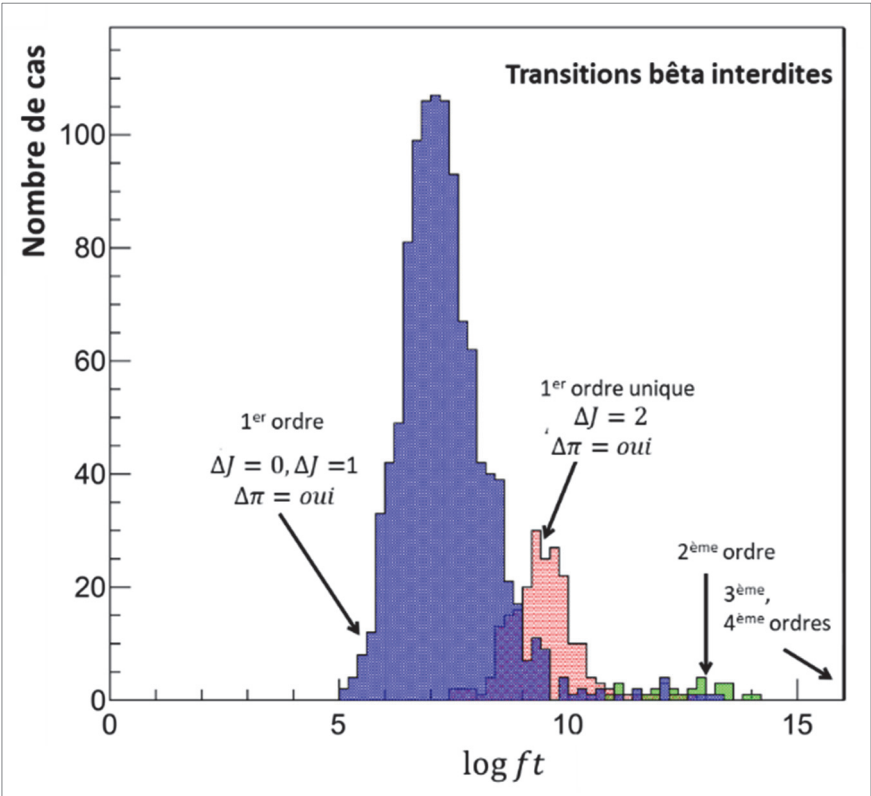


Figure 17b. Histogramme des transitions bêta « interdites » en fonction du paramètre  $\log(ft)$  sur un ensemble d'environ 3 900 transitions

### 5. La capture électronique

Il existe une probabilité non nulle pour qu'un électron appartenant à une couche interne de l'atome (comme la couche K par exemple) soit capturé par le noyau.<sup>176</sup> Ce processus s'accompagne de l'émission d'un neutrino :



Le noyau  ${}^A_ZX$  « absorbe » un électron du cortège électronique. L'atome résultant  ${}^A_{Z-1}Y$  reste globalement neutre, contrairement aux deux cas précédents des transitions  $\beta^-$  et  $\beta^+$ , car au déficit d'un électron du cortège électronique correspond la « transformation » d'un proton (charge positive) du noyau atomique en un neutron. Cette transition est possible si l'énergie disponible,  $Q_{CE}$ , de ce processus nucléaire, dénommé **capture électronique**, est positive. En utilisant les masses atomiques des atomes neutres,  $M({}^A_ZX)$  et  $M({}^A_{Z-1}Y)$ , l'énergie disponible  $Q_{CE}$  est donnée par définition par la relation :

<sup>176</sup> L. W. Alvarez, « Nuclear K Electron Capture », *Physical Review* 52, 134, July 15, 1937, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.52.134>.

$$Q_{CE} = M({}_Z^AX)c^2 - [M({}_{Z-1}^AY)c^2 + E_n + M_\nu c^2] \quad (5.2)$$

où  $E_n$  est l'énergie de liaison de l'électron capturé par le noyau atomique  ${}_Z^AX$ .  
Comme la masse au repos  $M_\nu$  du neutrino est supposée nulle ici, (5.2) devient :

$$Q_{CE} = M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z-1}^AY)c^2 - E_n \quad (5.3)$$

Le critère de déclenchement de la capture électronique s'écrit par conséquent :

$$Q_{CE} = M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z-1}^AY)c^2 - E_n > 0 \quad (5.4)$$

que l'on peut encore écrire :

$$M({}_Z^AX)c^2 - M({}_{Z-1}^AY)c^2 > E_n \quad (5.5)$$

En fonction des énergies de liaison, le critère devient :

$$Q_{CE} = [ZM_Hc^2 + (A - Z)M_nc^2 - B({}_Z^AX)] - [(Z - 1)M_Hc^2 + (A - (Z - 1))M_nc^2 - B({}_{Z-1}^AY) + E_n] > 0 \quad (5.6)$$

$$Q_{CE} = M_Hc^2 - M_nc^2 - B({}_Z^AX) + B({}_{Z-1}^AY) - E_n > 0 \quad (5.7)$$

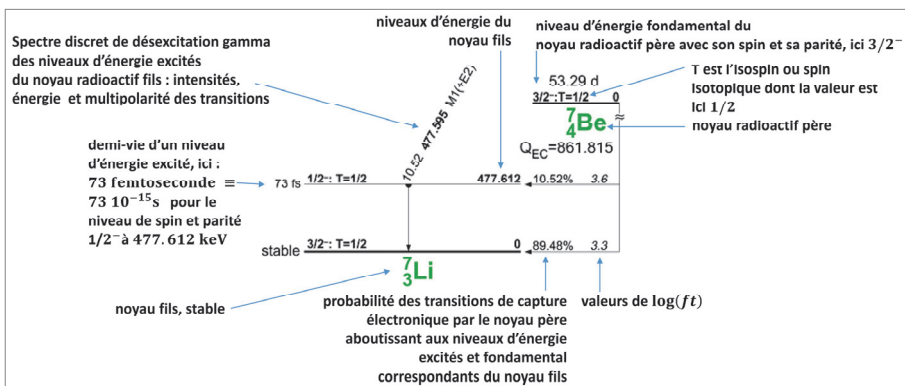
soit encore :

$$B({}_{Z-1}^AY) - B({}_Z^AX) > 0.782 \text{ (MeV)} + E_n \text{ (MeV)} \quad (5.8)$$

### Exemple



Les **figures 18a** et **18b** montrent les schémas de décroissance correspondants fournis par deux bases de données différentes.



**Figure 18a.** Décroissance radioactive du béryllium 7 vers le lithium 7 par capture électronique (*electronic capture, EC*) issue des *Tables of Isotopes* de R. B. Firestone<sup>177</sup>.

<sup>177</sup> R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., p. 272.

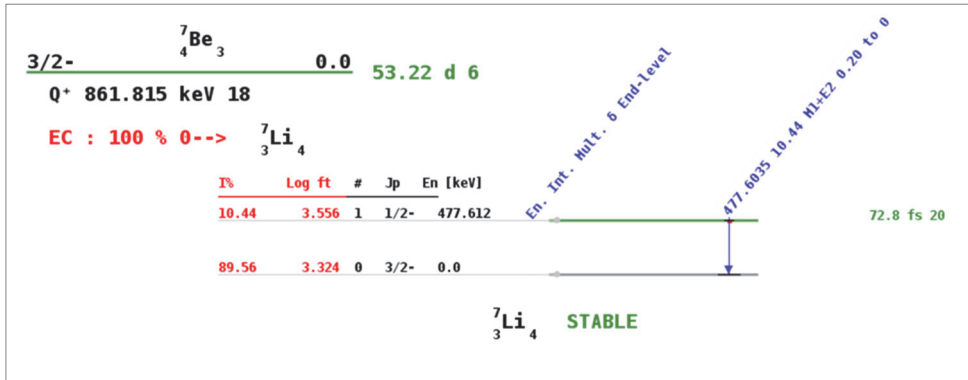


Figure 18b. Décroissance radioactive du béryllium 7 vers le lithium 7 par capture électronique (electronic capture, EC) issue de la « Live Chart of Nuclides » de l'AIEA<sup>178</sup>.

Cette capture électronique est effectivement possible, car  $Q_{CE} > 0$ . En effet, en utilisant les données tabulées des énergies de liaison des isotopes du béryllium et du lithium concernés, on montre que l'énergie disponible  $Q_{CE}$  est positive. On dispose des données suivantes :  $B(^7_4\text{Be}) = 37.6016 \text{ MeV}$  ,  $B(^7_3\text{Li}) = 39.2459 \text{ MeV}$ . En appliquant (5.3), on obtient :

$$Q_{CE} = -0.782 - 37.6016 + 39.2459 - E_n$$

$$E_n \sim \frac{Z^2}{n^2} 13.6 \cdot 10^{-6} \text{ (MeV)}$$

Il en découle immédiatement pour  $n = 1$  :

$$Q_{CE} = 0.864 - \frac{4^2}{1^2} 13.6 \cdot 10^{-6} \approx 0.864 > 0$$

On peut se poser la question de savoir si la transition  $\beta^+$ ,  $^7_4\text{Be} \rightarrow ^7_3\text{Li} + e^+ + \nu$ , est également spontanément possible. Pour répondre, on calcule l'énergie correspondante  $Q_{\beta^+}$  en utilisant sa seconde définition (4.11) :

$$Q_{\beta^+} = M_H c^2 - M_n c^2 - 2M_e c^2 - B(^7_4\text{Be}) + B(^7_3\text{Li})$$

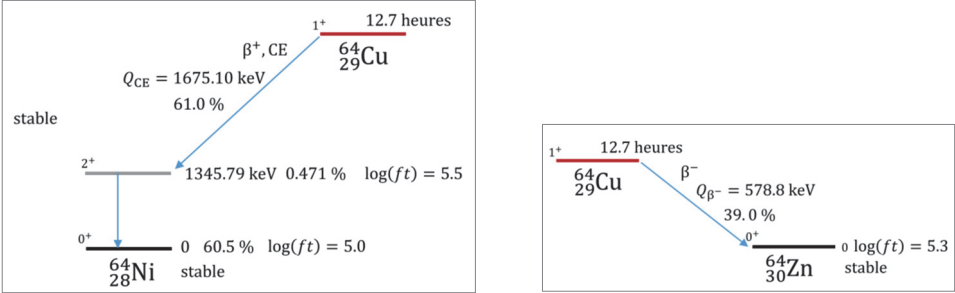
Comme  $M_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$  et  $M_n c^2 - M_H c^2 = 0.782 \text{ MeV}$ ,

$$Q_{\beta^+} = -0.782 - 2 \times 0.511 - 37.6016 + 39.2459 = -0.1597 \text{ MeV} < 0$$

On en conclut que dans ce cas précis de la désintégration du béryllium 7, seule la capture électronique se produit.

<sup>178</sup> <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.

Les **figures 19a, 19b et 19c** reprennent le cas du cuivre 64 afin d'illustrer la compétition entre les différents modes de décroissance radioactive par émission  $\beta^-$ , émission  $\beta^+$  et capture électronique, notée CE.



Figures 19a (à gauche) et 19b (à droite). Les différents types de désintégrations radioactives du cuivre 64,  $\beta^+$ ,  $\beta^-$  et capture électronique (CE). Les valeurs des rapports de branchement  $\gamma$  sont reportées.<sup>179</sup>

La **figure 19c** indique que le rapport de branchement vers la transition CE +  $\beta^+$  est  $\eta_{\beta^+, \text{CE}} = 61 \%$  et que le rapport de branchement vers la transition  $\beta^-$  est  $\eta_{\beta^-} = 39 \%$ .

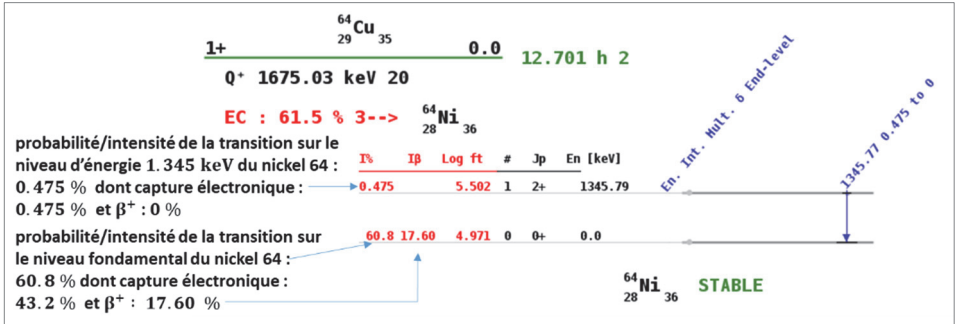


Figure 19c. Illustration de la compétition entre les modes de décroissance par capture électronique (EC : *electonic capture*) et émission  $\beta^+$  dans le cas du cuivre 64.<sup>180</sup>

La période de désintégration du cuivre 64 est de 12.7 heures et les périodes de désintégrations partielles sont obtenues en appliquant la formule (1.8) :

$$\lambda_{\beta^+ + \text{CE}} = \lambda \eta_{\beta^+ + \text{CE}} \Rightarrow \frac{\ln 2}{T_{\beta^+ + \text{CE}}} = \frac{\ln 2}{T} \eta_{\beta^+ + \text{CE}} \Rightarrow$$

$$T_{\beta^+ + \text{CE}} = \frac{T}{\eta_{\beta^+ + \text{CE}}} = \frac{12.7 \text{ (h)}}{61 \cdot 10^{-2}} = 20.81 \text{ h}$$

<sup>179</sup> R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., pp. 1519-1520.

<sup>180</sup> <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.

$$\lambda_{\beta^-} = \lambda \eta_{\beta^-} \Rightarrow \frac{\ln 2}{T_{\beta^-}} = \frac{\ln 2}{T} \eta_{\beta^-} \Rightarrow T_{\beta^-} = \frac{T}{\eta_{\beta^-}} = \frac{12.7 \text{ (h)}}{39 \cdot 10^{-2}} = 32.56 \text{ h}$$

On vérifie bien avec  $\lambda = \lambda_{\beta^+, CE} + \lambda_{\beta^-}$  que l'on retrouve :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_{\beta^+, CE}} + \frac{1}{T_{\beta^-}} \Rightarrow T = \frac{T_{\beta^+, CE} T_{\beta^-}}{T_{\beta^+, CE} + T_{\beta^-}} = \frac{20.81 \times 32.5}{20.81 + 32.5} = 12.7 \text{ h}$$

La répartition des occurrences entre décroissance par capture électronique et émission  $\beta^+$  est respectivement de  $\sim 43 \%$  et  $\sim 18 \%$ , comme l'indique la **figure 19c** :

Plus généralement, la capture électronique (CE) est en compétition avec l'émission  $\beta^+$  lorsque la valeur de l'énergie disponible  $Q_{\beta^+}$  est supérieure à l'énergie seuil de 1.022 MeV (voir § 4.2).

## 6. L'émission gamma ( $\gamma$ )

L'émission d'un rayonnement gamma par un noyau atomique provient de la désexcitation de ce noyau qui a été préalablement produit dans un état excité, par exemple suite à une désintégration alpha ou bêta. Les états nucléaires excités possèdent des durées de vie (périodes) allant de  $10^{-22}$  seconde à 100 ans pour la désintégration gamma. Les photons gamma émis ont des énergies allant de la dizaine de keV à la dizaine de MeV.

### 6.1. Types de transition gamma

Le processus de désexcitation gamma se manifeste en général par l'émission de plusieurs photons d'énergies différentes traduisant une atteinte de l'état fondamental (état de plus faible énergie) en plusieurs étapes, chacune d'entre elles correspondant à un niveau excité. On est donc en présence d'une émission de gamma en **cascade**.

Il a déjà été dit que l'émission de ce rayonnement gamma trouve son origine dans les mouvements des nucléons qui sont porteurs d'une charge électrique (les protons), de caractéristiques magnétiques (protons et neutrons), et animés de mouvements orbitaux au sein du noyau atomique.

On sait par ailleurs qu'une distribution de charges peut se décomposer en moments multipolaires et il en est de même de la distribution magnétique liée à ces charges.<sup>181</sup> Ces notions de moments multipolaires initialement définies dans le cadre de la physique classique sont intégrées dans celui de la mécanique quantique.

Une transition  $\gamma$  entre un niveau d'énergie  $i$  ( $i$  pour initial) de moment angulaire  $\vec{J}_i$ , de parité  $\pi_i$ , et un niveau d'énergie  $f$  ( $f$  pour final), de moment angulaire  $\vec{J}_f$ , de parité  $\pi_f$ , du

<sup>181</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, chapitre 4, pp. 150-193 ; voir aussi chapitre 9, annexe I.

noyau atomique considéré, est affectée d'un moment angulaire noté  $\vec{L}_r$  et d'une parité  $\pi_r$  définies respectivement par les deux lois de conservation suivantes<sup>182 183</sup> :

- conservation du moment du moment angulaire :

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{L}_r \tag{6.2}$$

- conservation de la parité :

$$\pi_i = \pi_f \pi_r \tag{6.3}$$

avec, en posant  $L_r = \|\vec{L}_r\|$  :

$$\pi_r = (-1)^{L_r} \quad \text{rayonnement électrique multipolaire} \tag{6.4}$$

$$\pi_i = \pi_f (-1)^{L_r} \tag{6.5}$$

$$\pi_r = -(-1)^{L_r} \quad \text{rayonnement magnétique multipolaire} \tag{6.6}$$

$$\pi_i = \pi_f (-1)^{L_r+1} \tag{6.7}$$

Le **tableau 6a** fournit la nomenclature adoptée pour la caractérisation des émissions gamma au sein du noyau atomique et en application des relations (6.3) et (6.4) :

Tableau 6a. Classification des transitions (désintégrations) gamma selon leurs types de multipolarités électrique et magnétique.

Désignation du moment ou type de multipolarité	Notation	Moment angulaire $L_r$	Parité $\pi_r$
Électrique dipolaire	<b>E1</b>	1	-1
Magnétique dipolaire	<b>M1</b>	1	+1
Électrique quadrupolaire	<b>E2</b>	2	+1
Magnétique quadrupolaire	<b>M2</b>	2	-1
Électrique octupolaire	<b>E3</b>	3	-1

Le passage d'un état quantique initial  $i \equiv J_i^{\pi_i}$  à un état quantique final  $f \equiv J_f^{\pi_f}$  est illustré par les exemples suivants :

- la transition  $2^+ \rightarrow 0^+$  est dominée par un rayonnement de type E2 ;
- la transition  $\frac{1^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2}$  est dominée par une transition de type E1 ;

<sup>182</sup> W. E. Meyerhof, *Éléments de physique nucléaire*, op. cit., pp. 138-143.  
<sup>183</sup> I. Sakho, *Nuclear Physics 1 – Nuclear deexcitations, spontaneous nuclear reactions*, Wiley, London, 2021, p. 104 et sq.

- la transition  $2^+ \rightarrow 2^+$  est dominée par un rayonnement de type M1 ;
- la transition  $0^+ \rightarrow 0^+$  ( $L_r = 0$ ) ne donne pas lieu à une émission de  $\gamma$  parce qu'une charge électrique élémentaire (ou monopôle électrique) ne rayonne pas et qu'il n'y a pas de monopôle magnétique.

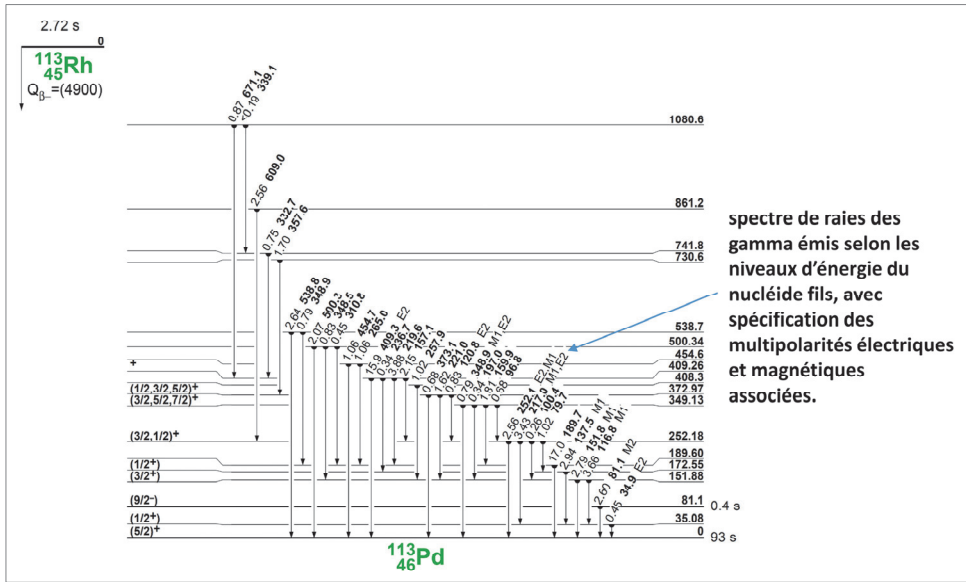


Figure 20a. Illustration des désintégrations gamma accompagnant la décroissance radioactive  $\beta^-$  du rhodium 113. Les types de multipolarités électriques et magnétiques associés aux transitions gamma sont mentionnés lorsqu'ils sont connus (valeurs inclinées).<sup>184</sup>

## 6.2. Durées de vie des états excités

On montre, dans le cadre d'une approche semi-classique/semi-quantique, dans laquelle on fait osciller un proton dans le noyau atomique selon un mouvement périodique simple, que la constante de désintégration radioactive gamma,  $\lambda_\gamma$ , dépend de l'énergie  $E_\gamma$  du gamma susceptible d'être émis ; elle est approximativement donnée par la relation<sup>185</sup> :

$$\lambda_\gamma \sim \frac{e^2 R^2 E_\gamma^3}{3 \hbar^4 c^3} = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{R^2 E_\gamma^3}{3 \hbar^3 c^2} \approx \frac{1}{137} \frac{R^2 E_\gamma^3}{3 \hbar^3 c^2} \quad (6.1)$$

où :

- $e$  est la charge de l'électron ;

<sup>184</sup> D'après R. B. Firestone, *Tables of Isotopes, Volume I & II*, Wiley, USA (avec C.D. ROM), 1996.

<sup>185</sup> W. E. Meyerhof, *Éléments de physique nucléaire*, Dunod, Paris, 1970, p. 136.

- $R$  est le rayon du noyau atomique pris comme amplitude caractéristique du mouvement oscillatoire périodique choisi :  $R = r_0 A^{1/3} \approx 1.45 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  cm,  $A$  étant le nombre de masse ;
- $e^2/\hbar c \approx 1/137$  est la « constante de structure fine ».

### Exemple

En prenant  $A = 60$  et un photon émis à l'énergie  $E_\gamma = 1.2$  MeV, on obtient l'ordre de grandeur suivant :

$$\lambda_\gamma \approx \frac{1}{137} \frac{\left(1.45 \cdot 10^{-13} \times (60)^{1/3}\right)^2 \times (1.2)^3}{3 \times \left(\frac{4.136 \cdot 10^{-21}}{2 \times 3.14}\right)^3 \times (3 \cdot 10^{10})^2} \approx 5.3 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

ce qui correspond à une période de désintégration  $T_\gamma$  :

$$T_\gamma = \frac{\ln 2}{\lambda_\gamma} = \frac{0.693}{5.3 \cdot 10^{15}} \approx 1.3 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

Puisqu'il existe des cas pour lesquels les périodes de désintégration gamma sont beaucoup plus élevées, cela signifie que le modèle simple utilisé pour aboutir à la relation (6.1) ne s'y applique pas, ne prenant pas en compte des phénomènes physiques additionnels à l'évidence importants.

Les demi-vies (ou périodes) des niveaux de désexcitation par voie gamma,  $T$ , sont déduites de manière approximative des « **estimations de Weisskopf** » (ou **single-particle transition half-lives**)<sup>186 187 188 189</sup> qui dépendent à la fois de l'énergie du rayonnement gamma émis  $E_\gamma$ , du nombre de masse ( $A$ ) du noyau atomique émetteur, de l'ordre multipolaire (noté  $l$ , avec ici  $l = L_\gamma$ ), tout en distinguant les transitions multipolaires électriques et magnétiques.

- Les demi-vies des transitions multipolaires électriques,  $T_{El}(s)$ , sont de la forme :

$$T_{El}(s) \propto E_\gamma^{-(2l+1)} A^{-(2l/3)} \quad (6.8)$$

Avec l'énergie  $E_\gamma$  exprimée en keV, on a :

$$E1 : T_{E1}(s) = \frac{6.76 \cdot 10^{-6}}{E_\gamma^3 A^{2/3}} \quad (6.9)$$

<sup>186</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical nuclear physics*, Springer Verlag, New York, 1979, pp. 623-639 ; voir p. 627 les expressions (6.8) et (6.9) données des périodes  $T_{El}(s)$  et  $T_{Ml}(s)$ .

<sup>187</sup> R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., pp. 14179-14180 et sq.

<sup>188</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, op. cit., pp. 331-351.

<sup>189</sup> I. Sakho, *Nuclear Physics 1 – Nuclear deexcitations, spontaneous nuclear reactions*, op. cit., pp. 109-111.



$$E2 : T_{E2}(s) = \frac{9.52 \cdot 10^6}{E_Y^5 A^{4/3}} \quad (6.10)$$

$$E3 : T_{E3}(s) = \frac{2.04 \cdot 10^{19}}{E_Y^7 A^2} \quad (6.11)$$

$$E4 : T_{E4}(s) = \frac{6.50 \cdot 10^{31}}{E_Y^9 A^{8/3}} \quad (6.12)$$

$$E5 : T_{E5}(s) = \frac{2.89 \cdot 10^{44}}{E_Y^{11} A^{10/3}} \quad (6.13)$$

- Les demi-vies des transitions multipolaires magnétiques,  $T_{Ml}(s)$ , sont de la forme :

$$T_{Ml}(s) \propto E_Y^{-(2l+1)} A^{-(2l-2)} \quad (6.14)$$

Avec l'énergie  $E_Y$  exprimée en keV on a :

$$M1 : T_{M1}(s) = \frac{2.20 \cdot 10^{-5}}{E_Y^3} \quad (6.15)$$

$$M2 : T_{M2}(s) = \frac{3.10 \cdot 10^7}{E_Y^5 A^{2/3}} \quad (6.16)$$

$$M3 : T_{M3}(s) = \frac{6.66 \cdot 10^{19}}{E_Y^7 A^{4/3}} \quad (6.17)$$

$$M4 : T_{M4}(s) = \frac{2.12 \cdot 10^{32}}{E_Y^9 A^2} \quad (6.18)$$

$$M5 : T_{M5}(s) = \frac{9.42 \cdot 10^{44}}{E_Y^{11} A^{8/3}} \quad (6.19)$$

Les **figures 20b et 20c** les représentent respectivement. Elles manifestent la très grande sensibilité de la période radioactive de désexcitation gamma vis-à-vis de l'ordre multipolaire  $l$  ; en effet, un changement de la valeur de  $l$  d'une unité montre que les périodes  $T_{El}(s)$  et  $T_{Ml}(s)$  varient de plusieurs décades, jusqu'à environ 7 décades (facteur  $10^7$ ) par exemple pour  $Z = 30$  (zinc).

### Remarque

Les expressions (6.9) à (6.13) et (6.15) à (6.19) résultent d'un modèle simplifié qui considère, au cours d'une transition, le changement d'état d'une particule au sein du noyau atomique, en l'occurrence d'un proton (*single-particle transition*). Elles permettent une intercomparaison aisée en relatif des durées de vie des niveaux excités du noyau atomique considéré se désexcitant par voie gamma. Elles comportent une correction visant à tenir compte du phénomène de **conversion interne** (voir § 7 suivant). Les estimations théoriques de Weisskopf doivent être croisées avec les valeurs expérimentales de ces périodes radioactives afin de délimiter le domaine d'énergie réel des transitions

multipolaires possibles.<sup>190 191</sup> Selon les noyaux atomiques et les types de transition, les estimations théoriques peuvent fortement surestimer ou sous-estimer les valeurs réelles. Le ratio entre la durée de vie issue de la mesure et la durée de vie théorique est appelé « facteur d'empêchement » (« *hindrance factor* »). Les bases de données<sup>192</sup> utilisent les « probabilités de transition multipolaire électrique et magnétique réduites » en « unités Weisskopf » [W.u] et respectivement notées B(EL) et B(ML).

---

<sup>190</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical nuclear physics*, *op. cit.*, p. 632, table 6.1.

<sup>191</sup> W. E. Meyerhof, *Éléments de physique nucléaire*, *op. cit.*, 1970, pp. 143-144, figure 4.7.

<sup>192</sup> Voir par exemple : R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, *op. cit.*, pp. 14179 *et sq.* et la *Live Chart of Nuclides* de l'AIEA, <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>, onglet « Gammas ».

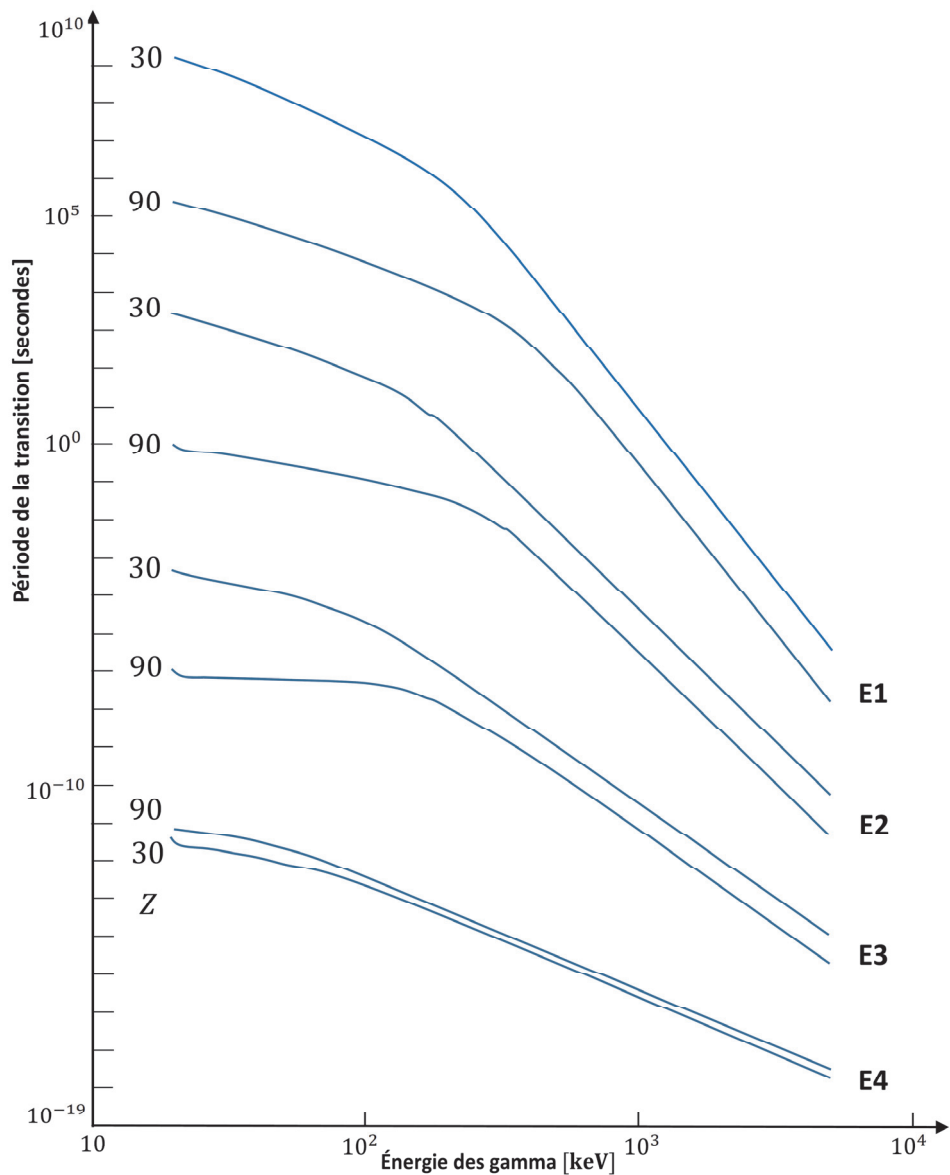


Figure 20b. Allure des périodes de désintégration radioactive gamma (en secondes) relatives aux transitions multipolaires électriques des nucléides de numéros atomiques respectifs  $Z = 30$  (zinc) et  $Z = 90$  (thorium), en fonction de l'énergie des gamma émis exprimée en keV (estimation de Weisskopf avec correction pour la conversion interne).<sup>193</sup>

<sup>193</sup> D'après R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., p. 14181, figure 1.

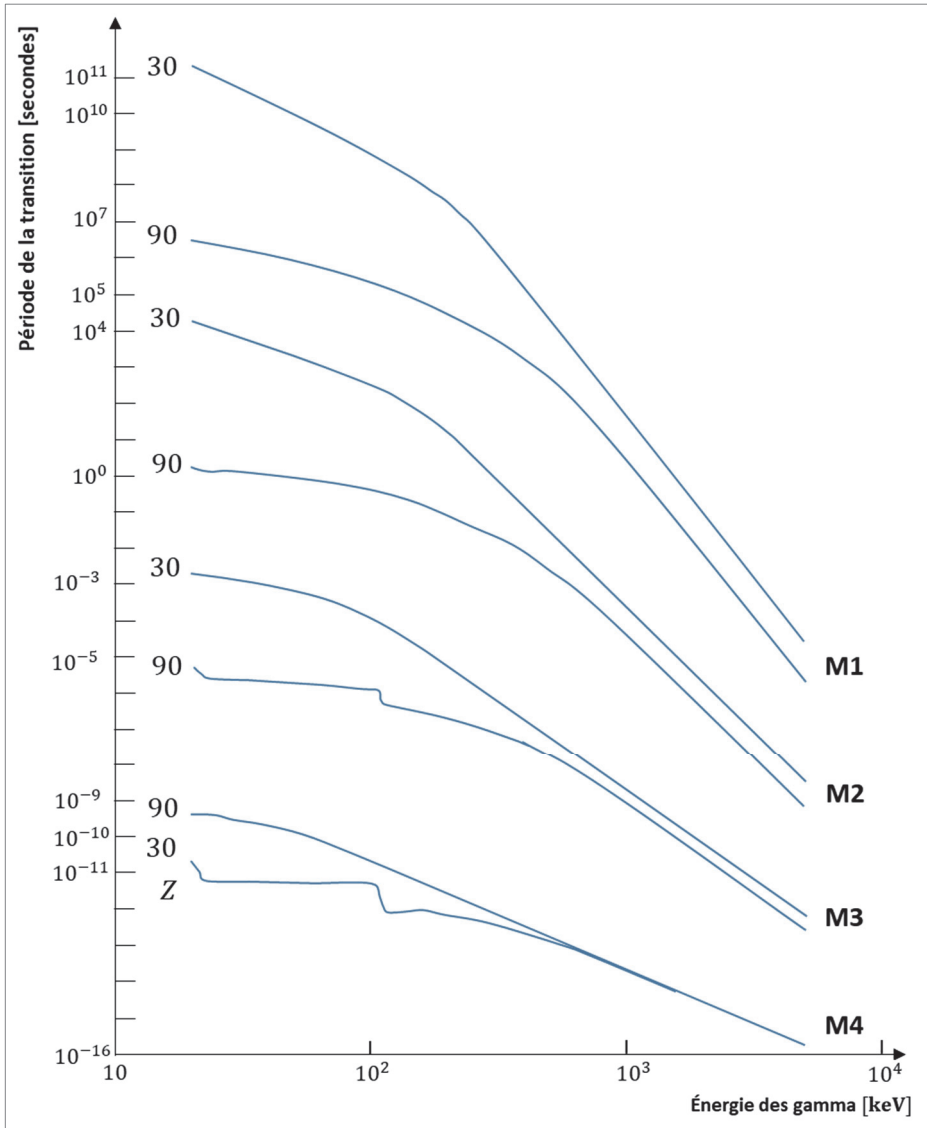


Figure 20c. Périodes de désintégration radioactive gamma (en secondes) relatives aux transitions multipolaires magnétiques des nucléides de numéros atomiques respectifs  $Z = 30$  (zinc) et  $Z = 90$  (thorium), en fonction de l'énergie des gamma émis exprimée en keV (estimation de Weisskopf avec correction pour la conversion interne).<sup>194</sup>

<sup>194</sup> D'après R. B. Firestone, *Tables of Isotopes, op. cit.*, p. 14182, figure 2.

À l'instar des autres processus radioactifs, les constantes de désintégration radioactives,  $\lambda_{El}(s^{-1})$  et  $\lambda_{Ml}(s^{-1})$  se déduisent des périodes de désintégration respectives  $T_{El}(s)$  et  $T_{Ml}(s)$  :

$$\lambda_{El}(s^{-1}) = \frac{\ln 2}{T_{El}(s)}, \quad \lambda_{Ml}(s^{-1}) = \frac{\ln 2}{T_{Ml}(s)} \quad (6.20)$$

D'après la mécanique quantique, la largeur  $\Gamma_\gamma$  du niveau d'énergie d'émission d'un gamma et la durée de vie moyenne  $\tau$  de ce même niveau d'énergie sont reliées par la relation d'incertitude d'Heisenberg :

$$\Gamma_\gamma \tau = \frac{\Gamma_\gamma}{\lambda} = \hbar \quad (6.21)$$

où  $\lambda = 1/\tau$  est la constante de décroissance radioactive.

Il est donc possible à partir de (6.21) de déterminer les largeurs  $\Gamma_{\gamma El}$  et  $\Gamma_{\gamma Ml}$  qui s'identifient également à la largeur à mi-hauteur de la distribution en probabilité  $\mathcal{P}(E_\gamma)$  de trouver le noyau excité à une énergie  $E_\gamma$  autour de l'énergie  $E_{\gamma 0}$  du niveau d'énergie considéré. On montre que cette distribution en probabilité est une lorentzienne (similaire à la forme des résonances neutroniques : voir chapitre 8 annexe IV) :

$$\mathcal{P}(E_\gamma) \propto \frac{1}{(E_\gamma - E_{\gamma 0})^2 + \left(\frac{\Gamma_\gamma}{2}\right)^2} \quad (6.22)$$

Avec (6.21), on a immédiatement :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma El} &= \hbar \lambda_{El} = 6.58 \cdot 10^{-16} \text{ (eV s)} \times \lambda_{El} \text{ (s}^{-1}\text{)} , \\ \Gamma_{\gamma Ml} &= \hbar \lambda_{Ml} = 6.58 \cdot 10^{-16} \text{ (eV s)} \times \lambda_{Ml} \text{ (s}^{-1}\text{)} \end{aligned} \quad (6.23)$$

On a ainsi, en utilisant par exemple successivement les relations (6.9) à (6.11) et (6.15) à (6.17) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma E1} \text{ (eV)} &= 6.58 \cdot 10^{-16} (\ln 2) \frac{E_\gamma^3 A^{2/3}}{6.76 \cdot 10^{-6}} = 6.67 \cdot 10^{-11} \times E_\gamma^3 A^{2/3} \text{ (} E_\gamma \text{ en keV)} \\ &\equiv 6.67 \cdot 10^{-2} \times E_\gamma^3 A^{\frac{2}{3}} \text{ (} E_\gamma \text{ en MeV)} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma E2} \text{ (eV)} &= 6.58 \cdot 10^{-16} (\ln 2) \frac{E_\gamma^5 A^{4/3}}{9.52 \cdot 10^6} = 4.79 \cdot 10^{-23} \times E_\gamma^5 A^{4/3} \text{ (} E_\gamma \text{ en keV)} \\ &\equiv 4.79 \cdot 10^{-8} \times E_\gamma^5 A^{\frac{4}{3}} \text{ (} E_\gamma \text{ en MeV)} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma E3} \text{ (eV)} &= 6.58 \cdot 10^{-16} (\ln 2) \frac{E_\gamma^7 A^2}{2.04 \cdot 10^{19}} = 2.23 \cdot 10^{-35} \times E_\gamma^7 A^2 \text{ (} E_\gamma \text{ en keV)} \\ &\equiv 2.23 \cdot 10^{-14} \times E_\gamma^7 A^2 \text{ (} E_\gamma \text{ en MeV)} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\gamma M1}(\text{eV}) &= 6.58 \cdot 10^{-16} (\ln 2) \frac{E_\gamma^3}{2.20 \cdot 10^{-5}} = 2.07 \cdot 10^{-11} \times E_\gamma^3 \quad (E_\gamma \text{ en keV}) \\ &\equiv 2.07 \cdot 10^{-2} \times E_\gamma^3 \quad (E_\gamma \text{ en MeV})\end{aligned}\quad (6.27)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\gamma M2}(\text{eV}) &= 6.58 \cdot 10^{-16} (\ln 2) \frac{E_\gamma^5 A^{2/3}}{3.10 \cdot 10^7} = 1.47 \cdot 10^{-23} \times E_\gamma^5 A^{2/3} \quad (E_\gamma \text{ en keV}) \\ &\equiv 1.47 \cdot 10^{-8} \times E_\gamma^5 A^{\frac{2}{3}} \quad (E_\gamma \text{ en MeV})\end{aligned}\quad (6.28)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\gamma M3}(\text{eV}) &= 6.58 \cdot 10^{-16} (\ln 2) \frac{E_\gamma^7 A^{4/3}}{6.66 \cdot 10^{19}} = 6.85 \cdot 10^{-36} \times E_\gamma^7 A^{4/3} \quad (E_\gamma \text{ en keV}) \\ &\equiv 6.85 \cdot 10^{-15} \times E_\gamma^7 A^{\frac{4}{3}} \quad (E_\gamma \text{ en MeV})\end{aligned}\quad (6.29)$$

Les valeurs de ces largeurs se trouvent également consignées dans des bases de données.<sup>195</sup>

### 6.3. Transitions isométriques

L'existence de noyaux atomiques particuliers dénommés **isomères** a été mentionnée dans le chapitre 3.

Les isomères se dés excitent vers l'état fondamental au bout d'une durée variable de la nanoseconde à plusieurs années selon leur nature. Les physiciens nucléaires classent les isomères en trois catégories<sup>196</sup> :

- les **isomères de forme**, qui, par rapport à l'état fondamental, présentent une déformation provoquant la formation d'un puits de potentiel nucléaire dont il reste « prisonnier » durant un temps d'autant plus long que ce puits est profond ;
- les **isomères de spin** caractérisés par des états excités dont le spin est très différent de celui des niveaux quantiques inférieurs : plus l'énergie de la transition vers un état quantique inférieur est petite et la multipolarité de cette transition est élevée, plus la durée de vie de l'isomère de spin considéré est longue ;
- les « **isomères K** » font référence au nombre quantique « K » représentant la projection du spin (ou moment angulaire) total du noyau atomique sur l'axe de symétrie du noyau déformé : la dés excitation se produit vers un autre état quantique de nombre quantique « K' » tel que l'écart entre K et K' est supérieur à l'ordre multipolaire de la transition.

Les dés excitations de ces isomères sont aussi appelées « **transitions isomériques** » (*isomeric transitions*, IT). Le **tableau 6b** en donne quelques exemples.

<sup>195</sup> Voir par exemple : R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit.

<sup>196</sup> [http://www-phynu.cea.fr/themes\\_recherche/isomerie/isomerie.htm](http://www-phynu.cea.fr/themes_recherche/isomerie/isomerie.htm).

Tableau 6b. Exemples de transitions isomériques de noyaux atomiques métastables.<sup>197</sup>

Isomère	Spin		Forme		K	
Noyau	<sup>235</sup> <sub>92</sub> U		<sup>238</sup> <sub>92</sub> U		<sup>177</sup> <sub>71</sub> Lu	
Niveau	Fondamental	Isomère	Fondamental	Isomère	Fondamental	Isomère
Spin/Parité	7 <sup>-</sup> / <sub>2</sub>	1 <sup>+</sup> / <sub>2</sub>	0 <sup>+</sup>	0 <sup>+</sup>	7 <sup>+</sup> / <sub>2</sub>	23 <sup>-</sup> / <sub>2</sub>
Période radioactive	7.038 10 <sup>8</sup> ans	26.8 minutes	4.468 10 <sup>9</sup> ans	280 nanosecondes	6.647 jours	160.44 jours
Énergie niveau isomérique	76.8 eV		2.5579 MeV		970.175 keV	
Transition	E3		E2			

Il est utile de mentionner ici l’« **effet Pandemonium** » qui se manifeste dans le cas de transitions bêta de nucléides ayant une énergie d’excitation élevée : la **spectroscopie gamma** de tels noyaux soulève des difficultés d’interprétation<sup>198</sup> liées au grand nombre d’états excités émetteurs de gamma et à leur proximité.<sup>199 200 201</sup>

Remarque

Il est à noter qu’une transition entre deux états quantiques de même moment angulaire et de même parité contient une composante « E0 » correspondant à une transition électrique monopolaire.<sup>202 203</sup>

Dans les cas où le moment angulaire est nul ( $J_i^{\pi_i} = J_f^{\pi_f} = 0^+$ ) et si la différence d’énergie entre ces deux niveaux est supérieure à deux fois la masse au repos de l’électron, alors la transition a lieu avec l’émission d’une paire électron-positron, suivie de l’émission de deux photons résultant du processus d’annihilation du positron. Un exemple en est donné par la décroissance radioactive de l’oxygène 14 (<sup>14</sup>O noyau pair-pair) par processus  $\beta^+$  ou capture électronique vers l’azote 14, et qui présente une transition  $0^+ \rightarrow 0^+$  dont le  $\log(ft) = 3.5$  : il s’agit d’une transition **super-permise** d’après le **tableau 5** et la **figure 20d**.

Ce phénomène est à distinguer du processus de **conversion interne** qui fait l’objet du paragraphe 7 suivant.

<sup>197</sup> [http://www-phynu.cea.fr/themes\\_recherche/isomerie/isomerie.htm](http://www-phynu.cea.fr/themes_recherche/isomerie/isomerie.htm).

<sup>198</sup> Ces difficultés sont reflétées par le nom attribué à cet effet qui évoque l’Enfer.

<sup>199</sup> J. C. Hardy, L. C. Carraz, B. Jonson, P. G. Hansen, « The essential decay of pandemonium: A demonstration of errors in complex beta-decay schemes », *Physics Letters B* 71.2, 1977, pp. 307-310, [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90223-4](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90223-4).

<sup>200</sup> A.-A. Zakari, *Étude des propriétés de désintégration bêta de produits de fission d’intérêt pour les spectres en énergie des antineutrinos et la puissance résiduelle des réacteurs nucléaires*, Thèse de doctorat, Université Nantes Angers Le Mans, 7 mai 2015, pp. 18-20.

<sup>201</sup> A. Algora, J. L. Tain, B. Rubio, M. Fallot, W. Gelletly, « Beta-decay studies for applied and basic nuclear physics », *Eur. Phys. J. A*, 2021, pp. 57-85, <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-020-00316-4>.

<sup>202</sup> D. H. Wilkinson, « Evaluation of E0 pair transitions », *Nuclear Physics A* 133, 1969, pp. 1-9, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(69\)90444-8](https://doi.org/10.1016/0375-9474(69)90444-8).

<sup>203</sup> T. Kibédi, R. H. Spear, « Electric monopole transitions between 0<sup>+</sup> states for nuclei throughout the periodic table », *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 89, 2005, pp. 77-100, <https://doi.org/10.1016/j.adt.2004.11.002>.

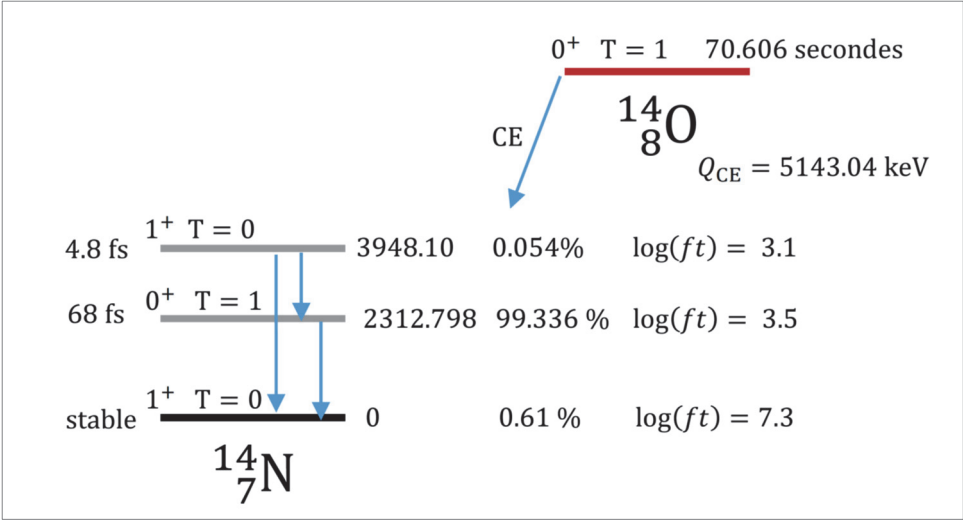


Figure 20d. La décroissance radioactive  $\beta^+$  ou CE de l'oxygène 14 montre une transition  $0^+ \rightarrow 0^+$  ; les deux dernières colonnes de droite indiquent respectivement les probabilités de transitions en % et la valeur du  $\log(ft)$  ; les trois colonnes de gauche fournissent, pour chacun des niveaux d'énergie de l'azote 14, la période de décroissance (fs : femto-seconde,  $10^{-15}$  s), la désignation  $J^\pi$  des niveaux d'énergie ; le symbole T correspond à la valeur de l'isospin (nombre quantique défini au chapitre 4, § 2 où il est noté  $T_z$ ).

7. La conversion interne

Le mouvement (ou le réarrangement) des nucléons à l'intérieur du noyau (passage d'un état quantique  $i$  à un état quantique  $f$ ) peut engendrer un transfert d'énergie direct  $\mathcal{W}$  à un électron du cortège électronique de l'atome et qui en est alors éjecté de sa position avec une énergie cinétique :

$$E_e = \mathcal{W} - E_B \tag{7.1}$$

où  $E_e$  est l'énergie cinétique de l'électron concerné et  $E_B$  son énergie de liaison de l'électron, dans l'atome considéré.

L'atome ainsi laissé dans un état excité d'énergie  $E_B$  se désexcite (ou se relaxe) alors selon deux phénomènes possibles, comme le montre la **figure 21** :

- émission d'un **photon de fluorescence X** (émission d'un rayonnement X) ;
- émission d'un **électron** ou « **effet Auger** »<sup>204</sup>, un électron des couches périphériques de l'atome emporte l'énergie d'excitation ; il est dénommé **électron Auger**.

<sup>204</sup> P. Auger, « Sur les rayons  $\beta$  secondaires produits dans un gaz par des rayons X », C.R.A.S. 177, 1923, pp. 169-171, <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3130n/f187.item.langFR#> ; ce phénomène a été également identifié par Lise Meitner à la même période.



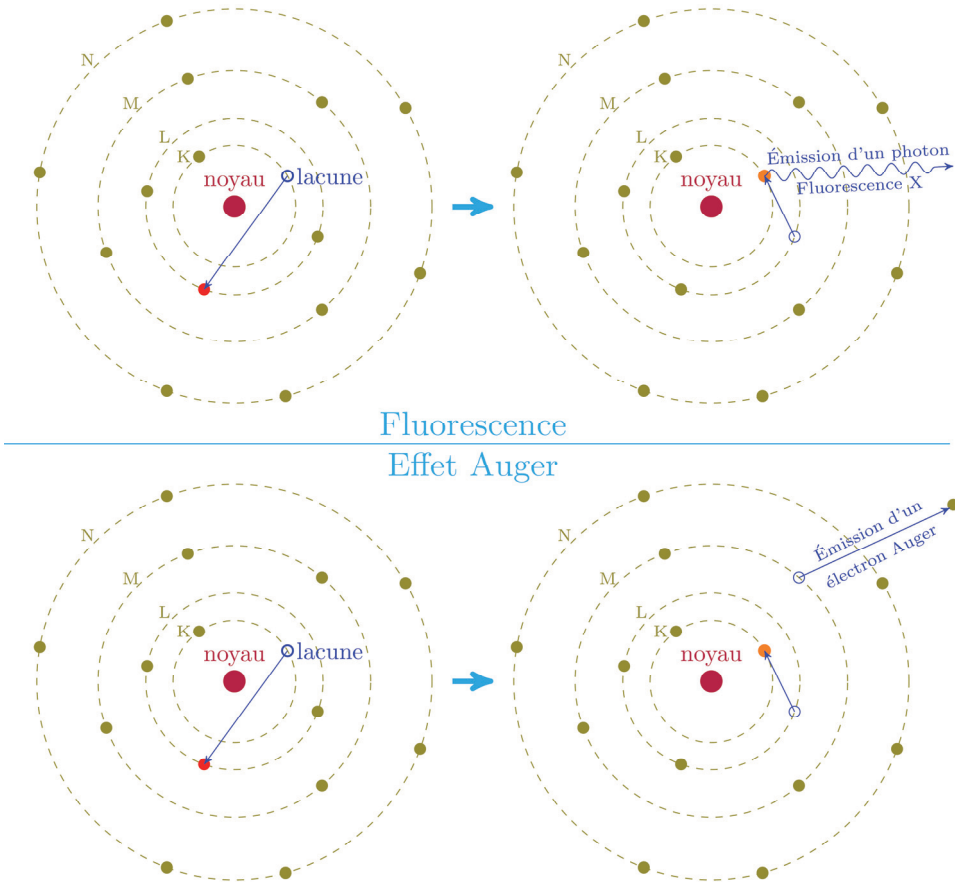


Figure 21. Illustration de phénomènes de conversion interne : le noyau atomique induit une excitation du cortège électronique se traduisant ici par l'éjection d'un électron de la couche vers une autre couche énergétique de l'atome ; il laisse donc une lacune (cercle vide) et l'atome se retrouve alors dans un état excité ; sur le schéma du haut, la désexcitation ou relaxation de l'atome se fait par émission d'un rayonnement X ou photon de « fluorescence X » ; sur le schéma du bas, la désexcitation ou relaxation de l'atome se fait par émission d'un « électron Auger » situé sur une couche plus périphérique (M sur le schéma).

L'émission de rayons X correspond dans la majorité des cas à l'expulsion d'un électron de la couche K de l'atome résiduel.

Dans ce processus dit de **conversion interne**, l'émission d'un électron Auger et l'émission d'un **rayonnement X** sont en compétition. Le processus de conversion interne est lui-même en compétition avec l'émission gamma décrite au paragraphe 6 précédent.

**Exemple**

La désintégration  $\beta^-$  de l'or  $198, {}^{198}_{79}\text{Au}$ , peut aboutir à l'état excité à 0.4118 MeV du mercure  ${}^{198}_{80}\text{Hg}$ , d'une demi-vie de  $23.15 \cdot 10^{-12}\text{s}$ , comme le montre le **tableau 7** :

- dans 95.62 % des cas, ce noyau excité se désexcite vers l'état fondamental en émettant un photon de 0.4118 MeV ;
- dans 2.87 % des cas, la désexcitation se fait par conversion interne avec un électron de la couche K du  $^{198}\text{Hg}$  ;
- dans 1 % des cas, la désexcitation se fait par conversion interne avec des électrons des couches L ;
- dans 0.25 % des cas, la désexcitation se fait par conversion interne avec des électrons des couches M.

**Tableau 7. Informations relatives à la conversion interne associée à la désintégration  $\beta^-$  de l'or 198 vers le mercure 198, extraites d'une base de données nucléaires.<sup>205</sup> En deuxième colonne sont indiquées les énergies cinétiques (en keV) emportées par l'électron de conversion interne. Le tableau de droite rassemble les caractéristiques de l'émission des rayonnements X par le nucléide de mercure 198. La colonne origine utilise la notation spectroscopique conventionnelle de l'IUPAP<sup>206</sup>.**

Émission d'électrons						Émission de rayons X			
#	E <sub>e<sup>-</sup></sub> [keV]	I(abs) [%]	Couche Origine	E <sub>γ</sub> [keV]	Transition [keV] → [keV]	#	E <sub>X,rays</sub> [keV]	I(abs) [%]	Origine
1	328.70	2.87	K	411.8	411.8→EF	1	8.721-14.833	1.19	L
2	397.69	1.009	L	411.8	411.8→EF	2	68.894	0.807	K-L <sub>2</sub>
3	408.51	0.251	L	411.8	411.8→EF	3	70.820	1.369	K-L <sub>3</sub>
4	592.78	0.0174	K	675.9	1087.7→411.8	4	79.825-80.808	0.465	K-M <sub>2,3,4</sub>
5	661.23	0.0031	L	675.9	1087.7→411.8	5	79.825-82.745	0.601	K-MN
6	672.40	0.0007	M	675.9	1087.7→411.8	6	82.425-82.529	0.136	K-N <sub>2,3,4,5</sub> O <sub>2,3</sub>
7	1004.6	0.0007	K	1087.7	1087.7→EF				
8	1073.1	0.0001	L	1087.7	1087.7→EF				
9	1084.2	0.0001	M	1087.7	1087.7→EF				

Ce spectre d'émission de rayons X est par suite spécifique du mercure. On comprend dès lors que son observation a pu être mise à profit pour identifier des noyaux radioactifs, ce qui a été le cas de plusieurs transuraniens.<sup>207</sup>

Pour une couche atomique C donnée (C = K, L, M ...), la compétition qui existe entre l'émission d'un électron et l'émission d'un photon peut être définie à partir de leurs probabilités d'occurrence respectives  $\eta_{e,C}$  et  $\eta_{ph}$ , par le **coefficient de conversion interne** noté  $\alpha_C$ <sup>208 209</sup> :

$$\alpha_C = \frac{\eta_{e,C}}{\eta_{ph}} \quad C = K, L \tag{7.2}$$

<sup>205</sup> <https://nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.

<sup>206</sup> R. Jenkins, R. Manne, R. Robin, C. Senemaud, « Nomenclature system for X-ray spectroscopy » (Recommendations 1991), International Union of Pure and Applied Chemistry, dans *Nomenclature, Symbols, Units and their Usage in Spectrochemical Analysis- VIII*, X-Ray Spectrometry, Vol. 20, 1991, pp. 149-155.

<sup>207</sup> Cité par R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, p. 26.

<sup>208</sup> K. S. Krane, *Introductory nuclear physics*, John Wiley & Sons, New York, 1988, pp. 341-351.

<sup>209</sup> T. Kibédi, T. W. Burrows, M. B. Trzhaskovskaya, P. M. Davidson, C. W. Nestor, Jr. « Evaluation of theoretical conversion coefficients using BrIcc », *Nucl. Instr. and Meth. A* 589 (2008) 202-229, <https://bricc.anu.edu.au/index.php>.

La valeur de  $\alpha_C$  est variable selon la nature du nucléide considéré et, pour un nucléide donné, selon la couche atomique étudiée. Ainsi,  $\alpha_C$  peut passer d'une valeur de l'ordre  $7 \cdot 10^{-7}$  dans le cas du béryllium  $7, {}^7_4\text{Be}$ , qui peut décroître par capture électronique sur le niveau d'énergie 477.612 keV du lithium  $7, {}^7_3\text{Li}$ , de période égale à  $72.8 \cdot 10^{-15}$  s, à une valeur de 497 dans le cas du plutonium 239 suite à une décroissance alpha vers l'uranium 235 sur le niveau d'énergie 13.0401 keV de demi-vie  $5 \cdot 10^{-10}$  s.

### Exemple

En reprenant l'exemple ci-dessus de la désintégration  $\beta^-$  de l'or 198,  ${}^{198}_{79}\text{Au}$ , on obtient les valeurs suivantes du coefficient de conversion interne :

$$\alpha_K = \frac{\eta_{e,K}}{\eta_{ph}} = \frac{2.87 \%}{95.62 \%} = 3 \cdot 10^{-2} ; \alpha_L = \frac{\eta_{e,L}}{\eta_{ph}} = \frac{1 \%}{95.62 \%} = 1.458 \cdot 10^{-2} ;$$

$$\alpha_M = \frac{\eta_{e,M}}{\eta_{ph}} = \frac{0.25 \%}{95.62 \%} = 2.6145 \cdot 10^{-3}$$

Le spectre des électrons émis adopte alors la forme représentée sur la **figure 22**.

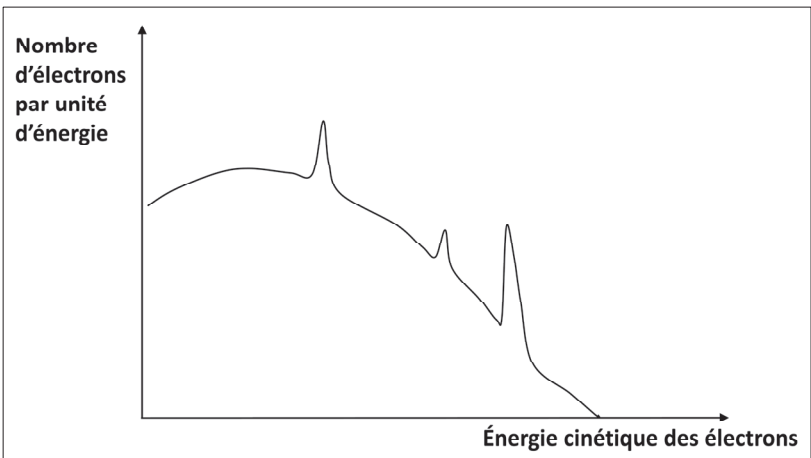


Figure 22. Allure d'un spectre en énergie bêta complété avec celui des électrons Auger responsables des pics observés.<sup>210</sup>

## 8. Émission de neutrons

Des neutrons peuvent être également émis par désintégration radioactive, comme l'illustre le cas du brome 87 de la **figure 23**.

<sup>210</sup> Voir par exemple : A. H. Wapstra, D. Maeder, G. J. Nijh, L. Th. M. Ornstein, « The decay of  ${}^{203}\text{Hg}$ ,  ${}^{203}\text{Pb}$  and  ${}^{201}\text{Pb}$  », *Physica*, Vol. 20, 1–6, 1954, pp. 169-177, [https://doi.org/10.1016/S0031-8914\(54\)80029-2](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(54)80029-2).

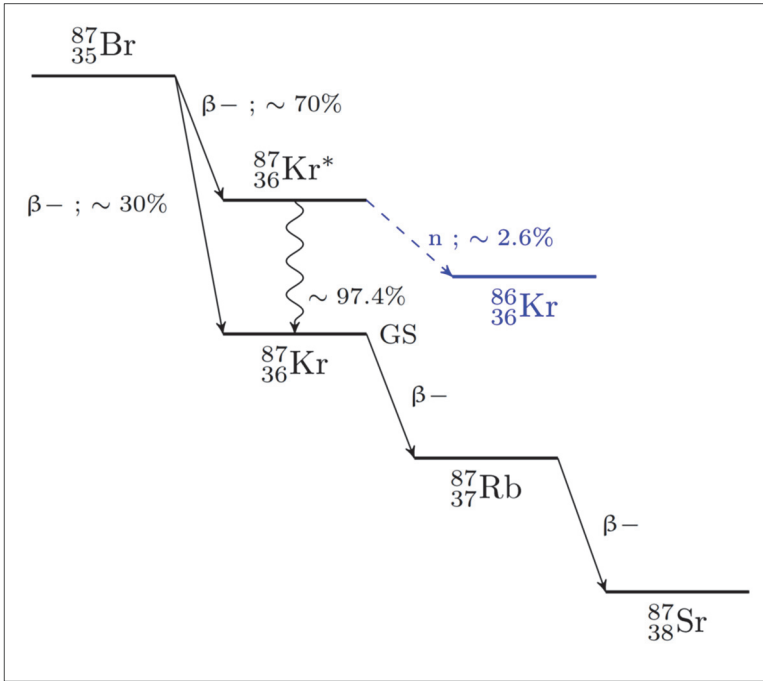
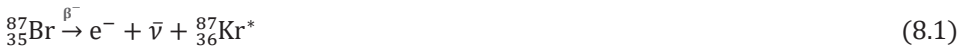


Figure 23. Émission d'un neutron suite à une désintégration  $\beta^-$  ; ce neutron est dénommé « neutron retardé », et le radionucléide  $^{87}_{36}\text{Kr}$  qui l'émet, « précurseur ».

On constate que la voie de désintégration par émission d'un neutron, aboutissant au  $^{86}_{36}\text{Kr}$ , est en compétition avec des transitions qui aboutissent à la formation du  $^{87}_{36}\text{Kr}$ . Dans le cœur d'un réacteur nucléaire, de tels nucléides émetteurs de neutrons par désintégration radioactive sont produits par la fission des noyaux lourds (uranium, plutonium, etc.). Ces produits de fission particuliers sont appelés « **précurseurs** » et les neutrons qu'ils émettent sont qualifiés de « **retardés** » afin de les distinguer des « **neutrons prompts** » de fission. Bien que produits en très petite quantité comparativement aux neutrons prompts (inférieure à 0.7%), les **neutrons retardés** jouent un rôle fondamental dans le contrôle de la réaction en chaîne et par conséquent dans le pilotage des réacteurs nucléaires.

On note  $Q_{\beta^-,n}$  l'énergie disponible du processus nucléaire qui mène à l'émission d'un neutron retardé. Sur l'exemple précédent repris ci-après :



on a :

$$Q_{\beta^-,n} = Q_{\beta^-} + Q_n \quad (8.3)$$

où  $Q_{\beta^-}$  est l'énergie disponible de la transition  $\beta^-$  (8.1) du  $^{87}_{35}\text{Br}$  vers le  $^{87}_{36}\text{Kr}$  et  $Q_n$  l'énergie disponible de la réaction (8.2).

Or  $Q_n$  est égale à l'énergie de séparation,  $S_n$ , du « dernier neutron » changée de signe (voir chapitre 3, § 3.5) :

$$Q_n = -S_n \quad (8.4)$$

Les tables de données nucléaires<sup>211</sup> fournissent les valeurs  $Q_{\beta^-} = 6818$  keV pour le brome 87 et  $S_n = 5515.17$  keV pour le krypton 87. On obtient donc :

$$Q_{\beta^-,n} = Q_{\beta^-} - S_n \quad (8.5)$$

Et numériquement :

$$Q_{\beta^-,n} = 6818 - 5515.17 = 1302.83 \text{ keV} > 0$$

Les neutrons retardés sont présentés plus en détail dans le chapitre 9 consacré à la fission. On verra que certains précurseurs peuvent émettre non pas un unique neutron, mais plusieurs.

## 9. Paraboles de masse, stabilité du noyau atomique

Afin de quantifier certaines grandeurs physiques associées au combustible nucléaire, telles que le bilan matière (ou inventaire en radionucléides), la chaleur dégagée par radioactivité, il est utile d'étudier les **séries isobariques**, c'est-à-dire les transitions existant entre les radionucléides de même nombre de masse  $A$  mais de numéro atomique et nombre de neutrons différents. Une telle situation se présente dans la production des produits de fission issus par exemple de la fission induite par un neutron sur un noyau d'uranium 235. En utilisant la **formule semi-empirique de masse de Bethe-Weizsäcker**, on a vu au chapitre 4 (équation (1.12)) :

- que la masse du noyau atomique peut être exprimée sous une forme analytique parabolique en fonction de  $Z$  (numéro atomique) pour  $A$  fixé :

$$M(A, Z)c^2 = uA + vZ + wZ^2 \pm \delta \quad (9.1)$$

avec :

$$u = M_n c^2 - (a_v - a_a - \frac{a_s}{A^{\frac{1}{3}}}) \quad (9.2)$$

$$v = -4a_a - (M_n c^2 - M_H c^2) \quad (9.3)$$

<sup>211</sup> <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.

$$w = \frac{4a_a}{A} \left( 1 + \frac{A^{\frac{2}{3}}}{\frac{4a_a}{a_c}} \right) \quad (9.4)$$

L'expression (9.1) décrit donc une **parabole de masse** reliant les isobares, c'est-à-dire les nucléides de même nombre de masse  $A$  ;

- que cette **parabole de masse** possède un minimum :

$$Z_0 = -\frac{v}{2w} \quad (9.5)$$

- qu'il faut distinguer les deux cas  **$A$  impair** et  **$A$  pair** qu'obligent à différencier respectivement les valeurs nulle et non nulle du terme d'appariement  $\delta$  apparaissant dans la formule semi-empirique de masse de Bethe-Weizsäcker.

Ce sont ces deux cas de figure que l'on va maintenant examiner plus en détail du point de vue de l'énergie dégagée, l'objectif étant de déterminer celle-ci à l'aide de la formule semi-empirique de masse de Bethe-Weizsäcker modélisée par la forme parabolique (9.1).

### Cas $A$ impair

Dans le cas  $A$  **impair**, le terme  $\delta$  est nul ( $\delta = 0$ ) et il n'existe qu'une seule parabole de masse. On peut exprimer  $M(A, Z)c^2$  en fonction de la masse de l'isobare le plus stable  $M(A, Z_0)c^2$ . En effet, avec (9.5)  $v = -2wZ_0$ , la relation (9.1) appliquée à l'isobare le plus stable,  $(A, Z_0)$ , conduit à :

$$M(A, Z_0)c^2 = uA + vZ_0 + wZ_0^2 = uA - 2wZ_0Z_0 + wZ_0^2 = uA - wZ_0^2 \quad (9.6)$$

En faisant la différence entre (9.1) et (9.6), on obtient :

$$M(A, Z)c^2 - M(A, Z_0)c^2 = uA + vZ + wZ^2 - (uA - wZ_0^2) = vZ + wZ^2 + wZ_0^2 \quad (9.7)$$

En tenant compte à nouveau de (9.5), on obtient :

$$M(A, Z)c^2 - M(A, Z_0)c^2 = -2wZ_0Z + wZ^2 + wZ_0^2 = w(Z - Z_0)^2 \quad (9.8)$$

$$M(A, Z)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w(Z - Z_0)^2 \quad (9.9)$$

On peut alors exprimer les énergies  $Q_\beta$  mises en jeu dans les transitions  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  et capture électronique (CE).

- En reprenant l'expression (4.2) on a **pour la désintégration  $\beta^-$**  :

$$Q_{\beta^-} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z + 1)c^2 \quad (9.10)$$

D'après (9.9), pour un nucléide  $(A, Z + 1)$ , on a immédiatement :

$$M(A, Z + 1)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w[(Z + 1) - Z_0]^2 \quad (9.11)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z + 1)c^2$  dans (9.10) par leurs expressions respectives (9.9) et (9.11), on obtient :

$$Q_{\beta^-} = w(Z - Z_0)^2 - w[(Z + 1) - Z_0]^2 = 2w\left(Z_0 - Z - \frac{1}{2}\right) \quad (9.12)$$

- En reprenant l'expression (4.8), on a pour **la désintégration  $\beta^+$**  :

$$Q_{\beta^+} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z - 1)c^2 - 2M_e c^2 \quad (9.13)$$

D'après la relation (9.9) appliquée au nucléide  $(A, Z - 1)$  :

$$M(A, Z - 1)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w[(Z - 1) - Z_0]^2 \quad (9.14)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z - 1)c^2$  dans (9.13) par leurs expressions respectives (9.9) et (9.14), on obtient :

$$Q_{\beta^+} = w(Z - Z_0)^2 - w[(Z - 1) - Z_0]^2 - 2M_e c^2 = 2w\left(Z - Z_0 - \frac{1}{2}\right) - 2M_e c^2 \quad (9.15)$$

- En reprenant l'expression (5.3), on a pour **la capture électronique (CE)** :

$$Q_{CE} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z - 1)c^2 - E_n \quad (9.16)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z - 1)c^2$  dans (9.16) par leurs expressions respectives (9.9) et (9.14), on obtient :

$$Q_{CE} = 2w\left(Z - Z_0 - \frac{1}{2}\right) - E_n \quad (9.17)$$

Les **figures 24 et 25** permettent de visualiser la parabole de masse formée par les transitions isobariques pour un nombre de masse  $A$  impair.

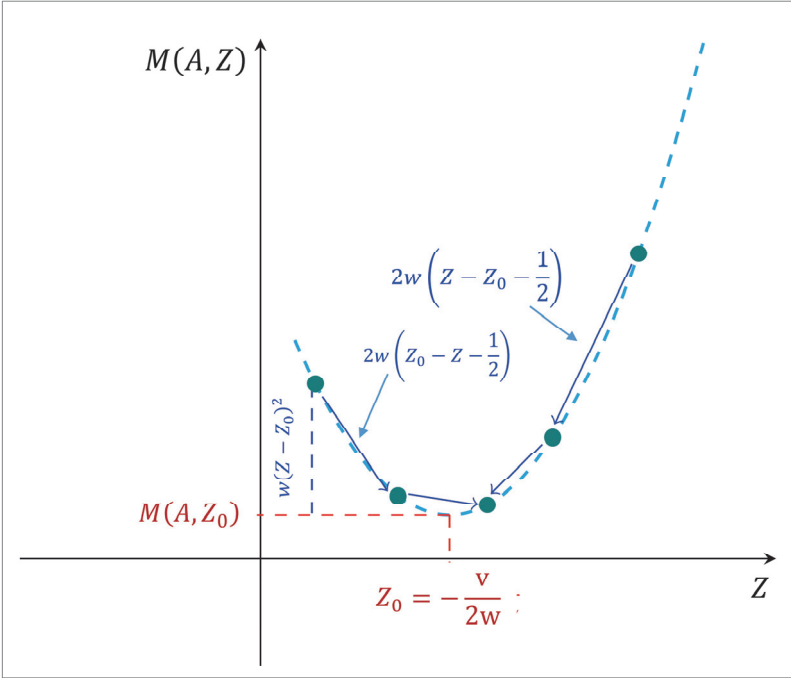


Figure 24. La parabole de masse de nombre de masse  $A$  impair fixé.

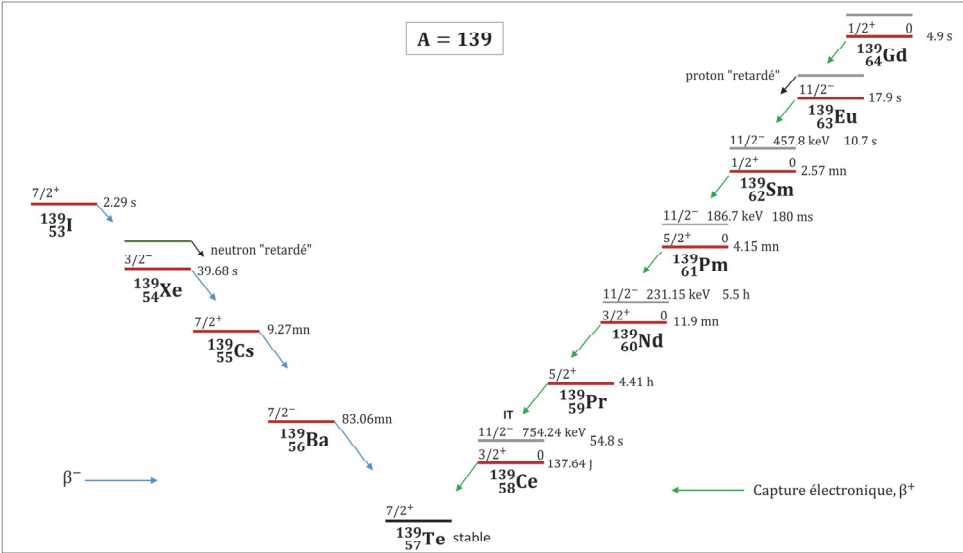


Figure 25. Exemple d'une parabole de masse de  $A$  impair : cas de la série isobarique  $A = 139$ .  $^{139}_{57}\text{La}$  est l'isotope stable de cette série isobarique.

<sup>212</sup> D'après R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., p. 4794.



### Cas $A$ pair

Dans le cas où le nombre de masse  $A$  est **pair**, il existe deux paraboles de masse correspondant aux deux valeurs possibles du terme d'appariement  $\delta$  de la formule semi-empirique de masse de Bethe-Weizsäcker,  $+\delta$  si  $Z$  est impair, et  $-\delta$  si  $Z$  est pair. Ce sont ces deux sous-cas qui sont traités ci-après. La masse de l'isobare le plus stable, qui correspond à l'isobare ayant la masse la plus faible, tous cas confondus, s'écrit :

$$M(A, Z_0)c^2 = uA + vZ_0 + wZ_0^2 - \delta \quad (9.18)$$

▪ **Pour  $Z$  impair**, (9.1) devient :

$$M(A, Z)c^2 = uA + vZ + wZ^2 + \delta \quad (9.19)$$

En faisant la différence entre (9.19) et (9.18), on obtient :

$$M(A, Z)c^2 - M(A, Z_0)c^2 = w(Z - Z_0)^2 + 2\delta$$

d'où :

$$M(A, Z)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w(Z - Z_0)^2 + 2\delta \quad (9.20)$$

• En reprenant l'expression (4.2), on a pour **la désintégration  $\beta^-$**  :

$$Q_{\beta^-} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z + 1)c^2 \quad (9.21)$$

Comme par hypothèse  $Z$  est impair, le nucléide  $(A, Z + 1)$  formé possède un nombre de protons  $(Z + 1)$  pair ; il s'ensuit que sa masse s'écrit :

$$M(A, Z + 1)c^2 = uA + v(Z + 1) + w(Z + 1)^2 - \delta \quad (9.22)$$

d'où :

$$\begin{aligned} M(A, Z + 1)c^2 - M(A, Z_0)c^2 \\ = uA + v(Z + 1) + w(Z + 1)^2 - \delta - [uA + vZ_0 + wZ_0^2 - \delta] \end{aligned} \quad (9.23)$$

et l'on en déduit :

$$M(A, Z + 1)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w[(Z + 1) - Z_0]^2 \quad (9.24)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z + 1)c^2$  dans (9.21) par leurs expressions respectives (9.20) et (9.24), on obtient :

$$Q_{\beta^-} = w(Z - Z_0)^2 + 2\delta - [w[(Z + 1) - Z_0]^2] = 2w\left(Z_0 - Z - \frac{1}{2}\right) + 2\delta \quad (9.25)$$

- En reprenant l'expression (4.8) on a pour **la désintégration  $\beta^+$**  :

$$Q_{\beta^+} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z - 1)c^2 - 2M_e c^2 \quad (9.26)$$

Comme par hypothèse  $Z$  est impair, le nucléide  $(A, Z - 1)$  formé possède un nombre de protons  $(Z - 1)$  pair ; il s'ensuit que sa masse s'écrit :

$$M(A, Z - 1)c^2 = uA + v(Z - 1) + w(Z - 1)^2 - \delta \quad (9.27)$$

d'où :

$$\begin{aligned} M(A, Z - 1)c^2 - M(A, Z_0)c^2 \\ = uA + v(Z - 1) + w(Z - 1)^2 - \delta - [uA + vZ_0 + wZ_0^2 - \delta] \end{aligned} \quad (9.28)$$

et l'on en déduit :

$$M(A, Z - 1)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w[(Z - 1) - Z_0]^2 \quad (9.29)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z - 1)c^2$  dans (9.26) par leurs expressions respectives (9.20) et (9.29), on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+} &= w(Z - Z_0)^2 + 2\delta - w[(Z - 1) - Z_0]^2 - 2M_e c^2 \\ &= 2w\left(Z - Z_0 - \frac{1}{2}\right) + 2\delta - 2M_e c^2 \end{aligned} \quad (9.30)$$

- En reprenant l'expression (5.3), on a pour **la capture électronique CE** :

$$Q_{CE} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z - 1)c^2 - E_n \quad (9.31)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z - 1)c^2$  dans (9.32) par leurs expressions respectives (9.20) et (9.29), on obtient :

$$Q_{CE} = 2w\left(Z - Z_0 - \frac{1}{2}\right) + 2\delta - E_n \quad (9.32)$$

Le terme  $+2\delta$  qui apparaît dans les expressions des énergies  $Q_{\beta^+}$ ,  $Q_{\beta^-}$  et  $Q_{CE}$  traduit le fait que le noyau final aura une stabilité accrue corrélative à un nombre de protons  $(Z + 1)$  devenu pair.

- **Pour  $Z$  pair**, (9.1) devient :

$$M(A, Z)c^2 = uA + vZ + wZ^2 - \delta \quad (9.33)$$

En faisant la différence entre (9.34) et (9.18), on obtient :

$$M(A, Z)c^2 - M(A, Z_0)c^2 = w(Z - Z_0)^2 \quad (9.34)$$

$$M(A, Z)c^2 = M(A, Z_0)c^2 = w(Z - Z_0)^2 \quad (9.35)$$

En reprenant l'expression (4.2), on a pour **la désintégration  $\beta^-$**  :

$$Q_{\beta^-} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z + 1)c^2 \quad (9.36)$$

Comme par hypothèse  $Z$  est pair, le nucléide  $(A, Z + 1)$  formé a un nombre de protons  $(Z + 1)$  impair, il s'ensuit que sa masse s'écrit :

$$M(A, Z + 1)c^2 = uA + v(Z + 1) + w(Z + 1)^2 + \delta \quad (9.37)$$

d'où :

$$\begin{aligned} M(A, Z + 1)c^2 - M(A, Z_0)c^2 \\ = uA + v(Z + 1) + w(Z + 1)^2 + \delta - [uA + vZ_0 + wZ_0^2 - \delta] \end{aligned} \quad (9.38)$$

et l'on en déduit :

$$M(A, Z + 1)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w[(Z + 1) - Z_0]^2 + 2\delta \quad (9.39)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z + 1)c^2$  dans (9.37) par leurs expressions respectives (9.36) et (9.40) on obtient :

$$Q_{\beta^-} = w(Z - Z_0)^2 - [w[(Z + 1) - Z_0]^2 + 2\delta] = 2w\left(Z_0 - Z - \frac{1}{2}\right) - 2\delta \quad (9.40)$$

En reprenant l'expression (4.8), on a pour **la désintégration  $\beta^+$**  :

$$Q_{\beta^+} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z - 1)c^2 - 2M_e c^2 \quad (9.41)$$

Comme par hypothèse  $Z$  est pair, le nucléide  $(A, Z - 1)$  formé possède un nombre de protons  $(Z - 1)$  impair, il s'ensuit que sa masse s'écrit :

$$M(A, Z - 1)c^2 = uA + v(Z - 1) + w(Z - 1)^2 \quad (9.42)$$

d'où :

$$\begin{aligned} M(A, Z - 1)c^2 - M(A, Z_0)c^2 \\ = uA + v(Z - 1) + w(Z - 1)^2 - [uA + vZ_0 + wZ_0^2 - \delta] \end{aligned} \quad (9.43)$$

et l'on en déduit :

$$M(A, Z - 1)c^2 = M(A, Z_0)c^2 + w[(Z - 1) - Z_0]^2 + 2\delta \quad (9.44)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z - 1)c^2$  dans (9.41) par leurs expressions respectives (9.35) et (9.44), on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{\beta^+} &= w(Z - Z_0)^2 - [w[(Z - 1) - Z_0]^2 + 2\delta] - 2M_e c^2 \\ &= 2w\left(Z - Z_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\delta - 2M_e c^2 \end{aligned} \quad (9.45)$$

En reprenant l'expression (5.3), on a pour **la capture électronique (CE)** :

$$Q_{CE} = M(A, Z)c^2 - M(A, Z - 1)c^2 - E_n \quad (9.46)$$

En remplaçant  $M(A, Z)c^2$  et  $M(A, Z - 1)c^2$  dans (9.46) par leurs expressions respectives (9.35) et (9.44) on obtient :

$$Q_{CE} = 2w\left(Z - Z_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\delta - E_n \quad (9.47)$$

Le terme  $-2\delta$  qui apparaît dans les expressions des énergies  $Q_{\beta^+}$ ,  $Q_{\beta^-}$  et  $Q_{CE}$  traduit le fait que le noyau final aura un déficit de stabilité corrélatif à un nombre de protons  $(Z - 1)$  devenu impair. L'écart entre les deux minima de chacune des deux paraboles de masse vaut  $2\delta$ . Les **figures 26 et 27** illustrent les transitions isobariques le long des paraboles de masse dans les cas  $A$  impair et  $A$  pair.

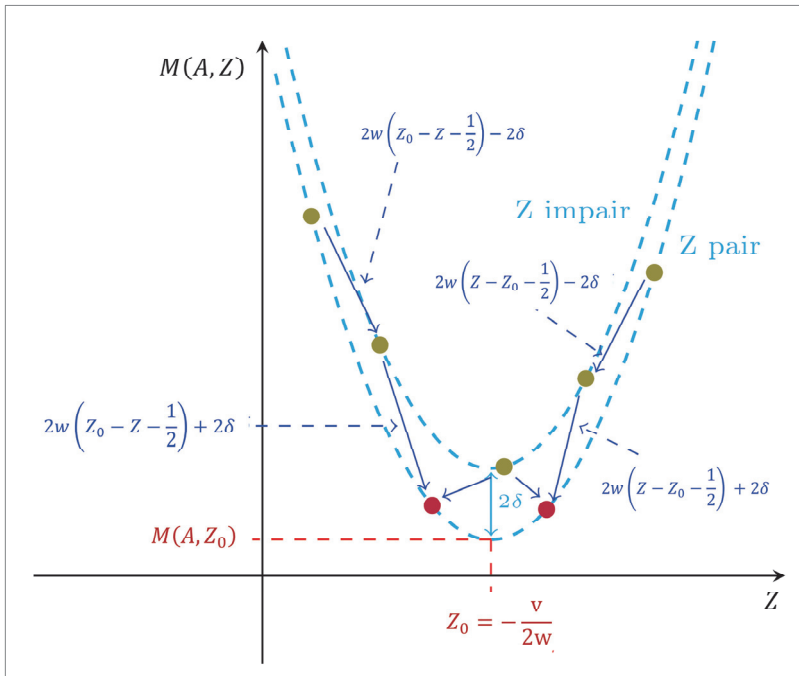


Figure 26. Les deux paraboles de masse de nombre de masse  $A$  pair fixé.

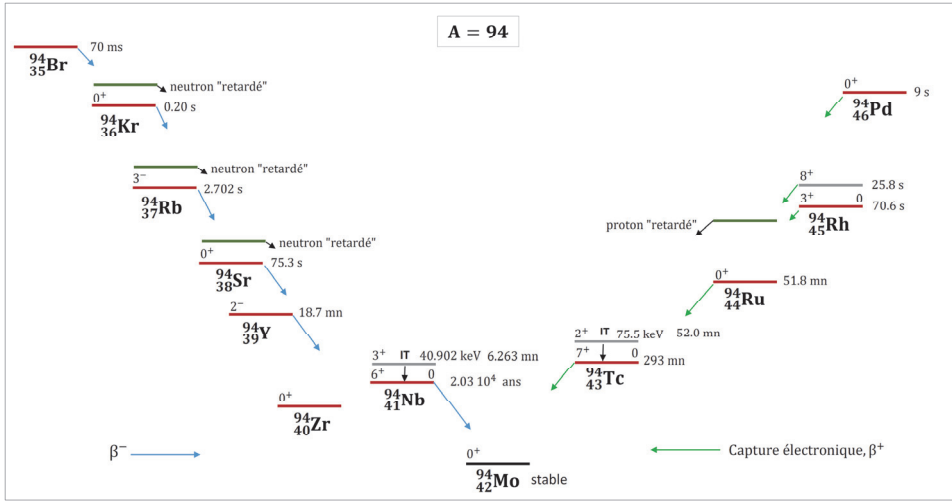


Figure 27. Exemple de deux paraboles de masse, pour  $A$  pair ( $Z$  impair,  $N$  impair) et ( $Z$  pair,  $N$  pair) : cas de la série isobarique  $A = 94$ .<sup>213</sup> Cette série isobarique comporte deux isotopes stables : le  $^{94}_{42}\text{Mo}$  et le  $^{94}_{40}\text{Zr}$ .

### Remarque

Les énergies  $Q_\beta$  et  $Q_{CE}$  mises en jeu dans les transitions bêta et la capture électronique peuvent évidemment être calculées directement à partir de la formule semi-empirique de masse de Bethe-Weizsäcker. Par exemple pour la transition  $\beta^-$ , on considère l'expression (4.9) de l'énergie disponible  $Q_{\beta^-}$  et l'expression (1.9) de l'énergie de liaison donnée dans le chapitre 4 :

$$Q_{\beta^-} = M_n c^2 - M_H c^2 + B(Z+1, A) - B(Z, A) \quad (9.48)$$

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A} - a_a \frac{(A - 2Z)^2}{A} \pm \delta \quad (9.49)$$

$$B(A, Z + 1) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{(Z + 1)^2}{A} - a_a \frac{(A - 2(Z + 1))^2}{A} \pm \delta \quad (9.50)$$

En introduisant (9.49) et (9.50) dans (9.48), on obtient :

- si  $A$  impair :

$$Q_{\beta^-} = M_n c^2 - M_H c^2 + a_c \left[ -\frac{(Z + 1)^2}{A} + \frac{Z^2}{A} \right] + a_a \left[ -\frac{(A - 2(Z + 1))^2}{A} + \frac{(A - 2Z)^2}{A} \right] \quad (9.51)$$

- si  $A$  pair et  $Z$  impair :

<sup>213</sup> D'après R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, op. cit., p. 2577.

$$Q_{\beta^-} = M_n c^2 - M_H c^2 + a_c \left[ -\frac{(Z+1)^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \right] + a_a \left[ -\frac{(A-2(Z+1))^2}{A} + \frac{(A-2Z)^2}{A} \right] + 2\delta \tag{9.52}$$

- si  $A$  pair et  $Z$  pair :
- 

$$Q_{\beta^-} = M_n c^2 - M_H c^2 + a_c \left[ -\frac{(Z+1)^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \right] + a_a \left[ -\frac{(A-2(Z+1))^2}{A} + \frac{(A-2Z)^2}{A} \right] - 2\delta \tag{9.53}$$

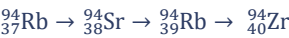
Ces expressions montrent que seuls interviennent les termes de l'énergie de liaison dépendant de la charge du noyau atomique (terme coulombien et terme d'asymétrie neutron-proton), c'est-à-dire du numéro atomique  $Z$ , qui est modifié dans la transition bêta, le nombre de masse  $A$  demeurant le même.

Exemple

En application, on considère la réaction de fission suivante induite par un neutron qui produit 3 neutrons prompts de fission et deux produits de fission le  $^{139}_{55}\text{Cs}$  et le  $^{94}_{37}\text{Rb}$  :



À l'aide des formules (9.52), (9.53), (9.54) et en prenant  $a_c = 0.595$  (MeV) et  $a_a = 19$  (MeV), on détermine numériquement les valeurs de chacune des transitions des deux séries isobariques initiées respectivement par le  $^{139}_{55}\text{Cs}$  et le  $^{94}_{37}\text{Rb}$  :



On obtient respectivement :

Tableau 8. Valeurs de l'énergie libérée par les transitions  $\beta^-$  de la série isobarique  $A = 139$ .

Transition	$Q_{\beta^-}$ (MeV)
${}^{139}_{55}\text{Cs} \rightarrow {}^{139}_{56}\text{Ba}$	4.67
${}^{139}_{56}\text{Ba} \rightarrow {}^{139}_{57}\text{La}$	3.02
Total	7.69

Tableau 9. Valeurs de l'énergie libérée par les transitions  $\beta^-$  de la série isobarique  $A = 94$ .

Transition	$Q_{\beta^-}$ (MeV)
${}^{94}_{37}\text{Rb} \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr}$	10.6
${}^{94}_{38}\text{Sr} \rightarrow {}^{94}_{39}\text{Rb}$	3.3
${}^{94}_{39}\text{Rb} \rightarrow {}^{94}_{40}\text{Zr}$	6.
Total	19.9

L'énergie totale potentiellement dégagée par cette radioactivité bêta est de  $19.9 + 7.69 = 27.59$  MeV. Cette dissipation d'énergie n'est pas simultanée à la fission, mais se déroule dans le

temps, gouvernée par la période radioactive des produits de fission radioactifs formés et celles de leurs descendants par filiation radioactive. Cet aspect est commenté dans le chapitre 9 consacré à la fission.

## 10. Radioactivité : Problème à deux corps et notion d'équilibre radioactif

On considère la filiation radioactive :  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$  où  $X_1$  et  $X_2$  désignent des noyaux radioactifs de constantes de décroissance respectives  $\lambda_1$  – période notée  $T_1$  – et  $\lambda_2$  – période notée  $T_2$ . Le nucléide  $X_3$  est supposé stable. On note  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$  les concentrations (nombre de noyaux par unité de volume,  $\text{cm}^{-3}$  par exemple) respectives de  $X_1$  et  $X_2$  à l'instant  $t$  considéré. Leurs concentrations sont régies par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \quad (10.1)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \quad (10.2)$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t) \quad (10.3)$$

Au temps initial  $t_0 = 0$  on suppose que :

- la concentration du nucléide  $X_1$  est  $N_1(t_0 = 0) = N_{01}$  ;
- la concentration du nucléide  $X_2$  est  $N_2(t_0 = 0) = 0$  ;
- la concentration du nucléide  $X_3$  est  $N_3(t_0 = 0) = 0$ .

- Résolution de l'équation (10.1) donnant  $N_1(t)$

L'équation différentielle (10.1) peut être écrite sous la forme d'une dérivée logarithmique :

$$\frac{\frac{dN_1(t)}{dt}}{N_1(t)} = -\lambda_1 \quad (10.4)$$

soit :

$$\frac{d[\ln N_1(t)]}{dt} = -\lambda_1 \quad (10.5)$$

D'où :

$$\ln N_1(t) = -\lambda_1 t \Rightarrow N_1(t) = C e^{-\lambda_1 t} \quad (10.6)$$

$C$  étant une constante déterminée par les conditions initiales à  $t = t_0$ .

On a donc avec (10.6) :

$$N_1(t_0 = 0) = N_{01} = C \quad (10.7)$$

et :

$$N_1(t) = N_{01}e^{-\lambda_1 t} \quad (10.8)$$

▪ Résolution de l'équation (10.2) donnant  $N_2(t)$

La solution générale de l'équation (10.2) est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

L'équation homogène s'écrit :

$$\frac{dN_2(t)}{dt} + \lambda_2 N_2(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{dN_2(t)}{dt} = -\lambda_2 N_2(t) \quad (10.9)$$

On en déduit immédiatement :

$$N_2(t) = K e^{-\lambda_2 t} \quad (10.10)$$

où  $K$  est une constante.

Pour déterminer une solution particulière, on applique ici la méthode classique de la variation de la constante consistant à poser la constante de (10.10) comme variant avec le temps. Autrement dit, on recherche une solution particulière de la forme :

$$N_2(t) = K(t)e^{-\lambda_2 t} \quad (10.11)$$

On désigne par  $K'(t)$  la dérivée de  $K(t)$  par rapport à  $t$ . En dérivant (10.11) par rapport à la variable temps  $t$ , on obtient :

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = K'(t)e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 K(t)e^{-\lambda_2 t} \quad (10.12)$$

En remplaçant (10.11) et (10.12) dans (10.2), on obtient :

$$K'(t)e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 K(t)e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 K(t)e^{-\lambda_2 t} \quad (10.13)$$

Il en découle :

$$K'(t)e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 N_1(t) \quad (10.14)$$

En remplaçant  $N_1(t)$  par son expression (10.8), on a :



$$K'(t)e^{-\lambda_2 t} = \lambda_1 N_{01} e^{-\lambda_1 t} \quad (10.15)$$

d'où :

$$K'(t) = \lambda_1 N_{01} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} \quad (10.16)$$

En intégrant sur la variable  $t$ , on trouve la solution particulière :

$$K(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} + k \quad (10.17)$$

où  $k$  est une constante d'intégration.

La solution générale cherchée s'écrit donc comme la somme de (10.10) et de (10.11) :

$$N_2(t) = K e^{-\lambda_2 t} + K(t) e^{-\lambda_2 t} \quad (10.18)$$

$$N_2(t) = K e^{-\lambda_2 t} + \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t} + k \right] e^{-\lambda_2 t}$$

$$N_2(t) = (K + k) e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} e^{-\lambda_1 t} \quad (10.19)$$

$(K + k)$  est une constante que l'on note  $c$  et que l'on détermine à l'aide des conditions initiales à  $t = t_0$  introduite dans (10.19) :

$$N_2(t = t_0 = 0) = 0 = c + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} \quad (10.20)$$

d'où :

$$c = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} \quad (10.21)$$

Finalement, la concentration  $N_2(t)$  cherchée est obtenue par la relation (10.22) suivante :

$$N_2(t) = N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}] \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{01} e^{-\lambda_1 t} [1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \quad (10.22)$$

En introduisant les grandeurs d'activités correspondantes  $A_1(t) = \lambda_1 N_1(t)$  et  $A_2(t) = \lambda_2 N_2(t)$ , on obtient la relation :

$$A_2(t) = A_1(t) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \quad (10.23)$$

- Résolution de l'équation (10.3) donnant  $N_3(t)$

Le nucléide  $X_3$  étant stable, il s'accumule au fil du temps ; sa concentration  $N_3(t)$  est obtenue par intégration sur la variable temporelle de l'équation (10.3) :

$$N_3(t) = \int_0^t \lambda_2 N_2(t') dt' \quad (10.24)$$

$$N_3(t) = \int_0^t \lambda_2 N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t'} - e^{-\lambda_2 t'}] dt' \quad (10.25)$$

$$N_3(t) = \lambda_2 N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t [e^{-\lambda_1 t'} - e^{-\lambda_2 t'}] dt' \quad (10.26)$$

$$N_3(t) = \frac{N_{01}}{\lambda_2 - \lambda_1} [\lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 t}) - \lambda_1 (1 - e^{-\lambda_2 t})] \quad (10.27)$$

On voit sur (10.27) que lorsque  $t \rightarrow \infty$ , alors  $e^{-\lambda_1 t} \rightarrow 0$  et  $e^{-\lambda_2 t} \rightarrow 0$ , et par suite  $\lim_{t \rightarrow \infty} N_3(t) = N_{01}$  : tous les nucléides  $X_1$  initialement présents ont disparu par radioactivité et ont été transformés en nucléides  $X_3$ .

### L'équilibre idéal

L'activité de  $X_2$  passe par un **maximum**, car  $N_2(t=0) = N_2(t=\infty) = 0$  : par hypothèse, il n'y a pas de noyaux d'espèce  $X_2$  à  $t = 0$  et lorsque  $t$  tend vers l'infini, tous les noyaux d'espèce  $X_2$  sont tous désintégrés en noyaux de type  $X_3$ .

Le maximum d'activité est obtenu au temps  $t_m$  tel que  $\frac{dN_2(t)}{dt} = 0$  en  $t = t_m$  et l'on obtient :

$$t_m = \frac{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (10.28a)$$

ou bien en remplaçant les constantes de décroissance radioactive par leurs expressions en fonction des vies moyennes  $\tau_1$  et  $\tau_2$  puis des demi-vies (ou périodes radioactives),  $T_1$  et  $T_2$  (voir relations (1.4), (1.5) et (1.6) du paragraphe § 1) respectivement des deux radionucléides considérés :

$$t_m = \tau_2 \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \ln \frac{\tau_1}{\tau_2} \quad (10.28b) \quad ; \quad t_m = 1.44 T_2 \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2} \quad (10.28c)$$

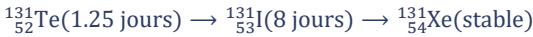
D'après (10.2) à  $t = t_m$  on a l'égalité entre les activités  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$  respectives des nucléides des espèces  $X_1$  et  $X_2$  :

$$A_1(t = t_m) = A_2(t = t_m) = \lambda_1 N_{01} \left[ \frac{T_2}{T_1} \right]^{\frac{T_2}{T_1 - T_2}} \quad (10.29)$$

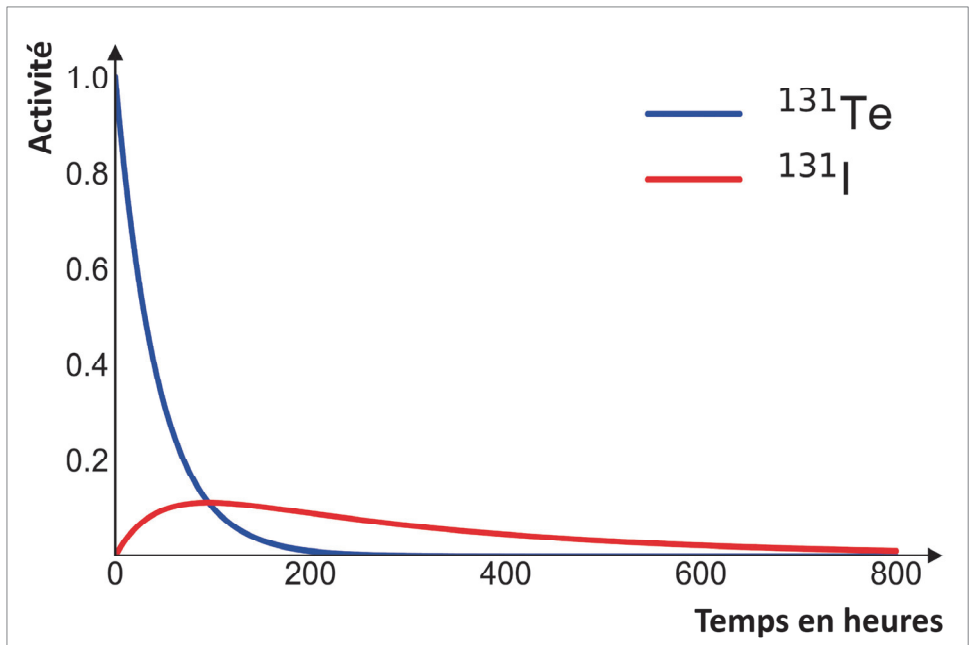
On dit que l'équilibre idéal existe pour  $t = t_m$ .

**Exemple**

La **figure 28** fournit un exemple de problème radioactif à deux corps :



pour lequel l'équilibre idéal est atteint pour  $t_m = 95$  heures , soit 3.96 jours.



**Figure 28.** Exemple d'un problème à deux corps, décroissance radioactive du tellure 131 et de l'iode 131 :  $^{131}_{52}\text{Te}(1.25 \text{ jours}) \rightarrow ^{131}_{53}\text{I}(8 \text{ jours}) \rightarrow ^{131}_{54}\text{Xe}(\text{stable})$ .<sup>214</sup> L'activité initiale à  $t = 0$  est prise égale à une désintégration par jour pour le tellure 131 et nulle pour l'iode 131.

On montre également que sous l'hypothèse  $T_1 = T_2 + \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ , on a une croissance linéaire en fonction du temps du rapport des activités :

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} \approx \frac{t}{\tau_2} \tag{10.30}$$

où  $\tau_2 = \frac{1}{\lambda_2}$  est la vie moyenne de l'isotope radioactif  $X_2$ .

<sup>214</sup> D'après R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, p. 528.

**Cas où  $T_1 < T_2$  (ou  $\lambda_1 > \lambda_2$ )**

Le rapport des activités :  $\frac{A_2(t)}{A_1(t)}$  augmente avec le temps :

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}] \quad (10.31)$$

**Cas où  $T_1 \ll T_2$  (ou  $\lambda_2 \ll \lambda_1$ )**

Alors l'activité  $A_2(t)$  est indépendante de l'activité de  $X_1$ . En effet, comme  $A_1(t) = \lambda_1 N_{01} e^{-\lambda_1 t}$  (voir (10.8) et en utilisant l'hypothèse  $\lambda_2 \ll \lambda_1$  de (10.31) on tire :

$$A_2(t) = N_{01} \lambda_2 [-\varepsilon_1(t) + e^{-\lambda_2 t}] \quad (10.32)$$

où  $\varepsilon_1(t) = \exp(-\lambda_1 t)$  est un terme petit devant  $\exp(-\lambda_2 t)$ .

Si  $t \gg T_1$ , alors :

$$A_2(t) \approx N_{01} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (10.33)$$

Par conséquent, tout se passe comme si on avait eu  $N_2(t = 0) = N_{01}$ .

**Cas où  $T_1 > T_2$  (ou  $\lambda_1 < \lambda_2$ ) – Équilibre de régime**

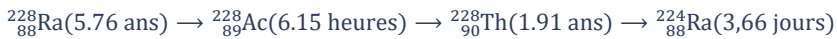
Pour  $t$  grand devant  $\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$ , c'est-à-dire  $(\lambda_2 - \lambda_1)t \gg 1$ , on obtient toujours à partir de (10.31) :

$$\frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{T_2} \frac{T_2 T_1}{T_1 - T_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \quad (10.34)$$

Lorsque  $\frac{T_1}{T_1 - T_2} > 1$ , on se trouve dans une situation dite d'« **équilibre de régime** ».

**Exemple**

On considère la filiation radioactive suivante dans laquelle les périodes de désintégration des radionucléides sont indiquées entre parenthèses :



On montre que :

$$\frac{\text{Activité } {}^{228}_{90}\text{Th}}{\text{Activité } {}^{228}_{88}\text{Ra}} \approx 1.5$$

ce qui caractérise un **équilibre de régime**.

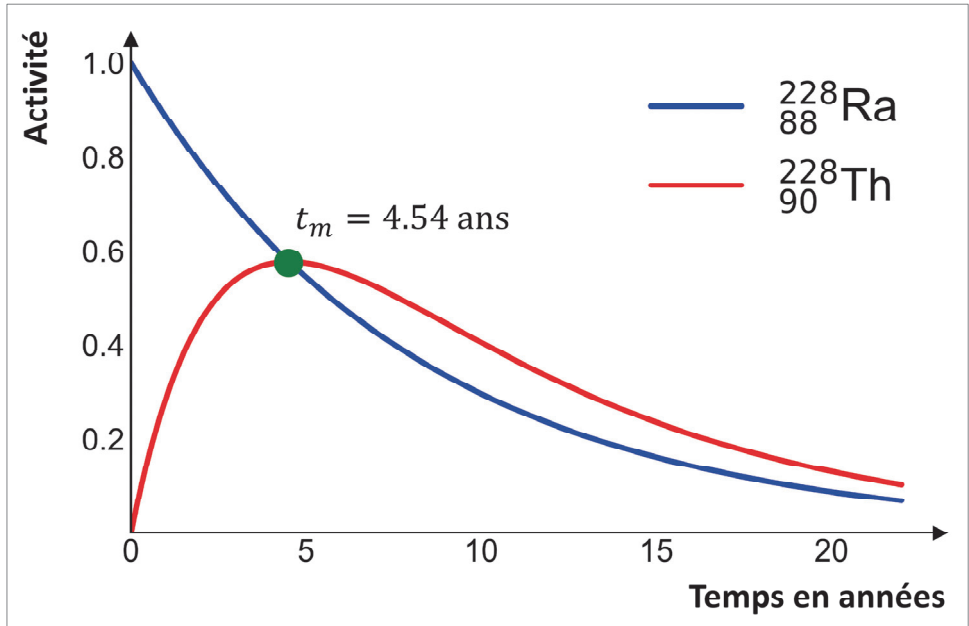


Figure 29. Exemple d'un équilibre de régime relatif au  $^{228}_{88}\text{Ra}$  et au  $^{228}_{90}\text{Th}$ . Le rapport des activités tend vers 1.5.<sup>215</sup> L'activité initiale à  $t = 0$  est prise égale à une désintégration par année pour le radium 228 et nulle pour le thorium 228.

Compte tenu de (10.28c), l'activité maximale du radium 228 est atteinte au bout du temps  $t_m$  suivant :

$$t_m = \tau_2 \frac{T_1}{T_1 - T_2} \ln \frac{T_1}{T_2} = 1.44 \times 1.91 \frac{5.76}{5.76 - 1.91} \ln \frac{5.76}{1.91} = 4.54 \text{ ans}$$

**Cas où  $T_1 \gg T_2$  (ou  $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ) – Équilibre séculaire (ou équilibre radioactif)**

On a immédiatement :

$$A_2(t) = A_1(t)[1 - e^{-\lambda_2 t}] \quad (10.35)$$

et pour  $t \gg T_2$  alors  $A_2(t) \approx A_1(t)$  : cette situation est appelée **équilibre séculaire** ou **équilibre radioactif**.

**Exemple**



<sup>215</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 530.

### Remarque 1

Quand un milieu est soumis à l'irradiation d'un flux de particules, de neutrons par exemple, alors les noyaux  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  peuvent disparaître par réactions nucléaires. On désigne par  $\phi$  (neutrons  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ) ce flux de neutrons : il est supposé constant dans le temps et les neutrons considérés monokinétiques, pour des raisons de simplicité ; on note  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  les sections efficaces neutroniques microscopiques (unités :  $\text{cm}^2$ ) respectives des nucléides  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  à l'énergie des neutrons composant le flux d'irradiation et correspondant à l'ensemble des réactions nucléaires faisant disparaître des nucléides.  $N_1(t)$ ,  $N_2(t)$  et  $N_3(t)$  sont les concentrations respectives des nucléides  $X_1$ ,  $X_2$  et  $X_3$  en un point donné du milieu irradié considéré. Ici, toujours pour alléger l'écriture des équations on omet d'explicitier la variable spatiale.

Durant l'irradiation, les équations (10.1), (10.2) et (10.3) doivent alors être réécrites de la manière suivante :

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) - \sigma_1 \phi N_1(t) \quad (10.36)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) - \sigma_2 \phi N_2(t) \quad (10.37)$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t) - \sigma_3 \phi N_3(t) \quad (10.38)$$

- Les produits  $\sigma_i N_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) s'expriment en  $\text{cm}^{-1}$  et représentent des sections efficaces macroscopiques (voir chapitre 8).
- Les produits  $\sigma_i \phi$  ( $i = 1, 2, 3$ ) s'expriment en  $\text{s}^{-1}$  et représentent des taux de réaction microscopiques ; ils sont homogènes à l'inverse du temps, tout comme les constantes de décroissance radioactive  $\lambda_i$ .
- Les produits  $\sigma_i \phi N_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) s'expriment en nombre de réactions  $\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$  et représentent des taux de réaction macroscopiques. On a supposé ici l'inexistence de réactions nucléaires induites par les neutrons susceptibles de produire spécifiquement les trois types de nucléides ( $i = 1, 2, 3$ ) considérés.

Si d'une part  $X_1$  est un noyau atomique stable, et d'autre part les sections efficaces  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  sont suffisamment petites de telle sorte que l'on puisse négliger les taux de réaction  $\sigma_2 \phi N_2(t)$  et  $\sigma_3 \phi N_3(t)$ , les équations différentielles à résoudre sont alors :

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\sigma_1 \phi N_1(t) \quad (10.39)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \sigma_1 \phi N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \quad (10.40)$$

La résolution de ces deux équations différentielles est formellement similaire à celle précédemment traitée du problème à deux corps radioactifs (en l'absence de flux neutronique). Alors, on a immédiatement (voir relation 10.22) :

$$N_2(t) = N_{01} \frac{\sigma_1 \phi}{\lambda_2 - \sigma_1 \phi} [e^{-\sigma_1 \phi t} - e^{-\lambda_2 t}] \quad (10.41)$$

### Remarque 2

Sur le problème à deux corps traité ci-dessus, on constate qu'à l'évidence les équations différentielles qui régissent les concentrations des nucléides au cours du temps sont d'une part linéaires (elles ne possèdent pas de termes en puissance de  $N_i(t)$  autres que 0 et 1) du premier ordre (seules des dérivées premières apparaissent), et d'autre part couplées (la variation par unité de temps de la concentration  $N_2(t)$  dépend de  $N_1(t)$ , et celle de  $N_3(t)$  à la fois de  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$ ). Elles forment ainsi un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre.

Si l'on considère le problème à 3 corps radioactifs  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4$ , l'équation différentielle qui gouverne la formation des radionucléides  $X_3$  et qui s'ajoute aux deux premières s'écrit :

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t) - \lambda_3 N_3(t) \quad (10.42)$$

Les solutions des deux premières équations différentielles ayant déjà été établies plus haut, on montre similairement que la solution de (10.42) est :

$$N_3(t) = N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_3} \frac{\lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3} e^{-\lambda_3 t} \right] \quad (10.43)$$

Ces équations différentielles se généralisent à une filiation de radionucléides quelconque et prennent alors le nom d'équations de Bateman. H. Bateman (1882-1946) a établi une solution générale de ces équations différentielles (voir annexe II).<sup>216</sup>

Lorsqu'un flux de particules (neutrons notamment dans le contexte de la physique des réacteurs nucléaires) irradie le milieu étudié, alors il faut y incorporer les taux de réaction microscopique au même titre que les constantes de décroissance déjà présentes.<sup>217</sup> Les équations différentielles qui en résultent sont dénommées « **équations de Bateman généralisées** » (voir annexe III). En neutronique, on les dénomme aussi « **équations d'évolution** ». En anglais, les termes « *depletion equations* » et « *burnup equations* » sont souvent rencontrés dans les études portant sur la caractérisation isotopique du combustible nucléaire au cours du temps. L'annexe III en donne la solution générale sous l'hypothèse qu'il n'existe pas de boucles ou retours en arrière dans la chaîne générale des filiations qui relient les nucléides traités.<sup>218</sup> Une résolution numérique permet de lever cette hypothèse.

Les annexes II, III et IV exposent la résolution des équations générales de Bateman dans différentes configurations : en décroissance pure, sous flux neutronique, en décroissance pure avec transfert de nucléides entre deux milieux contigus.

<sup>216</sup> H. Bateman, « The solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations », *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, Vol. 15, 1910, pp. 423-427.

<sup>217</sup> W. Robinson, « The Equations of Radioactive Transformation in a Neutron Flux », *Journal of Chemical Physics*, Vol. 17, number 6, June 1949, pp. 542-547.

<sup>218</sup> *La neutronique*, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions Le Moniteur/CEA, 2013, 2015 (version anglaise), pp. 107-113 ; [http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA\\_Monographie4\\_Neutronique\\_2015\\_Fr.pdf](http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA_Monographie4_Neutronique_2015_Fr.pdf).

## Annexe I : la fonction de Fermi

La **fonction de Fermi** s'écrit <sup>219</sup> :

$$F(Z, \eta) = \eta^{2+2S} e^{\pm \pi \delta} |\Gamma(1 + S + i\delta)|^2 \quad (\text{I} - 1)$$

avec :

$Z$  : numéro atomique

$\eta$  : quantité de mouvement de l'électron après son éjection du noyau, en unité  $M_e c$  ;

$M_e$  : masse au repos de l'électron ;

$c$  : vitesse de la lumière  $\text{m s}^{-1}$  ;

$v$  : vitesse de l'électron  $\text{m s}^{-1}$  ;

$\beta$  : rapport  $\beta = v/c$  (ne pas confondre avec la désignation de la transition bêta :  $\beta$ ) ;

$\gamma$  :  $\gamma = Z/137$  ;

$S$  :  $S = \sqrt{1 - \gamma^2} - 1$  ;

$\delta$  :  $\delta = \gamma/\beta = Z\sqrt{1 + \eta^2}/137.0 \eta$  ;

$\Gamma$  : est la fonction spéciale mathématique gamma.

Dans l'expression de  $F(Z, \eta)$  :

- le signe + devant l'exposant  $\pi\delta$  correspond aux électrons ( $\beta^-$ ) ;
- le signe - devant l'exposant  $\pi\delta$  correspond aux positrons ( $\beta^+$ ) .

Dans la publication en référence, pour  $\eta > 7$ ,  $F(Z, \eta)$  est approximée par la forme analytique suivante :

$$F(Z, \eta) \sim \eta^{2+2S} \left( A + \frac{B}{\eta} + \frac{C}{\eta^2} \right) \quad (\text{I} - 2)$$

dont les coefficients A, B et C sont tabulés.

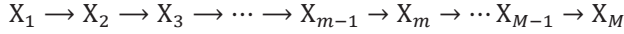
---

<sup>219</sup> *Tables for the analysis of beta spectra*, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 13, 1952, p. 21.



## Annexe II : résolution des équations générales de Bateman

Il s'agit ici d'une généralisation du problème à deux corps traité au paragraphe 10.<sup>220</sup> On considère la chaîne de filiation suivante qui aboutit au nucléide final stable  $X_M$  :



La concentration du nucléide  $X_m$  est régie par l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{dN_m(t)}{dt} = \lambda_{m-1}N_{m-1}(t) - \lambda_m N_m(t) \quad (\text{II} - 1)$$

On détermine les concentrations  $N_m(t)$  respectives des nucléides  $X_m$  par un raisonnement par récurrence. On a déjà vu au paragraphe § 10 que :

- pour  $m = 1$

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \quad (\text{II} - 2)$$

$$N_1(t) = N_{01}e^{-\lambda_1 t} \quad (\text{II} - 3)$$

- pour  $m = 2$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t) \quad (\text{II} - 4)$$

$$N_2(t) = N_{01} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}] = N_{01} \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} \right] \quad (\text{II} - 5)$$

On suppose à présent que :

$$N_{m-1}(t) = N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} p_{i,m-1} e^{-\lambda_i t} \quad (\text{II} - 6)$$

avec :

$$p_{i,m-1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{m-1} - \lambda_i} \prod_{j=1}^{m-2} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \quad i < m - 1 \quad (\text{II} - 7)$$

<sup>220</sup> H. Bateman, « The solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations », *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, Vol. 15, 1910, pp. 423-427.

$$p_{m-1,m-1} = - \sum_{i=1}^{m-2} p_{i,m-1} \quad (\text{II} - 8)$$

En reportant (II – 6) dans (II – 1), on obtient :

$$\frac{dN_m(t)}{dt} = \lambda_{m-1}N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} p_{i,m-1}e^{-\lambda_i t} - \lambda_m N_m(t) \quad (\text{II} - 9)$$

La solution générale de (II – 9) est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

La solution de l'équation homogène est :

$$N_m(t) = K e^{-\lambda_m t} \quad (\text{II} - 10)$$

où  $K$  est une constante.

On détermine une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante :

$$N_m(t) = K(t)e^{-\lambda_m t} \quad (\text{II} - 11)$$

On désigne par  $K'(t)$  la dérivée de  $K(t)$  par rapport à  $t$ .

On reporte (II – 11) dans (II – 9), ce qui conduit à :

$$K'(t)e^{-\lambda_m t} - \lambda_m K(t)e^{-\lambda_m t} = \lambda_{m-1}N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} p_{i,m-1}e^{-\lambda_i t} - \lambda_m K(t)e^{-\lambda_m t} \quad (\text{II} - 12)$$

d'où :

$$K'(t) = \lambda_{m-1}N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} p_{i,m-1}e^{-(\lambda_i - \lambda_m)t} \quad (\text{II} - 13)$$

En intégrant, on obtient :

$$K(t) = \lambda_{m-1}N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i,m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} e^{-(\lambda_i - \lambda_m)t} + k \quad (\text{II} - 14)$$

où  $k$  est une constante d'intégration.

La solution générale est donc :

$$N_m(t) = K e^{-\lambda_m t} + \left[ \lambda_{m-1} N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i,m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} e^{-(\lambda_i - \lambda_m)t} + k \right] e^{-\lambda_m t} \quad (\text{II} - 15)$$

$$N_m(t) = (K + k) e^{-\lambda_m t} + \left[ \lambda_{m-1} N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i,m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} e^{-\lambda_i t} \right] \quad (\text{II} - 16)$$

En utilisant la condition initiale  $N_m(t = t_0 = 0) = 0$ ,  $m > 1$ , on en déduit que :

$$(K + k) = -\lambda_{m-1} N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i,m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} \quad (\text{II} - 17)$$

Finalement, la solution générale est :

$$N_m(t) = \lambda_{m-1} N_{01} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i,m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} [e^{-\lambda_i t} - e^{-\lambda_m t}] \quad (\text{II} - 18)$$

On identifie (II - 18) à l'expression supposée vraie :

$$N_m(t) = N_{01} \sum_{i=1}^m p_{i,m} e^{-\lambda_i t} \quad (\text{II} - 19)$$

▪ pour  $i < m$  on a :

$$p_{i,m} = \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} p_{i,m-1} \quad (\text{II} - 20)$$

En remplaçant  $p_{i,m-1}$  par son expression (II - 7), on obtient :

$$p_{i,m} = \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} \frac{\lambda_i}{\lambda_{m-1} - \lambda_i} \prod_{j=1}^{m-2} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_m - \lambda_i} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \quad (\text{II} - 21)$$

▪ pour  $i = m$  on a :

$$p_{m,m} = -\lambda_{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{p_{i,m-1}}{\lambda_m - \lambda_i} \quad (\text{II} - 22)$$

$$p_{m,m} = - \sum_{i=1}^{m-1} p_{i,m} \quad (\text{II} - 23)$$

Les relations (II - 19), (II - 21) et (II - 23) sont similaires à (II - 6), (II - 7) et (II - 8) supposées vraies pour l'ordre  $m - 1$ , ce qui les valide par récurrence.

**Remarque**

Les concentrations initiales  $N_{0l}$  des radionucléides  $X_l$ ,  $l > 1$  ne sont pas nécessairement nulles. Alors, pour  $m > l$ , la contribution  $N_{ml}(t)$  à la concentration totale  $N_m(t)$  du radionucléide  $m$  à l'instant  $t$  est d'après (II – 19) :

$$N_{ml}(t) = N_{0l} \sum_{i=l}^m p_{i,m} e^{-\lambda_i t} \quad (\text{II} - 24)$$

La concentration totale  $N_m(t)$  est obtenue par sommation des contributions  $N_{ml}(t)$  :

$$N_m(t) = \sum_{l=1}^{m-1} N_{ml}(t) + N_{0m} e^{-\lambda_m t} = \sum_{l=1}^{m-1} N_{0l} \sum_{i=l}^m p_{i,m} e^{-\lambda_i t} + N_{0m} e^{-\lambda_m t} \quad (\text{II} - 25)$$

### Annexe III : résolution des équations de Bateman généralisées

Dans le cas général où le milieu considéré est soumis à un flux de particules au point  $\vec{r}$ , d'énergie  $E$ , au temps  $t$ ,  $\phi(\vec{r}, E, t)$ , susceptibles de transmuter les nucléides composant ce milieu, on a les équations différentielles suivantes (voir chapitre 13, annexe I § 2)<sup>221 222</sup> :

$$\frac{dN_i(\vec{r}, t)}{dt} = \sum_{j \neq i} \zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r}, t) N_j(\vec{r}, t) + \sum_{j \neq i} \lambda_{i \leftarrow j} N_j(\vec{r}, t) - \lambda_i N_i(\vec{r}, t) - \zeta_i(\vec{r}, t) N_i(\vec{r}, t) \quad (\text{III} - 1)$$

avec :

$\lambda_{i \leftarrow j}$  : constante de décroissance radioactive d'un noyau de type  $j$  vers un noyau de type  $i$  (produit de la constante de décroissance du nucléide de type  $j$  par le rapport de branchement de la désintégration radioactive du noyau de type  $j$  vers un noyau de type  $i$ ) ;

$\lambda_i$  : constante de décroissance radioactive du nucléide de type  $i$  ;

$\zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r}, t)$  : taux de réaction microscopique relatif à la formation du nucléide  $i$  à partir du nucléide  $j$  *via* les réactions nucléaires repérées par l'indice  $q$  de sections efficaces microscopiques  $\sigma_{q, i \leftarrow j}(E)$  à l'énergie  $E$  :

$$\zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r}, t) = \sum_q \int_0^\infty \sigma_{q, i \leftarrow j}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (\text{III} - 2)$$

$\zeta_i(\vec{r}, t)$  : taux de réaction microscopique relatif à la disparition du nucléide  $i$  *via* les réactions nucléaires repérées par l'indice  $q'$ , de sections efficaces microscopiques  $\sigma_{q', i}(E)$  à l'énergie  $E$  :

$$\zeta_i(\vec{r}, t) = \sum_{q'} \int_0^\infty \sigma_{q', i}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (\text{III} - 3)$$

On se propose ici de résoudre cette équation dans le cadre de la neutronique d'un cœur de réacteur nucléaire, en scindant le terme  $\sum_{j \neq i} \zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r}, t) N_j(\vec{r}, t)$  en deux parties, la première correspondant à une production du nucléide  $i$  par fission induite par les neutrons sur

<sup>221</sup> Il existe plusieurs manières de résoudre ces équations différentielles couplées. La première publication avec prise en compte des réactions nucléaires induites par flux de neutrons est due à William Robinson : « The Equations of Radioactive Transformation in a Neutron Flux », *Journal of Chemical Physics*, Vol. 17, number 6, June 1949, pp. 542-547, <https://doi.org/10.1063/1.1747317> ; voir aussi D. R. Vondy, « Development of a general method of explicit solution to the nuclide chain equations for digital machine calculations », ORNL-TM-361, 1962.

<sup>222</sup> A. Tsilanizara, C. M. Diop, B. Nimal, M. Detoc, L. Lunéville, M. Chiron, T.-D. Huynh, I. Brésard, M. Eid, J. C. Klein, B. Roque, P. Marimbeau, C. Garzenne, J. M. Parize, C. Vergne, « DARWIN: An Evolution Code System for a Large Range of Applications », *Journal of Nuclear Science and Technology*, 37:sup1, 845-849, 2000, <https://doi.org/10.1080/00223131.2000.10875009>.

différents noyaux lourds (repérés par la lettre  $F$ ), et la deuxième regroupant tous les autres types de réactions nucléaires induites par les neutrons :

$$\sum_{j \neq i} \zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r}, t) N_j(\vec{r}, t) = \sum_F \Gamma_{F,i}(\vec{r}, t) + \sum_{j \neq i} N_j(\vec{r}, t) \sum_{q \neq \text{fission}} \int_0^\infty \sigma_{q,i \leftarrow j}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (\text{III} - 4)$$

Pour simplifier la résolution on suppose que le premier terme du membre de droite de (III – 4) relatif à la fission est constant en fonction du temps (hypothèse raisonnable dans la pratique si l'on découpe la durée d'irradiation en intervalles de temps suffisamment petits) et l'on pose :

$$\sum_F \Gamma_{F,i}(\vec{r}, t) = \text{constante} \equiv b_i \quad (\text{III} - 5)$$

Donc  $b_i$  représente le nombre de nucléides d'espèce  $i$  produits par unité de temps ( $s^{-1}$ ).

La même hypothèse est faite pour les taux de réaction en supposant que le flux de neutrons ne varie pas sur la plage de temps considérée :  $\phi(\vec{r}, E, t) \equiv \phi(\vec{r}, E)$  et  $\zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r}, t) \equiv \zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r})$ . On pose alors :

$$c_{ij} = \lambda_{i \leftarrow j} + \zeta_{i \leftarrow j}(\vec{r}) = \lambda_{i \leftarrow j} + \sum_{q \neq \text{fission}} \int_0^\infty \sigma_{q,i \leftarrow j}(E) \phi(\vec{r}, E) dE \quad (\text{III} - 6)$$

$$c_{ii} = \lambda_i + \zeta_i(\vec{r}) = -\lambda_i + \sum_q \int_0^\infty \sigma_{q,i}(E) \phi(\vec{r}, E) dE \quad (\text{III} - 7)$$

Enfin, on admet que les chaînes de filiations traitées ne présentent pas de « boucles » (ou « retours en arrière ») dans lesquelles un nucléide aval produirait un nucléide amont par transmutation radioactive ou réaction nucléaire, comme par exemple la décroissance radioactive  $\alpha$  du curium 244 qui donne du plutonium 238.<sup>223</sup>

Les équations (1) se réécrivent :

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = b_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N_j(t) - c_{ii} N_i(t) \quad (\text{III} - 8)$$

<sup>223</sup> Voir *La Neutronique*, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions Le Moniteur/CEA, 2013, 2015 (version anglaise), pp. 107-113 ;

[http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA\\_Monographie4\\_Neutronique\\_2015\\_Fr.pdf](http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA_Monographie4_Neutronique_2015_Fr.pdf).

Dans (III – 8), on a supprimé la variable spatiale pour alléger les notations.

En s'inspirant des développements de l'annexe II, on recherche une solution sous la forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$N_i(t) = N_{is} - \sum_{l=1}^i p_{il} e^{-c_{il}t} \quad (\text{III} - 9)$$

où  $N_{is}$  et  $p_{il}$  sont des coefficients à déterminer.

On montre alors que :

$$N_{is} = \frac{1}{c_{ii}} \left[ b_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N_{js} \right], \text{ si } c_{ii} \neq 0 \quad (\text{III} - 10)$$

$$p_{il} = \frac{1}{c_{ii} - c_{ll}} \sum_{j=l}^{i-1} c_{ij} p_{jl}, \text{ si } c_{ll} \neq c_{ii} \quad (\text{III} - 11)$$

$$p_{ii} = N_{is} - N_{0i} - \sum_{l=1}^{i-1} p_{il} \quad (\text{III} - 12)$$

Les relations (III – 9), (III – 10), (III – 11) et (III – 12) forment les solutions des équations de Bateman généralisées (III – 8).

### Remarque

Dans le cas particulier où  $c_{ii} = 0$ , on montre que les solutions sont de la forme :

$$N_i(t) = N_{is} - \sum_{l=1}^{i-1} p_{il} e^{-c_{il}t} + p_{ii}t \quad (\text{III} - 13)$$

avec :

$$p_{ii} = b_i + \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} N_{js} \quad (\text{III} - 14)$$

$$p_{il} = -\frac{1}{c_{ll}} \sum_{j=l}^{i-1} c_{ij} p_{jl} \quad (\text{III} - 15)$$

Et dans ce cas :

$$N_{is} = N_{0i} + \sum_{l=1}^{i-1} p_{il} \quad (\text{III} - 16)$$

résultant de (III – 13) pour l'instant initial choisi :  $t = 0$ .

Plusieurs autres méthodes de résolution des équations de Bateman généralisées ont été développées, en ayant recours à diverses techniques numériques.<sup>224 225 226 227</sup> Elles permettent la prise en compte d'un historique d'irradiation neutronique quelconque et des applications variées, ainsi que le traitement des « boucles » rencontrées dans les chaînes de filiation des nucléides.

Les **figures 30 et 31** montrent un exemple de l'évolution au cours du temps, à partir d'un « temps de refroidissement » d'une année, des nombres de nucléides de quelques produits de fission et noyaux lourds d'un combustible irradié par les neutrons dans un cœur de réacteur nucléaire. Les valeurs des périodes de décroissance radioactive et les chaînes de filiation présentées dans le chapitre 2 aident à expliquer la forme des courbes.

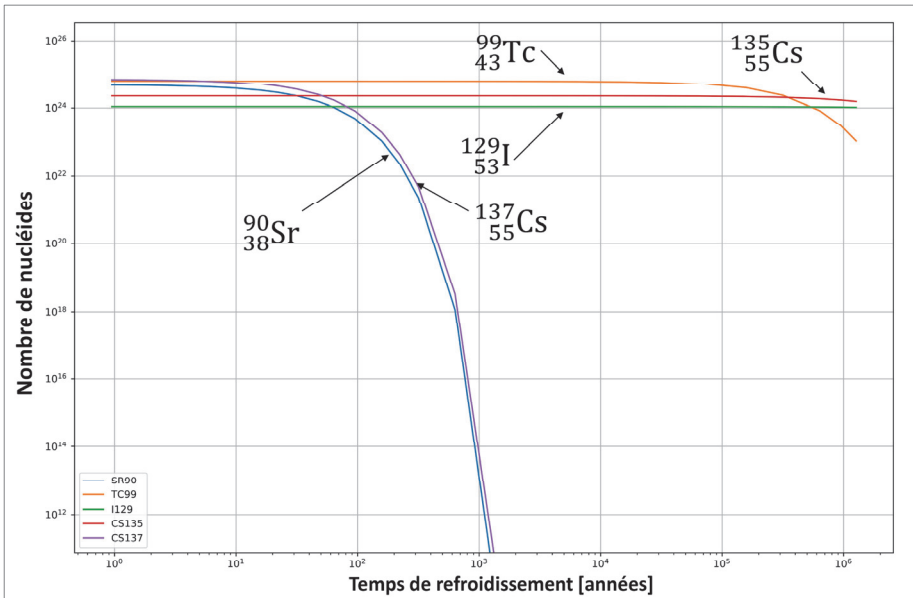


Figure 30. Nombre indicatif de nucléides des produits de fission strontium 90, technétium 99, iode 129, césium 135, césium 137 en fonction du temps de refroidissement, pour un combustible d'oxyde d'uranium (UO<sub>2</sub>) enrichi à 4.1 % irradié par les neutrons dans un cœur de réacteur nucléaire à un taux de combustion d'environ 46 000 MWj/t (tonne de métal lourd initial).

<sup>224</sup> La Neutronique, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, ouvrage collectif, *op. cit.*, 2015, p. 49, p. 57, pp. 107-113.

<sup>225</sup> J. Cetnar, « General solution of Bateman equations for nuclear transmutations », *Annals of Nuclear Energy* 33, 2006, pp. 640-645, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2006.02.004> ; J. Cetnar, P. Stanis, M. Oettingen, « Linear Chain Method for Numerical Modelling of Burnup Systems », *Energies*, 14, 1520, 2021, <https://doi.org/10.3390/en14061520>.

<sup>226</sup> P. P. H. Wilson, *ALARA, Analytic and Laplacian Adaptive Radioactivity Analysis*, PhD, Madison, University of Wisconsin, 1999.

<sup>227</sup> S. Lahaye, A. Tsilanizara, P. Bellier, T. Bittar, « Implementation of a CRAM solver in MENDEL Depletion Code System », *International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering (M&C - 2017)*, Jeju, South Korea, April 2017.



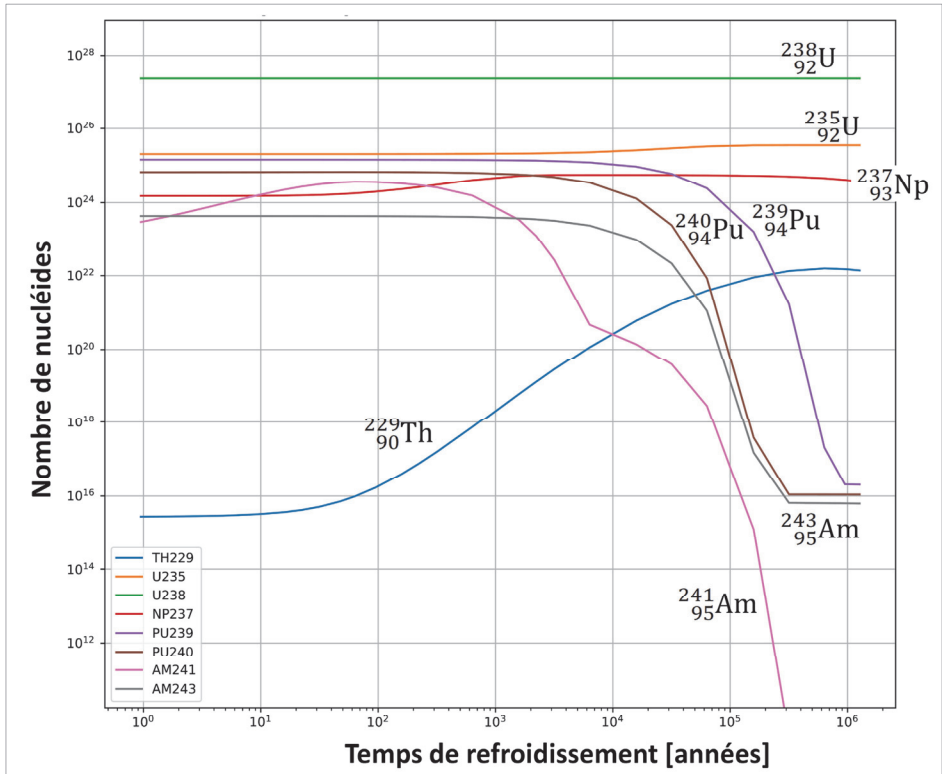


Figure 31. Nombre indicatif de nucléides des noyaux lourds thorium 229, uranium 235 et 238, neptunium 237, plutonium 239 et 240, américium 241 et 243, en fonction du temps de refroidissement, pour un combustible d’oxyde d’uranium (UO<sub>2</sub>) enrichi à 4.1 % irradié par les neutrons dans un cœur de réacteur nucléaire à un taux de combustion d’environ 46 000 MWj/t (tonne de métal lourd initial).

Tableau 10. Composition massique indicative en grammes, d’une tonne de combustible d’oxyde d’uranium (UO<sub>2</sub>) enrichi à 4.1 % irradié.

Taux de combustion	49.879 MWj/t	45918 MWj/t
Nucléides		
U	9.9985 10 <sup>5</sup>	9.4032 10 <sup>5</sup>
NP	2.0500 10 <sup>1</sup>	6.8038 10 <sup>2</sup>
PU	4.0763 10 <sup>0</sup>	1.0955 10 <sup>4</sup>
AM	6.5209 10 <sup>-10</sup>	2.1885 10 <sup>2</sup>
CM	3.2107 10 <sup>-11</sup>	9.0632 10 <sup>1</sup>
BK	8.4083 10 <sup>-16</sup>	4.3336 10 <sup>-6</sup>
CF	4.0839 10 <sup>-18</sup>	4.3420 10 <sup>-6</sup>
Total noyaux lourds	9.9988 10 <sup>5</sup>	9.5226 10 <sup>5</sup>
Total produits de fission	5.2779 10 <sup>1</sup>	4.7572 10 <sup>4</sup>
Total	9.9993 10 <sup>5</sup>	9.9983 10 <sup>5</sup>

## Annexe IV : résolution des équations générales de Bateman dans une configuration hétérogène de deux milieux physiques radioactifs adjacents en interaction

On considère deux milieux physiques juxtaposés – par exemple un milieu air et un milieu dense radioactif –, repérés respectivement par les lettres A et D. Ces deux milieux sont couplés par un transfert possible de nucléides gazeux du milieu D vers le milieu A. Le but est de déterminer à tout instant  $t$  les concentrations des nucléides  $i$  à la fois dans le milieu D et dans le milieu A. Pour cela, il faut résoudre simultanément les équations de Bateman dans le milieu D et dans le milieu A.

### 1. Hypothèses et notations

On fait les hypothèses suivantes :

- a. le milieu D radioactif relâche vers le milieu A certains nucléides avec un taux (nombre de nucléides par unité de temps ( $s^{-1}$ )) supposé constant qui ne dépend que de la nature du radionucléide concerné ;
- b. les échanges entre les milieux D et A se font uniquement de D vers A : échange gazeux unilatéral ;
- c. les milieux A et D ne sont pas soumis à un flux d'irradiation neutronique (flux de neutrons nul) : hypothèse de « refroidissement pur ».

On adopte les autres notations suivantes :

- $N_i^A(t)$  : nombre de nucléides d'espèce  $i$  au temps  $t$  dans le milieu A ;
- $N_i^D(t)$  : nombre de nucléides d'espèce  $i$  au temps  $t$  dans le milieu D ;
- $C_{ij}$  : constante de transition du nucléide de type  $j$  vers le nucléide de type  $i$  : comme le flux de neutrons est supposé nul,  $C_{ij}$  s'identifie à la constante de décroissance radioactive du noyau  $j$  multipliée par le rapport de branchement vers le noyau  $i$  ;
- $C_{ii}$  : constante de transition du nucléide de type  $i$ ,  $C_{ii} \equiv \lambda_i$  ;
- $f_i$  : taux de relâchement du milieu D vers le milieu A du nucléide de type  $i$  ;
- $T$  : durée de refroidissement considérée,  $T = t_{fin} - t_{ini}$  ;
- $t$  : variable temps  $0 \leq t \leq T = t_{fin} - t_{ini}$  ;
- $N_{i0}^A = N_i^A(t = 0)$  : nombre de nucléides d'espèce  $i$  au temps  $t$  dans le milieu A ;
- $N_{i0}^D = N_i^D(t = 0)$  : nombre de nucléides d'espèce  $i$  au temps  $t$  dans le milieu D ;

On pose pour tout nucléide d'espèce  $l$  :

$$C_{il}^* = C_{il} + f_l \quad (\text{IV} - 1)$$

*Remarque* : les coefficients  $C_{ij}$  sont les mêmes dans les milieux A et D.

## 2. Équations à résoudre

Les deux séries d'équations à résoudre sont les suivantes.

- Équations d'évolution dans le milieu D :

$$\frac{dN_i^D(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}N_j^D(t) - C_{ii}N_i^D(t) - f_iN_i^D(t) \quad (\text{IV} - 2)$$

- Équations d'évolution dans le milieu A :

$$\frac{dN_i^A(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}N_j^A(t) - C_{ii}N_i^A(t) + f_iN_i^D(t) \quad (\text{IV} - 3)$$

## 3. Résolution des équations d'évolution dans le milieu D

Les équations (IV – 2) se réécrivent compte tenu de (IV – 1) :

$$\frac{dN_i^D(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij}N_j^D(t) - C_{ii}^*N_i^D(t) \quad (\text{IV} - 4)$$

En utilisant les résultats de l'annexe III, on a (voir équation (III – 9)) :

$$N_i^D(t) = N_{is}^D - \sum_{l=1}^i p_{il}^D e^{-c_{il}^* t} \quad (\text{IV} - 5)$$

Comme ici  $b_i$  est nul (pas de fissions induites par des neutrons puisque le flux neutronique est supposé nul dans le milieu D), on montre avec (III – 10) qui doit être satisfaite à tout instant que cela impose  $N_{is}^D = 0$  pour tout  $i$ . Par conséquent,

$$N_i^D(t) = - \sum_{l=1}^i p_{il}^D e^{-c_{il}^* t} \quad (\text{IV} - 6)$$

avec :

$$p_{il}^D = \frac{1}{C_{ii}^* - C_{il}^*} \sum_{j=l}^{i-1} c_{ij} p_{jl}^D, \quad C_{ii}^* \neq C_{il}^* \quad (\text{IV} - 7)$$

La relation (III – 12) de l'annexe III détermine le coefficient  $p_{ii}^D$  :

$$p_{ii}^D = -N_{i0}^D - \sum_{l=1}^{i-1} p_{il}^D \quad (\text{IV} - 8)$$

#### 4. Résolution des équations d'évolution dans le milieu A

Dans le milieu A, on recherche une solution de la forme :

$$N_i^A(t) = \sum_{l=1}^i (p_{il}^A e^{-c_{il}t} + q_{il}^A e^{-c_{il}^*t}) \quad (\text{IV} - 9)$$

dans laquelle les coefficients  $p_{il}^A$  et  $q_{il}^A$  sont à déterminer.

On porte (IV – 6) et (IV – 9) dans (IV – 3), ce qui conduit à :

- pour le premier membre :

$$\frac{dN_i^A(t)}{dt} = - \sum_{l=1}^i C_{il} p_{il}^A e^{-c_{il}t} - \sum_{l=1}^i C_{il}^* q_{il}^A e^{-c_{il}^*t} \quad (\text{IV} - 10)$$

- pour le second membre :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^j C_{ij} (p_{jl}^A e^{-c_{jl}t} + q_{jl}^A e^{-c_{jl}^*t}) - C_{ii} \sum_{l=1}^i (p_{il}^A e^{-c_{il}t} + q_{il}^A e^{-c_{il}^*t}) \\ + f_i \left( - \sum_{l=1}^i p_{il}^D e^{-c_{il}^*t} \right) \end{aligned} \quad (\text{IV} - 11)$$

En faisant passer le membre de droite dans le membre de gauche et en réarrangeant la sommation :

$$\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l=1}^j \equiv \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{j=l}^{i-1} \quad (\text{IV} - 12)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left[ -\sum_{l=1}^i C_{ul} p_{il}^A - \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{j=l}^{i-1} C_{ij} p_{jl}^A + C_{ii} \sum_{l=1}^i p_{il}^A \right] e^{-C_u t} \\
& + \left[ -\sum_{l=1}^i C_{ul}^* q_{il}^A - \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{j=l}^{i-1} C_{ij} q_{jl}^A + C_{ii} \sum_{l=1}^i q_{il}^A + f_i \sum_{l=1}^i p_{il}^D \right] e^{-C_{ii}^* t} \\
& = 0 \quad (\text{IV} - 13)
\end{aligned}$$

L'équation (IV – 13) doit être vraie quel que soit l'instant  $t$  considéré, ce qui est réalisé si chacune des sommes entre crochets est nulle.

Dans le premier terme crochet de (IV – 13), on observe que :

$$-\sum_{l=1}^i C_{ul} p_{il}^A = -C_{ii} p_{ii}^A - \sum_{l=1}^{i-1} C_{ul} p_{il}^A \quad (\text{IV} - 14)$$

$$C_{ii} \sum_{l=1}^i p_{il}^A = C_{ii} p_{ii}^A + C_{ii} \sum_{l=1}^{i-1} p_{il}^A \quad (\text{IV} - 15)$$

Après simplification des termes  $C_{ii} p_{ii}^A$  et  $-C_{ii} p_{ii}^A$  qui s'annulent, ce premier crochet se réécrit donc :

$$\sum_{l=1}^{i-1} \left[ (C_{ii} - C_{ul}) p_{il}^A - \sum_{j=l}^{i-1} C_{ij} p_{jl}^A \right] = 0 \quad (\text{IV} - 16)$$

Ce qui implique la nullité de chacun des termes de cette somme :

$$(C_{ii} - C_{ul}) p_{il}^A - \sum_{j=l}^{i-1} C_{ij} p_{jl}^A = 0 \quad l = 1, i-1 \quad (\text{IV} - 17)$$

Le second terme entre crochets se décompose similairement de la manière suivante :

$$-C_{ii}^* q_{ii}^A + C_{ii} q_{ii}^A + f_i p_{ii}^D = 0 \quad (\text{IV} - 18)$$

$$-C_{ul}^* q_{il}^A - \sum_{j=l}^{i-1} C_{ij} q_{jl}^A + C_{ii} q_{il}^A + f_i p_{il}^D = 0 \quad (\text{IV} - 19)$$

De (IV – 17) il découle :

$$p_{il}^A = \frac{\sum_{j=l}^{i-1} C_{ij} p_{jl}^A}{C_{ii} - C_{ll}}, \quad l < i \quad (\text{IV} - 20)$$

De (IV – 18) on tire :

$$q_{ii}^A = \frac{f_i p_{ii}^D}{C_{ii}^* - C_{ii}} \quad (\text{IV} - 21)$$

De (IV – 19) on déduit :

$$q_{il}^A = \frac{\sum_{j=l}^{i-1} C_{ij} q_{jl}^A - f_i p_{il}^D}{C_{ii} - C_{ll}^*} \quad l < i \quad (\text{IV} - 22)$$

Le terme  $p_{ii}^A$  restant à calculer s'obtient en introduisant dans (IV – 9) les conditions initiales  $N_{i0}^A(t = 0) = N_{i0}^A$  supposées connues pour tous les types de nucléides  $i$ , on obtient la relation :

$$N_{i0}^A(t = 0) = N_{i0}^A = p_{ii}^A + q_{ii}^A + \sum_{l=1}^{i-1} (p_{il}^A + q_{il}^A) \quad (\text{IV} - 23)$$

d'où

$$p_{ii}^A = N_{i0}^A - q_{ii}^A - \sum_{l=1}^{i-1} (p_{il}^A + q_{il}^A) \quad (\text{IV} - 24)$$

Les relations (IV – 20), (IV – 21), (IV – 22) et (IV – 24) déterminent complètement les coefficients de la solution (IV – 9) cherchée :

$$N_i^A(t) = \sum_{l=1}^i (p_{il}^A e^{-C_{ll}t} + q_{il}^A e^{-C_{ll}^*t}) \quad (\text{IV} - 25)$$

# **6**

## **Les réactions nucléaires**





Après avoir brièvement indiqué les temps caractéristiques liés aux réactions nucléaires et la convention de notation de celles-ci, on en présente un panorama typologique synthétique, se focalisant plus particulièrement sur les interactions entre un neutron et le noyau atomique, qui intéressent directement la neutronique. D'autres types de réactions nucléaires sont ensuite mentionnés en raison de leur intérêt applicatif potentiel pour ce qui concerne les réactions de spallation et les réactions thermonucléaires. Quant aux réactions induites par des photons et particules  $\alpha$ , elles sont mentionnées à la fois pour leur impact neutronique et radiologique potentiel dans un système nucléaire et également parce qu'elles sont constitutives de sources radioactives productrices de neutrons. Les interactions des photons et des particules chargées avec la matière font l'objet de chapitres spécifiques, respectivement 11 et 12.

## 1. Réactions nucléaires et échelle des temps réactionnels

On entend ici par **réaction nucléaire** l'interaction entre un projectile (particule ou noyau) et un noyau atomique cible. La réaction nucléaire est un phénomène complexe se déroulant sur une gamme de temps allant schématiquement de  $10^{-23}$  seconde à 1 seconde (ordre de grandeur du temps d'émission de neutrons retardés suite à une fission induite par un neutron), comme l'illustre la **figure 1**.

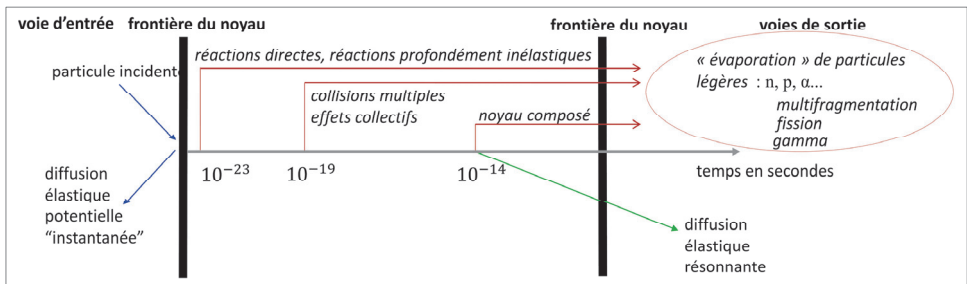


Figure 1. Phénomènes physiques associés aux réactions nucléaires en relation avec les échelles de temps réactionnels.<sup>1</sup> On y a porté la dénomination des modèles nucléaires décrivant les différents types de réactions susceptibles de se produire aux échelles de temps correspondantes indiquées (voir chapitre 8).

Deux aspects importants sont à étudier :

- **l'énergétique des réactions nucléaires** et les relations entre l'angle et l'énergie : connaissant l'énergie et la direction du projectile et de la cible avant collision, il faut en déduire l'énergie et la direction des produits de réaction ;
- la **probabilité d'interaction entre projectile et noyau cible** qui traduit l'occurrence d'une réaction.

<sup>1</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952; W. E. Meyerhof, *Éléments de physique nucléaire*, Dunod, Paris, 1970, p. 188 ; voir aussi : V. F. Weisskopf, « The formation of the compound nucleus », *Physica*, Vol. 22, Issues 6-12, 1956, pp. 952-958, p. 955.

L'aspect énergétique fait en particulier intervenir les relations de conservation de l'énergie et de l'impulsion en travaillant dans le **référentiel du laboratoire** et/ou celui du **centre de masse**. Le second point concerne les **sections efficaces des réactions nucléaires**. Elles sont obtenues par divers formalismes mathématiques associés à des modèles.

L'énergétique des réactions nucléaires est importante pour la physique des réacteurs, car elle permet entre autres de déterminer la **puissance résiduelle** délivrée par un combustible irradié et l'**échauffement** des structures du réacteur. Les sections efficaces sont indispensables pour traiter la propagation des rayonnements dans la matière (résolution de l'équation de Boltzmann) ainsi que la transmutation d'un milieu soumis à une irradiation (résolution des équations de Bateman généralisées).

De manière générique, une réaction nucléaire induite par une particule  $x$  sur un nucléide  ${}^A_ZX$  de nombre de masse  $A$  et de numéro atomique  $Z$ , produisant un nucléide  ${}^{A'}_{Z'}Y$  et une particule secondaire  $y$ , est symbolisée de deux façons :

$$x + {}^A_ZX \rightarrow {}^{A'}_{Z'}Y + y \quad (1.1)$$

$${}^A_ZX(x, y){}^{A'}_{Z'}Y \quad (1.2)$$

La **figure 2** montre, dans le domaine d'énergie 0 – 20 MeV, les réactions nucléaires possibles induites sur un nucléide donné  ${}^A_ZX$  par les **particules** dites **légères** que sont les neutrons, protons, photons, deutons et particules alpha.

Dans le cas général, l'entité  $x$  incidente peut être un nucléide quelconque, et non pas uniquement une particule légère. Le cas se présente dans des dispositifs expérimentaux produisant des faisceaux d'ions « lourds »<sup>2</sup>, c'est-à-dire des corpuscules d'une masse supérieure à celles des particules alpha, et d'énergie élevée, utilisés pour sonder la matière nucléaire *via* des collisions provoquées sur des nucléides cibles d'intérêt.<sup>3</sup>

### Exemple

- ${}^{14}_7N + {}^{10}_5B \rightarrow {}^{13}_6C + {}^{11}_6C$  se note  ${}^{10}_5B({}^{14}_7N, {}^{11}_6C){}^{13}_6C$  (réaction de transfert de nucléons).
- ${}^{12}_6C + {}^{232}_{90}Th \rightarrow {}^{240}_{96}Cm + 4n$  se note  ${}^{232}_{90}Th({}^{12}_6C, 4n){}^{240}_{96}Cm$ .

Lorsque le nucléide cible possède un nombre de masse de petite valeur (cas par exemple du carbone, de l'azote et de l'oxygène), il peut aussi être qualifié de cible légère.

<sup>2</sup> Tels que le GANIL déjà signalé dans le chapitre 1, le *Gesellschaft für Schwerionenforschung mbH* (GSI), accélérateur d'ions lourds de Darmstadt en Allemagne, etc. Les faisceaux d'ions lourds sont aussi utilisés à des fins thérapeutiques (traitement oncologique) et industrielles.

<sup>3</sup> M. Lefort, « Réactions nucléaires provoquées par ions "lourds". Intérêt et divers aspects », *J. Phys. Radium*, 21 (8-9), 1960, pp. 665-673, <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00236349/document>.

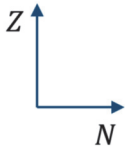
	$N - 1$	$N$	$N + 1$
$Z + 2$	$(\alpha, 3n)$	$(\alpha, 2n)$	$(\alpha, n)$
$Z + 1$	$(p, n)$	$(p, \gamma)$ $(d, n)$	$(\alpha, np)$
$Z$	$(\gamma, n)$ $(n, 2n)$	nucléide cible ${}^A_ZX$ $(n, n)$	$(n, \gamma)$ $(d, p)$
$Z - 1$	$(\gamma, pn)$ $(d, \alpha)$	$(\gamma, p)$ $(n, pn)$ $(n, d)$	$(n, p)$
$Z - 2$	$(n, \alpha)$		

Figure 2. Les diverses réactions entre une particule incidente et un nucléide cible dans le mode de représentation du tableau de Mendelïev, en coordonnées  $(Z, N)$  du numéro atomique  $Z$  (nombre de protons) et du nombre  $N$  de neutrons. Conventionnellement, les réactions s'écrivent  ${}^A_ZX(x, y){}^{A'}_{Z'}Y$ , où  $x$  désigne la particule incidente,  ${}^A_ZX$  le nucléide cible ( $A = Z + N$ ),  ${}^{A'}_{Z'}Y$  le nucléide formé (particule « lourde » (vis-à-vis du projectile incident) ou « nucléide/atome/noyau de recul », ( $A' = Z' + N'$ )),  $y$  la particule « légère » produite ;  $n$  = neutron,  $p$  = proton,  $d$  = deuton,  $\alpha$  = particule alpha,  $\gamma$  = gamma (photon).<sup>4</sup> Ce recensement des réactions nucléaires possibles n'est évidemment pas exhaustif : il peut y être ajouté des réactions provoquée par des noyaux de tritium, d'hélium 3 et de divers ions plus lourds.

## 2. Les réactions nucléaires induites par les neutrons

Dans le domaine d'énergie 0 – 20 MeV, les réactions nucléaires induites par un neutron principalement prises en considération ici sont schématisées sur la **figure 3**, et brièvement passées en revue.

La particule apparaissant dans la position de l'entité  $y$  dans (1.1) et (1.2) est ici la particule dite « légère » produite par la réaction considérée, la distinguant du nucléide résultant (qui

<sup>4</sup> D'après Z. Sóti, J. Magill, R. Dreher, « Karlsruhe Nuclide Chart – New 10<sup>th</sup> edition 2018 », *EPJ Nuclear Sci. Technol.* 5, 6, 2019, figure 9b, p. 9.

lui-même peut être léger : cas des réactions nucléaires sur les éléments légers tels que l'hydrogène et l'hélium).

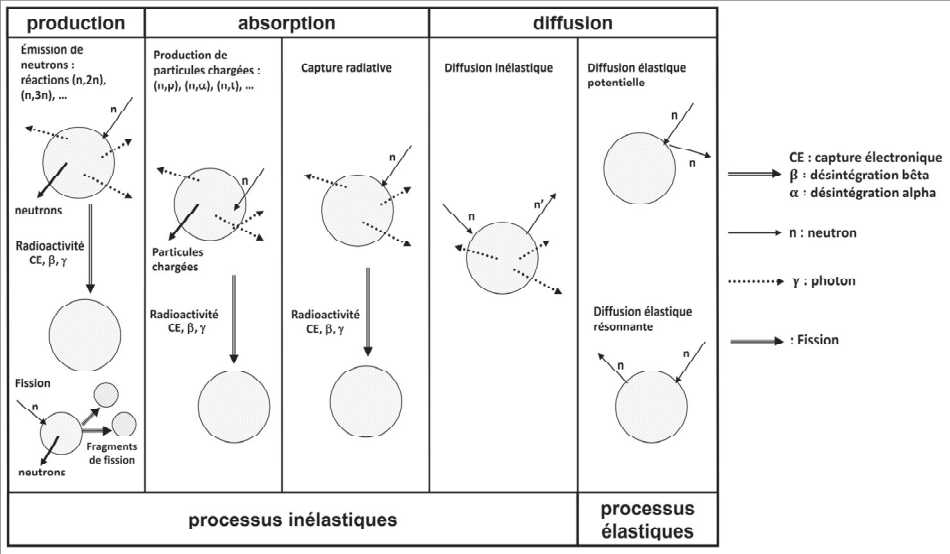


Figure 3. Les diverses interactions entre un neutron et un noyau atomique cible.

- **La diffusion élastique potentielle** : le neutron ne pénètre pas dans le noyau. Elle est notée (n, n).

Exemple

Diffusion élastique d'un neutron sur un noyau d'hydrogène :



Cette réaction conserve l'énergie cinétique totale. Excepté pour une diffusion vers l'avant, c'est-à-dire pour un neutron diffusé avec un angle de déviation nul, l'énergie cinétique du neutron diffusé diffère de (est inférieure à) celle du neutron incident.

- **La diffusion élastique résonnante** : le neutron pénètre dans le noyau ; un neutron est réémis avec une énergie cinétique égale à l'énergie cinétique du neutron incident dans une direction quelconque. Cette réaction est aussi notée (n, n).

Exemples

- $n + {}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{238}_{92}\text{U} + n \text{ se note } {}^{238}_{92}\text{U}(n, n){}^{238}_{92}\text{U}$
- $n + {}^{23}_{11}\text{Na} \rightarrow {}^{23}_{11}\text{Na} + n \text{ se note } {}^{23}_{11}\text{Na}(n, n){}^{23}_{11}\text{Na}$

- **La diffusion inélastique** : le neutron pénètre dans le noyau ; il y laisse une partie de son énergie cinétique et est réémis dans une certaine direction avec une nouvelle

énergie cinétique. Cette réaction est notée  $(n, n')$ . Le neutron transmet une partie de son énergie cinétique sous forme d'énergie interne du noyau atomique, dénommée **énergie d'excitation**. Le noyau atomique cible ainsi laissé dans un état excité se désexcite en émettant un ou plusieurs photons (gamma) et/ou par conversion interne. À l'échelle des temps considérés en physique des réacteurs nucléaires, cette émission de photons est considérée comme instantanée.

### Exemples

- $n + {}^{56}_{26}\text{Fe} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe}^* + n'$
- ${}^{56}_{26}\text{Fe}^* \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe} + \gamma$

La période de désexcitation du premier niveau inélastique du fer 56, d'énergie 846 keV, par émission d'un photon d'énergie 846 keV, est de 6.07 picoseconde ( $10^{-12}$  s).

On a vu dans le chapitre 5 consacré à la structure du noyau que les états excités d'un noyau atomique peuvent être scindés en deux domaines :

- le domaine des états (ou niveaux) discrets dans lequel chaque niveau est individuellement défini : on parle dans ce cas de **diffusion inélastique discrète** ou de **choc inélastique discret** ;
  - le domaine dans lequel ces niveaux sont très proches les uns des autres, autorisant de traiter leur énergie comme une variable continue : on parle dans ce cas de **diffusion inélastique continue** ou de **choc inélastique continu**.
- **La capture radiative** : le neutron est capturé par le noyau de masse atomique  $A$  ; un nouveau noyau est formé, de masse atomique  $A + 1$  ; ce nouveau noyau est formé dans un état excité par le double apport de l'énergie cinétique et de liaison du neutron, et se désexcite par émission d'un ou plusieurs gamma dont l'énergie peut excéder 9 MeV ; si le nouveau noyau formé est un isotope radioactif celui-ci évoluera vers la vallée de stabilité par un ou plusieurs processus radioactifs. Cette réaction est notée  $(n, \gamma)$ .

### Exemples

- Réaction d'absorption d'un neutron par un noyau d'hydrogène et un noyau de carbone 13 :
  - ${}_1^1\text{H}(n, \gamma){}_1^2\text{D} : n + {}_1^1\text{H} \rightarrow {}_1^2\text{D} + \gamma$
  - ${}_6^{13}\text{C}(n, \gamma){}_6^{14}\text{C} : n + {}_6^{13}\text{C} \rightarrow {}_6^{14}\text{C} + \gamma$
- Réaction d'absorption d'un neutron par un noyau d'uranium 235 :
  - $n + {}_{92}^{238}\text{U} \rightarrow {}_{92}^{239}\text{U} + \gamma$  ( $\gamma$  émis suivant un spectre en énergie)

- Réaction d'activation neutronique produisant un isotope radioactif :



Ces photons gamma de capture radiative, dont l'émission est « instantanée », ne doivent pas être confondus avec les photons gamma émis lors de la décroissance radioactive du  ${}^{60}_{27}\text{Co}$  (de 1.17 MeV, 1.33 MeV...)

- **L'émission de particules chargées** : le neutron est capturé et une particule chargée, proton (p), deuton (d), triton (t), particule  $\alpha$  par exemple, est émise. Si le nouveau noyau formé est un nucléide radioactif celui-ci évoluera vers la vallée de stabilité par des processus radioactifs successifs. Les réactions correspondantes sont respectivement notées : (n, p), (n, d), (n, t), (n,  $\alpha$ ), (n, n' $\alpha$ ), etc.

### Exemples

- ${}^{54}_{26}\text{Fe}(\text{n}, \text{d}){}^{53}_{25}\text{Mn} : \text{n} + {}^{54}_{26}\text{Fe} \rightarrow {}^{53}_{25}\text{Mn} + \text{d}$
- ${}^{14}_7\text{N}(\text{n}, \alpha){}^{11}_5\text{B} : \text{n} + {}^{14}_7\text{N} \rightarrow {}^{11}_5\text{B} + \alpha$
- ${}^{16}_8\text{O}(\text{n}, \alpha){}^{13}_6\text{C} : \text{n} + {}^{16}_8\text{O} \rightarrow {}^{13}_6\text{C} + \alpha$ <sup>5</sup>
- **La formation du tritium**

Cet élément est issu de plusieurs voies de formation dans un réacteur nucléaire à eau sous pression (REP). Outre la fission ternaire, on identifie les réactions nucléaires induites par les neutrons sur les composés borés et lithiés présents (barres de contrôle, impuretés de lithium dans le graphite des UNGG par exemple) :

- ${}^{10}_5\text{B}(\text{n}, 2\alpha){}^3_1\text{H} : \text{n} + {}^{10}_5\text{B} \rightarrow {}^3_1\text{H} + 2\alpha$
- ${}^6_3\text{Li}(\text{n}, \alpha){}^3_1\text{H} : \text{n} + {}^6_3\text{Li} \rightarrow {}^3_1\text{H} + \alpha$  ou  ${}^6_3\text{Li}(\text{n}, \text{t}){}^4_2\text{He} : \text{n} + {}^6_3\text{Li} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^4_2\text{He}$
- ${}^7_3\text{Li}(\text{n}, \text{n}'\alpha){}^3_1\text{H} : \text{n} + {}^7_3\text{Li} \rightarrow {}^3_1\text{H} + \text{n}' + \alpha$
- ${}^{11}_5\text{B}(\text{n}, {}^9_4\text{Be}){}^3_1\text{H} : \text{n} + {}^{11}_5\text{B} \rightarrow {}^9_4\text{Be} + {}^3_1\text{H}$
- Formation par fission ternaire de l'hélium 6,  ${}^6_2\text{He}$ , suivi d'une décroissance  $\beta^-$  qui conduit à la formation du lithium 6,  ${}^6_3\text{Li}$ , qui donne du tritium *via* la réaction (n,  $\alpha$ ) précédemment citée.

- **La formation du carbone 14**

Outre la formation par fission ternaire, et par capture radiative sur le carbone 13, le carbone 14 est produit par les réactions induites par neutron suivantes :

- ${}^{17}_8\text{O}(\text{n}, \alpha){}^{14}_6\text{C} : \text{n} + {}^{17}_8\text{O} \rightarrow {}^{14}_6\text{C} + \alpha$

---

<sup>5</sup> B. Galhaut, *Étude de la mesure de la section efficace de la réaction  ${}^{16}_8\text{O}(\text{n}, \alpha){}^{13}_6\text{C}$  du seuil à 10 MeV*, Thèse de doctorat, Université de Caen Normandie, 2017



Les réactions  ${}^{17}_8\text{O}(n, \alpha){}^{14}_6\text{C}$  et  ${}^{14}_7\text{N}(n, p){}^{14}_6\text{C}$  ont lieu dans le combustible ainsi que dans les gaines et les embouts qui contiennent des impuretés en azote 14 (quelques dizaines à quelques centaines de ppm<sup>6</sup>).

- **L'émission de multiples neutrons** : deux, trois ... neutrons sont émis après capture du neutron incident. Si le nouveau noyau formé est un nucléide radioactif celui-ci évoluera vers la vallée de stabilité par des processus radioactifs successifs. Cette réaction est notée (n, 2n), (n, 3n), ...

### Exemples

- $n + {}^{239}_{94}\text{Pu} \rightarrow {}^{238}_{94}\text{Pu} + 2n$  est notée  ${}^{239}_{94}\text{Pu}(n, 2n){}^{238}_{94}\text{Pu}$
- $n + {}^{233}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{232}_{92}\text{U} + 2n$  est noté  ${}^{233}_{92}\text{U}(n, 2n){}^{232}_{92}\text{U}$
- **La fission** : la capture d'un neutron par un noyau lourd peut entraîner sa fragmentation en deux morceaux, c'est la **fission binaire**, voire en trois morceaux, c'est la **fission ternaire**. Ce processus de fission s'accompagne de l'émission de plusieurs neutrons (1 à 10), artisans de la réaction en chaîne. Cette réaction est notée (n, f).

### Exemple

La réaction de fission induite par un neutron sur un noyau d'uranium 235 produisant un noyau de xénon 140, un noyau de strontium 92 et trois neutrons (dits « prompts », voir chapitre 9) s'écrit :



Il est entendu que de nombreuses autres voies de sortie de la réaction  $n + {}^{235}_{92}\text{U}$  existent conduisant à d'autres produits de fission que ceux figurant dans le second membre de la réaction ci-dessus : plus d'un millier de produits de fission sont ainsi formés dans un combustible nucléaire irradié.

Le **tableau 1** montre les différents regroupements d'éléments chimiques définis pour un combustible oxyde d'uranium  $\text{UO}_2$  ou « Mox » (oxyde mixte d'uranium et de plutonium) irradié en lien avec les différents types de réactions nucléaires recensés ci-dessus.

Les différentes caractéristiques des réactions nucléaires précitées sont exposées dans les chapitres qui suivent le présent chapitre.

---

<sup>6</sup> ppm : parties par million ( $10^{-6}$ ).





Ces particules chargées, de grande énergie, provoquent, dans un matériau approprié fait d'atomes riches en neutrons, appelé **cible de spallation**, des **réactions de spallation**<sup>10 11 12 13 14 15</sup> qui se manifestent par une **fission** ou **fragmentation** du noyau atomique en plusieurs entités (**multifragmentation**) : ce sont des particules légères (neutrons, protons ...) et des groupements de nucléons résiduels désignés par les termes de **clusters**, **résiduels** ou **produits de spallation** (voir **figure 4**). Les neutrons de grande énergie produits dans ces systèmes peuvent induire ces mêmes réactions. R. Serber<sup>16</sup> a décrit ces réactions comme un phénomène à deux étapes.

- Au cours de la première, la particule incidente entre en collision avec les nucléons du noyau provoquant une sorte de jeu de billard, appelé « **cascade intranucléaire** » précédemment mentionnée sur la figure 1 ; comme le montre la figure 3, des nucléons participant à la cascade intranucléaire peuvent être expulsés du noyau ; lorsque la cascade intranucléaire est terminée, le noyau atomique reste dans un état fortement excité ;
- La seconde étape consiste en la désexcitation du noyau atomique selon différents processus possibles :
  - l'évaporation de particules légères : neutrons, protons, deutons, particules  $\alpha$  ... ;
  - la fission lorsqu'il s'agit d'un noyau lourd.

À ces différents processus sont associés des modèles permettant d'évaluer leur occurrence. La **cascade intranucléaire** peut être décrite :

- par le **modèle de Bertini**<sup>17</sup> qui considère le noyau cible comme fait d'une pâte nucléaire homogène dans laquelle se meut la particule incidente, et dont les déplacements sont simulés par la méthode probabiliste Monte-Carlo<sup>18</sup> ;

<sup>10</sup> K. Kikuchi, M. Kawai, *Nuclear Matter and Nuclear Reactions*, North-Holland, Amsterdam, 1968, Chapter 5., pp. 217-314.

<sup>11</sup> J. Cugnon, « Spallation réactions », École thématique, École Joliot-Curie. « Production d'énergie nucléaire et traitement des déchets : des filières d'aujourd'hui aux solutions innovantes », Maubuisson, France, du 9-14 septembre 1996.

<sup>12</sup> S. Leray, « Les données nucléaires de haute énergie : la spallation », *La neutronique*, op. cit, pp. 39-41.

<sup>13</sup> J. J. Gaimard, K. H. Schmidt, « A Reexamination of the abrasion - ablation model for the description of the nuclear fragmentation reaction », *Nucl. Phys.*, A531, 1991, pp. 709-745, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(91\)90748-U](https://doi.org/10.1016/0375-9474(91)90748-U).

<sup>14</sup> J.-C. David, A. Boudard, J. Cugnon, J. Hirtz, S. Leray, D. Mancusi, J. L. Rodriguez-Sanchez, « New features of the INCL model for spallation reactions », 27<sup>th</sup> International Nuclear Physics Conference (INPC2019), *Journal of Physics: Conference Series*, 1643, 1, 23 012080, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1643/1/012080>

<sup>15</sup> Y. Yariv, Z. Fraenkel, « Intranuclear cascade calculation of high energy heavy ion collisions: Effect of interactions between cascade particles », *Physical Review C* 24, 1981, pp. 488-494, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.24.488>.

<sup>16</sup> R. Serber, « Nuclear Reactions at High Energies », *Physical Review*, Vol. 72, 11, 1947, p. 1114, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.72.1114>.

<sup>17</sup> H. W. Bertini, « Low Energy Intranuclear Cascade Calculations », *Physical Review*, Vol. 131, 4, 1963, p. 1801, <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.131.1801>.

<sup>18</sup> N. Metropolis, R. Bivins, M. Storm, Anthony Turkevich, J. M. Miller, G. Friedlander, « Monte Carlo Calculations on Intranuclear Cascades - I. Low-Energy Studies », *Physical Review* 110, 185, April 1, 1958, <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.110.185> ; « Monte Carlo Calculations on Intranuclear

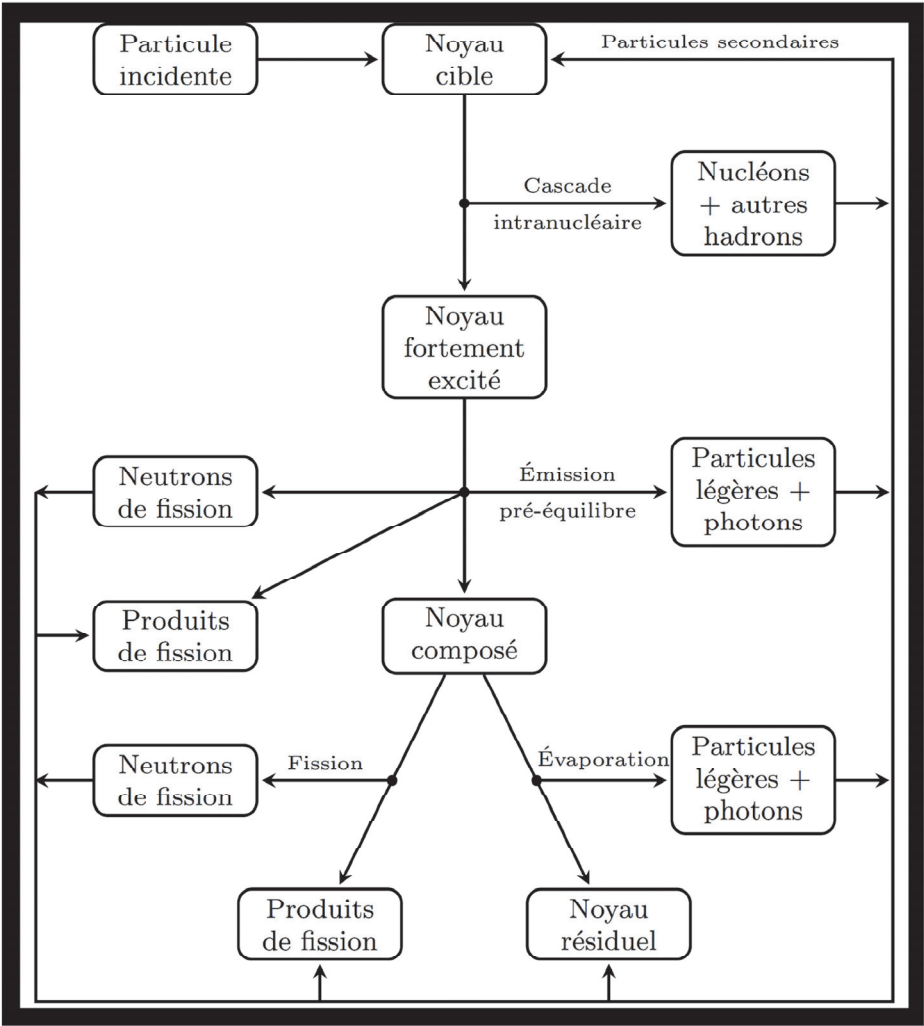


Figure 4. Processus physiques associés aux réactions de spallation.<sup>19</sup>

Cascades - II. High-Energy Studies and Pion Processes », *Physical Review* 110, 204, April 1, 1958, <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.110.204>.

<sup>19</sup> D'après Y. Kadi, *Transmutation des actinides mineurs : analyse de systèmes basés sur un accélérateur de protons et validation des méthodes de calcul*, Thèse Doctorat, Université de Provence Aix-Marseille I, 1995, Chapitre 2.

- par le modèle de type **dynamique moléculaire**<sup>20 21 22</sup> qui considère le noyau atomique comme un **gaz de Fermi** de nucléons dont on suit individuellement le mouvement au cours du temps en simulant les collisions éventuelles entre deux nucléons.

La phase transitoire entre la fin de la cascade intranucléaire et l'état du noyau composé dans lequel l'énergie apportée par la particule incidente s'est équirépartie est décrite par des modèles dits de « **pré-équilibre** »<sup>23 24 25</sup>. Durant cette phase, des phénomènes d'émission de particules légères ainsi que de fission sont possibles. La phase de désexcitation du noyau composé conduit à :

- l'émission de particules légères : neutrons, protons, deutons, particules  $\alpha$ , ... ;
- la fission lorsqu'il s'agit d'un noyau lourd.

Le **modèle statistique d'évaporation de Weisskopf**<sup>26</sup> est utilisé pour traiter le phénomène d'émission de particules légères. Pour les noyaux légers, l'approche statistique n'est plus justifiée, car les niveaux d'énergie du noyau atomique sont trop espacés. Fermi a proposé un modèle dénommé **Fermi break up**<sup>27</sup> qui permet de décrire la désexcitation des noyaux légers, notamment leur éclatement en plusieurs fragments.<sup>28</sup> Les sections efficaces différentielles de production de neutrons de spallation sont déterminées par les différents modèles avec une incertitude pouvant atteindre  $\pm 50\%$ . Cette incertitude est encore bien plus grande pour les rendements des résiduels de spallation. Les **figures 5, 6 et 7** ainsi que le **tableau 2** fournissent des ordres de grandeur des sections efficaces de réactions de spallation et des taux de production de neutrons et de produits de spallation pour des noyaux atomiques cibles riches en neutrons tels que le plomb, le tungstène, l'uranium et les actinides mineurs, neptunium et américium.

<sup>20</sup> J. Aichelin *et al.*, « Quantum molecular dynamics approach to heavy ion collisions: description of the model, comparison with fragmentation data and the mechanism of fragment formation », *Physical Review C*, Vol. 37, 6, 1969, p. 2451, [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90094-3](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90094-3).

<sup>21</sup> J. Cugnon, C. Volant, S. Vuillier, « Improved intranuclear cascade model for nucleon-nucleus interactions », *Nuclear Physics A*, Vol. 620, Issue 4, July 21, pp. 475-509, [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(97\)00186-3](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(97)00186-3).

<sup>22</sup> H. Ngô, F. Z. Ighezou, J. Desbois, C. Ngô, S. Leray *et al.*, « Scaling properties of percolation models for multifragmentation », *Z. Phys. A* 337, 1990, pp. 81-95, <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF01283940.pdf>.

<sup>23</sup> *Intermediate Energy Nuclear Data : Models and Codes*, Proceedings of a specialist's meeting, Issy-les-Moulineaux, France, AEN/OECD, 30 May-1 June, 1994 ; M. Blann, H. Gruppelaar (editor), *International Code Comparison for Intermediate Energy Nuclear Data*, AEN/OECD, 1994, <https://www.oecd-neo.org/science/docs/pubs/iendsm94/>.

<sup>24</sup> J. J. Griffin, « Statistical Model of Intermediate Structure », *Physical Review Letters* 17, 478, August 29, 1966 ; Erratum *Physical Review Letters* 19, 57 (1967), <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.17.478>.

<sup>25</sup> M. Blann, « Extensions of Griffin's Statistical Model for Medium-Energy Nuclear Reactions », *Physical Review Lett.* 21, 1357, October 28, 1968, <https://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.21.1357>.

<sup>26</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, p. 441.

<sup>27</sup> E. Fermi, « High Energy Nuclear Events », *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 5, Issue 4, July 1950, pp. 570-583, <https://doi.org/10.1143/ptp/5.4.570>.

<sup>28</sup> B. V. Carlson, R. Donangelo, S. R. Souza, W. G. Lynch, A. W. Steiner, M. B. Tsang, « Fermi breakup and the statistical multifragmentation model », *Nuclear Physics A*, Vol. 876, February 25, 2012, pp. 77-92, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2011.12.009>.

Tableau 2. Nombre de types de phénomènes réactionnels et de neutrons produits par proton incident de haute énergie dans une cible de neptunium 237.<sup>29</sup>

(par proton incident)	Énergie du faisceau (GeV)				
	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
Spallations	0.34	1.07	1.71	2.44	3.57
Fissions primaires	0.55	0.64	0.59	0.54	0.44
Fissions secondaires	1.06	3.51	6.06	8.37	12.9
Transmutations totales	1.95	5.24	8.40	11.4	17.0
Neutrons d'évaporation	9.69	26.5	41.7	54.7	78.6
Neutrons de cascade	1.53	4.46	7.52	10.3	15.6
Neutrons fuyants	0.11	0.38	0.60	0.86	1.38
Neutrons émis	11.3	31.3	49.8	65.8	95.6

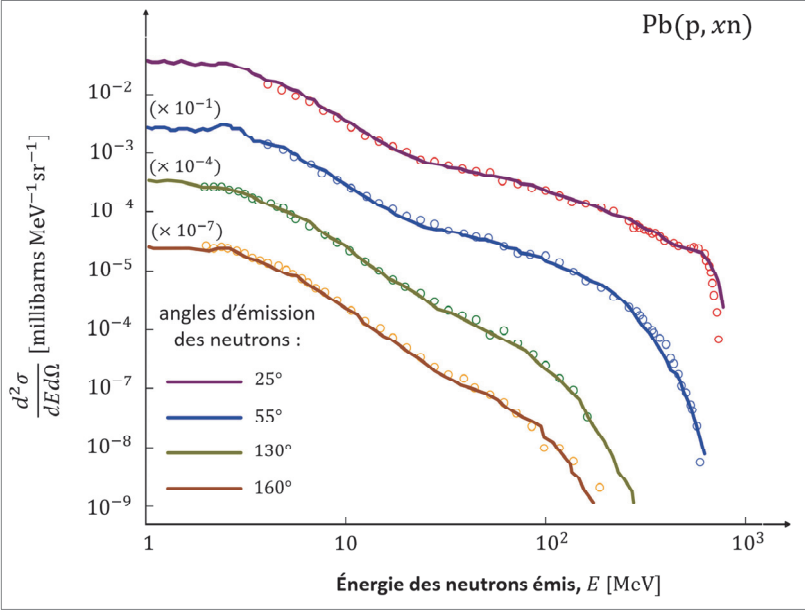


Figure 5. Exemple de section efficace différentielle en angle et en énergie de production de neutrons par réactions de spallation induites sur une cible de plomb de 2 cm d'épaisseur par des protons de 800 MeV.<sup>30</sup>

<sup>29</sup> Y. Kadi, *Transmutation des actinides mineurs : analyse de systèmes basés sur un accélérateur de protons et validation des méthodes de calcul*, op. cit.

<sup>30</sup> D'après *Électronucléaire – Une présentation par des physiciens*, op. cit., p. 168, figure 9.1 tirée de W. B. Amian, R. C. Byrd, C. A. Goulding, M. M. Meier, G. L. Morgan, C. E. Moss & D. A. Clark, « Differential Neutron Production Cross Sections for 800-MeV Protons », *Nuclear Science and Engineering*, 112:1, pp. 78-86, <https://doi.org/10.13182/NSE92-A23953>.

<sup>31</sup> Voir aussi S. Leray et al, « Spallation neutron production by 0.8, 1.2, and 1.6 GeV protons on various targets », *Physical Review C* 65, 044621, April 5, 2002, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.65.044621>, p. 044621-6.

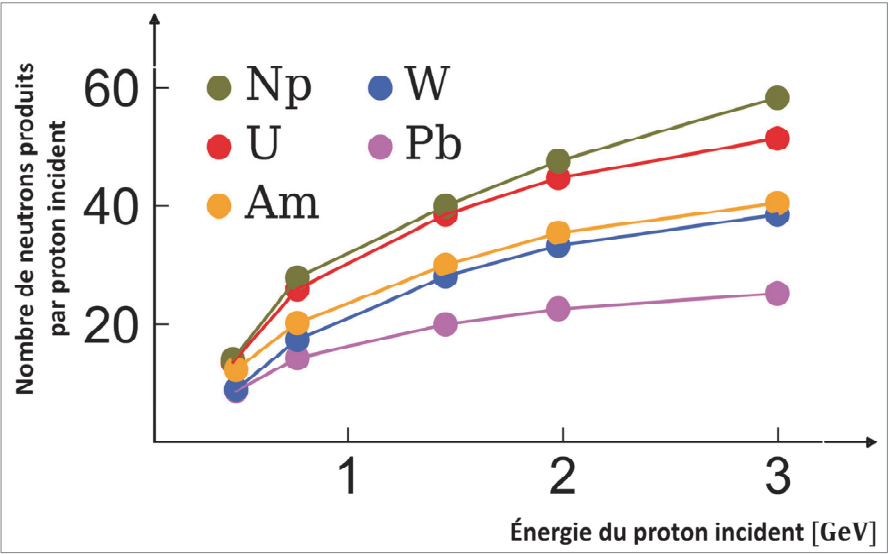


Figure 6. Nombre de neutrons produits par un proton aux énergies intermédiaires dans diverses cibles de spallation.<sup>32</sup>

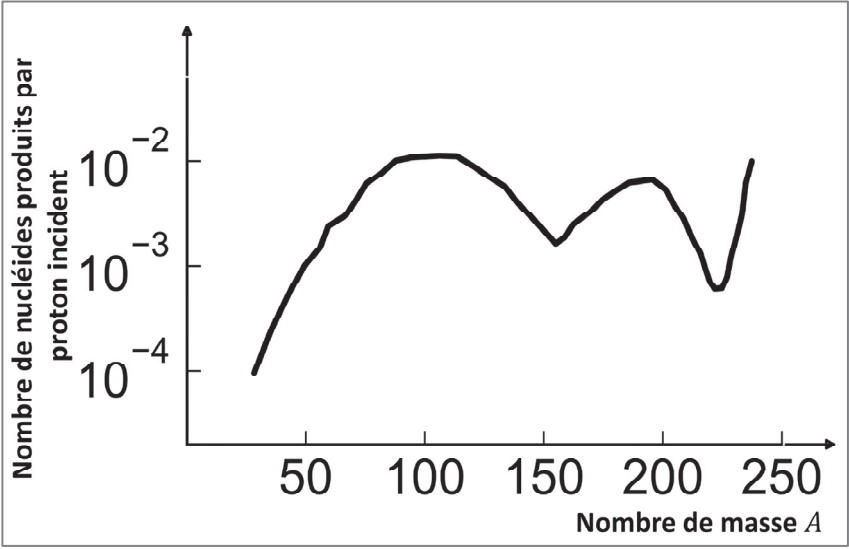


Figure 7. Allure des « rendements de spallation » : distribution des nucléides résiduels dans une cible mince d'uranium 238 bombardée par un proton de 1 GeV.<sup>33</sup>

<sup>32</sup> D'après Y. Kadi, *Transmutation des actinides mineurs : analyse de systèmes basés sur un accélérateur de protons et validation des méthodes de calcul*, op. cit.

<sup>33</sup> *Ibid.*

### 3.2. Les réactions directes et réactions profondément inélastiques

Lorsque l'énergie du projectile devient relativement élevée ( $> 10 \text{ MeV} - 20 \text{ MeV}$ ), des **réactions directes**<sup>34 35 36</sup> se produisent, parmi lesquelles :

- les réactions de **stripping** dans lesquelles le projectile transfère un ou plusieurs nucléons au noyau cible ; les réactions  $(d, p)$  et  $(d, n)$  suivantes en sont des exemples :  $^{37}_{17}\text{Cl}(d, p)^{38}_{17}\text{Cl}$ ,  $^{12}_6\text{C}(d, n)^{13}_7\text{N}$  ; la réaction  $^{208}_{82}\text{Pb}(^3_2\text{He}, d)^{209}_{83}\text{Bi}$  en est un autre exemple ;
- les réactions de type **pickup** dans lesquelles, inversement, le projectile capture des nucléons de la cible comme le montre la réaction  $^{54}_{26}\text{Fe}(n, d)^{53}_{25}\text{Mn}$  provoquée par des neutrons de 14 MeV ;
- les réactions de **breakup** dans lesquelles le projectile se brise en ces différents constituants, par exemple un projectile de deuton se cassant en un neutron et un proton lors de son impact sur le noyau cible ;
- les réactions de **knock out** dans lesquelles le projectile provoque l'expulsion d'un nucléon du noyau atomique cible. Ce processus a lieu par exemple dans le cas des réactions  $^9_4\text{Be}(\alpha, n)^{12}_6\text{C}$  ou  $^{13}_6\text{C}(\alpha, n)^{16}_8\text{O}$  dont l'énergie de liaison du « dernier neutron » du noyau atomique cible, respectivement  $\sim 1.66 \text{ MeV}$  et  $\sim 4.9 \text{ MeV}$ , est significativement plus faible que l'énergie de liaison de n'importe quel des quatre nucléons de la particule  $\alpha$  projectile,  $\sim 7 \text{ MeV}$ , ou bien de l'énergie de séparation de son « dernier nucléon »  $\sim 20 \text{ MeV}$  ;
- les « **oscillations collectives de surface** » (**collective surface oscillations**) résultant de l'interaction de la particule incidente avec la surface du noyau atomique cible.

Toutes ces réactions sont donc caractérisées par le fait que le projectile n'interagit qu'avec un nombre très limité de nucléons du noyau atomique cible, car sa longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre de grandeur de la taille d'un nucléon ; cela explique la durée très courte ( $\sim 10^{-22} \text{ s}$ ) de ce type de réaction (voir figure 1). Aussi sont-elles parfois appelées « **réactions de surface** ».

Les **réactions « profondément inélastiques »** (**deep inelastic reactions**) se situent dans la zone intermédiaire entre les réactions quasi élastiques (dans lesquelles l'énergie cinétique est à peu près conservée) et la formation du noyau composé (voir figure 1).<sup>37</sup> Elles concernent les collisions entre des ions.<sup>38</sup>

<sup>34</sup> C. Le Sech, C. Ngô, *Physique nucléaire – Des quarks aux applications*, Dunod, Paris, 2020, pp. 91-93.

<sup>35</sup> C. Cindro, « A Survey of Fast-Neutron Reactions », *Rev. Mod. Phys.* 38, July 1, 1966, pp. 391-446, <https://journals.aps.org/rmp/pdf/10.1103/RevModPhys.38.391>

<sup>36</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications: A Model Approach*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2007, pp. 446.

<sup>37</sup> J. Lilley, *Nuclear Physics – Principles and Applications*, John Wiley & Sons Ltd, New York, 2001, pp. 122-124.

<sup>38</sup> Voir par exemple : S. Agarwal, J. Galin, B. Gatty, D. Guerreau, M. Lefort, X. Tarrago, R. Babinet, B. Cauvin, J. Girard, H. Nifenecker, « Evidence for a short lifetime and a long lifetime regime in the deep inelastic collisions

### 3.3. Les réactions de fusion thermonucléaire

Des réactions de fusion thermonucléaire<sup>39 40 41</sup> sont provoquées dans des machines à confinement magnétique<sup>42</sup> et à confinement inertiel<sup>43</sup>.

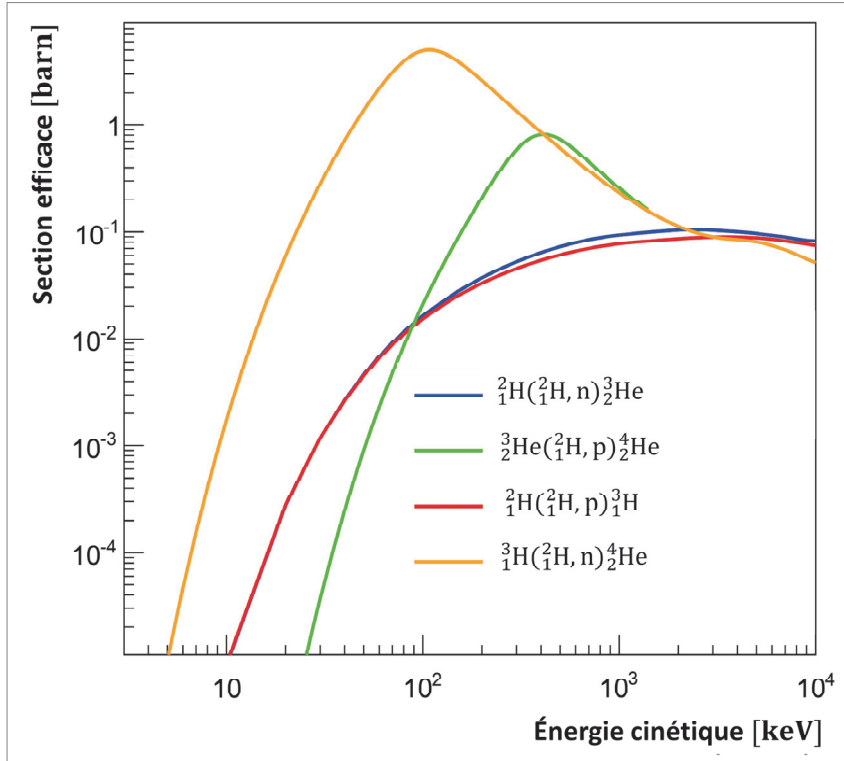


Figure 8. Variation des sections efficaces de différentes réactions de fusion thermonucléaire en fonction de l'énergie cinétique du centre de masse des nucléides qui interagissent, deutérium-deutérium, deutérium-tritium, deutérium-hélium 3 ( $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$ ) ;  ${}^2_1\text{H}({}^2_1\text{H}, n){}^3_2\text{He}$  ;  ${}^2_1\text{H}({}^2_1\text{H}, p){}^3_1\text{H}$  ;  ${}^3_2\text{He}({}^2_1\text{H}, p){}^4_2\text{He}$  ;  ${}^3_1\text{H}({}^2_1\text{H}, n){}^4_2\text{He}$ .

between  ${}^{40}\text{Ca}$  and  ${}^{64}\text{Ni}$  at 182 MeV », *Nuclear Physics A*, Vol. 293, Issues 1–2, December 12–19, 1977, pp. 230–247, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(77\)90489-4](https://doi.org/10.1016/0375-9474(77)90489-4).

<sup>39</sup> J. D. Lawson, « Some criteria for a power producing thermonuclear reactor », *Proc. Phys. Soc.*, London, 70 B, 6, 1957, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0370-1301/70/1/303/pdf>.

<sup>40</sup> C. Etiévant, *L'énergie thermonucléaire*, PUF, Coll. « Que sais-je », Paris, 1976 ; D. Blanc, *Fusion thermonucléaire contrôlée : une énergie pour le futur*, Masson, Paris, 1979 ; « La fusion nucléaire contrôlée », *RGN* n° 6, Novembre-Décembre 1980 ; P. Garin, « La physique de la fusion thermonucléaire et le projet ITER », *RGN* N° 2, Mars-Avril 2003, pp. 45–46 ; F. Carré, P. Magaud, « Croissance des synergies entre les réacteurs de fission et de fusion », *RGN* N° 6 Novembre-Décembre 2014, pp. 11–17.

<sup>41</sup> P. Fröbrich, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, Clarendon Press, Oxford, 1996.

<sup>42</sup> Exemples : TORE-SUPRA/WEST et ITER sur le site du CEA de Cadarache en France.

<sup>43</sup> Exemple : l'installation du *Laser Mégajoule* près de Bordeaux en France.

Les réactions mises en jeu sont principalement les suivantes :

- ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + \text{n}$  ou  ${}^2_1\text{H}({}^2_1\text{H}, \text{n}){}^3_2\text{He}$ , énergie libérée :  $Q = 3.27 \text{ MeV}$  dont  $2.45 \text{ MeV}$  d'énergie cinétique du neutron ;
- ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^3_1\text{H} + \text{p}$  ou  ${}^2_1\text{H}({}^2_1\text{H}, \text{p}){}^3_1\text{H}$ , énergie libérée :  $Q = 4.03 \text{ MeV}$  dont  $3.03 \text{ MeV}$  d'énergie cinétique du proton ;
- ${}^2_1\text{H} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \text{p}$  ou  ${}^2_1\text{H}({}^3_2\text{He}, \text{p}){}^4_2\text{He}$ , énergie libérée :  $Q = 18.37 \text{ MeV}$  dont  $14.7 \text{ MeV}$  d'énergie cinétique du proton ;
- ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \text{n}$  ou  ${}^2_1\text{H}({}^3_1\text{H}, \text{n}){}^4_2\text{He}$ , énergie libérée :  $Q = 17.58 \text{ MeV}$  dont  $14.1 \text{ MeV}$  d'énergie cinétique du neutron.

Leurs sections efficaces en fonction de l'énergie d'interaction sont indiquées sur la **figure 8**. Elles nécessitent des températures extrêmement élevées, de l'ordre de 100 millions de degrés, permettant de conférer aux noyaux devant fusionner des énergies suffisantes pour vaincre la barrière coulombienne.

L'examen des sections efficaces représentées sur la **figure 8** et des énergies disponibles montre que la réaction qui présente le plus grand intérêt dans la perspective d'une production industrielle d'énergie est la réaction de fusion deutérium-tritium.

### 3.4. Les réactions photonucléaires

Les réactions photonucléaires plus particulièrement concernées dans le domaine de la physique des réacteurs et du cycle du combustible nucléaire produisent des neutrons *via* les **réactions photoneutroniques** du type  $(\gamma, \text{n})$ ,  $(\gamma, 2\text{n})$ , etc. et les réactions de **photofission**  $(\gamma, \text{f})$ . Elles sont présentées dans le chapitre 11.

#### Exemple

La réaction de dissociation du deutérium  ${}^2_1\text{D}(\gamma, \text{n}){}^1_1\text{H}$  :



Pour cette réaction déjà rencontrée dans le chapitre 3, on a indiqué qu'il s'agit d'une réaction à seuil nécessitant un photon d'énergie au moins égale à  $2.23 \text{ MeV}$  pour qu'elle puisse se produire.

### 3.5. Les réactions nucléaires induites par des particules chargées

Ce sont surtout celles induites par des particules  $\alpha$  ( ${}^4_2\text{He}$ ) et productrices de neutrons qui sont ici d'intérêt. Elles sont présentées dans le chapitre 12.

#### Exemple

La réaction  ${}^9_4\text{Be}(\alpha, \text{n}){}^{12}_6\text{C}$  :





Annexe I : réactions nucléaires d'intérêt induites par des neutrons dans des structures d'installations nucléaires.

Le tableau 3 fournit quelques exemples de réactions nucléaires d'intérêt induites par des neutrons dans différentes structures ou matériaux présents dans des installations nucléaires.<sup>44</sup>

Tableau 3 : Exemples de réactions nucléaires d'intérêt induites par des neutrons dans différents composants de réacteurs nucléaires

Type de structure / composants	Réaction	Période radioactive du nucléide produit	Type de désintégration radioactive / particule émise
Alliages d'aluminium (caisson réacteur de recherche, gaine élément combustible...)	Al27(n,γ)Al28 → Si28 Al27(n,p)Mg27 → Al27	2.24 m 9.45 m	β <sup>-</sup> β <sup>-</sup>
Alliages de zirconium (ex. gaine en zircaloy d'un crayon combustible REP, tube guide en zircaloy ...)	Zr94(n,γ)Zr95 → Nb95 Nb95 → Mo95 Zr96(n,γ)Zr97 → Nb97 Nb97 → Mo97	65.5j 35.1j 16.8h 73.6 m	β <sup>-</sup> β <sup>-</sup> β <sup>-</sup> β <sup>-</sup>
Aciers et inconels (grilles des assemblages en inconel, enveloppe du cœur et cuve en acier, barres de commande ...)	Cr50(n,γ)Cr51 → V51 Mn55(n,γ)Mn56 → Fe56 Fe54(n,p)Mn54 → Cr54 Fe58(n,γ)Fe59 → Co59 Ni58(n, p)Co58 → Fe58 Ni52(n, γ)Ni53 → Fe53	27.7 j 2.58 h 312.5 j 44.6 j 71.3 j 100 a	β <sup>+</sup> β <sup>-</sup> β <sup>-</sup> β <sup>-</sup> β <sup>+</sup> , CE β <sup>-</sup>
Eau légère Modérateur/caloporteur (REP, REB, ...)	O16(n, p)N16 → O16 O17(n, p)N17 → O16 O18(n, γ)O19 → F19 O18(n, p) F18 → O18	7.12 s 4.17 s 26.91 s 109.8 m	β <sup>-</sup> neutron β <sup>-</sup> β <sup>+</sup>
Eau lourde Modérateur/caloporteur (CANDU, EL4/Brennilis)	H2(n, γ)H3 → He3	12.3 a	β <sup>-</sup> , no γ
Sodium liquide Modérateur/Caloporteur (RNR)	Na23(n, γ)Na24 → Mg24 Na23(n, p)Ne23 → Na23	15.02 h 37.24 s	β <sup>-</sup> β <sup>-</sup>
Graphite/CO2 Modérateur graphite/Caloporteur CO2 (UNGG, MAGNOX)	C13(n,γ)C14 → N14	5730 a	β <sup>-</sup> , no γ
Gaz de remplissage des crayons combustibles REP : l'hélium	He3(n, p)H3 → He3	12.3 a	β <sup>-</sup> , no γ
AIC Barres de commandes	Ag107(n, γ)Ag108F → Cd108, Pd108 Ag107(n, γ)Ag108M → Pd108	2.39 m 127 a	β <sup>-</sup> (97.6%), β <sup>+</sup> (2.35%), CE, γ β <sup>+</sup> , CE, γ
Béton Protection biologique, etc.	Ca40(n,γ)Ca41	1.4 10 <sup>6</sup> a	CE, β <sup>+</sup> , no γ
Aciers et inconels (embouts et grilles des assemblages, enveloppe du cœur et cuve en acier, barres de commande, ...)	Co59(n, γ)Co60 → Ni 60 Co59(n, γ)Co60m → Ni60	10.47 m 5.27 a	β <sup>-</sup> TI β <sup>-</sup>
Graphite/CO2 Modérateur graphite / Caloporteur CO2 (UNGG, MAGNOX)	Cl35(n,γ)Cl36 Li6(n, α)H3 → He3	3.01 10 <sup>5</sup> a 12.3 a	β <sup>-</sup> , β <sup>+</sup> β <sup>-</sup>
Béton Protection biologique, etc.	Li6(n, α)H3→He3 Eu151(n,γ)Eu152F → Gd152, Sm152 Eu153(n,γ)Eu 154 → Gd154, Sm154 Ho165(n,γ)Ho166m	12.3 a 13.33 a 8.8 a	β <sup>-</sup> β <sup>-</sup> (27.9%), β <sup>+</sup> (72.1%) β <sup>-</sup> (100%), β <sup>+</sup> (0.02%) β <sup>-</sup>
Solutions	Na, K, Mg, Al, Cl, Ca, Ar40(n, γ)Ar41 → K41	1.83 h	β <sup>-</sup>

<sup>44</sup> C. M. Diop, « Les sources de rayonnements », dans Métivier (coordinateur), Radioprotection et ingénierie nucléaire, EDP Sciences – CEA/INSTN, collection Génie Atomique, Paris, 2006.

Le **tableau 4** montre des réactions induites par des neutrons utilisées pour remonter à une estimation de la quantité de neutrons ayant irradié une structure d’une installation nucléaire à partir des activités mesurées des radionucléides produits par ces réactions. Les dispositifs mis au point dans lesquels se déroulent ces réactions et dont on mesure la radioactivité après irradiation neutronique sont appelés **dosimètres**. On parlera ainsi de « dosimètre fer », de « dosimètre or », etc., ayant chacun leur domaine de sensibilité en énergie aux neutrons, au-dessus de 3 MeV pour le premier et sans seuil pour le second.

Tableau 4 : Exemples de réactions nucléaires d’intérêt dosimétrique

Réaction nucléaire	Domaine d’énergie des neutrons incidents	Période radioactive du nucléide formé
$^{54}\text{Fe} \text{ (n,p) } ^{54}\text{Mn}$	$\geq 3 \text{ MeV}$	312.2 jours
$^{58}\text{Ni} \text{ (n,p) } ^{58}\text{Co}$	$\geq 2.7 \text{ MeV}$	70.86 jours
$^{59}\text{Co} \text{ (n,}\gamma\text{) } ^{60}\text{Co}$	thermique et épithermique	5.27 années
$^{63}\text{Cu} \text{ (n,}\alpha\text{) } ^{60}\text{Co}$	$\geq 6.1 \text{ MeV}$	5.27 années
$^{197}\text{Au} \text{ (n,}\gamma\text{) } ^{198}\text{Au}$	thermique et épithermique	2.69 jours
$^{93}\text{Nb} \text{ (n,n')} ^{93\text{m}}\text{Nb}$	$\geq 0.1 \text{ MeV}$	16.12 années
$^{103}\text{Rh} \text{ (n,n')} ^{103\text{m}}\text{Rh}$	$\geq 0.7 \text{ MeV}$	56.11 minutes
$^{115}\text{In} \text{ (n,}\gamma\text{) } ^{116\text{m}}\text{In}$ $^{115}\text{In} \text{ (n,n')} ^{115\text{m}}\text{In}$	thermique et épithermique $\geq 1.3 \text{ MeV}$	54.29 minutes 4.49 heures
$^{27}\text{Al} \text{ (n,}\alpha\text{) } ^{24}\text{Na}$	$\geq 7.3 \text{ MeV}$	14.96 heures
$^{238}\text{U} \text{ (n,f) } ^{137}\text{Cs}$	$\geq 1. \text{ MeV}$	30.08 années
$^{237}\text{Np} \text{ (n,f) } ^{137}\text{Cs}$	$\geq 0. \text{ MeV}$	30.08 années

# Énergétique des réactions nucléaires



Ce chapitre expose principalement les **propriétés cinématiques et énergétiques** associées aux **réactions nucléaires induites par les neutrons**. On y rappelle les relations qui permettent de passer du **référentiel du laboratoire** à celui du **centre de masse** et vice versa. En effet, ces deux référentiels sont couramment concomitamment utilisés, à la fois pour des raisons calculatoires et pour des raisons conceptuelles. Après un retour sur la définition de l'**énergie disponible** associée à une réaction nucléaire, à l'instar d'une réaction chimique, on introduit la notion d'**énergie de seuil**. La détermination de l'énergie et de la direction d'émission d'un neutron à l'issue d'un processus de diffusion est essentielle en physique des réacteurs, afin d'être en mesure de décrire son **ralentissement** et plus généralement son histoire entre l'instant de sa naissance par fission par exemple, et l'instant auquel il est susceptible de disparaître, absorbé par un noyau atomique. C'est ainsi que le lien entre **énergie cinétique** et **angle de diffusion** est examiné. Par ailleurs, les notions cinématiques abordées permettent de calculer l'énergie cinétique du « **noyau (ou atome) de recul** » de la réaction nucléaire considérée, correspondant à un **dépôt local d'énergie**, grandeur qui intéresse les études du comportement des matériaux sous irradiation neutronique et donc de leur tenue et dégradation progressive au cours du temps.

Le caractère générique des relations cinématiques exposées permet d'appliquer celles-ci à d'autres particules incidentes d'intérêt sur un noyau atomique que le neutron, comme cela sera illustré à travers quelques exemples.

## 1. Énergie disponible

Ainsi qu'on l'a déjà indiqué dans les chapitres 6 et 3, les réactions nucléaires, tout comme les réactions chimiques, mettent en jeu une énergie dite **disponible**, souvent notée  $Q$ , (ou **chaleur de réaction**, comme dans le cas des réactions chimiques) dont le signe permet de déterminer si une réaction donnée est :

- **exoénergétique/exothermique**, c'est-à-dire pour laquelle  $Q > 0$ , donc libératrice d'énergie ;
- ou **endoénergétique/endothermique**, c'est-à-dire pour laquelle  $Q < 0$ , nécessitant alors un apport énergétique pour pouvoir se produire.

On considère le cas d'une particule incidente de masse  $m_1$  entrant en collision avec une particule de masse  $m_2$  d'où résultent deux particules de masses respectives  $m_3$  et  $m_4$ , mettant en jeu l'énergie disponible  $Q$  :

$$(1) + (2) \rightarrow (3) + (4) + Q \quad (1.1)$$

L'**énergie disponible**,  $Q$ , de la réaction nucléaire considérée s'écrit :

$$Q = \sum_{i=1,2} m_i c^2 - \sum_{i=3,4} m_i c^2 \quad (1.2)$$

Ci-après, on donne quelques exemples de réactions nucléaires exo- ou endoénergétiques :

- $Q > 0$  : cas de transitions radioactives, de réactions de capture radiative d'un neutron, de réactions de fission ;
- $Q < 0$  : cas des réactions nucléaires dites réactions à seuil. La réaction ne peut avoir lieu que si la particule incidente possède une énergie cinétique suffisante appelée **énergie de seuil**.

Il existe aussi le cas important où  $Q = 0$ , qui correspond au processus dénommé **diffusion élastique**.

### Remarque

Dans les réacteurs nucléaires « classiques », l'énergie des neutrons considérée est inférieure à  $E_{max} = 20$  MeV. Cela justifie que les calculs concernant le neutron proprement dit sont généralement effectués en hypothèse non relativiste. En effet, soit respectivement  $m_n$ ,  $v_n$  et  $E_n$ , la masse, la vitesse et l'énergie cinétique du neutron ; on a en hypothèse non relativiste :

$$E_n = \frac{1}{2} m_n v_n^2 \quad (1.3)$$

Pour  $E_n = E_{max} = 20$  MeV

$$v_n = \sqrt{2 \frac{E_{max}}{m_n}} = \sqrt{\frac{2}{1.674\,927\,16 \cdot 10^{-27} \text{ (kg)}} \times 20 \times 10^6 \times 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ (J)}} = 6.185 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$$

Le rapport caractéristique :

$$\left(\frac{v_n}{c}\right)^2 = \left[\frac{6.185 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\right]^2 = 4 \cdot 10^{-2}$$

est donc nettement inférieur à l'unité.

L'énergie moyenne des neutrons émis lors d'une fission est de l'ordre de  $E_n = 2$  MeV,  $v_n = 1.956 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$  et :

$$\left(\frac{v_n}{c}\right)^2 = \left[\frac{1.956 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^8}\right]^2 = 4.2 \cdot 10^{-3}$$

Pour un neutron de faible énergie cinétique, à l'énergie dite **thermique**  $E_n = 0.025$  eV,  $v_n = 2.192 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$  et :

$$\left(\frac{v_n}{c}\right)^2 = \left[\frac{2.192 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8}\right]^2 = 5.33 \cdot 10^{-11}$$

Les deux applications numériques ci-dessus montrent que pour la plupart des calculs visés ici, l'**hypothèse non relativiste** est licite et sera retenue dans la suite, sauf mention contraire.

## 2. Relations cinématiques générales

En se référant aux réactions nucléaires d'intérêt identifiées dans le chapitre 6, on considère une réaction nucléaire à 2 corps, c'est-à-dire la collision entre deux particules que l'on note (1) et (2). Dans le **référentiel du laboratoire (L)**, comme le schématise la **figure 1**, la particule (1) est par convention la **particule incidente** et la particule (2), la **particule cible**. La particule incidente (1) est animée d'une vitesse, se déplaçant en direction de la particule cible, alors que cette particule cible (2) est supposée être au repos (immobile). À l'exception du cas de l'interaction d'un neutron avec l'hydrogène, la masse de la particule cible est significativement supérieure à celle de la particule incidente.

À l'issue du processus collisionnel, comme on l'a vu dans le chapitre 6 (en mettant provisoirement de côté la fission ainsi que les autres réactions nucléaires productrices de plus de deux particules en voie de sortie), sont produites simultanément deux particules, que l'on note (3) et (4) dans la suite<sup>1</sup>. Conventionnellement ici, (3) désignera la particule émise dite « **légère** » et (4), par opposition, la particule émise « **lourde** » (mais pas toujours), encore appelée **noyau (ou atome) de recul**.

Dans le **référentiel du centre de masse (CM)**, comme le schématise la **figure 2**, la particule incidente (1) et la particule cible (2) vont à la rencontre l'une de l'autre.

Les **relations cinématiques** permettent de déterminer l'énergie cinétique des particules émises lors d'une réaction nucléaire. Après avoir exposé ces relations dans le cas général de deux particules initiales quelconques, on se focalise sur les processus de diffusion d'un neutron sur un noyau-atomique-cible. À l'issue du processus collisionnel, les deux particules émises repartent dans deux directions opposées. La propriété du **référentiel du centre de masse** réside dans le fait qu'il est stationnaire, ce qui se traduit par la somme nulle des impulsions (ou quantités de mouvement) des particules (1) et (2). La somme des impulsions des particules (3) et (4) est également nulle en vertu du principe de la conservation de l'impulsion totale avant et après réaction.

Lorsque la réaction nucléaire considérée est une **diffusion**, alors la particule (3) est la même (plus exactement de même nature) que la particule (1), et la particule (4) est la même que la particule (2). Dans un tel cas, (3) et (1) se différencient par leurs propriétés cinématiques, à savoir leurs vitesses ou énergies cinétiques et directions respectives. Il en va de même pour les particules (3) et (4) pour lesquelles peuvent s'ajouter des états d'énergie internes différents : par exemple (4) n'est pas systématiquement produit dans un état fondamental et peut l'être dans un état d'énergie excité (cas de la diffusion inélastique).

<sup>1</sup> Il s'agit de la situation la plus fréquente dans le cadre applicatif considéré ; le problème de la cinématique d'une réaction d'où résultent trois entités et au-delà se rencontre également, mais n'est pas traité ici : voir par exemple P. A. Assimakopoulos, « Kinematics of three-body reactions », *Computer Physics Communications*, v. 10 (6), 1975, pp. 385-400 ; C. Xuan Chuan, « Réactions nucléaires avec émission simultanée de trois corps », *J. Phys. Radium*, 1962, 23 (2), pp.78-80 ; P. Swan, « Sequential Decay Theory for the B11(p,3 $\alpha$ ) Reaction », *Rev. Mod. Phys.* 37, 3, July 1, 1965, pp. 336-346 § II ; A. M. Baldin, V. I. Gol'danskii, I. L. Rozenthal, *Kinematics of nuclear reactions*, Pergamon Press, London, Oxford, 1961. Voir annexe III, § 4 pour les cas particuliers des réactions (n, 2n) et (n, xn).

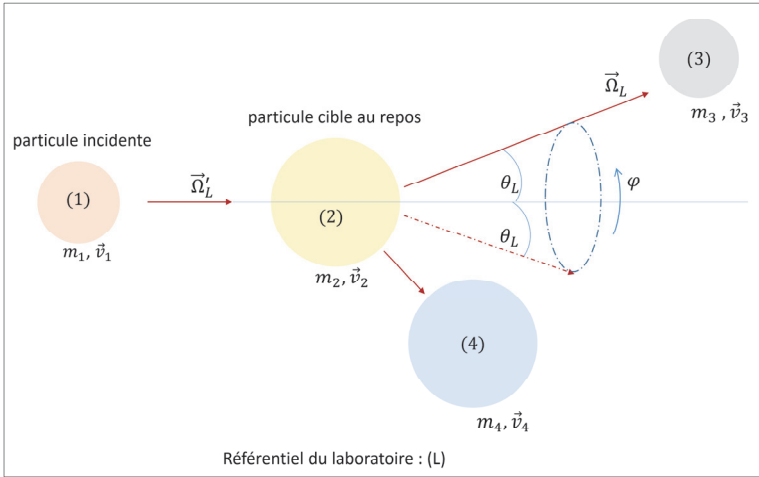


Figure 1. Collision dans le référentiel du laboratoire (L) ;  $\theta_L$  est l'angle d'émission dans la direction  $\vec{\Omega}_L$  de la particule légère (3) repéré par rapport à la direction d'incidence  $\vec{\Omega}'_L$  de la particule (1). En raison de la propriété d'isotropie de la matière, la direction d'émission  $\vec{\Omega}_L$  de la particule (3) (resp. (4)) présente une symétrie de révolution autour de la direction d'incidence  $\vec{\Omega}'_L$  de la particule (1) : la distribution angulaire de la particule (3) (resp. (4)) émise est isotrope selon l'angle  $\varphi$ . La notion d'angle solide est rappelée dans l'annexe I.

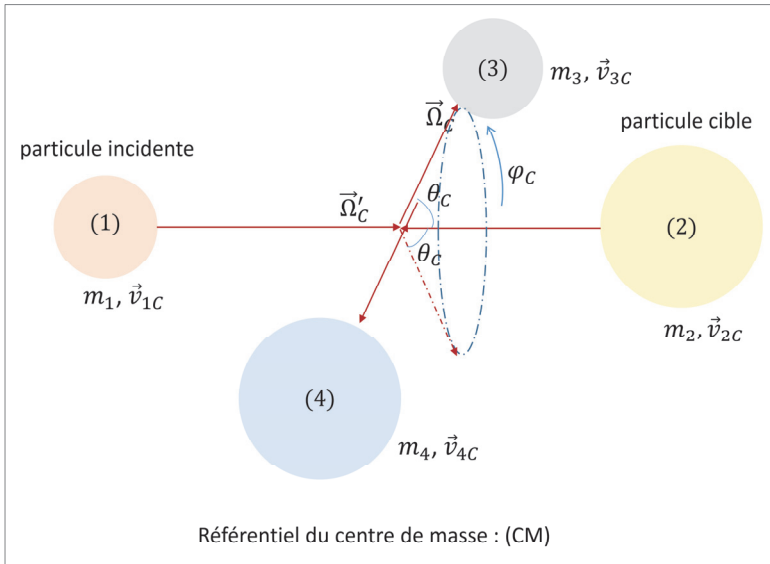


Figure 2. Collision dans le référentiel du centre de masse (CM).  $\theta_C$  est l'angle d'émission dans la direction  $\vec{\Omega}_C$  de la particule « légère » (3) repéré par rapport à la direction,  $\vec{\Omega}'_C$ , avant collision de la particule (1) (la direction de la particule (2) avant collision est  $-\vec{\Omega}'_C$ ). L'angle d'émission de la particule (4) est égal à  $\pi - \theta_C$ . En raison de la propriété d'isotropie de la matière, les émissions des particules (3) et (4) sont isotropes vis-à-vis de l'angle de révolution autour de la direction d'incidence  $\vec{\Omega}'_C$ .



## 2.1. Calcul de l'énergie des particules émises après collision dans le référentiel du laboratoire

La figure 1 illustre, dans le référentiel du laboratoire (L), l'interaction d'une particule incidente de masse  $m_1$ , de vitesse  $v_1$  et d'énergie cinétique  $E_1$ , entrant en collision avec une particule de masse  $m_2$  de vitesse  $v_2$  et d'énergie cinétique  $E_2$  ; il en résulte deux particules de masses respectives  $m_3$  de vitesse  $v_3$  et d'énergie cinétique  $E_3$ , et  $m_4$  de vitesse  $v_4$  et d'énergie cinétique  $E_4$ , supposées produites dans leur état fondamental :

$$(1) + (2) \rightarrow (3) + (4) + Q \quad (2.1)$$

$$Q = (m_1c^2 + m_2c^2) - (m_3c^2 + m_4c^2) \quad (2.2)$$

Dans le système du laboratoire, la conservation de l'énergie totale est donnée par l'expression :

$$m_1c^2 + E_1 + m_2c^2 + E_2 = m_3c^2 + E_3 + m_4c^2 + E_4 \quad (2.3)$$

que l'on peut réécrire en tenant compte de (2.2) comme :

$$E_1 + E_2 + Q = E_3 + E_4 \quad (2.4)$$

On suppose à présent que la particule (4) par exemple est produite dans un état excité ; la masse de cette particule (4),  $m_4^*$ , est alors donnée par la relation suivante :

$$m_4^*c^2 = m_4c^2 + E^* \quad (2.5)$$

où  $E^*$  représente son énergie d'excitation.

Les relations (2.3) et (2.4) deviennent :

$$\begin{aligned} m_1c^2 + E_1 + m_2c^2 + E_2 &= m_3c^2 + E_3 + m_4^*c^2 + E_4 \\ &= m_3c^2 + E_3 + m_4c^2 + E^* + E_4 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$E_1 + E_2 + Q - E^* = E_3 + E_4 \quad (2.7)$$

ou, en posant  $Q^* = Q - E^*$  :

$$E_1 + E_2 + Q^* = E_3 + E_4 \quad (2.8)$$

À partir des équations de conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement, on aboutit à l'expression de l'énergie cinétique  $E_3 = \frac{1}{2}m_3v_3^2$  de la particule émergente (3) dans le système du laboratoire (voir annexe II) :

$$\sqrt{E_3} = \frac{\sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L \pm \sqrt{m_1 m_3 E_1 \cos^2 \theta_L - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^*]}}{m_3 + m_4} \quad (2.9a)$$

$$E_3 = \left[ \frac{\sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L \pm \sqrt{m_1 m_3 E_1 \cos^2 \theta_L - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^*]}}{m_3 + m_4} \right]^2 \quad (2.9b)$$

Les solutions découlent de l'étude du discriminant qui doit être positif ou nul :

$$\Delta' = m_1 m_3 E_1 \cos^2 \theta_L - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^*] \quad (2.10)$$

D'autre part,  $E_3$  est une grandeur physique par définition positive,  $\sqrt{E_3}$  est positive, ce qui conditionne le signe ou les signes + ou - à retenir devant la racine carrée du discriminant (voir discussion en annexe II, § 2).

La relation (2.9) montre donc que pour ce type de collision il y a une corrélation entre l'énergie et l'angle de déviation des particules émergentes :  $E_3$  est fonction de  $\cos \theta_L$  et inversement.

Pour la particule (4), on peut pareillement exprimer  $E_4 = \frac{1}{2} m_4 v_4^2$  : dans (2.9b) il faut intervertir  $m_3$  et  $m_4$  et considérer que  $\theta_L$  représente l'angle de déviation de la particule (4) et non plus de la particule (3). Mais l'on remarque que la conservation de l'énergie totale (2.7) conduit immédiatement à la détermination de  $E_4$  lorsque l'énergie cinétique  $E_3$  a déjà été calculée en utilisant (2.9b) :

$$E_4 = E_1 + E_2 + Q^* - E_3 \quad (2.11)$$

### Remarques

- En toute rigueur, l'impulsion du nucléide (4) avant désexcitation, l'énergie cinétique et l'impulsion de la particule (4) dans le référentiel du laboratoire s'écrivent respectivement :  $m_4^* \vec{v}_4$  et  $E_4 = \frac{1}{2} m_4^* v_4^2$  avec  $m_4^* c^2 = m_4 c^2 + E^*$ .

Dans les relations (2.9a), (2.9b) et (2.10), on a implicitement supposé que  $E_4 = \frac{1}{2} m_4^* v_4^2 \approx \frac{1}{2} m_4 v_4^2$  et que  $m_4^* \vec{v}_4 \approx m_4 \vec{v}_4$  : cela signifie que ces deux grandeurs ont été supposées très peu affectées par l'état d'excitation du nucléide (4) ; dans le cadre des situations considérées ici, cela est justifié par le fait que l'on a  $E^* \ll m_4 c^2$  :  $E^*$  peut atteindre des valeurs de quelques MeV au plus qui sont à comparer *a minima* à la masse du neutron ou du proton  $\approx 939$  MeV.

On notera aussi que le processus de désexcitation est aussi justiciable d'un traitement cinématique qui peut revêtir un certain degré de complexité :

- le processus de désexcitation, c'est-à-dire d'émission d'une particule (gamma notamment) par le nucléide (4) produit dans un état excité, s'accompagne d'un transfert d'énergie et d'impulsion sur ce nucléide ;
  - ce traitement cinématique est rendu plus complexe lorsque la désexcitation consiste en une émission de gamma en cascade et/ou lorsque plusieurs particules de nature différentes sont émises ;
  - la désexcitation peut *a priori* intervenir au cours de la phase de ralentissement du nucléide (4) dans le milieu dans lequel celui-ci se trouve, ce qui en complexifie encore l'étude cinématique rigoureuse.
- Lorsque  $Q = 0$ , cas de la diffusion élastique,  $\Delta' > 0$  si  $m_1 < m_4$  et alors une solution unique existe, car  $\sqrt{E_3}$  doit être positif, imposant le signe + devant la racine carrée dans (2.9b),  $E_3$  est donc obtenue par la relation (2.12) suivante :

$$E_3 = \left[ \frac{\sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L + \sqrt{m_1 m_3 E_1 \cos^2 \theta_L - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1]}}{m_3 + m_4} \right]^2 \quad (2.12)$$

En faisant  $Q^* = 0$  dans la relation (2.11), il est manifeste qu'il y a conservation de l'énergie cinétique au cours du processus élastique :

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (2.13)$$

Si  $Q$  ou  $Q^*$  sont non nulles, le processus nucléaire est dit **inélastique** et d'évidence les relations (2.8) ou (2.11) indiquent qu'il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique :

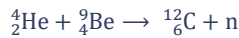
$$E_1 + E_2 \neq E_3 + E_4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \neq \frac{1}{2}m_3 v_3^2 + \frac{1}{2}m_4 v_4^2 \quad (2.14)$$

Quelques exemples numériques du calcul de l'énergie cinétique de la particule « légère » produite sont présentés ci-après, pour laquelle on se reportera à la discussion de l'annexe II § 2 portant sur le choix du signe + devant la racine carrée de l'expression (2.9b) utilisée.

### Exemple 1

#### La réaction nucléaire productrice de neutrons ${}^9_4\text{Be}(\alpha, n){}^{12}_6\text{C}$ .

La particule  $\alpha$  correspond au nucléide hélium 4,  ${}^4_2\text{He}$  ; la réaction considérée s'écrit aussi :



L'énergie disponible  $Q$  de cette réaction s'obtient à partir des valeurs des énergies de liaison des nucléides  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^9_4\text{Be}$  et  ${}^{12}_6\text{C}$  :

- énergie de liaison de l'hélium 4 **par nucléon** :  $B({}^4_2\text{He})/A = 7.074 \text{ MeV} \Rightarrow B({}^4_2\text{He}) = 7.074 \times 4 = 28.296 \text{ MeV}$  ;
- énergie de liaison du béryllium 9 **par nucléon** :  $B({}^9_4\text{Be})/A = 6.463 \text{ MeV} \Rightarrow B({}^9_4\text{Be}) = 6.463 \times 9 = 58.167 \text{ MeV}$  ;

- énergie de liaison du carbone 12 **par nucléon** :  $B(^{12}_6\text{C})/A = 7.680 \text{ MeV} \Rightarrow B(^{12}_6\text{C}) = 7.680 \times 12 = 92.19 \text{ MeV}$

$$Q = -B(^4_2\text{He}) - B(^9_4\text{Be}) + B(^{12}_6\text{C})$$

$$Q = -28.296 - 58.167 + 92.19 = 5.73 \text{ MeV} > 0$$

On est donc en présence d'une réaction nucléaire exoénergétique. Le carbone 12 est supposé être produit dans son état fondamental :  $Q^* = Q$ .

$m_\alpha, m_{\text{C}12}, m_n$  désignent respectivement les masses atomiques de la particule  $\alpha$  incidente, de l'atome de carbone 12 formé et du neutron.

L'énergie cinétique  $E_n$ , du neutron émis s'écrit en appliquant (2.9b) :

$$E_n = \left[ \frac{\sqrt{m_\alpha m_n E_\alpha} \cos \theta_L + \sqrt{m_\alpha m_n E_\alpha \cos^2 \theta_L - (m_n + m_{\text{C}12})[(m_\alpha - m_{\text{C}12})E_\alpha - m_{\text{C}12}Q]}}{m_n + m_{\text{C}12}} \right]^2$$

$$E_n = \frac{m_\alpha m_n}{(m_n + m_{\text{C}12})^2} E_\alpha \left[ \cos \theta_L + \sqrt{\cos^2 \theta_L + \frac{m_n + m_{\text{C}12}}{m_\alpha m_n} \left[ m_{\text{C}12} - m_\alpha + m_{\text{C}12} \frac{Q}{E_\alpha} \right]} \right]^2$$

L'énergie cinétique maximale du neutron émis par cette réaction est obtenue pour  $\cos \theta_L = 1$  qui correspond à une émission vers l'avant :

$$E_{n,\text{max}} = \frac{m_\alpha m_n}{(m_n + m_{\text{C}12})^2} E_\alpha \left[ 1 + \sqrt{\frac{m_n + m_{\text{C}12}}{m_\alpha m_n} \left[ m_{\text{C}12} - m_\alpha + m_{\text{C}12} \frac{Q}{E_\alpha} \right]} \right]^2$$

L'énergie cinétique minimale du neutron émis par cette réaction est obtenue pour  $\cos \theta_L = -1$  qui correspond à une émission vers l'arrière ou rétrodiffusion (*backscattering* en anglais) :

$$E_{n,\text{min}} = \frac{m_\alpha m_n}{(m_n + m_{\text{C}12})^2} E_\alpha \left[ -1 + \sqrt{\frac{m_n + m_{\text{C}12}}{m_\alpha m_n} \left[ m_{\text{C}12} - m_\alpha + m_{\text{C}12} \frac{Q}{E_\alpha} \right]} \right]^2$$

Par exemple pour une particule  $\alpha$  incidente d'énergie cinétique  $E_\alpha = 6 \text{ MeV}$ , on obtient les valeurs suivantes des énergies cinétiques maximale et minimale du neutron émis :

$$E_{n,\text{max}} \approx \frac{4 \times 1}{(1 + 12)^2} \times 6 \times \left[ 1 + \sqrt{\frac{1 + 12}{4 \times 1} \left[ 12 - 4 + 12 \frac{5.73}{6} \right]} \right]^2 = 11.38 \text{ MeV}$$

$$E_{n,\text{min}} \approx \frac{4 \times 1}{(1 + 12)^2} \times 6 \times \left[ -1 + \sqrt{\frac{1 + 12}{4 \times 1} \left[ 12 - 4 + 12 \frac{5.73}{6} \right]} \right]^2 = 6.86 \text{ MeV}$$

où l'on a utilisé les nombres de masse à la place des masses elles-mêmes.

### Exemple 2

**La réaction nucléaire émettrice d'un proton**  $^{10}_5\text{B}(\alpha, p)^{13}_6\text{C}^*$ .

Le carbone 13 peut être produit dans un état excité  $E_i^*$  par interaction d'une particule  $\alpha$  avec du bore 10 :



$m_\alpha, m_{\text{C13}}, m_p$  sont les masses atomiques respectives de la particule incidente, du carbone 13 formé et du proton émis.

Le proton produit est émis avec une énergie cinétique  $E_{pi}$  donnée par la relation :

$$E_{pi} \approx \left[ \frac{\sqrt{m_\alpha m_p E_\alpha} \cos \theta_L + \sqrt{m_\alpha m_p E_\alpha \cos^2 \theta_L - (m_p + m_{\text{C13}})[(m_\alpha - m_{\text{C13}})E_\alpha - m_{\text{C13}} Q_i^*]}}{m_p + m_{\text{C13}}} \right]^2$$

où  $Q_i^* = Q - E_i^*$ .

Soit :

$$E_{pi} = \frac{m_\alpha m_p}{(m_p + m_{\text{C13}})^2} E_\alpha \left[ \cos \theta_L + \sqrt{\cos^2 \theta_L + \frac{m_p + m_{\text{C13}}}{m_\alpha m_p} \left[ m_{\text{C13}} - m_\alpha + m_{\text{C13}} \frac{Q - E_i^*}{E_\alpha} \right]} \right]^2$$

Avec des particules  $\alpha$  incidentes d'énergie cinétique  $E_\alpha = 4.77$  MeV, les énergies  $E_{pi}$  ont été mesurées expérimentalement dans la direction  $\theta_L = 90^\circ$  et l'on a trouvé :

$$E_{p0} = 6.84 \text{ MeV} ; E_{p1} = 3.98 \text{ MeV} ; E_{p2} = 3.43 \text{ MeV} ; E_{p3} = 3.23 \text{ MeV}$$

On peut alors en déduire les valeurs des énergies d'excitation  $E_i^*$ . En effet, en faisant  $\cos(\theta_L = 90^\circ) = 0$  dans l'expression de l'énergie  $E_{pi}$  du proton, on obtient la nouvelle expression de celle-ci :

$$E_{pi} = \frac{E_\alpha}{m_p + m_{\text{C13}}} \left[ m_{\text{C13}} - m_\alpha + m_{\text{C13}} \frac{Q - E_i^*}{E_\alpha} \right]$$

d'où l'on tire :

$$E_i^* = Q - Q_i$$

avec :

$$Q_i = E_{pi} \left( 1 + \frac{m_p}{m_{\text{C13}}} \right) - E_\alpha \left( 1 - \frac{m_\alpha}{m_{\text{C13}}} \right)$$

Les valeurs de  $Q_i$  sont déterminées en assimilant les masses aux nombres de masse :  $m_\alpha \approx 4$  ;  $m_{C13} \approx 13$ ,  $m_p \approx 1$ . On a alors :

$$Q_i \approx 1.079 E_{pi} - 0.692 E_\alpha$$

L'énergie disponible  $Q$  est calculée à partir des énergies de liaison suivantes :

$$B({}_2^4\text{He}) = 28.297 \text{ MeV} ; B({}_5^{10}\text{B}) = 64.752 \text{ MeV} ; B({}_6^{13}\text{C}) = 97.112 \text{ MeV}$$

$$Q = -B({}_2^4\text{He}) - B({}_5^{10}\text{B}) + B({}_6^{13}\text{C}) = -28.297 - 64.752 + 97.112 = 4.063 \text{ MeV}$$

Pour  $E_\alpha = 4.77 \text{ MeV}$ , on obtient respectivement :

- $Q_0 = 4.063 \text{ MeV}, E_{p0} = 6.84 \text{ MeV} \Rightarrow E_0^* = Q - Q_0 = 4.063 - 4.063 = 0$  : c'est l'état fondamental ;
- $Q_1 = 0.98 \text{ MeV}, E_{p1} = 3.98 \text{ MeV} \Rightarrow E_1^* = Q - Q_1 = 4.063 - 0.98 = 3.083 \text{ MeV}$  ;
- $Q_2 = 0.39 \text{ MeV}, E_{p2} = 3.43 \text{ MeV} \Rightarrow E_2^* = Q - Q_2 = 4.063 - 0.39 = 3.673 \text{ MeV}$  ;
- $Q_3 = 0.177 \text{ MeV}, E_{p3} = 3.23 \text{ MeV} \Rightarrow E_3^* = Q - Q_3 = 4.063 - 0.177 = 3.885 \text{ MeV}$ .

### Exemple 3

#### La réaction thermonucléaire émettrice d'un neutron ${}_1^2\text{D}({}_1^3\text{H}, n){}_2^4\text{He}$ .

Elle s'explique comme :



L'énergie disponible  $Q$  de cette réaction est obtenue à partir des énergies de liaison des noyaux atomiques impliqués dans cette réaction :

$$Q = -B({}_1^2\text{D}) - B({}_1^3\text{H}) + B({}_2^4\text{He}) = -2224.4566 - 8481.795 + 28295.66 = 17589.29 \text{ keV} \\ \approx 17.59 \text{ MeV}$$

L'énergie cinétique  $E_n$ , du neutron émis s'écrit en appliquant (2.9b) :

$$E_n = \left[ \frac{\sqrt{m_d m_n E_d} \cos \theta_L + \sqrt{m_d m_n E_d \cos^2 \theta_L - (m_n + m_\alpha)[(m_d - m_\alpha)E_d - m_\alpha Q]}}{m_n + m_\alpha} \right]^2$$

En prenant les masses des nucléides concernés en unité de masse de neutron, on a :

$$m_n = 1, \quad m_d \approx 2, \quad m_t \approx 3, \quad m_\alpha \approx 4,$$

$$E_n = \left[ \frac{\sqrt{2 \times 1 \times E_d} \cos \theta_L + \sqrt{2 \times 1 \times E_d \cos^2 \theta_L - (1 + 4)[(2 - 4)E_d - 4Q]}}{1 + 4} \right]^2$$

L'énergie cinétique  $E_n$  est maximale pour une émission du neutron produit vers l'avant :  $\theta_L = 0^\circ$ ,  $\cos \theta_L = 1$ .

L'énergie cinétique  $E_n$  est minimale pour une émission du neutron produit vers l'arrière :  $\theta_L = 180^\circ$ ,  $\cos \theta_L = -1$ .

Pour une énergie d'incidence nulle du deuton incident,  $E_d = 0$ , on obtient :

$$E_n = \frac{4Q}{5} = 0.8 \times 17.59 = 14.07 \text{ MeV}$$

Pour une énergie d'incidence du deuton incident,  $E_d = 100 \text{ keV} = 0.1 \text{ MeV}$ , on obtient les deux solutions suivantes correspondant respectivement à l'émission du neutron dans deux directions opposées :

- pour  $\theta_L = 0^\circ$ ,  $\cos \theta_L = 1$ , on a :

$$E_{n,max} = \left[ \frac{\sqrt{2 \times 1 \times 0.1} + \sqrt{2 \times 1 \times 0.1 - (1+4)[(2-4)0.1 - 4 \times 17.59]}}{1+4} \right]^2 = (3.85)^2$$

$$= 14.8 \text{ MeV}$$

- pour  $\theta_L = 180^\circ$ ,  $\cos \theta_L = -1$  on a :

$$E_{n,min} = \left[ \frac{-\sqrt{2 \times 1 \times 0.1} + \sqrt{2 \times 1 \times 0.1 - (1+4)[(2-4)0.1 - 4 \times 17.59]}}{1+4} \right]^2 = (3.67)^2$$

$$= 13.45 \text{ MeV}$$

Par conséquent, le spectre des neutrons émis prend ses valeurs entre 13.45 MeV et 14.8 MeV indiquant la faible dispersion en énergie des neutrons thermonucléaires ainsi produits.

#### Exemple 4

##### La réaction photonucléaire productrice de neutrons ${}^9_4\text{Be}(\gamma, n){}^8_4\text{Be}$ .

Cette réaction photonucléaire (voir chapitre 11) schématisée par la **figure 3** s'écrit également :



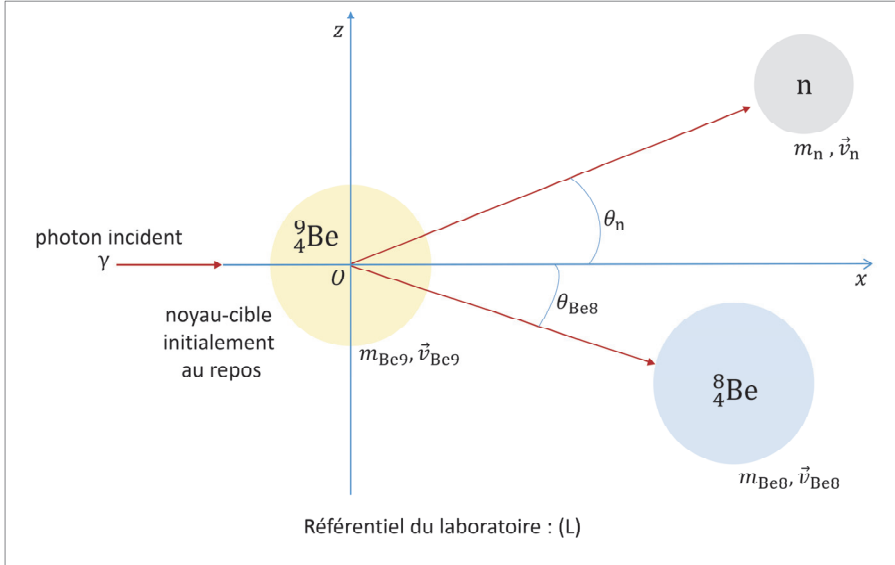
Son énergie disponible  $Q$  s'obtient à partir des valeurs des énergies de liaison des nucléides  ${}^9_4\text{Be}$  et  ${}^8_4\text{Be}$  :

- énergie de liaison du béryllium 9 **par nucléon** :  $B({}^9_4\text{Be})/A = 6.463 \text{ MeV} \Rightarrow B({}^9_4\text{Be}) = 6.463 \times 9 = 58.167 \text{ MeV}$  ;
- énergie de liaison du carbone 12 **par nucléon** :  $B({}^8_4\text{Be})/A = 7.062 \text{ MeV} \Rightarrow B({}^8_4\text{Be}) = 7.062 \times 8 = 56.496 \text{ MeV}$

$$Q = -B({}^9_4\text{Be}) + B({}^8_4\text{Be})$$

$$Q = -58.167 + 56.496 = -1.671 \text{ MeV} < 0$$

On est donc en présence d'une réaction nucléaire endoénergétique. On peut comme dans le cas précédent déterminer l'énergie cinétique du neutron émis en fonction de son angle dans le référentiel du laboratoire.



**Figure 3.** Réaction nucléaire induite par un photon  $\gamma$  (réaction photonucléaire) sur un noyau de béryllium 9, dans le référentiel du laboratoire (L).

$m_{\text{Be}9}$ ,  $m_{\text{Be}8}$ ,  $m_n$  désignent respectivement les masses atomiques de la particule incidente, du béryllium 9, du béryllium 8 et du neutron.

On désigne par  $E_\gamma$ , l'énergie du photon incident sur le noyau de béryllium 9.

La conservation de l'énergie totale exprimée dans le référentiel du laboratoire s'écrit :

$$m_\gamma c^2 + E_\gamma + m_{\text{Be}9} c^2 + E_{\text{Be}9} = m_n c^2 + E_n + m_{\text{Be}8} c^2 + E_{\text{Be}8}$$

La masse au repos des photons étant nulle ainsi que l'énergie cinétique du noyau de béryllium 9 qui est supposé immobile, on a :

$$E_\gamma + m_{\text{Be}9} c^2 - m_n c^2 - m_{\text{Be}8} c^2 = E_n + E_{\text{Be}8}$$

$$E_\gamma + Q = E_n + E_{\text{Be}8}$$

La conservation de l'impulsion relative à la réaction considérée s'écrit dans le référentiel du laboratoire (voir figure 3) :

$$\vec{p}_\gamma + \vec{p}_{\text{Be}9} = \vec{p}_{\text{Be}8} + \vec{p}_n$$

Comme le nucléide de béryllium 9 est au repos dans le référentiel du laboratoire,  $\vec{p}_{\text{Be}9} = \vec{0}$  et :



$$\vec{p}_\gamma = \vec{p}_{\text{Be8}} + \vec{p}_n$$

On projette cette équation de conservation sur les deux axes perpendiculaires  $Ox$  et  $Oz$  :

$$\frac{E_\gamma}{c} = m_n v_n \cos \theta_n + m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}} \cos \theta_{\text{Be8}}$$

$$0 = m_n v_n \sin \theta_n + m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}} \sin \theta_{\text{Be8}}$$

soit :

$$m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}} \cos \theta_{\text{Be8}} = \frac{E_\gamma}{c} - m_n v_n \cos \theta_n$$

$$m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}} \sin \theta_{\text{Be8}} = -m_n v_n \sin \theta_n$$

En élevant chacune des deux équations au carré, il vient :

$$(m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}})^2 \cos^2 \theta_{\text{Be8}} = \left[ \frac{E_\gamma}{c} - m_n v_n \cos \theta_n \right]^2$$

$$(m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}})^2 \sin^2 \theta_{\text{Be8}} = (-m_n v_n \sin \theta_n)^2$$

Par sommation membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} (m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}})^2 (\cos^2 \theta_{\text{Be8}} + \sin^2 \theta_{\text{Be8}}) \\ = \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 + (m_n v_n)^2 (\cos^2 \theta_n + \sin^2 \theta_n) - 2 \frac{E_\gamma}{c} m_n v_n \cos \theta_n \end{aligned}$$

Comme  $\cos^2 \theta_{\text{Be8}} + \sin^2 \theta_{\text{Be8}} = 1$  et  $\cos^2 \theta_n + \sin^2 \theta_n = 1$ , on a :

$$(m_{\text{Be8}} v_{\text{Be8}})^2 = \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 + (m_n v_n)^2 - 2 \frac{E_\gamma}{c} m_n v_n \cos \theta_n$$

soit :

$$2m_{\text{Be8}} E_{\text{Be8}} = \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 + 2m_n E_n - 2 \frac{E_\gamma}{c} \sqrt{2m_n E_n} \cos \theta_n$$

En y remplaçant  $E_{\text{Be8}}$  par son expression déduite de la conservation de l'énergie totale,  $E_{\text{Be8}} = E_\gamma + Q - E_n$ , on obtient la relation :

$$2m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q - E_n) = \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 + 2m_n E_n - 2 \frac{E_\gamma}{c} \sqrt{2m_n E_n} \cos \theta_n$$

ou encore en réarrangeant les termes l'équation du second degré suivante en  $\sqrt{E_n}$  :

$$(m_n + m_{\text{Be8}}) E_n - 2 \frac{E_\gamma}{\sqrt{2}c} \sqrt{m_n} \cos \theta_n \sqrt{E_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 - m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q) = 0$$

Il en résulte la solution :

$$E_n = \frac{\left[ \frac{E_\gamma}{\sqrt{2}c} \sqrt{m_n} \cos \theta_n + \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 m_n \cos^2 \theta_n - (m_n + m_{\text{Be8}}) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 - m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q) \right]} \right]^2}{(m_n + m_{\text{Be8}})^2}$$

Le terme  $(m_n + m_{\text{Be8}})m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q)$  est largement prépondérant sur tous les autres termes, ce qui implique que l'énergie du neutron émis présente une faible dépendance vis-à-vis de son angle d'émission  $\theta_n$  : on le montre par l'application numérique ci-après. On considère un photon incident d'une énergie  $E_\gamma = 2 \text{ MeV}$  ; la valeur de l'énergie disponible a été déterminée plus haut  $Q = -1.671 \text{ MeV}$ . On constate en premier lieu que la réaction  ${}^9_4\text{Be}(\gamma, n){}_4^8\text{Be}$ , bien qu'endoénergétique, peut se produire, car  $E_\gamma = 2 \text{ MeV} > |Q| = |-1.671| = 1.671 \text{ MeV}$  (voir au paragraphe 3 la notion d'énergie de seuil). On évalue chacun des deux termes entre crochets de l'expression obtenue de  $E_n$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 - m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q) &= \frac{E_\gamma^2}{2c^2} - \frac{2m_{\text{Be8}}c^2 (E_\gamma + Q)}{2c^2} \\ \frac{E_\gamma^2}{2c^2} &= \frac{2^2}{2c^2} = \frac{4}{2c^2} \\ -\frac{2m_{\text{Be8}}c^2 (E_\gamma + Q)}{2c^2} &\approx -\frac{2 \times 8 \times 931.49 \times (2 + (-1.671))}{2c^2} = \frac{4.9 \cdot 10^3}{2c^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien les inégalités fortes suivantes :

$$\begin{aligned} (m_n + m_{\text{Be8}})m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q) &\gg \frac{E_\gamma^2}{c^2} \\ (m_n + m_{\text{Be8}})m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q) &\gg \frac{1}{2} \left( \frac{E_\gamma}{c} \right)^2 m_n \cos^2 \theta_n \\ (m_n + m_{\text{Be8}})m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q) &\gg \frac{E_\gamma}{\sqrt{2}c} \sqrt{m_n} \cos \theta_n \end{aligned}$$

Elles attestent de la faible dépendance de l'énergie cinétique du neutron émis,  $E_n$ , vis-à-vis de son angle d'émission  $\theta_n$ , et elles conduisent à l'estimation approximative de  $E_n$  :

$$\begin{aligned} E_n &\approx \frac{(m_n + m_{\text{Be8}})}{(m_n + m_{\text{Be8}})^2} m_{\text{Be8}} (E_\gamma + Q) = \frac{m_{\text{Be8}}}{m_n + m_{\text{Be8}}} (E_\gamma + Q) \approx \frac{8}{1+8} (2 + (-1.671)) \\ &= \frac{8}{9} \times 0.329 = 0.29 \text{ MeV} \end{aligned}$$

La faible corrélation entre  $E_n$  et  $\theta_n$  signifie que la réaction  ${}^9_4\text{Be}(\gamma, n){}_4^8\text{Be}$  constitue une source de neutrons quasiment monokinétiques.

### Exemple 5

**La réaction nucléaire induite par un neutron et productrice d'un proton  ${}^3_2\text{He}(\text{n}, \text{p}){}^3_1\text{H}$ .**

Cette réaction nucléaire s'écrit :



où  $Q$  est son énergie disponible.

En appliquant (2.9b), on détermine l'énergie cinétique  $E_p$  du proton émis :

$$E_p = \left[ \frac{\sqrt{m_n m_p E_n} \cos \theta_L + \sqrt{m_n m_p E_n \cos^2 \theta_L - (m_p + m_{{}^3_1\text{H}})[(m_n - m_{{}^3_1\text{H}})E_n - m_{{}^3_1\text{H}}Q]}}{m_p + m_{{}^3_1\text{H}}} \right]^2$$

Pour un neutron incident d'énergie cinétique  $E_n = 1 \text{ MeV}$  et  $\theta_L = 0^\circ$  (diffusion vers l'avant,  $\cos \theta_L = 1$ ), on obtient :

$$E_p = \left[ \frac{\sqrt{m_n m_p E_n} + \sqrt{m_n m_p E_n - (m_p + m_{{}^3_1\text{H}})[(m_n - m_{{}^3_1\text{H}})E_n - m_{{}^3_1\text{H}}Q]}}{m_p + m_{{}^3_1\text{H}}} \right]^2$$

Soit en exprimant les masses des particules en unité de masse de neutrons ( $m_n = 1$  ;  $m_p \approx 1$  ;  $m_{{}^3_1\text{H}} \approx 3$ ) :

$$E_p \approx \left[ \frac{\sqrt{1 \times 1 \times 1} + \sqrt{1 \times 1 \times 1 - (1 + 3)[(1 - 3) \times 1 - 3 \times 0.764]}}{1 + 3} \right]^2$$

$$E_p \approx \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 4[(-2) - 2.29]}}{4} \right]^2 = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 4[(-2) - 2.29]}}{4} \right]^2 = \left[ \frac{1 + 4.26}{4} \right]^2$$

$$= 1.73 \text{ MeV}$$

Pour  $\theta_L = 90^\circ$  ( $\cos \theta_L = 0$ ), on a :

$$E_p = \left[ \frac{\sqrt{-(m_p + m_{{}^3_1\text{H}})[(m_n - m_{{}^3_1\text{H}})E_n - m_{{}^3_1\text{H}}Q]}}{m_p + m_{{}^3_1\text{H}}} \right]^2 = \frac{(m_{{}^3_1\text{H}} - m_n)E_n + m_{{}^3_1\text{H}}Q}{m_p + m_{{}^3_1\text{H}}}$$

$$\approx \frac{(3 - 1) \times 1 + 3 \times 0.764}{1 + 3} = \frac{4.26}{4}$$

$$E_p \approx 1.06 \text{ MeV}$$

Pour  $\theta_L = 180^\circ$  ( $\cos \theta_L = -1$ ), on a :

$$E_p = \left[ \frac{-\sqrt{m_n m_p E_n} + \sqrt{m_n m_p E_n - (m_p + m_{^3\text{H}})[(m_n - m_{^3\text{H}})E_n - m_{^3\text{H}}Q]}}{m_p + m_{^3\text{H}}} \right]^2$$

$$E_p \approx \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 - 4[(-2) - 2.29]}}{4} \right]^2 = \left[ \frac{-1 + \sqrt{1 - 4[(-2) - 2.29]}}{4} \right]^2 = \left[ \frac{-1 + 4.26}{4} \right]^2$$

$$= 0.664 \text{ MeV}$$

## 2.2. Référentiels du laboratoire et du centre de masse

Dans la pratique, pour caractériser plus aisément et complètement l'énergie et la direction des particules issues d'une réaction nucléaire, on est conduit à considérer deux référentiels :

- le **référentiel du laboratoire**, système de coordonnées noté **(L)**, fixe, associé à l'expérimentateur/observateur (voir figure 1) ;
- le **référentiel du centre de masse**, noté **(CM)**, système de coordonnées mobile qui dépend de la position relative du projectile et de la cible (voir figure 2).

Le recours au référentiel du centre de masse (CM) a ici une double justification, d'une part celle relative à son rôle joué dans l'explication de phénomènes physiques et l'introduction de nouveaux concepts tels que l'**énergie de seuil** d'une réaction nucléaire, et d'autre part celle relative à la simplification de calculs ou bien de la représentation de données impliquées dans la modélisation de la propagation des particules dans la matière, telles que les caractéristiques angulaires des particules émises lors d'une réaction nucléaire.

On désigne par  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  les positions respectives des particules  $m_1$  et  $m_2$  dans (L). La position du centre de masse des deux particules (barycentre) est définie par la relation :

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.15)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient la vitesse  $\vec{V}_C$  du centre de masse :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt}}{m_1 + m_2} \equiv \vec{V}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (2.16)$$

la particule cible (2) étant supposée au repos dans le système du laboratoire, donc sa vitesse  $\vec{v}_2$  nulle.

Les vitesses des particules (1) et (2) avant collision dans le système du centre de masse sont :

$$\vec{v}_{1C} = \vec{v}_1 - \vec{V}_C = \vec{v}_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.17)$$

$$\vec{v}_{2C} = \vec{v}_2 - \vec{V}_C = -\vec{v}_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (2.18)$$

Les vitesses sont colinéaires et de directions opposées de sorte que la somme des quantités de mouvement est nulle :

$$\vec{p}_{1C} = m_1 \vec{v}_{1C} = m_1 \vec{v}_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (2.19)$$

$$\vec{p}_{2C} = m_2 \vec{v}_{2C} = -m_2 \vec{v}_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (2.20)$$

et par conséquent :

$$\vec{p}_{1C} + \vec{p}_{2C} = \vec{0} \quad (2.21)$$

On peut faire l'étude cinématique de la réaction en opérant le changement de variables ( $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \rightarrow \vec{R}, \vec{r}$ ) qui peut être vu comme le remplacement des particules réelles (1) et (2) par deux particules fictives :

- le **centre de masse** de position  $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$  et de masse  $m_1 + m_2$  dont la vitesse est  $\vec{V}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$  et l'énergie cinétique :

$$E_C = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_C^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_1 \quad (2.22)$$

- la **particule relative** dont la position est définie par :

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.23)$$

et la masse par :

$$\mu_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ ou } \frac{1}{\mu_r} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (2.24)$$

que l'on appelle **masse réduite** du système des deux particules qui interagissent.

Les positions des particules (1) et (2),  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$ , s'expriment à leur tour en fonction de  $\vec{R}$  et de  $\vec{r}$  :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (2.25)$$

De (2.23), on déduit par dérivation la vitesse  $\vec{v}_r$  de la particule relative :

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (2.26)$$

Comme par hypothèse  $\vec{v}_2 = 0$ , alors d'après (2.26)  $\vec{v}_r = \vec{v}_1$  et l'impulsion correspondante de la particule relative  $\vec{p}_r$  s'écrit :

$$\vec{p}_r = \mu_r \vec{v}_r = \mu_r \vec{v}_1 = \frac{\mu_r}{m_1} \times m_1 \vec{v}_1 = \frac{\mu_r}{m_1} \vec{p}_1 \quad (2.27)$$

L'énergie cinétique de la particule relative  $E_r$  est donnée par :

$$E_r = \frac{1}{2} \mu_r v_r^2 = \frac{1}{2} \mu_r v_1^2 = \frac{\mu_r}{m_1} \times \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{\mu_r}{m_1} E_1 \quad (2.28)$$

La particule (1) étant la particule légère et en considérant les deux situations extrêmes  $m_2 = \infty$  ( $m_2 \gg m_1$ ) et  $m_2 = m_1$ , on constate que :

$$0.5 m_1 \leq \mu_r \leq m_1 \quad (2.29)$$

Toujours sous l'hypothèse de la particule cible 2 initialement immobile dans le système du laboratoire, on réécrit alors les relations dans le centre de masse comme :

- les impulsions :

$$\vec{p}_{1C} = \mu_r \vec{v}_1 ; \vec{p}_{2C} = -\mu_r \vec{v}_1 \quad (2.30)$$

- l'énergie cinétique totale disponible dans le centre de masse (en tenant compte de (2.30) et (2.24)) :

$$\begin{aligned} E_{1C} + E_{2C} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1C}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2C}^2 = \frac{p_{1C}^2}{2m_1} + \frac{p_{2C}^2}{2m_2} = \frac{1}{2} \mu_r^2 v_1^2 \left[ \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mu_r v_1^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

On note que dans le cas d'une **collision élastique**, l'énergie cinétique totale est la même avant et après collision, car par définition du référentiel du centre de masse la somme des quantités de mouvement des deux particules est nulle aussi bien avant qu'après la collision ; dans le référentiel du centre de masse, seul est modifié l'angle fait par la droite joignant les deux particules (qui partent dans des directions opposées) par rapport à la direction d'incidence (voir figure 2). Les relations (2.28) et (2.31) montrent que cette énergie cinétique totale est égale à l'énergie cinétique,  $E_r$ , de la particule relative. L'annexe II précise les relations énergétiques et angulaires qui existent entre les référentiels du centre de masse et du laboratoire dans le cas d'une réaction nucléaire à deux corps, de diffusion ou bien de production de particules. Dans le cas particulier où les

particules (1) et (2) ont la même masse (ou sensiblement la même masse), par exemple dans le cas courant dans le domaine de la physique des réacteurs nucléaires de la diffusion élastique du neutron par le proton (noyau de l'atome d'hydrogène), on a immédiatement :

$$\vec{V}_C = \frac{1}{2} \vec{v}_1, \quad v_{1C} = \frac{1}{2} v_1 \quad (2.32)$$

indiquant que la vitesse du neutron dans le centre de masse est la moitié de sa vitesse dans le référentiel du laboratoire. *A contrario*, si le noyau atomique cible a une masse très supérieure à celle de la particule incidente, alors le centre de masse coïncide presque complètement avec le noyau atomique cible et si celui-ci est immobile dans le référentiel du laboratoire alors les référentiels du centre de masse et du laboratoire sont quasiment confondus.

### 3. L'énergie de seuil

L'**énergie de seuil** est définie comme l'énergie cinétique minimale que doit avoir le système de particules avant collision pour qu'un processus endothermique ( $Q < 0$ ) puisse être déclenché.

#### 3.1. L'énergie de seuil dans le référentiel du centre de masse

Cette énergie de seuil est aisément obtenue dans le système du centre de masse. On la note ici  $(E_C)_{seuil}$ . Elle correspond à la production des particules du second membre de la réaction considérée avec une énergie cinétique nulle. En effet, en écrivant la conservation de l'énergie totale dans le système du centre de masse avant et après collision, on a :

$$\sum_{i=1,2} m_i c^2 + (E_C)_{seuil} = \sum_{j=3,4} m_j c^2 + \underbrace{\sum_{i=3,4} E_{j,C}}_0 \quad (3.1)$$

qui est compatible avec la définition du centre de masse (CM) dans lequel les particules peuvent être produites avec une énergie cinétique nulle et donc avec une impulsion nulle ( $\vec{p}_j = 0, j = 3, 4$ ) de sorte que la propriété du centre de masse  $\sum_{j=3,4} \vec{p}_j = \vec{0}$  est effectivement respectée : dans le référentiel du centre de masse, la somme des impulsions des particules mises en jeu est nulle (avant et après réaction). La relation précédente donne immédiatement :

$$(E_C)_{seuil} = -Q \quad (3.2)$$

qui signifie que l'énergie de seuil dans le centre de masse (CM) est égale à l'énergie disponible  $Q$  (négative pour une réaction à seuil) de la réaction changée de signe.

#### 3.2. L'énergie de seuil dans le référentiel du laboratoire

En utilisant les relations de passage de (CM) à (L) on montre que l'énergie cinétique de seuil de la particule (1) dans le système du laboratoire (L) est, dans le cas non relativiste :

$$(E_L)_{seuil} = -Q \frac{m_1 + m_2}{m_2} \quad (3.3)$$

Dans le cas d'une réaction nucléaire induite par neutron, dans la littérature neutronique, l'énergie de seuil est souvent exprimée sous la forme suivante :

$$(E_L)_{seuil} = -Q \frac{1 + A}{A} \quad (3.4)$$

où les masses  $m_1$  et  $m_2$  de la précédente relation sont exprimées en unité de masse du neutron :

$$m_1 = m_n, \text{ masse du neutron} : \frac{m_1}{m_n} = \frac{m_n}{m_n} = 1 \quad (3.5a)$$

et

$$m_2 = m_N, \text{ masse du noyau cible} : \frac{m_2}{m_n} = \frac{m_N}{m_n} = A \quad (3.5b)$$

### Remarques

- Il ne faut pas confondre  $A$  et  $A$ , le nombre de masse, bien que ces deux quantités soient proches.
- Avec cette convention, les caractéristiques de la **particule relative** avant choc s'écrivent :
  - l'impulsion  $\vec{p}_r$  :

$$\vec{p}_r = \mu_r \vec{v}_r = \mu_r \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} m_1 \vec{v}_1 = \frac{A}{1 + A} \vec{p}_1 \quad (3.6)$$

- l'énergie cinétique de la particule relative  $E_r$  :

$$E_r = \frac{1}{2} \mu_r v_r^2 = \frac{\mu_r}{m_1} \times \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{m_1} E_1 = \frac{A}{1 + A} E_1 \quad (3.7)$$

Si la particule incidente est un photon, sa masse au repos est nulle ; on peut donc reporter  $m_1 = 0$  dans (3.3), ce qui conduit immédiatement à  $(E_L)_{seuil} = -Q$  : pour les réactions à seuil induites par des photons, l'énergie de seuil dans le référentiel du laboratoire est égale à l'énergie de seuil dans le référentiel du centre de masse en hypothèse non relativiste (ce n'est plus vrai dans le cadre relativiste voir annexe II § 4). La réaction  ${}^{32}_{16}\text{S}(n, p){}^{32}_{15}\text{P}$  ou S32 (n, p) P32 est un exemple de réaction à seuil puisque dans ce cas  $Q$  est négatif.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} M_{\text{S32}} c^2 &= 31.972 \text{ u} \times 931.494 \text{ MeV} = 29\,781.72 \text{ MeV} \\ M_{\text{P32}} c^2 &= 31.9739 \text{ u} \times 931.494 \text{ MeV} = 29\,783.49 \text{ MeV} \\ M_n c^2 - M_H c^2 &= 0.782 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$Q = M_{\text{S32}} c^2 - M_{\text{P32}} c^2 + M_n c^2 - M_H c^2 = 29\,781.72 - 29\,783.49 + 0.782 = -0.988 \text{ MeV}$$



En utilisant la relation (3.4), on en déduit la valeur de l'énergie de seuil dans le système du laboratoire :

$$(E_L)_{\text{seuil}} \approx -(-0.988) \frac{1 + 31.97}{31.97} = 1.03 \text{ MeV}$$

L'énergie de seuil telle qu'elle a été définie fait abstraction de l'existence de l'interaction coulombienne qui est présente au sein du noyau atomique comme au-dehors. Ici, elle a un effet répulsif en raison de la charge positive des protons présents dans le noyau atomique et est en « compétition » avec la force nucléaire forte de très courte portée. La présence de l'interaction coulombienne a pour conséquence :

- de réduire l'énergie effectivement disponible d'une réaction nucléaire lorsque  $Q > 0$  ;
- d'introduire une énergie de seuil de déclenchement pour un certain nombre de réactions nucléaires à  $Q > 0$  ;
- d'élever l'énergie de seuil effective de déclenchement des réactions nucléaires à  $Q < 0$ .

### 3.3. L'énergie de seuil effective

Sont considérées ici les réactions nucléaires pour lesquelles l'énergie disponible  $Q$  a une valeur positive. La notion d'**énergie de seuil effective** peut être appréhendée en considérant la **réaction de fusion thermonucléaire** suivante, représentée sur la **figure 4** :

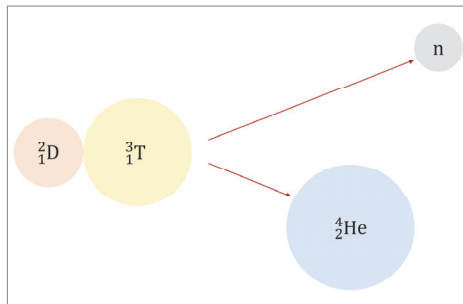
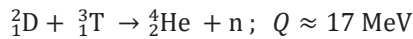


Figure 4. Réaction de fusion thermonucléaire deutérium-tritium produisant un noyau d'hélium et un neutron qui se partage l'énergie disponible de 17 MeV : environ 14 MeV d'énergie cinétique pour le neutron et le complément de 3 MeV d'énergie cinétique pour le noyau d'hélium 4.

La valeur de l'énergie  $Q$  correspondante montre qu'il s'agit d'une réaction exothermique. Cependant, pour que le noyau de **deutérium** fusionne avec le noyau de **tritium** il faut préalablement vaincre la répulsion coulombienne qui varie comme l'inverse de la distance entre les deux noyaux atomiques tous deux chargés positivement :  $Z_{{}_2\text{D}} = 1$ ,  $Z_{{}_3\text{T}} = 1$ . Il

s'agit donc de faire en sorte que les deux noyaux atomiques soient suffisamment proches l'un de l'autre pour que la force nucléaire attractive, qui est une force à très courte portée, de l'ordre du fermi ( $10^{-13}\text{cm}$ ), puisse produire son effet. Cela est possible si les deux noyaux possèdent une énergie cinétique suffisante au moment de leur collision, dans des conditions physiques données telles que celles qui prévalent au sein du soleil ou bien que l'on crée sur Terre dans un tokamak en réalisant un plasma porté à une température de plusieurs dizaines de millions de degrés Kelvin. Cet exemple illustre donc le fait que la barrière coulombienne constitue un obstacle à la réalisation d'une réaction de fusion nucléaire même lorsque la valeur de l'énergie disponible  $Q$  est positive.

Il en va de même pour les autres types de réactions nucléaires à valeur de  $Q$  positive. À titre d'exemple, on considère à nouveau le cas de la **réaction induite par un neutron sur un noyau d'azote 14** :  ${}^{14}_7\text{N}(n, p){}^{14}_6\text{C}$ . L'énergie disponible de cette réaction,  $Q$ , est positive et est égale à  $Q = 0.626\text{ MeV}$ .

Bien que cette réaction soit exothermique, pour qu'elle puisse se produire, il faut que le système réactionnel dispose d'une énergie permettant à l'ensemble proton et carbone 14 d'acquérir une énergie potentielle suffisante à l'individualisation complète de ces deux entités hors du noyau composé  ${}^{15}_7\text{N}^*$ , initialement formé par le neutron incident et l'azote 14 (voir **figure 5**).

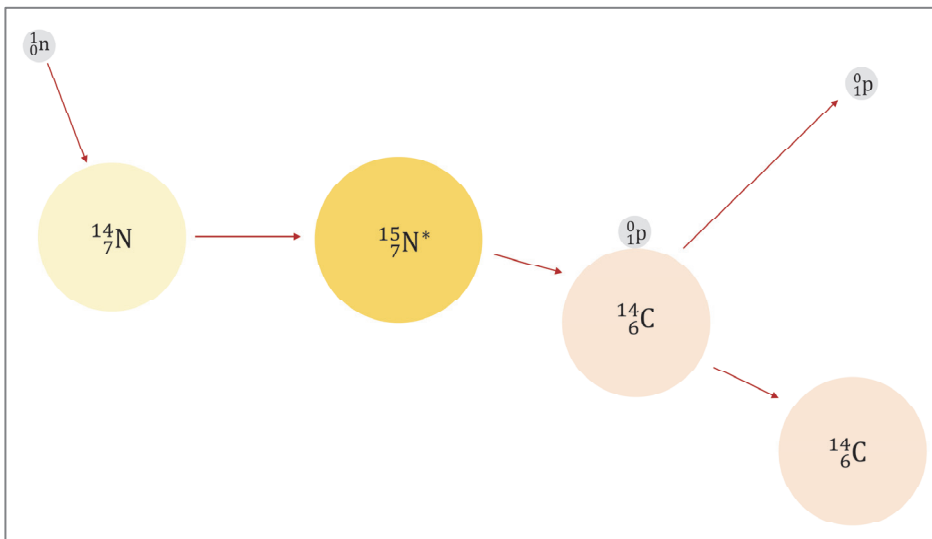


Figure 5. La réaction nucléaire  ${}^{14}_7\text{N}(n, p){}^{14}_6\text{C}$ .

Cette énergie potentielle est de nature coulombienne, répulsive, puisque les deux produits de la réaction, le proton et le noyau de carbone 14 portent tous deux des charges positives. La hauteur de la barrière de potentiel à franchir est donnée par la relation classique (3.8) suivante :

$$H_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z_p Z_{^{14}_6\text{C}}}{r} \quad (3.8)$$

Le sommet de cette barrière est défini en positionnant le proton et le noyau de carbone 14 au contact comme illustré sur la **figure 4**.

On rappelle que :

- le rayon  $R$  du noyau atomique de nombre de masse  $A$  est donné par :

$$R = R_0 A^{\frac{1}{3}}, R_0 = 1.3 \text{ fm} \quad (3.9)$$

- le rayon classique de l'électron s'exprime par la relation :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2.8 \text{ fm} \quad (3.10)$$

où  $m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV}$  est la masse au repos de l'électron.

En reportant (3.9) et (3.10) dans (3.8), la hauteur de la barrière coulombienne,  $H_c$ , peut alors s'écrire comme :

$$H_c = \frac{r_0}{R_0} \frac{Z_p Z_{^{14}_6\text{C}}}{A_p^{\frac{1}{3}} + A_{^{14}_6\text{C}}^{\frac{1}{3}}} m_0 c^2 \text{ (MeV)} \quad (3.11)$$

$$H_c = \frac{2.8}{1.3} \frac{1 \times 6}{\frac{1}{1^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{14^{\frac{1}{3}}}} 0.511 = 2.15 \times \frac{6}{1. + 2.41} 0.511 = 1.93 \text{ MeV}$$

Dans le référentiel du centre de masse, l'énergie de seuil effective est donc :

$$(E_c)_{\text{seuil,eff}} = Q - H_c = 0.626 - 1.93 = -1.307 \text{ MeV} \quad (3.12)$$

L'énergie de seuil effective théorique dans le référentiel du laboratoire est :

$$(E_L)_{\text{seuil,eff}} = -(Q - H_c) \frac{1 + A}{A} \quad (3.13)$$

$$(E_L)_{\text{seuil,eff}} \approx 1.307 \frac{1 + 14}{14} = 1.4 \text{ MeV}$$

Cependant, l'énergie de seuil effective donnée par la relation (3.13) en définit une limite supérieure dans la mesure où par effet tunnel (phénomène quantique) la réaction peut se produire.

#### 4. Les relations cinématiques dans le cas de la diffusion élastique et inélastique discrète des neutrons

Les **relations cinématiques** utiles pour le traitement de la diffusion des neutrons sont répertoriées ci-après. Les masses sont, ici, exprimées en unité de masse de neutron : 1, l'unité, représente donc la masse du neutron et  $A$  désigne ici la masse du noyau cible. Elles sont établies en utilisant les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion ainsi que les relations de passage entre systèmes du laboratoire et centre de masse (voir annexe II).

Les notations adoptées sont les suivantes :

- $E$  : énergie cinétique initiale du neutron (avant collision) dans le système du laboratoire ;
  - $E'$  : énergie cinétique du neutron après collision dans le système du laboratoire ;
  - $E_i^*$  : énergie du niveau excité  $i$  du noyau cible ;  $E_i^*$  est comptée positivement ;
  - $\mu_L = \cos\theta_L$  : cosinus de l'angle de déviation  $\theta_L$  dans le référentiel du laboratoire (L)
  - $\mu_C = \cos\theta_C$  : cosinus de l'angle de déviation  $\theta_C$  dans le référentiel du centre de masse (CM).
- Pour une **diffusion élastique** (n, n),  $E_i^* = 0$  et :

$$Q = -E_i^* = 0, \gamma = A \quad (4.1)$$

et

$$(E_L)_{seuil} = -Q \frac{1+A}{A} = -E_i^* \frac{1+A}{A} = 0$$

Il n'y a donc pas de seuil pour la réaction nucléaire de **diffusion élastique**.

- Pour une **diffusion inélastique** (n, n'),  $Q = -E_i^*$  ; l'énergie de seuil du neutron,  $(E_L)_{seuil}$ , correspondante **dans le référentiel du laboratoire** s'écrit donc :

$$(E_L)_{seuil} = (E_L)_{seuil} = -Q \frac{1+A}{A} = E_i^* \frac{1+A}{A} \quad (4.2)$$

Par exemple le premier niveau inélastique du fer 56 est à l'énergie :

$$E_1^* = 846.7778 \text{ keV}$$

On pose :

$$\gamma = \gamma(E) = A \sqrt{1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E}} \quad (4.3)$$

L'énergie cinétique du neutron après choc en fonction du cosinus de son angle de déviation dans le référentiel du centre de masse s'écrit :

$$E' = E \frac{1 + 2\gamma\mu_c + \gamma^2}{(1 + A)^2} \quad (4.4)$$

- **Pour une diffusion élastique** (n, n),  $E_i^* = 0$  et  $\gamma = A$  :

$$E' = E \frac{1 + 2A\mu_c + A^2}{(1 + A)^2} \quad (4.5)$$

Les valeurs prises par  $E'$  pour  $\mu_c = +1$  et  $\mu_c = -1$  correspondent respectivement à l'énergie cinétique maximale,  $E'^{max}$ , et minimale,  $E'^{min}$ , qu'acquiert le neutron après l'une et l'autre diffusion :

$$E'^{max} = E \frac{1 + 2A + A^2}{(1 + A)^2} = E \quad (4.6a)$$

$$E'^{min} = E \frac{1 - 2A + A^2}{(1 + A)^2} = E \left( \frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 = \alpha E \quad (4.6b)$$

où le facteur :

$$\alpha = \left( \frac{1 - A}{1 + A} \right)^2 \quad (4.6c)$$

ainsi noté apparaît souvent dans la littérature neutronique.

### Exemple

Pour le fer 56,  $\alpha = \left( \frac{1-56}{1+56} \right)^2 = 0.931$  et pour un neutron d'énergie initiale  $E = 2$  MeV, on a immédiatement :  $E'^{max}(\mu_c = +1) = 2$  MeV et  $E'^{min}(\mu_c = -1) = \alpha E = 0.931 \times 2 = 1.86$  MeV.

Pour un neutron d'énergie initiale  $E = 2$  MeV provoquant une réaction inélastique (n, n') sur le 1<sup>er</sup> niveau d'excitation du fer56,  $E_1^* = 0.846$  MeV, l'énergie du neutron après diffusion,  $E'$ , vaut respectivement vers l'avant et vers l'arrière  $\mu_c = \pm 1$  :

$$\gamma = A \sqrt{1 - \frac{A + 1}{A} \frac{E_i^*}{E}} = 56 \sqrt{1 - \frac{56 + 1}{56} \times \frac{0.846}{2}} = 42.26$$

$$E'^{\pm} = 2 \frac{1 + 2 \times 42.26 \times \pm 1 + 42.26^2}{(56 + 1)^2}$$

$$E'^{+} = 1.15 \text{ MeV et } E'^{-} = 1.048 \text{ MeV}$$

On remarque qu'en remplaçant  $\gamma$  par son expression (4.3) la relation (4.4) peut également s'écrire :

$$E' = E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \mu_C + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_i^* \quad (4.7)$$

Le **cosinus de l'angle de déviation du neutron** dans le référentiel du laboratoire,  $\mu_L = \cos \theta_L$ , en fonction du cosinus de l'angle de déviation dans le référentiel du centre de masse,  $\mu_C$ , s'exprime comme :

$$\mu_L = \frac{1 + \gamma \mu_C}{\sqrt{1 + 2\gamma \mu_C + \gamma^2}} \quad (4.8)$$

Dans le référentiel du centre de masse, l'angle de diffusion  $\theta_C$  prend ses valeurs entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  ( $-1 \leq \mu_C \leq +1$ ).

Dans le référentiel du laboratoire, la situation cinématique est plus complexe, comme le montre la figure 6 qui représente la variation du cosinus de l'angle de déviation du neutron dans le système du laboratoire  $\mu_L$  en fonction du cosinus de son angle de déviation dans le système du centre de masse, fournie par la relation (4.8).

Plusieurs cas de figure sont à distinguer.

Dans le cas d'une **diffusion élastique** du neutron sur un nucléide cible de masse  $A$  supérieure à l'unité (il s'agit de tous les noyaux atomiques sauf l'hydrogène),  $\gamma = A$  et la relation (4.8) indiquent que  $\mu_L$  peut prendre toutes les valeurs entre  $-1$  et  $+1$ . L'énergie  $E'$  du neutron après collision est unique et est donnée par la relation suivante (voir annexe II) :

$$E' = E \frac{1}{(1+A)^2} \left[ \mu_L \pm \sqrt{\mu_L^2 + A^2 - 1} \right]^2 \quad (4.9)$$

De (4.8) on tire :

$$\mu_C = \frac{1}{A} \left[ \mu_L^2 - 1 \pm \mu_L \sqrt{\mu_L^2 + A^2 - 1} \right] \quad (4.10)$$

Pour une **diffusion inélastique**, plusieurs sous cas se présentent<sup>2</sup>.

D'après (4.3), la condition  $\gamma \geq 0$  impose :

<sup>2</sup> Voir aussi : M. Segev, « Inelastic Matrices in Multigroup Calculations », dans Argonne National Laboratory, *Applied physics division annual report*, ANL 1770, July 1, 1969 to June 30, 1970, § IV.4, pp. 374-381.

$$1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E} \geq 0 \quad \text{soit} \quad E \geq \frac{A+1}{A} E_i^* \equiv (E_L)_{\text{seuil}} \quad (4.11)$$

### Exemple

Une réaction inélastique ( $n, n'$ ) sur le 1<sup>er</sup> niveau d'excitation du fer 56,  $E_1^* = 0.846$  MeV exige une énergie cinétique du neutron incident au moins égale :

$$(E_L)_{\text{seuil}} = \frac{A+1}{A} E_1^* = \frac{56+1}{56} 0.846 = 0.8611 \text{ MeV}$$

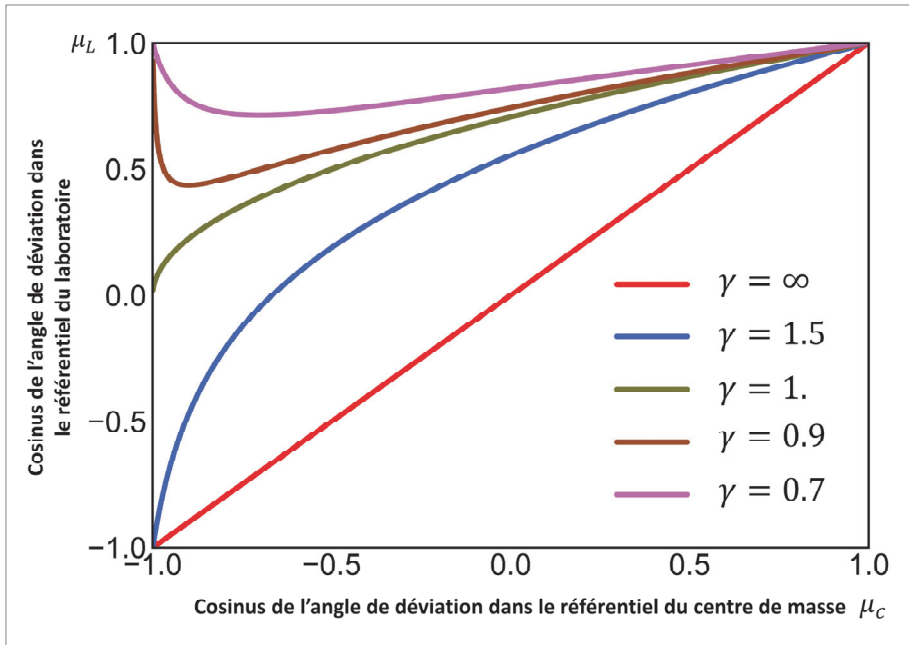


Figure 6. Diffusions élastique et inélastique discrète d'un neutron sur un noyau cible : variation du cosinus de déviation  $\mu_L$  dans le laboratoire en fonction du cosinus de déviation de  $\mu_c$  dans le centre de masse pour différentes valeurs du paramètre  $\gamma$ .

Cette figure montre que :

- $\mu_c$  peut prendre toutes les valeurs entre  $-1$  et  $+1$  ;
- $\mu_L$  ne peut pas toujours prendre des valeurs entre  $-1$  et  $+1$  ;
- $\mu_L > 0$  pour toute valeur de  $\gamma < 1$  ;
- il existe deux valeurs de  $\mu_c$  pour une valeur de  $\mu_L$  lorsque  $\gamma < 1$ .

Par ailleurs, on peut distinguer les deux situations suivantes :

- $\gamma > 1$  : d'après (4.3), cette condition est réalisée si :

$$A \sqrt{1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E}} > 1 \quad \text{soit si} \quad E > \frac{A}{A-1} E_i^* \equiv E_{si} \quad (4.12)$$

### Exemple

Une réaction inélastique (n, n') sur le 1<sup>er</sup> niveau d'excitation du fer 56,  $E_1^* = 0.846$  MeV exige une énergie cinétique du neutron incident au moins égale :

$$E_{s1} = \frac{A}{A-1} E_1^* = \frac{56}{56-1} 0.846 = 0.86138 \text{ MeV}$$

Par conséquent, si  $E > E_{si}$ , alors la relation (4.8) indique que  $\mu_L$  peut prendre toutes les valeurs entre  $-1$  et  $+1$  et l'énergie  $E'$  du neutron après collision est unique et est donnée par la relation (4.4) ou par la relation (4.13) suivante :

$$E' = E \frac{1}{(1+A)^2} \left[ \mu_L + \sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1} \right]^2 \quad (4.13)$$

### Exemple

Pour une diffusion vers l'avant dans le laboratoire,  $\mu_L = 1$ , en prenant l'exemple de la diffusion inélastique d'un neutron d'énergie  $E = 2$  MeV sur un noyau de fer 56, avec  $E_1^* = 846.7778$  keV, on a :

$$E' = E \frac{\gamma^2 - 1}{(1+A)^2} = 2 \times \frac{42.26^2 - 1}{(1+56)^2} = 1.1 \text{ MeV}$$

- $\gamma < 1$  : toujours d'après (4.3), cette condition est réalisée si :

$$A \sqrt{1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E}} < 1 \text{ soit si } E < \frac{A}{A-1} E_i^* \equiv E_{si} \quad (4.14)$$

Par conséquent, ici, l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident est située dans l'intervalle :

$$(E_L)_{seuil} = \frac{A+1}{A} E_i^* < E < E_{si} = \frac{A}{A-1} E_i^* \quad (4.15)$$

### Exemple

Pour une réaction inélastique (n, n') sur le 1<sup>er</sup> niveau d'excitation du fer 56,  $E_1^* = 0.846$  MeV, on a  $\gamma < 1$  si :

$$\frac{A+1}{A} E_i^* < E < \frac{A}{A-1} E_i^* \Leftrightarrow \frac{56+1}{56} 0.846 = 0.8611 \text{ MeV} < E < \frac{56}{56-1} 0.846 = 0.86138 \text{ MeV}$$

Il existe alors deux valeurs différentes de l'angle de déviation dans le centre de masse conduisant à une même valeur de l'angle de déviation dans le laboratoire :



$$\mu_c = \frac{1}{\gamma} \left[ \mu_L^2 - 1 \pm \mu_L \sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1} \right] \quad (4.16)$$

Par conséquent, au même angle de diffusion dans le système du laboratoire correspondent deux énergies cinétiques différentes du neutron après choc dans le système du laboratoire, déterminées par la relation (4.4) ou bien par la relation (4.17) suivante :

$$E' = E \frac{1}{(1+A)^2} \left[ \mu_L \pm \sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1} \right]^2 \quad (4.17)$$

Dans cette situation, on remarquera que le domaine des valeurs possibles du cosinus de l'angle de déviation dans le système du laboratoire,  $\mu_L$  est  $[0, 1]$ . Autrement dit, seules les diffusions vers l'avant dans le système du laboratoire sont physiquement possibles.

De plus, la figure 5 montre que pour une valeur donnée de  $\gamma < 1$   $\mu_L$  présente un minimum. En dérivant la relation (4.8) on obtient :

$$\frac{d\mu_L}{d\mu_c} = \frac{\gamma^2(\gamma + \mu_c)}{[1 + 2\gamma\mu_c + \gamma^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4.18)$$

La valeur minimale de  $\mu_L$  est alors donnée par :

$$\frac{d\mu_L}{d\mu_c} = 0 \Rightarrow \frac{\gamma^2(\gamma + \mu_c)}{[1 + 2\gamma\mu_c + \gamma^2]^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow \gamma + \mu_c \Rightarrow \mu_c = -\gamma \quad (4.19)$$

La valeur minimale de  $\mu_L$  est donc :

$$\mu_{Lmin} = \frac{1 - \gamma\mu_c}{\sqrt{1 + 2\gamma\mu_c + \gamma^2}} = \frac{1 - \gamma^2}{\sqrt{1 - \gamma^2}} = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (4.20)$$

en ayant vérifié que le signe de la dérivée seconde est positif.

### Exemple

pour une réaction inélastique (n, n') sur le 1<sup>er</sup> niveau d'excitation du fer 56,  $E_1^* = 0.846$  MeV, induite par un neutron d'énergie  $E = 0.8612$  MeV, on a :

$$\begin{aligned} \mu_c &= -\gamma \\ \gamma &= A \sqrt{1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_1^*}{E}} = 56 \sqrt{1 - \frac{56+1}{56} \frac{0.846}{0.8612}} = 56 \times 1.03838 \cdot 10^{-2} = 0.5815 \\ &< 1 \\ \mu_c &= -0.5815 \end{aligned}$$

$$\mu_{Lmin} = \sqrt{1 - \gamma^2} = \sqrt{1 - 0.5815^2} = \sqrt{1 - 0.338} = 0.813$$

- $\gamma = 1$  : d'après (4.3), cette condition est réalisée si :

$$A \sqrt{1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E}} = 1 \quad \text{soit si} \quad E = \frac{A}{A-1} E_i^* \equiv E_{si} \quad (4.21)$$

Alors :

$$\mu_L = \frac{1 + \mu_C}{\sqrt{2(1 + \mu_C)}} = \frac{\sqrt{1 + \mu_C}}{\sqrt{2}} \quad (4.22)$$

Et

$$E' = E \frac{2(1 + \mu_C)}{(1 + A)^2} \quad (4.23)$$

Les relations (4.22) et (4.23) montrent donc que :

- $0 \leq \mu_L \leq 1$  lorsque  $\mu_C$  varie de  $-1$  et  $+1$  ;
- l'énergie du neutron après collision est nulle ( $E' = 0$ ) lorsque  $\mu_C = -1$  ; pour  $\mu_C = -1$ ,  $\mu_L = 0$  : l'angle de déviation  $\theta_L$  est de  $90^\circ$ . C'est la raison pour laquelle  $E_{si} \equiv \frac{A}{A-1} E_i^*$  est parfois noté  $E_{90}$ .

Par conséquent, dans ce cas-ci également, seules les diffusions du neutron vers l'avant sont permises. La diffusion à  $90^\circ$  conduit à une énergie cinétique nulle du neutron après collision.

On note que dans le cas de la diffusion élastique du neutron sur un noyau cible d'hydrogène, on a aussi, d'après (4.3),  $\gamma = 1$ , car  $A \approx 1$  et  $E_i^* = 0$ . Les conclusions précédentes s'appliquent donc tout autant à la diffusion élastique sur l'hydrogène.

De la relation (4.7), on déduit l'expression du cosinus de déviation du neutron dans le système du centre de masse en fonction des énergies cinétiques du neutron avant ( $E$ ) et après ( $E'$ ) choc :

$$\mu_C = \mu_C(E, E') = \frac{\frac{E'}{E} (A+1)^2 - (1+A^2) - A(A+1) \frac{E_i^*}{E}}{2A \sqrt{1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E}}} \quad (4.24)$$

De la relation (4.13), on déduit l'expression du cosinus de déviation du neutron dans le système du laboratoire en fonction des énergies cinétiques du neutron avant ( $E$ ) et après ( $E'$ ) choc :

$$\mu_L = \mu_L(E, E') = \frac{1}{2} \left[ A + 1 \sqrt{\frac{E'}{E}} - (A - 1) \sqrt{\frac{E}{E'}} + A \frac{E_i^*}{\sqrt{EE'}} \right] \quad (4.25)$$

## Annexe I : rappel sur la définition de l'angle solide

On se place en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . En se référant à la **figure 7** ci-après, l'angle solide élémentaire  $d\vec{\Omega} \equiv d^2\Omega$  est défini par la relation :

$$d\vec{\Omega} \equiv d^2\Omega = \frac{ds}{r^2} \quad (\text{I} - 1)$$

Il s'agit donc d'un élément de cône dont le sommet est l'origine O du référentiel.

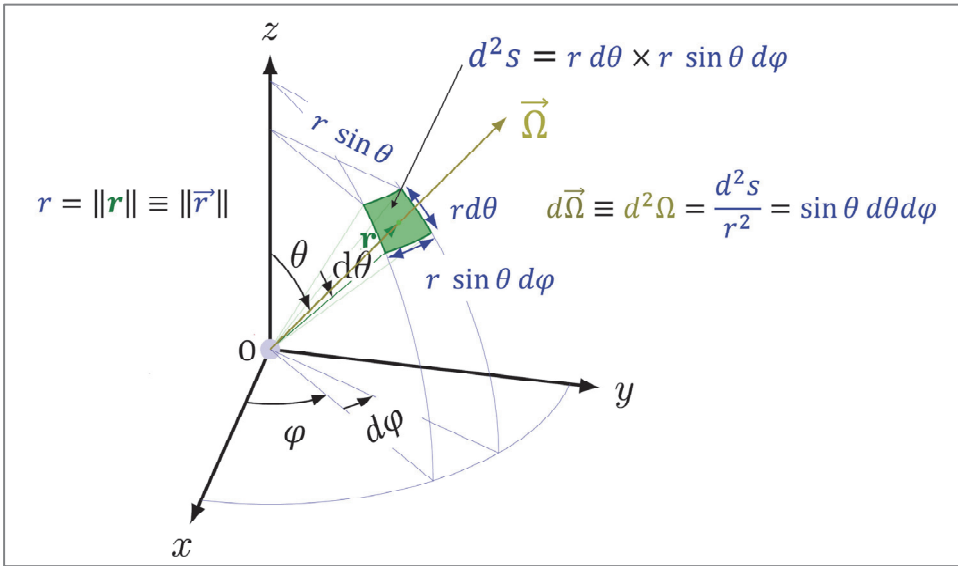


Figure 7. Angle solide en coordonnées sphériques.

L'élément de surface  $ds$  étant assimilé à un rectangle dont les deux dimensions sont respectivement  $rd\theta$  et  $Rd\varphi$ , on a :  $ds = rd\theta \times Rd\varphi$ . Comme  $R = r \sin \theta$ , on obtient  $ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  et :

$$d^2\Omega = \frac{ds}{r^2} = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi = [-d(\cos \theta)]d\varphi \quad (\text{I} - 2)$$

en remarquant que  $d\theta$  et  $\cos \theta$  varient en sens contraire et que par conséquent, la quantité élémentaire  $-d(\cos \theta)$  est positive pour une variation élémentaire  $d\theta$  positive. L'usage de valeurs absolues se révèle commode  $|\sin \theta d\theta| = |d(\cos \theta)|$  et est au besoin pratiqué dans le texte de l'ouvrage.

Par intégration sur l'angle azimutal  $\varphi$ , on obtient l'élément de cône (anneau conique)  $d\Omega$  :

$$d\Omega = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \sin \theta \, d\theta = 2\pi [-d(\cos \theta)] \quad (\text{I} - 3)$$

Par intégration sur la variable  $\theta$ , on obtient un cône d'ouverture comprise entre deux angles donnés,  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , par exemple :

$$\Omega(\theta_1, \theta_2) = \int_{\cos \theta_1}^{\cos \theta_2} -2\pi \, d(\cos \theta) = 2\pi(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (\text{I} - 4)$$

En particulier, si  $\theta_1 = 0$ , on a :

$$\Omega(\theta_1 = 0, \theta_2) = 2\pi(1 - \cos \theta_2) \quad (\text{I} - 5)$$

Enfin, si on intègre sur tout l'espace angulaire, c'est-à-dire en choisissant  $\theta_1 = 0$  et  $\theta_2 = \pi$ , on obtient :

$$\Omega(\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi) = 2\pi(1 - (-1)) = 4\pi \quad (\text{I} - 6)$$

*Unité* : l'unité d'angle solide est le *stéradian* dont le symbole est *sr* .

*Notation* : en considérant une variation positive  $d(\cos \theta)$  et en posant  $\mu = \cos \theta$ , on note souvent  $d^2\Omega = d\mu d\varphi$ .

## Annexe II : cinématique d'une réaction à deux corps avec production d'une particule légère et d'une particule lourde

On reprend les notations des **figures 1 et 2** du paragraphe 2.1 qui illustrent la réaction entre une particule incidente (1) de masse  $m_1$  entrant en collision avec une particule (2) de masse  $m_2$  supposée initialement immobile dans le référentiel du laboratoire (L), d'où résultent deux particules (3), « légère », et (4), « lourde », de masses respectives  $m_3$  et  $m_4$  ( $m_4 > m_3$ ), produites dans leur état fondamental :

$$(1) + (2) \rightarrow (3) + (4) + Q \quad (\text{II} - 1)$$

avec :

$$Q = (m_1 c^2 + m_2 c^2) - (m_3 c^2 + m_4 c^2) \quad (\text{II} - 2)$$

On cherche à déterminer les énergies cinétiques des particules (II – 3) et (II – 4) dans le référentiel du laboratoire.

Dans le **référentiel du laboratoire (L)**, les vitesses et les énergies des particules impliquées dans la réaction sont notées respectivement :

- $\vec{v}_1$  : vitesse de la particule (1), de module  $v_1 = \|\vec{v}_1\|$  ;
- $\vec{v}_2$  : vitesse de la particule (2), de module  $v_2 = \|\vec{v}_2\| = 0$  particule cible immobile ;
- $\vec{v}_3$  : vitesse de la particule (3), de module  $v_3 = \|\vec{v}_3\|$  ;
- $\vec{v}_4$  : vitesse de la particule (4), de module  $v_4 = \|\vec{v}_4\|$  ;
- $E_1$  : énergie cinétique de la particule (1) ;
- $E_2$  : énergie cinétique de la particule (2) ;
- $E_3$  : énergie cinétique de la particule (3) ;
- $E_4$  : énergie cinétique de la particule (4).

La vitesse du centre de masse est  $\vec{V}_C$  :

$$\vec{V}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 \quad (\text{II} - 3)$$

et l'on pose  $V_C = \|\vec{V}_C\|$

Dans le **référentiel du centre de masse (CM)**, les vitesses des particules impliquées dans la réaction sont notées respectivement:

- $\vec{v}_{1C}$  : vitesse de la particule (1), de module  $v_{1C} = \|\vec{v}_{1C}\|$  ;
- $\vec{v}_{2C}$  : vitesse de la particule (2), de module  $v_{2C} = \|\vec{v}_{2C}\|$  ;
- $\vec{v}_{3C}$  : vitesse de la particule (3), de module  $v_{3C} = \|\vec{v}_{3C}\|$  ;
- $\vec{v}_{4C}$  : vitesse de la particule (4), de module  $v_{4C} = \|\vec{v}_{4C}\|$ .

On cherche à exprimer les énergies cinétiques des particules (II – 3) et (II – 4) en fonction de :

- l'angle de déviation  $\theta_1 \equiv \theta_L$  ou son cosinus  $\mu_L = \cos \theta_L$  dans le référentiel du laboratoire ;
- l'angle de déviation  $\theta_{1C} \equiv \theta_C$  ou son cosinus  $\mu_C = \cos \theta_C$  dans le référentiel du centre masse.

### 1. Énergies cinétiques des particules produites dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle de déviation dans le référentiel du centre de masse

Si ce sont les caractéristiques cinématiques dans le référentiel du laboratoire dont on a besoin *in fine* dans les problèmes pratiques à résoudre, le référentiel est d'une grande utilité par ses propriétés pour mener à bien le calcul des grandeurs physiques d'intérêt. C'est ainsi que l'on calcule dans une première étape les vitesses des particules (3) et (4) dans le référentiel du centre de masse pour ensuite déterminer leurs énergies cinétiques  $E_3$  et  $E_4$  dans le système du laboratoire.

Les vitesses des particules (3) et (4) dans le référentiel du laboratoire s'expriment donc en fonction de la vitesse  $\vec{V}_C$  du centre de masse :

$$\vec{v}_3 = \vec{V}_C + \vec{v}_{3C} \quad (\text{II} - 4)$$

$$\vec{v}_4 = \vec{V}_C + \vec{v}_{4C} \quad (\text{II} - 5)$$

Dans le système du laboratoire, la conservation de l'énergie totale est donnée par l'expression :

$$m_1 c^2 + E_1 + m_2 c^2 + E_2 = m_3 c^2 + E_3 + m_4 c^2 + E_4 \quad (\text{II} - 6)$$

que l'on peut réécrire en tenant compte de (2) comme :

$$E_1 + Q = E_3 + E_4 \quad (\text{II} - 7)$$

On remplace les énergies cinétiques  $E_3$  et  $E_4$  par leurs expressions respectives en fonction la vitesse :

$$E_1 + Q = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 \quad (\text{II} - 8)$$

$$E_1 + Q = \frac{1}{2} m_3 (\vec{V}_C + \vec{v}_{3C})^2 + \frac{1}{2} m_4 (\vec{V}_C + \vec{v}_{4C})^2 \quad (\text{II} - 9)$$

En développant, on obtient :

$$E_1 + Q = \frac{1}{2}(m_3 + m_4)V_C^2 + \frac{1}{2}m_3v_{3C}^2 + \frac{1}{2}m_4v_{4C}^2 + (m_3\vec{v}_{3C} + m_4\vec{v}_{4C}) \cdot \vec{V}_C \quad (\text{II} - 10)$$

La somme des impulsions étant nulle dans le référentiel du centre de masse, on a  $m_3\vec{v}_{3C} + m_4\vec{v}_{4C} = 0$  et (II - 10) devient :

$$E_1 + Q = \frac{1}{2}(m_3 + m_4)V_C^2 + \frac{1}{2}m_3v_{3C}^2 + \frac{1}{2}m_4v_{4C}^2 \quad (\text{II} - 11)$$

On peut exprimer  $V_C$  en fonction de la vitesse initiale connue  $v_1$ . En effet, la conservation de l'impulsion dans le référentiel du laboratoire s'écrit :

$$m_1\vec{v}_1 + m_1\vec{v}_2 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 \quad (\text{II} - 12a)$$

Comme  $\vec{v}_2 = \vec{0}$  par hypothèse (particule cible (2) initialement immobile de (L)) on a :

$$m_1\vec{v}_1 = m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 \quad (\text{II} - 12b)$$

soit :

$$\begin{aligned} m_1\vec{v}_1 &= m_3(\vec{V}_C + \vec{v}_{3C}) + m_4(\vec{V}_C + \vec{v}_{4C}) \\ &= (m_3 + m_4)\vec{V}_C + m_3\vec{v}_{3C} + m_4\vec{v}_{4C} \end{aligned} \quad (\text{II} - 13)$$

Or, dans le référentiel du centre de masse, la somme des impulsions est nulle :

$$m_3\vec{v}_{3C} + m_4\vec{v}_{4C} = \vec{0} \quad (\text{II} - 14)$$

Il s'ensuit :

$$\vec{V}_C = \frac{m_1}{m_3 + m_4} \vec{v}_1 \quad (\text{II} - 15)$$

On en déduit :

$$V_C^2 = \frac{m_1^2}{(m_3 + m_4)^2} v_1^2 \quad (\text{II} - 16)$$

d'où :

$$\frac{1}{2}(m_3 + m_4)V_C^2 = \frac{m_1}{m_3 + m_4} E_1 \quad (\text{II} - 17)$$

De (II - 14) on tire également :

$$\vec{v}_{4C} = -\frac{m_3}{m_4} \vec{v}_{3C} \Rightarrow v_{4C}^2 = \left(\frac{m_3}{m_4}\right)^2 v_{3C}^2 \quad (\text{II} - 18)$$



En introduisant (II – 17) et (II – 18) dans (II – 11), on obtient la relation :

$$\begin{aligned}
 E_1 + Q &= \frac{m_1}{m_3 + m_4} E_1 + \frac{1}{2} m_3 v_{3C}^2 + \frac{1}{2} m_4 \left( \frac{m_3}{m_4} \right)^2 v_{3C}^2 \Leftrightarrow E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right] + Q \\
 &= \frac{1}{2} m_3 \left[ 1 + \frac{m_3}{m_4} \right] v_{3C}^2 \\
 v_{3C}^2 &= \frac{1}{m_3} \frac{2Q + 2E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} \quad (\text{II} - 19)
 \end{aligned}$$

On repasse à présent dans le référentiel du laboratoire *via* la relation (II – 4)  $\vec{v}_3 = \vec{V}_C + \vec{v}_{3C}$  que l'on élève au carré :

$$v_3^2 = V_C^2 + v_{3C}^2 + 2\vec{V}_C \cdot \vec{v}_{3C} \quad (\text{II} - 20)$$

On désigne par  $\theta_C$  l'angle formé entre les directions  $\vec{V}_C$  et  $\vec{v}_{3C}$ , qui correspond à l'angle de déviation de la particule légère (3) dans le référentiel du centre de masse, puisque d'après (II – 15)  $\vec{V}_C$  est colinéaire à la vitesse  $\vec{v}_1$  de la particule (1) incidente. La relation (II – 20) devient alors :

$$v_3^2 = V_C^2 + v_{3C}^2 + 2V_C \cdot v_{3C} \cos \theta_C \quad (\text{II} - 21)$$

À partir de (II – 21), l'énergie cinétique  $E_3$  de la particule (3) s'écrit donc en utilisant (II – 15), (II – 16) et (II – 19) :

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} m_3 \times \frac{m_1^2}{(m_3 + m_4)^2} v_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \times \frac{1}{m_3} \frac{2Q + 2E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 \times 2 \frac{m_1}{m_3 + m_4} v_1 \left[ \frac{1}{m_3} \frac{2Q + 2E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} \right]^{1/2} \cos \theta_C \\
 E_3 &= \frac{m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} E_1 + \frac{Q + E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} \\
 &\quad + \left[ m_3^2 \times \frac{m_1^2}{(m_3 + m_4)^2} v_1^2 \times \frac{1}{m_3} \frac{2Q + 2E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} \right]^{1/2} \cos \theta_C
 \end{aligned}$$

$$E_3 = \frac{m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} E_1 + \frac{Q + E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} + \left[ \frac{4m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} E_1 \frac{Q + E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} \right]^{1/2} \cos \theta_c \quad (\text{II} - 22)$$

Si le nucléide (4) est produit dans un état excité d'énergie  $E^*$ , alors, dans le système du laboratoire, la conservation de l'énergie totale est donnée par l'expression :

$$m_1 c^2 + E_1 + m_2 c^2 + E_2 = m_3 c^2 + E_3 + m_4 c^2 + E_4 + E^* \quad (\text{II} - 23)$$

L'équation (II - 7) déduite de la conservation de l'énergie totale devient immédiatement :

$$E_1 + Q^* = E_3 + E_4 \quad (\text{II} - 24)$$

où l'on a posé en tenant compte de (II - 2) :

$$Q^* = (m_1 c^2 + m_2 c^2) - (m_3 c^2 + m_4 c^2 + E^*) = Q - E^* \quad (\text{II} - 25)$$

L'équation (II - 22) devient alors (le facteur  $c^2$  s'élimine dans les rapports de masse en unité d'énergie) :

$$E_3 = \frac{m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} E_1 + \frac{Q^* + E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} + \left[ \frac{4m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} E_1 \frac{Q^* + E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}} \right]^{1/2} \cos \theta_c \quad (\text{II} - 26)$$

On réitère la remarque faite au paragraphe 2 :

En toute rigueur, l'impulsion du nucléide (4) avant désexcitation, l'énergie cinétique et l'impulsion de la particule (4) dans le référentiel du laboratoire s'écrivent respectivement  $m_4^* \vec{v}_4$  et  $E_4 = \frac{1}{2} m_4^* v_4^2$  avec  $m_4^* c^2 = m_4 c^2 + E^*$ .

Dans les relations ci-dessus, on a implicitement supposé que l'énergie cinétique  $E_4 = \frac{1}{2} m_4^* v_4^2 \approx \frac{1}{2} m_4 v_4^2$  et que l'impulsion  $m_4^* \vec{v}_4 \approx m_4 \vec{v}_4$  du nucléide : cela signifie que ces deux grandeurs ont été supposées très peu affectées par l'état d'excitation du nucléide (4) ; dans le cadre des situations considérées ici, cela est justifié par le fait que l'on a  $E^* \ll$

$m_4 c^2$  :  $E^*$  peut atteindre des valeurs de quelques MeV au plus qui sont à comparer à  $a_{\min}$  à la masse du neutron ou du proton  $\approx 939$  MeV.

### ***Cas particuliers des diffusions élastique et inélastique du neutron***

Les masses des particules sont prises en unité de masse du neutron :

$$m_n = 1674927 \cdot 10^{-27} \text{ kg ou } m_n c^2 = 939.5653 \text{ MeV}$$

$$m_i \equiv \frac{m_i}{m_n} = \frac{m_i c^2}{m_n c^2} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{II} - 27)$$

- masse du neutron incident :  $m_1 \equiv 1$  ;
- masse de l'atome cible :  $m_2 \equiv A$  ;
- masse du neutron diffusé :  $m_3 \equiv 1$  ;
- masse de l'atome de recul à l'état fondamental :  $m_4 \equiv A$ .

Dans le cas d'une diffusion inélastique, on note  $E^*$  ( $E^* > 0$ ), l'énergie d'excitation du niveau d'énergie concerné.

**Remarque :**  $A$  diffère du nombre de masse  $A$  qui, lui, est défini à partir du douzième de masse de l'atome de carbone 12 (voir chapitre 3).

Dans le cas :

- d'une diffusion élastique :  $Q = Q^* = 0$  ;
- d'une diffusion inélastique :  $Q^* = -E^*$  car  $Q = 0$  (voir (II - 25))

En substituant dans la relation (II - 26) les masses  $m_i$  par leurs instanciations relatives à la diffusion inélastique, on a :

$$E_3 = \frac{1 \times 1}{(1 + A)^2} E_1 + \frac{-E^* + E_1 \left[ 1 - \frac{1}{1 + A} \right]}{1 + \frac{1}{A}} + \left[ \frac{4 \times 1 \times 1}{(1 + A)^2} E_1 \frac{-E^* + E_1 \left[ 1 - \frac{1}{1 + A} \right]}{1 + \frac{1}{A}} \right]^{1/2} \cos \theta_c \quad (\text{II} - 28)$$

$$E_3 = \frac{1}{(1+A)^2} E_1 + \frac{-E^* + E_1 \left[1 - \frac{1}{1+A}\right]}{1 + \frac{1}{A}} + \left[ \frac{4}{(1+A)^2} E_1 \frac{-E^* + E_1 \left[1 - \frac{1}{1+A}\right]}{1 + \frac{1}{A}} \right]^{1/2} \cos \theta_C \quad (\text{II} - 29)$$

En mettant  $E_1$  en facteur, on obtient :

$$E_3 = \frac{1}{(1+A)^2} E_1 \left[ 1 + A^2 \left[ \frac{-E^*}{E_1} \frac{A+1}{A} + 1 \right] + 2A \left[ \frac{-E^*}{E_1} \frac{A+1}{A} + 1 \right]^{1/2} \cos \theta_C \right] \quad (\text{II} - 30)$$

On pose :

$$\gamma = A \left[ \frac{-E^*}{E_1} \frac{A+1}{A} + 1 \right]^{1/2} \quad (\text{II} - 31)$$

$$E_3 = E_1 \frac{1 + 2\gamma \cos \theta_C + \gamma^2}{(1+A)^2} \quad , \quad E_3 = E_1 \frac{1 + 2\gamma \mu_C + \gamma^2}{(1+A)^2} \quad (\text{II} - 32)$$

en ayant posé  $\mu_C = \cos \theta_C$ .

On retrouve bien en particulier les relations (4.3) et (4.4) posées au paragraphe § 4.

L'énergie cinétique de la particule (4) se déduit des relations (II - 10) et (II - 32) :

$$E_4 = E_1 - E^* - E_3 = E_1 \left[ 1 - \frac{1 + 2\gamma \mu_C + \gamma^2}{(1+A)^2} \right] - E^* \\ E_4 = E_1 \frac{A^2 + 2(A - \gamma \mu_C) - \gamma^2}{(1+A)^2} - E^* \quad (\text{II} - 33)$$

Dans le cas de la diffusion élastique,  $\gamma = A$ , car  $E^* = 0$  (voir relation II - 31).

## 2. Énergies cinétiques des particules produites dans le référentiel du laboratoire en fonction de l'angle de déviation dans le référentiel du laboratoire

La conservation de l'énergie totale a été exprimée plus haut par (II - 9) et (II - 10).

La conservation de l'impulsion est :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_3 \vec{v}_3 + m_4 \vec{v}_4$$

Comme la particule cible (2) est supposée immobile dans le référentiel du laboratoire, on a :

$$m_1 \vec{v}_1 + \vec{0} = m_3 \vec{v}_3 + m_4 \vec{v}_4 \quad (\text{II} - 34)$$

On projette cette équation sur les deux axes  $Ox$  et  $Oy$  perpendiculaires du repère orthonormé du système du laboratoire (voir figure 1), l'axe  $Ox$  étant choisi confondu avec la trajectoire de la particule (1) incidente :

$$m_1 v_1 = m_3 v_3 \cos \theta_L + m_4 v_4 \cos \theta_4 \quad (\text{II} - 35)$$

$$0 = m_3 v_3 \sin \theta_L - m_4 v_4 \sin \theta_4 \quad (\text{II} - 36)$$

En élevant au carré (II – 35) et (II – 36) on a successivement :

$$(m_4 v_4 \cos \theta_4)^2 = (m_1 v_1 - m_3 v_3 \cos \theta_L)^2$$

$$(m_4 v_4 \sin \theta_4)^2 = (m_3 v_3 \sin \theta_L)^2$$

$$(m_4 v_4)^2 = (m_1 v_1)^2 + (m_3 v_3)^2 - 2m_1 v_1 m_3 v_3 \cos \theta_L$$

En introduisant les énergies cinétiques  $E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ,  $i = 1, 3, 4$ , on obtient :

$$2m_4 E_4 = 2m_1 E_1 + 2m_3 E_3 - 4\sqrt{m_1 m_3 E_1 E_3} \cos \theta_L \quad (\text{II} - 37)$$

Par ailleurs, la conservation de l'énergie totale permet d'écrire :

$$E_4 = E_1 + Q^* - E_3 \quad (\text{II} - 38)$$

En rapprochant (II – 37) et (II – 38), on a :

$$2m_4 (E_1 + Q^* - E_3) = 2m_4 E_4 = 2m_1 E_1 + 2m_3 E_3 - 4\sqrt{m_1 m_3 E_1 E_3} \cos \theta_L$$

soit :

$$(m_3 + m_4)E_3 - 2\sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L \sqrt{E_3} + (m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^* = 0 \quad (\text{II} - 39)$$

Il s'agit d'une équation du deuxième degré en  $\sqrt{E_3}$ .

$$\sqrt{E_3} = \frac{\sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L \pm \sqrt{m_1 m_3 \cos^2 \theta_L E_1 - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^*]}}{m_3 + m_4} \quad (\text{II} - 40)$$

Seules les racines réelles sont à retenir, ce qui impose une valeur positive (ou nulle) du discriminant  $\Delta'$  :

$$\Delta' = m_1 m_3 \cos^2 \theta_L E_1 - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^*] \geq 0 \quad (\text{II} - 41)$$

De plus, l'énergie cinétique étant une grandeur physique positive, seules les racines réelles positives sont satisfaisantes.

On distingue trois cas de figure correspondant à des réactions respectivement exoénergétique ( $Q, Q^* > 0$ ), endoénergétique ( $Q, Q^* < 0$ ) et élastique ( $Q = 0$ ).

### Cas $Q, Q^* > 0$

Comme  $m_1 < m_4^*$ , le discriminant  $\Delta'$  est toujours positif et dans ce cas toujours plus grand que le terme :

$$b' = \sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L$$

cela impose le signe + devant la racine carrée du discriminant  $\Delta'$ . En conséquence, la solution unique réelle est :

$$E_3 = \left[ \frac{\sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L + \sqrt{m_1 m_3 \cos^2 \theta_L E_1 - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^*]}}{m_3 + m_4} \right]^2 \quad (\text{II} - 42)$$

L'énergie  $E_4$  est déterminée par (II - 38), déduite de la conservation de l'énergie totale :

$$E_4 = E_1 + Q^* - E_3$$

Il y a donc ici une relation biunivoque entre l'angle d'émission des particules produites et leur énergie cinétique.

### Cas $Q, Q^* < 0$

L'existence de racines réelles est conditionnée d'une part par une énergie minimale que doit avoir la particule incidente pour déclencher la réaction, et d'autre part par un domaine angulaire d'émission possible fonction de l'énergie cinétique  $E_1$  de la particule incidente.

### Énergie de seuil

On a vu que pour qu'une racine réelle existe il faut que la relation (II - 41) soit satisfaite :

$$\Delta' = m_1 m_3 \cos^2 \theta_L E_1 - (m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4 Q^*] \geq 0 \quad (\text{II} - 43)$$

soit :

$$\begin{aligned}
 E_1 &\geq \frac{(m_3 + m_4)m_4Q^*}{m_1m_3 \cos^2 \theta_L - (m_3 + m_4)(m_1 - m_4)} \\
 &= -\frac{(m_3 + m_4)m_4Q^*}{(m_3 + m_4)(m_4 - m_1) - m_1m_3(1 + \sin^2 \theta_L)} \\
 E_1 &\geq -\frac{(m_3 + m_4)Q^*}{(m_3 + m_4) - m_1(1 + \frac{m_3}{m_4} \sin^2 \theta_L)} \quad (\text{II} - 44)
 \end{aligned}$$

La plus petite valeur possible de  $E_1$  est atteinte pour une valeur du dénominateur la plus grande possible, qui est obtenue pour  $\sin^2 \theta_L = 0$ .

On définit donc une énergie de seuil  $E_{1,seuil}$  dans le référentiel du laboratoire donnée par :

$$(E_1)_{seuil} = -\frac{(m_3 + m_4)}{m_3 + m_4 - m_1} Q^* \quad (\text{II} - 45)$$

Comme on s'est placé dans le cas non relativiste et de la validité de l'inégalité  $E^* \ll m_4 c^2$ , alors  $m_1 + m_2 \approx m_3 + m_4$  et (II - 45) devient :

$$(E_1)_{seuil} = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} Q^* \quad (\text{II} - 46)$$

qui a déjà été établie par une voie différente (voir § 3).

### ***Domaine d'émission angulaire possible<sup>3</sup>***

Ce domaine est déterminé en discutant conjointement les signes de la somme des racines (*SR*) et du produit (*PR*) des racines données par (II - 41), figurant dans les **tableaux 1 et 2**.

La condition (II - 40) d'existence de racines réelles implique :

$$\cos^2 \theta_L \geq -\frac{(m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4Q^*]}{m_1m_3E_1} \quad (\text{II} - 47)$$

Puisque le cosinus est une fonction décroissante de  $\theta_L$ , cette condition est remplie lorsque l'angle  $\theta_L$  est compris entre 0 et une valeur limite  $\theta_{max}$  définie par la relation :

$$\cos^2 \theta_{max}(E_1) = -\frac{(m_3 + m_4)[(m_1 - m_4)E_1 - m_4Q^*]}{m_1m_3E_1} \quad (\text{II} - 48)$$

<sup>3</sup> Voir M. Cottureau, F. Lefebvres *Recueil des problèmes de physique nucléaire et de physique des particules*, Masson et C<sup>ie</sup> Editeurs, Paris, 1971, Problème n° 6 : « Cinématique des réactions nucléaires à basse énergie », pp. 55-63.

Tableau 1. Signes de la somme des racines et domaine angulaire.

$SR = \frac{2\sqrt{m_1 m_3 E_1} \cos \theta_L}{m_3 + m_4}$		
$SR > 0$ pour $\theta_L < \pi/2$	$SR = 0$ pour $\theta_L = \pi/2$	$SR < 0$ pour $\theta_L > \pi/2$

Tableau 2. Signes du produit des racines et domaine énergétique.

$PR = -\frac{(m_4 - m_1)E_1 + m_4 Q^*}{m_3 + m_4}$		
$PR > 0$ pour : $E_1 < -\frac{m_4}{m_4 - m_1} Q^*$ $= E_1^{90^\circ}$	$PR = 0$ pour : $E_1 = -\frac{m_4}{m_4 - m_1} Q^*$ $= E_1^{90^\circ}$	$PR < 0$ pour : $E_1 > -\frac{m_4}{m_4 - m_1} Q^*$ $= E_1^{90^\circ}$

Les racines devant être positives, l'angle  $\theta_{max}$  doit avoir au plus la valeur  $\pi/2 \equiv 90^\circ$  selon le **tableau 1**. Cette condition impose donc elle-même une valeur limite  $E_1^{90^\circ}$  de l'énergie cinétique  $E_1$  pour laquelle il existe deux racines réelles positives. Cette énergie limite est déduite de la relation (II – 48) dans laquelle on porte :

$$\cos^2 \theta_{max}(E_1) = 0$$

L'égalité (II – 48) entraîne donc la nullité du numérateur du second membre qui est réalisée si :

$$(m_1 - m_4)E_1 - m_4^* Q^* = 0 \Rightarrow E_1^{90^\circ} = -\frac{m_4}{(m_4 - m_1)} Q^* \quad (\text{II} - 49)$$

Comme on s'est placé dans le cas non relativiste et de la validité de l'inégalité  $E^* \ll m_4 c^2$ , alors  $m_1 + m_2 \approx m_3 + m_4$  et (II – 49) devient :

$$E_1^{90^\circ} = -\frac{m_4}{(m_4 - m_1)} Q^* \quad (\text{II} - 50)$$

On en déduit que deux racines de l'équation (II – 40) existent si l'énergie  $E_1$  de la particule incidente est comprise entre l'énergie de seuil  $E_{1,seuil}$  définie par (II – 45) ou (II – 46) et l'énergie limite  $E_1^{90^\circ}$ .

$$(E_1)_{seuil} = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} Q^* \leq E_1 \leq E_1^{90^\circ} = -\frac{m_4}{(m_4 - m_1)} Q^* \quad (\text{II} - 51)$$

Sur le tableau 2, on voit que le produit des racines est nul pour  $E_1 = E_1^{90^\circ}$  ; cela signifie que :

- pour  $0 \leq \theta_L < \pi/2 \equiv 90^\circ$  et  $E_1 = E_1^{90^\circ}$ , une seule racine non nulle :



$$E_3 = 4 \frac{m_4}{(m_4 - m_1)} Q^* \frac{m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} \cos^2 \theta_L \equiv 4E_1^{90^\circ} \frac{m_1 m_3}{(m_3 + m_4)^2} \cos^2 \theta_L \quad (\text{II} - 52)$$

- pour  $\theta_L = \pi/2 \equiv 90^\circ$ ,  $E_3 = 0$ , qui est la seule racine réelle.

Dans le cas où l'énergie cinétique  $E_1$  de la particule incidente est supérieure à l'énergie  $E_1^{90^\circ}$  ( $E_1 > E_1^{90^\circ}$ ), le **tableau 2** indique que le produit des racines est négatif et par conséquent il n'existe qu'une seule racine réelle positive donnée par (II – 42).

### *Cas particuliers des diffusions élastique et inélastique du neutron*

- masse de du neutron incident :  $m_1 \equiv 1$  ;
- masse de l'atome cible :  $m_2 \equiv A$  ;
- masse de du neutron diffusé :  $m_3 \equiv 1$  ;
- $m_4^* \approx m_4 = m_2 \equiv A$ .

$$E_3 = \frac{[\sqrt{E_1} \cos \theta_L \pm \sqrt{\cos^2 \theta_L E_1 - (1+A)[(1-A)E_1 - A(-E^*)}]}{(1+A)^2}]^2 \quad (\text{II} - 53)$$

$$E_3 = \frac{E_1}{(1+A)^2} \left[ \cos \theta_L \pm \sqrt{\cos^2 \theta_L - A^2 \left( \frac{-E^*}{E_1} \frac{1+A}{A} + 1 \right) - 1} \right]^2 \quad (\text{II} - 54)$$

$$E_3 = E_1 \frac{1}{(1+A)^2} \left[ \mu_L \pm \sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1} \right]^2 \quad (\text{II} - 55)$$

On retrouve en particulier la relation (4.17) posée au paragraphe § 4.

Dans le cas de la diffusion élastique,  $\gamma = A$ , car  $E^* = 0$ .

### **3. Relation entre les cosinus des angles de déviation dans les référentiels du laboratoire et du centre de masse**

On considère la relation (7) entre les vitesses de la particule (3) dans le référentiel du laboratoire et celui du centre de masse :  $\vec{v}_3 = \vec{V}_C + \vec{v}_{3C}$ , que l'on projette sur chacun des deux axes orthonormés  $Ox$  et  $Oy$  de la **figure 8** :

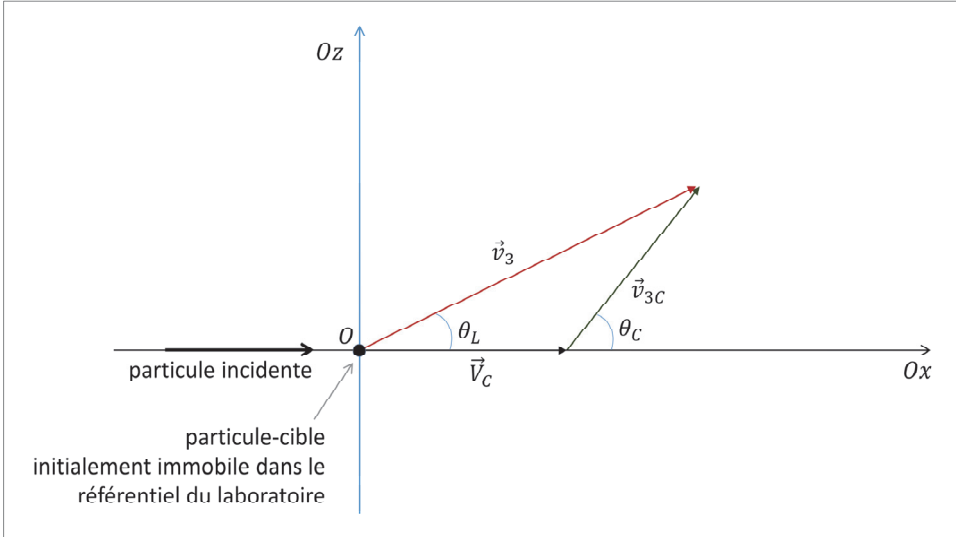


Figure 8. Réaction nucléaire à deux corps, composition des vitesses dans le référentiel du laboratoire et le référentiel du centre de masse.

Il s'agit donc d'établir la relation entre  $\mu_L = \cos \theta_L$  et  $\mu_C = \cos \theta_C$ .

L'angle  $\theta_L$  est formé entre le vecteur  $\vec{v}_3$  et l'axe  $Ox$ , et  $\theta_C$  celui formé entre le vecteur  $\vec{v}_{3C}$  et l'axe  $Ox$  ; le vecteur  $\vec{V}_C$  est colinéaire à l'axe  $Ox$  conformément à la relation (II – 18).

On a par conséquent :

- sur l'axe  $Ox$  :  $v_3 \cos \theta_L = V_C + v_{3C} \cos \theta_C$  ;
- sur l'axe  $Oz$  :  $v_3 \sin \theta_L = 0 + v_{3C} \sin \theta_C$ .

En faisant le rapport membre à membre, on obtient :

$$\operatorname{tg} \theta_L = \frac{v_{3C} \sin \theta_C}{V_C + v_{3C} \cos \theta_C} = \frac{\sin \theta_C}{\frac{V_C}{v_{3C}} + \cos \theta_C} \quad (\text{II} - 56)$$

On calcule le rapport  $V_C^2/v_{3C}^2$  à partir de (II – 16) et (II – 19) :

$$\frac{V_C^2}{v_{3C}^2} = \frac{\frac{m_1^2}{(m_3 + m_4)^2} v_1^2}{\frac{1}{m_3} \frac{2Q^* + 2E_1 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4} \right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}}}$$

$$\frac{V_C^2}{v_{3C}^2} = \frac{\frac{2m_1 E_1}{(m_3 + m_4)^2}}{\frac{1}{m_3} \frac{2Q^* + 2E_1 \left[1 - \frac{m_1}{m_3 + m_4}\right]}{1 + \frac{m_3}{m_4}}} = \frac{m_1 m_3 E_1}{m_4 (m_3 + m_4)} \frac{1}{E_1 \left[\frac{Q^*}{E_1} + \frac{m_3 + m_4 - m_1}{m_3 + m_4}\right]}$$

$$\frac{V_C^2}{v_{3C}^2} = \frac{m_1 m_3 E_1}{m_4 (m_3 + m_4 - m_1)} \frac{1}{E_1 \left[\frac{Q^*}{E_1} \frac{m_3 + m_4}{m_3 + m_4 - m_1} + 1\right]} \quad (\text{II} - 57)$$

### *Cas particulier des diffusions élastique et inélastique du neutron*

Si l'on adopte l'approximation justifiée ici  $m_4^* \approx m_4$  et en observant que pour les diffusions élastique et inélastique on a  $m_3 + m_4 \cong m_1 + m_2$ , alors (35) devient en ayant aussi remplacé  $Q^*$  par  $-E^*$  :

$$\frac{V_C^2}{v_{3C}^2} = \frac{m_1 m_3}{m_2 m_4} \frac{1}{\left[\frac{-E^*}{E_1} \frac{m_1 + m_2}{m_2} + 1\right]} \equiv \frac{m_1 m_3}{m_2 m_4} \frac{\frac{m_2}{m_1 + m_2} E_1}{\left[-E^* + \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_1\right]} \quad (\text{II} - 58)$$

La relation (II - 58) peut être réécrite en exprimant les masses en unité de masse de neutron ( $m_1 = m_3 = 1$ ,  $m_2 = m_4 = A$ ), ce qui conduit immédiatement à :

$$\frac{V_C^2}{v_{3C}^2} = \frac{1}{A^2} \frac{1}{\left[\frac{-E^*}{E_1} \frac{1 + A}{A} + 1\right]} \quad (\text{II} - 59)$$

soit :

$$\frac{V_C}{v_{3C}} = \frac{1}{A} \frac{1}{\left[\frac{-E^*}{E_1} \frac{1 + A}{A} + 1\right]^{1/2}} = \frac{1}{\gamma} \quad (\text{II} - 60)$$

On pose  $\gamma' = 1/\gamma$ .

En reprenant (II - 56), on a alors :

$$\text{tg } \theta_L = \frac{\sin \theta_C}{\gamma' + \cos \theta_C} \quad (\text{II} - 61)$$

En utilisant l'identité trigonométrique  $1 + \text{tg}^2 \theta_L = 1/\cos^2 \theta_L$  avec (II - 61), on est conduit à :

$$1 + \text{tg}^2 \theta_L = 1 + \frac{\sin^2 \theta_C}{(\gamma' + \cos \theta_C)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta_L} = \frac{(\gamma' + \cos \theta_C)^2 + \sin^2 \theta_C}{(\gamma' + \cos \theta_C)^2}$$

D'où :

$$\cos \theta_L = \frac{\gamma' + \cos \theta_C}{\sqrt{\gamma'^2 + \cos^2 \theta_C + 2\gamma' \cos \theta_C + \sin^2 \theta_C}} = \frac{\gamma' + \cos \theta_C}{\sqrt{\gamma'^2 + 2\gamma' \cos \theta_C + 1}} \quad (\text{II} - 62)$$

En remplaçant  $\gamma'$  par  $1/\gamma$ , (II - 62) donne :

$$\cos \theta_L = \frac{1 + \gamma \cos \theta_C}{\sqrt{1 + 2\gamma \cos \theta_C + \gamma^2}} \quad (\text{II} - 63)$$

ou :

$$\mu_L = \frac{1 + \gamma \mu_C}{\sqrt{1 + 2\gamma \mu_C + \gamma^2}} \quad (\text{II} - 64)$$

Cette relation correspond bien à la relation (4.8) posée au paragraphe § 4.

En élevant (II - 64) au carré, on tire inversement l'expression de  $\mu_C$  en fonction de  $\mu_L$  comme racine d'une équation du deuxième degré en  $\mu_C$  :

$$\mu_C = \frac{1}{\gamma} \left[ \mu_L^2 - 1 \pm \mu_L \sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1} \right] \quad (\text{II} - 65)$$

Il s'agit bien de la relation (4.10) posée au paragraphe § 4.

On peut également retrouver cette même expression à partir des deux relations donnant l'énergie cinétique  $E_3$  du neutron diffusé respectivement en fonction des cosinus des angles de déviation dans le centre de masse et le laboratoire :

$$E_3 = E_1 \frac{1 + 2\gamma \mu_C + \gamma^2}{(1 + A)^2}, \quad E_3 = E_1 \frac{1}{(1 + A)^2} \left[ \mu_L \pm \sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1} \right]^2$$

En égalisant ces deux expressions, on obtient :

$$1 + 2\gamma \mu_C + \gamma^2 = \left[ \mu_L \pm \sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1} \right]^2 = \mu_L^2 + \mu_L^2 + \gamma^2 - 1 \pm 2\sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1}$$

soit :

$$2\gamma \mu_C = 2\mu_L^2 - 2 \pm 2\sqrt{\mu_L^2 + \gamma^2 - 1}$$

d'où (II - 65). Dans le cas de la diffusion élastique,  $\gamma = A$ .

#### 4. Détermination de l'énergie de seuil dans le référentiel du laboratoire à partir de l'énergie de seuil définie dans le référentiel du centre de masse

##### 4.1. Hypothèse non relativiste

On désigne par  $E_{1C}$  et  $E_{2C}$  les énergies cinétiques des particules (1) et (2) dans le référentiel du centre de masse avant collision. On conserve les mêmes notations que précédemment. On admet toujours que la particule (2) est initialement au repos dans le référentiel du laboratoire ( $\vec{v}_2 = \vec{0}$ ) et, pour simplifier les notations, que les particules (3) et (4) produites par la réaction nucléaire endoénergétique ( $Q < 0$ ) considérée sont formées dans leur état fondamental.

On a déjà défini au paragraphe 3 l'énergie de seuil de cette réaction dans le référentiel du centre de masse qui conduit à la relation :

$$(E_C)_{seuil} = E_{1C} + E_{2C} = -Q, \quad Q < 0 \quad (\text{II} - 66)$$

Elle signifie que l'apport d'énergie minimal apporté par les particules (1) et (2) dans le référentiel du centre de masse pour produire les particules (3) et (4) doit être égal à  $-Q$ . Les lois de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion sont respectées, les particules (3) et (4) étant produites avec une énergie cinétique nulle.

On exprime les énergies  $E_{1C}$  et  $E_{2C}$  en fonction des vitesses des particules (1) et (2) dans le référentiel du laboratoire.

Comme  $\vec{v}_1 = \vec{V}_C + \vec{v}_{1C}$  et  $\vec{v}_2 = \vec{V}_C + \vec{v}_{2C}$  avec  $\vec{v}_2 = \vec{0}$ , on a :

$$\begin{aligned} E_{1C} + E_{2C} &= \frac{1}{2} m_1 v_{1C}^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{V}_C)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{0} - \vec{V}_C)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{V}_C)^2 + \frac{1}{2} m_2 V_C^2 \end{aligned}$$

$$E_{1C} + E_{2C} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V_C^2 - \frac{1}{2} 2m_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{V}_C \quad (\text{II} - 67)$$

Or on a déjà vu précédemment que (équation 2.16) :

$$\vec{V}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

et donc  $\vec{V}_C$  et  $\vec{v}_1$  sont colinéaires. Il s'ensuit que :

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{V}_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1^2$$

d'où, en remplaçant :

$$E_{1C} + E_{2C} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v_1^2 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

$$E_{1C} + E_{2C} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

$$E_{1C} + E_{2C} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left[ 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right] = E_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

D'où :

$$E_1 \equiv (E_1)_{seuil} = (E_{1C} + E_{2C}) \frac{m_1 + m_2}{m_2} \quad (\text{II} - 68a)$$

En prenant  $(E_{1C} + E_{2C})$  égale à  $(E_C)_{seuil}$ , énergie de seuil dans le référentiel du centre de masse la relation (II - 68a) devient :

$$(E_C)_{seuil} \frac{m_1 + m_2}{m_2} = -Q \frac{m_1 + m_2}{m_2} \quad (\text{II} - 68b)$$

Ce qui montre que :

$$E_1 \equiv (E_1)_{seuil} > (E_C)_{seuil} = -Q \quad (\text{II} - 68c)$$

L'énergie de seuil dans le référentiel du laboratoire est effectivement supérieure à l'énergie de seuil dans le référentiel du centre de masse. Lorsque  $m_2 \gg m_1$ , les deux énergies de seuil sont voisines et égales à  $-Q$ .

On a donc retrouvé de manière plus simple la relation (46) établie plus haut en ayant raisonné uniquement dans le référentiel du laboratoire.

## 4.2 Hypothèse relativiste

On écrit l'invariant relativiste  $M$  dans chacun des deux référentiels.

- Dans le référentiel du laboratoire, il s'écrit :

$$M^2 c^4 = (E_1 + m_1 c^2 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 \quad (\text{II} - 69)$$

où  $E_1 + m_1 c^2$  est l'énergie totale de la particule (1) : énergie cinétique  $E_1$  + énergie de masse  $m_1 c^2$ .

On a aussi la relation relativiste :

$$(E_1 + m_1 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = m_1^2 c^4 \quad (\text{II} - 70)$$

On en déduit :

$$M^2 c^4 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2[E_1 + m_1 c^2]m_2 c^2 \quad (\text{II} - 71)$$

- Dans le référentiel du centre de masse, il s'écrit :

$$M^2 c^4 = (m_1 c^2 + m_2 c^2 + E_C)^2 - 0 \quad (\text{II} - 72)$$

avec :  $E_C = E_{1C} + E_{2C}$

$$M^2 c^4 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + E_C^2 + 2(m_1 + m_2)E_C c^2 \quad (\text{II} - 73)$$

En écrivant l'égalité des deux expressions (II - 71) et (II - 73) de l'invariant relativiste respectivement relatives aux deux référentiels on obtient l'équation pour  $E_C = (E_C)_{seuil} \equiv E_{1,C} + E_{2,C} = -Q$  donné par (II - 66) :

$$m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2[E_{1,seuil} + m_1 c^2]m_2 c^2 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + Q^2 - 2(m_1 + m_2)Q c^2$$

d'où :

$$2E_{1,seuil}m_2 c^2 = Q^2 - 2(m_1 + m_2)Q c^2$$

$$E_{1,seuil} = \frac{Q^2}{2E_1 m_2 c^2} - \frac{m_1 + m_2}{m_2} Q \quad (\text{II} - 74)$$

On constate sur (II - 74) que si l'on a affaire à une **réaction photonucléaire** l'énergie de seuil reste supérieure à ce qu'elle est dans le référentiel du centre de masse, contrairement au cas non-relativiste.

Si  $Q \ll m_2$ , alors on retrouve l'expression non relativiste (II - 68) :

$$E_{1,seuil} \approx -\frac{m_1 + m_2}{m_2} Q$$

Dans le cas des photons,  $m_1 = 0$  (la masse repos d'un photon est nulle) :

$$E_{1,seuil} = -Q$$

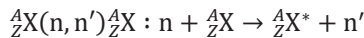
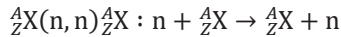
### Annexe III : calcul de l'énergie déposée dans la matière lors d'une réaction nucléaire

En physique des réacteurs nucléaires, ainsi que cela a déjà été mentionné, on peut chercher à déterminer les échauffements nucléaires par exemple pour dimensionner certains dispositifs expérimentaux ou bien fixer des conditions expérimentales impliquant des contraintes en température. Par ailleurs, ces dépôts d'énergie provoquent des dommages dans les matériaux. Pour ces différentes raisons, il faut donc être en mesure de calculer les dépôts d'énergie locaux associés aux réactions nucléaires. Ceux-ci résultent du ralentissement des particules chargées produites et mises en mouvement dans une réaction nucléaire. Dans les matériaux suffisamment denses, ces dépôts d'énergie peuvent être considérés comme locaux compte tenu de la faible valeur du parcours des particules chargées dans la matière pour les valeurs des énergies cinétiques mises en jeu. On considère par conséquent que l'énergie, dite déposée localement, regroupe l'énergie transmise au milieu par l'atome de recul ainsi que par les particules chargées éventuellement émises. Les particules neutres émises déposeront leur énergie en un autre lieu dans la matière en interagissant avec un noyau atomique s'il s'agit d'un neutron ou préférentiellement avec le cortège électronique s'il s'agit d'un photon.

On traite successivement les trois types suivants de réactions induites par un neutron : les diffusions élastique et inélastique, la réaction de capture radiative ( $n, \gamma$ ), les réactions émettant des particules chargées ( $p, \alpha$ , etc.) et enfin les réactions productrices de neutrons.

#### 1. Cas des diffusions élastique et inélastique

On rappelle que ces réactions s'écrivent respectivement :



On détermine corrélativement l'énergie cinétique,  $E_N$ , de l'atome cible de recul à la suite du choc avec le neutron d'énergie cinétique d'incidence  $E$ . En effet, la conservation de l'énergie totale s'écrit :

$$m_n c^2 + E + m_N c^2 = m_n c^2 + E' + m_N^* c^2 + E_N \quad (\text{III} - 1)$$

avec :

$$m_N^* c^2 = m_N c^2 + E_i^* \quad (\text{III} - 2)$$

On tire :

$$E_N = E - E' - E_i^* \quad (\text{III} - 3)$$

d'où, en remplaçant  $E'$  par son expression donnée par la relation 4.7 du paragraphe 4 :



$$E_{N,i} = E \frac{2A \left[ 1 - \left( 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \mu_c \right]}{(A+1)^2} - \frac{E_i^*}{A+1} \quad (\text{III} - 4)$$

Pour le cas particulier du choc élastique,  $E_i^* = 0$  et l'on obtient :

$$E_N = E \frac{2A[1 - \mu_c]}{(A+1)^2} \quad (\text{III} - 5)$$

### Exemple

Pour un neutron d'énergie initiale  $E = 2$  MeV provoquant une réaction inélastique sur le 1<sup>er</sup> niveau d'excitation du fer 56 ( $A \approx 56$ ),  $E_1^* = 0.846$  MeV, l'énergie de recul de l'atome cible de fer,  $E_N$ , vaut pour une diffusion respectivement vers l'avant et vers l'arrière  $\mu_c = \pm 1$  :

$$E_{N,1}^{\pm} \approx 2 \frac{2 \times 56 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{56+1}{56} \times \frac{0.846}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \pm 1 \right]}{(56+1)^2} - \frac{0.846}{56+1}$$

$$E_N^+(\mu_c = +1) = 2.076 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}$$

$$E_N^-(\mu_c = -1) = 0.106 \text{ MeV}$$

Le noyau atomique résiduel, étant dans un état excité  $E_i^*$ , se désexcite par l'émission d'un gamma d'énergie  $E_i^*$ . Compte tenu du principe de la conservation de la quantité de mouvement, ce phénomène communique une énergie cinétique additionnelle au noyau atomique.

Le noyau excité étant supposé au repos (ce qui revient à admettre que la désexcitation intervient après le ralentissement complet de l'atome-cible choqué), la conservation de la quantité de mouvement avant et après émission du photon impose que la somme vectorielle de quantité de mouvement du noyau atomique de recul et du gamma émis soit nulle, ce qui conduit en module à l'égalité :

$$0 = m_N v'_N - \frac{E_i^*}{c} = A m_n v'_N - \frac{E_i^*}{c}$$

où l'on rappelle que :

$m_N$  : masse du noyau atomique ;

$A$  : masse du noyau atomique à l'état fondamental rapportée à celle du neutron ;

$m_n$  : masse du neutron en unité d'énergie, 939.5 MeV/ $c^2$  ;

$v'_N$  : vitesse communiquée au noyau atomique lors de l'émission du photon.

On en déduit que l'énergie cinétique de recul du noyau atomique s'écrit :

$$E'_N = \frac{1}{2} m_N v_N'^2 = \frac{1}{2} A m_n \left( \frac{E_t^*}{A m_n c^2} \right)^2 = \frac{E_t^{*2}}{2 A m_n c^2} \quad (\text{III} - 6)$$

### Exemple

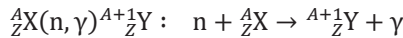
Pour le fer 56 dont le premier niveau a été excité, on a :

$$E'_{N,1} = \frac{E_1^{*2}}{2 A m_n c^2} = \frac{0.846^2}{2 \times 56 \times 939.5} = 6.8 \cdot 10^{-6} \text{ MeV} = 6.8 \text{ eV}$$

## 2. Cas de la production de photons

Les notations définies au début du chapitre sont conservées ici.

On considère la situation dans laquelle la particule (3) est un photon émis d'énergie  $E_3 \equiv E_\gamma$  que l'on suppose connue par des mesures.



La conservation de l'impulsion s'écrit :

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \frac{E_\gamma}{c} + m_4 \vec{v}_4 \quad (\text{III} - 7)$$

Comme la particule cible (2) est supposée immobile dans le référentiel du laboratoire (ce qui n'est pas nécessairement vrai), on a :

$$m_1 \vec{v}_1 = \frac{E_\gamma}{c} + m_4 \vec{v}_4 \quad (\text{III} - 8)$$

On projette cette équation sur les deux axes  $Ox$  et  $Oy$  perpendiculaires du repère orthonormé du système du laboratoire (voir figure 1), l'axe  $Ox$  étant choisi confondu avec la trajectoire de la particule (1) incidente :

$$m_1 v_1 = \frac{E_\gamma}{c} \cos \theta_L + m_4 v_4 \cos \theta_4 \quad (\text{III} - 9)$$

$$0 = \frac{E_\gamma}{c} \sin \theta_L - m_4 v_4 \sin \theta_4 \quad (\text{III} - 10)$$

De (III - 9) et (III - 10) on tire :

$$(m_4^* v_4 \cos \theta_4)^2 = \left( m_1 v_1 - \frac{E_\gamma}{c} \cos \theta_L \right)^2 \quad (\text{III} - 11)$$

$$(m_4 v_4 \sin \theta_4)^2 = \left( \frac{E_\gamma}{c} \sin \theta_L \right)^2 \quad (\text{III} - 12)$$

Par sommation membre à membre, il vient :

$$(m_4 v_4)^2 = (m_1 v_1)^2 + \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 - 2m_1 v_1 \frac{E_\gamma}{c} \cos \theta_L \quad (\text{III} - 13)$$

En introduisant les énergies cinétiques  $E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ ,  $i = 1, 4$ , on obtient :

$$2m_4 E_4 = 2m_1 E_1 + \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 - 2\sqrt{2m_1 E_1} \frac{E_\gamma}{c} \cos \theta_L \quad (\text{III} - 14)$$

$$m_4 E_4 = m_1 E_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 - \sqrt{m_1 E_1} \frac{E_\gamma}{c} \cos \theta_L \quad (\text{III} - 15)$$

$$E_4 = \frac{m_1}{m_4} E_1 + \frac{1}{2m_4} \left(\frac{E_\gamma}{c}\right)^2 - \sqrt{\frac{m_1}{m_4} E_1} \frac{E_\gamma}{c} \cos \theta_L \quad (\text{III} - 16)$$

Considérons à présent le cas de la capture radiative ( $n, \gamma$ ) en supposant que la particule (4) est formée dans son état fondamental. Comme précédemment, on rapporte les masses des atomes à la masse du neutron :

- masse du neutron incident :  $m_1 \equiv m_n \equiv 1$  ;
- masse de l'atome cible :  $m_2 \equiv A$  ;
- $m_4 \cong m_2 + m_1 \equiv A + 1$ .

En considérant toujours le noyau atomique cible initialement au repos et qu'un seul gamma d'énergie  $E_\gamma$  est émis laissant le noyau atomique résiduel ( $A + 1$ ) dans son état fondamental, l'énergie cinétique,  $E_4 \equiv E_N$ , de ce dernier s'obtient à partir de (III – 16) en fonction de l'énergie  $E_n$  du neutron incident :

$$E_N = \frac{E_n}{A + 1} - \sqrt{\frac{E_n}{(A + 1)^2 m_n c^2}} E_\gamma \cos \theta_L + \frac{E_\gamma^2}{2(A + 1)m_n c^2} \quad (\text{III} - 17)$$

où :

- $A$  : masse du noyau atomique cible rapportée à celle du neutron ;
- $A + 1$  : masse du noyau atomique résultant de la capture radiative, à l'état fondamental ;
- $m_n c^2$  : masse du neutron en unité d'énergie ( $m_n c^2 \approx 939.5$  MeV) ;
- $\theta_L$  : angle d'émission du gamma repéré par rapport à la direction du neutron incident dans le référentiel du laboratoire.

La relation (III – 17) montre que l'énergie cinétique de recul,  $E_N$ , du noyau atomique ( $A + 1$ ) provient du choc avec le neutron incident et de l'émission du gamma : dans le membre

de droite, le premier terme correspond au transfert d'énergie induit par le neutron seul comme si la collision était purement élastique ; le deuxième terme correspond à la contribution du phénomène d'émission gamma considéré isolément ; le troisième terme tient compte de la corrélation existant entre tous les acteurs de la réaction de capture (neutron incident, noyau atomique et gamma émis).

Pour une énergie  $E$  du neutron incident très faible (neutron du domaine d'énergie thermique), la relation (III – 17) devient :

$$E_N \approx \frac{E_\gamma^2}{2(A+1)m_n c^2} \quad (\text{III} - 18)$$

La dépendance angulaire disparaît.

### Exemple

**Réaction de capture radiative  $\text{Fe56}(n, \gamma)\text{Fe57}$  induite par un neutron thermique d'énergie  $E = 0.025 \text{ eV}$  avec  $E_\gamma = 352.347 \text{ keV}$ .**

Pour  $\theta_L = \pi$ , alors  $\cos \theta_L = -1$  et l'on a :

$$E_N \approx \frac{0.025 \cdot 10^{-6}}{56+1} - 2 \cdot \sqrt{\frac{0.025 \cdot 10^{-6}}{56+1}} \sqrt{\frac{1}{2(56+1) \times 931.494}} 352.347 \cdot 10^{-3} \times (-1) + \frac{(352.347 \cdot 10^{-3})^2}{2(56+1) \times 931.494}$$

$$E_N = 4.39 \cdot 10^{-10} + 9.48 \cdot 10^{-13} + 1.33 \cdot 10^{-5} \approx 1.33 \cdot 10^{-5} \text{ MeV}$$

On constate bien que le troisième terme est très largement prépondérant et les deux premiers négligeables.

Pour  $E = 2 \text{ MeV}$ , c'est le premier terme qui prédomine, comme le montre le calcul suivant :

$$E_N \approx \frac{2.}{56+1} - 2 \cdot \sqrt{\frac{2.}{56+1}} \sqrt{\frac{1}{2(56+1) \times 931.494}} 352.347 \cdot 10^{-3} \times (-1) + \frac{(352.347 \cdot 10^{-3})^2}{2(56+1) \times 931.494}$$

$$E_N = 3.5 \cdot 10^{-2} + 2.025 \cdot 10^{-4} + 1.33 \cdot 10^{-5} \approx 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}$$

### 3. Cas des réactions productrices de particules chargées

Pour les réactions  ${}_Z^AX(n, p) {}_{Z-1}^AY$  et  ${}_Z^AX(n, \alpha) {}_{Z-2}^{A-4}Y'$ , les énergies déposées sont respectivement  $\mathcal{E}_{(n,p)}$  et  $\mathcal{E}_{(n,\alpha)}$  données par les relations déduites de la conservation de l'énergie totale :

$$n + {}_Z^AX \rightarrow {}_{Z-1}^AY + p : \quad \mathcal{E}_{(n,p)} \equiv E_p + E_Y = E + Q_{(n,p)} \quad (\text{III} - 19)$$

$$n + {}^A_ZX \rightarrow {}^{A-1}_{Z-2}Y' + \alpha : \quad \mathcal{E}_{(n,\alpha)} \equiv E_\alpha + E_{Y'} = E + Q_{(n,\alpha)} \quad (\text{III} - 20)$$

où :

$E$  : énergie cinétique du neutron incident ;

$E_p$  : énergie cinétique du proton (de recul) ;

$E_Y$  : énergie cinétique du noyau atomique de recul  ${}^{A-1}_{Z-1}Y$  ;

$E_\alpha$  : énergie cinétique de la particule  $\alpha$  (noyau d'hélium 4 de recul) ;

$E_{Y'}$  : énergie cinétique du noyau atomique de recul  ${}^{A-1}_{Z-2}Y'$  ;

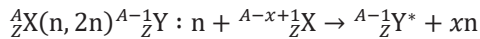
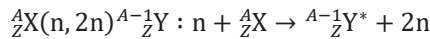
$Q_{(n,p)}$  : énergie disponible de la réaction nucléaire  ${}^A_ZX(n,p){}^{A-1}_{Z-1}Y$ ,  $Q_{(n,p)} = m_n c^2 + m_{{}^A_ZX} c^2 - m_{{}^{A-1}_{Z-1}Y} c^2 - m_p c^2$  ;

$Q_{(n,\alpha)}$  : énergie disponible de la réaction nucléaire  ${}^A_ZX(n,\alpha){}^{A-1}_{Z-2}Y'$ ,  $Q_{(n,\alpha)} = m_n c^2 + m_{{}^A_ZX} c^2 - m_{{}^{A-1}_{Z-2}Y'} c^2 - m_\alpha c^2$ .

Les noyaux atomiques  ${}^{A-1}_{Z-1}Y$  et  ${}^{A-1}_{Z-2}Y'$  sont supposés ici être produits dans leur état fondamental.

#### 4. Cas des réactions productrices de neutrons (n,2n), (n,xn)

Ces réactions<sup>4 5 6 7</sup> s'écrivent respectivement :



où  $x$  est un entier :  $x = 3, 4 \dots$

Dans le cas de la réaction (n, 2n), l'énergie  $E_N$  du nucléide de recul a pour expression<sup>8</sup> :

<sup>4</sup> P. A. Assimakopoulos, « Kinematics of three-body reactions », *Computer Physics Communications*, v. 10 (6), 1975, pp. 385-400, [https://doi.org/10.1016/0010-4655\(75\)90042-9](https://doi.org/10.1016/0010-4655(75)90042-9).

<sup>5</sup> C. Xuan Chuan, « Réactions nucléaires avec émission simultanée de trois corps », *J. Phys. Radium*, 23 (2), 1962, pp. 78-80, <https://doi.org/10.1051/jphysrad:0196200230207800>.

<sup>6</sup> P. Swan, « Sequential Decay Theory for the B11(p,3 $\alpha$ ) Reaction », *Rev. Mod. Phys.* 37, 3, July 1, 1965, pp. 336-346 § II, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.37.336>.

<sup>7</sup> A. M. Baldin, V. I. Gol'danskii, I. L. Rozenthal, *Kinematics of nuclear reactions*, Pergamon Press, London, Oxford, 1961.

<sup>8</sup> L. Zhang, M. A. Abdou, « KERMA factor evaluation and its application in nuclear heating experiment analysis », *Fusion Engineering and Design*, 36, 1997, pp. 479-503, voir p. 484, [https://doi.org/10.1016/S0920-3796\(96\)00704-1](https://doi.org/10.1016/S0920-3796(96)00704-1).

$$E_N = \frac{1}{A-1} \left[ E_n + E_{n1} + E_{n2} - 2\mu_1 \sqrt{E_n E_{n1}} - 2\mu_2 \sqrt{E_n E_{n2}} + 2\mu_1 \mu_2 \sqrt{E_{n1} E_{n2}} + 2\sqrt{E_{n1} E_{n2}} \sqrt{(1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \quad (\text{III} - 21)$$

où :

- $E_{n1}$  et  $E_{n2}$  sont les énergies respectives des deux neutrons émis ;
- $\mu_1, \mu_2, \varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont respectivement les cosinus des angles de déviation et les angles azimutaux définissant les directions  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  des deux neutrons émis (voir **figure 9** ci-dessous).

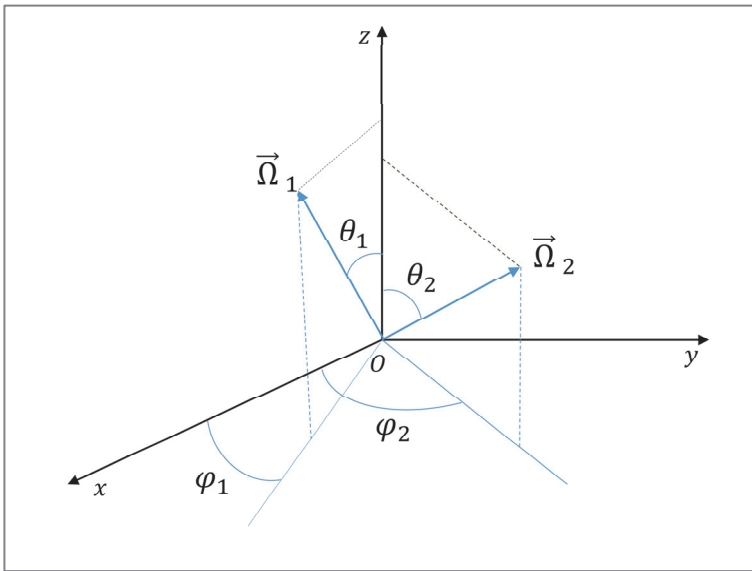


Figure 9. Représentation en coordonnées sphériques des vecteurs unitaires  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  respectivement associés aux directions du neutron avant et après diffusion.

On pose :  $\mu_1 = \cos \theta_1$  et  $\mu_2 = \cos \theta_2$ .

Il en résulte les composantes suivantes des directions  $\vec{\Omega}_1$  et  $\vec{\Omega}_2$  ainsi que l'expression de leur produit scalaire :

$$\vec{\Omega}_1 \begin{cases} \sqrt{1-\mu_1^2} \cos \varphi_1 \\ \sqrt{1-\mu_1^2} \sin \varphi_1 \\ \mu_1 \end{cases} \quad \vec{\Omega}_2 \begin{cases} \sqrt{1-\mu_2^2} \cos \varphi_2 \\ \sqrt{1-\mu_2^2} \sin \varphi_2 \\ \mu_2 \end{cases}$$

$$\vec{\Omega}_1 \cdot \vec{\Omega}_2 = \mu_1 \mu_2 + \sqrt{(1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

En supposant les neutrons indiscernables et en l'absence d'information sur l'émission des deux neutrons secondaires en fonction de l'angle azimutal  $\varphi$ , les approximations suivantes sont faites :

- $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$  ;
- on définit une énergie moyenne,  $E_{n'}$ , des neutrons émis :  $E_{n'} = (E_{n1} + E_{n2})/2$  ;
- on pose :  $\sqrt{E_{n'}} = (\sqrt{E_{n1}} + \sqrt{E_{n2}})/2$  ;  $\langle \sqrt{E_n E_{n2}} \rangle = \bar{E}_{n'}$  ;  $\langle \mu_1 \mu_2 \rangle = \bar{\mu}_L^2$ .

L'énergie moyenne  $E_N$  du noyau de recul ne comporte plus de dépendance angulaire et (III – 21) devient :

$$E_N = \frac{1}{A-1} \left[ E_n + 2\bar{E}_{n'}(1 + \bar{\mu}_L^2) - 4\bar{\mu}_L \sqrt{E_n \bar{E}_{n'}} \right] \quad (\text{III} - 22)$$

Dans le cas de la réaction  $(n, xn)$ , en supposant la diffusion isotrope dans le référentiel du centre de masse, on montre que l'énergie moyenne  $\bar{E}_N$  du nucléide de recul est donnée par l'expression :

$$\bar{E}_N = \frac{(A-x)(A+2-x)}{(A+1)^2(A+1-x)} E_n + \frac{\bar{E}_{nx}}{A+1-x} \quad (\text{III} - 23)$$

où  $\bar{E}_{nx}$  est la moyenne des énergies cinétiques de  $x$  neutrons secondaires émis.





# 8

## **Les sections efficaces des réactions nucléaires induites par les neutrons**



La notion de **section efficace** renvoie à l’occurrence d’une réaction provoquée par une particule incidente sur une autre particule dite **particule cible**. Il peut aussi bien s’agir de l’interaction d’un neutron, d’un photon, ou d’une particule chargée (proton, deuton, alpha...) avec un noyau atomique que celle d’un photon avec les électrons du cortège électronique de l’atome.

Tout comme les grandeurs cinématiques présentées au précédent chapitre, les sections efficaces constituent des grandeurs physiques indispensables à l’étude du cheminement des neutrons dans la matière. En raison de l’échelle physique microscopique à laquelle se déroulent les interactions entre les neutrons et les noyaux atomiques-cibles, une approche corpusculaire classique n’est pas suffisante pour les déterminer. Il est nécessaire d’avoir également recours à la mécanique quantique prenant en compte l’aspect ondulatoire, en cohérence avec la description quantique du noyau atomique qui a été faite au chapitre 4.

Les sections efficaces revêtent à la fois des formes scalaires et différentielles qui font intervenir, dans le cas des phénomènes de diffusion, les variables d’énergie et angulaires de manière corrélée ou non selon la nature de l’interaction. Pour les déterminer, la complexité du problème exclut provisoirement l’approche *ab initio*, *a priori* la plus rigoureuse mais (provisoirement) inaccessible en toute généralité dans la pratique, en raison des ressources informatiques insuffisantes pour cela (temps de calcul rédhibitoire...). La démarche couramment adoptée est celle de la mise au point de modélisations pour représenter le comportement du système nucléaire en interaction sur des échelles de temps caractéristiques telles que celles représentées sur la **figure 1** du chapitre 6 et reprise ici.

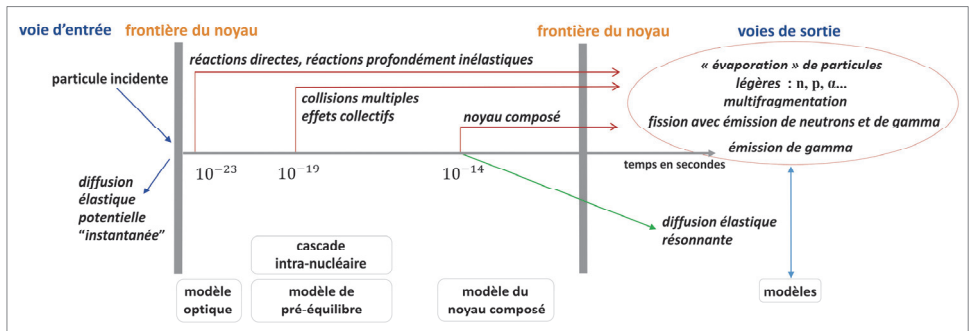


Figure 1. Phénomènes physiques associés aux réactions nucléaires en relation avec l’échelle des temps.<sup>1 2 3</sup>

4

<sup>1</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1952.

<sup>2</sup> V. F. Weisskopf, « The formation of the compound nucleus », *Physica*, Vol. 22, Issues 6-12, 1956, pp. 952-958, p. 955.

<sup>3</sup> W. E. Meyerhof, *Éléments de physique nucléaire*, Dunod, Paris, 1970, p. 188.

<sup>4</sup> E. Bauge, S. Hilaire, « Modélisation et Évaluation de Données », dans *Le cycle électronucléaire : de la fission aux nouvelles filières*, École internationale Joliot-Curie de physique nucléaire, Maubuisson, France, 25<sup>e</sup> session, 18-23 septembre 2006, p. 127-166, voir figure p. 136.

Une distinction est faite entre la **formation** proprement dite du **noyau atomique** fortement **excité**, constitué par la combinaison du nucléide cible et de la particule incidente, dont l'étude a suscité l'élaboration de plusieurs formalismes, et la manière dont celui-ci se désintègre (ou se désexcite) – **voies de sortie** – par différents types de processus, « évaporation » de particules légères, fission, émission de gamma..., faisant eux-mêmes l'objet de modèles. Autrement dit, de façon très schématique, pour obtenir les sections efficaces, le physicien nucléaire est souvent conduit à coupler un modèle nucléaire qui fournit la section efficace de formation du noyau atomique excité – par exemple le modèle du noyau composé, le modèle optique – à des modèles décrivant les voies de sortie possibles : modèle de fission, modèle d'évaporation, modèle d'émission de gamma, etc.

Il est important d'insister sur la complémentarité des modèles mentionnés. En effet, la valeur d'une section efficace obtenue expérimentalement se compare à la somme des valeurs calculées *via* ces différents modèles. Pour prendre un exemple, la section efficace de capture radiative ( $n, \gamma$ ) résulte de l'occurrence de cette réaction durant la séquence temporelle où prédominent les « réactions directes », à laquelle s'ajoute la section efficace ( $n, \gamma$ ) associée à l'occurrence de cette même réaction au cours de la séquence temporelle de pré-équilibre, auxquelles s'ajoute, enfin, la section efficace ( $n, \gamma$ ) associée à l'occurrence de cette réaction dans la dernière séquence temporelle traitée par le modèle du noyau composé. Les séquences temporelles définies ne sont donc pas déconnectées les unes des autres, et un modèle décrivant par exemple les réactions directes peut fournir des données utiles pour les modèles décrivant les autres processus réactionnels.

L'interaction entre le neutron et le noyau atomique est traitée selon un cheminement de complexité croissante qui a comme point de départ la **diffusion élastique potentielle** classique d'un neutron par une sphère dure. On présente successivement **les approches géométrique et ondulatoire** de définition des **sections efficaces microscopiques** scalaires et différentielles de réactions induites par un neutron sur un noyau atomique, la définition de **sections efficaces macroscopiques**, puis le comportement des sections efficaces neutroniques en fonction de l'énergie. On aborde ensuite, dans leurs grandes lignes, différents modèles qui permettent de les calculer dans le domaine d'énergie inférieure à 20 MeV. Les paramètres qui interviennent dans ces modèles, qui s'appuient sur la **mécanique quantique**, sont explicités en raison de l'importance du rôle qu'ils jouent dans la détermination des sections efficaces. La caractérisation des distributions énergétiques et angulaires des neutrons produits par les réactions inélastiques, et de manière plus générale, les sections efficaces productrices de particules secondaires sont abordées dans la dernière partie de ce chapitre. La description des techniques de mesures de sections efficaces sort du cadre de cet ouvrage<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup> Le lecteur pourra, entre autres, se reporter au chapitre VII « Mesures de sections efficaces » de l'ouvrage d'H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, Saclay, INSTN/CEA, Collection Enseignement, 1989, pp. 75-88, aux articles suivants des *Techniques de l'ingénieur* : E. Bauge, C. De Saint Jean, S. Hilaire, A. Nicolas, « Physique des réacteurs – Modélisation et évaluation des sections efficaces », *Techniques de l'ingénieur* BN 3 008 V1, 10 juillet 2020 ; O. Sérot, « Physique des réacteurs – Modélisation et évaluation des observables de fission », *Techniques de l'ingénieur* BN 3 009 V1, 10 juillet 2020. Le chapitre 13 du présent ouvrage cite quelques noms de laboratoires dans lesquels des mesures de données nucléaires sont réalisées.

1. Notion de section efficace microscopique de diffusion –  
Approche géométrique et corpusculaire

Ce qualificatif **microscopique** se réfère à un choc entre une particule incidente (par exemple un neutron) avec un unique noyau atomique cible considéré initialement immobile dans le référentiel du laboratoire.

Dans ce paragraphe, la notion de section efficace est introduite dans un cadre strictement classique (loi de la mécanique classique appliquée à la collision de deux corps solides) *via* une approche géométrique. Cela permet d’expliciter les lois de distribution angulaire et de transfert en énergie après choc dans ce cas particulier de la diffusion élastique d’un neutron par un noyau atomique cible.

1.1. Section efficace scalaire

En premier lieu, on considère la diffusion élastique des particules d’un faisceau de particules identiques aux trajectoires parallèles  $\phi$  (particules  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ) par une sphère dure à laquelle est assimilé le noyau atomique cible, comme l’illustre la **figure 2**.

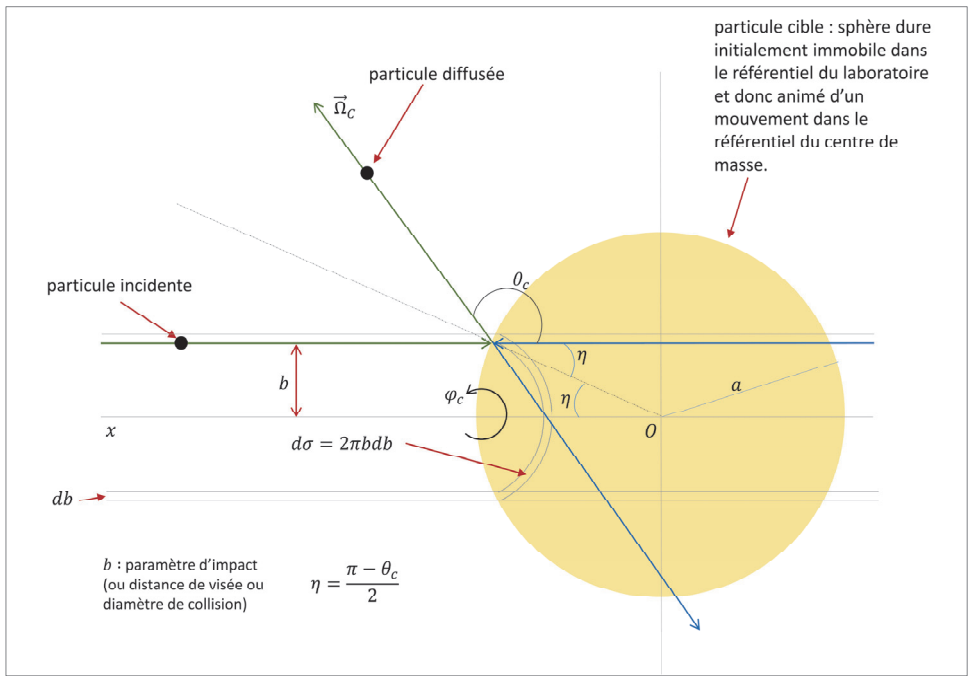


Figure 2. Diffusion élastique potentielle d’une particule par une sphère dure.

On voit sur la **figure 2** que la position du point d'impact d'une particule sur la surface de la sphère dure<sup>6</sup> dépend de la distance  $b$  dénommée **paramètre d'impact**, ou **distance de visée** ou encore **diamètre de collision**. La particule incidente est réfléchiée à la surface de la sphère dure selon une direction symétrique par rapport à la normale à cette surface au point d'impact. Le nombre de particules qui atteignent la surface élémentaire  $2\pi b db$  pour être ensuite diffusées est :

$$dn = 2\pi b db \times \phi \quad (1.1)$$

Le rapport :

$$d\sigma = \frac{dn}{\phi} = 2\pi b db \quad (1.2)$$

est appelé **section efficace** élémentaire et a d'évidence la dimension d'une surface ( $\text{cm}^2$ ).

La **section efficace scalaire** globale s'obtient en intégrant sur toutes les valeurs utiles de  $b$ , c'est-à-dire  $0 \leq b \leq a$  :

$$\sigma = \int_0^a 2\pi b db = 2\pi \left[ \frac{b^2}{2} \right]_0^a = \pi a^2 \quad (1.3)$$

À l'échelle subatomique, cette grandeur scalaire qui représente l'aire de la section droite de la sphère dure considérée,  $\sigma$ , est appelée **section efficace microscopique élastique potentielle**, s'exprimant couramment en  $\text{cm}^2$  par atome  $\equiv \text{cm}^2 \text{ atome}^{-1}$  ou encore en barns par atome  $\equiv \text{barns atome}^{-1}$ , le barn ayant pour symbole «  $b$  » :  $1 b = 10^{-24} \text{ cm}^2$ , dimension typique de l'échelle nucléaire<sup>7</sup>.

### Exemple

La section droite d'un noyau d'uranium 235 vaut :

$$\pi a^2 = \pi r_0^2 A^{\frac{2}{3}} = 3.14 \times (1.35 \cdot 10^{-13})^2 (235)^{\frac{2}{3}} = 2.18 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.18 \text{ barns}$$

<sup>6</sup> Dans le cas de la diffusion d'une particule chargée par un noyau atomique, celle-ci sera déviée par l'existence du champ coulombien avant d'atteindre la surface du noyau cible et sa trajectoire décrira une **hyperbole** (voir R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, pp. 639-652 et figure 8, p. 641) au lieu de se présenter comme une simple réflexion telle que représentée sur la figure 2.

<sup>7</sup> Pour l'origine du choix du mot « barn », « grange », voir : M. G. Holloway and C. P. Baker, *Note on the Origin of the Term "Barn"*, LAMS 523, Sept. 1944, P. W. Frame, *Why Did They Call It That? The Origin of Selected Radiological and Nuclear Terms*, Oak Ridge Associated Universities,

<https://www.ora.iaea.org/ptp/articlesstories/names.htm> ; les granges avaient déjà été « immortalisées » par un tableau de la peintre américaine Georgia O'Keeffe : *The barns, Lake George*, 1926. Alvin M. Weinberg et Eugène P. Wigner, dans leur livre *The physical theory of neutron chain reactors* (The University of Chicago Press, 1958), avait proposé comme unité de section efficace le « **fermi** », de symbole «  $F$  », en hommage à Enrico Fermi (p. 23). Ces auteurs ont utilisé cette dénomination dans leur ouvrage précité. Finalement l'unité « **fermi** » est réservée à la caractéristique de l'échelle subatomique :  $1 \text{ fermi (fm)} = 10^{-13} \text{ cm}$ . Le barn possède des sous multiples comme le **millibarn (mb)** =  $10^{-27} \text{ cm}^2$  et des multiples comme le **kilobarn (kb)** =  $10^{-21} \text{ cm}^2$ .

où  $a = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  est le rayon d'un noyau atomique de nombre de masse  $A$  (voir chapitre 3).

D'après (1.3), la section efficace de diffusion élastique potentielle du neutron sur un noyau d'uranium 235 assimilé à une sphère dure est donc :  $\sigma = 2.18$  barns

### Remarque

On peut de la même manière étudier la diffusion élastique de particules électriquement chargées par des forces coulombiennes, comme l'a fait Rutherford. Dans ce cas, il faut prendre en considération la forme du potentiel coulombien  $U$  de la forme  $U = C/r$ , où  $C$  est une constante et  $r$  la distance de la particule incidente au centre diffuseur. Ce cas sera présenté dans le chapitre consacré à la propagation des particules chargées dans la matière. On peut néanmoins d'ores et déjà noter que la trajectoire de la particule diffusée suit une courbe hyperbolique en coordonnées polaires dont l'origine coïncide avec le centre de masse des particules en interaction. La configuration de la sphère dure correspond à un potentiel  $U = \infty$  au sein de la sphère (elle est impénétrable) et  $U = 0$  à l'extérieur de celle-ci.

## 1.2. Section efficace de diffusion simplement différentielle en angle dans le référentiel du centre de masse

Il est possible d'accéder à une information plus fine sur l'interaction entre une particule et un noyau-cible que celle fournie par la simple donnée de la section efficace  $\sigma$  (relation (1.2)). En reprenant le cas précédent de la diffusion potentielle d'un neutron par un noyau atomique assimilé à une sphère dure (on reste pour le moment dans le cadre de la physique classique), on cherche à déterminer la loi angulaire de cette diffusion d'abord dans le référentiel du centre de masse puis dans le référentiel du laboratoire. Sur la **figure 2**, on remarque que le paramètre d'impact  $b$  est relié à l'angle  $\theta_c$  de déviation du neutron incident dans le référentiel du centre de masse :

$$b = a \sin \eta = a \sin \frac{\pi - \theta_c}{2} = a \cos \frac{\theta_c}{2} \quad (1.4)$$

L'angle de déviation  $\theta_c$  varie de 0 à  $\pi$ .

D'autre part, en repartant de la relation (1.2) on a<sup>8</sup> :

$$d\sigma = 2\pi b db = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta_c} d\theta_c \right| \quad (1.5)$$

Or, avec (1.4) on a :

$$\left| \frac{db}{d\theta_c} \right| = \left| \frac{1}{2} a \sin \frac{\theta_c}{2} \right| \quad (1.6)$$

<sup>8</sup> L'utilisation des valeurs absolues permet de s'affranchir de l'explicitation des signes positifs ou négatifs respectifs des variations élémentaires des différentes variables concernées ainsi que celui de leurs dérivées, sachant que les densités de probabilité sont par définition des grandeurs positives. Lorsqu'il n'y a plus d'ambiguïté, elles ne sont pas utilisées.

D'où en reportant (1.4) et (1.6) dans (1.5) :

$$d\sigma = 2\pi a \cos \frac{\theta_c}{2} \left| \frac{1}{2} a \sin \frac{\theta_c}{2} d\theta_c \right| = \pi a^2 \frac{1}{2} |\sin \theta_c d\theta_c| = \sigma \frac{1}{2} |d(\cos \theta_c)| \quad (1.7)$$

On pose :

$$\mu_c = \cos \theta_c, \quad d\mu_c = d(\cos \theta_c) \quad (1.8)$$

De (1.7) on tire les expressions de la section efficace microscopique de diffusion différentielle en angle respectivement relativement aux variables  $\theta_c$  et  $\mu_c$  :

$$\frac{d\sigma}{d\theta_c} = \sigma \frac{1}{2} \sin \theta_c = \frac{1}{2} \pi a^2 \sin \theta_c \quad (1.9)$$

$$\frac{d\sigma}{d\mu_c} = \sigma \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pi a^2 \quad (1.10)$$

Et les densités de probabilité qui leur sont respectivement associées  $g_c(\theta_c)$  et  $h_c(\mu_c)$  :

$$g_c(\theta_c) = \frac{\frac{d\sigma}{d\theta_c}}{\sigma} = \frac{1}{2} \sin \theta_c \quad (1.11a)$$

$$h_c(\mu_c) = \frac{\frac{d\sigma}{d\mu_c}}{\sigma} = \frac{1}{2} \quad (1.11b)$$

Ces densités spécifient la loi de renvoi angulaire du neutron après diffusion, relativement à l'angle  $\theta_c$  ou bien son cosinus  $\mu_c$ . Dans les formalismes de traitement de l'équation du transport des neutrons (et des photons), on privilégie souvent l'utilisation de la variable  $\mu_c$  à celle de la variable  $\theta_c$  pour des raisons de commodité des calculs.

Cela apparaît immédiatement par exemple sur les relations (1.12) et (1.11) qui montrent que la densité  $h_c(\mu_c)$ , étant constante et valant  $1/2$ , présente une forme mathématique à l'évidence plus simple que la densité  $g_c(\theta_c)$  décrivant exactement le même phénomène de diffusion. La relation biunivoque qui existe entre les deux variables  $\theta_c$  et  $\mu_c = \cos \theta_c$  permet de relier les deux densités par la relation de conservation suivante :

$$|g_c(\theta_c)d\theta_c| = |h_c(\mu_c)d\mu_c| \quad (1.12)$$

On passe donc d'une densité à l'autre par les relations classiques suivantes :

$$h_c(\mu_c) = g_c(\theta_c) \left| \frac{d\theta_c}{d\mu_c} \right| \quad (1.13a)$$



$$g_c(\theta_c) = h_c(\mu_c) \left| \frac{d\mu_c}{d\theta_c} \right| \quad (1.13b)$$

Les grandeurs  $\frac{d\sigma}{d\theta_c}$  (unité :  $\text{cm}^2 \text{ rad}^{-1}$ , barn  $\text{rad}^{-1}$ ) et  $\frac{d\sigma}{d\mu_c}$  (unité :  $\text{cm}^2 \cosinus^{-1}$ , barn  $\cosinus^{-1}$ ) sont les **sections efficaces microscopiques différentielles**, ici de diffusion élastique, respectivement par rapport aux deux variables  $\theta_c$  et  $\mu_c$ .

Les densités  $g_c(\theta_c)$  et  $h_c(\mu_c)$  sont dénommées **anisotropie du choc** ou de la **diffusion**. En l'occurrence, dans le cas traité ici, la diffusion est **isotrope** :  $h_c(\mu_c) = 1/2$  est une densité de probabilité constante.

Les grandeurs moyennes  $\bar{\theta}_c$  et  $\bar{\mu}_c$  sont obtenues respectivement par les expressions :

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_c &= \int_0^\pi \theta_c g_c(\theta_c) d\theta_c = \int_0^\pi \theta_c \frac{1}{2} \sin \theta_c d\theta_c = \frac{1}{2} [-\theta_c \cos \theta_c]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{2} \cos \theta_c d\theta_c \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\bar{\mu}_c = \int_{-1}^{+1} \mu_c h_c(\mu_c) d\mu_c = \left[ \frac{\mu_c^2}{2} \right]_{-1}^{+1} = 0 \quad (1.15)$$

La réciproque n'est pas vraie : le fait que  $\bar{\mu}_c$  soit égal à zéro n'implique pas nécessairement que la diffusion est isotrope.

### 1.3. Section efficace de diffusion doublement différentielle en angle dans le référentiel du centre de masse

Pour caractériser encore plus finement la diffusion angulaire, au lieu de considérer la diffusion sur l'élément de surface  $2\pi \times bdb$ , on en considère seulement une fraction correspondant à une variation élémentaire  $d\varphi_c$  de l'angle  $\varphi_c$  de révolution autour de l'axe  $Ox$  ( $0 \leq \varphi_c \leq 2\pi$ ) :  $d\varphi_c \times bdb$ . Le nombre de particules du faisceau incident,  $d^2n$ , atteignant cet élément de surface est :

$$d^2n = d\varphi_c \times bdb \times \phi \quad (1.16)$$

Le rapport :

$$d^2\sigma = \frac{d^2n}{\phi} = d\varphi_c bdb \quad (1.17)$$

est encore une section efficace élémentaire (plus élémentaire que  $d\sigma$ ) ayant la dimension d'une surface ( $\text{cm}^2$ ).

La section efficace scalaire globale,  $\sigma$ , s'obtient en intégrant sur toutes les valeurs utiles de  $b$ , c'est-à-dire  $0 \leq b \leq a$  et sur la variable angulaire  $\varphi_C$ ,  $0 \leq \varphi_C \leq 2\pi$  :

$$\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi_C \int_0^a b db = 2\pi \left[ \frac{b^2}{2} \right]_0^a = \pi a^2 \quad (1.18)$$

Par ailleurs on peut écrire :

$$d^2\sigma = d\varphi_C \times b db = b \left| \frac{db}{d\theta_C} d\theta_C d\varphi_C \right| \quad (1.19a)$$

$$\begin{aligned} d^2\sigma &= a \cos \frac{\theta_C}{2} \left| \frac{1}{2} a \sin \frac{\theta_C}{2} \right| d\theta_C d\varphi_C \\ &= a^2 \frac{1}{4} |\sin \theta_C d\theta_C d\varphi_C| \\ &= \pi a^2 \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} |\sin \theta_C d\theta_C d\varphi_C| \end{aligned} \quad (1.19b)$$

En utilisant (1.18) on obtient immédiatement :

$$d^2\sigma = \frac{\sigma}{4\pi} |\sin \theta_C d\theta_C d\varphi_C| \quad (1.20)$$

Le terme  $|\sin \theta_C d\theta_C d\varphi_C|$  est l'angle solide élémentaire  $d^2\Omega_C$  défini autour de la direction de diffusion  $\vec{\Omega}_C$  (voir l'annexe I du chapitre 7).

Par suite, à partir de (1.20) on explicite la grandeur :

$$\frac{d^2\sigma}{\sin \theta_C d\theta_C d\varphi_C} = \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega_C} = \frac{\sigma}{4\pi} \quad (1.21)$$

qui représente la **section efficace doublement différentielle en angle** ou **différentielle en angle solide** dans le cas d'une diffusion élastique isotrope dont l'unité est :  $\text{cm}^2\text{sr}^{-1}$ .

### Remarque

En raison de l'isotropie de la diffusion élastique en fonction de l'angle  $\varphi_C$ , on peut également comptabiliser directement les particules diffusées dans l'angle solide élémentaire  $d\Omega_C = 2\pi \sin \theta_C d\theta_C = 2\pi d\mu_C$  compris entre les deux cônes de même sommet d'ouvertures respectives  $\theta_C$  et  $\theta_C + d\theta_C$ . Similairement à (1.19a) et (1.19b) on a alors :

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2\pi \times b db = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta_C} d\theta_C \right| = 2\pi a \cos \frac{\theta_C}{2} \left| \frac{1}{2} a \sin \frac{\theta_C}{2} \right| d\theta_C \\ d\sigma &= 2\pi \times a^2 \frac{1}{4} |\sin \theta_C d\theta_C| = \pi a^2 \frac{1}{4\pi} 2\pi |\sin \theta_C d\theta_C| = \frac{\pi a^2}{4\pi} d\Omega_C = \frac{\sigma}{4\pi} d\Omega_C \end{aligned}$$

Il en découle l'expression de la section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_C} = \frac{\sigma}{4\pi} \quad \text{cm}^2 \text{sr}^{-1}$$

Cette dernière expression est bien équivalente à (1.21).

Dans la littérature la même notation  $d\Omega_C$  est parfois utilisée pour exprimer l'angle solide élémentaire  $\sin \theta_C d\theta_C d\varphi_C$  et l'angle solide élémentaire  $2\pi \sin \theta_C d\theta_C = 2\pi d\mu_C$  compris entre les deux cônes de même sommet d'ouvertures respectives  $\theta_C$  et  $\theta_C + d\theta_C$ .

La relation (1.21) conduit à l'expression de la loi de diffusion angulaire :

$$\frac{\frac{d^2\sigma}{\sin \theta_C d\theta_C d\varphi_C}}{\sigma} = \frac{\frac{d^2\sigma}{d\mu_C d\varphi_C}}{\sigma} = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega_C}}{\sigma} = \frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi} \quad (1.22)$$

où l'explicitation de la factorisation fait de nouveau apparaître la densité de probabilité  $\frac{1}{2}$  relative à la variable  $\mu_C$  et la densité de probabilité relative à la variable  $\varphi_C$ .

### Remarque

$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega_C} = \frac{d^2\sigma}{d\mu_C d\varphi_C}$  et  $\frac{d\sigma}{d\Omega_C}$  avec  $d\Omega_C = 2\pi d\mu_C$  sont deux notations/quantités équivalentes en raison de l'isotropie de la diffusion selon l'angle azimutal  $\varphi_C$  déjà signalée plus haut.

Le membre de droite de la relation (1.22) est le produit de deux lois de diffusion angulaire (densités de probabilité),  $h_C(\mu_C)$  et  $u_C(\varphi_C)$  spécifiant un choc isotrope dans le référentiel du centre de masse :

$$h_C(\mu_C) = \frac{1}{2} \quad (1.23)$$

$$u_C(\varphi_C) = \frac{1}{2\pi} \quad (1.24)$$

On vérifie bien que les densités de probabilité  $h_C(\mu_C)$  et  $u_C(\varphi_C)$  sont normées à l'unité sur leurs supports respectifs :

$$\int_{-1}^{+1} h_C(\mu_C) d\mu_C = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} d\mu_C = 1 \quad (1.25)$$

$$\int_0^{2\pi} u_C(\varphi_C) d\varphi_C = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\varphi_C = 1 \quad (1.26)$$

On considère à présent, dans le référentiel du centre de masse (CM). La **figure 3a** représente de façon un peu différente de la figure 2 la diffusion isotrope d'une particule

légère (un neutron) par un noyau atomique. Les deux angles  $\theta_C$  et  $\varphi_C$  y définissent toujours, dans le référentiel du centre de masse, une direction de diffusion de la particule légère, notée  $\vec{\Omega}_C$  dont le domaine de variation couvre  $4\pi$  stéradians (sr).

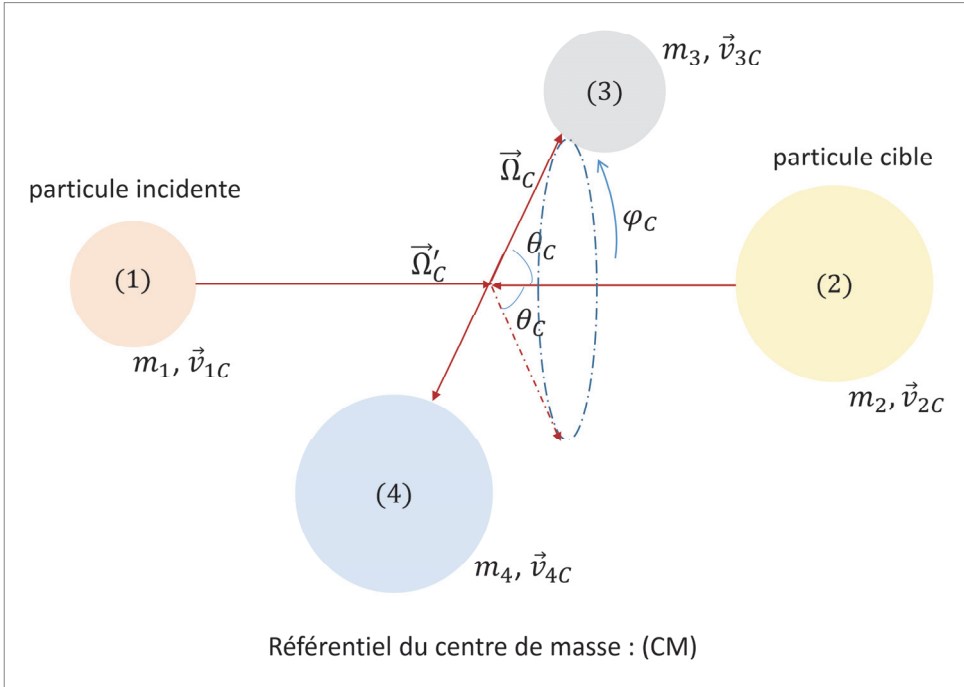


Figure 3a. Collision dans le référentiel du centre de masse (CM) ;  $\theta_C$  est l'angle de déviation de la particule « légère » (3) repéré par rapport à la trajectoire avant collision de la particule (1). L'angle de diffusion de la particule (4) est égal à  $\pi - \theta_C$ .

En résumé, la **section efficace microscopique de diffusion**, ici élastique, **doublement différentielle en angle**  $\frac{d^2\sigma}{d\vec{\Omega}_C} \equiv \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega_C} \equiv \frac{d^2\sigma}{d\mu_C d\varphi_C}$  (unité :  $\text{cm}^2 \text{sr}^{-1}$  ou barn  $\text{sr}^{-1}$ ) est aussi notée en toute généralité  $\sigma(\vec{\Omega}'_C \rightarrow \vec{\Omega}_C)$ . On rappelle que le qualificatif « microscopique » indique que cette grandeur physique est relative à l'occurrence de l'interaction du neutron (de la particule) incident(e) avec un seul noyau atomique cible.

Les relations (1.21) et (1.22) montrent que la section efficace de diffusion différentielle en angle est donc le produit de la section efficace « scalaire »  $\sigma$  (unité :  $\text{cm}^2$ , barn) et d'une **anisotropie**,  $a(\vec{\Omega}'_C \rightarrow \vec{\Omega}_C)$  (unité :  $\text{sr}^{-1}$ ), et que l'on peut écrire formellement dans le cas général comme :

$$\sigma(\vec{\Omega}'_C \rightarrow \vec{\Omega}_C) = \sigma \times a(\vec{\Omega}'_C \rightarrow \vec{\Omega}_C) \quad (1.27)$$

De plus, l'isotropie de la diffusion par rapport à l'angle  $\varphi_C$  est toujours vraie ici en raison de l'isotropie de l'espace. Il s'ensuit que l'anisotropie devient une fonction du produit scalaire  $\vec{\Omega}'_C \cdot \vec{\Omega}_C$  (voir annexe I) :

$$a(\vec{\Omega}'_C \rightarrow \vec{\Omega}_C) = a(\vec{\Omega}'_C \cdot \vec{\Omega}_C) = \frac{1}{2\pi} \times h_C(\mu_C = \vec{\Omega}'_C \cdot \vec{\Omega}_C) \quad (1.28)$$

et la relation (1.27) se réécrit comme :

$$\sigma(\vec{\Omega}'_C \rightarrow \vec{\Omega}_C) = \sigma \times a(\vec{\Omega}'_C \cdot \vec{\Omega}_C) \quad (1.29)$$

#### 1.4. Section efficace de diffusion différentielle en angle dans le référentiel du laboratoire

Restant dans le cas de la **diffusion élastique**, l'obtention de la loi angulaire,  $h_L(\mu_L = \vec{\Omega}'_L \cdot \vec{\Omega}_L)$  dans le référentiel du laboratoire (**figure 3b**) découle de l'égalité :

$$h_L(\mu_L) d\mu_L = h_C(\mu_C) d\mu_C \quad (1.30)$$

que justifie la relation existant entre  $\mu_L$  et  $\mu_C$  (voir équation (4.8) du chapitre 7).

d'où :

$$h_L(\mu_L) = h_C(\mu_C) \frac{d\mu_C}{d\mu_L} \quad (1.31)$$

En remplaçant la dérivée par son expression tirée de l'équation (4.18) du chapitre 7 avec  $\gamma = A$  et  $h_C(\mu_C) = 1/2$  (équation (1.11b)), il vient :

$$h_L(\mu_L) = \frac{1}{2} \frac{[1 + 2A\mu_C + A^2]^{\frac{3}{2}}}{A^2(A + \mu_C)} \quad (1.32)$$

Dans le cas important de la diffusion élastique d'un neutron sur un noyau d'hydrogène ( $^1_1\text{H}$ ), on a  $A \approx 1$  et :

$$h_L(\mu_L) = \frac{1}{2} \frac{[2(1 + \mu_C)]^{\frac{3}{2}}}{(1 + \mu_C)} \quad (1.33)$$

En remarquant d'après l'équation (4.8) du chapitre 7 que :

$$\mu_L(\mu_C) = \mu_L = \frac{1 + A\mu_C}{\sqrt{1 + 2A\mu_C + A^2}} = \frac{\sqrt{1 + \mu_C}}{\sqrt{2}}$$

on en déduit immédiatement avec (1.33) :

$$h_L(\mu_L) = 2\mu_L \quad (1.34)$$

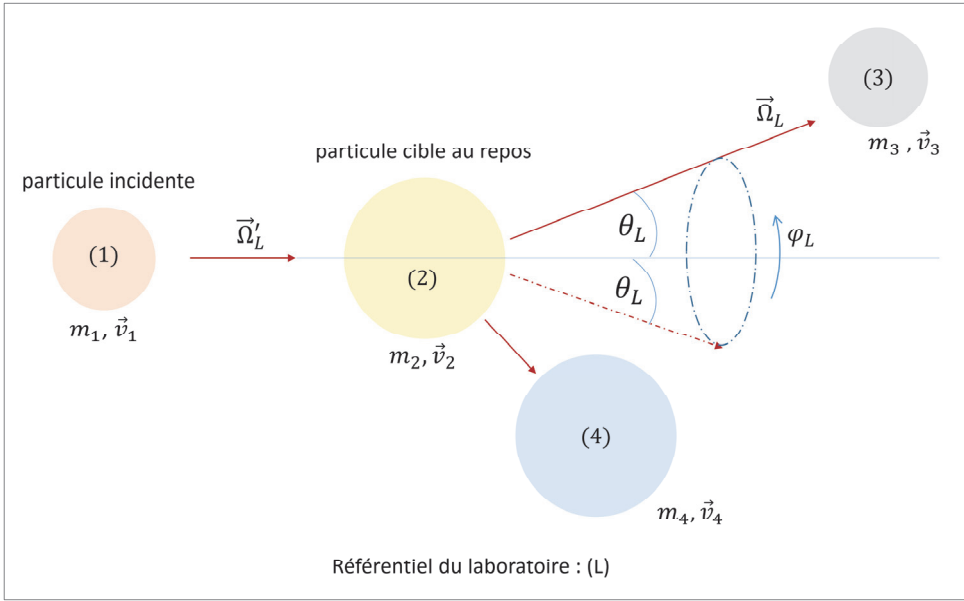


Figure 3b. Collision dans le référentiel du laboratoire (L) ;  $\theta_L$  est l'angle d'émission dans la direction  $\vec{\Omega}_L$  de la particule « légère » (3) repéré par rapport à la direction d'incidence  $\vec{\Omega}_L$  de la particule (1).

La densité  $h_L(\mu_L)$  devant être positive, elle impose  $0 \leq 2\mu_L \leq 1$  et donc  $0 \leq \theta_L \leq \pi/2$ , c'est-à-dire que seule une diffusion du neutron vers l'avant est possible, sa déviation maximale possible étant de  $90^\circ$ . Ainsi, on constate que l'isotropie du choc élastique en hypothèse sphère dure dans le référentiel du centre de masse n'implique nullement l'isotropie du choc dans le référentiel du laboratoire. Toutefois, sur l'expression (1.32) on voit que si  $A \rightarrow \infty$ , alors  $h_L(\mu_L) \rightarrow \frac{1}{2}$  : la diffusion tend vers l'isotropie dans le référentiel du laboratoire.

La loi angulaire exprimée en fonction de l'angle  $\theta_L$  s'écrit :

$$g_L(\theta_L) = h_L(\mu_L) \left| \frac{d\mu_L}{d\theta_L} \right| = 2 \cos \theta_L |\sin \theta_L d\theta_L| = \sin 2\theta_L, \quad 0 \leq \theta_L \leq \pi/2 \quad (1.35)$$

Comme dans le référentiel du centre de masse, on détermine l'angle moyen de déviation du neutron dans le référentiel du laboratoire par l'expression :

$$\bar{\mu}_L = \int_{-1}^{+1} \mu_L h_L(\mu_L) d\mu_L = \int_{-1}^{+1} \mu_L(\mu_C) h_C(\mu_C) d\mu_C \quad (1.36)$$

$$\bar{\mu}_L = \int_{-1}^{+1} \frac{1 + A\mu_C}{\sqrt{1 + 2A\mu_C + A^2}} \frac{1}{2} d\mu_C \quad (1.37)$$

On fait le changement de variables :

$$z^2 = 1 + A^2 + 2A\mu_C$$

d'où :

$$d\mu_C = \frac{1}{A} z dz$$

et :

$$\bar{\mu}_L = \frac{1}{4A} \int_{A-1}^{A+1} (z^2 + 1 - A^2) dz = \frac{2}{3A} \quad (1.38)$$

Ce résultat montre que lorsque A devient grand (cas des noyaux atomiques « lourds ») la diffusion dans le référentiel du laboratoire tend vers l'isotropie :  $\bar{\mu}_L \rightarrow 0$ . On rappelle que dans ce même cas le référentiel du centre de masse tend à se confondre avec le référentiel du laboratoire.

Semblablement à la configuration du référentiel du centre de masse, la **section efficace microscopique de diffusion différentielle en angle** dans le **référentiel du laboratoire** s'écrit formellement :

$$\sigma(\vec{\Omega}'_L \rightarrow \vec{\Omega}_L) = \sigma \times a(\vec{\Omega}'_L, \vec{\Omega}_L) \quad (1.39)$$

avec :

$$a(\vec{\Omega}'_L, \vec{\Omega}_L) = \frac{1}{2\pi} \times h_L(\mu_L = \vec{\Omega}'_L \cdot \vec{\Omega}_L) \quad (1.40)$$

où le facteur  $\frac{1}{2\pi}$  est relatif à l'isotropie selon l'angle  $\varphi_L$  de révolution autour de l'axe de la direction de la particule incidente (voir figure 3b).

### Remarque

Une approche alternative pour définir la section efficace consiste à considérer l'expérience suivante (**figure 4**) dans laquelle un faisceau de particules (d'une énergie  $E$  donnée) est dirigé sur une cible mince, de surface  $S$  et d'épaisseur  $dx$  :

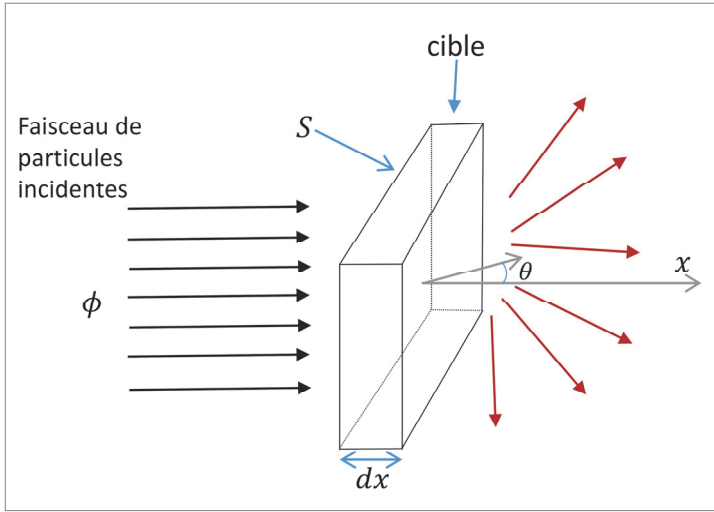


Figure 4. Diffusion des particules traversant une cible mince. Section efficace de diffusion.

Le nombre  $\Delta n$  de particules diffusées (subissant une diffusion), toutes directions et énergies confondues et comptabilisées pour toute la surface  $S$  de la cible mince irradiée par le flux de particules  $\phi$ , est :

$$\Delta n = \sigma N dx \phi S$$

où :

$N$  : nombre de sites diffuseurs (atomes) par unité de volume ( $\text{cm}^{-3}$ ) ;

$dx$  : épaisseur de la cible mince ;

$N dx$  : nombre de sites diffuseurs (atomes) par unité de surface de cible ;

$\phi$  : flux de particules incidentes, particules  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  (part.  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ).

Cette relation exprime que le nombre de particules diffusées est proportionnel au flux  $\phi$  de particules incidentes, au nombre  $N dx$  de noyaux cibles présents sur la trajectoire d'une particule incidente et à la surface  $S$  de la cible :

$$\frac{\frac{dn(\text{s}^{-1})}{\phi(\text{part. cm}^{-2} \text{s}^{-1})S(\text{cm}^2)}}{N dx(\text{atomes cm}^{-3} \times \text{cm})} = \frac{\frac{dn(\text{s}^{-1})}{\phi(\text{part. cm}^{-2} \text{s}^{-1})S(\text{cm}^2)}}{N dx(\text{atomes. cm}^{-2})} = \frac{\Delta n}{\phi S} \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{atome}} \right) \equiv \sigma \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{atome}} \right) \quad (1.41)$$

Cette relation montre que  $\sigma$  a la dimension d'une surface et que le produit  $\sigma \times 1$  particule incidente par  $\text{cm}^2$  et par seconde représente la probabilité d'interaction par seconde dans une cible mince contenant 1 atome par  $\text{cm}^2$  de cible.

On peut aisément particulariser le raisonnement précédent au nombre de particules  $dn$  diffusées dans l'angle solide  $d\Omega$  élémentaire correspondant au cône élémentaire d'ouverture  $d\theta$  autour de l'angle  $\theta$ . Dans ce cas, on a :

$$\Delta n = \sigma(\theta) N dx \phi S d\Omega \quad (1.42a)$$

Cette relation exprime que le nombre de particules diffusées est proportionnel au flux  $\phi$  de particules incidentes, au nombre  $N dx$  de noyaux cibles présents par  $\text{cm}^2$  sur la trajectoire d'une particule



incidente, à la surface  $S$  de la cible, et à l'angle solide élémentaire dans lequel on comptabilise les particules diffusées. De la relation (1.42a) on tire :

$$\sigma(\theta)d\Omega = \frac{\Delta n}{Ndx\phi S} \quad (1.42b)$$

La quantité notée  $d\sigma = \sigma(\theta)d\Omega$  représente le nombre total de particules diffusées (toutes énergies confondues) dans l'angle solide  $d\Omega$  autour de la direction  $\theta$  (cône élémentaire d'ouverture  $d\theta$  autour de l'angle  $\theta$ ) par unité de flux incident et par noyau-diffuseur par unité de surface de cible.

De même que précédemment, la **section efficace microscopique de diffusion différentielle en angle** est définie par  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta)$  qui représente donc le nombre de particules diffusées par unité d'angle solide. L'unité de  $\sigma(\theta)$  est le  $\text{cm}^2 \text{sr}^{-1}$  ou le  $\text{cm}^2 \text{sr}^{-1}$ . La définition (1.42) permet de retrouver la **section efficace de Rutherford** (équations (1.2) ou (1.5) du chapitre 2).

Ce qui précède fait donc apparaître la section efficace comme une propriété de nature probabiliste liant la particule incidente et le noyau atomique cible.

### 1.5. Section efficace différentielle en énergie – Loi de transfert énergétique dans le référentiel du laboratoire

On peut également opérer une comptabilité des particules diffusées en fonction de leur énergie, aboutissant alors à la définition de la **section efficace microscopique de diffusion différentielle en énergie**.

On se place dans le cas de la **diffusion élastique** (potentielle<sup>9</sup>) telle que décrite précédemment. Pour une raison de commodité d'écriture l'indice « prime » est ici affecté aux caractéristiques du neutron après choc (contrairement au paragraphe précédent) : dans le référentiel du laboratoire, son énergie initiale est notée  $E$  et son énergie finale après choc  $E'$ . De même, dans le référentiel du centre de masse (CM) sa direction initiale est notée  $\vec{\Omega}_C$  et sa direction finale après choc  $\vec{\Omega}'_C$ , et l'on pose toujours  $\mu_C = \vec{\Omega}'_C \cdot \vec{\Omega}_C$  (Ces mêmes conventions de notation sont adoptées dans les annexes II et III). Dans ces conditions, la section efficace microscopique différentielle en énergie s'écrit formellement comme :

$$d\sigma = \sigma(E \rightarrow E')dE' = \sigma(E)h_E(E \rightarrow E')dE' \quad (1.43)$$

où  $\sigma(E)$  est la section efficace microscopique (scalaire) de diffusion élastique (potentielle ici) d'un neutron incident d'énergie  $E$  sur un noyau atomique-cible de masse  $A$ , et  $h_E(E \rightarrow E')$  est la densité de probabilité de transfert énergétique du neutron, de son énergie avant collision,  $E$ , à l'énergie  $E'$  après collision. Sur le plan mathématique, il faut souligner que  $\sigma(E)$  est une **fonction** de l'énergie  $E$  du neutron incident et que  $h_E(E \rightarrow E')$  est une **densité de probabilité** par rapport à l'énergie  $E'$  du neutron diffusé. On a vu qu'il existe une relation univoque entre le cosinus de l'angle de déviation du neutron dans le référentiel du

<sup>9</sup> On a vu dans le chapitre 6 (figure 3) qu'il existe un autre type de diffusion élastique, la diffusion élastique résonnante, qui sera décrit en particulier dans les paragraphes 5 et 6.

centre de masse et son énergie après diffusion dans le référentiel du laboratoire (voir chapitre 7, équation (4.4)) :

$$E' = E \frac{1 + 2A\mu_C + A^2}{(1 + A)^2} \quad (1.44)$$

En conséquence :

$$|h_E(E \rightarrow E')dE'| = |h_C(\mu_C)d\mu_C| \quad (1.45)$$

$$h_E(E \rightarrow E') = h_C(\mu_C) \left| \frac{d\mu_C}{dE'} \right| \quad (1.46)$$

En différentiant l'expression (1.44) reliant  $E'$  et  $\mu_C$ , on obtient :

$$\frac{d\mu_C}{dE'} = \frac{(1 + A)^2}{2AE} \quad (1.47)$$

d'où :

$$h_E(E \rightarrow E') = h_C(\mu_C) \frac{(1 + A)^2}{2AE} \quad (1.48)$$

La diffusion considérée ici étant isotrope dans le centre de masse,  $h_C(\mu_C) = \frac{1}{2}$  et donc :

$$h_E(E \rightarrow E') = \frac{(1 + A)^2}{4AE} = \frac{1}{(1 - \alpha)E}, \alpha = \left( \frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 \quad (1.49)$$

On constate que dans ce cas particulier la densité de probabilité ou loi de transfert énergétique  $h_E(E \rightarrow E')$  est indépendante de  $E'$ . À  $E$  fixée  $h_E(E \rightarrow E')$  est constante.

La section efficace microscopique de diffusion élastique potentielle différentielle en énergie s'écrit alors :

$$\frac{d\sigma}{dE'} = \sigma(E)h_E(E \rightarrow E') = \pi a^2 \frac{(1 + A)^2}{4AE} \quad (1.50)$$

puisque la section efficace de diffusion élastique potentielle « classique » précédemment déterminée est une constante :  $\sigma(E) = \sigma = \pi a^2$  (voir équation (1.3)).

## 1.6. La fraction d'énergie perdue par choc

Pour des raisons pratiques, il est utile de particulariser la fraction d'énergie perdue,  $\zeta$ , par un neutron au cours d'un choc élastique du neutron :

$$\zeta = \frac{E - E'}{E} = 1 - \frac{E'}{E} \quad (1.51)$$

La densité de probabilité  $h_E(E, \zeta)$  associée se déduit de la relation :

$$|h_\zeta(E, \zeta)d\zeta| = |h_E(E \rightarrow E')dE'| \quad (1.52)$$

d'où :

$$h_\zeta(E, \zeta) = h_E(E \rightarrow E') \left| \frac{dE'}{d\zeta} \right| = h_E(E \rightarrow E')E$$

En remplaçant  $h_E(E \rightarrow E')$  par son expression, on a :

$$h_\zeta(E, \zeta) = \frac{(1+A)^2}{4AE} E = \frac{(1+A)^2}{4A} \quad (1.53)$$

qui est donc constante dans le cas d'un choc isotrope.

Le domaine de variation de l'énergie  $E'$  après collision est (voir chapitre 7 § 4 relations (4.6a) et (4.6b)) :

$$E'_{min} \leq E' \leq E'_{max} \Leftrightarrow \alpha E \leq E' \leq E \quad (1.54)$$

avec  $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 E$ .

Alors le domaine correspondant pour la fraction d'énergie perdue  $\zeta$  au cours d'un choc est :

$$\zeta_{min} \leq \zeta \leq \zeta_{max} \Leftrightarrow 0 \leq \zeta \leq \frac{4A}{(1+A)^2} \quad (1.55)$$

puisque avec (1.51) :  $\zeta_{max} = 1 - \frac{E'_{min}}{E} = 1 - \frac{\alpha E}{E} = 1 - \alpha = 1 - \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2 = \frac{4A}{(1+A)^2}$ .

Dans le cas du choc d'un neutron sur un noyau d'hydrogène (cas  $A \approx 1$ ), on a alors :

$$\zeta_{min} = 0 \leq \zeta \leq \zeta_{max} = 1 \text{ et } h_\zeta(E, \zeta) = 1. \quad (1.56)$$

### 1.7. Introduction de la variable « léthargie »

En neutronique, la variable adimensionnelle dénommée **léthargie** et notée  $u$  est souvent utilisée lorsque l'on étudie le **ralentissement des neutrons** dans un milieu donné. Elle est définie par la relation :

$$u = \ln \frac{E_0}{E} \quad (1.57)$$

où  $E_0$  est une énergie arbitraire d'une valeur suffisamment élevée pour que  $u$  soit toujours positive. On constate que la léthargie a un sens de variation opposé à celui de l'énergie : elle augmente lorsque l'énergie diminue et *vice versa*.

À la **perte d'énergie**  $E - E'$  correspond par conséquent un **gain de léthargie** donné par :

$$u' - u = \ln \frac{E_0}{E'} - \ln \frac{E_0}{E} = \ln \frac{E}{E'} \quad (1.58)$$

Au changement de léthargie  $u \rightarrow u'$  dans un choc élastique isotrope on associe une densité de probabilité  $h_u(u \rightarrow u')$  que l'on explicite *via* la relation :

$$|h_u(u \rightarrow u') du'| = |h_E(E \rightarrow E') dE'| \quad (1.59)$$

$$h_u(u \rightarrow u') = h_E(E \rightarrow E') \left| \frac{dE'}{du'} \right| \quad (1.60)$$

En remarquant que :

$$du' = \frac{dE'}{E'} \quad (1.61)$$

et en remplaçant la densité  $h_E(E \rightarrow E')$  par son expression dans laquelle les énergies sont exprimées en fonction de la variable léthargie, on obtient :

$$h_u(u \rightarrow u') = \frac{e^{-(u'-u)}}{1 - \alpha} \quad (1.62)$$

où le paramètre  $\alpha$  a été défini en (1.49) ainsi qu'au chapitre 7 § 4, relation (4.6c).

Si l'on introduit la perte de léthargie par choc  $w = u' - u$ , alors :

$$0 \leq w \leq \varepsilon = \ln \frac{1}{\alpha} \quad (1.63)$$

Comme  $dw = du'$  (la léthargie  $u$  de départ étant fixée), la densité de probabilité associée  $h_w(w)$  s'écrit :

$$h_w(w) = \frac{e^{-w}}{1 - \alpha} \quad (1.64)$$

La grandeur  $\varepsilon$  définie par (1.63) représente le **gain maximal de léthargie par choc** et l'on voit que  $\varepsilon$  devient infini dans le cas d'un choc d'un neutron sur l'hydrogène ( $A = 1$ ), signifiant que le neutron incident peut, au cours d'une collision, céder au noyau cible la totalité de son énergie cinétique (voir relation (1.56)). On définit également le **gain moyen de léthargie** par choc :

$$\xi = \int_0^\infty w h_w(w) dw = \int_0^\infty w \frac{e^{-w}}{1-\alpha} dw = 1 - \frac{\alpha \varepsilon}{1-\alpha}$$

(1.65)

On constate immédiatement que  $\xi = 1$  dans le cas du choc élastique du neutron sur l'hydrogène pour lequel  $\alpha = 0$ . Toujours dans l'hypothèse d'un choc isotrope  $\xi \approx A/2$  pour A grand (cas des noyaux atomiques « lourds »). À partir du gain moyen de léthargie par choc on calcule par exemple le nombre moyen de collisions élastiques  $N_c$  nécessaires pour un neutron émis par fission à une énergie donnée  $E_f$  pour la dégrader jusque dans le domaine d'énergie thermique à l'énergie  $E_{th}$  :

$$N_c = \frac{\text{intervalle de léthargie total}}{\text{gain moyen de léthargie par choc}} = \frac{\ln \frac{E_0}{E_{th}} - \ln \frac{E_0}{E_f}}{\xi} = \frac{\ln \frac{E_f}{E_{th}}}{\xi}$$

(1.66)

Le **tableau 1** ci-dessous fournit les valeurs de  $N_c$  pour différents noyaux avec  $E_f = 2 \cdot 10^6$  eV (2 MeV) et  $E_{th} = 0.025$  eV.

Tableau 1. Quelques ordres de grandeur de caractéristiques associées au choc élastique d'un neutron avec des noyaux atomiques de masses différentes.

Grandeur physique		Expression	Forme approchée pour A grand	H1 A = 1	D (H2) A = 2	C12 A = 12	O16 A = 16	Fe56 A = 56	U235 A = 235
Pas d'hypothèses	Rapport minimum énergies après et avant choc élastique	$\alpha = \left[ \frac{A-1}{A+1} \right]^2$	$\alpha = 1 - \frac{4}{A}$	0	0.111	0.716	0.779	0.931	0.983
	Gain maximal de léthargie par choc	$\varepsilon = \ln \frac{1}{\alpha}$	$\frac{4}{A}$	$\infty$	2.198	0.334	0.249	$7.15 \cdot 10^{-2}$	$1.71 \cdot 10^{-2}$
Choc élastique supposé isotrope	Gain moyen de léthargie par choc	$\xi = 1 - \frac{\alpha \varepsilon}{1-\alpha}$	$\xi = \frac{2}{A + \frac{2}{3}}$	1	0.725	0.158	0.122	$3.53 \cdot 10^{-2}$	$1.12 \cdot 10^{-2}$
	Cosinus moyen de déviation dans le référentiel du laboratoire	$\bar{\mu}_L = \frac{2}{3A}$	—	0.667	0.333	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$4.17 \cdot 10^{-2}$	$1.19 \cdot 10^{-2}$	$1.83 \cdot 10^{-3}$
	Nombre moyen de chocs élastiques passage de 2 MeV à 0.025 eV	$N_c = \frac{\ln \frac{E_f}{E_{th}}}{\xi}$	$N_c = \frac{18.2}{\xi}$	18	25	115	149	515	994

### Remarque

Dans le domaine des énergies thermiques le neutron peut aussi acquérir de l'énergie cinétique par collision avec un noyau atomique du milieu où il se propage (voir chapitre 10) et dans ce cas au gain d'énergie cinétique correspond une perte de léthargie.

L'annexe II explicite la détermination des énergies moyennes après collision du neutron diffusé et du noyau atomique de recul. L'annexe III traite le choc linéairement anisotrope.

## 2. Approche ondulatoire

Les mesures de sections efficaces de diffusion montrent que celles-ci ne prennent pas toujours la valeur prédite par l'approche purement géométrique. Ainsi, la section efficace de diffusion élastique d'un neutron par un noyau d'hydrogène est de 40 barns, à comparer au 0.045 barn de la section efficace géométrique ; de même la distribution angulaire de la diffusion d'un neutron sur un noyau atomique de nombre de masse  $A$  n'est pas isotrope à des énergies élevées ( $> 1$  MeV par exemple). Cela provient du fait qu'aux échelles atomique et subatomique interviennent des phénomènes de nature quantique aux effets déterminants sur les caractéristiques de la diffusion.

On considère la configuration de la **diffusion élastique d'un neutron par le potentiel nucléaire central**,  $U(\vec{r})$  où  $\vec{r}$  est un point de l'espace.  $U(\vec{r})$  est supposé à symétrie sphérique par souci de simplicité ce qui permet de l'écrire  $U(r)$  avec  $r = \|\vec{r}\|$ , distance du point  $\vec{r}$  considéré de l'espace au point d'origine du potentiel. Avant l'interaction et après l'interaction à des distances grandes devant le rayon d'action de la force nucléaire, le neutron évolue comme une particule « libre ».

On écarte toute autre réaction que la diffusion élastique et on fait abstraction de la variable temps, qui ici n'a pas lieu d'intervenir explicitement. Autrement dit, l'état interne du noyau atomique cible est supposé ne pas être modifié.

On rappelle que dans une approche ondulatoire (voir chapitre 4, annexe II), une particule de masse  $m$ , de vitesse  $v$  et donc de quantité de mouvement  $p = mv$  est représentée par une onde – **onde de matière de de Broglie** – caractérisée par une longueur d'onde  $\lambda$  définie comme le rapport  $h/p$  ( $h$  : constante de Planck) et par conséquent par un **nombre d'onde**  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} \quad (2.1)$$

Il est courant d'utiliser la grandeur  $\tilde{\lambda}$ , **longueur d'onde rationalisée de de Broglie** ou **longueur d'onde réduite**, définie comme :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{mv} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \quad (2.2)$$

Les **tableaux 2, 3 et 4** fournissent les données et les ordres de grandeur des paramètres corpusculaires et ondulatoires correspondants pour un neutron de masse notée  $m_n$ .

L'équation de Schrödinger mobilisée dans le chapitre 4 pour accéder aux propriétés d'un nucléon au sein du noyau atomique s'applique également à un système des deux particules initiales qui interagissent. Il s'agit donc de la résoudre afin de déterminer les sections efficaces de diffusion différentielles angulaires pour un neutron donnant lieu à une diffusion élastique avec un noyau atomique cible.

Ce système à deux corps (ou particules), de masses respectives  $m_1$  (particule légère, le neutron ici) et  $m_2$  (la particule cible, le noyau atomique ici), est caractérisé par une fonction d'onde notée  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  où  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont leurs positions dans le référentiel du laboratoire.

On montre qu'il est possible de remplacer la résolution de l'équation de Schrödinger à  $2 \times 3 = 6$  variables d'espace par la résolution plus simple de deux équations de Schrödinger à trois dimensions découplées, l'une associée au **centre de masse** de masse  $m_R = m_1 + m_2$  et l'autre à la **particule relative** de masse réduite  $\mu_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (voir chapitre 7 § 2.2)<sup>10</sup>.

Tableau 2. Paramètres physiques corpusculaires et ondulatoires associés relatifs au neutron.

Paramètres corpusculaires	Paramètres ondulatoires	Relations	
énergie cinétique : $E$	fréquence : $\nu$ pulsation : $\omega$	$\nu = \sqrt{2E/m_n} / 2\pi\nu$ , $\omega =$	$E = h\nu$ $= \hbar\omega$
quantité de mouvement $\vec{p}, p = \ \vec{p}\ $	Vecteur d'onde : $\vec{k}$ Nombre d'onde : $k = \ \vec{k}\ $	$p = m_n v = \sqrt{2m_n E}$	$\vec{p} = \hbar \vec{k}$ , $p = \hbar k$
Quelques-unes des constantes physiques utilisées			
Unités : 1 eV = 1.602 10 <sup>-19</sup> J (joules) ; 1 Å = 10 <sup>-10</sup> m = 10 <sup>-10</sup> cm Masse du neutron : $m_n = 1.675 \cdot 10^{-27}$ kg Constante de Planck : $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J.s ou J. par hertz Constante rationalisée de de Broglie : $\hbar = h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34}$ J.s ou J. par hertz Constante de Boltzmann : $k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23}$ J K <sup>-1</sup> (joules par kelvin) $\equiv 1.3807 \cdot 10^{-23} / 1.602 \cdot 10^{-19} = 8.618 \cdot 10^{-5}$ eV K <sup>-1</sup>			

<sup>10</sup> On note que si  $m_2 \gg m_1$ , alors  $\mu_r \approx m_1$  ; dans la pratique cette approximation se rencontre lorsque l'on étudie l'interaction d'un neutron avec un noyau atomique de masse conséquente, conduisant dans certains cas à assimiler l'énergie cinétique de la particule relative à celle du neutron.

Tableau 3. Domaines d'énergie et grandeurs caractéristiques associées. Les valeurs affichées ont été obtenues à partir des données du tableau 2.

Domaine d'énergie meV, eV	Vitesse $v$ $\text{m s}^{-1}$	Température $T$ K	Nombre d'onde $k$ $\text{\AA}^{-1}$	Pulsation $\omega$ $\text{rad s}^{-1}$	Longueur d'onde $\lambda$ $\text{\AA}$
$< 5.10^{-4}$ meV : neutrons ultrafroids	$< 9.77$	$< 5.8 \cdot 10^{-4}$	$< 1.55 \cdot 10^{-2}$	$< 7.6 \cdot 10^8$	$> 404$
$5.10^{-4}$ meV – $5.10^{-3}$ meV : neutrons très froids	9.77 30.93	$5.8 \cdot 10^{-3}$ $5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$ $4.91 \cdot 10^{-2}$	$7.6 \cdot 10^8$ $7.6 \cdot 10^9$	404 128
$5.10^{-3}$ meV – 5 meV : neutrons froids	30.93 978	$5.8 \cdot 10^{-3}$ 58.	$4.91 \cdot 10^{-2}$ 1.55	$7.6 \cdot 10^9$ $7.6 \cdot 10^{12}$	128 4.04
5 meV – 1 eV : neutrons thermiques	978 $1.38 \cdot 10^4$	58. $1.16 \cdot 10^4$	1.55 21.94	$7.6 \cdot 10^{12}$ $1.52 \cdot 10^{15}$	4.04 0.29
1 eV – $2 \cdot 10^7$ eV : domaines épithermique et rapide	$1.38 \cdot 10^4$ $6.18 \cdot 10^7$	$1.16 \cdot 10^4$ $2.32 \cdot 10^{11}$	21.94 $9.81 \cdot 10^4$	$1.52 \cdot 10^{15}$ $3.04 \cdot 10^{22}$	0.29 $6.4 \cdot 10^{-5}$

Tableau 4. Valeurs des paramètres physiques corpusculaires et ondulatoires associés relatifs à différentes énergies de neutron ; elles ont été déterminées à l'aide des données du tableau 2.

$E = 1 \text{ meV}$	$1.602 \cdot 10^{-22} \text{ J}$	$E = 0.01 \text{ eV}$	$1.602 \cdot 10^{-21} \text{ J}$
$T = E/k_B \propto E$	11.605 K	$T = E/k_B$	$1.1605 \cdot 10^2 \text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$437.36 \text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$1.383 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.326 \cdot 10^{-25} \text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$2.317 \cdot 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$0.694 \text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$2.194 \text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05 \text{ \AA}$	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$2.86 \text{ \AA}$

$E = 0.0253 \text{ eV}$ $= 25.3 \text{ meV}$ Énergie correspondant à la vitesse la plus probable ( $2200 \text{ m s}^{-1}$ ) de la distribution maxwelienne des vitesses des neutrons à la température ambiante ( $\sim 20^\circ\text{C}$ )	$4.053 \cdot 10^{-21} \text{ J}$
$T = E/k_B$	293.6 K
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$2200 \text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$3.684 \cdot 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$6.12 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$3.84 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$3.49 \text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$1.8 \text{ \AA}$

$E = 0.1 \text{ eV}$	$1.602 \cdot 10^{-20} \text{ J}$
$T = E/k_B$	$1.1605 \cdot 10^3 \text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$4.373 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.327 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$6.938 \text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05 \cdot 10^{-1} \text{ \AA}$



Tableau 4. (suite et fin)

$E = 1\text{ eV}$	$1.602\ 10^{-19}\text{ J}$	$E = 10\text{ eV}$	$1.602\ 10^{-18}\text{ J}$
$T = E/k_B \propto E$	$1.1605\ 10^4\text{ K}$	$T = E/k_B$	$1.1605\ 10^5\text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$1.383\ 10^4\text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$4.373\ 10^4\text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$2.317\ 10^{-23}\text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.327\ 10^{-23}\text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{14}\text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{15}\text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{15}\text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{16}\text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$21.94\text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$69.38\text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$0.29\text{ \AA}$	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05\ 10^{-2}\text{ \AA}$

$E = 100\text{ eV}$	$1.602\ 10^{-22}\text{ J}$	$E = 1\text{ keV}$	$4.053\ 10^{-21}\text{ J}$
$T = E/k_B \propto E$	$1.1605\ 10^6\text{ K}$	$T = E/k_B$	$1.1605\ 10^7\text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$1.383\ 10^5\text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$4.373\ 10^5\text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$2.317\ 10^{-22}\text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.327\ 10^{-22}\text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{16}\text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{17}\text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{17}\text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{18}\text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$2.194\ 10^2\text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$6.94\ 10^2\text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$2.9\ 10^{-2}\text{ \AA}$	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05\ 10^{-3}\text{ \AA}$

$E = 10\text{ keV}$	$1.602\ 10^{-22}\text{ J}$	$E = 100\text{ keV}$	$4.053\ 10^{-21}\text{ J}$
$T = E/k_B \propto E$	$1.1605\ 10^8\text{ K}$	$T = E/k_B$	$1.1605\ 10^9\text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$1.383\ 10^6\text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$4.373\ 10^6\text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$2.317\ 10^{-21}\text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.327\ 10^{-21}\text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{18}\text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{19}\text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{19}\text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{20}\text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$2.194\ 10^3\text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$6.94\ 10^3\text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$2.9\ 10^{-3}\text{ \AA}$	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05\ 10^{-4}\text{ \AA}$

$E = 1\text{ MeV}$	$1.602\ 10^{-22}\text{ J}$	$E = 10\text{ MeV}$	$4.053\ 10^{-21}\text{ J}$
$T = E/k_B \propto E$	$1.1605\ 10^{10}\text{ K}$	$T = E/k_B$	$1.1605\ 10^{11}\text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$1.383\ 10^6\text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$4.373\ 10^7\text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$2.317\ 10^{-20}\text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.327\ 10^{-20}\text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{20}\text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42\ 10^{21}\text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{21}\text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52\ 10^{22}\text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$2.194\ 10^4\text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$6.94\ 10^4\text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$2.9\ 10^{-4}\text{ \AA}$	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05\ 10^{-5}\text{ \AA}$

Les **fonctions d'onde** associées respectivement au **centre de masse** et à la **particule relative** sont notées  $\psi_R(\vec{R})$  et  $\psi_r(\vec{r})$  où  $\vec{R}$  est la position du centre de masse du système physique formé par les particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  dans le référentiel du laboratoire, et  $\vec{r}$  la position de la particule relative dans ce même référentiel du laboratoire. On rappelle que le cadre de la mécanique quantique préserve les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique de la mécanique classique.

Avec une forme du potentiel,  $U(\vec{r}) \equiv U(r)$ , ne dépendant que de la distance relative  $r$  entre le neutron et le noyau atomique cible, on recherche des solutions de l'équation de Schrödinger sous la forme factorisée  $\psi(\vec{R}, \vec{r}) = \psi_R(\vec{R}) \psi_r(\vec{r})$ . On obtient les deux équations suivantes (voir annexe VII)<sup>11</sup> :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_R} \Delta \psi_R(\vec{R}) = E_R \psi_R(\vec{R}) \quad (2.3)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \Delta \psi_r(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi_r(\vec{r}) = E_r \psi_r(\vec{r}) \quad (2.4)$$

La première, indépendante du potentiel  $U(r)$ , conduit à la solution :

$$\psi_R(\vec{R}) = e^{i\vec{K}_R \cdot \vec{R}} \quad (2.5)$$

où  $\vec{K}_R$  est le vecteur d'onde associé au mouvement du centre de masse :

$$|\vec{K}_R| = K_R = \frac{p_R}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m_R E_R}}{\hbar} \quad (2.6)$$

$E_R$  étant l'énergie cinétique du centre de masse. La relation (2.3) correspond à un mouvement de translation uniforme du centre de masse.

La seconde relation (2.4) fait intervenir le **potentiel nucléaire**  $U(\vec{r})$  dont l'action sur la particule incidente engendre sa déviation angulaire. Elle porte donc l'information recherchée. Sa résolution permet ainsi de déterminer la section efficace microscopique de diffusion différentielle en angle dans le référentiel du centre de masse, puis, le cas échéant, à l'aide des formules de passage d'un référentiel à l'autre, son expression en fonction de l'angle de déviation dans le référentiel du laboratoire.

Il est possible, d'abord par une approche qualitative, de décrire la forme générale asymptotique de l'onde associée au neutron avant et après diffusion, « loin » du noyau atomique-cible diffuseur et de préciser la définition de la section efficace de diffusion dans le cadre de la mécanique ondulatoire. Puis, la résolution de l'équation de Schrödinger en fournira l'expression mathématique précise.

<sup>11</sup> Voir aussi : L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, Hermann, Paris, 1975, pp. 532-534.

Avant collision, la **particule relative** d'énergie cinétique  $E_r$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , se déplaçant librement suivant l'axe Oz, est représentée par une fonction d'onde plane  $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ikr \cos \theta} = e^{ik.z}$  avec<sup>12</sup> :

$$|\vec{k}| = k = \frac{p_r}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu_r E_r}}{\hbar} \tag{2.7}$$

Le potentiel nucléaire central étant à symétrie sphérique, l'amplitude de l'onde associée au neutron diffusé doit comporter un terme reflétant cette propriété, de la forme  $\frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{r}$  où  $r$  est la distance séparant le noyau atomique-cible diffuseur pris comme origine des **coordonnées sphériques** (voir annexe I du chapitre 7) adoptées et le lieu où se trouve le neutron diffusé (voir **figure 5**). *A priori*, le phénomène d'interaction du neutron avec le potentiel nucléaire ne produit pas nécessairement une diffusion isotrope. Il convient donc d'introduire une grandeur angulaire  $f(\theta, \varphi)$  rendant compte de la distribution angulaire du neutron diffusé en fonction des angles  $\theta$  et  $\varphi$  qui définissent une direction de déviation donnée.

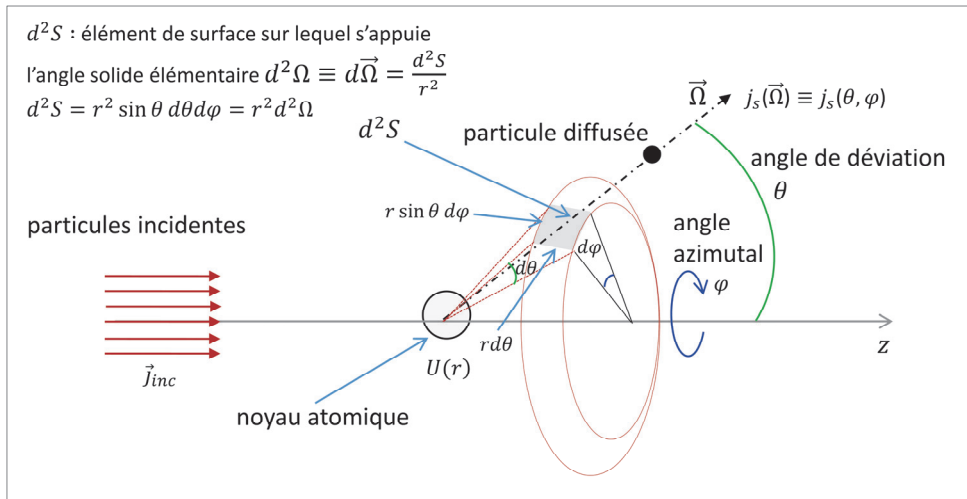


Figure 5. Diffusion d'une particule par champ de potentiel central  $U(r)$ . Approche ondulatoire du concept de section efficace.<sup>13</sup>

**Remarque**

La **longueur d'onde rationalisée de de Broglie**,  $\tilde{\lambda}$ , de la particule relative s'écrit :

<sup>12</sup> Dans la suite, afin d'alléger les notations, on a omis d'affecter l'indice  $r$  au vecteur d'onde  $\vec{k}$ , au nombre d'onde  $k$  ainsi qu'aux longueurs d'onde associées  $\lambda$  et  $\tilde{\lambda}$ .

<sup>13</sup> D'après P. Fröbrich, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, Clarendon Press, Oxford, 1996, p. 7.

$$\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{p_r} = \frac{\hbar}{\mu_r v} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_r E_r}} \quad (2.8)$$

En rapportant les masses des particules en jeu à celles du neutron, on a les relations suivantes (voir chapitre 7) :

$$E_r = E \frac{A}{A+1}, \quad \mu_r = \frac{A}{A+1} m_n \quad (2.9)$$

où  $E$  est l'énergie du neutron dans le référentiel du laboratoire.

En conséquence :

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu_r E_r}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n E}} \frac{A+1}{A} \quad (2.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{\sqrt{2m_n}} \frac{1}{\sqrt{E}} &= \frac{hc}{2\pi\sqrt{2m_n c^2}} \frac{1}{\sqrt{E}} \\ &= \frac{4.135667 \cdot 10^{-15} (\text{eV s}) \times 1.602 \cdot 10^{-19} (\text{J}) \times 2.9979 \cdot 10^{10} (\text{cm s}^{-1})}{2 \times 3.14159 \times \sqrt{2 \times 939.5653 \cdot 10^6 (\text{eV}) \times 1.602 \cdot 10^{-19} (\text{J})}} \frac{1}{\sqrt{E (\text{eV}) \times 1.602 \cdot 10^{-19} (\text{J})}} \end{aligned}$$

d'où :

$$\lambda = \frac{455.2 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{E (\text{eV})}} \frac{A+1}{A} (\text{cm}) \quad ; \quad k = \frac{\sqrt{E (\text{eV})}}{455.2} 10^{12} \frac{A}{A+1} (\text{cm}^{-1}) \quad (2.11)$$

## 2.1. Forme de la fonction d'onde diffusée

En vertu de ce qui précède, la fonction d'onde plane associée à la particule relative incidente est :

$$\psi_{inc}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (2.12)$$

La fonction d'onde **totale sortante** après diffusion possède **deux composantes**, une composante **onde plane** issue de l'onde plane incidente et une **composante diffusée**<sup>14 15 16</sup> à proprement parler :

$$\psi_{sor}(\vec{r}) = \psi_{sor}(r, \theta, \varphi) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.13)$$

<sup>14</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, pp. 686-694.

<sup>15</sup> P. Fröbrich, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, op. cit., pp. 3-16.

<sup>16</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2007, pp. 457-487.

où :

- $e^{ikr}/r$  représente le comportement radial de l'onde diffusée ;
- $f(\theta, \varphi)$  caractérise la distribution angulaire de l'onde diffusée.

Le module au carré de son amplitude,  $|\psi_{inc}(\vec{r})|^2$  ou  $|\psi_{sor}(\vec{r})|^2$ , s'interprète comme une densité de probabilité de présence de la particule relative (particules  $\text{cm}^{-3}$ ) au point  $\vec{r}$  de l'espace et l'on doit avoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{inc}(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1 \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{sor}(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1 \quad (2.14)$$

relations qui expriment que la probabilité de présence de la particule dans tout l'espace est bien égale à l'unité.

L'amplitude de l'onde diffusée est notée :

$$\psi_s(\vec{r}) = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.15)$$

## 2.2. Expression de la section efficace de diffusion élastique différentielle en angle

On désigne par  $v$  la vitesse de la particule relative. La diffusion étant élastique,  $v$  est inchangée après la collision. La mécanique quantique définit la notion de **courant de probabilité** qui exprime la conservation locale de la probabilité de présence de la particule par analogie avec la conservation locale de la charge électrique<sup>17</sup>. On montre (voir annexe IX) que les modules **courants de probabilité incident** et **diffusé** dans une direction définie par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  s'écrivent respectivement :

$$j_{inc} = v \quad (2.16)$$

$$j_s = \frac{|f(\theta, \varphi)|^2 v}{r^2} \quad (2.17)$$

On considère une surface élémentaire  $d^2S$  sur laquelle s'adosse l'angle solide élémentaire  $d^2\Omega = d(\cos\theta)d\varphi$  autour de la direction définie par les angles  $\theta$  et  $\varphi$  (voir **figure 5**).

La probabilité  $d^2\sigma$  par unité de courant de probabilité incident que des neutrons soient diffusés dans l'angle solide élémentaire  $d^2\Omega$  autour de la direction définie par les angles  $(\theta, \varphi)$  correspond au **courant de probabilité des neutrons diffusés**,  $j_s$ , multiplié par la surface élémentaire  $d^2S$  et rapporté au courant de probabilité des neutrons incidents,  $j_{inc}$ , soit en utilisant (2.16) et (2.17) :

<sup>17</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Tome I, Hermann, Paris, 1973, pp. 237-240.

$$d^2\sigma = \sigma(\theta, \varphi) d^2\Omega = \frac{j_s d^2S}{j_{inc}} \quad (2.18)$$

soit :

$$d^2\sigma = \sigma(\theta, \varphi) d^2\Omega = \frac{\frac{|f(\theta, \varphi)|^2 v}{r^2} d^2S}{v} \quad (2.19)$$

Or, dans le référentiel de coordonnées sphériques (ou polaires) choisi, on a (voir annexe I du chapitre 7) :

$$d^2S = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = r^2 d^2\Omega \quad (2.20)$$

D'où, en remplaçant (2.20) dans (2.19) :

$$d^2\sigma = \sigma(\theta, \varphi) d^2\Omega = |f(\theta, \varphi)|^2 \frac{1}{r^2} r^2 d^2\Omega = |f(\theta, \varphi)|^2 d^2\Omega \quad (2.21)$$

Par conséquent, par identification :

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (2.22)$$

En raison de l'isotropie de la matière pour un angle  $\theta$  donné tous les angles  $\{\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  sont équiprobables. Les angles  $\theta$  et  $\varphi$  sont indépendants de sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2 = |f(\theta)|^2 \quad (2.23)$$

où :

$f(\theta)$  est appelée **amplitude de diffusion** (*scattering amplitude*) ou **longueur de diffusion** (*scattering length*), à ne pas confondre avec le **paramètre d'impact** ; l'isotropie selon l'angle  $\varphi$  de la diffusion rend l'amplitude de diffusion indépendante de la variable  $\varphi$ , justifiant son omission.

$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}$  ou  $\sigma(\theta, \varphi)$  représente la **section efficace microscopique de diffusion doublement différentielle en angle** relativement aux variables angulaires  $\theta$  et  $\varphi$  et s'exprime ici en unité de surface par stéradian,  $\text{cm}^2 \text{sr}^{-1}$  ou b (barn)  $\text{sr}^{-1}$ .

### Remarque

En intégrant cette expression sur l'angle azimutal  $\varphi$  et en tenant compte de (2.23) on obtient les égalités :

$$d\sigma = \left[ \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi) d\varphi \right] \sin \theta d\theta = 2\pi \sigma(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = 2\pi |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta \quad (2.24)$$

On a l'écriture équivalente :

$$d\sigma = 2\pi \sigma(\theta, \varphi) |d(\cos \theta)| = 2\pi |f(\theta)|^2 |d(\cos \theta)| \quad (2.25)$$

et :

$$\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta)|^2 = \frac{d\sigma}{2\pi |d(\cos \theta)|} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (2.26)$$

Puisque  $d\Omega = 2\pi |d(\cos \theta)|$  (voir figure 5 et annexe I du chapitre 7)

En rapprochant (2.26) de (2.21) ou (2.23) on constate bien de nouveau l'équivalence des deux écritures :  $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}$  et  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$

Pour accéder à la section efficace différentielle  $\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}$  ( $\equiv \frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \sigma(\theta, \varphi)$ ), il faut à présent déterminer  $f(\theta)$  puis  $|f(\theta)|^2$  en résolvant l'équation de Schrödinger (2.4) que satisfait la fonction d'onde attachée à la particule relative.

La détermination de  $f(\theta)$  se fait en reprenant l'expression de la fonction d'onde sortante (2.13) sous la forme :

$$\psi_{sor}(\vec{r}) = \psi_{sor}(r, \theta) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (2.27)$$

En effet, de (2.27) on tire :

$$f(\theta) = r e^{-ikr} \left( \psi_{sor}(r, \theta) - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right) \quad (2.28)$$

Pour obtenir  $f(\theta)$ , il faut donc établir l'expression de l'onde sortante en résolvant l'équation d'onde de Schrödinger (2.4). Pour ce faire, il est commode de procéder en deux étapes.

La première étape consiste à résoudre l'équation d'onde de Schrödinger, en coordonnées sphériques, en l'absence d'un potentiel  $U(r)$  qui, pour  $r$  suffisamment grand, donc loin du noyau atomique diffuseur, s'identifie à l'onde plane incidente.

On recherche une solution  $\psi(r, \theta)$  décomposée en « ondes partielles » :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi_l(r, \theta) \quad (2.29)$$

L'indice  $l$  de la sommation s'interprète *a posteriori* comme le moment orbital ou angulaire  $l$  de la particule relative. Chacune des ondes partielles correspond par conséquent à une valeur spécifique du moment orbital ou angulaire de la particule relative qui prend des valeurs entières  $l = 0, 1, 2 \dots$  (voir annexe III du chapitre 4).

On montre alors que la fonction d'onde de la particule relative pour  $r$  grand est donnée par (voir annexe X) :

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (2.30)$$

où  $P_l(\cos \theta)$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $l$  ;

Par ailleurs, par définition de l'onde plane, on a :

$$\psi_{inc}(\vec{r}) \equiv \psi_{inc}(r, \theta) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{ikr \cos \theta} = e^{ikz} \quad (2.31)$$

où l'on a posé  $z = r \cos \theta$ .

Par suite, on a l'égalité :

$$e^{ikz} = \psi(r, \theta) \Leftrightarrow e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2}\right)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (2.32)$$

Cette relation peut être réécrite comme :

$$e^{ikz} = \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[ \frac{e^{ikr}}{kr} - (-1)^l \frac{e^{-ikr}}{kr} \right] P_l(\cos \theta) \quad (2.33)$$

La partie de (2.33) entre crochets indique une superposition d'ondes sphériques entrantes et sortantes dont l'amplitude dépend de la variable angulaire  $\theta$  où  $\mu = \cos \theta$  par l'intermédiaire des polynômes de Legendre  $P_l(\cos \theta)$ .

Dans la seconde étape, on établit la solution  $\psi_{sor}(\vec{r})$  de l'équation d'onde de Schrödinger en présence du potentiel nucléaire  $U(r) \neq 0$  en exploitant la solution (2.30) trouvée dans le cas sans potentiel. Le potentiel  $U(r)$  a pour effet d'induire un **changement de phase** ou **déphasage**  $\delta_l$  des ondes partielles diffusées, de sorte que pour  $r$  suffisamment grand :

$$\psi_{sor}(\vec{r}) = \psi_{sor}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l e^{i\delta_l} \frac{\sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (2.34)$$



Ce déphasage  $\delta_l$  s'obtient en écrivant la continuité de la dérivée logarithmique des fonctions d'ondes partielles pour  $l$  donné à la frontière  $r = a$  qui délimite les deux régions suivantes<sup>18</sup> :

- la région  $r < a$ , zone correspondant à la portée de la force nucléaire ;
- la région  $r > a$ , zone dans laquelle le champ nucléaire ne se fait plus sentir.

Contrairement à la démarche purement classique du paragraphe 1, l'approche ondulatoire conduit à examiner ce qui se passe au sein du système nucléaire formé par le neutron et le noyau atomique-cible (région  $r < a$ ), dénommé **noyau composé**, comportant des états quantiques liés et non liés et qui sera présenté plus loin (notamment au paragraphe 5). La **figure 6** illustre, sur la situation simplifiée du potentiel nucléaire assimilé à un puits sphérique, le déphasage entre l'onde incidente et l'onde totale sortante dans le processus de diffusion d'un neutron par le noyau atomique cible.

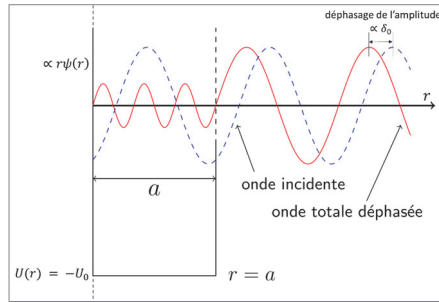


Figure 6. Déphasage entre l'onde entrante et l'onde sortante du noyau atomique associée au neutron diffusé ; sur la figure, le potentiel nucléaire est modélisé par un puits sphérique de rayon  $a$  et de profondeur  $U_0$  ; l'axe des ordonnées est commun au potentiel nucléaire et au produit  $r\psi(r)$ ,  $\psi(r)$  représentant les amplitudes des ondes incidente et totale<sup>19</sup>

### Remarque

En remplaçant dans (2.34) la fonction sinus par sa forme complexe, on obtient :

$$\psi_{sor}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} \left[ \frac{e^{-i(kr - l\frac{\pi}{2})}}{kr} - e^{i2\delta_l} \frac{e^{i(kr - l\frac{\pi}{2})}}{kr} \right] P_l(\cos \theta) \quad (2.35)$$

La partie de (2.35) entre crochets indique une superposition d'ondes sphériques entrantes et sortantes dans laquelle le « facteur de déphasage »  $e^{i2\delta_l}$  s'identifie à un **opérateur de collision**<sup>20</sup> agissant sur l'onde sphérique sortante. Cet opérateur reflète donc l'action du potentiel nucléaire sur la fonction d'onde de la particule relative. Disposant maintenant des expressions de l'onde plane incidente (2.33) et de l'onde totale sortante (2.35), on les introduit dans l'expression de  $f(\theta)$  (2.28), ce qui conduit à :

<sup>18</sup> P. Fröbrich, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, op. cit., pp. 11-12.

<sup>19</sup> d'après : R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit p. 693.

<sup>20</sup> Dans la littérature,  $S_l \equiv \eta_l = e^{i2\delta_l}$  est appelé « fonction S »/« S-function » ou encore « matrice S »/« S matrix » dans des cas réactionnels plus complexes.

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) \quad (2.36)$$

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos \theta) \quad (2.37)$$

avec :

$$f_l = \frac{e^{i2\delta_l} - 1}{2ik} \quad (2.38)$$

ou encore :

$$f_l = \frac{1}{k} e^{i2\delta_l} \sin \delta_l = \frac{1}{k} \frac{1}{\cotg \delta_l - i} \quad (2.39)$$

En introduisant (2.37) dans la relation (2.26), la section efficace différentielle de diffusion s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \left| \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} f_l P_l(\cos \theta) \right|^2 \quad (2.40)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) |f_l|^2 P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \quad (2.41)$$

En posant  $\eta_l = e^{2i\delta_l}$  et  $\eta_l^* = e^{-2i\delta_l}$  son conjugué, on a de manière équivalente :

$$f_l = \frac{\eta_l - 1}{2ik}, f_l^* = \frac{\eta_l^* - 1}{2ik}, |f_l|^2 = f_l f_l^* = \frac{1}{4k^2} (\eta_l - 1)(\eta_l^* - 1) = \frac{1}{4k^2} |1 - \eta_l|^2 \quad (2.42)$$

En remplaçant  $f_l$  par son expression (2.41) dans (2.40), il vient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) (\eta_l - 1)(\eta_l^* - 1) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \quad (2.43)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) |1 - \eta_l|^2 P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \quad (2.44)$$

### 2.3. Expression de la section efficace de diffusion scalaire

La section efficace totale de diffusion s'obtient en intégrant  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  sur tout l'espace angulaire, soit :

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_{-1}^{+1} |f(\theta)|^2 2\pi d(\cos \theta) \quad (2.45)$$

$$\sigma = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4k^2} \sum_{l,l'=0}^{\infty} (2l+1)(2l'+1) |1 - \eta_l|^2 P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) 2\pi d(\cos \theta) \quad (2.46)$$

En tenant compte de la relation d'orthogonalité des polynômes de Legendre :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (2.47)$$

on obtient :

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - \eta_l|^2 \quad (2.48)$$

Comme :

$$\sin \delta_l = \frac{e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}}{2i} \Rightarrow |1 - \eta_l|^2 = 4 \sin^2 \delta_l \quad (2.49)$$

d'où :

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l = 4\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (2.50)$$

Cette relation met bien en évidence la facette ondulatoire du processus de diffusion élastique puisque  $\sigma_s$  dépend de la longueur d'onde  $\lambda$  ( $\lambda = \lambda / 2\pi$ ) de l'onde associée à la particule relative et du **déphasage** de l'amplitude de cette onde  $\delta_l$  par rapport à la phase de l'onde incidente. Ce déphasage ne dépend pas de l'angle de déviation  $\theta$  et est spécifique de la forme du potentiel  $U(r)$  nucléaire considéré. Il dépend également de l'énergie de la particule incidente par l'intermédiaire du nombre d'onde  $k$  (ou de  $\lambda$ ). Pour des potentiels  $U(r)$  simples, il se calcule analytiquement et numériquement dans le cas général. Sa détermination repose sur la résolution de l'équation différentielle que satisfait la fonction radiale de l'onde diffusée<sup>21</sup>.

Il est possible de remonter à la valeur du déphasage  $\delta_l$  à partir de valeurs connues de  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ . Par exemple à partir des valeurs telles que celles de la **figure 7** relatives à la section efficace différentielle neutronique de diffusion sur le fer 56 et en réécrivant (2.50) sous la forme :

<sup>21</sup> P. Fröbrich, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, op. cit., pp. 11-12. Dans le cas de réactions nucléaires induites par une particule chargée, un terme de potentiel coulombien supplémentaire intervient dans l'équation de Schrödinger et le calcul du déphasage s'effectue par l'intermédiaire de fonctions d'onde particulières respectivement dites de Coulomb déclinées en « fonction régulière de Coulomb » (*regular Coulomb function*) et « fonction irrégulière de Coulomb » (*irregular Coulomb function*), *ibid.*, pp. 22-25.

$$\sigma = 2\pi \sum_{l=0}^{\infty} c_l^2 \frac{2}{2l+1}, \quad c_l^2 = \lambda^2 (2l+1)^2 \sin^2 \delta_l \tag{2.51}$$

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l, \quad \sigma_l = 4\pi \frac{c_l^2}{2l+1} = 4\pi \lambda^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l \tag{2.52}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \delta_l = \frac{c_l^2}{\lambda^2 (2l+1)^2}, \quad \sin \delta_l = \frac{c_l}{\lambda(2l+1)} \tag{2.53}$$

soit :

$$\delta_l = \arcsin \left[ \frac{c_l}{\lambda(2l+1)} \right] = \arcsin \left[ \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{\sigma_{sl}}{\pi(2l+1)}} \right] \tag{2.54}$$

**Exemple**

On a pour l'énergie du neutron incident à 50.9 keV:

$$E = 50.9 \text{ keV}, \lambda = \frac{455.2 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{50.9 \cdot 10^3 \text{ (eV)}}} \frac{56+1}{56} = 2.05 \cdot 10^{-12} \text{ cm};$$

$$\lambda = 2\pi\lambda = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ \AA};$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{50 \cdot 10^3 \text{ (eV)}}}{455.2} 10^{12} \frac{56}{56+1} = 4.88 \cdot 10^3 \text{ \AA}^{-1}$$

**Tableau 5. Valeurs du déphasage et des composantes orbitales de la section efficace.<sup>22</sup>**

$l$	$2l+1$	$c_l$ unités $\sqrt{10^{-24} \text{ cm}}$	$\frac{\sin \delta_l}{c_l}$ $= \frac{1}{\lambda(2l+1)}$	$\delta_l$ radians	$\delta_l$ degrés	$\sin^2 \delta_l$	$\sigma_l = c_l^2 \frac{4\pi}{2l+1}$ $= 4\pi \lambda^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l$ barns ( $10^{-24} \text{ cm}^2$ )
0	1	$7.063 \cdot 10^{-1}$	$3.44 \cdot 10^{-1}$	$3.50 \cdot 10^{-1}$	20.11	$1.18 \cdot 10^{-1}$	6.26
1	3	$2.063 \cdot 10^{-2}$	$3.32 \cdot 10^{-3}$	$3.32 \cdot 10^{-3}$	$1.90 \cdot 10^{-1}$	$1.10 \cdot 10^{-5}$	$1.78 \cdot 10^{-3}$
2	5	$5.735 \cdot 10^{-2}$	$5.59 \cdot 10^{-3}$	$5.59 \cdot 10^{-3}$	$3.20 \cdot 10^{-1}$	$3.12 \cdot 10^{-5}$	$8.25 \cdot 10^{-3}$
3	7	$2.857 \cdot 10^{-2}$	$1.99 \cdot 10^{-3}$	$1.99 \cdot 10^{-3}$	$1.14 \cdot 10^{-1}$	$3.96 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-3}$
4	9	$3.010 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-3}$	$1.63 \cdot 10^{-3}$	$9.34 \cdot 10^{-2}$	$2.66 \cdot 10^{-6}$	$1.27 \cdot 10^{-3}$

<sup>22</sup> D'après S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, op. cit., Table 13.2, p. 467.

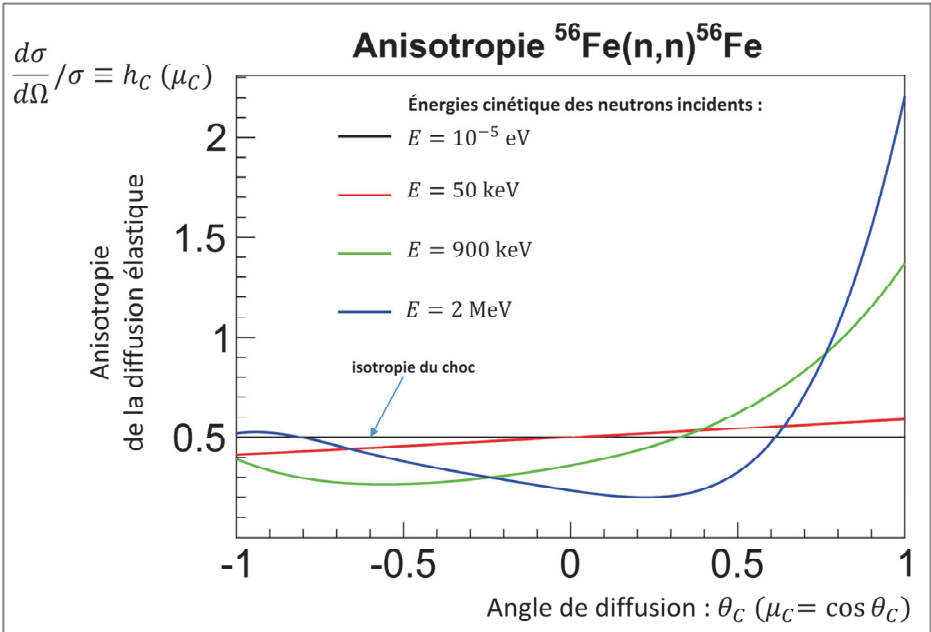


Figure 7. Anisotropie de la diffusion élastique d'un neutron sur un noyau de fer 56 ; section efficace de diffusion élastique différentielle en angle d'un neutron sur un noyau de fer 56 divisée par la section efficace de diffusion scalaire correspondante, dans le référentiel du centre de masse (données issues de l'évaluation JEFF-3.3) ; il s'agit donc de densités de probabilité de diffusion angulaire ou anisotropie de la diffusion (voir § 1.3), tracées pour différentes valeurs de l'énergie du neutron incident ; pour un neutron thermique, on constate que la densité est constante, valant 0.5, ce qui correspond à une diffusion isotrope dans le référentiel du centre de masse.<sup>23</sup>

Remarques

- La longueur d'onde  $\lambda$  dépend elle-même de l'énergie  $E_r$  de la particule relative ( $\lambda = h/\sqrt{2\mu_r E_r}$ ), et l'on comprend dès lors qu'une anisotropie de la diffusion élastique se manifeste lorsque l'énergie du neutron incident (et donc de la particule réduite) augmente : les termes d'ordre  $l > 0$  apportent alors à la composante diffusée  $f(\theta)$  de l'onde sortante une contribution de plus en plus grande.

Inversement, lorsque l'énergie du neutron incident devient de plus en plus petite, le terme d'ordre  $l = 0$  (« onde s » selon la nomenclature spectroscopique) devient nettement prédominant et la distribution angulaire tend vers l'**isotropie**.

- On voit sur l'expression (2.51) que  $\sigma_l$  a une valeur maximale  $\sigma_l = 4\pi\lambda^2(2l + 1)$  lorsque  $\sin^2 \delta_l = 1$ , donc pour les valeurs du déphasage  $\delta_l = \pi/2 + k\pi$ .

L'examen plus détaillé de l'onde partielle « s » de moment angulaire  $l = 0$  à l'aide d'une modélisation du potentiel nucléaire par un puits de potentiel, puits carré à symétrie

<sup>23</sup> Voir aussi : S. G. Prussin , *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, op. cit., Fig. 13.31, p. 466.

sphérique  $U(r) = U_0$ , permet de préciser les notions de **déphasage** et d'**amplitude de diffusion** ainsi que d'expliquer le phénomène de **diffusion résonnante**.

D'après (2.32), on a <sup>24</sup> :

▪ à l'extérieur du puits de potentiel,  $r > a$  :

- la fonction d'onde associée à l'onde incidente :

$$\psi_{inc}(r) = \frac{1}{kr} \sin kr \quad (2.55)$$

- la fonction d'onde associée à l'onde diffusée :

$$\psi_{diff}(r) = \frac{\sin \delta_0}{kr} \exp[i(kr + \delta_0)] \quad (2.56)$$

- la fonction d'onde associée à l'onde totale sortante, somme de l'onde incidente et diffusée :

$$\psi_{sor}(r) = \psi_{inc}(r) + \psi_{diff}(r) = \frac{e^{i\delta_0}}{kr} \sin(kr + \delta_0) \quad (2.57)$$

▪ à l'intérieur du puits de potentiel,  $r < a$ , la fonction d'onde s'écrit :

$$\psi_{int}(r) = \frac{C}{r} \sin Kr \quad (2.58)$$

où :

- $K$  est le nombre d'onde de la particule relative dans le champ du potentiel nucléaire ou région intérieure :  $r < a$  ;
- $C$  est une constante déterminée telle que la condition de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée est assurée en  $r = a$ , lorsque l'on passe de la région intérieure ( $r < a$ ) à la région extérieure ( $r > a$ ).

De la condition de continuité de la dérivée logarithmique de la fonction d'onde associée à la particule relative en  $r = a$ , on déduit l'expression du **déphasage**  $\delta_0$  de l'onde sortante<sup>25</sup> :

$$\delta_0 = -ka + \arctg\left(\frac{k}{K} \operatorname{tg} Ka\right) \quad (2.59)$$

<sup>24</sup> Voir aussi R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., pp. 689-693.

<sup>25</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 692.

On explicite ci-dessous les différents termes de l'expression (2.59) du déphasage  $\delta_0$  sous l'hypothèse du nombre de masse  $A$  grand et donc en adoptant  $\mu_r \approx m_n$  dans les applications numériques. Le rayon  $a$  choisi est appelé **rayon de diffusion** (*scattering radius*, voir chapitre 3 § 2.1).

■ À l'extérieur du puits de potentiel,  $r > a$ , et en  $r = a$  :

$$k = \frac{p_r}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu_r E_r}}{\hbar} \quad (2.60)$$

$$ka = \frac{p}{\hbar} a = \frac{\sqrt{2\mu_r E_r}}{\hbar} r_0 A^{1/3} = \frac{\sqrt{2\mu_r c^2}}{\hbar c} r_0 A^{1/3} \sqrt{E_r} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} ka &\approx \frac{\sqrt{2m_n c^2}}{\hbar c} r_0 A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r} \\ &= \frac{\sqrt{2 \times 939.56 \text{ (MeV)}}}{6.58 \cdot 10^{-22} \text{ (MeV s)} \times 2.997 \cdot 10^{10} \text{ (cm s}^{-1}\text{)}} 1.1 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \sqrt{E_r \text{ (MeV)}} \end{aligned}$$

$$ka \approx \frac{\sqrt{2m_n c^2}}{\hbar c} r_0 A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r} = 0.24 A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r \text{ (MeV)}} \equiv 2.4 \cdot 10^{-4} A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r \text{ (eV)}} \quad (2.62)$$

■ À l'intérieur du puits de potentiel,  $r < a$ , et en  $r = a$  :

Pour un potentiel puits carré à symétrie sphérique et de profondeur  $U_0$  (40 à 50 MeV pour le puits de potentiel nucléaire), le nombre d'onde  $K$  est donné par<sup>26</sup> :

$$K = \frac{\sqrt{2\mu_r (E_r + |U_0|)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu_r c^2}}{\hbar c} \sqrt{E_r + |U_0|} \quad (2.63)$$

$$K \approx \frac{\sqrt{2 \times 939.56 \text{ (MeV)}}}{6.58 \cdot 10^{-22} \text{ (MeV s)} \times 2.997 \cdot 10^{10} \text{ (cm s}^{-1}\text{)}} \sqrt{E_r + |U_0| \text{ (MeV)}}$$

$$= 2.20 \cdot 10^{12} \sqrt{E_r + |U_0| \text{ (MeV)}} \text{ cm}^{-1} \quad (2.67)$$

$$K = 2.20 \cdot 10^4 \sqrt{E_r + |U_0| \text{ (MeV)}} \text{ (\AA}^{-1}\text{)} \quad (2.64)$$

$$Ka = \frac{\sqrt{2\mu_r c^2}}{\hbar c} r_0 A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r + |U_0|} \quad (2.65)$$

<sup>26</sup> Voir aussi: J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1979, 1<sup>re</sup> édition John Wiley & Sons, Inc., 1952, p. 355 ; <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4612-9959-2>.

$$Ka \approx \frac{\sqrt{2m_n c^2}}{\hbar c} r_0 A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r + |U_0|} = 0.24 A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r + |U_0|} (\text{MeV})$$
$$\equiv 2.4 \cdot 10^{-4} A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E_r + |U_0|} (\text{eV}) \quad (2.66)$$

Les relations (2.60) et (2.63) indiquent que par l’intermédiaire des nombres d’onde  $k$  et  $K$ , le déphasage  $\delta_0$  dépend de l’énergie du neutron incident et de la profondeur  $|U_0|$  du puits de potentiel nucléaire.

Exemple

Pour différentes valeurs de l’énergie cinétique initiale  $E_r$  de la particule réduite, on a les valeurs suivantes des nombres d’onde  $k$  et  $K$  ainsi que des produits  $ka$  et  $Ka$  dans le cas de fer 56 :

**Tableau 6. Exemple de valeurs des nombres d’onde  $k$  et  $K$  ainsi que du déphasage  $\delta_0$  dans le cas de fer 56.** On a utilisé les données suivantes :  $a = r_0 A^{1/3} = 1.1 \cdot 10^{-13} (56)^{1/3} = 4.2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 4.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 4.2 \cdot 10^{-5} \text{ \AA}$  ;  $\mu_r \approx 0.98 m_n$  ;  $U_0 = 40 \text{ MeV}$ .

Énergie de la particule relative à l’extérieur	Nombre d’onde de la particule relative à l’extérieur	Longueur d’onde de la particule relative à l’extérieur		Nombre d’onde de la particule relative dans le puits	Longueur d’onde de la particule relative dans le puits		
$E_r$	$k = \frac{p_r}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu_r E_r}}{\hbar} \text{ \AA}^{-1}$	$\lambda = 2\pi\tilde{\lambda} \text{ \AA}$	$ka = \frac{a}{\tilde{\lambda}}$	$K = \frac{\sqrt{2\mu_r (E_r +  U_0 )}}{\hbar} \text{ \AA}^{-1}$	$\Lambda \text{ \AA}$	$Ka$	$\frac{k}{K} \text{tg}Ka$
0.025 eV	$\sim 3.49$	$\sim 1.797$	$1.45 \cdot 10^{-4}$	$\sim 1.39 \cdot 10^5$	$\sim 4.52 \cdot 10^{-5}$	$\sim 5.46$	$-2.7 \cdot 10^{-5}$
1 MeV	$\sim 2.19 \cdot 10^4$	$\sim 2.9 \cdot 10^{-4}$	0.92	$\sim 1.55 \cdot 10^5$	$\sim 4.05 \cdot 10^{-5}$	$\sim 6.51$	$3.26 \cdot 10^{-2}$

Énergie de la particule relative à l’extérieur	Déphasage
$E_r$	$\delta_0$ radians
0.025 eV	$-1.72 \cdot 10^{-4}$
1 MeV	0.88

Pour  $A = 1$ ,  $\mu \approx 0.5 \times 939.56 \text{ MeV}$ ,  $\hbar = 4.135 \cdot 10^{-21} / 2\pi = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}$ ,  $c = 2.997 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$  :

$$ka \approx \frac{\sqrt{2 \times 0.5 \times 939.56 \text{ (MeV)}}}{6.58 \cdot 10^{-22} (\text{MeV s}) \times 2.997 \cdot 10^{10} (\text{cm s}^{-1})} 1.1 \cdot 10^{-13} \times 1 \times \sqrt{E_r (\text{MeV})}$$
$$= 0.17 \sqrt{E_r (\text{MeV})} \quad (2.67)$$

$$Ka \approx 0.17 \sqrt{E_r + |U_0| (\text{MeV})} \quad (2.68)$$



### Remarques

- Si l'on pose :

$$K_0 = \frac{\sqrt{2\mu_r |U_0|}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\mu_r c^2 |U_0|}}{\hbar c} \quad (2.69)$$

alors avec (2.63), on a :

$$K^2 = k^2 + K_0^2, \quad K = \sqrt{k^2 + K_0^2} \quad (2.70)$$

Un ordre de grandeur de  $K_0$  est :

$$K_0 = \frac{\sqrt{2\mu_r c^2 |U_0|}}{\hbar c} \approx \frac{\sqrt{2 \times 939.56 \text{ (MeV)} \times 40 \text{ (MeV)}}}{6.58 \cdot 10^{-22} \text{ (MeV s)} \times 2.997 \cdot 10^{10} \text{ (cm s}^{-1}\text{)}} = 1.39 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-1}$$

En rapprochant les relations (2.60), (2.63) et (2.70), la profondeur du puits de potentiel  $U_0$  peut en être inversement déduite :

$$|U_0| = (K^2 - k^2) \frac{\hbar^2}{2\mu_r} = K_0^2 \frac{\hbar^2}{2\mu_r} \quad (2.71)$$

- Pour une profondeur usuelle  $|U_0| = 40 \text{ MeV}$  du puits de potentiel nucléaire, la valeur du nombre d'onde  $K$  dans la région interne est grande par rapport à la valeur du nombre d'onde  $k$  dans la région externe. Par ailleurs, en écrivant la condition de **continuité de la fonction d'onde** en  $r = a$ , on tire l'expression de la constante  $C$  de la fonction d'onde (2.58) dans la région intérieure  $r < a$  :

$$C = \frac{k}{\sqrt{k^2 + K_0^2} \cos^2 Ka} \quad (2.72)$$

- iDans le cas où  $E_r \ll |U_0|$ , cas des neutrons thermiques, les ondes partielles de moment orbital  $l > 0$  ayant une contribution négligeable, la relation (2.50) se réduit alors à :

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \sin^2 \delta_0 \quad (2.73)$$

Comme dans un tel cas  $k \ll K$ , alors  $|\delta_0| \approx ka$  et :

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \sin^2 ka \quad (2.74)$$

Pour les énergies suffisamment basses, on a :  $\sin^2 ka \approx (ka)^2$ . Comme  $k = 1/\lambda$ , alors la section efficace de diffusion élastique devient :

$$\sigma \approx 4\pi a^2 \quad (2.75)$$

Autrement dit, à basse énergie,  $k \ll K$  et la diffusion est une diffusion potentielle « pure » dont la section efficace est égale à la surface du noyau atomique supposé sphérique. On observera que cette expression de la section efficace potentielle diffère d'un facteur 4 de l'expression établie au paragraphe 1 dans le cadre de l'approche corpusculaire :  $\pi a^2$ . Cela peut se comprendre en considérant que l'« onde  $s$  » est diffractée, telle une onde lumineuse. La manifestation du caractère

ondulatoire de l'interaction, traduit le fait qu'aux abords de la frontière  $r = a$  le potentiel varie très fortement sur un domaine spatial d'une dimension inférieure à la longueur d'onde du neutron incident.<sup>27</sup> La quantité  $4\pi a^2$  de (2.75) représente la surface du noyau atomique cible, supposé sphérique, « vue » par les ondes.

Si l'on veut se ramener à l'approche géométrique corpusculaire du paragraphe 1, tout se passe comme si le neutron incident interagissait avec un noyau atomique cible assimilé à une sphère dure de rayon non pas  $a$  mais  $2a$ .

En reprenant l'exemple numérique du noyau d'uranium 235, on obtient :

$$\sigma_s \approx \sigma_p = 4\pi a^2 = 4\pi r_0^2 A^{\frac{2}{3}} = 4 \times 3.14 \times (1.35 \cdot 10^{-13})^2 (235)^{\frac{2}{3}} = 8.72 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 8.72 \text{ b}$$

Pour des valeurs de  $k$  très élevées, donc pour des énergies du neutron incident très élevées, on montre en sommant la série (2.50), et en faisant tendre  $k$  vers l'infini que :

$$\sigma_{k \rightarrow \infty} \approx 2\pi a^2 \quad (2.76)$$

Pour certaines valeurs de l'énergie incidente, il se peut que la fonction d'onde intérieure ait une valeur nulle de sa dérivée en  $r = a$ , de sorte que les ondes associées de la particule respectivement dans les deux régions interne et externe se rejoignent avec des amplitudes égales : il s'agit du phénomène de **diffusion élastique résonnante**. La diffusion d'un neutron d'énergie 5 keV sur un noyau atomique de sodium ( $^{23}_{11}\text{Na}$ ) en est un exemple.

On peut rechercher l'énergie  $E_r$  (ou  $E$ ) pour laquelle la composante  $l = 0$  (ondes « s ») est largement prédominante, en fonction du nombre de masse  $A$  du noyau atomique-cible. Comme on peut le voir sur (2.32), cette situation intervient lorsque  $kr$  tend vers des valeurs très petites, compte tenu du comportement du terme d'ordre 0 qui reste fini non nul alors que les termes d'ordres supérieurs,  $l \geq 1$ , tendent vers 0 (voir aussi § 2.4 suivant). On peut donc rechercher l'énergie devant laquelle l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident doit être très petite pour être dans ce cas de figure en écrivant l'inégalité :

$$ka = \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad (2.77)$$

avec :

$$a = r_0 A^{1/3} = 1.1 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ cm}, \quad \lambda = \frac{455.2 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{E \text{ (eV)}}} \frac{A + 1}{A} \text{ cm}$$

Cette condition signifie que  $\lambda$  (ou)  $\lambda \gg a$  : la longueur d'onde associée à la particule relative (et donc du neutron incident) doit être très grande comparativement au rayon du noyau atomique-cible. La zone de localisation du neutron incident est étendue autour du noyau cible. La relation (2.77) se réécrit donc :

<sup>27</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann, Paris, 1973, Tome II, p. 949-948 et Tome I, pp. 35-36.

$$E \ll \left[ \frac{455.2 \cdot 10^{-12} A + 1}{r_0 A^{\frac{1}{3}}} \right]^2 = \left[ \frac{455.2 \cdot 10^{-12}}{1.1 \cdot 10^{-13}} \right]^2 \frac{\left(\frac{A+1}{A}\right)^2}{A^{\frac{2}{3}}} = 17 \cdot 10^6 \frac{\left(\frac{A+1}{A}\right)^2}{A^{\frac{2}{3}}} \text{ (eV)} \quad (2.78)$$

Par conséquent, les « ondes  $s$  » prédomineront largement dans la diffusion pour des valeurs de l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident très inférieures aux limites suivantes, établies pour différentes valeurs du nombre de masse  $A$  du noyau atomique cible.

- Pour  $A = 1$

$$E \ll 17 \cdot 10^6 \times 4 = 68 \text{ MeV ou } E_r \ll 17 \text{ MeV}$$

On comprend ainsi pourquoi l'hypothèse d'isotropie du choc élastique du neutron dans le centre de masse est valable dans le domaine d'énergie d'intérêt de la physique des réacteurs ( $E < 20 \text{ MeV}$ ).

- Pour  $A = 40$

$$E \ll 1.3 \text{ MeV ou } E_r \ll 1.24 \text{ MeV}$$

- Pour  $A = 240$

$$E \approx E_r \ll 444 \text{ keV}$$

## 2.4. Longueur de diffusion

En identifiant les expressions de l'onde diffusée (2.15) et (2.56) et en se référant à l'expression générale de (2.37) de la section efficace, on montre que pour  $l = 0$  :

$$f_0 = \frac{e^{i\delta_0} \sin \delta_0}{k} \quad (2.79)$$

et :

$$|f_0|^2 = f_0 f_0^* = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} \quad (2.80)$$

Par suite :

$$\sigma = 4\pi |f_0|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi \lambda^2 \sin^2 \delta_0 \quad (2.81)$$

et l'on retrouve bien (2.73).

Dans le cas général d'un potentiel nucléaire  $U(r)$ , il apparaît que lorsque l'énergie du neutron tend vers 0, donc lorsque  $k$  tend vers 0, alors  $\delta_0$  doit aussi tendre vers 0 car dans le cas contraire  $f_0$  deviendrait infinie. Il s'ensuit avec (2.79) :

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_0}{k} = -b \quad (2.82)$$

où  $b$  est une constante appelée **longueur de diffusion**<sup>28 29 30</sup> dont l'ordre de grandeur est de  $10^{-12}$  cm (à ne pas confondre avec le paramètre d'impact  $b$  du paragraphe 1). Si  $f_0$  est en général une grandeur complexe,  $b$  est réel, sauf par exemple dans le cas où une absorption forte est en compétition avec la diffusion élastique. Cet aspect et plus largement le rôle joué par cette longueur de diffusion sont évoqués dans le chapitre 10 consacré à la thermalisation. On y donne quelques-unes de ses valeurs caractéristiques pour certains noyaux. Il est possible de visualiser ce que représente la longueur de diffusion en reprenant l'expression (2.57) de la fonction d'onde sortante  $\psi_{sor}(r, \theta)$  au-delà de la portée du potentiel nucléaire  $U(r)$  et en considérant des neutrons incidents de très faible énergie cinétique (donc pour lesquels  $k \rightarrow 0$  voir relation (2.60).

la fonction d'onde sortante  $\psi_{sor}(r, \theta)$  au-delà de la portée du potentiel nucléaire  $U(r)$  s'écrit<sup>31</sup> :

$$\psi_{sor}(r, \theta) = \frac{e^{i\delta_0}}{kr} \sin(kr + \delta_0) \quad (2.83)$$

On en recherche la forme limite lorsque  $k \rightarrow 0$  :

$$e^{i\delta_0} \rightarrow 1$$

$$\sin(kr + \delta_0) \rightarrow kr + \delta_0$$

La fonction d'onde  $\psi_{sor}(r, \theta)$  donnée par (2.83) devient donc avec (2.82) :

$$\psi_{sor}(r, \theta) \sim \frac{1}{kr} (kr + \delta_0) \Rightarrow r\psi_{sor}(r, \theta) \sim r + \frac{\delta_0}{k} \sim r - b \quad (2.84)$$

Il en résulte donc que  $r\psi_{sor}(r, \theta)$  suit une droite qui coupe l'axe des distances  $r$  en  $r = \mp b$ , suivant le signe de  $b$ , comme le montre les **figures 8a** et **8b** relatives respectivement à un état lié et à un état non lié du système nucléaire formé par le neutron et le noyau atomique-cible (noyau composé, voir § 5) impliqués dans le phénomène de diffusion :

$$r\psi_{sor}(r, \theta) \sim r - b \quad (2.85)$$

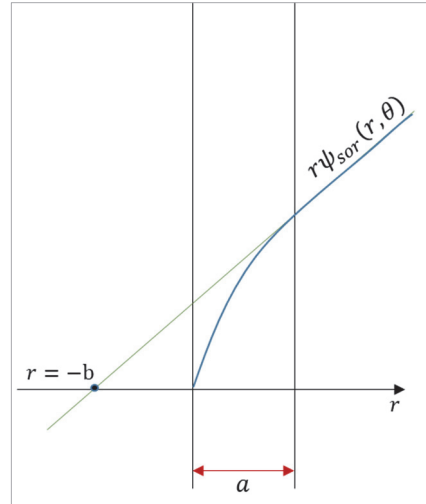
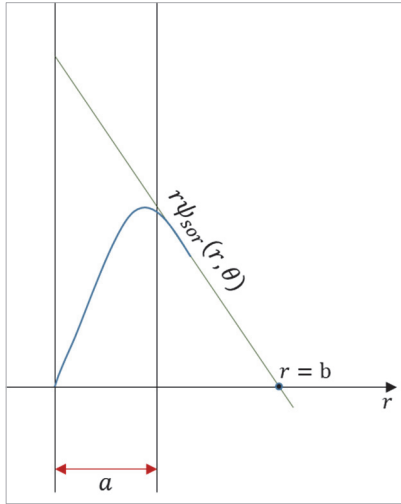
<sup>28</sup> R. D. Evans , *Le noyau atomique*, op. cit., pp. 347-351 et p. 691.

<sup>29</sup> E. Fermi, L. Marshall, « Interference Phenomena of Slow Neutrons », *Physical Review*, Vol. 71, Number 10, May 15, 1947, pp. 666-677, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.666>.

<sup>30</sup> H. A. Bethe, « Theory of the Effective Range in Nuclear Scattering », *Physical Review* 76, 38, July 1, 1949. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.76.38> : « Théorie de la portée effective des forces nucléaires et étude de la diffusion neutron-proton ».

<sup>31</sup> R. D. Evans , *Le noyau atomique*, op. cit., p. 691, équation (131).

- Si la diffusion se fait sur un état lié du noyau composé  $b$  est positif et l'intersection se fait en  $r = + |b|$ .
- Si la diffusion se fait sur un état non lié du noyau composé  $b$  est négatif et l'intersection se fait en  $r = - |b|$ .



Figures 8a (à gauche) et 8b (à droite). Interprétation graphique de la longueur de diffusion «  $b$  » ou « interception de Fermi » de la densité  $r\psi_{sor}(r, \theta)$  relative à la fonction d'onde sortante,  $\psi_{sor}$  ; la figure 8a correspond à une diffusion du neutron par un état lié : la longueur de diffusion «  $b$  » est positive ; la figure 8b à une diffusion par un état non lié : la longueur de diffusion «  $b$  » est négative.<sup>32</sup>

La longueur de diffusion  $b$  représente donc la distance « extrapolée » à laquelle la densité  $r\psi_{sor}$  sort du domaine d'action de la force nucléaire. D'où le terme alternatif d'**interception de Fermi** de  $\psi_{sor}$  pour désigner  $b$ .

Toujours dans le cas du potentiel nucléaire modélisé par un puits sphérique, on a d'après (2.59) :

$$\frac{\delta_0}{k} = -a + \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{K} \operatorname{tg} Ka \right) \quad (2.86)$$

et :

$$-b = \lim_{k \rightarrow 0} \left[ -a + \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{K} \operatorname{tg} Ka \right) \right] \quad (2.87)$$

<sup>32</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., pp. 347-348 et Figure 3.2.

Dans le cas des neutrons d'énergie thermique,  $\delta_0$  est proche de  $0^\circ$  ou bien de  $180^\circ$  : lorsque  $b$  a une valeur positive, le changement de phase est de  $180^\circ$  entre l'onde diffusée et l'onde incidente et lorsque  $b$  a une valeur négative, ce changement de phase est de  $0^\circ$ .

## 2.5. Relation entre moment angulaire orbital et paramètre d'impact : approche semi-classique

On peut relier la notion classique corpusculaire de paramètre d'impact au moment angulaire quantifié  $l$  qui intervient dans la décomposition en ondes partielles de l'onde associée au neutron incident sur un noyau atomique cible. On considère un faisceau parallèle de neutrons arrivant sur le noyau atomique diffuseur comme illustré sur les figures 9a et 9b.

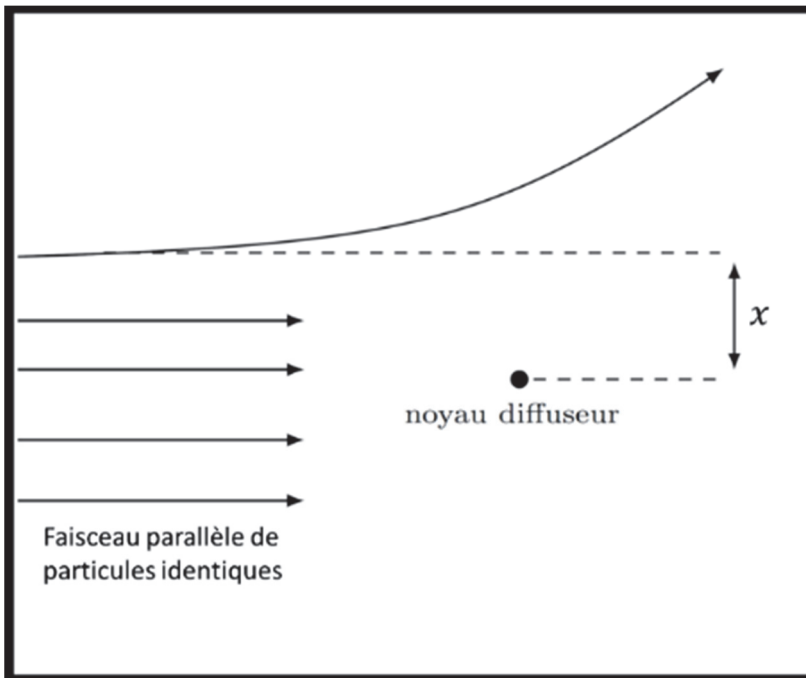


Figure 9a. Diffusion d'une particule (neutron de masse  $m_n$  et de vitesse  $v$ ) sur un noyau atomique. La grandeur notée  $x$  est le paramètre d'impact de l'approche classique.<sup>33</sup>

<sup>33</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 677.

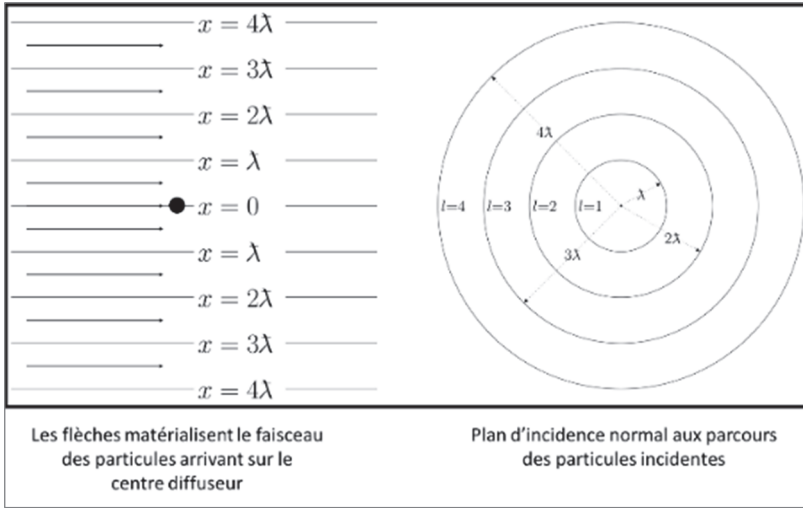


Figure 9b. Le domaine de valeurs du paramètre d'impact  $x$  est discrétisé en zones cylindriques concentriques de largeur  $\lambda$ <sup>34</sup> ; cela permet de distinguer les zones d'interaction privilégiée relatives à chacune des ondes partielles définies par le moment angulaire (ou orbital)  $l$ .

Selon l'approche semi-classique, on identifie le moment angulaire classique et le moment angulaire quantique du neutron de masse  $m_n$  et de vitesse  $v$  dans le référentiel du laboratoire en écrivant :

$$m_n vx = l\hbar \quad (2.88)$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$x = \frac{l\hbar}{m_n v} = l\lambda \quad (2.89)$$

On définit alors des plages de valeurs possibles du paramètre d'impact  $x$  par l'encadrement suivant :

$$l\lambda \leq x \leq (l+1)\lambda \quad (2.90)$$

La relation (2.85) et la **figure 8b** permettent de comprendre pourquoi :

- les ondes « s » interagissent préférentiellement avec le noyau atomique ;
- les contributions à la section efficace des ondes partielles décroissent lorsque les valeurs associées de leur moment angulaire  $l$  augmente.

<sup>34</sup> *Ibid.*, p. 679.

La relation (2.90) indique également que les contributions à la section efficace des ondes partielles de moment angulaire  $l \geq 1$  augmentent lorsque l'énergie cinétique du neutron incident s'accroît, puisqu'alors la valeur du paramètre d'impact  $x$  diminue : la longueur d'onde rationalisée de de Broglie,  $\lambda$ , du neutron incident devient comparable à la dimension de la zone d'action de la force nucléaire forte de sorte que les ondes de moment angulaire  $l \neq 0$  pénètrent dans cette région, jusqu'à une valeur limite de  $l_{max}$  de  $l$  conditionnée par l'énergie du neutron incident.

### Exemple

Pour un neutron d'énergie  $E = 15 \text{ MeV}$  et  $a = 5 \text{ fm}$  :

$$l_{max} = \frac{m_n v a}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m_n E}}{\hbar} a = \frac{\sqrt{2 \times 1.675 \cdot 10^{-27} \times 15 \cdot 10^6 \times 1.602 \cdot 10^{-19}}}{1.055 \cdot 10^{-34}} \times 5 \cdot 10^{-15}$$

$$l \approx 4 \text{ partie entière de } 4.25$$

La surface de la couronne associée à chaque onde partielle est donc :

$$\sigma_l = \pi(l+1)^2 \lambda^2 - l^2 \lambda^2 = \pi(2l+1) \lambda^2 \quad (2.91)$$

et correspond à la surface d'impact d'un neutron incident de moment angulaire  $l$  avec le noyau atomique cible ;  $\sigma_l = \pi(2l+1) \lambda^2$  (à ne pas confondre avec  $\sigma_{sl}$ ) peut être appelée « section efficace d'entrée dans l'onde partielle » <sup>35</sup>. On verra plus loin que  $\sigma_l$  constitue l'une des composantes de la section efficace qui rend compte de la formation du système nucléaire résultant de la pénétration du neutron dans le noyau atomique et dénommé « noyau composé ».

Pour  $l > l_{max}$ , il n'y a pas d'interaction entre l'onde partielle de moment orbital  $l$  et le noyau atomique cible et par conséquent la contribution  $\sigma_{sl} = (2l+1)|1 - \eta_l|^2$  à la section efficace de diffusion  $\sigma_s$  donnée par la relation (2.48) est nulle, ce qui implique que  $\eta_l = 1$ .

À l'inverse, si  $\eta_l = 0$ , il y a absorption totale des ondes partielles de moment orbital  $l \leq l_{max}$  par le noyau atomique qualifié dans ce cas de « noyau noir ». Cependant, paradoxalement, comme le montre l'expression (2.48), la section efficace de diffusion n'est pas nulle :

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) \quad (2.92)$$

Dans le cas où  $l_{max} \gg 1$ , c'est-à-dire pour des neutrons d'énergie très élevée, en remarquant que (2.92) comporte la somme d'une progression géométrique, on a :

<sup>35</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique, op. cit.*, Tome II, pp. 942-943.



$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{max}} (2l+1) \approx \frac{\pi}{k^2} l_{max}(l_{max}+1) \approx \frac{\pi}{k^2} l_{max}^2 \quad (2.93)$$

Comme :

$$l_{max} \approx \frac{m_n v a}{\hbar} = ka \quad (2.94)$$

$$\sigma_s = \frac{\pi}{k^2} l_{max}^2 = \pi a^2 \quad (2.95)$$

La section efficace de diffusion est égale à la section efficace géométrique (1.3) du paragraphe 1. Ce résultat s'interprète comme la manifestation d'un **phénomène de diffraction** des ondes  $l \leq l_{max}$  associées au neutron incident sur les bords du noyau atomique cible : il s'agit d'une diffusion vers l'avant à des angles de faibles valeurs.

## 2.6. Synthèse des différentes sections efficaces différentielles

On a vu précédemment que les sections efficaces différentielles angulaires décrivent finement le processus de diffusion élastique d'un neutron par un noyau atomique cible au cours duquel s'est opéré un changement de direction.

La relation qui existe entre l'énergie du neutron diffusé et son angle de déviation (voir chapitre 7) permet d'en déduire les expressions correspondantes des sections efficaces différentielles en angle ou en énergie.

En général, les réactions nucléaires n'étant pas nécessairement des diffusions élastiques, on est conduit à définir des sections efficaces différentielles à la fois en angle et en énergie. Tel est par exemple le cas de la réaction nucléaire de **diffusion inélastique** émettrice d'un neutron dans le domaine en énergie du « **continuum** ».

On considère un neutron qui, par diffusion sur un noyau atomique, passe de l'énergie  $E'$  à l'énergie  $E$  et de la direction  $\vec{\Omega}'$  à la direction  $\vec{\Omega}$ . La direction  $\vec{\Omega}$  est repérée par deux angles :  $\theta$  et  $\varphi$  en se plaçant en coordonnées sphériques et en prenant comme axe Oz la direction  $\vec{\Omega}'$  du neutron incident (voir **figures 3a, 3b** et **5** ci-dessus, ainsi que l'annexe I du chapitre 7 et la convention plus générale de l'annexe XI du présent chapitre).

Les différentes formes et écritures génériques des sections efficaces différentielles sont indiquées ci-après.

Il convient de rappeler que vis-à-vis de l'angle azimutal  $\varphi$  la diffusion est isotrope (propriété d'isotropie de la matière dans un milieu homogène). Cela se traduit par le fait que la section efficace différentielle en angle dépend du produit scalaire  $\mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' = \cos \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle de déviation.

### ▪ Section efficace microscopique différentielle en angle et en énergie

On a différentes écritures équivalentes de la section efficace différentielle en angle et en énergie :

$$\begin{aligned} \frac{d^3\sigma(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})}{dE d^2\Omega} &\equiv \frac{d^3\sigma(E' \rightarrow E', \mu, \varphi)}{dE' d\mu d\varphi} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu} \\ &\equiv \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\Omega} \end{aligned} \quad (2.96)$$

où la présence du facteur  $1/2\pi$  traduit l'isotropie azimutale de la diffusion rappelée ci-dessus (voir aussi figure 1 du chapitre 7) et  $d\Omega = 2\pi d\mu$ .

**Unités :**  $\text{cm}^2 \text{MeV}^{-1} \text{sr}^{-1}$  ou  $\text{b MeV}^{-1} \text{sr}^{-1}$  ( $\text{sr}$  = stéradian,  $\text{b}$  = barn).

Du point de vue mathématique, on rappelle de nouveau que cette section efficace différentielle est une densité par rapport aux variables  $E$ ,  $\mu$  et  $\varphi$  et c'est une fonction par rapport à la variable  $E'$ , énergie du neutron incident.

La **distribution énergétique et angulaire** normalisée,  $\mathfrak{I}(E \rightarrow E', \mu, \varphi)$ , du neutron diffusé s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(E' \rightarrow E, \mu, \varphi) &= \frac{\frac{d^3\sigma(E' \rightarrow E, \mu, \varphi)}{dE d\mu d\varphi}}{\int_0^{E'} dE \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{d^3\sigma(E' \rightarrow E, \mu, \varphi)}{dE d\mu d\varphi} d\mu} = \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu}}{\sigma(E')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}(E' \rightarrow E, \mu) \end{aligned} \quad (2.97)$$

où l'on a posé :

$$\mathcal{L}(E' \rightarrow E, \mu) = \frac{\frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE' d\mu}}{\sigma(E')} \quad \text{MeV}^{-1} \text{sr}^{-1} \quad (2.98)$$

avec  $\sigma(E')$  : **section efficace de la réaction de diffusion considérée** du neutron incident d'énergie cinétique initiale  $E$  avec le noyau atomique cible :

$$\begin{aligned} \sigma(E') &= \int_0^{E'} dE \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{d^3\sigma(E' \rightarrow E, \mu, \varphi)}{dE d\mu d\varphi} d\mu \\ &= \int_0^{E'} dE \int_{-1}^{+1} \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu} d\mu \end{aligned} \quad (2.99)$$

**Unités :**  $\text{cm}^2$  ou barn.

### ▪ Section efficace microscopique différentielle en angle

En intégrant la section efficace doublement différentielle sur l'énergie, on obtient la section efficace différentielle en angle :

$$\frac{d^2\sigma(E', \mu, \varphi)}{d\mu d\varphi} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma(E', \mu)}{d\mu} \quad (2.100)$$

**Unités :**  $\text{cm}^2 \text{ sr}^{-1}$  ou  $\text{b sr}^{-1}$ .

Sa normalisation définit l'anisotropie  $\mathfrak{A}(E, \mu)$  de la diffusion de neutron relative à l'angle de déviation  $\theta$  :

$$\mathfrak{A}(E', \mu) = \frac{\frac{d\sigma(E', \mu)}{d\mu}}{\int_0^{E'} \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu} dE} = \frac{\frac{d\sigma(E', \mu)}{d\mu}}{\sigma(E')} \quad \text{particules sr}^{-1} \quad (2.101)$$

### ▪ Section efficace microscopique différentielle en énergie

Elle s'obtient en intégrant sur les variables angulaires  $\mu$  et  $\varphi$  la section efficace doublement différentielle :

$$\frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E)}{dE} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu} d\mu = \int_{-1}^{+1} \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu} d\mu \quad (2.102)$$

**Unités :**  $\text{cm}^2 \text{ MeV}^{-1}$  ou  $\text{b MeV}^{-1}$ .

Sa normalisation définit le **spectre en énergie**  $\mathfrak{S}(E, E')$  du neutron diffusé :

$$\mathfrak{S}(E', E) = \frac{\int_{-1}^{+1} \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu} d\mu}{\sigma(E)} \quad \text{particules MeV}^{-1} \quad (2.103)$$

### Remarques

- Les définitions précédentes s'appliquent également d'une part au noyau de recul et d'autre part aux particules émises dans d'autres types de réactions nucléaires que celles de diffusion : (n, p), (n,  $\alpha$ ), (n, xn), etc.
- La grandeur  $\mathfrak{S}(E', E)$  définie par (2.103) est une fonction vis-à-vis de l'énergie  $E$  et une densité vis-à-vis de la variable  $E'$ , l'unité  $\text{MeV}^{-1}$  indiquée se rapportant à cette dernière.

## 2.7. Sections efficaces partielles et sections efficaces totales microscopiques d'interaction des neutrons

Le neutron, au lieu d'être diffusé peut aussi être absorbé par le noyau atomique. La section efficace correspondant à ce phénomène d'absorption s'obtient en soustrayant du nombre des neutrons incidents le nombre de neutrons sortant. En utilisant le même formalisme que celui mis en œuvre pour déterminer la section efficace associée aux neutrons diffusés, on montre que la **section efficace d'absorption** est donnée par l'expression suivante<sup>36</sup> (les conventions de notation sont les mêmes que celles du paragraphe 2.3) :

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - |\eta_l|^2] \quad (2.104)$$

avec  $\eta_l = e^{2i\delta_l}$ .

L'expression de la section efficace totale  $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$  s'obtient par sommation de (2.48) et (2.104), ce qui conduit à :

$$\sigma_t = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \text{Re}(\eta_l)] \quad (2.105)$$

### Remarque

En reprenant l'expression (2.37) de l'amplitude de diffusion élastique  $f(\theta)$ , on en détermine la partie imaginaire pour  $\theta = 0$  :

$$\text{Im } f(\theta = 0) = \frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [1 - \text{Re}(\eta_l)] \quad (2.106)$$

En rapprochant (2.105) et (2.106), on déduit immédiatement :

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(\theta = 0) \quad (2.107)$$

Cette relation est connue sous l'appellation de **théorème optique** : elle dérive de l'observation faite que l'atténuation de l'onde incidente par diffusion ou par absorption génère une ombre dans la direction vers l'avant  $\theta = 0$  : l'onde diffusée vers l'avant interfère de manière destructive avec l'onde incidente dans la direction  $\theta = 0$ <sup>37</sup>. Le milieu avec lequel les neutrons thermiques interagissent se comporte comme un milieu optique dont l'indice de réfraction quantique  $n$  est défini par la relation<sup>38</sup> :

<sup>36</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique, op. cit.*, Tome II, pp. 941-943.

<sup>37</sup> P. Fröbrich, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, Clarendon Press, Oxford, 1996, pp. 15-16.

<sup>38</sup> G. Fragneto, « Réflectivité de neutrons : exemples d'études des systèmes en matière molle », dans *JDN 17 - Neutrons et Matière Molle*, EDP Sciences, Collection SFN 11, 2010, pp. 89-100, pp. 91-92. <https://doi.org/10.1051/sfn/2010111006> ; voir R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, p. 357.

$$n^2 = 1 - \frac{\lambda^2 N_b}{\pi} \quad (2.108)$$

avec :

$$N_b = \sum_j b_j N_j \quad (2.109)$$

où  $N_j$  est le nombre de noyaux atomiques par unité de volume et  $b_j$  la longueur de diffusion du noyau atomique  $j$ .

Si  $N_b$  est positif alors  $n < 1$  et il existe un angle critique  $\theta_{critique}$  défini par  $\cos \theta_{critique} = n$  pour lequel le neutron est totalement réfléchi. Un matériau qui réfléchit totalement les neutrons de la sorte est un « miroir » pour les neutrons. L'angle  $\theta_{critique}$  est petit ; par exemple dans le cas du béryllium  $N_b = b = 7.7 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  pour des neutrons d'une longueur d'onde  $\lambda = 1 \text{ \AA}$  ; à partir de (2.108), on obtient :

$$\begin{aligned} n^2 = 1 - \frac{\lambda^2 b N}{\pi} &\rightarrow n \approx 1 - \frac{\lambda^2 b N}{2\pi} \rightarrow n \approx 1 - \frac{(10^{-8})^2 \times 7.7 \cdot 10^{-13} \times 1.22 \cdot 10^{23}}{2 \times 3.14} \\ &= 1 - 1.5 \cdot 10^{-6} = 0.9999985 \end{aligned}$$

d'où :  $\cos \theta_{critique} = n = 0.9999985 \Rightarrow \theta_{critique} \approx 0.1^\circ$ .

Les **figures 10a à 10i** montrent qu'il existe des réactions induites par les neutrons, autres que celles de diffusions élastique et inélastique vues précédemment : capture radiative ( $n, \gamma$ ), fission ( $n, f$ ), réactions ( $n, p$ ), ( $n, \alpha$ ), ( $n, d$ ), ... réactions ( $n, 2n$ ), ( $n, 3n$ ), etc.

Une réaction nucléaire donnée ne se produit pas à coup sûr lors d'une interaction neutron-noyau atomique cible, mais seulement avec une certaine probabilité qui dépend de plusieurs paramètres tels que la nature du noyau cible, l'énergie  $E$  du neutron incident, la température du milieu de propagation (voir chapitre 10), etc. Les différents types de réactions énoncés plus haut ne se produisent possiblement pas tous lors de l'interaction du neutron avec un noyau atomique cible. C'est ainsi par exemple qu'une réaction de fission induite par un neutron thermique sur un noyau de fer 56 est inexistante. Autrement dit, à chacune des réactions nucléaires induites par un neutron est associée une section efficace microscopique, dite **section efficace microscopique partielle**, caractérisant son occurrence. On désigne par  $\sigma_i(E)$ , la section efficace microscopique associée à l'interaction  $i$  entre le neutron d'énergie cinétique  $E$  et le noyau atomique cible considéré. La section efficace microscopique totale,  $\sigma_t(E)$ , est égale à la somme des sections efficaces partielles :

$$\sigma_t(E) = \sum_i \sigma_i(E) \quad (2.110)$$

La **section efficace d'absorption** est définie comme la différence entre la section efficace totale et la section efficace de diffusion :

$$\sigma_a(E) = \sigma_t(E) - \sigma_s(E) = \sigma_{(n,\gamma)}(E) + \sigma_{(n,p)}(E) + \sigma_{(n,\alpha)}(E) + \dots + \sigma_{(n,f)}(E) \quad (2.111)$$

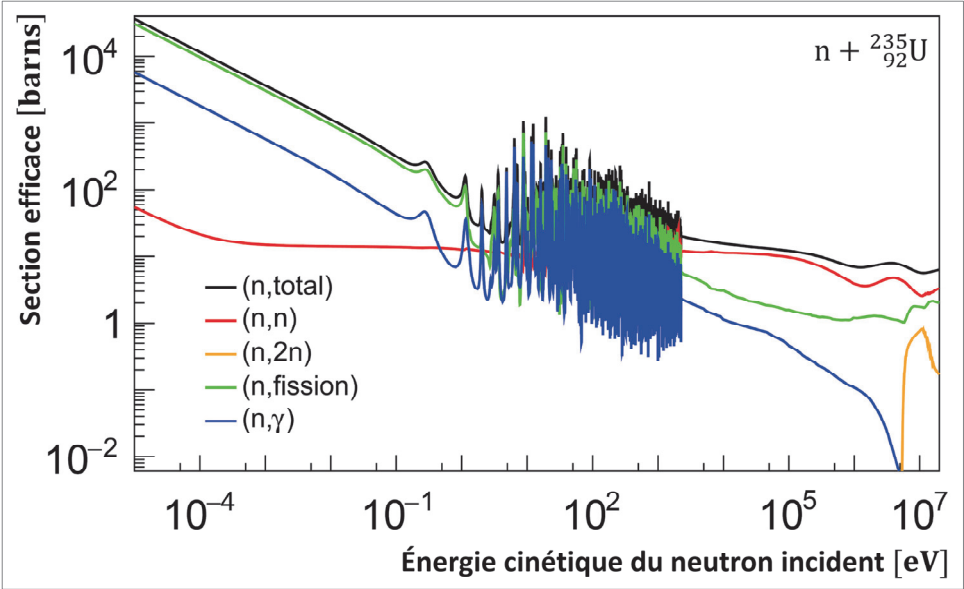


Figure 10a. Sections efficaces microscopiques partielles et totale d'interaction d'un neutron avec un noyau atomique d'uranium 235 en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident ( $10^{-5}$  eV à 20 MeV) reconstruites par un système de traitement des sections efficaces (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).

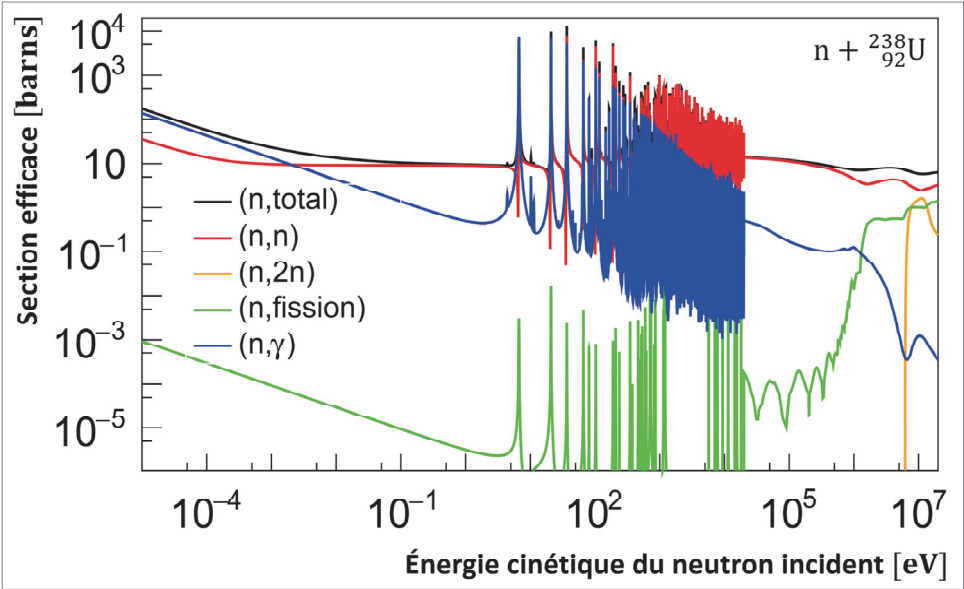


Figure 10b(1). Sections efficaces microscopiques partielles et totale d'interaction d'un neutron avec un noyau atomique d'uranium 238 en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident ( $10^{-5}$  eV à 20 MeV) reconstruites par un système de traitement des sections efficaces (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).

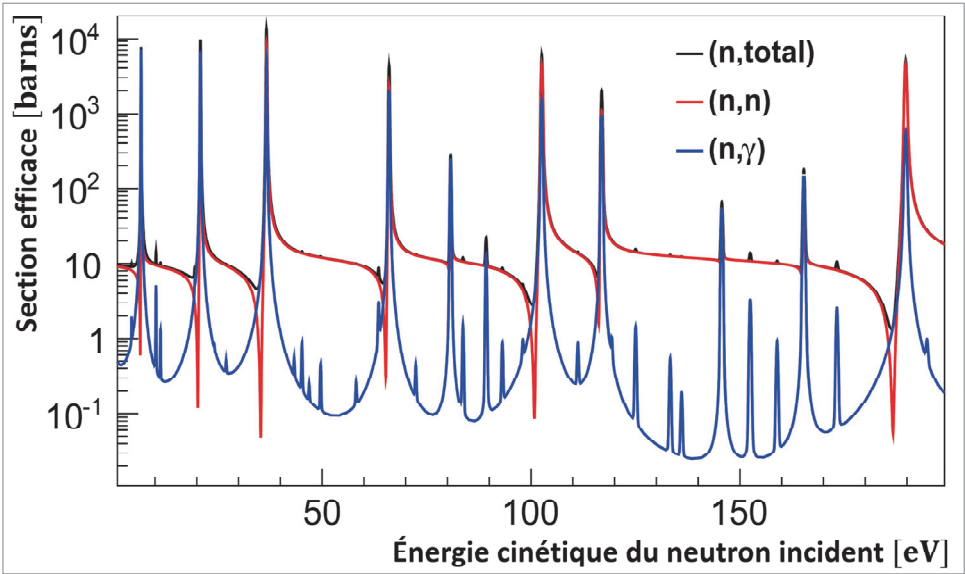


Figure 10b(2). Sections efficaces microscopiques partielles élastique et de capture radiative (n, γ) et section efficace totale d’interaction d’un neutron avec un noyau atomique d’uranium 238 en fonction de l’énergie cinétique du neutron incident ; agrandissement sur l’intervalle 1 eV à 200 eV qui fait apparaître la complexité de la structure des sections efficaces de l’uranium 238 dans ce domaine énergétique.

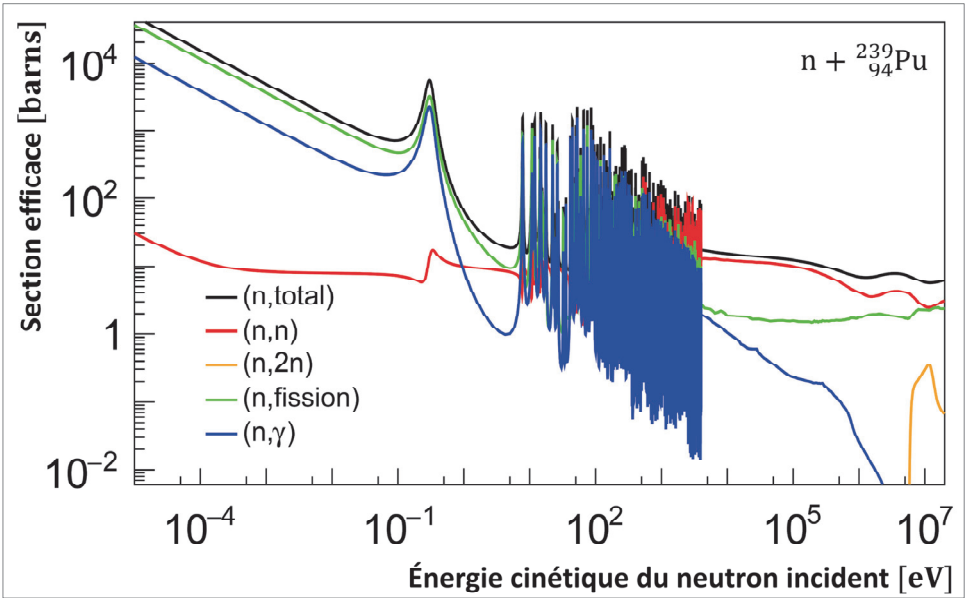


Figure 10c. Sections efficaces microscopiques partielles et totale d’interaction d’un neutron avec un noyau atomique de plutonium 239 en fonction de l’énergie cinétique du neutron incident ( $10^{-5}$  eV à 20 MeV) reconstruites par un système de traitement des sections efficaces (données issues de l’évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).

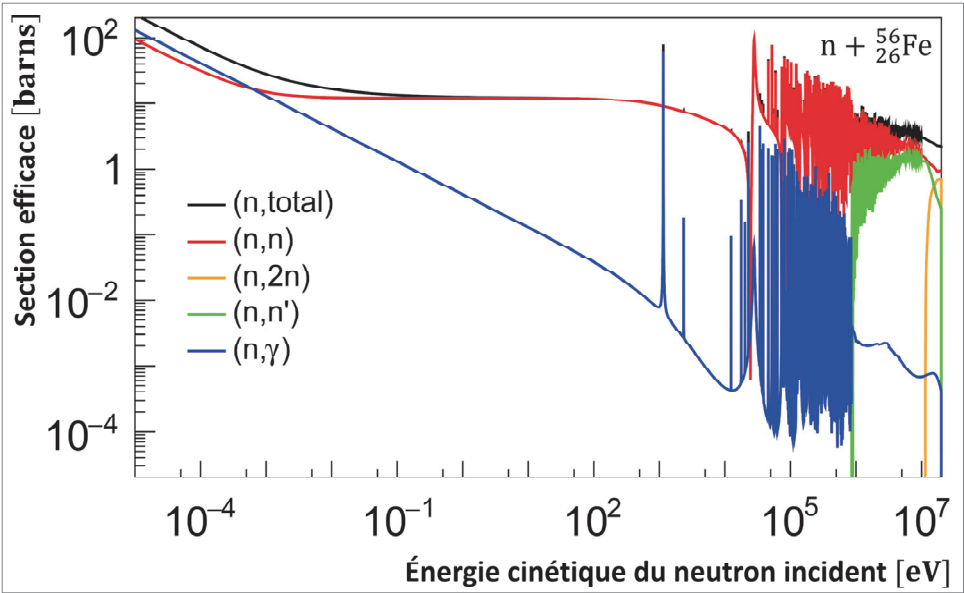


Figure 10d. Sections efficaces microscopiques partielles et totale d'interaction d'un neutron avec un noyau atomique du fer 56 en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident ( $10^{-5}$  eV à 20 MeV) reconstruites par un système de traitement des sections efficaces (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).

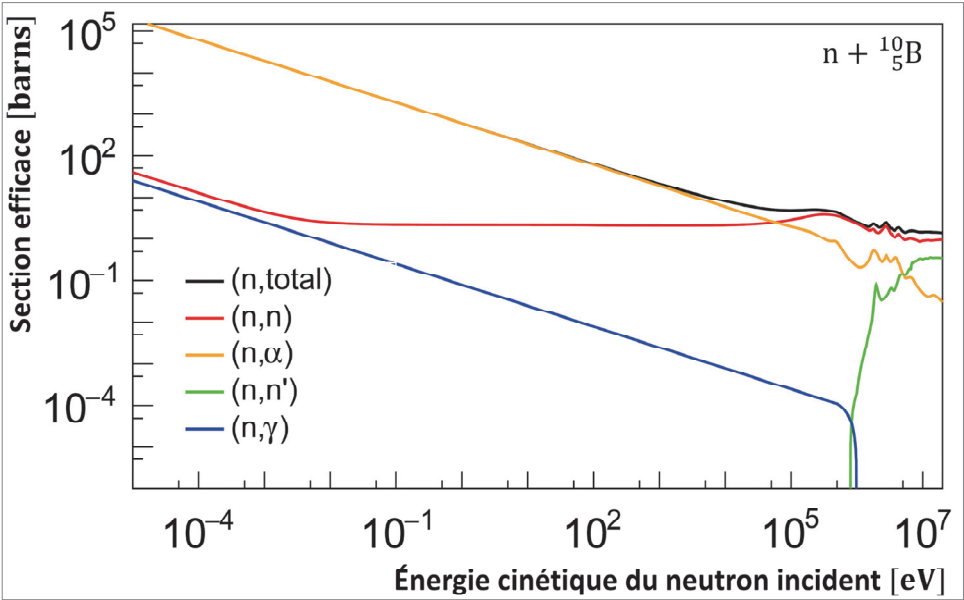


Figure 10e. Sections efficaces microscopiques partielles et totale d'interaction d'un neutron avec un noyau atomique de bore 10 en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident ( $10^{-5}$  eV à 20 MeV) reconstruites par un système de traitement des sections efficaces (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).



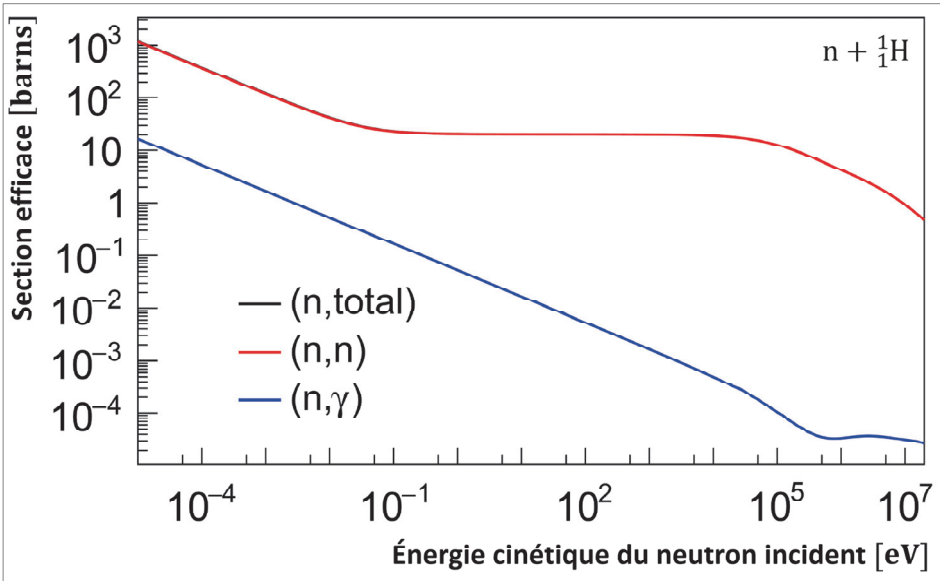


Figure 10f. Sections efficaces microscopiques partielles et totale d'interaction d'un neutron avec un noyau atomique d'hydrogène 1 en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident ( $10^{-5}$  eV à 20 MeV) reconstruites par un système de traitement des sections efficaces (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).

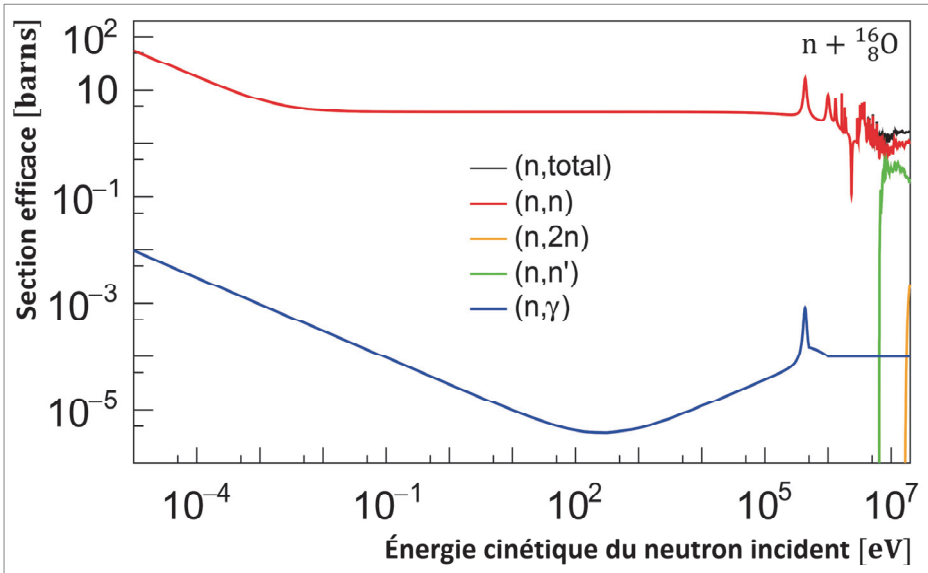


Figure 10g. Sections efficaces microscopiques partielles et totale d'interaction d'un neutron avec un noyau atomique d'oxygène 16 en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident ( $10^{-5}$  eV à 20 MeV) reconstruites par un système de traitement des sections efficaces (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).

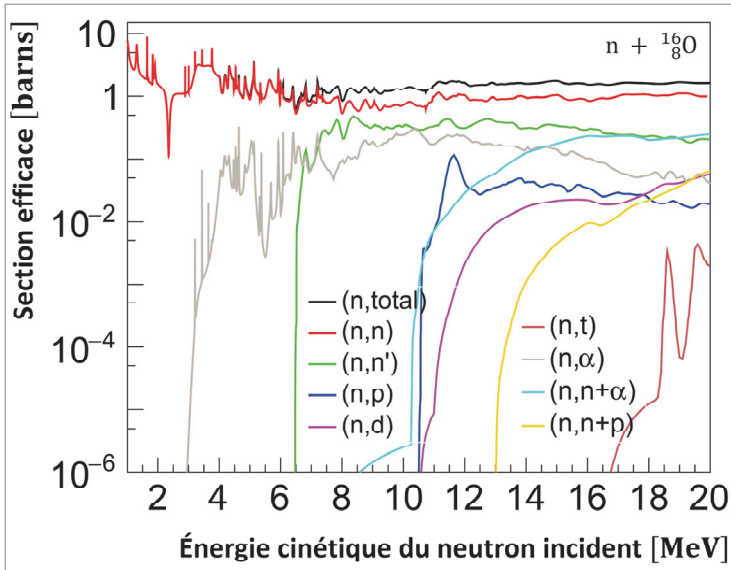


Figure 10h. Section efficace des principales réactions  $n + {}^{16}\text{O}$  en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).<sup>39</sup>

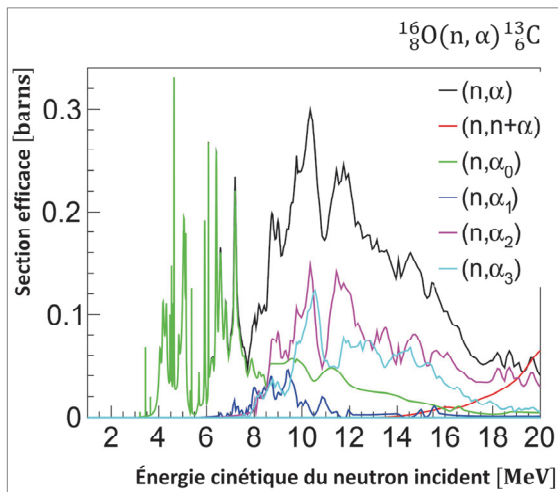


Figure 10i. Section efficace des principales réactions  ${}^{16}\text{O}(n, \alpha){}^{13}\text{C}$  en fonction de l'énergie cinétique du neutron – zoom sur le domaine d'énergie au-dessus de 2 MeV ; les différentes réactions partielles  $(n, \alpha_i)$  correspondent à l'émission d'une particule alpha d'énergie cinétique  $E_{\alpha i}$  et à la formation du noyau de carbone 13 dans un état excité dont l'énergie  $E_i^*$  est corrélée à l'énergie cinétique  $E_{\alpha i}$  (voir chapitre 4 § 2), (données issues de l'évaluation JEFF-3.3, voir chapitre 13).<sup>40</sup>

<sup>39</sup> Voir aussi : B. Galhaut, Étude de la mesure de la section efficace de la réaction  ${}^{16}\text{O}(n, \alpha){}^{13}\text{C}$  du seuil à 10 MeV, Thèse de doctorat, Université de Caen Normandie, 2017, p. 13.

<sup>40</sup> *Ibid.*, p. 14.

**Exemple : Sections efficaces neutroniques microscopiques thermiques de l'uranium 235.**

Ainsi dans le cas de l'uranium 235 pour un neutron à l'énergie thermique (0.025 eV qui correspond à une vitesse de  $2200 \text{ m s}^{-1}$ ), on a les valeurs des sections efficaces microscopiques partielles suivantes :

- $\sigma_c = 98.95 \text{ barns}$  capture radiative (n,  $\gamma$ ) ;
- $\sigma_f = 583.2 \text{ barns}$  fission (n, f) ;
- $\sigma_s = 15.11 \text{ barns}$  diffusion élastique (n, n).

Pour un neutron thermique, la section efficace microscopique totale est donc  $\sigma_t$  :

$$\sigma_t = \sigma_c + \sigma_f + \sigma_s = 98.95 + 583.2 + 15.11 = 682.15 + 15.11 = 697.26 \text{ b}$$

La somme  $\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f = 98.95 + 583.2 = 682.15$  représente la **section efficace d'absorption** globale qui cumule la section efficace  $\sigma_c$  de « capture » (n,  $\gamma$ ) dite stérile par opposition à la section efficace  $\sigma_f$  de fission (productrice de neutrons).

Selon les auteurs ou le contexte, les sections efficaces (n, xn) sont soit classées comme sections efficaces de diffusion, soit incorporées dans la section efficace d'absorption, au même titre que la section efficace de fission.

La **section efficace totale de diffusion inélastique**,  $\sigma_{s,in}(E)$ , est la somme des composantes de **diffusion inélastiques discrètes**,  $\sigma_{s,ined}(E)$ , et **inélastique continue**  $\sigma_{s,inec}(E)$  :

$$\sigma_{in}(E) = \sigma_{s,ined}(E) + \sigma_{s,inec}(E) \quad (2.112)$$

Les valeurs des sections efficaces des réactions nucléaires induites par des neutrons d'énergie thermique ( $2200 \text{ m s}^{-1}$ ), émis selon un spectre de fission, et à 14 MeV pour de nombreux isotopes intéressant le neutronicien, font l'objet de diverses compilations.<sup>41</sup>

De la connaissance des sections efficaces on peut déduire la probabilité  $p_r$  qu'une réaction nucléaire particulière se produise en calculant les rapports :

$$p_r = \frac{\sigma_r(E)}{\sigma_t(E)}, \quad r = (n, n), (n, n'), (n, \gamma), (n, p), (n, \alpha), (n, 2n), (n, 3n), (n, f) \dots \quad (2.113)$$

**Exemple**

Ainsi, pour les réactions induites par un neutron sur l'uranium 235 de l'exemple précédent, on a :

$$p_{(n,n)} = \frac{\sigma_{(n,n)}(E)}{\sigma_t(E)} = \frac{15.11}{697.26} \approx 0.02167$$

<sup>41</sup> JEF-Report 14, *Table of Simple Integral Neutron Cross Section Data from JEF-2.2, ENDF/BVI, JENDL-3.2, BROND-2 and CENDL-2*, AEN/OCDE, 1994, Janis Nuclear Display Program, AEN/OCDE ; <http://www.nea.fr/janis> ; voir aussi chapitre 10 pour ce qui concerne les neutrons thermiques.

$$p_{(n,\gamma)} = \frac{\sigma_{(n,\gamma)}(E)}{\sigma_t(E)} = \frac{98.95}{697.26} \approx 0.1419 ; p_{(n,f)} = \frac{\sigma_{(n,f)}(E)}{\sigma_t(E)} = \frac{583,2}{697.26} \approx 0.836$$

Dans ce même cas particulier, pour un neutron effectivement absorbé, on peut aussi déterminer la probabilité pour que la réaction soit une capture stérile (pas de production de neutron) ou bien une fission :

$$p'_{(n,\gamma)} = \frac{\sigma_{(n,\gamma)}(E)}{\sigma_a(E)} = \frac{98.95}{682.15} \approx 0.1450 ; p'_{(n,f)} = \frac{\sigma_{(n,f)}(E)}{\sigma_a(E)} = \frac{583,2}{682.15} \approx 0.8549$$

La **figure 11** ci-dessous explique, à partir des données des sections efficaces microscopiques, pourquoi l'uranium 235 est le noyau fissile retenu pour concevoir des réacteurs à neutrons thermiques (on dit aussi lents) et le plutonium 239 pour les réacteurs à neutrons rapides.

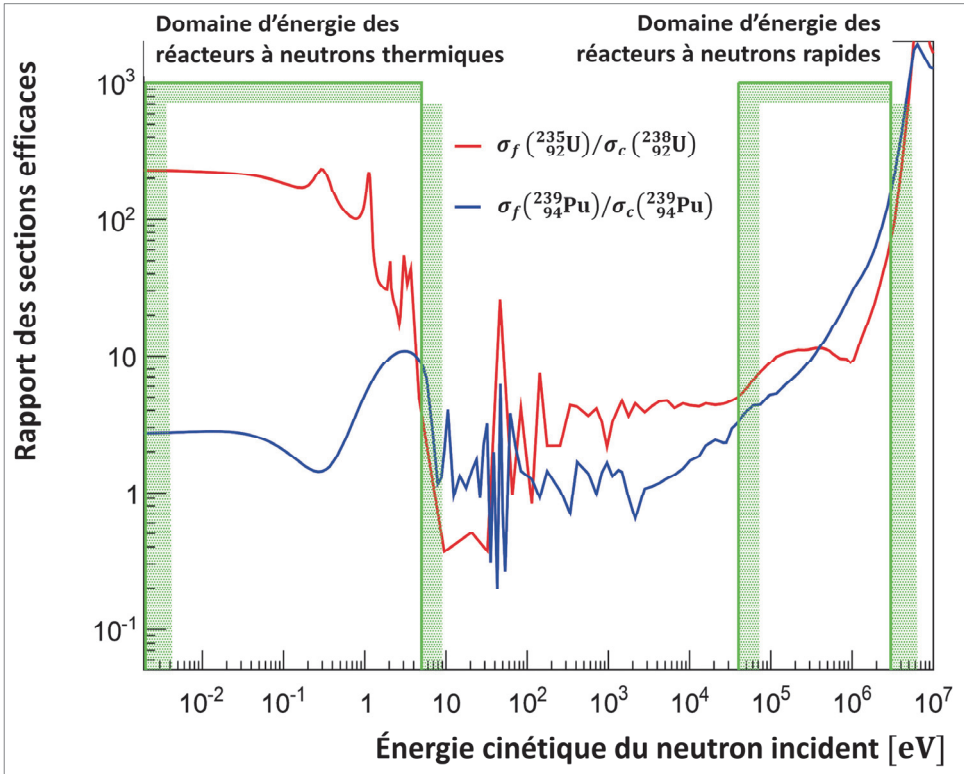


Figure 11. Variation du rapport des sections  $\sigma_f(^{235}\text{U})/\sigma_c(^{238}\text{U})$  en pointillé et  $\sigma_f(^{239}\text{Pu})/\sigma_c(^{239}\text{Pu})$  en trait plein, en fonction de l'énergie des neutrons<sup>42</sup> (données issues de l'évaluation JEFF-3.3).

<sup>42</sup> D'après G. Vendryes, « The science of fast reactors and why it has been studied », *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A 331, 1990, p. 293-300, Figure 1, p. 294.

### 3. Sections efficaces macroscopiques

#### 3.1. Définitions

Une **section efficace macroscopique**, notée généralement  $\Sigma$ , s'obtient par multiplication de la section efficace microscopique (qu'elle soit, différentielle ou non) par le nombre  $N(\vec{r})$  de noyaux cibles présents par unité de volume ( $\text{cm}^{-3}$ ) en un point  $\vec{r}$  donné de l'espace. La multiplication des sections efficaces microscopiques par la concentration en nucléides effectue le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique dans le but de déterminer des grandeurs physiques d'intérêt telles que celles évoquées dans le chapitre 1 (voir figure 4).

On a ainsi, en conservant les mêmes notations qu'au paragraphe 2.6, à partir des relations (2.96) et (2.102) :

- la **section efficace macroscopique différentielle de diffusion en énergie et en angle** :

$$\begin{aligned}\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) &= N(\vec{r})\sigma_s(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = N(\vec{r}) \frac{d^3\sigma(E' \rightarrow E, \mu, \varphi)}{dE d^2\Omega} \\ &= N(\vec{r}) \frac{d^3\sigma(E' \rightarrow E, \mu, \varphi)}{dE d\mu d\varphi}\end{aligned}\quad (3.1a)$$

et en raison de l'isotropie selon l'angle azimutal  $\varphi$  (3.a) se ré-écrit :

$$\begin{aligned}\Sigma_s(\vec{r}, E' \rightarrow E, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') &= N(\vec{r})\sigma_s(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = N(\vec{r}) \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\mu} \\ &= N(\vec{r}) \frac{d^2\sigma(E' \rightarrow E, \mu)}{dE d\Omega}\end{aligned}\quad (3.1b)$$

puisque  $d\Omega = 2\pi d\mu$ .

**Unités** :  $\text{cm}^{-1} \text{MeV}^{-1} \text{sr}^{-1}$ ,

- la **section efficace macroscopique différentielle de diffusion en énergie ou de transfert en énergie** :

$$\Sigma_s(\vec{r}, E \rightarrow E') = N(\vec{r}) \frac{d\sigma(E' \rightarrow E)}{dE} \quad (3.2)$$

**Unités** :  $\text{cm}^{-1} \text{MeV}^{-1}$  ;

- les **sections efficaces macroscopiques partielles**, toujours en conservant les notations du paragraphe 2.6 et à partir des relations (2.110) et (2.111) :

- diffusion élastique (n, n) :

$$\Sigma_{s,e}(\vec{r}, E) = N(\vec{r})\sigma_{s,e}(E) \quad (3.3)$$

- diffusion inélastique discrète :

$$\Sigma_{s,ind}(\vec{r}, E) = N(\vec{r})\sigma_{s,ind}(E) \quad (3.4)$$

- diffusion inélastique continue :

$$\Sigma_{s,inc}(\vec{r}, E) = N(\vec{r})\sigma_{s,inc}(E) \quad (3.5)$$

- capture radiative (n,  $\gamma$ ) :

$$\Sigma_c(\vec{r}, E) = N(\vec{r})\sigma_c(E) \quad (3.6)$$

- fission (n, f) :

$$\Sigma_f(\vec{r}, E) = N(\vec{r})\sigma_f(E) \quad (3.7)$$

- absorption :

$$\Sigma_a(\vec{r}, E) = \Sigma_c(\vec{r}, E) + \dots + \Sigma_f(\vec{r}, E) + \dots \quad (3.8)$$

- totale :

$$\begin{aligned} \Sigma_t(\vec{r}, E) &= \sum_{i=s,c,f,\dots} \Sigma_i(\vec{r}, E) = \sum_{i=s,c,f,\dots} N(\vec{r})\sigma_i(E) = N(\vec{r}) \sum_{i=s,c,f,\dots} \sigma_i(E) \\ &= N(\vec{r})\sigma_t(E) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Unités :  $\text{cm}^{-1}$  .

Signification conventionnelle des indices utilisés ici :

- *s* (*scattering*) : réaction de diffusion :
  - *e* : réaction de diffusion élastique
  - *ind* : réaction de diffusion inélastique discrète
  - *inc* : réaction de diffusion inélastique continue
- *c* : réaction de capture radiative (aussi qualifiée de stérile)
- *a* : réaction d'absorption, sommation faite sur les réactions faisant « disparaître » le neutron incident
- *f* : réaction de fission
- *t* : totale, sommation faite sur toutes les réactions nucléaires induites par le neutron incident.

### Remarque

Dans la pratique, on a souvent affaire à des milieux, dans la plupart des cas supposés homogènes, formés de différents types de nucléides repérés par l'indice *k*.

La section efficace étant une grandeur physique additive, les sections efficaces macroscopiques relatives au mélange homogène de nucléides considéré s'écrivent respectivement en conservant les notations précédentes indexées par l'indice *k* :

- diffusion :

$$\Sigma_s(\vec{r}, E) = \sum_k \Sigma_{s,k}(\vec{r}, E) = \sum_k N_k(\vec{r})\sigma_{s,k}(E) \quad (3.10)$$

- capture radiative ( $n, \gamma$ ) :

$$\Sigma_c(\vec{r}, E) = \sum_k \Sigma_{c,k}(\vec{r}, E) = \sum_k N_k(\vec{r}) \sigma_{c,k}(E) \quad (3.11)$$

- fission ( $n, \gamma$ ) :

$$\Sigma_f(\vec{r}, E) = \sum_k \Sigma_{f,k}(\vec{r}, E) = \sum_k N_k(\vec{r}) \sigma_{f,k}(E) \quad (3.12)$$

- absorption :

$$\Sigma_a(\vec{r}, E) = \sum_k \Sigma_{a,k}(\vec{r}, E) = \sum_k \sum_{i \neq s} \Sigma_{i,k}(\vec{r}, E) = \sum_k \sum_{i \neq s} N_k(\vec{r}) \sigma_{i,k}(E) \quad (3.13)$$

- totale :

$$\Sigma_t(\vec{r}, E) = \Sigma_s(\vec{r}, E) + \Sigma_a(\vec{r}, E) = \sum_k \Sigma_{tk}(\vec{r}, E) = \sum_k \Sigma_{s,k}(\vec{r}, E) + \Sigma_{a,k}(\vec{r}, E) \quad (3.14)$$

Si les concentrations des radionucléides  $k$ ,  $N_k(\vec{r})$ , sont exprimées en  $\text{cm}^{-3}$  et les sections efficaces microscopiques en  $\text{cm}^2$ , alors les sections efficaces macroscopiques s'expriment en  $\text{cm}^{-1}$ .

Si les sections efficaces sont données en barn, les concentrations peuvent être données en unité  $10^{24}$  afin de faciliter les applications numériques.

### Exemple 1 : calcul des sections efficaces neutroniques thermiques macroscopiques de l'eau

Pour l'eau ( $\text{H}_2\text{O}$ ) dont on a précédemment évoqué l'importance par son rôle de matériau modérateur (ou ralentisseur) des neutrons, on a les valeurs suivantes des sections efficaces microscopiques neutroniques dans le **domaine d'énergie thermique**<sup>43</sup> :

	Hydrogène : H	Oxygène : O
Section efficace microscopique de diffusion, barns :	$\sigma_{s,H} = 30$	$\sigma_{s,O} = 4.$
Section efficace microscopique d'absorption, barns :	$\sigma_{a,H} = 0.33$	$\sigma_{a,O} = 2.10^{-4}$

- masse volumique de l'eau :  $\rho = 1 \text{ g cm}^{-3}$ ;
- masse molaire de l'eau :  $M_{\text{H}_2\text{O}} \approx 2 \times 1 + 16 = 18 \text{ g mol}^{-1}$  ;
- nombre d'Avogadro :  $N_{Av} = 6.022 \cdot 10^{23}$ .

Le milieu d'étude étant homogène on s'affranchit de la mention de la variable d'espace ( $\vec{r}$ ) dans les notations des concentrations et des sections efficaces macroscopiques.

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{N_{Av} \times \rho}{M_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \times 1}{18} = 3.34 \cdot 10^{22} \text{ molécules d'eau cm}^{-3}$$

$$N_{\text{H}_2\text{O}} = 3.34 \cdot 10^{-2} \text{ en unité } 10^{24} \text{ cm}^{-3}$$

- **Section efficace macroscopique de diffusion de l'eau,  $\Sigma_{s,\text{H}_2\text{O}}$  :**

$$\Sigma_{s,\text{H}_2\text{O}} = N_{\text{H}_2\text{O}} \times \sigma_{s,\text{H}_2\text{O}}$$

<sup>43</sup> P. Reuss, J. Bussac, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris, 1978, pp. 54-56.

$$\sigma_{s,H_2O} = 2 \times \sigma_{s,H} + \sigma_{s,O} = [2 \times 30 + 4.] \times 10^{-24} = 64.10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$\Sigma_{s,H_2O} = 3.34 \cdot 10^{22} \times 64 \cdot 10^{-24} [\text{ou } 3.34 \cdot 10^{-2} \times 64] = 2.14 \text{ cm}^{-1}$$

▪ **Section efficace macroscopique d'absorption de l'eau,  $\Sigma_{a,H_2O}$  :**

$$\Sigma_{a,H_2O} = N_{H_2O} \times \sigma_{a,H_2O}$$

$$\sigma_{a,H_2O} = 2 \times \sigma_{a,H} + \sigma_{a,O} = [2 \times 0.33 + 2.10^{-4}] \times 10^{-24} = 0.66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$\Sigma_{a,H_2O} = 3.34 \cdot 10^{22} \times 0.66 \cdot 10^{-24} [\text{ou } 3.34 \cdot 10^{-2} \times 0.66] = 2.2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

La section efficace macroscopique totale de l'eau est par suite :

$$\Sigma_{t,H_2O} = \Sigma_{s,H_2O} + \Sigma_{a,H_2O} = 2.14 + 0.022 = 2.162 \text{ cm}^{-1}.$$

### Remarque

Les valeurs des sections efficaces utilisées ici ne tiennent pas compte des liaisons moléculaires (voir l'importance de la prise en compte de celles-ci dans le chapitre 10).

Les sections efficaces macroscopiques permettent également de déterminer les probabilités d'occurrence  $q_k(E)$  des collisions du neutron sur un nucléide d'espèce  $k$  donnée :

$$q_k(E) = \frac{\Sigma_{t,k}(E)}{\Sigma_t(E)}$$

Dans le cas de l'exemple précédent de l'eau et d'un neutron à l'énergie thermique, on a :

$$q_H = \frac{\Sigma_{t,H}}{\Sigma_{t,H_2O}} = \frac{2[\sigma_{a,H} + \sigma_{s,H}] \times N_{H_2O}}{\Sigma_{t,H_2O}} = \frac{2 \times [0.33 + 30] \times 3.34 \cdot 10^{-2}}{2.162} = \frac{2.026}{2.162} \approx 0.937095$$

$$q_O = \frac{\Sigma_{t,O}}{\Sigma_{t,H_2O}} = \frac{[\sigma_{a,O} + \sigma_{s,O}] \times N_{H_2O}}{\Sigma_{t,H_2O}} = \frac{[2.10^{-4} + 4.] \times 3.34 \cdot 10^{-2}}{2.162} = \frac{0.133}{2.162} \approx 0.061517$$

### Exemple 2 : calcul des sections efficaces neutroniques thermiques macroscopiques d'un béton

On dispose des données suivantes :

- Nucléides de types  $i$  :  $^1\text{H}$ ,  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{27}\text{Al}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{56}\text{Fe}$ .
- Nombre d'Avogadro  $N_{av} = 6.022 \cdot 10^{23}$ .
- Masse volumique du béton  $\rho = 2.35 \text{ g cm}^{-3}$ .
- $x_i$  : pourcentage en masse du nucléide de type  $i$ .
- Masse atomique  $M(A_i, Z_i)$  du nucléide de type  $i$  que l'on assimile ici par commodité de calcul au nombre de masse  $A_i$ .
- $\sigma_i$  : section efficace neutronique microscopique totale du nucléide de type  $i$  dans le domaine d'énergie thermique



La concentration,  $N_i$ , des nucléides de type  $i$  et la section efficace neutronique macroscopique totale correspondante,  $\Sigma_{ti}$ , sont données respectivement par les relations :

$$N_i \approx \frac{N_{av}}{A_i} \rho x_i, \quad \Sigma_{ti} = N_i \sigma_i$$

La composition isotopique d'un béton et les sections efficaces relatives à un neutron à l'énergie thermique sont données dans le **tableau 7**.

**Tableau 7. Composition isotopique d'un béton et sections efficaces neutroniques totales microscopiques et macroscopiques dans le domaine d'énergie thermique (1 barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>)**

$i$	Nucléide $i$	$A_i$	$x_i$ %	$N_i$ cm <sup>-3</sup>	$\sigma_i$ barn	$\Sigma_{ti}$ cm <sup>-1</sup>
1	<sup>1</sup> H	1	0.5	$7.07 \cdot 10^{21}$	20.76	$1.45 \cdot 10^{-1}$
2	<sup>28</sup> Si	28	30	$1.55 \cdot 10^{22}$	2.36	$3.66 \cdot 10^{-2}$
3	<sup>16</sup> O	16	51.5	$4.45 \cdot 10^{22}$	4.01	$1.78 \cdot 10^{-1}$
4	<sup>27</sup> Al	27	4	$2.09 \cdot 10^{21}$	1.65	$3.45 \cdot 10^{-3}$
5	<sup>40</sup> Ca	40	12	$4.24 \cdot 10^{21}$	3.47	$1.47 \cdot 10^{-2}$
6	<sup>56</sup> Fe	56	2	$5.05 \cdot 10^{20}$	14.8	$7.47 \cdot 10^{-3}$

**Tableau 8. Probabilités d'interaction d'un neutron thermique avec un nucléide du béton dont la composition isotopique est fournie par le tableau 8.**

$i$	Nucléide $i$	Section efficace macroscopique totale $\Sigma_{ti}$ cm <sup>-1</sup>	Probabilités d'interaction sur un nucléide de type $i$ $p_i = \frac{\Sigma_{ti}}{\Sigma_t}$
1	<sup>1</sup> H	$1.45 \cdot 10^{-1}$	$p_1 = \frac{1.45 \cdot 10^{-1}}{0.382} \approx 0.379$
2	<sup>28</sup> Si	$3.66 \cdot 10^{-2}$	$p_2 = \frac{3.66 \cdot 10^{-2}}{0.382} \approx 9.58 \cdot 10^{-2}$
3	<sup>16</sup> O	$1.78 \cdot 10^{-1}$	$p_3 = \frac{1.78 \cdot 10^{-1}}{0.382} \approx 0.45814$
4	<sup>27</sup> Al	$3.45 \cdot 10^{-3}$	$p_4 = \frac{3.45 \cdot 10^{-3}}{0.382} \approx 9.03 \cdot 10^{-3}$
5	<sup>40</sup> Ca	$1.47 \cdot 10^{-2}$	$p_5 = \frac{1.47 \cdot 10^{-2}}{0.382} \approx 3.848 \cdot 10^{-2}$
6	<sup>56</sup> Fe	$7.47 \cdot 10^{-3}$	$p_6 = \frac{7.47 \cdot 10^{-3}}{0.382} \approx 1.955 \cdot 10^{-2}$

La section efficace macroscopique totale du béton est donc :

$$\Sigma_t = \sum_{i=1}^6 \Sigma_{ti} = 0.38 \text{ cm}^{-1}$$

De la connaissance des sections efficaces macroscopiques  $\Sigma_{ti}$ , relatives à chacun des nucléides qui entrent dans la composition du béton, on peut déduire la probabilité  $p_i$ ,  $i = 1, 6$  qu'a le neutron d'interagir avec un type de nucléide  $i$  donné lors d'une collision ; les valeurs correspondantes sont consignées dans la 4<sup>e</sup> colonne du **tableau 8**.

### 3.2. Interprétation probabiliste de la section efficace macroscopique – Libres parcours moyens

La section efficace macroscopique joue un rôle fondamental en neutronique. Elle permet en effet de déterminer les taux de réaction (nombre de réactions nucléaires se produisant par unité de volume et de temps) qui interviennent explicitement dans les équations du transport des neutrons (équation de Boltzmann) et les équations d'évolution (équations de Bateman) régissant les compositions isotopiques du milieu soumis à l'irradiation (voir annexe II du chapitre 13).

Elle est également très utile pour caractériser le parcours des neutrons dans la matière. Son unité conduit à l'appréhender comme une densité de probabilité, c'est-à-dire une *probabilité d'interaction par unité de longueur parcourue*. Il est possible d'établir que l'inverse de la section efficace macroscopique correspond au libre parcours moyen du neutron entre deux collisions successives. Pour cela, on considère un milieu supposé homogène dont la section efficace neutronique macroscopique totale est  $\Sigma_t(E)$  pour un neutron d'énergie cinétique  $E$ . On cherche à déterminer à partir de  $\Sigma_t(E)$  la probabilité  $P(x, E)$  qu'a un neutron d'énergie cinétique  $E$  de franchir une distance  $x$  sans subir de collision. Pour cela on exprime la probabilité  $P(x + dx, E)$  qu'a le neutron de franchir la distance  $x + dx$  sans subir de choc,  $dx$  étant un déplacement élémentaire :

$$P(x + dx, E) = P(x, E)(1 - \Sigma_t(E)dx) \quad (3.15)$$

qui est le produit de la probabilité  $P(x, E)$  précédemment définie par la probabilité  $(1 - \Sigma_t(E))dx$  de franchir sans choc la distance élémentaire  $dx$ . On aura en effet remarqué, en adoptant l'acception probabiliste de la section efficace macroscopique<sup>44</sup>, que  $\Sigma_t(E)dx$  correspond à la probabilité pour le neutron d'avoir une collision sur la distance élémentaire  $dx$ , et par conséquent  $(1 - \Sigma_t(E)dx)$  celle de n'avoir pas subi de choc sur ce même parcours.

L'équation (3.15) est une équation différentielle que l'on peut réécrire comme :

$$\frac{P(x + dx, E) - P(x, E)}{P(x, E)} = -\Sigma_t(E)dx \quad (3.16)$$

On reconnaît en (3.16) une différentielle logarithmique dont l'intégration conduit à l'expression cherchée de  $P(E, x)$  :

---

<sup>44</sup> Remarque :

$$\int_0^{\lambda(E) = \frac{1}{\Sigma_t(E)}} \Sigma_t(E) dx = 1$$

$$P(E, x) = e^{-\Sigma_t(E)x} \quad (3.17)$$

La loi de probabilité associée au parcours  $x$  du neutron d'énergie cinétique  $E$  exprimant la probabilité qu'a le neutron de franchir sans collision ce parcours  $x$  et d'avoir un choc à l'issue de celui-ci est donc la densité de probabilité :

$$f(x, E) = e^{-\Sigma_t(E)x} \Sigma_t(E) \quad (3.18a)$$

On vérifie que  $f(x, E)$  est bien normalisée à l'unité sur le domaine  $[0, \infty[$  :

$$\int_0^\infty f(x, E) dx = \int_0^\infty e^{-\Sigma_t(E)x} \Sigma_t(E) dx = \Sigma_t(E) \left[ -\frac{e^{-\Sigma_t(E)x}}{\Sigma_t(E)} \right]_0^\infty = 1 \quad (3.18b)$$

On détermine le parcours moyen du neutron en calculant la moyenne de toutes les valeurs  $x$  possibles du parcours, donnée par définition par l'espérance mathématique :

$$\bar{x}(E) = \int_0^\infty x f(x, E) dx = \int_0^\infty x e^{-\Sigma_t(E)x} \Sigma_t(E) dx \quad (3.19a)$$

$$\bar{x}(E) = \frac{1}{\Sigma_t(E)} \quad \text{en cm si } \Sigma_t(E) \text{ cm}^{-1} \quad (3.19b)$$

La quantité  $\bar{x}(E)$  est dénommée **libre parcours moyen du neutron** d'énergie cinétique  $E$  et il est égal à l'inverse de la section efficace totale ; il est souvent noté  $\lambda$  dans la littérature relative à la neutronique (et donc à ne pas confondre avec la notation similaire très usitée de la constante de décroissance radioactive).

On caractérise également un libre parcours moyen vis-à-vis d'une réaction nucléaire spécifique. Par exemple :

- pour le phénomène d'absorption :

$$\lambda_a(E) = \frac{1}{\Sigma_a(E)} \quad (3.20)$$

- pour le phénomène de diffusion :

$$\lambda_s(E) = \frac{1}{\Sigma_s(E)} \quad (3.21)$$

Comme  $\Sigma_t(E) = \Sigma_s(E) + \Sigma_a(E)$ , alors :

$$\frac{1}{\lambda_t(E)} = \frac{1}{\lambda_s(E)} + \frac{1}{\lambda_a(E)} \quad (3.22)$$

Autrement dit, les libres parcours moyens **ne sont pas additifs**.

### Exemple

Dans le cas précédent de l'eau, on a respectivement pour la diffusion, l'absorption et ces deux réactions prises en compte en même temps :

- Libre parcours moyen de diffusion :

$$\lambda_{s,H_2O} = \frac{1}{\Sigma_{s,H_2O}} = \frac{1}{2.14} = 0.467 \text{ cm}$$

- Libre parcours moyen d'absorption :

$$\lambda_{a,H_2O} = \frac{1}{\Sigma_{a,H_2O}} = \frac{1}{0.022} = 45.45 \text{ cm}$$

- Libre parcours moyen entre deux collisions :

$$\lambda_{t,H_2O} = \frac{1}{\Sigma_{t,H_2O}} = \frac{1}{2.16} = 0.463 \text{ cm}.$$

### Remarque

En désignant par  $v$  la vitesse du neutron, la durée moyenne qui sépare deux de ses collisions successives dans un milieu homogène donné s'écrit  $\lambda/v$  soit  $1/(v \Sigma)$  ; par exemple dans l'eau et pour un neutron thermique :  $\lambda_{t,H_2O} = 0.463 \text{ cm}$ ,  $\Sigma_{t,H_2O} = 2.162 \text{ cm}^{-1}$ ,  $v = 220\,000 \text{ cm s}^{-1}$  d'où  $1/(v \Sigma) = 1/(2.2 \cdot 10^5 \times 2.162) = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ .

## 4. Typologie des sections efficaces

Les **figures 12 et 13** montrent le comportement des sections efficaces en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident. On y distingue de grandes variations de la section efficace sur des domaines d'énergie cinétique étroit du neutron incident. Elles ont fait l'objet de premières études théoriques par Francis Perrin et Walter M. Elsasser en France, Hans A. Bethe aux États-Unis, se fondant sur des résultats expérimentaux acquis par Fermi *et alii*<sup>45 46</sup>. Dans leurs publications, F. Perrin et W. M. Elsasser<sup>47</sup> d'une part, et

<sup>45</sup> Enrico Fermi, Edoardo Amaldi, O. D'Agostino, F. Rasetti and E. Segrè, « Artificial radioactivity produced by neutron bombardment », *Proc. R. Soc. Lond. A* 146, September 1, 1934, pp. 483–500, <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0168>.

<sup>46</sup> Edoardo Amaldi, O. D'Agostino, Enrico Fermi, B. Pontecorvo, F. Rasetti, E. Segrè, « Artificial radioactivity produced by neutron bombardment – II », *Proc. R. Soc. Lond. A* 149, April 10, 1935, pp. 522–558, <https://doi.org/10.1098/rspa.1935.0080>. Ce type d'expériences ont été

<sup>47</sup> « ...pour les neutrons libres de faible énergie, ces sections sont considérablement accrues si leur énergie correspond à un niveau virtuel. Le phénomène de résonance qui joue dans ce cas est analogue à celui qui se présente pour la pénétration des particules à travers une barrière de potentiel », in F. Perrin, W. M. Elsasser, « Théorie de la capture sélective des neutrons lents par certains noyaux », *J. Phys. Radium*, 1935, 6 (5), pp.194–

de H. A. Bethe<sup>48</sup> d'autre part, désignent ces structures en pics des sections efficaces par le terme de « **résonances** ».

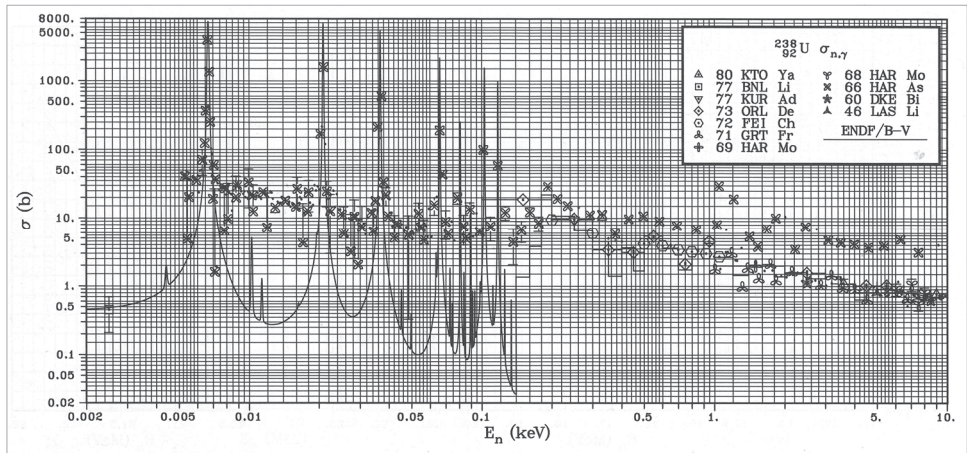


Figure 12. Variation de la section efficace de la réaction  $(n, \gamma)$  sur l'uranium 238 dans le domaine épithermique. La figure fait apparaître les points expérimentaux venant de différentes évaluations. Les grandes variations de la section efficace sont appelées « résonances » caractérisées par des paramètres (énergie au pic, valeur de la section efficace au pic, largeur de la courbe de section efficace à mi-hauteur, etc.) appelés « paramètres de résonance ».<sup>49</sup>

Ce vocable traduit le fait que pour certaines valeurs de l'énergie cinétique du neutron incident le processus réactionnel avec le noyau atomique cible aboutit avec une grande probabilité à la formation d'une seule entité {neutron + noyau atomique cible} – ou « noyau composé » – dans un état excité, comme on le détaillera plus loin. Ainsi, pour ces énergies particulières, tout se passe comme si le neutron « entre en résonance » avec le noyau atomique cible pour former un noyau composé dans un état d'énergie bien identifié.

À noter qu'une résonance, bien que se référant à un niveau d'énergie excité (niveau d'énergie non lié par opposition à un niveau d'énergie lié, voir chapitre 4 et *infra*) du noyau composé formé par le neutron incident et le noyau atomique cible, est repérée par le nom de ce dernier : on parlera ainsi par un raccourci de langage de la résonance à 6.67 eV de l'uranium 238 et non pas du noyau composé uranium 239, signifiant qu'un neutron d'énergie cinétique de 6.67 MeV « entre en résonance » avec le noyau atomique cible uranium 238 pour former le noyau composé uranium 239 ; cette énergie particulière du neutron lui confère une forte probabilité d'être absorbé par le noyau d'uranium 238, car le

202, p. 196, <https://hal.science/jpa-00233320>, voir aussi, *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Tome 200, 1935, pp. 450-452.

<sup>48</sup> « The large cross sections may thus be called a resonance effect... », in H. A. Bethe, « Theory of Disintegration of Nuclei by Neutrons », *Physical Review* 47, 747, May 15, 1935, pp. 747-759, p. 751, <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.47.747>.

<sup>49</sup> V. McLane, C. L. Dunford, P. F. Rose, *Neutron Cross Sections, Volume 2 – Neutron Cross Section Curves*, Academic Press Inc. National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, New York, 1988, p. 715.

noyau composé uranium 239 possède un niveau excité qui correspond « exactement » à l'apport d'énergie de ce neutron incident.

Le profil des sections efficaces totales comporte des zones de variation en énergie caractéristiques dont les délimitations, schématisées sur les **figures 13a et 13b** et les **tableaux 9 et 10**, dépendent du noyau atomique cible. Allant des énergies plus élevées vers les énergies petites, on rencontre successivement :

- la région du **continuum** où la variation des sections efficaces en fonction de l'énergie est relativement peu perturbée, par conséquent assez régulière ;
- la région des **résonances non résolues** (*Unresolved Resonance Range*) correspondant à de nombreuses variations significatives de sections efficaces sur de petits intervalles d'énergie : le nombre de résonances par unité d'énergie étant élevé, elles se chevauchent (*overlapping*) fortement les unes les autres ; la résolution des appareils de mesure est insuffisante pour les individualiser ;
- la région des **résonances résolues** (*Resolved Resonance Range*) qui correspondent aussi à une forte variation des sections efficaces sur des domaines d'énergie étroits (pics de section efficace) mais qui, contrairement au cas précédent, sont bien individualisées ;
- la région à basse énergie où l'on observe une augmentation de la section efficace lorsque l'énergie diminue ; il s'agit d'une variation régulière de la section efficace en  $1/\sqrt{E}$  comme cela sera montré plus loin<sup>50</sup>. Il n'est cependant pas exclu de trouver des nucléides possédant des résonances à basse énergie (voir par exemple le cas du xénon 135 qui présente une résonance à 0.084 eV).

---

<sup>50</sup> Ce comportement avait été initialement expliqué par Franis Perrin en modélisant le potentiel nucléaire par un « trou rectangulaire », dans une Note présentée par Jean Perrin à l'Académie des sciences à la séance du 20 mai 1934 : « Mécanisme de la capture des neutrons lents par les noyaux légers », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Tome 200, 1935, pp. 1749-1751. <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3152t/f3.image>. Des expériences ont été menées pour confirmer ce type de variation de la section efficace de capture, faisant suite à celles de Fermi *et al.* et Amaldi *et al.* précitées : Léon Artsimovitch, Igor Kourtschatov, Léoiv Miççovskii et Pierre Palibin, « Au sujet de la capture de neutrons lents par un noyau », *Ibid.*, pp. 2159-2162, <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3152t/f3.image>

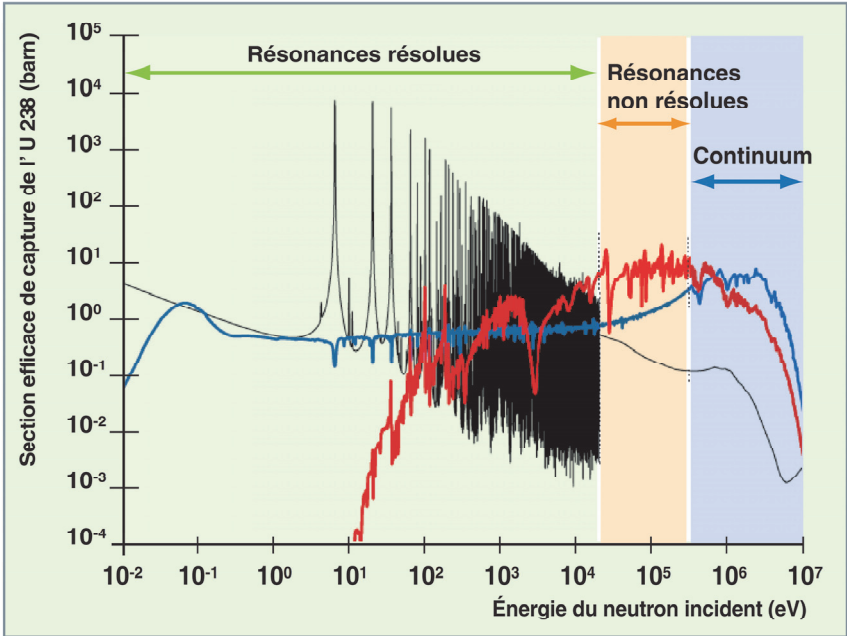


Figure 13a. Représentation de la section efficace de capture de l’uranium 238 (JEFF-3.1.1). Les trois domaines en énergie des résonances, à savoir, résonances résolues, résonances non résolues et continuum, sont représentés ; sont également représentés les flux de neutrons représentatifs d’un réacteur à neutrons rapides (RNR) refroidi au sodium (courbe rouge) et d’un réacteur à eau sous pression (REP) (courbe bleue).<sup>51</sup>

Tableau 9. Limites énergétiques des domaines résolus, non résolus et continuum pour différents noyaux<sup>52</sup>.

Nucléide	Domaine résolu eV	Domaine non résolu keV	Continuum keV
O16			$> 1. \cdot 10^{-8}$
Ni58	$10^{-5} - 8.12 \cdot 10^5$		$> 8.12 \cdot 10^2$
U238	$10^{-5} - 2. \cdot 10^4$	$10. - 1.49 \cdot 10^2$	$> 1.49 \cdot 10^2$
Pu239	$10^{-5} - 4.0 \cdot 10^3$	$4. - 30.$	$> 30.$

Cette subdivision s’insère dans un découpage conventionnel en énergie plus large, à savoir les domaines d’énergie **thermique**, **épi thermique** et **rapide**, comme le spécifie le **tableau 10**.

<sup>51</sup> La Neutronique, op. cit., 2013, p. 23.

<sup>52</sup> Valeurs extraites de l’évaluation JEFF-3.

Tableau 10. Schéma présentant la typologie des sections efficaces des réactions nucléaires induites par neutron selon les domaines en énergie du neutron incident et du nombre de masse *A* du noyau cible.<sup>53</sup>

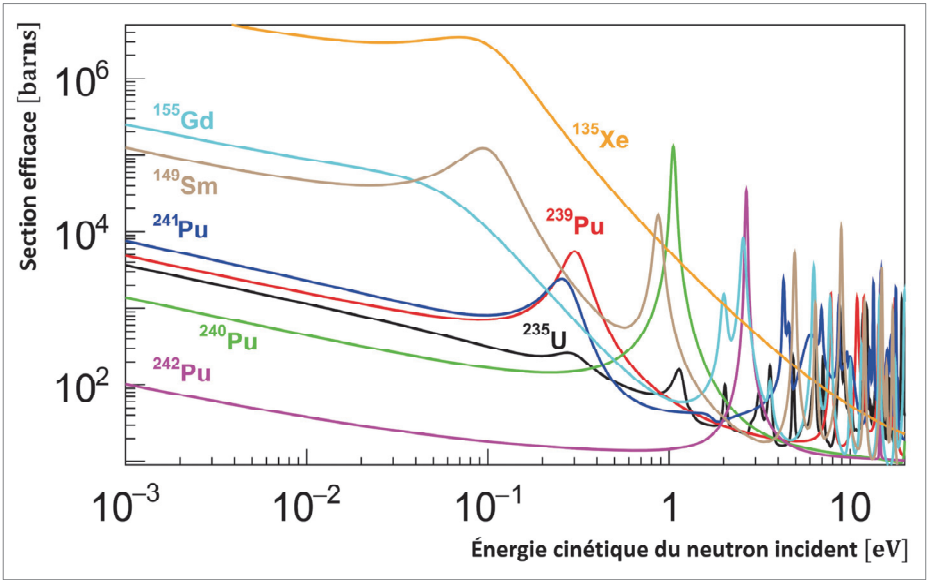
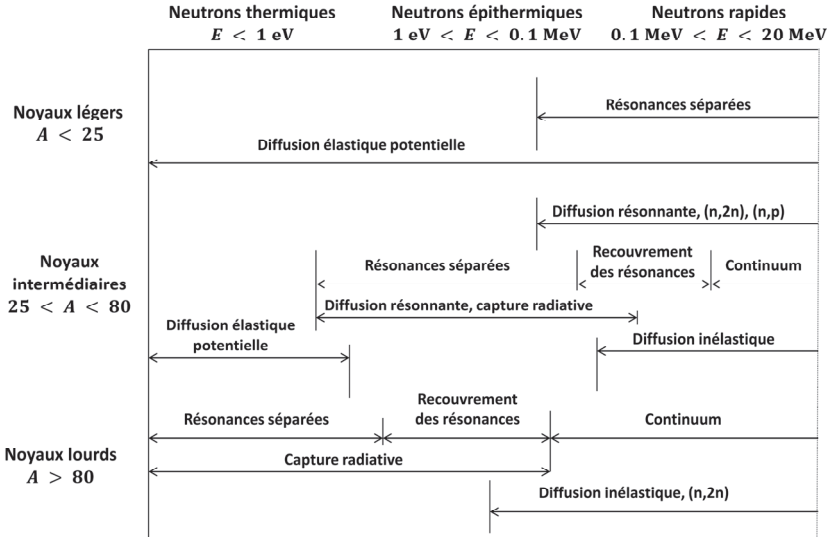


Figure 13b. Sections efficaces (en barns) des réactions induites par neutron sur des noyaux atomiques d'intérêt en physique des réacteurs nucléaires<sup>54</sup> dans le domaine des énergies inférieures à 10 eV (données issues de l'évaluation JEFF-3.3).

<sup>53</sup>D'après J. J. Duderstadt, L. Hamilton, *Nuclear reactor analysis*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1976, p. 33, Table 2.1.

<sup>54</sup> D'après J. J. Duderstadt, *op.cit.*, p. 25, Figure 2-4.



On observe également que les sections efficaces sont sensibles à la température. Cela se comprend aisément si on prend en considération le fait que le noyau cible n'est pas immobile dans le cas général et que cette mobilité est d'autant plus grande que la température du milieu de propagation est élevée. La probabilité d'interaction du neutron avec le noyau cible s'en trouve affectée. Par exemple, lorsque la température du milieu de propagation augmente, la valeur du « pic » d'une résonance diminue au profit de celles des « ailes » de cette même résonance qui se relèvent. L'ampleur de ce phénomène sur une résonance donnée dépend aussi de l'énergie initiale du neutron et elle décroît lorsque l'énergie du neutron augmente, de sorte qu'en physique des réacteurs nucléaires, il est souvent considéré comme négligeable pour des neutrons d'énergie supérieure à 1 MeV.

Dans les domaines d'énergie **épithermique** et **rapide**, ce phénomène est connu sous le nom d'**effet Doppler** (voir chapitre 10 partie A) par analogie au phénomène sonore qui porte originellement ce nom, analogie dans laquelle la section efficace serait le pendant de la fréquence de l'onde sonore.

À basse énergie, dans le domaine dit thermique, on parle de phénomènes de thermalisation des neutrons (voir chapitre 10 partie B) qui se manifestent de deux manières :

- si le neutron a une énergie cinétique du même ordre de grandeur que l'énergie d'agitation thermique des atomes et/ou des molécules qui composent le milieu de propagation, il peut acquérir de l'énergie : c'est le phénomène de **remontée en énergie** (*upscattering*) ;
- si la longueur d'onde du neutron est comparable à l'espace interatomique du milieu dans lequel il se propage, alors le neutron a tendance à interagir non plus avec un seul noyau atomique, mais avec le réseau moléculaire du milieu de propagation. Par exemple s'il s'agit d'un milieu solide, les neutrons peuvent être diffractés à l'instar des photons. Dans de tels cas, la section efficace neutronique présente une structure en « dents de scie ».

Tout comme pour la structure du noyau atomique, pour étudier une réaction nucléaire, il conviendrait de traiter le **problème à  $N$  corps** à partir des caractéristiques de l'interaction nucléon-nucléon et de la densité nucléaire, en tenant compte du **principe d'exclusion de Pauli** qui interdit l'occupation d'un même état quantique par plus d'une particule de même nature. Cette propriété de la nature a pour conséquence d'allonger le libre parcours moyen des nucléons dans le noyau atomique favorisant l'équirépartition progressive de l'énergie apportée par la particule incidente lors d'une réaction nucléaire.

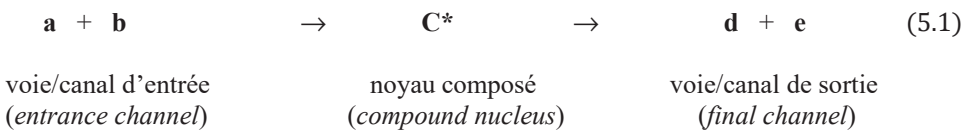
Il existe différentes théories et divers modèles phénoménologiques visant à exprimer mathématiquement les sections efficaces des réactions nucléaires. En se reportant à la figure 2, des formalismes ont ainsi été mis au point pour décrire les sections efficaces pour toute la variété des réactions possibles, des réactions directes « rapides » à celles « lentes » aboutissant au noyau composé à l'énergie d'excitation équirépartie entre tous les nucléons, en passant par toutes les situations réactionnelles intermédiaires.

Dans le domaine d'énergie d'intérêt concerné ici – énergies des neutrons inférieures à 20 MeV – c'est le formalisme relatif au « **modèle du noyau composé** » sur lequel il convient de se focaliser essentiellement. On abordera également le « **modèle optique** » et les « **modèles de pré-équilibre** » particulièrement adaptés à la description des sections efficaces de la zone d'énergie encadrée par celle, à haute énergie, où dominent les **réactions directes** et celle, à plus basse énergie, relevant de l'application du modèle du noyau composé. Certains résultats présentés résultent de calculs effectués avec le **modèle du noyau noir** (*black nucleus*) qui assimile le potentiel nucléaire à un puits de potentiel carré dont le rayon est celui du noyau atomique et d'une profondeur fixée<sup>55</sup>. Il s'agit donc à présent de généraliser à **d'autres réactions nucléaires** la résolution de l'équation de Schrödinger pour la diffusion élastique d'un neutron par un noyau atomique cible, effectuée plus haut. Quatre éléments induisent une plus grande complexité :

- l'état interne du noyau atomique est modifié : des processus inélastiques prennent place ;
- l'existence de voies de sortie autres que la diffusion élastique : diffusion inélastique du neutron, capture radiative, fission, etc. ;
- l'existence d'interférences entre les résonances ;
- la durée de vie finie du noyau composé formé dans un état excité qui conduit à explicitement prendre en compte la variable temps.

## 5. Le modèle du noyau composé

N. Bohr<sup>56 57</sup> a proposé un modèle réactionnel : le **modèle du noyau composé** (*compound-nucleus*). Ce modèle fait intervenir une étape transitoire – **le noyau composé** – qui précède l'émission des produits de la réaction nucléaire :



Le processus réactionnel opère donc en **deux étapes** :

- **Phase 1** : formation du **noyau composé** ;
- **Phase 2** : **désexcitation** (ou décroissance (*decay*)) du noyau composé par « **évaporation** » de particules légères ou par fission.

<sup>55</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, Saclay, INSTN/CEA, Collection Enseignement, 1989, pp. 16-19.

<sup>56</sup> N. Bohr, « Neutron capture and nuclear constitution », *Nature*, 137, February 1, 1936, pp. 344-348.

<sup>57</sup> V. F. Weisskopf, « The formation of the compound nucleus », *Physica*, Vol. 22, Issues 6-12, 1956, pp. 952-958.

Sur la **figure 14**, on voit que les canaux d’entrée (*c*) et de sortie (*c'*) associent dans chaque cas un couple de particules affectées d’un jeu de paramètres physiques – masses, énergies, numéros atomiques et nombres quantiques de moments angulaires – dont l’ensemble des valeurs en sont des instanciations dans l’espace des configurations accessibles respectivement d’entrée et de sortie.

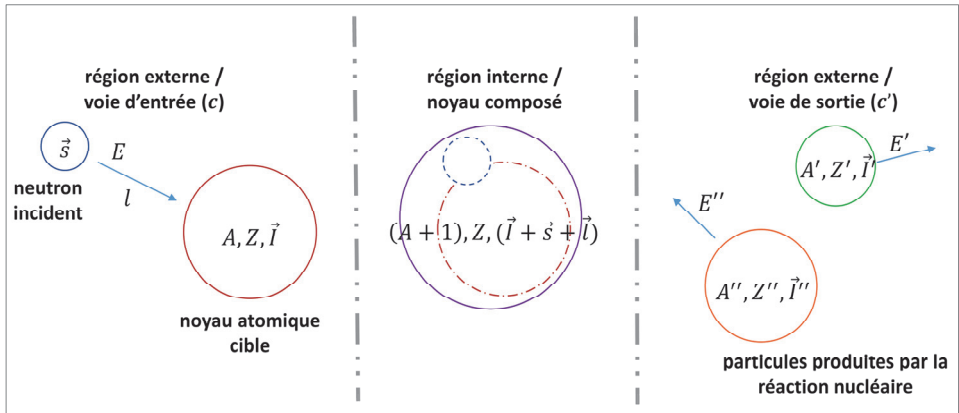


Figure 14. Schématisation d’une réaction nucléaire impliquant un neutron incident de spin intrinsèque  $\vec{s}$ , d’énergie cinétique  $E$  et un noyau atomique de nombre de masse  $A$ , de numéro atomique  $Z$  et de moment angulaire  $\vec{I}$  ; le moment angulaire orbital du couple neutron incident-noyau atomique est noté  $\vec{l}$  ; les entités produites ont respectivement pour nombre de masse  $A'$  et  $A''$ , pour numéro atomique  $Z'$  et  $Z''$ , pour moments angulaires  $\vec{I}'$  et  $\vec{I}''$ , pour énergies cinétiques  $E'$  et  $E''$  <sup>58</sup> ; se référer aussi au tableau 11 qui se rapporte au cas général d’une réaction nucléaire à deux corps.

Les particules émises ne conservent pas la mémoire du processus par lequel le noyau composé s’est formé ; le modèle du noyau composé fait donc l’hypothèse d’une certaine indépendance entre les phases 1 et 2 qui dès lors peuvent être traitées par des modèles spécifiques. La **figure 15** décrit respectivement la diffusion élastique résonnante et la diffusion inélastique du neutron par un noyau atomique cible dans le cadre du modèle du noyau composé de Bohr.

Les réactions nucléaires s’accompagnent d’une excitation des états « **non liés** » du **noyau composé**, qui se trouvent par conséquent au-dessus du niveau de Fermi (voir chapitre 4 § 3), par opposition aux « **états stationnaires ou liés** » déjà occupés par les nucléons au sein du noyau atomique au-dessous de l’énergie de Fermi. Les états non liés sont en quelque sorte « activés » ou « sollicités » par le neutron incident.

On désigne par *c* et *c'* respectivement les voies d’entrée et de sortie d’une réaction nucléaire donnée induite par un neutron et spécifiée selon les informations contenues dans le **tableau 11**.

<sup>58</sup> D’après N. M. Larson, *Updated users guide for SAMMY: multilevel R-matrix fits to neutron data using Bayes equations*, ORNL/TM-9179/R8, ENDF-364/R2, Nuclear Science and Technology Division, UT Batelle, 2008, p. 6.

On comprend, par conséquent, qu'il convient de mettre en regard la variation des sections efficaces en fonction de l'énergie et l'existence de résonances avec la structure des niveaux d'énergie du **noyau composé**, comme le montrent les **figures 16, 17a et 17b**

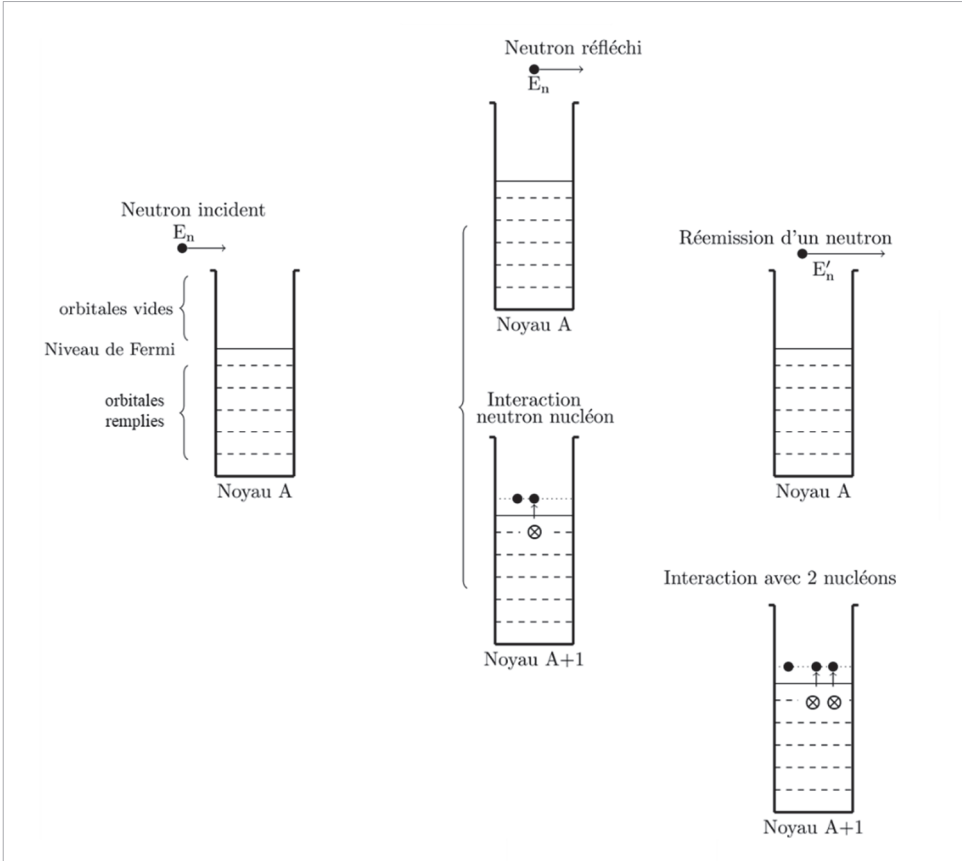


Figure 15. Diffusion élastique résonnante du neutron et diffusion inélastique du neutron. Les excitations individuelles de nucléons créent des trous dans les couches relatives aux états liés. Ce sont les neutrons situés sur les états excités qui interagissent avec les neutrons des états d'énergie liés, les amenant à quitter leur case quantique d'origine ainsi laissée vide. On a vu dans le chapitre 3 qu'une telle situation est modélisée à l'aide du concept de « quasi-particules » : le schéma central de la figure montre une configuration à 3 quasi-particules formées par les nucléons situés sur le niveau excité au-dessus du niveau de Fermi et le trou laissé par le nucléon qui a rejoint le neutron incident resté dans le noyau atomique. Le schéma de la partie droite de la figure montre une configuration à 5 quasi-particules.<sup>59</sup>

<sup>59</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., pp. 63-73.

Tableau 11. Spécification des voies d'entrée et de sortie dans le cadre de la théorie de la « matrice R ». Dans le cas d'une réaction nucléaire induite par un neutron  $\vec{l}_{\alpha_1} = \vec{s} = 1/2$ .

Paires de particules	(neutron, noyau cible) paire $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2)$	(particule 1, particule 2) paire $\alpha' \equiv (\alpha'_1, \alpha'_2)$
Voie ou canal	$c$	$c'$
Spin de la voie	$\vec{j} = \vec{l}_{\alpha_1} + \vec{l}_{\alpha_2}$	$\vec{j}' = \vec{l}_{\alpha'_1} + \vec{l}_{\alpha'_2}$
Moment angulaire orbital	$\vec{l}$	$\vec{l}'$
Moment angulaire total	$\vec{j} = \vec{j} + \vec{l}$	$\vec{j}' = \vec{j}' + \vec{l}'$
Moment angulaire magnétique (plusieurs valeurs possibles)	$m_j$	$m_{j'}$
Parité ; elle doit être conservée : $\pi = \pi'$	$\pi = \pi_{l_{\alpha_1}} \times \pi_{l_{\alpha_2}} \times (-1)^l$	$\pi' = \pi_{l_{\alpha'_1}} \times \pi_{l_{\alpha'_2}} \times (-1)^l$

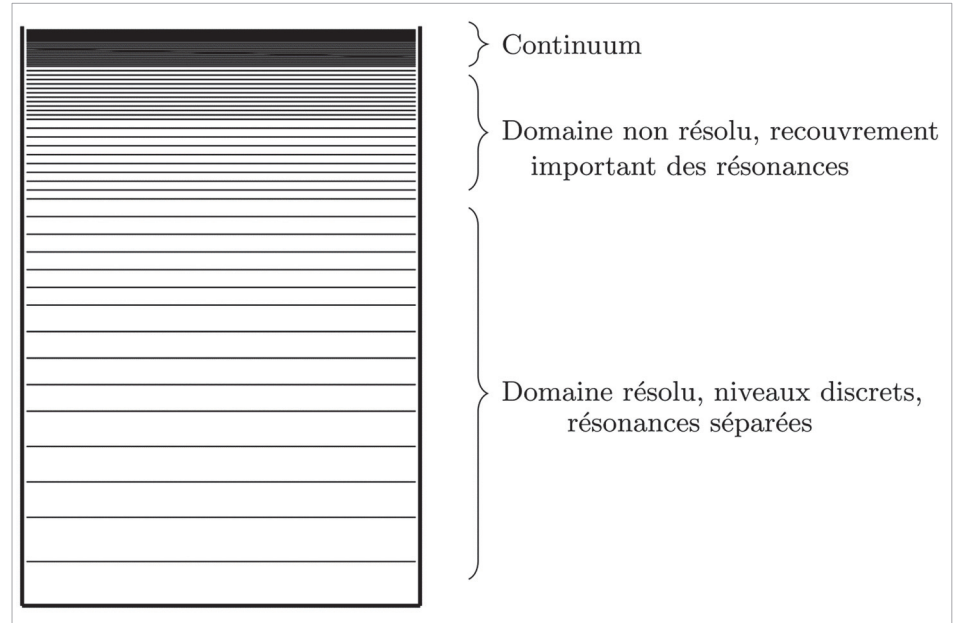


Figure 16. Niveaux d'énergie d'un noyau atomique et domaines de variation des sections efficaces de réaction nucléaire induite par un neutron.

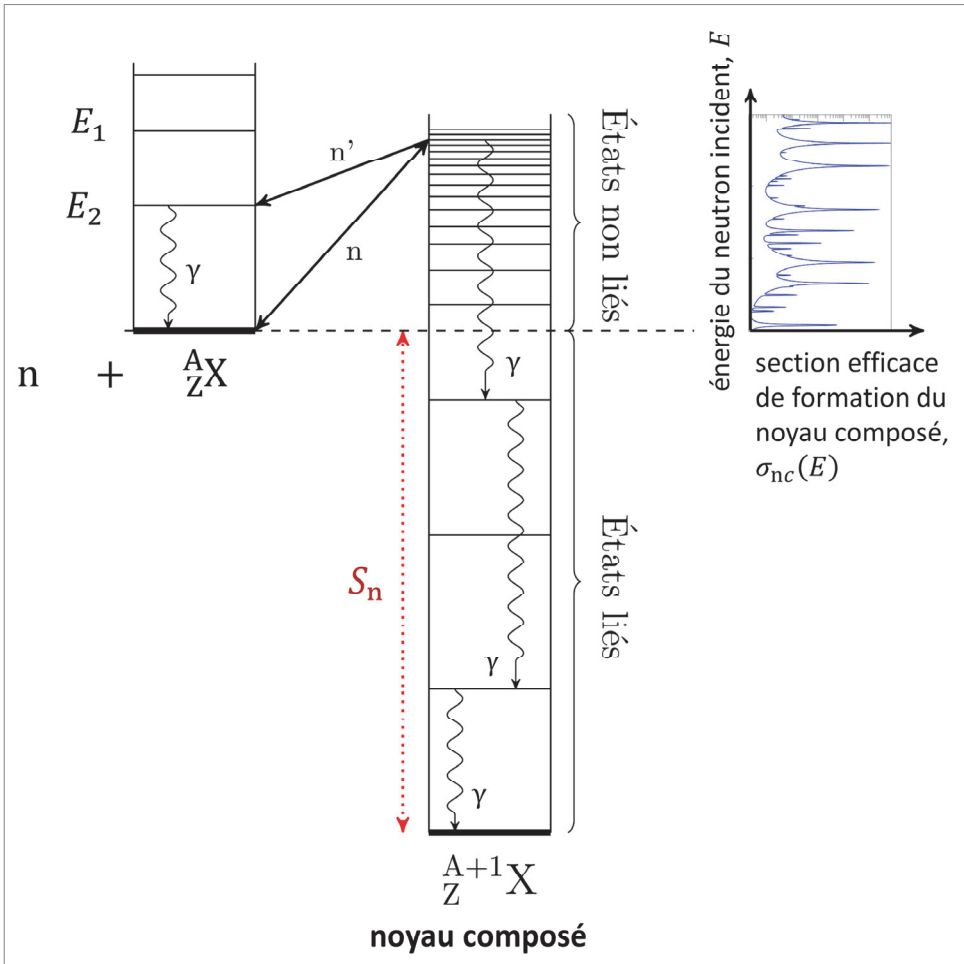


Figure 17a. Typologie des « niveaux d'énergie non liés » du noyau composé et profil de sections efficaces de réaction nucléaire,  $\sigma_{nc}(E)$ , induite par un neutron d'énergie  $E$  sur un nucléide  ${}^A_ZX$ .  $E_1$  et  $E_2$  désignent des énergies des niveaux excités du nucléide  ${}^A_ZX$  atteints dans le cas de réactions inélastiques  $(n, n')$ .  $S_n$  est l'énergie de séparation du « dernier neutron ». La flèche de retour vers l'état fondamental du noyau atomique  ${}^A_ZX$  indique le processus de diffusion résonnante déjà mentionné dans le chapitre 6 paragraphe 2 qui laisse inchangée l'énergie du neutron réémis.

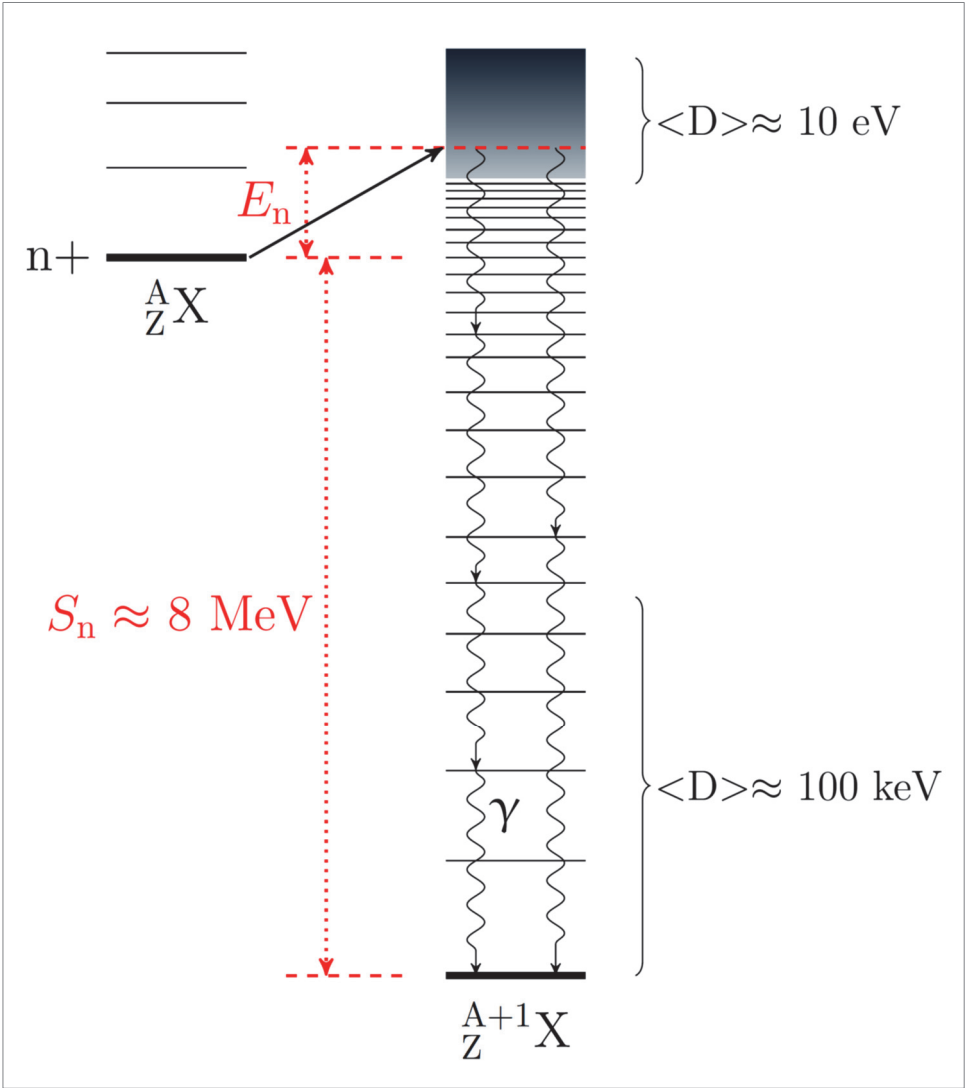
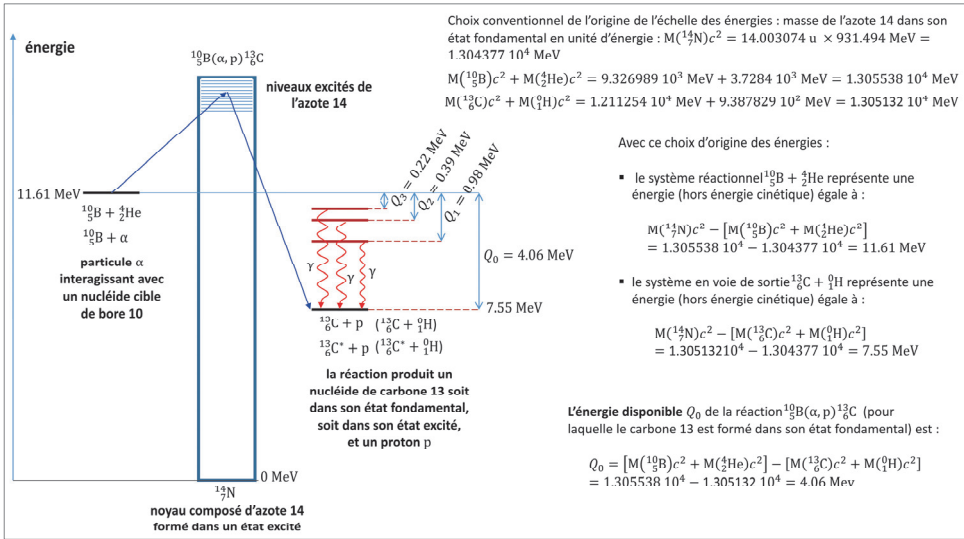


Figure 17b. Configuration d'un noyau composé résultant d'une interaction entre un neutron d'énergie cinétique  $E_n$  et un nucléide cible  ${}^A_ZX$ . Ordres de grandeur de l'espacement  $\langle D \rangle$  des niveaux d'énergie d'un noyau atomique dans le domaine des « résonances résolues » et celui des « résonances non résolues » (voir figure 13 *supra*).

### Remarque

La **figure 17c** illustre un autre cas de formation d'un noyau composé où la particule incidente n'est plus un neutron mais une particule  $\alpha$  :



**Figure 17c.** Configuration d'un noyau composé résultant d'une interaction entre une particule  $\alpha$  d'énergie  $E$  et un nucléide cible de bore 10 ( $^{10}\text{B}$ ). Il y a formation du noyau composé azote 14 ( $^{14}\text{N}$ ) dans un état excité. L'énergie cinétique des deux entités qui interagissent contribue également à l'excitation du noyau composé formé. Le nucléide de carbone 13 résultant de la réaction peut être également produit dans un état excité. Une autre voie de sortie est possible par formation d'un nucléide d'azote 13 ( $^{13}\text{N}$ ) et l'émission d'un neutron.

On a vu précédemment que la section efficace de diffusion  $\sigma_l$  des neutrons d'énergie cinétique  $E$  dans le référentiel du laboratoire et de moment angulaire compris entre  $l\hbar$  et  $(l+1)\hbar$  est donnée par la relation (2.87) appelée ci-dessous :

$$\sigma_l(E) = \pi(2l+1)\lambda^2, \quad \lambda = \frac{455.2}{\sqrt{E(\text{eV})}} 10^{-12} \frac{\text{A}}{\text{A}+1} \quad (\text{cm}) \quad (5.2)$$

Pour que le noyau composé puisse se former, il faut que le neutron pénètre dans le noyau atomique en franchissant la « **surface nucléaire** », c'est-à-dire celle qui délimite la région d'action de la force nucléaire (à courte portée) de la région externe au noyau atomique dans laquelle la force nucléaire n'agit plus (voir chapitre 3 § 2 et annexe V). On désigne par  $T_l$  la probabilité qu'un neutron de moment angulaire  $l$  de traverser la surface nucléaire pour pénétrer à l'intérieur du noyau atomique. La section efficace de formation du noyau composé,  $\sigma_{nc,l}(E)$ , relative à un neutron incident d'énergie cinétique  $E$  dans le référentiel du laboratoire et de moment angulaire  $l$  s'exprime donc comme le produit :



$$\sigma_{nc,l}(E) = \sigma_l(E)T_l = \pi(2l+1)\lambda^2 T_l \quad (5.3)$$

La section efficace de formation du noyau composé,  $\sigma_{nc}(E)$ , est par conséquent obtenue par la sommation sur toutes les valeurs possibles du moment angulaire  $l$  :

$$\sigma_{nc}(E) = \sum_l \sigma_{nc,l}(E) = \pi\lambda^2 \sum_l (2l+1)T_l \quad (5.4)$$

Le facteur  $T_l$  est appelé **coefficient de transparence** ou de **transmission**. La probabilité pour un neutron incident de pénétrer la surface nucléaire dépend du potentiel rencontré par celui-ci. Par suite, l'expression de  $T_l$  est déduite de la résolution de l'équation de Schrödinger (5.5) relative au système nucléaire formé par le neutron incident et le noyau atomique-cible (noyau composé) :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_r(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \Delta \psi_r(\vec{r}, t) + U(\vec{r})\psi_r(\vec{r}, t) \quad (5.5)$$

où :

- $\psi_r(\vec{r}, t)$  est la fonction d'onde de la particule relative (référentiel du centre de masse) ;
- $U(\vec{r})$  est le potentiel vu par le neutron (voir **figure 18** et chapitre 4 annexe II), somme de deux composantes : le potentiel nucléaire  $V(\vec{r})$  proprement dit, et la barrière de potentiel centrifuge associée aux moments angulaires  $l$  :

$$\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu_r r^2}, \quad l = 0, 1, 2 \dots, \quad r > a = r_0 A^{\frac{1}{3}} \text{ (rayon du noyau atomique – cible)} \quad (5.6)$$

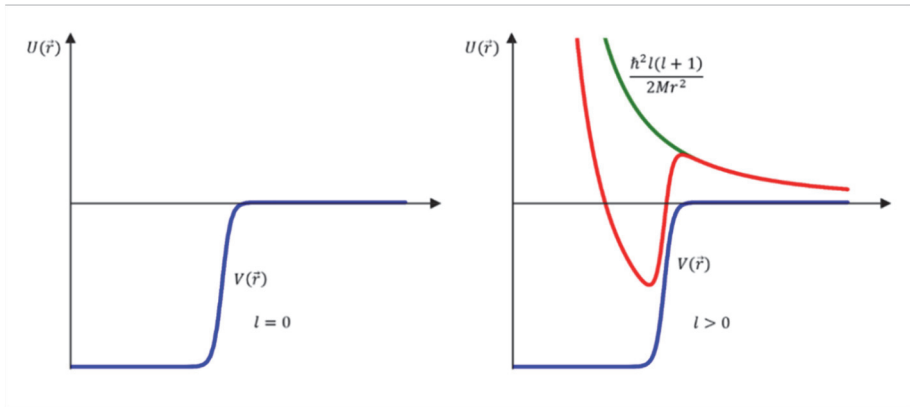


Figure 18. Le potentiel nucléaire  $U(\vec{r})$  et ses composantes nucléaire  $V(\vec{r})$  et centrifuge  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu_r r^2}$  ; la composante centrifuge est inexistante pour  $l = 0$ .

### Remarques

- On constate sur (5.6) que cette barrière est inexistante pour les ondes «  $s$  » associées au neutron incident puisque dans ce cas  $l = 0$ .
- Dans le cas où la particule incidente est une particule chargée, de charge  $ze$ , le potentiel  $U(\vec{r})$  comporte une troisième composante qui correspond à la « barrière coulombienne »  $(zZe^2)/r$ , où  $Z$  est le numéro atomique du noyau atomique cible et  $e$  la charge de l'électron.

Considérant qu'une onde incidente associée au neutron incident est soit réfléchie par la surface nucléaire soit pénètre cette surface, le coefficient de transmission  $T_l$  peut s'écrire :

$$T_l = 1 - \left| \frac{b_l^2}{a_l^2} \right| \tag{5.7}$$

où  $|a_l^2|$  est l'intensité de l'onde incidente et  $|b_l^2|$  l'intensité de l'onde réfléchie.

Par exemple, pour des énergies cinétiques du neutron incident pas très élevées, la valeur du nombre d'onde  $k$  de la particule relative incidente est très petite par rapport à celle,  $K$ , de la particule dans le noyau composé,  $k \ll K$  (voir § 2) et l'on montre alors, dans le cas unidimensionnel (variable  $r$ ) d'un puits de potentiel carré – modèle du noyau noir –, que<sup>60</sup>  
<sup>61</sup> :

$$T_l \cong \frac{4k}{K} v_l \tag{5.8}$$

où,  $v_l$  est la **pénétrabilité de la surface nucléaire** ou **pénétrabilité de la barrière centrifuge** (et coulombienne dans le cas d'une particule incidente chargée) dont les expressions, dépendantes du moment orbital  $l$ , sont fournies dans le **tableau 12** où il est posé  $\rho = ka$ . Le rapport  $\frac{4k}{K}$  représente la probabilité qu'a le neutron incident affecté du nombre d'onde  $k$  de passer de l'extérieur du noyau atomique à l'intérieur de celui-ci où son nombre d'onde est  $K$ .

Tableau 12. Expressions de la pénétrabilité de la surface nucléaire,  $v_l$ , pour les quatre premières valeurs du moment orbital  $l$  du neutron incident ; on a posé  $\rho = ka$ .

$l$	$v_l$
0	1
1	$\frac{\rho^2}{1 + \rho^2}$
2	$\frac{\rho^4}{9 + 3\rho^2 + \rho^4}$
3	$\frac{\rho^6}{255 + 45\rho^2 + 6\rho^4 + \rho^6}$

<sup>60</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., pp. 16-17 ; R. D. Evans , *Le noyau atomique*, op. cit., p. 64-72 et pp. 98-100.

<sup>61</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, op. cit., pp. 358-365.

La grandeur  $v_l$  est donc à distinguer du **coefficient de transmission**  $T_l$ . Des valeurs en sont rassemblées dans le **tableau 13** pour différentes valeurs de l'énergie cinétique du neutron incident :

Tableau 13. Exemples de valeurs de la pénétrabilité de la surface nucléaire,  $v_l$ , pour différentes énergies cinétiques du neutron incident ; on a pris ici pour valeur du rayon du noyau atomique  $a = 10$  fm, représentative d'un noyau lourd. (Les valeurs du nombre d'onde  $k$  sont données dans le tableau 4)

Énergie	$\rho = ka$	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
1 eV	$2.194 \cdot 10^{-3}$	1	$4.8 \cdot 10^{-6}$	—	—
100 eV	$2.194 \cdot 10^{-2}$	1	$4.8 \cdot 10^{-4}$	—	—
10 keV	$2.194 \cdot 10^{-1}$	1	$4.8 \cdot 10^{-2}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$
1 MeV	2.194	1	0.83	0.50	0.16

Remarque

On distingue la **pénétrabilité**  $v_l$  et le **facteur de pénétrabilité**  $p_l = v_l \times ka = v_l \times \rho$ .<sup>62</sup>

La variation du coefficient de transmission  $T_l$  en fonction de l'énergie du neutron incident et du moment angulaire  $l$  est illustrée sur la **figure 19**.

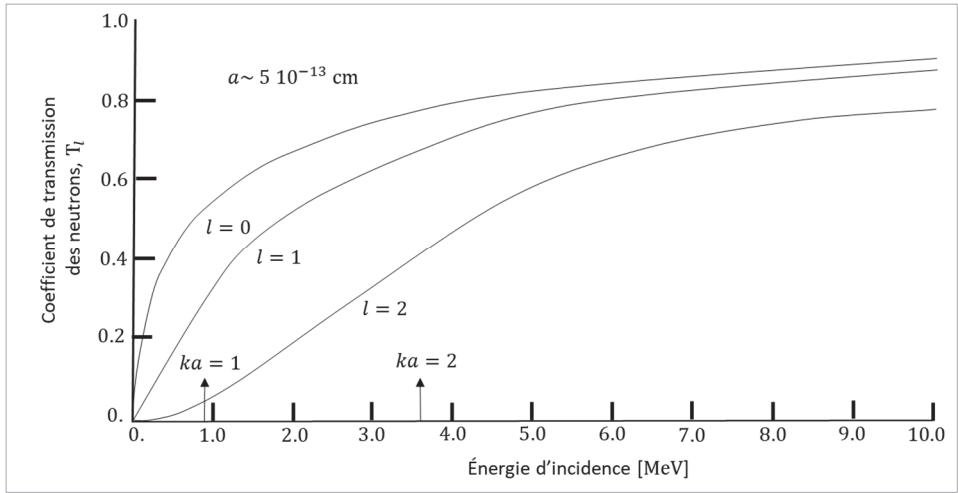


Figure 19. Variation du coefficient de transmission ou de transparence,  $T_l$ , en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident et pour différentes valeurs du moment orbital  $l$  ; le rayon du noyau atomique est ici  $a \sim 5 \cdot 10^{-13}$  cm (5 fm). Pour  $ka \gg l$ ,  $T_l$  tend vers 1.<sup>63</sup>

<sup>62</sup> Voir S. F. Mughabghab, M. Divadeenam, N. E. Holden, Neutron Cross Section – Volume 1: Neutron resonance parameters and thermal cross sections, Part A : Z 1-60, Academic Press, New York, London, 1981, p. 19.

<sup>63</sup> D'après J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, op. cit., p. 362, figure 5.2.

Si l'on moyenne la section efficace sur plusieurs états quantiques, alors (5.2) devient :

$$\langle \sigma_{nc}(E) \rangle = \sum_l \langle \sigma_{nc,l}(E) \rangle = \pi \tilde{\lambda}^2 \sum_l (2l+1) \langle T_l \rangle \quad (5.9)$$

où  $\langle \rangle$  symbolise des grandeurs moyennes.

Il convient à présent de **caractériser les voies de sortie possibles** (correspondant à la dernière colonne du tableau 11 ci-dessus), notées  $i$  dans la suite, par leurs probabilités d'occurrence respectives  $p_i$ . Pour cela, il faut revenir à l'équation d'onde de Schrödinger relative au noyau composé.

À la différence du cas d'un noyau atomique stable étudié au chapitre 4 et du processus de diffusion potentielle du neutron traité aux paragraphes 1 et 2, la variable temporelle doit être ici explicitement prise en considération, car le noyau composé a une durée de vie finie.

La fonction d'onde  $\psi_r(\vec{r})$  de la particule relative (référentiel du centre de masse) satisfait l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_r(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \Delta \psi_r(\vec{r}, t) + U(\vec{r}) \psi_r(\vec{r}, t) \quad (5.10)$$

Comme dans le cas stationnaire, on recherche une solution sous la forme factorisée d'une fonction dépendant de l'espace  $\psi_0(\vec{r})$  et d'une fonction dépendant du temps  $T(t)$  (ne pas confondre cette notation avec celle du coefficient de transmission  $T_l$ ) :

$$\psi_r(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}) T(t) \quad (5.11)$$

de telle sorte que l'équation de départ se décompose en deux équations, la première, stationnaire (indépendante du temps) dont la résolution établit le comportement de la fonction d'onde en espace (variable  $\vec{r}$ ) et la seconde, l'évolution de la fonction d'onde avec le temps (variable  $t$ ) :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \Delta \psi_0(\vec{r}) + U(r) \psi_0(\vec{r}) = \mathcal{E} \psi_0(\vec{r}) \quad (5.12)$$

$$i\hbar \frac{\partial T(t)}{\partial t} = \mathcal{E} T(t) \quad (5.13)$$

L'équation qui régit  $\psi_0(\vec{r})$  est une équation à valeurs propres  $\mathcal{E}$  qui s'interprètent (en fait leurs parties réelles, car ici ce sont des grandeurs complexes) comme les énergies des états quantiques du noyau composé.

Deux conditions doivent être remplies par la fonction d'onde  $\psi_r(\vec{r})$ . La première stipule que la probabilité de présence de la particule considérée dans tout l'espace est égale à l'unité :

$$\int_{\text{tout l'espace}} \psi_0(\vec{r})^2 d\vec{r} = 1 \quad (5.14)$$

La seconde réside dans le temps de vie fini du noyau composé. On l'explicite en exprimant la solution de l'équation (5.8) :

$$T(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t\right) \quad (5.15)$$

La condition de vie finie du noyau composé implique que l'énergie  $\mathcal{E}$  n'est plus purement réelle. En effet, si tel était le cas on aurait :

$$\begin{aligned} \int_{\text{tout l'espace}} |\psi_r(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} &= \int_{\text{tout l'espace}} (\psi_r(\vec{r}, t)\psi_r^*(\vec{r}, t))^2 d\vec{r} \\ &= \int_{\text{tout l'espace}} \psi_0(\vec{r})^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t\right) \exp\left(+\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t\right) d\vec{r} \\ &= \int_{\text{tout l'espace}} \psi_0(\vec{r})^2 d\vec{r} = 1 \end{aligned}$$

montrant que le noyau composé serait toujours présent quel que soit l'instant  $t$  considéré ;  $\psi_r^*(\vec{r}, t)$  est la fonction conjuguée de  $\psi_r(\vec{r}, t)$ .

Par conséquent, on écrit  $\mathcal{E}$  comme comportant une partie réelle,  $\mathcal{E}_0$ , et une partie imaginaire notée  $\varepsilon$  :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + i\varepsilon \quad (5.16)$$

Alors, la probabilité de présence du noyau composé au temps  $t$  s'écrit :

$$\int_{\text{tout l'espace}} |\psi_r(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = \int_{\text{tout l'espace}} |\psi_r(\vec{r}, t)\psi_r^*(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\text{tout l'espace}} \psi_0(\vec{r})^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_0 + i\varepsilon)t\right) \psi_0(\vec{r}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_0 - i\varepsilon)t\right) d\vec{r} = e^{\frac{2\varepsilon}{\hbar}t} \\ &= e^{-\kappa t} \end{aligned} \quad (5.18)$$

où l'on a posé :

$$\kappa = -\frac{2\varepsilon}{\hbar} \quad (5.19)$$

La relation (5.18), tout comme pour la radioactivité, s'interprète donc comme la probabilité, pour le noyau composé dans son état excité, d'exister encore au temps  $t$  considéré, alors que  $1 - e^{-\kappa t}$  représente sa probabilité au bout de ce même temps  $t$  de ne plus exister dans l'état où il a été formé.

La grandeur  $\kappa$  est la constante de décroissance dans le temps du noyau composé formé reflétant sa durée de vie limitée.

La quantité  $2\varepsilon$  est homogène à une énergie et on la note  $Y$  :

$$Y = -2\varepsilon \quad (5.20)$$

De (5.19) et (5.20) il découle immédiatement :

$$\kappa = \frac{Y}{\hbar} = \frac{1}{\tau} \quad (5.21)$$

où  $\tau$  représente par conséquent la **vie moyenne du noyau composé** tel que formé. Le noyau composé est un système quantique instable qui se désexcite au bout d'un certain temps qui, en moyenne, est  $\tau$  :

$$\int_{l'espace}^{tout} |\psi_r(\vec{r}, t)|^2 d\vec{r} = e^{-\kappa t} = e^{-\frac{Y}{\hbar} t} \quad (5.22)$$

En réécrivant cette relation comme  $Y\tau = \hbar$ , on fait immédiatement le lien avec la **relation d'incertitude d'Heisenberg** et son interprétation usuelle : l'état quantique excité du noyau composé formé n'a pas une énergie qui est exactement  $\mathcal{E}_0$  mais a une certaine énergie comprise dans l'intervalle  $[\mathcal{E}_0 - Y/2, \mathcal{E}_0 + Y/2]$ . Cette **incertitude** est intrinsèquement liée à la durée de vie du noyau composé dans l'état où il est formé. Cet état quantique est désigné par le terme de **résonance** (voir début du paragraphe § 4), voulant signifier par-là que le neutron aura une probabilité d'interaction d'autant plus grande que son énergie cinétique d'incidence sera proche de  $\mathcal{E}_0$ , comme le montrera l'expression de la section efficace de formation du noyau composé présentée dans la suite ;  $\mathcal{E}_0$  est appelée **énergie de la résonance**. La grandeur  $Y$  est dénommée **largeur totale du niveau ou largeur totale de la résonance**.

La caractérisation des échelles de temps mises en jeu est utile pour appréhender le bien-fondé du modèle du noyau composé. Le **modèle de Fermi** (voir chapitre 4) a montré que l'énergie cinétique moyenne d'un nucléon dans un noyau est de l'ordre de 20 MeV. Ce nucléon parcourt donc le noyau atomique de dimension de quelques fermis dans un temps de l'ordre de  $10^{-22}$  seconde. Les temps de vie d'un noyau composé se situent dans une

fourchette de  $10^{-14}$  à  $10^{-19}$  seconde. Il est donc possible de considérer que le noyau composé a le temps d'atteindre un état d'équilibre correspondant à la dissipation de l'énergie apportée par le neutron au sein du noyau composé, celui-ci ayant « oublié » la manière dont il a été formé. Pour autant, cet état n'est pas stationnaire en raison de son trop-plein d'énergie, et différentes voies d'évolution (de sortie) lui sont offertes. Chacune de ces **voies de sortie** (notées  $i$ ) correspond à un mode particulier de désexcitation du noyau composé auquel est associée une durée de vie moyenne spécifique notée  $\tau_i$ .

Le noyau composé est le siège des différents modes de décroissance potentiels émetteurs de particules diverses : photons gamma, neutron, proton, fragments de fission, etc. La constante de décroissance (désexcitation) ou probabilité de décroissance (désexcitation) par unité de temps est  $\kappa_i = 1/\tau_i$ .

La constante de décroissance totale du noyau composé est donc :

$$\kappa = \sum_i \kappa_i = \frac{1}{\hbar} \sum_i Y_i = \frac{Y}{\hbar} \quad (5.23)$$

La grandeur  $Y$  est la somme des **largeurs** dites **partielles**  $Y_i$  qui caractérisent les voies de sortie  $i$  :

$$Y = \sum_i Y_i \quad (5.24)$$

On peut en inférer, comme pour les processus radioactifs en compétition avec les rapports de branchement (voir chapitre 5 § 1.4), que la probabilité de désexcitation  $p_i$  du noyau atomique par la voie de sortie  $i$  est donnée par :

$$p_i = \frac{\kappa_i}{\lambda} = \frac{Y_i}{Y} \quad (5.25)$$

Les grandeurs  $\mathcal{E}_0$ ,  $Y$  et  $Y_i$  constituent les **paramètres de résonance** considérés dans le **système du centre de masse**.

Dans la pratique, on leur préfère leurs homologues dans le **référentiel du laboratoire**<sup>64</sup>, respectivement  $E_0$ ,  $\Gamma$  et  $\Gamma_i$  définis par les relations (5.26) suivantes (voir § 2) :

$$\mathcal{E}_0 = E_0 \frac{A}{A+1}, \quad \Gamma = \Gamma \frac{A}{A+1}, \quad \Gamma_i = \Gamma_i \frac{A}{A+1} \quad (5.26)$$

<sup>64</sup> En général, les valeurs des largeurs sont fournies dans le système du laboratoire, excepté pour les noyaux légers pour lesquels elles peuvent être données dans le système du centre de masse.

On peut par conséquent également réécrire pour ce même référentiel du laboratoire les expressions respectives de la largeur neutronique totale et de la probabilité de la voie de sortie  $i$  :

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \tag{5.27}$$

et

$$p_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma} \tag{5.28}$$

Finalement, la section efficace d’une réaction nucléaire induite par un neutron conduisant à une voie de sortie  $i$  s’écrit de façon générale comme le produit de la **section efficace de formation du noyau composé**,  $\sigma_{nc}(E)$ , par la **probabilité associée à la voie de sortie  $i$** ,  $p_i$  :

$$\sigma_i(E) = \sigma_{nc}(E) \times p_i \tag{5.29}$$

Exemple

L’uranium 238,  $^{238}_{92}\text{U}$ , présente une résonance à l’énergie  $E_0 = 6.67 \text{ eV}$  pour laquelle on dispose des données fournies dans le **tableau 14** ; le noyau composé formé est l’uranium 239 formé dans un état excité,  $^{239}_{92}\text{U}^*$  :



Comme le neutron incident a une énergie cinétique faible, l’énergie d’excitation est de l’ordre de l’énergie de liaison du « dernier neutron » (voir chapitre 3 § 3.5).

Tableau 14. Exemple de valeurs de paramètres de résonance relatives à l’uranium 238,  $^{238}_{92}\text{U}$ .

Réaction nucléaire	Type de largeur	Valeur eV
Capture radiative (n, $\gamma$ )	$\Gamma_\gamma$	$23.4 \cdot 10^{-3}$
Diffusion élastique résonnante (n, n)	$\Gamma_n$	$1.49 \cdot 10^{-3}$
Fission (n, f)	$\Gamma_f$	$0.0097 \cdot 10^{-6}$
Totale	$\Gamma$	$24.89 \cdot 10^{-3}$

La durée de vie moyenne  $\tau$  de cette résonance est, en tenant compte de (5.26) :

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{\hbar}{\Gamma} \times \frac{A + 1}{A} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 24.89 \cdot 10^{-3} \times 1.602 \cdot 10^{-19}} \frac{239}{238} = 2.65 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

Sachant qu’un neutron de 1 MeV parcourt une distance de l’ordre de la dimension du noyau atomique en quelque  $10^{-21} \text{ s}$ , pendant  $2.65 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ , ce sont plus d’un million de diamètres nucléaires qui peuvent être parcourus ( $\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ (J s)}/2\pi$ ). Les probabilités d’occurrence des différentes voies de sortie déduites du tableau 14 sont rassemblées dans le **tableau 15**.



Tableau 15. Probabilités des différentes voies de sortie du noyau composé  $^{239}_{92}\text{U}^*$  formé par interaction d'un neutron d'énergie thermique avec un noyau d'uranium 238,  $^{238}_{92}\text{U}$ .

Réaction nucléaire	Largeur	Valeur eV
Capture radiative (n, $\gamma$ )	$p_\gamma = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}$	0.94
Diffusion élastique résonnante (n, n)	$p_n = \frac{\Gamma_n}{\Gamma}$	0.96
Fission (n, f)	$p_f = \frac{\Gamma_f}{\Gamma}$	$3.89 \cdot 10^{-7}$

On présente dans la suite les expressions des sections efficaces neutroniques dans le cas d'une **résonance isolée**, une situation qui prévaut pour les neutrons de faible énergie interagissant avec des noyaux atomiques lourds, puis celui des **résonances non résolues** rencontré pour les neutrons d'énergie plus élevée. La dépendance des paramètres de résonance  $\Gamma_i$  vis-à-vis de l'énergie  $E$  du neutron incident sera précisée. Des indications sont enfin apportées sur la théorie générale des réactions nucléaires induites par un neutron, dénommée **théorie de la matrice R**, ainsi que sur les différents formalismes de sections efficaces qui en dérivent.

6. Section efficace d'une résonance isolée

Pour déterminer la section efficace dans le cas simple d'une **résonance isolée**  $\sigma_i(E)$  relative à un neutron d'énergie cinétique initiale  $E$ , il faut déterminer explicitement la section efficace  $\sigma_{nc}(E)$  de formation du noyau composé et la probabilité,  $p_i$ , associée à la voie de sortie  $i$  considérée, conformément à l'expression (5.3).

6.1. Expression de la section efficace de formation du noyau composé

On se place dans le cas particulier d'énergies de neutrons suffisamment petites de manière à ce que seules les ondes « s » (de moment angulaire  $l = 0$ ) soient à considérer. Dans ce cas, la section efficace de formation du noyau composé,  $\sigma_{nc}(E)$ , est qualitativement proportionnelle à quatre facteurs<sup>65</sup> :

$$\sigma_{nc}(E) \propto \pi \tilde{\lambda}^2 \times g \times L(E) \times \Gamma_n(E)$$

(6.1)

où :

- $\pi \tilde{\lambda}^2$  est la section efficace d'interaction neutron-noyau-cible (pour les ondes « s ») ;
- $g$  est un facteur qui permet de prendre en compte le rôle joué par les moments angulaires ; il apparaît comme un « **facteur statistique** » lié à la conservation du moment magnétique ;  $g$  représente ici la fraction de toutes les combinaisons

<sup>65</sup> S. G. Prussin , *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2007, pp. 451-457.

possibles des moments angulaires qui satisfont cette condition (voir paragraphe 6.2.1, relation (6.35)) :

$$g = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2s + 1)} \quad (6.2)$$

où :

- $I = \|\vec{I}\|$  : module du moment angulaire du noyau atomique cible ;
- $s = \|\vec{s}\|$  : module du spin intrinsèque du neutron,  $s = 1/2$  ;
- $J = \|\vec{J}\|$  : module du moment angulaire total :  $\vec{J} = \vec{I} + \vec{s}$ , d'où résultent deux valeurs possibles pour  $J$  :

$$J = I - \frac{1}{2}, J = I + \frac{1}{2}$$

- $\Gamma_n(E)$  est la **largeur neutronique** associée à la résonance, car en effet, on peut concevoir que la probabilité d'interaction du neutron avec le noyau atomique-cible soit proportionnelle à  $\Gamma_n(E)$  qui caractérise aussi bien la voie de sortie neutron que la voie d'entrée neutron en vertu du principe de réciprocity appliqué à la réaction inverse.
- $L(E)$  reflète le **phénomène de résonance** déjà visualisé sur les **figures 11, 12, 17a et 17b**, à savoir que plus l'énergie du neutron d'énergie  $E$  s'approche d'une énergie  $E_0$  d'un pic par valeurs inférieure ou supérieure, plus la section efficace est élevée. Comme le montre l'annexe IV, la distribution  $L(E)$  peut être déterminée en utilisant la transformation de Fourier appliquée à la fonction d'onde  $\psi_r(\vec{r}, t)$ , sachant qu'elle établit le mode de passage de la variation en temps ( $t$ ) à la variation en fréquence ( $\omega$ ) (et *vice versa*) et qu'énergie et fréquence sont liées par la relation d'Einstein :  $\mathcal{E} = \hbar\omega$ . La distribution  $L(E)$  s'écrit<sup>66</sup> :

$$L(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.3)$$

Il s'agit d'une **lorentzienne** qui représente bien la forme de la section efficace d'une résonance dite **isolée**.

*A priori* les largeurs neutroniques partielles  $\Gamma_i$  et totale  $\Gamma$  varient en fonction de l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident : largeurs  $\Gamma_i \equiv \Gamma_i(E)$  et  $\Gamma \equiv \Gamma(E)$ .

Il se trouve qu'en général  $\Gamma$  présente une dépendance relativement faible en fonction de l'énergie du neutron incident, raison pour laquelle celle-ci n'est pas explicitée ici.

<sup>66</sup> *Ibid.*, pp. 448-451.

La section efficace de formation du noyau composé s'écrit alors :

$$\sigma_{nc}(E) = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_n(E)\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.4)$$

La section efficace relative à la voie de sortie  $i$  est donc :

$$\begin{aligned} \sigma_i(E) &= \sigma_{nc}(E) p_i = \sigma_{nc}(E) \frac{\Gamma_i}{\Gamma} \\ &= \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_n(E)\Gamma}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{\Gamma_i(E)}{\Gamma} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\sigma_i(E) = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{(2I+1)(2s+1)} \frac{\Gamma_n(E)\Gamma_i(E)}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.6)$$

On pose :

$$\sigma_0 = 4\pi \lambda_0^2 \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma} = \frac{2.6038 \cdot 10^6}{E_0(\text{eV})} \left[ \frac{A+1}{A} \right]^2 \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma} \quad \text{barn} \quad (6.7)$$

avec (voir relations (2.10) et (2.11) § 2) :

$$\lambda_0 = \frac{455.2}{\sqrt{E_0(\text{eV})}} \frac{A+1}{A} 10^{-12} \text{ cm} \quad (6.8)$$

On voit que  $\sigma_0$  est la section efficace maximale de formation du noyau composé obtenue pour  $E = E_0$  :  $\sigma_0 = \sigma_{nc}(E = E_0)$ . On notera que dans les tables de données nucléaires le facteur statistique  $g$  est souvent associé à la largeur neutronique  $\Gamma_n$ . Ce facteur statistique  $g$  vaut 1 pour les neutrons « s » et les noyaux atomiques de spin nul,  $I = 0$ .

En posant :

$$x = \frac{E - E_0}{\Gamma/2} \quad (6.9)$$

on peut réécrire la section efficace de formation du noyau composé (6.4) sous la forme :

$$\sigma_{nc}(E) = \frac{\pi}{4\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} 4\pi \lambda_0^2 \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma} \frac{\Gamma}{\Gamma_n(E_0)} g \frac{\Gamma_n(E)\Gamma}{\frac{\Gamma^2}{4} \left[ \left( \frac{E - E_0}{\frac{\Gamma}{2}} \right)^2 + 1 \right]}$$

Soit, en reportant (6.7), (6.8) et (6.9) dans l'expression précédente de  $\sigma_{nc}(E)$  :

$$\sigma_{nc}(E) = \sigma_0 \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E_0)} \frac{1}{x^2 + 1} \quad (6.10)$$

**Au voisinage de la résonance**, on a  $E \approx E_0$ , et on peut négliger les variations des longueurs d'onde et des largeurs de sorte que (6.10) devient :

$$\sigma_{nc}(x) \approx g \frac{\sigma_0}{x^2 + 1} \quad (6.11)$$

où  $\sigma_0$  est défini par la relation (6.7) et  $x$  par (6.9).

Avec ces mêmes conventions, on peut exprimer les différentes sections efficaces.

▪ **Réaction de capture radiative**

$$\sigma_{(n,\gamma)}(E) = \sigma_0 g \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E_0)} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_\gamma(E)}{\Gamma} \quad (6.12)$$

Au voisinage de la résonance, on a :

$$\sigma_{(n,\gamma)}(x) \approx \sigma_0 g \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_\gamma(E_0)}{\Gamma} \quad (6.13)$$

▪ **Réaction de fission**

$$\sigma_{(n,f)}(E) = \sigma_0 g \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E_0)} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_f(E)}{\Gamma} \quad (6.14)$$

Au voisinage de la résonance, on a :

$$\sigma_{(n,f)}(x) \approx \sigma_0 g \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_f(E_0)}{\Gamma} \quad (6.15)$$

▪ **Réaction de diffusion élastique résonnante**

$$\sigma_{(n,n)}(E) = \sigma_0 g \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E_0)} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma} \quad (6.16)$$

Au voisinage de la résonance ( $E$  proche de  $E_0$ ), on a :

$$\sigma_{(n,n)}(x) \approx \sigma_0 g \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma} \quad (6.17)$$

### ▪ Réaction de diffusion élastique totale

On désigne par  $\sigma_p$  la section efficace potentielle qui a déjà été déterminée au paragraphe 2. La section efficace de diffusion est la somme de trois termes : la **section efficace de diffusion élastique potentielle** ( $\sigma_p$ ), la **section efficace de diffusion élastique résonnante** et le **terme d'interférence** entre la **diffusion potentielle** et la **diffusion résonnante** :

$$\sigma_s(E) = \sigma_p + \pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n^2(E)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} + 2\sqrt{\pi\lambda^2 g^2 \sigma_p} \frac{\Gamma_n(E)(E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.18)$$

avec  $\sigma_p = 4\pi a^2$  donnée par la relation (2.75) et  $\sigma_0 = 4\pi\lambda_0^2 \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma}$  donnée par la relation (6.7).

$$\begin{aligned} \sigma_s(E) = \sigma_p + \sigma_0 g \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E_0)} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma} \\ + 2\sqrt{\sigma_0 \frac{\Gamma}{\Gamma_n(E_0)} \frac{\pi}{4\pi} \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{g^2}{g}} \frac{\Gamma_n(E) \frac{(E - E_0)}{\frac{\Gamma}{2}} \frac{\Gamma}{2}}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 \left[ \left( \frac{E - E_0}{\frac{\Gamma}{2}} \right)^2 + 1 \right]} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_s(E) = \sigma_p + \sigma_0 g \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E_0)} \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma} \\ + 2\sqrt{g\sigma_0\sigma_p \frac{\Gamma_n^2(E)}{\Gamma_n(E_0)\Gamma} \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \frac{x}{x^2 + 1}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Au voisinage de la résonance ( $E$  proche de  $E_0$ ), on a :

$$\sigma_s(x) \approx \sigma_p + \sigma_0 g \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma} + 2\sqrt{g\sigma_0\sigma_p \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma} \frac{x}{x^2 + 1}} \quad (6.21)$$

On remarque que le terme d'interférence se ré-écrit :

$$\sqrt{g\sigma_0\sigma_p \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma}} = \sqrt{\frac{g^2}{g} \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0} \sigma_p \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma}} = \sqrt{\frac{\sigma_p}{g\sigma_0} \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma}} \sigma_0 g$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi a^2}{g 4\pi \lambda_0^2} \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma}} \sigma_0 g = \sqrt{\frac{a^2}{g \lambda_0^2}} \sigma_0 g = \frac{a}{\lambda_0} \sigma_0 \sqrt{g}$$

De plus :

$$k = \frac{1}{\lambda} \approx \frac{1}{\lambda_0}$$

Le terme d'interférence de (6.21) devient :

$$\sqrt{g \sigma_0 \sigma_p \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma}} \approx k a \sigma_0 \sqrt{g}$$

Il en résulte la nouvelle expression suivante de la section efficace de diffusion pour des énergies de neutrons proches de l'énergie de la résonance  $E_0$  :

$$\sigma_s(E) \approx \sigma_p + \sigma_0 g \frac{1}{x^2 + 1} \frac{\Gamma_n(E_0)}{\Gamma} + 2ka\sigma_0\sqrt{g} \frac{x}{x^2 + 1} \quad (6.22)$$

La forme (6.22) de  $\sigma_s(E)$  est représentée sur la **figure 20**.

Au voisinage de la résonance, la section efficace totale s'écrit :

$$\sigma_t(x) \approx \sigma_p + \sigma_0 g \frac{1}{x^2 + 1} + 2ka\sigma_0\sqrt{g} \frac{x}{x^2 + 1} \quad (6.23)$$

avec :

$$\sigma_p = 4\pi a^2 \quad (6.24)$$

$$ka = \frac{a}{\lambda} = 1.35 \cdot 10^{-13} \text{ (cm)} A^{\frac{1}{3}} \times \frac{\sqrt{E(\text{eV})}}{455.2} \frac{\text{\AA}}{A+1} 10^{12} (\text{cm}^{-1}) \\ \approx 2.965 \cdot 10^{-4} A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E(\text{eV})} \quad \text{pour } A \gg 1 \quad (6.25)$$

L'ensemble de ces expressions des **sections efficaces neutroniques se rapportent au formalisme de Breit-Wigner simple niveau** (*Single level Breit-Wigner formula* : SLBW *formula*) pour une résonance « s ». Si leurs expressions ci-dessus résultent d'une approche phénoménologique, elles peuvent être établies de manière rigoureuse<sup>67 68 69 70</sup>. Elles

<sup>67</sup> G. Breit, E. Wigner, « Capture of Slow Neutrons », *Physical Review*, 49, 519- 531, 1936 ; <https://doi.org/10.1103/PhysRev.49.519>.

<sup>68</sup> H. Feshbach, C. E. Porter, V. F. Weisskopf, « Model for Nuclear Reactions with Neutrons », *Physical Review*, Vol. 96, Number 2, 1954, pp. 448-464, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.96.448>.

<sup>69</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2007, pp. 472-487.

<sup>70</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., pp. 25-33.

découlent également de la théorie générale de la « **matrice  $R$**  » (voir annexe V). En toute généralité, la détermination de la section efficace de formation du noyau composé doit prendre en compte les autres ondes associées au neutron incident conformément aux relations (5.4) et (5.9).

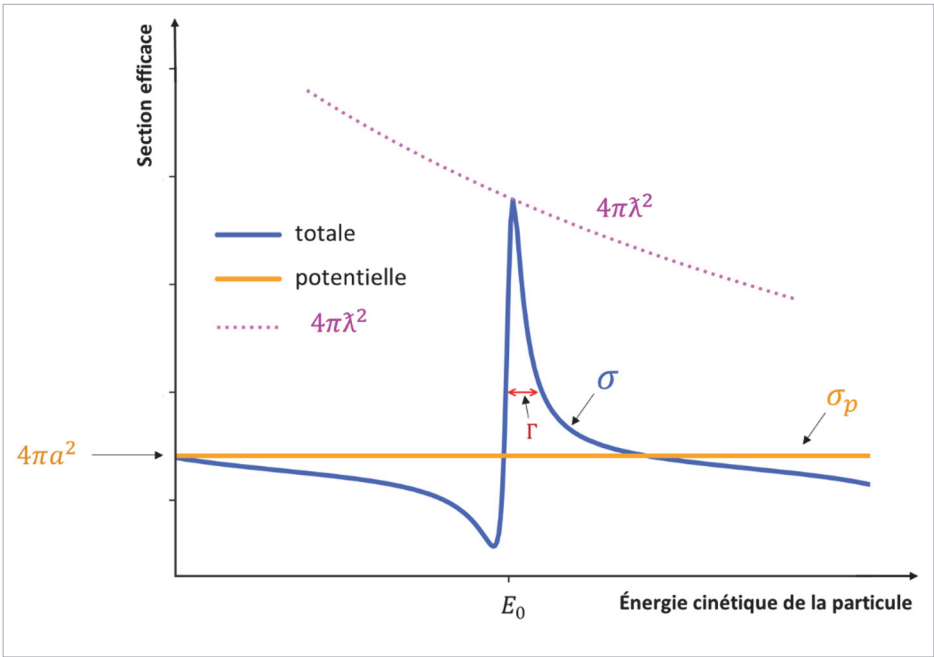


Figure 20. Comportement schématique de la section efficace de diffusion élastique d'un neutron « s » ( $l = 0$ ), en fonction de son énergie (ou de la particule réduite) au voisinage d'une résonance isolée, illustrant le formalisme simple niveau de Breit-Wigner.<sup>71</sup>

**Remarques sur le comportement des sections efficaces neutroniques en fonction de l'énergie du neutron incident :**

- La largeur neutronique  $\Gamma_n(E)$  varie comme  $\sqrt{E}$  pour les ondes « s »,  $E^{3/2}$  pour les ondes « p »,  $E^{5/2}$  pour les ondes « d », etc. Pour les ondes « s » on peut donc écrire :

$$\Gamma_n(E) = \Gamma_n(E_0) \sqrt{\frac{E}{E_0}} \tag{6.26}$$

- Dans le domaine thermique, les neutrons n'ont pas une énergie cinétique suffisante pour provoquer des réactions de diffusion inélastique ; en effet, leurs seuils se situent généralement

<sup>71</sup> D'après J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, op. cit., p. 401, figure 8.2.

au-dessus de la dizaine de keV :  $\sim 30$  keV pour le neptunium 239,  $\sim 40$  keV pour l'uranium 238,  $\sim 850$  keV pour le fer 56<sup>72</sup>,  $\sim 6$  MeV pour l'oxygène 16, etc.

- La largeur gamma,  $\Gamma_\gamma$ , est considérée à peu près indépendante de l'énergie cinétique  $E$  de la particule réduite du neutron et présente de relativement faibles variations d'une résonance à une autre. Elle dépend néanmoins de la largeur neutronique, du spin et de la parité du niveau d'énergie émetteur du photon, de l'énergie d'excitation du noyau composé et de la taille du noyau atomique<sup>73</sup>. Des largeurs gamma partielles sont ainsi définies liées à la propriété doublement électrique et magnétique des photons : émissions de types: E1, E2..., M1, M2... introduites au chapitre 5 § 6.
- La largeur  $\Gamma$  dépend de l'énergie  $E$  du neutron incident *via* la largeur  $\Gamma_n(E)$  liée au facteur de pénétrabilité de la surface nucléaire dépendant de l'énergie du neutron incident.
- $\sigma_p$  reste approximativement constante en fonction de l'énergie  $E$  du neutron incident. Aux basses énergies, à partir d'une certaine température on constate une remontée de cette section efficace lorsque l'énergie du neutron décroît : cela provient du fait que l'énergie cinétique du neutron incident n'est plus négligeable devant l'énergie cinétique du nucléide cible que lui confère l'agitation thermique (voir exemple plus bas et chapitre 10, partie B).
- Il a été précédemment noté que  $\lambda \propto 1/\sqrt{E}$  et  $\Gamma_n(E) \propto \sqrt{E}$  ; il s'ensuit que le produit des rapports  $\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}$  et  $\frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E_0)}$  apparaissant en particulier dans l'expression de la section efficace de capture radiative peut être remplacé par  $\sqrt{\frac{E_0}{E}}$ , de sorte que :

$$\sigma_{(n,\gamma)}(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{1}{\left(\frac{E - E_0}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2 + 1} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \quad (6.27)$$

Pour les petites valeurs de l'énergie  $E$  du neutron incident, telles que  $E \ll E_0$ , alors la section efficace de capture radiative se comporte comme l'inverse de la racine carrée de l'énergie du neutron incident, donc inversement proportionnelle à la vitesse  $v$  du neutron :

$$\sigma_{(n,\gamma)}(E) \propto \frac{1}{\sqrt{E}} \text{ ou } \sigma_{(n,\gamma)}(E) \propto \frac{1}{v} \quad (6.28)$$

Ce comportement est caractéristique des sections efficaces d'interaction des neutrons à basse énergie (il en a été fait état § 4) et n'est pas uniquement circonscrit à la réaction de capture radiative. Tout se passe comme si le fait que la durée de passage d'un neutron au voisinage d'un noyau atomique est d'autant plus grande que sa vitesse est petite accroissait la probabilité qu'a ce même neutron d'être capturé par le noyau atomique.

<sup>72</sup> Pour les réactions inélastiques sur le fer 56, voir par exemple : R. Beyer, R. Schwengner, R. Hannaske, A. R. Junghans, R. Massarczyk, M. Anders, D. Bemmerer, A. Ferrari, A. Hartmann, T. Kögler, M. Röder, K. Schmidt, A. Wagner, « Inelastic scattering of fast neutrons from excited states in 56Fe », *Nuclear Physics A*, Volume 927, 2014, pp. 41-52, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2014.03.010>.

<sup>73</sup> S. F. Mughabghab, M. Divadeenam, N. E. Holden, *Neutron Cross Section – Volume 1: Neutron resonance parameters and thermal cross sections, Part A : Z 1-60*, Academic Press, New York, London, 1981, pp. 38-52.



- La section efficace de diffusion à basse énergie, à la température 0 K, devient constante lorsque l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident décroît. En effet, on a vu précédemment que la section efficace de diffusion élastique totale de Breit-Wigner pour des ondes « s » est donnée par la relation (6.18) :

$$\sigma_s(E) = \sigma_p + \pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n^2(E)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} + 2\sqrt{\pi\lambda^2 g^2 \sigma_p} \frac{\Gamma_n(E)(E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

- Le terme de diffusion élastique potentielle,  $\sigma_p$ , est une constante.
- Compte tenu de (6.8) et (6.26), le terme résonnant s'écrit :

$$\pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n^2(E)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = 3.14 \times \left[ \frac{455.2}{\sqrt{E \text{ (eV)}}} 10^{-12} \right]^2 g \frac{\left( \Gamma_n(E_0) \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right)^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.29)$$

Quand  $E \rightarrow 0$ , cette expression devient :

$$\begin{aligned} & \rightarrow 6.51 \cdot 10^5 \times 10^{-24} \times g \frac{(\Gamma_n(E_0))^2 (\times 1 \text{ eV})}{E_0} \frac{(\Gamma_n(E_0))^2}{(E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \equiv 6.51 \cdot 10^5 g \frac{(\Gamma_n(E_0))^2}{(E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \text{ (barns)} \\ & \equiv \text{constante} \end{aligned} \quad (6.30)$$

- Le terme d'interférence s'écrit :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi\lambda^2 g^2 \sigma_p} \frac{\Gamma_n(E)(E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} &= 2\sqrt{\pi\lambda^2 g^2 4\pi a^2} \frac{\Gamma_n(E)(E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \\ &= 4\pi\lambda ag \frac{\Gamma_n(E_0) \sqrt{\frac{E}{E_0}} (E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Quand  $E \rightarrow 0$ , il vient :

$$\begin{aligned} & \rightarrow 4\pi\lambda ag \frac{\Gamma_n(E_0) \sqrt{\frac{E}{E_0}} (E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \rightarrow 4 \times 3.14 \times 455.2 \times 10^{-12} ag \frac{\frac{\Gamma_n(E_0)}{\sqrt{E_0}} (E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \\ & \equiv \text{constante} \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$= -5.72 \cdot 10^3 \times 10^{-12} ag \frac{\Gamma_n(E_0) \sqrt{E_0}}{(E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \text{ (cm}^2\text{)} \quad (6.33)$$

- Il peut être établi que la section efficace  $\sigma_{(1,3)}$  de la réaction nucléaire  $(1) + (2) \rightarrow (3) + (4)$  où (1) et (3) sont les particules « légères », et (2) et (4) les particules « lourdes », est proportionnelle au rapport  $p_3^2/(v_1 v_3)$  dans lequel  $v_1$  est la vitesse de la particule (1) légère incidente,  $v_3$  la vitesse de la particule (3) légère émise et  $p_3$  sa quantité de mouvement. Dans le cas d'une diffusion inélastique  $(n, n')$  d'un neutron sur un noyau atomique cible, on montre, à partir de considérations

cinématiques, que la section efficace de la réaction de diffusion inélastique en fonction de l'énergie cinétique  $E_C$  du neutron dans le référentiel du centre de masse, se comporte comme<sup>74</sup> :

$$\sigma_{(n,n')} (E_C) \sim \sqrt{E_C - |Q|} = \sqrt{E_C - E^*} \quad (6.34)$$

où :

- $Q$  est l'énergie de seuil de la réaction inélastique (n, n') :  $Q < 0$  ;
- $E^*$  représente l'énergie du niveau excité concerné du noyau atomique cible :  $E^* = -Q$  (voir chapitre 7 § 4).

- On constate que le calcul d'une section efficace requiert de connaître en particulier les valeurs des paramètres de résonance ; ceux-ci sont mesurés, compilés et rassemblés dans des bases de données dénommées **bibliothèques de données nucléaires** ou encore **évaluations de données nucléaires** (voir chapitre 13).
- Il faut noter que les évaluations de données nucléaires fournissent les paramètres de résonance en fonction de l'énergie du neutron dans le système du laboratoire.
- L'énergie  $E_0$  de la résonance est rigoureusement une constante indépendante de l'énergie cinétique du neutron incident pour le cas considéré ci-dessus de l'onde « s » de ce neutron<sup>75</sup>.

### Exemple 1

**Calcul de la section efficace totale d'interaction d'un neutron « s » avec un noyau atomique de fer<sup>56</sup>,  $^{56}_{26}\text{Fe}$ .**

La section efficace totale neutronique de la résonance du fer 56 située autour de l'énergie 27.7 keV pour les ondes « s » du neutron incident est donnée analytiquement par la « **formule de Breit-Wigner simple niveau** » suivante (voir (6.21)) :

$$\sigma(x) = \sigma_p + \frac{\sigma_0}{x^2 + 1} + 2 \sqrt{\sigma_0 \sigma_p \frac{g \Gamma_n}{\Gamma} \frac{x}{x^2 + 1}}$$

Avec :

$$x = \frac{E - E_0}{\Gamma/2}$$

$$E_0 = 27.7 \text{ keV}, \quad \Gamma_n = 1600 \text{ eV}, \quad \Gamma_\gamma = 1.5 \text{ eV}, \quad \Gamma = 1601.5 \text{ eV}$$

$$\sigma_0 = 93.8 \text{ b (barns)}, \quad \sigma_p = 3.715 \text{ b}$$

D'après la relation (6.2),  $g = 1$ , car d'une part le noyau de fer 56 a un spin nul et d'autre part seuls les neutrons « s » sont ici considérés.

On peut déterminer la valeur minimale  $\sigma_1$  et la valeur maximale  $\sigma_2$  de la section efficace totale. Pour cela, on réexprime  $\sigma(x)$  sous la forme suivante :

<sup>74</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, op. cit., pp. 424-435, en particulier les équations (13.58) et (13.66).

<sup>75</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 491.

$$\sigma(x) = \frac{cx + d}{x^2 + 1} + \sigma_p$$

avec :

$$c = 2 \sqrt{\sigma_0 \sigma_p \frac{\Gamma_n}{\Gamma}} = 2 \sqrt{93.8 \times 3.715 \times \frac{1600}{1601.5}} = 37.317$$

$$d = \sigma_0 = 93.8$$

Ces extrema  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont déterminés en résolvant :

$$\frac{d\sigma(x)}{dx} = 0, \text{ soit : } cx^2 + 2dx - c = 0 \text{ et } x = \frac{-d \pm \sqrt{c^2 + d^2}}{c}$$

d'où :

$$x_1 = \frac{-93.8 + \sqrt{(37.317)^2 + (93.8)^2}}{37.317} = \frac{7.15}{37.315} = 0.1916$$

$$E_1 = x_1 \frac{\Gamma}{2} + E_0 = 0.1916 \frac{1601.5}{2} + 27700 = 27853 \text{ eV} = 27.853 \text{ keV}$$

$$x_2 = \frac{-93.8 - \sqrt{(37.317)^2 + (93.8)^2}}{37.317} = \frac{-194.75}{37.317} = -5.219$$

$$E_2 = x_2 \frac{\Gamma}{2} + E_0 = -5.219 \frac{1601.5}{2} + 27700 = 23520 \text{ eV} = 23.52 \text{ keV}$$

Le calcul des dérivées secondes assurent que  $\sigma_1$  est un maximum et que  $\sigma_2$  est un minimum.

$$\sigma_1 = \sigma(x_1) = \frac{37.317 \times 0.1916 + 93.8}{(0.1916)^2 + 1} + 3.715 \approx 101.1 \text{ b}$$

$$\sigma_2 = \sigma(x_2) = \frac{37.317 \times (-5.22) + 93.8}{(-5.219)^2 + 1} + 3.715 \approx 0.137 \text{ b}$$

La **figure 21a** montre la variation de la section efficace totale de l'interaction d'un neutron avec un noyau atomique de fer 56 exprimée en fonction du paramètre  $x = \frac{E-E_0}{\Gamma/2}$  selon le « **formalisme de Breit-Wigner simple niveau** ».

On peut calculer les sections efficaces macroscopiques  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  correspondant respectivement aux sections efficaces microscopiques  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ainsi que les libres parcours moyens,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  correspondants dans un massif de fer de masse volumique  $\rho = 7.85 \text{ g.cm}^{-3}$  par exemple. Le nombre de noyaux atomiques de fer par unité de volume est  $N = \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{56} \cdot 7.85 = 8.44 \cdot 10^{22} \text{ atomes cm}^{-3}$ . On en déduit ( $1\text{b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ ) :

$$\Sigma_1 = N\sigma_1 = 8.44 \cdot 10^{22} \times 101.1 \cdot 10^{-24} = 8.53 \text{ cm}^{-1} \text{ et } \lambda_1 = \frac{1}{\Sigma_1} = \frac{1}{8.53} = 0.117 \text{ cm}$$

$$\Sigma_2 = N\sigma_2 = 8.44 \cdot 10^{22} \times 0.137 \cdot 10^{-24} = 1.16 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{\Sigma_2} = \frac{1}{1.16 \cdot 10^{-2}} = 86.48 \text{ cm}$$

Cela illustre l'importance de la connaissance des sections efficaces pour traiter les problèmes de propagation des neutrons dans différents matériaux, l'acier dans l'exemple ci-dessus.

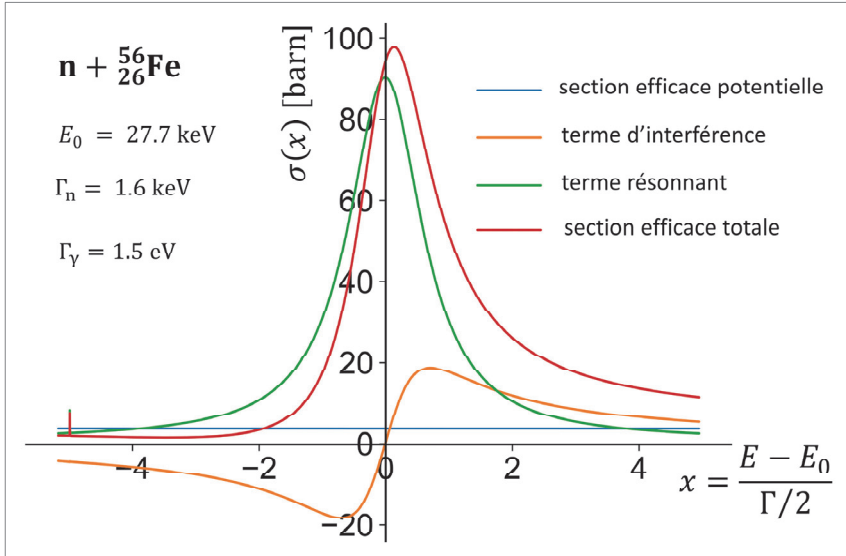


Figure 21a. Représentation de la résonance isolée du fer 56 autour de 27 keV par le formalisme de Breit-Wigner simple niveau<sup>76</sup> en fonction de la variable  $x = \frac{E-E_0}{\Gamma/2}$ . On identifie trois contributions à la section efficace totale, à savoir la section efficace de diffusion potentielle, la section efficace de diffusion résonnante en forme de « cloche » et le terme d'interférences entre ces deux composantes. On constate que l'effet d'interférence induit une dissymétrie, une augmentation et un décalage vers la droite du pic correspondant à la section efficace totale par rapport au pic de la section efficace purement résonnante.

## Exemple 2

**Calcul de la valeur de la section efficace de diffusion élastique,  $\sigma_s(E)$  quand l'énergie cinétique  $E$  du neutron tend vers 0 pour la résonance du plutonium 241 située à l'énergie  $E_0 = 0.258 \text{ eV}$ .**

La section efficace de diffusion élastique totale est donnée par l'expression (6.18). On en calcule ci-après chacun des termes qui la compose : potentiel, résonnant et d'interférence. Le moment angulaire (spin) du plutonium 241 est  $I^\pi = \frac{5}{2}^+$ . On ne considère ici que des neutrons « s », donc de moment angulaire  $l$  nul ( $l = 0$ ). La parité est  $\pi = (-1)^{l=0} = +1$ , elle est donc positive. Pour la résonance du noyau composé ( $n + \text{plutonium 241}$ ), il en résulte les deux valeurs possibles du spin :

$$J_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \rightarrow J_1^{\pi_1} = 2^+$$

<sup>76</sup> D'après H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., p. 30.

$$J_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 3 \rightarrow J_2^{\pi_2} = 3^+$$

Les tables de données nucléaires indiquent qu’il convient de retenir le moment angulaire  $J_2 = 3$ , le facteur statistique  $g$  vaut alors :

$$g = \frac{2J_2 + 1}{(2I + 1)(2s + 1)} = \frac{2 \times 3 + 1}{(2 \times \frac{5}{2} + 1)(2 \times \frac{1}{2} + 1)} = \frac{7}{12}$$

Le rayon du noyau atomique sera pris égal à :  $a = r_0 A^{1/3} = 1.35 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$  (cm) avec  $A = 241$  ; il s’ensuit :

$$a = 1.35 \cdot 10^{-13} \times (241)^{1/3} = 1.35 \cdot 10^{-13} \times 6.2219 = 8.39 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \equiv 8.39 \text{ fm}$$

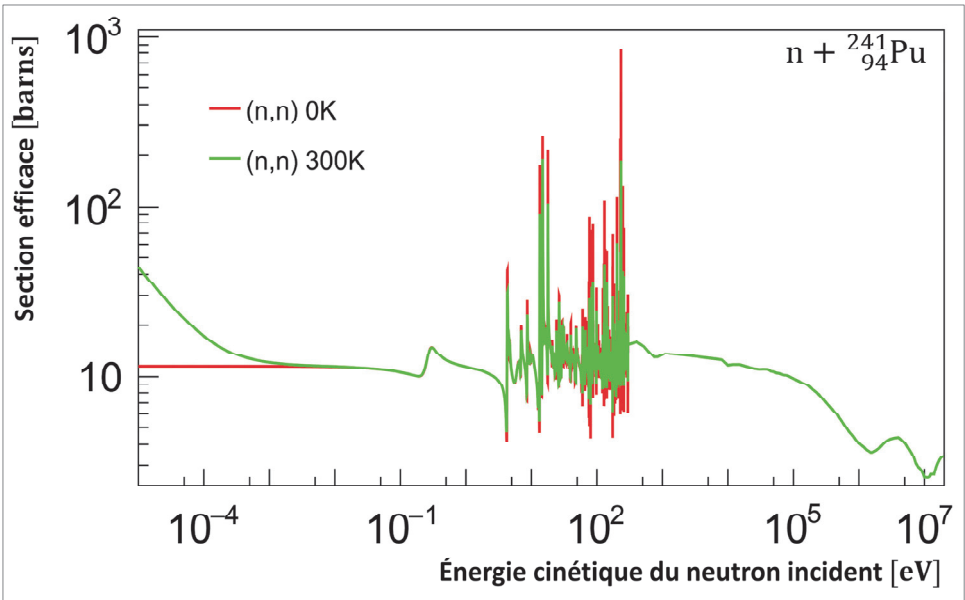


Figure 21b. Section efficace totale de diffusion élastique (n,n) sur un noyau atomique de plutonium 241, en fonction de l’énergie cinétique du neutron incident pour deux températures différentes 0 K et 300 K (données issues de l’évaluation JEFF-3.3) ; on y distingue :

- au centre, le domaine des résonances, montrant l’impact de la température (voir chapitre 10, partie A) ;
- à droite : le domaine rapide dans lequel la section efficace est relativement lisse et tend pour les hautes énergies vers  $2\pi a^2 \approx 4$  barns (voir relation (2.76) du paragraphe 2) ;
- à gauche : le domaine des basses énergies dans lequel la section efficace devient constante lorsque l’énergie cinétique du neutron tend vers 0 pour la température de 0 K, alors que pour une température non nulle, ici 300 K, la section efficace amorce une remontée attribuable à l’agitation thermique du nucléide cible ayant pour effet d’augmenter la probabilité de la diffusion (voir chapitre 10, partie B).

*Calcul du terme de diffusion potentielle élastique  $\sigma_p$  :*

On a :  $\sigma_p = 4\pi a^2$  d’où  $a$  :

$$\sigma_p = 4\pi a^2 = 4 \times 3.14 \times (8.39 \cdot 10^{-13})^2 = 8.86 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \equiv 8.86 \text{ barns}$$

**Calcul du terme résonnant :**

On dispose des données suivantes :

$$E_0 = 0.258 \text{ eV}$$

$$2g\Gamma_n(E_0) = 0.055 \text{ meV} = 0.055 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

$$\Gamma = 110 \text{ meV} = 110 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$$

$$\Gamma_n(E_0) = \frac{0.055 \times 10^{-3}}{2 \times \frac{7}{12}} = 4.71 \cdot 10^{-5} \text{ eV}$$

Le terme résonnant s'écrit en utilisant l'expression de  $\lambda$  (5.2) ainsi que la relation (6.26) :

$$\pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n^2(E)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = 3.14 \times \left[ \frac{455.2}{\sqrt{E} \text{ (eV)}} \cdot 10^{-12} \times \frac{241}{241 + 1} \right]^2 g \frac{\left( \Gamma_n(E_0) \sqrt{\frac{E}{E_0}} \right)^2}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Quand l'énergie  $E$  du neutron incident tend vers 0, ce terme résonnant devient :

$$\begin{aligned} & 6.51 \cdot 10^5 \times 10^{-24} \times g \frac{(\Gamma_n(E_0))^2 (\times 1 \text{ eV})}{E_0} \equiv 6.51 \cdot 10^5 g \frac{(\Gamma_n(E_0))^2}{(E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \text{ (barns)} \equiv \text{constante} \\ & = 6.51 \cdot 10^5 \frac{7}{12} \frac{\frac{(4.71 \cdot 10^{-5})^2}{0.258}}{(0.258)^2 + \frac{(110 \cdot 10^{-3})^2}{4}} \text{ (barns)} = 3.78 \cdot 10^5 \frac{8.6 \cdot 10^{-9}}{6.96 \cdot 10^{-2}} = 4.67 \cdot 10^{-2} \text{ barns} \end{aligned}$$

**Calcul du terme d'interférence :**

Ce terme est :

$$2\sqrt{\pi\lambda^2 g^2 \sigma_p} \frac{\Gamma_n(E)(E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} = 2\sqrt{\pi\lambda^2 g^2 4\pi a^2} \frac{\Gamma_n(E)(E - E_0)}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Quand l'énergie  $E$  du neutron incident tend vers 0, il devient :

$$\begin{aligned} 4\pi\lambda ag \frac{\Gamma_n(E_0) \sqrt{\frac{E}{E_0}} E_0}{(E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} &= 4\pi \left[ \frac{455.2}{\sqrt{E} \text{ (eV)}} \cdot 10^{-12} \times \frac{241}{241 + 1} \right] ag \frac{\Gamma_n(E_0) \sqrt{\frac{E}{E_0}} E_0}{(E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \\ &= 5.72 \cdot 10^3 \times 10^{-12} ag \frac{\Gamma_n(E_0) \sqrt{E_0}}{(E_0)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2} \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5.72 \cdot 10^3 \times 10^{-12} \times 8.39 \cdot 10^{-13} \times \frac{7}{12} \times \frac{4.71 \cdot 10^{-5} \sqrt{0.258}}{(0.258)^2 + \frac{(110 \cdot 10^{-3})^2}{4}} \\
&= 2.8 \cdot 10^{-21} \times \frac{2.39 \cdot 10^{-5}}{6.96 \cdot 10^{-2}} = 9.61 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 = -0.96 \text{ barns}
\end{aligned}$$

Quand l'énergie  $E$  du neutron incident tend vers 0, la section efficace de diffusion totale tend donc vers la valeur :  $\sigma_s = 8.86 + 4.67 \cdot 10^{-2} - 0.96 = 7.95$  barns.

En fait, au lieu du rayon  $a$  du noyau atomique, il est physiquement plus correct d'utiliser un « **rayon effectif de diffusion** » dont la valeur est d'environ 9.5 fm, ce qui conduit à une valeur approximative de 11.3 barns, plus proche de la valeur fournie par les évaluations de données nucléaires (voir **figure 21b**).<sup>77</sup>

## 6.2. Compléments sur les paramètres de résonance

### 6.2.1. Moment angulaire total, parité et facteur statistique

Aux largeurs déjà signalées comme paramètres de résonance du système nucléaire {neutron incident + noyau atomique cible} en interaction ou noyau composé, il faut ajouter le moment angulaire total  $\vec{J}$  de la résonance correspondante, encore appelé **spin de la résonance**, sa **parité**  $\pi$  et le **facteur statistique de spin**  $g$  précédemment introduit avec la relation (6.2).

- Le **spin**  $\vec{J}$  de la résonance est défini dans le cas général par la relation suivante qui exprime la conservation du moment cinétique :

$$\vec{J} = \vec{I} + \vec{l} + \vec{s} \quad (6.35)$$

avec :

$\vec{I}, I = \|\vec{I}\|$  : moment angulaire du noyau atomique-cible,

$\vec{l}, l = \|\vec{l}\|$  : moment angulaire du neutron incident,

$\vec{s}, s = \|\vec{s}\|$  : spin intrinsèque du neutron,  $s = 1/2$ .

Son module  $J = \|\vec{J}\|$  s'écrit :

$$\|\vec{J}\| = J = \|\vec{I} + \vec{l} + \vec{s}\| = |I \pm l \pm s| \quad (6.36)$$

- La **parité**  $\pi$  de la résonance est définie par la relation de conservation (6.37) en accord avec l'expression qui en est donnée dans le tableau 11 :

<sup>77</sup> G. Noguère, *Contributions to the study of the unresolved resonance range of neutron-induced reactions*, HDR, Université Bordeaux-1, 2014, <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01858682>; voir chapitre 3, pp. 24-25, chapitre 4, pp. 50-54.

$$\pi = \pi_l \times (-1)^l \quad (6.37)$$

Moment angulaire et parité sont associés dans la notation adoptée en spectroscopie nucléaire :  $J^\pi$ .

- Le **facteur statistique de spin** déjà défini par (6.2) pour les ondes « s » s'exprime en toute généralité comme<sup>78</sup> :

$$g' = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2l + 1)(2s + 1)} \quad (6.38)$$

Le dénominateur correspond à toutes les combinaisons de moments angulaires *a priori* réalisables à partir des moments angulaires  $s$  et  $l$  du neutron incident, et  $I$  du noyau atomique cible en interaction. Le numérateur représente le nombre de valeurs possibles du moment magnétique pour le moment angulaire total  $J$  fixé du noyau composé ou spin de la résonance. Le facteur  $g'$  correspond donc à la fraction de l'ensemble des combinaisons possibles conduisant à une valeur du spin  $J$  donnée de la résonance considérée.

En reprenant les relations (5.2) à (5.4) auxquelles on applique le facteur statistique  $g'$ , on constate que l'on peut opérer une simplification par le facteur  $(2l + 1)$ , ce qui conduit au facteur statistique  $g$  :

$$g = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2s + 1)} \quad (6.39)$$

### Remarque

On note que pour des neutrons de moment orbital  $l = 0$  (ondes « s ») et un noyau atomique de spin nul ( $I = 0$ ), alors  $g$  vaut 1 ; en effet, d'après (6.36) :

$$J = \left\| \vec{0} + \vec{0} + \frac{\vec{1}}{2} \right\| = \frac{1}{2}$$

d'où en appliquant (6.41) :

$$g = \frac{2 \times \frac{1}{2} + 1}{(2 \times 0 + 1)(2 \times \frac{1}{2} + 1)} = 1$$

### 6.2.2. Notion de largeur réduite

Pour des raisons de commodité découlant du comportement des largeurs des résonances neutroniques en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident, les « **largeurs réduites à 1 eV** » ont été introduites pour les différentes ondes associées à ce dernier ; il

<sup>78</sup> R. K. Adair, « Neutron Cross Sections of the Elements », *Rev. Mod. Phys.* 22, July 1, 1950, pp. 249-289, voir note de bas de page, p. 250. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.22.249>



ne faut pas les confondre avec les **largeurs réduites**,  $\gamma_{\lambda i}^2$ , définies dans le cadre de la théorie de la matrice R, auxquelles elles sont cependant étroitement liées (voir annexe V).<sup>79</sup>

Les **largeurs neutroniques réduites** sont définies par la relation (6.40) ci-après :

$$\Gamma_n^l = \frac{1}{v_l} \Gamma_{n,l} \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_\lambda(\text{eV})}} \quad (6.40)$$

D'où, en tenant compte des expressions de la **pénétrabilité**  $v_l$  données par le tableau 10 :

- $\Gamma_n^0$ , pour les neutrons « s » :

$$\Gamma_n^0 = \Gamma_n \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_\lambda(\text{eV})}} \quad (6.41)$$

- $\Gamma_n^1$ , pour les neutrons « p » :

$$\Gamma_n^1 = \Gamma_n \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_\lambda(\text{eV})}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{k^2 a^2} \right) \right] \quad (6.42)$$

- $\Gamma_n^2$ , pour les neutrons « d » :

$$\Gamma_n^2 = \Gamma_n \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_\lambda(\text{eV})}} \left[ 1 + \left( \frac{3}{k^2 a^2} \right) + \left( \frac{9}{k^4 a^4} \right) \right] \quad (6.43)$$

avec :

$$k = \frac{1}{\lambda}, \quad a \approx 1.35 A^{1/3} \text{ fm}$$

Toujours pour des raisons pratiques, les bases de données nucléaires fournissent les valeurs des produits<sup>80</sup> :

- pour les noyaux de nombre de masse A pair :

$$g\Gamma_n, \quad g\Gamma_n^0, \quad g\Gamma_n^1, \quad \frac{g\Gamma_n\Gamma_\gamma}{\Gamma}$$

<sup>79</sup> Pour les différentes définitions de « largeurs réduites », voir K. K. Seth, « S-wave neutron strength functions », *Nuclear Data Sheets*, Section A, Vol. 2, Issue 3, September 1966, pp. 299-332, p. 301, [https://doi.org/10.1016/S0550-306X\(66\)80008-3](https://doi.org/10.1016/S0550-306X(66)80008-3).

<sup>80</sup> S. F. Mughabghab, M. Divadeenam, N. E. Holden, *Neutron Cross Section – Volume 1 & 2 : Neutron resonance parameters and thermal cross sections*, Academic Press, New York, London, 1981.

- pour les noyaux de nombre de masse A impair :

$$2g\Gamma_n, \quad 2g\Gamma_n^0, \quad 2g\Gamma_n^1, \quad \frac{g\Gamma_n\Gamma_\gamma}{\Gamma}$$

**Exemple 1. Calcul du facteur statistique  $g$  dans le cas de l’interaction d’un neutron « s » avec un noyau d’aluminium 27,  $^{27}_{13}\text{Al}$**

Le moment angulaire et la parité de  $^{27}_{13}\text{Al}$  à l’état fondamental est :

$$I^\pi = \frac{5^+}{2}, \quad I = \frac{5}{2}, \quad \pi = +$$

Le noyau composé formé est  $^{28}_{13}\text{Al}^*$ . On considère l’onde « s » (moment orbital nul  $l = 0$ ) associée au neutron incident :

$$l = 0 \Rightarrow \vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad \text{et}$$

d’où :

$$g = \frac{2J + 1}{(2I + 1) \times 2}$$

car la valeur du spin intrinsèque  $s$  du neutron est  $1/2$ .

Le moment angulaire total  $J$  peut prendre deux valeurs auxquelles correspondent deux valeurs de  $g$  :

$$J = I + s \equiv \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow g = \frac{2 \times 3 + 1}{(2 \times 3 + 1) \times 2} = \frac{7}{6}$$
$$J = I - s \equiv \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow g = \frac{2 \times 2 + 1}{(2 \times 3 + 1) \times 2} = \frac{5}{6}$$

**Tableau 16. Exemple de paramètres de résonances de l’aluminium 27,  $^{27}_{13}\text{Al}$ .<sup>81</sup>**

$E_0$ (keV)	$J^\pi$	$l$	$2g\Gamma_n$ (keV)	$\Gamma_\gamma$ (eV)	$2g\Gamma_n^0$ (eV)	$2g\Gamma_n^1$ (eV)	$\frac{g\Gamma_n\Gamma_\gamma}{\Gamma}$ (eV)
34.75	$2^+$	0	1.49	23.4	13.41	–	0.94
87.3	$3^+$	0	12.75	2.1	43.15	–	1.25

**Exemple 2. Paramètres de la résonance « s » à l’énergie  $E_0 = 6.67$  eV de l’uranium 238**

**Tableau 17. Paramètres de la résonance à 6.67 eV de l’uranium 238,  $^{238}_{92}\text{U}$ .<sup>82</sup>**

$E_0$ (eV)	$J^\pi$	$l$	$\Gamma$ (meV)	$g\Gamma_n$ (meV)	$\Gamma_\gamma$ (meV)	$g\Gamma_n^0$ (meV)	$g\Gamma_n^1$ (meV)	$\Gamma_f$ (μeV)
6.67	$\frac{1^+}{2}$	0	24.89	1.49	23.4	0.577	–	$\frac{0.009}{7}$

<sup>81</sup> S. F. Mughabghab, M. Divaddeenam, N. E. Holden, *Neutron Cross Section – Volume 1, op. cit.*, p. 13-1.

<sup>82</sup> *Ibid.*, p. 92-30.

Le moment angulaire et la parité du noyau d’uranium 238 sont :  $I^\pi = 0^+$

En partant des données contenues dans le **tableau 17**, on détermine le facteur statistique  $g$  et la largeur totale,  $\Gamma$ , de la résonance :

$$g = \frac{2J + 1}{2(2I + 1)} = \frac{2 \times 1/2 + 1}{2(2 \times 0 + 1)} = 1 \Rightarrow \Gamma_n = 1.49 \text{ meV}$$

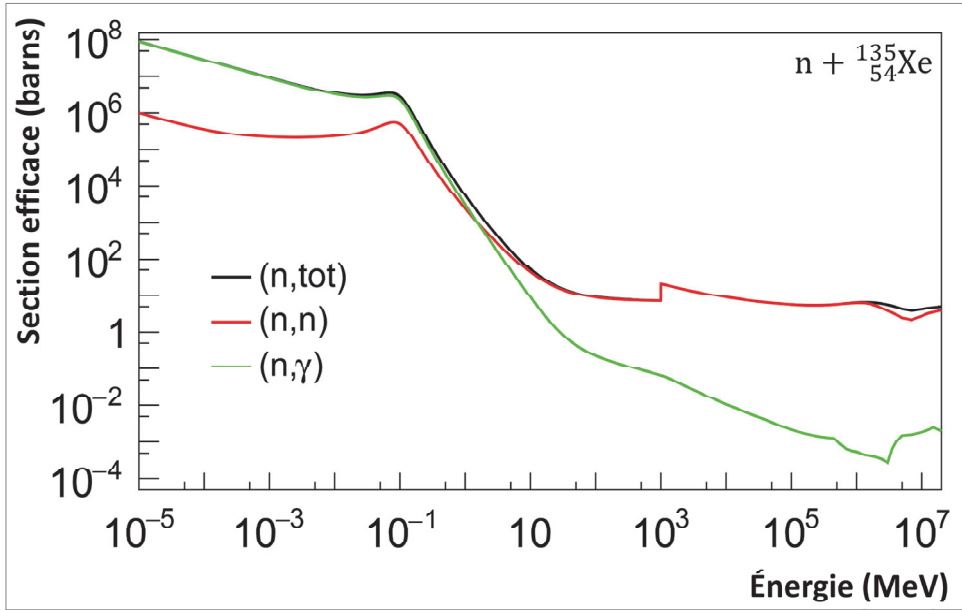
$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_f = 1.49 + 23.4 + 0.0097 \cdot 10^{-6} = 24.89 \text{ meV}$$

**Exemple 3. Calcul de la section efficace de capture radiative d’un neutron « s » par la résonance à 0.084 eV du xénon 135,  $^{135}_{54}\text{Xe}$ .**

Le noyau de  $^{135}_{54}\text{Xe}$  présente une résonance neutronique « s » (voir **figure 22**) à l’énergie 0.084 eV, dont les paramètres sont fournis dans le **tableau 18**.

**Tableau 18. Paramètres de la résonance à 0.084 eV du xénon 135,  $^{135}_{54}\text{Xe}$ .**<sup>83</sup>

$E_0$ (eV)	$J^\pi$	$\sigma_0$ (barns)	$2g\Gamma_n$ (meV)	$\Gamma_\gamma$ (meV)	$2g\Gamma_n^0$ (meV)
0.084	$2^+$	$3.34 \cdot 10^6$	24	95	83



**Figure 22. Sections efficaces neutroniques de diffusion élastique (n, n), capture radiative (n, γ) et totale (n, tot) du xénon 135 en fonction de l’énergie du neutron incident (données issues de l’évaluation JEFF3.3).**

Le moment angulaire et la parité du noyau atomique  $^{135}_{54}\text{Xe}$  étant  $I^\pi = (3/2)^+$ , on a en utilisant les données du **tableau 18** :

<sup>83</sup> S. F. Mughabghab, M. Divadeenam, N. E. Holden, *Neutron Cross Section – Volume 1, op. cit.*, p. 54-9.

$$g = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2s + 1)} = \frac{2 \times 2 + 1}{(2 \times \frac{3}{2} + 1)(2 \times \frac{1}{2} + 1)} = \frac{5}{8}$$

$$\Gamma_n = \frac{2g\Gamma_n^0}{2g} = \frac{24}{\frac{5}{8}} = 19.2 \text{ meV}$$

$$\Gamma_n^0 = \frac{2g\Gamma_n^0}{2g} = \frac{83}{\frac{5}{8}} = 66.4 \text{ meV}$$

$$\sigma_0 = 4\pi\lambda_0^2 g \frac{\Gamma_n}{\Gamma} = \frac{2.6038 \cdot 10^6}{E_0(\text{eV})} \left( \frac{A + 1}{A} \right)^2 \frac{g\Gamma_n}{\Gamma} \quad (\text{barns})$$

où  $\Gamma$  est la largeur totale de la résonance et  $A$  représente la masse du noyau atomique cible en unité de masse du neutron.

On calcule la largeur totale  $\Gamma$  :

$$\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma = 19.2 + 95 = 114.2 \text{ meV}$$

$$\sigma_0 = \frac{2.6038 \cdot 10^6}{0.084(\text{eV})} \left( \frac{133.74 + 1}{133.74} \right)^2 \frac{12}{114.2} = 3.34 \cdot 10^6 \text{ b}$$

La section efficace de capture radiative,  $\sigma_{(n,\gamma)}$ , est obtenue par multiplication de  $\sigma_0$  par la probabilité de la voie de sortie gamma  $\Gamma_\gamma/\Gamma$  :

$$\sigma_{(n,\gamma)} = \sigma_0 \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} = 3.34 \cdot 10^6 \frac{95}{114.2} = 2.78 \cdot 10^6 \text{ b}$$

**Exemple 4. Paramètres de résonance du fer 56,  $^{56}_{26}\text{Fe}$ , à l'énergie  $E_0 = 27.7 \text{ keV}$  et calcul de la largeur neutronique réduite  $\Gamma_n^0$ .**

**Tableau 19a. Paramètres de la résonance à 27.7 keV du fer 56  $^{56}_{26}\text{Fe}$ .<sup>84</sup>**

$E_0(\text{keV})$	$J^\pi$	$l$	$g\Gamma_n \text{ (eV)}$	$\Gamma_\gamma(\text{meV})$	$g\Gamma_n^0(\text{meV})$
27.7	$(1/2)^+$	0	1420	1.45	8.53

En utilisant (6.38) on calcule la largeur neutronique réduite  $\Gamma_n^0$  relative aux neutrons « s » :

$$\Gamma_n^0 = 1420 \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_0 \text{ (eV)}}} = 1420 \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{27700 \text{ (eV)}}} = 8.53 \text{ eV}$$

**Exemple 5. Paramètres de résonance du fer 56,  $^{56}_{26}\text{Fe}$ , à l'énergie  $E_0 = 52.12 \text{ keV}$  et calcul de la largeur neutronique réduite  $\Gamma_n^1$ .**

<sup>84</sup> S. F. Mughabghab, M. Divadeenam, N. E. Holden, *Neutron Cross Section – Volume 1, op. cit.*, p. 26-8.

**Tableau 19b. Paramètres de la résonance à 52.12 du fer 56,  $^{56}_{26}\text{Fe}$ .<sup>85</sup>**

$E_0(\text{keV})$	$J^\pi$	$l$	$g\Gamma_n(\text{eV})$	$\Gamma_\gamma(\text{eV})$	$g\Gamma_n^1(\text{eV})$	$\frac{g\Gamma_n\Gamma_\gamma}{\Gamma}(\text{eV})$
52.12	$\frac{3}{2}^-$	1	26.3	0.405	1.83	0.81

Le **tableau 19b** indique que le neutron incident a un moment angulaire  $l = 1$ . Le moment angulaire et la parité du noyau atomique du fer 56 dans son état fondamental étant  $I^\pi = 0^+$ , le moment angulaire  $J$  de la résonance vaut :

$$J = I + l + s = 0 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

La parité de cette résonance est :  $\pi = \pi_l \times (-1)^{l-1} \equiv (+)(-) \equiv (-)$

On retrouve bien la valeur  $J^\pi$  de la résonance portée dans le tableau 19b.

Le facteur statistique  $g$  est :

$$g = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2s + 1)} = \frac{2 \times (3/2) + 1}{(2 \times \frac{3}{2} + 1)(2 \times \frac{1}{2} + 1)} = \frac{4}{8} = 0.5$$

On en déduit la valeur de la largeur neutronique  $\Gamma_n$  proprement dite ainsi que celle de la largeur neutronique réduite  $\Gamma_n^1$  :

$$\Gamma_n = \frac{g\Gamma_n}{g} = \frac{26.3}{0.5} = 52.6 \text{ eV}$$

$$\Gamma_n^1 = \frac{g\Gamma_n^1}{g} = \frac{1.83}{0.5} = 3.66 \text{ eV}$$

On peut retrouver directement cette valeur de la largeur neutronique réduite  $\Gamma_n^1$  avec (6.44). Pour cela, on introduit l'expression (6.27) de  $ka$ , rappelée ci-dessous, dans (6.42) :

$$ka = \frac{a}{\lambda} = 1.35 \cdot 10^{-13} (\text{cm}) A^{1/3} \frac{\sqrt{E(\text{eV})}}{455.2} \frac{A}{A+1} 10^{12} \approx 2.96 \cdot 10^{-4} A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E(\text{eV})}$$

On obtient :

$$\Gamma_n^1 = \Gamma_n \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_0(\text{eV})}} \left[ 1 + \frac{1.1369 \cdot 10^7}{E(\text{eV}) A^{\frac{2}{3}}} \right] = \Gamma_n \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_0(\text{eV})}} \left[ 1 + \frac{11369}{E(\text{keV}) A^{\frac{2}{3}}} \right] \quad (6.44)$$

Pour la résonance du fer considérée ici et pour l'énergie du neutron  $E$  égale à celle de la résonance  $E_0$  :

<sup>85</sup> *Ibid.*

$$\Gamma_n^1 = 52.6 \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{52.12 \cdot 10^3 (\text{eV})}} \left[ 1 + \frac{11369}{52.12 \cdot 56^{\frac{2}{3}}} \right] = 52.6 \times 4.38 \cdot 10^{-3} \times [1 + 14.9] = 3.66 \text{ eV}$$

valeur identique à celle correspondante déterminée plus haut, déduite de la valeur de  $g\Gamma_n^1$  fournie dans le tableau 19b.

**Exemple 6. Paramètres de résonance du chrome 53,  $^{53}_{24}\text{Cr}$ , et calcul de la largeur neutronique réduite pour la résonance à l'énergie  $E_0 = 8.1705 \text{ keV}$ .**

**Tableau 20. Paramètres de la résonance à 8.1705 keV du chrome 53  $^{53}_{24}\text{Cr}$ .<sup>86</sup>**

$E_0(\text{keV})$	$J^\pi$	$l$	$g\Gamma_n \text{ (eV)}$	$\Gamma_\gamma(\text{eV})$	$g\Gamma_n^0(\text{eV})$
8.17	$2^-$	0	1260	3.25	13.9

Le moment angulaire et la parité du chrome 53 sont  $I^\pi = (3/2)^-$ . Le moment angulaire  $J$  de la résonance considérée vaut :

$$J = I + l + s = \frac{3}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 2$$

La parité de la résonance est :  $\pi = \pi_I \times (-1)^{l=0} \equiv (-) (+) \equiv (-)$

Le facteur statistique  $g$  est :

$$g = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2s + 1)} = \frac{2 \times (3/2) + 1}{(2 \times \frac{3}{2} + 1)(2 \times \frac{1}{2} + 1)} = \frac{4}{8} = 0.5$$

On en déduit la valeur de la largeur neutronique  $\Gamma_n$  proprement dite ainsi que celle de la largeur neutronique réduite  $\Gamma_n^0$  :

$$\Gamma_n = \frac{g\Gamma_n}{g} = \frac{1260}{0.5} = 2520 \text{ eV}$$

$$\Gamma_n^0 = \frac{g\Gamma_n^0}{g} = \frac{13.9}{0.5} = 27.8 \text{ eV}$$

**7. Cas des résonances du domaine d'énergie « non résolu »**

Dans le **domaine des résonances « non résolues »** dans lequel on adopte une **approche statistique**<sup>87 88</sup>, on attribue à chaque niveau d'énergie du noyau composé des **paramètres de résonance moyens** dans un intervalle d'énergie prédéfini. Ainsi, les niveaux d'énergie ont une largeur totale commune  $\langle \Gamma \rangle$ . On définit également un **espacement moyen**  $\langle D \rangle$  entre deux niveaux d'énergie consécutifs de telle sorte que l'énergie  $\mathcal{E}_m$  du niveau  $m$  se déduit de celle  $\mathcal{E}_d$  du premier niveau de l'intervalle d'énergie considéré :

<sup>86</sup> *Id.*, p. 24-9.

<sup>87</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, *op. cit.*, pp. 18-23 et Chapitre V.

<sup>88</sup> G. Noguère, *Contributions to the study of the unresolved resonance range of neutron-induced reactions*, *op. cit.*

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_d + m\langle D \rangle \quad (7.1)$$

La fonction d'onde de la particule relative associée au niveau  $m$  est :

$$\psi_m \equiv \psi_{0m}(\vec{r}) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( \mathcal{E}_d + m\langle D \rangle - i \frac{\langle \Gamma \rangle}{2} \right) t \right] \quad (7.2)$$

Il est possible d'associer à un nombre  $N$  élevé de niveaux une fonction d'onde sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions d'onde de coefficients notés  $a_m$  des différents niveaux :

$$\psi_N = \sum_{m=1,N} a_m \psi_m = \sum_{m=1,N} \psi_{0m}(\vec{r}) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( \mathcal{E}_d + m\langle D \rangle - i \frac{\langle \Gamma \rangle}{2} \right) t \right] \quad (7.3)$$

$$\psi_N = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \left( \mathcal{E}_d - i \frac{\langle \Gamma \rangle}{2} \right) t \right] \sum_{m=1,N} a_m \psi_{0m}(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} m\langle D \rangle t} \quad (7.4)$$

Le terme :

$$\sum_{m=1,N} a_m \psi_{0m}(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} m\langle D \rangle t} \quad (7.5)$$

représente le développement de la fonction périodique  $e^{i\omega t}$  de pulsation  $\omega = \frac{\langle D \rangle}{\hbar}$  et donc de **période**  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\hbar}{\langle D \rangle} \quad (7.6)$$

### Exemple

En prenant le cas de l'uranium 238 avec  $\langle D \rangle = 23$  meV, on obtient :

$$\mathcal{P} = \frac{2 \times 3.14 \times 4.136 \cdot 10^{-21} (\text{MeV s})}{23 \cdot 10^{-9} (\text{MeV})} = 1.8 \cdot 10^{-13} \text{ s}$$

valeur significativement plus élevée que le temps  $\tau$  précédemment obtenu, relatif à un niveau isolé.

La période  $\mathcal{P}$  permet alors d'établir un lien entre le **coefficient de transparence** (ou **transmission**) de la **surface nucléaire**.

La relation (7.6) générale s'applique aux niveaux d'énergie relatifs au moment orbital donné  $l$  de la particule relative et dans ce cas on note  $\langle D_l \rangle$  l'espacement moyen entre les niveaux d'énergie de moment orbital  $l$  compris dans l'intervalle d'énergie considéré. En

prenant l'exemple de la réémission d'un neutron par le noyau composé, la probabilité moyenne,  $\langle \kappa_{n,l} \rangle$ , qu'à ce processus de désexcitation de se produire par unité temps est induite par la relation (5.26) :

$$\langle \kappa_{n,l} \rangle = \frac{\langle \Gamma_{n,l} \rangle}{\hbar} \quad (7.7)$$

C'est aussi le nombre de fois,  $1/\mathcal{P}_l$ , où la particule relative «  $l$  » se présente devant la surface nucléaire à franchir, multiplié par le coefficient de transparence moyen de cette surface,  $\langle T_l \rangle$ , pour un tel neutron. On a par conséquent l'égalité :

$$\langle \kappa_{n,l} \rangle = \frac{\langle \Gamma_{n,l} \rangle}{\hbar} = \frac{\langle T_l \rangle}{\mathcal{P}_l} = \langle T_l \rangle \frac{\langle D_l \rangle}{2\pi\hbar} \quad (7.8)$$

On en déduit immédiatement :

$$\langle T_l \rangle = 2\pi \frac{\langle \Gamma_{n,l} \rangle}{\langle D_l \rangle} \quad (7.9)$$

qui exprime ici aussi le **coefficient de transmission moyen ou coefficient de transparence moyen** de la surface nucléaire en fonction des paramètres de résonance moyens, pour le moment orbital  $l$  de la particule relative.

L'application de l'hypothèse statistique conduit aux expressions suivantes des différents types de sections efficaces dans lesquelles apparaissent des paramètres de résonance moyens. À des valeurs ponctuelles en énergie des paramètres de résonance se substituent donc des valeurs moyennées de ces mêmes paramètres par intervalle d'énergie autour d'énergies fixées.

Cette démarche se décline également sur le spin  $J$  du noyau composé, de sorte que la section efficace de formation de celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{nc} \rangle &= 2\pi^2 \lambda^2 \sum_J \sum_l g_{l,J} (2l+1) \frac{\langle \Gamma_{n,l,J} \rangle}{\langle D_{l,J} \rangle} \\ &= \pi^2 \lambda^2 \sum_J \sum_l g_{l,J} (2l+1) \langle T_{l,J} \rangle \end{aligned} \quad (7.10)$$

où, pour le moment orbital  $l$  et le spin  $J$  donnés :

- $\langle \Gamma_{n,l,J} \rangle$  est la moyenne des largeurs des résonances effectuées sur l'intervalle d'énergie considéré ;
- $\langle D_{l,J} \rangle$  est l'espacement moyen entre deux niveaux d'énergie consécutifs sur l'intervalle d'énergie considéré ;
- $g_{l,J}$  est le facteur statistique de spin :



$$g_{l,J} = \frac{2J + 1}{(2I + 1)(2l + 1)(2s + 1)} \quad (7.11)$$

- $\langle T_{l,J} \rangle$  est le **coefficient de transparence** (ou de **transmission**) ; à l'instar de  $\langle T_l \rangle$  donné par (7.9), il est défini par l'expression :

$$\langle T_{l,J} \rangle = 2\pi \frac{\langle \Gamma_{n,l,J} \rangle}{\langle D_{l,J} \rangle} \quad (7.12)$$

La **section efficace d'une réaction partielle**, repérée par l'indice  $r$ , s'écrit :

$$\langle \sigma_r \rangle = 2\pi^2 \lambda^2 \sum_J \sum_{l=0}^{\infty} g_{l,J} (2l + 1) \frac{1}{\langle D_{l,J} \rangle} \left\langle \frac{\Gamma_{n,l,J} \cdot \Gamma_r}{\Gamma} \right\rangle \quad (7.13)$$

L'annexe VI précise la manière dont est calculée la quantité moyenne  $\left\langle \frac{\Gamma_{n,l,J} \cdot \Gamma_r}{\Gamma} \right\rangle$ .

Dans les paragraphes suivants, on expose succinctement certaines propriétés importantes des résonances en introduisant d'une part la notion de **fonction densité**, et d'autre part les lois de probabilité qui décrivent la **distribution des espacements** entre **résonances** et celle de leurs **largeurs**.

## 8. Fonction densité ou fonction force (*strength function*)

Les physiciens nucléaires utilisent dans leurs études la **fonction densité** ou **fonction force** (*strength function*)<sup>89 90</sup> définie, pour une famille de résonances de même moment angulaire  $J$  comptabilisées dans un intervalle d'énergie fixé, par la relation :

$$S_{l,J} = \frac{\langle \Gamma_{n,l,J} \rangle}{\langle D_{l,J} \rangle} \frac{1}{\nu_l} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{E}} = \frac{\langle \Gamma_{n,J}^l \rangle}{\langle D_{l,J} \rangle} \quad (8.1)$$

où  $\langle \Gamma_{n,J}^l \rangle$  est la « **largeur neutronique réduite moyenne** » pour les neutrons de moment orbital  $l$  et  $\nu_l$  la **pénétrabilité** de la surface nucléaire séparant région interne et externe précédemment définie au paragraphe 5 ; on a donc posé :

$$\langle \Gamma_{n,J}^l \rangle = \langle \Gamma_{n,l,J} \rangle \frac{1}{\nu_l} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{E}} \quad (8.2)$$

<sup>89</sup> Idée introduite dans : H. A. Bethe, « Nuclear Physics - B. Nuclear Dynamics, Theoretical », *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 9, April 1937, Number 2, pp. 69-244 *et. sq.*, voir pp. 98-99.

<sup>90</sup> K. K. Seth, « S-wave neutron strength functions », *Nuclear Data Sheets*. Section A, Vol. 2, Issue 3, September 1966, pp. 299-332.

La section efficace de formation du noyau composé peut alors être réécrite comme :

$$\langle \sigma_{nc} \rangle = 2\pi^2 \chi^2 \sum_J \sum_{l=0}^{\infty} g_{l,J} (2l+1) v_l S_{l,J} \sqrt{E} \quad (8.3)$$

On définit aussi la **fonction densité relativement à l'onde incidente  $l$**  par sommation sur les familles de résonances de moments angulaires  $J$  :

$$S_l = \sum_J g_{l,J} S_{l,J} \quad (8.4)$$

On a alors :

$$\langle \sigma_c \rangle = 2\pi^2 \chi^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) v_l S_l \sqrt{E} \quad (8.5)$$

On définit également la fonction force pour une valeur donnée du moment orbital  $l$  :

$$S_l = \frac{\langle \Gamma_n^l \rangle}{\langle D_l \rangle} = \frac{\langle \Gamma_{n,l} \rangle}{\langle D_l \rangle} \frac{1}{v_l} \sqrt{\frac{1 \text{ eV}}{E}} \quad (8.6)$$

### Exemple

En considérant les résonances « s » relatives à l'interaction d'un neutron à l'énergie thermique avec un noyau d'uranium 238, on a pour un domaine d'énergie circonscrit entre 0 et 4 keV :  $\langle D_{l=0} \rangle \equiv \langle D_0 \rangle = 18.6 \text{ eV}$ ,  $\langle \Gamma_n^0 \rangle = 2.14 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$  ; la fonction densité correspondante  $S_0$  a pour valeur :

$$S_0 = \frac{\langle \Gamma_n^0 \rangle}{\langle D_0 \rangle} = \frac{2.14 \cdot 10^{-3}}{18.6} = 1.15 \cdot 10^{-4}$$

Le comportement de la fonction force  $S_0$  pour les résonances « s » en fonction du nombre de masse du nucléide considéré est reproduit sur la **figure 23**.

### Remarque

Il ne faut pas confondre la **fonction densité  $S_l$**  avec le **facteur de décalage de niveau  $S_l$**  rencontré dans le formalisme de la **matrice  $R$**  (voir annexe V).

Les fonctions densités  $S_{l,J}$  et  $S_l$ , telles que définies ci-dessus sont des **grandeurs adimensionnelles**.<sup>91</sup> Les fonctions densité  $S_l$  font l'objet de mesures, montrant qu'elles manifestent des variations d'un noyau atomique à l'autre (voir figure 23). Elles

<sup>91</sup> Certains auteurs utilisent une autre définition de la fonction densité, par exemple :  $S_0 = \frac{\langle \Gamma_n^0 \rangle}{\langle D_0 \rangle \sqrt{E}}$  dont l'unité est  $\text{eV}^{-1/2}$  si l'énergie  $E$  du neutron incident est exprimée en MeV.

interviennent dans les différents modèles prédictifs de détermination des sections efficaces nucléaires, notamment dans le **modèle optique** brièvement présenté au paragraphe 11. Comme le montre la **figure 23**, les fonctions densités se prêtent à des comparaisons avec des mesures, ce qui permet d'en valider les valeurs théoriques et d'en faire un outil d'analyse des données nucléaires pour les physiciens évaluateurs.<sup>92</sup>

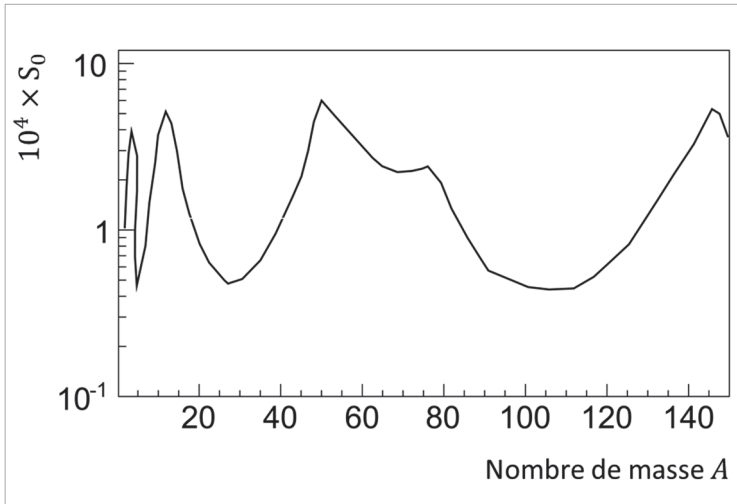


Figure 23. Allure de la fonction force pour les ondes « s » associées aux neutrons incidents sur un noyau atomique ; en abscisse :  $A$  le nombre de masse ; le domaine d'énergie considéré est compris entre 10 keV et 100 keV.<sup>93</sup>

Ainsi par exemple, en rapprochant les expressions suivantes vues plus haut, pour  $l = 0$  :

$$T_0 \cong \frac{4k}{K} v_0, \quad \langle T_0 \rangle = 2\pi \frac{\langle \Gamma_{n,0} \rangle}{\langle D_0 \rangle}, \quad S_0 = \frac{\langle \Gamma_n^0 \rangle}{\langle D_0 \rangle} = \frac{\langle \Gamma_{n,0} \rangle}{\langle D_0 \rangle} \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{E}}$$

on a :

$$S_0 = \frac{\langle T_0 \rangle}{2\pi} \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{E}} = \frac{4k}{K} v_0 \times \frac{1}{2\pi} \frac{1}{v_0} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{E}} = \frac{2k}{\pi K} \sqrt{\frac{1\text{eV}}{E}}$$

Or, pour les valeurs de  $A$  grandes devant l'unité, d'après les relations (2.62) et (2.66) on a :

$$ka = 2.4 \cdot 10^{-4} A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E(\text{eV})}, \quad Ka = 2.4 \cdot 10^{-4} A^{\frac{1}{3}} \sqrt{E + |U_0|(\text{eV})}$$

<sup>92</sup> Voir *Conference on neutron physics by time of flight*, Gatlinburg, Tennessee, November 1-2, 1956, ORNL-2309 ; voir entre autres D. H. Hughes, « Contributions of neutron time-of-flight experimentation to low-energy neutron physics », pp. 48-58.

<sup>93</sup> D'après S. F. Mughabghab, M. Divadeenam, N. E. Holden, *Neutron Cross Section – Volume 1 : Neutron resonance parameters and thermal cross sections, Part A : Z 1-60*, Academic Press, New York, London, 1981, p. 23.

Pour des énergies cinétiques de neutrons incidents  $E$  petites devant la profondeur  $|U_0|$  du puits de potentiel nucléaire ( $E \ll |U_0|$ ), on obtient :

$$\frac{k}{K} = \frac{\sqrt{E(\text{eV})}}{\sqrt{|U_0|}} \quad (8.7)$$

et :

$$S_0 = \frac{\langle \Gamma_n^0 \rangle}{\langle D_0 \rangle} = \frac{2 \sqrt{1 \text{ eV}}}{\pi \sqrt{|U_0|}} \quad (8.8)$$

La fonction densité  $S_0$  relie donc non seulement la largeur neutronique réduite moyenne et l'espacement moyen des niveaux quantiques du noyau composé, mais elle est inversement proportionnelle à la profondeur  $|U_0|$  du puits de potentiel nucléaire.<sup>94 95</sup> Autrement dit, son estimation à partir de mesures conduit à évaluer la profondeur  $U_0$  du puits de potentiel nucléaire.

Le choix des domaines d'énergie sur lesquels sont effectuées les moyennes  $\langle \Gamma_{n,l,J} \rangle$  et  $\langle D_{l,J} \rangle$  ou bien du nombre de résonances à prendre en compte doit être statistiquement pertinent.<sup>96</sup>

<sup>97</sup> À titre indicatif, pour les noyaux atomiques de nombre de masse élevé (« noyaux lourds ») dans un intervalle d'énergie de 50 eV, on peut comptabiliser une cinquantaine de résonances (niveaux d'énergie). Une largeur neutronique réduite moyenne,  $\langle \Gamma_n^l \rangle$ , peut être déterminée de la manière suivante sur un intervalle d'énergie  $\Delta E = [E_m, E_M]$  dans lequel on recense  $N_{Res}$  résonances à des énergies  $E_i$ ,  $E_m \leq E_i \leq E_M$  :

$$\langle \Gamma_n^l \rangle = \frac{1}{N_{Res}} \sum_{i=1}^{N_{Res}} \Gamma_n^l(E_i) \quad (8.9)$$

La fonction densité associée s'écrit alors sous les formes possibles suivantes :

$$S_l = \frac{\langle \Gamma_n^l \rangle}{\langle D_l \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{Res}} \Gamma_n^l(E_i)}{\langle D_l \rangle N_{Res}} \quad (8.10)$$

Dans le cas d'un noyau atomique de spin  $J$  (ou moment angulaire  $J$ ) non nul, on a vu plus haut que l'on est amené à prendre en compte des familles de résonances caractérisées par leurs spins  $J$  respectifs.

<sup>94</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., p. 18.

<sup>95</sup> J. A. Harvey, D. J. Hughes, R. S. Carter, V. E. Pilcher, « Spacings and Neutron Widths of Nuclear Energy Levels », *Physical Review* 99, 10-33, July 1, 1955, p. 32, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.99.10>.

<sup>96</sup> Voir K. K. Seth, op. cit., pp. 301-302, où cet aspect est discuté.

<sup>97</sup> Voir aussi F. H. Fröhner, *Applied Neutron Resonance Theory*, Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Projekt Schneller Brüter, KfK 2669, Juli 1978, § 3.3 « Applied resonance statistics », pp. 58-69, <https://publikationen.bibliothek.kit.edu/270012145/3811810>.

La largeur moyenne des résonances de spin  $J$  s'écrit (similairement à (8.9)) :

$$\langle \Gamma_{n,J}^l \rangle = \frac{1}{N_{Res,J}} \sum_{i=1}^{N_{Res,J}} \Gamma_{n,J}^l(E_i) \quad (8.11)$$

$N_{Res,J}$  étant le nombre de résonances de spin  $J$  dont l'énergie  $E_i$  est comprise entre  $E_m$  et  $E_M$ .

La fonction densité associée à chacune de ces familles a alors pour expression :

$$S_{l,J} = \frac{\langle \Gamma_{n,J}^l \rangle}{\langle D_{l,J} \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{Res,J}} \Gamma_{n,J}^l(E_i)}{\langle D_{l,J} \rangle N_{Res,J}} \quad (8.12)$$

En partant de sa définition (8.4), la fonction densité  $S_l$  se réécrit comme :

$$S_l = \sum_J g_{l,J} S_{l,J} = \sum_J g_{l,J} \frac{\langle \Gamma_{n,J}^l \rangle}{\langle D_{l,J} \rangle} = \sum_J g_{l,J} \frac{\sum_{i=1}^{N_{Res,J}} \Gamma_{n,J}^l(E_i)}{\langle D_{l,J} \rangle N_{Res,J}} \quad (8.13)$$

où  $g_{l,J}$  est le facteur statistique de spin (voir relations (6.2), (6.40) et (6.41)).

Les dernières expressions de (8.7), (8.8) et (8.9) montrent que la fonction densité peut être approximée par la pente de l'histogramme cumulé des largeurs neutroniques réduites en fonction de l'énergie. La **figure 24** illustre le cas du néodyme 148 pour lequel  $S_l \approx 3 \cdot 10^{-4}$ .

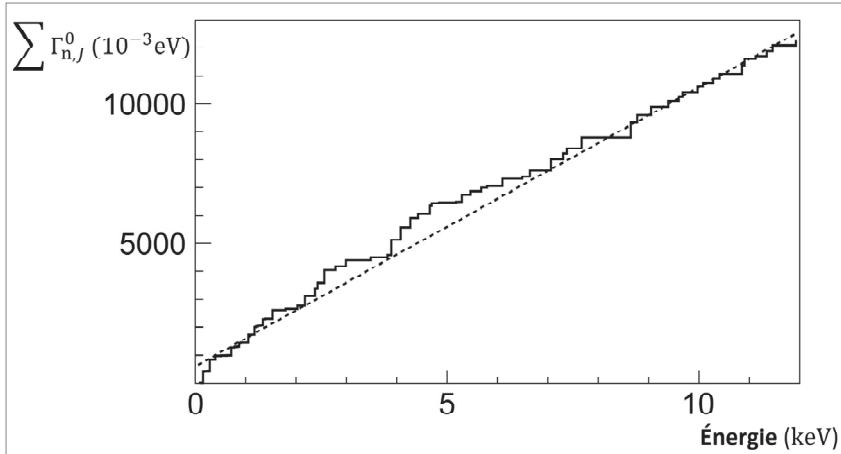


Figure 24. Histogramme cumulé des largeurs  $\Gamma_{n,J}^0$  du néodyme 148 en fonction de l'énergie  $E$  du neutron incident.<sup>98</sup>

<sup>98</sup> D'après H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, Saclay, INSTN/CEA, op. cit., p. 51.

Les grandeurs **espacement des résonances** et **fonction densité** sont désignées dans la littérature comme **propriétés des résonances** (*resonance properties*). Il convient à présent de préciser les lois de probabilité qui décrivent les distributions de l'espacement en énergie des résonances et des largeurs réduites.

## 9. Espacement moyen des résonances et loi de distribution de l'espacement en énergie entre résonances

Dans la précédente section, l'**espacement moyen**, noté  $\langle D \rangle$ , entre les résonances du domaine « **non résolu** » ou « **domaine statistique** » a été introduit sans qu'il ait été précisé de quelle manière il est possible de le déterminer. Une expression très générale peut en être proposée. On considère un ensemble de  $N$  résonances consécutives s'échelonnant entre deux niveaux d'énergie notés respectivement  $E_m$  et  $E_M$ . L'espacement moyen, noté  $\langle D \rangle$ , des résonances dans la région ainsi délimitée est définissable par la relation simple :

$$\langle D \rangle = \frac{E_M - E_m}{N - 1} \quad (9.1)$$

C'est ainsi par exemple qu'entre 0.5 keV et 1.5 keV, l'espacement moyen  $\langle D \rangle$  est approximativement égal à 19 eV, ce qui correspond à une cinquantaine de résonances comptabilisées.

La détermination et la caractérisation de l'espacement moyen  $\langle D \rangle$  peuvent être faites plus finement en ayant recours à la notion de **densité des niveaux d'énergie** du noyau composé puis à la **loi de Wigner** qui en fournit la distribution en probabilité.

### 9.1. La densité des niveaux d'énergie du noyau composé

L'évaluation de l'espacement moyen des résonances découle de la connaissance de la densité de niveaux quantiques du noyau composé  $\rho$ . En effet,  $\rho$  est l'inverse de l'espacement moyen  $\langle D \rangle$  des résonances du noyau composé :

$$\rho = \frac{1}{\langle D \rangle} \quad (9.2)$$

On note  $\rho(U^*, J)$  la densité des niveaux d'énergie du noyau composé à l'**énergie d'excitation**  $U^*$  et pour un moment angulaire  $J$  de ce noyau (notation à ne pas confondre avec celle utilisée plus haut pour désigner le produit  $ka$  :  $\rho = ka$ ). En ayant recours à la thermodynamique statistique et en utilisant le modèle du gaz de Fermi, on aboutit à l'expression suivante de la densité  $\rho(U^*, J)$  <sup>99 100</sup> :

<sup>99</sup> A. Gilbert, A. G. W. Cameron, « A composite nuclear-level density formula with shell corrections », *Can. J. Phys.*, 43, 1965, 1446-1496, <https://doi.org/10.1139/p65-139> ; on y trouvera des valeurs numériques des différents paramètres intervenant dans les expressions de la densité de niveaux d'énergie du noyau composé.

<sup>100</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., pp. 35-41.

$$\rho(U^*,J) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{12} \frac{e^{2\sqrt{a}U^*}}{a^{1/4}U^{5/4}} \frac{(2J+1)e^{-\frac{(J+\frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \quad (\text{MeV}^{-1}) \tag{9.3}$$

- où :
- $a$  est le **paramètre de Fermi** ( $\text{MeV}^{-1}$ ),  $a \sim 0.09 A$  ( $A$  : nombre de masse du noyau composé) ;
  - $\sigma$  est appelé « **facteur de coupure de spin** », il est relié au paramètre de Fermi, «  $a$  », ainsi qu’au moment d’inertie du noyau composé en raison d’un mouvement de rotation qui lui est imprimé, mais dont l’énergie reste beaucoup plus faible que  $U^*$  ; on a  $\sigma^2 = 8.89 \cdot 10^{-2} a T A^{2/3}$ ,  $T$  température du modèle du gaz de Fermi ;  $\sigma$  a une valeur moyenne de 4 , ayant une valeur comprise entre 3 et 4 pour les noyaux lourds ; souvent  $J$  a une valeur située entre 0 et 2 de sorte que le facteur d’atténuation de spin,  $e^{-\frac{(J+\frac{1}{2})^2}{2\sigma^2}}$  varie entre 1 et 0.83.

On désigne par  $E_n$  l’énergie cinétique du neutron incident,  $S_n$  l’énergie de séparation du neutron et  $\delta_n$  et  $\delta_p$  les énergies d’appariement respectives du neutron et du proton au sein du noyau atomique. L’énergie d’excitation  $U^*$  du noyau composé suivant la parité de ses nombres de protons et de neutrons prend les valeurs indiquées dans le **tableau 21**.

Tableau 21. Énergie d’excitation du noyau composé en fonction de la parité de ses nombres de nucléons de chaque espèce.

$Z$ nombre de protons (numéro atomique)	$N$ nombre de neutrons	$U^*$
impair	impair	$E_n + S_n$
impair	pair	$E_n + S_n - \delta_n$
pair	impair	$E_n + S_n - \delta_p$
pair	pair	$E_n + S_n - \delta_p - \delta_n$

Deux autres grandeurs en découlent :

- la densité de niveaux observables,  $\rho(U^*)$  :

$$\rho(U^*) = \sum_J \rho(U^*,J) \simeq \frac{\sqrt{\pi}}{12} \frac{e^{2\sqrt{a}U^*}}{a^{1/4}U^{5/4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (\text{MeV}^{-1}) \tag{9.4}$$

- la densité de niveaux totale,  $W(U^*)$ , qui comptabilise  $2J + 1$  les niveaux dégénérés liés aux valeurs possibles du nombre quantique magnétique :

$$W(U^*) = \sum_J (2J+1)\rho(U^*,J) = \frac{\sqrt{\pi}}{12} \frac{e^{2\sqrt{a}U^*}}{a^{1/4}U^{5/4}} \quad (\text{MeV}^{-1}) \tag{9.5}$$

La forme approximée de  $\rho(U^*, J)$  est écrite :

$$\rho(U^*, J) \simeq \text{constante} \times (2J + 1) e^{2\sqrt{a}U^*} e^{-\frac{J(J+1)}{2\sigma^2}} \quad (9.6)$$

### Exemple

On considère le noyau de plutonium 239,  $^{239}_{94}\text{Pu}$ , interagissant avec des neutrons de faible énergie cinétique,  $E < 1$  keV pour fixer les idées. Le moment angulaire total et la parité du  $^{239}_{94}\text{Pu}$  dans son état fondamental est :

$$I^\pi = \frac{1}{2}^+$$

On ne prend en compte que les ondes « s » (moment orbital  $l = 0$ ) des neutrons incidents (de spin intrinsèque  $s = 1/2$ ). Deux catégories de résonances existent dans ce cas (voir § 6.2.1) :

- les résonances de moment angulaire total :

$$J = \|\vec{l} - \vec{l} - \vec{s}\| = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} = 0$$

et de parité  $\pi_1 = \pi_l \times (-1)^{l=0} = 1 \times 1$ , donc positive. Donc, en notant  $J^{\pi_1}$  le moment angulaire de ces résonances, on a :

$$J^{\pi_1} = 0^+$$

- les résonances de moment angulaire total :

$$J = \|\vec{l} + \vec{l} + \vec{s}\| = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$$

et de parité  $\pi_2 = \pi_l \times (-1)^{l=0} = 1 \times 1$ , donc positive. Donc, en notant  $J^{\pi_2}$  le moment angulaire de ces résonances, on a :

$$J^{\pi_2} = 1^+$$

Par suite, (9.3) ou (9.6) permettent d'exprimer les espacements moyens  $\langle D_{J^{\pi_1}} \rangle$  et  $\langle D_{J^{\pi_2}} \rangle$  des deux groupes de résonances ayant respectivement les moments angulaires  $J^{\pi_1}$  et  $J^{\pi_2}$  :

$$\langle D_{J^{\pi_1}} \rangle \equiv \langle D_{0^+} \rangle = \frac{1}{\text{constante} \times (2J^{\pi_1} + 1) e^{2\sqrt{a}U^*} e^{-\frac{J^{\pi_1}(J^{\pi_1}+1)}{2\sigma^2}}} = \frac{1}{\text{constante} \times e^{2\sqrt{a}U^*}} \quad (9.7)$$

$$\begin{aligned} \langle D_{J^{\pi_2}} \rangle \equiv \langle D_{1^+} \rangle &= \frac{1}{\text{constante} \times (2J^{\pi_2} + 1) e^{2\sqrt{a}U^*} e^{-\frac{J^{\pi_2}(J^{\pi_2}+1)}{2\sigma^2}}} \\ &= \frac{1}{\text{constante} \times 3 e^{2\sqrt{a}U^*} e^{-\frac{3}{2\sigma^2}}} \end{aligned} \quad (9.8)$$

On suppose qu'une mesure fournit, relativement aux neutrons « s », un espacement moyen de  $\langle D \rangle_{\text{mes}} = 2.4$  eV ; il est alors possible d'en déduire les valeurs des espacements moyens  $\langle D \rangle_{J^{\pi_1}}$  et



$\langle D \rangle_{j\pi_2}$ . En effet, les densités de niveaux  $\rho(U^*, J)$  étant additives et la mesure ne discriminant pas l'un ou l'autre type de résonance, on a :

$$\frac{1}{\langle D \rangle_{mes}} = \frac{1}{\langle D_{0+} \rangle} + \frac{1}{\langle D_{1+} \rangle} \quad (9.9)$$

D'autre part, le rapport des deux expressions (9.7) et (9.8) donnant les espacements moyens  $\langle D \rangle_{0+}$  et  $\langle D \rangle_{1+}$  conduit immédiatement à :

$$\frac{\frac{1}{\langle D_{0+} \rangle}}{\frac{1}{\langle D_{1+} \rangle}} \approx \frac{1}{3 \times \exp\left(-\frac{3}{2 \times 4^2}\right)} = 0.366 \quad (9.10)$$

d'où :

$$\langle D_{1+} \rangle = 0.366 \langle D_{0+} \rangle \quad (9.11)$$

En remplaçant  $\langle D_{1+} \rangle$  par (9.11) dans l'expression (9.9), on a :

$$\frac{1}{\langle D \rangle_{mes}} = \frac{1}{\langle D_{0+} \rangle} + \frac{1}{0.366 \langle D_{0+} \rangle} \quad (9.12)$$

Il s'ensuit :

$$\langle D_{0+} \rangle = \langle D \rangle_{mes} \left(1 + \frac{1}{0.366}\right) = 2.4 \times 3.73 = 8.95 \text{ eV}$$

et

$$\langle D_{1+} \rangle = 0.366 \langle D_{0+} \rangle = 0.366 \times 8.95 = 3.27 \text{ eV}$$

La définition (9.1) s'applique à un moment angulaire  $l$  quelconque :

$$\langle D_l \rangle = \frac{E_M - E_m}{N_{Res} - 1} \quad (9.13)$$

Dans le cas d'un noyau atomique de spin  $J$  non nul, on a vu précédemment au § 8 que l'on est amené à prendre en compte des familles de résonances caractérisées par leurs respectifs spins  $J$ . La définition (9.1) peut alors être aussi particularisée pour une famille de résonances identifiée par son spin  $J$  :

$$\langle D_{l,J} \rangle = \frac{E_M - E_m}{N_{Res,J} - 1} \quad (9.14)$$

Il s'ensuit qu'à partir de (8.10) et (8.11), la fonction densité s'écrit sous les autres formes suivantes :

$$S_l = \frac{\langle \Gamma_n^l \rangle}{\langle D_l \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{Res}} \Gamma_n^l(E_i)}{\langle D_l \rangle N_{Res}} \equiv \frac{1}{N_{Res}} \frac{1}{\frac{E_M - E_m}{N_{Res} - 1}} \sum_{i=1}^{N_{Res}} \Gamma_n^l(E_i) \cong \frac{1}{\Delta E} \sum_{i=1}^{N_{Res}} \Gamma_n^l(E_i) \quad (9.15)$$

en ayant posé  $\Delta E = E_M - E_m$  (voir (9.1)) et en ayant supposé que le nombre de résonances,  $N_{Res}$ , est élevé ( $N_{Res}$  et  $N_{Res} - 1$  ont alors sensiblement la même valeur).

Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, la **fonction densité** (8.12) associée à chacune de ces familles de résonances devient :

$$S_{l,J} = \frac{\langle \Gamma_{n,J}^l \rangle}{\langle D_{l,J} \rangle} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N_{Res,J}} \Gamma_{n,J}^l(E_i)}{N_{Res,J}}}{\frac{E_M - E_m}{N_{Res,J} - 1}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{Res,J}} \Gamma_{n,J}^l(E_i)}{\Delta E \frac{N_{Res,J}}{N_{Res,J} - 1}} \approx \frac{1}{\Delta E} \sum_{i=1}^{N_{Res,J}} \Gamma_{n,J}^l(E_i) \quad (9.16)$$

La fonction densité  $S_l$  (8.13) obtenue par sommation sur ces familles de résonances s'exprime comme :

$$S_l = \sum_J g_{l,J} S_{l,J} \cong \frac{1}{\Delta E} \sum_J \sum_{i=1}^{N_{Res,J}} g_{l,J} \Gamma_{n,J}^l(E_i) \quad (9.17)$$

## 9.2. La loi de Wigner d'espacement des niveaux d'énergie

À partir d'hypothèses simplificatrices – on suppose que tous les niveaux ont le même spin et la même parité, on parle alors d'une **famille de niveaux d'énergie** –, Wigner a établi une loi connue sous le nom de **loi de Wigner**<sup>101</sup> <sup>102</sup> ou **loi de répulsion des niveaux d'énergie** qui fournit la distribution de probabilité  $p(D)$  des espacements  $D$  des niveaux d'énergie du noyau composé. Supposant que la densité de probabilité d'observer un niveau d'énergie entre  $D$  et  $D + dD$  est proportionnelle à  $D$ , il aboutit à l'expression :

$$p(D)dD = \frac{\pi}{2} \frac{D}{\langle D \rangle} e^{-\frac{\pi}{4} \left( \frac{D}{\langle D \rangle} \right)^2} dD \quad (9.18)$$

En introduisant la variable  $x$ , « **espacement réduit** », et en posant  $x = D/\langle D \rangle$ , (9.18) devient :

$$p(x)dx = \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4} x^2} dx \quad (9.19)$$

Cette distribution est représentée sur la **figure 25** dans le cas de l'uranium 238.

<sup>101</sup> E. P. Wigner, communication à *Conference on neutron physics by time of flight*, voir communication de A. M. Lane, « Widths and spacings of nuclear resonance levels », Gatlinburg, Tennessee, November 1-2, 1956, ORNL-2309, § 5.2 et 5.3 p. 118-119, <https://technicalreports.ornl.gov/1957/3445602508212.pdf>, <https://doi.org/10.1017/S0305004100027237>. Cet aspect soulève des problèmes mathématiques relatifs aux matrices aléatoires : voir E. P. Wigner, « Random Matrices in Physics », *SIAM Review*, Vol. 9, No. 1, January, 1967, <https://doi.org/10.1137/1009001> ; E. P. Wigner, « Statistical properties of real symmetric matrices with many dimensions », dans C. Porter (editor), *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, Academic Press, 1965,.

<sup>102</sup> M. L. Mehta, « On the statistical properties of the level-spacings in nuclear spectra », *Nuclear Physics* 18, 1960, pp. 395-419, [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(60\)90413-2](https://doi.org/10.1016/0029-5582(60)90413-2).

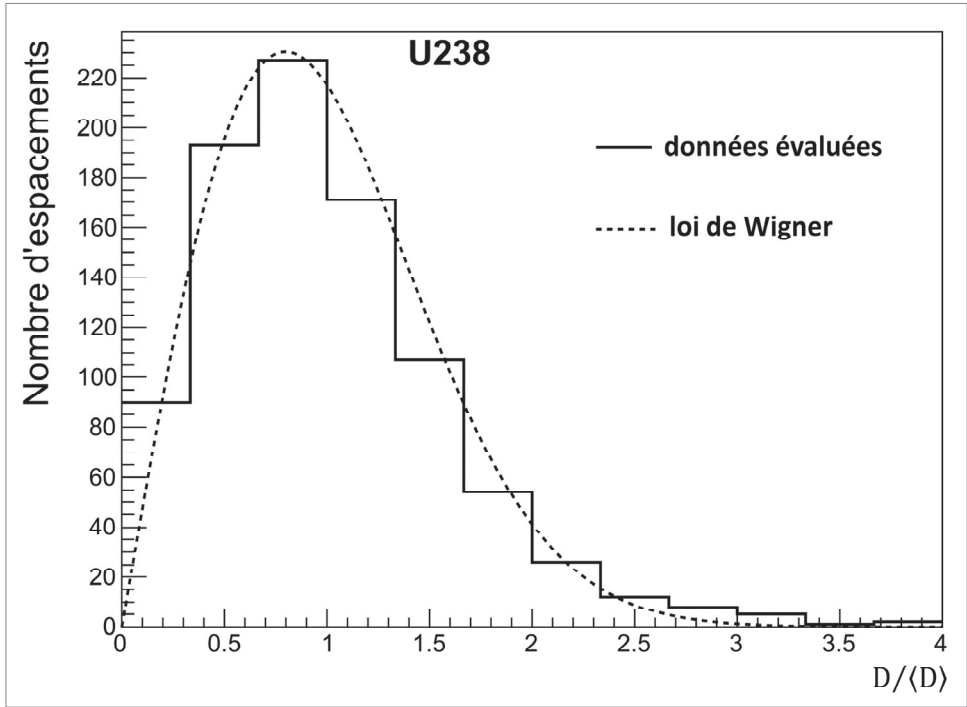


Figure 25. Distribution expérimentale des espacements moyens réduits  $x = D/\langle D \rangle$  de l'uranium 238 (données issues de l'évaluation JEFF-3.3). Comparaison avec la loi de Wigner (9.19).<sup>103</sup>

On désigne par  $s_x^2$ , la variance associée à la loi de Wigner  $p(x)$  donnée par (9.19) ; elle est obtenue en calculant la différence  $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  :

$$s_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty x^3 e^{-\frac{\pi}{4}x^2} dx - \left[ \frac{\pi}{2} \int_0^\infty x^2 e^{-\frac{\pi}{4}x^2} dx \right]^2 = \frac{\pi}{4} - 1 \quad (9.20)$$

et par conséquent la variance associée à la loi  $p(D)$  est :

$$s_D^2 = \left[ \frac{\pi}{4} - 1 \right] \langle D \rangle^2 \quad (9.21)$$

### Exemple

On considère les résonances « s » relatives à l'interaction d'un neutron avec un noyau d'uranium 238 dans le domaine d'énergie situé entre 0 et 4 keV ; on dispose de la valeur de l'espacement moyen de

<sup>103</sup>Voir aussi H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., p. 44.

ces résonances :  $\langle D \rangle = \langle D \rangle_{l=0} = 18.6 \text{ eV}$  et l'on cherche à déterminer la probabilité,  $\mathbb{P}$ , pour que l'espacement  $D$  entre deux résonances soit supérieur à 50 eV :

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(D \geq 50 \text{ eV}) \equiv p\left(x \geq \frac{50}{\langle D \rangle}\right) = 1 - p\left(x < \frac{50}{\langle D \rangle}\right) = 1 - p\left(x < \frac{50}{18.6} = 2.688\right)$$

En utilisant l'expression (9.19) de  $p(x)$ , on obtient :

$$\mathbb{P} = 1 - p(x < 2.688) = 1 - \int_0^{2.688} \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4}x^2} dx$$

En effectuant le changement de variable :

$$z = \frac{\pi}{4}x^2, \quad dz = \frac{\pi}{4}x dx$$

et en remplaçant dans l'intégrale, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= 1 - \int_0^{2.688} \frac{\pi}{2} x e^{-\frac{\pi}{4}x^2} dx = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{4}(2.688)^2} e^{-z} dz = 1 - \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}(2.688)^2\right)\right] = e^{-5.675} \\ &= 3.43 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Par la même démarche, on calcule la probabilité  $\mathbb{P} = \mathbb{P}(D \geq 5 \text{ eV})$  que l'espacement  $D$  entre deux niveaux d'énergie soit inférieur à 5 eV. On trouve :

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(D \geq 5 \text{ eV}) = 1 - p\left(x < \frac{5}{18.6} = 0.2688\right) = 5.52 \cdot 10^{-2}$$

Pour cet exemple, la variance de la distribution  $p(D)$  donnée par (9.21) vaut :

$$s_D^2 = \left[\frac{\pi}{4} - 1\right] \langle D \rangle^2 = \left[\frac{\pi}{4} - 1\right] (18.6)^2 = 94.53 \text{ eV}^2$$

Les expressions de  $p(D)$  ou  $p(x)$  établies pour une famille de niveaux d'énergie a été généralisée à deux familles et plus de niveaux d'énergie correspondant à la coexistence de niveaux de spin différents.

Pour  $x > 2.5$ , il a été constaté que la loi de Wigner sous-estimait le nombre d'espacements. F. J. Dyson<sup>104 105 106</sup> a proposé pour les valeurs élevées de  $x$  l'expression suivante :

$$p(x)dx \propto x^{17/8} e^{-\left(\frac{\pi}{4}x\right)^2 - \frac{\pi}{4}x} dx \quad (9.22)$$

<sup>104</sup> F. J. Dyson, « Statistical theory of the energy levels of complex systems », II, *J. Mathematical Phys.*, Vol. 3, 1, January-February 1962, pp. 157-165, voir p. 157 et 163, <https://doi.org/10.1063/1.1703774>.

<sup>105</sup> C. E. Porter, « Further remarks on energy level spacings », *Nuclear Physics* 40, 1963, pp. 167-176, [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(63\)90262-1](https://doi.org/10.1016/0029-5582(63)90262-1).

<sup>106</sup> Peter J. Forrester, « Asymptotics of spacing distributions 50 years later », *Random Matrices*, MSRI Publications, Vol. 65, 2014, pp. 1999-222, <http://library.msri.org/books/Book65/files/140410-Forrester.pdf>.

## 10. La distribution de probabilité des « largeurs neutroniques réduites »

On considère la largeur  $\Gamma_{\lambda c}$  correspondant à un mode de désexcitation  $c$  d'un état propre  $\lambda$  du noyau composé. Ce mode de désexcitation peut se réaliser par  $\nu$  voies différentes et l'on a dans le cadre de la théorie de la matrice  $R$  (voir annexe V) :

$$\Gamma_{\lambda c} = \sum_{i=1}^{\nu} 2\gamma_{\lambda i}^2 \sigma_i \quad (10.1)$$

où les  $\gamma_{\lambda i}$  représentent les « **amplitudes des largeurs partielles réduites** » de la fonction propre de l'hamiltonien de l'équation de Schrödinger de la région interne et associée à la voie d'entrée.

Par exemple  $c$  désigne le mode de désexcitation par émission de rayonnements  $\gamma$ , et  $\nu$  voies  $i$  peuvent conduire à une telle émission de photons, chacune avec ses caractéristiques propres (énergie, etc.).

Demeurant dans le cadre de l'approche statistique, on suppose que les éléments  $R_{cc'}$  de la matrice  $R$  suivent une loi normale. Les hypothèses suivantes :

- le facteur de pénétrabilité varie peu sur l'intervalle d'énergie considéré ;
- en moyenne sur cet intervalle, la quantité  $|\gamma_{\lambda i} \sqrt{\sigma_i}|$  est constante quel que soit l'état propre  $\lambda$  ;
- il n'existe pas de corrélation entre les différentes voies du mode de désexcitation  $c$ .

Porter et Thomas<sup>107 108</sup> ont proposé une loi en  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté,  $q(y, \nu)$ , pour décrire la distribution des largeurs  $\Gamma \equiv \Gamma_{\lambda c}$ , représentée sur la **figure 26** :

$$q(y, \nu) = \frac{\frac{\nu}{2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{\nu}{2}y\right]^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}y} \quad (10.2)$$

où :

<sup>107</sup> C. E. Porter, R. G. Thomas , « Fluctuations of Nuclear Reaction Widths », *Physical Review* 104, 1956, pp. 483-491, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.104.483> ; des travaux expérimentaux et des ajustements analytiques ont précédé la proposition de cette formule connue sous le nom de loi de Porter et Thomas, voir : J. A. Harvey , D. J. Hughes , R. S. Carter , V. E. Pilcher , « Spacings and Neutron Widths of Nuclear Energy Levels », *op. cit.* ; D. J. Hughes, J. A. Harvey, « Size Distribution of Neutron Widths », *Physical Review* 99, 1 August 1955, pp. 1032-1033, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.99.1032>.

<sup>108</sup> A. M. Lane , « Widths and spacings of nuclear resonance levels », *Conference on neutron physics by time of flight* , Gatlinburg, Tennessee, November 1-2, 1956, ORNL-2309, § 5. pp. 113-123.

- $y = \Gamma / \langle \Gamma \rangle$  avec  $\langle \Gamma \rangle$  définie comme la moyenne des largeurs des résonances sur toutes les résonances du type considéré ; Porter et Thomas utilisent les largeurs neutroniques réduites, par exemple :  $\Gamma_n^0$  et  $\langle \Gamma_n^0 \rangle$  définissent la variable réduite :

$$y = \frac{\Gamma_n^0}{\langle \Gamma_n^0 \rangle} \quad (10.3)$$

- $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$  est la fonction factorielle ou distribution gamma à  $\nu/2$  degrés de liberté (à ne pas confondre avec la largeur de résonance  $\Gamma$ ).

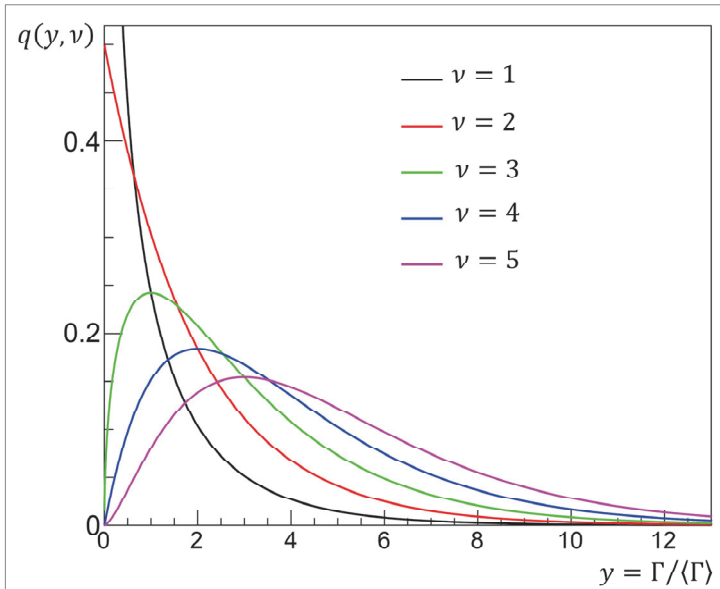


Figure 26 : Distribution en  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté ( $\nu = 1, 2, 4, 16, \infty$ )<sup>109</sup>

La **figure 27** montre, dans le cas du tellure 122, le tracé de la distribution de l'intégrale des largeurs neutroniques dans l'intervalle d'énergie 0 à 11 keV :

$$N_{Res}(z) = N(0) \int_z^\infty q(z', 1) dz' \quad (10.4)$$

$$z = \sqrt{y} = \sqrt{\frac{\Gamma_n^0}{\langle \Gamma_n^0 \rangle}} \quad (10.5)$$

On en détermine la variance  $s^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$  (voir annexe VIII) :

<sup>109</sup> D'après C. E. Porter, R. G. Thomas, *op. cit.*, p. 485, figure 1.

$$s^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = \frac{2}{\nu} \quad (10.6)$$

On constate donc que dans le cas d'une réaction à grand nombre de voies de sortie, donc pour une valeur de  $\nu$  très élevée, la variance  $s^2$  tend vers 0. C'est par exemple le cas de la capture radiative dont les largeurs des résonances ont des valeurs similaires, variant peu avec l'énergie du neutron incident.

- Dans le cas de la **diffusion élastique résonnante**, la distribution des largeurs neutroniques réduites est décrite par la loi de Porter et Thomas, loi en  $\chi^2$  à 1 degré de liberté :

$$q(y, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}} \quad (10.7)$$

où  $y = \frac{\Gamma_n^l}{\langle \Gamma_n^l \rangle}$  puisque la largeur neutronique réduite  $\Gamma_n^l(E)$  est proportionnelle à la largeur réduite  $\gamma_n^2$  et  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

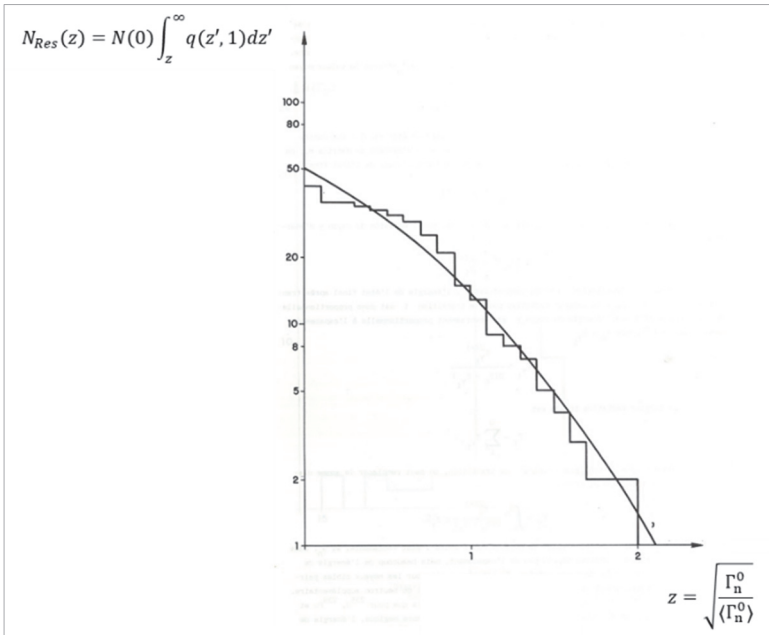


Figure 27. Distribution de l'intégrale des largeurs neutroniques dans l'intervalle d'énergie 0 à 11 keV du tellure 122 (courbe continue), comparée avec la courbe en escalier construite à partir de mesures disponibles. La limite de la résolution expérimentale ne permet pas de comptabiliser les niveaux d'énergie de faible largeur.<sup>110</sup>

<sup>110</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., p. 55.

### Exemple

On considère les résonances « s » relatives à l'interaction d'un neutron avec un noyau d'uranium 238 dans le domaine d'énergie situé entre 0 et 4 keV.

La valeur de la largeur réduite moyenne est  $\langle \Gamma_n^0 \rangle = 2.14 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$ .

On cherche à déterminer la probabilité  $\mathbb{Q}(\Gamma_{n,0} \leq 30 \text{ meV})$  pour que la largeur  $\Gamma_{n,0}$  à l'énergie du neutron  $E_n = 1 \text{ keV}$  ait une valeur inférieure ou égale à 30 meV.

Pour cela, on calcule en premier lieu la largeur réduite  $\Gamma_n^0$  à l'énergie  $E_n = 1 \text{ keV}$  correspondant à la largeur cible  $\Gamma_{n,0} = 30 \text{ meV}$ , en utilisant la définition (6.37) :

$$\Gamma_n^0 = \frac{1}{v_0} \Gamma_{n,0} \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{E_n(\text{eV})}} = \frac{1}{1} 30 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{1(\text{eV})}{10^3(\text{eV})}} = 9.487 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

La variable réduite (10.3) de la loi de Porter et Thomas (10.2) est :

$$y_0 = \frac{\Gamma_n^0}{\langle \Gamma_n^0 \rangle} = \frac{9.487 \cdot 10^{-4}}{2.14 \cdot 10^{-3}} = 0.443$$

Si l'on prend la loi de Porter et Thomas à 1 degré de liberté, la probabilité cherchée s'écrit :

$$\mathbb{Q}(\Gamma_{n,0} \leq 30 \text{ meV}) = q(y \leq y_0 = 0.443) = \int_0^{y_0=0.443} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{y}{2}} dy$$

$$\mathbb{Q}(\Gamma_{n,0} \leq 30 \text{ meV}) = q(y \leq y_0 = 0.443) \equiv 2 \int_0^{\sqrt{y_0}=\sqrt{0.443}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0.495$$

- Dans le cas de la **capture radiative**, la désexcitation du noyau composé se fait en général par une émission de nombreux gamma soumise aux règles de sélection quantiques. La largeur partielle  $\Gamma_\gamma$  résulte de la somme des largeurs partielles individuelles  $\Gamma_{\gamma_i}$  de chacune des voies  $i$  :

$$\Gamma_\gamma = \sum_{i=1}^{\nu} \Gamma_{\gamma_i} \quad (10.8)$$

En faisant l'hypothèse que chaque  $\Gamma_{\gamma_i}$  suit une loi en  $\chi^2$  à 1 degré de liberté, indépendantes les unes des autres et de même valeur moyenne, il en découle que  $\Gamma_\gamma$  suit une loi en  $\chi^2$  à  $\nu$  degrés de liberté. Ceci n'est pas tout à fait vrai : les valeurs moyennes diffèrent et il peut exister des corrélations (faibles) entre voies de désexcitation. Les données expérimentales, par exemple la distribution des largeurs de capture radiative de l'uranium 238, indiquent qu'il est raisonnable d'admettre la constance de  $\Gamma_\gamma$  d'une résonance à l'autre. La largeur  $\Gamma_\gamma$  est de l'ordre de 23 meV pour des noyaux lourds de



nombre de masse pair comme l'uranium 238 (voir **figure 28**), le plutonium 230 ou encore le thorium 232. Elle est d'environ 45 meV pour des noyaux lourds de nombre de masse impair tels que l'uranium 235, les plutoniums 239 et 241. Celle-ci augmente sensiblement, de 0.6 à 1 eV, lorsqu'il s'agit d'un « **noyau magique** » tel que le plomb 208.

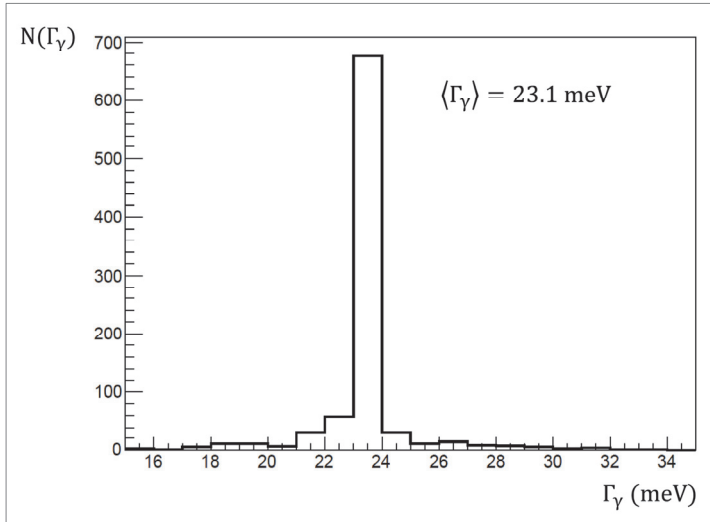


Figure 28. Distribution expérimentale des largeurs de capture radiative totales,  $\Gamma_\gamma$ , d'un neutron d'énergie cinétique inférieure à 2.5 keV par un noyau atomique d'uranium 238 (données issues de l'évaluation JEFF-3.3).<sup>111</sup>

### Exemple

On considère les résonances « s » relatives à l'interaction d'un neutron avec un noyau d'uranium 238 dans le domaine d'énergie situé entre 0 et 4 keV. Les gamma émis lors de la capture radiative du neutron se répartissent selon un certain spectre en énergie. Les largeurs partielles de capture radiative sont notées  $\Gamma_{\gamma_i}$  pour les transitions  $i$  formant le spectre d'émission. On considère uniquement ici deux transitions dans ce spectre dont les largeurs respectives sont égales à 1 meV. Deux situations expérimentales sont envisageables.

- Une première mesure permet de mettre expérimentalement en évidence les deux transitions bien distinctement. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule voie de sortie pour chacun des deux niveaux considérés, et par suite :
  - $\langle \Gamma_{\gamma_i} \rangle = \Gamma_{\gamma_i} = 1 \text{ meV}$ ,  $i = 1, 2$  ;
  - les  $\Gamma_{\gamma_i}$  sont distribués selon une loi de Porter et Thomas à 1 degré de liberté et la probabilité  $\mathbb{Q}$  d'observer une largeur partielle  $\Gamma_{\gamma_i} \leq 1 \text{ meV}$  est :

$$\mathbb{Q}(\Gamma_{\gamma_i} \leq 1 \text{ meV}) = q\left(y \leq y_0 = \frac{\Gamma_{\gamma_i}}{\langle \Gamma_{\gamma_i} \rangle} = \frac{1 \text{ meV}}{1 \text{ meV}} = 1\right) \equiv 2 \int_0^{\sqrt{y_0}=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 0.683$$

<sup>111</sup> Voir aussi H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., p. 57.

- Une deuxième mesure ne permet pas de séparer les deux transitions. Dans ce cas, il y a deux voies de sortie possibles et les  $\Gamma_{Y_i}$  sont distribués selon une loi de Porter et Thomas à 2 degrés de liberté ; il en résulte que la largeur moyenne est  $\langle \Gamma_Y \rangle = \Gamma_{Y_1} + \Gamma_{Y_2} = 2 \text{ meV}$  et que la probabilité d'observer une largeur partielle  $\Gamma_{Y_i} \leq 1 \text{ meV}$  est :

$$q \left( y \leq y_0 = \frac{\Gamma_{Y_i}}{\langle \Gamma_{Y_i} \rangle} = \frac{1 \text{ meV}}{2 \text{ meV}} = 0.5 \right) \equiv \int_0^{y_0=0.5} e^{-y} dy = (1 - e^{-0.5}) = 0.393$$

- Dans le cas de la **réaction de fission**, la **largeur de fission**  $\langle \Gamma_f \rangle$  résulte d'une somme de largeurs partielles de fission  $\langle \Gamma_{fi} \rangle$  correspondant aux seuls états quantiques du noyau composé susceptibles de faire évoluer celui-ci vers la fission :

$$\langle \Gamma_f \rangle = \sum_i \langle \Gamma_{fi} \rangle \quad (10.9)$$

À une voie de fission  $i$  correspond une constante de désexcitation du noyau composé donnée par :

$$\langle \kappa_{fi} \rangle = \frac{\langle \Gamma_{fi} \rangle}{\hbar} \text{ (s}^{-1}\text{)} \quad (10.10)$$

D. L. Hill et J. A. Wheeler ont déterminé le coefficient de transmission  $T_{fi}$  de la surface nucléaire vis-à-vis de la fission par la voie  $i$ .

On verra dans le chapitre 9 suivant que l'on parle alors d'une **barrière de fission** dont la hauteur en énergie à franchir par le noyau composé excité est notée  $E_{fi}$ . On a donc (voir § 5.1.1) :

$$\frac{\langle \Gamma_{fi} \rangle}{\hbar} = \frac{\langle T_{fi} \rangle}{\mathcal{P}} = \langle T_{fi} \rangle \frac{\langle D \rangle}{2\pi\hbar} \quad (10.11)$$

d'où :

$$\langle \Gamma_{fi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle T_{fi} \rangle \langle D \rangle \quad (10.12)$$

avec :

$$\langle T_{fi} \rangle = \frac{1}{1 + \exp \left( -2\pi \frac{E^* - E_{fi}}{\hbar\omega} \right)} \quad (10.13)$$

où  $E^*$  est l'énergie d'excitation du noyau composé et  $\hbar\omega$  l'épaisseur de la barrière de fission :  $\hbar\omega \approx 500 \text{ keV}$  pour les noyaux lourds.

Par suite, selon (10.9), la largeur de fission totale a pour expression :

$$\langle \Gamma_f \rangle = \sum_i \langle \Gamma_{fi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle D \rangle \sum_i \langle T_{fi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle D \rangle \sum_i \frac{1}{1 + \exp\left(-2\pi \frac{E^* - E_{fi}}{\hbar\omega}\right)} \quad (10.14)$$

Les largeurs  $\langle \Gamma_{fi} \rangle$  sont supposées être distribuées selon une loi en  $\chi^2$  à 1 degré de liberté.  $\langle \Gamma_f \rangle$  suit une loi en  $\chi^2$  à 3 ou 4 degrés de liberté comme le montre l'exemple de la **figure 29**.

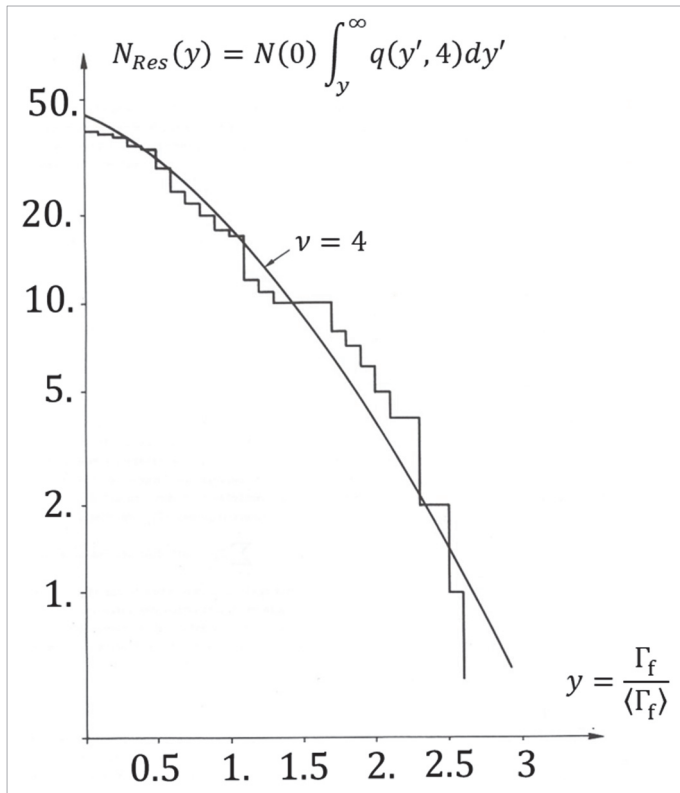


Figure 29. Distribution expérimentale des largeurs de fission,  $\Gamma_f$ , induite par un neutron d'énergie cinétique inférieure à 50 eV sur un noyau atomique d'uranium 235.<sup>112</sup>

Le **nombre effectif de voies de sortie**  $N_{eff}$  est obtenu par la **formule de Bohr et Wheeler** :

<sup>112</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, op. cit., p. 60.

$$N_{eff} = 2\pi \frac{\langle \Gamma_f \rangle}{\langle D \rangle} = \sum_{i=1}^v \frac{1}{1 + \exp \left( -2\pi \frac{E^* - E_{fi}}{\hbar\omega} \right)} \quad (10.15)$$

Quand  $T_{fi} = 1$ , alors la voie est dite ouverte. Quand  $T_{fi} < 1$ , la voie est partiellement ouverte. Le nombre de voies de sortie par fission est au plus égal à  $v$ .

Le chapitre 9 spécifiquement consacré à la fission apporte des informations complémentaires sur ce phénomène.

### Exemple

On considère la fission induite par des neutrons « s » d'énergie  $E_n < 100$  eV sur un noyau atomique de plutonium 239,  $^{239}_{94}\text{Pu}$ . Le  $^{239}_{94}\text{Pu}$  a un spin (ou moment angulaire)  $I$  et une parité  $\pi : \frac{1}{2}^+$ .

On désigne par  $s_n$  l'énergie de séparation du neutron dans le noyau composé  $n + ^{239}_{94}\text{Pu} \equiv ^{240}_{94}\text{Pu}^*$  ; on suppose que la fission est due aux trois états de transition vers la fission suivants représentés sur la **figure 30** :

- $I_1^\pi = 0^+$  à l'énergie 1.6 MeV au-dessous de l'énergie  $s_n$  ;  $E^* - E_{f1} \equiv s_n - E_{f1} = 1.6$  MeV ;
- $I_2^\pi = 0^+$  à l'énergie 1.6 keV au-dessus de l'énergie  $s_n$  ;  $E^* - E_{f2} \equiv s_n - E_{f2} = -1.6$  keV ;
- $I_3^\pi = 1^+$  à l'énergie 200 keV au-dessus de l'énergie  $s_n$  ;  $E^* - E_{f3} \equiv s_n - E_{f3} = -200$  keV.

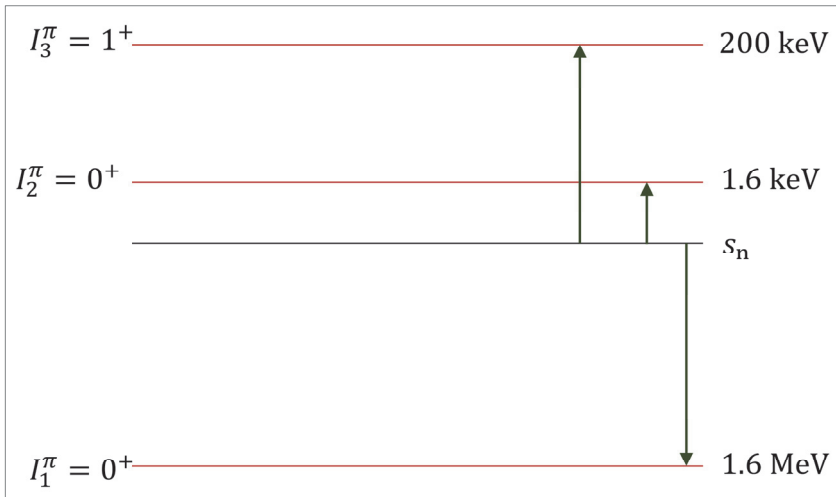


Figure 30. Illustration schématique d'états de transition vers la fission du système  $n + ^{239}_{94}\text{Pu}$ .

On notera que la valeur de  $s_n$  peut être obtenue à partir des énergies de liaison des plutoniums 239 et 240 :

$$s_n = -B(^{239}_{94}\text{Pu}) + B(^{240}_{94}\text{Pu}) = -1806.980 \text{ (MeV)} + 1813.513 \text{ (MeV)} = 6.533 \text{ MeV}$$

Le nombre effectif de voies de sortie pour les résonances  $J^\pi = 0^+$  est :

$$N_{eff,0^+} = \frac{1}{1 + \exp\left(-2\pi \frac{S_n - E_{f1}}{\hbar\omega}\right)} + \frac{1}{1 + \exp\left(-2\pi \frac{S_n - E_{f2}}{\hbar\omega}\right)}$$

$$N_{eff,0^+} = \frac{1}{1 + \exp\left(-2\pi \frac{1600}{500}\right)} + \frac{1}{1 + \exp\left(-2\pi \frac{-1.6}{500}\right)} \approx 1. + 0.5 = 1.5$$

où l'on a pris  $\hbar\omega = 500$  keV.

Le nombre effectif de voies de sortie pour la résonance  $J^\pi = 1^+$  est :

$$N_{eff,1^+} = \frac{1}{1 + \exp\left(-2\pi \frac{S_n - E_{f3}}{\hbar\omega}\right)}$$

$$N_{eff,1^+} = \frac{1}{1 + \exp\left(-2\pi \frac{-200}{500}\right)} \approx 0.0749$$

On cherche à déterminer la largeur de fission moyenne  $\langle\Gamma_f\rangle$  sachant que l'on dispose des valeurs des espacements moyens des résonances  $J^{\pi_1} = 0^+$  et  $J^{\pi_2} = 1^+$  :  $\langle D_{0^+} \rangle = 9.6$  eV et  $\langle D_{1^+} \rangle = 3.2$  eV.

La largeur de fission totale est :

$$\langle\Gamma_f\rangle = \langle\Gamma_{f,0^+}\rangle + \langle\Gamma_{f,1^+}\rangle$$

En utilisant la relation (10.15), on tire :

$$\langle\Gamma_{f,0^+}\rangle = \frac{1}{2\pi} N_{eff,0^+} \langle D_{0^+} \rangle = \frac{1}{2 \times 3.14} \times 1.5 \times 9.6 = 2.3 \text{ eV}$$

$$\langle\Gamma_{f,1^+}\rangle = \frac{1}{2\pi} N_{eff,1^+} \langle D_{1^+} \rangle = \frac{1}{2 \times 3.14} \times 0.0749 \times 3.2 = 0.038 \text{ eV}$$

$$\langle\Gamma_f\rangle = 2.3 + 0.036 = 2.338 \text{ eV}$$

Il est également possible de déterminer les espacements moyens  $\langle D_{0^+} \rangle$  et  $\langle D_{1^+} \rangle$  à partir de l'espacement moyen « observé » noté  $\langle D \rangle_{obs} = 2.4$  eV :

$$\frac{1}{\langle D \rangle_{obs}} = \frac{1}{\langle D_{0^+} \rangle} + \frac{1}{\langle D_{1^+} \rangle} \quad (10.16)$$

Or, pour l'ordre de grandeur des valeurs du spin des résonances concernées, on a vu que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{\langle D_{J^\pi} \rangle} = \hbar(2J + 1) \quad (10.17)$$

où  $\hbar$  est un coefficient de proportionnalité à déterminer.

On a donc :

$$\frac{1}{\langle D \rangle_{obs}} = \ell[2 \times 0 + 1] + \ell[2 \times 1 + 1] \Rightarrow \ell = \frac{1}{4 \times \langle D \rangle_{obs}} = \frac{1}{4 \times 2.4} = \frac{1}{9.6} \text{ (eV}^{-1}\text{)}$$

On en déduit immédiatement de (10.17) les valeurs des espacements moyens  $\langle D_{0+} \rangle$  et  $\langle D_{1+} \rangle$  :

$$\frac{1}{\langle D_{0+} \rangle} = \ell(2J^{\pi_1} + 1) = \frac{1}{9.6} [2 \times 0 + 1] = \frac{1}{9.6} \Rightarrow \langle D_{0+} \rangle = 9.6 \text{ eV}$$

$$\frac{1}{\langle D_{1+} \rangle} = \ell(2J^{\pi_2} + 1) = \frac{1}{9.6} [2 \times 1 + 1] = \frac{3}{9.6} \Rightarrow \langle D_{1+} \rangle = 3.2 \text{ eV}$$

On retrouve les valeurs des espacements prises initialement comme données de départ.

Les valeurs respectives des largeurs de chacune des deux résonances indiquent qu'en vertu de la relation (10.10), la durée de vie  $\langle \tau_{1+} \rangle$  de la résonance  $J^{\pi_2} = 1^+$  est plus élevée que celle,  $\langle \tau_{0+} \rangle$ , de la résonance  $J^{\pi_1} = 0^+$  :

$$\frac{\langle \tau_{1+} \rangle}{\langle \tau_{0+} \rangle} = \frac{\langle \Gamma_{f,0+} \rangle}{\langle \Gamma_{f,1+} \rangle} = \frac{2.3}{0.038} = 60.5$$

Compte tenu de (5.26) :

$$\langle \tau_{0+} \rangle = \frac{\hbar}{\langle \Gamma_{f,0+} \rangle} \frac{A+1}{A} = \frac{0.662 \cdot 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 2.3 \times 1.602 \cdot 10^{-19}} \frac{238+1}{238} = 2.87 \cdot 10^{-17} \text{ s}$$

$$\langle \tau_{1+} \rangle = \frac{\hbar}{\langle \Gamma_{f,1+} \rangle} \frac{A+1}{A} = \frac{0.662 \cdot 10^{-34}}{2 \times 3.14 \times 0.038 \times 1.602 \cdot 10^{-19}} \frac{238+1}{238} = 1.74 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

La distribution des largeurs réduites continue de faire l'objet d'études. En effet, l'examen systématisé des données nucléaires (*Nuclear Data Ensemble*, NDE) peut révéler des écarts entre expérience et théorie que les physiciens essayent d'expliquer afin de conduire à une description plus exacte des résonances <sup>113 114</sup>.

## 11. Le formalisme de la « matrice R » et les formalismes dérivés

Le formalisme de Breit-Wigner simple niveau, précédemment présenté pour décrire une résonance isolée, ne permet pas de couvrir toutes les configurations possibles de formation du noyau composé ni de ses modes de désexcitation spécifiant les différentes réactions nucléaires rencontrées : diffusion inélastique, capture radiative, fission, réaction (n, 2n), etc., en tenant compte des effets de plus ou moins grande proximité des états d'énergie voisins sur l'état d'énergie considéré du noyau composé.

<sup>113</sup> P. E. Koehler, « Reduced neutron widths in the nuclear data ensemble: Experiment and theory do not agree », *Physical Review C* 84, 034312, 2011, pp. 1-7, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.84.034312>.

<sup>114</sup> P. Fanto, G. F. Bertsch, Y. Alhassid, « Neutron width statistics in a realistic resonance-reaction model », *Physical Review C* 98, 014604, 2018, pp. 1-5, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.98.014604>.

Cet effet d'environnement dépend de l'énergie du neutron incident. Pour cela, il faut recourir à une approche mathématique rigoureuse mais complexe, la **théorie de la « matrice R »** – *The R matrix Theory* – élaborée notamment par P. L. Kapur et R. Peierls<sup>115</sup> puis E. P. Wigner et L. Eisenbud.<sup>116 117 118</sup> Elle fournit dans le cas général une expression des sections efficaces d'une réaction nucléaire associant la voie d'entrée à une voie de sortie. Elle fait appel à la mécanique quantique non relativiste. Il existe différentes manières de l'obtenir ou de la traiter<sup>119</sup>.

L'acception matricielle provient de l'ensemble des associations possibles ou non entre canaux d'entrée et canaux de sortie. Quelques-unes de ses grandes lignes sont présentées dans l'annexe V.

L'application directe de la théorie de la **matrice R** soulève en réalité plusieurs difficultés pratiques, en particulier mathématico-numériques liées à la multiplicité des voies de sorties possibles (plusieurs centaines de milliers de voies pour les photons dans le cas des noyaux lourds), avec leurs interférences éventuelles, mobilisant un grand nombre de données de spectroscopie nucléaire.

Cela explique que des approximations aient été introduites, accompagnées des conditions de leur validité permettant, à partir de la théorie exacte, de dériver de nouveaux formalismes plus simples à appliquer tout en préservant un niveau de précision acceptable.

Plusieurs formalismes ont été proposés pour représenter les sections efficaces neutroniques dans le domaine des basses énergies inférieures à 20 MeV.

Le **tableau 22** en cite quelques-uns s'appliquant à différents cas ou sous-domaines d'énergie mentionnés précédemment (voir **figure 13a** et **tableau 10**).

On rappelle que le **domaine non résolu** est le domaine en énergie au sein duquel les résonances sont très proches les unes des autres, se recouvrant de façon significative. C'est la raison pour laquelle une **approche statistique** apparaît indiquée. Celle-ci consiste à considérer que les niveaux d'énergie du noyau composé sont distribués selon une loi de probabilité, comme on l'a vu plus haut. Il s'ensuit que les éléments de la matrice de l'hamiltonien à résoudre dans l'équation de Schrödinger sont aléatoires. Par conséquent, une **section efficace moyenne** sera obtenue en moyennant la matrice de collision sur plusieurs résonances sur un intervalle d'énergie défini autour d'une énergie donnée.

<sup>115</sup> P. L. Kapur, R. Peierls, « The dispersion formula for nuclear reactions », *Proceedings of the Royal Society*, Vol. 166 Issue 925, 19 May 1938, pp. 277-295, <https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0093>.

<sup>116</sup> E. P. Wigner, L. Eisenbud, « Higher Angular Momenta and Long Range Interaction in Resonance Reactions », *Physical Review*, 72, 1947, pp. 29-41, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.72.29>.

<sup>117</sup> A. M. Lane, R. G. Thomas, *Rev. Mod. Phys.*, 30, 257, 1958, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.30.257>.

<sup>118</sup> J. E. Lynn, *The Theory of Neutron Resonance Reactions*, Clarendon Press, Oxford, 1968.

<sup>119</sup> P. Descouvemont, D. Baye, « The R-matrix theory », *Reports on Progress In Physics*, 73 (2010) 036301, pp. 1-44, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0034-4885/73/3/036301>.

La valeur moyenne du rapport  $\Gamma_n/D$  des paramètres associés aux résonances constitue un critère indicatif du choix des formalismes à utiliser :

- $\langle \Gamma_n/D \rangle < 10^{-3}$  : application du **formalisme de Breit-Wigner simple niveau** (SLBW) ;
- $\langle \Gamma_n/D \rangle < 2.10^{-2}$  : application du **formalisme de Breit-Wigner multiniveaux** (MLBW) ;
- **formalisme Reich-Moore** dans les autres cas.

Tableau 22. Les différents formalismes de description des sections efficaces neutroniques dérivés de la théorie de la « matrice R ».

Formalismes <sup>120</sup>	Domaines d'application
<b>Breit-Wigner simple niveau</b> ou <i>Breit-Wigner Single Level</i> (SLBW)	Domaine résolu/résonance isolée : représentation mathématique de la section efficace neutronique ne considérant qu'un seul niveau d'énergie.
<b>Breit-Wigner multiniveaux</b> ou <i>Breit-Wigner Multi-level</i> (MLBW)	Domaine résolu avec prise en compte des interférences entre résonances (niveaux d'énergie), mais pas entre les voies.
<b>Reich-Moore (RM)</b>	Domaine résolu avec prise en compte des interférences entre niveaux d'énergie et voies des résonances ; ne prend cependant pas en compte les contributions non diagonales des voies de sortie gamma.
<b>Approche statistique</b>	Domaine des résonances non résolues : recouvrement ( <i>overlapping</i> ) important des résonances (chevauchement des largeurs à mi-hauteur).
<b>Modèle optique</b>	<i>Continuum.</i>

## 12. Résonance négative

L'interaction d'un neutron avec un noyau atomique cible peut solliciter les **niveaux d'énergie liés** du noyau composé situés à proximité de l'énergie de Fermi. On parle alors de **résonance négative** (voir **figure 31**).

Cette éventualité résulte de l'étalement en énergie des résonances (largeur de résonance) qui se rapporte à la relation d'incertitude d'Heisenberg vue précédemment au paragraphe 2. Située à proximité du niveau de Fermi, une résonance négative peut contribuer à la section efficace neutronique totale sur une certaine plage en énergie.

<sup>120</sup> R. E. MacFarlane, A. C. Kahler, « Methods for Processing ENDF/B-VII with NJOY », *Nuclear Data Sheets*, 111, 2739–2890, 2010, § D « Resonance Representations », pp. 2746-2752.



Par exemple, dans le cas d'une capture radiative ( $n, \gamma$ ), on examine le comportement de la section efficace associée à une résonance négative positionnée à l'énergie  $E_0 < 0$  (en-dessous de l'énergie de Fermi). Dans ce cas, l'énergie du neutron  $E$  n'est plus négligeable devant  $|E_0|$ .

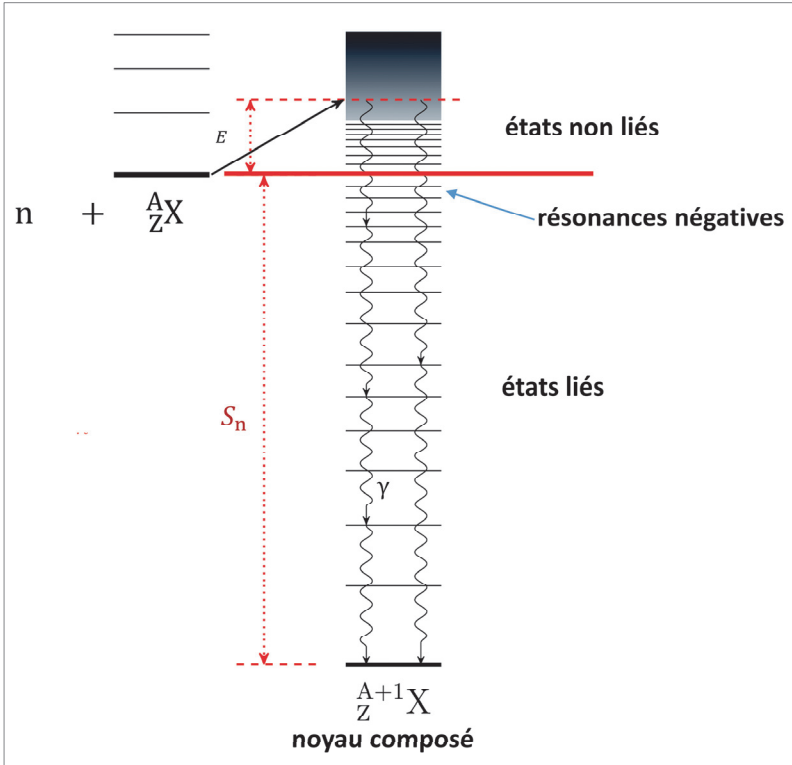


Figure 31. Capture radiative d'un neutron : formation du noyau composé et positionnement des « résonances négatives ».

Comme l'illustre la **figure 32**, l'expression de la section efficace de Breit-Wigner :

$$\sigma_{(n,\gamma)}(E) = \frac{\lambda^2}{\pi} \frac{\Gamma_n(E) \Gamma_\gamma}{\Gamma^2} \frac{1}{1 + \left( \frac{E - E_0}{\Gamma/2} \right)^2} = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{1}{\left( \frac{E - E_0}{\frac{\Gamma}{2}} \right)^2 + 1} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \quad (12.1)$$

se comporte alors asymptotiquement comme :

$$\sigma_{(n,\gamma)}(E) \propto \frac{1}{v^5} \text{ soit } \propto \frac{1}{v^5} \quad (12.2)$$

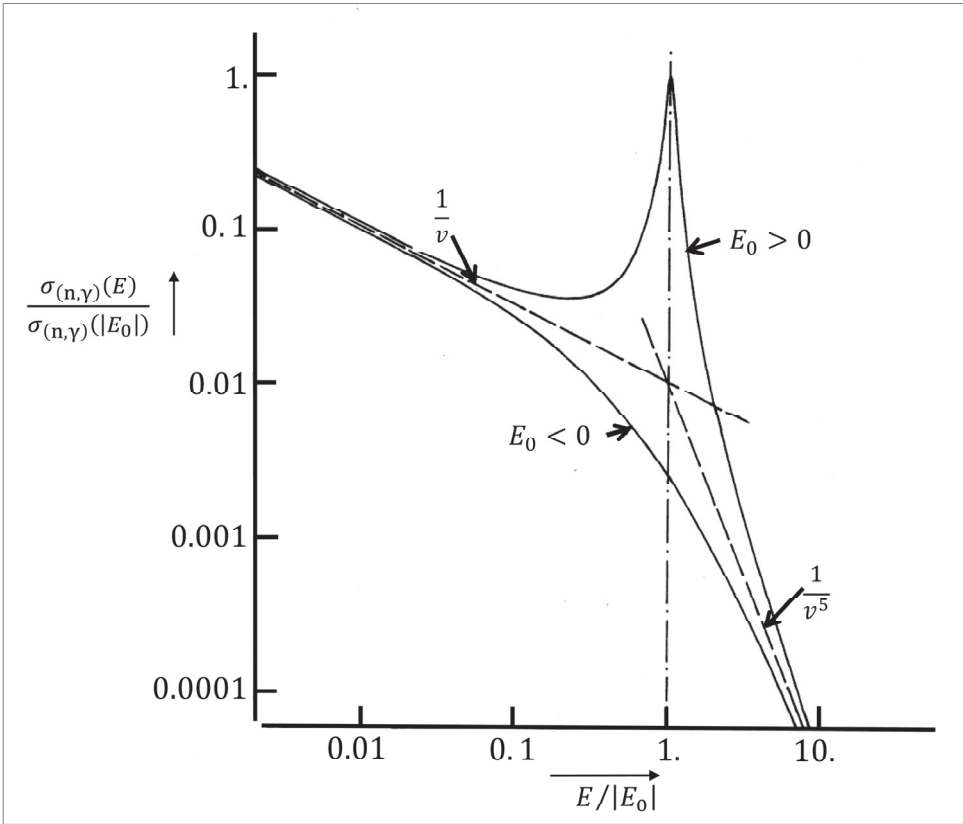


Figure 32. Représentation du rapport  $\sigma_{(n,\gamma)}(E)/\sigma_{(n,\gamma)}(|E_0|)$  faisant apparaître les différents comportements de la section efficace microscopique de capture radiative en fonction du rapport  $E/|E_0|$ .<sup>121</sup>

### Exemple

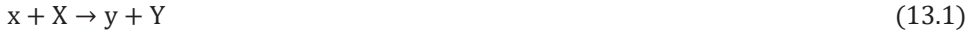
Les résonances suivantes de l'erbium 167 et du fer 56 sont des résonances négatives.

- L'erbium 167 a une résonance négative à  $-23.6$  eV avec les paramètres suivants :  $2g\Gamma_n = 117$  meV et  $\Gamma_\gamma = 88$  meV.
- Le fer 56 a une résonance négative à  $-6.52$  keV avec les paramètres suivants :  $g\Gamma_n^0 = 17.29$  eV et  $\Gamma_\gamma = 1.45$  eV.

<sup>121</sup> F. H. Fröhner, *Evaluation and Analysis of Nuclear Resonance Data*, Nuclear Energy Agency, JEFF Report 18, 2000, p. 71, [https://www.oecd-neo.org/jcms/pl\\_13418](https://www.oecd-neo.org/jcms/pl_13418).

### 13. Réactions nucléaires inverses et relation de réciprocité

On considère deux réactions inverses suivantes :



où  $x$  et  $y$  sont les particules légères. On remarquera que si l'une de ces deux réactions est exothermique ( $Q > 0$ ), alors l'autre est endothermique ou à seuil ( $Q < 0$ ).

On désigne par  $\sigma(x, y)$  et  $\sigma(y, x)$  les sections efficaces respectives des réactions (13.1) et (13.2) ; dans le **référentiel du centre de masse**, on note  $\lambda_{x+X}$  et  $\lambda_{y+Y}$  les longueurs d'onde rationalisées de de Broglie des **particules relatives** respectivement associées à  $x + X$  et  $y + Y$  et  $p_{x+X}$ , et  $p_{y+Y}$  les quantités de mouvement correspondantes.

L'application du **principe de micro-réversibilité** (renversement du temps) conduit à la **relation de réciprocité**<sup>122 123</sup> suivante :

$$\frac{\sigma(x, y)}{\sigma(y, x)} = \frac{(2J_Y + 1)(2j_y + 1)}{(2J_X + 1)(2j_x + 1)} \frac{\lambda_{x+X}^2}{\lambda_{y+Y}^2} = \frac{(2J_Y + 1)(2j_y + 1)}{(2J_X + 1)(2j_x + 1)} \frac{p_{y+Y}^2}{p_{x+X}^2} \quad (13.3)$$

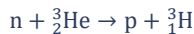
où les grandeurs  $j_x, J_X, j_y, J_Y$  représentent les moments angulaires respectifs des particules  $x, y, X, Y$  impliquées dans les deux réactions, et en rappelant les relations  $\lambda_x = \hbar/p_x$  et  $\lambda_y = \hbar/p_y$ .

Ainsi, connaissant la section efficace d'une réaction, on peut en déduire celle de son inverse.

#### Exemple 1

**Les réactions inverses  ${}^3_2\text{He}(n, p){}^3_1\text{H}$  ( $Q = 0.764 \text{ MeV}$ ) et  ${}^3_1\text{H}(p, n){}^3_2\text{He}$  ( $Q = -0.764 \text{ MeV}$ )**

Ce sont les réactions inverses :



<sup>122</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics, op. cit.*, Chapter VIII, § E « The Reciprocity Theorem for Nuclear Reactions », pp. 336-339.

<sup>123</sup> Le théorème de réciprocité et le principe de balance détaillée ne coïncident pas lorsque l'on considère les spins de la voie d'entrée et de la voie de sortie ; la différence entre les deux notions disparaît lorsque les spins sont moyennés ; voir J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics, op. cit.*, Chapter X, § 2 « Conservation and reciprocity theorems for nuclear reactions », pp. 521-532. Voir aussi : R. D. Evans, *Le noyau atomique, op. cit.*, p. 363-364 et 496-498 ; H. A. Bethe, G. Placzek, « Resonance Effects in Nuclear Processes », *Physical Review* 51, March 15, 1937, pp. 450-484, p. 458, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.51.450>, Cette relation de réciprocité se manifeste dans le formalisme des sections efficaces de Breit-Wigner.

où  $n$  (un neutron) et  $p$  (un proton) sont les particules légères mises en jeu.

On a les correspondances de notation suivantes avec ce qui précède :

$$\blacksquare \quad x \equiv n ; X \equiv {}^3_2\text{He} ; y \equiv p ; Y \equiv {}^3_1\text{H}$$

Pour chacun des deux noyaux atomiques considérés dans leur état fondamental :

- ${}^3_2\text{He} : J_X \equiv J_{{}^3_2\text{He}} = 1/2 ;$
- ${}^3_1\text{H} : J_Y \equiv J_{{}^3_1\text{H}} = 1/2 ;$
- $n : j_x \equiv j_n = 1/2 ;$
- $p : j_y \equiv j_p = 1/2 ;$
- $p_{n+{}^3_2\text{He}}$  est la quantité de mouvement de la particule relative associée au système  $n + {}^3_2\text{He}$  ;
- $p_{p+{}^3_1\text{H}}$  est la quantité de mouvement de la particule relative associée au système  $p + {}^3_1\text{H}$ .

Par conséquent, après simplification, l'application de l'expression (13.3) conduit dans ce cas particulier aux relations simples suivantes :

$$\frac{\sigma(n, p)}{\sigma(p, n)} = \frac{p_{p+{}^3_1\text{H}}^2}{p_{n+{}^3_2\text{He}}^2} ; \sigma(n, p) = \frac{p_{p+{}^3_1\text{H}}^2}{p_{n+{}^3_2\text{He}}^2} \sigma(p, n) ; \sigma(p, n) = \frac{p_{n+{}^3_2\text{He}}^2}{p_{p+{}^3_1\text{H}}^2} \sigma(n, p)$$

On considère un neutron d'énergie cinétique initiale dans le référentiel du laboratoire  $E_n = 2 \text{ MeV}$  ; pour cette énergie la section efficace de la réaction  ${}^3_2\text{He}(n, p){}^3_1\text{H}$  vaut  $\sigma(n, p) = 0.832 \text{ barns}$ . On suppose que le noyau cible  ${}^3_2\text{He}$  est initialement au repos dans le référentiel du centre de masse.

On se propose de calculer la section efficace  $\sigma(p, n)$  de la réaction inverse  ${}^3_1\text{H}(p, n){}^3_2\text{He}$ .

Pour cela, on détermine préalablement  $p_{n+{}^3_2\text{He}}^2$  et  $p_{p+{}^3_1\text{H}}^2$ . On note respectivement  $\mu_{r, n+{}^3_2\text{He}}$  et  $E_{r, n+{}^3_2\text{He}}$  la masse réduite et l'énergie cinétique de la particule relative du système  $n + {}^3_2\text{He}$ , et  $\mu_{r, p+{}^3_1\text{H}}$  et  $E_{r, p+{}^3_1\text{H}}$  la masse réduite et l'énergie cinétique de la particule relative du système  $p + {}^3_1\text{H}$  (voir chapitre 7 § 2.2). On désigne respectivement par  $m_n$ ,  $m_{{}^3_2\text{He}}$ ,  $m_p$ ,  $m_{{}^3_1\text{H}}$  les masses du neutron, du noyau d'hélium 3 cible, du proton émis et du noyau de tritium produit par la réaction nucléaire considérée. On a donc :

- pour le système  $n + {}^3_2\text{He}$  en entrée de réaction :

$$p_{n+{}^3_2\text{He}}^2 = 2\mu_{r, n+{}^3_2\text{He}} E_{r, n+{}^3_2\text{He}}$$

avec :

$$\mu_{r, n+{}^3_2\text{He}} = \frac{m_n m_{{}^3_2\text{He}}}{m_n + m_{{}^3_2\text{He}}}$$

$$E_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}} = \frac{1}{2} \mu_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}} v_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}}^2 = \frac{\mu_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}}}{m_n} \times \frac{1}{2} m_n v_n^2 = \frac{\mu_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}}}{m_n} E_n$$

où  $v_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}}$  est la vitesse de la particule relative associée au système neutron incident + noyau d'hélium 3 cible et  $v_n$  la vitesse du neutron incident dans le référentiel du laboratoire.

En adoptant la masse du neutron comme unité de masse :

$$\mu_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}} \approx \frac{1 \times 3}{1 + 3} = 0.75, \quad E_{r,n+\frac{3}{2}\text{He}} \approx \frac{0.75}{1} \times 2 = 1.5 \text{ MeV}$$

$$p_{n+\frac{3}{2}\text{He}}^2 = 2 \times 0.75 \times 1.5 = 2.25$$

▪ pour le système  $p + \frac{3}{1}\text{H}$  en sortie de réaction :

$$p_{p+\frac{3}{1}\text{H}}^2 = 2\mu_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}} E_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}},$$

avec :

- $\mu_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}} = \frac{m_p m_{\frac{3}{1}\text{H}}}{m_p + m_{\frac{3}{1}\text{H}}}$
- $E_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}} = \frac{1}{2} \mu_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}} v_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}}^2 = \frac{1}{2} \mu_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}} (v_{pC} + v_{\frac{3}{1}\text{HC}})^2$

où :

- $v_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}}$  est la vitesse de la particule relative associée au système proton émis + noyau de tritium produit ;
- $v_{pC}$  et  $v_{\frac{3}{1}\text{HC}}$  sont les vitesses respectives du proton et du noyau de tritium dans le référentiel du centre de masse.

La vitesse relative  $v_{r,p+\frac{3}{1}\text{H}}$  est égale à la somme  $v_{pC} + v_{\frac{3}{1}\text{HC}}$  puisque dans le système du centre de masse les deux particules produites partent dans des directions diamétralement opposées.

D'après les relations (II – 19) et (II – 18) de l'annexe II du chapitre 7 paragraphe 1, on a :

$$v_{pC}^2 = \frac{1}{m_p} \frac{2Q + 2E_n \left[ 1 - \frac{m_n}{m_p + m_{\frac{3}{1}\text{H}}} \right]}{1 + \frac{m_p}{m_{\frac{3}{1}\text{H}}}}$$

$$v_{\frac{3}{1}\text{HC}}^2 = \left( \frac{m_p}{m_{\frac{3}{1}\text{H}}} \right)^2 v_{pC}^2$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned} (v_{pC} + v_{\frac{3}{1}\text{HC}})^2 &= v_{pC}^2 + v_{\frac{3}{1}\text{HC}}^2 + 2v_{pC}v_{\frac{3}{1}\text{HC}} = v_{pC}^2 + \left( \frac{m_p}{m_{\frac{3}{1}\text{H}}} \right)^2 v_{pC}^2 + 2 \left( \frac{m_p}{m_{\frac{3}{1}\text{H}}} \right) v_{pC}^2 \\ &= v_{pC}^2 \left[ 1 + \left( \frac{m_p}{m_{\frac{3}{1}\text{H}}} \right)^2 + 2 \left( \frac{m_p}{m_{\frac{3}{1}\text{H}}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$(v_{pC} + v_{iHC})^2 = v_{pC}^2 \left[ 1 + \frac{m_p}{m_{iH}} \right]^2$$

En adoptant comme précédemment la masse du neutron comme unité de masse :

$$\mu_{r,p+iH} = \frac{1 \times 3}{1 + 3} = 0.75$$

$$v_{pC}^2 \approx \frac{1}{1} \frac{2 \times 0.764 + 2 \times 2 \left[ 1 - \frac{1}{1+3} \right]}{1 + \frac{1}{3}} = 3.9$$

$$(v_{pC} + v_{iHC})^2 = 3.9 \times \left[ 1 + \frac{1}{3} \right]^2 = 3.9 \times 1.78 = 6.93$$

$$E_{r,p+iH} \approx 0.5 \times 0.75 \times 6.93 = 2.6$$

$$p_{p+iH}^2 = 2 \times 0.75 \times 2.6 = 3.9$$

On en déduit la valeur de la section efficace de la réaction (p, n) :

$$\sigma(p, n) = \frac{p_{n+{}^3_2\text{He}}^2}{p_{p+{}^3_1\text{H}}^2} \sigma(n, p) = \frac{2.25}{3.9} \times 0.832 = 0.48 \text{ b}$$

Cette section efficace correspond à une énergie cinétique d'un proton incident dans le référentiel du centre de masse,  $E_{pC}$ , déduite de l'expression ci-dessus du carré de la vitesse du proton émis,  $v_{pC}^2$  :

$$E_{pC} = \frac{1}{2} m_p v_{pC}^2 = \frac{Q + E_n \left[ 1 - \frac{m_n}{m_p + m_{iH}} \right]}{1 + \frac{m_p}{m_{iH}}} \approx 1.95 \text{ MeV}$$

### Exemple 2 <sup>124</sup>

**La réaction  ${}^{27}_{13}\text{Al}(p, \alpha){}^{24}_{12}\text{Mg}$  ( $Q = 1.613 \text{ MeV}$ ) et  ${}^{24}_{12}\text{Mg}(\alpha, p){}^{27}_{13}\text{Al}$  ( $Q = -1.613 \text{ MeV}$ )**

Ce sont les réactions inverses :



où p (un neutron) et  $\alpha$  (un proton) sont les particules légères mises en jeu.

Selon (13.3) on a :

$$\frac{\sigma(p, \alpha)}{\sigma(\alpha, p)} = \frac{(2J_{{}^{24}_{12}\text{Mg}} + 1)(2j_\alpha + 1)}{(2J_{{}^{27}_{13}\text{Al}} + 1)(2j_p + 1)} \frac{p_{\alpha+{}^{24}_{12}\text{Mg}}^2}{p_{p+{}^{27}_{13}\text{Al}}^2}$$

<sup>124</sup> R. D. Evans , *Le noyau atomique, op. cit.*, pp. 496-498.

Les valeurs des spins des entités en interaction sont les suivantes :

$$j_p = \frac{1}{2}, \quad J_{13}^{27}\text{Al} = \frac{5}{2}, \quad j_\alpha = 0, \quad J_{12}^{24}\text{Mg} = 0$$

d'où :

$$\frac{\sigma(p, \alpha)}{\sigma(\alpha, p)} = \frac{(2 \times 0 + 1)(2 \times 0 + 1)}{(2 \times \frac{5}{2} + 1)(2 \times \frac{1}{2} + 1)} \frac{p_{\alpha+^{24}\text{Mg}}^2}{p_{p+^{27}\text{Al}}^2} = \frac{1}{12} \frac{p_{\alpha+^{24}\text{Mg}}^2}{p_{p+^{27}\text{Al}}^2}$$

$$\sigma(p, \alpha) = \frac{1}{12} \frac{p_{\alpha+^{24}\text{Mg}}^2}{p_{p+^{27}\text{Al}}^2} \sigma(\alpha, p) ; \sigma(\alpha, p) = 12 \frac{p_{p+^{27}\text{Al}}^2}{p_{\alpha+^{24}\text{Mg}}^2} \sigma(p, \alpha)$$

## 14. Domaine du continuum

Il a été vu au paragraphe 4 (voir aussi **figure 12**) que ce domaine d'énergie du continuum est situé dans la partie supérieure de l'intervalle  $[0 - 20 \text{ MeV}]$ . Il concerne donc les réactions nucléaires induites par des particules d'énergies plutôt élevées, au-dessus de 1 MeV (à titre indicatif).

### 14.1. Le modèle optique

L'interaction directe d'un neutron avec un noyau pose à nouveau le problème à «  $\mathcal{N}$  corps » déjà évoqué dans le chapitre 4. En écartant la voie du calcul *ab initio* de l'équation de Schrödinger, dans le cas général encore hors d'atteinte pour des raisons de temps de calcul, l'idée est donc de remplacer ce problème à «  $\mathcal{N}$  corps » par une formulation équivalente à 1 corps interagissant avec un potentiel représentatif de l'ensemble des nucléons du noyau atomique. Il s'agit donc de construire ce potentiel : c'est ce que se propose l'élaboration du **modèle optique**.<sup>125 126</sup>

Le **modèle optique** a pour objectif de déterminer les sections efficaces des réactions directes élastique et inélastique, qui se déroulent dans des temps très courts. Il est fondé sur l'analogie de l'absorption d'une onde lumineuse par la matière (cristal) et résulte donc d'une approche phénoménologique appliquée à l'interaction des neutrons de relativement haute énergie : supérieure à 30 keV pour les noyaux lourds tels que le plutonium 239 et à 20 MeV pour les noyaux légers tels que l'oxygène 16.

L'intérêt du modèle optique, qui a été initialement proposé par Feshbach, Porter et Weisskopf<sup>127</sup>, est de permettre de déterminer/prédire les valeurs de la longueur de diffusion, des fonctions densité ou force, des coefficients de transmission ainsi que des

<sup>125</sup> J. S. Bell, E. J. Squires, « A Formal Optical Model », *Physical Review Letter* 3, July 15, 1959, pp. 96-97, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.3.96>.

<sup>126</sup> J.-P. Jeukenne, A. Lejeune, C. Mahaux, « Many-body theory of nuclear matter », *Physics Reports*, Volume 25, Issue 2, May 1976, pp. 83-174, [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(76\)90017-X](https://doi.org/10.1016/0370-1573(76)90017-X).

<sup>127</sup> H. Feshbach, C. E. Porter, V. F. Weisskopf, « Model for Nuclear Reactions with Neutrons », *Physical Review* 96, October 15, 1954, pp. 448-464, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.96.448>.

sections efficaces moyennes en fonction du nombre de masse  $A$  et de l'énergie du neutron. La fonction force constitue un paramètre faisant l'objet de mesures et au moyen duquel il est possible de comparer les valeurs de sections efficaces moyennes issues de modèles nucléaires avec celles provenant de l'expérience. Il est à noter qu'il donne accès à la section efficace non élastique que les deux autres modèles (modèle de pré-équilibre et modèle du noyau composé) discrimineront en voies de sortie sur leurs échelles de temps respectives.

Grâce au modèle optique, on est capable de prédire l'existence de **résonances larges** encore appelées **résonances géantes** dans la littérature.

Les grandeurs physiques précitées sont obtenues en résolvant l'équation de Schrödinger relative au système formé par le neutron incident et le noyau cible. Le potentiel d'interaction  $U(r)$  adopté pour la résoudre est complexe, comportant une partie réelle  $V(r)$  et une partie imaginaire  $W(r)$  :

$$U(r) = V(r) + iW(r) \quad (14.1)$$

Deux principales approches existent pour définir ces potentiels.<sup>128 129 130</sup>

- **L'approche microscopique** (ou **semi-microscopique**) dans laquelle le potentiel est construit par le calcul à partir de l'**interaction nucléon-nucléon effective de Skyrme** ou **de Gogny** et en utilisant la **méthode de Hartree-Fock-Bogoliubov** (HFB) dont la présentation a été esquissée dans le chapitre 4.
- **L'approche phénoménologique** dans laquelle on paramétrise une forme *a priori* du **potentiel optique**<sup>131</sup> ; par exemple on fait le choix d'un potentiel de Woods-Saxon dont les paramètres sont ajustés en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident :
  - la **partie réelle**  $V(r) = -V_0 f(r)$  avec (voir chapitre 4 § 2) :

$$f(r) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r - R}{a}\right)} \quad (14.2)$$

où :

$$\circ \quad R = r_0 A^{1/3}, r_0 \approx 1.35 \text{ fm, rayon du noyau atomique ;}$$

<sup>128</sup> [http://www-phynu.cea.fr/themes\\_recherche/reaction/modele\\_optique.htm](http://www-phynu.cea.fr/themes_recherche/reaction/modele_optique.htm).

<sup>129</sup> M. Dupuis, « Microscopic description of elastic and direct inelastic nucleon scattering of spherical nuclei », *The European Physical Journal A*, 53(5):111, May 2017, <https://doi.org/10.1140/epja/i2017-12293-6>.

<sup>130</sup> A. Nasri, Microscopic nonlocal potentials for the study of scattering observables of nucleons within the coupled channel framework. Nuclear Theory, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2018.

<sup>131</sup> A. J. Koning, J.-P. Delaroche, « Local and global nucleon optical models from 1 keV to 200 MeV », *Nuclear Physics A* 713, 2003, pp. 231–310.



- $a$  : diffusivité, caractérisant la vitesse de décroissance du potentiel nucléaire, ordre de grandeur  $a \approx 2.2$  fm (paramètre dépendant du nucléide concerné<sup>132</sup>) ;
- la **partie imaginaire** modélisant l'absorption et la réémission de l'onde incidente est représentée par exemple à la fois par un potentiel (de volume) ainsi que par un potentiel de surface modélisé par la dérivée du potentiel choisi :

$$W(r) = W_0 \frac{d}{dr} f(r) = W_0 \left[ \frac{-\exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)\right)^2} \right] \quad (14.3)$$

Les grandeurs  $V_0$  (par ex. 44 MeV) et  $W_0$  (par ex. 6 MeV) représentent la profondeur des puits de potentiel respectivement réel et imaginaire. Les grandeurs  $V_0$  et  $W_0$  varient relativement lentement en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident, comme le montre la **figure 33**.

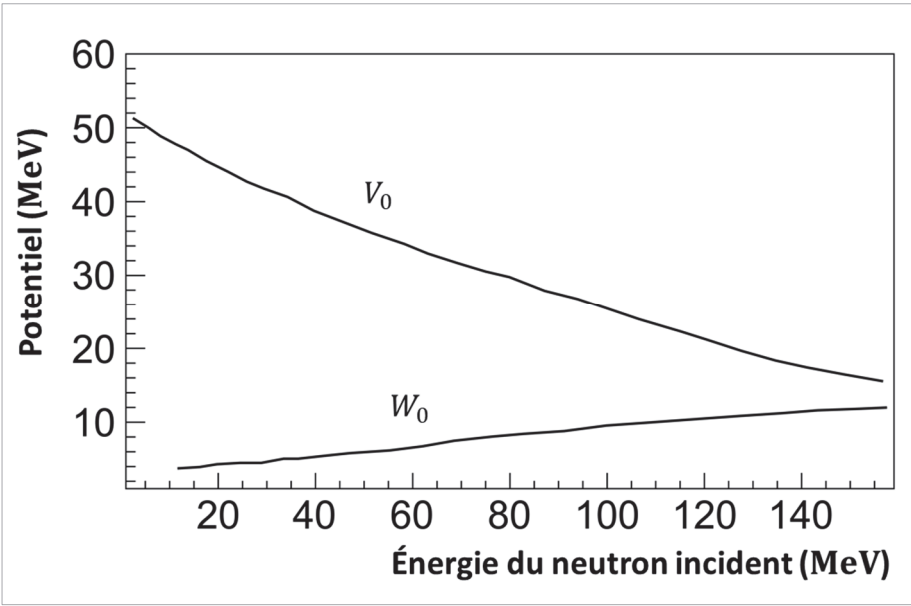


Figure 33. Profondeurs des potentiels réel ( $V_0$ ) et imaginaire ( $W_0$ ) en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident.<sup>133</sup>

On peut y ajouter un **potentiel spin-orbite**.

<sup>132</sup> B. Morillon, P. Romain, « Dispersive and global spherical optical model with a local energy approximation for the scattering of neutrons by nuclei from 1 keV to 200 MeV », *Physical Review C* 70, 014601, July 6, 2004, pp.1-6, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.70.014601>.

<sup>133</sup> D'après L. Valentin, *Physique subatomique : noyaux et particules*, Hermann, Paris, 1975, p. 359, figure X.9.

Les coefficients de transmission  $T_{lJ}$  se déduisent du raccordement des dérivées logarithmiques des fonctions d'onde interne et externe *via* la détermination de l'amplitude de diffusion, notée  $\eta_{lJ}$ , par résolution de l'équation de Schrödinger<sup>134</sup> :

$$T_{l,J} = 1 - |\eta_{l,J}|^2 \quad (14.4)$$

$$\sigma_{nc}(E) = \sum_J \sum_l \sigma_{nc,l,J}(E) = \pi \lambda^2 \sum_l (2l + 1) T_{l,J} \quad (14.5)$$

La **figure 34** montre la variation en énergie de la section efficace totale obtenue avec un potentiel optique pour un neutron incident sur une cible d'uranium 238.

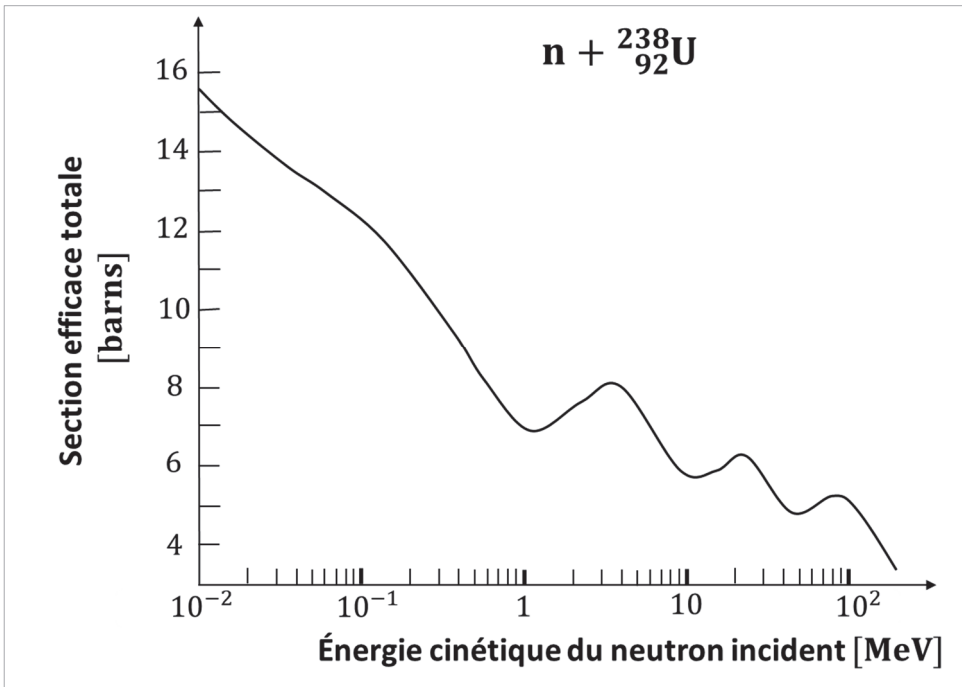


Figure 34. Exemple de la section efficace totale d'interaction d'un neutron incident sur une cible d'uranium 238 obtenue avec un potentiel optique : variation en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident.<sup>135</sup>

<sup>134</sup> O. Bersillon, *SCAT 2 : Un programme de modèle optique sphérique*, Note CEA-N-2227, 1981, <https://www.oecd-neo.org/tools/abstract/detail/nea-0829/>.

<sup>135</sup> D'après [http://www-phynu.cea.fr/themes\\_recherche/reaction/modele\\_optique.htm](http://www-phynu.cea.fr/themes_recherche/reaction/modele_optique.htm), Figure 6 ; la figure d'origine montre les deux courbes obtenues avec les deux potentiels semi-microscopique et phénoménologique.

## 14.2. Distributions angulaires et énergétiques des particules émises

### 14.2.1. Le modèle statistique de Weisskopf

Dans le domaine du continuum, comme le nom l'indique, les **niveaux d'énergie** du noyau excité sont nombreux et très proches les uns des autres, ce qui autorise une **approche statistique**.<sup>136</sup> Il s'agit d'abord de caractériser le **spectre en énergie** du neutron  $n'$  réémis dans une réaction inélastique  $(n, n')$  induite par un neutron sur un nucléide donné.

On considère la formation d'un noyau composé dans lequel l'énergie apportée par le neutron incident est partagée entre l'ensemble des nucléons de ce noyau composé. On étudie alors dans une seconde étape de quelle manière celui-ci se désintègre/désexcite par émission d'un neutron  $n'$ . Pour ce faire une approche thermodynamique statistique a été suggérée par Yakov Ilitch Frenkel, comparant l'émission de particules par un noyau excité à l'évaporation de molécules d'un fluide. Celle-ci a été concrétisée par V. Weisskopf.<sup>137</sup> On désigne par  $X$  le noyau composé formé dans un état excité d'énergie  $E_X$ . La réaction étudiée, dans le prolongement mais indépendamment de la première étape de la formation proprement dite du noyau  $X$ , s'écrit :



L'énergie de liaison du nucléide  $X$  dans son état fondamental est notée  $B$ . On désigne par  $W_n(E)dE$  la probabilité par unité de temps qu'un noyau atomique  $X$ , excité à l'énergie  $E_X$ , d'émettre un neutron dont l'énergie est comprise entre  $E$  et  $E + dE$ .

V. Weisskopf, en s'appuyant sur la **réaction nucléaire inverse**  $Y + n' \rightarrow X$ , aboutit à l'expression suivante de la distribution  $W_n(E)$  des neutrons  $n'$  émis à l'énergie  $E$  par le noyau composé :

$$W_n(E) = \sigma_{nc}(E_X, E) \frac{gm}{\pi^2 \hbar^3} E \exp[S_Y(E_X - B - E) - S_X(E_X)] \quad (14.6)$$

où :

- $\sigma_{nc}(E_X, E)$  est la section efficace de formation du noyau composé de la réaction inverse  $Y + n' \rightarrow X$  induite par un neutron d'énergie cinétique  $E$  sur un noyau atomique  $Y$  dans un état d'énergie  $E_X - B - E$  et aboutissant à la formation du noyau atomique  $X$  dans un état excité  $E_X$  ;
- $g$  est le nombre d'états possibles pour un spin donné,  $g = 2$  pour les neutrons (et les protons) ;
- $m$  est la masse du neutron émis ;
- $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$  ;
- $S_Y(E_X - B - E) = k_B \log \omega_Y(E_Y = E_X - B - E)$  est l'entropie microcanonique du noyau  $Y$  où  $\omega_Y$  est le nombre d'états d'énergie par unité d'énergie à l'énergie  $E_Y$  ;

<sup>136</sup> A. J. Cole, *Statistical models for nuclear decay from evaporation to vaporization*, Institute of Physics Publishing, London, 2000.

<sup>137</sup> V. Weisskopf, « Statistics and Nuclear Reactions », *Physical Review* Vol. 52, August 15, 1937, pp. 295-303 ; voir aussi J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, Springer-Verlag, New York, 1979, pp. 365-379.

- $S_X(E_X) = k_B \log \omega_X(E_X)$  est l'entropie microcanonique du noyau X où  $\omega_X$  est le nombre d'états d'énergie par unité d'énergie à l'énergie  $E_X$ .

En supposant que  $E_X \gg B$  et  $E_X \gg E$ , alors  $S_Y(E_Y)$  et  $S_X(E_X)$  peuvent être considérées comme des valeurs d'une même fonction d'entropie  $S$  de sorte que l'on a, en développant au premier ordre cette fonction autour de  $E_X$  :

$$S_Y(E_Y) = S_Y(E_X - B - E) = S_X(E_X) - (B + E) \left( \frac{dS}{dE} \right)_{E_X} \quad (14.7)$$

Or, on sait que l'on peut relier la variation d'entropie à une température  $T$  (exprimée ici en unité d'énergie) *via* la relation :

$$dS = \frac{dE}{T} \quad (14.8)$$

Il en résulte que l'argument de l'exponentielle dans (14.6) s'écrit :

$$S_Y(E_X - B - E) - S_X(E_X) = -\frac{B}{T_X(E_X)} - \frac{E}{T_X(E_X)} \quad (14.9)$$

$T_X(E_X)$  représentant la température à laquelle l'énergie la plus probable du noyau atomique X est égale à  $E_X$  à l'équilibre thermodynamique.

L'expression (14.6) devient alors :

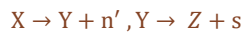
$$W_n(E) = \sigma_{nc}(E_X, E) \frac{gm}{\pi^2 \hbar^3} \exp \left[ -\frac{B}{T_X(E_X)} \right] E \exp \left[ -\frac{E}{T_X(E_X)} \right] \quad (14.10)$$

La normalisation de (14.10) permet d'obtenir le spectre en énergie normalisé des neutrons émis.

Ce formalisme n'est pas restreint à l'émission de neutrons par le noyau composé mais s'étend à l'émission d'autres particules légères comme le proton et la particule  $\alpha$ .

### Remarque

Le modèle suppose que le noyau résiduel après émission d'une particule légère est laissé dans un état excité et se désexcite par émission de photons gamma (voir § 15). Cependant, si le noyau a une énergie d'excitation très élevée, le noyau résiduel peut également émettre des particules secondaires, s, conduisant à un nouveau noyau atomique résiduel Z, ce qui peut être considéré comme une deuxième réaction nucléaire<sup>138</sup> :



<sup>138</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*, op. cit., pp. 374-379.

### Exemple

#### Détermination de la section efficace différentielle en énergie de production de neutrons par réaction (n, 2n)

Dans l'annexe III, paragraphe 4 du chapitre 7, des indications ont été fournies sur la cinématique des réactions (n, 2n).

Les deux neutrons sont émis selon un spectre en énergie qui fait à la fois l'objet de mesures et de modélisations en liaison étroite avec la détermination des sections efficaces différentielles en angle et en énergie des réactions correspondantes.<sup>139 140</sup>

La cinématique permet de déterminer les bornes du spectre d'émission de ces neutrons.

À titre illustratif, on reproduit ci-après des expressions proposées pour représenter le spectre de chacun des deux neutrons émis par une réaction (n, 2n)<sup>141</sup>, dérivées du modèle d'évaporation de nucléons d'un noyau atomique excité de nombre de masse  $A$  introduit par Weisskopf<sup>142</sup>, en admettant que  $A$  est suffisamment grand ( $A > 50$ ). L'énergie cinétique du neutron incident est notée  $E$ .

La densité de probabilité  $P_1(E, E_{n1})$  d'émission du premier neutron a pour expression :

$$P_1(E, E_{n1}) = \frac{E_{n1}}{I_1} \exp\left(-\frac{E_{n1}}{T_1}\right), \quad 0 \leq E_{n1} \leq E^{max} \quad (14.11)$$

avec :

- $T_1$  la température nucléaire du noyau composé initial :

$$T_1 = 3.22 \sqrt{\frac{E}{A}} \quad E \text{ en MeV} \quad (14.12)$$

- $I_1$  la constante de normalisation :

$$I_1 = T_1^2 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{E^{max}}{T_1} \right) \exp\left(-\frac{E^{max}}{T_1}\right) \right] \quad (14.13)$$

- $E^{max}$  l'énergie cinétique maximale que peut acquérir le premier neutron,  
 $E^{max} = E - B$  où  $B$  est l'énergie de séparation du « dernier » neutron du nucléide de nombre de masse  $A$ .

La densité de probabilité d'émission  $P_2(E, E_{n2})$  du second neutron à l'énergie  $E_{n2}$  s'écrit alors :

<sup>139</sup> M. Segev, « Inelastic Matrices in Multigroup Calculations », dans Argonne National Laboratory, *Applied physics division annual report*, ANL 1770, July 1, 1969 to June 30, 1970, § IV.4, pp. 374-381.

<sup>140</sup> M. Caner, M. Segev, S. Yiftah, « Energy spectra of secondary neutrons from the  $^{238}\text{U}(n, 2n)$  and  $(n, 3n)$  reactions », *Nuclear Science and Engineering* 59, 4, 1976, pp. 395-405, <https://doi.org/10.13182/NSE76-A26840>.

<sup>141</sup> G. R. Odette, « Energy Distribution of Neutrons from (n,2n) Reactions », *Transactions of the American Nuclear Society*, 15, 1, 1972, pp. 464-465.

<sup>142</sup> J. M. Blatt, V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics, op. cit.*, § 6 « The decay of the compound nucleus », pp. 365-379.

$$P_2(E, E_{n2}) = \frac{1}{I_1} \int_0^{E^{max}-E_{n2}} \frac{E_{n2} \exp\left(-\frac{E_{n2}}{T_2(\varepsilon)}\right) \varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_1}\right) d\varepsilon}{I_2(\varepsilon)}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq E^{max} \quad (14.14)$$

où :

$\varepsilon$  l'énergie du premier neutron émis ;

$$T_2(\varepsilon) = 3.22 \sqrt{\frac{E^{max} - \varepsilon}{A - 1}} \quad (14.15)$$

$$I_2(\varepsilon) = \theta_2^2(\varepsilon) \left[ 1 - \left( 1 + \frac{E^{max}}{T_2(\varepsilon)} \right) \exp\left(-\frac{E^{max}}{T_2(\varepsilon)}\right) \right] \quad (14.16)$$

La section efficace différentielle en énergie de production de neutrons par réaction (n, 2n) s'exprime comme :

$$\frac{d\sigma_{(n,2n)}(E, \varepsilon)}{d\varepsilon} = \sigma_{(n,2n)}(E) [P_1(E_n, \varepsilon) + P_2(E_n, \varepsilon)] \quad (14.17)$$

où :

- $\sigma_{(n,2n)}(E)$  la section efficace scalaire de la réaction (n, 2n) considérée induite par un neutron d'énergie cinétique  $E$  dans le référentiel du laboratoire ;
- $\varepsilon$  l'énergie des neutrons émis.

#### 14.2.2. Le modèle de Hauser-Feshbach de la diffusion inélastique des neutrons

Walter Hauser et Herman Feshbach<sup>143</sup> partent comme Weisskopf du modèle du noyau composé en ce qu'il suppose indépendants sa formation et le traitement des voies de sortie. À la différence de Weisskopf, ils appliquent cette hypothèse non pas globalement mais pour des valeurs fixées du moment angulaire et de la parité et reprennent explicitement le formalisme du noyau composé. Ils montrent que si le noyau composé est suffisamment excité, le modèle statistique s'applique non seulement au noyau composé mais également au noyau résiduel après émission d'un neutron, et que dans une telle situation les neutrons émis ont une distribution angulaire isotrope. L'anisotropie de la diffusion inélastique se manifeste lorsque peu de niveaux d'énergie sont excités.

#### 14.2.3. Les modèles de pré-équilibre

Ces modèles ont déjà été mentionnés dans le chapitre 6 (§ 3.1). Leur justification provient du fait que les deux seuls modèles du noyau composé et des réactions directes ne sont pas suffisants pour fournir des résultats en accord avec les observations expérimentales. Par exemple, la **figure 35** met en évidence, pour la réaction (p, xp) sur le fer 54, l'existence d'une région intermédiaire entre celle relative à l'émission de protons suite à la formation du noyau composé et celle de l'émission de protons par réactions directes.

<sup>143</sup> W. Hauser, H. Feshbach, « The inelastic scattering of neutrons », *Physical Review* Vol. 87, number 2, July 15, 1952, pp. 366-373, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.366>.

Cette constatation est également vraie pour les réactions  $(n, xn)$ . Les **modèles de pré-équilibre** permettent donc de déterminer les sections efficaces des réactions nucléaires induites par des neutrons susceptibles de se produire sur l'échelle de temps comprise approximativement entre  $10^{-19}$  s et  $10^{-14}$  s (voir figure 31). Plus précisément, il a été constaté que sans pré-équilibre on sous-estime la section efficace inélastique  $(n, n')$  à haute énergie, ce qui induit une surestimation des sections efficaces des réactions  $(n, 2n)$ ,  $(n, 3n)$ , etc.<sup>144</sup>

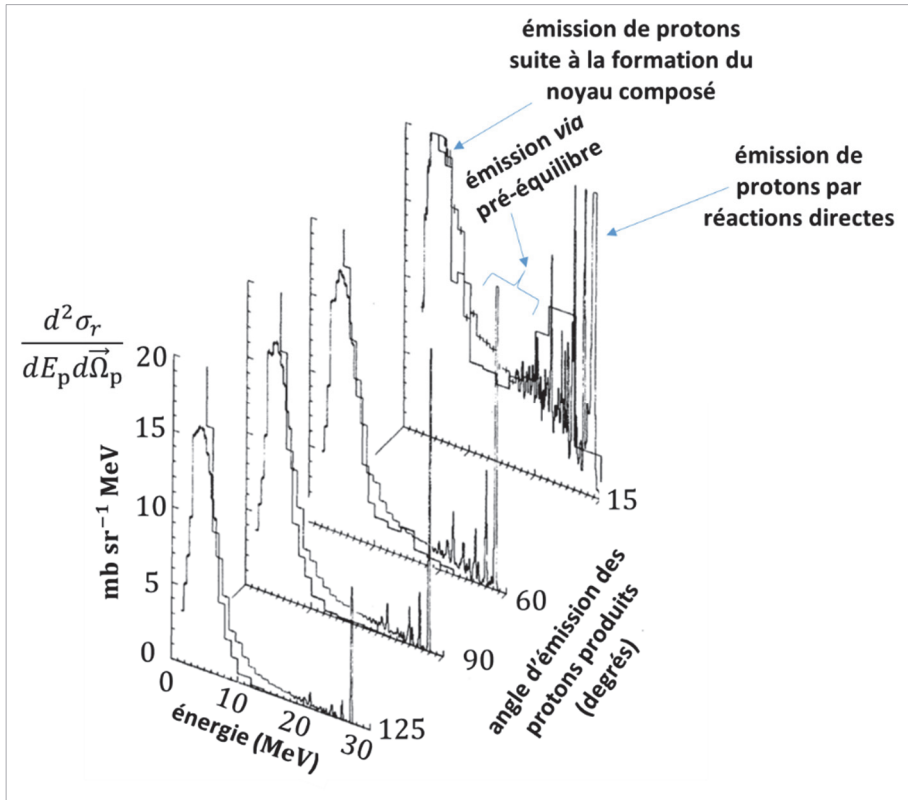


Figure 35. Section efficace doublement différentielle en angle et en énergie de la réaction induite par un proton d'énergie 28.8 MeV sur un noyau de fer 54 :  $^{54}\text{Fe}(p, xp)$  ; elle est exprimée en millibarn par stéradian et par MeV ( $\text{mb sr}^{-1} \text{MeV}$ ) pour différentes valeurs de l'angle de diffusion ( $15^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $125^\circ$ ).<sup>145</sup>

Dans le prolongement des modèles phénoménologiques statistiques et semi-classiques des « **excitons** » de J. J. Griffin et de M. Blann déjà cités, d'autres modèles ont été

<sup>144</sup> I. Lantuéjole, Étude expérimentale des mécanismes de pré-équilibre dans les réactions  $(n, xn)$ , Thèse de doctorat, Université de Caen, 2004, pp. 7-10.

<sup>145</sup> D'après F. E. Bertrand, R. W. Peelle, « Complete Hydrogen and Helium Particle Spectra from 30- to 60-MeV Proton Bombardment of Nuclei with  $A = 12$  to 209 and Comparison with the Intranuclear Cascade Model », *Physical Review C* 8, September 1, 1973, pp. 1045-1064, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.8.1045>

développés<sup>146</sup> soit pour les améliorer<sup>147</sup>, soit en adoptant une approche microscopique quantique, ce sont les **modèles de pré-équilibre quantiques**.<sup>148 149 150 151</sup>

Un exciton est défini comme une particule (neutron ou proton) se trouvant positionné sur un état excité (au-dessus du niveau de Fermi, voir chapitre 4) du noyau atomique considéré ou bien comme un trou, c'est-à-dire la lacune laissée par un nucléon transféré sur un état excité au-dessus du niveau de Fermi, ce que montre la **figure 36**.

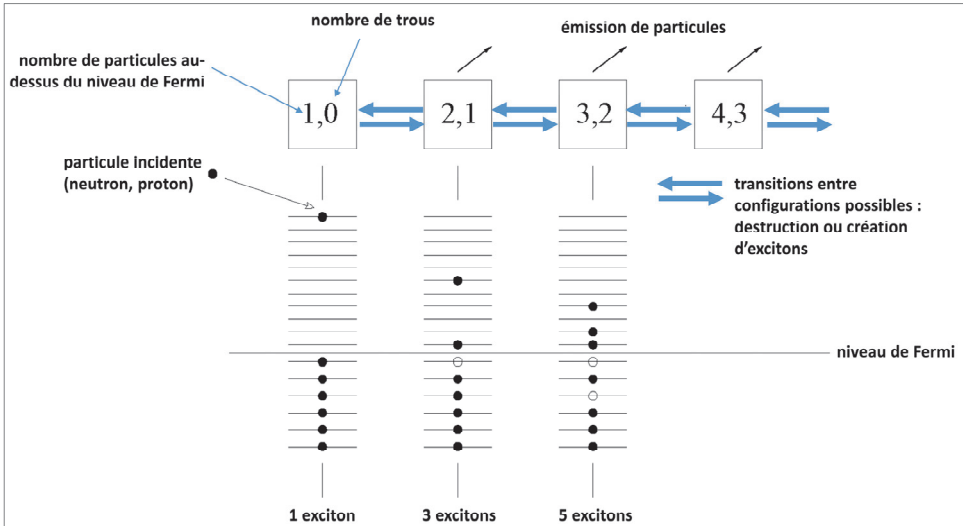


Figure 36. Modèle des excitons.<sup>152</sup>

La probabilité que le système ait  $n$  excitons à l'instant  $t$  satisfait une équation maîtresse qui fait intervenir les taux de transition entre configurations à  $n$  excitons et le taux d'émission d'une particule d'un état à  $n$  excitons. Les taux de transition sont déterminés par l'interaction forte résiduelle nucléon-nucléon, elle-même modélisée par une approche

<sup>146</sup> A. J. Koning, J. M. Akkermans, « Pre-equilibrium nuclear reactions: An introduction to classical and quantum-mechanical models », dans *Proceedings of the workshop on nuclear reaction data and nuclear reactors: Physics, design and safety*, 1999.

<sup>147</sup> A. J. Koning, M. C. Duijvestijn, « A global pre-equilibrium analysis from 7 to 200 MeV based on the optical model potential », *Nuclear Physics A* 744, 2004, pp. 15-76, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2004.08.013>.

<sup>148</sup> H. Feshbach, A. Kerman, S. Koonin, « The statistical theory of multi-step compound and direct reactions », *Annals of Physics* 125, 1980, pp. 429-476, [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(80\)90140-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(80)90140-2).

<sup>149</sup> A. J. Koning, M. B. Chadwick, « Microscopic two-component multistep direct theory for continuum nuclear reactions », *Physical Review C* 56, 1 August 1997, pp. 970-994, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.56.970>.

<sup>150</sup> M. Dupuis, S. Hilaire, S. Péru, E. Bauge, M. Kerveno, P. Dessagne, G. Henning, « Microscopic modeling of direct pre-equilibrium emission from neutron induced reactions on even and odd actinides », ND 2016: *International Conference on Nuclear Data for Science and Technology*, EPJ Web Conf. Volume 146, 2017, pp. 1-7, <https://doi.org/10.1051/epjconf/201714612002>.

<sup>151</sup> M. Dupuis, *Modèles de réactions directes et de pré-équilibre quantique pour la diffusion de nucléons sur des noyaux sphériques*, Thèse de doctorat, Université Sciences et Technologies de Bordeaux I, 2006.

<sup>152</sup> D'après I. Lantuéjole, *Étude expérimentale des mécanismes de pré-équilibre dans les réactions (n, xn)*, op. cit., p. 100.



phénoménologique. Les modèles de **modèles de pré-équilibre quantiques** ont pour objectif de remplacer l’approche phénoménologique par une **approche microscopique** dans son principe plus rigoureuse, dite *multistep* (« multi-étape »), qui fait apparaître deux composantes, la composante *multistep compound* (MSC) liée à la formation du noyau composé et la composante *multistep direct* (MSD) liée aux réactions directes.

Le terme *multistep* se réfère aux processus engendrant des configurations d’états excités particulières. Ainsi, par exemple pour une réaction inélastique (n, n’), les processus « une étape » (*one-step process*) correspondent à la création d’états {une particule – un trou}, un processus deux-étapes (*two-step process*) correspond à la création d’états {deux particules – deux trous}, etc.

Les **figures 37 et 38** montrent l’allure des sections efficaces différentielles en angle et en énergie résultant de la prise en compte du pré-équilibre.

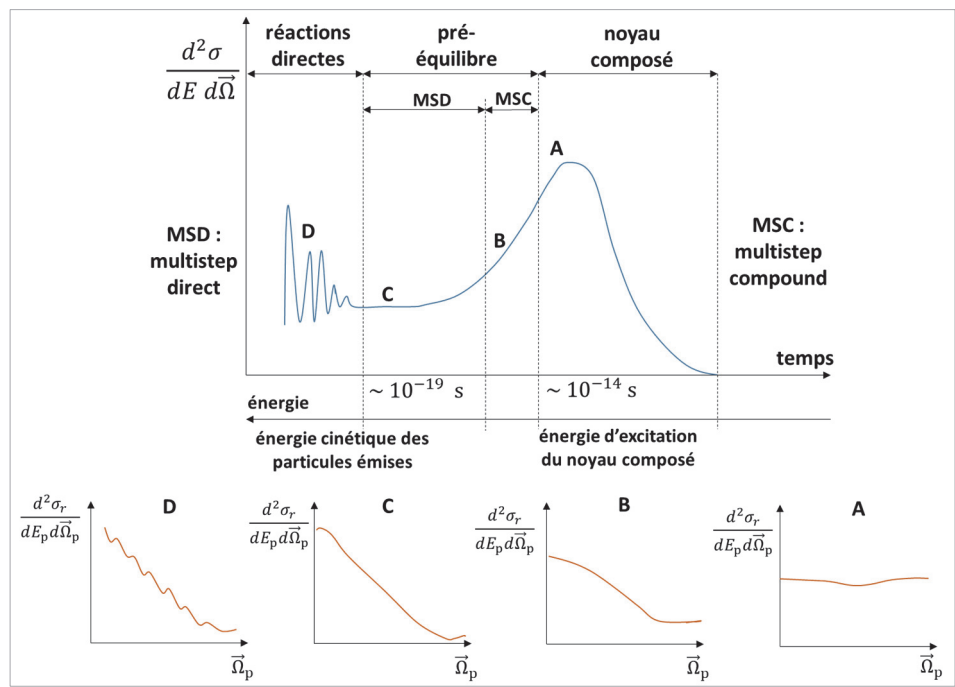


Figure 37. Allure des sections efficaces doublement différentielles de production de particules secondaires : la figure du haut se situe à une direction de diffusion donnée et celles du bas à une énergie donnée de la particule émise.<sup>153</sup>

Une autre approche microscopique introduit les informations relatives à la structure nucléaire en ayant recours à un modèle dénommé « *Quasi-particle Random Phase*

<sup>153</sup> D’après A. J. Koning, J. M. Akkermans, « Pre-equilibrium nuclear reactions: An introduction to classical and quantum-mechanical models », *op. cit.*

Approximation » (QRPA) (la « *Random Phase Approximation* (RPA)<sup>154</sup> simplifiant l'expression de l'hamiltonien du système physique étudié) et à l'interaction effective de Gogny caractérisant l'interaction nucléon-nucléon (déjà évoquée dans le chapitre 3).<sup>155</sup>

La **figure 39** en illustre l'application à la détermination de la section efficace doublement différentielle de la réaction nucléaire induite par un neutron d'une énergie cinétique de 9.1 MeV sur un noyau atomique cible « lourd ».

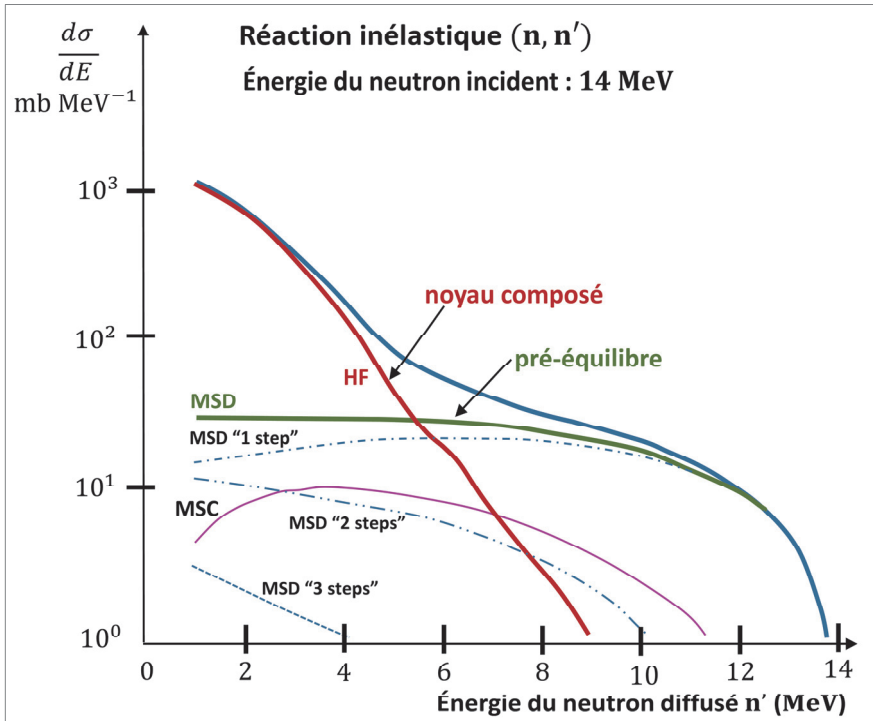


Figure 38. Allure de la section efficace différentielle en énergie de la réaction de diffusion inélastique (n, n') induite par un neutron de 14 MeV. Elle a été obtenue à l'aide du modèle « FKK » (« Feshbach-Kerman-Koonin », auteurs précédemment cités en note). Les différentes contributions y sont montrées : « HF » (Hauser-Feshbach) relative à l'émission d'un neutron par le noyau composé, « MSD » et « MSC » relatives à l'émission de neutrons durant la séquence de pré-équilibre ainsi que les sous-contributions *multistep* MSD 1, 2 et 3 associées.<sup>156</sup>

<sup>154</sup> La *Random Phase Approximation* a été initialement proposée par David Bohm et David Pine dans un article intitulé : « A collective description of electron interactions. I. Magnetic interactions », *Physical Review* 82, June 1, 1951, pp. 625-634, voir p. 628 ; <https://doi.org/10.1103/PhysRev.82.625>.

<sup>155</sup> M. Dupuis, S. Hilaire, S. Péru, E. Bauge, M. Kerveno, P. Dessagne, G. Henning, « Microscopic modeling of direct pre-equilibrium emission from neutron induced reactions on even and odd actinides », *op. cit.*

<sup>156</sup> M. B. Chadwick, P. G. Young, F. S. Dietrich, « Progress in applying the FKK multistep reaction theory to intermediate-energy data evaluation », dans *Intermediate Energy Nuclear Data: Models and Codes*, Proceedings of a Specialists' Meeting, NEA Nuclear Science Committee, Issy-Les-Moulineaux, France, 3 0 May-1 June 1994, pp. 67-77, [https://www.oecd-neia.org/science/iend.hide/iend\\_7.pdf](https://www.oecd-neia.org/science/iend.hide/iend_7.pdf) ; cet article montre les résultats obtenus pour les réactions inélastiques induites par des neutrons de 14 MeV sur le niobium 93 et l'argent 107, comparés à des mesures ; les réactions (p, xn) productrices de neutrons ou (p, xp) productrices de protons induites par un proton

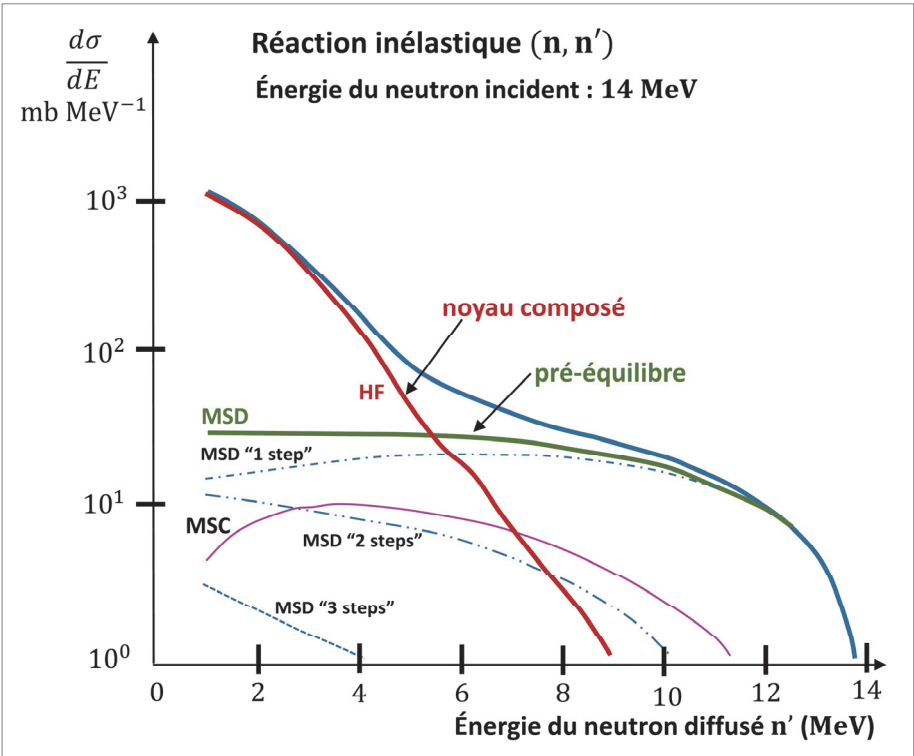


Figure 39. Allure de la section efficace doublement différentielle en angle et en énergie, dans une direction d'émission donnée (dans le référentiel du centre de masse) de la réaction (n, xn) obtenue en tenant compte de la phase de pré-équilibre traitée par le formalisme « QRPA » (*Quasi-particle Random Phase Approximation*) ; l'émission de neutrons par le noyau composé est traitée par le formalisme de Hauser-Feshbach et l'émission de neutrons par fission par l'un des formalismes présentés dans le chapitre 9 (« Madland-Nix » par exemple).<sup>157</sup>

d'énergie élevée (80, 160 MeV) sur du zirconium 90, les réactions (n, xp) et (n, xα) sur le carbone 12, à énergie élevée du neutron incident (60 MeV), y sont également étudiées.

<sup>157</sup> M. Dupuis, S. Hilaire, S. Péru, E. Bauge, M. Kerveno, P. Dessagne, G. Henning, « Microscopic modeling of direct pre-equilibrium emission from neutron induced reactions on even and odd actinides », *op. cit.* : dans cet article sont étudiées les réactions (n, xn) sur l'uranium 238, le plutonium 239, le plomb 208, les réactions (n, n') sur le plomb 208 et l'uranium 238, la réaction (n, 2n) sur le plutonium 239.

## 15. Expression générale de la production de particules secondaires

Les problèmes liés à la propagation des neutrons dans la matière que l'on est conduit à traiter nécessitent de connaître les sections efficaces qui fournissent les caractéristiques associées aux particules secondaires produites autres que le neutron diffusé, qu'il s'agisse de photons ou de particules chargées.

Dans le référentiel du laboratoire, pour un neutron incident d'énergie cinétique  $E_n$ , se propageant selon une direction  $\vec{\Omega}_n$  et interagissant avec un noyau atomique cible donné, une section efficace différentielle de production de particules secondaires relative à une réaction nucléaire induite,  $r$ , a la forme suivante :

$$\sigma_r(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_p, \vec{\Omega}_p) \equiv \frac{d^2 \sigma_r}{dE_p d\vec{\Omega}_p} = \sigma_r(E_n) y_{r,p}(E_n) f_{r,p}(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_p, \vec{\Omega}_p) \quad \text{part cm}^2 \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1} \quad (15.1)$$

où :

- $E_p$  est l'énergie cinétique de ou des particules de type  $p$  produites ;
- $\vec{\Omega}_p$  est la direction de la particule  $p$  émise ;
- $\sigma_r(E_n)$  est la section efficace scalaire de la réaction  $r$  induite par un neutron d'énergie  $E_n$  ;
- $y_{r,p}(E_n)$  est la « multiplicité » des particules de type  $p$  produites pour un neutron incident d'énergie  $E_n$  ;
- $f_{r,p}(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_p, \vec{\Omega}_p)$  est la distribution énergétique et angulaire normalisée à l'unité relative aux particules de type  $p$  émises :

$$\int_{E_p} dE_p \int_{\vec{\Omega}_p} f_{r,p}(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_p, \vec{\Omega}_p) d\vec{\Omega}_p = 1 \quad (15.2)$$

On a donc :

$$y_{r,p}(E_n) = \frac{\int dE_p \int \sigma_r(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_p, \vec{\Omega}_p) d\vec{\Omega}_p}{\sigma_r(E_n)} \quad (15.3)$$

Dans les applications rencontrées en physique des réacteurs, trois types de sections efficaces de cette nature ou de nature voisine tiennent une place particulière : les sections efficaces de production de multiples neutrons (hors fission)  $(n, xn)$  déjà évoquées, les sections efficaces de production gamma, et les sections efficaces de KERMA (énergie cédée à la matière par unité de masse) et de production de dommages (défauts, déplacements d'atomes). Les aspects cinématiques de ces réactions ont déjà été abordés dans le chapitre 7.

### 15.1. Section efficace de production de gamma

La section efficace totale de production de gamma s'obtient en sommant les sections efficaces de production gamma relatives à chacune des réactions susceptibles de se produire :  $r = (n, \gamma), (n, n'\gamma), (n, p), (n, \alpha), \text{ etc.}$

$$\begin{aligned}\sigma_{p\gamma}(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_\gamma, \vec{\Omega}_\gamma) &= \sum_r \sigma_r(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_\gamma, \vec{\Omega}_\gamma) \\ &= \sum_r \sigma_r(E_n) y_{r,\gamma}(E_n) f_{r,\gamma}(E_n, \vec{\Omega}_n \rightarrow E_\gamma, \vec{\Omega}_\gamma)\end{aligned}\quad (15.4)$$

Dans la pratique, on distingue le cas des niveaux discrets de celui du continuum (voir **figure 40**).

À titre illustratif, on considère un neutron d'énergie  $E_n$  qui interagit avec noyau atomique *via* une diffusion inélastique. On désigne par  $m_0$  le niveau d'énergie du noyau atomique qui a été initialement excité par le neutron incident et par  $j \rightarrow i$  une transition gamma entre un niveau d'énergie  $j \leq m_0$  et un niveau d'énergie  $i$  inférieur (voir le schéma de la **figure 40**). Si l'on s'intéresse à la production gamma en énergie (on suppose que l'intégration en angle a été faite ou bien que la diffusion est isotrope), la section efficace différentielle en énergie de production gamma s'écrit<sup>158</sup> :

$$\frac{d\sigma(E_n, E_\gamma, m_0, i, j)}{dE_\gamma} = \delta[E_\gamma - (\epsilon_j - \epsilon_i)] \Lambda_{j,i} \sigma_{m_0}(E_n) \sum_{\eta=1}^{m_0-j} H_{m_0 j \eta} \quad (15.5)$$

avec :

- $\sigma_{m_0}(E_n)$  la section efficace d'excitation du niveau d'énergie  $m_0$  par un neutron incident d'énergie  $E_n$  ;
- $\delta[E_\gamma - (\epsilon_j - \epsilon_i)]$  la distribution de Dirac correspondant à l'émission discrète d'un photon d'énergie  $E_\gamma = (\epsilon_j - \epsilon_i)$  relative à la transition du niveau d'énergie  $j$  vers le niveau d'énergie  $i$  ;
- $\Lambda_{j,i}$  le rapport de branchement ou probabilité de la transition  $j \rightarrow i$  pour  $j$  fixé ;
- $H_{m_0 j \eta}$  la probabilité qu'a le noyau atomique considéré excité au niveau  $m_0$  de se désexciter vers le niveau  $j$  en  $\eta$  transitions de 1 à  $m_0 - j$  :

$$H_{m_0 j \eta} = \sum_{m_1=\eta+(j-1)}^{m_0-1} \sum_{m_2=\eta+(j-2)}^{m_1-1} \dots \sum_{m_{\eta-1}=j+1}^{m_{\eta-2}-1} \sum_{m_\eta}^j \prod_{l=1}^{\eta} T_{m_{l-1} m_l} \quad (15.6)$$

<sup>158</sup> A. Trkov, M. Herman, D. A. Brown, *ENDF-6 Formats Manual, Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII*, CSEWG Document ENDF-102, Report BNL-90365-2009 Rev.2, October 24, 2012, p. 177.

$T_{m_{l-1}m_l} \equiv T_{kl}$  : est la probabilité du noyau atomique résiduel d'avoir une transition vers le niveau d'énergie  $l$  à partir d'un niveau d'excitation  $k$  (rapport de branchement vers le niveau  $l$ , le niveau  $k$  étant fixé).

Par sommation sur tous les niveaux discrets excitables, on obtient la section efficace de production gamma totale relativement à l'ensemble de ces niveaux d'énergie discrets :

$$\frac{d\sigma(E_n, E_\gamma)}{dE_\gamma} = \sum_{m_0}^N \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{i=1}^{l < j} \frac{d\sigma(E_n, E_\gamma, m_0, i, j)}{dE_\gamma} \quad (15.7)$$

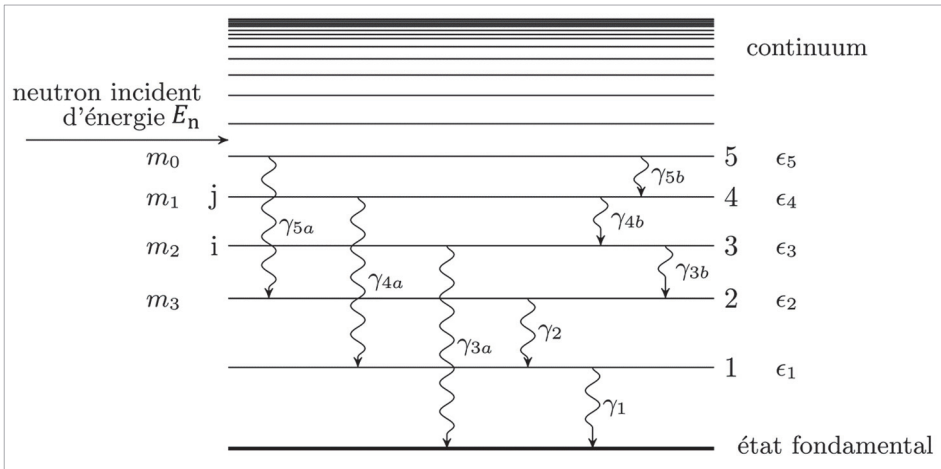


Figure 40. Niveaux d'énergie excités illustrant les réactions de production gamma<sup>159</sup> ; ces multiples cascades de désexcitation renvoient à l'« effet Pandemonium » déjà évoqué dans le cas de la désintégration bêta dans le chapitre 5. Les transitions multipolaires électriques et magnétiques d'un état nucléaire à un autre ont été étudiées par V. F. Weisskopf<sup>160</sup> (voir aussi chapitre 5 § 6.5).

Les sections efficaces et les spectres en énergie des gamma sont variables selon l'énergie du neutron incident, la nature des nucléides et les types d'interaction : diffusion inélastique ( $n, n'\gamma$ ), capture radiative ( $n, \gamma$ ), réactions d'activation ( $n, p$ ), ( $n, \alpha$ ), fission. Ces informations sont fournies par les bases de données nucléaires (voir chapitre 13). Ainsi par exemple en règle générale, le spectre des gamma résultant d'une capture radiative est plus dur que celui des gamma émis par diffusion inélastique ou par réaction d'activation émettrice. Cela se comprend aisément si l'on se réfère à la valeur d'environ 6 à 8 MeV de l'énergie de liaison par nucléon. Dans certains cas, l'énergie de gamma de capture radiative atteint plus de 11 MeV : exemple de la capture radiative sur le bore 10 susceptible d'émettre un photon gamma de 11.4 MeV mais avec une intensité très faible de  $\sim 0.008$ . Le nombre

<sup>159</sup> D'après A. Trkov, M. Herman, D. A. Brown, *ENDF-6 Formats Manual, Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data Files ENDF/B-VI and ENDF/B-VII*, op. cit., p. 178, figure 11.1.

<sup>160</sup> V. F. Weisskopf, « Radiative Transition Probabilities in Nuclei », *Physical Review* 83, September 1, 1951, p. 1073, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.83.1073>

moyen de gamma émis par capture radiative varie approximativement de 1 à 8 en fonction du nucléide formé, avec une tendance à prendre des valeurs plus élevées lorsque le numéro atomique est plus grand. Les gamma produits par des diffusions inélastiques ont une énergie moyenne de l'ordre de 1.2 MeV. Dans les bases de données, ces spectres de gamma émis sont renseignés par isotope de la manière la plus complète et la plus précise possible (voir chapitre 13).

## 15.2. Section efficace de KERMA

On considère une réaction de type  $j$  sur un nucléide de type  $i$  du milieu irradié par des neutrons d'énergie  $E_n$ . Dans le domaine d'énergie usuellement considéré ici, l'**énergie cédée localement** au milieu au cours de cette réaction est la **somme des énergies cinétiques des particules chargées impliquées**, dont la nature est repérée par l'indice  $\ell$  (le noyau atomique de recul en fait partie), au vu de la petitesse de leurs parcours dans la matière (excepté dans les milieux peu denses).

La section efficace d'énergie déposée localement ou **section efficace microscopique (par atome) de KERMA** (*kinetics energy released per unit mass in matter*)<sup>161</sup> est donnée par la relation :

$$k_{ij}(E_n) = \sum_{\ell} \bar{W}_{ij\ell}(E_n) \sigma_{ij}(E_n) \quad \text{eV cm}^2 \text{ ou eV b} \quad (15.8)$$

où :

- $\sigma_{ij}(E_n)$  est la section efficace de la réaction de type  $j$  sur un nucléide de type  $i$  induite par un neutron d'énergie cinétique  $E_n$  ;
- $\bar{W}_{ij\ell}(E_n)$  est l'énergie cinétique moyenne des particules chargées  $\ell$  résultant de la réaction nucléaire considérée.

La section efficace microscopique de KERMA peut être également déterminée par un **bilan d'énergie** établi en soustrayant de l'énergie globale disponible avant la réaction les énergies cinétiques moyennes des particules neutres émises lors de la réaction, c'est-à-dire des neutrons et des photons (qui du fait de leur neutralité ne déposent pas sur place (localement) leurs énergies cinétiques acquises respectives) :

$$k_{ij}(E_n) = [E_n + Q_{ij} - \bar{W}_{ijn}(E_n) - \bar{W}_{ij\gamma}(E_n)] \sigma_{ij}(E_n) \quad \text{eV cm}^2 \text{ ou eV b} \quad (15.9)$$

avec :

- $Q_{ij}$  : énergie disponible de la réaction nucléaire  $j$  induite par le neutron incident sur le nucléide  $i$  ;

<sup>161</sup> H. Métivier (Coordinateur), *Radioprotection et ingénierie nucléaire*, Paris, INSTN-EDPSciences, 2006, pp. 79-82.

- $\bar{W}_{ijn}(E_n)$  : énergie cinétique moyenne des particules chargées émises, incluant le noyau de recul ;
- $\bar{W}_{ij\gamma}(E_n)$  : énergie moyenne des photons émis.

La **figure 41** montre la variation comparée des sections efficaces de KERMA des neutrons et des photons en fonction de leur énergie dans le cas du graphite.

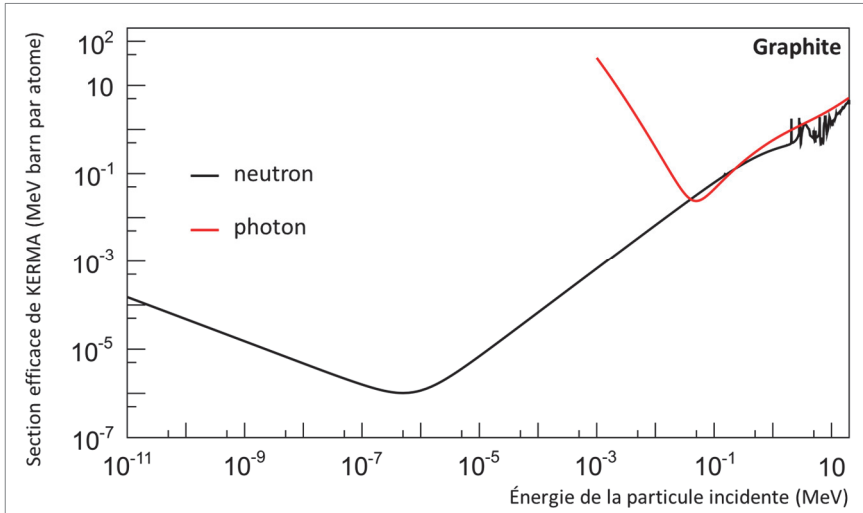


Figure 41. Sections efficaces microscopiques (par atome) de KERMA (en MeV b) des neutrons et des photons en fonction de leurs énergies cinétiques d'incidence dans du graphite (la section efficace microscopique de KERMA pour les photons est définie au chapitre 11 paragraphe 8).

### 15.3. Section efficace de dommages

Des dommages dans les matériaux sont par exemple engendrés par des neutrons dont l'énergie est suffisante pour déplacer les atomes avec lesquels ils sont entrés en collision, créant le cas échéant des sites atomiques vacants au sein du réseau cristallin.<sup>162 163 164 165</sup>

Le réseau cristallin du matériau irradié s'en trouve déformé et fragilisé. Les conséquences d'une irradiation neutronique dans un matériau se manifestent donc par l'apparition de « **défauts ponctuels** », de « **dommages** ».<sup>166</sup> Leur nombre dépend de l'énergie cinétique

<sup>162</sup> C. Lemaignan, *Science des matériaux pour le nucléaire*, Les Ulis, EDP Sciences CEA/INSTN, 2003.

<sup>163</sup> J.-Ch. Sublet *et al.*, « Neutron-induced damage simulations: Beyond defect production cross-section, displacement per atom and iron-based metrics », *Eur. Phys. J. Plus* 134:350, 2019, <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12758-y>.

<sup>164</sup> S. Chen, Improved models for predicting irradiation damage with uncertainty estimates from nuclear reactions, Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, Septembre 2020.

<sup>165</sup> S. Chen, D. Bernard, P. Tamagno, J. Tommasi, S. Bourganel, G. Noguère, C. De Saint Jean, « Calculation and verification of neutron irradiation damage with differential cross sections », *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research B* 456, 2019, pp. 120-132, <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2019.07.011>.

<sup>166</sup> A. Gentils, C. Cabet, « Investigating radiation damage in nuclear energy materials using JANNuS multiple ion beams », *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research B* 447, 2019, 107-112, <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2019.03.039>.



des **atomes primaires choqués** que l'on dénomme dans la littérature **PKA** pour *Primary Knocked Atoms*<sup>167 168</sup>, qui à leur tour vont bousculer d'autres atomes de l'édifice moléculaire ou cristallin, comme le montre la **figure 42**.

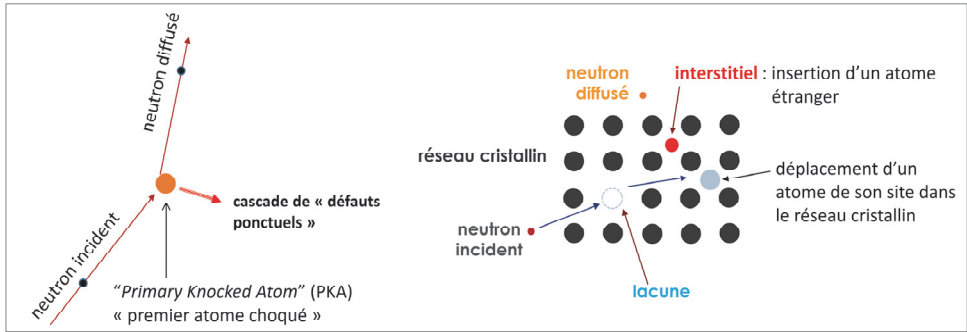


Figure 42. « Défauts ponctuels » engendrés dans un matériau par un neutron<sup>169 170</sup> ; on appelle « **paire de Frenkel** » le couple constitué de la lacune due à l'éjection de l'atome de son site d'origine et de cet atome qui se relocalise en position interstitielle au sein du réseau cristallin. Un neutron produit une cascade de déplacements d'atomes dont certains reviennent dans leur position initiale et d'autres non ; les cascades de déplacements d'atomes sont des phénomènes complexes se déroulant sur des échelles de temps très courtes, de l'ordre de la picoseconde ( $10^{-12}$  s) ; elles font l'objet de recherches relevant de la science des matériaux sous irradiation.<sup>171</sup>

On désigne par  $\nu(\mathcal{E})$  le nombre de défauts engendrés dans un matériau donné par un PKA d'énergie cinétique  $\mathcal{E}$ , et par  $g_{i,j}(E_n, \mathcal{E})$  le spectre en énergie des PKA relatifs à un neutron incident d'énergie cinétique  $\mathcal{E}$  ayant provoqué la réaction  $j$  (diffusion élastique, diffusion inélastique, autres réactions) sur un nucléide de type  $i$  du milieu traversé ; on note  $\sigma_{ij}(E_n)$  la section efficace de cette réaction. Ainsi, si  $\nu(\mathcal{E})$  se rapporte aux défauts de type déplacement d'atomes, on peut alors définir une section efficace microscopique de production de déplacements ou **section efficace microscopique (par atome) de déplacements par atome (dpa)** par la relation suivante :

<sup>167</sup> Mark T. Robinson, « Basic physics of radiation damage production », *Journal of Nuclear Materials*, Vol. 216, 1994, pp. 1-28, [https://doi.org/10.1016/0022-3115\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0022-3115(94)90003-5) ; L. R. Greenwood, « Neutron interactions and atomic recoil spectra », id., pp. 29-44, [https://doi.org/10.1016/0022-3115\(94\)90004-3](https://doi.org/10.1016/0022-3115(94)90004-3).

<sup>168</sup> M. R. Gilbert, J. Marian, J.-Ch. Sublet, « Energy spectra of primary knock-on atoms under neutron irradiation », *Journal of Nuclear Materials*, Vol. 467, Part 1, December 2015, pp. 121-134, <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2015.09.023>.

<sup>169</sup> J.-L. Boutard, B. Bonin, C. Cappelaere, *Introduction*, dans *Les matériaux du nucléaire Modélisation et simulation des matériaux de structure*, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions Le Moniteur/CEA, 2016, p. 15. <https://www.cea.fr/multimedia/Pages/editions/ouvrages/monographies-nucleaire/materiaux-nucleaire-modelisation-simulation.aspx>.

<sup>170</sup> F. Malouch, *Accroissement local du flux rapide pour des expériences de dommages dans un réacteur de recherche*, Thèse de doctorat, Paris CNAM, 2003, p. 23, figure 1.1.

<sup>171</sup> Voir par exemple : L. Luneville, D. Simeone, W. J. Weber, « Study of the fragmentation of a displacement cascade into subcascades within the Binary Collision Approximation framework », *Journal of Nuclear Materials* 415, 2011, pp. 55-60, <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2011.05.039>.

$$\sigma_i^{dpa}(E_n) = \sum_j \sigma_{ij}(E_n) \int_0^{\mathcal{E}_{max}} g_{ij}(E_n, \mathcal{E}) v(\mathcal{E}) d\mathcal{E} \quad \text{dpa cm}^2 \text{ (barn)} \quad (15.10)$$

la section efficace différentielle en énergie de l'atome (ou noyau atomique) de recul étant :

$$\frac{d\sigma^{pka}}{d\mathcal{E}} \equiv \sigma^{pka}(E_n, \mathcal{E}) \equiv \sigma_{ij}(E_n) g_{ij}(E_n, \mathcal{E}) \quad \text{cm}^2 \text{ (barn) MeV}^{-1} \text{ atome}^{-1} \quad (15.11)$$

où  $g_{ij}(E_n, \mathcal{E})$  est la densité de probabilité de transfert en énergie du neutron incident au noyau de recul (PKA) relativement au nucléide  $i$  et à la réaction nucléaire  $j$  sur ce nucléide.

La connaissance de  $v(\mathcal{E})$  relève de la science des matériaux soumis à des irradiations. Comme indiqué dans le chapitre 14 (annexe I), et à l'instar des autres grandeurs physiques dérivées du flux, la convolution de la section efficace  $\sigma_i^{dpa}(E_n)$  avec un flux de neutrons fournit le **nombre de dpa** engendrés par unité de volume et par unité de temps<sup>172</sup>. La **figure 43** montre un exemple de spectre en énergie ( $g_{ij}(E_n, \mathcal{E})$  ( $E_n = 14 \text{ MeV}$ ,  $i : {}^{58}\text{Ni}$ ,  $j$  : réaction de diffusion inélastique continue) de l'atome de recul après interaction avec un neutron.

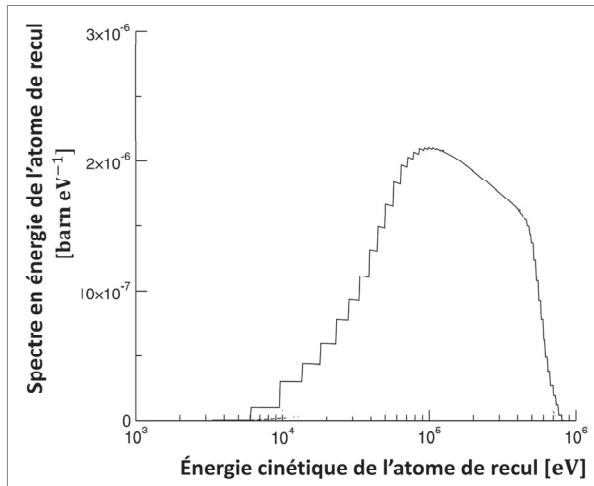


Figure 43. Spectre en énergie (barn eV<sup>-1</sup>) de l'atome de recul relatif à l'interaction d'un neutron d'énergie 14 MeV sur une cible de nickel 58, dans le domaine du continuum (réaction de diffusion inélastique continue), déterminé à partir des données nucléaires issues de l'évaluation américaine « ENDF/B6-r8 ».<sup>173</sup>

<sup>174</sup>

<sup>172</sup> M. R. Gilbert, J.-Ch. Sublet, « Differential dpa calculations with SPECTRA-PKA », *Journal of Nuclear Materials*, Vol. 504, June 2018, pp. 101-108, <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2018.03.032>.

<sup>173</sup> L. Luneville, D. Simeone, D. Gosset, « A new tool to compare neutron and ion irradiation in materials », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B* 250, 2006, pp. 71-75, figure 2, p. 72, <https://doi.org/10.1016/j.nimb.2006.04.084>.

<sup>174</sup> Voir aussi pour d'autres exemples avec d'autres évaluations de données nucléaires : De A. Konobeev *et al.*, EFFDOC-1180, Nov. 2012 : <https://www-nds.iaea.org/CRPdpa/> ; R.E. Stoller, L.R. Greenwood, S.P. Simakov,

Les **figures 44 et 45** montrent l'allure de sections efficaces de déplacement par atome ( $\sigma_i^{dpa}(E_n)$ ).

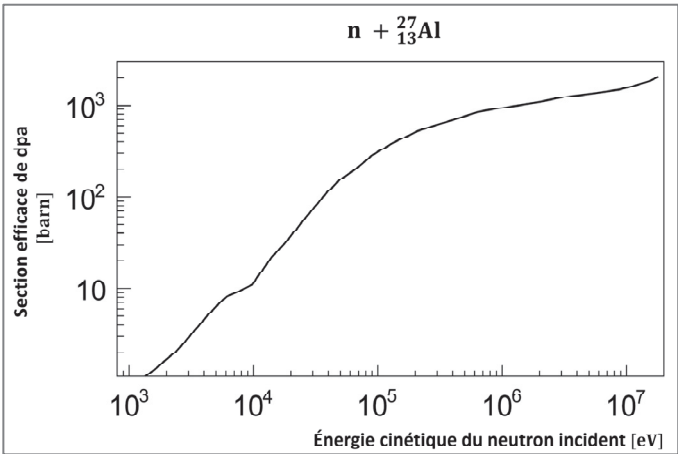


Figure 44. Sections efficaces microscopiques neutroniques de déplacements par atome dans l'aluminium <sup>27,175</sup>

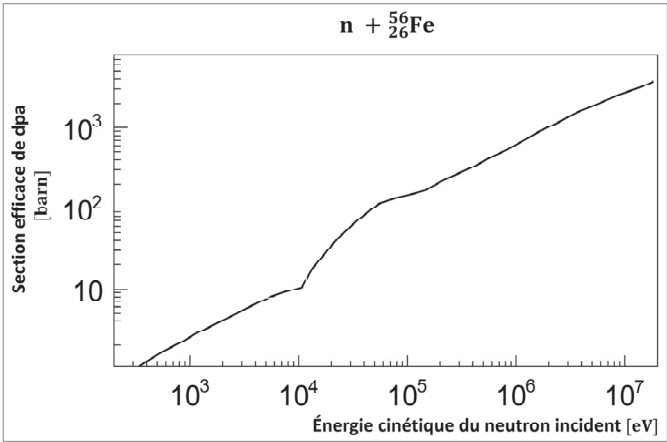


Figure 45. Sections efficaces microscopiques neutroniques de déplacements par atome dans le fer <sup>56,176</sup>

**Remarque**

La quantité  $\nu(\mathcal{E})$  n'est généralement pas bien connue ou accessible pour la raison déjà évoquée de la difficulté à simuler rigoureusement le phénomène complexe de la cascade de défauts engendrée par les PKA. Pour déterminer le nombre de déplacements par atome, les modèles s'appuient alors sur

Summary Report of the First Research Coordination Meeting on Primary Radiation Damage Cross Sections, IAEA Headquarters, Vienna, Austria, 4 – 8 November 2013, INDC(NDS)-0648, December 2013.

<sup>175</sup> D'après F. Malouch, *op. cit.*, p. 26, figure 1.4.

<sup>176</sup> *Ibid.*

l'énergie de dommage (*damage energy*),  $\mathcal{E}_d$ , définie comme la fraction de l'énergie  $\mathcal{E}$  qui provoque des dommages<sup>177</sup>. On définit alors une section efficace microscopique d'énergie de dommages :

$$\sigma_i^d(E_n) = \sum_j \int_{\mathcal{E}_{d,max}}^{\mathcal{E}_{d,max}} \sigma_{ij}(E_n, \mathcal{E}_d) \mathcal{E}_d d\mathcal{E}_d \qquad \text{cm}^2 \text{ MeV}^{-1} \text{ atome}^{-1} \qquad (15.12)$$

où  $\sigma_{ij}(E_n, \mathcal{E}_d)$  représente la section efficace différentielle de transfert d'énergie de  $E_n$  à  $\mathcal{E}_d$  qui se déduit de (15.11). En désignant par  $F(E_n)$  la fluence neutronique (neutrons  $\text{cm}^{-2} \text{ MeV}^{-1}$ ) qui représente l'intégrale du flux de neutron sur une durée d'irradiation donnée et à l'énergie  $E_n$ , l'énergie correspondante  $E_T$  transférée au réseau cristallin en supposant celui-ci monoatomique (on fait abstraction de l'indice  $i$ ) s'écrit :

$$E_T = \int_{E_{n,min}}^{E_{n,max}} \sigma^d(E_n) F(E_n) dE_n \qquad (15.13)$$

En appliquant par exemple le formalisme dit **NRT** (du nom de ses auteurs : Norgett, Robinson et Torrens<sup>178</sup>), le nombre approximatif de déplacements par atome,  $N_{dpa}$ , est obtenu par l'expression simple suivante :

$$N_{dpa} = \frac{E_T}{2E_d} \qquad (15.14)$$

où  $E_d$  est une énergie seuil (connue) de déplacement d'un atome de son site et en supposant que sur une collision sur deux l'énergie transférée est inférieure à l'énergie de seuil  $E_d$  dont des valeurs sont données dans le tableau 23.

**Tableau 23. Valeurs de l'énergie seuil de déplacement d'un atome de son site dans un réseau cristallin (voir figure 42).**

Matériau	$E_d$ eV	Matériau	$E_d$ eV	Matériau	$E_d$ eV
Aluminium	33,8	Titane	37,5	Tantale	68
Cuivre	37,5	Vanadium	50	Niobium	75
Acier	50,33				

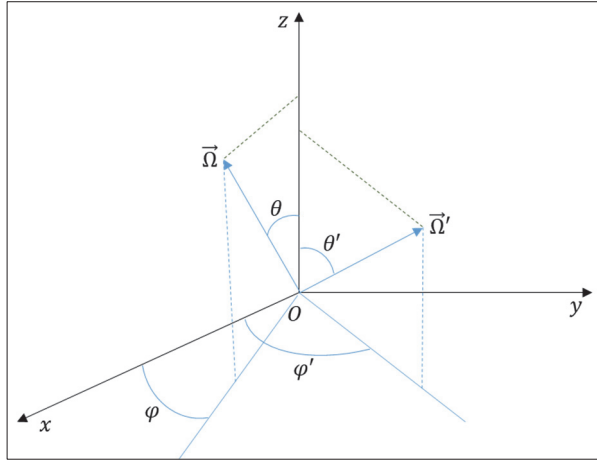
On notera enfin que le nombre de dpa dépend aussi du spectre en énergie du flux des neutrons incidents sur le matériau considéré.

<sup>177</sup> Voir F. Malouch, Accroissement local du flux rapide pour des expériences de dommages dans un réacteur de recherche, *op. cit.*, pp. 22-35.

<sup>178</sup> M. J. Norgett, M. T. Robinson, I. M. Torrens, *Une méthode de calcul du nombre de déplacements atomiques dans les métaux irradiés*, rapport CEA-R-4389, 1972 ; voir aussi le modèle original : G.H. Kinchin, R.S. Pease, « The Displacement of Atoms in Solids by Radiation », *Reports on Progress in Physics*, Vol. 18, 1955, pp. 1-51, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0034-4885/18/1/301> ; S. Chen, D. Bernard, « On the calculation of atomic displacements using damage energy », *Results in Physics*, Vol. 16, March 2020, 102835, <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2019.102835>.

## Annexe I : produit scalaire de deux vecteurs unitaires en coordonnées sphériques

On considère un neutron qui, par diffusion sur un noyau atomique, passe de l'énergie  $E'$  à l'énergie  $E$  et de la direction  $\vec{\Omega}'$  à la direction  $\vec{\Omega}$ . En se plaçant en coordonnées sphériques, la direction d'incidence  $\vec{\Omega}'$  est repérée par deux angles  $\theta'$  et  $\varphi'$ , la direction de diffusion  $\vec{\Omega}$  par les deux angles  $\theta$  et  $\varphi$ , ainsi que le montre la **figure 49**.



**Figure 49.** Représentation en coordonnées sphériques des vecteurs unitaires  $\vec{\Omega}'$  et  $\vec{\Omega}$  spécifiant respectivement les directions du neutron avant et après diffusion.

On pose :  $\mu' = \cos \theta'$  et  $\mu = \cos \theta$

Il en résulte les composantes suivantes des directions  $\vec{\Omega}'$  et  $\vec{\Omega}$  ainsi que l'expression de leur produit scalaire :

$$\vec{\Omega}' = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos \varphi' \\ \sqrt{1 - \mu'^2} \sin \varphi' \\ \mu' \end{pmatrix} \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi \\ \sqrt{1 - \mu^2} \sin \varphi \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' = \mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \cos(\varphi - \varphi')$$

Par commodité, dans les situations qui s'y prêtent, l'une des directions est prise confondue avec l'un des axes du référentiel considéré. Par exemple, si  $\vec{\Omega}'$  est la direction d'incidence d'une particule sur un noyau atomique cible, on pourra faire le choix de confondre  $\vec{\Omega}'$  avec la direction de l'axe Oz, ce qui revient à faire  $\varphi' = 0$  et  $\mu' = 1$ , et prendre  $(0, 0, 1)$  comme composantes du vecteur  $\vec{\Omega}'$ .

## Annexe II : détermination des énergies moyennes après collision du neutron diffusé et du noyau de recul

Connaissant la **loi d'anisotropie de la diffusion** du neutron dans le référentiel du centre de masse ou bien dans celui du laboratoire, on peut en déduire l'énergie moyenne du neutron,  $\bar{E}'$ , après diffusion tout comme celle,  $\bar{E}_N$ , du noyau atomique cible de recul dans le référentiel du laboratoire (se reporter au chapitre 7 : au paragraphe 4 pour les expressions de l'énergie cinétique des neutrons, et à l'annexe III pour celles se rapportant au noyau de recul ; les conventions de notations des énergies et des directions avant et après choc sont celles du paragraphe § 1.5).<sup>179</sup>

### 1. Cas de la diffusion élastique

Dans le cas de la diffusion élastique d'un neutron d'énergie cinétique initiale  $E$  dans le référentiel du laboratoire, l'énergie moyenne  $\bar{E}'$  de ce neutron après diffusion s'écrit :

$$\bar{E}' = \int_{-1}^{+1} E \frac{1 + 2A\mu_c + A^2}{(1 + A)^2} h_c(\mu_c) d\mu_c \quad (\text{II} - 1)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}' &= E \left[ \frac{1 + A^2}{(1 + A)^2} \int_{-1}^{+1} h_c(\mu_c) d\mu_c + \frac{2A}{(1 + A)^2} \int_{-1}^{+1} \mu_c h_c(\mu_c) d\mu_c \right] \\ \bar{E}' &= E \left[ \frac{1 + A^2}{(1 + A)^2} + \frac{2A}{(1 + A)^2} \bar{\mu}_c \right] \end{aligned} \quad (\text{II} - 2)$$

en observant que par définition  $\int_{-1}^{+1} h_c(\mu_c) d\mu_c = 1$  et que  $\bar{\mu}_c = \int_{-1}^{+1} \mu_c h_c(\mu_c) d\mu_c$ .

De manière similaire, l'énergie cinétique moyenne de l'atome (ou noyau atomique) cible de recul s'écrit :

$$\bar{E}_N = \int_{-1}^{+1} E \frac{2A[1 - \mu_c]}{(1 + A)^2} h_c(\mu_c) d\mu_c = E \frac{2A[1 - \bar{\mu}_c]}{(1 + A)^2} \quad (\text{II} - 3)$$

Si le **choc** est **isotrope** dans le référentiel du centre de masse, on a  $\bar{\mu}_c = 0$  et les énergies moyennes respectives du neutron et du noyau atomique après collision ont pour expression :

$$\bar{E}' = E \frac{1 + A^2}{(1 + A)^2}, \bar{E}_N = E \frac{2A}{(1 + A)^2} \quad (\text{II} - 4)$$

<sup>179</sup> C. Devillers, *Cours de radioprotection*, Chapitre 5 – « Transport des neutrons et des photons », 1977.

Dans le cas du choc du neutron sur l'hydrogène ( $A \approx 1$ ) les relations (II - 4) deviennent :

$$\bar{E}' = \frac{E}{2} ; \bar{E}_N = \frac{E}{2} \quad (\text{II} - 5)$$

## 2. Cas de la diffusion inélastique discrète

Dans le cas de la **diffusion inélastique discrète**, l'énergie cinétique moyenne  $\bar{E}'_i$  d'un neutron émis suite à une diffusion inélastique laissant le noyau atomique dans un état excité  $E_i^*$  s'écrit :

$$\bar{E}'_i = \int_{-1}^{+1} \left[ E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \mu_c + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_i^* \right] h_c(\mu_c) d\mu_c \quad (\text{II} - 6)$$

$$\bar{E}'_i = E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{\mu}_c + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_i^* \quad (\text{II} - 7)$$

$$\bar{E}'_{N,i} = \int_{-1}^{+1} \left[ E \frac{2A \left[ 1 - \left( 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \mu_c \right]}{(A+1)^2} - \frac{E_i^*}{A+1} \right] h_c(\mu_c) d\mu_c \quad (\text{II} - 8)$$

$$\bar{E}_{N,i} = E \frac{2A \left[ 1 - \left( 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_i^*}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{\mu}_c \right]}{(A+1)^2} - \frac{E_i^*}{A+1} \quad (\text{II} - 9)$$

Si la **diffusion** est **isotrope** dans le référentiel du centre de masse,  $\bar{\mu}_c = 0$  et :

$$\bar{E}'_i = E \frac{1 + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_i^* \quad (\text{II} - 10)$$

$$\bar{E}_{N,i} = E \frac{2A}{(A+1)^2} - \frac{E_i^*}{A+1} \quad (\text{II} - 11)$$

On rappelle que l'énergie moyenne du noyau atomique de recul  $\bar{E}_{N,i}$  est supposée être cédée à la matière localement, c'est-à-dire sur place, contrairement au photon émis à l'énergie  $E_i^*$  d'excitation du noyau cible.

### 3. Cas de la diffusion inélastique continue

Dans cette situation, l'énergie d'excitation  $E_v^*$  du noyau excité formé  $(A + 1)^*$  est prise comme une variable continue. Il est utile, à partir de la définition de l'énergie de seuil (voir chapitre 7, équation (4.2)), de déterminer le domaine de variation de l'énergie d'excitation  $E_v^*$  :

$$E_v^m = E_s^c \frac{A}{A + 1} \leq E_v^* \leq E_v^M = E \frac{A}{A + 1} \quad (\text{II} - 12)$$

où  $E_s^c$  correspond à l'énergie de seuil de la réaction de diffusion inélastique continue ; en effet, les bornes correspondent aux valeurs extrêmes de l'énergie cinétique de la particule relative. Les énergies du neutron après collision correspondantes sont alors :

- $E'_M$  **énergie cinétique maximale** du neutron diffusé par la diffusion inélastique continue, pour un neutron incident d'énergie cinétique  $E$  :

$$E'_M = E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A + 1}{A} \frac{E_v^m}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \mu_c (\text{à } \theta_c = 0) + A^2}{(1 + A)^2} - \frac{A}{A + 1} E_v^m \quad (\text{II} - 13)$$

$$E'_M = E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{E_s^c}{E} \right]^{\frac{1}{2}} + A^2}{(1 + A)^2} - E_s^c \frac{A^2}{(A + 1)^2} \quad (\text{II} - 14)$$

$$E'_M = \frac{A^2}{(A + 1)^2} (E - E_s^c) + \frac{E}{(A + 1)^2} + \frac{2A \left[ 1 - \frac{E_s^c}{E} \right]^{\frac{1}{2}}}{(1 + A)^2} E \quad (\text{II} - 15)$$

en ayant remplacé  $E_v^m$  par son expression :

$$E_v^m = E_s^c \frac{A}{A + 1} \quad (\text{II} - 16)$$

- $E'_m$  **énergie cinétique minimale** du neutron diffusé par la diffusion inélastique continue :

$$\begin{aligned} E'_m &= E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A + 1}{A} \frac{E_v^M}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \mu_c + A^2}{(1 + A)^2} - \frac{A}{A + 1} E_v^M = \frac{E_v^M}{A(A + 1)} \\ &= \frac{E}{(A + 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{II} - 17)$$

en ayant remplacé  $E$  par son expression :



$$E = E_v^M \frac{A+1}{A} \quad (\text{II} - 18)$$

On remarque que lorsque l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident tend vers l'énergie de seuil  $E_s^c$ , alors les énergies  $E'_M$  et  $E'_m$  du neutron diffusé tendent vers la même énergie :

$$\frac{E_s^c}{(A+1)^2} \quad (\text{II} - 19)$$

Supposons que l'on connaisse la densité de probabilité  $h_E^c(E \rightarrow E')$  qui donne la distribution en énergie des neutrons diffusés par réaction inélastique continue, alors elle est telle que :

$$\int_{E'_m}^{E'_M} h_E^c(E \rightarrow E') dE' = 1 \quad (\text{II} - 20)$$

L'énergie moyenne du neutron après une diffusion inélastique continue s'écrit par conséquent :

$$\bar{E}' = \int_{E'_m}^{E'_M} E' h_E^c(E \rightarrow E') dE' \quad (\text{II} - 21)$$

On cherche à présent à déterminer l'énergie cinétique moyenne,  $\bar{E}_R$ , du noyau atomique de recul. Pour cela on procède en deux temps : on exprime la densité de probabilité  $p_E(E_v)$  d'excitation d'un niveau d'énergie  $E_v$  donné puis on déduit la densité de probabilité  $Q_E(E_N)$  caractérisant la distribution en énergie,  $E_N$ , du noyau atomique de recul pour une énergie cinétique  $E$  fixée du neutron incident.

On désigne par  $g_{E,E'}(E_v)$  la densité de probabilité d'excitation du niveau d'énergie  $E_v$  à  $E$  et  $E'$  fixés.

Soit  $h_c^c(E, \mu_c)$  la densité de probabilité de déviation angulaire du neutron lors d'une diffusion inélastique continue, dans le référentiel du centre de masse. On peut écrire :

$$g_{E,E'}(E_v) dE_v = h_c^c(E, \mu_c) d\mu_c \quad (\text{II} - 22)$$

On fait l'hypothèse d'un choc isotrope, par conséquent :

$$g_{E,E'}(E_v) = \frac{1}{2} \frac{d\mu_c}{dE_v} \quad (\text{II} - 23)$$

Les variables  $E_v$  et  $\mu_c$  étant reliées par la relation à  $E$  et  $E'$  fixés :

$$E' = E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_\nu}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \mu_C + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_\nu \quad (\text{II} - 24)$$

d'où :

$$\mu_C = \frac{\frac{(1+A)^2}{E} E' + \frac{A(1+A)^2}{E} E_\nu - (1+A^2)}{2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_\nu}{E} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{II} - 25)$$

dont on tire par différentiation :

$$\frac{d\mu_C}{dE_\nu} = \frac{(1+A) \left[ -A^2 + \frac{(1+A)^2}{E} E' + \frac{(1+A)^2}{E} A E_\nu - 1 \right]}{4A^2 E \left( 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_\nu}{E} \right)^{3/2}} + \frac{(1+A)^2}{2E \sqrt{1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_\nu}{E}}} \quad (\text{II} - 26)$$

On en déduit l'expression de la densité de probabilité  $p_E(E_\nu)$  :

$$p_E(E_\nu) = \frac{K}{2} \int_{E'_1(E, E_\nu)}^{E'_2(E, E_\nu)} h_E(E \rightarrow E') \frac{d\mu_C}{dE_\nu} dE' \quad (\text{II} - 27)$$

avec :

$$E'_1(E, E_\nu) = E \frac{1 - 2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_\nu}{E} \right]^{\frac{1}{2}} + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_\nu$$

obtenue pour  $\mu_C = -1$  (II - 28)

$$E'_2(E, E_\nu) = E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_\nu}{E} \right]^{\frac{1}{2}} + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_\nu$$

obtenue pour  $\mu_C = +1$  (II - 29)

$$\int_{E_\nu^m}^{E_\nu^M} p_E(E_\nu) dE_\nu = 1 \quad (\text{II} - 30)$$

Soit  $G_{E, E_\nu}^c(E_N)$  la densité de probabilité pour que l'énergie du noyau de recul soit  $E_N$ , les énergies  $E$  et  $E_\nu$  étant fixées. On a :

$$G_{E, E_\nu}(E_N) dE_N = h_c^c(E, \mu_C) d\mu_C \quad (\text{II} - 31)$$

La diffusion angulaire étant isotrope, on en déduit :

$$G_{E,E_N}(E_N) = \frac{1}{2} \frac{d\mu_C}{dE_N} = -\frac{1}{2} \frac{d\mu_C}{dE'} \quad (\text{II} - 32)$$

La distribution en énergie du noyau de recul,  $Q_E(E_N)$ , s'écrit alors :

$$Q_E(E_N) = \int_{E_{v,2}(E,E_N)}^{E_{v,1}(E,E_N)} p_E(E_v) G_{E,E_v}(E_N) dE_v \quad (\text{II} - 33)$$

où les énergies  $E_{v,1}(E, E_N)$  et  $E_{v,2}(E, E_N)$  sont solutions de l'équation :

$$E_N = E \frac{2A \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_v}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{(A+1)^2} - \frac{E_v}{A+1} \quad (\text{II} - 34)$$

La densité de probabilité  $Q_E(E_N)$  peut également être obtenue plus directement par l'expression :

$$Q_E(E_N) = \int_{E'_1(E,E_N)}^{E'_2(E,E_N)} h_E(E \rightarrow E') H_{E,E'}(E_N) dE' \quad (\text{II} - 35)$$

où  $H_{E,E'}(E_N)$  représente la densité de probabilité pour que l'énergie du noyau de recul soit  $E_N$ , les énergies  $E$  et  $E'$  étant fixées.

Or :

$$H_{E,E'}(E_N) dE_N = h_C^c(E, \mu_C) d\mu_C \quad (\text{II} - 36)$$

d'où, sous l'hypothèse d'isotropie :

$$H_{E,E'}(E_N) = \frac{1}{2} \frac{d\mu_C}{dE_N} = -\frac{1}{2} \frac{d\mu_C}{dE_v} \quad (\text{II} - 37)$$

$$Q_E(E_N) = \frac{D}{2} \int_{E'_1(E,E_N)}^{E'_2(E,E_N)} h_E(E \rightarrow E') \frac{d\mu_C}{dE_v} dE' \quad (\text{II} - 38)$$

avec :

$E_N = E - E' - E_v$  (égalité déduite de la loi de conservation de l'énergie totale).

$$E'_1(E, E_N) = E - E_N - E_v^M = \frac{E}{A+1} - E_N \quad (\text{II} - 39)$$

$$E'_2(E, E_N) = E - E_N - E_v^m = E - E_R - \frac{A}{A+1} E_s^c \quad (\text{II} - 40)$$

$D$  : constante de normalisation à l'unité de la densité  $Q_E(E_N)$ .

Dans l'hypothèse où **l'on néglige à présent la corrélation angle-énergie** (cas de la diffusion sur des noyaux lourds), alors l'expression :

$$E' = E \frac{1 + 2A \left[ 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_v}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \mu_C + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} E_v \quad (\text{II} - 41)$$

se réduit à :

$$E' = E \frac{1 + A^2}{(1+A)^2} - \frac{A}{A+1} \bar{E}_v \quad (\text{II} - 42)$$

soit :

$$\bar{E}_v = \bar{E}_v(E, E') = E \frac{1 + A^2}{A(1+A)^2} - \frac{A+1}{A} E' \quad (\text{II} - 43)$$

Et l'expression de l'énergie cinétique du noyau atomique de recul :

$$E_N = E \frac{2A \left[ 1 - \left( 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_v}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \mu_C \right]}{(A+1)^2} - \frac{E_v}{A+1} \quad (\text{II} - 44)$$

se réduit à :

$$\bar{E}_N = E \frac{2A}{(A+1)^2} - \frac{\bar{E}_v}{A+1} = E \frac{2A}{(A+1)^2} - \left[ E \frac{1 + A^2}{A(1+A)^2} - \frac{A+1}{A} E' \right] \quad (\text{II} - 45)$$

$$\bar{E}_N = E \frac{A-1}{(A+1)^2} + \frac{E'}{A} \quad (\text{II} - 46)$$

L'énergie cinétique moyenne du noyau atomique de recul est par conséquent donnée par :

$$\bar{\bar{E}}_N = \int_{E'_m}^{E'_M} \left[ E \frac{A-1}{(A+1)^2} + \frac{E'}{A} \right] h_E(E \rightarrow E') dE' = E \frac{A-1}{(A+1)^2} + \frac{1}{A} \int_{E'_m}^{E'_M} E' h_E(E \rightarrow E') dE'$$

$$\bar{E}_N = E \frac{A-1}{(A+1)^2} + \frac{\bar{E}'}{A} \quad (\text{II} - 47)$$

#### 4. Détermination de la section efficace microscopique d'énergie moyenne totale transférée lors d'une collision tous processus considérés d'interaction du neutron avec un noyau atomique

On désigne par  $\sigma_{\bar{E}_{tot}}(E)$  cette section efficace microscopique relative à un neutron incident d'énergie cinétique  $E$ . Le neutron interagissant avec le noyau atomique considéré peut donner lieu à différentes réactions nucléaires, chacune caractérisée par sa section efficace microscopique :

- $\sigma_s(E)$  : section efficace de diffusion élastique ;
- $\sigma_{ind,\nu}(E)$  : section efficace de diffusion inélastique discrète ;
- $\sigma_{inc}(E)$  : section efficace de diffusion inélastique continue ;
- $\sigma_{(n,p)}(E)$  : section efficace d'émission d'un proton ;
- $\sigma_{(n,\alpha)}(E)$  : section efficace d'émission d'une particule alpha ;
- $\sigma_{(n,\gamma),k}(E)$  : section efficace d'émission de gamma de capture radiative avec émission de gamma selon un spectre discret de raies, notées  $k$ , d'énergie  $E_{\gamma,k}$  et d'intensité  $y_k$ .

La section efficace microscopique  $\sigma_{\bar{E}_{tot}}(E)$  est obtenue par sommation des produits des sections efficaces microscopiques relatives à chacune des réactions nucléaires possibles par les énergies cédées au noyau atomique correspondantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{E}_{tot}}(E) = & E \frac{2A[1 - \bar{\mu}_c]}{(1+A)^2} \sigma_s(E) \\ & + \sum_{\nu} \left[ E \frac{2A \left[ 1 - \left( 1 - \frac{A+1}{A} \frac{E_{\nu}}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{\mu}_{c,\nu} \right]}{(A+1)^2} - \frac{E_{\nu}}{A+1} \right] \sigma_{ind,\nu}(E) \\ & + \left[ E \frac{A-1}{(A+1)^2} + \frac{1}{A} \int_{E'_m(E)}^{E'_M(E)} E' h_E(E \rightarrow E') dE' \right] \sigma_{inc}(E) \\ & + (E + Q_{(n,p)}) \sigma_{(n,p)}(E) \\ & + (E + Q_{(n,\alpha)}) \sigma_{(n,\alpha)}(E) \end{aligned}$$

$$+ \sum_k \left[ \frac{E}{A+1} - 2 \sqrt{\frac{E}{A+1}} \sqrt{\frac{1}{2(A+1)mc^2}} E_{\gamma,k} \cos \varphi + \frac{E_{\gamma,k}^2}{2(A+1)mc^2} \right] \sigma_{(n,\gamma),k}(E)$$

$+ \dots$ 

(II – 48)

Dans cette expression, les contributions  $(E + Q_{(n,p)})$  et  $(E + Q_{(n,\alpha)})$  des réactions (n, p) et (n,  $\alpha$ ) ont été déterminées dans l’annexe III, paragraphe 3 du chapitre 7.

L’unité de la section efficace  $\sigma_{\bar{E}_{tot}}(E)$  est : eV (keV, MeV) cm<sup>2</sup> par atome ou eV (keV, MeV) b par atome.

Exemple

**Calcul de l’énergie cédée, exprimée en MeV cm<sup>2</sup> g<sup>-1</sup> par un neutron d’énergie cinétique de 2 MeV à un gramme de tissu biologique composé d’hydrogène léger, de carbone 12, d’azote 14 et d’oxygène 16).**

On suppose la diffusion élastique isotrope :  $\bar{\mu}_C = 0$ .

On dispose des données rassemblées dans le tableau 24 ci-après :

Tableau 24. Données relatives aux réactions nucléaires (n, n), (n, p) et (n,  $\alpha$ ) dans un tissu biologique

<i>i</i>	Nucléides	Diffusion élastique (n, n)	Réaction (n, p)		Réaction (n, $\alpha$ )		Nombre de nucléides par gramme de tissu biologique $N_i$ g <sup>-1</sup>
		Section efficace $\sigma_{s,i}(E)$ barns	Section efficace $\sigma_{(n,p),i}$ barns	Énergie disponible $Q_{(n,p),i}$ MeV	Section efficace $\sigma_{(n,\alpha),i}$ barns	Énergie disponible $Q_{(n,\alpha),i}$ MeV	
1	<sup>1</sup> <sub>1</sub> H	10.	0.	0.	-	-	6.8 10 <sup>22</sup>
2	<sup>12</sup> <sub>6</sub> C	2.	0.	Seuil > 10 MeV	0.	Seuil > 2 MeV	1. 10 <sup>22</sup>
3	<sup>14</sup> <sub>7</sub> N	1.5	2.6 10 <sup>-2</sup>	0.626	9.3 10 <sup>-2</sup>	-0.158	2.05 10 <sup>22</sup>
4	<sup>16</sup> <sub>8</sub> O	2.	0.	> 20	0.	> 2	3.93 10 <sup>23</sup>

L’application de l’expression (II – 48) donne :

$$\Sigma_{\bar{E}_{tot}}(E) = \sum_{i=1,4} N_i \sigma_{\bar{E}_{tot},i}(E)$$

$$= \sum_{i=1,4} N_i \left[ E \frac{2A_i}{(1 + A_i)^2} \sigma_{s,i}(E) + (E + Q_{(n,p),i}) \sigma_{(n,p),i}(E) + (E + Q_{(n,\alpha),i}) \sigma_{(n,\alpha),i}(E) \right]$$

- La contribution de l’énergie déposée par la **diffusion élastique** est :

$$2 \times \left[ \begin{aligned} & 6.8 \cdot 10^{22} \times \frac{2 \times 1}{(1+1)^2} \times 10 \cdot 10^{-24} + \\ & 1. \cdot 10^{22} \times \frac{2 \times 12}{(1+12)^2} \times 10 \cdot 10^{-24} \times 2 \cdot 10^{-24} + \\ & 2.05 \cdot 10^{22} \times \frac{2 \times 14}{(1+14)^2} \times 1.5 \cdot 10^{-24} \times 2 \cdot 10^{-24} + \\ & 3.93 \cdot 10^{23} \times \frac{2 \times 16}{(1+16)^2} \times 2. \cdot 10^{-24} \times 2 \cdot 10^{-24} \end{aligned} \right] = 0.68 + 5.68 \cdot 10^{-3} + 7.65 \cdot 10^{-3} + 0.174$$

$$\approx 0.86 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

- La contribution de l'énergie déposée par **réaction (n, p)** est :

$$2.05 \cdot 10^{22} \times 2.6 \cdot 10^{-2} (2 + 0.626) = 1.4 \cdot 10^{-3} \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

- La contribution de l'énergie déposée par **réaction (n, α)** est :

$$2.05 \cdot 10^{22} \times 9.3 \cdot 10^{-2} (2 - 0.158) = 3.52 \cdot 10^{-3} \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

En sommant ces différentes contributions, on obtient :

$$\Sigma_{\bar{E}_{tot}}(E) = 0.86 + 1.4 \cdot 10^{-3} + 3.52 \cdot 10^{-3} \approx 0.865 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

### Remarque

Si cet échantillon de tissu est irradié par un flux de neutrons (resp. gamma),  $\phi$  (neutrons  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ), monokinétiques à l'énergie  $E$  et supposé uniforme dans le tissu, alors le produit  $\Sigma_{\bar{E}_{tot}}(E) \times \phi$  représente l'énergie totale déposée par gramme de tissu et par seconde, et il s'agit donc d'une puissance s'exprimant en watt par gramme :  $\text{MeV g}^{-1} \text{s}^{-1} \equiv \text{W g}^{-1}$  ; la multiplication par la masse volumique  $\rho$  ( $\text{g cm}^{-3}$ ) fournit un dépôt d'énergie de MeV par unité de volume et par seconde et donc une puissance déposée par unité de volume de tissu :  $\Sigma_{\bar{E}_{tot}}(E) \times \phi \times \rho$ ,  $\text{MeV cm}^{-3} \text{s}^{-1} \equiv \text{W cm}^{-3}$ .

Lorsque l'on a affaire à un flux de neutrons (resp. gamma),  $\phi(\vec{r}, E)$  (neutrons  $\text{cm}^{-2} \text{MeV}^{-1} \text{s}^{-1}$ ), variable en espace et en énergie, alors le dépôt de puissance dans un volume  $V$  supposé homogène de tissu (ou plus généralement de matière) considéré s'obtient par une double intégration (voir chapitre 13) :

$$\int_V d\vec{r} \int \phi(\vec{r}, E) \Sigma_{\bar{E}_{tot}}(E) dE, \quad \text{MeV cm}^{-3} \text{s}^{-1} \equiv \text{W cm}^{-3} \quad (\text{II} - 49)$$

### Annexe III : détermination des énergies moyennes après collision du neutron diffusé et du noyau de recul

Mathématiquement, dans le cas général où le choc n'est pas isotrope (cas de la diffusion sur les noyaux lourds par exemple), il est possible d'exprimer la section efficace différentielle en angle  $\sigma(\mu_c)$  par une décomposition sur la base des polynômes de Legendre,  $P_l(\mu_c)$ , dans le référentiel du centre de masse<sup>180</sup> (les conventions de notations des énergies et des directions avant et après choc sont celles du paragraphe § 1.5) :

$$\sigma(E, \mu_c) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_l(E) P_l(\mu_c) \quad (\text{III} - 1)$$

$$\sigma_l(E) = \int_{-1}^{+1} \sigma(E, \mu_c) P_l(\mu_c) d\mu_c \quad (\text{III} - 2)$$

Dans la pratique, le développement comporte un nombre fini  $L$  de termes, la contribution des termes d'ordre supérieur à  $L$  étant supposée négligeable :

$$\sigma(E, \mu_c) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{2} \sigma_l(E) P_l(\mu_c) \quad (\text{III} - 3)$$

L'anisotropie linéaire (sous-entendue en fonction de  $\mu_c$ ) considère que la section efficace différentielle angulaire est suffisamment bien décrite par le développement comportant les deux premiers termes ( $l = 0, l = 1$ ) :

$$\sigma(E, \mu_c) \approx \sum_{l=0}^1 \frac{2l+1}{2} \sigma_l(E) P_l(\mu_c) = \frac{1}{2} \sigma_0(E) + \frac{3}{2} \sigma_1(E) \mu_c \quad (\text{III} - 4)$$

La loi de diffusion angulaire s'en déduit par l'opération de normalisation suivante :

$$h_c(E, \mu_c) = \frac{\sigma(E, \mu_c)}{\int_{-1}^{+1} \sigma(E, \mu_c) d\mu_c} \quad (\text{III} - 5)$$

$$h_c(E, \mu_c) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\sigma_1(E)}{\sigma_0(E)} \mu_c \quad (\text{III} - 6)$$

Le cosinus moyen de l'angle de déviation angulaire dans le référentiel du centre de masse s'écrit :

$$\bar{\mu}_c(E) = \int_{-1}^{+1} \mu_c h_c(E, \mu_c) d\mu_c = \int_{-1}^{+1} \mu_c \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\sigma_1(E)}{\sigma_0(E)} \mu_c \right] d\mu_c = \frac{\sigma_1(E)}{\sigma_0(E)} \quad (\text{III} - 7)$$

<sup>180</sup> C. Devillers, *Cours de radioprotection*, Chapitre 5 – « Transport des neutrons et des photons », 1977.



On en déduit alors l'expression alternative de la densité  $h_c(\mu_c)$  :

$$h_c(E, \mu_c) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \bar{\mu}_c(E) \mu_c \quad (\text{III} - 8)$$

### Remarque

La densité de probabilité  $h_c(E, \mu_c)$  doit prendre une valeur positive pour toute valeur de  $\mu_c$ . Cela implique donc :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \bar{\mu}_c(E) \mu_c > 0 \quad (\text{III} - 9)$$

En considérant la situation la plus sévère obtenue pour  $\mu_c = -1$ , cette inégalité impose une valeur maximale limite pour  $\bar{\mu}_c$  :

$$\bar{\mu}_c(E) = \frac{\sigma_1(E)}{\sigma_0(E)} < \frac{1}{3} = 0.333 \quad (\text{III} - 10)$$

On conçoit par conséquent que l'hypothèse du choc linéairement anisotrope puisse être source de difficultés numériques, par exemple dans un algorithme de simulation Monte-Carlo de la propagation des neutrons dans la matière.

De la même manière que pour le choc isotrope, il est possible d'exprimer, pour le **choc linéairement anisotrope**, les densités de probabilité relatives au changement d'énergie dans le référentiel du laboratoire. La relation  $h_E(E \rightarrow E') dE' = h_c(\mu_c) d\mu_c$  conduit à :

$$\begin{aligned} h_E(E \rightarrow E') &= h_c(E, \mu_c) \frac{d\mu_c}{dE'} = \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \bar{\mu}_c(E) \mu_c \right] \frac{d\mu_c}{dE'} \\ &= \left[ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \bar{\mu}_c(E) \left[ \frac{(1+A)^2 E' - (1+A^2)E}{2AE} \right] \right] \frac{(1+A)^2}{2AE} \\ h_E(E \rightarrow E') &= \frac{(1+A)^2}{4AE} \left[ 1 + 3\bar{\mu}_c(E) \left( \frac{(1+A)^2 E'}{2AE} - \frac{(1+A^2)}{2A} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III} - 11)$$

*A contrario* du cas du choc isotrope, la loi de transfert en énergie,  $h_E(E \rightarrow E')$ , dépend ici de l'énergie  $E'$  du neutron après collision.

En variable fraction d'énergie perdue par choc  $\zeta = \frac{E-E'}{E} = 1 - \frac{E'}{E}$ , on a :

$$|h_\zeta(E, \zeta) d\zeta| = |h_E(E \rightarrow E') dE'| \quad (\text{III} - 12)$$

d'où :

$$h_{\zeta}(E, \zeta) = h_E(E \rightarrow E') \left| \frac{dE'}{d\zeta} \right| = h_E(E \rightarrow E') E$$

$$= \frac{(1+A)^2}{4A} \left[ 1 + 3\bar{\mu}_C(E) \left( 1 - \frac{(1+A)^2}{2A} \zeta \right) \right] \quad (\text{III} - 13)$$

On peut ainsi comparer le nombre de collisions  $n$  nécessaires en moyenne pour que l'énergie initiale  $E$  du neutron soit divisée par un facteur  $\eta$  fixé :

$$\left( \frac{\bar{E}'}{E} \right)^n = \eta \quad \text{et} \quad n = \frac{\ln \eta}{\ln \frac{\bar{E}'}{E}} \quad (\text{III} - 14)$$

On a :

$$\frac{\bar{E}'}{E} = \int_{\alpha E}^E \frac{E'}{E} h_E(E \rightarrow E') dE' = \int_0^{\zeta_{\max} = \frac{4A}{(1+A)^2}} (1 - \zeta) h_{\zeta}(E, \zeta) d\zeta = 1 - \bar{\zeta} \quad (\text{III} - 15)$$

$$\bar{\zeta} = \int_0^{\zeta_{\max} = \frac{4A}{(1+A)^2}} \zeta h_{\zeta}(E, \zeta) d\zeta$$

$$= \int_0^{\zeta_{\max} = \frac{4A}{(1+A)^2}} \zeta \frac{(1+A)^2}{4A} \left[ 1 + 3\bar{\mu}_C(E) \left( 1 - \frac{(1+A)^2}{2A} \zeta \right) \right] d\zeta \quad (\text{III} - 16)$$

En intégrant, on trouve :

$$\bar{\zeta} = \frac{2A}{(1+A)^2} [1 - \bar{\mu}_C(E)] \quad (\text{III} - 17)$$

Par conséquent, le nombre  $n$  cherché est donné par :

$$n = \frac{\ln \eta}{\ln \frac{\bar{E}'}{E}} = \frac{\ln \eta}{\ln (1 - \bar{\zeta})} = \frac{\ln \eta}{\ln \left( 1 - \frac{2A}{(1+A)^2} [1 - \bar{\mu}_C(E)] \right)} \quad (\text{III} - 18)$$

### Exemples

▪ **Exemple du fer 56** ( $A = 56$ ), calcul de  $n$  pour  $\eta = 1/10$

- **cas isotrope**,  $\bar{\mu}_C(E) = 0$  :

$$n = \frac{\ln 0.1}{\ln \left( 1 - \frac{2 \times 56}{(1 + 56)^2} [1 - 0] \right)} \approx 66$$

- **cas linéairement anisotrope**, en prenant  $\bar{\mu}_C(E) = 0.2$  :

$$n = \frac{\ln 0.1}{\ln \left( 1 - \frac{2 \times 56}{(1 + 56)^2} [1 - 0.2] \right)} \approx 82$$

- **Cas des collisions élastiques sur l'hydrogène** ( $A = 1$ ), la diffusion est isotrope dans le référentiel du centre de masse ( $\bar{\mu}_c(E) = 0$ ) et l'on obtient alors :

$$n = \frac{\ln 0.1}{\ln \left( 1 - \frac{2 \times 1}{(1 + 1)^2} [1 - 0] \right)} \approx 3$$

## Annexe IV : détermination de la forme mathématique d'une résonance isolée

On rappelle que l'on se place dans le cas particulier d'énergies de neutrons suffisamment basses pour que seules les ondes «  $s$  » (de moment angulaire  $l = 0$ ) soient à considérer. Sous cette hypothèse, la section efficace de formation du noyau composé,  $\sigma_{nc}(E)$ , s'écrit qualitativement comme le produit de quatre facteurs (voir équation (6.1) du § 6) :

$$\sigma_{nc}(E) \propto \pi \lambda^2 \times g \times L(E) \times \Gamma_n(E) \quad (\text{IV} - 1)$$

où :

- $\pi \lambda^2$  est la section efficace d'interaction neutron-noyau-cible (pour les ondes «  $s$  ») ;
- $g$  est un facteur qui permet de prendre en compte le rôle joué par les moments angulaires ;
- $\Gamma_n(E)$  est le paramètre de résonance appelé la largeur neutronique à l'énergie  $E$  du neutron incident dans le référentiel du laboratoire.
- $L(E)$  est une distribution en énergie caractérisant l'interaction entre le neutron incident et le noyau cible.

Pour déterminer la distribution  $L(E)$ , on utilise la transformation de Fourier appliquée à la fonction d'onde  $\psi_r(\vec{r}, t)$  sachant qu'elle établit le mode de passage de la variation en temps ( $t$ ) à la variation en fréquence ( $\omega$ ) (et *vice versa*) et qu'énergie et fréquence sont reliées par la relation d'Einstein :  $\mathcal{E} = \hbar \omega$ .<sup>181 182</sup>

On reprend l'expression (5.11) et suivantes de la fonction d'onde en fonction du temps associée à la particule relative :

$$\psi_r(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r})T(t) = \psi_0(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E} t\right) = \psi_0(\vec{r}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(\mathcal{E}_0 - i\frac{\Upsilon}{2}\right) t\right] \quad (\text{IV} - 2)$$

La fonction d'onde en fréquence par transformation de Fourier s'écrit :

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_0 - i\frac{\Upsilon}{2})t} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \psi_0(\vec{r}) e^{-i(\omega - \frac{\mathcal{E}_0}{\hbar})t} e^{-\frac{\Upsilon}{2\hbar}t} dt \end{aligned} \quad (\text{IV} - 3)$$

l'origine des temps de désexcitation étant prise à  $t = 0$ . On obtient :

<sup>181</sup> S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH Verlag; Weinheim, 2007, pp. 447-451.

<sup>182</sup> F. S. Crawford, Jr, *Ondes, Cours de physique de Berkeley*, Vol. 3, Traduction en français de Pierre Léna, Armand Colin, Paris, 1972, voir p. 11 et p. 305.

$$G(\vec{r}, \omega) = \frac{\psi_0(\vec{r})}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar}{(\hbar\omega - \varepsilon_0) + \frac{iY}{2}} \quad (\text{IV} - 4)$$

On effectue le changement de variables de  $\omega$  en  $E$  en passant par l'énergie cinétique  $\mathcal{E}$  de la particule relative :

$$G(\vec{r}, \omega)d\omega = G(\vec{r}, \mathcal{E})d\mathcal{E}, \quad G(\vec{r}, \mathcal{E}) = G(\vec{r}, \omega) \frac{d\omega}{d\mathcal{E}} \text{ avec } \frac{d\omega}{d\mathcal{E}} = \frac{1}{\hbar} \quad (\text{IV} - 5)$$

La densité de probabilité de présence associée au neutron s'obtient *via* le calcul du carré du module de sa fonction d'onde.

Par ailleurs, on a (voir § 5 équation (5.26)) :

$$L(E)dE = \mathcal{H}(\mathcal{E})d\mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = E \frac{A}{A+1}, \quad Y = \Gamma \frac{A}{A+1} \quad (\text{IV} - 6)$$

et

$$L(E) = \mathcal{H}(\mathcal{E}) \frac{d\mathcal{E}}{dE} = \mathcal{H}(\mathcal{E}) \frac{d\mathcal{E}}{dE} = \mathcal{H}(\mathcal{E}) \frac{A}{A+1} \quad (\text{IV} - 7)$$

Par conséquent, la densité de probabilité  $L(E)$  cherchée est obtenue à partir de l'expression :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathcal{E}) &= |G(\vec{r}, \mathcal{E})|^2 = \frac{|\psi_0(\vec{r})|^2}{2\pi} \left[ \frac{i}{(\mathcal{E} - \varepsilon_0) + \frac{iY}{2}} \right] \left[ \frac{-i}{(\mathcal{E} - \varepsilon_0) - \frac{iY}{2}} \right] \\ &= \frac{|\psi_0(\vec{r})|^2}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{E} - \varepsilon_0)^2 + \frac{Y^2}{4}} \end{aligned} \quad (\text{IV} - 8)$$

La densité  $\mathcal{H}(\mathcal{E})$  doit être normalisée à l'unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\mathcal{E})d\mathcal{E} = 1 \quad (\text{IV} - 9)$$

d'où :

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \frac{Y}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{E} - \varepsilon_0)^2 + \frac{Y^2}{4}} \quad (\text{IV} - 10)$$

On obtient donc avec (IV - 6) et (IV - 7) :

$$L(E) = \mathcal{H}(\mathcal{E}) \frac{A}{A+1} = \frac{\Upsilon}{2\pi} \frac{1}{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2 + \frac{\Upsilon^2}{4}} \frac{A}{A+1} \quad (\text{IV} - 11)$$

$$L(E) = \frac{\Gamma \frac{A}{A+1}}{2\pi} \frac{1}{\left(E \frac{A}{A+1} - E_0 \frac{A}{A+1}\right)^2 + \frac{\left(\Gamma \frac{A}{A+1}\right)^2}{4}} \frac{A}{A+1} \quad (\text{IV} - 12)$$

$$L(E) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\text{IV} - 13)$$

Il s'agit d'une lorentzienne qui représente bien la forme de la section efficace d'une résonance dite « isolée ».

## Annexe V : la « Théorie de la matrice R » : principes généraux

Tout en se voulant rigoureuse, la théorie de la **matrice R**<sup>183</sup> s'appuie néanmoins sur quelques hypothèses fortes.

- La réaction considérée conduit à la production de 2 entités, pas plus.
- L'absence de processus de création ou de destruction de particules, ce qui écarte par exemple la présence de désintégration bêta ou de production de gamma ; dans ce dernier cas, malgré tout cette condition peut être levée, autrement dit l'interaction faible est exclue et seules sont prises en compte l'interaction forte et l'interaction électromagnétique.
- La **région interne** est définie par le **rayon de voie**  $a_c$  (déjà mentionné dans le chapitre 3 § 2.1, et voir **figure 46**) dont la valeur est usuellement prise égale à la somme des rayons des deux particules interagissant : c'est la distance à laquelle la force nucléaire forte n'agit plus.

Elle permet de relier les propriétés des états quantiques d'un noyau atomique aux sections efficaces des réactions nucléaires induites sur ce noyau par l'intermédiaire de la fonction d'onde associée à la particule relative.

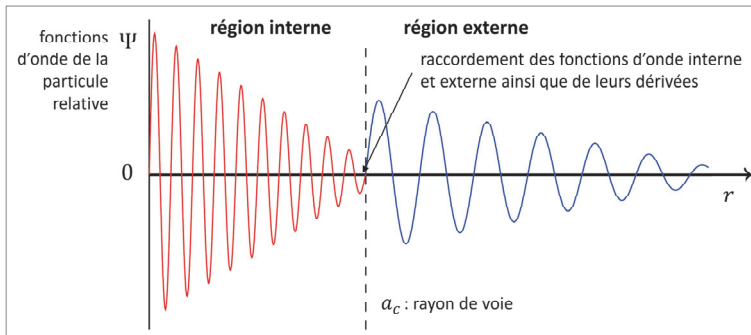


Figure 46. Schématisation de l'approche de calcul des sections efficaces neutron-noyau atomique adoptée dans la théorie de la matrice R : les régions interne et externe sont délimitées par une frontière spatiale positionnée à l'abscisse  $a$  où se raccordent les fonctions d'onde  $\Psi$  et leurs dérivées respectives de la particule relative ;  $a_c$  est aussi appelée « rayon de voie »<sup>184</sup> (voir chapitre 3 § 2.1).

Le formalisme de la **matrice R** repose sur le principe opératoire décliné ci-après.

- L'espace est scindé en deux régions de formes sphériques, comme le montre la **figure 46** :

<sup>183</sup> F. Günsing, « Introduction to neutron-induced reactions and the R-matrix formalism », EJC2014, 2014, [https://ejc2014.sciencesconf.org/conference/ejc2014/pages/20150420\\_ejc2014\\_gunsing\\_1\\_2.pdf](https://ejc2014.sciencesconf.org/conference/ejc2014/pages/20150420_ejc2014_gunsing_1_2.pdf).

<sup>184</sup> F. Günsing, "Introduction to neutron-induced reactions and the R-matrix formalism", *op. cit.*, figure 4, p. 11.

- la **région dite externe** où la force nucléaire ne se fait plus sentir et qui est caractérisée par l'ensemble des voies d'entrée ( $c$ ) et de sortie ( $c'$ ) ;
  - la **région dite interne** qui contient le noyau atomique dont le rayon précis ( $a$ ) est arbitraire mais dont l'ordre de grandeur est le rayon du noyau atomique ;
- Dans la **région externe**, on résout l'équation de Schrödinger avec un potentiel nul pour le neutron (il se serait agi du potentiel coulombien pour un proton incident). Cette résolution conduit à exprimer formellement la fonction d'onde de la particule relative en fonction d'une **matrice de collision**  $U$  dont les éléments sont notés  $U_{cc'}$  ;  $U_{cc'}$  permet de relier une voie d'entrée à une voie de sortie, c'est-à-dire l'onde entrante à l'onde sortante. On montre alors que :

$$\sigma_{cc'} = \pi \lambda^2 g_J |\delta_{cc'} - U_{cc'}|^2 \quad (V-1)$$

où :

$g_J$  : facteur acteur statistique de spin associé au moment angulaire  $J$  ;  $\delta_{cc'}$  : symbole de Kronecker (qui ne doit pas être confondu avec le déphasage  $\delta_l$  de l'onde diffusée)

- la **section efficace de réaction de diffusion élastique** :

$$\sigma_{cc} = \pi \lambda^2 |1 - U_{cc}|^2 \quad (V-2)$$

- la **section efficace de réaction non élastique** :

$$\sigma_{cr} = \pi \lambda^2 (1 - |U_{cc}|^2) \quad (V-3)$$

- La **section efficace totale**  $\sigma_c$  est obtenue par la sommation sur les canaux de sortie  $c'$  :

$$\sigma_c = \sum_{c'} \sigma_{cc'} = 2\pi \lambda^2 \sum_{c'} (1 - \text{Re}(U_{cc'})) \quad (V-4)$$

où  $\text{Re}(U_{cc'})$  est la partie réelle de l'élément de la matrice de collision  $U_{cc'}$ .

Dans le cas du puits de potentiel à symétrie sphérique considéré au paragraphe 2, la matrice de collision  $U$  se réduit à un seul terme :

$$U \equiv \eta_0 \equiv e^{i2\delta_0} \quad (V-5)$$

$\delta_0$  étant le déphasage entre l'onde incidente « s » ( $l = 0$ ) et l'onde sortante pour les ondes.



Dans la pratique, les réactions d'intérêt sont celles qui concernent les paires de particules :  $\alpha(a, b) \rightarrow \alpha'(c, d)$  pour le moment angulaire  $J$  :

$$\sigma_{\alpha\alpha'}(J) = \pi\lambda_{\alpha}^2 g_J \sum_{jj'l'l'} |\delta_{jj'l'l'} - U_{jlj'l'}|^2 \tag{V-6}$$

$$\sigma_{\alpha\text{ totale}}(J) = 2\pi\lambda_{\alpha}^2 g_J \sum_{jj'l'l'} |\delta_{jj'l'l'} - \text{Re}(U_{jlj'l'})| \tag{V-7}$$

La **matrice de collision**  $U$  comporte deux types d'information :

- Les **données qui décrivent les ondes entrantes et sortantes** ; elles dépendent du moment orbital  $l$  du neutron incident et sont fonction du paramètre adimensionnel  $\rho = ka_c$ . Ce sont :
  - la **pénétrabilité**  $v_l$  ou le **facteur de pénétrabilité**  $p_l = v_l\rho$  de la surface nucléaire séparant régions interne et externe ;
  - le **décalage**  $S_l$  (pour  $l > 0$ ) qui existe entre les énergies  $E_{\lambda}$  formelles des états propres  $\lambda$  (à ne pas confondre avec la longueur d'onde  $\lambda$  du neutron ou bien de la particule relative) associés à l'équation de Schrödinger relative à la région interne (voir plus loin) et les énergies de résonance physiques correspondantes ;
  - le **déphasage**  $\delta_l$  entre l'onde incidente et l'onde sortante.

Ces grandeurs, explicitées dans le tableau 25 et représentées sur la figure 47, varient avec l'énergie du neutron incident par l'intermédiaire du paramètre  $\rho$ .

Tableau 25. Expressions du facteur pénétrabilité  $p_l$ , du décalage  $S_l$  et du déphasage  $\delta_l$  en fonction du moment orbital  $l$  respectivement représentés sur la figure 40 ci-après.<sup>185</sup>

$l$	Facteur de pénétrabilité $p_l$	Décalage $S_l$	Déphasage $\delta_l$
0	$\rho$	0	$\rho$
1	$\rho^3/(1 + \rho^2)$	$-1/(1 + \rho^2)$	$\rho - \tan^{-1} \rho$
$l > 1$	$\frac{\rho^2 p_{l-1}}{(l - S_{l-1})^2 + p_{l-1}^2}$	$\frac{\rho^2 (l - S_{l-1})}{(l - S_{l-1})^2 + p_{l-1}^2} - l$	$\delta_l - \tan^{-1} \frac{p_{l-1}}{l - \delta_{l-1}}$

<sup>185</sup> D'après Frank Gunsing, *op. cit.*, table 2, p. 19.

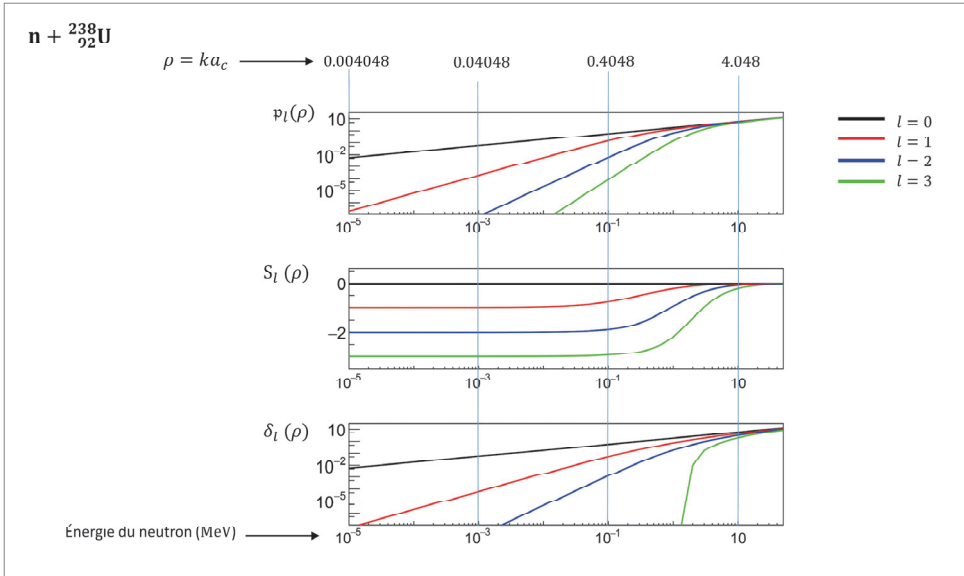


Figure 47. Représentation du facteur de pénétrabilité de la barrière de potentielle  $p_l(\rho) = v_l(\rho) \times \rho$  du décalage de niveau  $S_l(\rho)$ , et du déphasage  $\delta_l(\rho)$  de l'onde sortante en fonction du paramètre adimensionnel  $\rho = ka_c$  et pour différentes valeurs du moment angulaire orbital  $l$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ) dans le cas d'un noyau atomique de masse  $A = 238$ <sup>186</sup> ;  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde et  $a$  est le rayon de portée de l'interaction nucléaire forte (rayon de voie). Ici on a pris  $a_c = \left(1.23 A^{\frac{1}{3}} + 0.8\right) \times 10^{-13}$  cm (voir chapitre 3 § 2.1) et, en utilisant les relations (2.60) et (2.62), on a  $\rho = ka_c \approx 1.28 \sqrt{E_n(\text{MeV})}$ .

- Les données relatives au **processus réactionnel** qui siège dans la région interne et qui impacte la collision dans son ensemble. Le second ensemble de données de la **matrice de collision**  $U$  provient de la **matrice**  $R$  qui résulte du traitement de la région interne. Pour accéder à cette information, l'idée a été d'exprimer la fonction d'onde  $\Psi$  de la particule relative à la frontière  $a_c$  délimitant les deux régions interne et externe, d'une part en fonction de fonctions d'onde associée aux voies d'entrée  $c$  et d'autre part des fonctions propres de l'hamiltonien du noyau composé.
- On montre que la fonction d'onde de la particule relative à la frontière  $a_c$  s'exprime par une décomposition sur la base discrète que forment les **fonctions de surface de voie d'entrée**, notées  $\varphi_c$ , et définies à partir de la fonction d'onde complète en supprimant de la composante radiale :

$$\Psi = \sum_c V_c \varphi_c \quad (V - 8)$$

où  $V_c$  est la composante de la fonction d'onde  $\Psi$  sur la fonction de base  $\varphi_c$ .

<sup>186</sup> Voir aussi Frank Günsing, *op. cit.*, figure 6, p. 20.

- Dans la région interne, on ne résout pas explicitement l'équation de Schrödinger, car le noyau composé a un potentiel nucléaire d'interaction d'une très grande complexité qui ne se prête pas à une modélisation dans tous les cas de figure. L'alternative consiste à décomposer formellement la fonction d'onde,  $\Psi$ , de la particule sur les fonctions propres  $X_\lambda$  de l'hamiltonien du noyau composé comme si elles étaient connues :

$$\Psi = \sum_{\lambda} C_{\lambda} X_{\lambda} \quad (V - 9)$$

où  $C_{\lambda}$  est la composante de la fonction d'onde  $\Psi$  sur la fonction de base  $X_{\lambda}$ .

- On raccorde la région externe et la région interne à la frontière  $r = a_c$  en exprimant les coefficients  $C_{\lambda}$  en fonction :
  - des projections, notées  $\gamma_{\lambda c}$ , des fonctions propres  $X_{\lambda}$  sur les fonctions  $\varphi_c$  ; on dénomme  $\gamma_{\lambda c}$  les **amplitudes des largeurs partielles réduites** de la fonction propre de l'hamiltonien de l'équation de Schrödinger de la région interne et associée à la voie d'entrée ;
  - des projections, notées  $\delta_{\lambda c}$ , du gradient des fonctions  $X_{\lambda}$  sur les fonctions  $\varphi_c$  ;
  - de la condition à la frontière  $r = a_c$  s'exprimant par la relation :

$$\frac{\delta_{\lambda c}}{\gamma_{\lambda c}} = B_c \quad (V - 10)$$

où  $B_c$  est librement choisi et posé identique pour tous les états propres  $\lambda$  ; par exemple on fait le choix du facteur de décalage de niveau  $S_l$  pour  $l = 1$ .

Il est alors montré que le coefficient  $C_{\lambda}$  qui détermine la fonction d'onde  $\Psi$  cherchée donnée par (V - 9) a pour expression :

$$C_{\lambda} = \sum_c \frac{\gamma_{\lambda c}}{E_{\lambda} - E} (D_c - B_c V_c) \quad (V - 11)$$

où :

$E$  : énergie cinétique de la particule incidente, en l'occurrence du neutron ici ;  
 $E_{\lambda}$  : une valeur propre de l'hamiltonien du noyau composé, c'est-à-dire l'énergie d'un niveau d'énergie du noyau composé ;  
 $D_c$  : valeur du gradient de  $V_c$  à la frontière  $r = a_c$ .

La fonction d'onde  $\Psi$  à la frontière se réécrit alors comme :

$$\Psi = \sum_c \left[ \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c}}{E_{\lambda} - E} X_{\lambda} \right] (D_c - B_c V_c) \quad (\text{V} - 12)$$

En projetant cette équation sur la base des fonctions  $\varphi_{c'}$  associées aux voies de sortie  $c'$ , on a :

$$\Psi = \sum_c V_{c'} \varphi_{c'}$$

avec :

$$V_{c'} = \sum_c \left[ \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} - E} \right] (D_c - B_c V_c)$$

Soit encore :

$$V_{c'} = \sum_c R_{cc'} (D_c - B_c V_c) \quad (\text{V} - 13)$$

où l'on a posé :

$$R_{cc'} = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda c} \gamma_{\lambda c'}}{E_{\lambda} - E} \quad (\text{V} - 14)$$

En écriture matricielle, il vient<sup>187</sup> :

$$\mathbf{V}' = \mathbf{R} \hat{\mathbf{D}} \quad (\text{V} - 15)$$

expression dans laquelle  $\mathbf{V}' \equiv \{V_{c'}\}_{c'=1,\dots}$  est une matrice (vecteur) colonne,  $\hat{\mathbf{D}} \equiv \{D_c - B_c V_c\}_{c=1,\dots}$  une matrice (vecteur) ligne et  $\mathbf{R}$  une matrice carrée qui relie les valeurs de la fonction d'onde interne et de sa dérivée au niveau des voies d'entrée.

La dénomination de **théorie de la matrice**  $\mathbf{R}$  découle de cette expression. La **matrice**  $\mathbf{R}$  est aussi appelée **matrice des largeurs**, en référence à la présence des grandeurs  $\gamma_{\lambda c}$  et  $\gamma_{\lambda c'}$  dans (V - 14).

Les éléments de matrice  $R_{cc'}$  donnent accès à l'impact des résonances que sont les états quantiques propres formels  $\lambda$ , caractérisés par  $E_{\lambda}$  et  $\gamma_{\lambda c}$  dans les réactions nucléaires. Le caractère résonnant de la section efficace apparaît explicitement puisque  $R_{cc'}$  est inversement proportionnel à la différence  $E_{\lambda} - E$ .

On montre par ailleurs que la **largeur de voie** est donnée par la relation suivante :

$$\Gamma_{\lambda c} = 2\gamma_{\lambda c}^2 p \quad (\text{V} - 16)$$

<sup>187</sup> J. E. Lynn, *The Theory of Neutron Resonance Reactions*, Clarendon Press, Oxford, 1968.

où  $p$  est le **facteur de pénétrabilité**. On constate donc que la **matrice  $R$**  contient les paramètres de résonance. Comme cela a été précédemment mentionné, ces paramètres sont mesurés et rendus accessibles dans les évaluations de données nucléaires, permettant ainsi le calcul des sections efficaces.

La grandeur  $\gamma_{\lambda c}^2 = \Gamma_{\lambda c}/2p$  est appelée **largeur neutronique réduite** de la **matrice  $R$** . Elle est **indépendante de l'énergie** du neutron incident, contrairement à  $\Gamma_{\lambda c}$  qui en dépend *via* le facteur de pénétrabilité  $\nu$ .

On notera que cette relation légitime l'approche phénoménologique adoptée précédemment pour modéliser la section efficace de formation du noyau composé.

### Exemple

**Application du formalisme de la matrice  $R$  au cas simple de la diffusion d'un neutron «  $s$  » par un noyau atomique dont le potentiel nucléaire est représenté par un puits carré de potentiel sphérique.**<sup>188 189</sup>

#### a. Identification de l'opérateur ou fonction de collision $U$

L'expression de la section efficace de diffusion (2.73) est rappelée ci-après :

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \sin^2 \delta_0 \quad (V - 17)$$

En se reportant à (2.49) et (2.47), dans le formalisme de la matrice  $R$ , on peut réécrire (V - 17) comme :

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \sin^2 \delta_0 = 4\pi\lambda^2 |1 - \eta_0|^2 = 4\pi\lambda^2 |1 - U|^2 \quad (V - 18)$$

où :

$$U \equiv \eta_0 = \exp(2i\delta_0) \quad (V - 19)$$

représente l'**opérateur ou la fonction de collision** du formalisme de la matrice  $R$  (attention à ne pas confondre avec la notation de la profondeur du puits de potentiel  $U_0$ ).

#### b. La fonction $R$ et la largeur neutronique réduite

En raison de la forme du puits considéré, on a  $a_c = a$ ,  $a$  étant la largeur du puits carré.

À l'intérieur du puits de potentiel ( $r < a$ ), les fonctions propres  $X_\lambda$ , où  $\lambda$  repère un état quantique propre comme précédemment, satisfont l'équation de Schrödinger radiale de la particule relative :

<sup>188</sup> E. Vogt, « Theory of Low Energy Nuclear Reactions », *Rev. Mod. Phys.* 34, 723, October 1, 1962, pp. 723-747, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.34.723>.

<sup>189</sup> Voir aussi le calcul original de P. L. Kapur, R. Peierls, « The dispersion formula for nuclear reactions », *op. cit.*

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \frac{d^2 X_\lambda}{dr^2} + U_0 X_\lambda = E_\lambda X_\lambda \quad (V-20)$$

Le formalisme de la matrice R y adjoint une condition à la frontière  $r = a_c$  du noyau atomique fournie par la dérivée logarithmique :

$$\left. r \frac{dX_\lambda}{dr} \right|_{r=a_c} = B_c \quad (V-21)$$

Par ailleurs, la fonction d'onde  $\psi$  de la particule relative obéit également par construction à l'équation de Schrödinger radiale :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \frac{d^2 \psi}{dr^2} + U_0 \psi = E \psi \quad (V-22)$$

On multiplie (V-22) par le complexe conjugué  $X_\lambda^*$  de la fonction propre  $X_\lambda$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \frac{d^2 \psi}{dr^2} X_\lambda^* + U_0 \psi X_\lambda^* = E \psi X_\lambda^* \quad (V-23)$$

On prend l'équation conjuguée de (V-20) et on en multiplie les deux membres par  $\psi$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \frac{d^2 X_\lambda^*}{dr^2} \psi + U_0 X_\lambda^* \psi = E_\lambda X_\lambda^* \psi \quad (V-24)$$

En faisant la soustraction membre à membre de (V-23) et (V-24), on obtient :

$$\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \left[ \frac{d^2 X_\lambda^*}{dr^2} \psi - \frac{d^2 \psi}{dr^2} X_\lambda^* \right] = (E - E_\lambda) X_\lambda^* \psi \quad (V-25)$$

En intégrant (V-25) sur la variable  $r$ , il vient :

$$\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \left[ \frac{dX_\lambda^*}{dr} \psi - \frac{d\psi}{dr} X_\lambda^* \right]_{r=a_c} = (E - E_\lambda) \int_0^a X_\lambda^* \psi dr \quad (V-26)$$

Or, d'après (V-9), par définition :

$$C_\lambda = \int X_\lambda^* \psi dr \quad (V-27)$$

En reportant dans (V-26) on obtient en  $r = a_c$  :

$$C_\lambda = \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \left[ \frac{dX_\lambda^*}{dr} \psi - \frac{d\psi}{dr} X_\lambda^* \right]_{r=a_c}}{E - E_\lambda} \quad (V-28)$$

Comme :

$$\left. \frac{r \frac{dX_\lambda^*}{dr}}{X_\lambda^*} \right|_{r=a_c} = - \left. \frac{r \frac{dX_\lambda^*}{dr}}{X_\lambda^*} \right|_{r=a_c} = -B_c \quad (\text{V} - 29)$$

La relation (V – 37) devient :

$$C_\lambda = \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu_r} X_\lambda^*(r = a_c) \left[ \left( \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=a_c} - \frac{\left( \frac{dX_\lambda^*}{dr} \right)_{r=a_c}}{X_\lambda^*(r = a_c)} \psi(r = a_c) \right]}{E_\lambda - E} \quad (\text{V} - 30)$$

$$C_\lambda = \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu_r a} X_\lambda^*(a_c) \left[ \left( \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=a_c} - a_c \frac{\left( \frac{dX_\lambda^*}{dr} \right)_{r=a_c}}{X_\lambda^*(a_c)} \psi(a_c) \right]}{E_\lambda - E} \quad (\text{V} - 31)$$

$$C_\lambda = \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu_r a_c} X_\lambda^*(a_c) \left[ \left( \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=a_c} - B_c \psi(a_c) \right]}{E_\lambda - E} \quad (\text{V} - 32)$$

Or, on avait posé en (V – 9) la décomposition de la fonction d'onde sur les fonctions propres de l'hamiltonien de la région interne :

$$\psi = \sum_{\lambda} C_\lambda X_\lambda \quad (\text{V} - 33)$$

Donc, en reportant (V – 32) dans (V – 33), on en déduit :

$$\psi(a_c) = \sum_{\lambda} \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu_r a_c} X_\lambda^*(a_c) \left[ \left( \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=a_c} - B_c \psi(a_c) \right]}{E_\lambda - E} X_\lambda(a_c) \quad (\text{V} - 34)$$

En ayant posé  $\psi'(a_c) = (d\psi/dr)_{r=a_c}$ , (V – 34) devient :

$$\psi(a_c)[1 + B_c R] = \psi'(a_c) R \quad (\text{V} - 35)$$

où l'on a défini la fonction R par :

$$R = \sum_{\lambda} \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu_r a_c} X_\lambda^*(a_c) X_\lambda(a_c)}{E_\lambda - E} = \sum_{\lambda} \frac{\frac{\hbar^2}{2\mu_r a_c} |X_\lambda(a_c)|^2}{E_\lambda - E} \quad (\text{V} - 36)$$

On la note également :

$$R = \sum_{\lambda} \frac{\gamma_{\lambda}^2}{E_{\lambda} - E} \quad (V - 37)$$

où  $\gamma_{\lambda}^2$  est la **largeur neutronique réduite** définie par :

$$\gamma_{\lambda}^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu_r a_c} |X_{\lambda}(a_c)|^2 \quad (V - 38)$$

### c. Relation entre le déphasage et la fonction R

Pour le type de potentiel choisi, la dérivée logarithmique de la fonction d'onde à l'intérieur du puits en  $r = a_c$ , en considérant toujours l'équation de Schrödinger radiale, est donnée par l'expression :

$$\frac{\psi'(a_c)}{\psi(a_c)} = \frac{K a_c}{\operatorname{tg} K a_c} \quad (V - 39)$$

où  $K$  est le nombre d'onde dans la partie interne donnée en (2.63).

En rapprochant (V - 39) de (V - 35), on a donc :

$$\frac{\psi'(a_c)}{\psi(a_c)} = \frac{K a_c}{\operatorname{tg} K a_c} = \frac{R}{[1 + B_c R]} \quad (V - 40)$$

D'autre part, on a vu au paragraphe 2 que de la condition de continuité de la dérivée logarithmique de la fonction d'onde associée à la particule relative en  $r = a_c$  on déduit l'expression (2.59) du **déphasage**  $\delta_0$  de l'onde sortante que l'on rappelle ci-après :

$$\delta_0 = -k a_c + \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{K} \operatorname{tg} K a_c \right) \quad (V - 41)$$

En tenant compte de (40), on obtient une nouvelle expression du déphasage :

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -k a_c + \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{K} \operatorname{tg} K a_c \right) = -k a_c + \operatorname{arctg} \left( \frac{k a_c}{K a_c} \operatorname{tg} K a_c \right) \\ &= -k a_c + \operatorname{arctg} \left( k a_c \frac{R}{[1 + B_c R]} \right) \end{aligned} \quad (V - 42)$$

### d. Largeur de niveau et décalage de niveau d'énergie

En reprenant (V - 19) et en y introduisant le déphasage donné par (V - 42), la fonction de collision  $U$  s'écrit :

$$U = \exp(2i\delta_0) = \exp \left[ 2i \left( -k a_c + \operatorname{arctg} \left( k a_c \frac{R}{[1 + B_c R]} \right) \right) \right] \quad (V - 43)$$

Or on a l'identité :

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix}$$



d'où il résulte que la relation (V - 43) peut être réécrite comme :

$$U = \exp(2i\delta_0) = \exp \left[ 2i \left( -ka_c + \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + B_c R + iRka_c}{1 + B_c R - iRka_c} \right) \right] \quad (V - 44)$$

soit :

$$U = \exp(-2ika_c) \left[ \frac{1 + B_c R + iRka_c}{1 + B_c R - iRka_c} \right] \quad (V - 45)$$

À partir de (V - 18), la section efficace de diffusion s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \sigma &\approx 4\pi\lambda^2 \sin^2 \delta_0 = 4\pi\lambda^2 |1 - U|^2 \\ &= 4\pi\lambda^2 \left| 1 - \exp(-2ika_c) \left[ \frac{1 + B_c R + iRka_c}{1 + B_c R - iRka_c} \right] \right|^2 \end{aligned} \quad (V - 46)$$

Il vient :

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \left| \frac{1 + B_c R - iRka_c - \exp(-2ika_c)[1 + B_c R + iRka_c]}{1 + B_c R - iRka_c} \right|^2 \quad (V - 47)$$

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \left| \frac{[1 - \exp(-2ika_c)](1 + B_c R - iRka_c) - 2i \exp(-2ika_c)}{1 + B_c R - iRka_c} \right|^2 \quad (V - 48)$$

Sachant que :

$$1 - \exp(-2ika_c) = \exp(-ika_c) [\exp(ika_c) - \exp(-ika_c)] = 2i \sin ka_c \exp(-ika_c)$$

on obtient :

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \left| 2i \sin ka_c \exp(-ika_c) - \frac{2iRka_c \exp(-2ika_c)}{1 + B_c R - iRka_c} \right|^2 \quad (V - 49)$$

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 |i \exp(-2ika_c)|^2 \left| 2 \sin ka_c \exp(-ika_c) - \frac{2Rka_c}{1 + B_c R - iRka_c} \right|^2 \quad (V - 50)$$

Si à présent on se place à une énergie  $E$  proche d'une énergie propre  $E_\lambda$  et en faisant l'approximation que la matrice  $R$  donnée par (V - 18) se réduit à l'unique terme :

$$R \approx \frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda - E} \quad (V - 51)$$

alors (V - 51) devient :

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 |i \exp(-2ika_c)|^2 \left| 2 \sin ka_c \exp(-ika_c) - \frac{2 \frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda - E} ka_c}{1 + B_c \frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda - E} - i \frac{\gamma_\lambda^2}{E_\lambda - E} ka_c} \right|^2 \quad (V - 52)$$

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 |i \exp(-2ika_c)|^2 \left| 2 \sin ka \exp(-ika_c) - \frac{2\gamma_\lambda^2 ka_c}{E_\lambda - E + B_c \gamma_\lambda^2 - i\gamma_\lambda^2 ka_c} \right|^2 \quad (V-53)$$

$$\sigma \approx 4\pi\lambda^2 \left| 2 \sin ka_c \exp(ika_c) - \frac{\Gamma_\lambda}{E_\lambda - E + \Delta_\lambda - i\frac{\Gamma_\lambda}{2}} \right|^2 \quad (V-54)$$

où l'on a défini :

- la **largeur du niveau d'énergie  $\lambda$**  :

$$\Gamma_\lambda = 2\gamma_\lambda^2 ka_c = 2\gamma_\lambda^2 p_0 \quad (V-55)$$

puisque d'après le tableau 25 le **facteur de pénétrabilité** est  $p_0 = \rho = ka_c$  et en rappelant que seules les ondes « s » ( $l = 0$ ) ont été considérées dans cet exemple ; ce résultat est donc cohérent avec la relation (V-16).

- le **décalage de niveau d'énergie** :

$$\Delta_\lambda = \gamma_\lambda^2 B_c \quad (V-56)$$

dont on voit qu'il dépend de la condition  $B_c$  à la frontière exprimée par la relation (V-29).

On remarquera que dans (V-54), le terme  $2 \sin ka_c \exp(ika_c)$  est relatif à l'onde diffusée par une sphère dure de rayon  $a_c$ .

Dans le cas du puits carré, l'expression exacte de la section efficace et son expression plus générale (V-54) coïncident si  $B_c = 0$ , autrement dit si le décalage est nul.

### ***Cas du domaine non résolu***

On rappelle que le domaine non résolu est le domaine en énergie au sein duquel les résonances sont très proches les unes des autres, se recouvrant de façon significative. C'est la raison pour laquelle une approche statistique apparaît indiquée. Celle-ci consiste à considérer que les niveaux d'énergie du noyau composé sont distribués selon une loi de probabilité. Il s'ensuit que les éléments de la matrice de l'hamiltonien dans l'équation de Schrödinger à résoudre sont aléatoires. Par conséquent, une **section efficace moyenne** sera obtenue en moyennant la matrice de collision sur plusieurs résonances sur un intervalle d'énergie défini autour d'une énergie donnée. On a ainsi :

- la section efficace de **réaction de diffusion élastique** :

$$\langle \sigma_{cc} \rangle = \pi\lambda^2 \langle |1 - U_{cc}|^2 \rangle \quad (V-57)$$

- la section efficace **de réaction non élastique** qui regroupe l'ensemble des réactions nucléaires hors la réaction de diffusion élastique :

$$\langle \sigma_{cr} \rangle = \pi\lambda^2 (1 - \langle |U_{cc}|^2 \rangle) \quad (V-58)$$

- la **section efficace totale**  $\sigma_c$  est obtenue par la sommation sur les canaux de sortie  $c'$  :

$$\langle \sigma_c \rangle = \sum_{c'} \sigma_{cc'} = 2\pi\lambda^2 \sum_{c'} (1 - \text{Re}(\langle U_{cc'} \rangle)) \quad (\text{V} - 59)$$

En résumé, théoriquement si l'on fournit au formalisme de la matrice **R** les valeurs des paramètres de résonance (obtenus à partir de mesures), la matrice de collision **U** est complètement connue, alors celui-ci permet de calculer les sections efficaces de l'interaction d'un neutron avec un noyau atomique cible selon leurs expressions indiquées plus haut.

Du formalisme de la **théorie de la matrice R** on dérive les différents formalismes mentionnés dans le tableau 22 au paragraphe 12. Par exemple, la dérivation du **formalisme de Breit-Wigner multiniveaux** donne pour l'expression de la section efficace de diffusion du neutron<sup>190</sup> :

$$\sigma_n(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l \sum_{j=|l-\frac{1}{2}|}^{l+\frac{1}{2}} \sum_{J=|L-j|}^{L+j} g_J |1 - U_{nn}^{lJJ}|^2 \quad (\text{V} - 60)$$

$$\sigma_n(E) = \frac{\pi}{k^2} \sum_l \left[ \sum_J g_J \left\{ \left( 1 - \cos 2\delta_l - \sum_{\lambda} \frac{\Gamma_{\lambda n}}{\Gamma_{\lambda}} \frac{2}{1 + x_{\lambda}^2} \right)^2 + \left( \sin 2\delta_l + \sum_{\lambda} \frac{\Gamma_{\lambda n}}{\Gamma_{\lambda}} \frac{2}{1 + x_{\lambda}^2} \right)^2 \right\} - 2D_l(1 - \cos 2\delta_l) \right] \quad (\text{V} - 61)$$

avec :

$$U_{nn}^{lJJ} = e^{2i\delta_l} - \sum_{\lambda} \frac{i\Gamma_{\lambda n}}{E_{\lambda} - E - \frac{i\Gamma_{\lambda}}{2}} \quad (\text{V} - 62)$$

$$x_{\lambda} = \frac{2(E - E_{\lambda})}{\Gamma_{\lambda}} \quad (\text{V} - 63)$$

$$D_l = (2l + 1) - \sum_{J=|l-\frac{1}{2}|}^{l+\frac{1}{2}} g_J \quad (\text{V} - 64)$$

<sup>190</sup> R. E. MacFarlane, A. C. Kahler, « Methods for Processing ENDF/B-VII with NJOY », *Nuclear Data Sheets*, 111, 2739–2890, 2010, § D « Resonance Representations », pp. 2748, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2010.11.001>.

La **théorie de la matrice  $R$**  s'applique également aux cas où le projectile est une **particule chargée**.

## Annexe VI : calcul des sections efficaces dans le domaine non résolu

Dans le cas d'une **réaction nucléaire quelconque**, la **loi de distribution des largeurs** permet en particulier de calculer le terme  $\langle \frac{\Gamma_{n,l_j} \Gamma_r}{\Gamma} \rangle$  figurant dans l'expression (7.13) du paragraphe 7 des sections efficaces partielles dans le **domaine non résolu**.

En notant par raison de simplicité «  $a$  » et «  $b$  » respectivement une voie d'entrée et une voie de sortie, on a  $\langle \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \rangle \neq \frac{\langle \Gamma_a \rangle \langle \Gamma_b \rangle}{\langle \Gamma \rangle}$  et  $\langle \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \rangle$  est donné par la **formule de Dresner** <sup>191</sup> :

$$\langle \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \rangle = \frac{\langle \Gamma_a \rangle \langle \Gamma_b \rangle}{\langle \Gamma \rangle} \mathcal{S}_{a,b} \quad (\text{VI} - 1)$$

où  $\mathcal{S}_{a,b}$  est appelé « **facteur correctif de Dresner** », caractérisant les **fluctuations statistiques** relatives aux largeurs de la voie d'entrée  $a$  et de la voie de sortie  $b$ , et dont l'expression est explicitée dans la référence mentionnée.

On a vu précédemment qu'une relation existe entre **coefficient de transmission**  $T_i$ , **largeur moyenne**  $\langle \Gamma_i \rangle$  et **densité de niveaux d'énergie**  $\rho_i$  :

$$\langle T_i \rangle = 2\pi \rho_i \langle \Gamma_i \rangle, \langle T \rangle = 2\pi \rho_j \langle \Gamma \rangle \quad (\text{VI} - 2)$$

Ici on a  $\rho_a = \rho_b = \rho_c = \rho_j$ , car voie d'entrée et voie de sortie ont le même spin et la même parité (lois de conservation du spin et de la parité dans une réaction nucléaire). En remplaçant les largeurs moyennes par leurs expressions en fonction du coefficient de transmission, on obtient :

$$\langle \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \rangle = \frac{\langle T_a \rangle \langle T_b \rangle}{\langle T \rangle} \frac{\mathcal{S}_{a,b}}{2\pi \rho_a} \quad (\text{VI} - 3)$$

On en déduit que la section efficace de la réaction ( $a, b$ ) :

$$\langle \sigma_{ab} \rangle = \pi \lambda_a^2 2\pi \rho_a g_a \langle \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \rangle \quad (\text{VI} - 4)$$

devient :

$$\langle \sigma_{ab} \rangle = \pi \lambda_a^2 g_a \frac{\langle T_a \rangle \langle T_b \rangle}{\langle T \rangle} \mathcal{S}_{a,b} \quad (\text{VI} - 5)$$

<sup>191</sup> N. M. Larson, *Updated users guide for SAMMY: multilevel R-matrix fits to neutron data using Bayes equations*, ORNL/TM-9179/R8, ENDF-364/R2, Nuclear Science and Technology Division, UT Batelle, 2008, pp. 503-507.

### Remarques

- De la représentation des valeurs expérimentales des largeurs partielles sous forme d'une distribution de probabilité en  $\chi^2$ , il est possible de déduire le nombre de degrés de liberté et donc le nombre de voies de sorties du mode de désexcitation observé.
- Une expression et une estimation de la largeur  $\Gamma_\gamma$  peuvent être obtenues en utilisant la **règle d'or de Fermi** qui donne la probabilité de transition d'un système quantique d'un état ( $i$ ) vers un état ( $j$ ) :

$$\frac{\Gamma_{\gamma i}}{\hbar} = \lambda_{ij} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{ij}|^2 \rho(u) \quad (\text{VI} - 6)$$

où  $H_{ij}$  est l'élément de matrice de l'hamiltonien associé à la transition et  $\rho(u)$  est la densité de niveaux à l'énergie  $u$ .

## Annexe VII : équations de Schrödinger relative à deux particules en interaction

On a vu dans le chapitre 7 que l'étude du mouvement à 6 dimensions de deux particules respectivement de masses  $m_1$  et  $m_2$  et de positions  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  qui interagissent pouvait être ramenée à deux problèmes découplés à 3 dimensions en introduisant un **système de particules fictives équivalent** mais mathématiquement plus aisé à traiter :

- la **particule relative** de masse :

$$\mu_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{VII} - 1)$$

- le **centre de masse** de masse :

$$m_C = m_1 + m_2 \quad (\text{VII} - 2)$$

Les deux particules se mouvant sous l'effet de forces mutuelles, la force totale qui s'exerce sur le centre de masse est nulle et par conséquent la vitesse du centre de masse est constante.

Le but visé ici est de passer de l'équation de Schrödinger régissant la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , où  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  sont leurs positions respectives dans le référentiel du laboratoire, à deux équations formellement similaires, l'une associée au centre de masse de masse  $m_C$  et l'autre à la particule relative de masse réduite  $\mu_r$ .

L'équation de Schrödinger décrivant le système des deux particules (1) et (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + U(\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ = E \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \end{aligned} \quad (\text{VII} - 3)$$

On adopte ici le système de coordonnées cartésiennes.

Les positions des particules (1) et (2) sont alors notées :

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2) \quad (\text{VII} - 4)$$

Les positions  $\vec{r}$  de la particule relative et  $\vec{R}$  du centre de masse sont définies comme suit :

$$\vec{r} = (x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2, z = z_1 - z_2) \quad (\text{VII} - 5)$$

$$\vec{R} = \left( X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, Z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (\text{VII} - 6)$$

Dans (VII - 3) les deux laplaciens s'explicitent selon (VII - 7) :

$$\Delta_1 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1^2}, \quad \Delta_2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_2^2} \quad (\text{VII} - 7)$$

Les relations (VII - 4) indiquent que les coordonnées  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  s'expriment inversement en fonction de  $\vec{r}$  et  $\vec{R}$  et par conséquent  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \equiv \psi(\vec{r}, \vec{R}) \equiv \psi$ .

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial x_1} &\equiv \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial x} + \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial X} \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (\text{VII} - 8)$$

puisque d'après (VII - 5) et (VII - 6) :

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial x_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (\text{VII} - 9)$$

En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{R})}{\partial x_1} \right) \frac{\partial X}{\partial x_1}$$

ou, en allégeant les notations :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right) \frac{\partial X}{\partial x_1}$$

En utilisant (VII - 8) et (VII - 9), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

soit :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \quad (\text{VII} - 10)$$

De même, on a pour la coordonnée  $x_2$  :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \quad (\text{VII} - 11)$$

Et ainsi de suite pour les autres variables  $y_1, z_1, y_2, z_2$  :



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} + \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \quad (\text{VII} - 12)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \quad (\text{VII} - 13)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z} + \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \quad (\text{VII} - 14)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_2^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \quad (\text{VII} - 15)$$

En introduisant (VII – 10), (VII – 11), (VII – 12), (VII – 13), (VII – 14) et (VII – 15) dans l'équation de Schrödinger (3), on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{\hbar^2}{2m_1 m_2} (m_1 + m_2) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) \\ & \quad + U(\vec{r})\psi = E\psi \\ & -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_c} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) + U(\vec{r})\psi \\ & \quad = E\psi \end{aligned} \quad (\text{VII} - 16)$$

Comme le potentiel  $U(\vec{r})$  ne dépend que de  $\vec{r}$ , on peut rechercher une solution  $\psi(\vec{r}, \vec{R})$  sous la forme factorisée suivante :

$$\psi(\vec{r}, \vec{R}) = \psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R}) \quad (\text{VII} - 17)$$

On note :

$$\Delta_r \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\Delta_R \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2}$$

On introduit la forme factorisée (VII – 17) de  $\psi$  dans (VII – 16) :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \Delta_r [\psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R})] - \frac{\hbar^2}{2m_c} \Delta_R [\psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R})] + U(\vec{r})\psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R}) = E\psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R})$$

En observant que le laplacien  $\Delta_r$  n'agit que sur  $\vec{r}$  et le laplacien  $\Delta_R$  que sur  $\vec{R}$ , il vient :

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2\mu_r}\psi_R(\vec{R})\Delta_r\psi_r(\vec{r}) - \frac{\hbar^2}{2m_c}\psi_r(\vec{r})\Delta_R\psi_R(\vec{R}) + U(\vec{r})\psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R}) \\
= E\psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R})
\end{aligned} \tag{VII - 18}$$

La division de chacun des deux membres de (V – 18) par le produit  $\psi_r(\vec{r})\psi_R(\vec{R})$  conduit à :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \frac{\Delta_r\psi_r(\vec{r})}{\psi_r(\vec{r})} + U(\vec{r}) \right] + \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_c} \frac{\Delta_R\psi_R(\vec{R})}{\psi_R(\vec{R})} \right] = E \tag{VII - 19}$$

On peut décomposer la constante  $E$  en deux termes :

$$E = E_r + E_R \tag{VII - 20}$$

Les constantes  $E_r$  et  $E_R$  s'interprètent comme les énergies cinétiques respectivement de la particule relative et du centre de masse.

Les variables  $\vec{r}$  et  $\vec{R}$  étant indépendantes, l'équation (VII – 19) se décline alors en deux équations de Schrödinger découplées :

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \frac{\Delta_r\psi_r(\vec{r})}{\psi_r(\vec{r})} + U(\vec{r}) = E_r \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu_r} \Delta_r\psi_r(\vec{r}) + U(\vec{r})\psi_r(\vec{r}) = E_r\psi_r(\vec{r}) \tag{VII - 21}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_c} \frac{\Delta_R\psi_R(\vec{R})}{\psi_R(\vec{R})} = E_R \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_c} \Delta_R\psi_R(\vec{R}) = E_R\psi_R(\vec{R}) \tag{VII - 22}$$

L'équation (VII – 21), qui concerne l'état de la particule relative d'énergie cinétique  $E_r$ , porte les caractéristiques du système de deux particules (1) et (2) en interaction *via* le potentiel  $U(\vec{r})$ .

L'équation (VII – 22) caractérise l'état du centre de masse dont l'énergie cinétique est  $E_R$  et animé d'un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse constante  $v_c = \sqrt{2m_c E_R}$ .

## Annexe VIII : calcul de la variance de la loi de Porter et Thomas

La loi de Porter et Thomas s'écrit (voir § 8) :

$$q(y, \nu) = \frac{\frac{\nu}{2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{\nu}{2}y\right]^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}y} \quad (\text{VIII} - 1)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 &= \frac{\frac{\nu}{2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty y^2 \left[\frac{\nu}{2}y\right]^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}y} dy \\ &\quad - \left[ \frac{\frac{\nu}{2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^\infty y \left[\frac{\nu}{2}y\right]^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\nu}{2}y} dy \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{VIII} - 2)$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variable :

$$Y = \frac{\nu}{2}y \quad (\text{VIII} - 3)$$

Elle s'écrit alors :

$$\left(\frac{2}{\nu}\right)^3 \int_0^\infty Y^{\frac{\nu}{2}+1} e^{-Y} dY$$

Comme

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t} dt \quad (\text{par définition}) \quad (\text{VIII} - 4)$$

et

$$\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) = \frac{\nu}{2} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \quad (\text{formule de récurrence}) \quad (\text{VIII} - 5)$$

le premier terme de (VIII - 2) devient :

$$\begin{aligned} \langle y^2 \rangle &= \frac{\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 2\right) = \frac{\left(\frac{2}{\nu}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) = \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 \frac{\nu}{2} \left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \\ &= 1 + \frac{2}{\nu} \end{aligned} \quad (\text{VIII} - 6)$$

Le deuxième terme de (2) s'écrit, compte tenu du changement de variable (VIII - 3) ainsi que des relations (VIII - 4) et (VIII - 5) :

$$\langle y \rangle^2 = \left[ \frac{\frac{\nu}{2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 \int_0^\infty Y^{\frac{\nu}{2}+1} e^{-Y} dY \right]^2 = \left[ \frac{\frac{2}{\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \right]^2 = \frac{2}{\nu} \times \frac{\nu}{2} \quad (\text{VIII} - 7)$$

Finalement, la variance cherchée a pour expression :

$$\sigma^2 = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 = 1 + \frac{2}{\nu} - 1 = \frac{2}{\nu} \quad (\text{VIII} - 8)$$

## Annexe IX : calcul du courant de probabilité

On établit ci-après les expressions (2.16) et (2.17) des courants de probabilité unitaire associés à l'onde entrante et à l'onde diffusée relatives au neutron interagissant avec un noyau cible, à partir de l'expression générique de ce courant de probabilité donnée par la mécanique quantique.<sup>192</sup>

En coordonnées sphériques, pour la coordonnée  $z$ , et les neutrons incidents de vitesse  $v$  formant un faisceau parallèle de particules représentées par l'onde  $\psi_{inc} = \exp(ikz)$ , le courant de probabilité est défini par la relation :

$$j_{inc} = \frac{\hbar}{2mi} \left[ \psi_{inc}^* \frac{\partial \psi_{inc}}{\partial z} - \psi_{inc} \frac{\partial \psi_{inc}^*}{\partial z} \right] \quad (\text{IX} - 1)$$

$$j = \frac{\hbar}{2mi} [\exp(-ikz) ik \exp(ikz) - \exp(ikz) (-ik \exp(-ikz))] = \frac{\hbar k}{m} \quad (\text{IX} - 2)$$

Or, par définition :

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{mv}{\hbar} \quad (\text{IX} - 3)$$

On en déduit immédiatement en reportant (IX - 3) dans (IX - 2) :

$$j_{inc} = v \quad (\text{IX} - 4)$$

On rappelle que l'onde sortante diffusée  $\psi_s(\vec{r})$  a pour forme (voir relations (2.13) et (2.15) ainsi que figure 4) :

$$\psi_s(\vec{r}) = f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{IX} - 5)$$

Le courant de probabilité correspondant est :

$$j_s = \frac{\hbar}{2mi} \left[ \psi_s^* \frac{\partial \psi_s}{\partial r} - \psi_s \frac{\partial \psi_s^*}{\partial r} \right] \quad (\text{IX} - 6)$$

En introduisant (IX - 5) dans (IX - 6), on obtient :

$$j_s = \frac{\hbar}{2mi} \left[ |f(\theta, \varphi)|^2 \frac{e^{-ikr}}{r} \left( -\frac{e^{ikr}}{r^2} + ik \frac{e^{ikr}}{r} \right) - |f(\theta, \varphi)|^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left( -\frac{e^{-ikr}}{r^2} - ik \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] \quad (\text{IX} - 7)$$

<sup>192</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann, Paris, 1973, Tome I, pp. 237-240.

$$j_s = \frac{\hbar}{2mi} \left[ ik \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2} \right] \quad (\text{IX} - 8)$$

Soit avec (IX - 3) :

$$j_s = \frac{|f(\theta, \varphi)|^2 v}{r^2} \quad (\text{IX} - 9)$$

## Annexe X : résolution de l'équation de Schrödinger avec décomposition de la fonction d'onde en ondes partielles

On se place dans le cas de figure où il n'y a pas de potentiel nucléaire. La fonction d'onde d'une particule libre de masse  $m$ , d'énergie cinétique  $E$ , de quantité de mouvement  $p = mv$ , est gouvernée par l'équation de Schrödinger<sup>193 194</sup> :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}) = E \quad (\text{X} - 1)$$

que l'on peut réécrire :

$$-\Delta\psi(\vec{r}) = \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(\vec{r}) = \frac{p^2}{\hbar^2}\psi(\vec{r}) = k^2\psi(\vec{r}) \quad (\text{X} - 2)$$

où  $k$  est le nombre d'onde.

On a donc l'équation à résoudre :

$$\Delta\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{X} - 3)$$

La fonction d'onde de la particule incidente (onde plane) est :

$$\psi = \exp(ikz) \quad (\text{X} - 4)$$

Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  étant orienté selon l'axe  $Oz$ , il est solution de (X - 3), puisque, en effet :

$$\Delta\psi(z) = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = i^2k^2\exp(ikz) = -k^2\exp(ikz) \quad (\text{X} - 5)$$

D'où, en remplaçant (X - 5) dans (X - 3) :

$$\Delta\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = -k^2\exp(ikz) + k^2\exp(ikz) = 0$$

La décomposition de la fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  en ondes partielles consiste à rechercher la solution (X - 3) sous la forme du développement en série suivant :

$$\psi(\vec{r}) = \sum_l \psi_l(\vec{r}) \quad (\text{X} - 6)$$

où  $\psi_l(\vec{r})$  est la fonction d'onde partielle d'ordre  $l$ .

<sup>193</sup> P. Fröbrich, R. Lipperheide, *Theory of Nuclear Reactions*, Clarendon Press, Oxford, 1996, p. 8-10.

<sup>194</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Hermann, Paris, 1973, Tome I, pp. 918 - 238.

L'équation de Schrödinger à résoudre s'écrit par suite :

$$\Delta \sum_l \psi_l(\vec{r}) + k^2 \sum_l \psi_l(\vec{r}) = 0 \quad (\text{X} - 7)$$

$$\sum_l [\Delta \psi_l(\vec{r}) + k^2 \psi_l(\vec{r})] = 0 \quad (\text{X} - 8)$$

On recherche les solutions  $\psi_l(\vec{r})$  sous une forme factorisée d'une fonction de l'espace  $F_l(r)$  et une fonction  $H_l(\theta)$  de la direction de propagation de la particule relative, de manière similaire à la démarche calculatoire présentée dans l'annexe II du chapitre 4, paragraphe 7, équation (II -13), en se plaçant en coordonnées sphériques (la variable azimutale  $\varphi$  n'est pas à considérer ici en raison de l'isotropie de la diffusion vis-à-vis de cette variable) :

$$\psi_l(\vec{r}) = F_l(r)H_l(\theta) \quad (\text{X} - 9)$$

L'explicitation du laplacien en coordonnées sphériques dans (X - 8) conduit alors aux équations suivantes auxquelles doivent obéir les fonctions d'onde partielles  $\psi_l(\vec{r})$  :

$$\frac{1}{F_l(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF_l(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 + \frac{1}{H_l(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH_l(\theta)}{d\theta} \right) = 0 \quad (\text{X} - 10)$$

L'existence d'une solution pour toute valeur de  $r$  et  $\theta$  quel que soit  $l$  conduit à traiter les deux équations suivantes :

$$\frac{1}{F_l(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF_l(r)}{dr} \right) + k^2 r^2 = \Lambda \quad (\text{X} - 11)$$

$$\frac{1}{H_l(\theta) \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dH_l(\theta)}{d\theta} \right) = -\Lambda \quad (\text{X} - 12)$$

où  $\Lambda$  est une constante réelle.

L'expression (X - 12) est l'équation différentielle de Legendre dont le caractère physique des solutions impose :

$$\Lambda = l(l + 1) \text{ où } l \text{ est un entier} \quad (\text{X} - 13)$$

Les solutions de (X - 12) sont les polynômes de Legendre :

$$H_l(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad (\text{X} - 14)$$



L'équation radiale devient par conséquent :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF_l(r)}{dr} \right) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] F_l(r) = 0 \quad (\text{X} - 15)$$

Il est commode de poser :

$$F_l(r) = C_l \frac{R_l(r)}{kr} \quad (\text{X} - 16)$$

où  $C_l$  est une constante à déterminer.

On s'intéresse à la forme asymptotique de  $F_l(r)$  et  $R_l(r)$  pour les grandes valeurs de  $r$  et l'on montre que :

$$F_l(r) = C_l \frac{R_l(r)}{kr} = C_l \frac{\sin \left( kr - l \frac{\pi}{2} \right)}{kr} \quad (\text{X} - 17)$$

On identifie maintenant les deux expressions (X - 4) et (X - 17) de la fonction d'onde plane, et en tenant compte de (X - 9) et de (X - 14), on obtient :

$$\begin{aligned} \psi &\equiv \exp(ikz) \equiv \psi(r, \cos \theta) = \exp(ikr \cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{\sin \left( kr - l \frac{\pi}{2} \right)}{kr} P_l(\cos \theta) \quad (\text{X} - 18) \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients  $C_l$  pour  $r$  fixé, on calcule de deux façons différentes l'intégrale :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(r, \cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \quad (\text{X} - 19)$$

- En remplaçant dans (X - 19)  $\psi(r, \cos \theta)$  par son expression  $\exp(ikr \cos \theta)$ , en intégrant par parties et en négligeant le terme en  $1/r^2$ , car on se place aux grandes valeurs de  $r$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \psi(r, \cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) &= \\ \int_{-1}^{+1} \exp(ikr \cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) &\approx \frac{1}{ikr} [e^{ikr} - (-)^l e^{-ikr}] \quad (\text{X} - 20) \end{aligned}$$

sachant que  $P_l(1) = 1$  et  $P_l(-1) = (-1)^l$

- En intégrant les deux membres de (X - 18), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \psi(r, \cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \\ = \int_{-1}^{+1} \sum_{l'=0}^{\infty} C_{l'} \frac{\sin\left(kr - l' \frac{\pi}{2}\right)}{kr} P_{l'}(\cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) \end{aligned} \quad (X-21)$$

En utilisant la relation d'orthogonalité entre les polynômes de Legendre :

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (X-22)$$

il s'ensuit :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(r, \cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta) = C_l \frac{2}{2l+1} \frac{\sin\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right)}{kr} \quad (X-23)$$

On écrit l'égalité entre (X-23) et (X-20) :

$$C_l \frac{2}{2l+1} \frac{\sin\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right)}{kr} = \frac{1}{ikr} [e^{ikr} - (-)^l e^{-ikr}] \quad (X-24)$$

On en déduit :

$$C_l = (2l+1) i^l \quad (X-25)$$

Par conséquent, on obtient les formes asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned} \psi \equiv \exp(ikz) \equiv \psi(r, \cos \theta) &= \exp(ikr \cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin\left(kr - l \frac{\pi}{2}\right)}{kr} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (X-26)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \psi \equiv \exp(ikz) \equiv \psi(r, \cos \theta) &= \exp(ikr \cos \theta) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[ \frac{e^{ikr}}{kr} - (-)^l \frac{e^{-ikr}}{kr} \right] P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (X-27)$$

### Remarque

En fait, (X-26) et (X-27) sont les formes asymptotiques de :

$$\exp(ikr\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)j_l(kr) P_l(\cos\theta) \tag{X-28}$$

dans laquelle les fonctions  $j_l(kr)$  sont les **fonctions de Bessel sphériques**.

La **figure 42** ci-après en représente les trois premières et l'on a en particulier pour  $l = 0$  :

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr} \tag{X-29}$$

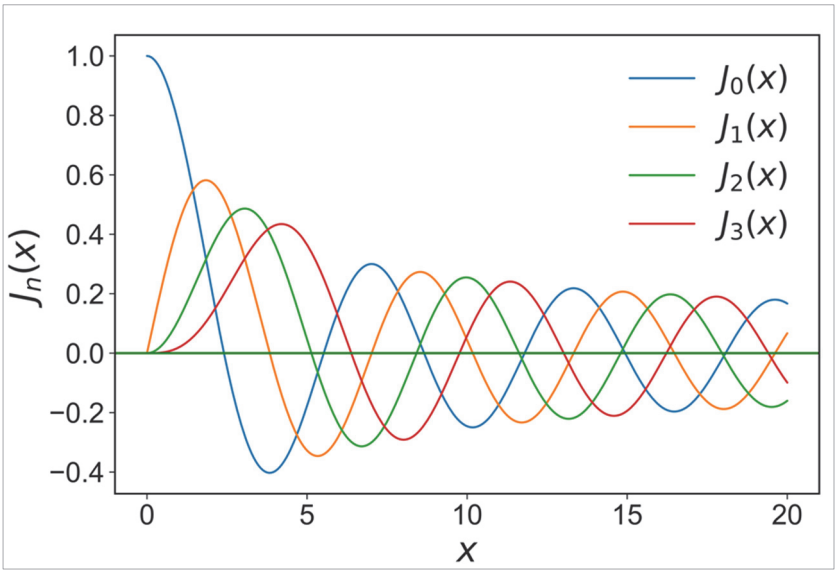


Figure 48. Les quatre premières fonctions de Bessel sphériques.



# 9

## **La fission induite par les neutrons**



Ce chapitre expose les principaux aspects de la **réaction de fission induite par un neutron** d'énergie **inférieure à 20 MeV**, dont plusieurs d'entre eux sont communs avec la **fission spontanée**. La fission induite par un neutron est le phénomène physique de base sur lequel repose le principe de production d'énergie par un réacteur nucléaire. La réaction de fission est provoquée dans le cœur du réacteur, plus précisément au sein du combustible nucléaire constitué de noyaux atomiques qui, percutés par un neutron, peuvent être « coupés » généralement en deux morceaux, les « **fragments de fission** » devenant après l'émission de **gamma prompts** et **neutrons prompts** de fission des « **produits de fission** ». On présente également les principales grandeurs physiques attachées à ce phénomène, telles que l'**énergie libérée par la fission**, sa répartition entre les différentes particules qui interviennent dans ce processus nucléaire, la production de **neutrons prompts** et **retardés**, les **rendements de fission** qui caractérisent la nature et le taux de production des produits de fission. Dans le domaine de la physique des réacteurs nucléaires, les enjeux de la connaissance suffisamment précise de la fission sont multiples. On peut ainsi citer la détermination de la **puissance** délivrée par le cœur du réacteur au cours de son fonctionnement, sa « **puissance résiduelle** » à l'arrêt, l'**inventaire isotopique** des combustibles irradiés – ou « **bilan matière** » – qui intéressent les **études de pilotage et d'exploitation d'un réacteur**, de **sûreté-criticité** et de **radioprotection** relatives aux diverses opérations intervenant dans les **installations du cycle du combustible**. Les grandeurs physiques que sont les rendements de fission, les spectres des particules émises et leurs multiplicités sont désignées dans la littérature par le terme d'**observables de fission**, car elles font l'objet de mesures permettant de valider les modèles nucléaires et de fournir des informations sur le mécanisme de la fission nucléaire<sup>1</sup>.

## 1. Description schématique de la fission nucléaire et grandeurs physiques associées

La **fission d'un noyau atomique lourd**, c'est-à-dire de nombre de masse  $A$  élevé, provoquée par un neutron a été expérimentalement découverte<sup>2</sup> en 1938 indépendamment par Otto Hahn et Fritz Strassmann<sup>3</sup> d'un côté, et Frédéric Joliot<sup>4</sup> de l'autre, mais c'est à Lise Meitner<sup>5</sup> <sup>6</sup> en lien avec Otto Robert Frisch que l'on doit une première compréhension

<sup>1</sup> O. Sérot, « Physique des réacteurs – Modélisation et évaluation des observables de fission », *Techniques de l'ingénieur* BN 3 009 V1, 10 juillet 2020.

<sup>2</sup> J. Treiner, « Qui a découvert la fission nucléaire ? », *Reflets de la Physique* n° 50, pp. 30-35, 2016, <https://doi.org/10.1051/refdp/201650030>. Voir aussi l'hypothèse d'Ida Tacke-Noddack émise en 1934.

<sup>3</sup> O. Hahn, F. Strassmann, « Concerning the Existence of Alkaline Earth Metals Resulting from Neutron Irradiation of Uranium », *Naturwissenschaften*, 27, 11, 89, 163, 1939, <https://doi.org/10.1119/1.1970127>.

<sup>4</sup> H. Halban, F. Joliot, L. Kowarski, F. Perrin, « Mise en évidence d'une réaction nucléaire en chaîne au sein d'une masse uranifère », *J. Phys. Radium*, 1939, 10 (10), pp. 428-429, <https://doi.org/10.1051/jphysrad:019390010010042800>.

<sup>5</sup> L. Meitner, O. R. Frisch, « Disintegration of Uranium by Neutrons: a New Type of Nuclear Reaction », *Nature*, 143, 1939, pp. 239-240, <https://doi.org/10.1038/143239a0>.

<sup>6</sup> L. Meitner, O. R. Frisch, « Products of the Fission of the Uranium Nucleus », *Nature*, volume 143, 1939, pp. 471-472, <https://doi.org/10.1038/143471a0>.

théorique de ce phénomène et l'introduction du terme de **fission** emprunté au domaine de la biologie cellulaire.

La fission consiste en une fragmentation du noyau composé formé par le noyau cible et le neutron incident, le plus souvent en deux entités – **fission binaire** –, plus rarement en trois – **fission ternaire** –, s'accompagnant d'une émission de neutrons et de rayonnements gamma.

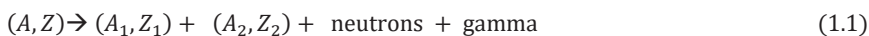
Les entités résultantes sont appelées **fragments de fission** (FF) qui, après une première désexcitation intervenant environ  $10^{-5}$  s après l'instant de la scission, sont désignés par le terme de **produits de fission** (PF). Ces derniers sont le plus fréquemment des noyaux radioactifs qui se désintègrent par des transitions  $\beta$  ( $\beta^+$ ,  $\beta^-$ ) et/ou capture électronique (CE) pour rejoindre la **vallée de stabilité**. Ces transitions radioactives sont elles-mêmes accompagnées d'une émission de **gamma** et de **neutrinos** ou d'**antineutrinos**.

Certains noyaux fissionnent spontanément, comme cela a été vu dans le chapitre 5 consacré à la radioactivité.

Le premier modèle théorique du mécanisme de fission est dû à Bohr et Wheeler (1939)<sup>7</sup>. Il s'appuie sur le **modèle de la goutte liquide** (voir chapitre 4). D'autres modèles sont venus ultérieurement compléter la description du processus de fission au plan théorique.

Dans le cadre de la physique des réacteurs nucléaires, on est usuellement conduit à considérer les deux processus de fission binaire d'où résulte la formation de deux **produits de fission**,  $(A_1, Z_1)$  et  $(A_2, Z_2)$ .

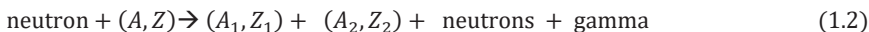
#### ▪ La fission spontanée :



##### Exemples

- Curium 244 :  $^{244}_{96}\text{Cm}$  de période de fission spontanée  $1.32 \cdot 10^7$  ans alors que sa période de décroissance radioactive  $\alpha$  est de 18.1 ans.
- Californium 252 :  $^{252}_{98}\text{Cf}$  de période de fission spontanée 85 ans alors que sa période de désintégration totale incluant le processus prédominant de décroissance radioactive  $\alpha$  est de 2.65 ans (le rapport de branchement de fission spontanée est d'environ 3 %)

#### ▪ La fission binaire induite par neutron :

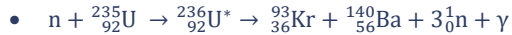


##### Exemples

- $n + ^{235}_{92}\text{U} \rightarrow ^{236}_{92}\text{U}^* \rightarrow ^{90}_{38}\text{Sr} + ^{144}_{54}\text{Xe} + 2^1_0n + \gamma$

<sup>7</sup> N. Bohr, J. A. Wheeler, « The Mechanism of Nuclear Fission », *Physical Review* 56, 426- 450, September 1, 1939, <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.56.426>.





La fission binaire n'est pas nécessairement symétrique, aussi parle-t-on de **produit de fission lourd** ( ${}^{144}_{54}\text{Xe}$  et  ${}^{140}_{56}\text{Ba}$  dans l'exemple ci-dessus) et de **produit de fission léger** ( ${}^{90}_{38}\text{Sr}$  et  ${}^{93}_{36}\text{Kr}$  dans les exemples ci-dessus).

La fission spontanée et la fission induite par un neutron peuvent également donner lieu à<sup>8</sup>  
<sup>9 10</sup> :

- une **fission ternaire** émettant trois nucléides dont un, ( $A_3, Z_3$ ), très léger par rapport aux deux autres, ( $A_1, Z_1$ ) et ( $A_2, Z_2$ ), comme par exemple le tritium ( ${}^3_1\text{H}$ ), l'hélium 6 ( ${}^6_2\text{He}$ ), le carbone 14 ( ${}^{14}_6\text{C}$ ), etc. En physique des réacteurs, la fission ternaire n'est pas à négliger puisqu'elle est responsable d'une production de noyaux radioactifs tels que le tritium et le carbone 14, qui font l'objet d'une attention toute particulière, par exemple vis-à-vis des opérations du cycle du combustible et de la surveillance des rejets radioactifs dans l'environnement ;
- une **fission quaternaire** émettant quatre nucléides, dont deux légers, comme par exemple deux noyaux d'hélium 4 ( ${}^4_2\text{He}$ , particule  $\alpha$ ).

### Remarques

- On notera l'ambiguïté que peut parfois entraîner l'emploi de l'expression « fission de l'uranium 235 » et du terme « noyau fissile » :
  - l'uranium 235 est un noyau fissile : il est sous-entendu que sous l'action d'un neutron thermique il se forme un noyau composé, l'uranium 236, qui est susceptible de fissionner (on évoquera dans le paragraphe 3 la complexité de ce processus) ;
  - l'uranium 235 peut fissionner spontanément avec une période de  $7.04 \cdot 10^8$  ans ;
  - l'uranium 238 n'est pas fissile par interaction avec un neutron de basse énergie, mais il l'est pour un neutron d'énergie de 3 MeV.
- Si la physique des réacteurs nucléaires s'intéresse dans ses applications pratiques aux **produits de fission**, la physique nucléaire fait la distinction entre **fragments de fission** et **produits de fission**, eux-mêmes subdivisés en **produits de fission primaires**, issus des fragments de fission ayant émis les neutrons prompts, et **produits de fission secondaires** formés après au moins une désintégration bêta, comme on le verra par la suite.

<sup>8</sup> T. San-Tsiang, H. Zah-Wei, R. Chastel, L. Vigneron, « Nouveaux modes de fission de l'uranium Tripartition et quadripartition », *J. Phys. Radium*, Volume 8, Numéro 6, juin 1947, <https://doi.org/10.1051/jphysrad:0194700807020001> ; il existe des publications antérieures, par exemple : T. San-Tsiang, R. Chastel, H. Zah-Wei, L. Vigneron, « Tripartition of uranium caused by neutron capture », *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* 223, 1946, 986-7.

<sup>9</sup> M. Luis Muga, « Ternary Fission of U235 Induced by Thermal Neutrons », *Physical Review Letters* 11, 129, August 1, 1963, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.129>

<sup>10</sup> F. Gönnerwein, M. Mutterer, Y. Kopatch, « Ternary and quaternary fission », *europhysics news* january/february 2005, <http://dx.doi.org/10.1051/epn:2005104>.

Le phénomène de fission se laisse décrire qualitativement par la succession de trois principales étapes :

- une **phase d'oscillations** au cours de laquelle le noyau atomique se déforme, engendrant corrélativement une modification de son énergie potentielle ;
- l'atteinte du **point seuil** ou « **point de selle** » (*saddle point*) correspondant à un maximum de l'énergie potentielle du noyau atomique et au-delà duquel sa déformation s'amplifie irréversiblement ;
- la scission du noyau atomique en **deux fragments** qui vont s'individualiser.

La **figure 1** suivante schématise ces trois séquences :

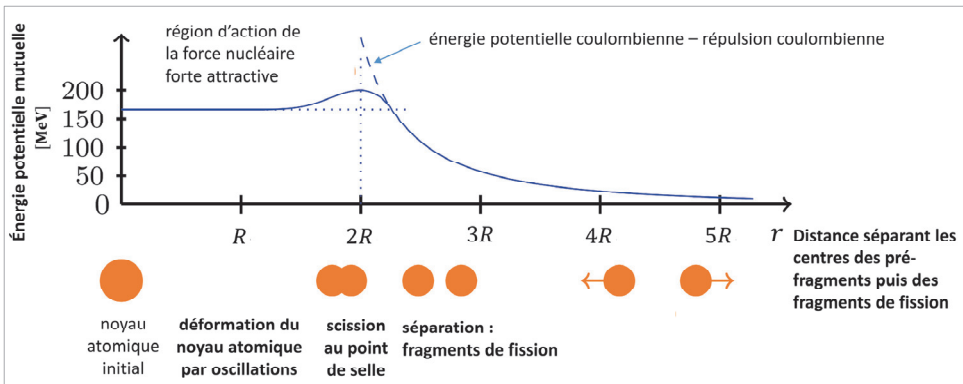


Figure 1. Description schématique du phénomène de fission binaire par la représentation de l'évolution de l'énergie potentielle mutuelle entre les préfragments puis les fragments de fission du noyau atomique.<sup>11</sup>

En raison du mouvement des nucléons en son sein et des moments électriques qui en résultent, on a vu dans le chapitre 4 que le noyau atomique en effet se déforme. Si cette **déformation** devient très importante, alors une scission en deux (voire plus) entités – les **fragments de fission** – peut intervenir. À cette déformation du noyau atomique est associée une **énergie de déformation**. On montre que celle-ci passe par un maximum et que si cette valeur est atteinte ou dépassée, alors la fission peut se produire. On conçoit aussi que si un projectile apporte une énergie à un noyau atomique donné en interagissant avec celui-ci, alors ce maximum est susceptible d'être atteint par le noyau composé formé.

La détermination de cette **énergie de déformation** est cruciale pour décrire le plus précisément et complètement possible le phénomène de fission. De nombreux modèles s'y proposent, dans le prolongement des modèles établis pour décrire la structure et les propriétés du noyau atomique (voir chapitre 4). On retrouve donc ici aussi les **approches macroscopiques** ou **phénoménologiques** comme le **modèle de la goutte liquide** et ses

<sup>11</sup> D'après R. D. Evans, *Le noyau atomique*, Dunod, Paris, 1961, p. 424, figure 3.7.

évolutions ultérieures incluant des **effets de couches** (*Finite Range Droplet Model* (FRDM)), les **modèles statistiques**, les **modèles microscopiques** (*Time Dependant Hartree-Fock-Bogoliubov*, TDHFB), les **modèles hybrides microscopiques-macroscopiques**.

Les modèles microscopiques ou partiellement microscopiques reposent sur <sup>12</sup> :

- la **théorie microscopique autoconsistante** (*self-consistent microscopic theory*) qui décrit le processus de fission dans le cadre de la mécanique quantique, se subdivisant en deux types d'approches *ab initio* et **champ moyen autoconsistant** utilisant la **théorie de la fonctionnelle de densité** (*density-functional theory*, DFT) (voir chapitre 4) ; cette approche est la plus fondamentale dans le sens où elle tente d'englober tous les effets quantiques (effets de couche, appariement des nucléons, etc.) intervenant au cours du processus de fission ;
- les **modèles stochastiques** (ou probabilistes) qui mobilisent la mécanique statistique et ses concepts (par exemple d'équilibre statistique).

De son côté, le modèle semi-empirique *GENERAL description of Fission observables* (GEF)<sup>13</sup> vise à éviter la complexité de l'approche purement microscopique, qui nécessite des ressources computationnelles conséquentes, en lui substituant des descriptions « équivalentes » semi-empiriques facilitant les calculs, fondées sur l'application d'un certain nombre de théorèmes mathématiques et l'exploitation d'une information tirée d'expériences de physique nucléaire. Ces descriptions semi-empiriques concernent différentes caractéristiques de la fission : les **canaux de fission** (*fission channel*), la **déformation des fragments de fission**, leurs **énergies d'excitation**. Les modélisations font intervenir des paramètres dont la valeur est déduite de résultats expérimentaux.

Certains auteurs ont cherché à renouveler l'approche phénoménologique du **point de scission** (*scission-point model*)<sup>14</sup>. Celle-ci est vue comme un **point de bifurcation** conduisant à différents canaux de sortie possibles (*multichannel fission*) lors de la déformation du noyau atomique. Trois formes du système fissionnant sont définies (symétrique longue (SL), asymétrique standard I (SI) et asymétrique standard II (SII)) et la liaison avec les voies de sorties possibles est établie par un col (voir **figure 2**) reliant les pré-fragments de fission dont la rupture est aléatoire (d'où le concept de *random neck rupture* introduit dans ce modèle). Chacun de ces modes de déformation contribue à la production des fragments de fission d'une nature donnée et par suite aux rendements correspondants (quantité normalisée à 100 fissions en général)<sup>15</sup>.

<sup>12</sup> K.-H. Schmidt, B. Jurado, « Review on the progress in nuclear fission », *Reports on Progress in Physics*, Vol. 81, Number 10, p. 9, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6633/aacfa7/pdf>.

<sup>13</sup> K.-H. Schmidt, B. Jurado, *General Description of Fission Observables GEF Model*, JEFF Report 24, <https://www.oecd-nea.org/databank/docs/2014/db-doc2014-1.pdf>.

<sup>14</sup> B. D. Wilkins, E. P. Steinberg, R. R. Chasman, « Scission-point model of nuclear fission based on deformed-shell effects », *Physical Review C* 14, 1832, November 1, 1976, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.14.1832>.

<sup>15</sup> U. Brosa, S. Grossmann, A. Müller, « Nuclear Scission », *Physics Report*, 197 N°4, 1990, p. 167–262, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739090114H>.

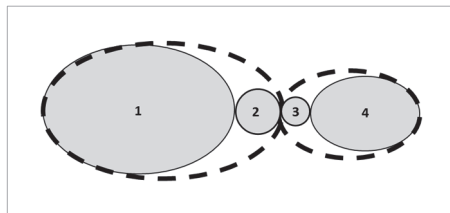


Figure 2. Le point de selle de la figure 1 suggère l'existence de deux fragments de fission individualisés et se touchant au point de tangence. On imagine ici une modélisation plus fine où deux pré-fragments (1) et (4) sont reliés par un « col » (neck) (2) et (3), dont l'objectif est de déterminer de manière plus réaliste l'énergie électrostatique totale du système fissionnant qui sera convertie en énergie cinétique finalement emportée par les deux fragments de fission.<sup>16</sup>

La multiplicité de ces modèles traduit le fait que le phénomène de la fission du noyau atomique induite par un neutron ou bien spontanée n'est pas encore complètement compris<sup>17</sup>. Cependant, ils restituent de manière complémentaire un certain nombre de propriétés de la fission et permettent d'accéder aux **observables de fission**, c'est-à-dire de quantifier les grandeurs physiques d'intérêt suivantes :

- les **constantes de désintégration** des noyaux lourds par fission spontanée ;
- l'**énergie libérée par la fission** qui se répartit entre les fragments de fission ;
- l'**émission de neutrons et de gamma prompts** : nombre et spectre en énergie ;
- la **formation des fragments de fission** : répartition isotopique ( $Z, A$ ).

La physique des réacteurs nucléaires a également besoin de disposer d'autres informations essentielles à savoir :

- l'identification des **produits de fission** : répartition isotopique ( $Z, A$ ) ;
- l'identification des produits de fission émetteurs de neutrons ou **précurseurs de neutrons « retardés »** ;
- le **nombre et le spectre en énergie des neutrons retardés** émis.

Dans la suite du présent chapitre, les principales caractéristiques de la fission sont exposées à partir du modèle de la goutte liquide auquel il est adjoit les propriétés quantiques déterminantes. On introduit en premier lieu les concepts clés que sont l'**énergie de déformation**, le **paramètre de fissilité**, la **barrière de fission**. L'**énergétique de la fission** est ensuite traitée, suivie de la caractérisation des **neutrons retardés** qui, comme cela a déjà été souligné, jouent un rôle fondamental dans le pilotage des réacteurs nucléaires.

<sup>16</sup> D'après V. Manea, A. Tudora, « Fission fragment total kinetic energy calculation for prompt neutron emission evaluation purposes », dans F.-J. Hamsch, N. Carjan (Edited by), *Proceedings of the Scientific Workshop on Nuclear Fission Dynamics and the Emission of Prompt Neutrons and Gamma Rays*, Sinaia, Romania, 27-29 September, 2010, p. 50.

<sup>17</sup> Voir par exemple : L. Audouin *et al.*, « Comment arriver à une description complète de la fission nucléaire ? », *Physique et Astrophysique Nucléaire, Nuclear Physics and Nuclear Astrophysics Town Hall Meeting*, January 30-January 31, 2020, Abbaye aux Dames, Caen, <https://indico.in2p3.fr/event/19748/>, [https://indico.in2p3.fr/event/19748/attachments/54970/74942/Fission\\_Jurado.pdf](https://indico.in2p3.fr/event/19748/attachments/54970/74942/Fission_Jurado.pdf).

## 2. La déformation du noyau atomique et le paramètre de fissilité

En partant de la formule de Bethe-Weizsäcker (chapitre 4 relation (1.9)), on constate que la variation de l'énergie de liaison qui est induite par la déformation du noyau atomique, notée symboliquement  $\epsilon$ , s'exprime comme une différence se rapportant aux deux configurations énergétiques à considérer : celle du **noyau atomique non déformé** ( $\epsilon = 0$ ) et celle du **noyau atomique déformé** ( $\epsilon \neq 0$ ).

Dans les deux cas, entrent en compétition la **variation de l'énergie de surface** ( $E_s$ ) – à laquelle se rapporte la **tension de surface** qui tend à maintenir les nucléons confinés au sein du noyau atomique – et la **variation de l'énergie coulombienne** ( $E_c$ ) – à laquelle est associée la **force répulsive** s'exerçant entre les protons du noyau atomique. Les énergies  $E_s = E_s(\epsilon)$  et  $E_c = E_c(\epsilon)$  dépendent de la forme du noyau atomique.

### Exemple

Pour une déformation nulle, correspondant à un noyau d'uranium  $^{235}_{92}\text{U}$  (supposé sphérique), on a :

$$E_{s0} = E_s(\epsilon = 0) = a_s A^{\frac{2}{3}} \approx 17 \text{ (MeV)} 235^{\frac{2}{3}} = 650 \text{ MeV}, E_{c0} = E_c(\epsilon = 0) = a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$$

$$E_{s0} = E_s(\epsilon = 0) = 0.69 \frac{92^2}{235^{1/3}} = 950 \text{ MeV}$$

(on a pris dans cet exemple numérique  $a_c = 0.69^{18}$  conduisant à une valeur cohérente avec celle de la figure 3 à l'abscisse  $\epsilon = 0$ .)

Par conséquent, la déformation  $\epsilon$  du noyau engendre une variation d'énergie  $\Delta E(\epsilon)$ , qui est définie par la différence suivante établie entre la configuration du noyau atomique ayant subi une déformation et la configuration initiale non déformée :

$$\Delta E(\epsilon) = [E_s(\epsilon \neq 0) + E_c(\epsilon \neq 0)] - [E_s(\epsilon = 0) + E_c(\epsilon = 0)] \quad (2.1)$$

La grandeur  $\Delta E(\epsilon)$  est appelée **énergie de déformation**<sup>19</sup>.

La **figure 3** montre comment varient  $E_s(\epsilon)$  et  $E_c(\epsilon)$  en fonction de la déformation  $\epsilon$  du noyau atomique, initialement considéré être une sphère de rayon  $R_0$ , est supposé prendre la forme d'une ellipse de grand axe  $R_0(1 + \epsilon)$  et de petit axe  $R_0/(1 + \epsilon)^{1/2}$ .

<sup>18</sup> R. D. Evans, *Le noyau atomique*, op. cit., p. 420, tableau 3.3 : ce tableau fournit différentes évaluations des coefficients  $a_v$ ,  $a_s$ ,  $a_c$ ,  $a_a$ , et  $\delta$  du modèle de la goutte liquide.

<sup>19</sup> A. Michaudon, « La fission », *Journal de Physique Colloques*, 1968, 29 (C1), pp.C1-51-C1-73 (Colloque C 1, Supplément au n° 1, Tome 29, janvier 1968, pp. C1-51–C1-73), <https://doi.org/10.1051/jphyscol:1968107> ; A. Michaudon, « Some Aspects of Nuclear Fission », Note CEA-N-2232. On en a repris ici partiellement l'exposé.

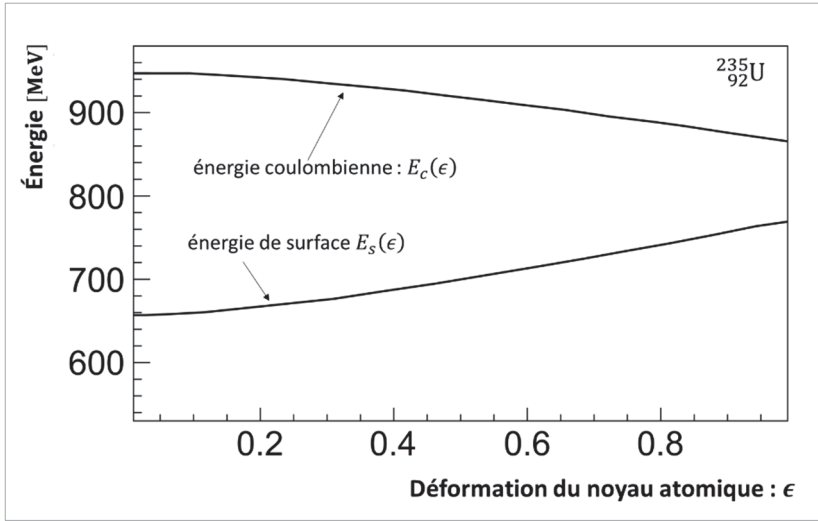


Figure 3. Exemple de variation des énergies de surface ( $E_s(\epsilon)$ ) et coulombienne ( $E_c(\epsilon)$ ) en fonction de la déformation  $\epsilon$  du noyau atomique.<sup>20</sup>

On constate qu'une déformation croissante induit une augmentation de l'énergie de surface et une diminution de l'énergie de Coulomb.

Conventionnellement, on caractérise le bilan énergétique par un paramètre noté  $\xi$  défini par le rapport<sup>21</sup> :

$$\xi = \frac{E_c(\epsilon) + E_s(\epsilon) - (E_{c0} + E_{s0})}{E_{s0}} \quad (2.2)$$

Un **paramètre adimensionnel**  $x$ , appelé **paramètre de fissilité** (*fissionability parameter*) – ou **paramètre de fission** – a été défini par Niels Bohr et John A. Wheeler :

$$x = \frac{E_{c0}}{2E_{s0}} \quad (2.3)$$

La stabilité du noyau atomique pour de petites déformations est soumise à la condition :

$$\Delta E(\epsilon) = E_s(\epsilon) + E_c(\epsilon) - (E_{s0} + E_{c0}) > 0 \quad (2.4)$$

qui traduit le fait que la variation d'énergie potentielle  $\Delta E(\epsilon)$  doit rester positive.

<sup>20</sup> D'après S. G. Prussin, *Nuclear Physics for Applications – A Model Approach*, Wiley-VCH, 2007, p. 380.

<sup>21</sup> On pourrait y ajouter une composante d'énergie de rotation : voir S. Cohen, F. Plasil, W. J. Swiatecki, « Equilibrium configurations of rotating charged or gravitating liquid masses with surface tension. II », *Annals of Physics*, Vol. 82, Issue 2, February 1974, pp. 557-596, p. 561, [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(74\)90126-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90126-2).

En annexe I sont reproduites les expressions mathématiques générales des énergies  $E_s(\epsilon) + E_c(\epsilon)$  dans lesquelles interviennent les **moments multipolaires** induits par les charges électriques (protons) en mouvement au sein du noyau atomique. En s'y reportant, on constate que la **limite de stabilité** pour de petites déformations du noyau atomique, correspondant à la prise en compte du **moment quadrupolaire uniquement**, est donnée par la condition assurant que l'énergie potentielle doit rester positive :

$$\Delta E(\epsilon) > 0 \Rightarrow 8\pi R_0^2 \vartheta - \frac{3}{5R_0} (Ze)^2 > 0 \quad (2.5)$$

où  $\vartheta$  est la tension de surface.

Or,  $E_{s0} = 4\pi R_0^2 \vartheta$  et  $E_{c0} = (3/5R_0)(Ze)^2$ , par suite, la condition précédente s'écrit aussi :

$$\Delta E(\epsilon) > 0 \Rightarrow 2E_{s0} - E_{c0} > 0 \Leftrightarrow 2E_{s0}(1 - x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad (2.6)$$

En remplaçant  $R_0$  par son expression en fonction du nombre de masse  $A$ ,  $R_0 = r_0 A^{1/3}$ , on obtient à partir de (2.5) le critère de stabilité suivant vis-à-vis de la fission spontanée :

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right) < \frac{8\pi r_0^2 \vartheta}{\frac{3e^2}{5r_0}} \equiv \left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{limite}} \quad (2.7)$$

En se référant à la formule de masse de Bethe-Weizsäcker (voir chapitre 4), on a également par identification :

- pour le terme de surface

$$a_s A^{2/3} = 4\pi R_0^2 \vartheta = 4\pi r_0^2 A^{2/3} \vartheta \Rightarrow 4\pi r_0^2 \vartheta \equiv a_s \approx 14 \text{ MeV} \quad (2.8)$$

- pour le terme coulombien

$$a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \equiv \frac{3}{5R_0} (Ze)^2 = \frac{3}{5r_0 A^{1/3}} (Ze)^2 \Rightarrow a_c = \frac{3e^2}{5r_0} \approx 0.59 \quad (2.9)$$

Une estimation numérique  $(Z^2/A)_{\text{limite}}$  est donc :

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{limite}} = \frac{8\pi r_0^2 \vartheta}{\frac{3e^2}{5r_0}} = 2 \frac{a_s}{a_c} \approx 2 \frac{14}{0.59} = 47.46 \quad (2.10)$$

Le paramètre  $x$  précédemment défini par (2.3) peut alors être relié à  $(Z^2/A)_{\text{limite}}$ . En effet, on a :

$$E_{s0} = 4\pi R_0^2 \vartheta = 4\pi r_0^2 A^{2/3} \vartheta \quad , \quad E_{c0} = \frac{3}{5R_0} (Ze)^2 = \frac{3}{5} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \frac{e^2}{r_0} \quad (2.11)$$

$$x = \frac{E_{c0}}{2E_{s0}} = \frac{\frac{Z^2}{A}}{\frac{2 \times 4\pi R_0^2 \vartheta}{\frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0}}} = \frac{\frac{Z^2}{A}}{\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{limite}}} \quad (2.12)$$

On retrouve donc la forme de ce même paramètre tel qu'il a été posé dans le chapitre 5 §3 relatif à la fission spontanée.

Et le noyau est instable si  $\Delta E(\epsilon) < 0$ , donc  $\xi < 0$ , si  $x \geq 1$ .

Dans le cas d'une fission symétrique, on peut déterminer la valeur du paramètre de fissilité  $x$  et par suite le nucléide dans le tableau de Mendeleïev à partir duquel la **fission** est **exothermique**. Pour cela on cherche à exprimer le bilan énergétique  $\xi$  défini par (2.2) en fonction du paramètre  $x$ . En premier lieu, dans le cadre du **modèle de la goutte liquide**, on exprime l'énergie disponible  $Q$  dans le cas d'une fission symétrique d'un noyau pair-pair  $(A, Z)$  de masse  $M(A, Z)$  en deux noyaux  $(A/2, Z/2)$  de masse  $M(A/2, Z/2)$ . On a :

$$Q = M(A, Z)c^2 - 2M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right)c^2 \quad (2.13)$$

En exprimant les masses avec la formule semi-empirique de Bethe-Weizsäcker (voir chapitre 4 § 1 relation (1.10), on obtient :

$$Q = a_s A^{\frac{2}{3}} \left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right) + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \quad (2.14)$$

En ramenant cette expression à l'énergie de surface  $a_s A^{\frac{2}{3}}$ , il vient :

$$\frac{Q}{a_s A^{\frac{2}{3}}} = \left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{a_c}{a_s A^{\frac{2}{3}}} \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) = \left(1 - 2^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{a_c}{a_s} \frac{Z^2}{A} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \quad (2.14)$$

Or la définition (2.2) de l'énergie potentielle  $\xi$  permet d'écrire l'égalité :

$$\xi = -\frac{Q}{a_s A^{\frac{2}{3}}} = \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right) - \frac{a_c}{a_s} \frac{Z^2}{A} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right) \quad (2.15)$$

Elle correspond à l'énergie libérée par fission (par une unité d'énergie de surface) changée de signe. Par ailleurs, on tire de (2.12) l'expression du rapport  $Z^2/A$  en fonction du paramètre de fissilité  $x$  :



$$\frac{Z^2}{A} = \left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{limite}} x \quad (2.16)$$

En reportant (2.16) dans (2.15) on obtient :

$$\xi = \left( 2^{\frac{1}{3}} - 1 \right) - \frac{a_c}{a_s} \left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{limite}} \left( 1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \right) x \quad (2.15)$$

Avec les valeurs numériques  $a_c = 0.59$  MeV,  $a_s = 14$  MeV et  $(Z^2/A)_{\text{limite}} = 47.46$  (voir (2.10)), l'expression de  $\xi$  s'écrit sous la forme linéaire suivante en fonction du paramètre de fissilité  $x$  :

$$\xi = 0.260 - \frac{0.59}{14} 47.46 \times 0.37 \times x = 0.260 - 0.740 x \quad (2.16)$$

On retrouve bien l'expression fournie dans la littérature.<sup>22</sup> Compte tenu de la définition de  $\xi$ , la **fission** est **exoénergétique** si  $\xi < 0$  ; cette condition est donc réalisée si :

$$\xi = 0.260 - 0.740 x < 0 \Rightarrow x > \frac{0.74}{0.26} = 0.35 \quad (2.17)$$

La **fission** est donc **exoénergétique** pour les noyaux dont le **paramètre de fissilité**  $x$  est supérieur à la valeur 0.35 : ce sont les noyaux se situant au-delà du zirconium 40,  ${}^{90}_{40}\text{Zr}$  pour lequel le **paramètre de fissilité**  $x$  vaut :  $\left( \frac{Z^2}{A} \right) / \left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{limite}} = \frac{(40)^2}{90} / 47.46 = 0.37$ .

### Exemple

On considère la fission symétrique du curium 244. L'énergie disponible  $Q$  vaut :

$$\begin{aligned} Q &= a_s A^{\frac{2}{3}} \left( 1 - 2^{\frac{1}{3}} \right) + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \left( 1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} \right) = -14 \times (244)^{\frac{2}{3}} \times 0.260 + 0.59 \frac{(96)^2}{(244)^{\frac{1}{3}}} \times 0.37 \\ &= -141.61 + 322.55 \end{aligned}$$

$Q = 180.94$  MeV  $> 0$ . Le paramètre de bilan énergétique  $\xi$  a pour valeur :

$$\xi = -\frac{Q}{a_s A^{\frac{2}{3}}} = -\frac{180.94}{141.61} = -1.278 < 0 ; x = \frac{\frac{Z^2}{A}}{\left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{limite}}} = \frac{\frac{(96)^2}{244}}{47.46} = 0.79$$

<sup>22</sup> L. Wilets, *Theories of nuclear fission*, Clarendon Press, Oxford Library of the Physical Sciences, Oxford, 1964, Chapitre 2, § 2.4, formule (2.6), p. 20 ; reprise dans A. Michaudon, « La fission », *op. cit.*, p. C1-54.

Le **tableau 1** fournit les valeurs tirées de la littérature de  $Z^2/A$  et celles correspondantes du paramètre de fissilité  $x$  pour plusieurs noyaux lourds.

Tableau 1. Valeurs de  $Z^2/A$  et celles correspondantes du paramètre de fissilité  $x$ .<sup>23</sup>

Noyau	$Z^2/A$	$x = \frac{Z^2}{A} / \left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{limite}}$
$^{208}_{82}\text{Pb}$	32.32	0.667
$^{232}_{90}\text{Th}$	34.91	0.721
$^{233}_{92}\text{U}$	36.32	0.75
$^{235}_{92}\text{U}$	36.01	0.744
$^{238}_{92}\text{U}$	35.56	0.734
$^{240}_{94}\text{Pu}$	36.81	0.76
$^{244}_{96}\text{Cm}$	37.77	0.78
$^{252}_{98}\text{Cf}$	38.41	0.79

On comprend dès lors le pourquoi des valeurs élevées des périodes de fission spontanée (voir chapitre 5, figure 4) des noyaux recensés dans le tableau 1. Cette situation va être complètement modifiée dans le cas d’une fission induite par un neutron. En effet, son énergie cinétique et son énergie de masse apportées au noyau composé formé sont susceptibles de fournir à ce dernier une énergie d’excitation suffisante pour que la barrière de fission soit surmontée. La forme du noyau au point de seuil a été étudiée en détail en fonction du **paramètre de fissilité  $x$**  comme le représente la **figure 4**.

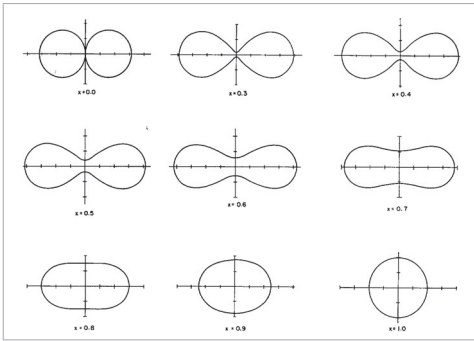


Figure 4. Formes de la goutte liquide au point seuil pour différentes valeurs du paramètre  $x$ .<sup>24 25 26</sup>

<sup>23</sup> A. Michaudon, « La fission », *op. cit.*, tableau 1, p. C1-53.  
<sup>24</sup> S. Cohen, W. J. Swiatecki, « The deformation energy of a charged drop: IV. Evidence for a discontinuity in the conventional family of saddle point shapes », *Annals of Physics*, 19, 67, 1962, [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(62\)90234-8](https://doi.org/10.1016/0003-4916(62)90234-8) ; S. Cohen, W. J. Swiatecki, « The deformation energy of a charged drop: Part V: Results of Electronic Computer Studies », *Annals of Physics*, 22, 406-437, 1963, p. 416, [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(63\)90385-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(63)90385-3).  
<sup>25</sup> L. Wilets, *Theories of nuclear fission*, *op. cit.*, p. 32.  
<sup>26</sup> A. Michaudon, « La fission », *op. cit.*, Tableau 1, p. C1-54.

### 3. La barrière de fission

Il s'avère donc utile d'évaluer la hauteur de la barrière de fission relative à de tels noyaux composés afin de déterminer par exemple l'énergie cinétique que doit avoir le neutron incident pour que la réaction de fission puisse se produire.

On a précédemment vu que le **point de seuil** ou **point de selle** est l'état du noyau déformé au-delà duquel il y a scission effective du noyau initial en deux entités distinctes. En ce point de seuil culmine la **barrière de fission** caractérisée par sa hauteur  $H_f$  qui s'identifie au bilan d'énergie  $\Delta E(\epsilon_{seuil})$  en ce même point d'équilibre du noyau atomique déformé. La hauteur  $H_f \equiv \Delta E(\epsilon_{seuil})$  se présente sous la forme suivante :

$$E_s(\epsilon_{seuil}) - E_{s0} = \Delta E_s(\epsilon_{seuil})$$

$$E_c(\epsilon_{seuil}) - E_{c0} = \Delta E_c(\epsilon_{seuil})$$

$$H_f \equiv \Delta E(\epsilon_{seuil}) = E_s(\epsilon) + E_c(\epsilon) - (E_{s0} + E_{c0}) = \Delta E_s(\epsilon_{seuil}) + \Delta E_c(\epsilon_{seuil}) \quad (3.1)$$

Autrement dit, la hauteur de la barrière de potentiel de fission résulte du bilan énergétique entre la variation de l'énergie de surface et la variation de l'énergie de répulsion coulombienne par rapport à la configuration sphérique initiale lorsque le noyau atomique est déformé jusqu'à l'atteinte du point de seuil.

À titre illustratif, pour un noyau lourd, on a le bilan représentatif suivant :

$$\begin{aligned} E_s(\epsilon_{seuil}) - E_{s0} &= \Delta E_s(\epsilon_{seuil}) = \sim 105 \text{ MeV} \\ E_c(\epsilon_{seuil}) - E_{c0} &= \Delta E_c(\epsilon_{seuil}) = \sim -100 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\Delta E(\epsilon_{seuil}) = E_s(\epsilon_{seuil}) + E_c(\epsilon_{seuil}) - (E_{s0} + E_{c0}) = \sim 5 \text{ MeV} \quad (3.2)$$

Au point de seuil, on peut aussi voir  $\Delta E(\epsilon_{seuil})$  comme une différence de faible valeur entre deux quantités à grandes valeurs,  $E_s(\epsilon_{seuil}) + E_c(\epsilon_{seuil})$ , d'une part, et  $(E_{s0} + E_{c0})$  d'autre part.

Plusieurs auteurs ont proposé des formules empiriques exprimant la hauteur  $H_f$  de la barrière de fission :

- N. Bohr et J. A. Wheeler (1939)<sup>27</sup> :

$$H_f = E_{s0} f(x) = E_{s0} [0.726(1-x)^3 - 0.3292(1-x)^4] \quad x \lesssim 1 \quad (3.3)$$

La fonction  $f(x)$  est représentée sur la **figure 4**.

<sup>27</sup> N. Bohr, J. A. Wheeler, « The Mechanism of Nuclear Fission », *Physical Review* 56, 426- 450, 1 September 1939, p. 433.

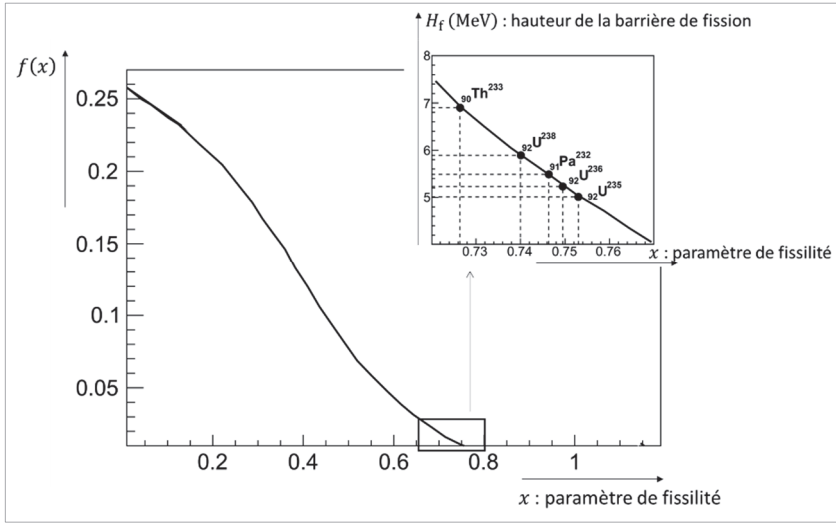


Figure 4. Représentation de la fonction  $f(x)$  et sur la droite de la hauteur  $H_f$ , en MeV, de la barrière de fission en fonction du paramètre de fissilité  $x$ , d'après N. Bohr et J. A. Wheeler.

- G. T. Seaborg (1952)<sup>28</sup>, en partant d'une relation établie par Stan Frankel et Nicholas Metropolis<sup>29</sup> donnant la période de décroissance par fission spontanée,  $T$ , en secondes, en fonction de la hauteur  $H_f \equiv \Delta E(\epsilon_{seuil})$  :

$$T = 10^{-21} \times 10^{7.85\Delta E(\epsilon_{seuil})} \text{ s} \quad (3.4)$$

Cette dernière expression est identifiée à celle exprimant empiriquement cette même période, en secondes, en fonction du paramètre  $Z^2/A$  :

$$T = 10^{-21} \times 10^{7.85(22.7 - 0.477 Z^2/A)} \text{ s} \quad (3.5)$$

d'où il découle l'expression de  $\Delta E(\epsilon_{seuil})$  :

$$H_f \equiv \Delta E(\epsilon_{seuil}) = 22.7 - \frac{0.477 Z^2}{A} \text{ MeV} \quad (3.6)$$

Une étude plus fine a conduit à :

$$H_f \equiv \Delta E(\epsilon_{seuil}) = 19.0 - \frac{0.36 Z^2}{A} + \delta \text{ MeV} \quad (3.7)$$

<sup>28</sup> G. T. Seaborg, « Activation Energy for Fission », *Physical Review* 88, 1429, 15 December 1952. <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.88.1429.2>.

<sup>29</sup> S. Frankel, N. Metropolis, « Calculations in the Liquid-Drop Model of Fission », *Physical Review* 72, 914, November 15, 1947, <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.72.914>.

où le terme  $\delta$  prend en compte les effets de parité du nombre de neutrons et de protons au sein du noyau atomique :

- $\delta = 0$  pour les noyaux pair-pair ;
- $\delta = 0.4$  pour les noyaux pair-impair ;
- $\delta = 0.7$  pour noyaux impair-impair.

La **figure 5** représente les valeurs de la hauteur de la barrière de fission en fonction du nombre de masse  $A$ .

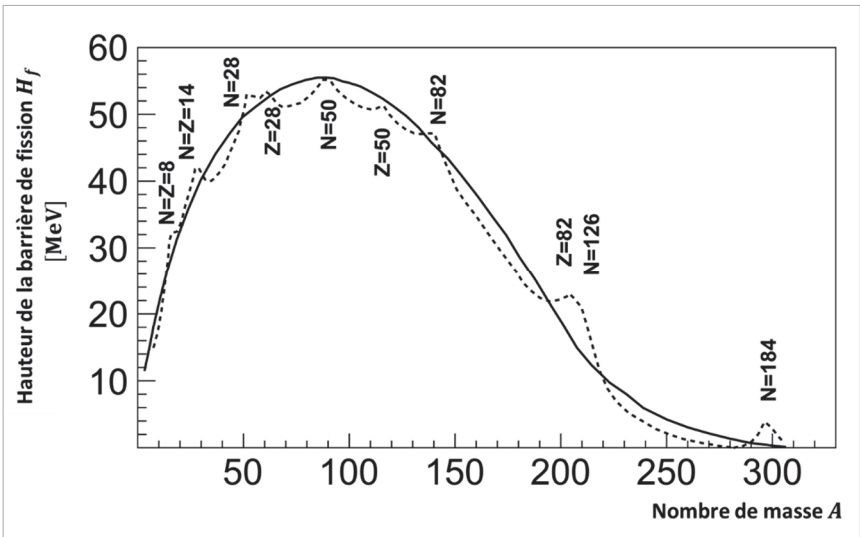


Figure 5. Valeurs de la hauteur de la barrière de fission en fonction du nombre de masse  $A$  pour les noyaux situés le long de la ligne de stabilité  $\beta^{30}$ . Les valeurs du numéro atomique  $Z$  et du nombre de neutrons  $N$  correspondant à des « nombres magiques » sont précisées. La ligne continue est relative au modèle de la goutte liquide et en pointillé la courbe obtenue avec les corrections des effets de couches quantiques qui montrent des remontées de la stabilité des noyaux atomiques possédant un nombre magique de nucléons d'un type donné (neutron ou proton) ; en particulier, on constate pour les noyaux superlourds, de nombre de masse voisin de 300, une remontée significative de la barrière de fission pour un nombre magique de neutrons égal à 184 : l'ensemble de ces noyaux atomiques constitue un îlot de stabilité, précédemment signalé dans le chapitre 3 § 1.3.

### Exemple

#### Calcul de la hauteur de la barrière de fission de la formule semi-empirique de Seaborg.

- Cas du noyau d'uranium 236 formé par absorption d'un neutron par un noyau d'uranium 235 :



<sup>30</sup> D'après W. D. Myers, W. J. Swiatecki, « Nuclear masses and deformations », *Nuclear Physics* 81, 1966, pp. 1-60, p. 18.

$$H_{f,U236} = 19.0 - 0.36 \frac{(92)^2}{236} + 0. = 6.09 \text{ MeV}$$

- **Cas du noyau d'uranium 239** formé par absorption d'un neutron par un noyau d'uranium 238 :



$$H_{f,U239} = 19.0 - 0.36 \frac{(92)^2}{239} + 0.4 = 6.91 \text{ MeV}$$

Comparons à présent les hauteurs  $H_{f,U236}$  et  $H_{f,U239}$  à l'énergie  $E^*$  d'excitation des nucléides  ${}^{236}_{92}\text{U}^*$  et  ${}^{239}_{92}\text{U}^*$  formés dans un état excité respectivement *via* les deux réactions considérées ci-dessus.

On note  $E_n$  l'énergie cinétique du neutron considéré. La relation exprimant la conservation de l'énergie totale dans la réaction considérée ci-dessus s'écrit :

$$E_n + M_{{}^{235}_{92}\text{U}}c^2 + M_n c^2 = M_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}c^2 + E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}$$

$$E_n + M_{{}^{235}_{92}\text{U}}c^2 + M_n c^2 = M_{{}^{236}_{92}\text{U}}c^2 + E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*} + E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}$$

où :

- $M_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}c^2 = M_{{}^{236}_{92}\text{U}}c^2 + E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}$  ;
- $M_n c^2$  est la masse au repos du neutron ;
- $M_{{}^{236}_{92}\text{U}}c^2$  est la masse au repos exprimée en unité d'énergie du nucléide d'uranium 236 dans son état fondamental ;
- $E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}$  est l'énergie d'excitation du noyau d'uranium 236 ;
- $E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}$  est l'énergie cinétique du nucléide d'uranium 236 excité.

On en déduit :

$$E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*} = E_n - E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*} + M_{{}^{235}_{92}\text{U}}c^2 + M_n c^2 - M_{{}^{236}_{92}\text{U}}c^2 = E_n - E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*} + S_{n,{}^{236}_{92}\text{U}}$$

où  $S_{n,{}^{236}_{92}\text{U}}$  est l'énergie de séparation du « dernier neutron » du noyau d'uranium 236 (voir chapitre 3 § 3.5) :

$$S_{n,{}^{236}_{92}\text{U}} = M_{{}^{235}_{92}\text{U}}c^2 + M_n c^2 - M_{{}^{236}_{92}\text{U}}c^2 = 6.545 \text{ MeV}^{31}$$

En supposant que le noyau cible  ${}^{235}_{92}\text{U}$  est initialement au repos dans le référentiel du laboratoire, la loi de conservation de l'impulsion avant et juste après la formation du noyau composé conduit immédiatement à la relation :

$$\sqrt{2M_n E_n} = \sqrt{2M_{{}^{236}_{92}\text{U}^*} E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}}$$

d'où :

$$E_{{}^{236}_{92}\text{U}^*} = \frac{M_n}{M_{{}^{236}_{92}\text{U}^*}} E_n \approx \frac{1}{236} E_n$$

<sup>31</sup> En se référant par exemple à la « Live Chart of Nuclides » de l'IAEA : <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.

en ayant substitué, dans le rapport, les nombres de masse aux masses  $M_n$  et  $M_{^{236}_{92}\text{U}^*}$ .

On voit donc sur cette relation que l'énergie cinétique du noyau composé  $^{236}_{92}\text{U}^*$  est négligeable comparée à celle du neutron incident. En conséquence, l'énergie d'excitation,  $E_{^{236}_{92}\text{U}^*}$ , du noyau composé  $^{236}_{92}\text{U}^*$  s'écrit :

$$E_{^{236}_{92}\text{U}^*} \approx E_n + S_{n,^{236}_{92}\text{U}}$$

Si l'on considère un neutron thermique d'énergie cinétique  $E_n = 0.025 \text{ eV} \equiv 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ MeV}$ , alors :

$$E_{^{236}_{92}\text{U}^*} \approx E_n + S_{n,^{236}_{92}\text{U}} = 0.025 \cdot 10^{-6} + 6.545 \approx 6.54 \text{ MeV} > H_{f,^{236}_{92}\text{U}} = 6.09 \text{ MeV}$$

Le neutron thermique apporte une énergie d'excitation qui correspond approximativement à l'énergie de liaison du « dernier neutron » de l'uranium 236 dans son état fondamental,  $S_{n,^{236}_{92}\text{U}} = 6.545 \text{ MeV}$ , dont on constate qu'elle est supérieure à la hauteur de la barrière de fission de l'uranium 236,  $H_{f,^{236}_{92}\text{U}} = 6.09 \text{ MeV}$  : la fission induite par un neutron d'énergie thermique sur un noyau d'uranium 235 est donc possible sans apport complémentaire d'énergie.

De manière similaire, on a pour le noyau composé d'uranium 239,  $^{239}_{92}\text{U}^*$  :

$$E_{^{239}_{92}\text{U}^*} \approx E_n + S_{n,^{239}_{92}\text{U}} = 0.025 \cdot 10^{-6} + 4.806 \approx 4.8 \text{ MeV} < H_{f,^{239}_{92}\text{U}} = 6.91 \text{ MeV}$$

Donc, à l'inverse du cas précédent, le neutron n'apporte pas une énergie suffisante pour provoquer le franchissement de la barrière de fission de l'uranium 239 de hauteur  $H_{f,^{239}_{92}\text{U}} = 6.91 \text{ MeV}$ . Il s'ensuit que le noyau d'uranium 239 ne peut fissionner que si le neutron a une énergie cinétique suffisante de l'ordre de 2 MeV.

Ainsi, en règle générale :

- les **noyaux fissiles** par fission induite par un neutron thermique ont un nombre de neutrons impair, comme par exemple :  $^{233}_{92}\text{U}$ ,  $^{235}_{92}\text{U}$ ,  $^{239}_{94}\text{Pu}$ ,  $^{241}_{94}\text{Pu}$ . À la suite d'une capture neutronique, le noyau composé est pair-pair ;
- les noyaux « non » (difficilement) fissiles par fission induite par un neutron thermique – **noyaux fertiles** – ont un nombre de neutrons pair, comme par exemple :  $^{234}_{92}\text{U}$ ,  $^{236}_{92}\text{U}$ ,  $^{238}_{92}\text{U}$ ,  $^{237}_{93}\text{Np}$ ,  $^{238}_{94}\text{Pu}$ ,  $^{240}_{94}\text{Pu}$ ... Le noyau résultant par capture d'un neutron possède un nombre de masse impair.

Par ailleurs, D. L. Hill et J. A. Wheeler<sup>32 33</sup>, considérant les phénomènes d'oscillation de la surface du noyau atomique dans le cadre d'un **modèle collectif** décrivant le comportement des nucléons à l'aide du formalisme quantique, ont proposé une expression de la probabilité de franchissement de la barrière de fission au point de seuil, dans le cas d'une réaction nucléaire induite par un neutron.

<sup>32</sup> D. L. Hill et J. A. Wheeler, « Nuclear Constitution and the Interpretation of Fission Phenomena », *Physical Review*, Vol. 89, March 1, 1953, pp. 1102-1145, p. 1140, <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.89.1102>

<sup>33</sup> H. Weigmann, « Fission barriers », in C. Wagemans (Editor), *The nuclear fission process*, USA, CRC Press, 1991, Chapter 2, pp. 17-19.

Ils donnent à la barrière de fission la forme d'une parabole inversée et au point de selle, cette probabilité, notée  $P_f$ , s'écrit :

$$P_f = \frac{1}{1 + \exp \left[ -2\pi \frac{E - H_f}{\hbar\omega} \right]} \quad (3.8)$$

où :

- $E$  est l'énergie d'excitation du noyau composé ;
- $H_f$  est la hauteur de la barrière de fission ;
- $\hbar\omega$  est une énergie caractéristique de la courbure de la barrière de fission : celle-ci correspond à l'espacement des niveaux d'énergie pour le potentiel de l'oscillateur harmonique (voir figure 6). Typiquement, pour les noyaux lourds  $\hbar\omega = 500$  keV.

Les **mouvements collectifs des nucléons** – mouvements vibrationnels et rotationnels à l'instar des molécules (voir chapitre 10) – au point de selle sont la manifestation des états excités dénommés **états de transition** (voir **figure 6**) susceptibles de conduire à la fission.

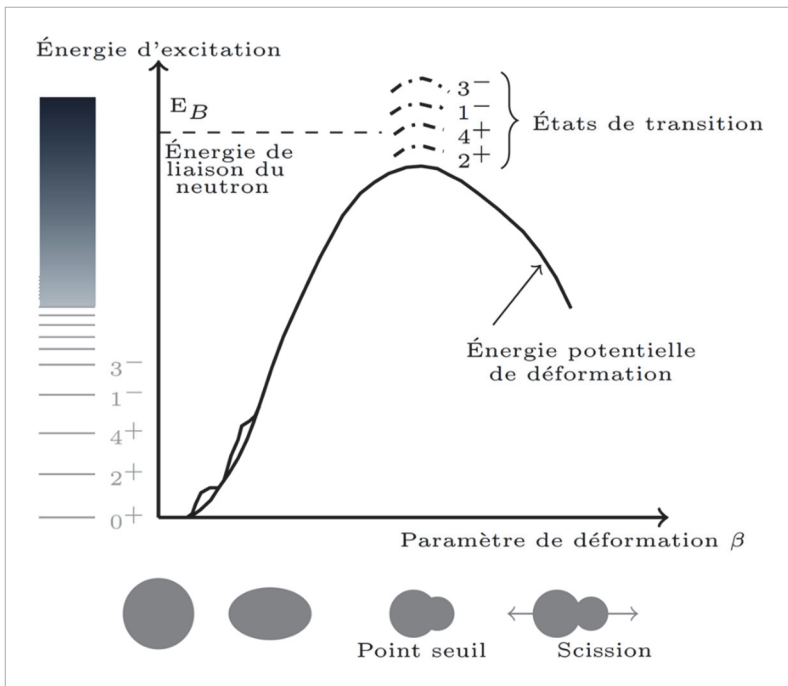


Figure 6. Représentation schématique du phénomène de fission d'un noyau pair-pair (par ex.  $^{244}_{96}\text{Cm}$ ).<sup>34</sup>

Chacun d'entre eux est caractérisé par des nombres quantiques bien définis d'énergie ( $i$ ), de moment angulaire ( $J$ ) et de parité  $\pi$  (+ ou -). Ce sont donc autant de **canaux**

<sup>34</sup> A. Michaudon, *op. cit.*, p. C1-52.



réactionnels menant à la fission (**fission channels**), auxquels correspond respectivement une barrière de fission de hauteur  $H_{fi,J}$  ; la **probabilité de transmission de la barrière de fission** associée,  $P_{fi}$ , pour  $J$  fixé, se déduit de (3.8) :

$$P_{fi,J} = \frac{1}{1 + \exp \left[ -2\pi \frac{E - H_{fi,J}}{\hbar\omega} \right]} \quad (3.9)$$

Pour  $J$  fixé, la probabilité totale de pénétration de la barrière de fission tous canaux confondus est donc :

$$P_{f,J} = \sum_i P_{fi,J} \quad (3.10)$$

La probabilité de fission  $p_{fi}$  par une voie  $i$  est par suite :

$$p_{fi,J} = \frac{P_{fi,J}}{P_{f,J}} \quad (3.11)$$

De plus, D. L. Hill et J. A. Wheeler relie, au point de seuil, la valeur moyenne de la largeur partielle de fission  $\langle \Gamma_{fi} \rangle_J$  relative à l'état de spin  $J$  à la hauteur de la barrière de fission correspondante,  $H_{fi,J}$ , par l'expression :

$$2\pi \frac{\langle \Gamma_{fi} \rangle_J}{\langle D \rangle_J} = P_{fi,J} = \frac{1}{1 + \exp \left[ -2\pi \frac{E - H_{fi,J}}{\hbar\omega} \right]} \quad (3.12)$$

où  $\langle D \rangle_J$  est l'espacement moyen des résonances de spin  $J$ .

Pour un même état de spin  $J$ , le nombre effectif de voies de sortie par fission,  $N_{eff,J}$ , est donc :

$$N_{eff,J} = \sum_i P_{fi,J} = \sum_i 2\pi \frac{\langle \Gamma_{fi} \rangle_J}{\langle D \rangle_J} = 2\pi \frac{\langle \Gamma_f \rangle_J}{\langle D \rangle_J} \quad (3.13)$$

avec  $\langle \Gamma_f \rangle_J = \sum_i \langle \Gamma_{fi} \rangle_J$ , largeur moyenne de fission totale relative à l'état  $J$ .

Parmi les intérêts présentés par ces différentes formules, on notera leur utilisation pour interpréter les mesures de sections efficaces et identifier/caractériser les résonances de fission, et leur utilisation dans des modèles de calcul des distributions en masse des fragments résultant de la fission. L'étude de la fission selon une approche qui met en œuvre conjointement le modèle de la goutte liquide et le modèle en couches (c'est un exemple d'**approche macroscopique-microscopique**) conduit à la mise en évidence d'une barrière de fission présentant non pas une bosse, mais deux bosses ou trois bosses telles que celles schématisées sur les **figures 7 et 8**.

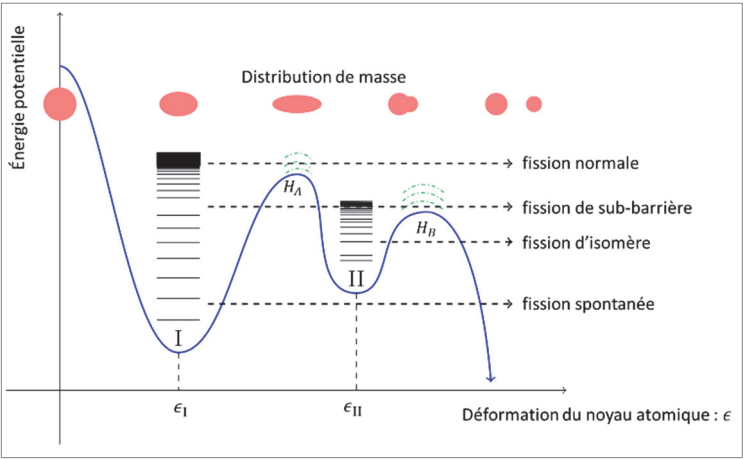


Figure 7. La barrière de fission à deux bosses<sup>35</sup> ; le premier minimum (puits de potentiel de « classe I ») correspond au noyau atomique considéré dans son état fondamental et le deuxième minimum (puits de potentiel de « classe II ») à un état métastable ou isomérique de ce noyau atomique.  $H_A$  et  $H_B$  sont les hauteurs des barrières de fission.

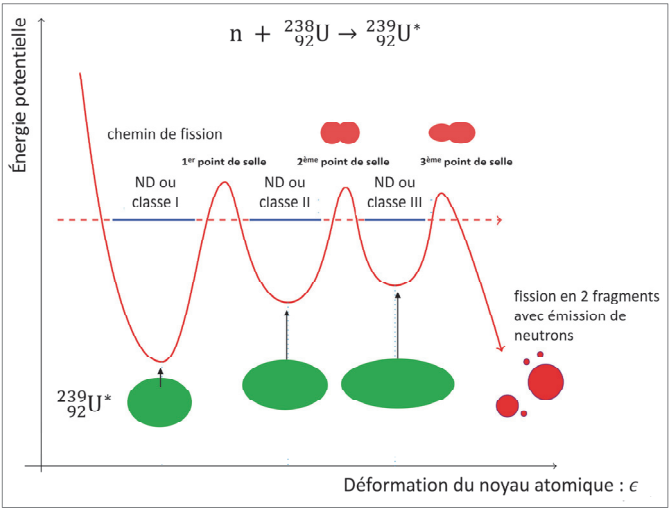


Figure 8. Barrière de fission à trois bosses : cas du noyau d'uranium 239 ( $^{239}_{92}\text{U}^*$ ) obtenu dans un état excité par la réaction  $n + ^{238}_{92}\text{U} \rightarrow ^{239}_{92}\text{U}^*$  ; ND = noyau atomique « normalement déformé », SD = noyau atomique « super déformé », HD = noyau atomique « hyper déformé ».<sup>36</sup>

<sup>35</sup> A. Michaudon, *Some Aspects of Nuclear Fission*, Note CEA-N-2232, p. 7 ; H. Weigmann, « Fission barriers », in C. Wagemans (Editor), *The nuclear fission process*, op. cit., Chapter 2, pp. 7-33.

<sup>36</sup> [http://www-phynu.cea.fr/vie\\_scientifique/faits\\_marquants/actu2003\\_03.htm](http://www-phynu.cea.fr/vie_scientifique/faits_marquants/actu2003_03.htm) ; voir aussi P. Thierolf, D. Habs, « Spectroscopy in the second and third minimum of actinide nuclei », *Progress in Particle and Nuclear Physics* 49, 2, 2002, pp. 325-402, figure 2, p. 328 ; L. Csige et al., « Exploring the multihumped fission barrier of  $^{238}\text{U}$  via sub-barrier photofission », *Physical Review C* 87, 044321, 2013, pp. 1-5, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.87.044321>.

La structure de la barrière de fission a un impact sur la section efficace de fission ; ainsi, la variation des sections efficaces de fission en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident des noyaux supposés avoir une barrière à deux bosses ( $^{240}_{94}\text{Pu}$ ,  $^{242}_{94}\text{Pu}$ ,  $^{243}_{95}\text{Am}$ ,  $^{244}_{96}\text{Cm}$ ) serait plus forte que celles des noyaux supposés avoir une barrière à trois bosses ( $^{237}_{92}\text{U}$ ,  $^{232}_{91}\text{Pa}$ , et  $^{233}_{90}\text{Th}$   $^{233}\text{Th}$ ). Dans la littérature, on parle ainsi d'**isomères de fission**. Sur les **figures 7 et 8**, conventionnellement, les états excités dans le premier puits (état fondamental) sont dits de « classe I », ceux du deuxième et troisième puits respectivement de « classe II » et « classe III » correspondants à des **états isomériques**. Des valeurs de paramètres descriptifs de ces barrières de fission sont indiquées dans les **tableaux 2a et 2b**.

Tableau 2a. Paramètres de la barrière à fission à deux bosses pour le nucléide  $^{236}_{92}\text{U}$ .<sup>37</sup>

Nucléide	$S_n$ MeV	$H_A \equiv E_A$ MeV	$h\omega_A$ MeV	$H_B \equiv E_B$ MeV	$h\omega_B$ MeV
$^{236}_{92}\text{U}$	6.545	5.6	1.04	5.5	0.6

Tableau 2b. Paramètres de la barrière à fission à deux bosses pour le nucléide  $^{239}_{92}\text{U}$ .<sup>38</sup>

Nucléide	$S_n$ MeV	$H_A \equiv E_A$ MeV	$h\omega_A$ MeV	$H_B \equiv E_B$ MeV	$h\omega_B$ MeV	$H_C \equiv E_C$ MeV	$h\omega_C$ MeV
$^{239}_{92}\text{U}$	4.806	4.3	0.4	5.6	0.7	6.1	0.7

4. La « dynamique » du phénomène de fission

La **figure 9** permet de visualiser la déformation progressive du noyau atomique en fonction de l'élongation du noyau atomique, le menant soit à une scission symétrique, soit à une scission asymétrique. Elle offre une autre vue de la topologie de l'énergie potentielle sous l'effet des moments multipolaires du noyau atomique.

La **figure 10a** montre que les deux **fragments de fission**, nucléides formés juste au moment de la scission, se repoussent en raison de la répulsion électrostatique. L'énergie potentielle des deux fragments est progressivement convertie en énergie cinétique : les fragments acquièrent 90 % de leur énergie cinétique finale en moins de  $10^{-19}$  s se trouvant alors distants de  $1.9 \cdot 10^{-11}$  cm. Les neutrons prompts sont émis jusqu'à environ à  $10^{-13}$  s et les gamma  $10^{-7}$  s.

Une fois arrêtés par ralentissement coulombien, les fragments poursuivent leur désexcitation par désintégration radioactive, essentiellement bêta et gamma, en direction de la vallée de stabilité : on les dénomme alors **produits de fission**, dont les périodes radioactives vont de la fraction de seconde à plusieurs millions d'années voire au-delà.

<sup>37</sup> H. Weigmann, « Fission barriers », dans C. Wagemans (Editor), *The nuclear fission process*, op. cit., p. 30.

<sup>38</sup> L. Csige *et al.*, « Exploring the multihumped fission barrier of  $^{238}\text{U}$  via sub-barrier photofission », op. cit., p. 3.

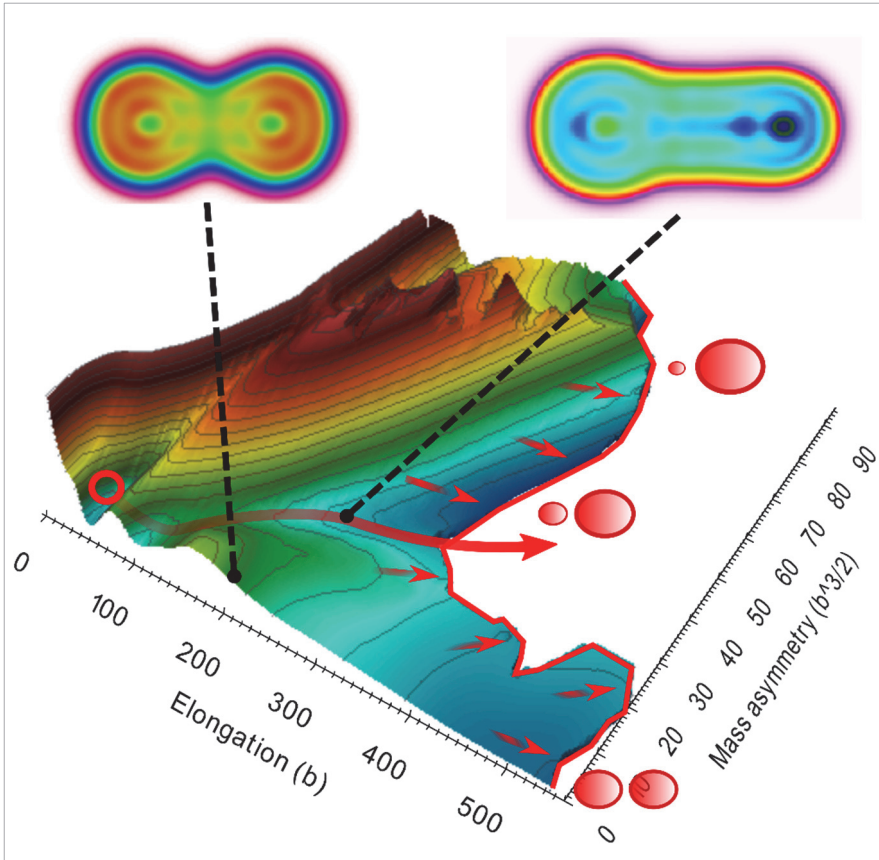
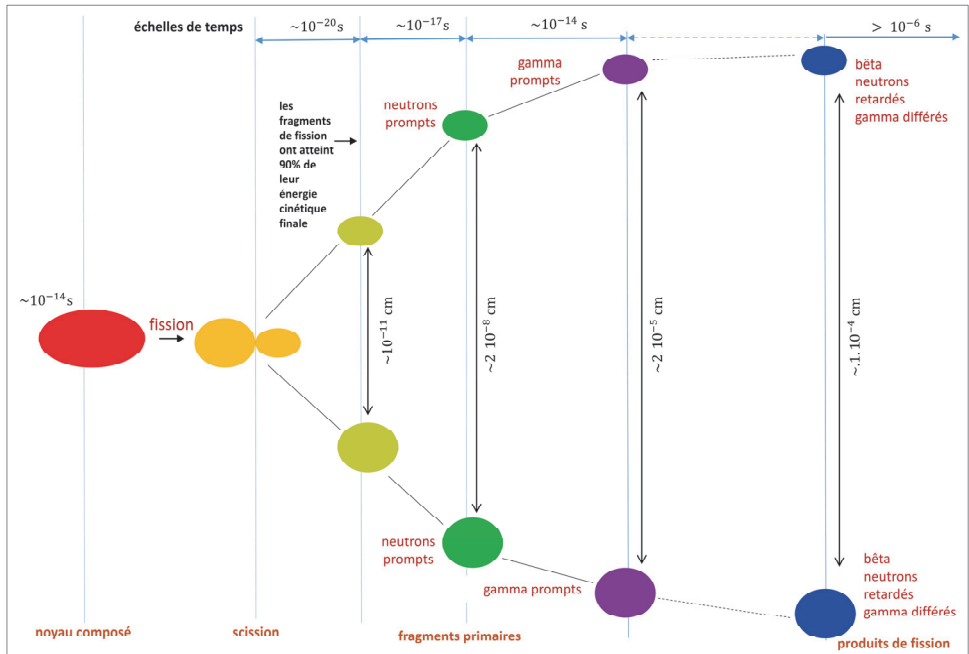


Figure 9. Surface d'énergie potentielle et différentes voies de fission symétrique et asymétriques. L'axe « Elongation » correspond au moment quadripolaire ( $Q_{20}$ , unité : barn) et l'axe « Mass asymmetry » au moment octupolaire ( $Q_{30}$ , unité : barn<sup>3/2</sup>) ©David Régner.<sup>39</sup>

<sup>39</sup> Voir aussi représentations similaires de la surface d'énergie potentielle et différentes voies de fission calculées avec un modèle microscopique pour l'uranium  $^{238}_{92}\text{U}$  par l'approche Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) en fonction des moments quadripolaires ( $Q_{20}$  en barns) et octupolaire ( $Q_{30}$  en barns<sup>3/2</sup>) pris comme paramètres de la déformation du noyau atomique dans : N. Schunck, D. Regnier, « Theory of nuclear fission », *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Vol. 125, July 2022, 103963, <https://doi.org/10.1016/j.ppnp.2022.103963> ; H. Goutte, J. F. Berger, P. Casoli, and D. Gogny, « Microscopic approach of fission dynamics applied to fragment kinetic energy and mass distributions in  $^{238}\text{U}$  », *Physical Review C* 71, 024316 (2005), <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.71.024316> ; J.-F. Berger, « Approches de champ moyen et au-delà », *École thématique, École Joliot Curie « Les noyaux en pleines formes »*, Maubuisson, (France), du 16-21 septembre 1991 : 10<sup>e</sup> session, 1991, figure 9, p. 43 et J.-F. Berger, « La fission : de la phénoménologie à la théorie », dans *Le cycle électronucléaire : De la fission aux nouvelles filières*, École internationale Joliot-Curie de physique nucléaire, Maubuisson, France, 25<sup>e</sup> session, 18-23 septembre 2006, p. 14 ; T. Ichikawa, A. Iwamoto, P. Möller, A. J. Sierk, « Contrasting fission potential-energy structure of actinides and mercury isotopes », *Physical Review C* 86, 024610 (2012), p. 024610-5, figures 6 et 8, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.86.024610> ; il s'agit d'une mise en œuvre d'une approche hybride macroscopique-microscopique de la surface d'énergie potentielle à l'aide du modèle *Finite-Range Liquid-Drop Model* (FRLDM).

Le déroulement dans le temps du phénomène de fission est illustré de façon très schématique par la **figure 10**.



### Exemples

- **Calcul de l'énergie cinétique des fragments de fission dans le cas de la fission symétrique du curium 244**

Le processus de fission spontanée du curium 244 s'écrit :

<sup>40</sup> D'après A. M. Weinberg, E. P. Wigner, *The physical theory of neutron chain reactors*, The University of Chicago Press, 1958, p. 115, cité par A. Michaudon, *op. cit.*, p. C1-56, Figure 6.

<sup>41</sup> J.-F. Berger, « La fission : de la phénoménologie à la théorie », dans *Le cycle électronucléaire : De la fission aux nouvelles filières*, École internationale Joliot-Curie de physique nucléaire, Maubuisson, France, 25<sup>e</sup> session, 18-23 septembre 2006, p. 14.



La conservation de l'énergie totale relative à cette réaction de fission spontanée s'écrit :

$$M(244,96)c^2 = 2M(122,48)c^2 + 2T$$

où :

- $M(244,96)$  est la masse atomique du curium 244 ;
- $M(122,48)$  est la masse atomique du cadmium 122 ;
- $T$  représente l'énergie cinétique de chacun des deux fragments de fission qui sont identiques.

Ces deux fragments de fission emportent donc ensemble une énergie cinétique totale :

$$2T = M(244,96)c^2 - 2M(122,48)c^2 = Q$$

$Q$  étant l'énergie disponible de la désintégration du curium 244 par fission spontanée.

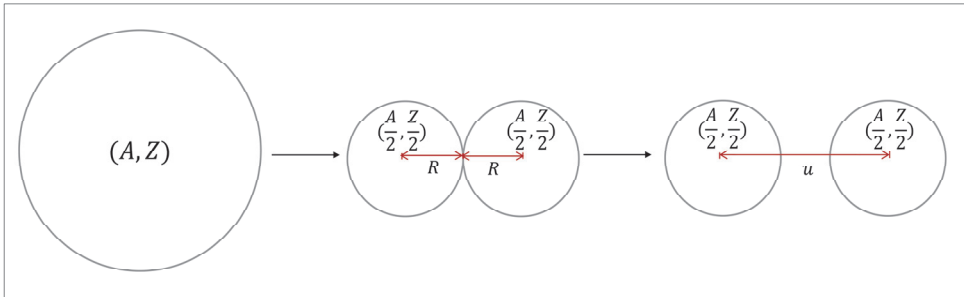
$$M(244,96) = 244.062750 \text{ u} \times 931.494 \text{ (MeV)} = 2.273429 \cdot 10^5 \text{ MeV}$$

$$M(122,48) = 121.924406 \text{ u} \times 931.494 \text{ (MeV)} = 1.135718 \cdot 10^5 \text{ MeV}$$

Par suite :

$$2T = 2.273429 \cdot 10^5 - 2 \times 1.135718 \cdot 10^5 = 199.2 \text{ MeV}$$

- **Calcul de l'énergie potentielle mutuelle des fragments de fission dans le cas de la fission symétrique du curium 244 et en configuration tangente.**



**Figure 10b.** Schématisation d'une fission symétrique d'un nucléide de nombre de masse  $A$  et de numéro atomique  $Z$ ,  $(A, Z)$ .

L'énergie potentielle  $E_p$  des deux fragments tangents (identiques et supposés sphériques comme le noyau initial) au moment de la scission, et de même rayon ( $R_1 = R_2$ ), s'écrit :

$$E_p = \frac{\frac{Z}{2} \times \frac{Z}{2}}{(R_1 + R_2)} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^2}{2 \times r_0 (A/2)^{\frac{1}{3}}} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{(48)^2}{2 \times 1.2 \text{ (fm)} \times (122)^{\frac{1}{3}}} 1.44 \text{ (MeV. fm)}$$

$$E_p = 278.33 \text{ MeV}$$

en ayant adopté la valeur  $r_0 = 1.2 \cdot 10^{-13}$  cm pour calculer les rayons nucléaires  $R_1 = R_2 = R = r_0(A/2)^{1/3}$ .

On constate que l'énergie potentielle  $E_p = 278.33$  MeV diffère de l'énergie cinétique  $2T = 199.2$  MeV déduite du calcul de l'énergie disponible ;  $E_p$  a une valeur plus élevée, car il s'agit d'un calcul d'électrostatique qui ne prend pas en compte l'interaction nucléaire qui agit encore lorsque les deux fragments sont en position tangentielle.

- **Détermination d'un ordre de grandeur de la distance séparant les deux fragments de fission lorsqu'ils ont acquis une énergie cinétique représentant 90 % de l'énergie potentielle.**

On désigne par  $d$  la distance séparant les deux fragments de fission,  $E_p$  leur énergie potentielle, et  $E_{c90}$  leur énergie cinétique totale lorsque celle-ci représente 90 % de l'énergie potentielle initiale. À cette distance  $d$ , l'énergie potentielle correspondante,  $E_{p90}$ , ne représente donc plus que 10 % de l'énergie potentielle initiale :

$$E_{p90} = \frac{(Z/2)^2 e^2}{d} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{10}{100} E_p$$

D'où :

$$d = \frac{100}{10E_p} \frac{(Z/2)^2 e^2}{4\pi\epsilon_0} = 10 \times \frac{(48)^2}{278.33} \times 1.44 = 119 \text{ fm} = 1.19 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$$

- **Détermination d'un ordre de grandeur du temps pour une distance d'éloignement  $d$ .**

L'énergie potentielle entre les deux fragments de fission se convertissant en énergie cinétique et faisant abstraction de la matière environnante, on a la relation suivante entre l'énergie cinétique totale  $E_c(u)$  des deux fragments de fission et leur énergie potentielle  $E_p(u)$  à la distance  $u$  qui sépare leurs centres respectifs (voir **figure 10b**) :

$$E_c(u) = E_p(u_0) - E_p(u) \text{ , } u_0 = 2R = 2 \times r_0(A/2)^{1/3}$$

avec :

$$E_p(u_0) = E_p = 278.33 \text{ MeV}$$

On a par définition :

$$E_p(u) = \frac{(Z/2)^2 e^2}{u} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{k}{u}$$

avec :

$$k = \frac{(Z/2)^2 e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Z^2 e^2}{16\pi\epsilon_0}$$

L'équation exprimant l'énergie cinétique à la distance  $u$  devient :

$$E_c(u) = E_p(u_0) - \frac{k}{u}$$

En hypothèse non relativiste et en considérant un mouvement rectiligne des fragments de fission, cette équation se réécrit :

$$\frac{1}{2} M v^2 = E_p(u_0) - \frac{k}{u}$$

où  $M$  est la masse des deux fragments et  $v$  leur vitesse respective.

On désigne le temps par  $t$  ; en remplaçant dans l'équation ci-dessus la vitesse par :

$$v = \frac{du}{dt}$$

on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2} M \left( \frac{du}{dt} \right)^2 = E_p(u_0) - \frac{k}{u}$$

D'où l'on déduit :

$$dt = \frac{du}{\left( \frac{2}{M} \right)^{1/2} \left[ E_p(u_0) - \frac{k}{u} \right]^{1/2}}$$

La durée  $t(d)$  cherchée s'obtient par intégration :

$$t(d) = \int_{u_0}^d \frac{du}{\left( \frac{2}{M} \right)^{1/2} \left[ E_p(u_0) - \frac{k}{u} \right]^{1/2}}$$

L'intégration donne :

$$t(d) = \left( \frac{M}{2} \right)^{1/2} \frac{2k}{[E_p(u_0)]^{3/2}} \left[ \frac{w}{2} \sqrt{w^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left[ w + \sqrt{w^2 + 1} \right] \right]_{w_1=\sqrt{2}}^{w_2=\sqrt{\frac{d}{2R}+1}}$$

où l'on a opéré le changement de variable :

$$w = \sqrt{\frac{E_p(u_0)}{k} u - 1}$$

### Application numérique

$$d = 119 \text{ fm}$$

$$w_1 = \sqrt{2} = 1.414$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{d}{2R} + 1} = \sqrt{\frac{119 \text{ (fm)}}{2 \times 1.2 \text{ (fm)} \times (122)^{1/3}} + 1} = \sqrt{\frac{119}{11.884} + 1} = 3.318$$

$$M = (2 \times 122 = 244 \text{ g mol}^{-1}) / A_{av} = 244 \times 10^{-3} / (6.02 \times 10^{23}) = 4.053 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

$$[E_p(u_0)]^{3/2} = [278.33 \times 1.602 \times 10^{-13} \text{ (J)}]^{3/2} = [4.4588 \times 10^{-11}]^{3/2} = 2.977 \times 10^{-16}$$



$$k = \frac{Z^2 e^2}{16\pi\epsilon_0} = \frac{Z^2}{4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \frac{(96)^2}{4} 1.44 \times 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ (J)} \times 1 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 5.31 \cdot 10^{-25}$$

$$t(d) = \left( \frac{4.053 \cdot 10^{-25}}{2} \right)^{1/2} \frac{2 \times 5.31 \cdot 10^{-25}}{2.977 \cdot 10^{-16}} \\ \times \left\{ \left[ \frac{3.32}{2} \sqrt{(3.32)^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left[ 3.32 + \sqrt{(3.32)^2 + 1} \right] \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{1.414}{2} \sqrt{(1.414)^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \left[ 1.414 + \sqrt{(1.414)^2 + 1} \right] \right] \right\}$$

$$t(d) = 1.61 \cdot 10^{-21} \times \left\{ [1.66 \times \sqrt{12} + 0.5 \times \ln[3.32 + \sqrt{12}]] \right. \\ \left. - [0.707 \times \sqrt{3} + 0.5 \times \ln[1.414 + \sqrt{3}]] \right\}$$

$$t(d) = 1.61 \cdot 10^{-21} \times \{ [5.75 + 0.5 \times 0.65] - [1.22 + 0.5 \times 1.146] \} = 1.61 \cdot 10^{-21} \times 4.28 \\ = 6.89 \cdot 10^{-21} \text{ s}$$

Dans le cœur d'un réacteur nucléaire, sauf en cas de rupture de la gaine de l'élément combustible (quelques millimètres d'épaisseur) constituant la première barrière contre leur dissémination, les produits de fission (notamment les plus volatiles) demeurent confinés dans le combustible, compte tenu de l'extrême petitesse de leur parcours de ralentissement.

La phase d'émission des neutrons revêt un degré de complexité que fait apparaître la **figure 11** relative à la fission induite par un neutron sur un noyau atomique  ${}^A_ZX$  ; par exemple :  $n + {}^{238}_{92}\text{U}$  conduisant au noyau composé d'uranium 239 formé dans un état excité  ${}^{239}_{92}\text{U}^*$ .

La **fission** dite de **première chance** correspond à la fission du noyau composé ( $A + 1$ ) excité, donc dans l'exemple choisi ici du noyau d'uranium 239,  ${}^{239}_{92}\text{U}^*$ .

Lorsque l'énergie cinétique du neutron incident est élevée, le noyau composé est formé dans un état très excité de sorte que la probabilité de réémettre un neutron avant que la fission du noyau atomique ( $A + 1$ ) n'advienne est non négligeable.

Dans un tel cas, ce n'est pas le noyau composé de nombre de masse ( $A + 1$ ) qui fissionne, mais le noyau atomique de nombre de masse  $A$  dans un état excité, par conséquent  ${}^{238}_{92}\text{U}^*$  dans l'exemple précédemment retenu. Cette fission est dénommée **fission de deuxième chance**, notée conventionnellement  $(n, n'f) \equiv (n, nf)$ , par contraste avec la **fission de première chance** qui correspond à la fission du noyau composé de nombre de masse  $A$ , notée  $(n, f)$ .

Il se peut que le noyau de nombre de masse  $A$  lui-même émette un neutron, si son état d'excitation le permet, et que ce soit alors le noyau de nombre de masse ( $A - 1$ ) dans un état excité qui fissionne : il s'agit de la **fission de troisième chance**,  $(n, n', n'', f) \equiv (n, 2nf)$ . En poursuivant l'exemple de la fission induite par un neutron sur un noyau d'uranium 238, le nucléide fissionnant correspondant à la fission de troisième chance est l'uranium 237 dans un état excité,  ${}^{237}_{92}\text{U}^*$ .

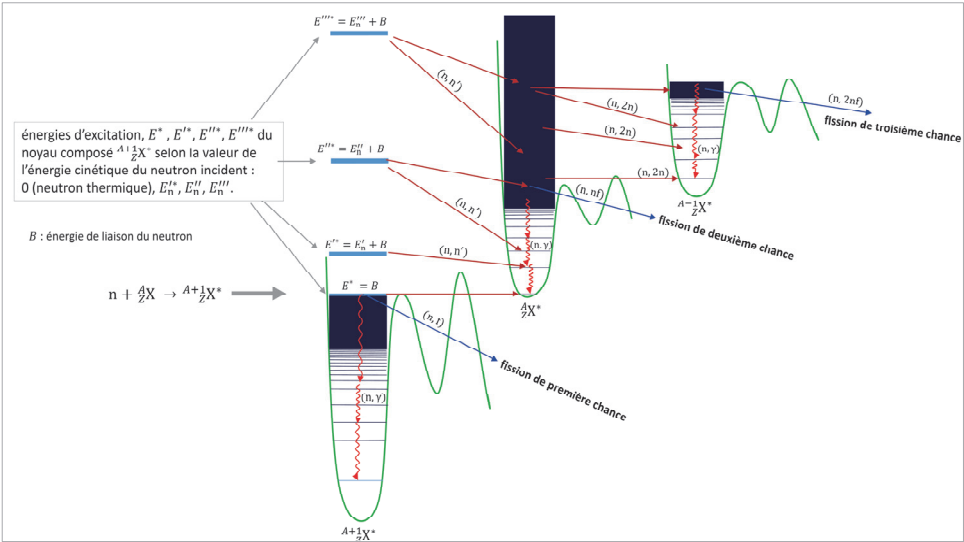


Figure 11. Le processus de fission induite par un neutron sur un noyau atomique de nombre de masse  $A$  et de numéro atomique  $Z$  et l'émission de neutrons et de gamma (par réactions  $(n, n')$ ,  $(n, 2n)$ , etc.) associée aux réactions de fission de 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> chances<sup>42</sup>. Par exemple, si le noyau cible est un noyau d'uranium 238,  $^{238}_{92}\text{U}$ , la fission de 1<sup>re</sup> chance correspond à la fission du noyau composé formé  $^{239}_{92}\text{U}^*$ , la fission de 2<sup>e</sup> chance à la fission du noyau  $^{238}_{92}\text{U}^*$ , la fission de 3<sup>e</sup> chance à la fission du noyau  $^{237}_{92}\text{U}^*$ .

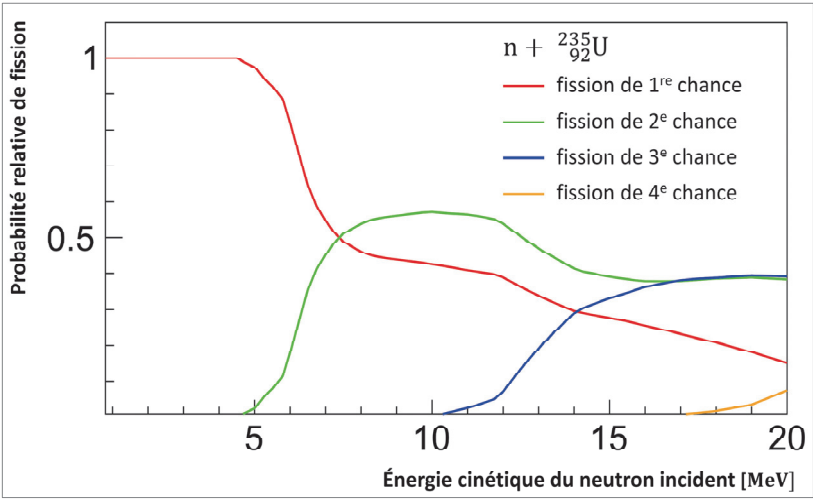


Figure 12. Probabilités des fissions de 1<sup>re</sup> chance, 2<sup>e</sup> chance et 3<sup>e</sup> chance rapportées à la probabilité de la fission induite par un neutron sur un noyau  $^{235}_{92}\text{U}$ .<sup>43</sup>

<sup>42</sup> D'après J.-F. Berger, « La fission : de la phénoménologie à la théorie », *op. cit.*, p. 41, figure 18.

<sup>43</sup> K.-H. Schmidt, B. Jurado, *Review on the progress in nuclear fission*, *op. cit.*, p. 23.

La **figure 12** montre la variation de la probabilité d'occurrence des fissions de première et deuxième chance en fonction de l'énergie des neutrons incidents dans le cas de la fission induite sur un noyau d'uranium 235. Il s'agit donc de neutrons émis avant la formation des fragments de fission. La fission au-delà de la 7<sup>e</sup> chance (émission de 6 neutrons) est mentionnée dans la littérature<sup>44 45 46 47</sup>.

Les multiplicités des neutrons prompts émis font l'objet de mesures. On montre que les probabilités  $P_\nu$  d'émission de  $\nu$  neutrons prompts de fission peuvent être approximativement représentées par l'intermédiaire de la probabilité cumulée (cumulative) suivante<sup>48</sup> :

$$\sum_{n=0}^{\nu} P_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\nu - \bar{\nu} + \frac{1}{2} + b} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (4.1)$$

où :

- $\bar{\nu}$  est le nombre moyen de neutrons prompts de fission émis ;
- $\sigma$  est la largeur de la distribution ;
- $b$  est un paramètre correctif de faible valeur ( $< 10^{-2}$ ) choisi de telle sorte qu'est satisfaite la condition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu P_\nu = \bar{\nu} \quad (4.2)$$

Les données expérimentales fournissent des valeurs représentatives des paramètres  $\bar{\nu}$  et  $\sigma$  :

$$\bar{\nu} = 2.5 \text{ et } \sigma = 1.08$$

Les **tableaux 3a** et **3b** fournissent des valeurs estimées des probabilités  $P_\nu$  pour la fission induite par un neutron d'énergie  $E_n$  sur un noyau d'uranium 235.<sup>49</sup>

<sup>44</sup> B. C. Diven, H. C. Martin, R. F. Taschek, J. Terrell, « Multiplicities of Fission Neutrons », *Physical Review* 101, February 1, 1956, p. 1012-1016.

<sup>45</sup> M. S. Zucker, N. E. Holden, « Energy dependence of the neutron multiplicity  $P_\nu$  in fast neutron induced fission of  $^{235}\text{U}$  and  $^{239}\text{Pu}$  », BNL-38491, *American Nuclear Society annual meeting*, Reno, NV, USA, 15 Jun 1986 ; « Reevaluation of the average prompt neutron emission multiplicity ( $\bar{\nu}$ ) values from fission of uranium and transuranium nuclides », *Meeting on nuclear standard reference data*, Geel (Belgium), 12-16 Nov 1984, BNL-NCS-35513.

<sup>46</sup> P. Taloua, I. Stetcu, T. Kawano, « Comprehensive modeling of prompt fission neutrons and  $\gamma$  rays in the spontaneous fission of  $^{252}\text{Cf}$  », *ND2016, EPJ Web of Conferences* 146, 04031, 2017, <https://doi.org/10.1051/epjconf/201714604031>.

<sup>47</sup> B. H. Adam, *A new measurement of the neutron multiplicity emitted in  $^{252}\text{Cf}$  spontaneous fission*, PhD, Temple University, 2020, voir chapitre 5.

<sup>48</sup> J. Terrell, « Distributions of Fission Neutron Numbers », *Physical Review* 108, November 1, 1957, pp. 783-789, <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.108.783>.

<sup>49</sup> M. S. Zucker, N. E. Holden, « Energy dependence of the neutron multiplicity  $P_\nu$  in fast neutron induced fission of  $^{235}\text{U}$  and  $^{239}\text{Pu}$  », *op. cit.*, Tables III, IV et V, <https://www.osti.gov/servlets/purl/6974950>.

Tableau 3a. Probabilités d'émission de  $\nu$  neutrons prompts de fission,  $P_{\nu}$ , pour différentes énergies d'incidence du neutron (énergie thermique à 5 MeV) sur un noyau d'uranium 235, et valeur du nombre moyen de ces neutrons émis.

Nombre de neutrons prompts émis	Énergie du neutron incident MeV					
	0.	1.	2.	3.	4.	5.
$\nu = 0$	.0317223	.0237898	.0183989	.0141460	.0115208	.0078498
$\nu = 1$	.1717071	.1555525	.1384891	.1194839	.1032624	.0802010
$\nu = 2$	.3361991	.3216515	.3062123	.2883075	.2716849	.2456595
$\nu = 3$	.3039695	.3150433	.3217566	.3266568	.3283426	.3308175
$\nu = 4$	.1269459	.1444732	.1628673	.1836014	.2021206	.2291646
$\nu = 5$	.0266793	.0356013	.0455972	.0569113	.0674456	.0836912
$\nu = 6$	.0026322	.0034339	.0055694	.0089426	.0128924	.0187016
$\nu = 7$	.0001449	.0004546	.0011093	.0019504	.0027307	.0039148
$\bar{\nu}$	2.4140000	2.5236700	2.6368200	2.7623400	2.8738400	3.0386999

Tableau 3b. Probabilités d'émission de  $\nu$  neutrons prompts de fission,  $P_{\nu}$ , pour différentes énergies d'incidence du neutron (6 MeV à 10 MeV) sur un noyau d'uranium 235, et valeur du nombre moyen de ces neutrons émis.

Nombre de neutrons prompts émis	Énergie du neutron incident MeV		
	6.	7.	10.
$\nu = 0$	.0046272	.0024659	.0004373
$\nu = 1$	.0563321	.0360957	.0080115
$\nu = 2$	.2132296	.1788634	.1002329
$\nu = 3$	.3290407	.3210507	.2779283
$\nu = 4$	.2599806	.2892537	.3342611
$\nu = 5$	.1045974	.1282576	.1966100
$\nu = 6$	.0265604	.0360887	.0650090
$\nu = 7$	.0056322	.0079244	.0175099
$\bar{\nu}$	3.2316099	3.4272800	3.8749800

À ces neutrons s'ajoutent les neutrons dits d'évaporation, qui sont émis par les **fragments de fission** constitués. On verra plus loin que l'ensemble de ces neutrons entrent dans la catégorie des **neutrons prompts de fission** que l'on distingue des **neutrons retardés** émis par les **produits de fission** constitués sur des échelles de temps plus longues, théoriquement de  $\sim 10^{-6}$  s à plusieurs minutes, par conséquent disjointes de la plage temporelle d'émission prompte de neutrons<sup>50</sup>.

<sup>50</sup> Une distinction est faite entre **produit de fission primaire** issu d'un fragmentation fission ayant émis neutrons prompts et gamma prompts et avant toute désintégration bêta et **produit de fission secondaire** formé après au moins une désintégration bêta du produit de fission primaire : voir D. G. Madland, « Total prompt energy release in the neutron-induced fission of  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ , and  $^{239}\text{Pu}$  », *Nuclear Physics A* 772, 2006, pp. 113-137, p. 116.

## 5. Énergie libérée par la fission

Au point de selle, l'énergie totale du système fissionnant se décompose de la manière suivante :

- l'énergie coulombienne mutuelle des deux fragments au contact (qui sera convertie en énergie cinétique) ;
- l'énergie d'excitation des fragments de fission sur le point de s'individualiser.

L'énergie d'excitation se décompose elle-même en :

- une **énergie d'excitation collective** qui concerne l'ensemble du noyau : le noyau vibre selon différents modes possibles, comme on l'a vu plus haut sur la figure 6 ; on y associe des « degrés de liberté collectifs » du noyau atomique liés aux phénomènes qui le déforment, intervenant lors de la réaction, tels que son élongation, ses asymétries, etc. (voir figure 2 par exemple) ;
- une **énergie d'excitation intrinsèque** (ou interne) correspondant au comportement des nucléons considérés individuellement ; le noyau atomique excité est donc aussi caractérisé par des **degrés de liberté individuels**.

Le couplage qui existe entre **degrés de liberté collectifs** et **degrés de liberté individuels** complexifie encore l'élaboration d'une théorie exacte de la fission<sup>51 52</sup>. La **figure 13** illustre ces composantes de l'énergie d'excitation. L'**énergie totale d'excitation** – notée **TXE**, *total excitation energy*, dans la littérature – recouvre l'**énergie de déformation des (pré)fragments de fission** et l'**énergie d'excitation des états quantiques collectifs** (voir figure 6) : elle dépend de la nature des fragments de fission formés, pouvant atteindre 25 MeV pour des réactions de fission induites par des neutrons d'énergie thermique. Dans le cas d'une réaction de fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235, la **figure 14a** donne l'allure de la distribution de cette énergie d'excitation. L'énergie totale d'excitation des fragments de fission en fonction de leur nombre de masse  $A$  est représentée sur la **figure 14b**.

Cette énergie d'excitation est dissipée selon deux voies<sup>53</sup> :

- l'émission de **neutrons prompts** : l'énergie correspondante est  $E_{n,p}^{*FF} = \bar{\nu}_p(E_i)(\bar{S}_n + \bar{\epsilon})$  où  $\bar{\nu}_p(E_i)$  est le nombre moyen de neutrons prompts émis par fission induite par un neutron incident d'énergie  $E_i$ ,  $\bar{S}_n$  est l'énergie de séparation moyenne des neutrons,  $\bar{\epsilon}$

<sup>51</sup> J.-F. Berger, « La fission : de la phénoménologie à la théorie », dans *Le cycle électronucléaire : De la fission aux nouvelles filières*, École internationale Joliot-Curie de physique nucléaire, Maubuisson, France, 25<sup>e</sup> session, 18-23 septembre 2006, p. 1-60.  
[https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/48/026/48026345.pdf](https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/48/026/48026345.pdf).

<sup>52</sup> R. Bernard, *Couplages modes collectifs - excitations intrinsèques dans le processus de fission*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, septembre 2011.

<sup>53</sup> D. G. Madland, « Total prompt energy release in the neutron-induced fission of <sup>235</sup>U, <sup>238</sup>U, and <sup>239</sup>Pu », *Nuclear Physics A* 772, 2006, p. 113–137, p. 118-124.

est la moyenne de l'énergie communiquée au centre de masse dans le processus d'émission de neutrons prompts ; pour le système fissionnant  $n_{\text{thermique}} + {}^{235}_{92}\text{U}$ , l'énergie  $E_{n,p}^{*FF}$  est égale à  $\sim 14.6$  MeV et pour le système  $n_{\text{thermique}} + {}^{239}_{94}\text{Pu}$ , elle est de  $\sim 19.2$  MeV. Cette énergie ne doit pas être confondue avec l'**énergie cinétique** des neutrons prompts émis qui représente seulement une fraction de cette énergie. L'énergie  $E_{n,p}^{*FF}$  augmente linéairement avec l'énergie  $E_i$  du neutron incident ;

- l'émission de **gamma prompts** : l'énergie correspondante est de l'ordre de  $E_{\gamma}^{*FF} = 6.7$  MeV pour les systèmes fissionnants  $n_{\text{thermique}} + {}^{235}_{92}\text{U}$ ,  $n_{\text{thermique}} + {}^{239}_{94}\text{Pu}$  et augmente linéairement avec une pente relativement faible (approximativement 0.1) avec l'énergie  $E_i$  du neutron incident.

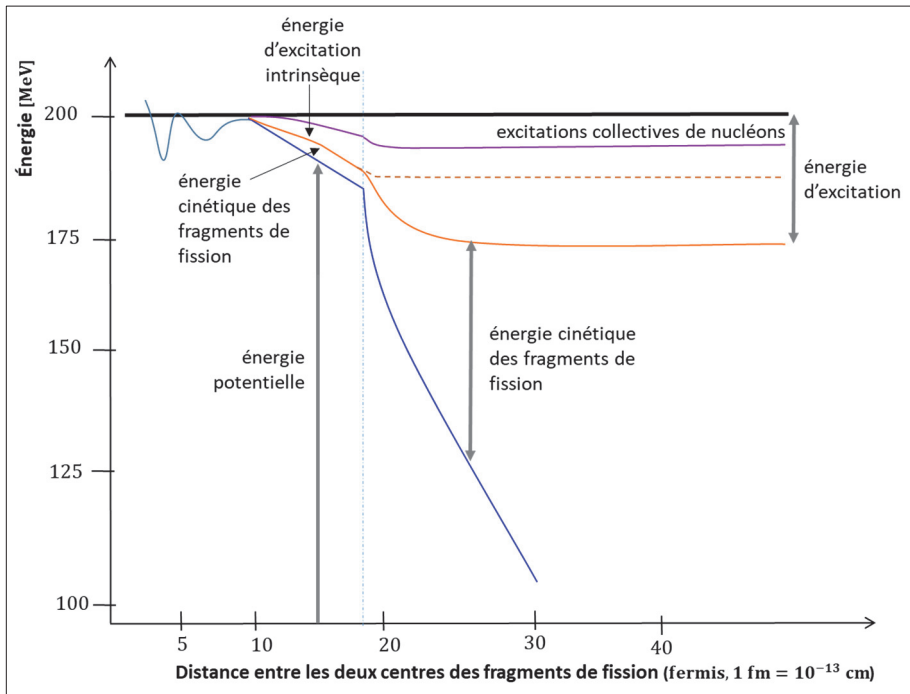


Figure 13. Énergétique du phénomène de fission.<sup>54 55 56</sup> L'énergie d'excitation se décompose elle-même en une énergie d'excitation « collective » associée au noyau atomique pris dans son ensemble et une énergie d'excitation « intrinsèque » relative aux nucléons considérés individuellement.

<sup>54</sup> K.-H. Schmidt, B. Jurado, « Final excitation energy of fission fragments », *Physical Review C* 83, 061601(R) –June 29, 2011, p. 2 <https://journals.aps.org/prc/pdf/10.1103/PhysRevC.83.061601>.

<sup>55</sup> C. Morariu, A. Tudora, F.-J. Hamsch, S. Obersted, C. Manaiescu, « Modelling of the total excitation energy partition including fragment deformation and excitation energies at scission », *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 39 055103, 2012, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0954-3899/39/5/055103>.

<sup>56</sup> K.-H. Schmidt, B. Jurado, *General Description of Fission Observables GEF Model*, op. cit., p. 42.

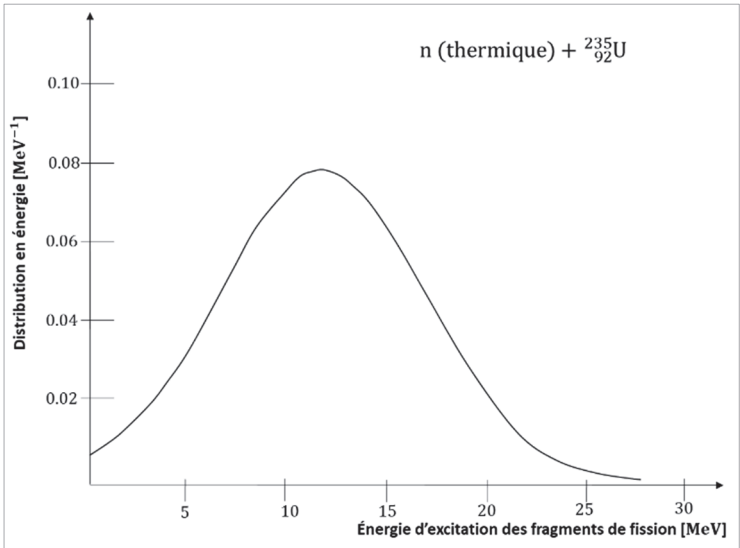


Figure 14a. Allure de la distribution de l'énergie d'excitation totale des fragments de fission normalisée à l'unité relative à la réaction de fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235,  $n_{th} + {}^{235}_{92}\text{U}$ .<sup>57</sup>

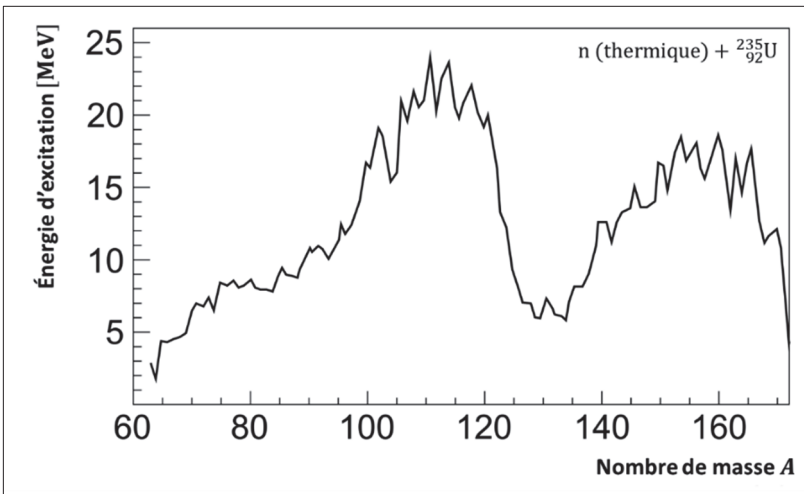


Figure 14b. Allure de l'énergie totale d'excitation des fragments de fission (« légers » et « lourds ») en fonction de leur nombre de masse  $A$ . Il s'agit d'une distribution discrète : les segments continus matérialisent la variation de cette énergie d'excitation entre deux valeurs consécutives du nombre de masse  $A$ .<sup>58</sup>

<sup>57</sup>J. Terrell, « Fission Neutron Spectra and Nuclear Temperature », *Physical Review* 113, January 15, 1959, pp. 527-541, p. 533, figure 6, <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.113.527>.

<sup>58</sup>D'après C. Morariu *et al.*, « Modelling of the total excitation energy partition including fragment deformation and excitation energies at scission », 2012 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 39 055103, figure 4, p. 7.

L'**énergie cinétique totale** est celle acquise par les **fragments de fission** – notée **TKE**, *total kinetic energy*, dans la littérature – : elle est la somme de leur **énergie cinétique avant la scission** et de celle résultant de la **répulsion coulombienne**. L'énergie cinétique des fragments de fission dépend de la nature des fragments de fission, comme le montre la **figure 15** dans le cas de la fission induite par un neutron thermique sur l'uranium 235 :

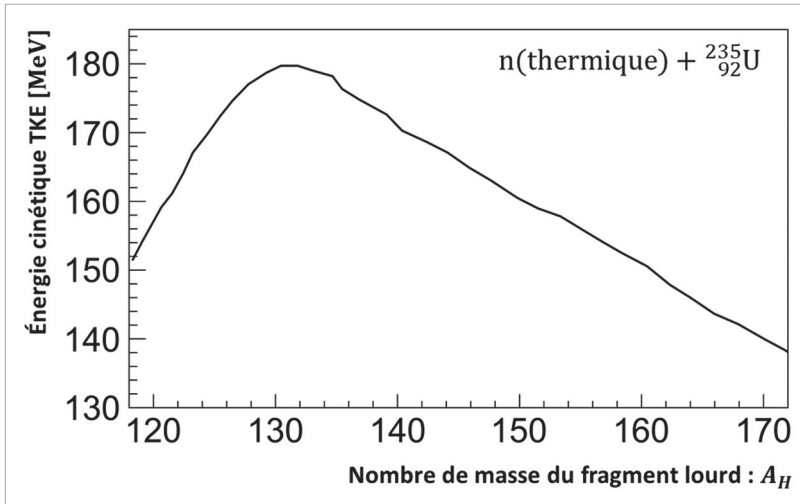


Figure 15. Allure de la variation de l'énergie cinétique totale des fragments de fission en fonction du nombre de masse  $A_H$  du fragment lourd dans le cas de la fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235. Il s'agit d'une grandeur à valeurs discrètes : la ligne continue matérialise la variation de cette énergie d'excitation d'une valeur à l'autre du nombre de masse  $A_H$ .<sup>59</sup>

Cette **figure 15** montre que l'énergie cinétique totale (TKE) présente un maximum autour des masses 130-132 du fragment de fission lourd (à laquelle correspond la masse complémentaire du fragment de fission léger  $\sim 100$ ). Ce pic présente une correspondance avec le pic observé pour les rendements de fission des produits de fission abordés au paragraphe 8.

Il est instructif d'examiner plus en détail les différentes composantes qui se partagent l'énergie libérée par la fission. Pour cela, on considère une réaction de fission particulière induite par un neutron d'énergie cinétique  $E_i$  sur un noyau  $(A, Z)$  de masse  $M$ , aboutissant à la formation de deux produits de fission. Ces deux produits de fission, en général instables, vont subir une série de transitions isobariques (transitions bêta le plus souvent) conduisant *in fine* à un **isobare stable** situé dans la vallée de stabilité. À l'issue de l'ensemble de ces phénomènes, l'énergie de fission libérée se trouve répartie de la manière suivante :

<sup>59</sup> V. Manea, A. Tudora, « Fission fragment total kinetic energy calculation for prompt neutron emission evaluation purposes », dans F.-J. Hamsch and N. Carjan (Edited by), *Proceedings of the Scientific Workshop on Nuclear Fission Dynamics and the Emission of Prompt Neutrons and Gamma Rays*, Sinaia, Romania, September 27-29, 2010 p. 51, figure 2.



- l'énergie cinétique des fragments de fission ;
- l'énergie cinétique des neutrons prompts ;
- l'énergie cinétique des neutrons retardés ;
- l'énergie totale associée aux photons gamma prompts ;
- l'énergie totale associée aux photons gamma retardés (transitions radioactives) ;
- l'énergie associée aux particules bêta émises par les désintégrations radioactives ;
- l'énergie emportée par les antineutrinos/neutrinos.

On désigne par  $(A_L, Z_L)$  et  $(A_H, Z_H)$  ces deux produits de fission (PF) **stables** auxquels aboutissent les désintégrations radioactives des produits de fission instables formés : dans le cas général, la fission étant asymétrique, l'indice  $L$  se réfère au « PF léger » (*light*) (« produit de fission léger ») et l'indice  $H$  au « PF lourd » (*heavy*) (« produit de fission lourd »). Formellement, on est en présence du processus suivant<sup>60</sup> :

$$(A, Z) + n + E_i \rightarrow (A_L, Z_L) + (A_H, Z_H) + \nu n + n_\beta \beta + n_\gamma \gamma + n_{\nu_e} \nu_e + E_1 + E_2 + E_n + E_\gamma + E_\beta \quad (5.1)$$

qui, en faisant apparaître les masses (en unité d'énergie) des particules en jeu se réécrit comme :

$$M_n c^2 + M c^2 + E_i \rightarrow M_L c^2 + M_H c^2 + \nu M_n c^2 + n_\beta M_e c^2 + M_{\nu_e} c^2 \nu_e + E_1 + E_2 + E_n + E_\gamma + E_\beta + E_{\nu_e} \quad (5.2)$$

où :

- $M c^2$  : masse en unité d'énergie du noyau atomique initial  $(A, Z)$  ;
- $M_j c^2, j = n, L, H, e, \nu_e$  : respectivement les masses au repos en unité d'énergie des neutrons ( $n$ ), des produits de fission léger ( $L$ ) et lourd ( $H$ ) respectivement ( $A_L, Z_L$ ) et ( $A_H, Z_H$ ), des particules  $\beta$  (électrons/positons), des neutrinos ( $\nu_e$ )/antineutrinos (dont la masse au repos est très faible, voir chapitres 3 et 5) ;
- $\nu$  : nombre de neutrons prompts et retardés émis ;
- $n_\beta$  : nombre de particules  $\beta$  émises ;
- $n_{\nu_e}$  : nombre d'antineutrinos/neutrinos émis ;
- $E_k, k = 1, 2, n, \beta, \nu_e$  : énergies cinétiques respectivement des fragments de fission ( $A_L, Z_L$ ) et ( $A_H, Z_H$ ) des neutrons prompts et retardés, des particules  $\beta$ , des antineutrinos/neutrinos ;
- $E_\gamma$  : énergie des gamma prompts et retardés (accompagnant les désintégrations  $\beta$ ).

En toute rigueur, il faudrait ajouter dans les membres de droite des relations (5.1) et (5.2) les énergies cinétiques des noyaux de recul relatifs aux désintégrations bêta. On a

<sup>60</sup> M. F. James, « Energy released in fission », *Journal of Nuclear Energy*, Vol. 23, 1969, pp. 517-536, [https://doi.org/10.1016/0022-3107\(69\)90042-2](https://doi.org/10.1016/0022-3107(69)90042-2).

cependant vu dans le chapitre 5 § 4 que ces énergies cinétiques ont des valeurs très faibles, négligeables ici.

Dans la pratique, toutes les voies de fission sont à prendre en compte, se différenciant par la nature des produits de fission engendrés, le nombre de neutrons émis, etc. Cela signifie que pour une réaction de fission relative à un noyau initial donné, il convient d'utiliser les moyennes des énergies précitées sur l'ensemble des voies de sorties possibles. Différentes grandeurs d'énergie associées à la fission induite par neutron sont ainsi définies à partir de ces énergies moyennes.

- L'énergie moyenne totale,  $Q_{tot}$ , libérée par fission d'un noyau atomique  $(A, Z)$  induite par un neutron d'énergie  $E_i$  :

$$\bar{Q}_{tot} = \bar{E}_{PF} + \bar{E}_n + \bar{E}_\gamma + \bar{E}_\beta + \bar{E}_{\nu_e} \quad (5.3)$$

avec :

- $\bar{E}_{PF}$  : énergie cinétique moyenne des produits de fission ;
  - $\bar{E}_n$  : énergie cinétique moyenne des neutrons prompts et retardés<sup>61</sup> ;
  - $\bar{E}_\gamma$  : énergie des  $\gamma$  prompts et retardés ;
  - $\bar{E}_\beta$  : énergie cinétique moyenne des particules  $\beta$  ;
  - $\bar{E}_{\nu_e}$  : énergie cinétique moyenne des neutrinos/antineutrinos.
- L'énergie moyenne  $\bar{Q}'_{tot}$  : dans un réacteur nucléaire critique, un neutron d'énergie cinétique  $E_i$  sert à entretenir la réaction en chaîne, de sorte que l'on peut définir une nouvelle énergie  $\bar{Q}'_{tot}$  libérée par fission comme :

$$\bar{Q}'_{tot} = \bar{Q}_{tot} - E_i \quad (5.4)$$

Pour des neutrons d'énergie thermique, comme  $E_i$  est très faible, de l'ordre de 0.025 eV,  $\bar{Q}'_{tot} \approx \bar{Q}_{tot} \approx 200$  MeV. Cette égalité approximative n'est naturellement plus vraie pour une fission provoquée par des neutrons rapides.

- L'énergie moyenne  $\bar{Q}_{eff}$  : c'est l'énergie moyenne libérée par la fission sur une période de temps donnée, délivrée dans le cœur du réacteur.

Elle se déduit de  $\bar{Q}'_{tot}$  par soustraction de l'énergie cinétique  $\bar{E}_{\nu_e}$  emportée par les antineutrinos/neutrinos, car ces particules élémentaires n'interagissent pratiquement pas avec la matière en raison de leurs sections efficaces d'interaction avec les protons très faibles (de l'ordre de  $10^{-19}$  barns,  $10^{-43}$  cm<sup>2</sup>), et des énergies  $\overline{\Delta E}_\beta$  et  $\overline{\Delta E}_\gamma$  respectivement des bêta et gamma des produits de fission ayant des périodes radioactives très grandes vis-à-vis de la durée de séjour du combustible dans le cœur du réacteur :

---

<sup>61</sup> L'énergie cinétique emportée par les neutrons retardés est très faible :  $7.3 \cdot 10^{-3}$  MeV contre 4.79 MeV par les neutrons prompts dans le cas de la fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235.

$$\bar{Q}_{eff} = \bar{Q}'_{tot} - \bar{E}_{\nu_e} - \overline{\Delta E_{\beta}} - \overline{\Delta E_{\gamma}}$$

(5.5)

Les valeurs moyennes des différentes composantes de l'énergie libérée par la fission sont fournies dans le **tableau 4a**.

Tableau 4a. Répartition indicative de l'énergie de fission en MeV.<sup>62</sup>

	<sup>233</sup> <sub>92</sub> U	<sup>235</sup> <sub>92</sub> U	<sup>238</sup> <sub>92</sub> U	<sup>239</sup> <sub>94</sub> Pu	<sup>241</sup> <sub>94</sub> Pu
Fragments de fission	165.8 ± 2.3	166.2 ± 1.3	166.9 ± 1.3	172.8 ± 1.9	172.2 ± 2.2
Neutrons	4.87 ± 0.12	4.8 ± 0.1	5.5 ± 0.1	5.9 ± 0.1	5.9 ± 0.1
Gamma prompts	8.0 ± 1.5	8.0 ± 0.8	7.5 ± 1.3	7.7 ± 1.4	7.6 ± 1.4
Gamma différés des produits de fission	5.85 ± 1,3	7.2 ± 1.1	8.4 ± 1.6	6.1 ± 1.3	7.4 ± 1.5
Bêta des produits de fission	5.68 ± 0.4	7.0 ± 0.3	8.9 ± 0.6	6.1 ± 0.6	7.4 ± 0.6
Antineutrinos/neutrinos	~ 6.9	9.6 ± 0.5	11.9 ± 0.7	8.6 ± 0.7	10.2 ± 0.7
Énergie d'incidence du neutron	~ 0	~ 0	3.1	~ 0	~ 0
$\bar{Q}'_{tot}$	-197.1	202,7 ± 0.1	205.9 ± 0.3	207.2 ± 0.3	210.6 ± 0.3
$\bar{Q}_{eff}$	190.0 ± 0.5	192.9 ± 0.5	193.9 ± 0.8	198.5 ± 0.8	200.3 ± 0.8

On constate que les processus de désintégration sont responsables d'une libération d'une énergie d'environ 23 MeV, en cumulant l'énergie cinétique des bêta, des neutrinos/antineutrinos et l'énergie emportée par les gamma. Pour un réacteur à l'état critique, il faut ajouter à  $\bar{Q}_{eff}$  l'énergie moyenne  $\bar{E}_c$  des gamma issus de la capture radiative des  $(\bar{\nu} - 1)$  neutrons qui ne participent par conséquent pas à la réaction en chaîne :

$$\bar{E}_c = (\bar{\nu} - 1)\bar{Q}_c$$

(5.6)

où  $\bar{Q}_c$  est l'énergie libérée pour une capture radiative moyennée sur un nombre donné de nucléides.

Dans un réacteur nucléaire, les réactions de capture radiative se produisent sur des nucléides très divers (H, D, B, Fe, Cr, Ni, Zr, U, Pu, produits de fission, etc.) qui entrent dans la composition des différentes structures présentes dans le cœur du réacteur.

Une évaluation moyenne de  $\bar{Q}_c$  et de  $\bar{E}_c$  peut être faite sur une durée de fonctionnement et une configuration de cœur définies. Des ordres de grandeur typiques sont  $\bar{Q}_c \approx 6$  MeV/capture et  $\bar{E} \approx 9$  à 12 MeV.

Des formes analytiques ajustées sur des mesures ont été proposées pour représenter la variation des différentes composantes de l'énergie libérée par fission en fonction de l'énergie  $E_i$  du neutron incident, voir annexe II.

<sup>62</sup> M. F. James, « Energy released in fission », *Journal of Nuclear Energy*, op. cit., p. 529, Table 12.

Remarques

- Il existe une autre manière d’exprimer l’énergie disponible  $\bar{Q}'_{tot}$  pour un réacteur considéré à l’état critique, c’est-à-dire qui a juste besoin d’un des  $\bar{\nu}$  (à ne pas confondre avec la notation  $\nu_e$  désignant les neutrinos/antineutrinos) neutrons issus en moyenne de la fission pour entretenir la réaction en chaîne.

Cette autre formulation fait intervenir les rendements de fission, c’est-à-dire la proportion, notée  $y_l$ , que représente la formation d’un produit de fission donné,  $l$ , de masse atomique  $M_l$  et de numéro atomique  $Z_l$  parmi tous les produits de fission possibles ;  $y_l$  est appelé **rendement de fission** et sera plus complètement présenté ultérieurement.

La quantité  $\bar{Q}'_{tot}$  peut ainsi s’obtenir par le bilan de masse suivant :

$$\bar{Q}'_{tot} = M c^2 - \sum_l y_l M_l c^2 - (\bar{\nu} - 1) M_n c^2 \tag{5.7}$$

Si l’on utilise les excès de masse,  $\Delta M$ ,  $\Delta M_l$ ,  $\Delta M_n$  (voir chapitre 3) respectivement du nucléide initial de masse atomique  $M$ , des produits de fission et des neutrons,  $\bar{Q}'_{tot}$  prend la forme suivante :

$$\bar{Q}'_{tot} = \Delta M c^2 - \sum_l y_l \Delta M_l c^2 - (\bar{\nu} - 1) \Delta M_n c^2 \tag{5.8}$$

- L’émission des particules alpha, d’autres hélions, de deutérons, provenant entre autres de la fission ternaïre, de protons, a été négligée ici. Leur contribution est faible, estimée inférieure à 0.1 MeV/fission.

Exemples

Tableau 4b . Détermination de l’énergie libérée par la fission  $\bar{Q}'_{tot}$ .<sup>63</sup>

Nucléide	Domaine d’énergie du neutron incident	Excès de masse du nucléide cible $\Delta M c^2$ MeV	Excès de masse des produits de fission stables $\sum_l y_l \Delta M_l c^2$ MeV	Nombre moyen de neutrons issus de la fission $\bar{\nu}$	$(\bar{\nu} - 1) \Delta M_n c^2$ MeV	$\bar{Q}'_{tot}$ MeV
$^{235}_{92}\text{U}$	Thermique	40.91	−173.32	2.49	11.54	202.7
$^{238}_{92}\text{U}$	Rapide	47.29	−173.17	2.84	14.61	205.9
$^{239}_{92}\text{Pu}$	Thermique	52.85	−173.75	3.07	15.10	207.2

De même, on a les relations suivantes :

- nombre de particules  $\beta$  émises,  $n_\beta$ , s’écrit :

<sup>63</sup> M. F. James, « Energy released in fission », *Journal of Nuclear Energy, op. cit.*, p. 519, Table 1.

$$n_{\beta} = \sum_l y_l Z_l - Z \quad (5.9)$$

- La conservation du nombre de nucléons :

$$A = \sum_l y_l A_l + (\bar{\nu} - 1) \quad (5.10)$$

## 6. Les neutrons prompts de fission

On est conduit à distinguer sous la désignation de **neutrons prompts de fission** quatre catégories de neutrons émis au cours du processus de fission :

- les neutrons émis avant la fission, issus des fissions  $i^e$  chance ;
- les neutrons émis entre l'atteinte du point de selle et l'instant de la scission<sup>64 65 66</sup> : ce sont les **neutrons de scission** ; ils pourraient être appréhendés comme la troisième entité d'une fission considérée dès lors comme ternaire ;
- les neutrons émis durant la phase d'accélération des fragments de fission, dénommés dans la littérature *Neutrons Emitted During Acceleration* (NEDA)<sup>67</sup> ;
- les neutrons émis par les **fragments de fission** à l'issue de la phase d'accélération (fragments de fission totalement (ou presque) accélérés).

Il s'avère cependant que les neutrons des deux catégories médianes sont sujets à discussion. Selon certains auteurs<sup>68</sup>, des neutrons prompts seraient émis avant que les fragments de fission aient acquis 90 % de leur énergie cinétique finale, en moyenne 10 % dans le cas de la réaction de fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235. Les deux principales caractéristiques physiques d'intérêt relatives aux **neutrons prompts** sont leur quantité produite ou **multiplicité** lors d'une fission et leur **spectre en énergie**, en fonction de l'énergie du neutron incident lorsqu'il s'agit d'une fission induite par un neutron.

Si le nombre moyen  $\bar{\nu}$  de neutrons prompts est relativement bien connu pour les principaux isotopes d'intérêt pour la physique des réacteurs nucléaires, il n'en est pas de même de leur

<sup>64</sup> N. Carjan, P. Talou, O. Serot, « Emission of scission neutrons in the sudden approximation », *Nucl. Phys. A*, 792(1–2), 2007, pp. 102–121, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2007.05.006>.

<sup>65</sup> A. S. Vorobyev, O. A. Shcherbakov, A. M. Gagarski, G. A. Petrov, G. V. Val'ski, « Experimental Determination of the Yield of “Scission” Neutrons from the Spontaneous Fission of  $^{252}\text{Cf}$  », *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 2017, Vol. 125, N° 4, pp. 619–637, <https://doi.org/10.1134/S1063776117080209>.

<sup>66</sup> H.-H. Knitter, U. Brosa, C. Budtz-Jorgensen, Chapter 11: « Neutron and gamma emission in fission », dans C. Wagemans (Editor), *The nuclear fission process*, op. cit., pp. 507–514.

<sup>67</sup> A. Matsumoto, H. Taninaka, K. Hashimoto, T. Ohsawa, « Monte Carlo simulation of prompt neutron emission during acceleration in fission », *Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol. 49, N° 8, 2012, pp. 782–792, <https://doi.org/10.1080/00223131.2012.677127>.

<sup>68</sup> A. Matsumoto, et al., « Monte Carlo simulation of prompt neutron emission during acceleration in fission », *Journal of Nuclear Science and Technology*, 49, 2012, pp. 782–792.

spectre en énergie qui demeure l’objet d’études visant à le modéliser plus finement. Le nombre moyen ou multiplicité moyenne  $\bar{\nu}$  des neutrons prompts émis diffère selon le noyau fissile considéré et l’énergie du neutron incident, comme le montre le **tableau 5**.

Tableau 5. Énergie moyenne des neutrons émis par fission (en MeV) et nombre moyen  $\bar{\nu}$  de neutrons émis par fission.

Noyau fissile	Énergie moyenne des neutrons prompts émis MeV	Nombre moyen de neutrons prompts émis $\bar{\nu}$
$^{235}_{92}\text{U}$ thermique	1.98	2.47
$^{235}_{92}\text{U}$ rapide	2.02	2.66
$^{238}_{92}\text{U}$	1.98	2.54
$^{239}_{94}\text{Pu}$ thermique	2.07	2.81
$^{239}_{94}\text{Pu}$ rapide	2.18	3.11
$^{241}_{94}\text{Pu}$ thermique	2.07	2.94
$^{241}_{94}\text{Pu}$ rapide	2.18	
$^{233}_{92}\text{U}$ thermique	1.93	2.40
$^{233}_{92}\text{U}$ rapide	2.03	2.67
$^{232}_{90}\text{Th}$	1.83	2.12
$^{252}_{98}\text{Cf}$ fission spontanée	2.14	3.72

Des évaluations ont été faites du nombre moyen de neutrons prompts émis respectivement par les fragments léger ( $L$ ) et lourd ( $H$ )<sup>69</sup> :

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_L + \bar{\nu}_H$$

(6.1)

Le **tableau 6** en fournit un exemple de valeurs pour deux systèmes fissionnants.

Tableau 6. Multiplicités moyennes par fragments de fission et totales des neutrons prompts de fission dans le cas de la fission spontanée du californium 252 et de la fission induite par un neutron thermique sur un noyau d’uranium 235.<sup>70</sup>

Nucléide	$\bar{\nu}_L$	$\bar{\nu}_H$	$\bar{\nu}$
$^{252}_{98}\text{Cf}$ fission spontanée	2.051	1.698	3.75
$n_{\text{th}} + ^{235}_{92}\text{U}$	1.42	1.01	2.43

<sup>69</sup> J. Terrell, « Neutron Yields from Individual Fission Fragments », *Physical Review* 127, pp. 880-904. <https://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.127.880>

<sup>70</sup> Valeurs tirées de O. Litaize, D. Régnier, O. Serot, « Prompt Fission Gamma-ray Spectra and Multiplicities for Various Fissioning Systems », *Physics Procedia* 59, 2014, pp. 89-94, Table 1 p. 91 et Table 3 p. 93, <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2014.10.014>.

La **figure 16** montre plus largement comment varie la multiplicité moyenne des neutrons en fonction de la masse des fragments de fission produits par la fission induite des neutrons thermiques sur l'uranium 235.

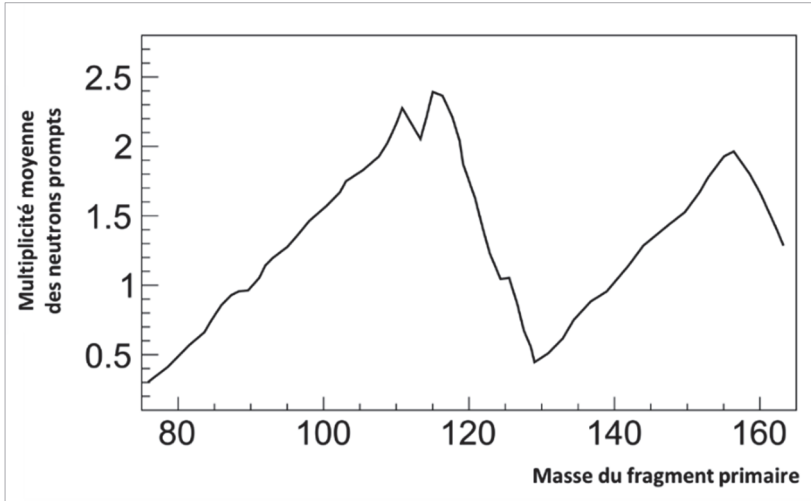


Figure 16. Multiplicité moyenne des neutrons prompts émis en fonction de la masse des fragments de fission résultant de la fission induite par des neutrons thermiques sur l'uranium 235,  $^{235}_{92}\text{U}$  ; données expérimentales et calcul <sup>71 72</sup>. Il s'agit d'une grandeur à valeurs discrètes : la ligne continue matérialise la variation de cette multiplicité moyenne d'une valeur à l'autre du nombre de masse A. (Courbes en forme de « dents de scie » / « saw tooth shape »)

À côté des mesures<sup>73 74 75</sup>, la littérature scientifique propose plusieurs formulations analytiques des **spectres d'émission des neutrons prompts de fission, *prompt neutron fission spectrum* (PNFS)** :

<sup>71</sup> D. Régner, *Contribution à l'étude des gammas prompts de fission*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2013, p. 159 ;

<sup>72</sup> A. Göök, F.-J. Hamsch, S. Oberstedt, M. Vidali, *Energy dependant neutron multiplicity in  $^{235}\text{U}(n,f)$* , Technical report by the Joint Research Centre (JRC), the European Commission's science and knowledge service, JRC108456, 2017.

[https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/bitstream/JRC108456/pubsy\\_108456\\_2017\\_7-technical\\_report-public-online\\_235u\\_jh.pdf](https://publications.jrc.ec.europa.eu/repository/bitstream/JRC108456/pubsy_108456_2017_7-technical_report-public-online_235u_jh.pdf)

<sup>73</sup> L. Berge, *Contribution à la modélisation des spectres de neutrons prompts de fission. Propagation d'incertitudes à un calcul de fluence cuve*, Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2015, pp. 15-26 ; L. Berge, O. Litaize, O. Serot, C. De Saint Jean, P. Archier, Y. Pénéliu, « Study on Prompt Fission Neutron Spectra and Associated Covariances for  $^{235}\text{U}(n,f)$  and  $^{239}\text{Pu}(n,f)$  », *Physics Procedia*, Vol. 64, 2015, pp. 55-61, <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2015.04.008>.

<sup>74</sup> W. Mannhart, « Status of the  $^{252}\text{Cf}$  fission neutron spectrum evaluation with regard to recent experiments », dans Lemmel, H.D. (ed.) ; International Atomic Energy Agency, Vienna (Austria). International Nuclear Data Committee, June 1989, pp. 305-336 ; *Consultants' meeting on physics of neutron emission in fission* ; Mito (Japan) ; May 24-27, 1988.

<sup>75</sup> K. J. Kelly, P. Marini, J. Taieb, M. Devlin, D. Neudecker, *et al.*, « Comparison of Results from Recent NNSA and CEA Measurements of the  $^{239}\text{Pu}(n, f)$  Prompt Fission Neutron Spectrum », *Nuclear Data Sheets*, Elsevier, 2021, 173, pp. 42-53, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2021.04.003>.

- les spectres de Maxwell et de Watt ;
- le spectre de Madland-Nix devenu *Los Alamos model of the prompt fission neutron spectrum* suite à des améliorations successives.

Ces trois types de spectre partagent un même paramètre, la température  $T$  du système fissionnant, mais dont la détermination diffère dans chaque cas.

### 6.1. Le spectre de Maxwell

Le nombre de neutrons prompts de fission émis à l'énergie  $E$  par unité d'énergie est modélisé par l'expression :

$$N(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi T^3}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \quad \text{neutrons MeV}^{-1} \quad (6.2)$$

L'énergie moyenne est :

$$\bar{E} = \frac{3}{2} T \quad (6.3)$$

Exemple de valeurs prises pour la température  $T$  (exprimée en unité d'énergie) : 1.42 MeV, 1.36 MeV, 1.32 MeV.

### 6.2. Le spectre de Watt<sup>76 77 78</sup>

Le spectre des neutrons prompts de fission est fourni par diverses formules dont la plus utilisée est celle de **Watt** qui est de la forme :

$$N(E) = 2 \exp\left(-\frac{ab}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi b a^3}} \exp\left(-\frac{E}{a}\right) \text{sh} \sqrt{bE} \quad \text{neutrons MeV}^{-1} \quad (6.4)$$

avec :

$$a = T, \quad b = \frac{4E_f}{T^2} \quad (6.5)$$

où  $E_f$  est l'énergie cinétique moyenne d'un fragment de fission avant émission d'un neutron prompt ramenée à un nucléon, dans le référentiel du laboratoire. L'énergie cinétique moyenne des neutrons dans le système du laboratoire est donnée par :

$$\bar{E} = a \left( \frac{3}{2} + \frac{ab}{4} \right) = \frac{3}{2} T + E_f \quad (6.6)$$

<sup>76</sup> B. Watt, « Energy spectrum of neutrons from thermal fission of  $^{235}\text{U}$  », *Physical Review* 87, 1952, pp. 1037-1041, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.1037>

<sup>77</sup> H.-H. Knitter, U. Brosa, C. Budtz-Jorgensen, Chapter 11 « Neutron and gamma emission in fission », dans C. Wagemans (Editor), *The nuclear fission process, op. cit.*, p. 501-507.

<sup>78</sup> J. P. Lestone, « Watt parameters for the Los Alamos Model: Subroutine getab », LA-UR-07-6090, September 5<sup>th</sup>, 2007, où l'on trouvera des valeurs « fittées » des paramètres  $a$  et  $b$  en fonction de l'énergie du neutron incident induisant une réaction de fission sur les noyaux d'uranium 235, d'uranium 238 et de plutonium 239.



Les valeurs données aux paramètres physiques  $T$  et  $E_f$  résultent d'un ajustement. Par exemple, pour la fission induite par neutron sur l'uranium 235, le **tableau 7** en fournit les valeurs.

Tableau 7. Paramètres des spectres de Watt et de Cranberg.<sup>79</sup>

	$T$ (MeV)	$E_f$ (MeV)	$a^{-1}$ (MeV <sup>-1</sup> )	$b$ (MeV <sup>-1</sup> )	$\bar{E}$ (MeV)	neutrons. MeV <sup>-1</sup>
Watt	1.	0.5	1.	2.	2.	$N(E) = 0.484 \exp(-E) \operatorname{sh} \sqrt{2E}$
Cranberg	0.965.	0.533	1.03627	2.29	1.98	$N(E) = 0.453 \exp(-1.03627 E) \times \operatorname{sh} \sqrt{2.29 E}$

La **figure 17** montre la forme du spectre en énergie des neutrons de fission obtenu à l'aide de la *formule de Watt* et deux jeux différents de valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  pour une fission induite par neutron sur un noyau atomique d'uranium 235 et de plutonium 239.

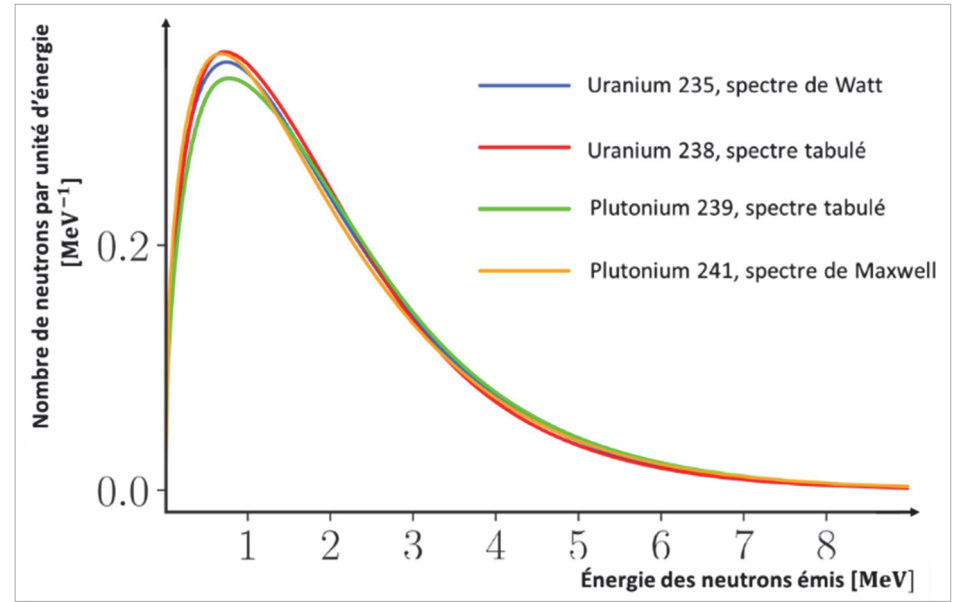


Figure 17. Exemple de spectres en énergie des neutrons de fission ; fission induite par un neutron thermique dans les cas de l'uranium 235, de l'uranium 238, du plutonium 239 et du plutonium 241 – Formule de Watt avec les coefficients de Cranberg pour l'U235  $a^{-1} = 1.012, b = 2.249$  ; spectre de Maxwell pour le Pu241 à une température  $T = 1.3597$  MeV.

Le **tableau 8** indique les valeurs normalisées du spectre des neutrons prompts de fission dans le cas de l'uranium 235.

<sup>79</sup> L. Cranberg, G. Frye, N. Nereson, L. Rosen, « Fission Neutron Spectrum of U235 », *Physical Review*, Vol.103, Number 3, August 1, 1956, pp. 662-670, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.103.662>.

Tableau 8. Spectre en énergie des neutrons de fission de l'uranium 235. Normalisation à l'unité.

$$F(E) = \int_E^\infty N(E')dE' ; \bar{E} = \int_E^\infty E'N(E')dE'$$

<i>E</i> : énergie des neutrons MeV	<i>F(E)</i> : fraction du nombre de neutrons d'énergie > <i>E</i>	<i>Ē</i> : énergie moyenne correspondante MeV
0.	1.0	1.98
0.25	0.948	1.973
0.50	0.867	1.942
0.75	0.779	1.887
1.00	0.690	1.810
1.25	0.606	1.715
1.50	0.528	1.608
1.75	0.457	1.493
2.00	0.394	1.374
2.50	0.2884	1.138
3.00	0.2082	0.919
3.50	0.1486	0.726
4.50	0.0736	0.430
5.00	0.0512	0.324
5.50	0.03544	0.241
6.00	0.02439	0.178
6.50	0.01669	0.130
7.00	0.01138	9.41 10 <sup>-2</sup>
7.50	7.72 10 <sup>-3</sup>	6.76 10 <sup>-2</sup>
8.00	5.22 10 <sup>-3</sup>	4.83 10 <sup>-2</sup>
8.50	3.52 10 <sup>-3</sup>	3.43 10 <sup>-2</sup>
9.00	2.364 10 <sup>-3</sup>	2.42 10 <sup>-2</sup>
9.50	1.583 10 <sup>-3</sup>	1.70 10 <sup>-2</sup>
10.00	1.058 10 <sup>-3</sup>	1.187 10 <sup>-2</sup>
10.50	7.05 10 <sup>-4</sup>	8.25 10 <sup>-3</sup>
11.00	4.686 10 <sup>-4</sup>	5.72 10 <sup>-3</sup>
11.50	3.108 10 <sup>-4</sup>	2.714 10 <sup>-3</sup>
12.00	2.058 10 <sup>-5</sup>	1.271 10 <sup>-3</sup>
13.00	8.97 10 <sup>-5</sup>	1.271 10 <sup>-3</sup>
14.00	3.88 10 <sup>-5</sup>	5.88 10 <sup>-4</sup>
15.00	1.67 10 <sup>-5</sup>	2.69 10 <sup>-4</sup>
16.00	7.10 10 <sup>-6</sup>	1.22 10 <sup>-4</sup>
17.00	3.00 10 <sup>-6</sup>	5.48 10 <sup>-5</sup>
18.00	1.26 10 <sup>-6</sup>	2.44 10 <sup>-5</sup>

### 6.3. Le spectre de Madland-Nix ou « modèle Los Alamos »

Le **modèle de Madland-Nix**<sup>80 81 82</sup> part de développements théoriques de Weisskopf<sup>83</sup> fondés sur la mécanique statistique, en considérant que les nucléons du noyau atomique constituent un **gaz de Fermi**, qui fait intervenir la section efficace inverse de formation du noyau composé. Les hypothèses du modèle sont les suivantes, outre que seule la fission binaire est considérée :

- seule la fission de première chance est prise en compte ;
- tous les neutrons prompts sont émis par les fragments après accélération ;
- les deux fragments de fission ont la même température  $T$  ;
- seule la fragmentation la plus probable est considérée ;
- les neutrons émis par un fragment de fission ont tous le même spectre en énergie ;
- la distribution angulaire des neutrons prompts est isotrope dans le centre de masse.

Les auteurs aboutissent à l'expression suivante du spectre des neutrons prompts de fission :

$$N(E) = \frac{1}{3\sqrt{E_f T}} \left[ u_2^{\frac{3}{2}} E_1(u_2) - u_1^{\frac{3}{2}} E_1(u_1) + \gamma\left(\frac{3}{2}, u_2\right) - \gamma\left(\frac{3}{2}, u_1\right) \right] \quad (6.7)$$

avec :

$$u_1 = \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E_f}}{T}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E_f}}{T},$$

$$E_1(u_i) = \int_{u_i}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (\text{« fonction intégrale exponentielle »})$$

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, u_i\right) = \int_0^{u_i} u^{\frac{3}{2}-1} e^{-u} du = \int_0^{u_i} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \quad (\text{« fonction gamma incomplète »})$$

Cette expression est appliquée à chacun des deux fragments de fission léger et lourd toujours respectivement indexés par les lettres  $L$  et  $H$ . Ceux-ci se différencient par deux grandeurs :

<sup>80</sup> D. G. Madland, J. R. Nix , « New calculation of prompt fission neutron spectra and average prompt neutron multiplicities », *Nucl. Sci. Eng.*, 81 pp. 213–271, 1982, <https://doi.org/10.13182/NSE82-5>.

<sup>81</sup> D. G. Madland, *New Fission Neutron Spectrum Representation for ENDF*, LA-9285-MS (ENDF-321), April 1982.

<sup>82</sup> D. G. Madland, A. C. Kahler, « Refinements in the Los Alamos model of the prompt fission neutron spectrum », *Nuclear Physics A*, Vol. 957, January 2017, pp. 289-311, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2016.09.005>.

<sup>83</sup> V. F. Weisskopf, « Statistics and nuclear reactions », *Physical Review* 52, pp. 295-303, August 1937, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.52.295>.

- les énergies cinétiques moyennes des neutrons dans le référentiel du laboratoire  $E_{f,L}$  et  $E_{f,H}$ , car elles sont dépendantes de l'énergie cinétique du fragment « initial » léger et lourd ;
- les multiplicités des neutrons, c'est-à-dire le nombre de neutrons prompts émis,  $\bar{\nu}_L$  et  $\bar{\nu}_H$  respectivement, par chacun des deux fragments léger et lourd.

Désignant par  $r$  le rapport des multiplicités,  $r = \bar{\nu}_L/\bar{\nu}_H$ , le nombre total de neutrons émis par fission s'écrit comme la somme pondérée des contributions  $N_L(E)$  et  $N_H(E)$  relatives aux deux fragments :

$$N(E) = \frac{r}{1+r} N_L(E) + \frac{1}{1+r} N_H(E) \quad (6.8)$$

On montre que l'énergie moyenne des neutrons de fission est alors obtenue par la relation :

$$\bar{E} = \frac{r}{1+r} E_{f,L} + \frac{1}{1+r} E_{f,H} + \frac{4}{3} T \quad (6.9a)$$

où  $E_{f,L}$  et  $E_{f,H}$  sont les énergies cinétiques moyennes par nucléon respectivement du fragment de fission léger, de nombre de masse  $A_L$ , et du fragment de fission lourd de nombre de masse  $A_H$  ; en considérant le noyau composé fissionnant de nombre de masse  $A = A_L + A_H$  initialement au repos, on a :

$$E_{f,L} = \frac{A_H}{A_L} \frac{\bar{E}_{f,tot}}{A} , \quad E_{f,H} = \frac{A_L}{A_H} \frac{\bar{E}_{f,tot}}{A} \quad (6.9b)$$

$\bar{E}_{f,tot}$  étant l'énergie cinétique totale moyenne des fragments de fission émis.

La température  $T$  est ici analytiquement reliée à l'énergie moyenne d'excitation  $\bar{E}^*$  du fragment de fission considéré :

$$\bar{E}^* = aT^2 \quad (6.10)$$

où  $a$  ( $\text{MeV}^{-1}$ ) est le paramètre qui intervient dans l'expression de la densité des niveaux d'énergie (voir chapitre 8).

À ce modèle sont apportées ou envisagées des améliorations qui concernent :

- la prise en compte d'une distribution de paires de fragments au lieu de l'unique paire la plus probable : c'est le modèle baptisé *Point by Point* (PbP) ;
- l'affectation d'une température différente pour le fragment léger et le fragment lourd ;
- la prise en compte de la dépendance en énergie de la section efficace inverse de formation du noyau composé ;
- la prise en compte des autres chances de fission ;

- la prise compte des neutrons émis au moment de la scission ;
- la prise en compte d'une éventuelle anisotropie de l'émission des neutrons prompts.<sup>84</sup>

Le **spectre des neutrons prompts de Los Alamos** est utilisé dans le domaine de l'évaluation des données nucléaires (voir chapitre 14).

#### 6.4. Le spectre « FIFRELIN »

Partant de considérations statistiques, une approche calculatoire plus récente a été développée, consistant à déterminer les spectres des neutrons prompts de fission à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Dans son principe, elle permet de lever certaines hypothèses faites dans les approches analytiques, en particulier celle de la fragmentation la plus probable posée dans le modèle Los Alamos et celle admettant que les neutrons émis par un fragment de fission ont tous le même spectre. On peut penser qu'à terme ce type d'approche conduit à une meilleure évaluation du spectre en énergie, voire des caractéristiques angulaires des neutrons prompts de fission. Implémentée dans un code de calcul développé au CEA et dénommé FIFRELIN<sup>85 86</sup>, elle procède en deux étapes<sup>87</sup> :

- l'échantillonnage des propriétés des deux fragments de fission, à savoir leurs nombres de masse, leurs charges, leurs énergies d'excitation, leurs spins et parités et enfin leurs énergies cinétiques. Cela présuppose de définir les densités de probabilité/probabilités associées à chacune de ces caractéristiques ;
- la simulation du processus de désexcitation des fragments de fission qui inclut l'émission de gamma et d'électrons de conversion.

Le caractère réaliste de cette approche est lié à l'adéquation des densités de probabilité/probabilités utilisées dans les échantillonnages des différents événements vis-à-vis de la réalité des phénomènes physiques qui président à l'émission des neutrons prompts.

La figure 6.3 synthétise les différentes évaluations faites du spectre des neutrons prompts rapportées à une même maxwellienne, entre 10 keV et 20 MeV. On constate une dispersion significative à certaines énergies.

<sup>84</sup> Voir aussi, J. Terrell, « Fission Neutron Spectra and Nuclear Temperature », *Physical Review* 113, 15 January 1959, pp. 527-541, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.527>.

<sup>85</sup> O. Litaize, O. Serot, L. Berge, « Fission modelling with FIFRELIN », *Eur. Phys. J. A*, 51 :177, 2015, <https://doi.org/10.1051/epjn/2018043>

<sup>86</sup> O. Litaize, A. Chebboubi, O. Serot, L. Thulliez, T. Materna, M. Rapala, « Influence of nuclear structure data on fission observables », *EPJ Nuclear Sci. Technol.*, 4, 28, 2018, <https://doi.org/10.1051/epjn/2018043>.

<sup>87</sup> L. Berge, *Contribution à la modélisation des spectres de neutrons prompts de fission. Propagation d'incertitudes à un calcul de fluence cuve*, op. cit., p. 47.

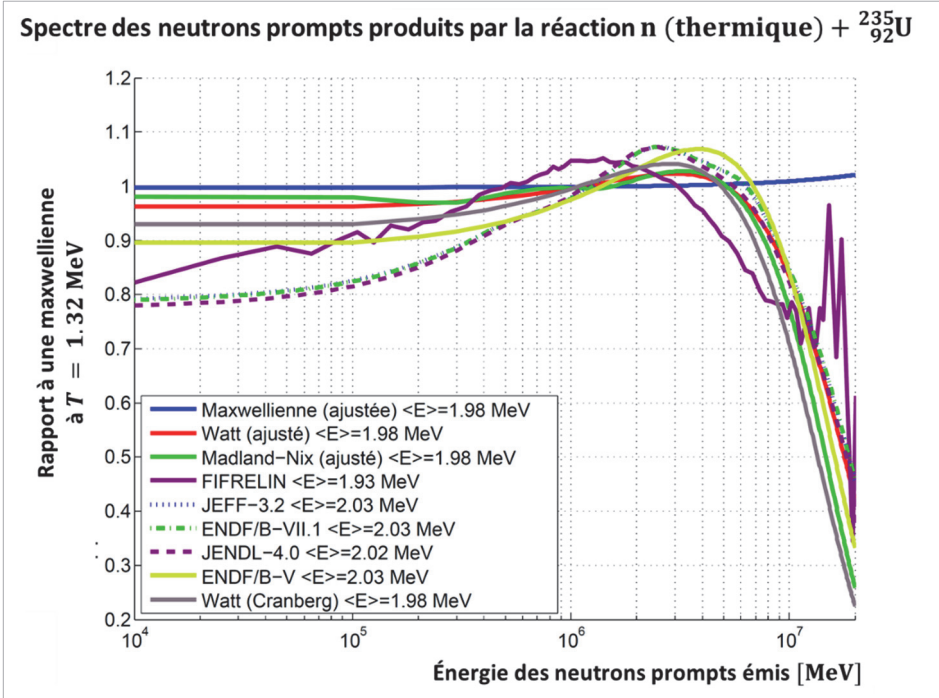


Figure 18. Spectres des neutrons prompts de fission issus de différentes évaluations, rapportés à une maxwellienne à la température, 1.32 MeV pour la réaction n (thermique) +  $^{235}_{92}\text{U}$ . Les énergies moyennes ( $\langle E \rangle$ ) des spectres sont précisées sur le graphe.<sup>88 89</sup>

## 7. Les gamma prompts de fission

L'énergie des gamma prompts de fission est de l'ordre de 7 à 8 MeV pour les systèmes fissionnants considérés ici (voir tableau 5). Pour certaines applications comme l'étude du dépôt d'énergie dans les structures du réacteur telles que le cloisonnement des REP et le « baffle lourd » du réacteur EPR, ou encore dans des dispositifs expérimentaux placés *in core* ou *ex core*, il est déterminant de connaître également le **spectre en énergie des gamma prompts de fission** (*prompt fission gamma spectra*, PFGS) afin d'être en mesure de simuler correctement leur propagation jusque dans les régions d'intérêt.

L'approche statistique de Hauser-Feshbach<sup>90</sup> est utilisée pour étudier ces gamma prompts de fission, car l'énergie d'excitation des fragments de fission est suffisamment

<sup>88</sup> L. Berge, *Contribution à la modélisation des spectres de neutrons prompts de fission. Propagation d'incertitudes à un calcul de fluence curve*, op. cit., Figure 4.9 (a), p. 115.

<sup>89</sup> Voir aussi D. Neudecker, P. Talou, T. Kawano, A. C. Kahler, M. C. White, T. N. Taddeucci, R. C. Haight, B. Kiedrowski, J. M. O'Donnell, J. A. Gomez, K. J. Kelly, M. Devlin, M. E. Rising, « Evaluations of Energy Spectra of Neutrons Emitted Promptly in Neutron-induced Fission of  $^{235}\text{U}$  and  $^{239}\text{Pu}$  », *Nuclear Data Sheets* 148, 2018, pp. 293-311. <https://doi.org/10.1016/j.nds.2018.02.006>.

<sup>90</sup> W. Hauser, H. Feshbach, « The Inelastic Scattering of Neutrons », *Physical Review* 87, 366, July 15, 1952, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.87.366>.

grande pour impliquer beaucoup de niveaux d'énergie, qui est l'hypothèse centrale de ce modèle. Par ailleurs, l'émission gamma est régie par des règles de sélection quantique en lien avec l'existence des moments multipolaires électriques et magnétiques dans le noyau atomique. Autrement dit, des gamma sont émis au cours des transitions multipolaires engendrées par l'excitation des niveaux d'énergie du noyau atomique (par exemple les transitions  $XL = E1, M1, E2, M2$ , etc.). La probabilité  $P(\mathcal{E}_\gamma)d\mathcal{E}_\gamma$  d'émission d'un gamma dans un intervalle élémentaire d'énergie  $d\mathcal{E}_\gamma$  autour de  $\mathcal{E}_\gamma$  est de la forme :

$$P(\mathcal{E}_\gamma)d\mathcal{E}_\gamma \propto T(\mathcal{E}_\gamma)\rho(A, Z, E^* - \mathcal{E}_\gamma)d\mathcal{E}_\gamma \quad (7.1)$$

où :

- $T(\mathcal{E}_\gamma)$  est le **coefficient de transmission des gamma** à l'extérieur du noyau atomique avec :

$$T(\mathcal{E}_\gamma) = 2\pi\mathcal{E}_\gamma^{2L+1}f_{XL}(\mathcal{E}_\gamma) \quad (7.2)$$

$f_{XL}(\mathcal{E}_\gamma)$  étant la **fonction force (strength function)** de la transition gamma XL considérée ;<sup>91</sup>

- $\rho(A, Z, E^* - \mathcal{E}_\gamma)$  est la densité des niveaux d'énergie du noyau atomique le gamma d'énergie  $\mathcal{E}_\gamma$  ayant été émis.

Des algorithmes Monte-Carlo ont été développés pour déterminer les **spectres des gamma prompts de fission** à partir du formalisme esquissé ci-dessus.<sup>92</sup> Les **figures 19a et 19b** représentent des exemples de **multiplicités des gamma de fission, prompt fission gamma multiplicities, PFGM**, ainsi que leurs **spectres** pour une fission induite par un neutron thermique sur un noyau atomique. Les valeurs calculées ont été obtenues pour les neutrons prompts à l'aide du code FIFRELIN précédemment mentionné.<sup>93 94 95</sup>

Elles peuvent être comparées aux points expérimentaux portés sur ces mêmes figures.

<sup>91</sup> J. Kopecky, M. Uhl, « Test of gamma-ray strength functions in nuclear reaction model calculations », *Physical Review C* 41, 1 May 1990, pp. 1941-1955, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.41.1941>.

<sup>92</sup> D. Régner, O. Litaize, O. Serot, « An improved numerical method to compute neutron/gamma deexcitation cascades starting from a high spin state », *Computer Physics Communications*, Vol. 201, April 2016, pp. 19-28, <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2015.12.007>.

<sup>93</sup> Il existe aussi le code de calcul FREYA (*Fission Reaction Event Yield Algorithm*) : J. M. Verbeke, C. Hagmann, D. Wright, *Simulation of Neutron and Gamma Ray Emission from Fission and Photofission*, UCRL-AR-228518-REV-1, Lawrence Livermore National Laboratory, October 24, 2016, Revision 1 ; J. M. Verbeke, J. Randrup, R. Vogt, « Fission Reaction Event Yield Algorithm FREYA 2.0.2 », *Computer Physics Communications* 222, 2018, pp. 263-266, <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2017.09.006>.

<sup>94</sup> Voir également le code de calcul CGMF : P. Talou, I. Stetcu, P. Jaffke, M.E. Rising, A.E. Lovell, T. Kawano, « Fission Fragment Decay Simulations with the CGMF Code », *Computer Physics Communications*, Volume 269, 2021, 108087, pp. 1-29, <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108087>.

<sup>95</sup> Voir aussi L. Qi, *Measurements of Prompt Gamma Rays Emitted in Fission of  $^{235}\text{U}$  and  $^{239}\text{Pu}$  Induced by Fast Neutrons from the LICORNE Neutron Source*, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 2018.

On constate que ces spectres couvrent une gamme d'émission allant d'une énergie inférieure à 100 keV à plus de 7 MeV.

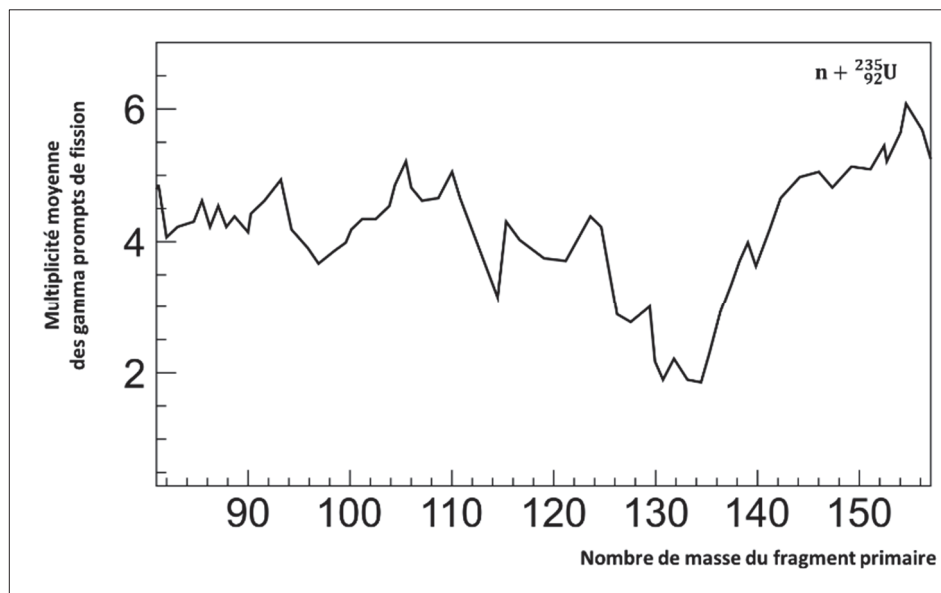
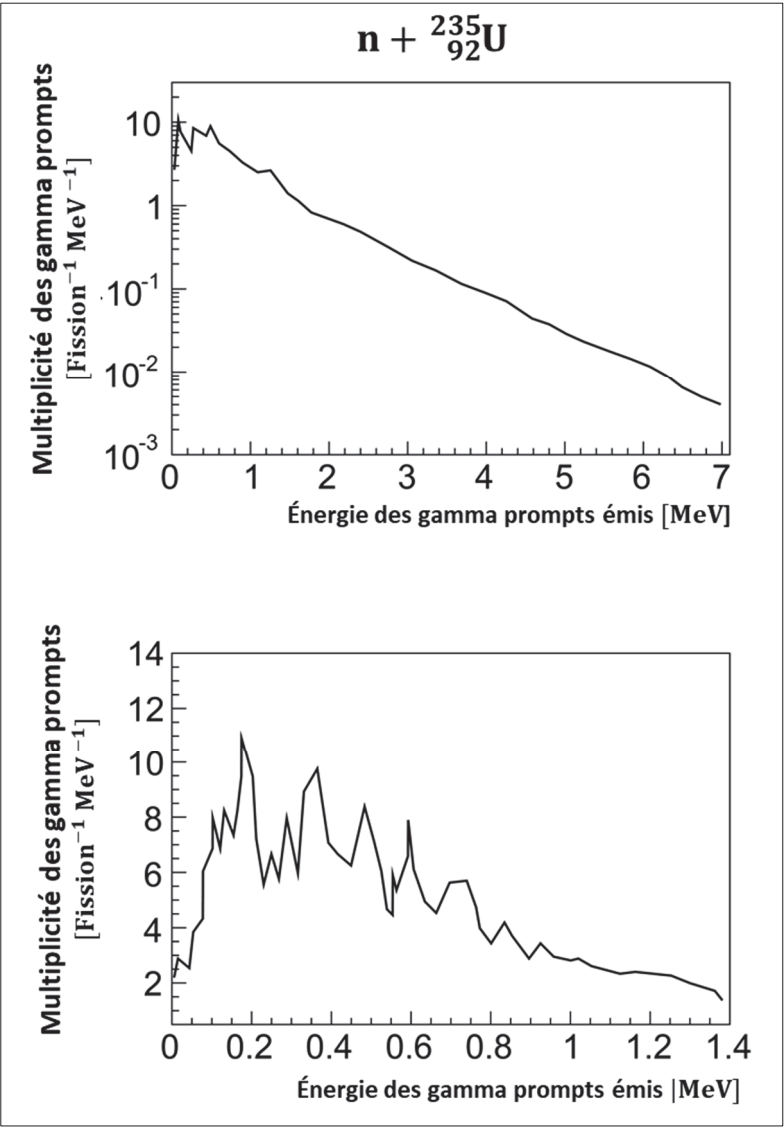


Figure 19a. Multiplicité moyenne des gamma prompts émis en fonction de la masse des fragments primaires issus de la fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235.<sup>96</sup> Il s'agit d'une grandeur à valeurs discrètes : la ligne continue matérialise la variation de cette multiplicité moyenne d'une valeur à l'autre du nombre de masse  $A$ . Cette observable de fission est très corrélée à la distribution de spin des fragments primaires : en prenant une distribution plus réaliste, on reproduit mieux la forme de la multiplicité gamma dans la région des noyaux légers, comme le montre une étude faite sur la fission spontanée du californium 252.<sup>97</sup>

<sup>96</sup> D'après D. Régner, *Contribution à l'étude des gammas prompts de fission*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2013, p. 163.

<sup>97</sup> M. Travar, V. Piau, A. Göök, O. Litaize, J. Nikolov, A. Oberstedt, S. Oberstedt, J. Enders, M. Peck, W. Geerts, M. Vidali, « Experimental information on mass- and TKE-dependence of the prompt fission  $\gamma$ -ray multiplicity », *Physics Letters B*, Vol. 817, 2021, 136293, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2021.136293>.





Figures 19b. En haut, les spectres des gamma prompts de la fission induite sur l'uranium 235 par un neutron thermique dans le référentiel du laboratoire. Les calculs ont été effectués avec le code FIFRELIN – En bas : grossissement sur le domaine d'énergie 0 – 1.4 MeV.<sup>98</sup>

<sup>98</sup> D'après D. Régnier, *Contribution à l'étude des gammas prompts de fission*, op. cit., p. 167 ; O. Litaize, D. Régnier, O. Sérot, « Prompt Fission Gamma-ray Spectra and Multiplicities for Various Fissioning Systems », GAMMA-2 Scientific Workshop on the Emission of Prompt Gamma Rays in Fission and Related Topics, *Physics Procedia* 59, 2014, pp. 89-94, <https://doi.org/10.1016/j.phpro.2014.10.014>.

Des auteurs ont également déterminé la contribution des transitions gamma par domaine de niveaux d'énergie comme l'illustre la **figure 20**.

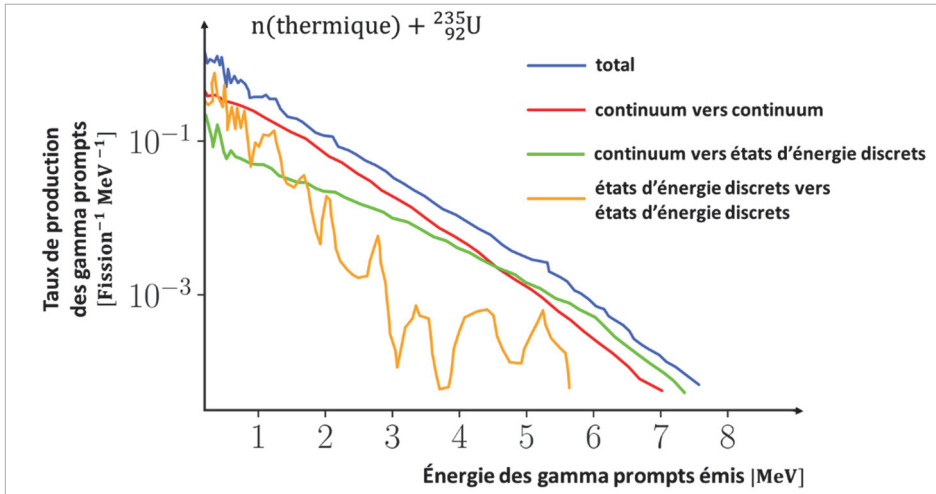


Figure 20. Spectre de gamma prompts de fission décomposé en trois types de contributions de transitions gamma, continuum vers continuum, continuum vers niveaux d'énergie discrets, niveaux d'énergie discrets vers niveaux d'énergie discrets.<sup>99</sup>

## 8. Les produits de fission

On a vu précédemment que la fission, en général binaire, conduit à la formation de **produits de fission** (PF) dont le nombre de masse est compris approximativement entre  $A = 64$  avec le manganèse ( $Z = 25$ ) et  $A = 169$  avec le thulium ( $Z = 69$ ) pour une fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235.

Un neutron rapide sur ce même noyau peut induire la formation de l'ytterbium 171 ( $Z = 70$ ), avec une très faible probabilité. Ce domaine s'étend lorsque l'énergie du neutron incident augmente, mais également avec le progrès des techniques de mesures, comme on le constate sur la **figure 21**.

Le rapport du nombre de neutrons et du nombre de protons du noyau fissionnant tend à être conservé par les fragments de fission formés. Cela explique le positionnement des produits de fission vis-à-vis de la vallée de stabilité, et leur excès éventuel de neutrons dont ils vont se débarrasser *via* des transitions radioactives isobariques  $\beta^-$ .

La quantité des produits de fission formés est déterminée à partir d'un **rendement de fission**, appelé **rendement indépendant de fission**, qui représente le nombre de PF formés d'un type donné ( $A, Z$ ) pour 1 fission.

<sup>99</sup> D'après I. Stetcu, P. Talou, T. Kawano, M. Jandel, « Properties of prompt-fission  $\gamma$  rays », *Physical Review C* 90 024617, 2014, p. 024617-8, Figure 9, <https://journals.aps.org/prc/pdf/10.1103/PhysRevC.90.024617>.

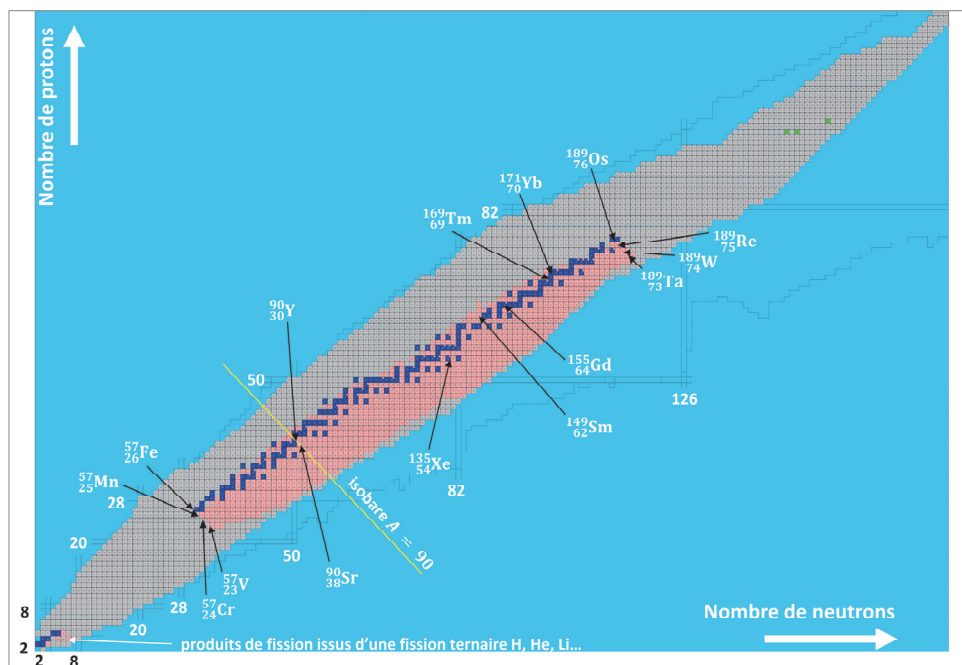


Figure 21. Cartographie des produits de fission : ils sont représentés par des cases colorées ; celles de couleur bleue correspondent à la formation de nucléides stables alors que celles en rose se rapportent à des nucléides instables.<sup>100</sup>

Ils font l'objet de compilation comme les autres types de données nucléaires<sup>101 102 103</sup>. Les **figures 22a** et **22b** montrent le comportement typique des rendements indépendants pour deux types de fission induite respectivement sur un noyau d'uranium 235 par un neutron thermique, sur un noyau d'uranium 238 par un neutron « rapide » (par ex. 3 MeV).

<sup>100</sup> Figure produite avec le logiciel JANIS (Java-based Nuclear Information Software) de OCDE/NEA à partir de l'évaluation de données nucléaires JEFF-3.3.1, [https://www.oecd-nea.org/jcms/pl\\_39963/janis-downloads](https://www.oecd-nea.org/jcms/pl_39963/janis-downloads).

<sup>101</sup> Dont celle « historique » de M. E. Meek, B. F. Rider, *Compilation of fission product yields*, Vallecitos Nuclear Center, 1974, Report NEDO -12154-1 ; T. R. England, B. F. Rider, *Evaluation and Compilation of Fission Product Yields*, 1993, LA-UR-94-3106, ENDF-349, <https://t2.lanl.gov/nis/publications/endl349.pdf>. Voir aussi chapitre 13.

<sup>102</sup> K.-H. Schmidt, M. Estienne, M. Fallot, S. Cormon, A. Cucoanes, T. Shiba, B. Jurado, K. Kern, Ch. Schmitt, « Extensive Study of the Quality of Fission Yields from Experiment, Evaluation and GEF for Antineutrino Studies and Applications », *Nuclear Data Sheets* 173, pp. 54-117, 2021, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2021.04.004>.

<sup>103</sup> A. Chebboubi, G. Kessedjian, O. Serot, H. Faust, U. Köster, O. Litaize, C. Sage, A. Blanc, D. Bernard, A. Letourneau, T. Materna, O. Méplan, P. Mutti, M. Rapala, M. Ramdhane, « Measurements of  $^{233}\text{U}(\text{n}_{\text{th}}, \text{f})$  fission product mass yields with the LOHENGRIN recoil mass spectrometer », *Eur. Phys. J. A*, 2021, 7:335, <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-021-00645-y>.

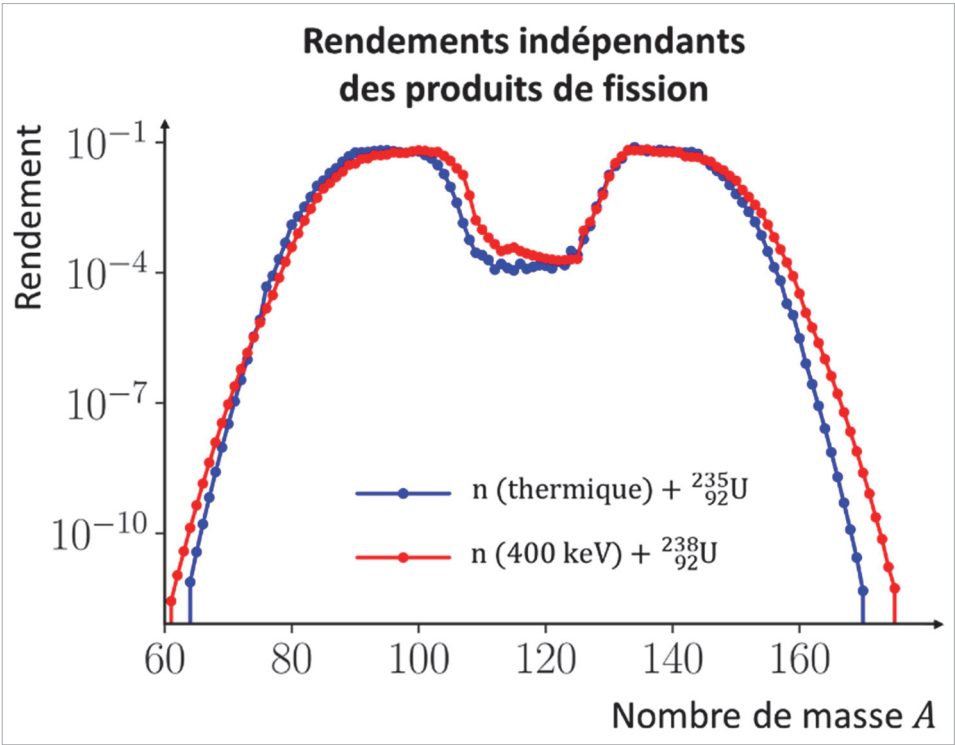


Figure 22a. Courbes caractéristiques des rendements « indépendants » des produits de fission issus de la fission d'un noyau atomique d'uranium 235 par un neutron thermique et de la fission d'un noyau atomique d'uranium 238 par un neutron « rapide » (d'énergie cinétique 400 keV) en fonction du nombre de masse  $A$  : « rendements en masse ».

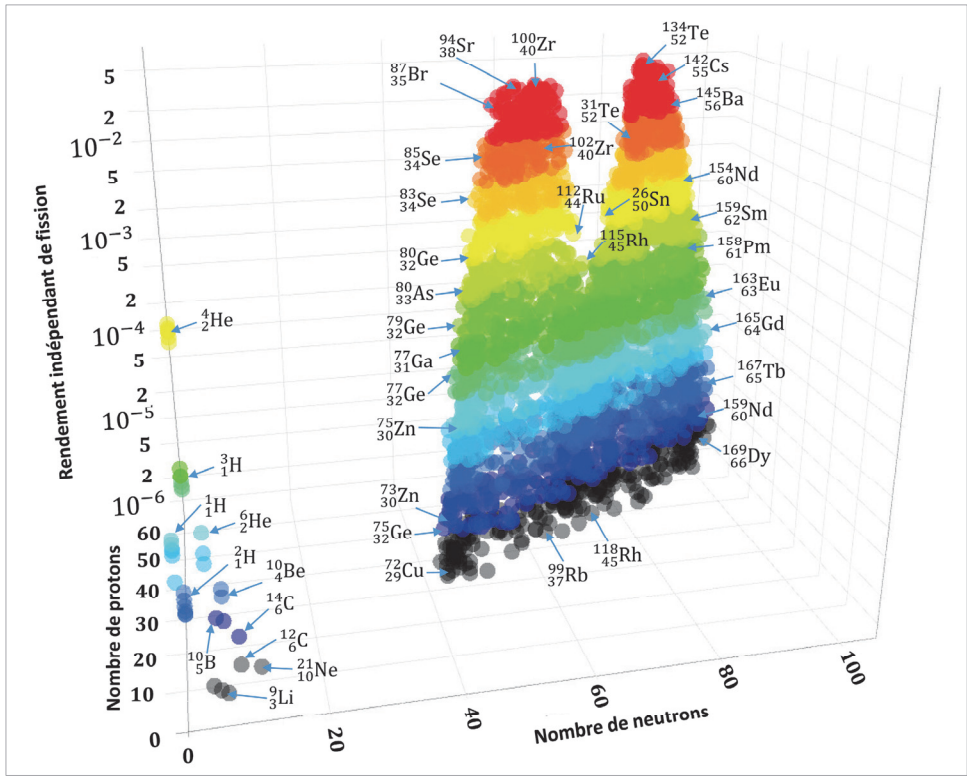


Figure 22b. Représentation « 3D » des rendements indépendants de fission relatifs à la fission induite par un neutron thermique sur l'uranium 235 ; quelques-uns des produits de fission formés sont repérés par leur symbole ; les particules légères issues d'une fission ternaire ou émises par évaporation sont indiquées.<sup>104</sup>

<sup>104</sup> Figure réalisée avec l'outil Livechart 3D : <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharhtml/lc3d.html>.

On constate que la distribution de ces rendements de fission en fonction du nombre de masse  $A$  présente deux bosses caractéristiques, indicatrices d’une plus grande probabilité de formation des couples de produits de fission :

$$80 \leq A \leq 107 ; \quad 122 \leq A \leq 155 \tag{8.1}$$

On remarque qu’il y a un facteur de l’ordre de  $10^3$  à quelque  $10^2$  entre les rendements relatifs aux produits de fission situés dans le creux et ceux logés sur les pics. L’existence de ces pics est liée à des configurations énergétiquement plus favorables vis-à-vis de la stabilité des nucléides. C’est ainsi que la proportion de noyaux stables formés après la fission est plus importante au niveau des pics. Certains auteurs suggèrent que ces deux pics sont le reflet de la forme de la barrière de fission représentée en fonction du nombre de masse<sup>105</sup>.

Une des plus importantes caractéristiques des produits de fission est qu’ils sont dans leur grande majorité radioactifs  $\beta^-$  ou  $\beta^+$ . Les émetteurs de particules  $\alpha$ , à durée de vie longue, sont peu nombreux ; le **tableau 9** en liste quelques-uns. Cela rend pertinent de les étudier à partir des séries isobariques qu’ils constituent.

Tableau 9. Produits de fission à vie longue émetteurs de particules  $\alpha$ .

Nucléide	Période radioactive en années
$^{142}_{58}\text{Ce}$	$5.10^{16}$
$^{144}_{60}\text{Nd}$	$2.10^{15}$
$^{146}_{62}\text{Sm}$	$1.10^8$
$^{147}_{62}\text{Sm}$	$1.06\ 10^{11}$
$^{148}_{62}\text{Sm}$	$2.10^{15}$
$^{150}_{64}\text{Gd}$	$1.79\ 10^6$
$^{152}_{64}\text{Gd}$	$1.08\ 10^{14}$

Dans la pratique, outre les rendements indépendants, on introduit d’autres définitions de rendements : **rendement indépendant fractionnaire, rendement cumulé, rendement de chaîne**.

On adopte les conventions suivantes :

---

<sup>105</sup> M. Ohta, M. Matsunaka, A. Takahashi, « Analysis of  $^{235}\text{U}$  Fission by Selective Channel Scission Model », *Jpn. J. Appl. Phys.* Vol. 40, 2001, pp. 7047-7051, Part 1, N° 12, December 2001 ; <https://doi.org/10.1143/JJAP.40.7047>. À partir de l’étude de la barrière de fission, les auteurs émettent l’idée d’une fission provoquée par des neutrons (ou des gamma) d’énergie plus faible que celle des neutrons thermiques « classiques », de manière à favoriser la formation de produits de fission stables au niveau des pics, ouvrant une voie d’investigation en direction d’une fission nucléaire à moindre déchets radioactifs.

- $A_{cible}$  : nombre de masse du nucléide cible d'un neutron incident ;
- $Z_f$  : numéro atomique du nucléide fissionnant ;
- $A_f = A_{cible} + 1$  : le nombre de masse du nucléide fissionnant ; dans le cas de la fission spontanée, on a  $A_f \equiv A_{cible}$  ;
- $I$  : les états isomériques d'un nucléide  $I = 0$  pour l'état fondamental,  $I = 1, 2, 3 \dots$  pour les états métastables successifs ;
- $(A, Z, I)$  : triplet définissant un nucléide donné dont l'état isomérique est spécifié ;
- $(A, Z)$  : couple définissant un nucléide ne possédant pas d'état isomérique ou bien pour lequel tous les états isomériques ont été sommés.

Les relations existant entre ces différents rendements sont explicitées ci-après.<sup>106</sup>

- $y(A, Z, I)$  : **rendement indépendant de fission**, après émission de neutrons et gamma prompts mais avant émission de neutrons retardés.
- $y(A, Z)$  : **rendement indépendant de fission** du produit de fission  $(A, Z)$ , **tous les états isomériques sommés**

$$y(A, Z) = \sum_I y(A, Z, I) \quad (8.2)$$

- $y(A)$  : somme des rendements de fission indépendants ou **rendement en masse**

$$y(A) = \sum_Z \sum_I y(A, Z, I), \sum_A y(A) = 2 \text{ cas de la fission binaire} \quad (8.3)$$

- $f(A, Z)$  : **rendement indépendant fractionnaire**

$$f(A, Z) = \frac{\sum_I y(A, Z, I)}{y(A)} = \frac{y(A, Z)}{y(A)}, \quad \sum_Z f(A, Z) = 1 \text{ pour tout } A \quad (8.4)$$

- $R(A, Z, I)$  : **rapport de rendement d'un produit de fission isomère** (ou métastable)  $(A, Z, I)$

$$R(A, Z, I) = \frac{y(A, Z, I)}{y(A, Z)}, \quad \sum_I R(A, Z, I) = 1 \text{ pour tout } (A, Z) \quad (8.5)$$

Le **rendement indépendant**  $y(A, Z, I)$  s'écrit donc comme :

$$y(A, Z, I) = y(A) f(A, Z) R(A, Z, I) \quad (8.6)$$

<sup>106</sup> M. A. Kellet, O. Bersillon, R. W. Mills, *The JEFF-3.1/JEFF-3.1.1 radioactive decay data and fission yields sub-libraries*, JEFF Report 20. <https://www.oecd-neo.org/dbdata/jeff/decay/>.

- $y_c(A, Z, I)$  : **rendement cumulé** du nucléide  $(A, Z, I)$  qui correspond au nombre total d’atomes de ce nucléide formés sur toute la durée (« infinie ») après une fission.<sup>107</sup> Le calcul d’un rendement cumulé à partir des rendements indépendants nécessite de disposer des rapports de branchement «  $b$  » entre filiations radioactives :

$$y_c(A, Z, I) = y(A, Z, I) + \sum_{A'} \sum_{Z'} \sum_{I'} b(A', Z', I' \rightarrow A, Z, I) y_c(A', Z', I') \tag{8.7}$$

où  $b(A', Z', I' \rightarrow A, Z, I)$  est la fraction du nucléide précurseur  $(A', Z', I')$  qui décroît sur le nucléide  $(A, Z, I)$ . Le **tableau 10** donne des valeurs des dix **rendements de fission indépendants** et **cumulés** les plus élevés pour la fission induite sur l’uranium 235 par un neutron thermique. Ce classement est indicatif, il peut varier d’une évaluation de données nucléaires à l’autre, car susceptible de se jouer sur quelques décimales.

Tableau 10. Les dix rendements de fission indépendants et cumulés les plus élevés pour la fission induite sur l’uranium 235 par un neutron thermique.<sup>108</sup>

Nucléides	Rendements indépendants	Nucléides	Rendements cumulés
$^{134}_{52}\text{Te}$	0.06135	$^{134}_{52}\text{Te}$	0.07585
$^{138}_{54}\text{Xe}$	0.05391	$^{134}_{53}\text{I}$	0.07552
$^{94}_{38}\text{Sr}$	0.05035	$^{94}_{40}\text{Zr}$	0.07255
$^{95}_{38}\text{Sr}$	0.04782	$^{138}_{56}\text{Ba}$	0.07232
$^{139}_{54}\text{Xe}$	0.04360	$^{96}_{39}\text{Y}$	0.07232
$^{100}_{40}\text{Zr}$	0.04358	$^{138}_{55}\text{Cs}$	0.07216
$^{96}_{38}\text{Sr}$	0.04145	$^{136}_{54}\text{Xe}$	0.07103
$^{99}_{40}\text{Zr}$	0.03879	$^{137}_{56}\text{Ba}$	0.07101
$^{90}_{36}\text{Kr}$	0.03877	$^{137}_{55}\text{Cs}$	0.07100
$^{144}_{56}\text{Ba}$	0.03832	$^{95}_{42}\text{Mo}$	0.07040
Total	0.45794		

Le **tableau 11** fournit un comparatif de valeurs de **rendements cumulés** entre différents systèmes fissionnants impliquant des neutrons thermiques ou rapides.

<sup>107</sup> Une formulation équivalente considère une irradiation d’une durée « infinie » d’une fission par seconde : voir « The JEF-2.2 fission yield libraries » dans The JEF-2.2 Nuclear Data Library, JEFF Report 17, Nuclear Energy Agency, OCDE, Avril 2000.

<sup>108</sup> C.-S. Gil, D. Heon Kim, J. K. Yoo, J. Lee, « Fission yields data generation and benchmarks of decay heat estimation of a nuclear fuel », *ND 2016, EPJ Web of Conferences* 146, 04048, 2017, Table 1 et Table 2, p. 2, <https://doi.org/10.1051/epjconf/201714604048>.



Tableau 11. Exemples de valeurs de rendements cumulés pour des fissions induites par des neutrons thermiques ( $n_{th}$ ) ou des neutrons rapides ( $n_{rap}$ ).<sup>109</sup>

Nucléide	Rendement cumulé pour 100 fissions $n_{th} + {}^{235}_{92}\text{U}$	Rendement cumulé pour 100 fissions $n_{rap} + {}^{238}_{92}\text{U}$	Rendement cumulé pour 100 fissions $n_{th} + {}^{239}_{94}\text{Pu}$
${}^{85}_{36}\text{Kr}$	1.327	0.850	0.590
${}^{99}_{42}\text{Mo}$	6.161	6.253	6.205
${}^{106}_{44}\text{Ru}$	0.409	2.542	4.209
${}^{129}_{53}\text{I}$	0.707	0.618	1.388
${}^{137}_{55}\text{Cs}$	6.211	6.088	6.700
${}^{148}_{60}\text{Nd}$	1.680	2.281	1.684

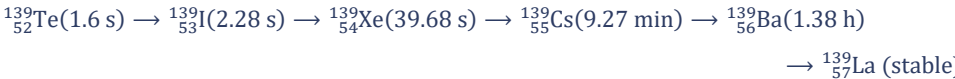
Le calcul de  $y_c(A, Z, I)$  est relativement simple lorsque seules des transitions bêta sont impliquées dans la formation du nucléide d'intérêt.

Si en revanche des transitions alpha<sup>110</sup> et/ou l'émission de neutrons retardés contribuent à la formation de ce nucléide, il faut alors connecter entre elles les chaînes de filiation radioactives concernées, en utilisant les rapports de branchements.

- $y_{ch}(A)$  : **rendement cumulé de chaîne** ; il correspond au rendement cumulé lorsque l'on s'intéresse à un nucléide stable fin d'une chaîne isobarique. Le rendement total  $y(A)$  diffère du rendement de chaîne  $y_{ch}(A)$  de quelques fractions de pour cent ou de pour cent (en fonction de la chaîne isobarique considérée) en raison du fait que le premier est déterminé avant l'émission des neutrons retardés et le second après.

Exemple

**Chaîne isobarique  $A = 139$ <sup>111</sup>, rendements indépendants, cumulés et de chaîne pour une fission induite par un neutron d'énergie thermique sur un noyau d'uranium 235 et un noyau de plutonium 239.**



<sup>109</sup> R. W. Mills, *Fission product yield evaluation*, PhD, University of Birmingham, March 1995, pp. 162-163.

<sup>110</sup> Exemple de produits de fission émetteurs  $\alpha$  à vie longue :  ${}^{142}_{58}\text{Ce}$ ,  ${}^{144}_{60}\text{Nd}$ ,  ${}^{146}_{62}\text{Sm}$ ,  ${}^{147}_{62}\text{Sm}$ ,  ${}^{148}_{62}\text{Sm}$ ,  ${}^{149}_{62}\text{Sm}$ ,  ${}^{150}_{64}\text{Gd}$ ,  ${}^{152}_{64}\text{Gd}$ .

<sup>111</sup> Ces données sont issues de la bibliothèque JEFF-3.3 et ont été extraites avec l'application JANIS de l'Agence pour l'énergie nucléaire (AEN) de l'OCDE, voir chapitre 13.

▪ **Uranium 235 : rendements indépendants  $y_i(A = 139)$  et rendements cumulés,  $y_{c,i}(A = 139)$**

Isotopes $i$	$^{139}_{52}\text{Te}$	$^{139}_{53}\text{I}$	$^{139}_{54}\text{Xe}$	$^{139}_{55}\text{Cs}$	$^{139}_{56}\text{Ba}$	$^{139}_{57}\text{La}$	Total
$i$	1	2	3	4	5	6	
$y_i(A = 139)$ incertitude	$1.6977 \cdot 10^{-4}$ $6.1219 \cdot 10^{-5}$	0.007385 0.002426	0.043433 0.004776	0.011949 0.003548	$8.5377 \cdot 10^{-4}$ $3.0401 \cdot 10^{-4}$	$1.9412 \cdot 10^{-8}$ $7.0313 \cdot 10^{-9}$	<b>0.06379</b>
$y_{c,i}(A = 139)$ incertitude	$1.6978 \cdot 10^{-4}$ $6.1219 \cdot 10^{-5}$	0.007554 0.002141	0.050429 0.00119	0.062378 $5.7868 \cdot 10^{-4}$	0.063232 $5.7179 \cdot 10^{-4}$	<b>0.063232</b> $5.7179 \cdot 10^{-4}$	

▪ **Plutonium 239 : rendements indépendants  $y_i(A = 139)$  et rendements cumulés,  $y_{c,i}(A = 139)$**

Isotopes $i$	$^{139}_{52}\text{Te}$	$^{139}_{53}\text{I}$	$^{139}_{54}\text{Xe}$	$^{139}_{55}\text{Cs}$	$^{139}_{56}\text{Ba}$	$^{139}_{57}\text{La}$	Total
$i$	1	2	3	4	5	6	
$y_i$ ( $A = 139$ ) incertitude	$1.5946 \cdot 10^{-5}$ $5.6292 \cdot 10^{-6}$	0.002931 $9.8113 \cdot 10^{-4}$	0.028357 0.004953	0.022994 0.004881	0.003913 0.001297	$1.5946 \cdot 10^{-5}$ $4.5035 \cdot 10^{-6}$	<b>0.05823</b>
$y_{c,i}$ ( $A = 139$ ) incertitude	$1.5946 \cdot 10^{-5}$ $5.6304 \cdot 10^{-6}$	0.002947 $9.3204 \cdot 10^{-4}$	0.03106 0.002372	0.054054 $7.7792 \cdot 10^{-4}$	0.057967 $6.3839 \cdot 10^{-4}$	<b>0.05798</b> $6.3846 \cdot 10^{-4}$	

Par définition, le **rendement de chaîne**  $y_{ch}(A = 139)$  s’identifie au rendement cumulé du  $^{139}_{57}\text{La}$  et vaut 0.063232 dans le cas de l’uranium 235 et  $y_{ch}(A = 139) = 0.05798$  dans celui du plutonium 239. Dans les deux cas, conformément à ce qui a été indiqué plus haut, la somme des rendements indépendants,  $y_i(A = 139)$ , est inférieure au rendement de chaîne  $y_{ch}(A = 139)$  :

$$\sum_{1,6} y(A = 139) < y_{ch}(A = 139)$$

Dans le cas de l’uranium 235 :

$$\left[ \sum_{1,6} y(A = 139) \right] - y_{ch}(A = 139) = 0.06379 - 0.063232 = 5.58 \cdot 10^{-4}$$

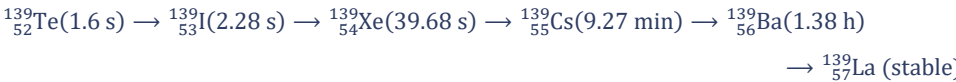
soit un écart relatif de 0.88 %.

Dans le cas du plutonium 239 :

$$\left[ \sum_{1,6} y(A = 139) \right] - y_{ch}(A = 139) = 0.05823 - 0.05798 = 2.5 \cdot 10^{-4}$$

soit un écart relatif de 0.43 %.

**Exemple : chaîne isobarique  $A = 139^{112}$ , rendements indépendants, cumulés et de chaîne pour une fission induite par un neutron « rapide » (400 keV) sur un noyau d’uranium 235 et un noyau de plutonium 239.**



- **Uranium 235 : rendements indépendants  $y_i(A = 139)$  et rendements cumulés,  $y_{c,i}(A = 139)$**

Isotopes $i$	$^{139}_{52}\text{Te}$	$^{139}_{53}\text{I}$	$^{139}_{54}\text{Xe}$	$^{139}_{55}\text{Cs}$	$^{139}_{56}\text{Ba}$	$^{139}_{57}\text{La}$	Total
$i$	1	2	3	4	5	6	
$y_i$ ( $A = 139$ ) incertitude	$1.3522\ 10^{-4}$ $4.9193\ 10^{-5}$	0.007358 0.002415	0.04289 0.004831	0.012025 0.003618	$9,4998\ 10^{-4}$ $3,4024\ 10^{-4}$	$2,0334\ 10^{-6}$ $7,4152\ 10^{-7}$	<b>0.06336</b>
$y_{c,i}$ ( $A = 139$ ) incertitude	$1.3523\ 10^{-4}$ $4.9193\ 10^{-5}$	0.007493 0.002134	0.049827 0.001444	0.061852 0.001124	0.062802 0.001132	<b>0.062804</b> 0.001132	

- **Plutonium 239 : rendements indépendants  $y_i(A = 139)$  et rendements cumulés,  $y_{c,i}(A = 139)$**

Isotopes $i$	$^{139}_{52}\text{Te}$	$^{139}_{53}\text{I}$	$^{139}_{54}\text{Xe}$	$^{139}_{55}\text{Cs}$	$^{139}_{56}\text{Ba}$	$^{139}_{57}\text{La}$	Total
$i$	1	2	3	4	5	6	
$y_i$ ( $A = 139$ ) incertitude	$1.1098\ 10^{-5}$ $3.9838\ 10^{-6}$	0.002671 $9,2558\ 10^{-4}$	0.024761 0.004865	0.022928 0.004785	0.003913 0.001297	$2.0187\ 10^{-5}$ $7.2423\ 10^{-6}$	<b>0.054303</b>
$y_{c,i}$ ( $A = 139$ ) incertitude	$1.1098\ 10^{-5}$ $4.0347\ 10^{-6}$	0.002682 $8,9359\ 10^{-4}$	0.027221 0.002928	0.050149 0.002958	0,057967 $6.3839\ 10^{-4}$	<b>0.054168</b> 0.003142	

Par définition, le **rendement de chaîne**,  $y_{ch}(A = 139)$  s’identifie au rendement cumulé du  $^{139}_{57}\text{La}$  et vaut 0.062804 dans le cas de l’uranium 235 et  $y_{ch}(A = 139) = 0.054043$  dans celui du plutonium 239. Dans les deux cas, conformément à ce qui a été indiqué plus haut, la somme des rendements indépendants,  $y_i(A = 139)$ , est inférieure au rendement de chaîne  $y_{ch}(A = 139)$  :

$$\sum_{1,6} y(A = 139) < y_{ch}(A = 139)$$

Dans le cas de l’uranium 235 :

$$\left[ \sum_{1,6} y(A = 139) \right] - y_{ch}(A = 139) = 0.06336 - 0.062804 = 5.56\ 10^{-4}$$

soit un écart relatif de  $5.56\ 10^{-4} / 0.06336 = 0.88\ \%$ .

Dans le cas du plutonium 239 :

<sup>112</sup> Idem.

$$\left[ \sum_{1,6} y(A=139) \right] - y_{ch}(A=139) = 0.054303 - 0.054168 = 1.35 \cdot 10^{-4}$$

soit un écart relatif de  $1.35 \cdot 10^{-4} / 0.054303 = 0.25 \%$ .

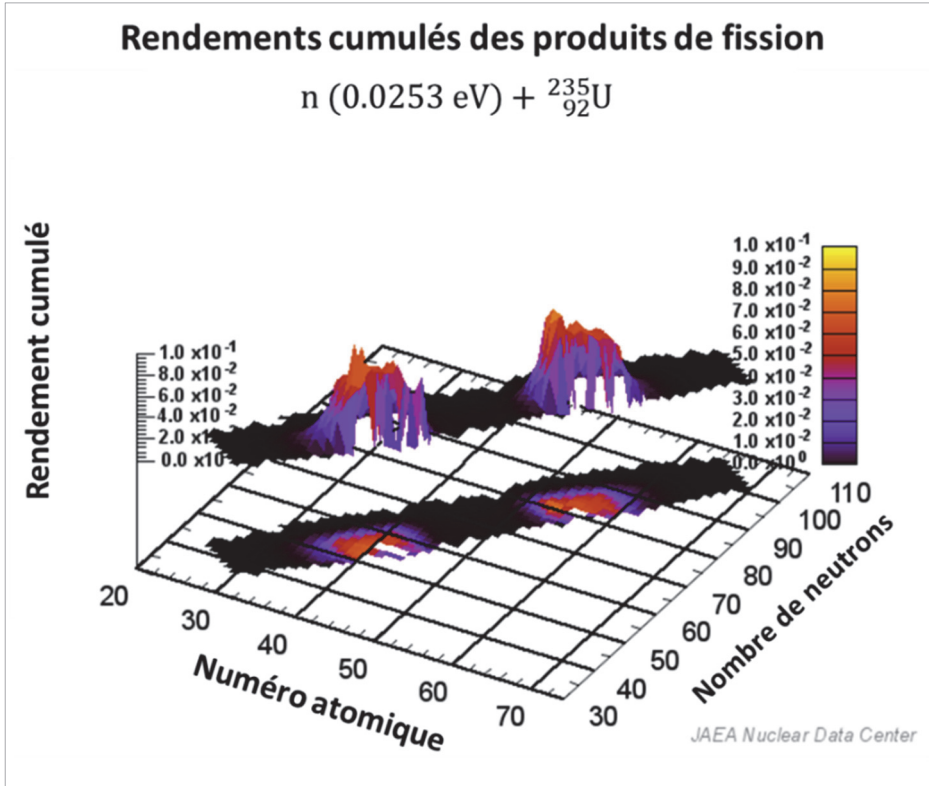


Figure 23. Représentation « 3D » des rendements cumulés des produits de fission de la fission induite sur l'uranium 235 par un neutron thermique.<sup>113</sup>

Un formalisme semi-empirique, dénommé « modèle  $Z_p$  » a été proposé par **A. C. Wahl**<sup>114</sup> permettant d'évaluer les **rendements de fission** pour chaque isotope produit. Il représente un **rendement indépendant** d'un nucléide  $(A, Z)$  en supposant une forme gaussienne de la distribution  $Z$  de la charge nucléaire autour d'une valeur moyenne  $Z_p(A)$  :

$$y(A, Z) = y(A)F(A)N(A) \int_{Z-0.5}^{Z+0.5} \frac{1}{\sigma_Z(A)\sqrt{2\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{Z - Z_p(A)}{\sqrt{2}\sigma_Z(A)} \right)^2 \right] dZ \quad (8.8)$$

<sup>113</sup> Figure réalisée avec l'outil graphique : <https://www.ndc.jaea.go.jp/cgi-bin/FPYfig>.

<sup>114</sup> A. C. Wahl, « Nuclear-charge distribution and delayed-neutron yields for thermal neutron-induced fission of  $^{235}\text{U}$ ,  $^{233}\text{U}$ , and  $^{239}\text{Pu}$  and for spontaneous fission of  $^{252}\text{Cf}$  », *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 39, Issue 1, 1988, p. 1-156, [https://doi.org/10.1016/0092-640X\(88\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0092-640X(88)90016-2).

où :

- $F(A)$  est un **facteur correctif** lié aux effets de parité des nucléons dans la formation des produits de fission ; il est déterminé à partir de facteurs correctifs moyens, notés  $\bar{F}_Z$  et  $\bar{F}_N$ , relatifs respectivement aux protons et aux neutrons, et dont les valeurs sont indiquées dans les **tableaux 12 et 13**. On remarque que le **rendement fractionnaire**  $f(A, Z) = y(A, Z)/y(A)$  est donc immédiatement donné par la relation :

$$f(A, Z) = F(A)N(A) \int_{Z-0.5}^{Z+0.5} \frac{1}{\sigma_Z(A)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{Z - Z_p(A)}{\sqrt{2}\sigma_Z(A)}\right)^2\right] dZ \quad (8.9a)$$

Les paramètres  $Z_p(A)$ ,  $\sigma_Z(A)$ ,  $\bar{F}_Z$ ,  $\bar{F}_N$  sont obtenus par des ajustements sur des données expérimentales. On notera qu'un modèle analogue au précédent existe qui considère une distribution autour d'une masse la plus probable  $A_p(Z)$  ;

Tableaux 12 et 13. Détermination du facteur correctif  $F(A)$ .

Nombre de protons $Z$	Nombre de neutrons $N$	$F(A)$
pair	pair	$\bar{F}_Z \bar{F}_N$
pair	impair	$\bar{F}_Z / \bar{F}_N$
impair	pair	$\bar{F}_N / \bar{F}_Z$
impair	impair	$1/(\bar{F}_Z \bar{F}_N)$
~symétrie		1.

Système fissionnant	$Z$	$N$	$\bar{F}_Z$	$\bar{F}_N$
$n_{th} + {}^{235}_{92}\text{U}$	pair	impair	1.26	1.07
$n_{rap} + {}^{235}_{92}\text{U}$	pair	impair	1.15	1.056
$n_{rap} + {}^{238}_{92}\text{U}$	pair	pair	1.10	1.05
$n_{th} + {}^{239}_{94}\text{Pu}$	pair	impair	1.07	1.
$n_{rap} + {}^{239}_{94}\text{Pu}$	pair	impair	1.	1.

- $N(A)$  est le **facteur de normalisation** assurant que  $\sum_Z f(A, Z) = 1$  ;
- $\sigma_Z(A)$  est l'**ouverture de la gaussienne** (écart-type) dont la valeur est par exemple prise égale 0.531 pour la fission induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235 et 0.564 dans le cas d'un noyau de plutonium 239<sup>115</sup>.

Ce modèle repose sur l'hypothèse de la **densité de charge inchangée** ("*unchanged charge density hypothesis*", UCD) qui stipule que le rapport entre le nombre de charges (numéro atomique),  $Z$ , et le nombre de masse,  $A$ , demeure le même après la fission<sup>116</sup> :

<sup>115</sup> Voir A. C. Wahl, *ibid.*, p. 7, tableau A.

<sup>116</sup> R. K. Gupta, D. R. Saroha, « Hypothesis of unchanged charge density and the fragmentation theory of nuclear fission », *Physical Review C* 30, 395, 1 July 1984 , pp. 395-396, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.30.395>.

$$\left[\frac{Z}{A}\right]_{\text{noyau composé}} = \left[\frac{Z_{UCD}}{A}\right]_{\text{fragment lourd}} = \left[\frac{Z_{UCD}}{A}\right]_{\text{fragment léger}} \quad (8.9b)$$

Autrement dit :

$$[Z_{UCD}]_{\text{fragment lourd}} = [A]_{\text{fragment lourd}} \times \left[\frac{Z}{A}\right]_{\text{noyau composé}} \quad (8.9c)$$

$$[Z_{UCD}]_{\text{fragment léger}} = [A]_{\text{fragment léger}} \times \left[\frac{Z}{A}\right]_{\text{noyau composé}} \quad (8.9d)$$

Pour le calcul des paramètres du modèle entrent ligne de compte les noyaux atomiques formés avant l'émission des neutrons prompts (fragments de fission), la multiplicité des neutrons prompts émis<sup>117</sup> et les noyaux atomiques post-émission de neutrons prompts (produits de fission primaires). Il fait intervenir la notion de « **polarisation de charge nucléaire** »<sup>118</sup> ( $\Delta Z$ ) qui est la différence entre la charge nucléaire la plus probable mesurée et la charge  $Z_{UCD}$ . Par exemple<sup>119</sup>, dans le cas du noyau composé uranium 236 ( $^{236}_{92}\text{U}$ ), pour le fragment de fission de masse 141 on a :

$$Z_{UCD} = 141 \times \frac{92}{236} = 54.966$$

valeur qui diffère de la valeur la plus probable mesurée  $Z_p = 55$  et la polarisation de charge vaut  $\Delta Z = 55 - 54.966 = 3.4 \cdot 10^{-2}$ .

Un modèle a été développé pour déterminer le **rendement en masse**  $y(A)$  des produits de fission<sup>120</sup>. Il se présente sous la forme d'une combinaison de cinq gaussiennes, chacune caractérisée par ses trois paramètres (hauteur, moyenne et écart-type). Les quinze paramètres de cette formulation se réduisent au nombre de huit en faisant jouer des propriétés de symétrie et la contrainte  $\sum_A y(A) = 2$ .

$$y(A) = \frac{N_1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{(A - \bar{A} - D_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) + \exp\left(-\frac{(A - \bar{A} + D_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \right] \\ + \frac{N_2}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{(A - \bar{A} - D_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) + \exp\left(-\frac{(A - \bar{A} + D_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \right]$$

<sup>117</sup> J. Terrell, "Neutron Yields from Individual Fission Fragments", *Physical Review*, 127, pp. 880-904, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.880>

<sup>118</sup> La polarisation de charge peut être étudiée à partir de la formule de Bethe-Weizsacker : C. Ishizuka, S. Chiba, N. Carjan, « Charge polarization and the elongation of the fissioning at scission » *Romanian Reports in Physics*, 70, 202, 2018, pp. 1-10.

<sup>119</sup> R. K. Gupta, D. R. Saroha, « Hypothesis of unchanged charge density and the fragmentation theory of nuclear fission », *op. cit.*, p. 395.

<sup>120</sup> M. A. Kellet, O. Bersillon, R. W. Mills, *The JEFF-3.1/JEFF-3.1.1 radioactive decay data and fission yields sub-libraries*, JEFF Report 20, pp. 20-22. <https://www.oecd-nea.org/dbdata/jeff/decay/>.

$$+ \frac{N_3}{\sigma_3 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(A - \bar{A})^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (8.10)$$

avec :

- $\bar{A} = (A_f - \bar{\nu}_p)/2$  imposée par la conservation du nombre de nucléons ;
- $N_1 = 0.0003846 A_f + 0.6215$  pour la fission provoquée par des neutrons rapides ;
- $N_1 = 0.0010563 A_f + 0.4579$  pour la fission provoquée par des neutrons thermiques ;
- $\sigma_1 = 0.2017 A_f - 42.906$  ;
- $D_1 = 27.1 - 0.67832 (A_f - 230) + 0.013664 (A_f - 230)^2$  ;
- $N_2 = 0.286$  ;
- $\sigma_2 = 0.1125 A_f - 24.375$  ;
- $D_1 = 19.9 - 0.595 (A_f - 230) + 0.00125 (A_f - 230)^2$  ;
- $\sigma_3 = 12$ .

Les rendements de fission sont étudiés en fonction de l'énergie du neutron incident provoquant la fission. La figure 24 montre que lorsque l'énergie du neutron incident augmente, et donc que l'énergie d'excitation du noyau composé fissionnant est plus élevée :

- le creux des rendements indépendants de fission entre les deux bosses est moins prononcé ;
- un décalage vers les masses plus grandes des produits de fission formés se produit.

On observe aussi que les ailes des bosses présentent des pentes plus abruptes pour les noyaux fissionnants les moins lourds.

En toute rigueur, les rendements  $y(A, Z, I)$  dépendent continûment de l'énergie du neutron incident. Dans la pratique, ils sont tabulés pour des neutrons thermiques (0.025 eV), épithermiques (400 – 500 keV) et rapides à l'énergie de 14 MeV.

### Remarques

- Les rendements de fission sont également déterminés dans le cas de la fission spontanée d'un noyau lourd, tel que le californium 252.
- Une série isobarique n'est pas exclusivement initiée par la fission d'un noyau atomique. Par exemple, la capture radiative d'un neutron par un noyau d'uranium 238 donne naissance à la série isobarique suivante :



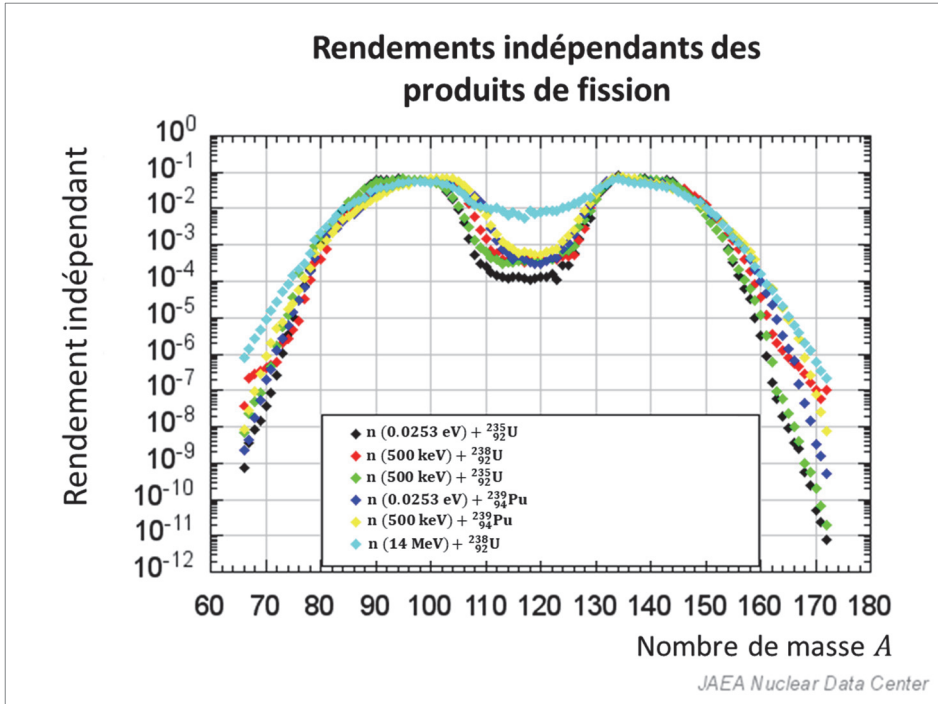


Figure 24. Rendements de masse de la fission induite sur différents noyaux lourds par un neutron de différentes énergies.<sup>121</sup>

## 9. Les neutrons retardés

Certains **produits de fission** – 271 les plus significatifs ont été recensés sur un total d'environ 1300 produits de fission<sup>122</sup> –, présentent un mode de désexcitation concurrentiel au mode de désintégration  $\beta$  se traduisant par l'émission d'un neutron qui suit « immédiatement » la transition  $\beta$ . Ce neutron émis en temps différé par rapport aux neutrons prompts de fission est qualifié de **neutron retardé** (*delayed* en anglais). Un nucléide qui émet un tel neutron est dénommé **précurseur de neutrons retardés**. La **figure 25** indique les endroits de la carte des nucléides où se positionnent ces précurseurs de neutrons retardés.

La **figure 26** en montre un exemple avec le brome 87. Dans 2.6 % des cas, la désintégration bêta du  $^{87}\text{Br}$  aboutit à un niveau excité du krypton 87 supérieur d'énergie supérieure à l'énergie de séparation  $S_n = S_n(^{87}\text{Kr})$  du « dernier neutron » de ce nucléide :  $S_n(^{87}\text{Kr}) = 5515.17 \text{ keV}$ . On a vu dans le chapitre 5 paragraphe 8 que l'énergie disponible  $Q_{(\beta^-n)}$  de la transition  $(\beta^-n)$  vaut  $Q_{(\beta^-n)} \approx 1303 \text{ keV}$ .

<sup>121</sup> Figure réalisée avec l'outil graphique : <https://www.ndc.jaea.go.jp/cgi-bin/FPYfig>.

<sup>122</sup> M. C. Brady, *Evaluation and Application of Delayed Neutron Precursor Data*, PhD, LA-11534-T, April 1989. Mise en évidence : cf. E. T. Booth, R. Dunning, and F. G. Slack, "Delayed Neutron Emission from Uranium", *Phys. Rev.* 55, 876, 1939.



Les relations cinématiques permettent d'accéder à un ordre de grandeur de l'énergie du neutron retardé émis. En effet, la conservation de l'énergie totale relative à la décroissance radioactive bêta du brome 87, en admettant que ce nucléide soit initialement au repos :



s'écrit :

$$M(^{87}_{35}\text{Br})c^2 = M_e c^2 + M_{\bar{\nu}} c^2 + M(^{87}_{36}\text{Kr}^*)c^2 + E_{e^-} + E_{\bar{\nu}} + E_{^{87}_{36}\text{Kr}^*} \tag{9.2}$$

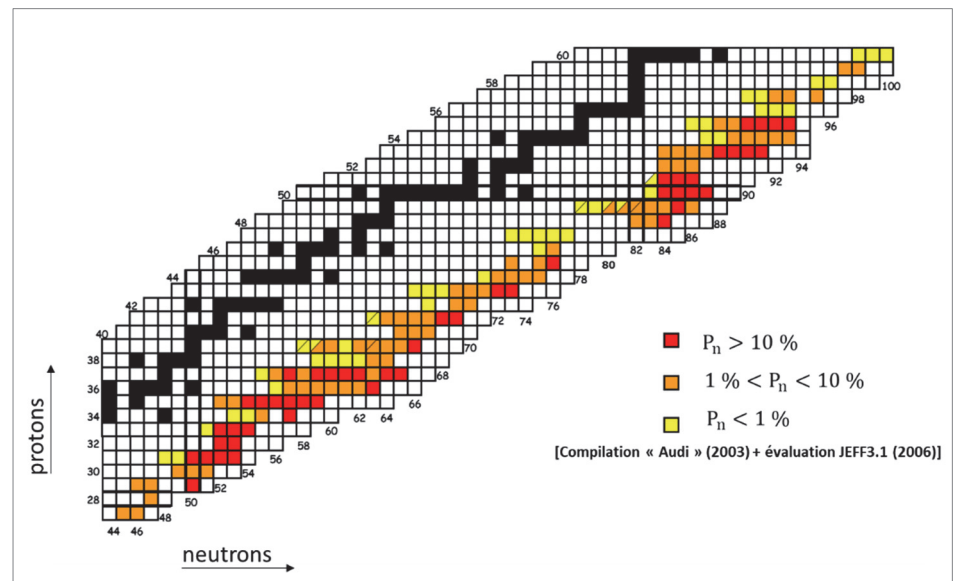


Figure 25. Partie de charte des nucléides dans laquelle se trouvent les émetteurs potentiels de neutrons retardés (cases colorées) ; sur cette figure,  $P_n$  désigne la probabilité qu'a un nucléide d'émettre un neutron retardé.<sup>123 124 125</sup>

<sup>123</sup> Figure tirée de : D. Foligno, *New evaluation of delayed-neutron data and associated covariances*, PhD, Aix-Marseille University, October 2019, p. 12, Figure 1.6.

<sup>124</sup> G. Audi *et al.*, « The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties », *Nuclear Physics A*, 729(1):3–128, 2003.

<sup>125</sup> L. Mathieu, O. Serot, T. Materna, A. Bail, U. Koster, H. Faust, O. Litaize, E. Dupont, C. Jouanne, A. Letourneau, S. Panebianco, « New neutron long-counter for delayed neutron investigations with the LOHENGRIN fission fragment separator », *Journal of Instrumentation*, 7(8):P08029–P08029, 2012, <https://doi.org/10.1088/1748-0221/7/08/P08029>.

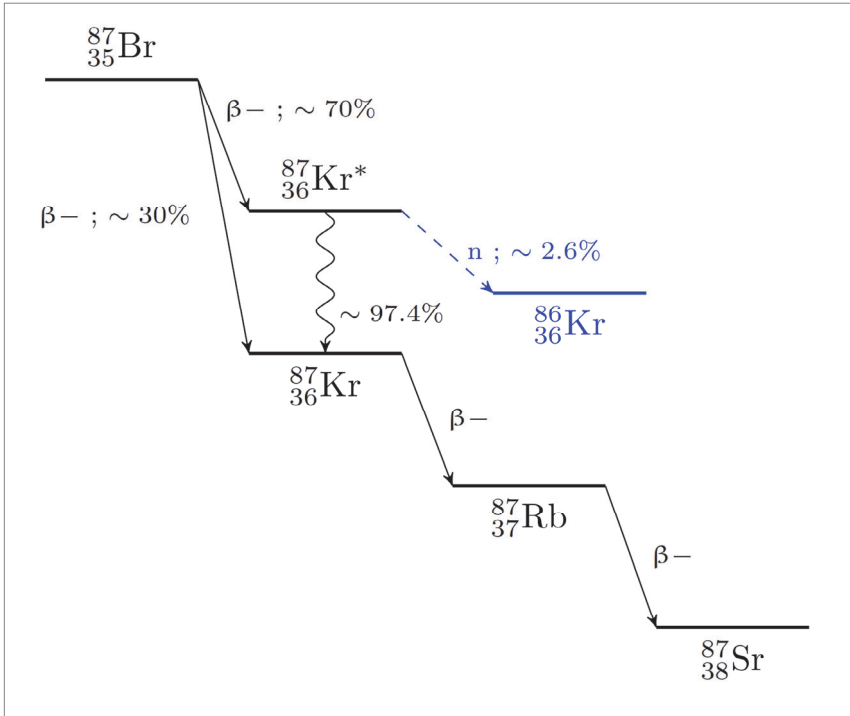


Figure 26. Émission d'un « neutron retardé » (noté « n ») par le nucléide précurseur brome 87 via la formation du krypton 87 dans un état excité par décroissance  $\beta^-$ .

Les relations cinématiques permettent d'accéder à un ordre de grandeur de l'énergie du neutron retardé émis. En effet, la conservation de l'énergie totale relative à la décroissance radioactive bêta du brome 87, en admettant que ce nucléide soit initialement au repos :

$${}^{87}_{35}\text{Br} \rightarrow e^- + \bar{\nu} + {}^{87}_{36}\text{Kr}^* \quad (9.1)$$

s'écrit :

$$M({}^{87}_{35}\text{Br})c^2 = M_e c^2 + M_{\bar{\nu}} c^2 + M({}^{87}_{36}\text{Kr}^*)c^2 + E_{e^-} + E_{\bar{\nu}} + E_{{}^{87}_{36}\text{Kr}^*} \quad (9.2)$$

où :

- $M({}^{87}_{35}\text{Br})c^2$  : masse du nucléide  ${}^{87}_{35}\text{Br}$  ;
- $M_e c^2$  : masse au repos en unité d'énergie de l'électron émis ;
- $M_{\bar{\nu}} c^2$  : masse au repos en unité d'énergie de l'antineutrino émis supposée négligeable ;
- $M({}^{87}_{36}\text{Kr}^*)c^2$  : masse au repos du nucléide  ${}^{87}_{36}\text{Kr}^*$  ;
- $E_{e^-}$  : énergie cinétique de l'électron ;
- $E_{\bar{\nu}}$  : énergie cinétique de l'antineutrino ;
- $E_{{}^{87}_{36}\text{Kr}^*}$  : énergie cinétique du  ${}^{87}_{36}\text{Kr}^*$ .

On pose :

$$M(^{87}_{36}\text{Kr}^*)c^2 = M(^{87}_{36}\text{Kr})c^2 + E^* \quad (9.3)$$

relation dans laquelle  $M(^{87}_{36}\text{Kr})c^2$  est la masse en unité d'énergie du krypton 87 dans son état fondamental et  $E^*$  est l'énergie d'excitation du nucléide  $^{87}_{36}\text{Kr}^*$  formé.

En ayant défini l'énergie disponible  $Q_{\beta^-}$  associée à la transition radioactive (9.1) comme :

$$Q_{\beta^-} = M(^{87}_{35}\text{Br})c^2 - [M_{e^-}c^2 + M_{\bar{\nu}}c^2 + M(^{87}_{36}\text{Kr})c^2] \quad (9.4)$$

et en combinant (9.2) et (9.3), on en déduit l'expression de  $Q_{\beta^-}$  :

$$Q_{\beta^-} - E^* = E_{e^-} + E_{\bar{\nu}} + E_{^{87}_{36}\text{Kr}^*} \quad (9.5)$$

En première approximation, en négligeant l'énergie cinétique  $E_{^{87}_{36}\text{Kr}^*}$  vis-à-vis des énergies cinétiques emportées par l'électron et l'antineutrino qui sont des particules « légères », la relation (9.5) devient :

$$Q_{\beta^-} - E^* \approx E_{e^-} + E_{\bar{\nu}} \quad (9.6)$$

On considère à présent la décroissance radioactive du krypton 87 formé dans un état excité par émission d'un neutron (retardé) :



La conservation de l'énergie totale correspondante s'écrit :

$$M(^{87}_{36}\text{Kr}^*)c^2 = M_n c^2 + M(^{86}_{36}\text{Kr})c^2 + E_n + E_{^{86}_{36}\text{Kr}} \quad (9.8)$$

Soit en utilisant (9.3) :

$$M(^{87}_{36}\text{Kr})c^2 + E^* - [M_n c^2 + M(^{86}_{36}\text{Kr})c^2] = E_n + E_{^{86}_{36}\text{Kr}} \quad (9.9)$$

Or par définition :

$$S_n(^{87}_{36}\text{Kr}) = -Q_n(^{87}_{36}\text{Kr}) = -[M(^{87}_{36}\text{Kr})c^2 - [M_n c^2 + M(^{86}_{36}\text{Kr})c^2]] \quad (9.10)$$

En négligeant, toujours en première approximation, l'énergie cinétique du krypton 86 formé, on déduit de (9.8) et (9.10) l'expression de l'énergie cinétique du neutron émis :

$$E_n \approx E^* - S_n(^{87}_{36}\text{Kr}) \quad (9.11)$$

Dans (9.11) il est encore possible de remplacer  $E^*$  par son expression tirée de (9.6), ce qui conduit à la nouvelle expression suivante de l'énergie cinétique du neutron :

$$E_n \approx Q_{\beta^-} - [E_{e^-} + E_{\bar{\nu}}] - S_n(^{87}\text{Kr}) \tag{9.12}$$

En reprenant la relation déjà établie au chapitre 5 § 2 (équation (8.5)),  $Q_{\beta^-,n} = Q_{\beta^-} - S_n$  (9.12) devient :

$$E_n \approx Q_{\beta^-,n} - [E_{e^-} + E_{\bar{\nu}}] \tag{9.13}$$

Tableau 14. Spectre en énergie des neutrons retardés du krypton 87 ; l'énergie moyenne est de 163 keV .<sup>126</sup>

Énergies keV	Spectre normalisé à l'unité %
18.00	1.8120E-01
40.30	3.0011E-02
52.2	1.3590E-01
70.8	6.2288E-02
79.9	4.5866E-02
121	5.6625E-02
135.8	5.6625E-02
147.5	4.9830E-02
169	2.5481E-02
182	6.7950E-02
211.1	2.2084E-02
248	7.9275E-02
256.2	2.8313E-02
312.4	2.2084E-02
339	1.0759E-02
386.1	1.3590E-02
401	1.1891E-02
407	1.8120E-02
437.7	2.7746E-02
457	1.3590E-02
638	6.2288E-03
668	3.4541E-02
somme	1.0000E+00

On constate donc qu'une émission d'un neutron est possible si l'énergie cinétique emportée par l'électron et l'antineutrino est au plus égale ici à  $Q_{\beta^-,n} = 1303$  keV. On a vu précédemment que ces particules sont émises selon un spectre en énergie. Par conséquent, (9.13) implique que les neutrons retardés sont eux aussi émis selon un spectre énergétique.

Les neutrons retardés sont émis selon un spectre dont les énergies sont inférieures au MeV et l'énergie moyenne de l'ordre de quelques centaines de keV, nettement inférieure à l'énergie moyenne des neutrons prompts de fission.

<sup>126</sup> <https://nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>.

Le **tableau 14** et la **figure 27** correspondante montrent dans le cas de la désintégration radioactive du brome 87 le spectre des neutrons retardés émis.<sup>127</sup> La **figure 28** permet de comparer les spectres des neutrons retardés émis en fonction du système fissionnant.

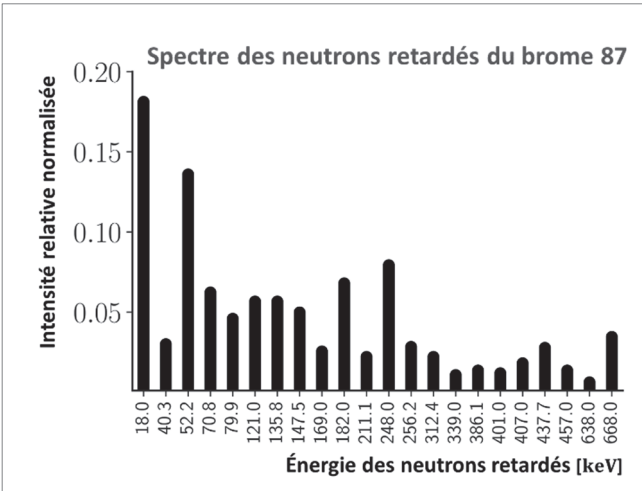


Figure 27. Spectre en énergie des neutrons retardés émis par décroissance radioactive du brome 87, <sup>87</sup>Br.

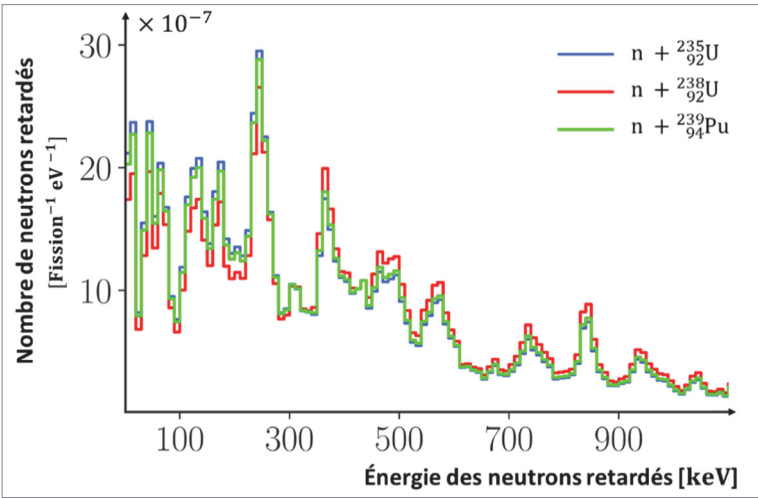


Figure 28. Spectre en énergie des neutrons retardés émis par le premier groupe de précurseurs formés après fission induite par un neutron sur l’uranium 235, l’uranium 238 et le plutonium 239.<sup>128</sup>

<sup>127</sup> Voir par exemple : [https://www-nds.iaea.org/relnsd/delayedn/delayed\\_spectra\\_8g.html](https://www-nds.iaea.org/relnsd/delayedn/delayed_spectra_8g.html) (<https://www-nds.iaea.org/beta-delayed-neutron/database.html>) ; les valeurs du tableau 14 et de la figure 27 correspondante ont été normalisées à l’unité.

<sup>128</sup> D’après M. C. Brady, *Evaluation and Application of Delayed Neutron Precursor Data*, PhD, LA-11534-T, April 1989, p. 14.

Tout comme pour les neutrons prompts, des auteurs ont ainsi développé des modèles pour prédire les **spectres en énergie des neutrons retardés** ainsi que le **nombre de neutrons retardés émis par un nucléide précurseur** donné. Il existe en effet historiquement deux méthodes de détermination des rendements de fission, l'une fondée sur l'expérience et l'autre sur le calcul (méthode dite de sommation) qui ne conduisent pas aux mêmes valeurs du nombre moyen de neutrons retardés,  $\bar{\nu}_d$ .

Aux modèles simples<sup>129 130 131</sup> succèdent des modèles plus élaborés combinant une approche microscopique de la structure nucléaire et l'approche statistique des réactions nucléaires : les probabilités de transition bêta du noyau père vers le noyau fils sont calculées par un modèle microscopique dénommé *Quasi-particle Random-Phase Approximation* (QRPA, déjà rencontré dans le chapitre 8) et les rapports de branchement vers les voies de sortie possibles – compétition entre émission de neutron et émission de gamma – dans le cadre du **modèle statistique de Hauser-Feshbach**<sup>132</sup>. Il est aussi à noter que l'influence de l'existence d'états métastables d'isomères formés a fait l'objet d'études particulières.<sup>133 134</sup>

Le nombre total moyen de neutrons retardés émis pour une fission induite par un neutron thermique sur un noyau fissile s'écrit :

$$\bar{\nu}_d = \sum_{A,Z,I} y_c(A, Z, I) P_n(A, Z, I) \quad (9.14)$$

où  $P_n(A, Z, I)$  représente la probabilité d'émission d'un neutron retardé par le produit de fission  $(A, Z, I)$  sous l'hypothèse qu'un seul neutron est émis lors de ce type de désintégration radioactive.

La grandeur  $P_n$  s'identifie au rapport de branchement de neutrons retardés (voir annexe III).

La **figure 29a** donne les valeurs attribuées à la probabilité  $P_n$  selon différentes évaluations.

<sup>129</sup> G. Rudstam, « Characterization of delayed-neutron spectra », *Journal of Radioanalytical Chemistry* volume 36, 1977, pp. 591-618, <https://doi.org/10.1007/bf02517026>.

<sup>130</sup> M. R. Mumpower, T. Kawano, P. Möller, « Neutron-gamma competition for  $\beta$ -delayed neutron emission », *Physical Review C* 94, 064317–December 19, 2016, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.94.064317>.

<sup>131</sup> P. Möller, J. Randrup, « New developments in the calculation of  $\beta$ -strength functions », *Nuclear Physics A* 514, 1990, pp. 1-48, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(90\)90330-O](https://doi.org/10.1016/0375-9474(90)90330-O).

<sup>132</sup> T. Kawano, P. Möller, W. B. Wilson, « Calculation of delayed-neutron energy spectra in a quasiparticle random-phase approximation–Hauser-Feshbach model », *Physical Review C* 78, 2008, 054601, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.78.054601>. Voir aussi chapitre 8.

<sup>133</sup> S. Okumura, T. Kawano, P. Jaffke, P. Talou, S. Chiba, «  $^{235}\text{U}(n, f)$  Independent fission product yield and isomeric ratio calculated with the statistical Hauser-Feshbach theory », *Journal of Nuclear Science and Technology*, 55, 9, 2018, 1009-1023, <https://doi.org/10.1080/00223131.2018.1467288>.

<sup>134</sup> D. G. Madland, T. R. England, « The influence of isomeric states on independent fission product yields », *Nuclear Science and Engineering*, 1977, 64, pp. 859-865, <https://doi.org/10.13182/NSE77-A14501>.

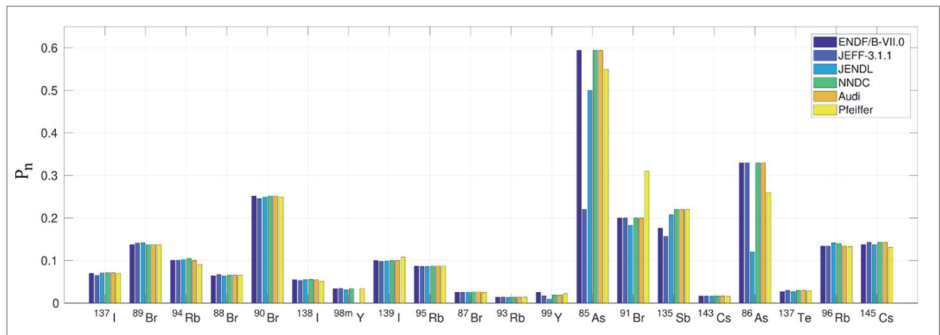


Figure 29a. Valeurs estimées de la probabilité d’émission d’un neutron retardé par différents précurseurs selon diverses évaluations ; on note l’existence d’écarts significatifs entre ces valeurs pour certains précurseurs.<sup>135</sup>

Exemple

Pour une fission induite par un neutron thermique sur un noyau d’uranium 235, dans le cas du brome 87, le nombre total de neutrons retardés émis,  $\bar{\nu}_d(^{87}\text{Br})$ , est égal au produit du rendement cumulé de fission du  $^{87}\text{Br}$ ,  $y_c(^{87}\text{Br}) = 2.136 \cdot 10^{-2}$ , par le rapport de branchement de la transition ( $\beta^-n$ ),  $P_n(^{87}\text{Br}) = 2.60 \cdot 10^{-2}$  :

$$\bar{\nu}_d(^{87}\text{Br}) = y_c(^{87}\text{Br}) \times P_n(^{87}\text{Br}) = 2.136 \cdot 10^{-2} \times 2.60 \cdot 10^{-2} = 5.5536 \cdot 10^{-4} \tag{9.15}$$

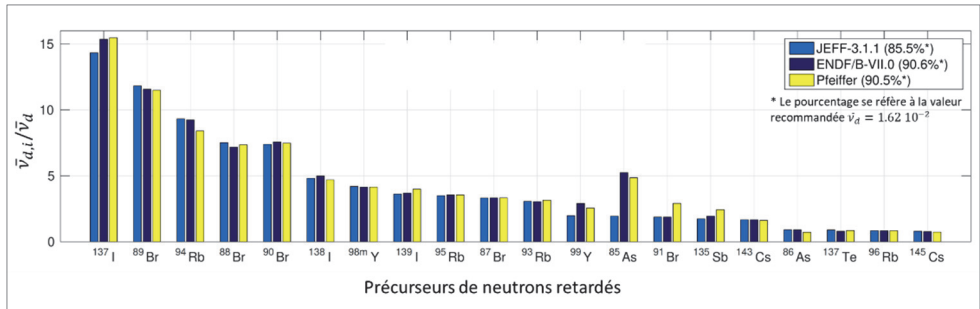


Figure 29b. Contribution des précurseurs à la production des neutrons retardés dans le cas de la fission induite par un neutron thermique sur l’uranium 235 : les valeurs du nombre de neutrons retardés  $\bar{\nu}_{d,i}$  émis par fission est rapporté au nombre total moyen  $\bar{\nu}_d$  pris égal à la valeur recommandée  $1.62 \cdot 10^{-2}$  ; plusieurs évaluations sont comparées en utilisant les rendements cumulés issus de l’évaluation JEFF-3.1.1<sup>136</sup>.

<sup>135</sup> Figure tirée de : D. Foligno, *New evaluation of delayed-neutron data and associated covariances*, op. cit., p. 49, Figure 3.6.

<sup>136</sup> D’après D. Foligno, *New evaluation of delayed-neutron data and associated covariances*, op. cit., p. 49, Figure 3.7.

Les valeurs des probabilités  $P_n$  pour 271 nucléides ont été systématiquement calculées<sup>137</sup> et continuent d’être affinées et compilées<sup>138</sup>. La **figure 29b** montre la contribution de chacun des précurseurs à la production des neutrons retardés dans le cas de la fission induite par un neutron thermique sur l’uranium 235.

Pour une fission induite par un neutron thermique et rapide, le **tableau 15** donne des exemples de valeurs de  $\bar{\nu}_d$ .

Tableau 15. Valeurs du nombre total moyen des neutrons retardés,  $\bar{\nu}_d$ , pour différents systèmes fissiles.

Énergie des neutrons incidents	$\bar{\nu}_d$ n + $^{235}_{92}\text{U}$	$\bar{\nu}_d$ n + $^{238}_{92}\text{U}$	$\bar{\nu}_d$ n + $^{239}_{94}\text{Pu}$
thermique	$1.62 \cdot 10^{-2}$		$0.650 \cdot 10^{-2}$
rapide	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$4.65 \cdot 10^{-2}$	$0.651 \cdot 10^{-2}$

Notion de groupes de précurseurs

On désigne conventionnellement par  $\beta_i$  la fraction de neutrons retardés émis, pour une fission, par le produit de fission précurseur  $i$ , de période de désintégration  $\lambda_i$ , par  $\tau_i = 1/\lambda_i$  sa durée de vie moyenne et par  $\beta = \sum_i \beta_i$ . la fraction  $\beta_i$  est définie par :

$$\beta_i = \frac{\text{nombre de neutrons retardés émis par le précurseur } i}{\text{nombre de neutrons prompts} + \text{nombre total de neutrons retardés}}$$

soit :

$$\beta_i = \frac{\nu_{d,i}}{\bar{\nu}_d + \bar{\nu}_p} \tag{9.16}$$

Les valeurs des  $\beta_i$  sont donc dépendantes du système fissionnant considéré.

Dans le cœur d’un réacteur nucléaire à eau sous pression, le temps de vie moyen d’un neutron est de l’ordre de  $l = 10^{-4}$  s à  $l = 10^{-3}$  s, et il est de l’ordre de  $l = 10^{-6}$  s dans un réacteur à neutrons rapides.

Si l’on tient compte de l’émission de neutrons retardés, alors le temps de vie moyen effectif  $l_{eff}$  d’un neutron s’écrit<sup>139</sup> :

$$l_{eff} = (1 - \beta)l + \sum_i \beta_i(l + \tau_i) = l + \sum_i \beta_i\tau_i = l + \beta\bar{\tau} \tag{9.17a}$$

<sup>137</sup> M. C. Brady, *Evaluation and Application of Delayed Neutron Precursor Data*, op. cit., pp. 32-38.

<sup>138</sup> M. Birch, B. Singh, D. Abriola, I. Dillmann, T.D. Johnson, E.A. McCutchan, A. A. Sonzogni, « First Compilation and Evaluation of Beta-Delayed Neutron Emission Probabilities and Associated Half-Lives for A≤72 Nuclei », *Nuclear Data Sheets* Vol. 120, June 2014, pp. 66-69, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2014.07.008>.

<sup>139</sup> J. Bussac, P. Reuss, *Traité de Neutronique*, Hermann, 1978, pp. 83-86 ; P. Reuss, *Précis de neutronique*, Les Ulis, INSTN/EDPSciences, 2003, pp. 118-121.



avec :

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_i \beta_i \tau_i}{\beta} \quad (9.17b)$$

$$\beta = \sum_i \beta_i \quad (9.17c)$$

Dans la pratique, les neutrons retardés sont regroupés en **huit** (antérieurement **six**) « **familles** » ou « **groupes** » ( $i = 1, 8$ ) se référant à leurs **précurseurs**, caractérisés par leur durée de vie moyenne,  $\tau_i$ , comme le montre le **tableau 16**.

On a ainsi en prenant  $l = 10^{-4}$ ,  $l_{eff} = 10^{-4} + 8.66 \cdot 10^{-2} \approx 8.66 \cdot 10^{-2}$  s, une valeur rendant possible le contrôle de la réaction en chaîne dont la dynamique temporelle est exponentielle.

Le **tableau 17** indique les valeurs de la fraction  $\beta$  des neutrons retardés relative à la fission induite de différents noyaux lourds différents de l'uranium 235 par des neutrons thermiques et rapides.

#### Remarque

Dans ce qui précède, il a été admis qu'une décroissance radioactive ( $\beta^-n$ ) donnait naissance à un seul neutron. Cette hypothèse est légitime pour les calculs de neutronique. Il existe cependant des précurseurs pour lesquels il peut y avoir plusieurs neutrons émis pourvu que la condition sur l'énergie disponible correspondante soit remplie<sup>140 141</sup> :

$$Q_{(\beta^-xn)} > 0, x : \text{nombre de neutrons émis} \quad (9.18)$$

Pour  $A \leq 72$ , il existe ainsi 203 précurseurs potentiels<sup>142</sup> émettant 1 neutron, parmi ceux-ci, 127 peuvent émettre deux neutrons, 76 trois neutrons et 39 quatre neutrons comme le schématise la **figure 30**.

<sup>140</sup> M. Birch, B. Singh, D. Abriola, I. Dillmann, T.D. Johnson, E.A. McCutchan, A. A. Sonzogni, « First Compilation and Evaluation of Beta-Delayed Neutron Emission Probabilities and Associated Half-Lives for  $A \leq 72$  Nuclei », *op. cit.*

<sup>141</sup> P. Dimitriou *et al.*, « Development of a Reference Database for Beta-Delayed Neutron Emission », *Nuclear Data Sheets*, Vol. 173, March-April 2021, pp.144-238, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2021.04.006>.

<sup>142</sup> M. Birch *et al.*, *op. cit.*, p. 67, Table 1.

Tableau 16. Exemple de valeurs de la fraction  $\beta_i$  de neutrons retardés des familles de précurseurs pour l'uranium 235. Les grandeurs  $\lambda_i$ ,  $\tau_i$ ,  $\bar{\nu}_{d,i}$  sont définies dans le texte. Lorsque le groupe de précurseurs comporte plusieurs nucléides, ce sont des valeurs moyennes établies sur ces différents nucléides qui sont indiquées.<sup>143 144 145</sup>

Groupes de précurseurs de neutrons retardés – ( $T_{1/2}$ s)		$\lambda_i$ s <sup>-1</sup>	$\tau_i$ s	$T_{1/2,i}$ = $\ln 2 / \lambda_i$ s	$\bar{\nu}_{d,i}$	$\beta_i$ pcm (10 <sup>-5</sup> )	$\beta_i \tau_i$ s	Énergie cinétique moyenne des neutrons retardés émis keV
1	<sup>87</sup> <sub>35</sub> Br	1.247 10 <sup>-2</sup>	80.21	55.6	5.2140 10 <sup>-4</sup>	32	1.76 10 <sup>-2</sup>	216
2	<sup>137</sup> <sub>53</sub> I	2.829 10 <sup>-2</sup>	35.35	24.5	2.4174 10 <sup>-3</sup>	102	3.61 10 <sup>-2</sup>	622
3	<sup>88</sup> <sub>35</sub> Br	4.252 10 <sup>-2</sup>	23.52	16.3	1.4457 10 <sup>-3</sup>	61	1.43 10 <sup>-2</sup>	294
4	<sup>138</sup> <sub>53</sub> I (6.46), <sup>93</sup> <sub>37</sub> Rb(5.93), <sup>88</sup> <sub>35</sub> Br (4.38)	1.330 10 <sup>-1</sup>	7.516	5.21	3.1047 10 <sup>-3</sup>	131	9.85 10 <sup>-3</sup>	450
5	<sup>94</sup> <sub>37</sub> Rb (2.76), <sup>139</sup> <sub>53</sub> I (2.30), <sup>138</sup> <sub>53</sub> As (2.08), <sup>98m</sup> <sub>39</sub> Y (2.00)	2.925 10 <sup>-1</sup>	3.419	2.37	5.2140 10 <sup>-3</sup>	220	7.52 10 <sup>-3</sup>	517
6	<sup>93</sup> <sub>36</sub> Kr (1.29), <sup>144</sup> <sub>55</sub> Cs (1.00), <sup>140</sup> <sub>53</sub> I (0.86)	6.665 10 <sup>-1</sup>	1.5	1.04	1.4220 10 <sup>-3</sup>	60	9.00 10 <sup>-4</sup>	487
7	<sup>95</sup> <sub>37</sub> Rb (0.384), <sup>91</sup> <sub>35</sub> Br (0.542)	1.635	0.6117	0.424	1.2798 10 <sup>-3</sup>	54	3.30 10 <sup>-4</sup>	539
8	<sup>96</sup> <sub>37</sub> Rb (0.203), <sup>97</sup> <sub>37</sub> Rb (0.170)	3.555	0.2813	0.195	3.5550 10 <sup>-4</sup>	15	4.22 10 <sup>-5</sup>	591
Moyenne ou total			13.02	9.	1.5761 10 <sup>-2</sup>	665	8.66 10 <sup>-2</sup>	

Tableau 17. Valeurs de la fraction  $\beta$  de neutrons retardés relative à la fission de différents noyaux lourds.<sup>146</sup>

Noyau	Fission en spectre (de neutrons)	$\beta$ pcm (10 <sup>-5</sup> )
Thorium 232	rapide	2433
Uranium 233	thermique	296
Uranium 238	rapide	1828
Plutonium 239	thermique	224
Plutonium 240	rapide	292
Plutonium 241	thermique	535

<sup>143</sup> D. Foligno, *New evaluation of delayed-neutron data and associated covariances*, op. cit., pp. 20-21.

<sup>144</sup> Voir aussi la base de données [https://www-nds.iaea.org/beta-delayed-neutron/databases/delayedn\\_fy\\_ado.html](https://www-nds.iaea.org/beta-delayed-neutron/databases/delayedn_fy_ado.html) qui compile ces caractéristiques pour d'autres énergies de neutron incident et d'autres nucléides. Ces tables fournissent les abondances relatives  $a_i = \bar{\nu}_{d,i} / \sum_i \bar{\nu}_{d,i}$  et l'on a ainsi pour les 8 groupes de précurseurs de neutrons retardés associés à l'uranium 235 : ~ 0.033 ; 0.153 ; 0.091 ; 0.197 ; 0.331 ; 0.0902 ; 0.0812 ; 0.0226.

<sup>145</sup> T. Kawano, P. Möller, W. B. Wilson, « Calculation of delayed-neutron energy spectra in a quasiparticle random-phase approximation–Hauser-Feshbach model », op. cit., pp. 1-8, figure 7 en particulier.

<sup>146</sup> P. Reuss, *Précis de neutronique*, op. cit., p. 120.

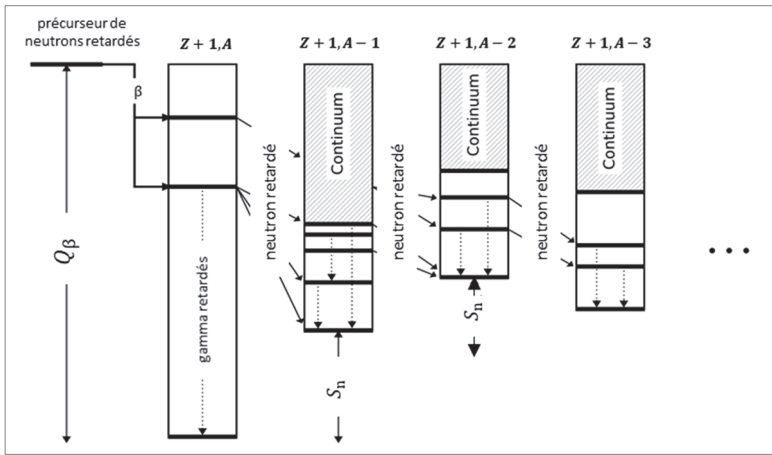


Figure 30. Précurseur émetteur de plusieurs neutrons retardés.<sup>147</sup>

Les précurseurs potentiels émetteurs de plusieurs neutrons se trouvent dans la région périphérique basse de la charte des radionucléides ( $Z, N$ ).<sup>148</sup> Par exemple, le lithium 11, le béryllium 14, le bore 17 et le sodium 31 sont émetteurs de 3 neutrons retardés Si l'on désigne par  $P_{xn}$  la probabilité d'émission de  $x$  neutrons après une décroissance bêta, le nombre moyen de neutrons retardés émis par le produit de fission considéré s'écrit :

$$\bar{P}_n = 1 \times P_{1n} + 2 \times P_{2n} + \dots + x \times P_{xn} + \dots \tag{9.19}$$

### 10. La fission ternaire

On a précédemment indiqué qu'il pouvait se produire des **fissions ternaires** dont la probabilité d'occurrence est très inférieure à la fission binaire, de l'ordre de 2 pour 1 000 fissions. La littérature distingue la **fission ternaire « usuelle »**, dans laquelle sont produits deux « gros » fragments et un fragment léger ( $Z < 10$ ), de la « **vraie fission ternaire** » dans laquelle les trois fragments ont des tailles moins disparates (au-delà de  $Z = 10$ ). Dans ce dernier cas, les particules ternaires se répartissent autour de trois pics<sup>149</sup> :  $12 < A < 30$  avec une probabilité d'environ  $10^{-6}$ ,  $30 \leq A < 70$  avec une probabilité de  $8 \cdot 10^{-8}$  et  $70 \leq A < 95$  avec une probabilité inférieure à  $2 \cdot 10^{-9}$ . La physique des réacteurs est plus particulièrement intéressée par la fission ternaire « usuelle », qui conduit le plus souvent à l'émission d'une particule alpha ou d'un triton. La distribution en énergie du fragment léger peut être représentée par une gaussienne centrée sur l'énergie moyenne.<sup>150</sup> Le **tableau 18** rassemble quelques caractéristiques des **produits de fission ternaires légers**.

Tableau 18. Données de rendement de fission et d'énergie des fragments de fission légers produits par une fission ternaire induite par un neutron thermique sur un noyau d'uranium 235 et un noyau de plutonium

<sup>147</sup> Voir par exemple M. R. Mumpower, T. Kawano, P. Möller, *Neutron-gamma competition for  $\beta$ -delayed neutron emission*, op. cit., p. 2, Figure 1.

<sup>148</sup> M. Birch et al., op. cit., p. 67, Fig. 1. et M. R. Mumpower et al., op. cit., p. 6, figure 6.

<sup>149</sup> C. Wagemans, Chapter 12: « Ternary fission », dans Wagemans C. (Editor), *The nuclear fission process*, op. cit., p. 576.

<sup>150</sup> Ibid., pp. 563-572.

239. Ces valeurs proviennent de données expérimentales des distributions en énergie des nucléides légers produits représentées par des gaussiennes.<sup>151</sup>

Nucléide léger ternaire	<sup>235</sup> <sub>92</sub> U			<sup>239</sup> <sub>94</sub> Pu		
	Rendement par fission	Énergie la plus probable MeV	Largeur à mi-hauteur de la gaussienne représentant la distribution en énergie MeV	Rendement par fission	Énergie la plus probable MeV	Largeur à mi-hauteur de la gaussienne représentant la distribution en énergie MeV
<sup>1</sup> <sub>1</sub> H	1.7 10 <sup>-5</sup>	8.7	6.4	4.0 10 <sup>-5</sup>	8.4	7.2
<sup>2</sup> <sub>1</sub> H	8.5 10 <sup>-6</sup>	7.8	6.9	1.33 10 <sup>-5</sup>	8.4	7.4
<sup>3</sup> <sub>1</sub> H	1.07 10 <sup>-4</sup>	8.4	6.7	1.46 10 <sup>-4</sup>	8.4	7.3
<sup>4</sup> <sub>2</sub> He	1.7 10 <sup>-3</sup>	15.9	9.6	2.22 10 <sup>-3</sup>	15.9	10.3
<sup>6</sup> <sub>2</sub> He	2.89 10 <sup>-5</sup>	11.8	9.6	4.0 10 <sup>-5</sup>	11.3	10.7
<sup>8</sup> <sub>2</sub> He	1.36 10 <sup>-6</sup>	9.3	8.9	1.78 10 <sup>-6</sup>	8.	10.9
<sup>6</sup> <sub>3</sub> Li	8.5 10 <sup>-9</sup>	-	-	-	-	-
<sup>7</sup> <sub>3</sub> Li	6.8 10 <sup>-7</sup>	15.1	13.3	1.33 10 <sup>-6</sup>	14.5	13.6
<sup>8</sup> <sub>3</sub> Li	3.4 10 <sup>-7</sup>	13.8	11.0	6.66 10 <sup>-7</sup>	13.3	12.5
<sup>9</sup> <sub>3</sub> Li	5.1 10 <sup>-7</sup>	12.1	10.7	5.1 10 <sup>-7</sup>	12.0	12.0
<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be	3.4 10 <sup>-7</sup>	15.0	11.0	1.1 10 <sup>-6</sup>	16.2	16.6
<sup>10</sup> <sub>4</sub> Be	5.27 10 <sup>-6</sup>	17.4	17.0	1.02 10 <sup>-5</sup>	16.4	16.3
<sup>11</sup> <sub>5</sub> B	3.4 10 <sup>-8</sup>	15.9	15.3	1.77 10 <sup>-7</sup>	12.9	14.1
<sup>14</sup> <sub>6</sub> C	8.6 10 <sup>-7</sup>	21.8	19.4	2.87 10 <sup>-6</sup>	21.8	13.6
Total	~2.14 10 <sup>-3</sup>			~2.33 10 <sup>-3</sup>		

11. Les actinides mineurs

Il faut également signaler que de nombreux noyaux lourds – dont notamment les « **actinides mineurs** » – **neptunium**, **américium** et **curium** – sont formés dans un combustible nucléaire, notamment par le jeu des réactions de capture radiative et des réactions (n, 2n).

Ces noyaux lourds, au nombre d’environ 300, subissent comme les noyaux d’uranium d’un combustible oxyde neuf (« UOx ») des fissions induites par les neutrons ainsi que la fission spontanée. Il faut donc aussi disposer pour ces noyaux fissiles des données sur les « observables de fission » explicitées plus haut.

C’est une soixantaine de nucléides principaux qui sont indiqués dans le **tableau 19** ci-après.

<sup>151</sup> *Ibid.*, pp. 566-567.

Tableau 19. Liste des noyaux lourds donnant lieu au processus de fission induite, selon le domaine d'énergie du neutron incident, ou spontanée (lettres suffixées : « T » pour fission induite par un neutron thermique, « R » rapide, « H » ou « HE » de haute énergie = 14 MeV, « S » pour fission spontanée ; un type de nucléide donné peut donc apparaître à plusieurs reprises dans cette liste.

---

U235T, U235R, U235HE, U238R, U238HE, Pu239T, Pu239R, Pu241T, U233T, Th232R, U233R, U233HE, U236R, Pu239H, Pu240R, Pu241F, Pu242R, Th232H, Np237R, Cf252S, U234R, U237R, Pu240H, U234HE, U236HE, Pu238R, Am241R, Am243R, Np238R, Cm242R, Th227T, Th229T, Pa231R, Am241T, Am241H, Am242MT, Cm245T, Cf249T, Cf251T, Es254T, Cf250S, Cm244S, Cm248S, Es253S, Fm254S, Fm255T, Fm256S, Np237H, U232T, U238S, Cm243T, Cm246S, Cm243R, Cm244R, Cm246R, Cm248R, Pu242H, Np237T, Pu240T, Pu242T
---

---

## 12. Les produits de fission et les actinides dans le contexte des réacteurs nucléaires

La connaissance des produits de fission est importante pour les raisons listées ci-dessous.

- **Les études de physique du cœur.** En effet, un certain nombre de ces produits possèdent un **pouvoir capturant des neutrons** significatif, diminuant la réactivité du cœur. En particulier, les produits de fission **samarium 149** et **xénon 135** qui ont une section efficace de capture neutronique très élevée (respectivement  $4.1 \cdot 10^4$  et  $2.65 \cdot 10^6$  barns pour un neutron thermique) sont des « **poisons neutroniques** » dans le sens où leur accumulation peut poser des problèmes de pilotage d'un réacteur, par exemple compromettre son redémarrage.<sup>152</sup> La connaissance de la production et du comportement de ces produits de fission permet d'anticiper de telles difficultés. On remarquera que le samarium 149 est un nucléide stable, ce qui n'est pas le cas du xénon 135 qui décroît au cours du temps avec une période de 9.17 heures. Les calculs de neutronique, qui visent à déterminer, entre autres, la distribution de la puissance thermique délivrée par les réactions de fission dans le cœur du réacteur, doivent tenir compte de la formation des produits de fission absorbants de neutrons, de l'ordre de 100 à 250 nucléides de types différents sur plus d'un millier formés.

Par ailleurs, les produits de fission fournissent des renseignements sur le combustible nucléaire, par exemple :

- le **césium 137** de période 30 ans, produit de fission à vie plutôt longue vis-à-vis de la durée de séjour du combustible dans le cœur d'un réacteur, est un **indicateur de l'« usure » du combustible** (caractérisée par son « taux de combustion ») ;
- le **ruthénium 106** de période d'environ 1 an et le **cérium 144** de période 285 jours sont des indicateurs du « **temps de refroidissement** » d'un combustible irradié, c'est-à-dire, en général, de la durée qui le sépare de l'instant de mise hors flux neutronique du cœur du réacteur ;

---

<sup>152</sup> P. Reuss, *Précis de neutronique*, op. cit., p. 248-254.

- le **lanthane 140** de période 1.68 jour et le strontium 92, de période 2.6 heures, sont des **indicateurs de la puissance** (et donc du taux de réaction de fission) **du cœur d'un réacteur** ;
  - l'**iode 131**, produit de fission volatile de période 8 jours, indicateur d'une rupture de gaine. Des produits de fission, tels que les césiums, iodes, tellures, réagissent chimiquement avec le combustible, provoquant un gonflement des pastilles ou corrodant les gaines.
- **Les études de la puissance résiduelle.**<sup>153</sup> Cette puissance qui continue à être émise après l'arrêt du réacteur par les **phénomènes de désintégration radioactive** qui se poursuivent au sein du combustible nucléaire provient majoritairement des produits de fission aux « **temps de refroidissement courts** » et des actinides aux « **temps de refroidissement longs** ». La connaissance de la puissance résiduelle est importante dans la gestion du combustible nucléaire : par exemple, elle intervient dans les conditions de déchargement/rechargement des assemblages combustibles dans le cœur et dans celles de stockage des assemblages combustibles en piscine. Le nombre de nucléides concernés ici est supérieur au millier.
  - **Les études de radioprotection.** En effet, produits de fission et actinides sont émetteurs des rayonnements alpha, bêta, gamma, neutron. L'existence de ces sources de rayonnements doit être prise impérativement en compte par exemple dans le dimensionnement des châteaux de transport des combustibles nucléaires, dans la manutention et l'entreposage ou le stockage des déchets radioactifs.
  - **Les études de sûreté-criticité.**<sup>154</sup> Certains produits de fission de fort pouvoir capturant constituent une réserve d'anti-réactivité dans les études de sûreté-criticité intéressant les diverses opérations du cycle du combustible nucléaire. Ces produits de fission sont principalement : Sm149, Rh103, Nd143, Cs133, Gd155, Sm151, Sm152, Tc99, Nd145, Eu153, Mo95, Sm147, Sm150, Ag109, Ru101.
  - **Les études duales de physique fondamentale sur les neutrinos et de non-prolifération nucléaire** préconisées par l'AIEA. En effet, le cœur d'un réacteur nucléaire *via* notamment ses produits de fission radioactifs constitue une source importante d'antineutrinos et de neutrinos.<sup>155</sup> La détection de ces antineutrinos/neutrinos couplée à des simulations numériques peut fournir des

<sup>153</sup> A. Tobias, « Decay heat », *Progress in Nuclear Energy*, Vol. 5, Issue 1, 1980, pp. 1-93.

<sup>154</sup> Voir *La neutronique*, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions Le Moniteur/CEA, 2013, 2015 (version anglaise), chapitre *La physique du combustible*, pp. 227-234, chapitre *La criticité*, pp. 235-246.

<sup>155</sup> M. Estienne, M. Fallot, A. Algora, J. Briz-Monago, V. M. Bui, S. Cormon, W. Gelletly, L. Giot, V. Guadilla, D. Jordan, L. Le Meur, A. Porta, S. Rice, B. Rubio, J. L. Taín, E. Valencia, A.-A. Zakari-Issoufou, « Updated Summation Model: An Improved Agreement with the Daya Bay Antineutrino Fluxes », *Physical Review Letters* 123, 2019, 022502, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.022502>

renseignements sur les matières présentes dans un système nucléaire. Le projet NUCIFER en est un exemple.<sup>156</sup>

S'agissant des **actinides**, tout comme les produits de fission, l'exploitation d'un réacteur nucléaire et les opérations de l'aval du cycle et du retraitement du combustible irradié nécessitent la connaissance de leur inventaire quantifié ainsi que de leurs caractéristiques à la fois nucléaires et physico-chimiques.<sup>157 158</sup>

---

<sup>156</sup> G. Boireau *et al.* (The Nucifer Collaboration), « Online Monitoring of the Osiris Reactor with the Nucifer Neutrino Detector », *Physical Review D* 93, 112006, June 10, 2016, <https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.93.112006>.

<sup>157</sup> *Le traitement-recyclage du combustible nucléaire usé – La séparation des actinides – Application à la gestion des déchets*, Ouvrage collectif, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Paris, Éditions Le Moniteur/CEA, 2008, [https://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA\\_Monographie6\\_Traitement-recyclage-combustible-nucleaire-use\\_2008\\_Fr.pdf](https://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA_Monographie6_Traitement-recyclage-combustible-nucleaire-use_2008_Fr.pdf).

<sup>158</sup> R. Guillaumont, « Éléments chimiques à considérer dans l'aval du cycle nucléaire », *C. R. Chimie* 7, 2004, pp. 1129–1134. <https://doi.org/10.1016/j.crci.2003.09.014>.

## Annexe I : description de la déformation du noyau atomique

On représente la surface nucléaire par son rayon exprimé en coordonnées polaires (sphériques),  $R(\theta, \varphi)$  ; celui-ci est ainsi exprimé à l'aide d'une fonction  $f(\theta, \varphi)$  elle-même décomposée sur la base des harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  <sup>159 160 161</sup> :

$$R(\theta, \varphi) = R_0 f(\theta, \varphi) = \kappa R_0 \left[ 1 + \sum_{l,m} \alpha_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) \right] \quad (\text{I} - 1)$$

avec :

$$\alpha_{l,m} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi f(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta \quad (\text{I} - 2)$$

$\kappa$  une constante de normalisation.

Cette expression correspond à un développement « multipolaire » de la surface nucléaire où les coefficients  $\alpha_{l,m}$  caractérisent la déformation du noyau atomique par rapport à la sphère de rayon  $R_0$ .

Si l'on considère une déformation symétrique, la variation en  $\varphi$  « disparaît », et la surface nucléaire est alors décrite par  $R(\mu) = R_0 f(\mu)$  :

$$R(\mu) = \kappa R_0 \left[ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l P_l(\mu) \right] \quad (\text{I} - 3)$$

en ayant posé  $\mu = \cos \theta$ , où  $P_l(\mu)$  est le polynôme de Legendre d'ordre  $l$  et

$$\alpha_l = \int_{-1}^{+1} f(\mu) P_l(\mu) d\mu \quad (\text{I} - 4)$$

Dans la littérature, on retrouve également la forme équivalente suivante :

$$R(\mu) = R_0 \left[ 1 + \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\mu) \right] \quad (\text{I} - 5)$$

avec :

$$1 + a_0 = \kappa \quad ; \quad a_l = \kappa \alpha_l \quad (\text{I} - 6)$$

<sup>159</sup> M. S. Plesset, « On the Classical Model of Nuclear Fission », *American Journal of Physics* 9, 1 (1941), <https://doi.org/10.1119/1.1991623>.

<sup>160</sup> J. N. P. Lawrence, *Symmetric fission of a two parameter liquid drop*, LA 3774, 1967, « Static Fission-Barrier Calculations of a Two-Parameter Liquid Drop », *Physical Review* 139, B1227, 6 September 1965, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.139.B1227>.

<sup>161</sup> L. Willets, *Theories of nuclear fission*, Clarendon Press, Oxford Library of the Physical Sciences, Oxford, 1964; voir en particulier chapitre 2, pp. 13-42.



La constante  $\kappa$  est imposée par la condition de la préservation du volume de la goutte liquide incompressible.

En coordonnées sphériques, un volume élémentaire  $dV$  est donné par l'expression  $dV = R^2 dR d\mu d\varphi$ , par conséquent, la relation de conservation du volume s'écrit :

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d\mu \int_0^{R(\mu)} R^2 dR = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{+1} R^3(\mu) d\mu \quad (I - 7)$$

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{+1} \kappa^3 R_0^3 \left[ 1 + \sum_{l \geq 1} \alpha_l P_l(\mu) \right]^3 d\mu \quad (I - 8)$$

On en déduit :

$$\kappa^3 = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^{+1} \left[ 1 + \sum_{l \geq 1} \alpha_l P_l(\mu) \right]^3 d\mu \right]^{-1} \quad (I - 9)$$

En supposant une faible déformation symétrique du noyau de forme initialement sphérique, sa surface est alors décrite par :

$$\begin{aligned} R(\mu) &\approx \kappa R_0 [1 + \alpha_2 P_2(\mu)] = \kappa R_0 \left[ 1 + \alpha_2 \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1) \right] = \\ R(\mu) &\approx \kappa R_0 \left[ 1 - \frac{\alpha_2}{2} + \frac{3}{2} \alpha_2 \mu^2 \right] \end{aligned} \quad (I - 10)$$

### Remarque

On montre alors que la constante de normalisation est :

$$\kappa = \left[ 1 - \frac{1}{5} \alpha_2^2 \right] \quad (I - 11)$$

L'énergie de surface  $E_s(\epsilon)$  est donnée par l'intégrale de surface :

$$E_s(\epsilon) = \int_S \vartheta dS \approx \vartheta \int_S dS \quad (I - 12)$$

où :

- $\vartheta$  est la tension de surface, c'est-à-dire l'énergie de surface par unité de surface de la goutte liquide modélisant le noyau atomique ; on la suppose ici constante et sa valeur peut être déduite de la formule de masse de Bethe-Weizsäcker ;
- $dS$  est l'élément de surface relatif à la surface  $S$  du noyau atomique considéré.

L'énergie électrostatique coulombienne  $E_c(\epsilon)$  est donnée par l'intégrale de volume :

$$E_c(\epsilon) = \frac{1}{2} \iint_V q^2 \frac{dv_1 dv_2}{r_{12}} \approx \frac{1}{2} q^2 \iint_V \frac{dv_1 dv_2}{r_{12}} \quad (\text{I} - 13)$$

où :

- $q$  est la densité de charge électrique du noyau atomique ;
- $dv_1$  et  $dv_2$  sont deux éléments de volume du noyau atomique considéré centrés autour des points de coordonnées respectives  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  et  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  ;
- $r_{12}$  est la distance entre les centres des éléments de volumes  $dv_1$  et  $dv_2$ .

La grandeur

$$V(r_1, \theta_1, \varphi_1) = \int_V \frac{dv_2}{r_{12}} \quad (\text{I} - 14)$$

représente le potentiel électrostatique dû à une distribution de charge en un point  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  du volume nucléaire. On peut alors réécrire  $E_c(\epsilon)$  comme :

$$E_c(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_V q^2 V(r_1, \theta_1, \varphi_1) dv_1 \approx \frac{1}{2} q^2 \int_V V(r_1, \theta_1, \varphi_1) dv_1 \quad (\text{I} - 15)$$

En se reportant à la **figure 31**, on rappelle que le potentiel électrique scalaire,  $\varphi$ , engendré par une charge électrique  $e$  en un point  $M_1$  de coordonnées  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  est obtenu par :

$$\varphi = \frac{e}{r_{12}} \quad (\text{I} - 16)$$

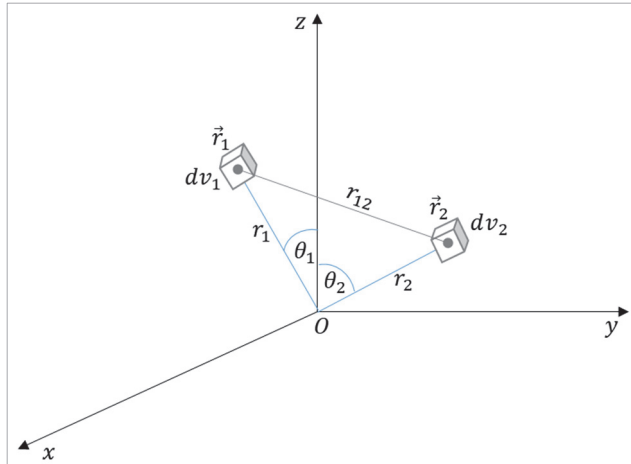


Figure 31. Système de coordonnées utilisé pour le calcul de l'interaction électrostatique.

En développant  $1/r_{12}$  dans le système de coordonnées sphérique adopté, on a :

$$\frac{1}{r_{12}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_2^l}{r_1^{l+1}} P_l(\cos \theta_{12}), \quad r_2 < r_1 ; \quad \frac{1}{r_{12}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}} P_l(\cos \theta_{12}), \quad r_2 > r_1 \quad (\text{I} - 17)$$

Les ordres  $l$  sont appelés ici ordres multipolaires : ainsi  $l = 2$  correspond au moment quadrupolaire.

Les relations donnant  $E_s(\epsilon)$  et  $E_c(\epsilon)$  font intervenir l'expression du rayon  $R(\theta, \varphi)$  de la surface nucléaire.

Dans le cas général,  $E_s(\epsilon)$  et  $E_c(\epsilon)$  s'expriment en fonction des paramètres de déformation  $\alpha_{l,m}$  :

$$E_s(\epsilon) = E_{s0} \left[ 1 + \frac{1}{8\pi} \sum_l (l-1)(l+2) \sum_m |\alpha_{l,m}|^2 \right] \quad (\text{I} - 18)$$

$$E_c(\epsilon) = E_{c0} \left[ 1 - \frac{5}{4\pi} \sum_l \frac{l-1}{2l+1} \sum_m |\alpha_{l,m}|^2 \right] \quad (\text{I} - 19)$$

On voit sur l'une et l'autre expressions qu'une déformation croissante induit une augmentation de l'énergie de surface et une diminution de l'énergie de Coulomb.

Conventionnellement, on caractérise le bilan énergétique par un paramètre noté  $\xi$  défini par le rapport :

$$\xi = \frac{E_c(\epsilon) + E_s(\epsilon) - (E_{c0} + E_{s0})}{E_{s0}} \quad (\text{I} - 20)$$

En remplaçant les énergies de surface et coulombienne par leurs expressions, on obtient<sup>162</sup> :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \sum_l \left[ \frac{(l-1)(l+2)}{4} - x \frac{5(l-1)}{2l+1} \right] \sum_m |\alpha_{l,m}|^2 \quad (\text{I} - 21)$$

avec :

$$x = \frac{E_{c0}}{2E_{s0}} \quad (\text{I} - 22)$$

<sup>162</sup> A. Michaudon, « La fission », *Journal de Physique Colloques*, op. cit., p. C1-53.

Le paramètre adimensionnel  $x$  a été appelé **paramètre de fissilité** (*fissionability parameter*) par N. Bohr et J. Wheeler.

Des expressions plus simples du paramètre  $\xi$  peuvent être établies en supposant de petites déformations symétriques en partant cette fois-ci d'une surface nucléaire décrite par  $R(\mu)$  (équation (I - 3)). On montre alors que<sup>163</sup> :

$$E_s(\epsilon) = 4\pi R_0^2 \vartheta \left[ 1 + \sum_l (\kappa \alpha_l)^2 \frac{(l-1)(l+2)}{2(2l+1)} \right] \quad (\text{I} - 23)$$

$$E_c(\epsilon) = \frac{3}{5R_0} (Ze)^2 \left[ 1 - 5 \sum_{l=1} (\kappa \alpha_l)^2 \frac{(l-1)}{(2l+1)^2} \right] \quad (\text{I} - 24)$$

Les premiers termes de ces deux développements, notés  $E_{s0}$  et  $E_{c0}$ , correspondent respectivement à l'énergie de surface et à l'énergie coulombienne en l'absence de déformation ( $\epsilon = 0$ ) :

$$E_{s0} = 4\pi R_0^2 \vartheta \quad (\text{I} - 25)$$

$$E_{c0} = \frac{3}{5R_0} (Ze)^2 \quad (\text{I} - 26)$$

### Remarque

En remplaçant  $R_0$  par son expression en fonction du nombre de masse  $A$ ,  $R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  où  $r_0$  est rayon nucléaire unitaire (voir chapitre 3 § 2 relation (2.2)), on obtient :

$$E_{s0} = 4\pi R_0^2 \vartheta = 4\pi r_0^2 A^{\frac{2}{3}} \vartheta \quad (\text{I} - 27)$$

$$E_{c0} = \frac{3}{5r_0 A^{\frac{1}{3}}} (Ze)^2 \quad (\text{I} - 28)$$

Par identification avec les termes d'énergie de surface et d'énergie coulombienne qui interviennent dans l'expression de l'énergie de liaison relative au modèle de la goutte liquide (voir chapitre 1 § 1 relations (1.5) et (1.6)), on obtient les égalités suivantes :

$$a_s = 4\pi r_0^2 \vartheta \quad (\text{I} - 29)$$

$$a_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \quad (\text{I} - 30)$$

Dans le cas de petites déformations symétriques associées au moment quadrupolaire uniquement, on a de façon similaire :

<sup>163</sup> M. S. Plesset, « On the Classical Model of Nuclear Fission », *op. cit.*, p. 4 (Éq. 6) et p. 7 (Éq. 16).

$$\Delta E(\epsilon) \approx \frac{1}{5} (\kappa \alpha_2)^2 [2E_{s0} - E_{c0}] = \frac{2}{5} (\kappa \alpha_2)^2 E_{s0} (1 - x) \quad (\text{I} - 31)$$

et

$$\xi = \frac{\Delta E(\epsilon)}{E_{s0}} = \frac{2}{5} (\kappa \alpha_2)^2 (1 - x) \quad (\text{I} - 32)$$

### Remarques

- Les termes d'ordre  $l = 1$  fournissent une contribution nulle aux énergies  $E_s(\epsilon)$  et  $E_c(\epsilon)$  et par conséquent n'induisent pas de déformation du noyau.
- En reprenant l'expression générale de  $\xi$  pour  $l = 2$ , on obtient :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} (1 - x) \sum_m |a_{2,m}|^2 \quad (\text{I} - 33)$$

La stabilité du noyau atomique pour de petites déformations est soumise à la condition :

$$\Delta E(\epsilon) = E_s(\epsilon) + E_c(\epsilon) - (E_{s0} + E_{c0}) > 0 \quad (\text{I} - 34)$$

qui traduit le fait que l'énergie potentielle  $\Delta(\epsilon)$  doit rester positive, soit :

$$\Delta E(\epsilon) = \sum_{l=2}^{\infty} (\kappa \alpha_l)^2 \frac{(l-1)}{(2l+1)} \left[ \frac{l+2}{2} 4\pi R_0^2 \vartheta - \frac{5}{(2l+1)} \frac{3}{5R_0} (Ze)^2 \right] > 0 \quad (\text{I} - 35)$$

ou :

$$\Delta E(\epsilon) = \sum_{l=2}^{\infty} (\kappa \alpha_l)^2 \frac{(l-1)}{(2l+1)} \left[ \frac{l+2}{2} E_{s0} - \frac{5}{(2l+1)} E_{c0} \right] > 0 \quad (\text{I} - 36)$$

En ne considérant que de petites déformations symétriques associées au **moment quadrupolaire électrique**, on a ainsi :

$$\Delta E_s(\epsilon_{seuil}) \approx \frac{2}{5} (\kappa \alpha_{2,seuil})^2 E_{s0} , \quad \Delta E_c(\epsilon_{seuil}) \approx \frac{1}{5} (\kappa \alpha_{2,seuil})^2 E_{c0} \quad (\text{I} - 37)$$

La limite de stabilité obtenue pour  $l = 2$  qui correspond à la prise en compte du moment quadrupolaire seul est alors fournie par la condition :

$$\Delta E(\epsilon) > 0 \Rightarrow 8\pi R_0^2 \vartheta - \frac{3}{5R_0} (Ze)^2 > 0 \quad (\text{I} - 38)$$

Soit, en se reportant aux relations (I - 25) et (I - 26) :

$$\Delta E(\epsilon) > 0 \Rightarrow 2E_{s0} - E_{c0} > 0 \equiv 2E_{s0} > E_{c0} \quad (\text{I} - 39)$$

## Annexe II : fragments de fission

Dans le texte principal, on s'est préférentiellement focalisé sur les produits de fission. Les physiciens nucléaires s'intéressent également aux **fragments de fission** dont la connaissance conditionne celle des produits de fission et des émissions promptes de neutrons et de gamma. Cette annexe, qui reprend un exposé de D.G. Madland<sup>164</sup>, complète le paragraphe §5 consacré à la caractérisation de l'énergie libérée par fission.

L'énergie libérée par une fission binaire induite par un neutron d'énergie cinétique  $E_i$ , notée  $E_{ff}$ , s'exprimant à partir des masses dans l'état fondamental respectivement du noyau composé,  $M_C \equiv M(A, Z)$ , et des fragments léger,  $M_L(A_L, Z_L)$ , et lourd,  $M_H(A_H, Z_H)$ , formés à l'issue de la fission, s'écrit :

$$E_{ff} = M(A, Z)c^2 - M_L(A_L, Z_L)c^2 - M_H(A_H, Z_H)c^2 \quad (\text{II} - 1)$$

On sait que la fission aboutit non pas à un couple unique de fragments, mais à une distribution de couples de nucléides. En notant  $w_j$  la production d'un de ces couples repéré par l'indice  $j$  ramenée à une fission (analogue du rendement des produits de fission), on détermine la moyenne de l'énergie libérée par une fission binaire par l'expression :

$$\bar{E}_{ff} = M(A, Z)c^2 - \frac{\sum_j w_j (M_{L,j}(A_L, Z_L)c^2 + M_{H,j}(A_H, Z_H)c^2)}{\sum_j w_j} \quad (\text{II} - 2)$$

Il est possible d'exprimer la grandeur  $E_{ff}$  en fonction des énergies cinétiques des fragments de fission et de leurs énergies d'excitation respectives. Dans la suite, on marque d'un astérisque les masses des nucléides considérés dans leur état excité.

La conservation de l'énergie totale dans le référentiel du laboratoire en supposant le noyau cible  $(A - 1, Z)$  de masse  $M(A - 1, Z)$  immobile s'écrit :

$$M_n c^2 + M(A - 1, Z)c^2 + E_i = M^*(A, Z)c^2 + E_{K,C} \quad (\text{II} - 3)$$

où :

- $M_n$  : masse du neutron au repos ;
- $E_i$  : énergie cinétique du neutron incident (comme précédemment) ;
- $E_{K,C}$  : énergie cinétique du noyau composé ;
- $M^*(A, Z)$  : masse du noyau composé dans l'état excité.

La conservation de l'énergie totale dans le passage du noyau composé aux fragments de fission s'écrit :

$$M^*(A, Z)c^2 + E_{K,C} = M_L^*(A_L, Z_L)c^2 + E_{K,L} + M_H^*(A_H, Z_H)c^2 + E_{K,H} \quad (\text{II} - 4)$$

<sup>164</sup> D. G. Madland, « Total prompt energy release in the neutron-induced fission of  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ , and  $^{239}\text{Pu}$  », *Nuclear Physics A* 772, 2006, pp. 113-137, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2006.03.013>.

Par conséquent :

$$M_n c^2 + M(A-1, Z) c^2 + E_i = M_L^*(A_L, Z_L) c^2 + E_{K,L} + M_H^*(A_H, Z_H) c^2 + E_{K,H} \quad (\text{II} - 5)$$

En décomposant les masses des nucléides excités en masses des nucléides à l'état fondamental,  $M_L(A_L, Z_L)$  et  $M_H(A_H, Z_H)$ , et énergies d'excitation  $E_L^*$  et  $E_H^*$ , on obtient :

$$M_n c^2 + M(A-1, Z) c^2 + E_i = M_L(A_L, Z_L) c^2 + E_L^* + E_{K,L} + M_H(A_H, Z_H) c^2 + E_H^* + E_{K,H} \quad (\text{II} - 6)$$

Par ailleurs, on dispose de l'expression de la conservation d'énergie relative à la capture d'un neutron d'énergie cinétique nulle par un nucléide  $M(A, Z-1)$  (voir chapitre 3) :

$$M_n c^2 + M(A-1, Z) c^2 = M(A, Z) c^2 + B_n(A, Z) \quad (\text{II} - 7)$$

où  $B_n(A, Z)$  est l'énergie de liaison du neutron dans le noyau composé  $(A, Z)$  formé.

En reportant dans la relation précédente, on obtient immédiatement :

$$M(A, Z) c^2 + B_n(A, Z) + E_i = M_L(A_L, Z_L) c^2 + E_L^* + E_{K,L} + M_H(A_H, Z_H) c^2 + E_H^* + E_{K,H} \quad (\text{II} - 8)$$

d'où l'on déduit  $E_{ff}$  :

$$E_{ff} \equiv M(A, Z) c^2 - M_L(A_L, Z_L) c^2 - M_H(A_H, Z_H) c^2 = E_{K,L} + E_{K,H} + E_L^* + E_H^* - [E_i + B_n(A, Z)] \quad (\text{II} - 9)$$

$$E_{ff} \equiv E_{K,tot} + E_{tot}^* - [E_i + B_n(A, Z)] \quad (\text{II} - 10)$$

où l'on a posé :

$$E_{K,tot}^{FF} = E_{K,L} + E_{K,H} \quad (\text{II} - 11)$$

$$E_{tot}^* = E_L^* + E_H^* \quad (\text{II} - 12)$$

$E_{K,tot}^{FF}$  représente l'énergie cinétique totale (TKE) emportée par les fragments de fission.

$E_{tot}^{FF*}$  représente l'énergie d'excitation totale (TXE) des fragments de fission formés.

On décompose cette énergie d'excitation en ses deux composantes, la première correspondant à celle de l'émission des neutrons prompts, notée  $E_{n,p}^*$  et celle émise sous forme de photons gamma, notée  $E_\gamma^*$  :

$$E_{tot}^{FF*} = E_{n,p}^* + E_\gamma^* \quad (\text{II} - 13)$$

Cette même déclinaison peut être effectuée sur les énergies d'excitation respectives du fragment de fission léger et du fragment de fission lourd :

$$E_L^* = E_{n,p}^{*FL} + E_Y^{*FL}, \quad E_H^* = E_{n,p}^{*FH} + E_Y^{*FH} \quad (\text{II} - 14)$$

$$E_{n,p}^{FF*} = E_{n,p}^{*FL} + E_{n,p}^{*FH}, \quad E_Y^{FF*} = E_Y^{*FL} + E_Y^{*FH} \quad (\text{II} - 15)$$

Les expressions moyennes correspondantes de (II - 2), (II - 11) et (II - 12) sont :

$$\bar{E}_{ff} = M(A, Z) - \frac{\sum_j w_j [M_L(A_L, Z_L) + M_H(A_H, Z_H)]_j}{\sum_j w_j} \quad (\text{II} - 16)$$

$$\bar{E}_{K,tot}^{FF} = \frac{\sum_j w_j [E_{K,L} + E_{K,H}]_j}{\sum_j w_j} \quad (\text{II} - 17)$$

$$\bar{E}_{tot}^{FF*} = \frac{\sum_j w_j [E_L^* + E_H^*]_j}{\sum_j w_j} \quad (\text{II} - 18)$$

Les grandeurs moyennes  $\bar{E}_{n,p}^{FF}$  et  $\bar{E}_Y^{FF}$  relatives à (II-15) se définissent de façon similaire.

À partir de (II - 10) l'énergie moyenne libérée par fission s'écrit :

$$\bar{E}_{ff} = \bar{E}_{K,tot}^{FF} + \bar{E}_{tot}^{FF*} - [E_i + B_n(A, Z)] \quad (\text{II} - 19)$$

On cherche à relier à présent fragments de fission et produits de fission *via* leurs énergies cinétiques respectives.

La grandeur  $E_{ff}$  s'exprime en fonction des énergies cinétiques des fragments de fission et de leurs énergies d'excitation. On observe que la moyenne de l'énergie cinétique des fragments de fission,  $\bar{E}_{K,tot}^{FF}$ , peut s'écrire comme la somme :

- de la moyenne de l'énergie cinétique des fragments de fission,  $\bar{E}_{K,tot}^{FP}$ ,
- et de la moyenne de l'énergie associée à l'émission des  $\bar{\nu}_p = \bar{\nu}_p(E_i)$  neutrons prompts à savoir  $\bar{\nu}_p[\bar{S}_n + \bar{\epsilon}]$  où  $\bar{S}_n$  est énergie de séparation moyenne associée aux neutrons prompts de fission émis par les fragments de fission et  $\bar{\epsilon}$  l'énergie cinétique moyenne de ces neutrons prompts dans le référentiel du centre de masse.

soit :

$$\bar{E}_{K,tot}^{FF} = \bar{E}_{K,tot}^{FP} + \bar{\nu}_p[\bar{S}_n + \bar{\epsilon}] \quad (\text{II} - 20)$$

La relation (II - 19) de l'énergie moyenne libérée par une fission devient donc :



$$\bar{E}_{ff} = \bar{E}_{K,tot}^{FP} + \bar{\nu}_p(E_i)[\bar{S}_n + \bar{\varepsilon}] + \bar{E}_{tot}^{FF*} - [E_i + B_n(A, Z)] \quad (\text{II} - 21)$$

Il est aussi possible de ré-exprimer l'énergie cinétique totale des produits de fission, donc post-émission des neutrons prompts,  $\bar{E}_{K,tot}^{FP}$ , en fonction de celle des fragments de fission  $\bar{E}_{K,tot}^{FF}$  :

$$\bar{E}_{K,tot}^{FP} = \bar{E}_{K,tot}^{FF} \left[ 1 - \frac{\bar{\nu}_p}{2A} \left( \frac{\bar{A}_H}{\bar{A}_L} + \frac{\bar{A}_L}{\bar{A}_H} \right) \right] \quad (\text{II} - 22)$$

où  $\bar{\nu}_p$  le nombre moyen de neutrons prompts émis par les fragments de fission et sous les deux hypothèses suivantes :

$A = \frac{M(A,Z)}{M_n}$  où  $M_n$  est la masse du neutron ;

$$\bar{\nu}_p(H) = \bar{\nu}_p(L) = \frac{\bar{\nu}_p}{2} \equiv \frac{\bar{\nu}_p(E_i)}{2} \quad (\text{II} - 23)$$

$\bar{\nu}_p(H)$  et  $\bar{\nu}_p(L)$  étant le nombre de neutrons prompts émis respectivement par les fragments de fission lourd et léger.

Si à présent on raisonne en termes d'énergie déposée (localement) dans le milieu,  $\bar{Q}_{ff}$ , celle-ci est définie par :

$$\bar{Q}_{ff} = \bar{E}_{ff} + E_i + B_n(A, Z) - \bar{\nu}_p(E_i)\bar{S}_n \quad (\text{II} - 24)$$

où :

- $E_i$  : énergie cinétique du neutron incident (comme précédemment) ;
- $B_n(A, Z)$  : énergie de liaison du noyau composé  $(A, Z)$  formé ;
- $\bar{S}_n$  : énergie de séparation moyenne associée aux neutrons prompts de fission émis par les fragments de fission.

Le **tableau 19** fournit les lissages analytiques des différentes composantes de l'énergie libérée par fission, relatives aux fragments de fission. Sur la composante énergie cinétique, une comparaison peut être établie avec les produits de fission.<sup>165</sup>

La différence avec les produits de fission concerne la comptabilisation de l'énergie  $\bar{Q}_{dec}$  libérée par les produits de fission par décroissance bêta avec ses trois composantes particules  $\beta$ , neutrinos/antineutrinos et émission  $\gamma$ , ce qui représente de l'ordre d'une vingtaine de MeV (23.8 MeV pour  $n + {}^{235}_{92}\text{U}$  26.3 MeV pour  $n + {}^{238}_{92}\text{U}$  et 21.2 MeV pour  $n + {}^{238}_{92}\text{Pu}$ ), à ajouter à  $\bar{Q}_{ff}$  pour retrouver l'ordre de grandeur des valeurs de  $\bar{Q}_{tot} \approx \bar{Q}'_{tot}$  du tableau 3 du paragraphe 5, comme le montre la dernière ligne du tableau 19.

<sup>165</sup> D. G. Madland, « Total prompt energy release in the neutron-induced fission of  ${}^{235}\text{U}$ ,  ${}^{238}\text{U}$ , and  ${}^{239}\text{Pu}$  », *op. cit.*, pp. 113-137.

Les **figures 32 et 33** montrent la dépendance de l'énergie cinétique totale des fragments et des produits de fission en fonction de l'énergie  $E_i$  du neutron incident provoquant la fission.<sup>166</sup>

Tableau 19. Lissages analytiques des composantes de l'énergie libérée par la fission

Énergies moyennes en MeV	n + <sup>235</sup> U	n + <sup>238</sup> U	n + <sup>238</sup> Pu
Énergie cinétique moyenne des fragments de fission : $\bar{E}_{K,tot}^{FF}$	$170.93 - 0.1544 E_i$	$171.7 - 0.2396 E_i + 0.003434 E_i^2$	$177.8 - 0.3489 E_i$
Énergie cinétique moyenne des produits de fission : $\bar{E}_{K,tot}^{FP}$	$169.13 - 0.266 E_i$	$169.8 - 0.323 E_i + 0.004206 E_i^2$	$175.55 - 0.4566 E_i$
Énergie d'excitation moyenne dissipée par la voie émission de neutrons prompts : $\bar{E}_{n,p}^{*FF} = \bar{\nu}_p(E_i)\bar{S}_n + \bar{\epsilon}$	$14.59 + 0.9772 E_i$	$14.11 + 0.9839 E_i$	$19.23 + 1.0707 E_i$
Énergie d'excitation moyenne dissipée par la voie émission de gamma prompts : $\bar{E}_\gamma^{*FF}$	$6.6 + 0.0777 E_i$	$6.68 + 0.139 E_i$	$6.741 + 0.1165 E_i$
Énergie moyenne portée par les neutrons prompts	$4.83 + 0.3004 E_i$	$4.558 + 0.307 E_i$	$6.128 + 0.34 E_i$
$\bar{E}_{ff}$	$S_n = 6.546 \text{ MeV}$ $185.6 + 0.0995 E_i$	$S_n = 4.806 \text{ MeV}$ $187.7 + 0.1318 E_i$	$S_n = 6.534 \text{ MeV}$ $197.2 + 0.1617 E_i - 0.001 E_i^2$
$\bar{Q}_{ff}$	$180.57 + 0.1121 E_i$	$181.04 + 0.1079 E_i$	$188.42 + 0.0027 E_i - 0.017 E_i^2$
$\bar{Q}_{ff} + \bar{Q}_{dec}$	$E_i = 0. \text{ MeV}$ $180.57 + 23.8 = 204.5$	$E_i = 3. \text{ MeV}$ $181.37 + 26.3 = 207.67$	$E_i = 0. \text{ MeV}$ $188.42 + 21.2 = 209.62$

<sup>166</sup>D'après : D. G. Madland, « Total prompt energy release in the neutron-induced fission of <sup>235</sup>U, <sup>238</sup>U, and <sup>239</sup>Pu », *op. cit.*, pp. 113-137, p. 119, 120-122.

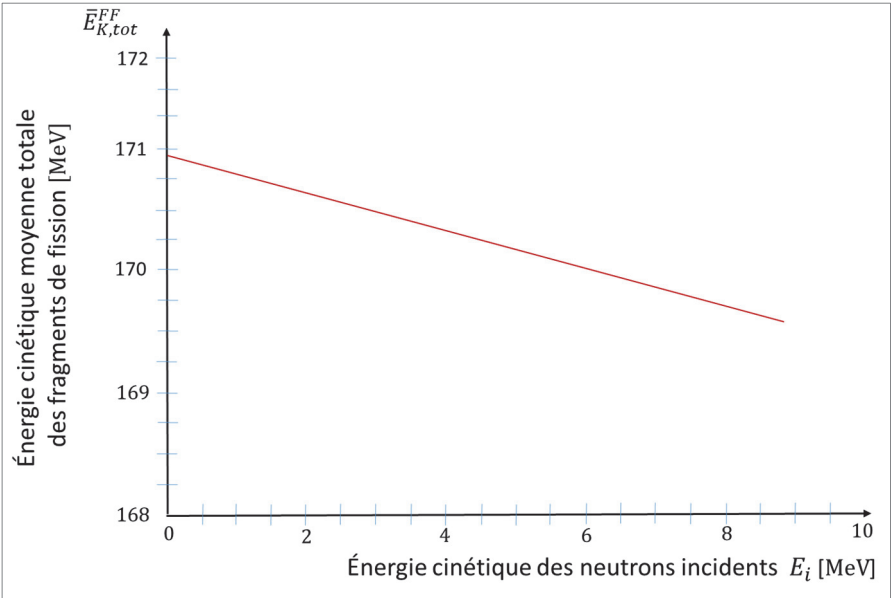


Figure 32. Variation indicative de l'énergie cinétique moyenne totale des fragments de fission en fonction de l'énergie du neutron incident dans le cas de la fission induite par un neutron sur un noyau d'uranium 235 : voir tableau 19, ligne 1, colonne 2.

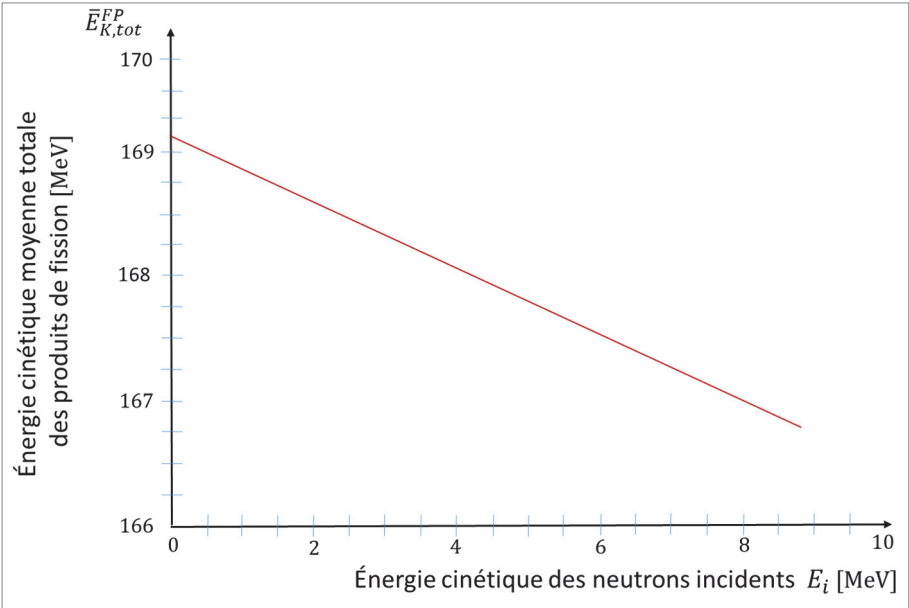


Figure 33. Variation indicative de l'énergie cinétique moyenne totale des produits de fission en fonction de l'énergie du neutron incident dans le cas de la fission induite par un neutron sur un noyau d'uranium 235 : voir tableau 19, ligne 2, colonne 2.

### Annexe III : calcul des probabilités d'émission des neutrons retardés

La probabilité d'émission des neutrons retardés se détermine à partir de<sup>167</sup> :

- la **probabilité de transition de la désintégration bêta** faisant passer du nucléide initial  $(A, Z)$  au nucléide  $(A, Z + 1)^*$  produit dans un état final excité : cette probabilité  $W(E)dE$  associée aux niveaux d'énergie compris dans un intervalle  $dE$  autour de l'énergie  $E$  est donnée par la **théorie de Fermi de la désintégration bêta** (voir chapitre 5, **règle d'or de Fermi**) :

$$W(E)dE = \text{Constante} \times |M_{if}|^2 f(Z + 1, Q_\beta - E) \rho(E, J^\pi) dE \quad (\text{III} - 1)$$

où :

- $M_{if}$  : élément de la matrice de transition de l'état initial vers l'état final ;
- $f(Z + 1, Q_\beta - E)$  : fonction de Fermi où  $Q_\beta$  est l'énergie de la transition  $\beta$  ;
- $\rho(E, J^\pi)$  : densité des niveaux d'énergie de spin  $J$  et de parité  $\pi$  à l'énergie  $E$  du nucléide émetteur bêta ; elle est le produit de la densité de niveau  $\rho(E)$  et d'une fonction  $\Omega(J)$  dépendant du spin  $J$  :  $\rho(E, J^\pi) = \rho(E)\Omega(J)$ .

Le produit  $S_\beta(E) = |M_{if}|^2 \rho(E) / 6220 \text{ s}^{-1} \text{MeV}^{-1}$  est la **fonction de force bêta** qui s'interprète comme un taux moyen de transition par unité d'énergie à l'énergie  $E$  ;

- la **probabilité de la voie de sortie neutron** s'exprimant comme le rapport de la largeur  $\Gamma_n^J(E_n)$  à la largeur totale  $\Gamma_n^J(E_n) + \Gamma_\gamma$  du niveau excité concerné pour une énergie d'émission  $E_n$  du neutron retardé ( $\Gamma_\gamma$  varie peu avec  $E_n$ ) :

$$\frac{\Gamma_n^J(E_n)}{\Gamma_n^J(E_n) + \Gamma_\gamma} \quad (\text{III} - 2)$$

Ce rapport traduit la compétition entre la désexcitation par émission d'un neutron ou par émission de gamma.

La probabilité d'émission des neutrons retardés s'obtient par sommation sur toutes les transitions possibles et par normalisation du nombre de neutrons émis par le nombre total d'états excités :

$$P_n = \frac{\int_{S_n}^{Q_\beta} \sum_J \sum_j |M_{if}|^2 f(Z + 1, Q_\beta - E) \rho(E, J^\pi) \frac{\Gamma_n^J(E_n)}{\Gamma_n^J(E_n) + \Gamma_\gamma} dE}{\int_{S_n}^{Q_\beta} \sum_J \sum_j |M_{if}|^2 f(Z + 1, Q_\beta - E) \rho(E, J^\pi) dE} \quad (\text{III} - 3)$$

<sup>167</sup> A. C. Pappas, T. Sverdrup, « Gross Properties of Delayed Neutron Emission and Beta-Strength Functions », *Nucl. Phys. A*, 188, 1, 1972, pp. 48-64, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(72\)90179-0](https://doi.org/10.1016/0375-9474(72)90179-0).

En adoptant pour  $f(Z + 1, Q_\beta - E)$  une forme du type  $[Q_\beta - E]^m$  où  $m$  est un réel, on obtient la **formule de Kratz-Herrmann**<sup>168</sup>, utilisée pour mener des analyses systématiques sur les **probabilités d'émission des neutrons retardés** :

$$P_n = a \left[ \frac{Q_\beta - S_n}{Q_\beta - C} \right]^b \quad (\text{III} - 4)$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres ajustés sur des mesures,  $S_n$  l'énergie de liaison du neutron du nucléide émetteur ( $Z + 1, N - 1$ ) et  $C$  un paramètre lié à la parité du précurseur :

- $C = 0$  si le noyau est pair-pair ;
- $C = 13\sqrt{A}$  s'il est impair ;
- $C = 26\sqrt{A}$  s'il est impair-impair,  $A$  étant le nombre de masse.

Des auteurs<sup>169</sup> ont proposé plus récemment la formule semi-empirique suivante :

$$\frac{P_n}{T_{1/2}} = c Q_{\beta-n}^d \quad (\text{III} - 5)$$

où  $c$  et  $d$  sont des paramètres ajustés sur l'expérience et  $T_{1/2}$  la période radioactive ou demi-vie du radionucléide considéré.

<sup>168</sup> K.-L. Kratz, G. Herrmann, « Delayed-neutron emission from short-lived Br and I isotopes », *Nuclear Physics A*, 229, 1, 1974, pp. 179-188, [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(74\)90684-8](https://doi.org/10.1016/0375-9474(74)90684-8).

<sup>169</sup> M. Birch, B. Singh, D. Abriola, I. Dillmann, T.D. Johnson, E. A. McCutchan, A. A. Sonzogni, « First Compilation and Evaluation of Beta-Delayed Neutron Emission Probabilities and Associated Half-Lives for  $A \leq 72$  Nuclei », *Nuclear Data Sheets*, Vol. 120, June 2014, pp. 66-69, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2014.07.008>.

## Annexe IV : énergie émise par une fission élémentaire

On considère une fission induite par un neutron thermique sur un noyau fissile. Il est possible de calculer l'énergie dégagée par unité de temps par les produits de fission à un instant donné compté après la fission en distinguant la composante constituée par les rayonnements bêta et celle constituée par les rayonnements gamma.

La détermination de ces énergies émises tient compte d'une part des **rendements de fission** et d'autre part des **transitions isobariques** initiées par tous les produits de fission initiaux. Il s'agit donc de valeurs moyennes effectuée sur l'ensemble des couples de produits de fission possiblement issus de la fission.

En physique des réacteurs, le temps compté après la fission est désigné par le terme de **temps de refroidissement** et l'énergie dégagée par unité de temps par celui de **puissance résiduelle**. Il est commode de représenter non pas directement l'énergie émise par unité de temps mais le produit de cette énergie émise par unité de temps au temps de refroidissement  $t$  par ce même temps de refroidissement  $t$ . En reportant les valeurs ainsi obtenues sur un graphique on obtient des **courbes de fission élémentaire** car elles se rapportent à une seule fission.

Les **figures 34 et 35** représentent les **courbes de fission élémentaires** relatives à la fission induite par un neutron thermique respectivement sur un noyau d'uranium 235 et sur un noyau de plutonium 239.

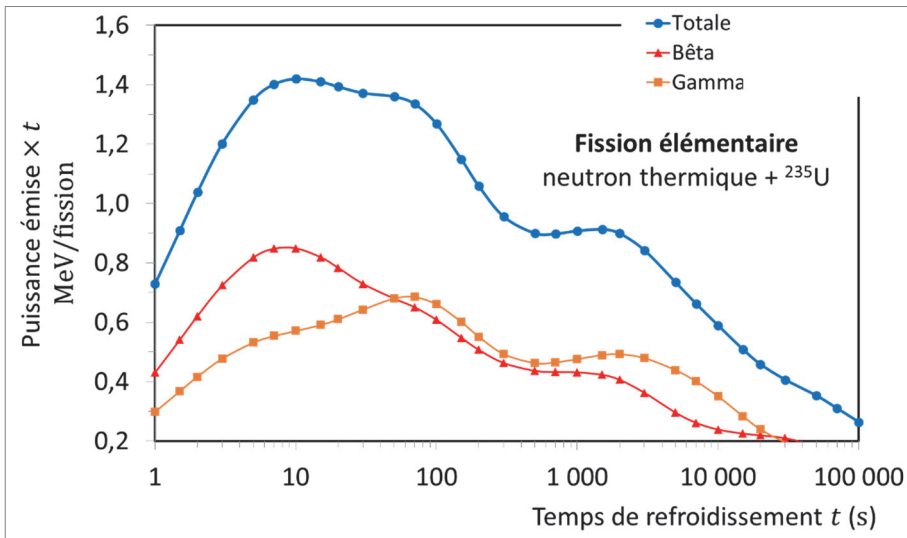


Figure 34 : Courbe de fission élémentaire associée à une fission induite par un neutron sur un noyau d'uranium 235.<sup>170</sup>

<sup>170</sup> Source : CEA, T.-D. Huynh, utilisation des données de l'évaluation JEFF-3.1.1 avec le code d'évolution DARWIN/PEPIN2.

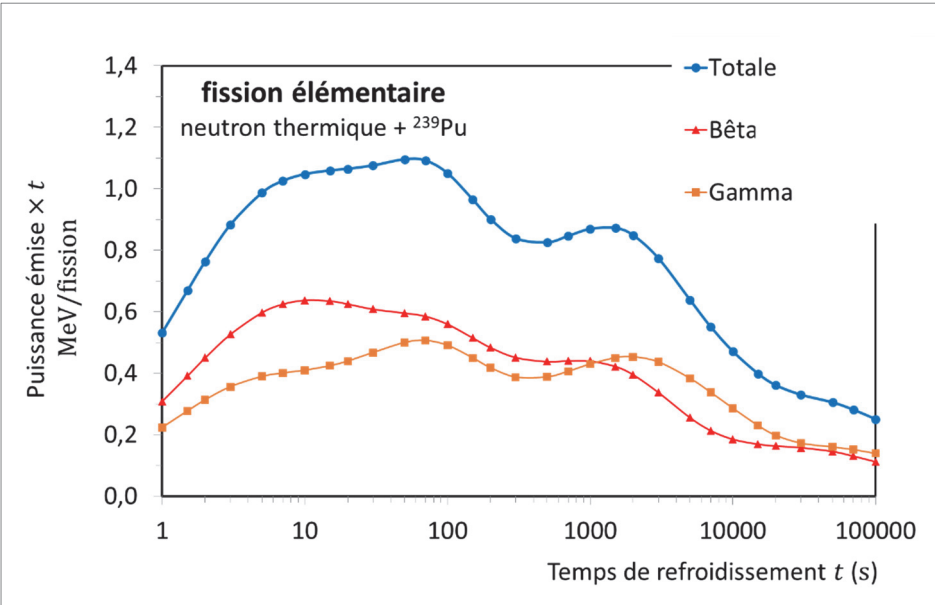


Figure 35 : Courbe de fission élémentaire associée à une fission induite par un neutron sur un noyau de plutonium 239.<sup>171</sup>

On constate sur ces courbes qu’au début des temps de refroidissement l’énergie portée par la composante bêta domine la situation s’inversant à partir d’un temps de refroidissement de 50 secondes dans le cas de la fission induite sur l’uranium 235 et 1000 secondes dans ce lui de la fission induite sur le plutonium 239.

Les **tableaux 20a, 20b, 21a et 21b** fournissent les valeurs explicites de ces courbes de fission élémentaires respectivement en MeV par fission et en MeV par seconde et par fission jusqu’à environ 158 jours de temps de refroidissement. Pour obtenir les valeurs correspondantes respectivement en joules et watts il faut multiplier les valeurs tabulées par le facteur  $1.602 \cdot 10^{-13}$ .

<sup>171</sup> Source : CEA, T.-D. Huynh, utilisation des données de l’évaluation JEFF-3.1.1 avec le code d’évolution DARWIN/PEPIN2.

Tableau 20a. Valeurs des courbes de fission élémentaire de l’uranium 235 induite par un neutron thermique : temps de refroidissement de 1 seconde à  $1.10^5$  secondes ( $\sim 1.16$  jours)<sup>172</sup> ; valeurs transcrites en notation scientifique conventionnelle « E ».

Temps de refroidissement <i>t</i> en s	Puissance bêta × <i>t</i> MeV	Puissance bêta MeV/s	Puissance gamma × <i>t</i> MeV	Puissance gamma MeV/s	Puissance totale × <i>t</i> MeV	Puissance totale MeV/s
1.00E+00	4.31E-01	4.31E-01	2.98E-01	2.98E-01	7.29E-01	7.29E-01
1.50E+00	5.41E-01	3.61E-01	3.68E-01	2.45E-01	9.09E-01	6.06E-01
2.00E+00	6.21E-01	3.10E-01	4.17E-01	2.08E-01	1.04E+00	5.19E-01
3.00E+00	7.24E-01	2.41E-01	4.78E-01	1.59E-01	1.20E+00	4.01E-01
5.00E+00	8.18E-01	1.64E-01	5.32E-01	1.06E-01	1.35E+00	2.70E-01
7.00E+00	8.48E-01	1.21E-01	5.54E-01	7.91E-02	1.40E+00	2.00E-01
1.00E+01	8.49E-01	8.49E-02	5.71E-01	5.71E-02	1.42E+00	1.42E-01
1.50E+01	8.19E-01	5.46E-02	5.91E-01	3.94E-02	1.41E+00	9.40E-02
2.00E+01	7.83E-01	3.92E-02	6.10E-01	3.05E-02	1.39E+00	6.97E-02
3.00E+01	7.29E-01	2.43E-02	6.43E-01	2.14E-02	1.37E+00	4.57E-02
5.00E+01	6.80E-01	1.36E-02	6.80E-01	1.36E-02	1.36E+00	2.72E-02
7.00E+01	6.51E-01	9.29E-03	6.85E-01	9.78E-03	1.34E+00	1.91E-02
1.00E+02	6.08E-01	6.08E-03	6.60E-01	6.60E-03	1.27E+00	1.27E-02
1.50E+02	5.48E-01	3.65E-03	6.01E-01	4.01E-03	1.15E+00	7.66E-03
2.00E+02	5.07E-01	2.53E-03	5.51E-01	2.76E-03	1.06E+00	5.29E-03
3.00E+02	4.63E-01	1.54E-03	4.93E-01	1.64E-03	9.56E-01	3.19E-03
5.00E+02	4.37E-01	8.74E-04	4.63E-01	9.26E-04	9.00E-01	1.80E-03
7.00E+02	4.33E-01	6.19E-04	4.65E-01	6.65E-04	8.98E-01	1.28E-03
1.00E+03	4.32E-01	4.32E-04	4.76E-01	4.76E-04	9.08E-01	9.08E-04
1.50E+03	4.23E-01	2.82E-04	4.90E-01	3.27E-04	9.13E-01	6.09E-04
2.00E+03	4.06E-01	2.03E-04	4.93E-01	2.46E-04	8.99E-01	4.49E-04
3.00E+03	3.63E-01	1.21E-04	4.80E-01	1.60E-04	8.42E-01	2.81E-04
5.00E+03	2.96E-01	5.92E-05	4.39E-01	8.77E-05	7.34E-01	1.47E-04
7.00E+03	2.61E-01	3.73E-05	4.01E-01	5.72E-05	6.62E-01	9.46E-05
1.00E+04	2.39E-01	2.39E-05	3.51E-01	3.51E-05	5.90E-01	5.90E-05
1.50E+04	2.26E-01	1.50E-05	2.84E-01	1.89E-05	5.09E-01	3.40E-05
2.00E+04	2.19E-01	1.10E-05	2.39E-01	1.20E-05	4.59E-01	2.29E-05
3.00E+04	2.10E-01	7.00E-06	1.97E-01	6.56E-06	4.07E-01	1.36E-05
5.00E+04	1.84E-01	3.67E-06	1.69E-01	3.39E-06	3.53E-01	7.06E-06
7.00E+04	1.56E-01	2.23E-06	1.55E-01	2.21E-06	3.11E-01	4.44E-06
1.00E+05	1.26E-01	1.26E-06	1.39E-01	1.39E-06	2.65E-01	2.65E-06

<sup>172</sup> Source : CEA, T.-D. Huynh, utilisation des données de l’évaluation JEFF-3.1.1 avec le code d’évolution DARWIN/PEPIN2.



Tableau 20b. Valeurs des courbes de fission élémentaire de l’uranium 235 induite par un neutron thermique : temps de refroidissement de  $1.5 \cdot 10^5$  secondes ( $\sim 1.74$  jours) à  $5 \cdot 10^9$  secondes ( $\sim 158$  ans)<sup>173</sup> ; valeurs transcrites en notation scientifique conventionnelle « E ».

Temps de refroidissement <i>t</i> en s	Puissance bêta $\times t$ MeV	Puissance bêta MeV/s	Puissance gamma $\times t$ MeV	Puissance gamma MeV/s	Puissance totale $\times t$ MeV	Puissance totale MeV/s
1.50E+05	9.70E-02	6.47E-07	1.20E-01	8.03E-07	2.17E-01	1.45E-06
2.00E+05	8.06E-02	4.03E-07	1.09E-01	5.45E-07	1.90E-01	9.48E-07
3.00E+05	6.48E-02	2.16E-07	9.98E-02	3.33E-07	1.65E-01	5.49E-07
5.00E+05	5.79E-02	1.16E-07	9.97E-02	1.99E-07	1.58E-01	3.15E-07
7.00E+05	5.77E-02	8.24E-08	1.02E-01	1.46E-07	1.60E-01	2.28E-07
1.00E+06	5.83E-02	5.83E-08	1.02E-01	1.02E-07	1.60E-01	1.60E-07
1.50E+06	5.90E-02	3.93E-08	9.72E-02	6.48E-08	1.56E-01	1.04E-07
2.00E+06	5.90E-02	2.95E-08	9.22E-02	4.61E-08	1.51E-01	7.56E-08
3.00E+06	5.75E-02	1.92E-08	8.17E-02	2.72E-08	1.39E-01	4.64E-08
5.00E+06	5.25E-02	1.05E-08	6.39E-02	1.28E-08	1.16E-01	2.33E-08
7.00E+06	4.93E-02	7.04E-09	5.55E-02	7.93E-09	1.05E-01	1.50E-08
1.00E+07	4.67E-02	4.67E-09	5.07E-02	5.07E-09	9.74E-02	9.74E-09
1.50E+07	4.28E-02	2.85E-09	4.27E-02	2.85E-09	8.55E-02	5.70E-09
2.00E+07	3.91E-02	1.95E-09	3.23E-02	1.62E-09	7.14E-02	3.57E-09
3.00E+07	3.46E-02	1.15E-09	1.57E-02	5.23E-10	5.03E-02	1.68E-09
5.00E+07	3.03E-02	6.07E-10	4.43E-03	8.86E-11	3.48E-02	6.96E-10
7.00E+07	2.59E-02	3.70E-10	3.01E-03	4.29E-11	2.89E-02	4.13E-10
1.00E+08	1.95E-02	1.95E-10	3.09E-03	3.09E-11	2.26E-02	2.26E-10
1.50E+08	1.37E-02	9.16E-11	3.71E-03	2.48E-11	1.75E-02	1.16E-10
2.00E+08	1.26E-02	6.30E-11	4.50E-03	2.25E-11	1.71E-02	8.55E-11
3.00E+08	1.49E-02	4.96E-11	6.10E-03	2.03E-11	2.10E-02	7.00E-11
5.00E+08	2.07E-02	4.13E-11	8.73E-03	1.75E-11	2.94E-02	5.88E-11
7.00E+08	2.47E-02	3.53E-11	1.06E-02	1.51E-11	3.53E-02	5.04E-11
1.00E+09	2.80E-02	2.80E-11	1.21E-02	1.21E-11	4.01E-02	4.01E-11
1.50E+09	2.87E-02	1.91E-11	1.26E-02	8.39E-12	4.13E-02	2.75E-11
2.00E+09	2.62E-02	1.31E-11	1.16E-02	5.82E-12	3.78E-02	1.89E-11
3.00E+09	1.84E-02	6.14E-12	8.41E-03	2.80E-12	2.68E-02	8.94E-12
5.00E+09	6.78E-03	1.36E-12	3,25E-03	6,49E-13	1.00E-02	2.01E-12

<sup>173</sup> Source : CEA, T.-D. Huynh, utilisation des données de l’évaluation JEFF-3.1.1 avec le code d’évolution DARWIN/PEPIN2.

Tableau 21a. Valeurs des courbes de fission élémentaire plutonium 239 induite par un neutron thermique : temps de refroidissement de 1 seconde à 1. 10<sup>5</sup> secondes ( ~1. 16 jours)<sup>174</sup> ; valeurs transcrites en notation scientifique conventionnelle « E ».

Temps de refroidissement <i>t</i> en s	Puissance bêta × <i>t</i> MeV	Puissance bêta MeV/s	Puissance gamma × <i>t</i> MeV	Puissance gamma MeV/s	Puissance totale × <i>t</i> MeV	Puissance totale MeV/s
1.00E+00	3.09E-01	3.09E-01	2.24E-01	2.24E-01	5.32E-01	5.32E-01
1.50E+00	3.91E-01	2.61E-01	2.77E-01	1.85E-01	6.68E-01	4.45E-01
2.00E+00	4.50E-01	2.25E-01	3.13E-01	1.57E-01	7.64E-01	3.82E-01
3.00E+00	5.26E-01	1.75E-01	3.56E-01	1.19E-01	8.82E-01	2.94E-01
5.00E+00	5.97E-01	1.19E-01	3.89E-01	7.78E-02	9.87E-01	1.97E-01
7.00E+00	6.25E-01	8.93E-02	4.00E-01	5.72E-02	1.03E+00	1.46E-01
1.00E+01	6.38E-01	6.38E-02	4.10E-01	4.10E-02	1.05E+00	1.05E-01
1.50E+01	6.35E-01	4.23E-02	4.24E-01	2.83E-02	1.06E+00	7.06E-02
2.00E+01	6.25E-01	3.13E-02	4.39E-01	2.20E-02	1.06E+00	5.32E-02
3.00E+01	6.08E-01	2.03E-02	4.67E-01	1.56E-02	1.08E+00	3.58E-02
5.00E+01	5.96E-01	1.19E-02	5.00E-01	9.99E-03	1.10E+00	2.19E-02
7.00E+01	5.85E-01	8.36E-03	5.06E-01	7.23E-03	1.09E+00	1.56E-02
1.00E+02	5.60E-01	5.60E-03	4.90E-01	4.90E-03	1.05E+00	1.05E-02
1.50E+02	5.15E-01	3.43E-03	4.49E-01	3.00E-03	9.64E-01	6.43E-03
2.00E+02	4.83E-01	2.42E-03	4.17E-01	2.09E-03	9.01E-01	4.50E-03
3.00E+02	4.51E-01	1.50E-03	3.87E-01	1.29E-03	8.38E-01	2.79E-03
5.00E+02	4.38E-01	8.75E-04	3.88E-01	7.76E-04	8.25E-01	1.65E-03
7.00E+02	4.40E-01	6.29E-04	4.06E-01	5.80E-04	8.46E-01	1.21E-03
1.00E+03	4.39E-01	4.39E-04	4.30E-01	4.30E-04	8.69E-01	8.69E-04
1.50E+03	4.22E-01	2.81E-04	4.50E-01	3.00E-04	8.72E-01	5.81E-04
2.00E+03	3.95E-01	1.97E-04	4.53E-01	2.27E-04	8.48E-01	4.24E-04
3.00E+03	3.38E-01	1.13E-04	4.36E-01	1.45E-04	7.74E-01	2.58E-04
5.00E+03	2.55E-01	5.11E-05	3.83E-01	7.66E-05	6.38E-01	1.28E-04
7.00E+03	2.13E-01	3.04E-05	3.37E-01	4.82E-05	5.50E-01	7.86E-05
1.00E+04	1.85E-01	1.85E-05	2.86E-01	2.86E-05	4.71E-01	4.71E-05
1.50E+04	1.69E-01	1.13E-05	2.30E-01	1.53E-05	3.98E-01	2.66E-05
2.00E+04	1.63E-01	8.15E-06	1.98E-01	9.88E-06	3.61E-01	1.80E-05
3.00E+04	1.58E-01	5.25E-06	1.72E-01	5.74E-06	3.30E-01	1.10E-05
5.00E+04	1.45E-01	2.90E-06	1.60E-01	3.19E-06	3.05E-01	6.09E-06
7.00E+04	1.30E-01	1.86E-06	1.51E-01	2.16E-06	2.81E-01	4.01E-06
1.00E+05	1.12E-01	1.12E-06	1.39E-01	1.39E-06	2.51E-01	2.51E-06

<sup>174</sup> Source : CEA, T.-D. Huynh, utilisation des données de l'évaluation JEFF-3.1.1 avec le code d'évolution DARWIN/PEPIN2.

Tableau 21b. Valeurs des courbes de fission élémentaire du plutonium 239 induite par un neutron thermique : temps de refroidissement de  $1.5 \cdot 10^5$  secondes ( $\sim 1.74$  jours) à  $5 \cdot 10^9$  secondes ( $\sim 158$  ans)<sup>175</sup>; valeurs transcrites en notation scientifique conventionnelle « E ».

Temps de refroidissement <i>t</i> en s	Puissance bêta $\times t$ MeV	Puissance bêta MeV/s	Puissance gamma $\times t$ MeV	Puissance gamma MeV/s	Puissance totale $\times t$ MeV	Puissance totale MeV/s
1.50E+05	9.23E-02	6.15E-07	1.24E-01	8.28E-07	2.17E-01	1.44E-06
2.00E+05	7.98E-02	3.99E-07	1.16E-01	5.78E-07	1.96E-01	9.78E-07
3.00E+05	6.64E-02	2.21E-07	1.09E-01	3.62E-07	1.75E-01	5.83E-07
5.00E+05	5.79E-02	1.16E-07	1.07E-01	2.13E-07	1.65E-01	3.29E-07
7.00E+05	5.53E-02	7.89E-08	1.06E-01	1.51E-07	1.61E-01	2.30E-07
1.00E+06	5.29E-02	5.29E-08	1.02E-01	1.02E-07	1.55E-01	1.55E-07
1.50E+06	5.03E-02	3.36E-08	9.35E-02	6.24E-08	1.44E-01	9.59E-08
2.00E+06	4.86E-02	2.43E-08	8.73E-02	4.37E-08	1.36E-01	6.79E-08
3.00E+06	4.54E-02	1.51E-08	7.71E-02	2.57E-08	1.23E-01	4.09E-08
5.00E+06	4.03E-02	8.06E-09	6.10E-02	1.22E-08	1.01E-01	2.03E-08
7.00E+06	3.82E-02	5.46E-09	5.25E-02	7.50E-09	9.07E-02	1.30E-08
1.00E+07	3.81E-02	3.81E-09	4.65E-02	4.65E-09	8.46E-02	8.46E-09
1.50E+07	3.92E-02	2.61E-09	3.79E-02	2.52E-09	7.70E-02	5.14E-09
2.00E+07	4.01E-02	2.01E-09	2.86E-02	1.43E-09	6.87E-02	3.43E-09
3.00E+07	4.15E-02	1.38E-09	1.52E-02	5.07E-10	5.67E-02	1.89E-09
5.00E+07	4.07E-02	8.14E-10	6.74E-03	1.35E-10	4.74E-02	9.49E-10
7.00E+07	3.57E-02	5.10E-10	5.57E-03	7.96E-11	4.13E-02	5.90E-10
1.00E+08	2.64E-02	2.64E-10	5.23E-03	5.23E-11	3.16E-02	3.16E-10
1.50E+08	1.51E-02	1.01E-10	5.10E-03	3.40E-11	2.02E-02	1.35E-10
2.00E+08	9.98E-03	4.99E-11	5.45E-03	2.73E-11	1.54E-02	7.72E-11
3.00E+08	8.04E-03	2.68E-11	6.80E-03	2.27E-11	1.48E-02	4.95E-11
5.00E+08	1.02E-02	2.03E-11	9.51E-03	1.90E-11	1.97E-02	3.94E-11
7.00E+08	1.21E-02	1.73E-11	1.14E-02	1.63E-11	2.36E-02	3.36E-11
1.00E+09	1.37E-02	1.37E-11	1.31E-02	1.31E-11	2.69E-02	2.69E-11
1.50E+09	1.41E-02	9.42E-12	1.36E-02	9.09E-12	2.78E-02	1.85E-11
2.00E+09	1.29E-02	6.47E-12	1.26E-02	6.31E-12	2.56E-02	1.28E-11
3.00E+09	9.19E-03	3.06E-12	9.11E-03	3.04E-12	1.83E-02	6.10E-12
5.00E+09	3.46E-03	6.93E-13	3.52E-03	7.04E-13	6.98E-03	1.40E-12

<sup>175</sup> Source : CEA, T.-D. Huynh, utilisation des données de l'évaluation JEFF-3.1.1 avec le code d'évolution DARWIN/PEPIN2.



# **10**

## **Élargissement Doppler des résonances – Thermalisation des neutrons**



Dans les applications nucléaires courantes, les neutrons se déplacent dans des systèmes physiques où la **température est variable** ; ainsi dans un cœur de réacteur nucléaire à eau sous pression, la température est de 1850 °C au centre du crayon combustible, 610°C à sa frontière externe, 400°C au niveau de la gaine et 310°C dans le réfrigérant (eau sous pression). À température ambiante (20°C  $\approx$  300 K), les nucléides ne sont pas immobiles dans le référentiel du laboratoire, *a fortiori* aux températures plus élevées données en exemple. Il s'ensuit qu'en toute rigueur, la description de l'interaction entre un neutron et un noyau atomique cible doit incorporer la mobilité de ce dernier. La prise en considération du mouvement du noyau cible, qui avait été supposé immobile dans le référentiel du laboratoire dans le chapitre 7, conduit alors à l'étude de deux phénomènes physiques particuliers dépendant de la température du milieu de propagation :

- **l'élargissement des résonances** ou **effet Doppler** (nom emprunté à l'étude de la propagation du son) ; comme sa dénomination le laisse supposer, ce phénomène intervient dans le domaine d'énergie des résonances dont les sections efficaces, à l'instar de la fréquence pour le son, se trouvent affectées ; il convient donc d'intégrer l'effet Doppler dans l'étude du **ralentissement des neutrons** dans la matière ;
- la **remontée en énergie** – ou **upscattering** – possible du neutron lors d'une collision élastique ; une telle remontée en énergie peut se produire si l'énergie du neutron n'est pas très élevée, c'est-à-dire se situe dans le domaine d'énergie dit de **thermalisation** des neutrons.

En neutronique, la prise en compte de ces phénomènes est importante, par exemple pour quantifier l'impact de la température et de sa variation dans le modérateur et le combustible sur l'état de criticité du cœur du réacteur<sup>1</sup>.

Le but de ce chapitre est de présenter les expressions des **sections efficaces d'interaction d'un neutron avec un noyau atomique cible animé d'un mouvement dans le référentiel du laboratoire** dans les deux types de situations physiques indiqués ci-dessus : **l'élargissement Doppler des résonances**, en **partie A** et la **thermalisation des neutrons** en **partie B**.

## A. L'élargissement Doppler des résonances

Cet aspect de l'impact du mouvement du noyau cible sur les résonances neutroniques, par exemple sur la probabilité qu'un neutron d'être absorbé dans une résonance, concerne principalement le **domaine d'énergie épithermique**, c'est-à-dire situé au-dessus de quelques eV. Dans le contexte de la physique des réacteurs nucléaires, il devient en général négligeable au-dessus de 1 MeV. Dans le cadre de l'hypothèse où le noyau atomique cible avec lequel interagit le neutron se meut librement, **sans entraves moléculaires ou cristallines**, on expose le formalisme **une section efficace élargie par effet Doppler** et

---

<sup>1</sup> C. Mounier, *Contribution à l'étude du coefficient de température des réacteurs à eau légère*, Thèse de doctorat, Paris XI-Orsay, décembre 1993.

ses propriétés essentielles, puis on aborde la question de la loi de renvoi en énergie qui se trouve modifiée par rapport au cas où le noyau atomique cible est immobile, ainsi que ses conséquences. Suit l'évocation du cas où il convient de prendre en compte les **liaisons cristallines**. Un dernier paragraphe énonce les différentes méthodes utilisées pour calculer une section efficace élargie à une température quelconque.

### 1. Expression de la section efficace élargie à une température donnée

On considère l'interaction d'un neutron incident de masse  $m$ , avec un noyau atomique cible de masse  $M$ . On désigne par :

- $\vec{v}$  la vitesse du neutron avant choc dans le référentiel du laboratoire ( $L$ ),  $v = \|\vec{v}\|$  ;
- $E$  l'énergie cinétique du neutron incident dans le référentiel du laboratoire :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{A1.1})$$

On a vu dans le chapitre 8 qu'à l'énergie initiale  $E$  du neutron on faisait correspondre une valeur scalaire de la section efficace relative à une interaction donnée : diffusion, capture, fission, etc. Il a en effet été présupposé que le noyau cible était immobile dans le référentiel du laboratoire. Cette hypothèse est vraie s'il n'y a pas d'agitation thermique des atomes qui constituent le milieu de propagation, autrement dit, en toute rigueur si la température du milieu est égale à 0 Kelvin (K). Dans les applications pratiques courantes, tel n'est pas le cas et à une température  $T$  donnée le mouvement d'un noyau atomique cible est caractérisé par une distribution des vitesses possibles.

Soient :

- $\vec{V}$  la vitesse initiale du noyau atomique cible dans le référentiel du laboratoire ( $L$ ),  $V = \|\vec{V}\|$  ; il est supposé se mouvoir librement.
- $\vec{v}_r$  : la vitesse relative du neutron par rapport à celle du noyau atomique cible :

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{V}, \quad v_r = \|\vec{v}_r\| = \|\vec{v} - \vec{V}\| \quad (\text{A1.2})$$

- $P(\vec{V}, T)$  la **distribution des vitesses du noyau cible**, dépendant de la température  $T$  du milieu, avec :

$$\int_{\vec{V}} P(\vec{V}, T) d\vec{V} = 1. \quad (\text{A1.3})$$

À l'énergie initiale  $E$  du neutron dans le système du laboratoire ( $L$ ) il ne correspond plus une seule valeur scalaire de la section efficace,  $\sigma(E)$ , mais une distribution en probabilité de valeurs de la section efficace d'interaction neutron-noyau atomique cible considérée,



$\sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|)$ , induite par la distribution  $P(\vec{V}, T)$ . Il est à noter que  $\sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) = \sigma(v_r) \equiv \sigma(E_r = \frac{1}{2}mv_r^2)$  est la section efficace à la vitesse relative du neutron  $v_r$ , c'est-à-dire dans le référentiel du noyau atomique cible dans lequel, par définition, ce dernier est immobile ; cette section efficace s'identifie donc à la section efficace à 0 K pour une énergie du neutron égale à  $E_r = \frac{1}{2}mv_r^2$ . Cette remarque est importante pour la suite, car elle explique le rôle joué par les sections efficaces calculées à 0 K dans la détermination des sections efficaces à une température quelconque.

Pour déterminer des grandeurs physiques macroscopiques d'intérêt telles que des **taux de réactions** (voir chapitre 8), à toute température, il est utile et pratique de pouvoir disposer d'une valeur unique de la section efficace à la température  $T$  désirée, en s'affranchissant de la manipulation d'une distribution de valeurs de celle-ci.

Cela suppose d'introduire la **section efficace moyenne** ou « **effective** »,  $\bar{\sigma}(E, T)$ , fonction de l'énergie  $E = \frac{1}{2}mv^2$  correspondant à la vitesse initiale  $v$  du neutron incident dans le référentiel du laboratoire, et de la température  $T$  du milieu.

Pour déterminer son expression, on se place à l'échelle macroscopique et on exprime d'une part dans le référentiel du laboratoire et d'autre part dans le référentiel du noyau atomique cible (dans lequel ce dernier est donc immobile) le nombre moyen de réactions,  $\tau$ , se produisant par unité de temps et par unité de volume. Ce nombre de réactions  $\tau$  est proportionnel au nombre  $N$  de noyaux cibles présents par unité de volume, au nombre  $n(E)$  de neutrons incidents d'énergie  $E$  présents par unité de volume, aux vitesses du neutron<sup>2</sup> et enfin aux sections efficaces ; il s'écrit donc :

- dans le référentiel du laboratoire :

$$\tau = Nn(E)v\bar{\sigma}(E, T) \quad (\text{A1.4})$$

- dans le référentiel du noyau cible :

$$\tau = Nn(E) \int_{\vec{V}} \|\vec{v} - \vec{V}\| \sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) P(\vec{V}, T) d\vec{V} \quad (\text{A1.5})$$

Ce nombre ne dépendant pas du référentiel dans lequel il est calculé, on a l'égalité :

$$Nn(E)v\bar{\sigma}(E, T) = Nn(E) \int_{\vec{V}} \|\vec{v} - \vec{V}\| \sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) P(\vec{V}, T) d\vec{V} \quad (\text{A1.6})$$

<sup>2</sup> Les produits  $n(E)v$  et  $n(E)\|\vec{v} - \vec{V}\| = n(E)v_r$  ont pour dimension :  $\text{cm}^{-3} \times \text{cm} \cdot \text{s}^{-1} \equiv \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  ; ils définissent des flux de neutrons (voir chapitre 13). Les produits  $N\bar{\sigma}(E, T)$  et  $N\sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|)$  ont pour dimension  $\text{cm}^{-3} \times \text{cm}^2 \equiv \text{cm}^{-1}$  ; ils définissent une section efficace macroscopique (voir chapitre 8).

Il en découle la définition de la section efficace élargie à la température  $T$  :

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{1}{v} \int_{\vec{V}} \|\vec{v} - \vec{V}\| \sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) P(\vec{V}, T) d\vec{V} \quad (\text{A1.7})$$

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{1}{v} \int_{\vec{V}} v_r \sigma(E_r) P(\vec{V}, T) d\vec{V} \quad (\text{A1.8})$$

Lorsque l'énergie du neutron est suffisamment élevée, au-delà du domaine d'énergie thermique, les liaisons moléculaires peuvent être négligées, de sorte que la distribution des vitesses du noyau cible obéit à la **distribution de Maxwell-Boltzmann** qui caractérise un gaz parfait – « **hypothèse gaz libre** » – :

$$P(\vec{V}, T) = \left( \frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{M}{2k_B T} V^2 \right) \quad (\text{A1.9})$$

où  $k_B$  ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  joules par Kelvin) est la constante de Boltzmann.

On désigne par  $A$  le ratio de la masse du noyau atomique cible et de celle du neutron :  $A = M/m$  (ou masse du noyau atomique cible en unité de masse de neutron, à ne pas confondre avec le nombre de masse  $A$ ). On peut alors montrer (voir annexe I) que<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(E, T) = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{A}{4\pi k_B T}} \int_0^\infty \sqrt{E_r} \sigma(E_r) \left[ \exp \left( -\frac{A}{k_B T} (\sqrt{E_r} - \sqrt{E})^2 \right) \right. \\ \left. - \exp \left( -\frac{A}{k_B T} (\sqrt{E_r} + \sqrt{E})^2 \right) \right] dE_r \end{aligned} \quad (\text{A1.10a})$$

L'expression suivante est appelée **noyau de Solbrig** :

$$\sqrt{\frac{A}{4\pi k_B T}} \left[ \exp \left( -\frac{A}{k_B T} (\sqrt{E_r} - \sqrt{E})^2 \right) - \exp \left( -\frac{A}{k_B T} (\sqrt{E_r} + \sqrt{E})^2 \right) \right] \quad (\text{A1.10b})$$

La section efficace  $\bar{\sigma}(E, T)$  est représentée sur la **figure A1a** dans le cas de la réaction de capture radiative d'un neutron par un noyau d'uranium 238. Elle montre que le mouvement du noyau cible se traduit par une diminution de la hauteur du pic de la résonance et, corrélativement, par un étalement des ailes de la résonance ou encore une augmentation de sa largeur à mi-hauteur.

<sup>3</sup> A. W. Solbrig Jr., « Doppler Effect in Neutron Absorption Resonances », *Am. Journal of Physics* 29, 1961, p. 257, <https://doi.org/10.1119/1.1937737>.

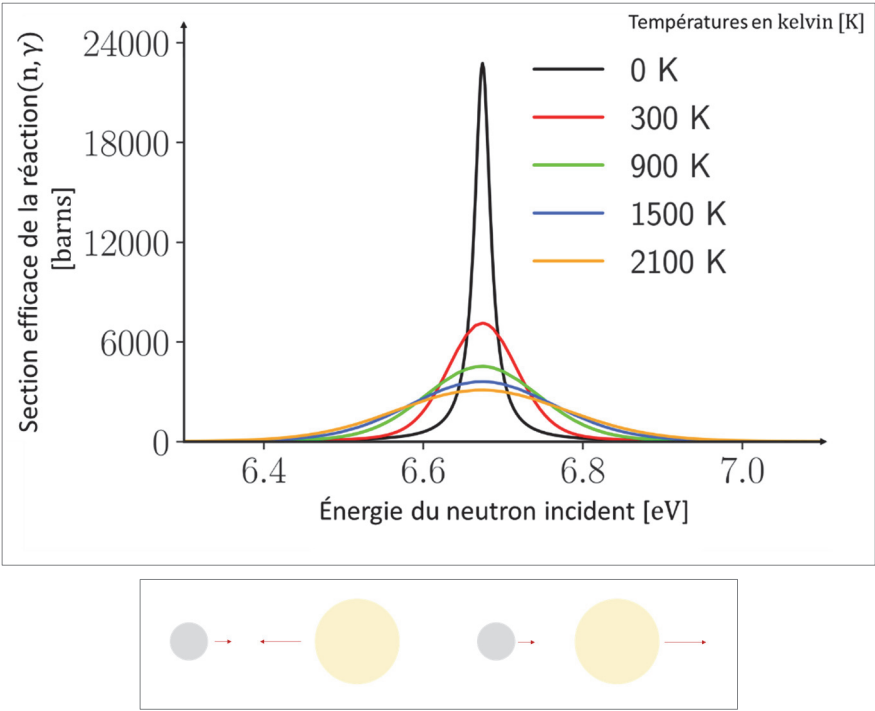


Figure A1a. Effet ou élargissement Doppler de la résonance à 6.67 eV de l’uranium 238 : la section efficace de la réaction de capture radiative (n, γ) est représentée en fonction de la température (exprimée en Kelvin, K) du milieu dans lequel se propage le neutron.

Cette extension du domaine d’énergie autour du pic d’une résonance dans lequel un neutron peut interagir se comprend sur le dessin en partie basse de la figure A1a : un neutron d’énergie en deçà de la limite d’interaction significative pour un noyau cible immobile peut néanmoins interagir avec ce dernier si celui-ci se déplace à sa rencontre ; un neutron d’énergie située au-delà de la limite supérieure d’interaction significative peut encore interagir avec ce noyau cible si ce dernier se déplace dans le même sens. La condition de cette possibilité d’interaction suppose que le neutron puisse rencontrer le noyau cible, imposant donc que la vitesse relative,  $v_r$ , soit positive :

$$v_r > 0 \tag{A1.11}$$

La figure A1a montre que le rapport  $\bar{\sigma}(E, T)/\sigma(E)$  est inférieur à l’unité à l’énergie de la résonance  $E_0$  et dans son proche voisinage ; il devient supérieur à l’unité lorsque l’énergie du neutron incident est suffisamment éloignée de  $E_0$  : la surface sous la courbe de la section efficace se trouve ainsi conservée.

L’élargissement Doppler affecte tout type de résonance qu’il s’agisse d’une capture radiative, d’une fission, d’une diffusion, que l’on soit dans le domaine résolu ou bien dans le domaine non résolu.

L'expression (A1.10) montre que la section efficace élargie,  $\bar{\sigma}(E, T)$ , dépend de la section efficace  $\sigma(E_r)$  et par conséquent son calcul est fonction du formalisme adopté pour  $\sigma(E_r)$  tel que celui de Breit et Wigner (voir chapitre 8). Le calcul de  $\bar{\sigma}(E, T)$  revêt une certaine complexité et plusieurs méthodes analytiques et/ou numériques ont été mises au point, chacune présentant des avantages et des inconvénients. Elles sont brièvement présentées au paragraphe A6.

## 2. Comportements particuliers de la section efficace élargie

Il est possible de caractériser assez simplement quelques-uns des comportements particuliers de la section efficace élargie : il s'agit ici de situations dans lesquelles l'effet Doppler laisse inchangée la section efficace à 0 K.

**Cas 1.** Aux basses énergies, les sections efficaces, telles que la section efficace d'absorption, varient inversement proportionnellement à la vitesse relative  $\|\vec{v} - \vec{V}\|$ , et tendent à se confondre avec les sections efficaces correspondantes à 0 K ; l'effet Doppler laisse inchangées les sections efficaces aux basses énergies, suffisamment loin des résonances. En effet, à basse énergie on a (voir chapitre 8) :

$$\sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) = \frac{C}{\|\vec{v} - \vec{V}\|} \quad (\text{A2.1})$$

où  $C$  est une constante. En remplaçant (A2.1) dans (A1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} Nv\bar{\sigma}(E, T) &= N \int \|\vec{v} - \vec{V}\| \sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) P(\vec{V}) d\vec{V} \\ &= N \int \|\vec{v} - \vec{V}\| \frac{C}{\|\vec{v} - \vec{V}\|} P(\vec{V}) d\vec{V} \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

soit :

$$Nv\bar{\sigma}(E, T) = NC \int_{\vec{V}} P(\vec{V}) d\vec{V}$$

Comme par définition  $\int P(\vec{V}) d\vec{V} = 1$ , on a immédiatement :

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{C}{v} = \frac{C}{\sqrt{2mE}} \quad (\text{A2.3})$$

La **figure A1b** ci-dessous, relative à l'élargissement Doppler de la section efficace de capture radiative de l'uranium 238 aux températures de 300 K et 1000 K montre bien ce comportement : en échelle log-log cette section efficace est une même droite à basse énergie, quelle que soit la température.

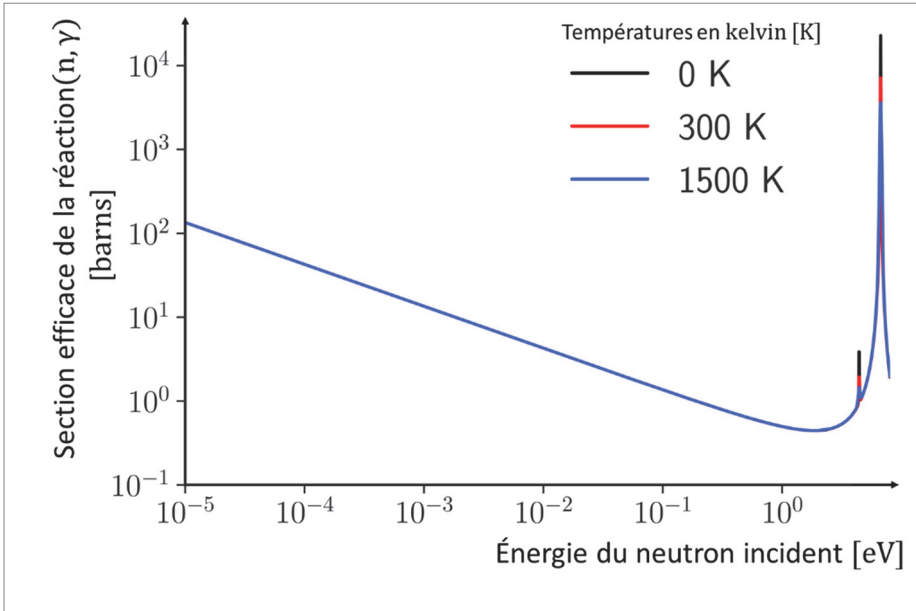


Figure A1b. Allure générale de la section efficace de la réaction de capture radiative (n, γ) provoquée par un neutron sur un noyau atomique d'uranium 238 à basse énergie, en échelle log-log. L'élargissement Doppler aux températures 330 K et 1500 K de la résonance à 6.67 eV de l'uranium 238, bien que présent, est peu visible sur cette figure (les sommets de la résonance sont néanmoins bien différenciés en fonction de la température) en raison de l'échelle des énergies adoptée (voir la figure Aa1) ; à très basse énergie, on constate bien que la section efficace varie inversement proportionnellement à la vitesse du neutron incident ou encore à la racine carrée de son énergie cinétique.

**Cas 2.** De même, lorsque la vitesse du neutron incident tend à s'annuler,  $v \rightarrow 0$ , alors d'après (A2.2) on a :

$$Nv\bar{\sigma}(E, T) \approx N \int_{\vec{v}} \|\vec{v}\| \frac{C}{\|\vec{v}\|} P(\vec{v}) d\vec{v} = NC$$

et :

$$\bar{\sigma}(E, T) \approx \frac{C}{v} \quad (\text{A2.4})$$

Cette dépendance en  $1/v$  doit être vue comme une durée caractéristique par unité de longueur parcourue du neutron,  $t$ , avant d'être absorbé par un noyau atomique : si  $v = 2200 \text{ m s}^{-1}$  (neutron thermique) alors  $t = 4.54 \cdot 10^{-4} \text{ s} \cdot \text{m}^{-1} \equiv 4.54 \cdot 10^{-6} \text{ s cm}^{-1}$  ; si  $v = 9.77 \text{ m s}^{-1}$  (neutron « ultra froid ») alors  $t = 0.1 \text{ s m}^{-1} \equiv 1 \cdot 10^{-3} \text{ s cm}^{-1}$ .

**Cas 3.** À suffisamment haute énergie, lorsque la section efficace  $\sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|)$  varie très lentement et si la vitesse  $v$  du neutron est très grande devant la vitesse correspondant au pic (étroit) de la distribution  $P(\vec{V})$ , alors  $\sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) \approx \sigma = \text{constante}$  et :

$$Nv\bar{\sigma}(E, T) = N \int \|\vec{v} - \vec{V}\| \sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) P(\vec{V}) d\vec{V} \simeq N\sigma v \int_{\vec{V}} P(\vec{V}) d\vec{V} \quad (\text{A2.5})$$

soit :

$$\bar{\sigma}(E, T) \simeq \sigma \quad (\text{A2.6})$$

On notera en particulier que dans ce cas de figure l'effet Doppler laisse inchangée la section efficace potentielle  $\sigma_p$ .

### 3. Loi de transfert en énergie et en angle

Plus généralement, le mouvement du noyau cible affecte non seulement la **section efficace élastique scalaire**, comme on l'a vu au paragraphe A1 précédent, mais aussi la **section efficace différentielle de la diffusion élastique**. En effet, les densités de probabilité qui caractérisent le passage de l'énergie cinétique initiale  $E$  du neutron à une énergie cinétique  $E'$  après diffusion ne sont plus en toute rigueur les lois présentées au chapitre 8 supposant le noyau atomique cible immobile (à 0 K) et la diffusion élastique isotrope dans le référentiel du centre de masse, rappelées ci-après :

$$h_{E, \mu_C}(E \rightarrow E', \mu_C) = \frac{1}{2} \delta(E' - E) \quad (\text{A3.1})$$

$$h_E(E \rightarrow E') = \frac{1}{(1 - \alpha)E} \quad , \quad \alpha = \left( \frac{A - 1}{A + 1} \right)^2 \quad (\text{A3.2})$$

Le déplacement du noyau cible leur confère une forme analytique plus compliquée.

La section efficace différentielle de diffusion élastique prenant en compte la mobilité du noyau atomique cible présente une double dépendance énergétique et angulaire<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_s(\vec{v} \rightarrow \vec{v}', T) &\equiv \bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}', T) \equiv \frac{d^2 \bar{\sigma}(E)}{dE' d\mu_L} \equiv \bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T) \\ &= \frac{1}{v} \int_{\vec{V}} v_r \sigma_s(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow \vec{v}') P(\vec{V}, T) d\vec{V} \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

où :

- $\vec{v}'$ : vitesse du neutron après choc dans (L),  $v' = \|\vec{v}'\|$  ;
- $\vec{\Omega}$  : direction du neutron dans le système du laboratoire avant choc ;
- $\vec{\Omega}'$  : direction du neutron dans le système du laboratoire après choc ;
- $\mu_L = \cos(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' \equiv \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{vv'} \equiv \cos(\vec{v}, \vec{v}')$  ;
- $\sigma_s(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow \vec{v}') = \sigma_s(v_r) p(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow \vec{v}')$  avec  $p(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow \vec{v}')$  densité de probabilité (ou noyau) de transfert énergétique et angulaire de la diffusion élastique considérée,

<sup>4</sup> M. Ouisloumen, R. Sanchez, « A model for neutron scattering off heavy isotopes that accounts for thermal agitation effects », *Nuclear Science & Engineering*, 107, 1991, p. 189, <https://doi.org/10.13182/NSE89-186>.

spécifiant que la section différentielle  $\sigma_s(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow \vec{v}')$  dépend à la fois des énergies  $E$  et  $E'$  et des directions  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{\Omega}'$  du neutron avant et après collision.

La loi ou noyau de transfert en énergie et en angle correspondant s'obtient en normalisant l'expression (A3.3) avec la section efficace Doppler  $\bar{\sigma}(E, T)$  :

$$k(E \rightarrow E', \mu_L, T) = \frac{\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T)}{\bar{\sigma}(E, T)} \equiv \frac{\int_{\vec{V}} v_r \sigma_s(v_r) p(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow \vec{v}') P(\vec{V}, T) d\vec{V}}{\int_{\vec{V}} v_r \sigma(E_r) P(\vec{V}, T) d\vec{V}} \quad (\text{A3.4})$$

La détermination explicite du noyau  $k(E \rightarrow E', \mu_L, T)$  découle de développements mathématiques relativement complexes<sup>5</sup>.

#### 4. Le phénomène de la remontée en énergie à proximité d'une résonance ou « *upscattering* résonnant »

Du fait du **mouvement du noyau atomique cible**, le neutron diffusé élastiquement n'a pas une énergie cinétique nécessairement inférieure à celle du neutron incident. Il peut aussi acquérir une énergie cinétique qui lui est supérieure.

On se restreindra ici à délimiter le domaine des vitesses possibles du neutron diffusé, puis à illustrer graphiquement la forme de la densité de transfert en énergie dans le cas d'une diffusion élastique intervenant à proximité d'une résonance.

##### 4.1 Critère d'une remontée en énergie possible du neutron diffusé

Les référentiels considérés sont toujours celui du laboratoire (L) et celui du centre de masse (CM). Les grandeurs additionnelles relatives au neutron incident et au neutron diffusé qui seront utilisées sont les suivantes :

- $\vec{v}$  la vitesse du neutron avant choc dans le référentiel du laboratoire (L),  $v = \|\vec{v}\|$  ;
- $\vec{v}_{cm}$  : vitesse du neutron avant choc dans (CM) :  $\vec{v}_{cm} = \vec{v} - \vec{v}_c$ ,  $v_{cm} = \|\vec{v}_{cm}\|$  ;
- $\vec{v}'_{cm}$  : vitesse du neutron après choc dans (CM) :  $\vec{v}'_{cm} = \vec{v}' - \vec{v}_c$ ,  $v'_{cm} = \|\vec{v}'_{cm}\|$  ;
- $\vec{v}_c$  : vitesse du centre de masse,  $v_c = \|\vec{v}_c\|$  ;
- $\mu_0 = \cos(\vec{v}, \vec{V})$  ;
- $\mu = \cos(\vec{v}_c, \vec{v}_{cm})$  ;
- $\mu' = \cos(\vec{v}_c, \vec{v}'_{cm})$ .

On a les relations cinématiques suivantes (voir chapitre 7) :

<sup>5</sup> G. L. Blackshaw, R. L. Murray, « Scattering Functions for Low-Energy Neutron Collisions in a Maxwellian Monatomic Gas », *Nuclear Science and Engineering*, 27, 1967, pp. 520-532, p. 522, <https://doi.org/10.13182/NSE86-A17617>.

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{v} + A\vec{V}}{A + 1} \quad (\text{A4.1})$$

$$v_c^2 = \frac{v^2 + A^2V^2 + 2AvV\mu_0}{(A + 1)^2} \quad (\text{A4.2})$$

$$v_r^2 = \|\vec{v} - \vec{V}\|^2 = v^2 + V^2 - 2vV \cos(\vec{v}, \vec{V}) = v^2 + V^2 - 2vV\mu_0 \quad (\text{A4.3})$$

Par conservation de l'énergie cinétique dans (CM), on a :

$$v_{cm} = \frac{Av_r}{A + 1} = v'_{cm} \quad (\text{A4.4})$$

$$v'^2 = v_{cm}'^2 + v_c^2 + 2v'_{cm}v_c\mu' \quad (\text{A4.5})$$

Avec (A4.5), on envisage les deux cas extrêmes suivants pour l'angle de diffusion en utilisant (A4.4) :

- pour  $\mu' = -1$  alors  $v'$  prend la valeur minimale :

$$\left| \frac{A}{A + 1} v_r - v_c \right| \quad (\text{A4.6})$$

- pour  $\mu' = +1$  alors  $v'$  prend la valeur maximale :

$$\frac{A}{A + 1} v_r + v_c \quad (\text{A4.7})$$

La vitesse du neutron après choc,  $v'$ , dans le référentiel du laboratoire satisfait donc la double inégalité<sup>6</sup> :

$$\left| \frac{A}{A + 1} v_r - v_c \right| \leq v' \leq \frac{A}{A + 1} v_r + v_c \quad (\text{A4.8})$$

L'étude cinématique de cette relation montre que  $v'$  peut prendre des valeurs supérieures à  $v$ <sup>7</sup>.

Plus généralement, à une valeur donnée de  $v'$ , il est possible de déterminer le domaine des valeurs possibles pour le couple  $(v_c, v_r)$ .

La remontée en énergie du neutron est effective si :

---

<sup>6</sup> G. L. Blackshaw, R. L. Murray, « Scattering Functions for Low-Energy Neutron Collisions in a Maxwellian Monatomic Gas », *op. cit.*, p. 522.

<sup>7</sup> G. L. Blackshaw, R. L. Murray, *op. cit.* p. 529, figures 3 et 4.



$$v < v' \leq \frac{A}{A+1} v_r + v_c \quad (\text{A4.9})$$

Le critère de remontée en énergie du neutron peut être exprimé d'une autre manière. En reprenant la définition des vitesses du neutron dans le référentiel du centre de masse, respectivement avant et après collision :

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v} - \vec{v}_c, \quad v'_{cm} = \vec{v}' - \vec{v}_c \quad (\text{A4.10})$$

on a immédiatement :

$$v^2 = v_{cm}^2 + v_c^2 + 2v_{cm}\vec{v}_c\mu$$

$$v'^2 = v_{cm}'^2 + v_c^2 + 2v_{cm}'\vec{v}_c\mu'$$

d'où :

$$v'^2 - v^2 = v_{cm}'^2 - v_{cm}^2 + 2v_{cm}'\vec{v}_c\mu' - 2v_{cm}\vec{v}_c\mu$$

Comme  $v_{cm}'^2 = v_{cm}^2$ ,

$$v'^2 - v^2 = 2v_{cm}v_c(\mu' - \mu) \quad (\text{A4.11})$$

Par conséquent :

$$v' > v \quad \text{si} \quad \mu' > \mu \quad (\text{A4.12})$$

## 4.2 Probabilité de la remontée en énergie

Il est montré que la probabilité, notée  $p_+(v, V)$ , de cette éventualité de remontée en énergie est donnée par<sup>8</sup> :

$$p_+(\vec{v}, \vec{V}) = \int_{E_-}^{E_+} p(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow E') dE' \quad (\text{A4.13})$$

où :

$$p(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow E') = \frac{H(E_+ - E')H(E' - E_-)}{2mv_c v_{cm}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\varphi_c \int_{-1}^{+1} h_c(\mu_c) d\mu_c \quad (\text{A4.14})$$

avec :

- $H(E_+ - E'), H(E' - E_-)$  : fonction échelon de Heaviside ;
- $E_- = \frac{1}{2}m(\vec{v}_c - \vec{v}_{cm})^2$  ;
- $E_+ = \frac{1}{2}m(\vec{v}_c + \vec{v}_{cm})^2$  ;
- $\varphi_c$  : angle azimutal de déviation dans (CM) ;
- $h_c(\mu_c) = 1/2$  : densité de probabilité associée au cosinus de l'angle de déviation dans (CM) avec hypothèse d'isotropie du choc dans (CM).

<sup>8</sup> R. Sanchez, A. Previti, D. Mostacci, « New derivation of Blackshow–Murrays formula for the Doppler-broadened scattering kernel and calculation of the angular moments via Lagrange interpolation », *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 87, Part 2, January 2016, pp. 113-125, p. 117 et Appendix A p. 124, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2015.08.020>.

En calculant l'intégrale (A4.13) avec (A14.14), on obtient :

$$p_+(\vec{v}, \vec{V}) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\vec{v}_c, \vec{v}_{cm})) \geq 0 \quad (\text{A4.15})$$

Une autre expression de la probabilité  $p_+(v, V)$  est <sup>9</sup> :

$$p_+(\vec{v}, \vec{V}) = \frac{\left[ v_r + \left( \frac{A+1}{A} - 1 \right) v + V \right]^2 - \left[ \frac{A+1}{A} v \right]^2}{4v_r \left( \left( \frac{A+1}{A} - 1 \right) v + V \right)} \quad (\text{A4.16})$$

À partir de (A4.16), pour un nucléide donné, on peut circonscrire approximativement le domaine d'énergie dans lequel une remontée en énergie intervient.

On montre que la probabilité  $p_+(\vec{v}, \vec{V})$  devient inférieure à  $\frac{A+1}{A} \frac{V}{v}$  lorsque l'impulsion du neutron incident est très supérieure à celle du noyau cible, soit lorsque  $1 \times v \gg A \times V$ , où les masses du neutron et du noyau atomique cible sont toujours exprimées en unité de masse du neutron.

On considère ci-après deux cas de la diffusion élastique, le premier sur un noyau léger et le second sur un noyau lourd à la température  $T = 300 \text{ K}$  ; l'énergie cinétique du noyau atomique cible (de masse  $M = Am$ ,  $m$  masse du neutron) est de l'ordre :  $\frac{1}{2} AmV^2 \approx \frac{3}{2} k_B T$  ( $k_B$  : constante de Boltzmann).

■ Cas d'un noyau d'oxygène 16 :  $A \approx 16$  :

$$v \gg A \times V \Rightarrow v \gg A \times \sqrt{\frac{\frac{3}{2} k_B T}{\frac{1}{2} Am}} = \sqrt{\frac{3Ak_B T}{m}} \quad (\text{A4.17a})$$

Le domaine d'énergie cinétique du neutron (de masse  $m$ ),  $E$ , correspondant dans le référentiel du laboratoire est donc défini par :

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \gg \frac{1}{2} m \frac{3Ak_B T}{m} = \frac{3}{2} Ak_B T \quad (\text{A4.17b})$$

$$E \gg \frac{3}{2} 16 \times 8.617 \cdot 10^{-5} (\text{eV K}^{-1}) \times 300 = 0.62 \text{ eV} \quad (\text{A4.17c})$$

---

<sup>9</sup> M. Ouisloumen, R. Sanchez, *op. cit.*, p. 190.

Par conséquent, en considérant une valeur de l'énergie cinétique du neutron incident par exemple 10 fois supérieure à 0.62 eV, on constate que la remontée en énergie sur un noyau léger devient négligeable pour des énergies supérieures à quelques électronvolts.

- Cas d'un noyau d'uranium 238 :  $A \approx 238$  :

De manière similaire en appliquant la relation (A4.17b) on a :

$$E \gg \frac{3}{2} 238 \times 8.617 \cdot 10^{-5} (\text{eV K}^{-1}) \times 300 = 9.22 \text{ eV} \quad (\text{A4.18})$$

Contrairement au cas de l'oxygène, on constate qu'un neutron ayant une énergie cinétique par exemple 10 fois supérieure à 9.2 eV se trouve dans la partie basse du domaine d'**énergie épithermique** (~100 eV) dans lequel des résonances sont encore présentes, et que par suite, une remontée en énergie peut affecter les taux de réaction qui leur sont associés.

Il en va de même pour le bilan neutronique qui caractérise la réaction en chaîne dans un milieu multiplicateur de neutrons.

En particulier, en prenant comme référence le cas « asymptotique », à 0 K, correspondant au noyau de transfert en énergie donné par (A3.2), l'**effet en réactivité** de la prise en compte de ce phénomène dans le cœur d'un réacteur nucléaire est de l'ordre de plusieurs dizaines ou centaines de pcm (partie pour cent mille), ce qui est tout à fait significatif.

La non-prise en compte de ce phénomène, c'est-à-dire de traiter la dégradation en énergie par diffusion élastique par la relation (A3.2) supposant le noyau cible immobile (0 K), a pour effet de sous-estimer le taux de capture des neutrons par la résonance, dans le cœur d'un réacteur à eau sous pression.

Cet effet est d'autant plus important que la température augmente et il varie d'un type de réacteur nucléaire à l'autre<sup>10</sup>.

La **figure A2** montre l'évolution de la densité de probabilité du passage de l'énergie cinétique initiale  $E$  du neutron à une énergie cinétique  $E'$  après diffusion pour différentes températures.

Les **figures A3a** et **A3b** représentent la densité de probabilité du passage de l'énergie cinétique initiale  $E$  du neutron à une énergie cinétique  $E'$  après diffusion à la température  $T = 1000 \text{ K}$ , respectivement pour deux énergies de neutron incident situées en amont et en aval de la résonance à 6.67 eV de l'uranium 238.

<sup>10</sup> D. Lee, K. Smith, J. Rhodes, « The impact of 238U resonance elastic scattering approximations on thermal reactor Doppler reactivity », *Annals of Nuclear Energy* 36, 2009, pp. 274-280, p. 279 table 12, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2008.11.026>.

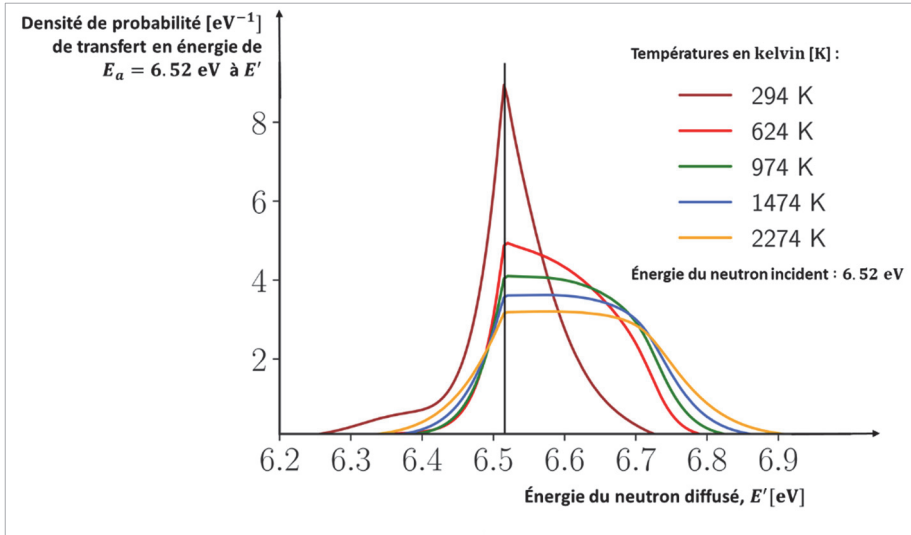


Figure A2. Densité de probabilité du passage de l'énergie cinétique initiale  $E$  du neutron à une énergie cinétique  $E'$  après diffusion dans le cas de la diffusion élastique d'un neutron d'énergie initiale 6.52 eV sur un noyau d'uranium 238 à différentes températures exprimées en kelvin (K).<sup>11 12</sup>

<sup>11</sup> A. Zoia, É. Brun, C. Jouanne, F. Malvagi, « Doppler broadening of neutron elastic scattering kernel in TRIPOLI-4® », *Annals of Nuclear Energy* 54, pp. 218-226, 2013, p. 221, figure 2, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2012.11.023>.

<sup>12</sup> E. E. Sunny, F. B. Brown, B. C. Kiedrowski, W. R. Martin, « Temperature Effects of Resonance Scattering for Epithermal Neutrons in MCNP », *PHYSOR-2012*, ANS Reactor Physics Topical Meeting, Knoxville, TN, 15-20 April 2012, LA-UR-11-06503, p. 5/9, [https://laws.lanl.gov/vhosts/mcnp.lanl.gov/pdf\\_files/la-ur-11-06503.pdf](https://laws.lanl.gov/vhosts/mcnp.lanl.gov/pdf_files/la-ur-11-06503.pdf).

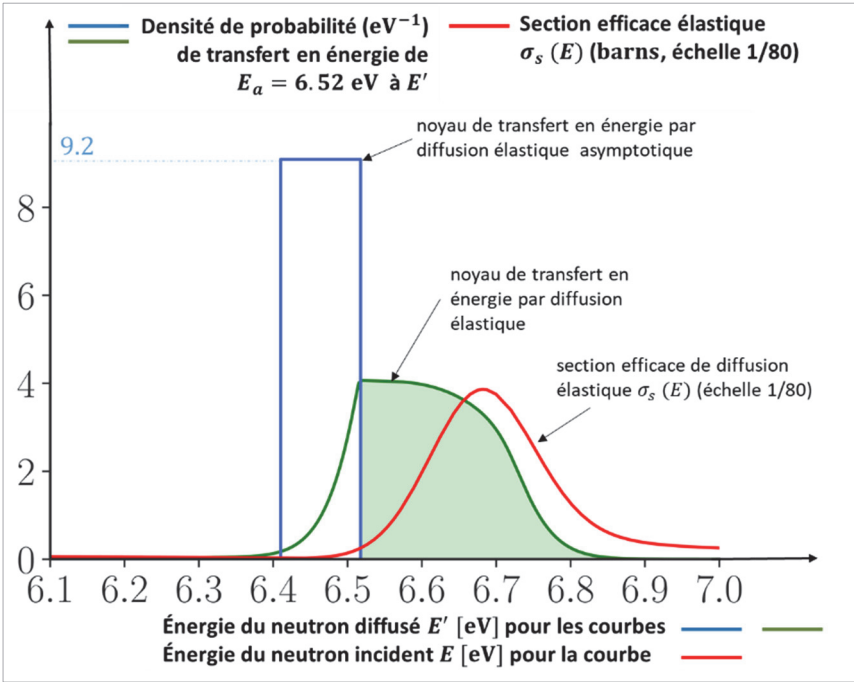


Figure (A3a) : voir légende page suivante.

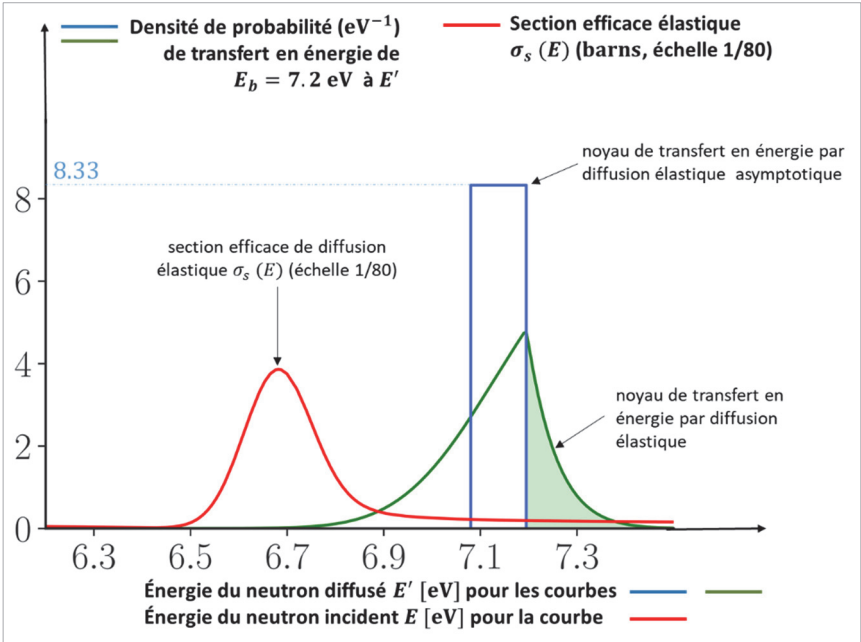


Figure (A3b). : voir légende page suivante.

Figures A3a et A32b. Densité de probabilité du passage de l'énergie cinétique initiale  $E$  du neutron incident à une énergie cinétique  $E'$  après diffusion à la température  $T = 1000$  K, respectivement pour deux énergies de neutron incident  $E_a = 6.52$  eV et  $E_b = 7.2$  eV.<sup>13</sup>

La résonance de la diffusion élastique à l'énergie  $E_0 = 6.67$  eV est tracée à l'échelle réduite (1/80). Les parties colorées correspondent aux probabilités de transfert de l'énergie initiale à une énergie après diffusion *via* une remontée en énergie ; elles représentent respectivement 82.03 % et 28.12 % du total des transferts en énergie du neutron. Les courbes en bleu reproduisent la densité de transfert (*asymptotic kernel*) en énergie dans le cas où le noyau cible est immobile (0 K) avec l'hypothèse de l'isotropie du choc dans le référentiel du centre de masse ; elle est donnée par l'expression (A3.2) et ne dépend que de l'énergie initiale du neutron (voir chapitre 7) ; elle a une valeur constante entre l'énergie initiale du neutron ( $E_a = 6.52$  eV et  $E_b = 7.2$  eV) et l'énergie atteinte après la perte maximale d'énergie par choc ( $\alpha E_a = \left(\frac{238-1}{238+1}\right)^2 6.52 = 6.41$  eV et  $\alpha E_b = \left(\frac{238-1}{238+1}\right)^2 7.2 = 7.08$  eV) :

$$h_a(E_a \rightarrow E') = \frac{1}{(1-\alpha)E} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{238-1}{238+1}\right)^2\right] E_a} = 9.2$$

et

$$h_b(E_b \rightarrow E') = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{238-1}{238+1}\right)^2\right] E_b} = 8.33, \text{ valeurs que l'on retrouve bien en ordonnée respectivement des graphiques}$$

(a) et (b).

## 5. La prise en compte des liaisons cristallines

Ce qui précède est sous-tendu par l'hypothèse « **gaz parfait** » ou « **gaz libre** » qui néglige l'existence de liaisons moléculaires ou cristallines entre les atomes d'un liquide ou d'un solide au sein desquels les neutrons se propagent. Il a été montré que l'on pouvait préserver ce modèle de gaz libre pour traiter l'effet Doppler, dans la mesure où le couplage entre les atomes du cristal peut être considéré comme faible vis-à-vis de l'interaction du neutron avec le noyau atomique cible.

Conservant le modèle du gaz libre, la **prise en compte des liaisons cristallines** se fait par l'utilisation d'une **largeur Doppler**  $\Delta$  plus grande, ce qui revient à définir une « **température effective** »,  $T_{eff}$ , supérieure à la température  $T$  du milieu ambiant (« température thermodynamique »).

La température  $T_{eff}$  dépend de la nature du cristal par l'intermédiaire de la « **température de Debye** »,  $\theta_D$ , qui caractérise l'activation de l'ensemble des modes vibratoires d'un solide ; elle est donnée par la formule suivante établie à partir du spectre de vibration du cristal considéré<sup>14</sup> :

$$T_{eff} = T \left[ 1 + \frac{1}{20} \left( \frac{\theta_D}{T} \right)^2 - \frac{1}{1680} \left( \frac{\theta_D}{T} \right)^4 + \frac{1}{90720} \left( \frac{\theta_D}{T} \right)^6 + \dots \right] \quad (A5.1)$$

Par exemple, des températures effectives déterminées respectivement pour l'uranium et l'oxygène dans l'oxyde d'uranium sont indiquées dans le **tableau A1**.

<sup>13</sup> D'après M. Ouisloumen, R. Sanchez, *op. cit.*, p. 192, figure 1

<sup>14</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, Saclay, INSTN/CEA, Collection Enseignement, 1989, p. 71.

Tableau A1. Températures effectives (en kelvin) déterminées pour l’uranium et l’oxygène respectivement dans l’oxyde d’uranium.<sup>15</sup>

Température thermodynamique $T$ [K]	Température effective $T_{eff}$ [K]	
	U dans $UO_2$	O dans $UO_2$
300	310	390
500	506	554
700	704	739
1000	1003	1027
1500	1502	1518
2000	2002	2013

Lorsque la température thermodynamique tend vers le zéro absolu, la température effective approche  $\frac{3}{8}\theta_D$ , ce qui signifie que pour un cristal il y a toujours un effet Doppler.

6. Méthodes de calcul d’une section efficace élargie à une température donnée

Il a déjà été indiqué plus haut qu’il existe plusieurs méthodes analytico-numériques pour calculer la section efficace élargie  $\bar{\sigma}(E, T)$  donnée par la relation (A1.10). Ces méthodes sont succinctement rappelées ci-après.

▪ La méthode « psi-chi »

La méthode «  $\psi, \chi$  » permet un calcul relativement simple de la section efficace élargie dans le cas d’une résonance isolée, étroite, hors du domaine des énergies thermiques, décrite par le **formalisme de Breit-Wigner simple niveau** (« SLBW » prise en compte des ondes « s » uniquement, voir chapitre 8 paragraphe 6). Dans ce cas, sous des hypothèses additionnelles portant sur l’énergie  $E$  du neutron incident qui doit être suffisamment élevée, sur la contribution majoritaire des énergies  $E_r$  proches de  $E$  à l’intégrale et l’extension du domaine d’intégration à l’infini, la section efficace totale élargie à la température  $T$  (A1.10a et A1.10b) peut être approximée par l’intégrale de deux fonctions de Voigt (qui combinent une gaussienne et une lorentzienne) notées respectivement  $\psi$  (psi) et  $\chi$  (chi)<sup>16 17 18 19</sup>:

$$\bar{\sigma}(E, T) \simeq 4\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} [\psi(x, \beta) + 2\kappa\alpha\chi(x, \beta)]$$

(A6.1)

<sup>15</sup> A. T. D. Butland, « A note on crystalline binding in uranium dioxide and its effect on the Doppler broadening of uranium resonances », *Annals of Nuclear Science and Engineering*, Volume 1, Issues 11–12, November-December 1974, pp. 575-577, table 1, p. 576.

<sup>16</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, Saclay, *op. cit.*, pp. 63-73 ;

<sup>17</sup> P. Reuss, J. Bussac, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris, 1978, pp. 129-149.

<sup>18</sup> R. Barjon, *Physique des réacteurs nucléaires*, Robert Bajon, Institut des sciences nucléaires, Grenoble, 1993, p. 78 *et sq.*

<sup>19</sup> S. Marguet, *La physique des réacteurs nucléaires*, Lavoisier, 2<sup>e</sup> édition, 2013, pp. 305-322.

où :

$$x = \frac{E - E_0}{\Gamma/2} \quad (\text{A6.2})$$

$E_0$  : énergie de la résonance ;

$\Gamma$  : largeur de la résonance ;

$\tilde{\lambda}$  : longueur rationalisée de de Broglie associée au neutron incident ;

$\kappa$  : nombre d'onde du neutron incident ( $k = 1/\tilde{\lambda}$ ) ;

$a$  : rayon du noyau cible ;

$$\psi(x, \beta) = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{1+y^2} \exp \left[ - \left( \frac{y-x}{\beta} \right)^2 \right] \quad (\text{A6.3})$$

$$\chi(x, \beta) = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{y}{1+y^2} \exp \left[ - \left( \frac{y-x}{\beta} \right)^2 \right] \quad (\text{A6.4})$$

avec :

$$\beta = \frac{2\Delta}{\Gamma} \quad (\text{A6.5})$$

$$\Delta = 2 \sqrt{\frac{k_B T E_0}{A}} \quad (\text{A6.6})$$

où  $A$  est la masse du noyau atomique cible en unité de masse du neutron.

En se reportant à l'expression originelle de Breit-Wigner à 0 K (voir chapitre 8), on constate que l'effet Doppler affecte le terme symétrique de la résonance ainsi que le terme d'interférence.

Le paramètre  $\Delta$  apparaissant dans (A6.6) est appelé **largeur Doppler de la résonance** présente à l'énergie  $E_0$ , pour la température  $T$ . Le paramètre  $\Delta/\Gamma$  est un indicateur de comparaison de l'ampleur de l'effet Doppler, par exemple pour la résonance :

- à 27.7 keV du  $^{56}_{26}\text{Fe}$ , à  $10^7$  K,  $\Delta/\Gamma = 2.6$  ; comme  $\Gamma = 1601.5$  meV,  $\Delta = 4163$  meV ;
- à 1.056 eV du  $^{240}_{94}\text{Pu}$ , à  $830^\circ\text{C}$ ,  $\Delta/\Gamma = 1.15$  ; comme  $\Gamma = 32.5$  meV,  $\Delta = 36.8$  meV ;
- à 0.297 eV du  $^{239}_{94}\text{Pu}$ , à  $830^\circ\text{C}$ ,  $\Delta/\Gamma = 0.2$  ; comme  $\Gamma = 89$  meV,  $\Delta = 17.8$  meV.

Lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire loin du pic de la résonance, le comportement des fonctions  $\psi(x, \beta)$  et  $\chi(x, \beta)$  est le suivant :



$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi(x, \beta) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (\text{A6.7a})$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \chi(x, \beta) = \frac{x}{1 + x^2} \quad (\text{A6.7b})$$

ce qui signifie que la section efficace élargie tend vers la formule de Breit-Wigner simple niveau, ce que montrent les « ailes » de la section efficace élargie à différentes températures sur la figure A1.

Lorsque  $\beta \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $T \rightarrow 0$  K), le comportement des fonctions  $\psi(x, \beta)$  et  $\chi(x, \beta)$  est respectivement :

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \psi(x, \beta) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (\text{A6.8a})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \chi(x, \beta) = \frac{x}{1 + x^2} \quad (\text{A6.8b})$$

et l'on retrouve logiquement la formule de Breit-Wigner simple niveau, à la température du zéro absolu, 0 K, c'est-à-dire pour une cible immobile.

À l'opposé, pour les températures élevées, lorsque l'on fait tendre  $T$  vers l'infini alors on montre que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \psi(x, \beta) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma}{2 \Delta} \exp \left[ -\frac{\Gamma^2}{4\Delta^2} x^2 \right] = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma}{2 \Delta} \exp \left[ -\left( \frac{E - E_0}{\Delta} \right)^2 \right] \quad (\text{A6.9a})$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \chi(x, \beta) = 0 \quad (\text{A6.9b})$$

On montre également que l'effet Doppler ne modifie par l'intégrale de la section efficace : ainsi lorsque la température augmente la courbe de la section efficace s'élargit tout en conservant l'aire située en dessous de celle-ci. Cette aire est peu différente de l'intégrale de résonance (voir chapitre 13, annexe III).

#### ▪ La méthode « TEMPO »

Elle consiste <sup>20 21</sup> :

- à linéariser et à tabuler préalablement la grandeur  $\sqrt{E_r} \sigma(E_r)$  sur une grille d'énergie  $E_k, k = 1, K$  :

<sup>20</sup> K. Gregson, M. F. James, *TEMPO - A General Doppler Broadening Program for Neutron Cross-Sections*, AEEW-M518, United Kingdom Atomic Energy Establishment, England, 1965.

<sup>21</sup> D. E. Cullen, C. R. Weisbin, « Exact Doppler Broadening of Tabulated Cross Sections », *Nuclear Science and Engineering*, 60, 1976, pp. 199-229, pp. 208-209, <https://doi.org/10.13182/NSE76-1>.

$$\sqrt{E_r} \sigma(E_r) = P_k + Q_k E_r \quad (\text{A6.10})$$

où  $P_k$  et  $Q_k$  sont des constantes déterminées pour chacun des intervalles d'énergie  $k$ .

- à reprendre les hypothèses additionnelles de la méthode précédente qui conduisent à négliger la seconde exponentielle de (A1.10.a ou A1.10b) aboutissant à l'expression :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(E, T) &\simeq \frac{1}{E} \sqrt{\frac{A}{4\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{E_r} \sigma(E_r) \left[ \exp\left(-\frac{A}{kT} (\sqrt{E_r} - \sqrt{E})^2\right) \right] dE_r \\ &= \frac{1}{E} \sqrt{\frac{A}{4\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{E_r} \sigma(E_r) \left[ \exp\left(-\left[\frac{E_r - E}{\Delta}\right]^2\right) \right] dE_r \end{aligned} \quad (\text{A6.11})$$

En introduisant (A6.10) dans (A6.11), il en découle :

$$\bar{\sigma}(E, T) \simeq \frac{1}{E} \sqrt{\frac{A}{4\pi kT}} \sum_{k=1}^K \int_{E_k}^{E_{k+1}} (P_k + Q_k E_r) \left[ \exp\left(-\left[\frac{E_r - E}{\Delta}\right]^2\right) \right] dE_r \quad (\text{A6.12})$$

Soit :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(E, T) &\simeq \frac{1}{2\sqrt{E}} \sum_{k=1}^K (P_k + Q_k E) [\text{erf}(x_{k+1}) - \text{erf}(x_k)] \\ &\quad + \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} [\exp(-x_k^2) - \exp(-x_{k+1}^2)] dE_r \end{aligned} \quad (\text{A6.13})$$

avec :

$$x_k = \frac{E - E_k}{\Delta}$$

#### ▪ La méthode « SIGMA1 »

La section efficace  $\sigma(E_r)$  à 0 K est prétabulée sous une forme linéaire sur une grille d'énergie  $E_k, k = 1, K$  <sup>22</sup> :

$$\sigma(E_r) = A_k + B_k E_r \quad (\text{A6.14})$$

où  $A_k$  et  $B_k$  sont des constantes déterminées pour chacun des intervalles d'énergie  $k$ .

À partir de (A1.10a) ou (A1.10b), la section efficace élargie s'écrit :

<sup>22</sup> D. E. Cullen, C. R. Weisbin, « Exact Doppler Broadening of Tabulated Cross Sections », *op. cit.*, p. 204.

$$\bar{\sigma}(E, T) \simeq \frac{1}{E} \sqrt{\frac{A}{4\pi kT}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{E_r} (A_k + B_k E_r) \left[ \exp\left(-\frac{A}{kT}(\sqrt{E_r} - \sqrt{E})^2\right) - \exp\left(-\frac{A}{kT}(\sqrt{E_r} + \sqrt{E})^2\right) \right] dE_r \quad (\text{A6.15})$$

Cette expression se traite analytiquement en utilisant les fonctions :

$$F_n(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a z^n \exp(-z^2) dz \quad (\text{A6.16})$$

#### ▪ Autres méthodes mathématiques

D'autres méthodes mathématiques plus sophistiquées ont été proposées par différents auteurs pour calculer l'intégrale du noyau Doppler de l'expression (A1.10a) de la section efficace élargie, dont le développement et l'implémentation dans des logiciels de calcul de neutronique (voir chapitre 13) sont également motivés par la recherche du meilleur compromis entre précision, temps de calcul et place mémoire requis sur ordinateur.

- La **méthode Leal-Hwang** consistant à réécrire l'expression (A1.10a) ou (A10b) de la section efficace élargie sous la forme d'une équation aux dérivées partielles résolues à l'aide de la méthode numérique aux différences finies<sup>23 24</sup>.
- Les méthodes d'intégration utilisant des formules de type **quadrature de Gauss**.<sup>25</sup>
- La méthode d'intégration par quadrature à l'aide de la **transformée de Fourier**.<sup>26</sup>
- La **méthode « multipôle »** : elle vise un *calcul exact* de l'élargissement Doppler à partir de l'expression générale « exacte » de la section efficace,  $\sigma(E_r)$ , à 0 K, issue du **formalisme de la matrice R** <sup>27</sup> mise sous la forme d'une décomposition en fractions rationnelles complexes faisant intervenir les racines des formes

<sup>23</sup> L. C. Leal, R. N. Hwang, « A Finite Difference Method for Treating the Doppler Broadening of Neutron Cross Sections », American Nuclear Society, Los Angeles, USA (1987), *Transactions of the American Nuclear Society*, Vol. 55, pp. 340-342, 1987.

<sup>24</sup> L. C. Leal, *Role of Nuclear Data in Response to Practical Applications*, HDR, Université Paris-Sud, 13 juillet 2016.

<sup>25</sup> G. Ferran, *Nouvelles méthodes numériques pour le traitement des sections efficaces nucléaires*, Thèse de doctorat, École Polytechnique, 25 septembre 2014, pp. 101-114.

<sup>26</sup> A. C. Goncalves, D. A. Palma, A. S. Martinez, « An Approximation for the Doppler Broadening Function and Interference Term Using Fourier Series », *World Journal of Nuclear Science and Technology* 2, 2012, pp.144-149, <http://dx.doi.org/10.4236/wjnst.2012.24021> ; G. Ferran, *Nouvelles méthodes numériques pour le traitement des sections efficaces nucléaires*, op. cit., pp. 114-129, <https://doi.org/10.13182/NSE92-A23928>.

<sup>27</sup> Se décline ensuite selon les différents formalismes « SLBW », « MLBW », « Reich-Moore », etc., voir chapitre 8.

polynomiales impliquées et se prêtant à une intégration dans le champ complexe (d'où la détermination de pôles et le calcul de résidus).<sup>28 29 30 31</sup>

- Les **méthodes Monte-Carlo** qui consistent à échantillonner le noyau Doppler de l'expression (A1.10a). Deux techniques d'échantillonnage existent<sup>32 33</sup> :
  - la technique d'échantillonnage dite **Doppler Broadening Rejection Correction (DBRC)**<sup>34</sup> ;
  - la technique d'échantillonnage dite **Weight Correction Method (WCM)**.<sup>35</sup>

En neutronique, on montre que globalement l'effet Doppler a pour conséquence une augmentation de la probabilité pour un neutron d'être absorbé dans une résonance (phénomène de l'« absorption résonnante »). Cela affecte par voie de conséquence les grandeurs neutroniques telles que le flux de neutrons, le facteur de multiplication des neutrons ( $k_{eff}$ ). Il induit donc un effet stabilisateur de la puissance dans un réacteur nucléaire. Dans les études courantes de neutronique, les sections efficaces sont élargies jusqu'à une énergie du neutron incident d'environ 1 MeV, énergie au-delà de laquelle la vitesse du noyau cible peut être en général négligée et donc celui-ci considéré immobile dans le référentiel du laboratoire.

---

<sup>28</sup> R. N. Hwang, « A rigorous pole representation of multilevel cross sections and its practical applications », *Nuclear Science and Engineering*, 96, 3, pp. 192-209, 1987, <https://doi.org/10.13182/NSE87-A16381> ; R. N. Hwang, « An extension of the rigorous pole representation of cross sections for reactor applications », *Nuclear Science and Engineering*, 111, Vol. 2, 1992, pp. 113-131.

<sup>29</sup> B. Forget, Sheng Xu, K. Smith, « Direct Doppler broadening in Monte Carlo simulations using the multipole representation », *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 64, February 2014, pp. 78-85, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2013.09.043>.

<sup>30</sup> T. Freiman, *Méthode multipôle pour l'évaluation au vol de la dépendance en température des sections efficaces nucléaires*, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 8 janvier 2020.

<sup>31</sup> P. Ducru, A. Alhajri, I. Meyer, B. Forget, V. Sobes, Colin Josey, J. Liang, « Windowed multipole representation of R-matrix cross sections », *Physical Review C* 103, 064610, June 14, 2021, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.103.064610>.

<sup>32</sup> A. Zoia, É. Brun, C. Jouanne, F. Malvagi, « Doppler broadening of neutron elastic scattering kernel in TRIPOLI-4<sup>®</sup> », *Annals of Nuclear Energy* 54, pp. 218-226, 2013, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2012.11.023>.

<sup>33</sup> E. E. Sunny, *On-The-Fly Generation of Differential Resonance Scattering Probability Distribution Functions for Monte Carlo Codes*, PhD, University of Michigan, 2013.

<sup>34</sup> W. Rothenstein, R. Dagan, « Two-body kinetics treatment for neutron scattering from a heavy Maxwellian gas », *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 22, Issue 11, November 1995, pp. 723-730, [https://doi.org/10.1016/0306-4549\(95\)00002-A](https://doi.org/10.1016/0306-4549(95)00002-A).

<sup>35</sup> T. Mori, Y. Nagaya, « Comparison of Resonance Elastic Scattering Models Newly Implemented in MVP Continuous-Energy Monte Carlo Code », *Journal of Nuclear Science and Technology*, Vol. 46, N° 8, 2009, p. 793-798, <https://doi.org/10.1080/18811248.2007.9711587>.

## B. La thermalisation des neutrons

L'étude de la **thermalisation**, c'est-à-dire la manière dont le neutron se comporte dans le domaine des très basses énergies, en dessous de 1 eV pour fixer les idées, nécessite de disposer de la section efficace de diffusion du neutron sous ses formes scalaire et différentielle en angle et en énergie. Cette section efficace dépend ainsi à la fois de la température et des formes physique et chimique du milieu de propagation des neutrons.

L'impact de la température du milieu de propagation sur les caractéristiques d'interaction d'un neutron avec la matière se manifeste dans le domaine thermique d'intérêt (voir **tableaux B1a** et **B1b**) pour la physique des réacteurs nucléaires, approximativement de  $10^{-3}$  eV à 1 eV. En deçà de  $5 \cdot 10^{-3}$  eV, on entre dans la région des **neutrons froids** dont la longueur associée est de l'ordre de grandeur des dimensions atomiques (quelques ångströms, Å) dans le cas d'un solide ; de tels neutrons sont utilisés pour examiner la structure d'objets par neutronographie.<sup>36</sup>

Dans le domaine thermique, l'énergie cinétique du neutron et l'énergie d'agitation thermique des noyaux cibles du milieu traversé sont comparables : au cours d'une collision, le neutron peut alors tout aussi bien gagner de l'énergie qu'en perdre ; en moyenne, il y a autant de gains en énergie que de pertes en énergie – **principe de microréversibilité** – qui caractérise l'équilibre thermodynamique.

On est en présence du **phénomène de thermalisation**. Il est complexe, recouvrant différents modes de collision dont l'existence et/ou l'importance dépendent de la nature du milieu de propagation : milieu gazeux, liquide ou solide.

En premier lieu, on décrit brièvement les types de mouvements qui animent les atomes cibles dont les noyaux interagissent avec les neutrons et l'on fournit quelques indications sur l'une des grandeurs physiques qui les décrit : le **spectre de fréquence**.

Ce spectre de fréquence est un ingrédient intervenant dans la détermination des sections efficaces d'interaction des neutrons thermiques avec le milieu liquide ou cristallin traversé. On en présente les expressions qui sont spécifiques à la fois de la nature solide, liquide ou gazeuse du milieu de propagation des neutrons concerné et des hypothèses retenues pour caractériser le type des liaisons moléculaires ou cristallines en jeu.

---

<sup>36</sup> J.-M. Zanotti, « Vibrations et relaxations dans les molécules biologiques - Apports de la diffusion incohérente inélastique de neutrons », *Journal de Physique IV France*, 130, 2005 ;, pp. 87-113, <https://jp4.journaldephysique.org/articles/jp4/pdf/2005/08/jp4130007.pdf>. À noter qu'il existe une activité connexe qui a pour but d'étudier les propriétés magnétiques des solides en utilisant l'interaction du moment magnétique du neutron à l'énergie thermique avec le moment magnétique des électrons non appariés dans le solide : voir G. Will, « Thermal Neutron Scattering by Magnetic Interaction », *Annales de Physique*, 1972, t. 7, pp. 371-405 ; <https://doi.org/10.1051/anphys/197213070371>

Tableau B1a. Domaines d'énergie et grandeurs caractéristiques associées. Les valeurs affichées ont été obtenues à partir des données du tableau 2.

Domaine d'énergie meV, eV	Vitesse $v$ $\text{m s}^{-1}$	Température $T$ K	Nombre d'onde $k$ $\text{\AA}^{-1}$	Pulsation $\omega$ $\text{rad s}^{-1}$	Longueur d'onde $\lambda$ $\text{\AA}$
$< 5.10^{-4}$ meV : <b>neutrons ultra froids</b>	$< 9.77$	$< 5.8 \cdot 10^{-4}$	$< 1.55 \cdot 10^{-2}$	$< 7.6 \cdot 10^8$	$> 404$
$5.10^{-4}$ meV – $5.10^{-3}$ meV: <b>neutrons très froids</b>	9.77 30.93	$5.8 \cdot 10^{-3}$ $5.8 \cdot 10^{-2}$	$1.55 \cdot 10^{-2}$ $4.91 \cdot 10^{-2}$	$7.6 \cdot 10^8$ $7.6 \cdot 10^9$	404 128
$5.10^{-3}$ meV – 5 meV: <b>neutrons froids</b>	30.93 978	$5.8 \cdot 10^{-3}$ 58.	$4.91 \cdot 10^{-2}$ 1.55	$7.6 \cdot 10^9$ $7.6 \cdot 10^{12}$	128 4.04
5 meV – 1 eV : <b>neutrons thermiques</b>	978 $1.38 \cdot 10^4$	58. $1.16 \cdot 10^4$	1.55 21.94	$7.6 \cdot 10^{12}$ $1.52 \cdot 10^{15}$	4.04 0.29
1 eV – $2 \cdot 10^7$ eV : <b>domaines épithermique et rapide</b>	$1.38 \cdot 10^4$ $6.18 \cdot 10^7$	$1.16 \cdot 10^4$ $2.32 \cdot 10^{11}$	21.94 $9.81 \cdot 10^4$	$1.52 \cdot 10^{15}$ $3.04 \cdot 10^{22}$	0.29 $6.4 \cdot 10^{-5}$

Tableau B1b. Valeurs des paramètres physiques corpusculaires et ondulatoires associés relatifs à différentes énergies de neutron dans le domaine thermique. Ces mêmes grandeurs peuvent être déterminées pour d'autres entités telles que les atomes et les molécules animés de mouvements.

$E = k_B T = 1 \text{ meV}$	$1.602 \cdot 10^{-22} \text{ J}$	$E = k_B T = 0.01 \text{ eV}$	$1.602 \cdot 10^{-21} \text{ J}$
$T = E/k_B \propto E$	11.605 K	$T = E/k_B$	$1.1605 \cdot 10^2 \text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$437.36 \text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$1.383 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.326 \cdot 10^{-25} \text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$2.317 \cdot 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{12} \text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$0.694 \text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$2.194 \text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	9.05 Å	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	2.86 Å

Tableau B1b (suite)

$E = k_B T = 0.0253 \text{ eV}$	$4.053 \cdot 10^{-21} \text{ J}$	$E = k_B T = 0.1 \text{ eV}$	$1.602 \cdot 10^{-20} \text{ J}$
$T = E/k_B$	$293.6 \text{ K}$	$T = E/k_B$	$1.1605 \cdot 10^3 \text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$2200 \text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$4.373 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$3.684 \cdot 10^{-24} \text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.327 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$6.12 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$3.84 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$3.49 \text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$6.938 \text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$1.8 \text{ \AA}$	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05 \cdot 10^{-1} \text{ \AA}$

$E = k_B T = 1 \text{ eV}$	$1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$	$E = k_B T = 10 \text{ eV}$	$1.602 \cdot 10^{-18} \text{ J}$
$T = E/k_B \propto E$	$1.1605 \cdot 10^4 \text{ K}$	$T = E/k_B$	$1.1605 \cdot 10^5 \text{ K}$
$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$1.383 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$	$v = \sqrt{2E/m_n} \propto \sqrt{E}$	$4.373 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$
$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$2.317 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}$	$p = \sqrt{2m_n E} \propto \sqrt{E}$	$7.327 \cdot 10^{-23} \text{ kg m s}^{-1}$
$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	$\nu = E/h \propto E$	$2.42 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{15} \text{ rad s}^{-1}$	$\omega = E/\hbar \propto E$	$1.52 \cdot 10^{16} \text{ rad s}^{-1}$
$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$21.94 \text{ \AA}^{-1}$	$k = \frac{p}{\hbar} \propto \sqrt{E}$	$69.38 \text{ \AA}^{-1}$
$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$0.29 \text{ \AA}$	$\lambda = 2\pi/k \propto 1/\sqrt{E}$	$9.05 \cdot 10^{-2} \text{ \AA}$

### 1. Mouvements intra et intermoléculaires – Spectres de fréquence

Dans le cas d’un thermaliseur liquide (eau, eau lourde...) et solide (graphite, béryllium...), les atomes des molécules ou du réseau cristallin sont liés entre eux par des forces d’interaction telles que la **force de Van der Waals**, la force **électrostatique**, les **liaisons hydrogène** ; la description de l’interaction d’un neutron avec un noyau atomique cible doit prendre en considération l’existence de ces liaisons chimiques. Dans ces configurations moléculaires ou cristallines, les atomes sont soumis à des mouvements de vibration<sup>37</sup>, de rotation et de translation. Ainsi par exemple, un atome d’hydrogène dans la molécule d’eau subit différents types de vibrations illustrés par la **figure B.1** et le **tableau B2**.<sup>38</sup>

<sup>37</sup> Dans le réseau cristallin de polyéthylène, des auteurs distinguent neuf modes différents de vibrations : « torsion, bending, stretching, rocking, twisting, wagging, , symmetric stretching, antisymmetric stretching » : voir J. R. Beyster, R. Brown, N. Comgold *et al.*, *Integral Neutron Thermalization, Annual Summary Report October 1, 1963 through September 30, 1964*, GA- 5798, General Atomic Division, San Diego, California, p. 45 ; Lin, T. P., J. L. Koenig, « Method for the Complete Vibrational Analysis of the Isolated Polyethylene Chain », *Journal of Molecular Spectroscopy* 9, 1962, pp. 228-243, [https://doi.org/10.1016/0022-2852\(62\)90232-1](https://doi.org/10.1016/0022-2852(62)90232-1).

<sup>38</sup> M. Mattes, J. Keinert, *Thermal Neutron Scattering Data for the Moderator Materials H<sub>2</sub>O, D<sub>2</sub>O and ZrH<sub>x</sub> in ENDF-6 Format and as ACE Library for MCNP(X) Codes*, IAEA, INDC(NDS)-0470, April 2005 ; p.18, <https://www-nds.iaea.org/publications/indc/indc-nds-0470.pdf>.

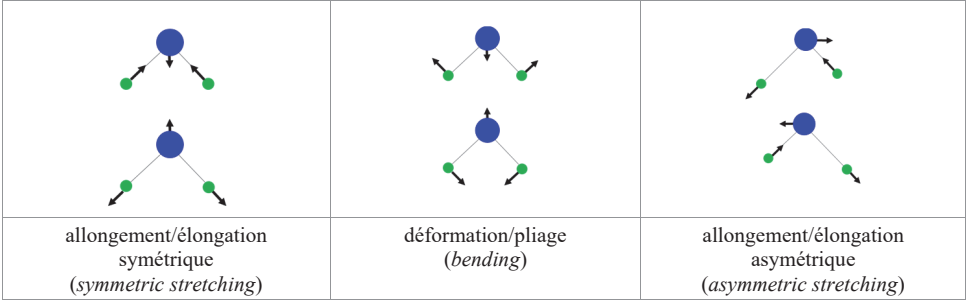


Figure B1. Modes vibrationnels d’une molécule d’eau (H<sub>2</sub>O).

Tableau B2. Exemple de valeurs de pulsations/fréquences vibrationnelles, exprimées dans différentes unités, dans le cas de l’eau légère H<sub>2</sub>O. Le passage d’une grandeur à l’autre est similaire au cas du neutron explicité plus haut dans les tableaux B1a et B1b.

		Formes physiques de l’eau								
		glace			liquide			vapeur		
		$\omega$ rad s <sup>-1</sup>	$\hbar\omega$ meV	$\tilde{\nu}$ = $\nu/c$ cm <sup>-1</sup>	$\omega$ rad s <sup>-1</sup>	$\hbar\omega$ meV	$\tilde{\nu}$ = $\nu/c$ cm <sup>-1</sup>	$\omega$ rad s <sup>-1</sup>	$\hbar\omega$ meV	$\tilde{\nu}$ = $\nu/c$ cm <sup>-1</sup>
Type de vibrations	Allongement /élongation	6.21 10 <sup>14</sup>	409	3295	6.66 10 <sup>14</sup>	436	3512	6.99 10 <sup>14</sup>	460	3706
	Déformation/ pliage par cisaillement	3.08 10 <sup>14</sup>	203	1635	3.11 10 <sup>14</sup>	205	1651	3.01 10 <sup>14</sup>	198	1595

Le neutron d’énergie thermique n’interagit donc pas donc uniquement avec un seul noyau atomique de la molécule ou du réseau cristallin considéré, mais avec l’ensemble de la structure moléculaire ou cristalline à laquelle appartient le noyau atomique cible. Les différents types de mouvements et leurs importances relatives dépendent non seulement de la nature des atomes, mais également de l’état de la matière, comme l’indique le **tableau B3**.



Tableau B3. Mouvements du noyau atomique cible.

	Mouvements		
État de la matière	vibration	rotation	translation
gaz	oui	oui	oui
liquide	oui	oui	oui
solide	oui ( <i>phonons</i> )	non	-

L’interaction d’un neutron avec une molécule ou un réseau cristallin s’étudie dans le cadre de la mécanique quantique. La structure moléculaire cible possède des **états quantiques internes** susceptibles d’interagir ou non avec le neutron : le neutron peut les exciter en cédant une fraction de son énergie cinétique initiale, à l’inverse il peut gagner de l’énergie communiquée par les atomes en mouvement dans la structure moléculaire et enfin, il peut n’y avoir aucun échange d’énergie. Dans le cas des vibrations, ces échanges (*quanta*) d’énergie absorbée ou émise sont appelés **phonons**, ou encore **spectre/distribution des fréquences de la molécule/du cristal**. Ces considérations conduisent à distinguer deux types d’interaction avec un neutron. Si la collision du neutron avec la molécule ou le cristal considéré n’affecte pas les états quantiques internes, alors celle-ci est qualifiée de **diffusion élastique**. Si les états quantiques de vibration et/ou de rotation s’en trouvent modifiés en raison d’une perte ou d’un gain d’énergie, on parle de **diffusion inélastique**. Ces modes de mouvements sont formellement représentés par un **spectre de fréquence** (ou de **pulsation**) ou **spectre de phonons** spécifique. Le **spectre de fréquence des phonons global**<sup>39</sup>,  $\rho(\omega)$ , est obtenu par sommation des trois composantes :

$$\rho(\omega) = w_t \rho_t(\omega) + w_c \rho_c(\omega) + \sum_k w_{d,k} \rho_{d,k}(\omega_{d,k}) \tag{B1.1}$$

où :

- $\rho_t(\omega)$  : spectre de fréquence des phonons associés aux **mouvements de translation de la molécule**, de poids relatif  $w_t$  ;
- $\rho_c(\omega)$  : spectre de fréquence des phonons associés aux mouvements **intermoléculaires**, de poids relatif  $w_c$  ;
- $\rho_{d,k}(\omega_k)$  : spectre de fréquence des phonons associés aux mouvements **intramoléculaires**, de poids relatif  $w_{d,k}$ .

On a la condition :  $w_t + w_c + \sum_k w_{d,k} = 1$  (B1.2)

Les quantités  $\rho(\omega)d\omega$  ou  $\rho_i(\omega)d\omega$  décrivent les probabilités d’existence de modes normaux entre  $\omega$  et  $\omega + d\omega$ . Ces spectres ainsi que le poids relatif de chacun d’entre eux dans le spectre global dépendent de la nature du milieu et de sa température. Ils font l’objet de mesures. Les **figures B2 et B3** montrent des spectres de l’eau légère H<sub>2</sub>O.

<sup>39</sup> R. E. MacFarlane, « Neutron Slowing Down and Thermalization », *op. cit.*, p. 195.

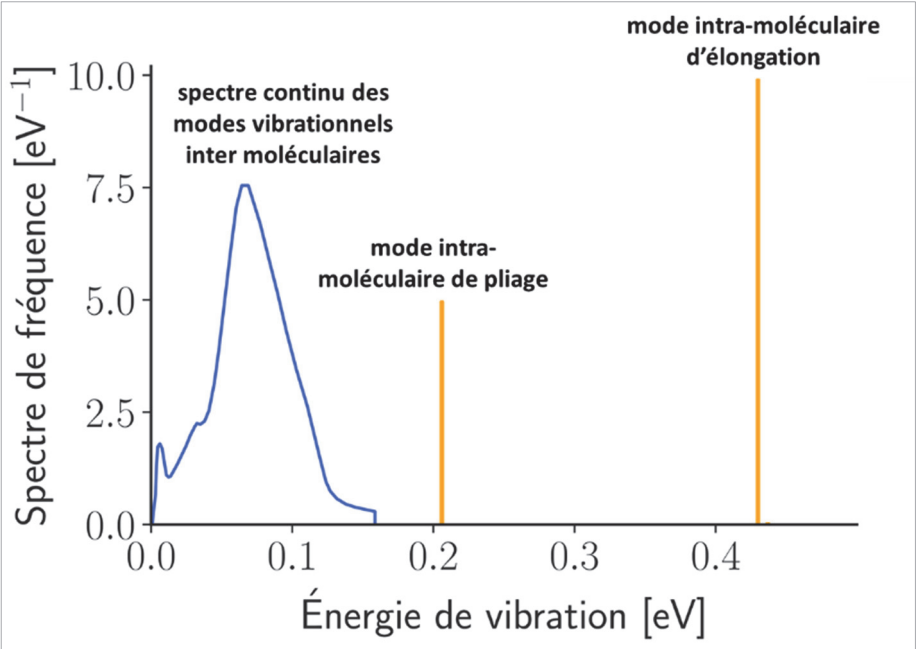


Figure B2. Les spectres de fréquence des phonons  $\rho_c(\varpi)$  et  $\rho_d(\varpi)$  de l'hydrogène dans l'eau légère  $\text{H}_2\text{O}$  à la température 294 K ; on indique ci-après un exemple de valeurs relatives à ces spectres de fréquence.<sup>40 41</sup>

Énergie propre du 1 <sup>er</sup> oscillateur (meV)	0.205
Énergie propre du 2 <sup>e</sup> oscillateur (meV)	0.430
Poids du spectre continu, $w_c$	0.5224
Poids du spectre du mouvement de translation, $w_t$	0.0086
Poids du 1 <sup>er</sup> oscillateur, $w_{d,1}$	0.1563
Poids du 2 <sup>e</sup> oscillateur, $w_{d,2}$	0.3126

On vérifie que :  $w_c + w_t + w_{d,1} + w_{d,2} = 1$

<sup>40</sup> J.-P. Scotta, G. Noguère, D. Bernard, J. I. Marquez Damian, A. Santamarina, « Impact of the thermal scattering law of H in  $\text{H}_2\text{O}$  on the isothermal temperature reactivity coefficients for UOx and MOx fuel lattices in cold operating conditions », *EPJ Nuclear Sci. Technol.* 2, 28 2016, Fig. 1, p. 4, <https://doi.org/10.1051/epjn/2016020>.

<sup>41</sup> Voir aussi : J.-P. Scotta, *Improvement of the thermal and epithermal neutron scattering data for the interpretation of integral experiments*, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille, 2017, p. 31 et p. 47, figure 3.7.

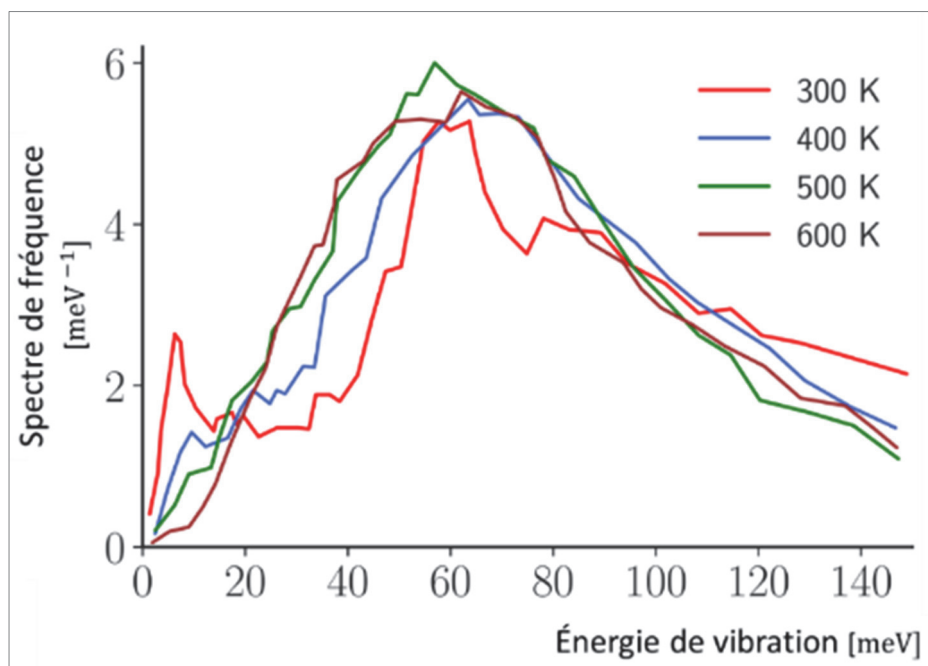


Figure B3. Allure du spectre de fréquence des phonons (mesuré) de l'eau légère  $H_2O$  à plusieurs températures différentes.<sup>42</sup>

Les **figures B4, B5 et B6** montrent le spectre de fréquence des phonons respectivement du carbone dans le graphite polycristallin, du deutérium dans l'eau lourde et l'hydrogène dans l'hydruure de zirconium.

<sup>42</sup> J. Vaibhav, *Theoretical and Experimental Approach Towards Generation of Thermal Scattering Law for Light Water*, Thèse de doctorat, Université de Lille, octobre 2018, p. 38. Voir aussi A. G. Novikov, A. A. Van'kov, L. S. Gosteva, « Temperature dependence of the general spectrum for water », *Journal of Structural Chemistry*, 31, 1990, pp. 77-85, <https://doi.org/10.1007/BF00752017>.

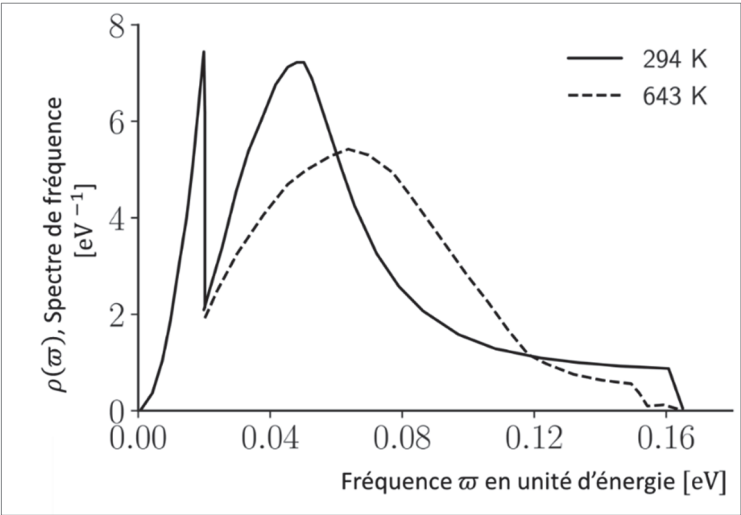


Figure B4. Allure du spectre de fréquence des phonons du deutérium dans de l'eau lourde  $D_2O$  à deux températures 293.6 K et 643.2 K.<sup>43</sup>

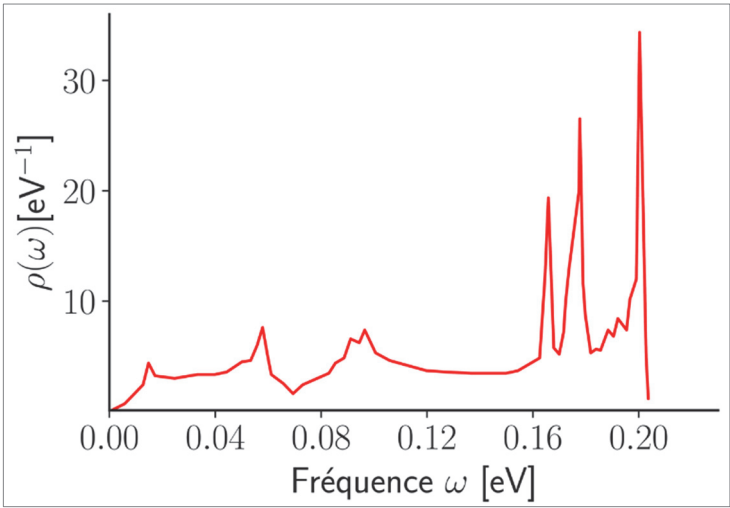


Figure B5. Allure du spectre de fréquence des phonons dans du graphite polycristallin.<sup>44</sup>

<sup>43</sup> M. Mattes, J. Keinert, *Thermal Neutron Scattering Data for the Moderator Materials  $H_2O$ ,  $D_2O$  and  $ZrH_x$  in ENDF-6 Format and as ACE Library for MCNP(X) Codes*, op. cit., figure 6.1, p. 43.

<sup>44</sup> M. Mattes, J. Keinert, *Status of Thermal Neutron Scattering Data for Graphite*, INDC(NDS)-0475, IAEA, July 2005, figure 3.1, p. 9, <https://www-nds.iaea.org/publications/indc/indc-nds-0475.pdf>.

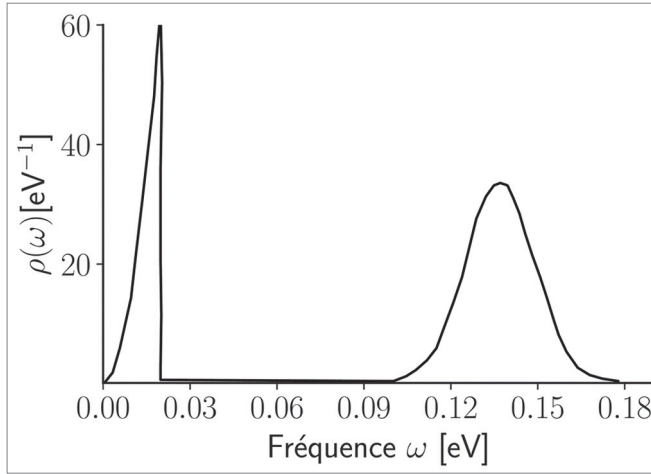


Figure B6. Allure du spectre de fréquence des phonons de l'hydrogène dans l'hydrure de zirconium.<sup>45</sup>

Parallèlement, aux mesures et au développement de modèles, les ressources informatiques s'accroissant, des simulations sont mises en œuvre pour déterminer les spectres de fréquence *via* des approches telles que la **dynamique moléculaire** : on réalise des **simulations *ab initio*** à partir de la caractérisation des forces de liaison entre atomes. En simulant le mouvement de  $N$  atomes du réseau cristallin, le spectre de fréquence est déterminé par la transformée de Fourier suivante :

$$\rho(\omega) = \frac{1}{3k_B T} \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t=0) e^{i\omega t} dt \quad (\text{B1.3})$$

où  $\vec{v}_i$  est le vecteur vitesse de l'atome  $i$ ,  $\vec{v}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t=0)$  est le produit scalaire des vitesses de l'atome  $i$  à l'instant  $t$  et à l'instant  $t=0$ . Le terme

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i(t) \cdot \vec{v}_i(t=0) \quad (\text{B1.4})$$

représente la **fonction d'autocorrélation des vitesses**.<sup>46 47</sup>

On verra dans la suite

Dans la suite, après avoir comparé la section efficace neutronique scalaire de diffusion

<sup>45</sup> M. Mattes, J. Keinert, *Thermal Neutron Scattering Data for the Moderator Materials H<sub>2</sub>O, D<sub>2</sub>O and ZrH<sub>x</sub> in ENDF-6 Format and as ACE Library for MCNP(X) Codes*, op. cit., p. 32, Fig. 5.1.

<sup>46</sup> J. Vaibhav, *Theoretical and Experimental Approach Towards Generation of Thermal Scattering Law for Light Water*, op. cit., p. 104. B. D. Hehr, *Development of the Thermal Neutron Scattering Cross Sections of Graphitic Systems using Classical Molecular Dynamics Simulations*, PhD, North Carolina State University, 2010, p. 55 ;

<sup>47</sup> G. L. Squires, *Introduction to the theory of thermal neutron scattering*, op.cit., pp. 99-100.

respectivement sur un atome cible libre et chimiquement fortement lié, on présente les sections efficaces neutroniques successivement dans :

- le cas où le noyau atomique cible constitue une entité complètement libre, on parle alors de **modèle du gaz monoatomique** ou **du gaz libre** ;
- celui dans lequel les **liaisons moléculaires et cristallines** doivent être prises en compte, faisant intervenir les spectres de fréquence sus mentionnés.

Dans les deux cas, les sections efficaces de diffusion thermiques satisfont la condition de **bilan détaillé** ou **principe de microréversibilité** – ou encore **principe de réciprocité** – qui stipule qu'à l'équilibre thermique il y a égalité, pour les neutrons diffusant dans le milieu considéré, entre le taux de transfert par collision sur un noyau atomique des neutrons d'énergie  $E$  à une énergie  $E'$  et le taux de transfert des neutrons d'énergie  $E'$  à l'énergie  $E$ . Dans le cœur d'un réacteur nucléaire, dans le domaine d'énergie thermique, à la température  $T$ , le flux angulaire et énergétique des neutrons,  $\Phi(E, T)/4\pi$ , est proche d'une **distribution de Maxwell-Boltzmann** et isotrope dans le référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \Phi(E, T) N(\vec{r}) \sigma_s(E) f_s(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') \\ = \frac{1}{4\pi} \Phi(E', T) N(\vec{r}) \sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (\text{B1.5})$$

où :

- $\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'$  : directions des neutrons avant et après choc ;
- $N(\vec{r})$  : concentration des noyaux atomiques cibles ( $\text{cm}^{-3}$ ) ;
- $\Phi(E, T)/4\pi, \Phi(E', T)/4\pi$  : flux angulaire de neutrons ( $\text{cm}^{-2} \text{MeV}^{-1} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1}$ ) ;
- $\sigma_s(E), \sigma_s(E')$  : sections efficaces microscopiques de diffusion ( $\text{cm}^2$  ou barns) ;
- $f_s(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}'), f_s(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$  : lois de transfert angulaire et énergétique ( $\text{MeV}^{-1} \text{sr}^{-1}$ ) ;
- $\sigma_s(E) f_s(E \rightarrow E', \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}'), \sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$  : sections efficaces microscopiques différentielles en angle et en énergie.

Sauf mention contraire, dans la suite on conserve les notations de la partie A consacrée à l'effet Doppler.

## 2. Comparaison entre la section efficace scalaire de diffusion d'un neutron sur un atome lié et celle d'un atome libre

Dans le domaine thermique considéré, on admet que la diffusion élastique d'un neutron sur un noyau atomique « libre » est isotrope dans le centre de masse. On désigne par  $\sigma_{s0}$  la section efficace scalaire de diffusion supposée constante. La section efficace différentielle angulaire est donc (voir chapitre 8) :

$$\sigma_s(\mu_c) = \frac{\sigma_{s0}}{4\pi} \quad (\text{B2.1})$$

où  $\mu_C$  est le cosinus de l'angle de déviation dans le référentiel du centre de masse.

Dans la situation d'une **diffusion élastique** sur un **atome chimiquement lié (*bound*)** à une molécule de masse suffisamment élevée pour admettre la diffusion isotrope dans le référentiel du laboratoire, la section efficace différentielle angulaire s'écrit <sup>48</sup> :

$$\sigma_{sb}(\mu_L) = \frac{\sigma_{sb}}{4\pi} \quad (\text{B2.2})$$

où  $\mu_L$  est le cosinus de l'angle de déviation dans le référentiel du laboratoire.

Passant d'un référentiel à l'autre, on a :

$$\sigma_s(\mu_C)d\mu_C = \sigma_s(\mu_L)d\mu_L ; \quad \sigma_{sb}(\mu_C)d\mu_C = \sigma_{sb}(\mu_L)d\mu_L \quad (\text{B2.3})$$

Or, pour une diffusion vers l'avant dans le référentiel du laboratoire (pas de déviation, donc pas de transfert d'énergie à la cible), tout se passe comme si la cible était sans masse, de sorte que les sections efficaces pour  $\mu_L = 1$  sont égales :

$$\sigma_{sb}(\mu_L = 1) = \sigma_s(\mu_L = 1) \quad (\text{B2.4})$$

On en déduit avec (B2.2) :

$$\sigma_{sb} = 4\pi\sigma_{sb}(\mu_L = 1) = 4\pi\sigma_s(\mu_L = 1) \quad (\text{B2.5})$$

Soit avec (B2.3) puis avec (B2.1) :

$$\sigma_{sb} = 4\pi\sigma_s(\mu_C) \left. \frac{d\mu_C}{d\mu_L} \right|_{\mu_L=\mu_C=1} = \sigma_{s0} \left. \frac{d\mu_C}{d\mu_L} \right|_{\mu_L=\mu_C=1} \quad (\text{B2.6})$$

Or (voir chapitre 7) :

$$\mu_L = \frac{1 + A\mu_C}{\sqrt{1 + 2A\mu_C + A^2}} \quad , \quad \frac{d\mu_L}{d\mu_C} = \frac{A^2(A + \mu_C)}{[1 + 2A\mu_C + A^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{B2.7})$$

$$\left. \frac{d\mu_C}{d\mu_L} \right|_{\mu_L=\mu_C=1} = \frac{A^2(A + 1)}{[1 + 2A + A^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{A^2}{(1 + A)^2} \quad (\text{B2.8})$$

D'où, en remplaçant dans (B2.6) :

---

<sup>48</sup> G. I. Bell, S. Glasstone, *Nuclear Reactor Theory*, op. cit., Chapter 7, « Neutron Thermalization ».

$$\sigma_{sb} = \sigma_{s0} \left(1 + \frac{1}{A}\right)^2 \quad (\text{B2.9})$$

Ce qui montre que la section efficace de diffusion du neutron par un atome lié est significativement plus grande que celle relative à ce même atome libre.

### Exemple

Pour l'hydrogène,  $A = 1$ ,  $\sigma_s \approx 20$  barns et donc  $\sigma_{sb} \approx 80$  barns, valeur quatre fois plus élevée que celle de la section efficace de diffusion élastique de l'atome d'hydrogène libre.

De (B2.9) découle la relation entre les **longueurs de diffusion élastique** d'un neutron sur un atome libre et un atome lié. En effet, par définition (voir chapitre 8) :

$$\sigma_s = 4\pi b^2 \quad (\text{B2.10})$$

où  $b$  est la **longueur de diffusion** sur un atome libre. En remplaçant dans (B2.9) on obtient :

$$\sigma_{sb} = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{1}{A}\right)^2 = 4\pi \left[b \left(1 + \frac{1}{A}\right)\right]^2 \quad (\text{B2.11})$$

La longueur de diffusion de la diffusion élastique d'un neutron sur un atome lié est donc :

$$b_s = b \left(1 + \frac{1}{A}\right) \quad (\text{B2.12})$$

## 3. Modèle du gaz libre

Dans le cas où les neutrons se propagent dans un milieu dans lequel on peut négliger les liaisons qui unissent les atomes, on décrit la collision dans le cadre d'une **approximation dite gaz libre** ou **gaz monoatomique** (*free gas model* ou *monoatomic gas model*). Le choc élastique du neutron sur le noyau atomique cible est supposé isotrope dans le référentiel du centre de masse.

On reprend la définition de la section efficace différentielle de transfert énergétique et angulaire (A3.3) :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T) &= \frac{1}{v} \int_{\vec{V}} v_r \sigma_s(v_r) p(\vec{v}, \vec{V} \rightarrow \vec{v}') P(\vec{V}, T) d\vec{V} \\ &\equiv \frac{1}{v} \int_{\vec{V}} v_r \sigma_s(E_r) h(E_r \rightarrow E', \mu_L) P(\vec{V}, T) d\vec{V} \end{aligned} \quad (\text{B3.1})$$

où :

- $h(E_r \rightarrow E', \mu_L)$  est la densité de probabilité de transfert énergétique et angulaire dans le référentiel du laboratoire,
- $P(\vec{V}, T)$  est la distribution des vitesses du noyau cible, dépendant de la température  $T$  du milieu (voir relations (A1.3) et (A1.9)).



Sous les hypothèses énoncées ci-dessus et en observant la lente variation de  $\sigma_s(E_r)$  en fonction de  $E_r$ ,  $\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T)$  prend la forme suivante <sup>49</sup> :

$$\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T) \simeq \frac{\sigma_{sb}}{2k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \exp \left[ -\frac{(\alpha + \beta)^2}{4\alpha} \right] \quad (\text{B3.2})$$

$$\alpha = \frac{E' + E - 2\mu_L \sqrt{EE'}}{Ak_B T} \quad (\text{B3.3})$$

$$\beta = \frac{E - E'}{Ak_B T} \quad (\text{B3.4})$$

Dans la littérature, l'expression (B3.2) est aussi souvent écrite comme :

$$\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T) \simeq \frac{\sigma_{sb}}{2k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} \hat{S}(\alpha, \beta) \quad (\text{B3.5})$$

avec dans ce cas particulier du **gaz libre** :

$$\hat{S}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \exp \left[ -\frac{(\alpha + \beta)^2}{4\alpha} \right] \quad (\text{B3.6})$$

$\hat{S}(\alpha, \beta)$  est une densité de probabilité dont les deux premiers moments sont :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(\alpha, \beta) d\beta = 1 \quad (\text{B3.7})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta S(\alpha, \beta) d\beta = -\alpha \quad (\text{B3.8})$$

On utilise aussi l'écriture suivante<sup>50 51</sup> :

<sup>49</sup> G. I. Bell, S. Glasstone, *Nuclear Reactor Theory, op. cit.*, Chapter 7, « Neutron Thermalization », p. 315 *et sq.* ; R. K. Osborn, « Some Characteristics of the Thermal Neutron Scattering Probability », *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 3, Issue 1, 1958, pp. 29-37.

<sup>50</sup> R. E. MacFarlane, A. C. Kahler, « Methods for Processing ENDF/B-VII with NJOY », *Nuclear Data Sheets*, 111, 2739–2890, 2010, p. 2772, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2010.11.001>.

<sup>51</sup> P. Reuss, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris, 1978, p. 132.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T) &= \frac{\sigma_{sb}}{2k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha}\right] \\ &= \frac{\sigma_{sb}}{2k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}\right) S(\alpha, \beta) \quad (\text{B3.9})\end{aligned}$$

et dans ce cas,

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \exp\left[-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha}\right] \quad (\text{B3.10})$$

On a donc la relation :

$$S(\alpha, \beta) = \exp\left(\frac{\beta}{2}\right) \hat{S}(\alpha, \beta) \quad (\text{B3.11})$$

Le bilan détaillé (ou principe de microréversibilité) s'exprime par la relation :

$$S(\alpha, \beta) = S(\alpha, -\beta) \quad (\text{B3.12})$$

stipulant le caractère symétrique de la loi de transfert énergétique dans le domaine des énergies thermiques.

Pour déterminer la section efficace différentielle de transfert en énergie, il faut calculer l'intégrale suivante :

$$\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', T) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', \mu_L, T) d\mu_L \quad (\text{B3.13})$$

Toujours dans le cas de l'hypothèse du « gaz libre » et de l'isotropie du choc dans le référentiel du centre de masse, on obtient les relations suivantes<sup>52</sup> :

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', T) &= \frac{\sigma_{s0}\eta^2}{2E} \left\{ \exp\left(\frac{E}{k_B T} - \frac{E'}{k_B T}\right) \left[ \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E}{k_B T}} - \rho \sqrt{\frac{E'}{k_B T}}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \pm \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E}{k_B T}} + \rho \sqrt{\frac{E'}{k_B T}}\right) \right] + \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E'}{k_B T}} - \rho \sqrt{\frac{E}{k_B T}}\right) \\ &\quad \left. \mp \operatorname{erf}\left(\eta \sqrt{\frac{E'}{k_B T}} + \rho \sqrt{\frac{E}{k_B T}}\right) \right\}, \quad (\text{B3.14})\end{aligned}$$

avec :

<sup>52</sup> G. I. Bell, S. Glasstone, *Nuclear Reactor Theory*, op. cit., pp. 333-337.

$$\eta = \frac{A+1}{2\sqrt{A}}, \quad \rho = \frac{A-1}{2\sqrt{A}}, \quad (\text{B3.15})$$

le signe supérieur apparaissant dans l'équation se référant aux deux cas :

- gain d'énergie :  $E < E'$  ;
- perte d'énergie :  $E > E'$ .

Dans le cas de l'hydrogène,  $A = 1$ , d'après (B3.15)  $\eta = 0$  et  $\rho = 0$  et les relations (B3.14) deviennent :

$$\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', T) = \frac{\sigma_{s0}\eta^2}{2E} \exp\left(\frac{E-E'}{k_B T}\right) \operatorname{erf}\sqrt{\frac{E}{k_B T}} \quad \text{pour } E < E' \quad (\text{B3.16})$$

$$\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', T) = \frac{\sigma_{s0}\eta^2}{2E} \operatorname{erf}\sqrt{\frac{E'}{k_B T}} \quad \text{pour } E > E' \quad (\text{B3.17})$$

en rappelant que :

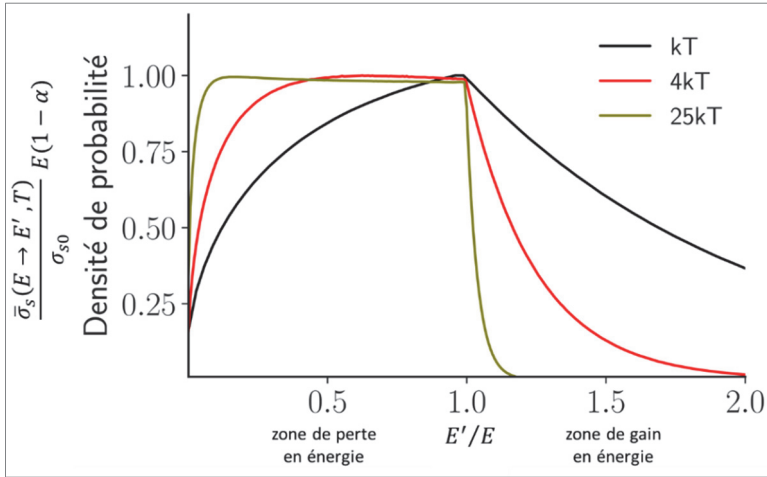
$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Les **figures B7** et **B8** représentent, en fonction du rapport énergie cinétique finale sur énergie cinétique initiale du neutron ( $E'/E$ ), respectivement dans le cas de l'hydrogène ( $A = 1$ ) et celui de l'oxygène ( $A = 16$ ), la grandeur suivante :

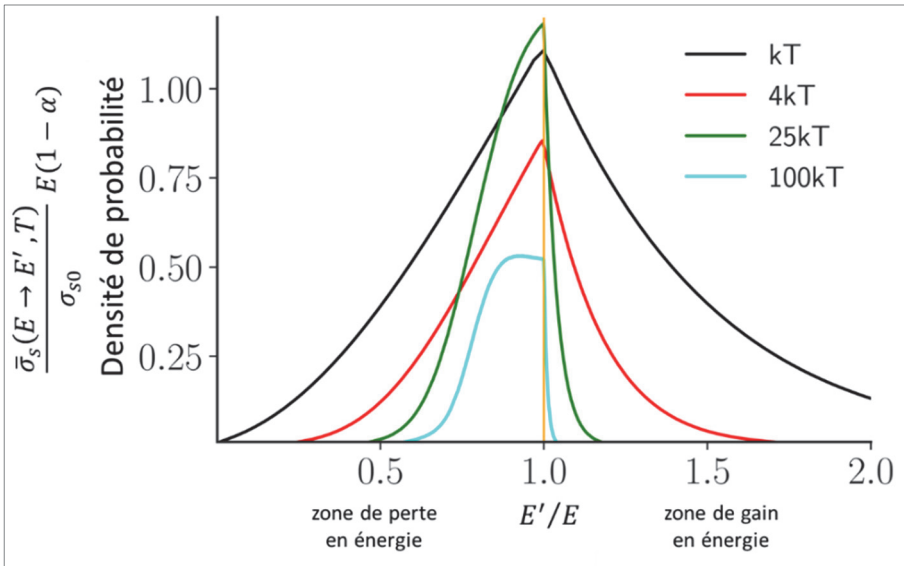
$$\frac{\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', T)}{h_E(E \rightarrow E')} = \frac{\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', T)}{\sigma_{s0}} E(1 - \alpha) \quad (\text{B3.18})$$

où la densité de transfert en énergie  $\frac{\bar{\sigma}_s(E \rightarrow E', T)}{\sigma_{s0}}$  a été ramenée à la densité de transfert  $h_E(E \rightarrow E')$  du cas choc isotrope sur un noyau atomique cible immobile (voir relation (A3.2)) :

$$h_E(E \rightarrow E') = \frac{1}{(1 - \alpha)E}, \quad \alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$$



Figures B7. Densités de probabilité de transfert en énergie en fonction du rapport  $(E'/E)$  dans le cas de l'hydrogène ( $A = 1$ ) pour diverses énergies du neutron incident :  $k_B T$ ,  $4 k_B T$ ,  $25 k_B T$ ,  $T$  étant la température du milieu.<sup>53</sup>



Figures B8. Densités de probabilité de transfert en énergie en fonction du rapport  $(E'/E)$  dans le cas de l'oxygène ( $A = 16$ ) pour diverses énergies du neutron incident :  $k_B T$ ,  $4 k_B T$ ,  $25 k_B T$ ,  $T$  étant la température du milieu.<sup>54</sup>

<sup>53</sup> D'après G. I. Bell, S. Glasstone, *Nuclear reactor theory*, op. cit. p. 336.

<sup>54</sup> *Ibid.*

#### 4. Cas des liaisons moléculaires – Expressions générales de la section efficace différentielle de diffusion

Dans le cas où les **liaisons moléculaires** ne peuvent plus être négligées, on distingue les trois types suivants de diffusion possibles :

- la **diffusion élastique cohérente** ;
- la **diffusion inélastique incohérente** ;
- la **diffusion élastique incohérente**.

Les **figures B9a** et **B9b** illustrent la variation des sections efficaces relatives à ces différents processus pour la diffusion d'un neutron avec un noyau de carbone dans une cible de graphite polycristalline :

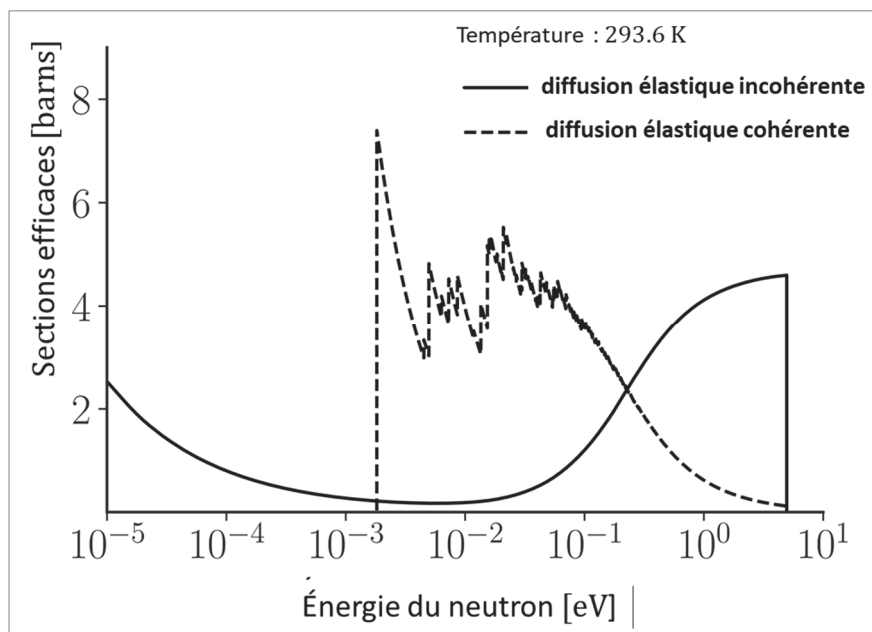


Figure B9a. Sections efficaces de diffusion élastique cohérente et de diffusion inélastique incohérente d'un neutron sur du graphite, en fonction de l'énergie.<sup>55</sup>

<sup>55</sup>D'après M. Mattes, J. Keinert, *Status of Thermal Neutron Scattering Data for Graphite*, INDC(NDS)-0475, IAEA, July 2005, figure 6.2, p. 18.

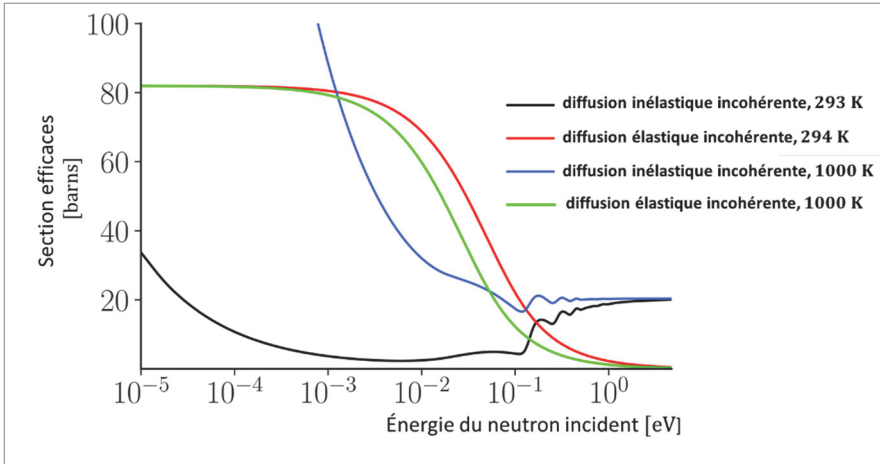


Figure B9b. Section efficace de diffusion élastique incohérente et de diffusion inélastique incohérente d'un neutron sur l'hydrogène lié dans de l'hydrure de Zirconium ZrH, en fonction de l'énergie.<sup>56</sup>

Le qualificatif **cohérente** renvoie au fait que, lors de la diffusion, un **phénomène d'interférences** se produit entre les ondes diffusées par la structure atomique régulière, par exemple celle d'un monocristal : ce phénomène est analogue à celui de la diffraction de la lumière (voir l'expérience des **fentes de Young**).

Un tel effet se manifeste si la longueur d'onde de de Broglie d'un neutron d'énergie thermique est de l'ordre de grandeur de la distance séparant deux atomes dans une molécule ou un cristal (on rappelle que :  $\text{longueur d'onde (cm)} = 2.86 \cdot 10^{-9} / \sqrt{\text{énergie du neutron (eV)}}$ , exemple : un neutron de 0,01 eV a une longueur d'onde de  $2,7 \times 10^{-8}$  cm ; voir tableau B1).

Dans le cas d'un cristal, lorsqu'une condition, appelée **équation de Bragg**, reliant la longueur d'onde de l'onde associée au neutron incident à la distance caractéristique séparant deux rangées planes d'atomes du réseau cristallin est satisfaite, on observe des directions privilégiées de la diffusion des neutrons. Il existe une énergie minimale (ou longueur d'onde maximale du neutron) en deçà de laquelle (au-delà de laquelle) ce phénomène ne se produit plus : c'est la **coupure de Bragg** ; elle correspond à une longueur d'onde égale à deux fois la distance maximale existant entre deux couches consécutives d'atomes du réseau cristallin considéré. Ainsi par exemple, cette distance est de 2Å dans le cas du béryllium, ce qui correspond à une énergie de coupure de 0.005 eV (voir **figure B10**).

La **figure d'interférences** n'est pas la même lorsqu'il s'agit d'une diffusion sur un monocristal ou sur un polycristal formé de petits cristaux (« cristallites ») dont la forme, la dimension et l'orientation dans l'espace sont quelconques.

<sup>56</sup> D'après M. Mattes, J. Keinert, *Thermal Neutron Scattering Data for the Moderator Materials H<sub>2</sub>O, D<sub>2</sub>O and ZrH<sub>x</sub> in ENDF-6 Format and as ACE Library for MCNP(X) Codes*, op. cit., Figure 5.2, p. 33.

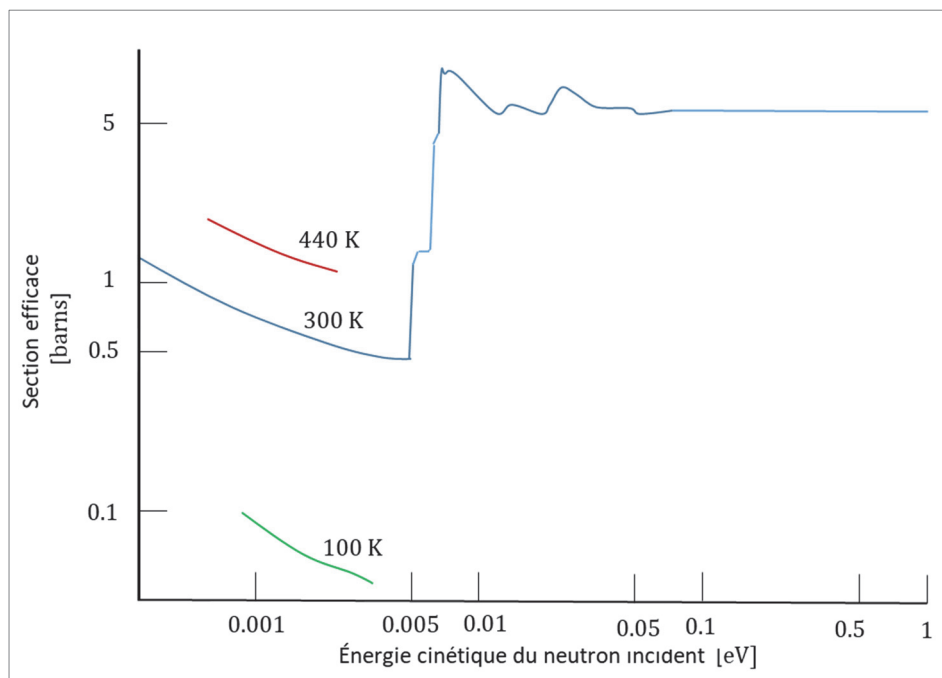


Figure B10. Allure de la section efficace de diffusion élastique des neutrons thermiques sur du béryllium.<sup>57</sup> Cette figure met en évidence l'énergie de coupure à 0.005 eV en deçà de laquelle on n'observe plus de pics de Bragg, car la longueur d'onde associée au neutron incident devient plus grande que la distance caractéristique entre deux plans d'atomes du réseau cristallin.

Dans le cas de la **diffusion incohérente**, il n'y a pas de telles interférences. Une distribution aléatoire des sites diffuseurs défavorise le phénomène d'interférences au profit d'une diffusion incohérente présentant une distribution angulaire tendant vers l'isotropie.

La **figure B11** schématise les deux configurations de la diffusion respectivement cohérente et incohérente faisant ou non apparaître un phénomène d'interférences.

Le **tableau B4** rassemble quelques valeurs de ces différentes sections efficaces de diffusion dans le domaine thermique pour différents nucléides de numéro atomique  $Z$ , de nombre de masse  $A$ , de spin et parité  $I(\pi)$  et d'abondance isotopique  $c$  en %. Les valeurs des amplitudes ou longueurs de diffusion  $b_{coh}$  et  $b_{inc}$  sont majoritairement positives et dans certains cas elles prennent des valeurs négatives signifiant que l'énergie du noyau composé formé est proche d'un niveau excité, c'est-à-dire d'une résonance susceptible d'absorber le neutron (l'absorption est représentée par la partie imaginaire de l'amplitude de diffusion).<sup>58</sup>

<sup>57</sup> D'après G. I. Bell, S. Glasstone, *Nuclear Reactor Theory*, op. cit., p. 322, ifigure 7.2.

<sup>58</sup> G. Roth, « Diffraction », dans T. Brückel, G. Heger, D. Richter, G. Roth, R. Zorn (Editors), *Neutron Scattering, Lectures of the JCNS Laboratory Course*, op. cit., p. 4.13.

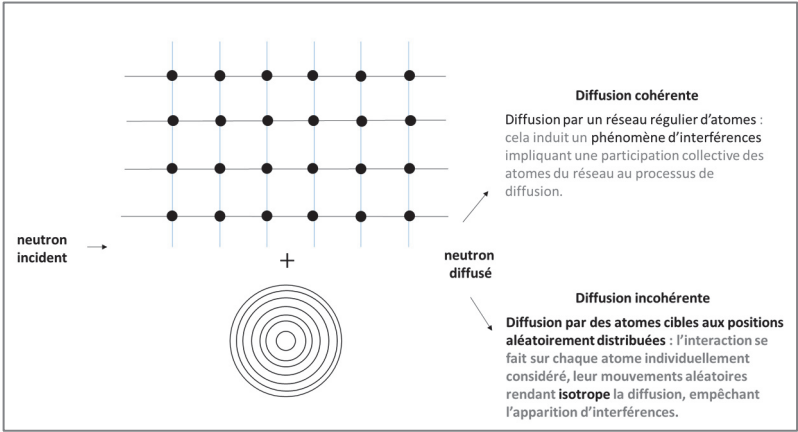


Figure B11. Schéma relatif illustrant le phénomène de diffusion d'un neutron par une structure moléculaire.<sup>59</sup>

Tableau B4. Exemple de valeurs en barns des sections efficaces de diffusion cohérente,  $\sigma_{coh}$ , de diffusion incohérente,  $\sigma_{inc}$  de diffusion totale de l'atome lié  $\sigma_s$ , d'absorption  $\sigma_a$  à l'énergie  $E' = 0,025 \text{ eV}$  ( $v' = 2200 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\lambda = 1.798 \text{ \AA}$ ).<sup>60</sup> La section efficace incohérente  $\sigma_{inc}$  est la somme des deux sections efficaces diffusion inélastique incohérente ( $\sigma_{iinc}$ ) et de diffusion élastique incohérente ( $\sigma_{einc}$ ). En dernière colonne figurent les sections efficaces d'absorption. Les grandeurs  $b_{coh}$  et  $b_{inc}$  sont les amplitudes de diffusion ou longueurs de diffusion (leur définition relève du traitement quantique ondulatoire du phénomène de diffusion, voir chapitre 8) relatives respectivement à la diffusion cohérente et à la diffusion incohérente, exprimées en fermi. Ces valeurs sont affectées d'une incertitude non reportée ici.  $c$  est l'abondance isotopique (en 4<sup>e</sup> colonne).

Z	A	$I(\pi)$	c	$b_{coh}$	$b_{inc}$	$\sigma_{coh}$	$\sigma_{inc}$	$\sigma_s$	$\sigma_a$
H 1				-3.7390		1.7568	80.26	82.02	0.3326
	1	1/2(+)	99.985	-3.7406	25.274	1.7563	80.27	82.03	0.3/28
	2	1(+)	0.015	6.871	4.04	5.592	2.05	7.64	0.000519
	3	1/2(+)		4.792	-1.04	2.89	0.14	3.03	0
C 6				6.6460		5.550	0.001	5.551	0.00350
	12	0(+)	98.90	6.6511	0	5.559	0	5.559	0.00353
	13	1/2(-)	1.10	6.19	-0.52	4.81	0.034	4.64	0.00137
N 7				9.36		11.01	0.59	11.51	1.90
	14	1(+)	99.63	9.37	2.0	11.03	0.5	11.53	1,91
	15	1/2(-)	0.37	6.44	-0.02	5.21	0.00005	5.21	0.000024
O 8				5.803		4.232	0.000	4.232	0.00019
	16	0(+)	99.762	5.803	0	4.232	0	4.232	0.00010
	17	5/2(+)	0.038	5.78	0.18	4.20	0.004	4.20	0.236

<sup>59</sup> D'après , « Diffraction », dans T. Brückel, G. Heger, D. Richter, G. Roth, R.einer Zorn (Editors), *Neutron Scattering, Lectures of the JCNS Laboratory Course*, RWTH Aachen, University Münster, Vol. 39, Forschungszentrum Jülich GmbH, 2012, p. 4.13.

<sup>60</sup> V. F. Sears, « Neutron scattering lengths and cross sections », *Neutron News*, vol. 3, n° 3, 1992, pp. 26-37, Table 1, p. 29. Voir aussi : <https://www.ncnr.nist.gov/resources/n-lengths/>.



Dans d'autres cas comme celui de l'hydrogène abordé plus loin, la raison explicative réside dans le fait que les longueurs de diffusion sont aussi dépendantes du **spin** des entités en interaction.

Les sections efficaces  $\sigma_{coh}$  et  $\sigma_{inc}$  sont respectivement obtenues par les relations :

$$\sigma_{coh} = 4\pi |b_{coh}|^2, \quad \sigma_{inc} = 4\pi |b_{inc}|^2 \quad (B4.1)$$

Dans le cadre d'une interprétation géométrique,  $2b_{coh}$  et  $2b_{inc}$  sont les rayons d'une sphère dure provoquant une diffusion du neutron équivalente.

Les valeurs des sections efficaces associées à l'élément chimique sont obtenues en faisant une combinaison pondérée par les abondances des sections efficaces relatives à chacun des isotopes de cet élément chimique.

Le **tableau B4** montre que la diffusion est quasi exclusivement cohérente pour le carbone, l'azote, l'oxygène et l'aluminium (c'est aussi le cas du béryllium), et prédomine largement dans le cas du deutérium. À l'inverse, la diffusion incohérente domine largement dans le cas de l'hydrogène. On verra que ces valeurs dépendent fortement du spin des noyaux atomiques.

Dans le chapitre 8 on a suivi la démarche consistant à déduire de la résolution de l'équation de Schrödinger la section efficace différentielle d'une réaction à deux corps induite par un neutron. De manière similaire, on dérive la section efficace différentielle de diffusion d'un neutron avec un atome chimiquement lié. La différence ici réside dans l'introduction dans l'équation de Schrödinger d'un potentiel additionnel (au potentiel nucléaire) associé aux liaisons chimiques de l'atome cible dans le système moléculaire considéré. Deux approches existent. Celle développée par G. Breit consiste à résoudre l'équation de Schrödinger en remplaçant l'interaction nucléaire neutron-proton par une condition aux limites appropriée à une distance  $q$  de l'ordre du rayon nucléaire (par exemple  $q \sim 3 \cdot 10^{-13}$  cm). Une seconde approche, préconisée par Fermi, introduit un **pseudo-potentiel** (appelé « **pseudo-potentiel de Fermi** »)<sup>61 62</sup> et traite l'équation de Schrödinger dans le cadre de l'**approximation perturbative de Born** (*first Born approximation*).<sup>63</sup>

Il est montré que ce pseudo-potentiel  $V(\vec{r})$  ressenti par un neutron incident traversant un système moléculaire est de la forme<sup>64</sup> :

$$V(\vec{r}) = \sum_i b_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (B4.2)$$

<sup>61</sup> E. Fermi, « Sul moto dei neutroni nelle sostanze idrogenate », *La Ricerca Scientifica* 7, 2, 13-52, « Motion of neutrons in hydrogenous substances », USAEC Report NP-2385.

<sup>62</sup> A. C. Zemach, R. J. Glauber, « Dynamics of Neutron Scattering by Molecules », *Physical Review*, Vol. 101, Number 1, January 1, 1956, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.101.118>.

<sup>63</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Herman, Paris, 1973, Tome II, pp. 909-912.

<sup>64</sup> L. S. Kothari, K. S. Singwi, « Interaction of Thermal Neutrons with Solids », dans F. Seitz, D. Turnbull (Edited by), *Solid State Physics*, 1959, Vol. 8, pp. 109-190, p. 114, [https://doi.org/10.1016/S0081-1947\(08\)60480-4](https://doi.org/10.1016/S0081-1947(08)60480-4).

où :

- $\vec{r}_i$  : position de l'atome cible dans la structure moléculaire considérée ; il est repéré par l'indice  $i$  ;
- $b_i$  : longueur de diffusion relative à l'interaction neutron-nucléide considérée (voir chapitre 8) ;
- $\delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$  : fonction de Dirac.

On désigne par  $\lambda$  la longueur d'onde d'un neutron incident. La validité d'un tel potentiel est soumise aux conditions suivantes relatives à la distance  $R$  du centre de l'atome cible à laquelle on se place :

$$q, b \ll R \ll \lambda$$

Par exemple, pour un neutron de 0.1 eV,  $\lambda \approx 9 \cdot 10^{-9}$  cm, et par ailleurs  $q$  et  $b$  sont de l'ordre de quelques  $10^{-13}$  cm à  $10^{-12}$  cm pour la plupart des noyaux atomiques.

L'équation de Schrödinger est résolue dans ces conditions, ce qui conduit à l'expression suivante de la section efficace différentielle de la diffusion élastique<sup>65 66 67</sup> :

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{1}{2\pi} \frac{k'}{k} \sum_{i,j} \langle b_i b_j \rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j(t)} \rangle e^{-i\omega t} dt \quad (\text{B4.3})$$

où :

- $\vec{k}$  : vecteur d'onde du neutron incident  $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ ,  $\vec{p}$  étant sa quantité de mouvement,  $k = \|\vec{k}\|$  ;
- $\vec{k}'$  : vecteur d'onde du neutron diffusé,  $\vec{k}' = \vec{p}'/\hbar$ ,  $\vec{p}'$  étant sa quantité de mouvement,  $k' = \|\vec{k}'\|$  ;
- $\vec{Q} = \vec{k}' - \vec{k}$  : vecteur de variation du vecteur d'onde ou de la quantité de mouvement du neutron ;

<sup>65</sup> R. Pynn, *Neutron scattering – A primer*, Los Alamos Science Summer, 1990, p. 28.

<sup>66</sup> Outre les références déjà données, on trouvera un exposé détaillé du calcul des sections efficaces différentielles de diffusion des neutrons thermiques dans : R. Scherm, « Fundamentals of neutron scattering by condensed matter », *Annales de Physique*, Vol. 14, N° 7, 1972, pp. 349-370, <https://doi.org/10.1051/anphys/197213070349>, et L. S. Kothari, K. S. Singwi, « Interaction of Thermal Neutrons with Solids » in Frederick Seitz, David Turnbull (Edited by), *Solid State Physics*, op. cit.

<sup>67</sup> (B4.3) résulte de l'expression suivante utilisant les conventions de notation de la mécanique quantique :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\lambda \rightarrow \lambda'} = \frac{k'}{k} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 |\langle k' \lambda' | V | k, \lambda \rangle|^2$$

où  $m$  est la masse du neutron  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont les états quantiques du système neutron + cible avant et après interaction,  $V \equiv V(\vec{r})$  est le pseudo-potentiel de Fermi :

$$V(\vec{r}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m} b\delta(\vec{r})$$

Voir : G. L. Squires, *Introduction to the theory of thermal neutron scattering*, op. cit., Chapitre 2, pp. 10-24.

- $\hbar\omega = E - E'$  : transfert d'énergie au cours de la diffusion ; il faut préciser que  $\hbar\omega$  peut être positif ou négatif puisque le neutron peut gagner ou perdre de l'énergie au cours du choc<sup>68</sup> ;
- $\langle \rangle$  dans l'intégrale : moyenne faite sur tous les états initiaux possibles du système moléculaire, donc à l'instant  $t = 0$ <sup>69</sup> ;
- $\langle b_i b_j \rangle \equiv \overline{b_i b_j}$  : moyenne du produit des longueurs de diffusion ;
- $i, j$  : la sommation est faite sur des paires de nucléides cibles puisqu'un nucléide  $i$  donné est lié à tous les autres nucléides formant la structure moléculaire cible ;
- $t$  : temps ;
- $\vec{r}_j(t)$  : positions des atomes au cours du temps  $t$  dépendant des mouvements vibrationnels et rotationnels évoqués plus haut.
- Le facteur  $\frac{1}{2\pi}$  provient de l'isotropie de la diffusion vis-à-vis de l'angle azimutal (voir chapitre 8 § 1.3 et § 1.4)

L'explicitation du terme  $\langle b_i b_j \rangle$  figurant dans (B4.3) conduit à décomposer cette section efficace différentielle en deux termes, l'un caractérisant la **diffusion cohérente** et l'autre la **diffusion incohérente**. On désigne par  $\bar{b}$  la longueur de diffusion moyennée sur l'ensemble des atomes de la structure moléculaire considérée, et l'on pose :  $\Delta b_i = b_i - \bar{b}$ ,  $\forall i$ ,  $\Delta b_i$  peut être positif ou négatif ; alors :

$$b_i b_j = (\bar{b} + \Delta b_i)(\bar{b} + \Delta b_j) = \bar{b}^2 + \bar{b}\Delta b_i \Delta b_j + \Delta b_i \Delta b_j$$

$$\overline{b_i b_j} = \bar{b}^2 + \overline{\bar{b}(\Delta b_i + \Delta b_j)} + \overline{\Delta b_i \Delta b_j}$$

On suppose les atomes de la structure cible être de même nature ; alors  $\overline{\Delta b_i} = 0, \forall i$ ,  $\overline{\Delta b_j} = 0, \forall j$ .

$$\overline{b_i b_j} = \bar{b}^2 + \overline{\Delta b_i^2} = \bar{b}^2 + \overline{(b_i - \bar{b})^2} = \bar{b}^2 + (\overline{b^2} - 2\bar{b}\bar{b} + \bar{b}^2)$$

Or, par définition,  $\bar{b}_i = \bar{b}$  et  $\bar{\bar{b}} = \bar{b}$ , par conséquent on obtient :

$$\langle b_i b_j \rangle \equiv \overline{b_i b_j} = \bar{b}^2 + (\overline{b_i^2} - \bar{b}^2) \equiv \bar{b}^2 + (\overline{b^2} - \bar{b}^2) \quad (\text{B4.4})$$

En introduisant (B4.4) dans (B4.3), on obtient :

---

<sup>68</sup> Certains auteurs utilisent la variable  $\omega$  au lieu de la variable  $E'$  ( $\omega = \frac{E-E'}{\hbar}$ ) pour noter la section efficace différentielle :  $\frac{d^2\sigma}{d\omega d\Omega'}$ .

<sup>69</sup> On se reportera par exemple à l'article de R. Scherm précédemment cité pour comprendre que cette moyenne est équivalente à celle effectuée sur tous les états thermodynamiques de la structure moléculaire concernée, ainsi qu'à la référence précédente.

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{1}{2\pi} \frac{k'}{k} \left[ \sum_{i,j} \bar{b}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_j(t)} \rangle e^{-i\omega t} dt + \sum_{i,i} (\bar{b}^2 - \bar{b}^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i(t)} \rangle e^{-i\omega t} dt \right] \quad (B4.5)$$

qui fait apparaître la somme de deux termes bien distincts :

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega'} = \frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} + \frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} \quad (B4.6)$$

Le premier terme :

$$\frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} = \frac{1}{2\pi} \frac{k'}{k} \sum_{i,j} \bar{b}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_j(t)} \rangle e^{-i\omega t} dt \quad (B4.7)$$

implique les différents atomes (sommatation sur les indices  $i$  et  $j$ ) de la structure moléculaire concernée, donnant lieu au **phénomène d'interférences**. Les deux indices de sommation  $i$  et  $j$  indiquent que le processus de diffusion met en jeu la corrélation entre la position d'un atome  $i$  à l'instant initial  $t = 0$  et la position d'un atome  $j$  (qui peut être le même) à un instant  $t$ . Par conséquent, ce terme définit la section efficace de la **diffusion cohérente**, caractérisée par la longueur de diffusion  $b_{coh} = \bar{b}$ .

Le second terme :

$$\frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} = \frac{1}{2\pi} \frac{k'}{k} \sum_{i,i} (\bar{b}^2 - \bar{b}^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q}\cdot\vec{r}_i(t)} \rangle e^{-i\omega t} dt \quad (B4.8)$$

correspond à la section efficace de la **diffusion incohérente**, définie par une longueur de diffusion  $b_{inc} = \sqrt{\bar{b}^2 - \bar{b}^2}$ . L'indice de sommation indique que le processus de diffusion ne met en jeu qu'un même atome  $i$  en établissant une corrélation entre sa position à l'instant initial  $t = 0$  et sa position à un instant  $t$ . Donc la diffusion incohérente ne fait pas intervenir d'interférences entre atomes.

En reprenant les définitions géométriques (B4.1) de ces sections efficaces :

- la section efficace de diffusion cohérente :

$$\sigma_{coh} = 4\pi |b_{coh}|^2 = 4\pi \bar{b}^2 \quad (B4.9)$$

- la section efficace neutronique de diffusion incohérente :

$$\sigma_{inc} = 4\pi |b_{inc}|^2 = 4\pi (\bar{b}^2 - \bar{b}^2) \quad (B4.10)$$

La section efficace neutronique de diffusion totale,  $\sigma_{sb}$ , relative à l'atome lié est obtenue

par simple sommation :

$$\sigma_{sb} = \sigma_{coh} + \sigma_{inc} \quad (B4.11)$$

Il est important de noter que la longueur de diffusion  $b$  dépend aussi du **spin** du noyau atomique-cible. Cette dépendance non explicitée dans l'expression générale (B4.3) donnant la section efficace différentielle de diffusion est introduite ci-après.

Soit  $\vec{I}$ , de module  $I = \|\vec{I}\|$ , le spin du noyau atomique cible et  $\vec{s}$  le spin du neutron incident de module  $\|\vec{s}\| = s = 1/2$ .<sup>70 71</sup>

Il y a deux valeurs possibles du spin total  $J$  :  $J = I + 1/2$  et  $J = I - 1/2$ . Le nombre d'états quantiques qui leur sont respectivement associés sont :  $n_+ = 2J + 1 = 2\left(I + \frac{1}{2}\right) + 1 = 2I + 2$  et  $n_- = 2J + 1 = 2\left(I - \frac{1}{2}\right) + 1 = 2I$ .

Les probabilités associées aux deux états de spin  $J$  sont donc respectivement :

$$p_+ = \frac{n_+}{n_+ + n_-} \frac{I + 1}{2I + 1}, \quad p_- = \frac{n_-}{n_+ + n_-} = \frac{I}{2I + 1}, \quad (B4.12)$$

En désignant respectivement par  $b_+$  et  $b_-$  les longueurs de diffusion associées aux deux états de spin définis ci-dessus, la longueur de diffusion de la réaction de diffusion s'écrit alors :

$$\bar{b} = p_+ b_+ + p_- b_- = \frac{1}{2I + 1} [(I + 1)b_+ + I b_-] \quad (B4.13)$$

$$\bar{b}^2 = \frac{1}{2I + 1} [(I + 1)b_+^2 + I b_-^2] \quad (B4.14)$$

Ces relations s'appliquent aussi bien à la diffusion cohérente qu'à la diffusion incohérente.

La section efficace totale de diffusion,  $\sigma_{sb}$ , a donc pour expression :

$$\sigma_{sb} = 4\pi \bar{b}^2 = \frac{4\pi}{2I + 1} [(I + 1)b_+^2 + I b_-^2] \quad (B4.15)$$

Dans le cas d'un mélange d'isotopes repérés par l'indice  $k$ , dont les proportions dans ce mélange sont notées  $c_k$  on a :

<sup>70</sup> V. F. Sears, « Neutron scattering lengths and cross sections », *Neutron News*, Vol. 3, n° 3, 1992, pp. 26-37, p. 26.

<sup>71</sup> G. L. Squires, *Introduction to the theory of thermal neutron scattering*, op. cit., pp. 23-24.

$$\bar{b} = \sum_k \frac{c_k}{2I_k + 1} [(I_k + 1)b_+ + I_k b_-] \quad (\text{B4.16})$$

$$\overline{b^2} = \sum_k \frac{c_k}{2I_k + 1} [(I_k + 1)b_+^2 + I_k b_-^2] \quad (\text{B4.17})$$

De manière générale, lorsque l'on est en présence d'un mélange d'atomes  $i$  présents dans une proportion  $c_i$ , les sections efficaces de diffusion cohérente et incohérente sont obtenues à partir des relations suivantes :

$$b_{coh} = \sum_i c_i b_{coh,i}, \quad \sigma_{coh} = 4\pi |b_{coh}|^2 = 4\pi \left| \sum_i c_i b_{coh,i} \right|^2, \quad \sigma_s = \sum_i c_i \sigma_{s,i},$$

$$\sigma_{inc} = \sigma_s - \sigma_{coh} \quad (\text{B4.18})$$

### Exemple

On considère à titre illustratif le cas de la diffusion d'un neutron sur un noyau d'hydrogène, qui constitue un système de deux particules de spin 1/2 en interaction,  $\vec{s} = 1/2$  pour le neutron et  $I = 1/2$  pour le noyau d'hydrogène cible. Les états de moment angulaire total possibles,  $\vec{J} = \vec{I} + \vec{s}$ , sont  $\|\vec{J}\| = J = I - s = 1/2 - 1/2 = 0$  et  $\|\vec{J}\| = J = I + s = 1/2 + 1/2 = 1$ . On sait qu'à  $J = 0$  correspond un état quantique unique, d'où l'appellation d'**état singulet**, et que pour  $J = 1$  il existe trois états quantiques équiprobables d'où découle la dénomination de **triplet**.<sup>72</sup> Les probabilités associées respectivement aux **états singulet** et **triplet** valent donc :

$$p_- = \frac{I}{2I + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{4}, \quad p_+ = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{3}{4} \quad (= 1 - p_-)$$

On dispose des valeurs de la longueur de diffusion reportées dans le **tableau B5**.

**Tableau B5. Caractéristiques du système en interaction neutron + hydrogène.**<sup>73</sup>

Spin du système neutron + hydrogène (proton)	Longueur de diffusion <i>fermi</i>	Probabilités
$J = 0$	$b_- = -47.5$	$p_- = 1/4$
$J = 1$	$b_+ = 10.85$	$p_+ = 3/4$

On en déduit :

$$b_{coh} = \bar{b} = p_+ b_+ + p_- b_- = \frac{3}{4} \times 10.85 + \frac{1}{4} \times (-47.5) = -3.739 \text{ fm}$$

$$\sigma_{coh} = 4\pi \bar{b}^2 = 4 \times 3.14 \times (-3.739 \cdot 10^{-13})^2 = 1.75 \cdot 10^{-24} = 1.756 \text{ barns}$$

<sup>72</sup> C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Herman, Paris, 1973, Tome II, p. 996.

<sup>73</sup> G. L. Squires, *Introduction to the theory of thermal neutron scattering*, op. cit., p. 9.

$$\begin{aligned}
\sigma_{inc} &= 4\pi(\overline{b^2} - \bar{b}^2) = 4\pi[p_+b_+^2 + p_-b_-^2 - (p_+b_+ + p_-b_-)^2] \\
&= 4 \times 3.14 \times \left[ \frac{3}{4} \times (10.85)^2 + \frac{1}{4} \times (-47.5)^2 - \left( \frac{3}{4} \times 10.85 + \frac{1}{4} \times (-47.5) \right)^2 \right] \times (10^{-13})^2 \\
&= 80.18 \text{ barns}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{inc} &= \sqrt{\overline{b^2} - \bar{b}^2} \\
&= \sqrt{\left[ \frac{3}{4} \times (10.85)^2 + \frac{1}{4} \times (-47.5)^2 - \left( \frac{3}{4} \times 10.85 + \frac{1}{4} \times (-47.5) \right)^2 \right] \times (10^{-13})^2}
\end{aligned}$$

$$b_{inc} = 25.24 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \equiv 25.24 \text{ fm}$$

On constate que l'on retrouve à peu de chose près les valeurs de  $b_{coh}$ ,  $\sigma_{coh}$ ,  $b_{inc}$  et  $\sigma_{inc}$  fournies par le **tableau B4** pour l'hydrogène lié dans l'eau.

## 5. Le formalisme de L. van Hove

En utilisant (B4.9) et (B4.10) et en remplaçant les modules des vecteurs d'onde par leurs expressions en fonction des énergies des neutrons respectivement incident et diffusé ( $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2M_n}$ ,  $E' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2M_n}$ ,  $\omega = \frac{E-E'}{\hbar}$ ), les sections efficaces différentielles (B4.7) et (B4.8) peuvent être réécrites comme :

$$\frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{coh}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j(t)} \rangle e^{i\omega t} dt \quad (\text{B5.1})$$

$$\frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{inc}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{1}{2\pi} \sum_i \int_{-\infty}^{+\infty} \langle e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i(t)} \rangle e^{i\omega t} dt \quad (\text{B5.2})$$

On a par ailleurs les deux égalités suivantes :

$$\sum_{i,j} \langle e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j(t)} \rangle = \sum_{i,j} \int \delta(\langle \vec{r} - [\vec{r}_i(0) - \vec{r}_j(t)] \rangle) e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (\text{B5.3})$$

$$\sum_i \langle e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i(0)} e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_i(t)} \rangle = \sum_i \int \delta(\langle \vec{r} - [\vec{r}_i(0) - \vec{r}_i(t)] \rangle) e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad (\text{B5.4})$$

où  $\delta(\dots)$  est la distribution de Dirac.

Alors, les sections efficaces différentielles (B5.1) et (B5.2) deviennent respectivement :

$$\frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{coh}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i,j} \int \delta(\vec{r} - [\vec{r}_i(0) - \vec{r}_j(t)]) e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} d\vec{r} dt \quad (B5.5)$$

$$\frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{inc}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \int \delta(\vec{r} - [\vec{r}_i(0) - \vec{r}_i(t)]) e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} d\vec{r} dt \quad (B5.6)$$

L. van Hove a introduit les **fonctions de corrélations dans l'espace et dans le temps (pair distribution functions)**  $G(\vec{r}, t)$ ,  $G_s(\vec{r}, t)$  et  $G_d(\vec{r}, t)$ .<sup>74 75</sup> La fonction  $G(\vec{r}, t)$  est définie de la manière suivante : soit un atome présent à l'origine ( $\vec{r} = \vec{0}$ ) au temps  $t = 0$ , alors  $G(\vec{r}, t)$  représente la probabilité par unité de volume qu'un second atome soit présent en  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . La fonction  $G(\vec{r}, t)$  se décompose en deux parties, la première,  $G_s(\vec{r}, t)$ , correspond au cas où le deuxième atome est le même que le premier atome (« autocorrélation », *self correlation*), la seconde,  $G_d(\vec{r}, t)$ , au cas où les deux atomes sont effectivement distincts l'un de l'autre :

$$G(\vec{r}, t) = G_s(\vec{r}, t) + G_d(\vec{r}, t) \quad (B5.7)$$

Désignons par  $N$  le nombre d'atomes (indexés  $i$  et  $j$ ) de l'édifice moléculaire considéré. L. van Hove définit les fonctions de corrélation de la manière suivante :

$$G(\vec{r}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \delta(\vec{r} - [\vec{r}_i(0) - \vec{r}_j(t)]) \quad (B5.8)$$

$$G_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{N} \sum_i \delta(\vec{r} - [\vec{r}_i(0) - \vec{r}_i(t)]) \quad (B5.9)$$

Il en résulte :

$$\frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{coh}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} G(\vec{r}, t) d\vec{r} dt \quad (B5.10)$$

$$\frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{inc}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} G_s(\vec{r}, t) d\vec{r} dt \quad (B5.11)$$

On voit que la fonction de corrélation  $G_d(\vec{r}, t) = G(\vec{r}, t) - G_s(\vec{r}, t)$  implique concomitamment l'ensemble des atomes du système moléculaire considéré et décrit le **phénomène d'interférences** des ondes associées au processus de diffusion élastique subi par le neutron incident. Il s'agit donc d'une composante intermoléculaire. Ces effets

<sup>74</sup> L. van Hove, « Correlations in Space and Time and Born Approximation Scattering in Systems of Interacting Particles », *Physical Review*, Volume 95, Number 1, July 1, 1954, pp. 249-261, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.95.249> ;

<sup>75</sup> J.-M. Zanotti, « Vibrations et relaxations dans les molécules biologiques - Apports de la diffusion incohérente inélastique de neutrons », *J. Phys. IV France* Vol. 130, November 2005, pp. 87-113, <https://doi.org/10.1051/jp4:2005130007>.



d'interférences expliquent l'existence des **pics de Bragg** précédemment mentionnés, qui se manifestent dans la diffusion des neutrons avec des **réseaux monocristallins** ou **polycristallins**. Dans le cas de liquides et de matériaux solides polycristallins, les effets d'interférences deviennent secondaires, de sorte que l'on peut faire l'approximation qualifiée « **incohérente** » (*incoherent approximation*) qui consiste à poser  $G_d(\vec{r}, t) = 0$ , et, à partir des relations (B4.6), (B4.7) et (B4.8), à exprimer alors la section efficace de diffusion différentielle par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega'} &\simeq \frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} + \frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} \\ &= \frac{\sigma_{coh} + \sigma_{inc}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} G_s(\vec{r}, t) d\vec{r} dt \quad (B5.12) \end{aligned}$$

On note sur (B5.12) que dans cette « **approximation incohérente** »,  $\sigma_{coh}$  apparaît néanmoins, seuls les effets d'interférence étant négligés.

## 6. Introduction des fonctions $S(\alpha, \beta)$

L'utilisation pratique des sections efficaces de diffusion différentielles conduit à introduire des fonctions particulières dénommées  $S(\alpha, \beta)$  susceptibles d'être tabulées sur une grille en température, permettant ainsi de calculer plus aisément les sections efficaces de diffusion différentielles. Elles ont été précédemment introduites dans le cadre de l'hypothèse « gaz libre » au paragraphe B3. Il s'agit à présent d'en donner des expressions plus générales. On pose :

$$S(\vec{Q}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} G(\vec{r}, t) d\vec{r} dt, \quad \int S(\vec{Q}, \omega) d\omega = S(\vec{Q}) \quad (B6.1)$$

$$S_s(\vec{Q}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{i\vec{Q}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t} G_s(\vec{r}, t) d\vec{r} dt, \quad \int S_s(\vec{Q}, \omega) d\omega = 1. \quad (B6.2)$$

$S(\vec{Q})$  est appelé « **facteur de structure** ».

En conséquence, (B5.10) et (B5.11) s'écrivent :

$$\frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{coh}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} N S(\vec{Q}, \omega) \quad (B6.3)$$

$$\frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{inc}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} N S_s(\vec{Q}, \omega) \quad (B6.4)$$

Les fonctions  $S(\vec{Q}, \omega)$  et  $S_s(\vec{Q}, \omega)$  sont exprimables avec les variables adimensionnelles  $\alpha$

et  $\beta$  qui correspondent respectivement au transfert de la quantité de mouvement  $\hbar\vec{Q}$  et au transfert d'énergie  $E' - E$  qui accompagnent la collision :

$$\alpha = \frac{\hbar^2 Q^2}{2AM_n k_B T} = \frac{E + E' - 2\mu_L \sqrt{EE'}}{Ak_B T} \quad (\text{B6.5})$$

$$\beta = \frac{E' - E}{k_B T} = \frac{\varepsilon}{k_B T} \quad (\text{B6.6})$$

Le changement de variables conduit à :

$$S(\vec{Q}, \omega) = \frac{e^{-\beta/2}}{k_B T} S(\alpha, \beta) , \quad S_s(\vec{Q}, \omega) = \frac{e^{-\beta/2}}{k_B T} S_s(\alpha, \beta) \quad (\text{B6.7})$$

Il en découle avec (B6.3) et (B6.4) :

$$\frac{d^2 \sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{coh}}{4\pi \hbar k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} N e^{-\beta/2} S(\alpha, \beta) \quad (\text{B6.8})$$

$$\frac{d^2 \sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} = \frac{\sigma_{inc}}{4\pi \hbar k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} N e^{-\beta/2} S_s(\alpha, \beta) \quad (\text{B6.9})$$

Les **figures B12a** et **B12b** illustrent le comportement des fonctions  $S(\alpha, \beta)$  dans les cas de l'eau et du graphite.

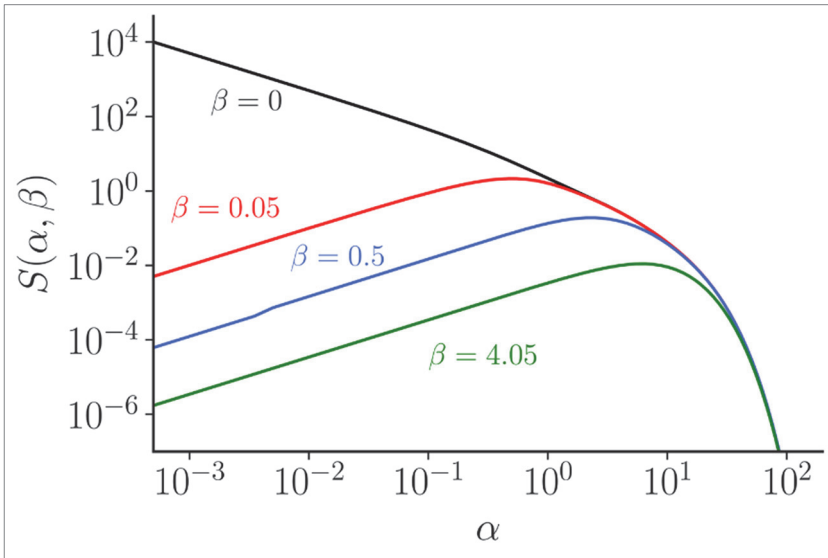


Figure B12a. Exemple de fonctions  $S(\alpha, \beta)$  dans le cas de l'eau.<sup>76</sup>

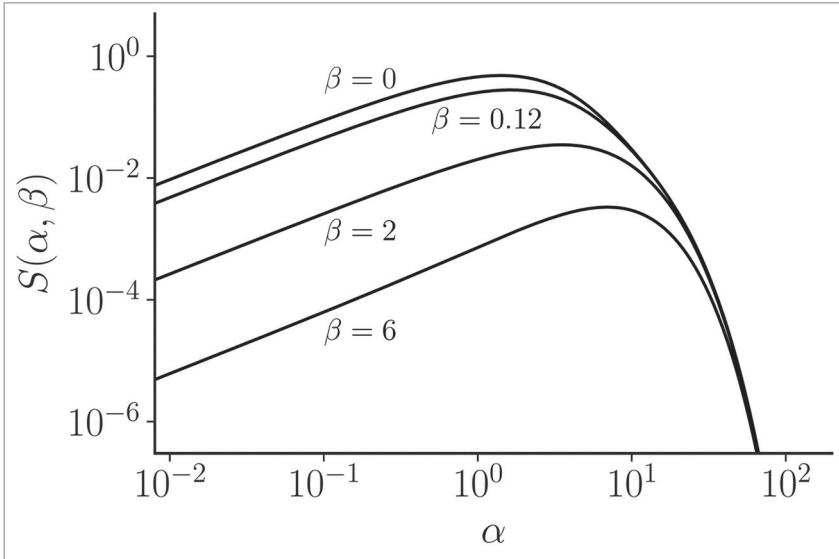


Figure B12b. Exemple de fonctions  $S(\alpha, \beta)$  dans le cas du graphite.<sup>77</sup>

## 7. La fonction intermédiaire de diffusion

Une autre forme mathématique de ces sections efficaces différentielles est également souvent usitée, construite à partir d'une fonction appelée **fonction intermédiaire de diffusion** (*intermediate scattering function*) définie respectivement par :

$$\chi_{coh}(\vec{Q}, t) = \int e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} G(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (\text{B7.1})$$

$$\chi_{inc}(\vec{Q}, t) = \int e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} G_s(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (\text{B7.2})$$

Les sections efficaces différentielles (B5.10) et (B5.11) deviennent alors :

<sup>76</sup> Données tirées de l'évaluation JEFF<sup>7</sup>.1 ; voir aussi J. P. Scotta, *Improvement of the thermal and epithermal neutron scattering data for the interpretation of integral experiments*, op. cit., p. 49.

<sup>77</sup> Données tirées de l'évaluation JEFF-3.1 ; voir aussi R. E. MacFarlane, « Neutron Slowing Down and Thermalization », dans Cacuci, Dan Gabriel (Ed.), *Handbook of Nuclear Engineering*, Vol. 1: *Nuclear Engineering Fundamentals*, Springer, Boston, MA, 2010, pp. 189-238, p. 203, <https://link.springer.com/referencework/10.1007/978-0-387-98149-9>.

$$\frac{d^2\sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} \equiv \sigma_{coh}(E \rightarrow E', \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{\sigma_{coh}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \chi_{coh}(\vec{Q}, t) dt \quad (B7.3)$$

$$\frac{d^2\sigma_{inc}}{dE' d\Omega'} \equiv \sigma_{inc}(E \rightarrow E', \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \frac{\sigma_{inc}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} N \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \chi_{inc}(\vec{Q}, t) dt \quad (B7.4)$$

Cette formulation est également utilisée dans la littérature, la détermination des fonctions  $\chi_{coh}(\vec{Q}, t)$  et  $\chi_{inc}(\vec{Q}, t)$  résultant du traitement de l'interaction neutron – structure moléculaire dans le cadre de la mécanique quantique.<sup>78</sup> Par identification avec (B6.8) et (B6.9), on a immédiatement :

$$e^{-\beta/2} S(\alpha, \beta) = \tilde{S}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \chi_{coh}(\vec{Q}, t) dt \quad (B7.5)$$

$$e^{-\beta/2} S_s(\alpha, \beta) = \tilde{S}_s(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \chi_{inc}(\vec{Q}, t) dt \quad (B7.6)$$

Autrement dit,  $\tilde{S}_s(\alpha, \beta)$  et  $\tilde{S}(\alpha, \beta)$  sont les transformées de Fourier respectives de  $\chi_{coh}(\vec{Q}, t)$  et  $\chi_{inc}(\vec{Q}, t)$ .

On constate donc que pour accéder aux fonctions  $S(\alpha, \beta)$  et par suite aux sections efficaces de diffusion, il faut déterminer préalablement les **fonctions intermédiaires de diffusion**  $\chi_{coh}(\vec{Q}, t)$  et  $\chi_{inc}(\vec{Q}, t)$ .

Ces deux fonctions contiennent les caractéristiques du mouvement des atomes qui ont été introduites par le biais du **pseudo-potentiel de Fermi**. Dans le cas d'un cristal (une cible solide), afin de simplifier le calcul de  $\chi_{inc}(\vec{Q}, t)$ , une approximation est faite, appelée **approximation gaussienne (Gaussian approximation)**<sup>79</sup>, qui attribue à la **fonction d'autocorrélation de paires**,  $G_s(\vec{r}, t)$ , une forme gaussienne vis-à-vis de la variable positionnelle  $\vec{r}$  :

$$G_s(\vec{r}, t) = \frac{1}{\left[2\pi \frac{\hbar}{Am} \gamma(t)\right]^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2 \frac{\hbar}{Am} \gamma(t)}\right) \quad (B7.7)$$

où :

- $m$  est la masse du neutron et  $A = M/m$ ,  $M$  étant comme précédemment la masse de l'atome cible ;

<sup>78</sup> Les fonctions  $G$ ,  $S$  et  $\chi$  peuvent être rigoureusement déterminées dans les configurations simples d'un *gaz parfait* (modèle du gaz libre, voir § 2.1) ou bien d'un cristal harmonique (*Einstein crystal*). La recherche de la solution rigoureuse du problème général conduirait à résoudre, ici aussi, un *problème à N corps*.

<sup>79</sup> G. L. Squires, *Introduction to the theory of thermal neutron scattering*, op. cit., p. 101.

- $\gamma(t)$  est appelée **fonction largeur** (*width function*) et dépend justement du spectre des phonons  $\rho(\varpi)$  normalisé à l'unité :

$$\int_{\varpi} \rho(\varpi) d\varpi = 1 \quad (\text{B7.8})$$

Les hypothèses sous-jacentes en sont :

- l'application de l'approximation incohérente qui néglige l'existence de phénomènes d'interférences ;
- le système moléculaire considéré est composé d'un seul type d'atome ;
- les forces interatomiques s'exerçant dans le cristal sont de nature harmonique (oscillateur harmonique quantifié) ;
- les modes vibrationnels possibles sont décrits par un spectre continu  $\rho(\varpi)$  tel que  $\rho(\varpi)d\varpi$  représente la probabilité d'avoir des modes normaux entre les pulsations  $\varpi$  et  $\varpi + d\varpi$ .

Dans le cas d'un solide cristallin,  $\gamma(t)$  et  $\gamma(0)$  sont respectivement donnés par<sup>80</sup> :

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty} \left[ \coth\left(\frac{\hbar\varpi}{2k_B T}\right) \cos \varpi t + i \sin \varpi t \right] \frac{\rho(\varpi)}{\varpi} d\varpi \quad (\text{B7.9})$$

$$\gamma(0) = \int_0^{\infty} \left[ \coth\left(\frac{\hbar\varpi}{2k_B T}\right) \right] \frac{\rho(\varpi)}{\varpi} d\varpi \quad (\text{B7.10})$$

en étendant  $\rho(\varpi)$  aux fréquences négatives et en posant  $\rho(\varpi) = \rho(-\varpi)$ , on peut écrire :

$$\gamma(t) - \gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\varpi)}{2\varpi \sinh\left(\frac{\hbar\varpi}{2k_B T}\right)} \exp\left(-\frac{\hbar\varpi}{2k_B T}\right) [e^{-i\varpi t} - 1] d\varpi \quad (\text{B7.11})$$

(En pratique,  $\varpi < \varpi_{\max}$  et dans ce cas,  $\rho(\varpi) = 0$  pour  $\varpi > \varpi_{\max}$ ).

En variable  $\beta$  on obtient :

$$\gamma(t) - \gamma(0) = 2 \int_0^{+\infty} \rho(\beta) \frac{\cosh \frac{\beta}{2} - \cos \beta t}{\beta \sinh \frac{\beta}{2}} d\beta \quad (\text{B7.12})$$

Sous cette hypothèse avec (B7.2) on a :

$$\chi_{\text{inc}}(\vec{Q}, t) = \int e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}} G_s(\vec{r}, t) d\vec{r} = \chi_{\text{inc}}(\vec{Q}, t) = \exp \left\{ \frac{\hbar^2 Q^2}{2Am} [\gamma(t) - \gamma(0)] \right\} \quad (\text{B7.13})$$

<sup>80</sup> G. I. Bell, S. Glasstone, *Nuclear Reactor Theory*, op. cit, pp. 347-349.

La section efficace de diffusion inélastique incohérente différentielle s’écrit donc :

$$\sigma_{iinc}(E \rightarrow E', \mu, T) = \frac{\sigma_{sb}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} e^{-\beta/2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \exp \left[ \frac{\hbar^2 Q^2}{2Am} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\varpi)}{2\varpi \sin\left(\frac{\hbar\varpi}{2k_B T}\right)} \exp\left(-\frac{\hbar\varpi}{2k_B T}\right) [e^{-i\varpi t} - 1] d\varpi \right] dt \tag{B7.14}$$

Établie pour un solide, cette expression est exploitable pour des liquides tels que l’eau. En effet, dans les liquides (dont la température absolue est non nulle), les distances interatomiques varient en permanence aléatoirement de sorte que la contribution de la diffusion cohérente à la diffusion totale est négligeable. Cela justifie que l’on puisse appliquer dans de tels cas l’**approximation de la diffusion incohérente** (B5.12) :

$$\sigma_s(E \rightarrow E', \mu, T) \simeq \frac{\sigma_{coh} + \sigma_{inc}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E'}{E}} e^{-\beta/2} S(\alpha, \beta, T) \tag{B7.15}$$

**Remarque**

Le traitement mathématique conduisant à l’expression de la section efficace différentielle de diffusion élastique fait apparaître une grandeur appelée facteur de Debye-Waller, conventionnellement noté  $\exp[-2W]$ , qui décrit l’impact des vibrations du réseau cristallin sur l’intensité du phénomène de diffusion, en particulier la décroissance de la section efficace entre deux pics de Bragg consécutifs. Ici,  $W$ , appelé intégrale de Debye-Waller, est donné par :

$$W \equiv \gamma(0) = \int_0^\infty \left[ \coth\left(\frac{\hbar\varpi}{2k_B T}\right) \right] \frac{\rho(\varpi)}{\varpi} d\varpi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(\beta)}{2\beta \sinh \frac{\beta}{2}} e^{-\beta/2} d\beta \tag{B7.16}$$

Par exemple, dans le cas du graphite  $W$ , les **tableaux B6** et **B7** fournissent des valeurs suivantes :

**Tableau B6. Valeurs de l’intégrale de Debye-Waller en fonction de la température dans le cas du graphite.<sup>81</sup>**

$T$ Kelvin	293.6	400	600	800	1000	1600	3000
$W \equiv \gamma(0)$ eV <sup>-1</sup>	26.22	32.91	46.20	59.96	73.95	116.5	216.9

**Tableau B7 : Valeurs de l’intégrale de Debye-Waller en fonction de la température dans le cas de l’eau légère.<sup>82</sup>**

$T$ Kelvin	293.6	323.6	423.6	523.6	623.6	800	1000
$W \equiv \gamma(0)$ eV <sup>-1</sup>	11.66	12.16	13.91	15.79	17.73	21.63	26.31

<sup>81</sup> M. Mattes, J. Keinert, *Status of Thermal Neutron Scattering Data for Graphite*, INDC (NDS) - 0475, IAEA, July 2005, p. 12, <https://www-nds.iaea.org/publications/indc/indc-nds-0475.pdf>.

<sup>82</sup> M. Mattes, J. Keinert, *Thermal Neutron Scattering Data for the Moderator Materials H<sub>2</sub>O, D<sub>2</sub>O and ZrH<sub>x</sub> in ENDF-6 Format and as ACE Library for MCNP(X) Codes*, op. cit., p. 17.

## 8. Les expressions des sections efficaces différentielles utilisées en physique des réacteurs nucléaires

Des publications spécifiques fournissent leurs expressions<sup>83 84 85</sup> pour la **diffusion élastique cohérente**, la **diffusion inélastique incohérente**, et la **diffusion élastique incohérente**, en vue de leur utilisation pratique pour réaliser des calculs de neutronique ; ceux-ci consistent à résoudre par diverses méthodes disponibles l'équation de transport des neutrons dans la matière. Les expressions des différentes **sections efficaces différentielles de diffusion des neutrons thermiques** utilisées dans les logiciels de préparation des données nucléaires destinées aux codes de neutronique sont brièvement présentées dans la suite.

### 8.1 Section efficace différentielle de la diffusion élastique cohérente

Il n'y a pas de modification de l'énergie du neutron incident après diffusion, en raison de la « masse effective » du solide « vue » par le neutron. En effet, les atomes du solide étant fortement liés et l'énergie du neutron petite, tout se passe comme si ce neutron interagissait avec une cible de masse très grande, celle de la structure cristalline du solide dans son ensemble (et donc non pas avec un atome unique du cristal). Compte tenu de l'isotropie de l'angle azimutal de la diffusion, la section efficace différentielle dépend du produit scalaire  $\mu = \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}$ , c'est-à-dire du cosinus de déviation du neutron dans le référentiel du laboratoire, et l'on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{coh}(E \rightarrow E', \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) &\rightarrow \frac{d^2 \sigma_{coh}}{dE' d\Omega'} = \frac{1}{2\pi} \sigma_{coh}(E \rightarrow E', \vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sigma_{coh}(E \rightarrow E', \mu) \end{aligned} \quad (B8.1)$$

On montre que la section efficace différentielle de la diffusion cohérente  $\sigma_{coh}(E \rightarrow E', \mu, T)$  est donnée par :

$$\sigma_{coh}(E \rightarrow E', \mu, T) = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^{E_i < E} f_i e^{-2W(T)E_i} \delta(\mu - \mu_i) \delta(E - E') \quad (B8.2)$$

avec :

- $f_i$  : facteurs liés à la structure cristallographique du solide (unité : eV barns) ;
- $W(T)$  : intégrale (ou coefficient) de Debye-Waller dépendant de la température  $T$  du cristal ;

<sup>83</sup> R. E. MacFarlane, A. C. Kahler, « Methods for Processing ENDF/B-VII with NJOY », *op. cit.*

<sup>84</sup> R. E. MacFarlane, « Neutron Slowing Down and Thermalization », dans Cacuci, Dan Gabriel (Ed.), *Handbook of Nuclear Engineering*, Vol. 1: *Nuclear Engineering Fundamentals*, *op. cit.*

<sup>85</sup> A. Trkov, M. Herman, D. A. Brown (edited by) *ENDF-102 – ENDF-6 Formats Manual. – Data formats and procedures for the evaluated nuclear data file ENDF/B-VI and ENDF/B-VII*, National Nuclear Data Center (NNDC), Brookhaven National Laboratory, Report BNL-90365-2009 Rev.2, October 24, 2012, Chapitre 7, pp. 146-157.

- $E_i$  : énergies des « pics de Bragg » (*Bragg edges*) de la structure cristalline du solide considéré ;
- $\mu_i = 1 - 2E_i/E$  (B8.3)  
cosinus de l'angle de diffusion (dans le référentiel du laboratoire) privilégié du neutron correspondant au pic de Bragg  $i$  ;
- $\delta()$  : distribution de Dirac.

Le terme  $\delta(E - E')$  de l'expression (B8.2) indique bien que la diffusion n'est pas suivie d'un changement d'énergie du neutron, celui-ci conserve son énergie d'incidence ; le terme  $\delta(\mu - \mu_i)$  de cette même expression traduit le fait que le neutron incident est diffusé selon des directions privilégiées définies par les valeurs du cosinus  $\mu_i$  de l'angle de diffusion.

La section efficace de la diffusion élastique cohérente,  $\sigma_{coh}(E)$ , s'obtient par intégration de (B8.2) sur les variables  $\mu$  et  $E'$  :

$$\sigma_{coh}(E, T) = \frac{\sigma_{coh}}{E} \sum_{i=1}^{E_i < E'} f_i(T) \exp(-4W(T)E_i) \quad (\text{B8.4})$$

où  $\sigma_{coh}$  est la section efficace de diffusion élastique cohérente caractéristique du matériau considéré et définie en (B4.9).

Ainsi que nous l'avons vu plus haut, **ce type de diffusion domine dans les matériaux solides cristallins** comme le **graphite** pour lequel la section efficace élastique cohérente de diffusion est représentée sur la **figure B9** en fonction de l'énergie du neutron.

## 8.2 Section efficace différentielle de la diffusion inélastique incohérente

La section efficace différentielle microscopique de la diffusion inélastique incohérente s'écrit :

$$\sigma_{iinc}(E \rightarrow E', \mu, T) = \frac{\sigma_{inc}}{4\pi k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} e^{-\beta/2} S(\alpha, \beta, T) \quad (\text{B8.5})$$

Dans le cas d'un mélange de noyaux :

$$\sigma_{iinc}(E \rightarrow E', \mu, T) = \sum_{m=1}^M \frac{N_m \sigma_{sbm}}{4\pi k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} e^{-\beta/2} S_m(\alpha, \beta, T) \quad (\text{B8.6})$$

- $N_m$  : nombre d'atomes de type  $m$  dans une molécule du matériau considéré ; par exemple pour l'eau ( $\text{H}_2\text{O}$ ),  $M = 2$ , en attribuant l'indice  $m = 1$  à l'hydrogène ( $N_1 = 2$ ) et l'indice  $m = 2$  à l'oxygène ( $N_2 = 1$ ) ;



- $\sigma_{sbm}$  : section efficace neutronique de diffusion inélastique incohérente relative à l'atome lié ;
- $S_m(\alpha, \beta, T)$  : fonction des variables  $\alpha$  et  $\beta$  précédemment définies relative à l'atome de type  $m$  dans le matériau considéré à la température  $T$ . Ces fonctions permettent de déterminer les lois de transferts énergétique et angulaire qui servent dans les logiciels de simulation déterministe ou bien Monte-Carlo de transport des neutrons dans la matière<sup>86</sup>

**Ce type de diffusion domine dans le cas de l'eau légère**, modérateur des réacteurs à eau sous pression. Les **figures B13 et B14** relatives à l'eau et au graphite montrent les spectres des neutrons diffusés par diffusion inélastique incohérente.

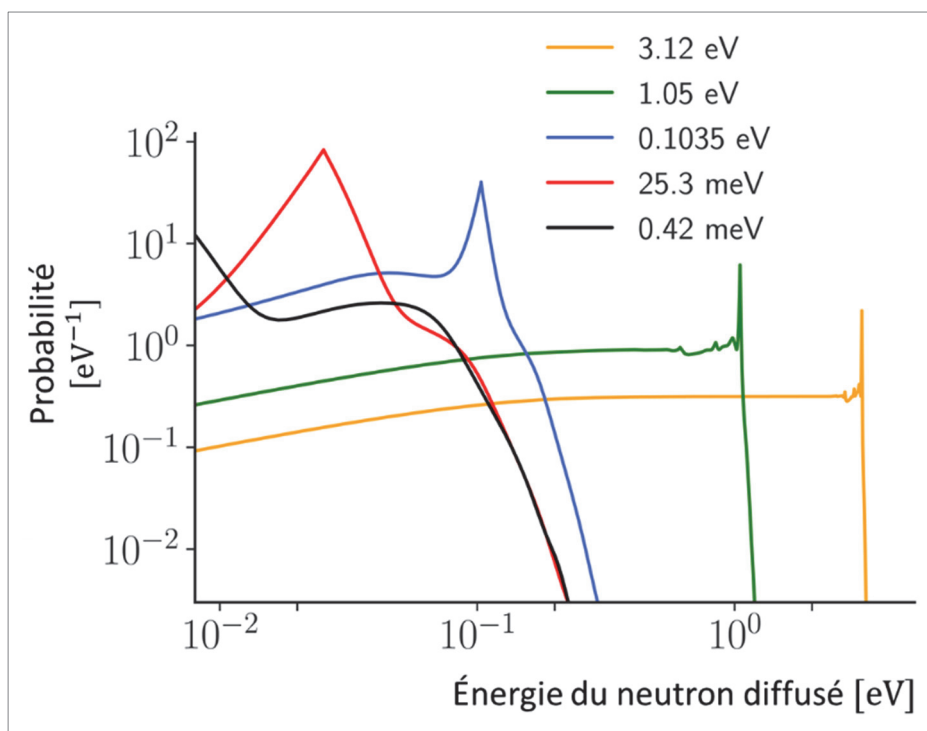


Figure B13. Spectres en énergie des neutrons thermiques diffusés par diffusion inélastique incohérente dans l'eau (H<sub>2</sub>O). On distingue nettement les pics de diffusion quasi élastique.<sup>87</sup>

<sup>86</sup> J. Gonnord, *Étude de phénomènes de thermalisation par la méthode de Monte-Carlo. Application au calcul de l'absorption des neutrons par des poisons consommables dans les réacteurs à eau légère*, Université Paris Sud, centre d'Orsay, 18 décembre 1973.

<sup>87</sup> R. E. MacFarlane, « Neutron Slowing Down and Thermalization », dans D. G. Cacuci, (Ed.), *Handbook of Nuclear Engineering*, Vol. 1: *Nuclear Engineering Fundamentals*, op. cit., p. 209.

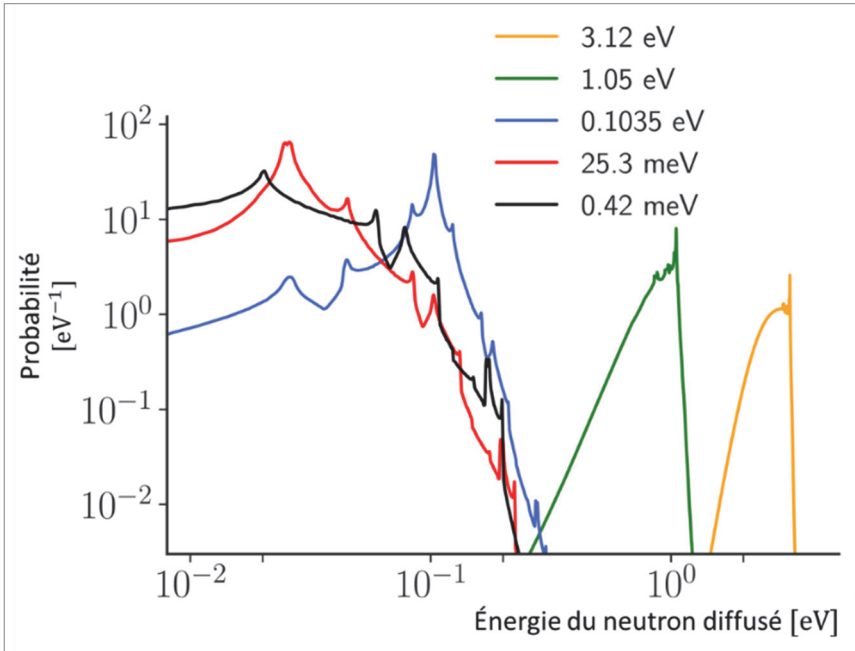


Figure B14. Densité de probabilité relative à la section efficace de diffusion inélastique incohérente en fonction de l'énergie du neutron thermique incident dans le cas du graphite à la température 293.6 K.<sup>88</sup>

### 8.3 Section efficace différentielle de la diffusion élastique incohérente

Dans les milieux hydrogénés, il peut se produire une diffusion élastique sans perte d'énergie pour le neutron incident. Cette composante de la **diffusion élastique incohérente** apparaît lorsque l'on fait un développement en série de  $\chi_{inc}(\vec{Q}, t)$  donné par (B7.13) : c'est le premier terme de la série ou terme « zéro phonon ». La section efficace différentielle de la diffusion élastique incohérente s'écrit dans ce cas :

$$\sigma_{einc}(E \rightarrow E', \mu, T) = \frac{\sigma_{sb}}{4\pi} \exp[-2EW'(T)(1 - \mu)] \delta(E - E') \quad (\text{B8.7})$$

avec  $W'(T)$  le facteur de Debye-Waller à la température  $T$  ramenée à la masse atomique ( $\text{eV}^{-1}$ ).

La section efficace de la diffusion élastique incohérente à l'énergie  $E'$  obtenue par intégration sur la variable  $\mu$  s'écrit :

$$\sigma_{einc}(E) = \frac{\sigma_b}{2} \frac{1 - \exp[-4EW'(T)]}{2EW'(T)} \quad (\text{B8.8})$$

<sup>88</sup> Voir aussi R. E. MacFarlane, A. C. Kahler, « Methods for Processing ENDF/B-VII with NJOY », *op. cit.*

La diffusion élastique incohérente se rencontre dans des matériaux comme le polyéthylène et l'hydruure de zirconium.

### Remarques

- Il existe des cas particuliers pour lesquels la loi de diffusion  $S(\alpha, \beta, T)$  n'est pas symétrique en  $\beta$  : cas de diffusion sur l'**orthohydrogène** et du **parahydrogène**<sup>89</sup>, d'utilité par exemple pour les dispositifs utilisant des neutrons froids tels que le réacteur expérimental ORPHEE du CEA/Saclay.
- Dans le cas des matériaux solides et liquides, pour les énergies élevées du neutron incident, si les valeurs requises des paramètres  $\alpha$  ou  $\beta$  sont situées en dehors de la gamme de la tabulation des fonctions  $S(\alpha, \beta, T)$ , une option est d'utiliser l'**approximation** dite **short collision time** pour exprimer la section efficace différentielle de diffusion. Cette approximation s'appuie sur une **formulation de type gaz libre** dans laquelle on introduit une « **température effective** », notée  $T_{eff}$ <sup>90</sup> :

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega'}(E \rightarrow E', \mu, T) = \frac{\sigma_b}{2k_B T} \sqrt{\frac{E'}{E}} \frac{\exp\left[-\frac{(\alpha - |\beta|)^2}{4|\alpha|} \frac{T}{T_{eff}} - \frac{|\beta|}{2}\right]}{\sqrt{4\pi\alpha T_{eff}/T}} \quad (B8.9)$$

$$\frac{k_B T_{eff}}{\hbar} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \rho(\varpi) \varpi \coth \frac{\hbar \varpi}{2kT} d\varpi \quad (B8.10)$$

- Il existe plusieurs approximations pour déterminer les fonctions  $S(\alpha, \beta)$  pour les liquides :
  - l'**approximation incohérente** déjà présentée ;
  - l'**approximation de Vineyard**<sup>91</sup> qui utilise le **facteur de structure** :  
 $S_{coh}(\alpha, \beta) = S_{inc}(\alpha, \beta) S(Q)$  ;
  - l'**approximation de Sköld**<sup>92</sup> :  $S_{coh}(\alpha, \beta) = S_{inc}(\alpha', \beta) S(Q)$  avec  $\alpha' = \alpha/S(Q)$ .

<sup>89</sup> On rappelle aussi que les **molécules d'hydrogène** se présentent sous deux formes : l'**orthohydrogène** (~75% à 300 K) dont les protons ont des **spins parallèles**, et le **parahydrogène** dont les protons ont des **spins antiparallèles** (~25 % à 300 K) ; le rapport entre les deux formes dépend de la température, la teneur en **parahydrogène** augmentant avec l'abaissement de la température et atteignant 100 % à 0 K.

<sup>90</sup> G. M. Borgonovi, *Neutron Scattering Kernels Calculations at Epithermal Energies*, AEC Research And Development Report GA-9950, UC-80, Reactor Technology, Gulf General Atomic Incorporated, March 17, 1970, p. 4 ; A. Trkov, M. Herman and D. A. Brown (edited by) *ENDF-102 – ENDF-6 Formats Manual. – Data formats and procedures for the evaluated nuclear data file ENDF/B-VI and ENDF/B-VII*, op. cit., p. 150 ; M. S. Nelkin, D. E. Parks, « Effects of Chemical Binding on Nuclear Recoil », *Physical Review* 119, 1060, August 1, 1960, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.119.1060> ; G. C. Wick, « The Scattering of Neutrons by Systems Containing Light Nuclei », *Physical Review* 94, 1228, 1 June 1954, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.94.1228>.

<sup>91</sup> G. H. Vineyard, « Scattering of Slow Neutrons by a Liquid », *Physical Review* 110, 999, June 1, 1958.

<sup>92</sup> K. Sköld, « Small Energy Transfer Scattering of Cold Neutrons from Liquid Argon », *Physical Review Letters* 19, 1023, 1967, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1023>.

## Annexe I : détermination de la section efficace « élargie »

On reprend l'expression (A1.7) de la section efficace élargie  $\bar{\sigma}(E, T)$  sous l'hypothèse « gaz libre »<sup>93</sup> :

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{1}{v} \int \|\vec{v} - \vec{V}\| \sigma(\|\vec{v} - \vec{V}\|) P(\vec{V}, T) d\vec{V} \quad (\text{I} - 1)$$

avec :

$$P(\vec{V}, T) = \left( \frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( -\frac{M}{2k_B T} V^2 \right) \quad (\text{I} - 2)$$

où  $k_B$  ( $1.38 \cdot 10^{-23}$  joules par Kelvin) est la constante de Boltzmann.

On pose :

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{V}, \quad v_r = \|\vec{v}_r\| = \|\vec{v} - \vec{V}\| \quad (\text{I} - 3)$$

$$E_r = \frac{1}{2} m v_r^2 \quad (\text{I} - 4)$$

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{1}{v} \left( \frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{\vec{V}} v_r \sigma(v_r) \exp \left( -\frac{M}{2k_B T} V^2 \right) d\vec{V} \quad (\text{I} - 5)$$

Le but visé est d'exprimer  $\bar{\sigma}(E, T)$  en fonction de l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident dans le référentiel du laboratoire et l'énergie cinétique  $E_r$  correspondant à la vitesse relative  $v_r$ .

On se place dans un référentiel à coordonnées cylindriques dont l'axe  $Oz$  est pris parallèle à la direction du neutron incident,  $\vec{v}$ , dans le référentiel du laboratoire, comme le montre la figure B15.

Les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  sont unitaires et le référentiel  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant orthonormé, on a les égalités suivantes :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

Dans ce système de coordonnées cylindriques  $(O, V_\rho, \varphi, V_z)$ , on a les relations suivantes :

$$\vec{V} = V_\rho (\cos \varphi) \vec{i} + V_\rho (\sin \varphi) \vec{j} + V_z \vec{k} \quad (\text{I} - 6)$$

<sup>93</sup> H. Tellier, *Réactions nucléaires induites par les neutrons*, Saclay, INSTN/CEA, Collection Enseignement, 1989, pp. 63-65.

avec :  $0 \leq V_\rho < \infty$  ;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ;  $-\infty < V_z < +\infty$ .

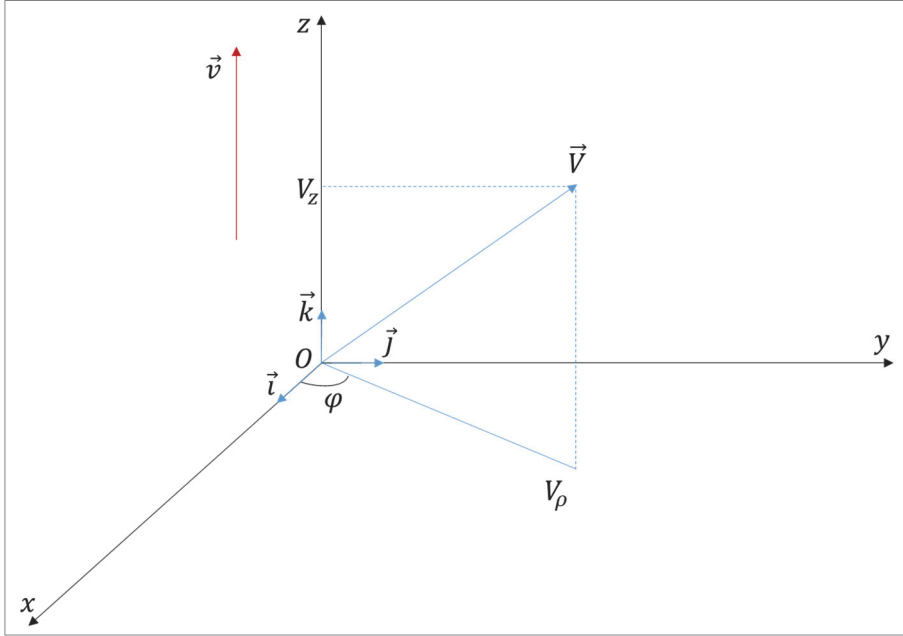


Figure B15. Système de coordonnées cylindriques  $(O, V_\rho, \varphi, V_z)$

$$\overrightarrow{dV} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial V_\rho} dV_\rho + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{V}}{\partial V_z} dV_z \quad (I-7)$$

$$\overrightarrow{dV} = [(\cos \varphi)\vec{i} + (\sin \varphi)\vec{j}]dV_\rho + V_\rho [-(\sin \varphi)\vec{i} + (\cos \varphi)\vec{j}]d\varphi + dV_z\vec{k} \quad (I-8)$$

$$d\vec{V} \equiv d^3V = V_\rho dV_\rho d\varphi dV_z \quad (I-9)$$

L'expression (I-3) de  $\bar{\sigma}(E, T)$  devient :

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{1}{v} \left( \frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} V_\rho dV_\rho \int_{-\infty}^{+\infty} v_r \sigma(v_r) \exp\left(-\frac{M}{2k_B T} V^2\right) dV_z \quad (I-10)$$

En intégrant sur la variable  $\varphi$  :

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{2\pi}{v} \left( \frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} V_\rho dV_\rho \int_{-\infty}^{+\infty} v_r \sigma(v_r) \exp\left(-\frac{M}{2k_B T} V^2\right) dV_z \quad (I-11)$$

De la définition de  $\vec{v}_r$ , on tire :

$$v_r^2 = \|\vec{v} - \vec{V}\|^2 = v^2 + V^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{V} \quad (\text{I} - 12)$$

Comme l'axe  $z$  a par construction la même direction que la vitesse  $\vec{v}$ , le référentiel  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  étant orthonormé, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{V} = v\vec{k} \cdot (V_\rho(\cos \varphi)\vec{i} + V_\rho(\sin \varphi)\vec{j} + V_z\vec{k}) = vV_z \quad (\text{I} - 13)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} V^2 &= (V_\rho(\cos \varphi)\vec{i} + V_\rho(\sin \varphi)\vec{j} + V_z\vec{k}) \cdot (V_\rho(\cos \varphi)\vec{i} + V_\rho(\sin \varphi)\vec{j} + V_z\vec{k}) \\ &= V_\rho^2((\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2) + V_z^2 \vec{k} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$$V^2 = V_\rho^2 + V_z^2 \quad (\text{I} - 14)$$

En remplaçant dans (I - 12)  $\vec{v} \cdot \vec{V}$  par (a13) et  $V^2$  par (a14), on obtient :

$$v_r^2 = v^2 + V_\rho^2 + V_z^2 - 2vV_z = V_\rho^2 + (v - V_z)^2 \quad (\text{I} - 15)$$

D'où l'on tire :

$$V^2 = v_r^2 - (v - V_z)^2 + V_z^2 = v_r^2 - v^2 + 2vV_z \quad (\text{I} - 16)$$

L'énergie  $E_r$  donnée par (I - 4) se réécrit avec (a15) comme :

$$E_r = \frac{1}{2} M_n v_r^2 = \frac{1}{2} M_n [V_\rho^2 + (v - V_z)^2] \quad (\text{I} - 17)$$

On opère à présent le changement de variables  $(V_\rho, V_z)$  vers  $(E_r, V_z)$  en calculant le jacobien associé, en différentiant (I - 17) et en sachant que  $V_z$  et  $V_\rho$  sont deux variables indépendantes :

$$dE_r dV_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_r}{\partial V_\rho} & \frac{\partial E_r}{\partial V_z} \\ \frac{\partial V_\rho}{\partial V_z} & \frac{\partial V_z}{\partial V_z} \end{vmatrix} dV_\rho dV_z = \begin{vmatrix} M_n V_\rho & M_n V_z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} dV_\rho dV_z = M_n V_\rho dV_\rho dV_z \quad (\text{I} - 18)$$

Le domaine de variation de  $E_r$  est  $0 < E_r < \infty$  et celui de  $V_z$  est  $v - v_r < V_z < v + v_r$ . L'expression (I - 11) de  $\bar{\sigma}(E, T)$  devient :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(E, T) &= \frac{2\pi}{v M_n} \left( \frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} dE_r \int_{v-v_r}^{v+v_r} v_r \sigma(v_r) \exp \left( -\frac{M}{2k_B T} [v_r^2 - v^2 \right. \\ &\quad \left. + 2vV_z] \right) dV_z \end{aligned} \quad (\text{I} - 19)$$

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{2\pi}{vM_n} \left( \frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} dE_r v_r \sigma(v_r) \\ \times \exp\left(-\frac{M}{2k_B T} [v_r^2 - v^2]\right) \int_{v-v_r}^{v+v_r} \exp\left(-\frac{M}{2k_B T} [2vV_z]\right) dV_z \quad (\text{I} - 20)$$

Après intégration sur la variable  $V_z$ , on obtient :

$$\bar{\sigma}(E, T) = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{A}{4\pi k_B T}} \int_0^{\infty} \sqrt{E_r} \sigma(E_r) \left[ \exp\left(-\frac{A}{k_B T} (\sqrt{E_r} - \sqrt{E})^2\right) \right. \\ \left. - \exp\left(-\frac{A}{k_B T} (\sqrt{E_r} + \sqrt{E})^2\right) \right] dE_r \quad (\text{I} - 21)$$

On retrouve bien l'expression (A1.I0.a) du texte principal.





# 11

## **Interactions des photons avec la matière**



La connaissance et la caractérisation du comportement des **photons** se propageant dans la matière sont importantes dans l'étude des systèmes nucléaires à plusieurs égards : établissement de **bilans énergétiques**, calcul d'**échauffements des matériaux de structures**, **radioprotection** de l'environnement, **sûreté-criticité** des installations, **instrumentation et mesures** en milieu nucléaire... En effet, ils sont responsables de **dépôts d'énergie** dans la matière, et également de la **production de rayonnements secondaires** via des réactions nucléaires productrices en particulier de neutrons. Par ailleurs, il est à noter que les **réactions photonucléaires**, c'est-à-dire les réactions nucléaires induites par les photons, sont utilisées pour constituer des **sources de neutrons** (voir annexe III) dont l'un des usages est le démarrage de réacteurs nucléaires<sup>1</sup>.

Après avoir précisé les termes particuliers que l'on assigne aux photons, on passe en revue les différentes interactions auxquelles ils donnent lieu avec le cortège électronique des atomes rencontrés. Cette section est suivie de trois autres, respectivement consacrées à l'importance relative des phénomènes précédemment décrits – **effet photo-électrique**, **diffusion Compton ou incohérente**, **diffusion Rayleigh ou cohérente** et **création de paires (électron, positron)** – en fonction de la nature de l'atome considéré, la notion de **coefficient linéaire d'atténuation**, et enfin la détermination du dépôt d'énergie local qui accompagnent les interactions précitées. La dernière section est consacrée aux **réactions photonucléaires**.

## 1. Phénomènes associés au passage des photons dans la matière

On s'intéresse ici aux **rayonnements X** et  **$\gamma$**  qui sont des **photons** et dont la désignation diffère en raison à la fois de leur origine physique et de la gamme d'énergie concernée<sup>2 3 4 5 6</sup>. Le domaine d'énergie du **rayonnement X** est celui de la physique atomique. L'émission de photons X correspond aux **transitions des électrons** entre les différentes couches électroniques internes d'un atome (essentiellement K, L et M). Ces énergies vont de l'électronvolt (eV) à quelques kiloélectronvolts (keV).

Le domaine du **rayonnement  $\gamma$  (gamma)** s'étend de la dizaine de keV jusqu'à la centaine de MeV. Ce rayonnement est lié à deux phénomènes :

- la **désexcitation d'un noyau atomique excité** résultant de divers processus (réactions nucléaires, radioactivité), les  $\gamma$  peuvent alors atteindre la dizaine de MeV ;

<sup>1</sup> Voir J. Bussac, P. Reuss, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris, 1978, pp. 395-397.

<sup>2</sup> G. F. Knoll, *Radiation detection and measurement*, New York, John Wiley & Sons, 4<sup>th</sup> édition, 2010.

<sup>3</sup> W. R. Leo, *Techniques for nuclear and particles physics experiments*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 1987.

<sup>4</sup> S. Hustache-Ottini, « L'interaction rayonnement-matière et les grandes familles de détecteurs », École Internationale Joliot-Curie, Maubuisson, France, 20<sup>e</sup> session, 9-15 septembre 2001, pp. 1-64.

<sup>5</sup> D. Blanc, *Les rayonnements ionisants. Détection, dosimétrie, spectrométrie*, Dunod, Paris, 1990.

<sup>6</sup> R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, 1955, chapitres 18 à 25, pp. 567-745.

- le **rayonnement de freinage d'électrons** ou *bremsstrahlung* suffisamment énergétiques qui peuvent générer sur leur trajet dans la matière des  $\gamma$  dont l'énergie maximale possible est celle initiale de l'électron. Ce phénomène devient très significatif pour des électrons d'une énergie cinétique supérieure à 10 MeV.

La **figure 1** présente les énergies, les longueurs d'onde et les domaines de différents types de photons.

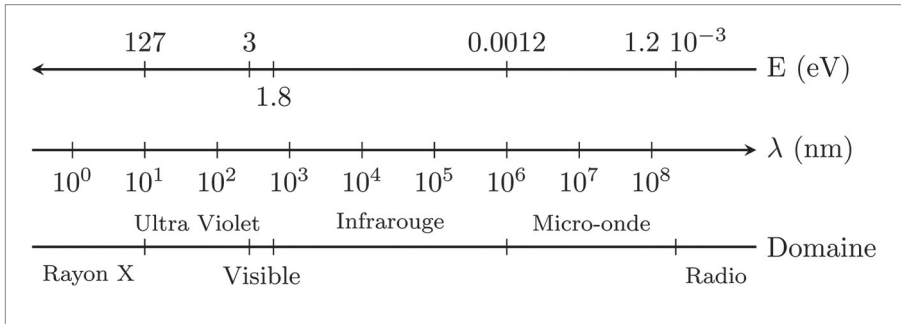


Figure 1. Caractéristiques des photons : gamme d'énergie en électronvolt (eV), longueur d'onde en nanomètre (nm).

Les photons n'ayant pas de charges électriques, les interactions photons-matière ne se font donc pas de manière continue comme c'est le cas pour les particules chargées. Chaque interaction entraîne des modifications importantes de l'énergie et de la trajectoire du photon, voire sa disparition. Les photons, comme les neutrons, ont donc une probabilité non nulle de traverser un milieu sans interagir. Les notions de section efficace et de libre parcours moyen introduites pour les neutrons dans le chapitre 8 sont directement transposables aux photons.

La **section efficace macroscopique totale** est aussi appelée dans le cas des photons **coefficient total d'atténuation linéaire**, souvent noté  $\mu(E)$ ,  $E$  étant l'énergie du photon. Le photon ne portant pas de charge électrique, comme pour le neutron, la barrière coulombienne ne constitue donc pas un obstacle à son atteinte du noyau atomique. Toutefois, la nature électromagnétique du photon explique que sa propagation dans la matière est très largement dominée par ses interactions avec les électrons du cortège électronique ; les probabilités d'occurrence de ces interactions (donc leurs sections efficaces) sont bien plus élevées que celles des réactions possibles entre le photon et le noyau atomique.

Les trois types de phénomènes d'interaction dominants des photons avec les électrons d'un atome sont :

- l'**effet photoélectrique**, pour des énergies du photon inférieures à 0.5 MeV (longueurs d'onde supérieures à  $2.5 \times 10^{-3}$  nm).
- les **diffusions Compton, Thomson et Rayleigh** (ou **diffusion cohérente**), pour des

énergies comprises entre 0.5 MeV et 5 MeV (longueurs d'onde comprises entre  $2.5 \cdot 10^{-3}$  nm et  $2.5 \cdot 10^{-4}$  nm).

- la **production de paires** ( $e^+$ ,  $e^-$ ), pour des énergies supérieures à 5 MeV (longueurs d'onde inférieures à  $2.5 \cdot 10^{-4}$  nm).

Il convient cependant d'y ajouter la **diffusion Rayleigh** ou **diffusion cohérente**, dont l'existence se manifeste assez significativement pour les noyaux de numéro atomique élevé, tels que le plomb, pour des énergies de l'ordre de 80 keV.

## 2. Effet photoélectrique

L'**effet photoélectrique**<sup>7</sup> correspond à l'absorption d'un photon d'énergie  $h\nu$  par un atome du milieu traversé et à l'émission d'un électron du cortège électronique avec une énergie notée  $E_{e^-}$ . L'électron concerné est le plus souvent situé initialement sur les couches internes de l'atome. Lors de l'absorption du photon, l'atome est porté de son état fondamental à un niveau situé au-dessus de l'**énergie de seuil d'ionisation**  $E_I$  (voir **figure 2**). Le **photoélectron** produit émerge avec une énergie cinétique dépendante de l'énergie de liaison  $B_e$  de la couche sur laquelle il se situait :

$$E_{e^-} = h\nu - B_e \quad (2.1)$$

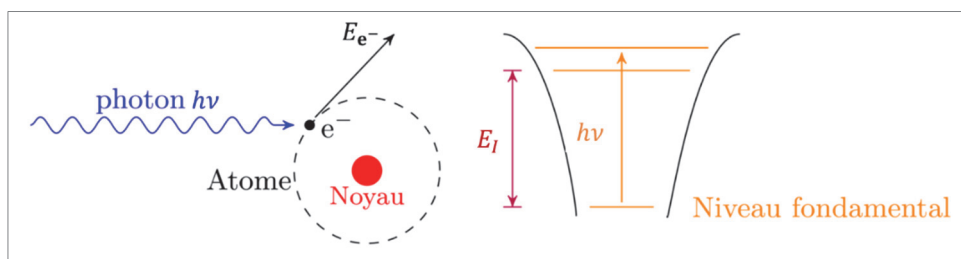


Figure 2. Schéma de principe du mécanisme de l'effet photoélectrique provoqué par l'absorption d'un photon d'énergie  $h\nu$  par un atome initialement dans son état fondamental ;  $E_I$  est l'énergie de seuil d'ionisation de l'atome.

L'atome se retrouve alors dans un état excité, car il y a une lacune d'électron dans une de ses couches internes. Deux modes de décroissances sont alors possibles (voir chapitre 5 § 7).

- Émission d'un **rayonnement X** associé au passage d'un électron d'une couche externe vers la couche interne libre.

<sup>7</sup> A. Einstein, « Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt », *Annalen der Physik* 17, 132, 1905, <https://www.zbp.univie.ac.at/dokumente/einstein1.pdf> ; A. B. Arons, M. B. Peppard, « Einstein's Proposal of the Photon Concept - a Translation of the Annalen der Physik Paper of 1905 », *American Journal of Physics*, Vol. 33, Number 5, May 1965, pp. 367-374.

- Émission d'un **électron Auger** d'une des couches externes. L'énergie disponible pour le rayonnement X se reporte alors sur cet électron et son énergie cinétique est égale à l'énergie de ce rayonnement X diminuée de son énergie de liaison.

L'**effet photoélectrique** est une **réaction à seuil** où l'énergie minimale doit permettre l'ionisation de l'atome. En fait, la totalité de l'énergie cinétique n'est pas portée par l'électron, la conservation de l'impulsion donne une composante cinétique au noyau. Toutefois, la différence de masse entre le noyau et l'électron est telle que l'on néglige généralement ce recul. Le traitement théorique de ce phénomène est relativement difficile et sa **section efficace** est approximée par :

$$\sigma_{pe} \approx \text{constante} \times \frac{Z^5}{E_\gamma^3} \quad (2.2)$$

Cette expression semi-empirique est valable pour des photons d'énergie  $E_\gamma$  allant jusqu'à quelques centaines de keV. On dispose ainsi de deux informations importantes sur les dépendances de la section efficace :

- décroissance de la section efficace de l'effet photoélectrique lorsque l'énergie  $E_\gamma$  augmente ;
- augmentation de la section efficace de l'effet photoélectrique avec le numéro atomique (nombre de charges)  $Z$  des atomes du milieu, donc avec le nombre d'électrons du cortège électronique de l'atome.

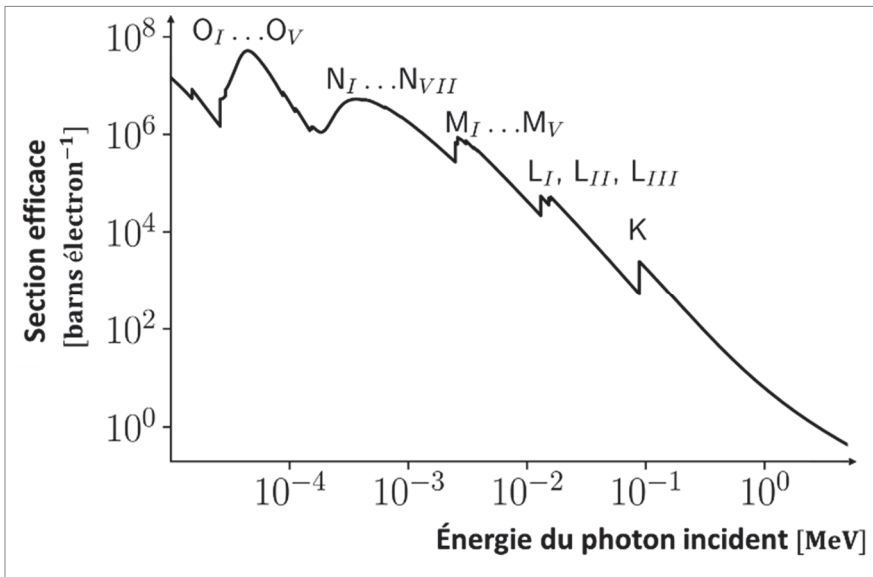


Figure 3. Section efficace de l'effet photoélectrique pour le plomb : elle fait apparaître des pics dans la région à plus basse énergie, correspondant aux différentes couches électroniques occupées par les électrons du cortège électronique de l'atome ; couche K : 88.0 keV ; couche L<sub>I</sub> : 15.9 keV ; couche L<sub>II</sub> : 15.2 keV ; couche L<sub>III</sub> : 13.0 keV.

Cela explique l'efficacité des matériaux à numéro atomique  $Z$  élevé, par exemple le plomb, et par suite leur importance, pour se protéger des rayonnements photoniques. La **figure 3** montre l'exemple de la variation de la section efficace de l'effet photoélectrique sur un atome de plomb. On observe très nettement l'influence des énergies associées aux positions des différentes couches électroniques du plomb sur les sections efficaces de l'effet photoélectrique faisant apparaître des « pics ». Les énergies de liaisons des électrons des différentes couches atomiques sont respectivement les suivantes dans le cas du plomb :

### 3. Diffusion Compton et diffusion Thomson

La **diffusion Compton**<sup>8</sup>, appelée aussi **diffusion incohérente**, correspond à la diffusion élastique d'un photon d'énergie  $E_\gamma = h\nu$  sur un électron quasi libre du cortège électronique. Dans la matière, les électrons sont liés, toutefois, si l'énergie du photon est grande devant celle qui lie l'électron à l'atome, l'électron peut alors être considéré comme libre. C'est le cas pour une gamme en énergie de l'ordre de quelques centaines de keV. La voie de sortie de cette réaction comprend un électron qui emporte une partie de l'énergie du photon incident et un photon d'une énergie  $E'_\gamma = h\nu'$  inférieure à  $h\nu$ . La **figure 4** présente le schéma de principe de cette diffusion Compton.

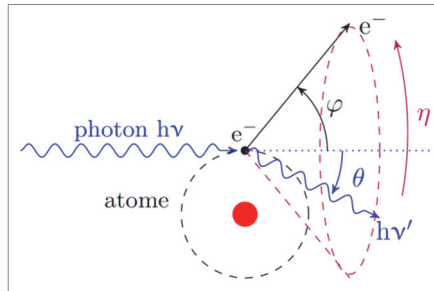


Figure 4. Schéma de principe de la diffusion Compton : le photon est ici considéré en tant que corpuscule d'énergie initiale  $E_\gamma = h\nu$  et dont l'énergie après diffusion est  $E'_\gamma = h\nu'$ . L'angle  $\eta$  est l'angle de révolution autour de l'axe du cône d'angle d'ouverture  $\varphi$ , angle de la trajectoire de l'électron Compton :  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ .

Pour des angles de diffusion du photon  $\theta$  compris entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$ , on parle de **photons rétrodiffusés** (*backscattered photons*, *backscattering* : **rétrodiffusion**).

On pose :

$$\kappa = \frac{h\nu}{m_0 c^2} \equiv \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} \quad (3.1)$$

<sup>8</sup> A. H. Compton, « A quantum theory of the scattering of X-rays by light elements », *Physical Review* 21, May 1923, pp. 483-502, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.21.483>.

En appliquant les lois de conservations de l'énergie et de l'impulsion, on détermine les caractéristiques cinématiques des particules en voie de sortie :

$$h\nu' \equiv E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \kappa(1 - \cos \theta)} \quad (3.2)$$

De la relation (3.2) il découle que la valeur maximale  $E'_{\gamma,\max}$  de l'énergie du photon diffusé est égale à  $E_\gamma$ , correspondant à une diffusion à l'angle  $\theta = 0$  ( $\cos \theta = 1$ ) ; l'énergie minimale  $E'_{\gamma,\min}$  du photon diffusé est obtenue pour un angle de déviation  $\theta = 180^\circ$  ( $\cos \theta = -1$ ) :

$$E'_{\gamma,\min} = \frac{E_\gamma}{1 + 2\kappa} \quad (3.3)$$

La **section efficace différentielle** de ce processus, calculée en utilisant l'électrodynamique quantique, est connue sous le nom de **formule de Klein-Nishina**<sup>9 10 11</sup> :

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left\{ \frac{1}{[1 + \kappa(1 - \cos \theta)]^2} \left[ 1 + \cos^2 \theta + \frac{\kappa^2(1 - \cos \theta)^2}{[1 + \kappa(1 - \cos \theta)]} \right] \right\} \quad (3.4a)$$

ou, compte tenu de (3.2) :

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left[ \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \right]^2 \left[ \frac{E_\gamma}{E'_\gamma} + \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} - \sin^2 \theta \right] \quad \text{cm}^2 \text{ ou barns sr}^{-1} \text{ électron}^{-1} \quad (3.4b)$$

avec :

- $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$  (3.5)

- $r_0$ : le rayon classique de l'électron :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} = 2.8177 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (3.6)$$

On peut également exprimer la **section efficace différentielle de collision Compton** en fonction de la variable énergie  $E'_\gamma$  du photon après collision<sup>12</sup>, sachant que celle-ci est liée à la variable angulaire  $\theta$  (ou  $\cos \theta$ ) par la relation biunivoque (3.2) (voir annexe II) :

<sup>9</sup> O. Klein, Y. Nishina, « The Scattering of Light by Free Electrons according to Dirac's New Relativistic Dynamics », *Nature* 122, 1928, pp. 398–399, <https://doi.org/10.1038/122398b0>.

<sup>10</sup> Y. Yazaki, « How the Klein–Nishina formula was derived: Based on the Sangokan Nishina Source Materials », *Proc. Jpn. Acad., Ser. B* 93, 2017, pp. 399–421, <https://doi.org/10.2183/pjab.93.025>.

<sup>11</sup> C. Meaker Davisson, R. D. Evans, « Gamma-Ray Absorption Coefficients », *Rev. Mod. Phys.* 24, 79 (1952), April 1, 1952, pp. 79–107, p. 80, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.24.79>.

<sup>12</sup> Il ne faut pas confondre cette section efficace avec la **section efficace différentielle** définie par :

$$\frac{d\sigma_{cs}}{d\Omega} = \frac{\nu'}{\nu} \frac{d\sigma_c}{d\Omega}$$

qui est relative à la fraction  $\frac{\nu'}{\nu}$  diffusée ; elle est appelée **section efficace différentielle de diffusion Compton** ; voir R. D. Evans, *The Atomic Nucleus, op. cit.*, pp. 682–684 ; voir § 7.2.v



$$\frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} = \frac{\pi r_0^2}{\kappa} \left[ \frac{1}{E'_\gamma} \left( 1 - \frac{2}{\kappa} - \frac{2}{\kappa^2} \right) + \frac{E_\gamma}{\kappa^2 E'^2_\gamma} + \frac{E_\gamma}{E'^2_\gamma} + \frac{1}{E_\gamma} \frac{2\kappa + 1}{\kappa^2} \right] \text{ cm}^2 \text{ ou barns MeV}^{-1} \text{ électron}^{-1} \quad (3.7)$$

Le spectre d'émission des photons diffusés est par conséquent continu. La **figure 5a** représente cette section efficace différentielle (nombre de photons diffusés par unité d'angle solide) pour différentes valeurs de l'énergie  $E_\gamma$  du photon incident :  $E_\gamma = 51.1 \text{ keV}$  ( $\kappa = 0.1$ ),  $E_\gamma = 204.4 \text{ keV}$  ( $\kappa = 0.4$ ),  $E_\gamma = 511.1 \text{ keV}$  ( $\kappa = 1$ ),  $E_\gamma = 2.4 \text{ MeV}$  ( $\kappa = 4$ ),  $E_\gamma = 5.11 \text{ MeV}$  ( $\kappa = 10$ ). On remarque que l'anisotropie du processus de diffusion Compton des photons est d'autant plus marquée vers l'avant que l'énergie de ceux-ci est élevée.

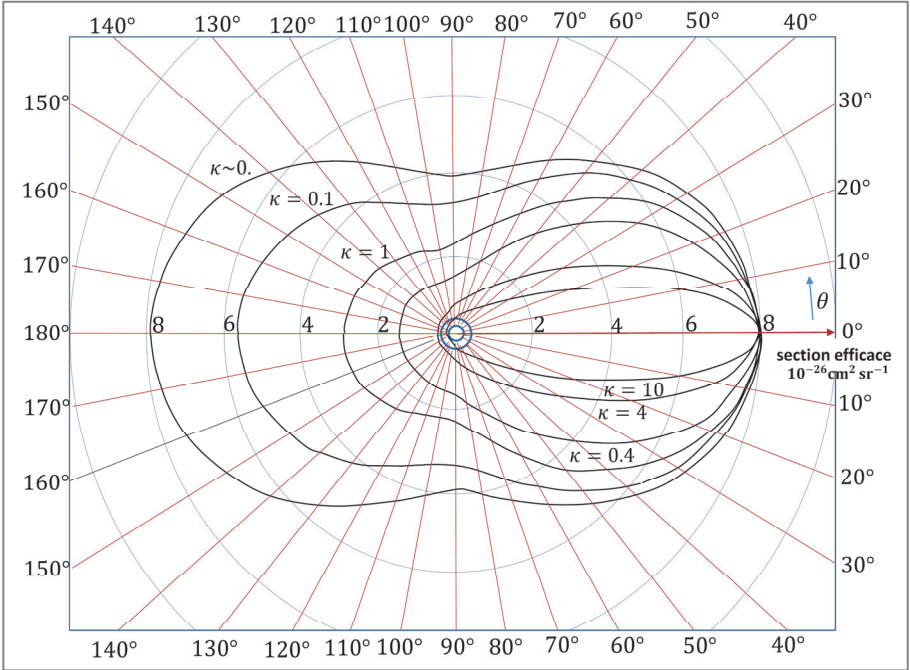


Figure 5a. Section efficace différentielle angulaire (unités :  $10^{-26} \text{ cm}^2 \text{ sr}^{-1}$ ) des photons diffusés à un angle  $\theta$  donné par effet Compton en coordonnées polaires, pour plusieurs valeurs de l'énergie du photon incident  $E_\gamma$  via le paramètre  $\kappa = \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} \left( \equiv \frac{h\nu}{m_0 c^2} \right)$  :  $E_\gamma = 51.1 \text{ keV}$  ( $\kappa = 0.1$ ),  $E_\gamma = 204.4 \text{ keV}$  ( $\kappa = 0.4$ ),  $E_\gamma = 511.1 \text{ keV}$  ( $\kappa = 1$ ),  $E_\gamma = 2.4 \text{ MeV}$  ( $\kappa = 4$ ),  $E_\gamma = 5.11 \text{ MeV}$  ( $\kappa = 10$ ). La direction d'incidence des photons correspond à l'angle  $\theta = 0^\circ$ .

Lorsque l'énergie  $E_\gamma$  est très faible, donc pour  $\kappa$  proche de 0, alors la distribution angulaire des photons diffusés tend vers l'isotropie : on retrouve le processus de la **diffusion Thomson** explicité plus loin. Par intégration de (3.4a) ou (3.4b) en angle  $\theta$  entre 0 et  $\pi$  ou bien (3.7) entre  $E'_{\gamma,\min}$  et  $E_\gamma$ , on obtient la section efficace de collision Compton scalaire  $\sigma_c = \sigma_c(E_\gamma)$  :

$$\begin{aligned}\sigma_c &= \int_0^\pi \frac{d\sigma_c}{d\Omega} d\Omega = \int_{E'_{\gamma,\min}}^{E_\gamma} \frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} dE'_\gamma \\ &= 2\pi r_0^2 \left[ \left( \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{\kappa^3} \right) \ln(1 + 2\kappa) + \frac{2}{\kappa^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \kappa}{(1 + 2\kappa)^2} \right] \text{ cm}^2 \text{ ou barns électron}^{-1}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Cette section efficace est constamment décroissante avec l'énergie et on peut observer qu'elle tend vers une valeur nulle lorsque l'énergie du photon tend vers l'infini. En effet, à très haute énergie, donc pour  $\kappa \gg 1$ , (3.8) devient :

$$\sigma_c = \pi r_0^2 \frac{1}{\kappa} \left[ \ln 2\kappa + \frac{1}{2} \right] \quad \text{cm}^2 \text{ ou barns électron}^{-1} \quad (3.9)$$

À très basse énergie, donc pour  $\kappa \ll 1$  (3.8) devient :

$$\sigma_c = \pi \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left[ 1 - 2\kappa + \frac{26}{5} \kappa^2 \right] \quad \text{cm}^2 \text{ ou barns électron}^{-1} \quad (3.10)$$

Lorsque l'énergie du photon tend vers une valeur très petite devant la masse au repos de l'électron,  $h\nu \ll m_0 c^2$  ( $\kappa \ll 1$  ou  $\kappa \rightarrow 0$ ), on obtient une formule beaucoup plus simple, la section efficace de la **diffusion Thomson** :

$$\sigma_{\text{Thomson}} = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \right)^2 \quad \text{cm}^2 \text{ ou barns électron}^{-1} \quad (3.11)$$

Lorsque le photon a une énergie inférieure à la centaine de keV, il n'est plus possible d'utiliser l'hypothèse de non-liaison de l'électron à l'atome. Cette situation se rencontre notamment pour les noyaux lourds.

La formule de Klein-Nishina ne permet plus alors de décrire la section efficace de ce processus, car elle suppose que l'électron est libre ou très peu lié. Ces sections efficaces sont alors multipliées par des **fonctions de diffusion incohérente** qui sont tabulées dans des bases (ou bibliothèques) de données photoniques.

Notés  $S(q, Z)$ , ces **facteurs de forme** dépendent du nombre  $Z$  d'électrons de l'atome et de la quantité de mouvement  $q$  transférée à l'un d'eux :

$$q = \kappa \left[ 1 + \left( \frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 - 2 \cos \theta \left( \frac{\kappa'}{\kappa} \right) \right]^{1/2} \quad (3.12)$$

avec  $\kappa' = h\nu'/2m_0c^2$ .

On a :  $S(q = 0, Z) = 0$  et  $S(q, Z) \rightarrow Z$  quand  $Z \rightarrow 0$ .

**L'énergie cinétique de l'électron,  $E_{e^-}$** , déduite des lois de conservation de l'énergie totale et de l'impulsion a pour expression :

$$E_{e^-} = E_\gamma \left[ 1 - \frac{E_\gamma}{1 + \kappa(1 - \cos \theta)} \right] = E_\gamma \left[ \frac{2\kappa}{1 + 2\kappa + (1 + \kappa)^2 \tan^2 \varphi} \right] \quad (3.13a)$$

avec :

$$\cos \theta = 1 - \frac{2\kappa}{1 + (1 + \kappa)^2 \tan^2 \varphi} \quad (3.13b)$$

L'énergie emportée par l'électron vaut  $h\nu - h\nu' \equiv E_\gamma - E'_\gamma$ , elle est maximale pour un angle de diffusion du photon égale à  $\theta = 180^\circ$ ,  $\cos \theta = -1$  :

$$E_{e^-, \max} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{1}{2\kappa}} \quad (3.14)$$

Elle est minimale et égale à 0 pour un angle de déviation égal à  $0^\circ$  (photon diffusé vers l'avant) pour lequel  $\cos \theta = 1$  qui de fait correspond à une absence d'interaction Compton.

La **section efficace différentielle en énergie** d'émission de **l'électron Compton** est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d\sigma_c}{dE_{e^-}} = \frac{\pi r_0^2}{2} \frac{1}{\kappa E_\gamma} \left[ \frac{E_\gamma}{E'_\gamma} + \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} - \sin^2 \theta \right] \quad \text{cm}^2 \text{ ou barns électron}^{-1} \quad (3.15)$$

En opérant le changement de variable de  $\theta$  en  $\varphi$  et en intégrant sur l'angle azimutal  $\eta$  (voir figure 4) entre 0 et  $2\pi$ , elle s'exprime également en fonction de l'angle de déviation  $\varphi$  de l'électron Compton :

$$\frac{d\sigma_c}{dE_{e^-}} = \frac{2\pi}{\kappa E_\gamma} \left[ \frac{d\sigma_c}{d\Omega} \right] \left\{ \frac{(1 + \kappa)^2 - \kappa^2 \cos^2 \varphi}{(1 + \kappa)^2 - \kappa(2 + \kappa) \cos^2 \varphi} \right\}^2 \quad (3.16)$$

où  $\frac{d\sigma_c}{d\Omega}$  est donné par (3.4a) ou (3.4b).

La section efficace différentielle en énergie relative à l'émission de l'électron Compton est représentée sur les figures 5b et 5c.

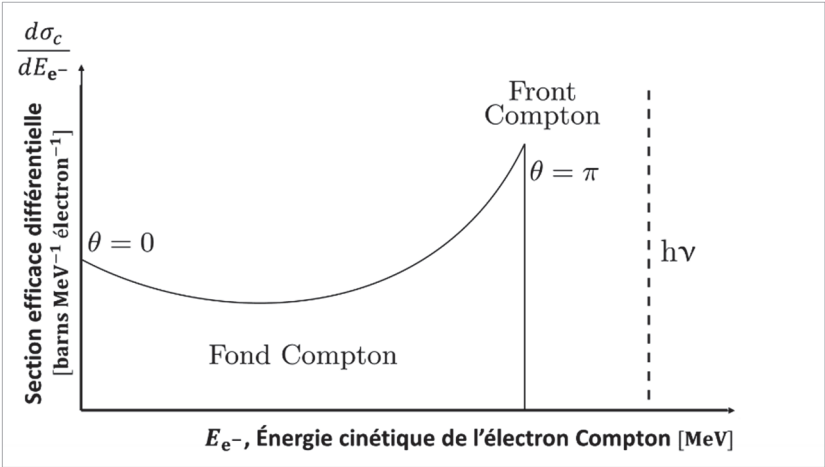


Figure 5b. Allure de la section efficace différentielle en énergie d'émission de l'électron Compton.

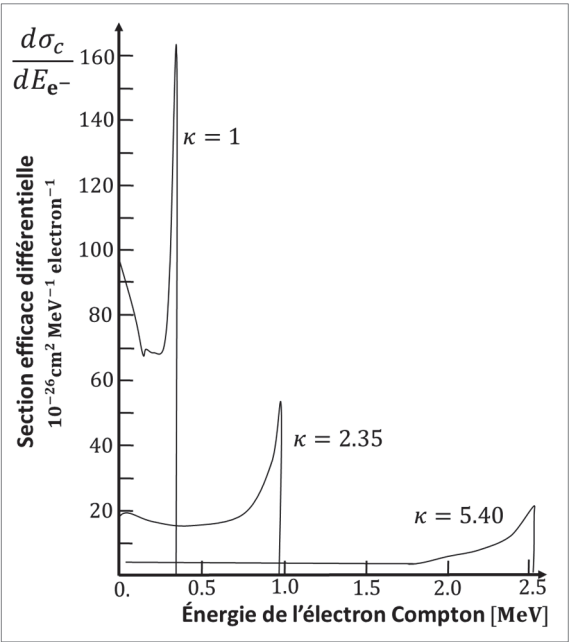


Figure 5c. Section efficace différentielle en énergie d'émission de l'électron Compton pour différentes énergies du photon incident :  $E_\gamma = 511.1$  keV ( $\kappa = 1$ ),  $E_\gamma = 1.19$  MeV ( $\kappa = 2.35$ ),  $E_\gamma = 2.76$  MeV ( $\kappa = 5.40$ ).<sup>13</sup>

<sup>13</sup> C. Meaker Davisson, R. D. Evans, « Gamma-Ray Absorption Coefficients », *op. cit.*, figure 49, p. 107.

La **figure 5c** montre que le « **front Compton** » spécifié sur la figure 5b se déplace d'autant plus vers la droite que l'énergie du photon incident est grande.

#### 4. Diffusion Rayleigh ou diffusion cohérente

La **diffusion Rayleigh**<sup>14 15</sup>, aussi appelée **diffusion cohérente**, est la diffusion d'un photon par un atome dans son ensemble. Le photon en voie de sortie possède la même énergie que le photon incident mais sa trajectoire est différente : c'est une **diffusion élastique**, qui porte aussi le nom de **diffusion cohérente**.

L'atome n'est alors ni excité ni ionisé. La distribution de cette diffusion est très piquée vers les petits angles à l'avant. Ce processus devient négligeable lorsque l'énergie du photon dépasse 100 keV. Il est en compétition avec l'effet photoélectrique.

La section efficace de ce processus est présentée sous la forme de celle relative à la **diffusion Thomson** multipliée par des facteurs de forme :

$$\frac{d\sigma_{coh}(E_\gamma, E'_\gamma, \cos \theta)}{d(\cos \theta)} = \pi r_0^2 (1 + \cos^2 \theta) \left\{ [F(q, Z) + F'(E_\gamma)]^2 + F''(E_\gamma)^2 \right\} \text{ cm}^2 \text{ ou barns sr}^{-1} \text{ atome}^{-1} \quad (4.1)$$

- $q = \kappa[2(1 - \cos \theta)]^{1/2}$  : quantité de mouvement de l'atome de recul.
- $F(q, Z), F'(E_\gamma), F''(E_\gamma)$  : facteurs de forme tabulés dans des bases de données (voir chapitre 13).

Les sections efficaces de diffusion relatives à l'atome sont immédiatement déduites des expressions (3.7), (3.8) et (3.10) en les multipliant respectivement par le nombre  $Z$  d'électrons du cortège électronique correspondant.

La **figure 6** présente les sections efficaces des diffusions Rayleigh et Compton dans le cas du plomb.

On note que la diffusion Rayleigh est très importante à basse énergie mais reste généralement négligeable devant l'effet photoélectrique sauf au voisinage de 80 keV. On reviendra sur ce point avec la figure 10 et en commentant l'importance relative des différents processus précités.

<sup>14</sup> Lord F. R. S. Rayleigh, « On the Electromagnetic Theory of Light », *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Series 5*, 12, 73, 1881, pp. 81-101, <https://doi.org/10.1080/14786448108627074>.

<sup>15</sup> Lord F. R. S. Rayleigh, « On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky », *Phil. Mag., Series 5*, 47, 287, 1899, 375-394, <https://doi.org/10.1080/14786449908621276>.

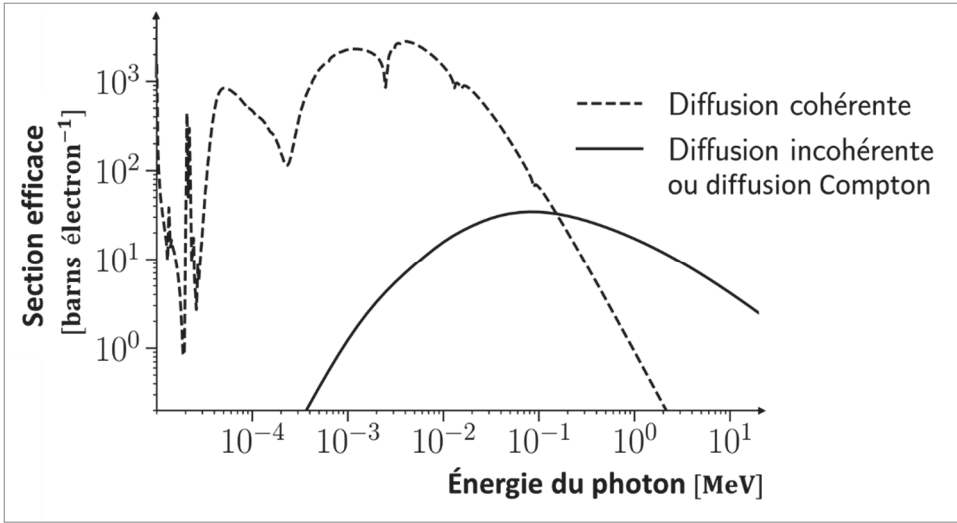


Figure 6. Section efficace de l'effet Compton ou diffusion incohérente et de la diffusion cohérente pour le plomb.

## 5. Création de paires ( $e^-$ , $e^+$ )

La **création** ou **production d'une paire** ( $e^-$ ,  $e^+$ ) ou encore **effet de paire**<sup>16 17 18</sup> correspond à la matérialisation d'un photon en un **électron** et un **positron**. Le principe de la conservation de l'impulsion impose que ce phénomène ne peut se produire sans la présence d'une autre particule, le plus souvent un noyau atomique.<sup>19</sup> La **figure 7** schématise ce processus :

Cette réaction n'est possible d'un point de vue énergétique que pour des énergies de photon supérieures à deux fois la masse au repos de l'électron  $m_0c^2$ , soit  $2 \times 0.511 \text{ MeV} = 1.022 \text{ MeV}$  (voir annexe I). L'électron et le positron emportent alors la quasi-totalité de l'énergie excédentaire à leur création sous forme cinétique :

$$E_{e^-} + E_{e^+} \approx h\nu - 2m_0c^2 \quad (5.1)$$

<sup>16</sup> La première observation de créations de paires électron-positron a été faite par P. M. S. Blackett et G. P. S. Occhialini, « Some Photographs of the Tracks of Penetrating Radiation », *Proceedings of the Royal Society of London*, A 139 (839), 1933, pp. 699-726, <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1933.0048>.

<sup>17</sup> G. Breit, J. A. Wheeler, « Collision of Two Light Quanta », *Physical Review* 46, 15 December 1934, pp. 1087-1091, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.46.1087>.

<sup>18</sup> E. J. Williams, « Production of Electron-Positron Pairs », *Nature*, Vol. 135, 1935, p. 66, <https://doi.org/10.1038/135066a0>.

<sup>19</sup> Il a cependant été montré que l'effet de paire peut également se produire dans le champ d'un électron atomique sous la condition que l'énergie du photon soit au moins égale à  $4m_0c^2 = 2.04 \text{ MeV}$  : F. Perrin, « Possibilité de matérialisation par interaction d'un photon et d'un électron », *Comptes rendus*, Vol. 197, 1933, pp. 1100-1102 : <http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-3149&I=1102&M=tdm>.

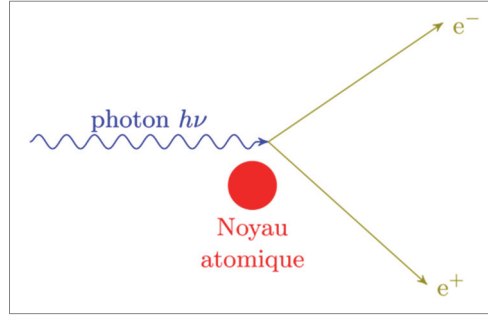


Figure 7. Représentation schématique de la création de paires dans le champ du noyau atomique.

La section efficace de ce processus ne devient importante que pour des énergies supérieures à plusieurs MeV. En théorie, n'importe quel type de paires particule-antiparticule peut être produit dès lors que l'apport énergétique est suffisant, mais la création de paires électron-positron est très largement dominante. La **section efficace de production de paires** ( $e^-$ ,  $e^+$ ),  $\sigma_{pp}$ , processus qui se déroule dans le champ du noyau, est proportionnel à  $Z^2$ . La section efficace différentielle de création de paires électron-positron est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{d\sigma_{pp}}{dE_{e^+}} = \frac{\sigma_0 Z^2 P}{h\nu - 2m_0 c^2} \quad (5.2)$$

où :

- $\sigma_0 = \left(\frac{1}{137}\right) \left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2 5.810^{-28} \text{cm}^2 \text{atome}^{-1}$  ou  $5.8 \cdot 10^{-4}$  barns atome $^{-1}$  (5.3)
- $P$  est une grandeur adimensionnelle fonction de  $h\nu$  et de  $Z$  : sa la valeur varie entre 0 pour  $h\nu \ll 2m_0 c^2$  et 20 pour  $h\nu \rightarrow \infty$ , pour toute valeur de  $Z$ .

La **figure 8** représente la grandeur adimensionnelle  $P$  en fonction du rapport  $E_{e^+}/(h\nu - 2m_0 c^2)$  pour différentes énergies initiales de photons multiples de  $m_0 c^2$ .

La section efficace scalaire est obtenue par intégration de l'équation (4.2) :

$$\sigma_{pp} = \int_0^{h\nu - 2m_0 c^2} \frac{\sigma_0 Z^2 P}{h\nu - 2m_0 c^2} dE_{e^+} \quad (5.4)$$

$$\sigma_{pp} = \sigma_0 Z^2 \tilde{P} \quad (5.5)$$

en ayant posé :

$$\tilde{P} = \int_0^{h\nu - 2m_0 c^2} \frac{P}{h\nu - 2m_0 c^2} dE_{e^+} \quad (5.6)$$

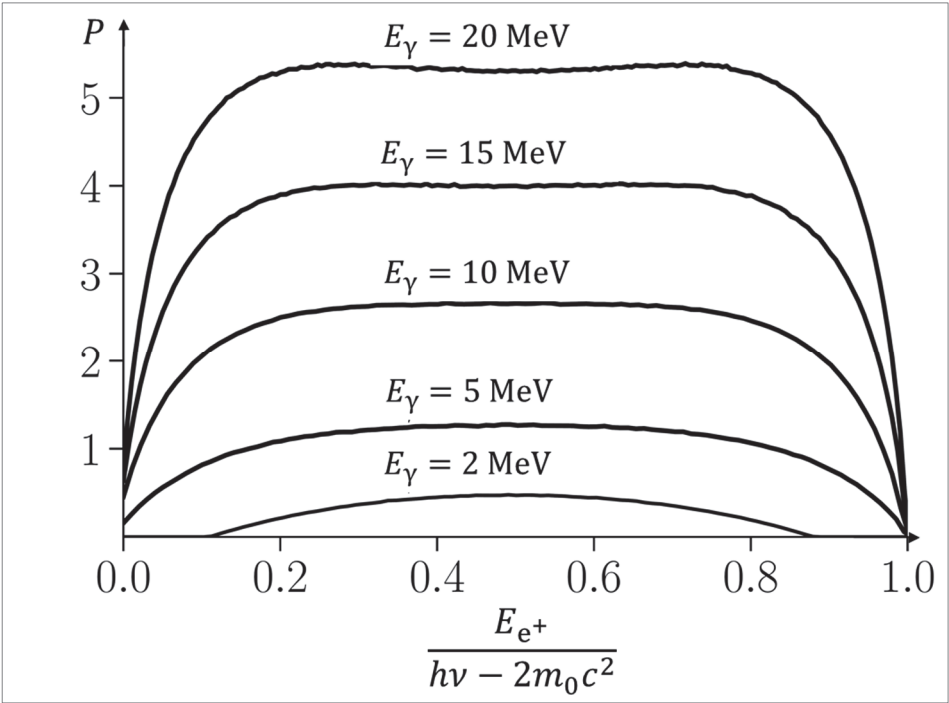


Figure 8. Représentation de la section efficace différentielle de création de paires électron-positron par l'intermédiaire de la grandeur adimensionnelle  $P$  de l'équation (4.2), pour différentes énergies  $E_\gamma$  du photon incident.<sup>20</sup>

La section efficace  $\sigma_{pp}$  est représentée sur la **figure 9** dans le cas du plomb. Ce processus est dominant lorsque l'énergie du photon est supérieure à 5 MeV.

<sup>20</sup> R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, op. cit., chapitres 18 à 25, figures 2.3, p. 704.



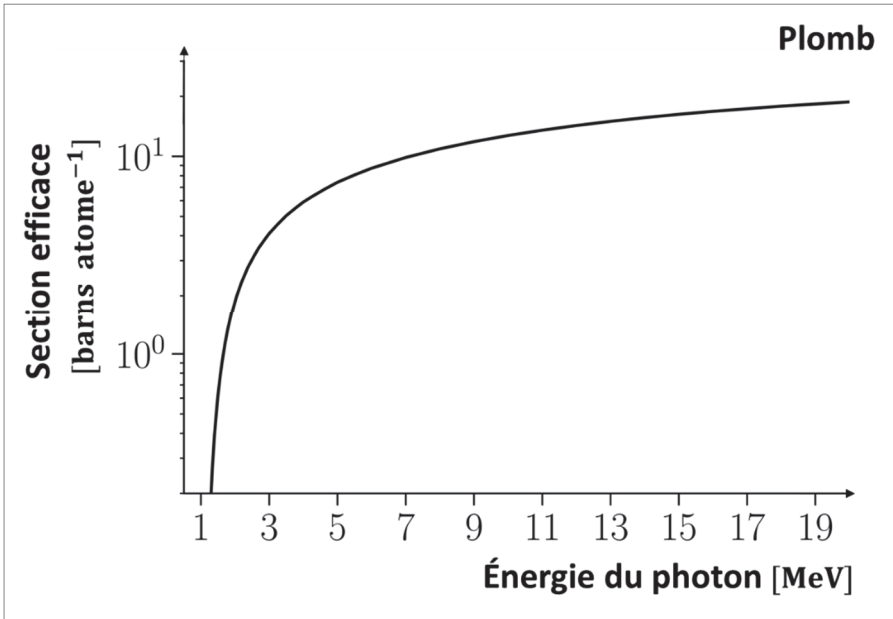


Figure 9. Section efficace de création de paires électron-positron pour le plomb, en fonction de l'énergie  $E_\gamma$  du photon incident.

Le comportement en  $Z^2$  de la section efficace  $\sigma_{pp}$  contribue à l'efficacité des matériaux « lourds » (de  $Z$  élevé) pour arrêter les rayonnements gamma.

## 6. Importance relative des trois processus d'interaction

La **figure 10** représente les sections efficaces des différents processus d'interaction photon-matière dans le cas du plomb sur une large gamme en énergie (de 10 keV à 100 MeV)<sup>21</sup>. Comme évoqué précédemment, l'effet photoélectrique est le principal processus d'interaction jusqu'à 500 keV, puis c'est la diffusion Compton qui prend le relais jusqu'à 5 MeV et enfin la création de paires ( $e^-$ ,  $e^+$ ) domine au-delà de cette énergie. La diffusion cohérente est assez souvent négligée, ce qui n'est pas toujours justifié pour certaines énergies de photons, situées autour de 80 keV.

Cette comparaison des sections efficaces vaut pour le plomb, les comportements et les rapports entre ces différents processus sont légèrement différents pour d'autres matériaux. En effet, on a vu que la dépendance au nombre de charges d'un élément donné n'est pas la même pour tous les phénomènes.

<sup>21</sup> Pour une consultation aisée des valeurs des sections efficaces pour les principaux éléments, voir : E. Storm, H. I. Israel, « Photon cross sections from 1 keV to 100 MeV for elements  $Z = 1$  to  $Z = 100$  », *Atomic Data and Nuclear Data Tables*, Vol. 7, Issue 6, June 1970, pp. 565-681 ; en supplément on y trouve les données relatives aux rayons X : [https://doi.org/10.1016/S0092-640X\(70\)80017-1](https://doi.org/10.1016/S0092-640X(70)80017-1).

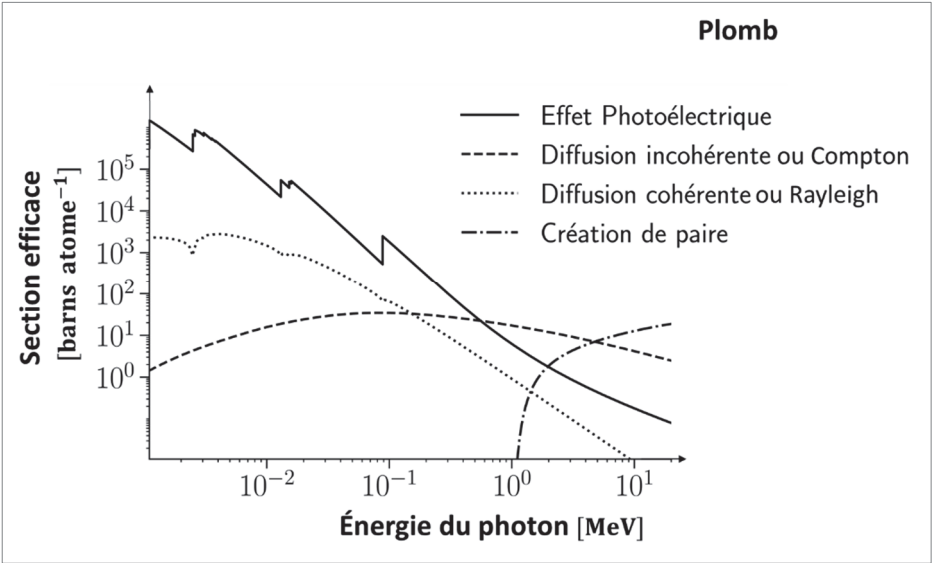


Figure 10. Sections efficaces des différents processus d'interaction photon-matière pour le plomb en fonction de l'énergie  $E_\gamma$  du photon incident.

La **figure 11** présente la dépendance des différents processus d'interaction photon-matière vis-à-vis de l'énergie du photon et de la nature de l'atome.

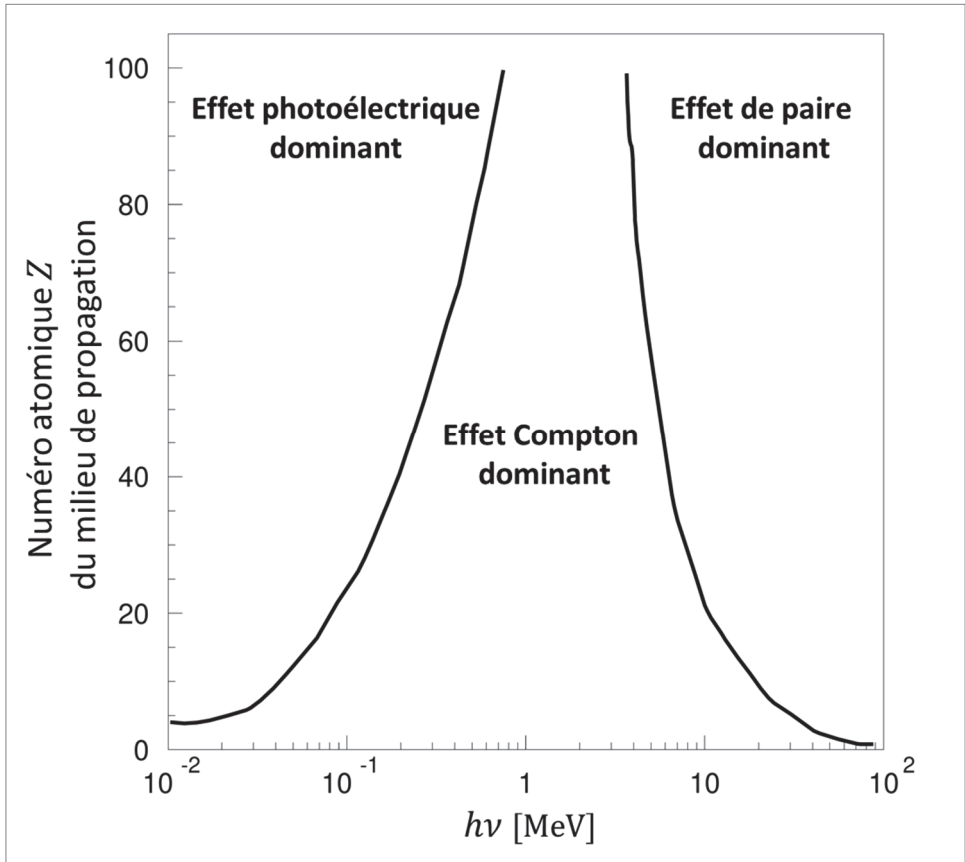


Figure 11. Dépendance des différents processus d'interaction photon-matière vis-à-vis de l'énergie du photon et de la nature de l'atome : délimitation du domaine énergétique de prépondérance de chacun de ces processus. Les courbes continues sont les lieux des points où les sections efficaces sont égales : effet Compton (ou diffusion incohérente) et effet de paire, courbe de droite, effet photoélectrique et effet Compton (ou diffusion incohérente), courbe de gauche.

## 7. Coefficient d'atténuation linéaire, coefficient d'atténuation massique et libre parcours moyen

On suppose que le milieu traversé par les photons est formé d'une seule espèce chimique de numéro atomique  $Z$  et de masse molaire  $A$ . Désignant par  $N$  le nombre d'atomes de cet élément par unité de volume ( $\text{cm}^{-3}$ ) et par  $\rho$  sa masse volumique ( $\text{g cm}^{-3}$ ) et  $N_{Av}$  le **nombre d'Avogadro**, on a :

$$N = \frac{N_{Av}\rho}{A} \quad \text{atomes cm}^{-3} \quad (7.1)$$

La **section efficace microscopique totale**  $\sigma(E)$  d'un photon d'une énergie donnée  $E$  avec un atome du milieu traversé est la somme des sections efficaces microscopiques des phénomènes précédemment présentés, à savoir effet photoélectrique, diffusion Compton sur un électron du cortège atomique et création de paires<sup>22</sup> :

$$\sigma(E) = \sigma_{pe}(E) + Z\sigma_c(E) + \sigma_{pp}(E) \quad \text{unités : cm}^2, \text{ barn atome}^{-1} \quad (7.2)$$

où la section efficace  $\sigma_c(E)$  relative à l'effet Compton sur un électron a été multipliée par le nombre  $Z$  d'électrons du cortège électronique pour obtenir la section efficace incohérente microscopique par atome.

La section efficace macroscopique totale d'interaction ou coefficient d'atténuation linéaire d'un photon d'une énergie donnée  $E$  avec un atome du milieu traversé,  $\mu(E) = N\sigma(E)$ , s'écrit donc :

$$\mu(E) = \mu_{pe}(E) + \mu_c(E) + \mu_{pp}(E) \quad \text{unité : cm}^{-1} \quad (7.3)$$

où :

$$\mu_{pe}(E) = N\sigma_{pe}(E) \quad (7.4) \quad \mu_c(E) = NZ\sigma_c(E) \quad (7.5) \quad \mu_{pp}(E) = N\sigma_{pp}(E) \quad (7.6)$$

sont respectivement les sections efficaces macroscopiques de l'effet photoélectrique, de la diffusion Compton sur un électron du cortège atomique et de la création de paires. Le libre parcours moyen correspondant,  $\lambda(E)$ , est par conséquent :

$$\lambda(E) = \frac{1}{\mu(E)} \quad \text{unité : cm} \quad (7.7)$$

Le vocable d'**atténuation** peut être aussi justifié en déterminant la variation du flux  $I$  (photons  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ) de photons traversant un matériau donné. On désigne par  $I_0$  le flux initial des photons avant qu'ils ne pénétrant dans le matériau considéré et par  $x$  la distance parcourue par ces photons dans ce même matériau.

---

<sup>22</sup> La diffusion cohérente Rayleigh ( $\sigma_{coh}(E)$ ), purement élastique et circonscrite aux petits angles vers l'avant, n'est pas incluse ici.

Le **tableau 1** présente le coefficient total d'absorption linéaire  $\mu(E)$ , le libre parcours moyen  $\lambda(E)$  et la longueur de demi-atténuation  $x(I/I_0 = 0.5)$  pour des photons de 0.835 MeV dans différents matériaux.

Tableau 1. Coefficient total d'absorption ( $\mu$ ), libre parcours moyen ( $\lambda$ ) et longueur de demi-atténuation ( $x$ ) pour des photons de 0.835 MeV dans différents matériaux.

milieu	Al	Cu	Pb
$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	0.182	0.578	0.937
$\lambda \text{ (cm)}$	5.49	1.73	1.07
$x(I/I_0 = 0.5) \text{ (cm)}$	3.808	1.199	0.740

Dans le **tableau 2**, les mêmes informations sont reportées pour différentes énergies de photons dans le plomb.

Tableau 2. Coefficient total d'absorption ( $\mu$ ), libre parcours moyen ( $\lambda$ ) et longueur de demi-atténuation ( $x$ ) pour des photons de différentes énergies dans du plomb.

$E \text{ (MeV)}$	0.835	1.14	2.76
$\mu \text{ (cm}^{-1}\text{)}$	0.937	0.707	0.478
$\lambda \text{ (cm)}$	1.07	1.41	2.09
$x(I/I_0 = 0.5) \text{ (cm)}$	0.740	0.980	1.450

On utilise également le **coefficient d'atténuation massique** défini par le rapport du coefficient linéaire à la masse volumique :

$$\frac{\mu(E) \text{ (cm}^{-1}\text{)}}{\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}} \equiv \frac{N\sigma(E)}{\rho} \equiv \frac{N_{Av}}{A} \sigma(E) \qquad \text{unité : cm}^2 \text{ g}^{-1} \qquad (7.8)$$

en ayant utilisé la relation (6.1). Dans (6.8), le rapport  $N/\rho$  représente le nombre d'atomes par gramme :

$$\frac{N \text{ (atomes cm}^{-3}\text{)}}{\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}} \equiv \text{nombre d'atomes par gramme}$$

De la même manière, le **libre parcours moyen** ( $\lambda$ ) correspondant peut s'exprimer en **unité g cm<sup>-2</sup>** :

$$\frac{\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}}{\mu(E) \text{ (cm}^{-1}\text{)}} \equiv \frac{\rho}{N\sigma(E)} \equiv \frac{A}{N_{Av}\sigma(E)} \qquad \text{unité : g cm}^{-2} \qquad (7.9)$$

Les **figures 12 à 15** illustrent dans les cas de l'air, de l'eau, de l'aluminium et du plomb le comportement des coefficients d'atténuation massique en fonction de l'énergie initiale du photon<sup>23</sup>.

<sup>23</sup> R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, 1955, Chapitres 18 à 25, figures 1.2 à 1.5, pp. 713-716.

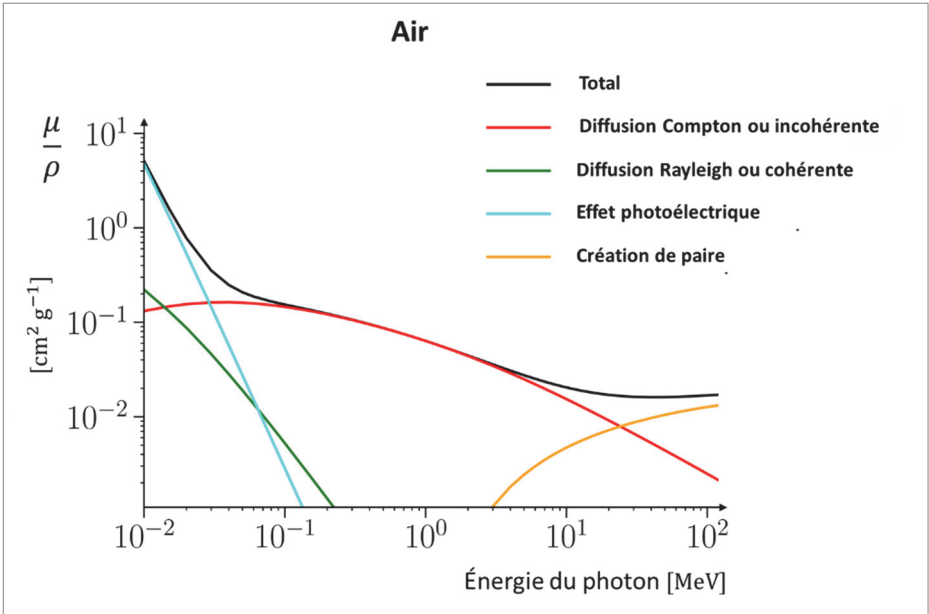


Figure 12. Coefficient d'atténuation massique des photons dans l'air de 10 keV à 100 MeV.

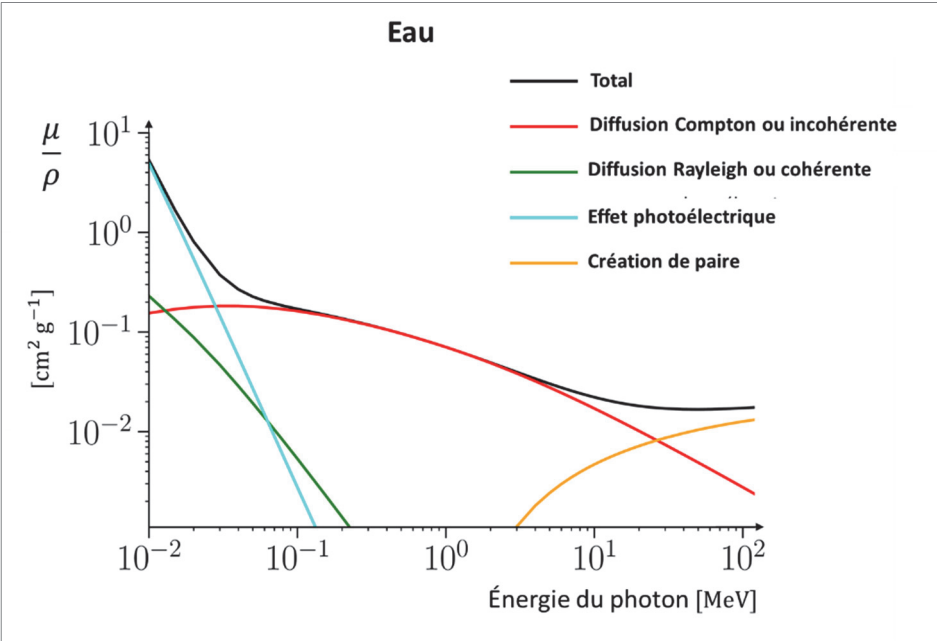


Figure 13. Coefficient d'atténuation massique des photons dans l'eau.

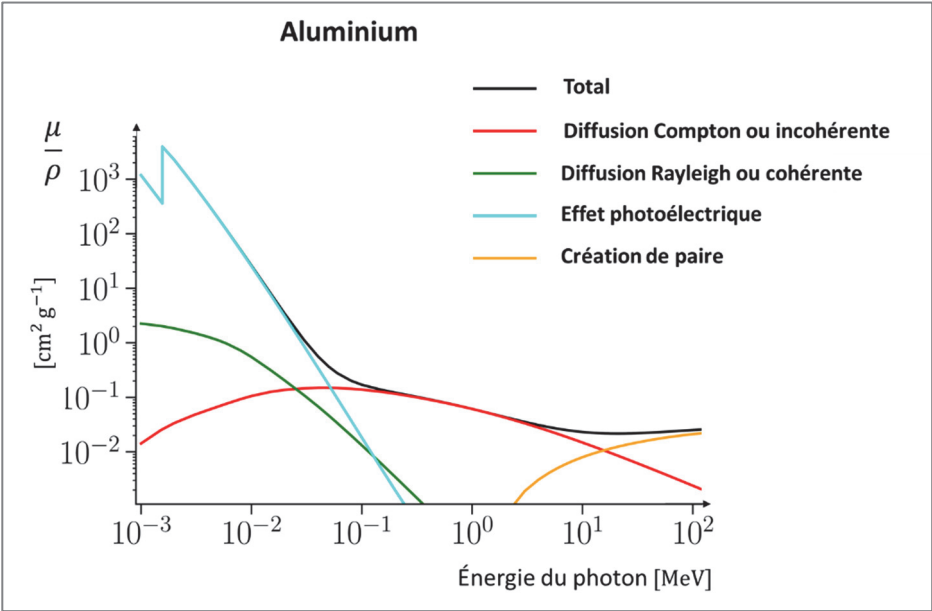


Figure 14. Coefficient d'atténuation massique des photons dans l'aluminium.

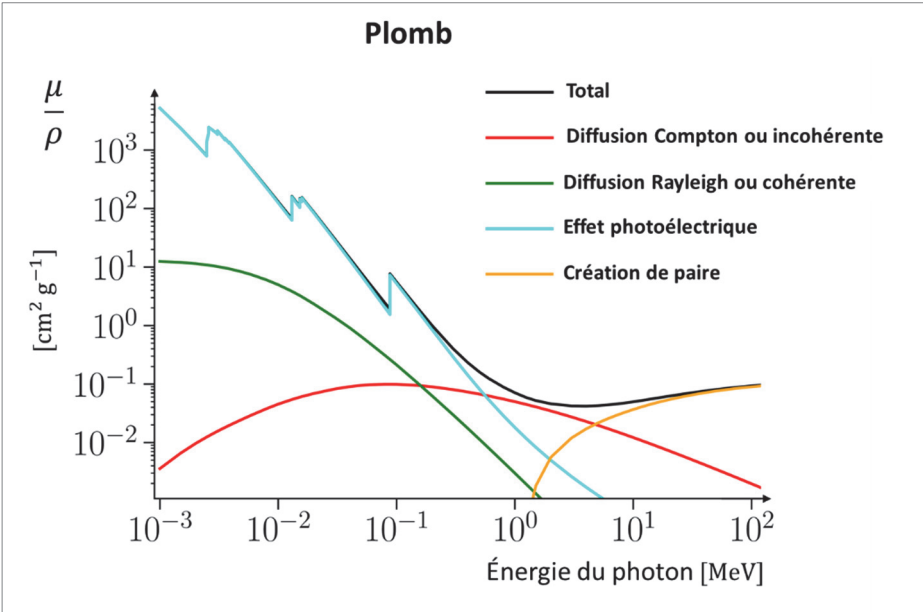


Figure 15. Coefficient d'atténuation massique des photons dans le plomb.

La **figure 16** présente des libres parcours moyens en  $\text{g cm}^{-2}$  pour les photons sur une large gamme en énergie dans différents matériaux. Les **masses volumiques**  $\rho$  de ces différents milieux sont répertoriées dans le **tableau 3**.

Tableau 3. Masses volumiques de différents matériaux.

Matériau	H	C	Si	Fe	Sn	Pb
$\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}$	$9.10^{-5}$	2	2.33	7.87	5.75	11.35

Remarque

L'effet Compton dépend directement du nombre d'électrons dans le milieu et donc de la densité du milieu multipliée par le rapport  $Z/A$ . Pour de très nombreux milieux, ce rapport est quasi constant ( $Z/A \approx 0.45$  sauf pour l'hydrogène pour lequel  $Z/A = 1$ ), le coefficient d'atténuation massique devient alors quasi indépendant de  $Z$ .

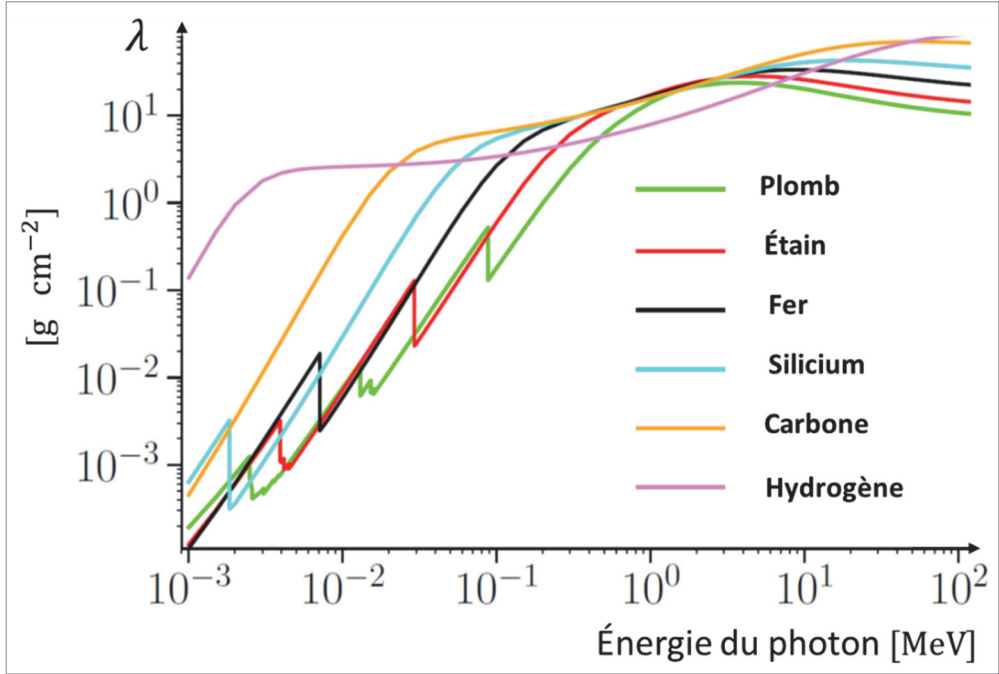


Figure 16. Libres parcours moyens,  $\lambda$ , en  $\text{g cm}^{-2}$  de photons dans différents milieux monoatomiques.<sup>24</sup>

<sup>24</sup> Voir : M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), « Passage of Particles Through Matter », *Physical Review D* 98, 030001 (2018) and 2019 update 6<sup>th</sup> December, 2019, pp. 446-460; <http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-passage-particles-matter.pdf>, p. 22 ; <https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.98.030001>, p. 455 : Revised August 2015 by H. Bichsel (University of Washington), D. E. Groom (LBNL), and S.R. Klein (LBNL).



### *Cas d'un mélange homogène de nucléides de natures différentes*

Le matériau au sein duquel se propagent les photons est supposé être constitué d'un mélange homogène d'atomes d'espèces différentes repérées par l'indice  $i$ . La concentration  $N_i$  d'atomes de type  $i$  dans ce mélange est alors donnée par la relation :

$$N_i = \frac{N_{Av}\rho}{A_i} w_i = \text{atomes cm}^{-3} \quad (7.10)$$

où  $w_i$  est le pourcentage en masse des atomes de type  $i$  présents dans le mélange homogène considéré.

Comme dans le cas des neutrons (voir chapitre 8), dans une telle configuration les sections efficaces macroscopiques relatives au mélange s'obtiennent par pondération des sections efficaces microscopiques par les concentrations  $N_i$  puis sommation sur les espèces atomiques présentes. Pour la section efficace macroscopique totale ou coefficient d'atténuation linéaire total,  $\mu(E)$ , on a :

$$\mu(E) = \sum_i N_i \sigma_i(E) = \sum_i \mu_i(E) \quad \text{unité : cm}^{-1} \quad (7.11)$$

où  $\sigma_i(E)$  est la section efficace microscopique totale d'un nucléide de type  $i$  pour un photon d'énergie  $E$ .

Il en découle :

$$\lambda(E) = \frac{1}{\mu(E)} = \frac{1}{\sum_i \mu_i(E)} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\lambda_i(E)}} \quad \text{unité : cm} \quad (7.12)$$

Pour les **coefficients d'atténuation massique**, on a de manière similaire, en utilisant (7.9) :

$$\frac{\mu(E) \text{ (cm}^{-1}\text{)}}{\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}} \equiv \sum_i \left( \frac{\mu(E)}{\rho} \right)_i w_i \equiv \frac{1}{N_{Av}\rho} \sum_i \left( \frac{\mu(E)}{\rho} \right)_i N_i A_i \quad \text{unités : cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (7.13)$$

Le libre parcours moyen correspondant exprimé en unité  $\text{g. cm}^{-2}$  s'écrit :

$$\frac{\rho \text{ (g cm}^{-3}\text{)}}{\mu(E) \text{ (cm}^{-1}\text{)}} \equiv \frac{1}{\sum_i \left( \frac{\mu(E)}{\rho} \right)_i w_i} \equiv \frac{N_{Av}\rho}{\sum_i \left( \frac{\mu(E)}{\rho} \right)_i N_i A_i} \quad \text{unité : g cm}^{-2} \quad (7.14)$$

## 8. Énergie cédée à la matière

On considère un mélange homogène d'atomes de types différents et repérés par l'indice  $i$ .

### 8.1. Cas de l'effet photoélectrique

En reprenant la relation (2.1) et si l'on considère la faible valeur de l'énergie de liaison des électrons, on peut généralement considérer que la quasi-totalité de l'énergie du photon  $\gamma$  est transférée à l'électron :

$$E_e \approx E_\gamma \quad (\text{eV, keV, MeV} \dots) \quad (8.1)$$

On en déduit l'expression de la section efficace macroscopique d'absorption en énergie correspondante,  $T_{pe}$ , en un point  $\vec{r}$  du milieu sous les deux formes suivantes :

- en utilisant le coefficient d'atténuation linéaire :

$$T_{pe}(\vec{r}, E_\gamma) \approx E_\gamma \sum_i N_i(\vec{r}) \sigma_{pe,i}(E_\gamma) \quad \text{MeV cm}^{-1} \quad (8.2)$$

- en utilisant le coefficient d'atténuation massique :

$$T_{pe}(\vec{r}, E_\gamma) \approx E_\gamma \left[ \frac{1}{\rho} \sum_i N_i(\vec{r}) \sigma_{pe,i}(E_\gamma) w_i \right] \quad \text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (8.3)$$

### 8.2. Cas de l'effet Compton

La section efficace macroscopique d'absorption en énergie par effet Compton s'écrit :

- en utilisant le coefficient d'atténuation linéaire :

$$T_c(\vec{r}, E_\gamma) = E_\gamma \sum_i N_i(\vec{r}) Z_i \sigma_{c,i}(E_\gamma) f_{c,i}(E_\gamma) \quad \text{MeV cm}^{-1} \quad (8.4)$$

- en utilisant le coefficient d'atténuation massique :

$$T_c(\vec{r}, E_\gamma) = E_\gamma \frac{1}{\rho} \sum_i N_i(\vec{r}) Z_i \sigma_{c,i}(E_\gamma) w_i f_{c,i}(E_\gamma) \quad \text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (8.5)$$

où  $f_{c,i}(E_\gamma)$  est la fraction d'énergie transférée localement à la matière par l'effet Compton.

Pour déterminer la fraction  $f_{c,i}(E_\gamma)$ , on scinde l'expression de la section efficace différentielle Compton en deux parties :

$$\begin{aligned}
\sigma_c &= \sigma_c(E_\gamma) = \int_{E'_{\gamma, \min}}^{E_\gamma} \frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} dE'_\gamma \\
&= \int_{E'_{\gamma, \min}}^{E_\gamma} \frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} \frac{h\nu'}{h\nu} dE'_\gamma + \int_{E'_{\gamma, \min}}^{E_\gamma} \frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} \left[1 - \frac{h\nu'}{h\nu}\right] dE'_\gamma
\end{aligned} \quad (8.6)$$

que l'on peut réécrire :

$$\begin{aligned}
\sigma_c &= \sigma_c(E_\gamma) = \int_{E'_{\gamma, \min}}^{E_\gamma} \frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} dE'_\gamma = \int_{E'_{\gamma, \min}}^{E_\gamma} \frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} \frac{\nu'}{\nu} dE'_\gamma + \int_{E'_{\gamma, \min}}^{E_\gamma} \frac{d\sigma_c}{dE'_\gamma} \left[1 - \frac{\nu'}{\nu}\right] dE'_\gamma \\
\sigma_c &= \sigma_{cs}(E_\gamma) + \sigma_{ca}(E_\gamma)
\end{aligned} \quad (8.7)$$

La première intégrale, notée  $\sigma_{cs}(E_\gamma)$ , est relative à l'énergie emportée par le photon diffusé et la seconde, notée  $\sigma_{ca}(E_\gamma)$ , à l'énergie de l'électron que l'on admet déposée (ou absorbée) sur place par le milieu compte tenu de la faible valeur du parcours de tels électrons dans la matière.

La fraction d'énergie déposée localement,  $f_{c,i}(E_\gamma)$ , s'exprime donc par le rapport :

$$f_{c,i}(E_\gamma) = \frac{\sigma_{ca}(E_\gamma)}{\sigma_c(E_\gamma)} = \frac{\sigma_c(E_\gamma) - \sigma_{cs}(E_\gamma)}{\sigma_c(E_\gamma)} \quad (8.8)$$

On montre ainsi que<sup>25</sup> :

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ca}(E_\gamma) \\
&= 2\pi r_0^2 \left\{ \frac{2(1+\kappa)^2}{\kappa^2(1+2\kappa)} - \frac{1+3\kappa}{(1+2\kappa)^2} - \frac{(1+\kappa)(2\kappa^2-2\kappa-1)}{\kappa^2(1+2\kappa)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4\kappa^2}{3(1+2\kappa)^3} - \left[ \frac{1+\kappa}{\kappa^3} - \frac{1}{2\kappa} + \frac{1}{2\kappa^3} \right] \ln(1+2\kappa) \right\} \text{ cm}^2 \text{ électron}^{-1}
\end{aligned} \quad (8.9)$$

À basse énergie,  $f_{c,i}(E_\gamma)$  est très petit devant l'unité, vers 1.5 MeV  $f_{c,i}(E_\gamma) \approx 0.5$ , signifiant que le photon diffusé n'emporte plus qu'environ 50 % de l'énergie initiale et à 10 MeV,  $f_{c,i}(E_\gamma) \approx 0.7$ .

### 8.3. Cas de la création de paire

La section efficace macroscopique d'absorption en énergie consécutive à la création d'une paire ( $e^-$ ,  $e^+$ ) s'écrit :

- en utilisant le coefficient d'atténuation linéaire :

<sup>25</sup> R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, op. cit., chapitres 18 à 25, figures 1.2 à 1.5, pp. 713-716.

$$T_{pp}(\vec{r}, E_\gamma) = (E_\gamma - 1.022) \sum_i N_i(\vec{r}) \sigma_{pp,i}(E_\gamma) \quad \text{MeV cm}^{-1} \quad (8.10)$$

- en utilisant le coefficient d'atténuation massique :

$$T_{pp}(\vec{r}, E_\gamma) = (E_\gamma - 1.022) \frac{1}{\rho} \sum_i N_i(\vec{r}) \sigma_{pp,i}(E_\gamma) w_i \quad \text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (8.11)$$

#### 8.4. La section efficace totale d'absorption en énergie

On distingue la section efficace microscopique d'absorption en énergie et la section efficace macroscopique correspondante pour un matériau donné.

##### 8.4.1. Section efficace microscopique d'absorption en énergie ou section efficace microscopique de kerma

La section efficace microscopique (par atome) d'absorption en énergie ou section efficace de **KERMA** – *kinetics energy released in matter per unit mass* (énergie cinétique cédée par unité de masse dans la matière) – est définie par la sommation des trois contributions, effet photoélectrique, effet Compton et production de paires :

$$k_i(E_\gamma) = E_\gamma \sigma_{pe,i}(E_\gamma) + E_\gamma Z_i \sigma_{c,i}(E_\gamma) f_{c,i}(E_\gamma) + (E_\gamma - 1.022) \quad \text{eV cm}^2 (\text{ou barn}) \text{ atome}^{-1} \quad (8.12)$$

La **figure 17** en montre un exemple dans le cas du graphite.

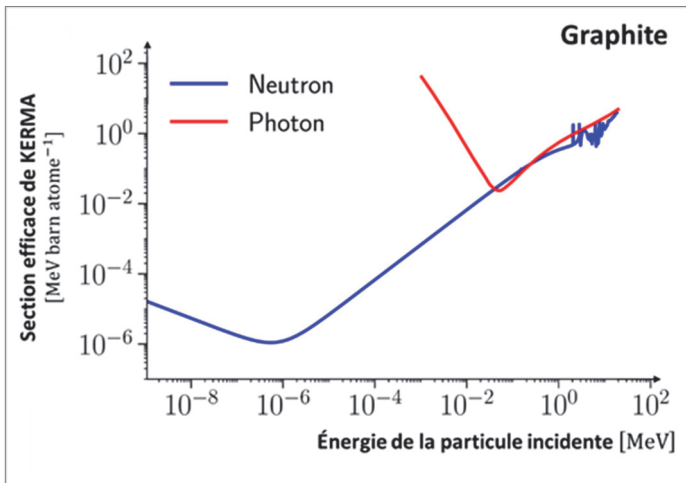


Figure 17. Sections efficaces microscopiques (par atome) de KERMA (en MeV barns) des neutrons et des photons en fonction de leurs énergies cinétiques d'incidence dans du graphite.

### 8.4.2. Section efficace macroscopique d'absorption

Elle est obtenue par la sommation des trois contributions, effet photoélectrique, effet Compton et production de paires :

$$T(\vec{r}, E_\gamma) = \sum_i N_i(\vec{r}) k_i(E_\gamma) \quad \text{MeV} \quad (8.13)$$

ou bien :

$$T(\vec{r}, E_\gamma) = \frac{1}{\rho} \sum_i N_i(\vec{r}) w_i k_i(E_\gamma) \quad \text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (8.14)$$

## 9. Réactions photonucléaires

Un point commun entre les réactions nucléaires induites par les neutrons et les réactions nucléaires induites par les photons est que ces deux particules sont neutres et donc ne sont pas repoussées par le champ coulombien du noyau atomique. Une différence importante existe dans le fait que la masse au repos du photon est nulle et que par conséquent le photon n'apporte pas au noyau atomique avec lequel il interagit, en plus de son énergie initiale, une énergie d'excitation correspondant à l'énergie de liaison qu'apporte le neutron dans la formation du noyau composé.

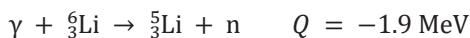
### 9.1. Réactions photonucléaires ( $\gamma, xn$ )

Le photon peut être absorbé par un noyau qui est alors porté sur un état excité. La désexcitation de cet état peut se faire selon divers processus : émission d'un ou plusieurs photons, de neutrons, de protons, d'alpha, etc. ou par fission. Les neutrons produits par les **réactions photonucléaires** ( $\gamma, xn$ ) sont désignés par le terme de **photoneutrons**<sup>26</sup>. Un ou plusieurs neutrons peuvent être émis (la **multiplicité** des neutrons émis est notée  $x$  :  $x = 1, 2, \dots$ ). En voici quelques exemples.

- L'absorption d'un photon par un noyau de deutérium qui produit un neutron et un proton :

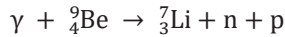
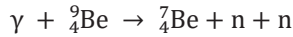


- L'absorption d'un photon par un noyau de lithium 6 :



<sup>26</sup> W. C. Barber, W. D. George, « Neutron Yields from Targets Bombarded by Electrons », *Physical Review* 116, 1551, December 15, 1959, pp. 1551-1559 ; <https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1551>. Ce sont les photons de suffisamment haute énergie engendrés par le phénomène de *bremsstrahlung* lié au ralentissement des électrons dans la cible qui provoquent les réactions photonucléaires.

- Pour des énergies plus élevées de  $\gamma$ , ces réactions photonucléaires se produisent sur d'autres isotopes tels que le fer 54 avec une énergie de seuil de près de 14 MeV. Avec le béryllium 9,  ${}^9_4\text{Be}$ , plusieurs réactions avec différents seuils sont possibles :



dont les seuils respectifs de ces réactions sont : 1.57 MeV, 20.56 MeV et 18.92 MeV.

Les réactions photonucléaires ont des valeurs de sections efficaces allant de quelques millibarns à quelques centaines de millibarns.

Sur la **figure 18**, les sections efficaces de ces réactions sur le **béryllium 9** sont présentées et comparées à la somme des trois processus présentés précédemment (effet photoélectrique, diffusion Compton et création de paires).

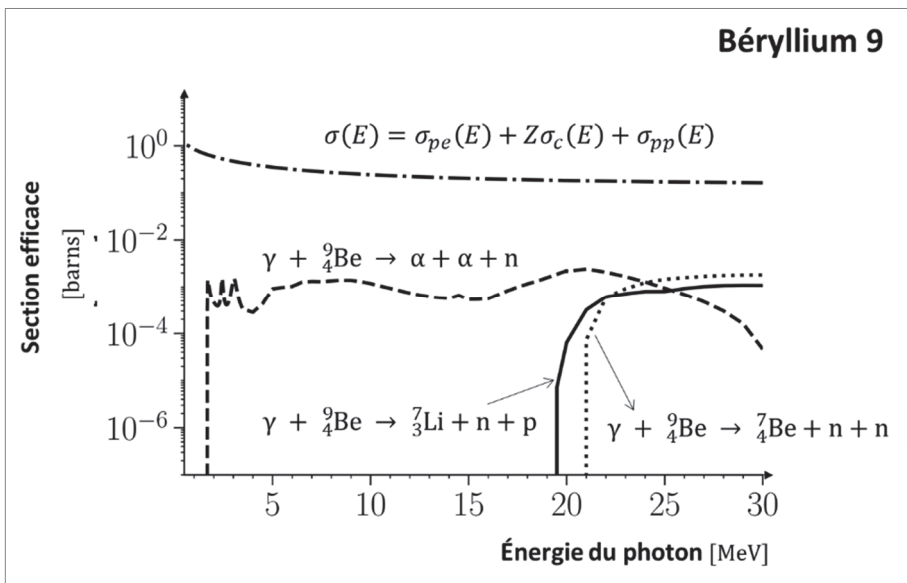


Figure 18. Sections efficaces microscopiques (par atome) de réactions photonucléaires sur le béryllium 9 comparées à la section efficace totale d'interaction avec le cortège électronique,  $\sigma(E)$  : elles sont environ 100 à 1 000 fois inférieures à cette dernière. On comprend pourquoi, dans la gamme d'énergie considérée, la propagation des photons dans la matière est principalement gouvernée par leurs interactions avec le cortège électronique et le champ coulombien de l'atome.

On observe ainsi que ces processus d'interaction nucléaire sont beaucoup moins fréquents que l'interaction avec le cortège électronique, mais la production de neutrons dans ces

réactions leur confère un intérêt particulier dans certaines études relatives aux installations nucléaires, telles que celles concernant la conception de réacteurs nucléaires expérimentaux, la prévention du risque de criticité d'un combustible irradié ou encore la radioprotection.

L'énergie du neutron émis est donnée par la relation<sup>27</sup> suivante (à rapprocher de celle obtenue au chapitre 7 § 2.1 exemple 2) :

$$E_n = \frac{A - 1}{A} \left[ E_\gamma - Q - \frac{E_\gamma^2}{2 \times (A - 1) \times (1 \text{ u} \times c^2)} \right] + \delta \tag{9.1}$$

$$\delta \cong E_\gamma \cos \theta \left[ \frac{[2(A - 1)(E_\gamma - Q)]}{A^3 \times (1 \text{ u} \times c^2)} \right]^{1/2} \tag{9.2}$$

avec :

A la masse atomique du noyau cible ; Q l'énergie de la réaction (γ, n) considérée ; E<sub>γ</sub> l'énergie du photon incident ; 1 u × c<sup>2</sup> = 931.494 MeV (unité de masse atomique, voir chapitre 3 § 2).

9.2. La photofission (γ, f)

La fission induite par un neutron a été traitée dans le chapitre 9, indiquant l'existence d'une barrière énergétique à franchir pour que la fission puisse se produire<sup>28</sup>. Pour les actinides, cette barrière est de l'ordre de 6 MeV.

Les énergies de seuil des réactions (γ, f) sur des noyaux lourds présents dans un combustible nucléaire sont indiquées dans le **tableau 4**.

Tableau 4. Énergies de seuil des réactions de type (γ, f) sur divers isotopes lourds.

Isotope	Énergie de seuil MeV
Th232	6.
U233	5.7
U234	6.
U235	5.8
U236	5.9
U238	5.38
Np237	5.6
Pu239	5.8

<sup>27</sup> A. Wattenberg, « Photo-Neutron Sources and the Energy of the Photo-Neutrons », *Physical Review* 71, 8, 15 April 1947, p. 407, pp. 497-507.

<sup>28</sup> E. Jacobs, U. Kneissi, « Photon- and electron-induced fission », dans C. Wagemans (Editor), *The nuclear fission process*, USA, CRC Press, 1991, Chapitre 5, pp. 103-197.

La **figure 19** présente les sections efficaces de photofission et de fission induite par capture d'un neutron pour l'uranium 238,  $^{238}_{92}\text{U}$ . On peut noter que cette dernière a une section efficace de l'ordre de 10 à 100 fois plus élevée que celle de la photofission pour des énergies des projectiles incidents allant de 6 à 20 MeV, et avec une énergie de seuil nettement plus basse, de l'ordre de 2 MeV. Toutefois, on ne peut pas négliger *a priori* la photofission dans cette gamme en énergie du fait de l'abondance des photons dans un tel milieu.

Le phénomène de photofission trouve certaines applications : par exemple, un accélérateur d'électrons peut être utilisé pour produire des photons d'une dizaine de MeV par **rayonnement de freinage** ou *Bremsstrahlung*<sup>29</sup>. Ces photons envoyés sur des colis de déchets contenant de la matière fissile y induisent la fission des noyaux lourds qui y sont présents. La détection des neutrons de fission, prompts et retardés, permet de caractériser le contenu en actinides du colis de déchets.

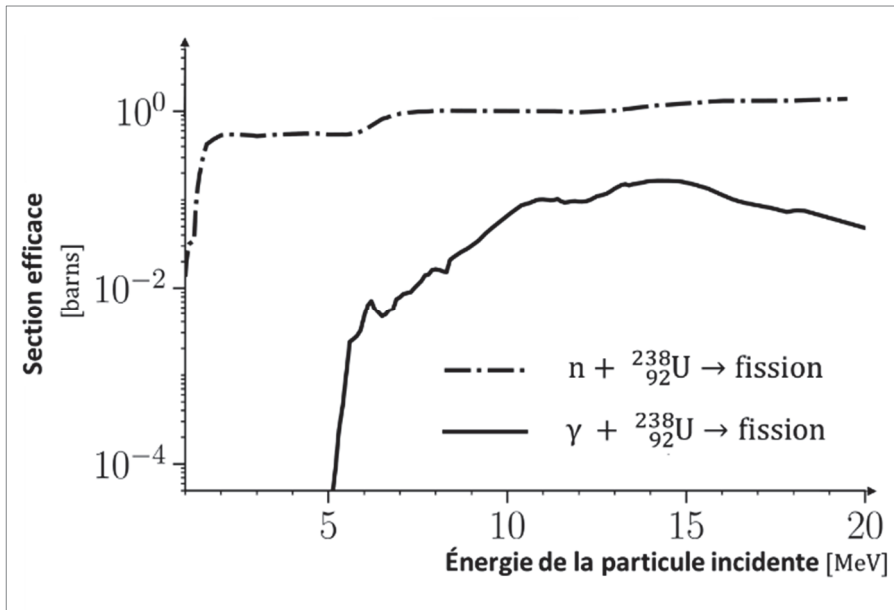


Figure 19. Fission induite par capture d'un neutron et photofission pour l'uranium 238.

De plus, ces photons peuvent induire la **photodésintégration** de produits de fission comme le césium 137, de période radioactive 30 ans, et le strontium 90, de période 28.8 ans, qui par réaction ( $\gamma, n$ ) sont alors transmutés en nucléides de période plus courte, respectivement le césium 136 de période 13.16 jours et le strontium 89 de période 50.52 jours, précipitant ainsi leurs évolutions respectives vers la vallée de stabilité.

<sup>29</sup> Voir par exemple, A. Lyoussi, *Dosage par photofissions induites, de faibles quantités d'actinides dans les déchets radioactifs enrobés*, Thèse de doctorat, Université de Clermont-Ferrand 2, 1994.



## Annexe I : détermination de l'énergie de seuil de la production de paires ( $e^-$ , $e^+$ ) dans le champ du noyau atomique

Comme la masse au repos du photon est nulle, le système du laboratoire et du centre de masse sont confondus. On suppose que le photon incident, l'électron, le positron et le noyau de recul sont dans le même plan, comme le montre la **figure 20**.

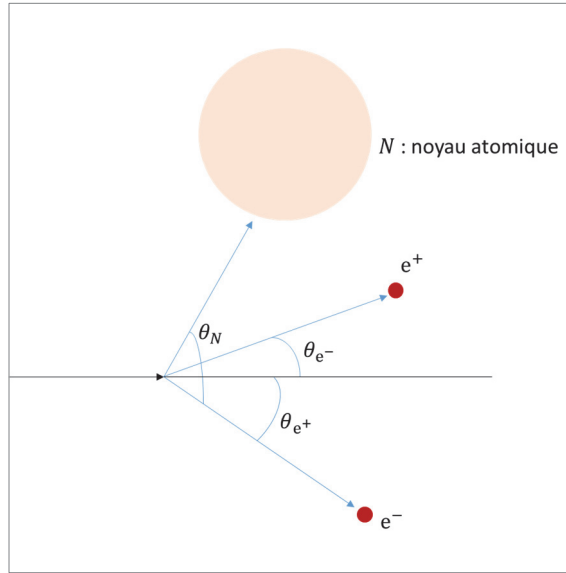


Figure 20. Effet de paire ( $e^-$ ,  $e^+$ ) dans le champ du noyau atomique.

On adopte les conventions suivantes :

- $E_\gamma$  : énergie du gamma incident ;
- $p_\gamma$  : impulsion du gamma incident ;
- $m_0c^2$  : masse au repos de l'électron et du positron en unité d'énergie ;
- $W_{e^-}$  : énergie cinétique de l'électron ;
- $W_{e^+}$  : énergie cinétique du positron (ou positon) ;
- $p_{e^-}$  : impulsion de l'électron ;
- $p_{e^+}$  : impulsion du positron (ou positon) ;
- $m_Nc^2$  : masse au repos du noyau atomique de recul en unité d'énergie ;
- $W_N$  : énergie totale du noyau atomique avant collision ;
- $p_N$  : impulsion du noyau atomique avant collision, on suppose le noyau atomique immobile  $p_N = 0$  ;
- $W'_N$  : énergie totale du noyau atomique après collision ;
- $p'_N$  : impulsion du noyau atomique après collision, on suppose le noyau atomique immobile  $p'_N = 0$ .

L'invariant relativiste s'écrit successivement pour le photon incident, l'électron, le positron et le noyau atomique en unité  $c^2$  :

$$\text{comme la masse au repos du photon est nulle :} \quad E_\gamma^2 = p_\gamma^2 \quad (\text{I} - 1)$$

$$W_{e^-}^2 = p_{e^-}^2 + m_0^2 c^2 \quad (\text{I} - 2)$$

$$W_{e^+}^2 = p_{e^+}^2 + m_0^2 c^2 \quad (\text{I} - 3)$$

$$W_N^2 = p_N^2 + m_N^2 c^2 = m_N^2 c^2 \quad (\text{I} - 4)$$

$$W_N'^2 = p_N'^2 + m_N^2 c^2 \quad (\text{I} - 5)$$

La conservation de l'énergie totale s'écrit :

$$E_\gamma + W_N = W_{e^-} + W_{e^+} + W_N' \quad (\text{I} - 6)$$

La conservation des impulsions s'écrit en projetant la relation de conservation vectorielle  $\vec{p}_\gamma = \vec{p}_{e^-} + \vec{p}_{e^+} + \vec{p}_N'$  sur les axes orthonormés  $Ox$  et  $Oz$  de la figure 1 :

$$\text{Sur } Ox : p_\gamma = p_{e^-} \cos \theta_{e^-} + p_{e^+} \cos \theta_{e^+} + p_N' \cos \theta_N \quad (\text{I} - 7)$$

$$\text{Sur } Oz : 0 = p_{e^-} \sin \theta_{e^-} + p_{e^+} \sin \theta_{e^+} + p_N' \sin \theta_N \quad (\text{I} - 8)$$

On pose :

$$u = p_{e^-} \cos \theta_{e^-} + p_{e^+} \cos \theta_{e^+} \quad (\text{I} - 9)$$

$$v = p_{e^-} \sin \theta_{e^-} + p_{e^+} \sin \theta_{e^+} \quad (\text{I} - 10)$$

Les relations (I - 7) et (I - 8) deviennent alors :

$$p_\gamma = u + p_N' \cos \theta_N$$

$$0 = v + p_N' \sin \theta_N$$

Soit :

$$p_\gamma - u = p_N' \cos \theta_N \quad (\text{I} - 11)$$

$$v = p_N' \sin \theta_N \quad (\text{I} - 12)$$

En élevant au carré chacune de ces expressions et en les sommant membre à membre on obtient :

$$p_N'^2 = (p_\gamma - u)^2 + v^2 \quad (\text{I} - 13)$$

En ajoutant la masse au repos du noyau atomique de recul  $m_N c^2$  à chaque membre de (I - 13), il vient :

$$p_N'^2 + m_N^2 c^2 = (p_\gamma - u)^2 + v^2 + m_N^2 c^2 \quad (\text{I} - 14)$$

Avec (I - 1), (I - 5) et (I - 6), on a successivement :

$$W_N'^2 = (E_Y - u)^2 + v^2 + W_N^2 \quad (\text{I} - 15)$$

$$[E_Y + W_N - (W_{e^-} + W_{e^+})]^2 = (E_Y - u)^2 + v^2 + W_N^2 \quad (\text{I} - 16)$$

En développant et en réarrangeant les différents termes, on obtient :

$$\begin{aligned} 2E_Y[W_N - (W_{e^-} + W_{e^+}) + u] \\ = u^2 + v^2 - (W_{e^-} + W_{e^+})^2 + 2W_N(W_{e^-} + W_{e^+}) \end{aligned} \quad (\text{I} - 17)$$

La valeur minimale  $E_Y^{\text{seuil}}$  de  $E_Y$  correspond à la situation où l'électron et le positron sont produits avec des impulsions nulles :  $p_{e^-} = p_{e^+} = 0 \Rightarrow u = v = 0$  et donc à des énergies totales respectives  $W_{e^-} = W_{e^+} \equiv m_0$  ; la relation (I - 17) donne donc :

$$E_Y^{\text{seuil}} = \frac{-(W_{e^-} + W_{e^+})^2 + 2W_N(W_{e^-} + W_{e^+})}{2[W_N - (W_{e^-} + W_{e^+})]} = \frac{4m_0^2 \left( \frac{W_N}{m_0} - 1 \right)}{2m_0 \left( \frac{W_N}{m_0} - 2 \right)} \quad (\text{I} - 18)$$

En remplaçant dans (I - 18)  $W_N$  par son expression  $m_N c^2$  (voir relation (I - 4)) :

$$E_Y^{\text{seuil}} = 2m_0 \frac{1 - \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}}{1 - 2 \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}} \quad \text{en unité } c^2 \quad (\text{I} - 19)$$

Soit en MeV :

$$\begin{aligned} E_Y^{\text{seuil}} &= 2m_0 c^2 \frac{1 - \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}}{1 - 2 \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}} = 2 \times 0.511 \text{ (MeV)} \times \frac{1 - \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}}{1 - 2 \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}} \\ &= 1.022 \frac{1 - \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}}{1 - 2 \frac{m_0 c^2}{m_N c^2}} \text{ MeV} \end{aligned} \quad (\text{I} - 20)$$

Comme  $\frac{m_0 c^2}{m_N c^2} < 10^{-3}$  (la masse au repos de l'électron est 1 830 fois inférieure à celle d'un nucléon), alors :

$$E_Y^{\text{seuil}} \approx 1.022 \left( 1 + \frac{m_0 c^2}{m_N c^2} \right) \text{ MeV} \quad (\text{I} - 21)$$

**Remarque 1.** Sur (I – 21), on voit que si la création de paires se fait dans le champ d'un électron, alors le remplacement de  $m_N c^2$  par  $m_0 c^2$  conduit à  $E_Y^{\text{seuil}} = 1.022 \times 2 = 2.04 \text{ MeV}$  trouvée par F. Perrin, comme signalé en note plus haut.

**Remarque 2.** On peut encadrer l'énergie emportée par la paire (électron, positron). En effet, d'après (I – 6) en unité  $c^2$  :

$$W_{e^-} + W_{e^+} = E_Y + W_N - W'_N = E_Y - \left( \sqrt{p_N'^2 + W_N^2} - W_N \right) \quad (\text{I} - 22)$$

Comme le carré de l'impulsion du noyau atomique de recul est nécessairement inférieur au carré de l'énergie du photon incident,  $0 < p_N'^2 \leq E_Y^2$ , alors on peut écrire l'inégalité suivante :

$$E_Y - \left( \sqrt{E_Y^2 + W_N^2} - W_N \right) \leq W_{e^-} + W_{e^+} < E_Y \quad (\text{I} - 23)$$

La gamme d'énergie des photons généralement considérés s'étend de 0 à une quinzaine de MeV. Il s'ensuit donc que  $E_Y \ll W_N$  ; en conséquence, le terme entre parenthèses du membre de gauche de l'inégalité peut être approximé comme :

$$\sqrt{E_Y^2 + W_N^2} - W_N = W_N \sqrt{\frac{E_Y^2}{W_N^2} + 1} - W_N \approx W_N \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{E_Y^2}{W_N^2} \right) - W_N \approx \frac{1}{2} \frac{E_Y^2}{W_N} \quad (\text{I} - 24)$$

En reportant dans (I – 23) on obtient :

$$E_Y \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{E_Y}{W_N} \right) \leq W_{e^-} + W_{e^+} < E_Y \quad (\text{I} - 25)$$

Comme  $\frac{E_Y}{W_N} \ll 1$ , (I – 25) montre que la majeure partie de l'énergie au-dessus du seuil est emportée par la paire (électron, positron) créée.

## Annexe II : passage de la variable angulaire à la variable énergie dans l'expression de la section efficace de diffusion Compton (ou diffusion incohérente)

On reprend l'expression (3.4) de cette section efficace différentielle :

$$\frac{d\sigma_c(\theta)}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \left[ \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \right]^2 \left[ \frac{E_\gamma}{E'_\gamma} + \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} - \sin^2 \theta \right] \quad (\text{II} - 1)$$

On pose :

$$K(\theta) = \frac{r_0^2}{2} \left[ \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \right]^2 \left[ \frac{E_\gamma}{E'_\gamma} + \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} - \sin^2 \theta \right] \quad (\text{II} - 2)$$

On désigne par  $G(E'_\gamma)$  la section efficace différentielle Compton en fonction de la variable énergie  $E'_\gamma$  :

$$G(E'_\gamma) = \frac{d\sigma_c(E'_\gamma)}{dE'_\gamma} \quad (\text{II} - 3)$$

Compte tenu de la relation biunivoque (3.2) qui existe entre l'angle de déviation  $\theta$  et l'énergie  $E'_\gamma$  du photon diffusé, on a :

$$G(E'_\gamma) dE'_\gamma = K(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta \quad (\text{II} - 4)$$

$$G(E'_\gamma) = K(\theta) 2\pi \sin \theta \frac{d\theta}{dE'_\gamma} \quad (\text{II} - 5)$$

De (3.2) on tire aussi :

$$\sin^2 \theta = 2 \frac{E_\gamma - E'_\gamma}{\kappa E'_\gamma} - \left[ \frac{E_\gamma - E'_\gamma}{\kappa E'_\gamma} \right]^2 \quad (\text{II} - 6)$$

En différenciant les deux membres de (3.2) on détermine  $d\theta/dE'_\gamma$  :

$$\frac{d\theta}{dE'_\gamma} = \frac{[1 + \kappa(1 - \cos \theta)]^2}{\kappa E_\gamma \sin \theta} \quad (\text{II} - 7)$$

Il en résulte :

$$G(E'_\gamma) = \frac{\pi r_0^2}{\kappa} \left[ \frac{1}{E'_\gamma} \left( 1 - \frac{2}{\kappa} - \frac{2}{\kappa^2} \right) + \frac{E_\gamma}{\kappa^2 E'^2_\gamma} + \frac{E_\gamma}{E'^2_\gamma} + \frac{1}{E_\gamma} \frac{2\kappa + 1}{\kappa^2} \right] \text{ cm}^2 \text{ ou barns MeV}^{-1} \text{ électron}^{-1} \quad (\text{II} - 8)$$

Annexe III : sources radioactives de photoneutrons

Source photo-neutrons : mélange émetteur $\gamma$ + nucléide cible <sup>30 31</sup>	Période émet-teur gamma	Raies gamma d'intérêt* : Énergie MeV (intensité %)	Réaction ( $\gamma, n$ )	Éner-gie seuil MeV	Énergie caracté-ristique des neutrons émis	Rendement : nombre de neutrons produits pour 10 <sup>6</sup> désintégrations**
<sup>24</sup> <sub>11</sub> Na + D <sub>2</sub> O	15 h	2.75 MeV (100)	<sup>2</sup> <sub>1</sub> H( $\gamma, n$ ) <sup>1</sup> <sub>1</sub> H	2.23	0.22	7.8
<sup>24</sup> <sub>11</sub> Na + Be	15 h	2.75 MeV (100)	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.83	3.7
<sup>56</sup> <sub>25</sub> Mn + D <sub>2</sub> O	2.58 h	2.5 à 3.37 MeV (2)	<sup>2</sup> <sub>1</sub> H( $\gamma, n$ ) <sup>1</sup> <sub>1</sub> H	2.23	0.22	0.08
<sup>56</sup> <sub>25</sub> Mn + Be	2.58 h	1.8 MeV (27) 2.1 MeV (14) 2.5 à 3.37 MeV (2)	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.1 0.3	0.8
<sup>72</sup> <sub>31</sub> Ga + D <sub>2</sub> O	14.12 h	2.5 MeV (20.5)	<sup>2</sup> <sub>1</sub> H( $\gamma, n$ ) <sup>1</sup> <sub>1</sub> H	2.23	0.13	1.9
<sup>72</sup> <sub>31</sub> Ga + Be	14.12 h	2.86 MeV (5.2) 2.2 MeV (25.9) 2.5 MeV (20.5)	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.27	1.6
<sup>88</sup> <sub>39</sub> Y + Be	106.65 j	2.2 MeV (26) 2.5 MeV (20.5)	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.16	2.7
<sup>116</sup> <sub>49</sub> In + Be	14.1 s	2.1 à 2.65 MeV ( 2.75 10 <sup>-2</sup> )	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.1 0.3	0.2
<sup>124</sup> <sub>51</sub> Sb + Be	60.2 j	1.69 MeV (47) 2.1 MeV (5.6)	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.02	5.1
<sup>140</sup> <sub>57</sub> La + D <sub>2</sub> O	1.68 j	2.5 MeV (3.4)	<sup>2</sup> <sub>1</sub> H( $\gamma, n$ ) <sup>1</sup> <sub>1</sub> H	2.23	0.13	0.2
<sup>140</sup> <sub>25</sub> La + Be	1.68 j	2.5 MeV (3.4)	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.62	0.06
Ra( <sup>226</sup> <sub>88</sub> Ra) + Be	1599 a	1.8 MeV à 2.2 MeV	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be( $\gamma, n$ ) <sup>8</sup> <sub>4</sub> Be	1.62	0.12 0.51	0.8

\*Valeurs approximatives ; \*\* Valeurs correspondant à des sources standard : cible de 1 g située à 1 cm de la source de gamma.

On notera, par exemple, qu'à 2.62 MeV le rapport de la section efficace de la réaction <sup>9</sup><sub>4</sub>Be( $\gamma, n$ )<sup>8</sup><sub>4</sub>Be et de la section efficace <sup>2</sup><sub>1</sub>H( $\gamma, n$ )<sup>1</sup><sub>1</sub>H est estimé à 0.35.

<sup>30</sup> A. Wattenberg, *Photo-neutrons sources*, Preliminary Report No. 6, July, IP-1100, July, 1949, National Research Council, <https://www.osti.gov/servlets/purl/4448374>.

<sup>31</sup> R. G. Jaeger (Ed. en chef), *Engineering Compendium on Radiation Shielding, Volume I: Shielding Fundamentals and Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1968, p. 35.





**12**

**Interactions des particules chargées  
avec la matière**



Dans le domaine des réacteurs nucléaires (sûreté-criticité (en situations de démarrage, de chargement et/ou déchargement d'un cœur, d'arrêt), radioprotection par exemple), les particules chargées doivent être prises en considération en raison des **dépôts d'énergie dans la matière** dont elles sont responsables et également de la **production de rayonnements secondaires** (photons, neutrons) qu'elles engendrent par interaction électromagnétique et par les réactions nucléaires qu'elles sont susceptibles de provoquer telles que les **réactions nucléaires ( $\alpha, xn$ )** ( $x$  : multiplicité des neutrons émis) sur des isotopes légers comme l'oxygène 17 et l'oxygène 18 présents dans les combustibles nucléaires et les colis de déchets vitrifiés. Il est à noter que les réactions ( $\alpha, n$ ) sont utilisées pour constituer des sources de neutrons (voir annexe VI) dont l'un des usages est le démarrage de réacteurs nucléaires<sup>1</sup>.

Après une brève présentation de la typologie des processus physiques liés au **passage des particules chargées** dans la matière, on en décline les caractéristiques en distinguant d'une part les **particules lourdes** – les ions, les particules  $\alpha$ , les protons – et les **particules légères** que sont les électrons et les positrons. L'étude exhaustive du transport des particules chargées dans la matière sort du cadre de ce chapitre<sup>2</sup>.

## 1. Phénomènes associés au passage des particules chargées dans la matière

La force électromagnétique est la principale responsable de l'interaction des particules chargées avec la matière<sup>3 4 5</sup>.

De manière générale, le passage d'une particule chargée dans la matière se caractérise par deux aspects :

- une perte d'énergie de la particule ;
- une déflexion de la trajectoire de la particule par rapport à sa direction incidente<sup>6</sup>.

<sup>1</sup> J. Bussac, P. Reuss, *Traité de neutronique*, Hermann, Paris, 1978, pp. 395-397.

<sup>2</sup> Concernant les électrons, on trouvera en annexe II des indications bibliographiques complémentaires sur les méthodes mises en œuvre pour traiter leur propagation dans la matière.

<sup>3</sup> G. F. Knoll, *Radiation detection and measurement*, New York, John Wiley & Sons, 4<sup>th</sup> edition, 2010 ; William R. Leo, *Techniques for nuclear and particles physics experiments*, Berlin and Heidelberg, Springer – Verlag, 1987 ; S. Hustache-Ottini, « L'interaction rayonnement-matière et les grandes familles de détecteurs », École internationale Joliot-Curie, Maubuisson, France, 20<sup>e</sup> session, 9-15 septembre 2001, pp. 1-64 ; D. Blanc, *Les rayonnements ionisants. Détection, dosimétrie, spectrométrie*, Paris, Dunod, 1990 ; R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, 1955, chapitres 18 à 23, pp. 567-494.

<sup>4</sup> C. Amsler *et al.*, « Passage of particles through matter », PL B667, 1, 2008 and 2009 partial update for the 2010 edition, <http://pdg.lbl.gov>.

<sup>5</sup> M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), *Physical Review D* 98, 030001 (2018), update 6<sup>th</sup> December, 2019, pp. 446-460 : <http://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-passage-particles-matter.pdf>, p. 22.

<https://journals.aps.org/prd/pdf/10.1103/PhysRevD.98.030001> : Revised August 2015 by H. Bichsel (University of Washington), D. E. Groom (LBNL), and S. R. Klein (LBNL) ; Revised August 2019 by D.E. Groom (LBNL) and S.R. Klein (NSD LBNL), <https://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-passage-particles-matter.pdf>.

<sup>6</sup> R. D. Evans, *The Atomic Nucleus*, McGraw-Hill, 1955, Appendix B, pp. 828-851.

Ces phénomènes sont principalement liés à deux processus :

- **collisions** avec **les atomes** du milieu et plus exactement avec leurs **électrons** ;
- **diffusions élastiques et inélastiques** sur **les noyaux atomiques** du milieu traversé.

Un seul argument (très simpliste) de rapport de surfaces, entre celle occupée par les électrons de l'atome et celle du noyau suffit à comprendre que le premier processus, la **diffusion coulombienne** sur les électrons, domine. Les particules incidentes perdent de l'énergie dès leur entrée dans le milieu jusqu'à leur arrêt complet.

Contrairement à l'interaction des photons ou des neutrons avec la matière, ce processus est continu. Même si l'énergie transférée à chaque collision est infime par rapport à l'énergie initiale, la section efficace et donc la fréquence du processus sont telles que l'énergie perdue dans une petite épaisseur n'est pas négligeable. Par exemple, un proton de 10 MeV perd l'intégralité de son énergie dans seulement 0.25 mm de cuivre.

L'énergie transférée à chaque collision oblige à différencier le traitement des électrons et positrons de celui des particules plus lourdes comme les protons, les particules alpha, les ions de manière générale. La **figure 1** permet de comparer les pertes d'énergie par unité de longueur, ou perte d'énergie linéique des particules, dans l'air relatives à différents types de particules chargées.

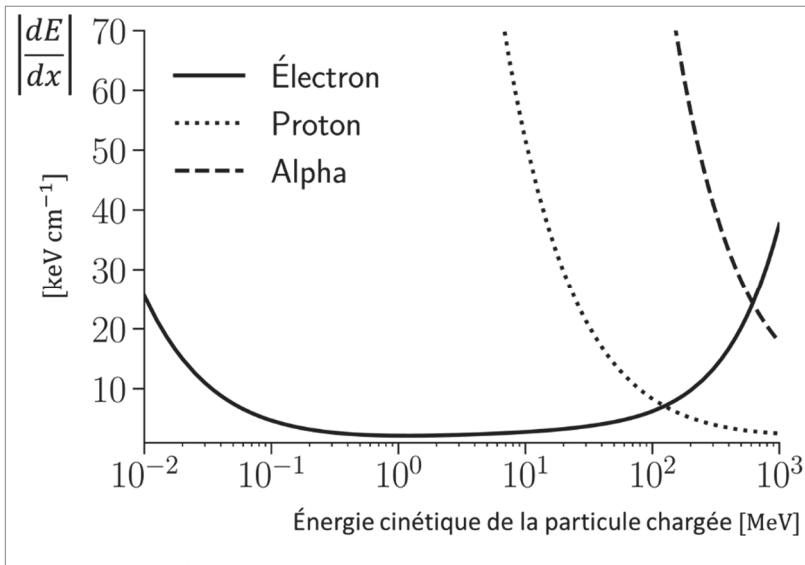


Figure 1. Perte d'énergie linéique (en valeur absolue) de particules chargées dans l'air : électrons, protons et particules  $\alpha$ . Au minimum de la perte d'énergie par unité de longueur (sur la courbe,  $\sim 2$  keV/cm), les particules ont toutes des vitesses relativistes.

## 2. Particules lourdes

### 2.1. La formule de Bohr

En se plaçant dans un cadre de la physique classique, on considère une particule incidente de charge  $Ze$ , de masse  $M$  et de vitesse  $v$  entrant dans un matériau à une distance  $b$  (paramètre d'impact) d'un électron atomique de charge  $e$  et de masse au repos  $m_0$  comme le schématise la **figure 2**. On fait les hypothèses suivantes :

- $M \gg m_0$  ;
- l'électron atomique choqué est supposé libre (non lié) ;
- l'électron atomique choqué est supposé initialement immobile ;
- le champ électrique est supposé ne pas être perturbé par le déplacement de l'électron atomique choqué ;
- l'interaction coulombienne ne modifie que très légèrement sa trajectoire et la vitesse de la particule incidente.

Le moment  $\Delta p$  transféré de la particule incidente à l'électron est donné par définition par la relation :

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\vec{F}\| dt \quad (2.1)$$

où :

- $\vec{F}$  est la force électrostatique exercée par l'électron de charge  $e$  sur la particule incidente ;
- $t$  désigne la variable temps.

Seule la composante transverse  $F_{\perp} \equiv F_y$ , de la force électrostatique  $\vec{F}$  exercée par l'électron sur la particule incidente contribue à cette intégrale, la composante tangentielle,  $F_{\parallel} \equiv F_x$ , ayant une intégrale nulle en raison de la symétrie du domaine d'intégration sur l'axe  $Ox$ . La force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la particule chargée  $Ze$  incidente s'exprime en fonction du champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par l'électron de l'atome :

$$\vec{F} = Ze\vec{E} \quad (2.2)$$

avec :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2} \vec{u}_r \quad (2.3)$$

où  $r$  est la distance séparant à un instant  $t$  donné l'électron et la particule chargée incidente et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire de la droite reliant l'électron et la particule chargée incidente.

En remplaçant l'intervalle de temps  $dt$  par le rapport  $dx/v$ , la relation (2.1) devient alors :

$$\Delta p = \Delta p_{\perp} \equiv \Delta p_y = Ze \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(t) dt = Ze \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x) \frac{dx}{v} \quad (2.4)$$

où  $E_{\perp} \equiv E_y$  est la composante transverse du champ électrique  $\vec{E}$ .

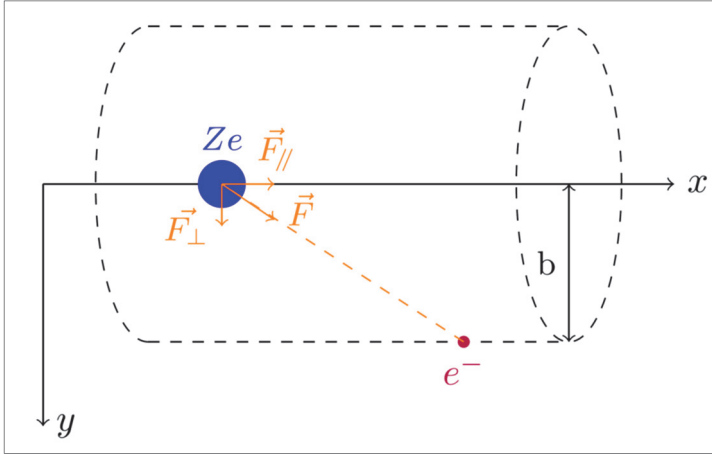


Figure 2. Particule de charge  $Ze$  en interaction avec un électron suivant un paramètre d'impact  $b$ .

En utilisant le théorème de Gauss sur un cylindre infini de rayon  $b$  où est positionné l'électron de l'atome (voir figure 2), on a :

$$\iint_{\text{Surface cylindre}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \text{somme des charges intérieures au cylindre} \quad (2.5)$$

Or,  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{\perp} \vec{j} \cdot (2\pi b \times dx) \vec{j} = E_y(x) 2\pi b dx \vec{j} \cdot \vec{j} = E_y(x) 2\pi b dx$ ,  $\vec{j}$  étant le vecteur unitaire de l'axe transverse  $Oy$ .

L'égalité (2.5) se réécrit :

$$2\pi b \int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x) dx = \frac{e}{\epsilon_0} \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_y(x) dx = \frac{e}{2\pi b \epsilon_0} \quad (2.7)$$

En remplaçant (2.7) dans (2.4), on en déduit la variation d'impulsion  $\Delta p$  :

$$\Delta p \equiv \Delta p_y = \frac{2Z}{vb} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.8)$$

En redéfinissant  $e^2$  comme :

$$e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = \alpha\hbar c = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (2.9)$$

$\alpha$  étant la constante de structure fine, alors :

$$\Delta p \equiv \Delta p_y = \frac{2Ze^2}{vb} \quad (2.10)$$

L'énergie cinétique perdue par la particule incidente et transférée à l'électron est donc :

$$\Delta E = \frac{\Delta p_y^2}{2m_0} = \frac{2Z^2e^4}{m_0v^2b^2} \quad (2.11)$$

On considère à présent une densité  $N_e$  d'électrons par unité de volume dans le milieu. On cherche à déterminer l'énergie perdue (en valeur absolue),  $dE(b)$ , par la particule incidente due à l'interaction avec les électrons se trouvant dans le volume  $dV$  de matière compris entre  $b$  et  $b + db$  dans une épaisseur  $dx$ ,  $dV = 2\pi b \times db \times dx$ . Cette perte d'énergie  $dE$  est proportionnelle à  $N_e$  et :

$$dE(b) = \frac{2Z^2e^4}{m_0v^2b^2} \times N_e \times 2\pi b db dx = \frac{4\pi Z^2e^4}{m_0v^2} N_e \frac{db}{b} dx \quad (2.12)$$

soit :

$$\frac{dE(b)}{dx} = \frac{dE}{dx}(b)db = \frac{4\pi Z^2e^4}{m_0v^2} N_e \frac{db}{b} \quad (2.13)$$

avec :

$$\frac{dE}{dx}(b) = \frac{4\pi Z^2e^4}{m_0v^2} N_e \frac{1}{b} \quad (2.14)$$

La perte d'énergie totale par interaction coulombienne par unité de longueur parcourue est obtenue par intégration sur le paramètre d'impact :

$$\frac{dE}{dx} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{dE}{dx}(b) db = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{4\pi Z^2e^4}{m_0v^2} N_e \frac{db}{b} = \frac{4\pi Z^2e^4}{m_0v^2} N_e \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad (2.15)$$

Il faut donc maintenant déterminer les bornes  $b_{min}$  et  $b_{max}$ .

La borne  $b_{min}$  correspond, d'un point de vue classique, à l'énergie maximale qui peut être transférée à l'électron, c'est-à-dire dans une configuration de choc frontal (angle de

déviation nul) ; dans ce cas, l'application des lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie cinétique (voir chapitre 7) conduit à une vitesse communiquée à l'électron de :

$$v_{e,max} = \frac{2M}{m_0 + M} v \approx 2v \text{ car } M \gg m_0 \quad (2.16)$$

d'où l'énergie cinétique maximale de l'électron :

$$E_{e,max} = \frac{1}{2} m_0 v_{e,max}^2 = 2m_0 v^2 \quad (2.17)$$

Dans le cas relativiste :

$$E_{e,max} = \frac{1}{2} m_0 \gamma^2 v_{e,max}^2 = 2\gamma^2 m_0 v^2 \quad (2.18)$$

où :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (2.19a)$$

en ayant posé :

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (2.19b)$$

En introduisant (2.18) dans (2.11), on a dans le cas général :

$$2\gamma^2 m_0 v^2 = \frac{2Z^2 e^4}{m_0 v^2 b_{min}^2} \quad (2.20)$$

et

$$b_{min}^2 = \frac{Z^2 e^4}{\gamma^2 m_0^2 v^4} \quad , \quad b_{min} = \frac{Z e^2}{\gamma^2 m_0 v^2} \quad (2.21)$$

Pour obtenir  $b_{max}$ , on doit considérer que l'électron n'est pas libre mais lié à un atome sur une orbite avec une fréquence<sup>7</sup>  $\nu$  (notation à ne pas confondre avec celle de la vitesse de la particule incidente  $v$ ). Pour que l'électron puisse absorber de l'énergie, il faut que le temps d'interaction  $\Delta t = b/(\gamma v)$ , petit devant la période de l'orbite de l'électron  $\tau \approx 1/\bar{\nu}$ ,  $\bar{\nu}$  étant une fréquence moyenne de révolution de l'électron autour du noyau de l'atome. Dans un cadre relativiste, cela donne :

$$\Delta t = \frac{b}{\gamma v} \leq \tau = \frac{1}{\bar{\nu}} \quad (2.22)$$

---

<sup>7</sup> Voir le modèle de l'atome de Bohr.



d'où :

$$b_{max} = \frac{\gamma v}{\bar{v}} \quad (2.23)$$

En définissant la perte d'énergie par unité de longueur,  $dE/dx$ , comme une grandeur algébriquement négative, on obtient avec (2.15) la **formule de Bohr** <sup>8</sup> qui donne une description raisonnable de l'énergie perdue pour des particules de masses supérieures ou égales à celle de la particule  $\alpha$  :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_0 v^2} N_e \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_0 v^2} N_e \ln \frac{m_0 \gamma^2 v^3}{Z e^2 \bar{v}} \quad (2.24)$$

La grandeur positive  $-dE/dx$  est dénommée **pouvoir d'arrêt linéaire**, et s'exprime en  $\text{MeV cm}^{-1}$  ou encore en  $\text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$  si elle est multipliée par la masse volumique  $\rho$  ( $\text{g cm}^{-3}$ ) du milieu ralentisseur.

### Remarques

- La fréquence  $\bar{v}$  est reliée au potentiel d'ionisation  $I$  de l'atome.
- L'interaction de la particule incidente avec le noyau atomique de numéro atomique  $z$  et de masse  $m$  peut être comparée avec celle de la même particule incidente avec l'électron précédemment traitée.

En appliquant la relation (2.11) relative à l'électron lié au noyau atomique de l'atome, on obtient une énergie perdue  $\Delta E_N$  :

$$\Delta E_N = \frac{2Z^2 z^2 e^4}{m v^2 b^2} \quad (2.25)$$

Il y a  $z$  charges dans le noyau de l'atome, il convient donc de comparer  $\Delta E_N$  à  $z \times \Delta E$  puisque  $\Delta E$  est relative à une seule charge qu'est l'électron précédemment considéré.

En faisant ce rapport, on obtient :

$$\frac{\Delta E_N}{z \Delta E} = \frac{\frac{2Z^2 z^2 e^4}{m v^2 b^2}}{z \frac{2Z^2 e^4}{m_0 v^2 b^2}} = \frac{m_0}{m} z \approx \frac{m_0}{2z m_p} z \approx \frac{0.511 \text{ (MeV)}}{2 \times 938 \text{ (MeV)}} \approx 2.7 \cdot 10^{-4} \quad (2.26)$$

---

N. Bohr, « On the theory of the decrease of velocity of moving electrified particles on passing through matter », *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 25, 145, 1913, pp. 10-31, [https://doi.org/10.1016/S1876-0503\(08\)70140-3](https://doi.org/10.1016/S1876-0503(08)70140-3) ; N. Bohr, « On the decrease of velocity of swiftly moving electrified particles in passing through matter », *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 30, 178, 1915, pp. 581-612.

Ceci montre que l'interaction coulombienne se fait essentiellement avec les électrons du cortège électronique de l'atome.

2.2. La formule de Bethe

Un calcul plus réaliste consiste à paramétrer la perte d'énergie en termes d'impulsion transférée à l'électron plutôt qu'avec les paramètres d'impacts. En effet, l'impulsion transférée est une quantité mesurable alors que les paramètres d'impacts sont appréhendés de manière empirique. Avec les mêmes notations que précédemment on obtient la formule de Bethe<sup>9</sup> :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_0 \beta^2} \frac{\rho N_{av} Z}{A} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2m_0 \beta^2 \gamma^2}{I^2} \right) - \beta^2 \right] \quad \text{MeV cm}^{-1} \tag{2.27a}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi Z^2 e^4}{m_0 \beta^2} \frac{N_{av} Z}{A} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2m_0 \beta^2 \gamma^2}{I^2} \right) - \beta^2 \right] \quad \text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \tag{2.27b}$$

Où :

- z est le numéro atomique du milieu de propagation des particules chargées incidentes de charge Z ;
- I est le **potentiel d'ionisation et d'excitation d'un atome**<sup>10</sup> donné par des formules semi-empiriques en l'absence de valeurs expérimentales disponibles :

$$I = 12Z + 9 \text{ eV si } Z < 13 \tag{2.28}$$

$$I = 9.76Z + 58.8 Z^{-0.19} \text{ eV pour } Z > 13 \tag{2.29}$$

Le **tableau 1** fournit des valeurs du potentiel d'ionisation ou énergie moyenne d'excitation pour différents types d'atomes<sup>12</sup> :

Tableau 1. Valeurs du potentiel d'ionisation ou énergie moyenne d'excitation pour différents types d'atomes.

Atome	H	He	Li	Be	C	N	O	Ne	Al	Cu	Pb
I (eV)	18.9	42	38	60	78	85	89	131	163	314	826

<sup>9</sup> H. Bethe, « Zur Theorie des Durchgangs schneller Korpuskularstrahlen durch Materie » (« La théorie du passage des rayons corpusculaires rapides à travers la matière »), *Annalen der Physik*, Vol. 397, Issue3, 1930, pp. 325-400, <https://doi.org/10.1002/andp.19303970303>.

<sup>10</sup> On rappelle que le potentiel d'ionisation d'un atome de type donné est l'énergie minimale qu'il faut fournir pour éjecter l'électron le moins lié du cortège électronique de cet atome.

<sup>11</sup> R. M. Sternheimer, « Density effect for the ionization-loss of charged particles », *Physical Review* 145, (1966), pp. 247-250, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.145.247>.

<sup>12</sup> L. Pagès, E. Bertel, H. Joffre, L. Sklavenitis, *Pertes d'énergie, parcours, rendement de freinage pour les électrons de 10 keV à 100 MeV dans les éléments simples et quelques composés chimiques*, Rapport CEA-R-3942, 1970, p. 3.

En général, les particules chargées légères (hydrogène et hélium) à des énergies cinétiques de l'ordre du MeV/nucléon sont complètement « épluchées » de leurs électrons et leurs charges sont alors celles des noyaux atomiques.

Pour un mélange d'atomes d'espèces différentes  $i$ , on adopte l'expression :

$$N \ln I = \sum_i N_i Z_i \ln I_i \quad (2.30)$$

avec :

- $N_i$  la concentration des atomes de type  $i$  (atomes. $\text{cm}^{-3}$ ) ;
- $I_i$  l'énergie moyenne d'excitation d'un atome de type  $i$  ;
- $N = \sum_i N_i$ .

La perte d'énergie  $-dE/dx$ , en désignant par  $w_i$  la fraction massique de l'élément  $i$  dans la composition considérée, s'écrit :

$$-\frac{dE(x)}{dx} = \sum_i w_i \left[ -\frac{dE(x)}{dx} \right]_i \quad \text{MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} \quad (2.31)$$

### 2.3. Influence du milieu ralentisseur

Si l'on fixe la nature de la particule incidente (caractéristiques cinématiques, charge, masse), on obtient la dépendance suivante pour le **pouvoir d'arrêt linéaire** :

$$-\frac{dE}{dx} = K_1 \frac{\rho Z}{A} [F(\text{projectile}) - \ln I] \quad (2.32)$$

où  $K_1$  et  $F(\text{projectile})$  dépendent uniquement du projectile. Le rapport  $Z/A$  est proche de 0.5 pour les noyaux légers et de masses moyennes (0.46 pour le fer), puis décroît lorsque le nombre de charges augmente (jusqu'à 0.39 pour l'uranium). La dépendance principale de la perte d'énergie est donc linéaire en fonction de la masse volumique  $\rho$  avec une contribution plus faible mais non négligeable du potentiel d'ionisation  $I$  et donc de  $Z$ .

### 2.4. Influence de l'énergie cinétique du projectile

En fixant la nature du milieu et celle de la particule incidente (masse, charge), on teste l'influence de l'énergie cinétique  $E$  de cette particule sur le pouvoir d'arrêt linéaire (voir **figure 3**). La formule de Bethe devient alors :

$$-\frac{dE}{dx} = K_2 \frac{\rho Z}{\beta^2} [K_3 \beta^2 \gamma^2 - \beta^2] \quad (2.33)$$

où  $K_2$  et  $K_3$  sont des constantes qui ne dépendent que du milieu traversé.

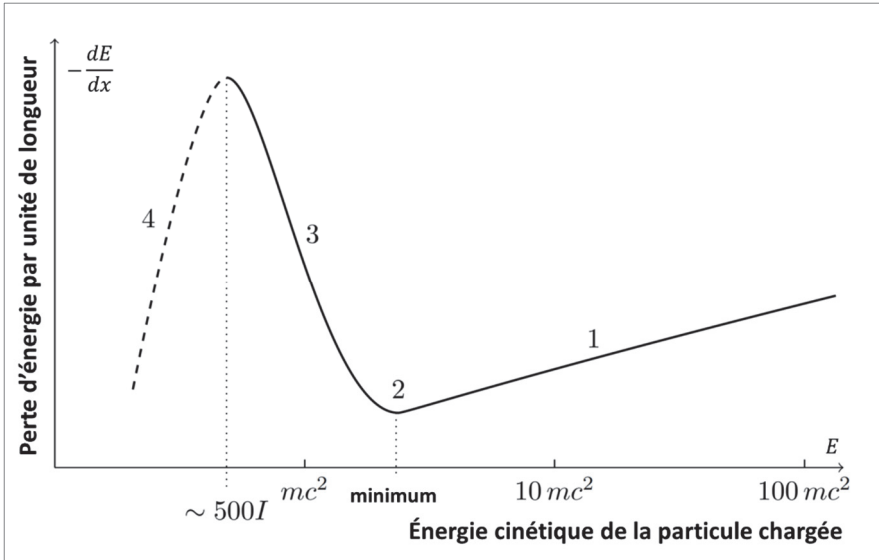


Figure 3. Variation du pouvoir d'arrêt linéaire  $-\frac{dE}{dx}$  en fonction de l'énergie cinétique de la particule chargée traversant un milieu donné (en unité de masse au repos de la particule considérée  $mc^2$ ) ;  $I$  est le potentiel d'ionisation et d'excitation d'un atome du milieu de propagation.

On peut alors considérer quatre domaines distincts (les grandeurs  $\beta$  et  $\gamma$  mentionnées ci-dessous sont définies par les relations (19a) et (19b)).

- Zone (1), pour les énergies relativistes et ultra-relativistes, le terme entre crochets est dominant et la perte d'énergie est croissante avec l'énergie de la particule. C'est la remontée relativiste.
- Zone (2), c'est le minimum par lequel passe la perte d'énergie ; d'un point de vue énergétique, il est atteint pour  $\beta\gamma \approx 3, -3,5$  ; cette énergie vaut 1 MeV pour un électron ou un positron, 1,9 GeV pour un proton et 7,5 GeV pour une particule  $\alpha$ .
- Zone (3), le terme  $1/\beta^2$  devient dominant,  $-dE/dx$  est alors une fonction décroissante de l'énergie.
- Zone (4), la formule n'est plus applicable, la particule incidente a une vitesse comparable à celle des électrons atomiques. Il faut alors considérer une charge effective pour celle-ci et les échanges de charges deviennent plus importants, la particule incidente peut prélever un électron du cortège atomique de l'atome.

## 2.5. Influence de la nature du projectile

La dernière dépendance que l'on peut noter pour la formule de Bethe tient au nombre de charges de la particule incidente, la dépendance en  $Z^2$ . Une particule  $\alpha$  va donc perdre son énergie sur une distance plus courte qu'un proton de même énergie. Cette dépendance est

très utilisée afin d'effectuer de l'identification de particules chargées dans un détecteur. Un proton de 6 MeV et une particule  $\alpha$  de 24 MeV possèdent les mêmes caractéristiques cinématiques, ces deux particules sont toutes les deux arrêtées dans environ  $300 \mu\text{m}$  de silicium.

## 2.6. Corrections de la formule de Bethe

Lorsque les particules atteignent de très hautes énergies, les pertes par radiation deviennent importantes et la formule de Bethe doit alors être modifiée. On verra que le même phénomène existe avec les électrons et les positrons : il s'agit du **rayonnement de freinage** ou *bremsstrahlung*.

Pour des énergies cinétiques plus petites, lorsque la vitesse des ions incidents devient de l'ordre de celle des électrons atomiques (jusqu'à quelques keV), l'hypothèse faite pour établir la formule de Bethe n'est plus valable. Il faut alors prendre en compte la **correction de couche** (*shell correction*) du fait que l'on avait négligé la liaison des électrons à l'atome ; cette correction est relativement faible et l'on utilise une formule empirique de la forme :

$$C(I, \eta) = (0.42277\eta^{-2} + 0.0304043\eta^{-4} - 0.00038106\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^2 + F(\eta^{-2}, \eta^{-4})10^{-9} I^3 \quad (2.34)$$

où  $\eta = \beta\gamma$  et  $I$  est le potentiel d'ionisation. Les puissances de  $\eta$  présentes dans cette formule justifient la faiblesse de cette correction à basse énergie cinétique. Cette correction est de l'ordre de 1% pour des protons de 1 MeV.

Lorsque l'énergie de la particule incidente augmente, le terme en  $\ln \beta^2 \gamma^2$  dans la formule de Bethe (voir relation (2.27)) devient largement dominant, mais il faut tenir compte de l'effet de densité. Le champ électrique de la particule incidente tend alors à polariser les atomes le long de son parcours. Du fait de cette polarisation, les électrons éloignés interagissent moins avec la particule incidente, cela a pour effet d'atténuer la remontée relativiste. Il est clair que cet effet dépend alors de la densité du matériau, d'où le nom d'« **effet de densité** ».

## 2.7. Parcours dans la matière

Comme pour les photons, une question naturelle se pose : quelle distance peut parcourir une particule chargée dans le milieu avant que son énergie cinétique ne devienne nulle ?

Tout d'abord, si on suppose que l'énergie est perdue continuellement, cette distance doit être la même pour toutes les particules identiques avec la même énergie initiale dans un matériau donné. Cette distance est appelée « **parcours** », elle est notée «  $R$  » en raison de sa dénomination anglaise « *range* ».

On considère une particule chargée, un proton ou une particule  $\alpha$  de quelques MeV qui pénètre dans la matière. Cette particule se situe dans la zone 3 de la **figure 2**. La particule

ralentit de plus en plus lors de son parcours dans le milieu, car le pouvoir d'arrêt linéaire augmente avec une dépendance en  $1/\beta^2$ . On obtient une courbe, appelée **courbe de Bragg** (perte d'énergie en fonction de la distance parcourue) qui est caractérisée par un pic juste avant que la particule ne s'arrête (voir **figure 4**). Cette caractéristique trouve une application directe dans le domaine médical visant à détruire des tumeurs par des radiations.

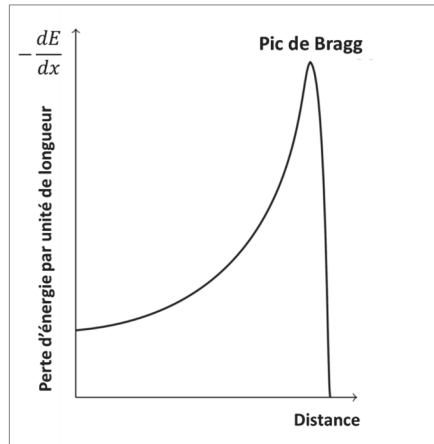


Figure 4. Illustration d'une courbe de Bragg.

Le **parcours (range)** peut être obtenu expérimentalement par une mesure de transmission d'un flux initial monocinétique  $I_0$  de particules à travers différentes épaisseurs de matériaux, comme le schématise la **figure 5**. On place alors un compteur pour mesurer le flux de particules  $I$  qui traverse le matériau. Lorsque l'épaisseur est faible, les particules sont ralenties mais traversent le matériau et  $I/I_0 = 1$ . En augmentant l'épaisseur, ce rapport décroît assez rapidement et on peut alors définir deux distances :

- le parcours moyen  $R_m$  : épaisseur à laquelle le rapport  $I/I_0 = 0.5$ . À cette distance, la moitié des particules sont absorbées ;
- le parcours extrapolé  $R_e$  : épaisseur obtenue par extrapolation linéaire de la décroissance du rapport  $I/I_0$  vers 0.

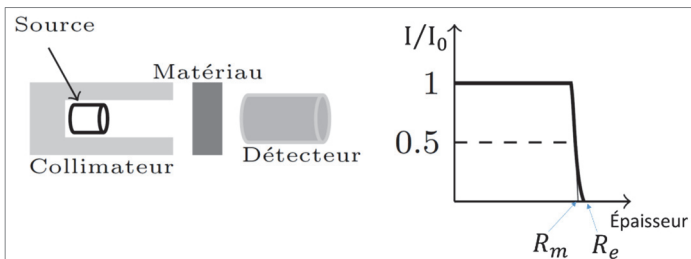


Figure 5. Principe de mesure et définitions des parcours dans un matériau.

D'un point de vue théorique, on définit le **parcours moyen** d'une particule d'énergie cinétique initiale  $E_0$  par l'intégrale :

$$r_0 = \int_0^{E_0} \frac{dE}{\frac{dE}{dx}} \text{ , unités : cm ou g.cm}^{-2}$$

(2.35)

Il est obtenu par l'intégration de l'inverse de la perte d'énergie par unité de longueur (ou du pouvoir d'arrêt linéaire) sur le domaine d'énergie compris entre l'énergie initiale de la particule et son énergie finale nulle du fait de son ralentissement complet dans le milieu dans lequel elle se propage. Le **parcours exprimé en  $\text{g cm}^{-2}$**  est déterminé en multipliant le **parcours exprimé en cm** par la **masse volumique  $\rho$  exprimée en  $\text{g cm}^{-3}$**  ; inversement le parcours en cm se déduit du parcours en  $\text{g cm}^{-2}$  en divisant ce dernier par la masse volumique  $\rho$  exprimée en  $\text{g cm}^{-3}$ .

En fait, ce calcul de distance ne tient pas compte du fait que la particule n'a pas une trajectoire rectiligne dans le matériau du fait des multiples diffusions. Il existe plusieurs approches (semi-analytique, numérique déterministe, Monte-Carlo, modèles simplifiés) pour déterminer le parcours de la particule dans le matériau considéré. Dans la pratique, il existe des tables qui contiennent toutes ces informations.<sup>13</sup> C'est à l'aide de ces tables que l'on peut calculer le plus facilement la perte d'énergie d'une particule lourde traversant une épaisseur donnée de matériau. Le **tableau 2** présente les parcours moyens de particules  $\alpha$  dans différents matériaux pour 1 et 5 MeV d'énergie cinétique. À titre de comparaison, un photon de 1.14 MeV a un libre parcours moyen de 1.41 cm dans du plomb.

Tableau 2. Parcours de particules  $\alpha$  dans différents milieux pour des énergies cinétiques de 1 et 5 MeV.

	Air $\rho = 1.29 \cdot 10^{-3}$ $\text{g cm}^{-3}$	Eau $\rho = 1.$ $\text{g cm}^{-3}$	Aluminium $\rho = 2.7$ $\text{g cm}^{-3}$	Plomb $\rho = 11.35$ $\text{g cm}^{-3}$
$E_0 = 1 \text{ MeV}$	0.56 cm $7.22 \cdot 10^{-4} \text{ g cm}^{-2}$	6 $\mu\text{m}$ $6 \cdot 10^{-4} \text{ g cm}^{-2}$	4 $\mu\text{m}$ $1.08 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$	3 $\mu\text{m}$ $3.4 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$
$E_0 = 5 \text{ MeV}$	3.6 cm $4.64 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$	38 $\mu\text{m}$ $3.8 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$	22 $\mu\text{m}$ $5.94 \cdot 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$	15 $\mu\text{m}$ $1.71 \cdot 10^{-2} \text{ g cm}^{-2}$

En correspondance avec les deux types de phénomènes qui ralentissent les particules chargées dans la matière, mentionnés au paragraphe 1, le pouvoir d'arrêt de celles-ci comporte **deux composantes**, l'une **électronique** et l'autre **nucléaire**.

Dans le cas des **particules  $\alpha$**  (et de celles plus lourdes) ainsi que des **protons**, le **pouvoir d'arrêt électronique** est essentiellement de **nature collisionnelle**, induisant l'**ionisation** et l'**excitation des atomes** (collisions coulombiennes), la **perte radiative** par **rayonnement de freinage** (*bremssstrahlung*) demeurant négligeable.

<sup>13</sup> L'ensemble de ces données sont disponibles sur le site du National Institute of Standards and Technology – Physical Measurement Laboratory, États-Unis : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/intro.html>.

Le **pouvoir d'arrêt nucléaire** se rapporte surtout aux **collisions élastiques** des particules chargées concernées avec les nucléides du milieu traversé. Les **figures 6 et 7** représentent les pouvoirs d'arrêt respectivement d'une **particule  $\alpha$**  et d'un **proton** dans un milieu eau liquide, distinguant **pouvoir d'arrêt électronique** et **pouvoir d'arrêt nucléaire**<sup>14</sup>.

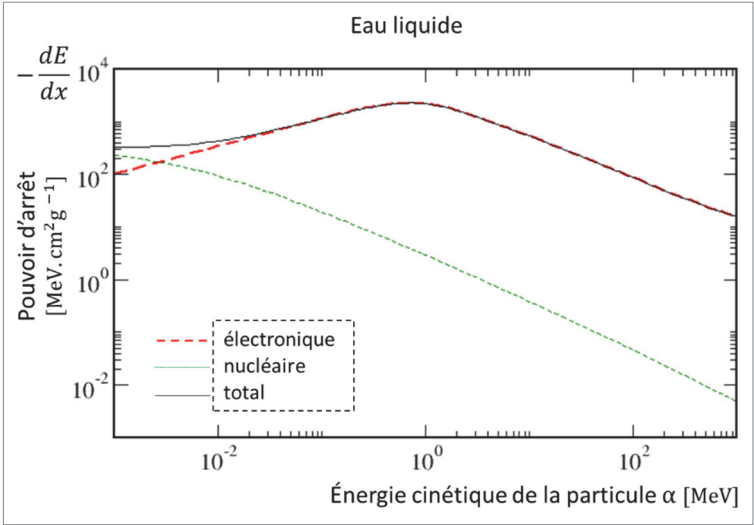


Figure 6. Pouvoirs d'arrêt d'une particule alpha dans l'eau liquide en fonction de son énergie cinétique.

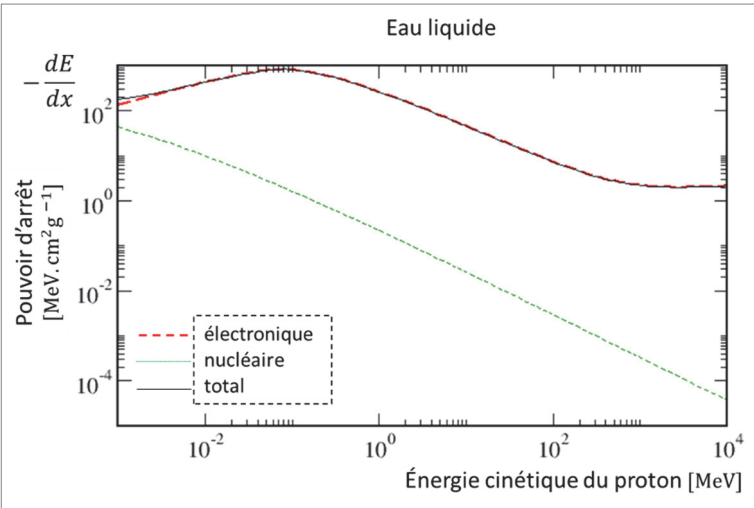


Figure 7. Pouvoirs d'arrêt d'un proton dans l'eau liquide en fonction de son énergie cinétique.

<sup>14</sup> Source : Base de données ASTAR et PSTAR du NIST :  
<https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ASTAR.html>,  
<https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/PSTAR.html>.



## 2.8. Produits de fission

Lors de la fission, deux noyaux lourds sont produits avec des énergies cinétiques de l'ordre d'une centaine de MeV (voir chapitre 9 sur la fission). Les fragments formés sont « épluchés » de quelques électrons, les charges effectives de ces noyaux sont alors supérieures à celles des protons et des alpha évoqués précédemment. Les parcours de ces produits de fission sont alors très courts, de l'ordre de la moitié de celui d'une particule  $\alpha$  de 5 MeV. Un aspect particulier de la perte d'énergie des fragments de fission, par rapport aux protons ou aux particules  $\alpha$ , découle de la diminution de la perte d'énergie ( $-dE/dx$ ) au fur et à mesure que l'énergie cinétique de la particule décroît. Cela provient de la diminution de la charge effective du fragment de fission, initialement positivement chargé, du fait qu'il « échange » de manière continue des électrons au milieu, compensant ainsi l'augmentation de la perte d'énergie liée à une énergie cinétique inférieure.

## 3. Électrons et positrons

Comme les particules chargées plus lourdes, les **électrons** et les **positrons** au cours de leurs trajets dans la matière subissent l'interaction avec les électrons du cortège atomique. Le **phénomène de collision** pour des électrons incidents est le même que pour les particules « lourdes » présentées précédemment, mais chaque collision fait perdre une énergie relative plus importante à l'électron et la trajectoire de ce dernier en est beaucoup plus affectée. Il engendre l'ionisation et l'excitation des atomes avec lesquels les électrons interagissent. Toutefois, du fait de leur faible masse, un autre mécanisme intervient pour la perte d'énergie : le **rayonnement de freinage** ou *bremssstrahlung*. Ce phénomène peut être compris classiquement comme l'émission d'une radiation liée à l'accélération de l'électron (ou positron) lorsqu'il est dévié de sa trajectoire initiale par l'attraction électrique du noyau. Pour des énergies de quelques MeV ou inférieures, ce phénomène est marginal. *A contrario*, lorsque l'électron incident atteint des énergies de quelques dizaines de MeV, l'énergie perdue par radiation devient du même ordre de grandeur ou supérieure à celle perdue par collision. Au-dessus d'une certaine énergie cinétique  $E_c \approx 1600 m_0 c^2 / Z$  ( $m_0 c^2 = 0.511$  MeV : masse au repos de l'électron et du positron), ce processus est même largement dominant. L'énergie totale perdue par unité de longueur par des électrons ou des positrons,  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{tot}$ , est donc la somme de deux termes respectivement **collisionnel** et **radiatif** :

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{tot} = \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{coll} + \left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} \quad (3.1)$$

où :

$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{coll}$  est le **pouvoir d'arrêt collisionnel**

$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad}$  est le **pouvoir d'arrêt radiatif**

### 3.1. Le processus collisionnel

L'interaction électron-matière est dominée par l'interaction coulombienne et elle est scindée en trois catégories définies à partir de la valeur du paramètre d'impact  $b$  caractérisant la collision avec un atome comparée à la valeur du rayon  $a$  de l'atome :

- si  $b \gg a$ , l'interaction coulombienne se manifeste essentiellement avec le cortège électronique : les processus d'excitation et d'ionisation – processus inélastiques – dominent ; l'énergie transférée par cette interaction est de l'ordre de quelques électronvolts – « collisions molles » – ; ces processus contribuent majoritairement à la perte d'énergie totale de l'électron ;
- si  $b \sim a$ , on a affaire à des « collisions dures » entre l'électron primaire et un seul électron des couches périphériques de l'atome ; elles sont moins fréquentes que les précédentes ; l'électron secondaire résultant de cette interaction est aussi appelé raie  $\delta$  ; la fraction d'énergie de l'électron primaire transférée à l'électron secondaire en une seule collision peut être très importante : la collision est qualifiée alors de « catastrophique » ;
- si  $b \ll a$ , l'interaction coulombienne se manifeste essentiellement avec le noyau de l'atome ; il s'agit ici d'une diffusion élastique de l'électron incident qui ne perd, par conséquent, qu'une très faible partie de son énergie cinétique initiale (la masse de l'électron étant très petite devant la masse du noyau atomique). Passant près du noyau atomique, l'électron peut aussi perdre de l'énergie par **rayonnement de freinage** ou **bremsstrahlung** (processus inélastique d'émission de photons selon un spectre continu en énergie, voir chapitre 11). La puissance rayonnée *via* le rayonnement de freinage est significative pour les électrons seulement à partir d'une énergie initiale suffisamment élevée (plusieurs MeV)<sup>15</sup>.

Ici, le terme **électrons secondaires** désigne :

- les **électrons arrachés aux couches électroniques externes** de l'atome auquel ils sont donc peu liés ;
- les **électrons rétrodiffusés** qui proviennent des diffusions élastiques avec le noyau atomique aux interfaces ;
- les **électrons Auger** qui sont des électrons appartenant aux couches internes de l'atome et qui en sont éjectés lors de la relaxation du cortège électronique perturbé par l'électron-projectile primaire ; ce phénomène est en compétition avec la **fluorescence X**, mécanisme qui correspond au déplacement, accompagné de l'émission d'un photon, d'un électron d'une couche d'énergie supérieure vers la couche comportant la place laissée vacante par l'électron choqué ;

<sup>15</sup> Pour les ions, cette émission est faible et souvent négligée, car elle varie comme l'inverse du carré de la masse du projectile chargé incident.

- les **électrons de conversion interne** issus d'un processus de **désexcitation nucléaire** du noyau atomique, phénomène particulièrement étudié à l'interface de deux milieux ; l'énergie provenant du noyau atomique est transférée aux électrons des couches les plus internes (K, L) de l'atome.

Le transport des électrons et la déposition de leur énergie dans la matière présentent ainsi plusieurs spécificités<sup>16</sup>.

- La perte progressive d'énergie des électrons résulte d'un nombre très élevé de collisions successives, par exemple de quelques dizaines de milliers (par ex. cas de l'aluminium) à quelques centaines de milliers de collisions (par ex. cas de l'or) pour des électrons d'énergie 500 keV. Ces ordres de grandeur sont à comparer aux 20 à 30 diffusions Compton (ou diffusions incohérentes) faisant passer un gamma d'une énergie de quelques MeV à une énergie de 50 keV et aux  $\sim 18$  collisions élastiques sur l'hydrogène diminuant l'énergie d'un neutron de 2 MeV à 0.025 eV (domaine d'énergie thermique)<sup>17</sup>.
- L'existence de collisions « **catastrophiques** » lors desquelles l'électron perd une part très appréciable de son énergie initiale, s'accompagnant d'une déflexion angulaire importante par rapport à sa direction avant collision et induisant le cas échéant le phénomène de **rétrodiffusion** (*backscattering*).
- Le déplacement en « **zig-zag** » ou « **straggling** » des électrons lorsque leur énergie diminue, sur la fin de leur parcours. Ce comportement est provoqué par les collisions inélastiques des électrons qui se propagent avec les électrons du cortège électronique des atomes.

### 3.2. La perte d'énergie par collision

La **formule de Bethe** établie pour déterminer l'énergie perdue par collision par des ions reste dans l'ensemble valable pour les électrons et les positrons, mais en faisant l'hypothèse (maintenant erronée) que la trajectoire de la particule incidente n'était pas modifiée lors de la collision.

De plus, du fait que les masses des particules en interaction sont identiques, l'énergie maximale transférée par collision est de l'ordre de celle de la particule incidente.

Une formule plus élaborée a été proposée par **F. Rohrlich** et **B. C. Carlson**<sup>18</sup> pour calculer la perte d'énergie par collision des électrons en partant de la **formule de Bethe** :

<sup>16</sup> Voir aussi annexe II.

<sup>17</sup> M. J. Berger, « Monte Carlo Calculation of the Penetration and Diffusion of Fast Charged Particles », pp. 135-215, *Methods in Computational Physics*, Vol. 1, Academic Press, New York, 1963, p. 142.

<sup>18</sup> F. Rohrlich, B. C. Carlson, « Positron-Electron Differences in Energy Loss and Multiple Scattering », *Physical Review*, 93 (1), 1954, pp. 38-44, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.93.38>.

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{coll} = \frac{2\pi N_{av} m_0 c^2 z}{\beta^2} \frac{1}{A} \left[ \ln \frac{T^2(T+2)}{2I^2} + \frac{\frac{T^2}{8} - (2T+1) \ln 2}{(T+1)^2} + 1 - \beta^2 - \delta \right] \text{ MeV} \cdot \text{cm}^{-1} \quad (3.2)$$

où :

- $T$  est l'énergie cinétique de l'électron incident en unité  $m_0 c^2$  ;
- $\delta$  est le facteur correctif associé à la prise en compte de l'incidence de la polarisation du milieu et de ses propriétés diélectriques sur la perte d'énergie par collision<sup>19</sup>.

Son emploi suppose de disposer des valeurs de l'énergie moyenne d'excitation  $I$  et du facteur correctif  $\delta$ .

### 3.3. La perte d'énergie par rayonnement de freinage ou *bremsstrahlung*

Toute particule chargée subissant une accélération rayonne de l'énergie sous forme d'onde électromagnétique sauf si elle se trouve dans un état stationnaire, comme c'est le cas pour un électron en orbite autour d'un atome.

En pratique, la probabilité d'émission de ce rayonnement varie comme l'inverse de la masse de la particule au carré. Le muon  $\mu$ , qui est la deuxième particule de masse la plus légère (105.7 MeV/ $c^2$ ) émet donc une énergie par radiation 4000 fois inférieure à celle de l'électron<sup>20</sup>. La perte d'énergie de l'électron par unité de longueur,  $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad}$ , dans un matériau constitué de nucléides de nombre de masse  $A$  s'exprime comme :

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \rho \frac{N_{av}}{A} \int_0^E E_\gamma \sigma_b(E \rightarrow E_\gamma) dE_\gamma \quad \text{MeV} \cdot \text{cm}^{-1} \quad (3.3)$$

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \frac{N_{av}}{A} \int_0^E E_\gamma \sigma_b(E \rightarrow E_\gamma) dE_\gamma \quad \text{MeV} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1} \quad (3.4)$$

où  $\sigma_b(E \rightarrow E_\gamma)$  est la section efficace différentielle de *bremsstrahlung*, c'est-à-dire de production de photons d'énergie  $E_\gamma$  par un électron d'énergie  $E$ , et  $N_{av}$  le nombre d'Avogadro.

Il n'y a pas une expression unique de la section efficace différentielle de *bremsstrahlung*  $\sigma_b(E \rightarrow E_\gamma)$  mais plusieurs de formes relativement complexes, assorties de leurs domaines

<sup>19</sup> L. Pagès, E. Bertel, H. Joffre, L. Sklavenitis, *Pertes d'énergie, parcours, rendement de freinage pour les électrons de 10 keV à 100 MeV dans les éléments simples et quelques composés chimiques*, op. cit., p. 3 et sq.

<sup>20</sup> H. W. Koch and J. W. Motz, « Bremsstrahlung Cross-Section Formulas and Related Data », *Rev. Mod. Phys.* 31, 920, 1 October 1959, <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.31.920>.

de validité respectifs en énergie et nombre de charges<sup>21</sup>. La **figure 8** montre un exemple de comportement de la section efficace doublement différentielle de *bremsstrahlung*, très « piquée » vers l'avant (fortement anisotrope). Il est à noter que la caractérisation angulaire et énergétique de l'émission de gamma de freinage dans une cible de nature donnée doit tenir compte de la perte d'énergie et de la déviation de la trajectoire progressives de l'électron au cours de son cheminement<sup>22</sup>. Il est important de souligner que la section efficace de *bremsstrahlung* est proportionnelle au carré du numéro atomique,  $z^2$ , pour un nucléide donné. C'est cette caractéristique qui guide le choix d'un matériau cible de numéro atomique élevé (par exemple le tungstène,  $z = 74$ ) pour produire des photons par un accélérateur d'électrons en vue de diverses applications. La perte d'énergie d'un électron de masse  $m_0$  et d'énergie cinétique  $E$  qui interagit par Coulomb avec les noyaux du milieu traversé de densité volumique  $N$  en nombre d'atomes est donnée par la relation suivante<sup>23</sup> :

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \frac{NzE(z+1)e^4}{137m_0^2} \left(4 \ln \frac{2E+4}{m_0} - \frac{4}{3}\right) \quad (3.5)$$

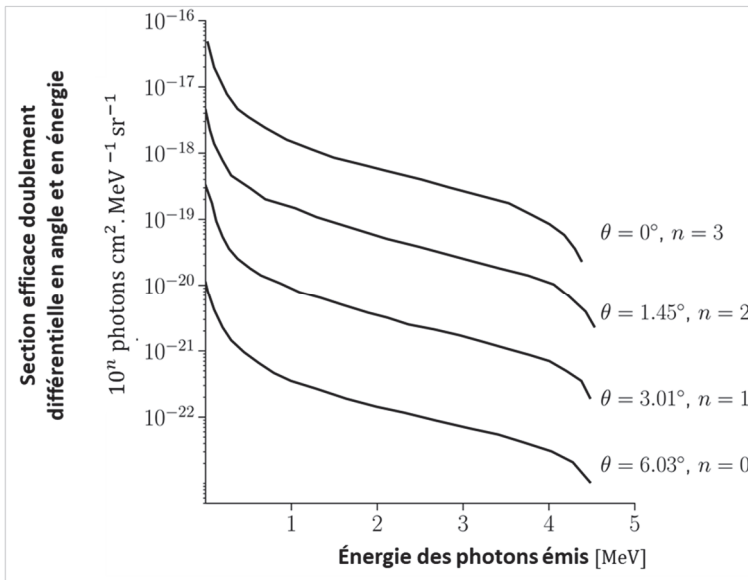


Figure 8. Allure de la section efficace doublement différentielle de la production de photons de *bremsstrahlung* (ou rayonnement de freinage) par un faisceau d'électrons de 4.54 MeV dans une cible d'or ( $z = 79$ ).<sup>24</sup>

<sup>21</sup> *Ibid.*

<sup>22</sup> Voir par exemple : S. Kitsos, C. M. Diop, A. Assad, J.-C. Nimal, and P. Ridoux, « Improvement of Gamma-Ray  $S_n$  Transport Calculations Including Coherent and Incoherent Scatterings and Secondary Sources of Bremsstrahlung and Fluorescence: Determination of Gamma-Ray Buildup Factors », *Nuclear Science and Engineering*, 123, 1996, 215–227, <https://doi.org/10.13182/NSE96-A24184>.

<sup>23</sup> G. F. Knoll, *Radiation detection and measurement*, *op. cit.*, p. 44.

<sup>24</sup> H. W. Koch and J. W. Motz, « Bremsstrahlung Cross-Section Formulas and Related Data », *op. cit.*, p. 945.

La **figure 9** représente le pouvoir d'arrêt d'un électron dans un milieu eau liquide, distinguant **pouvoir d'arrêt collisionnel** et **pouvoir d'arrêt radiatif** <sup>25</sup>.

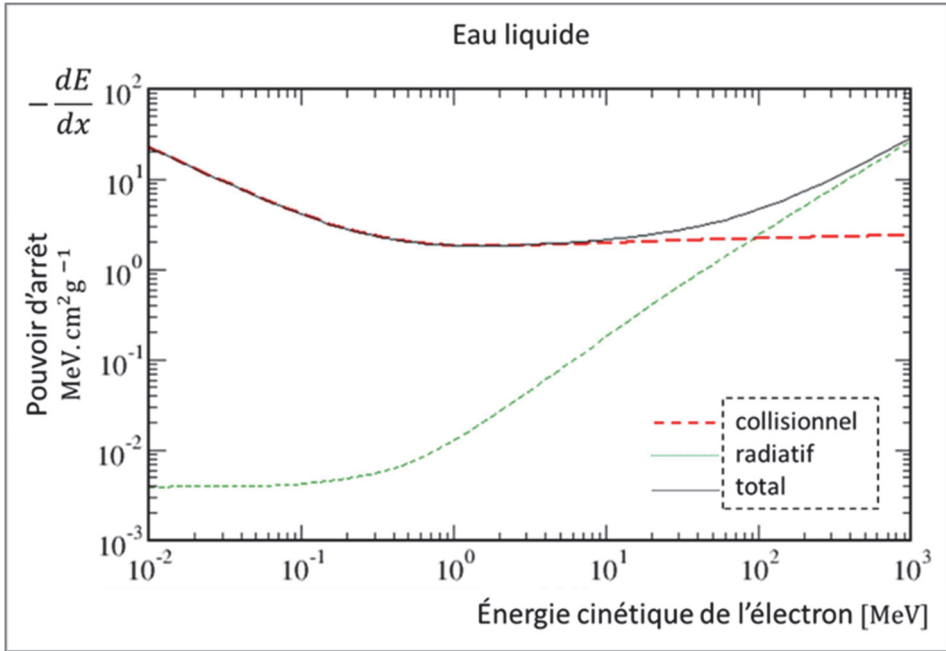


Figure 9. Pouvoirs d'arrêt de l'électron dans l'eau liquide en fonction de son énergie cinétique.

L'annexe V rassemble des tableaux de valeurs des pouvoirs d'arrêt des électrons dans différents milieux de propagation : eau, aluminium, uranium, oxyde de silicium et oxyde d'uranium.

En annexe V, on trouvera une expression du pouvoir d'arrêt utilisée lorsque l'on a affaire à des **électrons ou positons de haute énergie**.

Il convient de mentionner le phénomène de **cascade électromagnétique (cascad shower)** qui consiste en une propagation en arborescence de photons, d'électrons et de positons due conjointement aux phénomènes de bremsstrahlung et de matérialisation de photons d'énergie suffisamment élevée en paires (électron, positon)<sup>26 27</sup>.

<sup>25</sup> Source : Base de données ESTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>.

<sup>26</sup> S. Eidelman *et al.*, *Physics Letters B* 592, 1, 2004, 27. « Passage of particles through matter », § 2.5, Revised September 2005 by H. Bichsel, D. E. Groom, S. R. Klein, <https://pdg.lbl.gov/2005/reviews/passagerpp.pdf>.

<sup>27</sup> H. Schopper (Editor), A. Fasso, K. Goebel, M. Höfert, J. Ranft, G. Stevenson, *Shielding Against High Energy Radiation*, Landolt-Börnstein - Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms, Volume 11, Springer-Verlag, Berlin, 1990, p. 267 *et sq.*

### 3.4. Effet Čerenkov

Cet effet, découvert en 1934 par Pavel Alekseïevitch Čerenkov<sup>28</sup>, est similaire au franchissement du mur du son par un avion supersonique où l'électron serait assimilé à l'avion et l'émission d'une lumière bleue à celle d'ondes sonores intenses. Lorsqu'un électron d'énergie élevée se déplace dans un milieu, une émission radiative se manifeste le long de sa trajectoire. Si sa vitesse  $v$  est telle que le paramètre relativiste  $\beta = v/c$  est supérieur à l'inverse de l'indice de réfraction  $n$  du milieu ( $v/c > 1/n$ ), alors des interférences constructives peuvent apparaître et corrélativement un front d'onde lumineux de forme conique suit l'électron.

Un tel phénomène se produit par exemple dans le milieu eau pour des électrons d'énergie supérieure à 175 keV à laquelle correspond une vitesse d'électron supérieure à celle de la lumière dans l'eau (cette dernière étant inférieure à celle de 300 000 km.s<sup>-1</sup> dans le vide). L'**effet Čerenkov** se produit sur une durée de l'ordre de la picoseconde ( $10^{-12}$  s). Dans le domaine des réacteurs nucléaires, il s'observe dans les réacteurs de recherche de type piscine ainsi que dans les piscines de stockage des assemblages combustibles. Par ailleurs, ce type de rayonnement est très utilisé pour la détection et l'identification de particules dans le domaine des hautes énergies (**physique des particules**).

### 3.5. Annihilation des positrons

Comme déjà évoqué, les processus présentés précédemment sont aussi valables pour les positrons à la différence près que l'interaction avec les électrons du cortège atomique est de nature attractive et non plus répulsive. Les positrons vont disparaître du milieu lorsqu'ils auront atteint une vitesse quasi nulle par un processus dénommé « **annihilation** ». Le positron s'annihile avec un électron pour produire deux photons  $\gamma$  d'énergies 511 keV émis à 180° l'un de l'autre dans le référentiel du laboratoire (du fait de la vitesse nulle du positron). Ce processus est schématisé sur la **figure 10**.

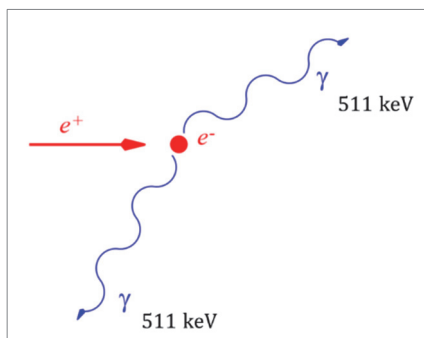


Figure 10. Annihilation d'un positron.

<sup>28</sup> P. A. Tcherenkov, « Luminescence visible de liquides purs sous l'action de rayons gamma », *C. R. Sc. U. R. S. S.*, 1934, 2 (8), 451-457 cité par S. Robin, « Effet Tcherenkov (Cerenkov) », *J. Phys. Radium* 11, 5, 1950, pp. 17 D-22 D, <https://doi.org/10.1051/jphysrad:0195000110501700>.

On rassemble dans le **tableau 6** les valeurs du parcours des électrons dans différents milieux que l’on peut comparer à ceux des particules  $\alpha$  du tableau 2.

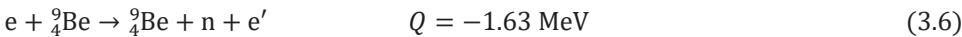
Les électrons sont des particules bien plus pénétrantes, nécessitant donc des protections plus importantes que pour les protons ou les particules  $\alpha$  de même énergie cinétique. Les parcours restent cependant bien plus faibles que les libres parcours moyens des photons de plus d’un facteur  $10^3$  pour une énergie de l’ordre de 1 MeV (voir chapitre 11 précédent).

Tableau 6. Parcours des électrons dans différents milieux.

	Air	Eau	Aluminium	Plomb
$E_e = 1 \text{ MeV}$	4.1 m	4.4 mm	2 mm	0.7 mm
$E_e = 5 \text{ MeV}$	22.8 m	25.5 mm	11 mm	3.2 mm

3.6. Réactions électronucléaires ou électro-désintégration

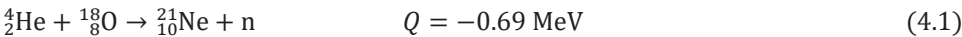
Les électrons d’énergie suffisamment élevée peuvent également induire des **réactions nucléaires**. On peut en particulier citer celle sur le béryllium <sup>9 29 30 31</sup> :



Pour un électron de 1.73 MeV, la section efficace est de l’ordre de  $10^{-31} \text{ cm}^2$ , qui est donc une valeur très faible par rapport à celle des réactions  $(\gamma, n)$  et  $(\alpha, n)$  ; les valeurs en sont encore plus faibles sur un noyau d’uranium, de l’ordre de  $10^{-33} \text{ cm}^2$ .

4. Les réactions  $(\alpha, n)$

Les réactions  $(\alpha, xn)$ , où  $x$  est la multiplicité des neutrons émis, notées plus directement  $(\alpha, n)$ , se produisent sur les éléments légers présents dans les combustibles oxydes d’uranium et mixtes uranium-plutonium (UOx et MOx)<sup>32</sup>, ou encore sur les éléments légers des déchets vitrifiés (silicium, oxygène…), les particules  $\alpha$  étant émises par les noyaux lourds existants dans le milieu considéré. Les réactions  $(\alpha, n)$  sont généralement des réactions à seuil dont les sections efficaces ont des valeurs relativement faibles, atteignant quelques centaines de millibarns.



<sup>29</sup> E. Guth, « Theory of Electrodisintegration of Beryllium », *Physical Review* 55, 411, February 15, 1939, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.55.411.2>.

<sup>30</sup> J. J. Livingood, A. H. Snell, « Search for Radioactivity Induced by 800-Kilovolt Electrons », *Physical Review* 48, 851 – Published December 1, 1935, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.48.851>.

<sup>31</sup> G. B. Collins, B. Waldman, E. Guth, « Disintegration of Beryllium by Electrons », *Physical Review* 56, 876, November 1, 1939, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.56.876>.

<sup>32</sup> R. Babut, O. Bouland, É. Fort, « Reich-Moore Parameterization of  $(\alpha, n)$  Reactions on Light Nuclei: Impact on a Neutron Source Calculation in an Oxide Fuel », *Nuclear Science and Engineering*, 151, 2005, pp. 135-156, <https://doi.org/10.13182/NSE05-A2536>.



La **figure 11** représente la section efficace de la réaction  $^{18}\text{O}(\alpha, n)^{21}_{10}\text{Ne}$  en fonction de l'énergie de la particule  $\alpha$  incidente : elle est décomposée en sections efficaces partielles. Lorsque l'énergie cinétique de la particule  $\alpha$  incidente est élevée, il peut se produire outre la simple réaction  $(\alpha, n)$  les réactions  $(\alpha, 2n)$ ,  $(\alpha, 3n)$ ,  $(\alpha, 4n)$ , etc. comme l'illustre la **figure 12** représentant la section efficace de production des neutrons relative à un nucléide cible de zirconium  $^{90}_{40}\text{Zr}$ . La particule  $\alpha$  émise, comme particule chargée, est ralentie dans le milieu qu'elle traverse par interaction coulombienne (voir § 1 et § 2 précédents) qui est le phénomène physique dominant. Son énergie cinétique décroît « continûment » au cours de ce ralentissement. Tant que son énergie cinétique reste supérieure à l'énergie de seuil, la **réaction nucléaire  $(\alpha, n)$**  est susceptible de se produire. On comprend donc que pour déterminer le nombre de neutrons engendrés par une particule  $\alpha$  qui se propage dans un milieu donné, il faut en modéliser le ralentissement.

Le **ralentissement d'une particule  $\alpha$**  dans la matière peut être suivi grâce à la connaissance de son **pouvoir d'arrêt linéaire**,  $-dE_{\alpha}(x)/dx$ , tel qu'il a déjà été défini (voir relations (2.27a), (2.27b) et (2.33)). On appelle **rendement  $(\alpha, n)$**  le nombre de neutrons émis par réaction  $(\alpha, n)$  au cours du ralentissement d'une particule  $\alpha$  émise, à une énergie donnée  $E_{\alpha 0}$ , par un actinide dans le milieu considéré :  $\text{UO}_2$ ,  $\text{PuO}_2$ , verre (présence d'impuretés d'actinides), etc. ; on le note  $\zeta^{(\alpha, n)}(E_{\alpha 0})$ .

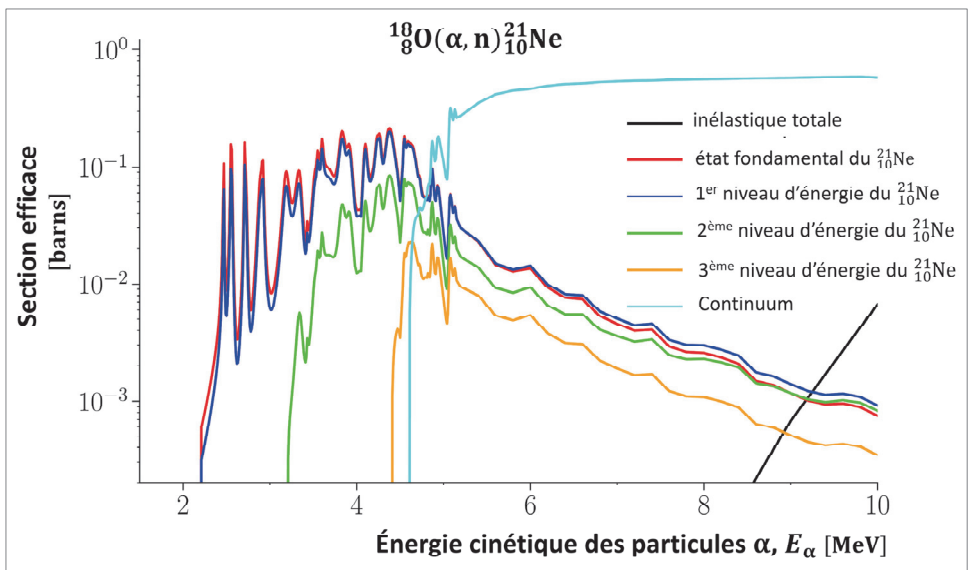


Figure 11. Section efficace de la réaction  $^{18}\text{O}(\alpha, n)^{21}_{10}\text{Ne}$  en fonction de l'énergie de la particule  $\alpha$  incidente : sont représentées les sections efficaces partielles associées à différents niveaux d'énergie dans lesquels le néon  $^{21}_{10}\text{Ne}$  est formé.<sup>33</sup>

<sup>33</sup> Voir aussi D. P. Griesheimer *et al.*, « In-line  $(\alpha, n)$  source sampling methodology for Monte Carlo radiation transport simulations », *Nuclear Engineering and Technology* 49, 2017, pp. 1199-1210, figure 6, p. 1207, <https://doi.org/10.1016/j.net.2017.08.004>.

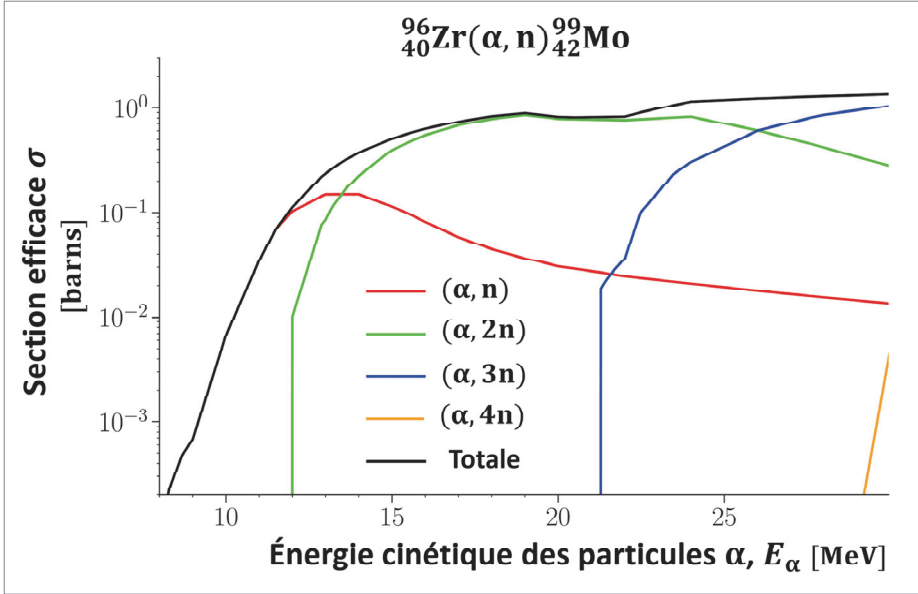


Figure 12. Allure de la section efficace totale de production des neutrons par réactions induites par des particules  $\alpha$ .

On désigne par  $\sigma_j^{(\alpha,n)}(E_\alpha)$  la section efficace de la réaction  $(\alpha, n)$  relative à l'isotope  $j$  en fonction de l'énergie  $E_\alpha$  de la particule  $\alpha$ . Le rendement  $(\alpha, n)$  est alors donné par l'expression suivante :

$$\zeta^{(\alpha,n)}(E_{\alpha 0}) = \sum_{j=1,J} N_j \int_{E_\alpha^{sj}}^{E_{\alpha 0}} \sigma_j^{(\alpha,n)}(E_\alpha(x)) \frac{dE_\alpha(x)}{dE_\alpha(x)} \frac{dE_\alpha(x)}{dx} \quad (4.2)$$

où :

- $N_j$  est la concentration de l'isotope de type  $j$  (noyaux  $\text{cm}^{-3}$ ) ;
- $E_\alpha(x)$  est l'énergie de la particule à la distance  $x$  parcourue depuis son point d'émission ;
- $dE_\alpha(x)/dx$  : représente la perte d'énergie par unité de longueur parcourue à l'énergie  $E_\alpha(x)$  ;  $-dE_\alpha(x)/dx$  est donc le pouvoir d'arrêt linéaire correspondant.

Dans le cas où coexistent dans le milieu considéré plusieurs types de noyaux  $k$  émetteurs  $\alpha$  émis selon un spectre  $s_{m(k)}$ , le rendement de la production de neutrons s'obtient par la sommation suivante :

$$\zeta_{(\alpha,n)}^{(k)} = \sum_{m(k)=1,M(k)} s_{m(k)} \sum_{j=1,J} N_j \int_{E_\alpha^{sj}}^{E_{\alpha m(k)}} \sigma_j^{(\alpha,n)}(E_\alpha(x)) \frac{dE_\alpha(x)}{dE_\alpha(x)} \frac{dE_\alpha(x)}{dx} \quad (4.3)$$

Exemple

Pour le curium 244, le spectre des particules  $\alpha$  est indiqué dans le **tableau 11**.

**Tableau 11. Spectre de raies des particules  $\alpha$  émises par le curium 244.**

Énergie de la particule $\alpha$ émise en MeV	Intensité des raies en %
4.960	$0.13 \cdot 10^{-3}$
5.513	$0.35 \cdot 10^{-2}$
5.664	$0.22 \cdot 10^{-1}$
5.762	23.6
5.804	76.4

Le rendement  $(\alpha, n)$  correspondant dans un milieu  $\text{UO}_2$  est d'environ  $2.7 \cdot 10^{-8}$  neutrons pour une désintégration alpha d'un noyau de curium 244 selon le spectre donné dans le **tableau 11**.

Pour accéder au spectre en énergie ( $E_n$ ) des neutrons émis par réaction  $(\alpha, n)$ , il faut substituer dans (4.2) et (4.3) la section efficace différentielle en énergie de production de neutrons  $\sigma_j^{(\alpha, n)}(E_\alpha(x) \rightarrow E_n)$  à la section efficace scalaire  $\sigma_j^{(\alpha, n)}(E_\alpha(x))$ <sup>34 35 36</sup>.

Les **figures 13** et **14**, ainsi que les **tableaux** correspondants **12 à 16**, montrent les spectres discrets en énergie des neutrons produits par réaction  $(\alpha, n)$  sur les noyaux d'oxygène 17 et d'oxygène 18 de deux milieux distincts : oxyde d'uranium et verre<sup>37</sup>.

<sup>34</sup> G. Vlaskin, Y. Khomiakov, « Calculation of Neutron Production Rates and Spectra from Compounds of Actinides and Light Elements », ICRS-13 & RPSD-2016, *EPJ Web of Conferences* 153, 07033 (2017), <https://doi.org/10.1051/epjconf/201715307033>.

<sup>35</sup> Voir aussi : W. B. Wilson, R. T. Perry, E. F. Shores, W. S. Charlton, T. A. Parish, G. P. Estes, T. H. Brown, E. D. Arthur, M. Bozoian, T. R. England, D. G. Madland, James E. Stewart, *SOURCES 4C: a code for calculating  $(\alpha, n)$ , spontaneous fission, and delayed neutron sources and spectra*, LA-UR 02-1839., 2002, <https://www.osti.gov/biblio/976142-sources-code-calculating-alpha-spontaneous-fission-delayed-neutron-sources-spectra>.

<sup>36</sup> W. B. Wilson, R. T. Perry, W. S. Charlton, T. A. Parish, E. F. Shores, « SOURCES: a code for calculating  $(\alpha, n)$ , spontaneous fission, and delayed neutron sources and spectra », *Radiat Prot Dosimetry*, 115(1-4):117-21, 2005, <https://doi.org/10.1093/rpd/nci260>.

<sup>37</sup> Voir aussi : G. J. H. Jacobs, H. Liskien, « Energy spectra of neutrons produced by  $\alpha$ -particles in thick targets of light elements », *Ann. Nucl. Energy* 10, 1983, pp. 541-552, Figure 6, p. 545. ; G. J. H. Jacobs, *Neutron energy spectra produced by alpha-bombardment of light elements in thick targets*, Technische Hogeschool Eindhoven, 1982 ; <https://doi.org/10.6100/IR104719>.

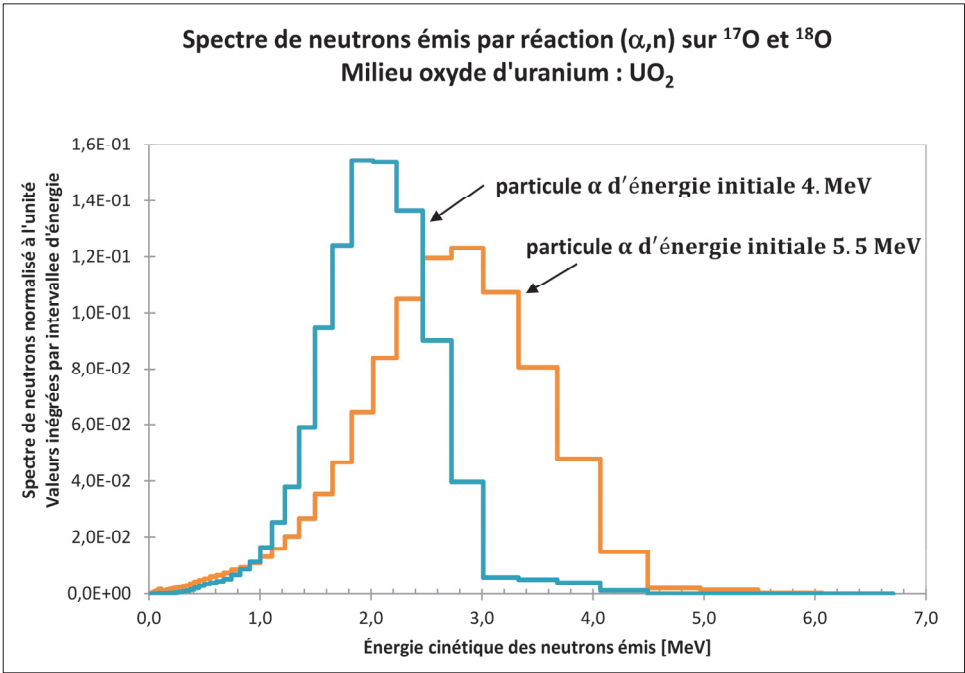


Figure 13. Spectres discrets en énergie des neutrons émis par réaction  $(\alpha,n)$  sur les noyaux d'oxygène 17 ( $^{17}\text{O}(\alpha,n)^{20}\text{Ne}$ ) et d'oxygène 18 ( $^{18}\text{O}(\alpha,n)^{21}\text{Ne}$ ) en milieu oxyde d'uranium,  $\text{UO}_2$ , pour deux énergies cinétiques initiales de la particule  $\alpha$  qui se propage, 4 MeV et 5.5 MeV. Les ordonnées correspondent au nombre de neutrons intégré sur chaque intervalle en énergie, voir le tableau 12 qui fournit le découpage en énergie.<sup>38</sup>

<sup>38</sup> Source : T.-D. Huynh, utilisation du logiciel SOURCES-4C déjà cité.

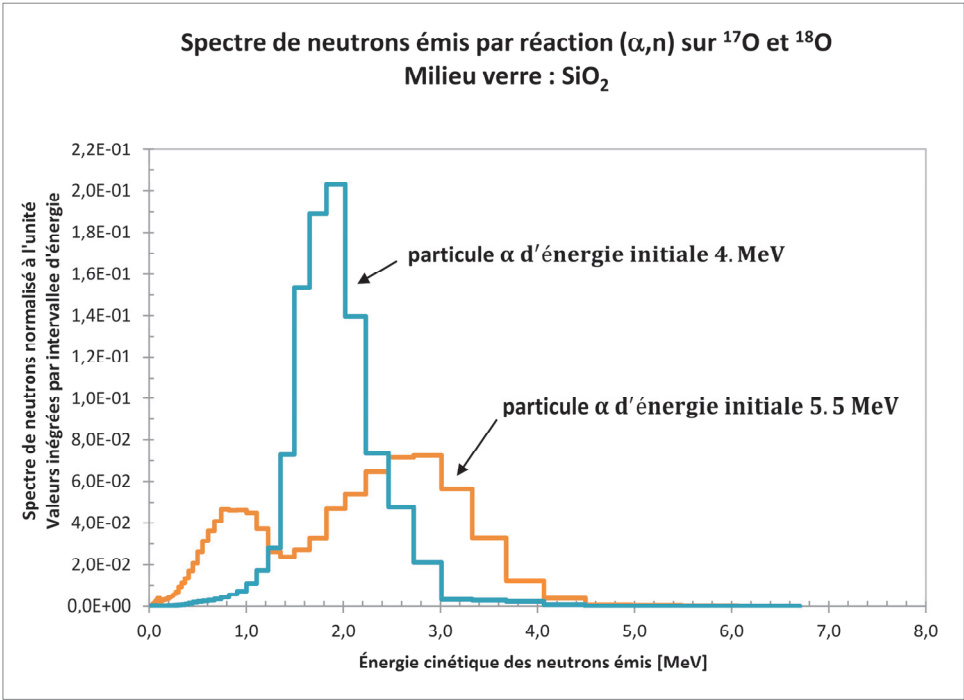


Figure 14. Spectres discrets en énergie des neutrons émis par réaction (α,n) sur les noyaux d’oxygène 17 (<sup>17</sup>O(α,n)<sup>20</sup>Ne) et d’oxygène 18 (<sup>18</sup>O(α,n)<sup>21</sup>Ne) en milieu oxyde d’uranium,SiO<sub>2</sub>, pour deux énergies cinétiques initiales de la particule α qui se propage, 4 MeV et 5.5 MeV. Les ordonnées correspondent au nombre de neutrons intégré sur chaque intervalle en énergie, voir le tableau 12 qui fournit le découpage en énergie.<sup>39</sup>

Tableau 12. Bornes du découpage du domaine d’énergie [MeV] en 100 intervalles (ou groupes d’énergie) utilisé pour représenter le spectre des neutrons émis par réaction (α,n).

1,000E-11	3,928E-06	4,785E-05	5,830E-04	7,102E-03	8,652E-02	2,732E-01	7,427E-01	2,019E+00	5,488E+00
4,140E-07	5,044E-06	6,144E-05	7,485E-04	9,119E-03	1,111E-01	3,020E-01	8,209E-01	2,231E+00	6,065E+00
5,316E-07	6,476E-06	7,889E-05	9,611E-04	1,171E-02	1,228E-01	3,337E-01	9,072E-01	2,466E+00	6,703E+00
6,826E-07	8,315E-06	1,013E-04	1,234E-03	1,503E-02	1,357E-01	3,688E-01	1,003E+00	2,725E+00	7,408E+00
8,764E-07	1,068E-05	1,301E-04	1,585E-03	1,931E-02	1,500E-01	4,076E-01	1,108E+00	3,012E+00	8,187E+00
1,125E-06	1,371E-05	1,670E-04	2,035E-03	2,479E-02	1,657E-01	4,505E-01	1,225E+00	3,329E+00	9,048E+00
1,445E-06	1,760E-05	2,145E-04	2,613E-03	3,183E-02	1,832E-01	4,979E-01	1,353E+00	3,679E+00	1,000E+01
1,855E-06	2,260E-05	2,754E-04	3,355E-03	4,087E-02	2,024E-01	5,502E-01	1,496E+00	4,066E+00	1,105E+01
2,382E-06	2,902E-05	3,536E-04	4,307E-03	5,248E-02	2,237E-01	6,081E-01	1,653E+00	4,493E+00	1,221E+01
3,059E-06	3,727E-05	4,540E-04	5,531E-03	6,738E-02	2,472E-01	6,721E-01	1,827E+00	4,966E+00	1,350E+01
									2,000E+01

<sup>39</sup> Source : T.-D. Huynh, utilisation du logiciel SOURCES-4C déjà cité.

Tableau 13. Valeurs du spectre discret en énergie des neutrons émis par réaction  $(\alpha,n)$  sur les noyaux d'oxygène 17 ( $^{17}_8\text{O}(\alpha,n)^{20}_{10}\text{Ne}$ ) et d'oxygène 18 ( $^{18}_8\text{O}(\alpha,n)^{21}_{10}\text{Ne}$ ) en milieu oxyde d'uranium,  $\text{UO}_2$ , pour une particule  $\alpha$  qui se propage d'énergie initiale 4 MeV : nombre de neutrons intégré sur chacun des 100 intervalles en énergie du tableau 12 (voir figure 16).

0,000E+00	5,248E-12	2,624E-10	1,143E-08	5,195E-07	1,183E-04	6,509E-04	6,505E-03	1,537E-01	0,000E+00
0,000E+00	6,739E-12	4,003E-10	1,664E-08	7,712E-07	6,960E-05	8,517E-04	8,534E-03	1,364E-01	0,000E+00
0,000E+00	1,544E-11	5,662E-10	2,426E-08	1,153E-06	9,148E-05	1,076E-03	1,123E-02	8,998E-02	0,000E+00
5,305E-13	2,221E-11	8,350E-10	3,534E-08	1,744E-06	1,168E-04	1,439E-03	1,642E-02	3,965E-02	0,000E+00
1,171E-12	2,852E-11	1,212E-09	5,149E-08	2,728E-06	1,421E-04	2,072E-03	2,515E-02	5,618E-03	0,000E+00
1,504E-12	3,662E-11	1,762E-09	7,512E-08	4,449E-06	1,666E-04	2,835E-03	3,793E-02	4,852E-03	0,000E+00
1,931E-12	6,350E-11	2,561E-09	1,098E-07	7,859E-06	1,956E-04	3,385E-03	5,905E-02	3,781E-03	0,000E+00
2,479E-12	9,054E-11	3,707E-09	1,605E-07	1,561E-05	2,372E-04	3,789E-03	9,457E-02	1,135E-03	0,000E+00
3,183E-12	1,199E-10	5,408E-09	2,367E-07	3,491E-05	3,204E-04	4,267E-03	1,239E-01	0,000E+00	0,000E+00
4,088E-12	1,944E-10	7,864E-09	3,509E-07	6,928E-05	4,600E-04	5,078E-03	1,542E-01	0,000E+00	0,000E+00

Tableau 14. Valeurs du spectre discret en énergie des neutrons émis par réaction  $(\alpha,n)$  sur les noyaux d'oxygène 17 ( $^{17}_8\text{O}(\alpha,n)^{20}_{10}\text{Ne}$ ) et d'oxygène 18 ( $^{18}_8\text{O}(\alpha,n)^{21}_{10}\text{Ne}$ ) en milieu oxyde d'uranium,  $\text{UO}_2$ , pour une particule  $\alpha$  qui se propage d'énergie initiale 5.5 MeV : nombre de neutrons intégré sur chacun des 100 intervalles en énergie du tableau 12 (voir figure 16).

1,721E-11	4,837E-10	1,993E-08	8,809E-07	4,228E-05	1,659E-03	2,406E-03	8,298E-03	8,392E-02	2,414E-04
2,043E-11	6,731E-10	3,057E-08	1,291E-06	6,316E-05	8,329E-04	2,646E-03	9,356E-03	1,050E-01	0,000E+00
3,269E-11	9,508E-10	4,237E-08	1,885E-06	9,456E-05	9,874E-04	2,901E-03	1,086E-02	1,196E-01	0,000E+00
4,198E-11	1,516E-09	6,407E-08	2,765E-06	1,419E-04	1,140E-03	3,428E-03	1,300E-02	1,230E-01	0,000E+00
5,389E-11	2,070E-09	9,228E-08	4,043E-06	2,124E-04	1,303E-03	4,084E-03	1,585E-02	1,073E-01	0,000E+00
6,922E-11	3,311E-09	1,331E-07	5,932E-06	3,090E-04	1,468E-03	4,667E-03	2,014E-02	8,070E-02	0,000E+00
8,971E-11	4,612E-09	1,955E-07	8,720E-06	4,388E-04	1,628E-03	5,241E-03	2,650E-02	4,800E-02	0,000E+00
1,224E-10	6,445E-09	2,848E-07	1,286E-05	6,089E-04	1,786E-03	5,912E-03	3,556E-02	1,466E-02	0,000E+00
2,819E-10	9,675E-09	4,143E-07	1,906E-05	8,227E-04	1,958E-03	6,459E-03	4,667E-02	1,943E-03	0,000E+00
3,751E-10	1,444E-08	6,041E-07	2,832E-05	1,145E-03	2,175E-03	7,218E-03	6,430E-02	1,278E-03	0,000E+00

Tableau 15. Valeurs du spectre discret en énergie des neutrons émis par réaction  $(\alpha,n)$  sur les noyaux d'oxygène 17 ( $^{17}_8\text{O}(\alpha,n)^{20}_{10}\text{Ne}$ ) et d'oxygène 18 ( $^{18}_8\text{O}(\alpha,n)^{21}_{10}\text{Ne}$ ) en milieu oxyde d'uranium,  $\text{SiO}_2$ , pour une particule  $\alpha$  qui se propage d'énergie initiale 4 MeV : nombre de neutrons intégré sur chacun des 100 intervalles en énergie du tableau 12 (voir figure 17).

2,937E-11	3,942E-10	1,680E-08	7,268E-07	2,801E-05	9,406E-05	4,167E-04	4,099E-03	1,396E-01	0,000E+00
1,338E-11	5,730E-10	2,446E-08	1,063E-06	3,607E-05	4,802E-05	5,399E-04	5,447E-03	7,348E-02	0,000E+00
1,943E-11	8,365E-10	3,560E-08	1,557E-06	4,647E-05	6,214E-05	6,797E-04	7,337E-03	4,766E-02	0,000E+00
2,857E-11	1,217E-09	5,184E-08	2,285E-06	5,995E-05	7,866E-05	8,981E-04	1,087E-02	2,106E-02	0,000E+00
4,178E-11	1,768E-09	7,551E-08	3,362E-06	7,744E-05	9,594E-05	1,266E-03	1,735E-02	3,027E-03	0,000E+00
6,072E-11	2,569E-09	1,100E-07	4,960E-06	1,000E-04	1,137E-04	1,711E-03	2,803E-02	2,622E-03	0,000E+00
8,811E-11	3,747E-09	1,603E-07	7,344E-06	1,271E-04	1,349E-04	2,052E-03	7,289E-02	2,049E-03	0,000E+00
1,282E-10	5,453E-09	2,336E-07	1,092E-05	1,554E-04	1,643E-04	2,329E-03	1,536E-01	6,168E-04	0,000E+00
1,867E-10	7,928E-09	3,408E-07	1,625E-05	1,761E-04	2,172E-04	2,659E-03	1,892E-01	0,000E+00	0,000E+00
2,713E-10	1,155E-08	4,975E-07	2,177E-05	1,603E-04	3,021E-04	3,185E-03	2,030E-01	0,000E+00	0,000E+00

Tableau 16. Valeurs du spectre discret en énergie des neutrons émis par réaction (α,n) sur les noyaux d’oxygène 17 ( $^{17}_8\text{O}(\alpha, n)^{20}_{10}\text{Ne}$ ) et d’oxygène 18 ( $^{18}_8\text{O}(\alpha, n)^{21}_{10}\text{Ne}$ ) en milieu oxyde d’uranium, SiO<sub>2</sub>, pour une particule α qui se propage d’énergie initiale 5.5 MeV : nombre de neutrons intégré sur chacun des 100 intervalles en énergie du tableau 12 (voir figure 17).

1,169E-11	3,244E-10	1,505E-08	6,770E-07	2,951E-05	3,407E-03	6,992E-03	4,652E-02	5,380E-02	6,068E-05
7,788E-12	5,755E-10	2,305E-08	9,922E-07	4,318E-05	1,795E-03	9,279E-03	4,608E-02	6,453E-02	0,000E+00
1,184E-11	8,043E-10	3,260E-08	1,448E-06	6,793E-05	2,271E-03	1,126E-02	4,624E-02	7,153E-02	0,000E+00
3,028E-11	1,163E-09	4,694E-08	2,119E-06	1,222E-04	2,629E-03	1,346E-02	4,481E-02	7,251E-02	0,000E+00
4,823E-11	1,560E-09	7,108E-08	3,090E-06	1,943E-04	2,910E-03	1,710E-02	3,728E-02	5,630E-02	0,000E+00
6,195E-11	2,261E-09	9,995E-08	4,510E-06	3,780E-04	3,068E-03	2,073E-02	2,628E-02	3,298E-02	0,000E+00
8,393E-11	3,556E-09	1,491E-07	6,566E-06	7,321E-04	3,371E-03	2,623E-02	2,373E-02	1,212E-02	0,000E+00
1,114E-10	4,802E-09	2,173E-07	9,565E-06	1,058E-03	3,991E-03	3,147E-02	2,715E-02	3,612E-03	0,000E+00
1,844E-10	7,698E-09	3,168E-07	1,393E-05	1,590E-03	4,645E-03	3,623E-02	3,287E-02	4,884E-04	0,000E+00
2,461E-10	1,060E-08	4,646E-07	2,026E-05	2,316E-03	5,569E-03	4,091E-02	4,686E-02	3,213E-04	0,000E+00

Dans ces deux exemples, la contribution la plus importante à la production des neutrons provient de la réaction (α,n) sur l’oxygène 18 qui présente des valeurs de sections efficaces significativement plus élevées que celles relatives à la réaction (α,n) sur l’oxygène 17.

## Annexe I : approches calculatoires du transport des électrons dans la matière

Dans la littérature, on recense plusieurs types de méthodes de calcul pour traiter le transport des électrons (resp. positrons) et calculer l'énergie qu'ils dissipent dans le milieu traversé.

- La **méthode analytique semi-empirique** qui représente par une fonction la distribution spatiale (distance à la source) de la dose bêta déposée dans un milieu homogène donné (*fit analytique*) pour une source d'électrons – radionucléides – ponctuelle et isotrope. Une telle représentation à deux paramètres a été proposée initialement par **R. Loevinger**, s'appuyant sur des données expérimentales, [14], [5], [10, pp. 182-183], [11], [15] ;
- La **méthode déterministe** consistant à résoudre analytiquement et numériquement l'équation du transport : c'est l'approche notamment proposée par **L. V. Spencer** [1] en milieu homogène infini ; il met en œuvre la « méthode des moments » qui consiste à développer le flux en phase des électrons sur la base des harmoniques sphériques aboutissant à un formalisme qui se prête plus aisément à des calculs sur ordinateur. Ces travaux ont servi à d'autres auteurs (**Cross**, **Berger**...) pour produire de premières bibliothèques de **Dose Point Kernels** – **DPKs** – relatifs à des sources d'électrons mono-énergétiques et à toute une série de radionucléides.
- La **méthode Monte-Carlo** simulant les collisions : elle a été initialement développée par **M. J. Berger** [2] ; elle est rendue possible en discrétisant le parcours des électrons en petits intervalles et en utilisant des données de distribution angulaire et de distribution en énergie ; pour la distribution angulaire, les algorithmes les plus aboutis s'appuient sur la **théorie de la diffusion multiple** en cible mince de **Goudsmit-Saunderson** [3].
- La **méthode déterministe simplifiée** qui utilise une prétabulation des **Dose Point Kernels** – **DPKs** – correspondant à l'énergie déposée à différentes épaisseurs dans la matière, pour une source unitaire d'électrons ; elle a été proposée par **M. J. Berger** [4]. Ces DPKs sont précalculés par la résolution de l'équation du transport des électrons par une voie déterministe ou probabiliste (Monte-Carlo) et leur sont associées des lois d'interpolation (« fits analytiques » avec paramètres tabulés) permettant de les déterminer pour toute énergie initiale d'électron, toute épaisseur de milieu traversé, tout milieu. Cette démarche calculatoire est très similaire à celle de la méthode d'atténuation en ligne droite avec facteur d'accumulation (*buildup factor*) utilisée pour déterminer les doses ou débits de dose gamma.
- L'**approche Continuous Slowing Down Approximation (CSDA)** qui consiste en une intégration numérique sur le parcours de l'électron, supposé en ligne droite et sous l'hypothèse de son ralentissement continu, d'une **expression semi-empirique donnant sa perte d'énergie par unité de longueur** dans le milieu traversé [6] [11], ou bien utilisant directement les valeurs prétabulées des pertes d'énergie par unité de longueur (voir [7] par exemple).



### Bibliographie sélective

- [1] L. V. Spencer, « Theory of Electron Penetration », *Physical Review* 98, 1955, pp. 1597-1615 ; L. V. Spencer, *Energy Dissipation by Fast Electrons*, National Bureau of Standards Monograph 1, USA, 1959.
- [2] M. J. Berger, « Monte-Carlo Calculation of the Penetration and Diffusion of Fast Charged Particles », pp. 135 - 215, *Methods in Computational Physics*, Vol. 1, Academic Press, New York (1963).
- [3] S. Goudsmit, J. L. Saunderson, « Multiple scattering of electrons », *Physical Review* 57:24-29, 1940 ; S. Goudsmit and J. L. Saunderson, « Multiple scattering of electrons », II, *Physical Review* 58:36, 42, 1940.
- [4] M. J. Berger, *Improved Point Kernels for Electron and Beta-Ray Dosimetry*, NBSIR 73-107, Center for Radiation Research Institute for Basic Standards National Bureau of Standards, 1973.
- [5] W. G. Cross, « Empirical Expression for Beta Ray Point Source Dose Distributions », *Radiation Protection Dosimetry*, 69 (2), 1997, pp. 85-96.
- [6] F. Rohrlich, B. C. Carlson, « Positron-Electron Differences in Energy Loss and Multiple Scattering », *Physical Review* 93 (1), 1954, pp. 38-44.
- [7] L. Pagès, E. Bertel, H. Joffre, L. Sklavenitis, *Pertes d'énergie, parcours, rendement de freinage pour les électrons de 10 keV à 100 MeV dans les éléments simples et quelques composés chimiques*, Rapport CEA-R-3942, 1970.
- [8] W. V. Prestwich, J. Nunes, C. S. Kwok, « Beta Dose Point Kernels for Radionuclides of Potential Use in Radioimmunotherapy », *The Journal of Nuclear Medicine*, Volume 30, Number 6, June 1989, pp. 1036-1046.
- [9] D. M. Hamby, C. D. Mangini, J. A. Caffrey, M. Tang, *VARSKIN 5: A Computer Code for Skin Contamination Dosimetry*, NUREG/CR-6918 Revision 2, Department of Nuclear Engineering and Radiation Health Physics Oregon State University.
- [10] R. Antoni, L. Bourgois, *Physique appliquée à l'exposition externe – Dosimétrie et radioprotection*, Paris, Springer, 2013, pp. 140 - 146.
- [11] L. Bourgois, « Estimation de la dose extrémité due à une contamination par un radionucléide émetteur  $\beta$ : l'équivalent de dose est-il un bon estimateur de la grandeur de protection? », *Radioprotection*, Vol. 46, n° 2, pp.175-187, 2011.
- [12] W. G. Cross, « The Distribution of Absorbed Energy from a Point Beta Source », *Canadian Journal of Physics*, Vol. 45, No 6, 1967, pp. 2021-2040.
- [13] W. G. Cross, « Variation of Beta Dose Attenuation in Different Media », *Physics in Medicine & Biology*, Vol. 13, No. 4, 1968, pp. 611-618.
- [14] R. Loevlinger, « The Dosimetry of Beta Sources in Tissue the Point Source Function », *Radiology*, 66 (1), 1956, pp. 55-62.
- [15] W. G. Cross, N.O. Freedman, P. Y. Wong, *Tables of Beta-Ray Dose Distributions in Water*, AECL-10521, Chalk River Laboratories, Ontario, Canada, 1992.
- [16] M. J. Berger, « Distribution of absorbed dose around point sources of electrons and beta particles in water and other media », *Journal of Nuclear Medicine*, NM/MIRD Pamphlet No.7, Supplement No 5, March 1971.
- [17] T. F. Gesell *et al.*, « Dosimetry of Hot Particles », *NCRP Report No. 130: Biological Effects and Exposure Limits for « Hot Particles »*, National Council on Radiation Protection and Measurements, NCRP 1999, pp. 16-38.
- [18] J. K. Shultis, R. E. Faw, *Radiation Shielding*, ANS, USA, 2000.
- [19] ICRU Report 35, *Radiation Dosimetry: Electron Beams with Energies between 1 and 50 MeV*, September 15, 1984.
- [20] S. Kitsos, C. M. Diop, A. Assad, J.-C. Nimal et P. Ridoux, « Improvement of Gamma-Ray  $S_n$  Transport Calculations Including Coherent and Incoherent Scatterings and Secondary Sources of Bremsstrahlung and Fluorescence: Determination of Gamma-Ray Buildup Factors », *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 123, 1996 - Issue 2, pp. 215-227.

## Annexe II : pouvoirs d'arrêt des particules $\alpha$ dans différents matériaux

Les **tableaux 17 à 20** et les **figures 15 à 18** ci-après reproduisent le comportement de ces différents pouvoirs d'arrêt en fonction de l'énergie de la particule  $\alpha$  dans différents matériaux : **eau, aluminium, uranium et oxyde de silicium ( $\text{SiO}_2$ )**. Dans ces tableaux, les parcours des particules ont été déterminés selon l'approche ***Continuous Slowing Down Approximation, CSDA*** qui consiste en une intégration numérique de l'expression (2.35) sur le parcours de la particule  $\alpha$ , supposé en ligne droite et sous l'hypothèse de son ralentissement continu.

■ Eau liquide

Tableau 17. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'une particule α dans l'eau en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 1 g.cm<sup>-3</sup>).<sup>40</sup>

Énergie <i>E</i>	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>
MeV	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,000E-03	1,337E+02	4,315E+01	1,769E+02	6,319E-06	6,319E-06
1,500E-03	1,638E+02	3,460E+01	1,984E+02	8,969E-06	8,969E-06
2,000E-03	1,891E+02	2,927E+01	2,184E+02	1,137E-05	1,137E-05
2,500E-03	2,114E+02	2,557E+01	2,370E+02	1,357E-05	1,357E-05
3,000E-03	2,316E+02	2,281E+01	2,544E+02	1,560E-05	1,560E-05
4,000E-03	2,675E+02	1,894E+01	2,864E+02	1,930E-05	1,930E-05
5,000E-03	2,990E+02	1,631E+01	3,153E+02	2,262E-05	2,262E-05
6,000E-03	3,276E+02	1,439E+01	3,420E+02	2,567E-05	2,567E-05
7,000E-03	3,538E+02	1,292E+01	3,667E+02	2,849E-05	2,849E-05
8,000E-03	3,782E+02	1,175E+01	3,900E+02	3,113E-05	3,113E-05
9,000E-03	4,012E+02	1,080E+01	4,120E+02	3,363E-05	3,363E-05
1,000E-02	4,229E+02	1,000E+01	4,329E+02	3,599E-05	3,599E-05
1,250E-02	4,660E+02	8,485E+00	4,745E+02	4,150E-05	4,150E-05
1,500E-02	5,036E+02	7,400E+00	5,110E+02	4,657E-05	4,657E-05
1,750E-02	5,372E+02	6,581E+00	5,437E+02	5,131E-05	5,131E-05
2,000E-02	5,673E+02	5,939E+00	5,733E+02	5,578E-05	5,578E-05
2,250E-02	5,946E+02	5,421E+00	6,001E+02	6,005E-05	6,005E-05
2,500E-02	6,195E+02	4,993E+00	6,245E+02	6,413E-05	6,413E-05
2,750E-02	6,421E+02	4,633E+00	6,467E+02	6,806E-05	6,806E-05
3,000E-02	6,628E+02	4,325E+00	6,671E+02	7,187E-05	7,187E-05
3,500E-02	6,989E+02	3,826E+00	7,028E+02	7,916E-05	7,916E-05
4,000E-02	7,290E+02	3,437E+00	7,324E+02	8,613E-05	8,613E-05
4,500E-02	7,538E+02	3,126E+00	7,569E+02	9,284E-05	9,284E-05
5,000E-02	7,740E+02	2,870E+00	7,768E+02	9,935E-05	9,935E-05
5,500E-02	7,901E+02	2,655E+00	7,927E+02	1,057E-04	1,057E-04
6,000E-02	8,026E+02	2,473E+00	8,050E+02	1,120E-04	1,120E-04
6,500E-02	8,119E+02	2,316E+00	8,142E+02	1,182E-04	1,182E-04
7,000E-02	8,183E+02	2,178E+00	8,205E+02	1,243E-04	1,243E-04
7,500E-02	8,223E+02	2,058E+00	8,243E+02	1,303E-04	1,303E-04
8,000E-02	8,241E+02	1,951E+00	8,260E+02	1,364E-04	1,364E-04
8,500E-02	8,239E+02	1,855E+00	8,258E+02	1,425E-04	1,425E-04
9,000E-02	8,222E+02	1,769E+00	8,239E+02	1,485E-04	1,485E-04
9,500E-02	8,190E+02	1,691E+00	8,206E+02	1,546E-04	1,546E-04
1,000E-01	8,145E+02	1,620E+00	8,161E+02	1,607E-04	1,607E-04
1,250E-01	7,801E+02	1,343E+00	7,814E+02	1,920E-04	1,920E-04
1,500E-01	7,360E+02	1,152E+00	7,371E+02	2,249E-04	2,249E-04
1,750E-01	6,959E+02	1,010E+00	6,969E+02	2,598E-04	2,598E-04
2,000E-01	6,604E+02	9,016E-01	6,613E+02	2,966E-04	2,966E-04
2,250E-01	6,286E+02	8,152E-01	6,294E+02	3,354E-04	3,354E-04
2,500E-01	5,999E+02	7,447E-01	6,006E+02	3,761E-04	3,761E-04
2,750E-01	5,737E+02	6,855E-01	5,744E+02	4,186E-04	4,186E-04
3,000E-01	5,497E+02	6,351E-01	5,504E+02	4,631E-04	4,631E-04
3,500E-01	5,075E+02	5,545E-01	5,080E+02	5,577E-04	5,577E-04
4,000E-01	4,714E+02	4,928E-01	4,719E+02	6,599E-04	6,599E-04
4,500E-01	4,401E+02	4,439E-01	4,406E+02	7,697E-04	7,697E-04
5,000E-01	4,128E+02	4,043E-01	4,132E+02	8,869E-04	8,869E-04
5,500E-01	3,888E+02	3,715E-01	3,891E+02	1,012E-03	1,012E-03
6,000E-01	3,676E+02	3,438E-01	3,680E+02	1,144E-03	1,144E-03
6,500E-01	3,489E+02	3,201E-01	3,492E+02	1,283E-03	1,283E-03
7,000E-01	3,322E+02	2,996E-01	3,325E+02	1,430E-03	1,430E-03
7,500E-01	3,172E+02	2,817E-01	3,175E+02	1,584E-03	1,584E-03
8,000E-01	3,037E+02	2,658E-01	3,039E+02	1,745E-03	1,745E-03
8,500E-01	2,914E+02	2,516E-01	2,917E+02	1,913E-03	1,913E-03

<sup>40</sup> Source : Base de données ASTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ASTAR.html>.

9,000E-01	2,803E+02	2,390E-01	2,805E+02	2,088E-03	2,088E-03
9,500E-01	2,700E+02	2,276E-01	2,702E+02	2,270E-03	2,270E-03
1,000E+00	2,606E+02	2,173E-01	2,608E+02	2,458E-03	2,458E-03
1,250E+00	2,228E+02	1,775E-01	2,229E+02	3,499E-03	3,499E-03
1,500E+00	1,955E+02	1,504E-01	1,957E+02	4,698E-03	4,698E-03
1,750E+00	1,748E+02	1,307E-01	1,749E+02	6,052E-03	6,052E-03
2,000E+00	1,585E+02	1,157E-01	1,586E+02	7,555E-03	7,555E-03
2,250E+00	1,453E+02	1,038E-01	1,454E+02	9,203E-03	9,203E-03
2,500E+00	1,343E+02	9,428E-02	1,344E+02	1,099E-02	1,099E-02
2,750E+00	1,250E+02	8,637E-02	1,251E+02	1,292E-02	1,292E-02
3,000E+00	1,171E+02	7,972E-02	1,172E+02	1,499E-02	1,499E-02
3,500E+00	1,041E+02	6,916E-02	1,042E+02	1,952E-02	1,952E-02
4,000E+00	9,398E+01	6,113E-02	9,404E+01	2,458E-02	2,458E-02
4,500E+00	8,580E+01	5,481E-02	8,586E+01	3,015E-02	3,015E-02
5,000E+00	7,906E+01	4,970E-02	7,911E+01	3,623E-02	3,623E-02
5,500E+00	7,339E+01	4,549E-02	7,343E+01	4,279E-02	4,279E-02
6,000E+00	6,854E+01	4,195E-02	6,858E+01	4,984E-02	4,984E-02
6,500E+00	6,434E+01	3,894E-02	6,438E+01	5,737E-02	5,737E-02
7,000E+00	6,068E+01	3,634E-02	6,071E+01	6,537E-02	6,537E-02
7,500E+00	5,744E+01	3,407E-02	5,747E+01	7,384E-02	7,384E-02
8,000E+00	5,456E+01	3,208E-02	5,460E+01	8,277E-02	8,277E-02
8,500E+00	5,199E+01	3,031E-02	5,202E+01	9,215E-02	9,215E-02
9,000E+00	4,966E+01	2,873E-02	4,969E+01	1,020E-01	1,020E-01
9,500E+00	4,756E+01	2,731E-02	4,759E+01	1,123E-01	1,123E-01
1,000E+01	4,564E+01	2,603E-02	4,567E+01	1,230E-01	1,230E-01

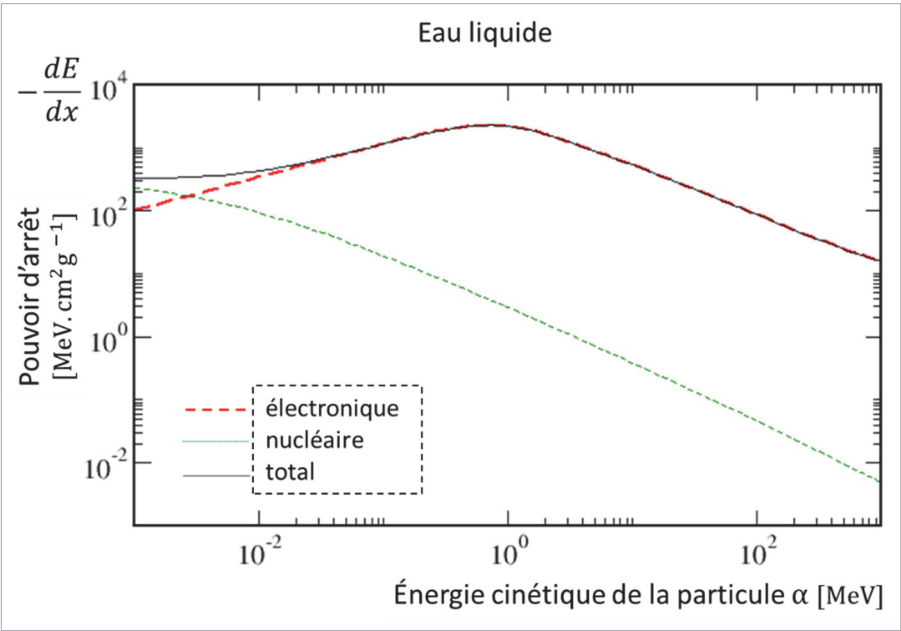


Figure 15. Pouvoirs d’arrêt d’une particule alpha dans l’eau liquide en fonction de son énergie cinétique.

■ Aluminium

Tableau 18. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'une particule  $\alpha$  dans l'aluminium en fonction de son énergie cinétique (masse volumique  $2.7 \text{ g cm}^{-3}$ ).<sup>41</sup>

Énergie $E$	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total $p(E)$	Parcours CSDA $r_0$	Parcours CSDA $r_0$
MeV	MeV. cm <sup>2</sup> /g	MeV. cm <sup>2</sup> /g	MeV. cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,00E-03	9,24E+01	1,20E+01	1,04E+02	1,47E-05	5,45E-06
1,50E-03	1,13E+02	1,07E+01	1,24E+02	1,91E-05	7,06E-06
2,00E-03	1,31E+02	9,75E+00	1,40E+02	2,29E-05	8,47E-06
2,50E-03	1,46E+02	8,97E+00	1,55E+02	2,62E-05	9,72E-06
3,00E-03	1,60E+02	8,32E+00	1,68E+02	2,93E-05	1,09E-05
4,00E-03	1,85E+02	7,32E+00	1,92E+02	3,49E-05	1,29E-05
5,00E-03	2,07E+02	6,57E+00	2,13E+02	3,98E-05	1,48E-05
6,00E-03	2,26E+02	5,98E+00	2,32E+02	4,43E-05	1,64E-05
7,00E-03	2,44E+02	5,51E+00	2,50E+02	4,85E-05	1,80E-05
8,00E-03	2,61E+02	5,11E+00	2,66E+02	5,23E-05	1,94E-05
9,00E-03	2,77E+02	4,78E+00	2,82E+02	5,60E-05	2,07E-05
1,00E-02	2,92E+02	4,49E+00	2,97E+02	5,94E-05	2,20E-05
1,25E-02	3,21E+02	3,92E+00	3,25E+02	6,75E-05	2,50E-05
1,50E-02	3,45E+02	3,49E+00	3,48E+02	7,49E-05	2,77E-05
1,75E-02	3,66E+02	3,16E+00	3,69E+02	8,19E-05	3,03E-05
2,00E-02	3,84E+02	2,89E+00	3,87E+02	8,85E-05	3,28E-05
2,25E-02	4,00E+02	2,67E+00	4,02E+02	9,48E-05	3,51E-05
2,50E-02	4,13E+02	2,48E+00	4,16E+02	1,01E-04	3,74E-05
2,75E-02	4,25E+02	2,32E+00	4,27E+02	1,07E-04	3,96E-05
3,00E-02	4,35E+02	2,18E+00	4,37E+02	1,13E-04	4,17E-05
3,50E-02	4,51E+02	1,96E+00	4,53E+02	1,24E-04	4,59E-05
4,00E-02	4,62E+02	1,77E+00	4,64E+02	1,35E-04	4,99E-05
4,50E-02	4,69E+02	1,63E+00	4,71E+02	1,46E-04	5,39E-05
5,00E-02	4,73E+02	1,50E+00	4,75E+02	1,56E-04	5,78E-05
5,50E-02	4,75E+02	1,40E+00	4,77E+02	1,67E-04	6,17E-05
6,00E-02	4,75E+02	1,31E+00	4,76E+02	1,77E-04	6,56E-05
6,50E-02	4,74E+02	1,23E+00	4,75E+02	1,88E-04	6,95E-05
7,00E-02	4,71E+02	1,17E+00	4,72E+02	1,98E-04	7,34E-05
7,50E-02	4,68E+02	1,11E+00	4,69E+02	2,09E-04	7,73E-05
8,00E-02	4,64E+02	1,05E+00	4,65E+02	2,19E-04	8,13E-05
8,50E-02	4,60E+02	1,00E+00	4,61E+02	2,30E-04	8,53E-05
9,00E-02	4,56E+02	9,60E-01	4,57E+02	2,41E-04	8,93E-05
9,50E-02	4,51E+02	9,20E-01	4,52E+02	2,52E-04	9,34E-05
1,00E-01	4,47E+02	8,84E-01	4,48E+02	2,63E-04	9,75E-05
1,25E-01	4,25E+02	7,41E-01	4,25E+02	3,21E-04	1,19E-04
1,50E-01	4,05E+02	6,40E-01	4,05E+02	3,81E-04	1,41E-04
1,75E-01	3,87E+02	5,65E-01	3,87E+02	4,44E-04	1,64E-04
2,00E-01	3,71E+02	5,07E-01	3,72E+02	5,10E-04	1,89E-04
2,25E-01	3,57E+02	4,60E-01	3,57E+02	5,79E-04	2,14E-04
2,50E-01	3,44E+02	4,22E-01	3,44E+02	6,50E-04	2,41E-04
2,75E-01	3,32E+02	3,90E-01	3,33E+02	7,24E-04	2,68E-04
3,00E-01	3,22E+02	3,63E-01	3,22E+02	8,00E-04	2,96E-04
3,50E-01	3,02E+02	3,20E-01	3,02E+02	9,61E-04	3,56E-04
4,00E-01	2,84E+02	2,86E-01	2,84E+02	1,13E-03	4,19E-04
4,50E-01	2,69E+02	2,59E-01	2,69E+02	1,31E-03	4,86E-04
5,00E-01	2,55E+02	2,37E-01	2,55E+02	1,50E-03	5,57E-04
5,50E-01	2,43E+02	2,19E-01	2,43E+02	1,70E-03	6,31E-04
6,00E-01	2,31E+02	2,03E-01	2,32E+02	1,92E-03	7,10E-04
6,50E-01	2,22E+02	1,90E-01	2,22E+02	2,14E-03	7,91E-04
7,00E-01	2,12E+02	1,78E-01	2,13E+02	2,37E-03	8,77E-04
7,50E-01	2,04E+02	1,68E-01	2,04E+02	2,61E-03	9,66E-04
8,00E-01	1,97E+02	1,59E-01	1,97E+02	2,86E-03	1,06E-03

<sup>41</sup> Source : Base de données ASTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ASTAR.html>.

8,50E-01	1,90E+02	1,51E-01	1,90E+02	3,11E-03	1,15E-03
9,00E-01	1,83E+02	1,44E-01	1,84E+02	3,38E-03	1,25E-03
9,50E-01	1,77E+02	1,37E-01	1,78E+02	3,66E-03	1,36E-03
1,00E+00	1,72E+02	1,31E-01	1,72E+02	3,95E-03	1,46E-03
1,25E+00	1,49E+02	1,08E-01	1,50E+02	5,51E-03	2,04E-03
1,50E+00	1,33E+02	9,23E-02	1,33E+02	7,29E-03	2,70E-03
1,75E+00	1,20E+02	8,07E-02	1,20E+02	9,27E-03	3,44E-03
2,00E+00	1,09E+02	7,17E-02	1,10E+02	1,15E-02	4,25E-03
2,25E+00	1,01E+02	6,47E-02	1,01E+02	1,38E-02	5,13E-03
2,50E+00	9,38E+01	5,89E-02	9,38E+01	1,64E-02	6,08E-03
2,75E+00	8,77E+01	5,41E-02	8,78E+01	1,92E-02	7,10E-03
3,00E+00	8,25E+01	5,01E-02	8,25E+01	2,21E-02	8,19E-03
3,50E+00	7,38E+01	4,37E-02	7,39E+01	2,85E-02	1,06E-02
4,00E+00	6,70E+01	3,88E-02	6,71E+01	3,56E-02	1,32E-02
4,50E+00	6,15E+01	3,49E-02	6,15E+01	4,34E-02	1,61E-02
5,00E+00	5,69E+01	3,17E-02	5,70E+01	5,19E-02	1,92E-02
5,50E+00	5,30E+01	2,91E-02	5,31E+01	6,10E-02	2,26E-02
6,00E+00	4,97E+01	2,69E-02	4,97E+01	7,07E-02	2,62E-02
6,50E+00	4,68E+01	2,51E-02	4,68E+01	8,11E-02	3,00E-02
7,00E+00	4,43E+01	2,34E-02	4,43E+01	9,21E-02	3,41E-02
7,50E+00	4,20E+01	2,20E-02	4,21E+01	1,04E-01	3,84E-02
8,00E+00	4,00E+01	2,08E-02	4,00E+01	1,16E-01	4,29E-02
8,50E+00	3,82E+01	1,96E-02	3,82E+01	1,29E-01	4,76E-02
9,00E+00	3,66E+01	1,86E-02	3,66E+01	1,42E-01	5,26E-02
9,50E+00	3,51E+01	1,77E-02	3,51E+01	1,56E-01	5,78E-02
1,00E+01	3,38E+01	1,69E-02	3,38E+01	1,71E-01	6,32E-02

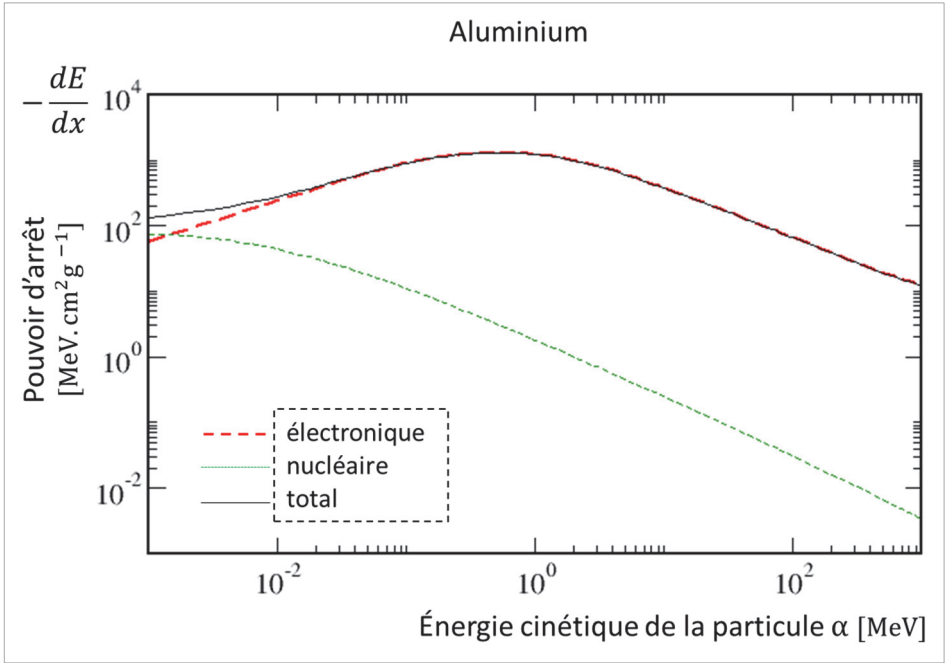


Figure 16. Pouvoirs d'arrêt d'une particule alpha dans l'aluminium en fonction de son énergie cinétique.

■ Uranium

Tableau 19 : Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'une particule  $\alpha$  dans de l'uranium en fonction de son énergie cinétique (masse volumique  $18.95 \text{ g cm}^{-3}$ ).<sup>42</sup>

Énergie <i>E</i>	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>
MeV	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,000E-03	1,838E+01	6,695E-01	1,905E+01	9,290E-05	4,90E-06
1,500E-03	2,251E+01	6,904E-01	2,320E+01	1,164E-04	6,14E-06
2,000E-03	2,599E+01	6,984E-01	2,669E+01	1,365E-04	7,20E-06
2,500E-03	2,906E+01	7,005E-01	2,976E+01	1,542E-04	8,14E-06
3,000E-03	3,183E+01	6,995E-01	3,253E+01	1,702E-04	8,98E-06
4,000E-03	3,675E+01	6,922E-01	3,745E+01	1,988E-04	1,05E-05
5,000E-03	4,109E+01	6,817E-01	4,177E+01	2,241E-04	1,18E-05
6,000E-03	4,501E+01	6,699E-01	4,568E+01	2,469E-04	1,30E-05
7,000E-03	4,862E+01	6,575E-01	4,928E+01	2,680E-04	1,41E-05
8,000E-03	5,198E+01	6,451E-01	5,262E+01	2,876E-04	1,52E-05
9,000E-03	5,513E+01	6,328E-01	5,576E+01	3,061E-04	1,62E-05
1,000E-02	5,811E+01	6,208E-01	5,873E+01	3,235E-04	1,71E-05
1,250E-02	6,419E+01	5,926E-01	6,479E+01	3,640E-04	1,92E-05
1,500E-02	6,957E+01	5,669E-01	7,014E+01	4,010E-04	2,12E-05
1,750E-02	7,444E+01	5,436E-01	7,499E+01	4,355E-04	2,30E-05
2,000E-02	7,890E+01	5,224E-01	7,942E+01	4,679E-04	2,47E-05
2,250E-02	8,302E+01	5,032E-01	8,352E+01	4,985E-04	2,63E-05
2,500E-02	8,684E+01	4,856E-01	8,733E+01	5,278E-04	2,79E-05
2,750E-02	9,042E+01	4,694E-01	9,089E+01	5,559E-04	2,93E-05
3,000E-02	9,378E+01	4,545E-01	9,423E+01	5,829E-04	3,08E-05
3,500E-02	9,992E+01	4,279E-01	1,003E+02	6,342E-04	3,35E-05
4,000E-02	1,054E+02	4,049E-01	1,058E+02	6,827E-04	3,60E-05
4,500E-02	1,103E+02	3,847E-01	1,107E+02	7,289E-04	3,85E-05
5,000E-02	1,148E+02	3,668E-01	1,151E+02	7,732E-04	4,08E-05
5,500E-02	1,188E+02	3,508E-01	1,191E+02	8,158E-04	4,31E-05
6,000E-02	1,224E+02	3,364E-01	1,227E+02	8,572E-04	4,52E-05
6,500E-02	1,257E+02	3,234E-01	1,260E+02	8,974E-04	4,74E-05
7,000E-02	1,286E+02	3,115E-01	1,289E+02	9,366E-04	4,94E-05
7,500E-02	1,312E+02	3,006E-01	1,315E+02	9,750E-04	5,15E-05
8,000E-02	1,335E+02	2,906E-01	1,338E+02	1,013E-03	5,35E-05
8,500E-02	1,356E+02	2,813E-01	1,359E+02	1,050E-03	5,54E-05
9,000E-02	1,374E+02	2,727E-01	1,377E+02	1,086E-03	5,73E-05
9,500E-02	1,390E+02	2,647E-01	1,393E+02	1,122E-03	5,92E-05
1,000E-01	1,404E+02	2,573E-01	1,406E+02	1,158E-03	6,11E-05
1,250E-01	1,444E+02	2,263E-01	1,446E+02	1,333E-03	7,03E-05
1,500E-01	1,448E+02	2,028E-01	1,450E+02	1,505E-03	7,94E-05
1,750E-01	1,427E+02	1,843E-01	1,429E+02	1,679E-03	8,86E-05
2,000E-01	1,391E+02	1,693E-01	1,393E+02	1,856E-03	9,79E-05
2,250E-01	1,345E+02	1,568E-01	1,347E+02	2,038E-03	1,08E-04
2,500E-01	1,296E+02	1,462E-01	1,297E+02	2,227E-03	1,18E-04
2,750E-01	1,242E+02	1,372E-01	1,243E+02	2,424E-03	1,28E-04
3,000E-01	1,188E+02	1,293E-01	1,189E+02	2,630E-03	1,39E-04
3,500E-01	1,087E+02	1,162E-01	1,088E+02	3,070E-03	1,62E-04
4,000E-01	1,000E+02	1,058E-01	1,001E+02	3,549E-03	1,87E-04
4,500E-01	9,278E+01	9,722E-02	9,288E+01	4,068E-03	2,15E-04
5,000E-01	8,672E+01	9,009E-02	8,681E+01	4,625E-03	2,44E-04
5,500E-01	8,164E+01	8,402E-02	8,172E+01	5,219E-03	2,75E-04
6,000E-01	7,735E+01	7,880E-02	7,743E+01	5,848E-03	3,09E-04
6,500E-01	7,371E+01	7,425E-02	7,379E+01	6,510E-03	3,44E-04
7,000E-01	7,060E+01	7,024E-02	7,067E+01	7,203E-03	3,80E-04
7,500E-01	6,792E+01	6,669E-02	6,799E+01	7,925E-03	4,18E-04
8,000E-01	6,559E+01	6,351E-02	6,565E+01	8,673E-03	4,58E-04
8,500E-01	6,356E+01	6,064E-02	6,362E+01	9,447E-03	4,99E-04
9,000E-01	6,177E+01	5,805E-02	6,183E+01	1,024E-02	5,40E-04

<sup>42</sup> Source : Base de données ASTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ASTAR.html>.

9,500E-01	6,019E+01	5,569E-02	6,024E+01	1,106E-02	5,84E-04
1,000E+00	5,878E+01	5,353E-02	5,884E+01	1,190E-02	6,28E-04
1,250E+00	5,333E+01	4,500E-02	5,338E+01	1,638E-02	8,64E-04
1,500E+00	4,908E+01	3,897E-02	4,912E+01	2,126E-02	1,12E-03
1,750E+00	4,562E+01	3,447E-02	4,566E+01	2,655E-02	1,40E-03
2,000E+00	4,273E+01	3,097E-02	4,276E+01	3,221E-02	1,70E-03
2,250E+00	4,028E+01	2,816E-02	4,031E+01	3,824E-02	2,02E-03
2,500E+00	3,815E+01	2,585E-02	3,818E+01	4,461E-02	2,35E-03
2,750E+00	3,629E+01	2,392E-02	3,631E+01	5,133E-02	2,71E-03
3,000E+00	3,463E+01	2,228E-02	3,465E+01	5,838E-02	3,08E-03
3,500E+00	3,182E+01	1,962E-02	3,184E+01	7,345E-02	3,88E-03
4,000E+00	2,952E+01	1,757E-02	2,954E+01	8,977E-02	4,74E-03
4,500E+00	2,759E+01	1,593E-02	2,760E+01	1,073E-01	5,66E-03
5,000E+00	2,594E+01	1,459E-02	2,595E+01	1,260E-01	6,65E-03
5,500E+00	2,451E+01	1,347E-02	2,452E+01	1,458E-01	7,69E-03
6,000E+00	2,326E+01	1,252E-02	2,327E+01	1,668E-01	8,80E-03
6,500E+00	2,215E+01	1,170E-02	2,216E+01	1,888E-01	9,96E-03
7,000E+00	2,116E+01	1,099E-02	2,117E+01	2,119E-01	1,12E-02
7,500E+00	2,027E+01	1,037E-02	2,028E+01	2,360E-01	1,25E-02
8,000E+00	1,947E+01	9,819E-03	1,948E+01	2,612E-01	1,38E-02
8,500E+00	1,874E+01	9,326E-03	1,875E+01	2,873E-01	1,52E-02
9,000E+00	1,807E+01	8,882E-03	1,808E+01	3,145E-01	1,66E-02
9,500E+00	1,746E+01	8,481E-03	1,747E+01	3,426E-01	1,81E-02
1,000E+01	1,689E+01	8,117E-03	1,690E+01	3,718E-01	1,96E-02

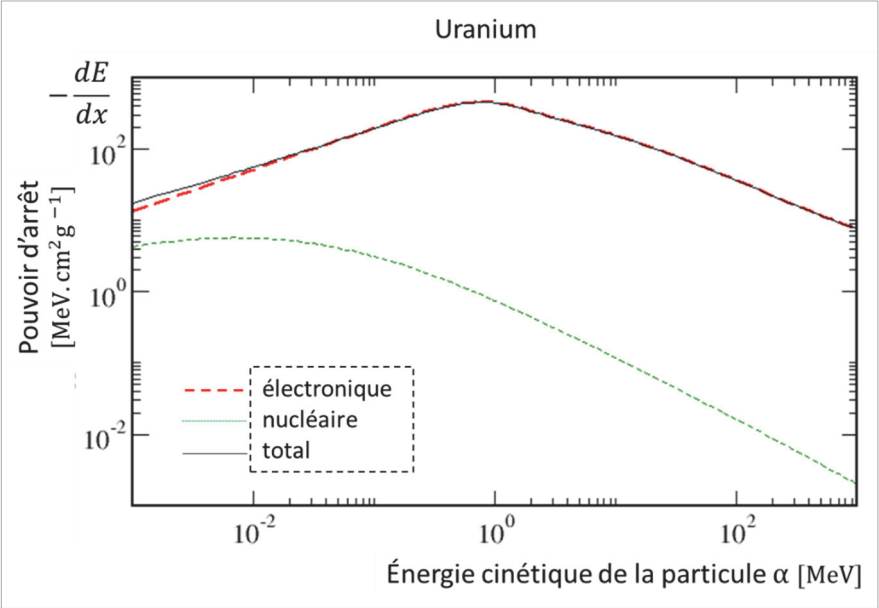


Figure 17. Pouvoirs d'arrêt d'une particule alpha dans de l'uranium en fonction de son énergie cinétique.



▪ Oxyde de silicium

Tableau 20. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'une particule  $\alpha$  dans de l'oxyde de silicium ( $\text{SiO}_2$ ) en fonction de son énergie cinétique (masse volumique  $2.32 \text{ g cm}^{-3}$ ).<sup>43</sup>

Énergie $E$	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total $p(E)$	Parcours CSDA $r_0$	Parcours CSDA $r_0$
MeV	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,000E-03	6,890E+01	1,008E+02	1,697E+02	7,311E-06	3,151E-06
1,500E-03	8,510E+01	9,637E+01	1,815E+02	1,015E-05	4,375E-06
2,000E-03	9,885E+01	9,173E+01	1,906E+02	1,283E-05	5,530E-06
2,500E-03	1,110E+02	8,740E+01	1,984E+02	1,540E-05	6,638E-06
3,000E-03	1,221E+02	8,346E+01	2,055E+02	1,788E-05	7,707E-06
4,000E-03	1,418E+02	7,668E+01	2,185E+02	2,259E-05	9,737E-06
5,000E-03	1,593E+02	7,109E+01	2,304E+02	2,705E-05	1,166E-05
6,000E-03	1,751E+02	6,639E+01	2,415E+02	3,129E-05	1,349E-05
7,000E-03	1,898E+02	6,239E+01	2,521E+02	3,534E-05	1,523E-05
8,000E-03	2,034E+02	5,892E+01	2,623E+02	3,923E-05	1,691E-05
9,000E-03	2,163E+02	5,589E+01	2,722E+02	4,297E-05	1,852E-05
1,000E-02	2,285E+02	5,320E+01	2,817E+02	4,658E-05	2,008E-05
1,250E-02	2,566E+02	4,766E+01	3,043E+02	5,511E-05	2,375E-05
1,500E-02	2,821E+02	4,331E+01	3,254E+02	6,305E-05	2,718E-05
1,750E-02	3,057E+02	3,980E+01	3,455E+02	7,051E-05	3,039E-05
2,000E-02	3,276E+02	3,689E+01	3,645E+02	7,755E-05	3,343E-05
2,250E-02	3,483E+02	3,442E+01	3,827E+02	8,424E-05	3,631E-05
2,500E-02	3,679E+02	3,231E+01	4,002E+02	9,063E-05	3,906E-05
2,750E-02	3,865E+02	3,048E+01	4,170E+02	9,675E-05	4,170E-05
3,000E-02	4,044E+02	2,887E+01	4,332E+02	1,026E-04	4,422E-05
3,500E-02	4,379E+02	2,616E+01	4,641E+02	1,138E-04	4,905E-05
4,000E-02	4,692E+02	2,397E+01	4,932E+02	1,242E-04	5,353E-05
4,500E-02	4,985E+02	2,216E+01	5,207E+02	1,341E-04	5,780E-05
5,000E-02	5,263E+02	2,063E+01	5,469E+02	1,434E-04	6,181E-05
5,500E-02	5,526E+02	1,932E+01	5,719E+02	1,524E-04	6,569E-05
6,000E-02	5,777E+02	1,818E+01	5,959E+02	1,609E-04	6,935E-05
6,500E-02	6,017E+02	1,718E+01	6,189E+02	1,692E-04	7,293E-05
7,000E-02	6,247E+02	1,630E+01	6,410E+02	1,771E-04	7,634E-05
7,500E-02	6,469E+02	1,552E+01	6,624E+02	1,848E-04	7,966E-05
8,000E-02	6,682E+02	1,481E+01	6,830E+02	1,922E-04	8,284E-05
8,500E-02	6,888E+02	1,417E+01	7,030E+02	1,994E-04	8,595E-05
9,000E-02	7,087E+02	1,359E+01	7,223E+02	2,065E-04	8,901E-05
9,500E-02	7,280E+02	1,306E+01	7,411E+02	2,133E-04	9,194E-05
1,000E-01	7,467E+02	1,258E+01	7,593E+02	2,200E-04	9,483E-05
1,250E-01	8,322E+02	1,064E+01	8,428E+02	2,512E-04	1,083E-04
1,500E-01	9,068E+02	9,262E+00	9,161E+02	2,796E-04	1,205E-04
1,750E-01	9,726E+02	8,224E+00	9,809E+02	3,059E-04	1,319E-04
2,000E-01	1,031E+03	7,412E+00	1,038E+03	3,307E-04	1,425E-04
2,250E-01	1,083E+03	6,757E+00	1,090E+03	3,542E-04	1,527E-04
2,500E-01	1,129E+03	6,217E+00	1,135E+03	3,766E-04	1,623E-04
2,750E-01	1,170E+03	5,763E+00	1,176E+03	3,983E-04	1,717E-04
3,000E-01	1,207E+03	5,376E+00	1,212E+03	4,192E-04	1,807E-04
3,500E-01	1,268E+03	4,749E+00	1,272E+03	4,594E-04	1,980E-04
4,000E-01	1,315E+03	4,262E+00	1,319E+03	4,980E-04	2,147E-04
4,500E-01	1,351E+03	3,872E+00	1,355E+03	5,353E-04	2,307E-04
5,000E-01	1,377E+03	3,552E+00	1,381E+03	5,719E-04	2,465E-04
5,500E-01	1,396E+03	3,284E+00	1,399E+03	6,078E-04	2,620E-04
6,000E-01	1,409E+03	3,057E+00	1,412E+03	6,434E-04	2,773E-04
6,500E-01	1,417E+03	2,861E+00	1,420E+03	6,787E-04	2,925E-04
7,000E-01	1,421E+03	2,690E+00	1,423E+03	7,139E-04	3,077E-04
7,500E-01	1,421E+03	2,540E+00	1,424E+03	7,490E-04	3,228E-04
8,000E-01	1,419E+03	2,407E+00	1,421E+03	7,841E-04	3,380E-04
8,500E-01	1,414E+03	2,288E+00	1,416E+03	8,194E-04	3,532E-04
9,000E-01	1,406E+03	2,181E+00	1,408E+03	8,548E-04	3,684E-04

<sup>43</sup> Source : Base de données ASTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ASTAR.html>.

9,500E-01	1,397E+03	2,084E+00	1,400E+03	8,904E-04	3,838E-04
1,000E+00	1,387E+03	1,996E+00	1,389E+03	9,263E-04	3,993E-04
1,250E+00	1,349E+03	1,653E+00	1,351E+03	1,109E-03	4,780E-04
1,500E+00	1,301E+03	1,416E+00	1,302E+03	1,297E-03	5,591E-04
1,750E+00	1,237E+03	1,241E+00	1,238E+03	1,494E-03	6,440E-04
2,000E+00	1,163E+03	1,107E+00	1,164E+03	1,702E-03	7,336E-04
2,250E+00	1,087E+03	1,001E+00	1,088E+03	1,924E-03	8,293E-04
2,500E+00	1,021E+03	9,138E-01	1,022E+03	2,161E-03	9,315E-04
2,750E+00	9,640E+02	8,416E-01	9,648E+02	2,413E-03	1,040E-03
3,000E+00	9,137E+02	7,805E-01	9,145E+02	2,680E-03	1,155E-03
3,500E+00	8,294E+02	6,828E-01	8,301E+02	3,254E-03	1,403E-03
4,000E+00	7,622E+02	6,079E-01	7,628E+02	3,883E-03	1,674E-03
4,500E+00	7,063E+02	5,485E-01	7,068E+02	4,565E-03	1,968E-03
5,000E+00	6,590E+02	5,002E-01	6,595E+02	5,298E-03	2,284E-03
5,500E+00	6,184E+02	4,601E-01	6,189E+02	6,081E-03	2,621E-03
6,000E+00	5,833E+02	4,263E-01	5,837E+02	6,913E-03	2,980E-03
6,500E+00	5,523E+02	3,973E-01	5,527E+02	7,794E-03	3,359E-03
7,000E+00	5,249E+02	3,722E-01	5,252E+02	8,722E-03	3,759E-03
7,500E+00	5,004E+02	3,502E-01	5,007E+02	9,697E-03	4,180E-03
8,000E+00	4,784E+02	3,308E-01	4,787E+02	1,072E-02	4,621E-03
8,500E+00	4,585E+02	3,135E-01	4,588E+02	1,179E-02	5,082E-03
9,000E+00	4,404E+02	2,981E-01	4,407E+02	1,290E-02	5,560E-03
9,500E+00	4,239E+02	2,841E-01	4,241E+02	1,406E-02	6,060E-03
1,000E+01	4,087E+02	2,715E-01	4,089E+02	1,526E-02	6,578E-03

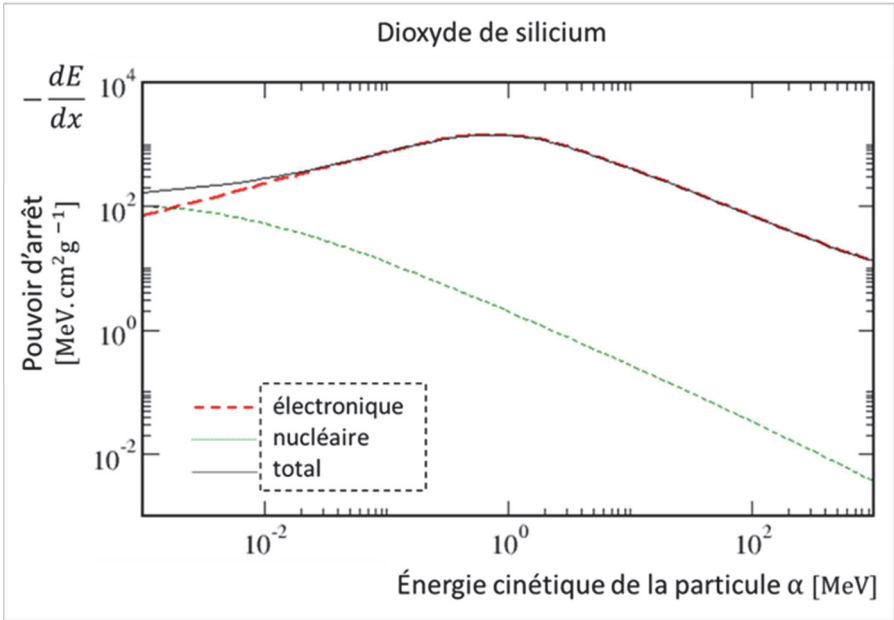


Figure 18. Pouvoirs d'arrêt d'une particule  $\alpha$  dans de l'oxyde de silicium en fonction de son énergie cinétique.

### **Annexe III : Pouvoirs d'arrêt des protons dans différents matériaux**

Les **tableaux 21 à 24** et les **figures 19 à 22** ci-après reproduisent le comportement de ces différents pouvoirs d'arrêt en fonction de l'énergie du proton dans différents matériaux : **eau, aluminium, uranium et oxyde de silicium ( $\text{SiO}_2$ )**.

Dans ces tableaux les parcours des protons ont été déterminés selon l'approche ***Continuous Slowing Down Approximation, CSDA*** qui consiste en une intégration numérique de l'expression (2.35) sur le parcours de du proton supposé en ligne droite et sous l'hypothèse de son ralentissement continu.

■ Eau liquide

Tableau 21. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'un proton dans l'eau, en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 1 g.cm<sup>-3</sup>).<sup>44</sup>

Énergie <i>E</i>	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>
MeV	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,000E-03	1,337E+02	4,315E+01	1,769E+02	6,319E-06	6,319E-06
1,500E-03	1,638E+02	3,460E+01	1,984E+02	8,969E-06	8,969E-06
2,000E-03	1,891E+02	2,927E+01	2,184E+02	1,137E-05	1,137E-05
2,500E-03	2,114E+02	2,557E+01	2,370E+02	1,357E-05	1,357E-05
3,000E-03	2,316E+02	2,281E+01	2,544E+02	1,560E-05	1,560E-05
4,000E-03	2,675E+02	1,894E+01	2,864E+02	1,930E-05	1,930E-05
5,000E-03	2,990E+02	1,631E+01	3,153E+02	2,262E-05	2,262E-05
6,000E-03	3,276E+02	1,439E+01	3,420E+02	2,567E-05	2,567E-05
7,000E-03	3,538E+02	1,292E+01	3,667E+02	2,849E-05	2,849E-05
8,000E-03	3,782E+02	1,175E+01	3,900E+02	3,113E-05	3,113E-05
9,000E-03	4,012E+02	1,080E+01	4,120E+02	3,363E-05	3,363E-05
1,000E-02	4,229E+02	1,000E+01	4,329E+02	3,599E-05	3,599E-05
1,250E-02	4,660E+02	8,485E+00	4,745E+02	4,150E-05	4,150E-05
1,500E-02	5,036E+02	7,400E+00	5,110E+02	4,657E-05	4,657E-05
1,750E-02	5,372E+02	6,581E+00	5,437E+02	5,131E-05	5,131E-05
2,000E-02	5,673E+02	5,939E+00	5,733E+02	5,578E-05	5,578E-05
2,250E-02	5,946E+02	5,421E+00	6,001E+02	6,005E-05	6,005E-05
2,500E-02	6,195E+02	4,993E+00	6,245E+02	6,413E-05	6,413E-05
2,750E-02	6,421E+02	4,633E+00	6,467E+02	6,806E-05	6,806E-05
3,000E-02	6,628E+02	4,325E+00	6,671E+02	7,187E-05	7,187E-05
3,500E-02	6,989E+02	3,826E+00	7,028E+02	7,916E-05	7,916E-05
4,000E-02	7,290E+02	3,437E+00	7,324E+02	8,613E-05	8,613E-05
4,500E-02	7,538E+02	3,126E+00	7,569E+02	9,284E-05	9,284E-05
5,000E-02	7,740E+02	2,870E+00	7,768E+02	9,935E-05	9,935E-05
5,500E-02	7,901E+02	2,655E+00	7,927E+02	1,057E-04	1,057E-04
6,000E-02	8,026E+02	2,473E+00	8,050E+02	1,120E-04	1,120E-04
6,500E-02	8,119E+02	2,316E+00	8,142E+02	1,182E-04	1,182E-04
7,000E-02	8,183E+02	2,178E+00	8,205E+02	1,243E-04	1,243E-04
7,500E-02	8,223E+02	2,058E+00	8,243E+02	1,303E-04	1,303E-04
8,000E-02	8,241E+02	1,951E+00	8,260E+02	1,364E-04	1,364E-04
8,500E-02	8,239E+02	1,855E+00	8,258E+02	1,425E-04	1,425E-04
9,000E-02	8,222E+02	1,769E+00	8,239E+02	1,485E-04	1,485E-04
9,500E-02	8,190E+02	1,691E+00	8,206E+02	1,546E-04	1,546E-04
1,000E-01	8,145E+02	1,620E+00	8,161E+02	1,607E-04	1,607E-04
1,250E-01	7,801E+02	1,343E+00	7,814E+02	1,920E-04	1,920E-04
1,500E-01	7,360E+02	1,152E+00	7,371E+02	2,249E-04	2,249E-04
1,750E-01	6,959E+02	1,010E+00	6,969E+02	2,598E-04	2,598E-04
2,000E-01	6,604E+02	9,016E-01	6,613E+02	2,966E-04	2,966E-04
2,250E-01	6,286E+02	8,152E-01	6,294E+02	3,354E-04	3,354E-04
2,500E-01	5,999E+02	7,447E-01	6,006E+02	3,761E-04	3,761E-04
2,750E-01	5,737E+02	6,855E-01	5,744E+02	4,186E-04	4,186E-04
3,000E-01	5,497E+02	6,351E-01	5,504E+02	4,631E-04	4,631E-04
3,500E-01	5,075E+02	5,545E-01	5,080E+02	5,577E-04	5,577E-04
4,000E-01	4,714E+02	4,928E-01	4,719E+02	6,599E-04	6,599E-04
4,500E-01	4,401E+02	4,439E-01	4,406E+02	7,697E-04	7,697E-04
5,000E-01	4,128E+02	4,043E-01	4,132E+02	8,869E-04	8,869E-04
5,500E-01	3,888E+02	3,715E-01	3,891E+02	1,012E-03	1,012E-03
6,000E-01	3,676E+02	3,438E-01	3,680E+02	1,144E-03	1,144E-03
6,500E-01	3,489E+02	3,201E-01	3,492E+02	1,283E-03	1,283E-03
7,000E-01	3,322E+02	2,996E-01	3,325E+02	1,430E-03	1,430E-03
7,500E-01	3,172E+02	2,817E-01	3,175E+02	1,584E-03	1,584E-03
8,000E-01	3,037E+02	2,658E-01	3,039E+02	1,745E-03	1,745E-03

<sup>44</sup> Source : base de données PSTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/PSTAR.html>.

8,500E-01	2,914E+02	2,516E-01	2,917E+02	1,913E-03	1,913E-03
9,000E-01	2,803E+02	2,390E-01	2,805E+02	2,088E-03	2,088E-03
9,500E-01	2,700E+02	2,276E-01	2,702E+02	2,270E-03	2,270E-03
1,000E+00	2,606E+02	2,173E-01	2,608E+02	2,458E-03	2,458E-03
1,250E+00	2,228E+02	1,775E-01	2,229E+02	3,499E-03	3,499E-03
1,500E+00	1,955E+02	1,504E-01	1,957E+02	4,698E-03	4,698E-03
1,750E+00	1,748E+02	1,307E-01	1,749E+02	6,052E-03	6,052E-03
2,000E+00	1,585E+02	1,157E-01	1,586E+02	7,555E-03	7,555E-03
2,250E+00	1,453E+02	1,038E-01	1,454E+02	9,203E-03	9,203E-03
2,500E+00	1,343E+02	9,428E-02	1,344E+02	1,099E-02	1,099E-02
2,750E+00	1,250E+02	8,637E-02	1,251E+02	1,292E-02	1,292E-02
3,000E+00	1,171E+02	7,972E-02	1,172E+02	1,499E-02	1,499E-02
3,500E+00	1,041E+02	6,916E-02	1,042E+02	1,952E-02	1,952E-02
4,000E+00	9,398E+01	6,113E-02	9,404E+01	2,458E-02	2,458E-02
4,500E+00	8,580E+01	5,481E-02	8,586E+01	3,015E-02	3,015E-02
5,000E+00	7,906E+01	4,970E-02	7,911E+01	3,623E-02	3,623E-02
5,500E+00	7,339E+01	4,549E-02	7,343E+01	4,279E-02	4,279E-02
6,000E+00	6,854E+01	4,195E-02	6,858E+01	4,984E-02	4,984E-02
6,500E+00	6,434E+01	3,894E-02	6,438E+01	5,737E-02	5,737E-02
7,000E+00	6,068E+01	3,634E-02	6,071E+01	6,537E-02	6,537E-02
7,500E+00	5,744E+01	3,407E-02	5,747E+01	7,384E-02	7,384E-02
8,000E+00	5,456E+01	3,208E-02	5,460E+01	8,277E-02	8,277E-02
8,500E+00	5,199E+01	3,031E-02	5,202E+01	9,215E-02	9,215E-02
9,000E+00	4,966E+01	2,873E-02	4,969E+01	1,020E-01	1,020E-01
9,500E+00	4,756E+01	2,731E-02	4,759E+01	1,123E-01	1,123E-01
1,000E+01	4,564E+01	2,603E-02	4,567E+01	1,230E-01	1,230E-01

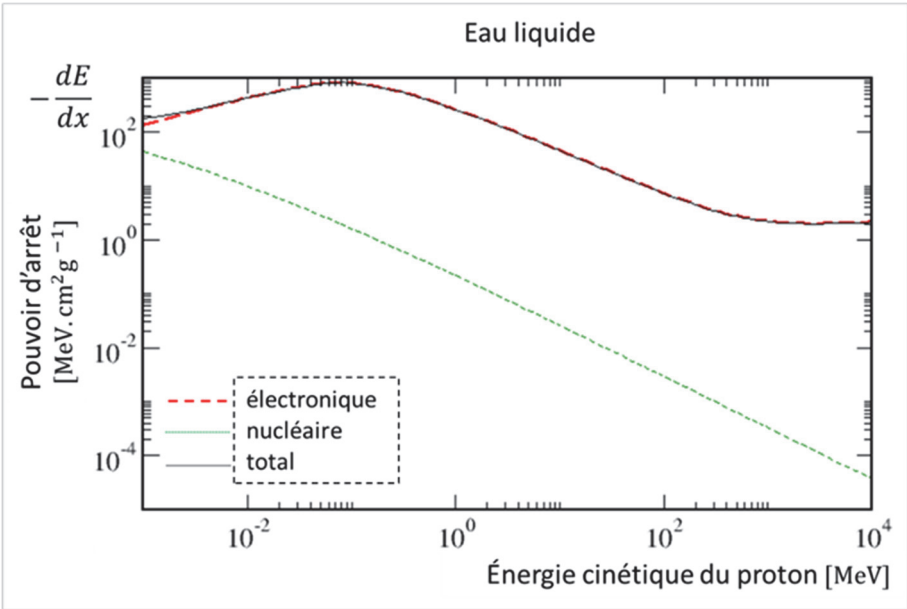


Figure 19. Pouvoirs d'arrêt d'un proton dans l'eau liquide en fonction de son énergie cinétique.

■ Aluminium

Tableau 22. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'un proton dans l'aluminium, en fonction de son énergie cinétique (masse volumique  $2.7 \text{ g cm}^{-3}$ ).<sup>45</sup>

Énergie <i>E</i>	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i>	Parcours CSDA $r_0$	Parcours CSDA $r_0$
MeV	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,00E-03	9,24E+01	1,20E+01	1,04E+02	1,47E-05	5,45E-06
1,50E-03	1,13E+02	1,07E+01	1,24E+02	1,91E-05	7,06E-06
2,00E-03	1,31E+02	9,75E+00	1,40E+02	2,29E-05	8,47E-06
2,50E-03	1,46E+02	8,97E+00	1,55E+02	2,62E-05	9,72E-06
3,00E-03	1,60E+02	8,32E+00	1,68E+02	2,93E-05	1,09E-05
4,00E-03	1,85E+02	7,32E+00	1,92E+02	3,49E-05	1,29E-05
5,00E-03	2,07E+02	6,57E+00	2,13E+02	3,98E-05	1,48E-05
6,00E-03	2,26E+02	5,98E+00	2,32E+02	4,43E-05	1,64E-05
7,00E-03	2,44E+02	5,51E+00	2,50E+02	4,85E-05	1,80E-05
8,00E-03	2,61E+02	5,11E+00	2,66E+02	5,23E-05	1,94E-05
9,00E-03	2,77E+02	4,78E+00	2,82E+02	5,60E-05	2,07E-05
1,00E-02	2,92E+02	4,49E+00	2,97E+02	5,94E-05	2,20E-05
1,25E-02	3,21E+02	3,92E+00	3,25E+02	6,75E-05	2,50E-05
1,50E-02	3,45E+02	3,49E+00	3,48E+02	7,49E-05	2,77E-05
1,75E-02	3,66E+02	3,16E+00	3,69E+02	8,19E-05	3,03E-05
2,00E-02	3,84E+02	2,89E+00	3,87E+02	8,85E-05	3,28E-05
2,25E-02	4,00E+02	2,67E+00	4,02E+02	9,48E-05	3,51E-05
2,50E-02	4,13E+02	2,48E+00	4,16E+02	1,01E-04	3,74E-05
2,75E-02	4,25E+02	2,32E+00	4,27E+02	1,07E-04	3,96E-05
3,00E-02	4,35E+02	2,18E+00	4,37E+02	1,13E-04	4,17E-05
3,50E-02	4,51E+02	1,96E+00	4,53E+02	1,24E-04	4,59E-05
4,00E-02	4,62E+02	1,77E+00	4,64E+02	1,35E-04	4,99E-05
4,50E-02	4,69E+02	1,63E+00	4,71E+02	1,46E-04	5,39E-05
5,00E-02	4,73E+02	1,50E+00	4,75E+02	1,56E-04	5,78E-05
5,50E-02	4,75E+02	1,40E+00	4,77E+02	1,67E-04	6,17E-05
6,00E-02	4,75E+02	1,31E+00	4,76E+02	1,77E-04	6,56E-05
6,50E-02	4,74E+02	1,23E+00	4,75E+02	1,88E-04	6,95E-05
7,00E-02	4,71E+02	1,17E+00	4,72E+02	1,98E-04	7,34E-05
7,50E-02	4,68E+02	1,11E+00	4,69E+02	2,09E-04	7,73E-05
8,00E-02	4,64E+02	1,05E+00	4,65E+02	2,19E-04	8,13E-05
8,50E-02	4,60E+02	1,00E+00	4,61E+02	2,30E-04	8,53E-05
9,00E-02	4,56E+02	9,60E-01	4,57E+02	2,41E-04	8,93E-05
9,50E-02	4,51E+02	9,20E-01	4,52E+02	2,52E-04	9,34E-05
1,00E-01	4,47E+02	8,84E-01	4,48E+02	2,63E-04	9,75E-05
1,25E-01	4,25E+02	7,41E-01	4,25E+02	3,21E-04	1,19E-04
1,50E-01	4,05E+02	6,40E-01	4,05E+02	3,81E-04	1,41E-04
1,75E-01	3,87E+02	5,65E-01	3,87E+02	4,44E-04	1,64E-04
2,00E-01	3,71E+02	5,07E-01	3,72E+02	5,10E-04	1,89E-04
2,25E-01	3,57E+02	4,60E-01	3,57E+02	5,79E-04	2,14E-04
2,50E-01	3,44E+02	4,22E-01	3,44E+02	6,50E-04	2,41E-04
2,75E-01	3,32E+02	3,90E-01	3,33E+02	7,24E-04	2,68E-04
3,00E-01	3,22E+02	3,63E-01	3,22E+02	8,00E-04	2,96E-04
3,50E-01	3,02E+02	3,20E-01	3,02E+02	9,61E-04	3,56E-04
4,00E-01	2,84E+02	2,86E-01	2,84E+02	1,13E-03	4,19E-04
4,50E-01	2,69E+02	2,59E-01	2,69E+02	1,31E-03	4,86E-04
5,00E-01	2,55E+02	2,37E-01	2,55E+02	1,50E-03	5,57E-04
5,50E-01	2,43E+02	2,19E-01	2,43E+02	1,70E-03	6,31E-04
6,00E-01	2,31E+02	2,03E-01	2,32E+02	1,92E-03	7,10E-04
6,50E-01	2,22E+02	1,90E-01	2,22E+02	2,14E-03	7,91E-04
7,00E-01	2,12E+02	1,78E-01	2,13E+02	2,37E-03	8,77E-04
7,50E-01	2,04E+02	1,68E-01	2,04E+02	2,61E-03	9,66E-04
8,00E-01	1,97E+02	1,59E-01	1,97E+02	2,86E-03	1,06E-03
8,50E-01	1,90E+02	1,51E-01	1,90E+02	3,11E-03	1,15E-03
9,00E-01	1,83E+02	1,44E-01	1,84E+02	3,38E-03	1,25E-03

<sup>45</sup> Source : base de données PSTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/PSTAR.html>.

9,50E-01	1,77E+02	1,37E-01	1,78E+02	3,66E-03	1,36E-03
1,00E+00	1,72E+02	1,31E-01	1,72E+02	3,95E-03	1,46E-03
1,25E+00	1,49E+02	1,08E-01	1,50E+02	5,51E-03	2,04E-03
1,50E+00	1,33E+02	9,23E-02	1,33E+02	7,29E-03	2,70E-03
1,75E+00	1,20E+02	8,07E-02	1,20E+02	9,27E-03	3,44E-03
2,00E+00	1,09E+02	7,17E-02	1,10E+02	1,15E-02	4,25E-03
2,25E+00	1,01E+02	6,47E-02	1,01E+02	1,38E-02	5,13E-03
2,50E+00	9,38E+01	5,89E-02	9,38E+01	1,64E-02	6,08E-03
2,75E+00	8,77E+01	5,41E-02	8,78E+01	1,92E-02	7,10E-03
3,00E+00	8,25E+01	5,01E-02	8,25E+01	2,21E-02	8,19E-03
3,50E+00	7,38E+01	4,37E-02	7,39E+01	2,85E-02	1,06E-02
4,00E+00	6,70E+01	3,88E-02	6,71E+01	3,56E-02	1,32E-02
4,50E+00	6,15E+01	3,49E-02	6,15E+01	4,34E-02	1,61E-02
5,00E+00	5,69E+01	3,17E-02	5,70E+01	5,19E-02	1,92E-02
5,50E+00	5,30E+01	2,91E-02	5,31E+01	6,10E-02	2,26E-02
6,00E+00	4,97E+01	2,69E-02	4,97E+01	7,07E-02	2,62E-02
6,50E+00	4,68E+01	2,51E-02	4,68E+01	8,11E-02	3,00E-02
7,00E+00	4,43E+01	2,34E-02	4,43E+01	9,21E-02	3,41E-02
7,50E+00	4,20E+01	2,20E-02	4,21E+01	1,04E-01	3,84E-02
8,00E+00	4,00E+01	2,08E-02	4,00E+01	1,16E-01	4,29E-02
8,50E+00	3,82E+01	1,96E-02	3,82E+01	1,29E-01	4,76E-02
9,00E+00	3,66E+01	1,86E-02	3,66E+01	1,42E-01	5,26E-02
9,50E+00	3,51E+01	1,77E-02	3,51E+01	1,56E-01	5,78E-02
1,00E+01	3,38E+01	1,69E-02	3,38E+01	1,71E-01	6,32E-02

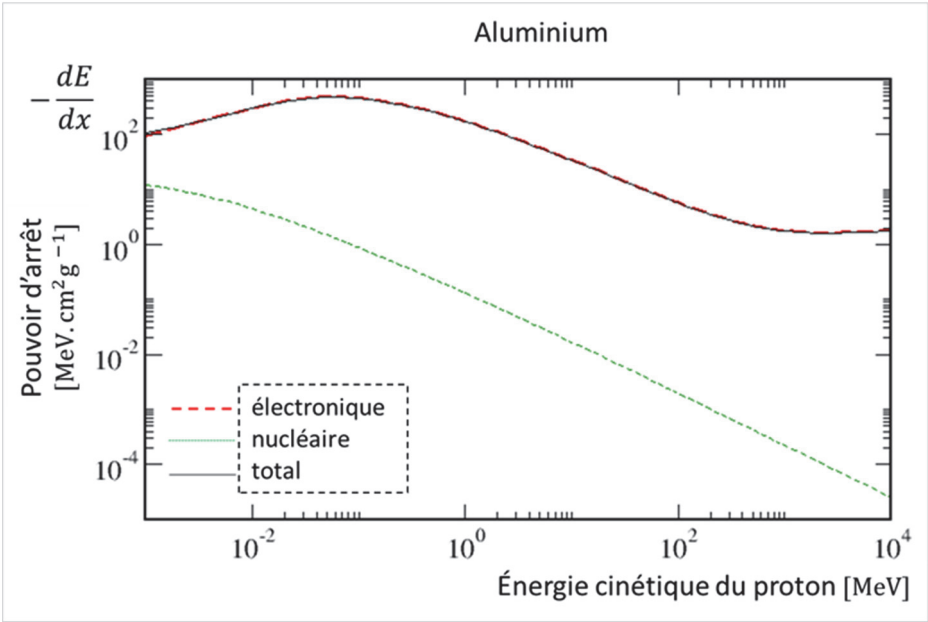


Figure 20. Pouvoirs d'arrêt d'un proton dans l'aluminium en fonction de son énergie cinétique.

▪ Uranium

Tableau 23. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'un proton dans de l'uranium en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 18.95 g cm<sup>-3</sup>)<sup>46</sup>.

Énergie <i>E</i>	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>
MeV	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	MeV.cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,000E-03	1,838E+01	6,695E-01	1,905E+01	9,290E-05	4,90E-06
1,500E-03	2,251E+01	6,904E-01	2,320E+01	1,164E-04	6,14E-06
2,000E-03	2,599E+01	6,984E-01	2,669E+01	1,365E-04	7,20E-06
2,500E-03	2,906E+01	7,005E-01	2,976E+01	1,542E-04	8,14E-06
3,000E-03	3,183E+01	6,995E-01	3,253E+01	1,702E-04	8,98E-06
4,000E-03	3,675E+01	6,922E-01	3,745E+01	1,988E-04	1,05E-05
5,000E-03	4,109E+01	6,817E-01	4,177E+01	2,241E-04	1,18E-05
6,000E-03	4,501E+01	6,699E-01	4,568E+01	2,469E-04	1,30E-05
7,000E-03	4,862E+01	6,575E-01	4,928E+01	2,680E-04	1,41E-05
8,000E-03	5,198E+01	6,451E-01	5,262E+01	2,876E-04	1,52E-05
9,000E-03	5,513E+01	6,328E-01	5,576E+01	3,061E-04	1,62E-05
1,000E-02	5,811E+01	6,208E-01	5,873E+01	3,235E-04	1,71E-05
1,250E-02	6,419E+01	5,926E-01	6,479E+01	3,640E-04	1,92E-05
1,500E-02	6,957E+01	5,669E-01	7,014E+01	4,010E-04	2,12E-05
1,750E-02	7,444E+01	5,436E-01	7,499E+01	4,355E-04	2,30E-05
2,000E-02	7,890E+01	5,224E-01	7,942E+01	4,679E-04	2,47E-05
2,250E-02	8,302E+01	5,032E-01	8,352E+01	4,985E-04	2,63E-05
2,500E-02	8,684E+01	4,856E-01	8,733E+01	5,278E-04	2,79E-05
2,750E-02	9,042E+01	4,694E-01	9,089E+01	5,559E-04	2,93E-05
3,000E-02	9,378E+01	4,545E-01	9,423E+01	5,829E-04	3,08E-05
3,500E-02	9,992E+01	4,279E-01	1,003E+02	6,342E-04	3,35E-05
4,000E-02	1,054E+02	4,049E-01	1,058E+02	6,827E-04	3,60E-05
4,500E-02	1,103E+02	3,847E-01	1,107E+02	7,289E-04	3,85E-05
5,000E-02	1,148E+02	3,668E-01	1,151E+02	7,732E-04	4,08E-05
5,500E-02	1,188E+02	3,508E-01	1,191E+02	8,158E-04	4,31E-05
6,000E-02	1,224E+02	3,364E-01	1,227E+02	8,572E-04	4,52E-05
6,500E-02	1,257E+02	3,234E-01	1,260E+02	8,974E-04	4,74E-05
7,000E-02	1,286E+02	3,115E-01	1,289E+02	9,366E-04	4,94E-05
7,500E-02	1,312E+02	3,006E-01	1,315E+02	9,750E-04	5,15E-05
8,000E-02	1,335E+02	2,906E-01	1,338E+02	1,013E-03	5,35E-05
8,500E-02	1,356E+02	2,813E-01	1,359E+02	1,050E-03	5,54E-05
9,000E-02	1,374E+02	2,727E-01	1,377E+02	1,086E-03	5,73E-05
9,500E-02	1,390E+02	2,647E-01	1,393E+02	1,122E-03	5,92E-05
1,000E-01	1,404E+02	2,573E-01	1,406E+02	1,158E-03	6,11E-05
1,250E-01	1,444E+02	2,263E-01	1,446E+02	1,333E-03	7,03E-05
1,500E-01	1,448E+02	2,028E-01	1,450E+02	1,505E-03	7,94E-05
1,750E-01	1,427E+02	1,843E-01	1,429E+02	1,679E-03	8,86E-05
2,000E-01	1,391E+02	1,693E-01	1,393E+02	1,856E-03	9,79E-05
2,250E-01	1,345E+02	1,568E-01	1,347E+02	2,038E-03	1,08E-04
2,500E-01	1,296E+02	1,462E-01	1,297E+02	2,227E-03	1,18E-04
2,750E-01	1,242E+02	1,372E-01	1,243E+02	2,424E-03	1,28E-04
3,000E-01	1,188E+02	1,293E-01	1,189E+02	2,630E-03	1,39E-04
3,500E-01	1,087E+02	1,162E-01	1,088E+02	3,070E-03	1,62E-04
4,000E-01	1,000E+02	1,058E-01	1,001E+02	3,549E-03	1,87E-04
4,500E-01	9,278E+01	9,722E-02	9,288E+01	4,068E-03	2,15E-04
5,000E-01	8,672E+01	9,009E-02	8,681E+01	4,625E-03	2,44E-04
5,500E-01	8,164E+01	8,402E-02	8,172E+01	5,219E-03	2,75E-04
6,000E-01	7,735E+01	7,880E-02	7,743E+01	5,848E-03	3,09E-04
6,500E-01	7,371E+01	7,425E-02	7,379E+01	6,510E-03	3,44E-04
7,000E-01	7,060E+01	7,024E-02	7,067E+01	7,203E-03	3,80E-04
7,500E-01	6,792E+01	6,669E-02	6,799E+01	7,925E-03	4,18E-04
8,000E-01	6,559E+01	6,351E-02	6,565E+01	8,673E-03	4,58E-04
8,500E-01	6,356E+01	6,064E-02	6,362E+01	9,447E-03	4,99E-04
9,000E-01	6,177E+01	5,805E-02	6,183E+01	1,024E-02	5,40E-04

<sup>46</sup> Source : base de données PSTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/PSTAR.html>.



9,500E-01	6,019E+01	5,569E-02	6,024E+01	1,106E-02	5,84E-04
1,000E+00	5,878E+01	5,353E-02	5,884E+01	1,190E-02	6,28E-04
1,250E+00	5,333E+01	4,500E-02	5,338E+01	1,638E-02	8,64E-04
1,500E+00	4,908E+01	3,897E-02	4,912E+01	2,126E-02	1,12E-03
1,750E+00	4,562E+01	3,447E-02	4,566E+01	2,655E-02	1,40E-03
2,000E+00	4,273E+01	3,097E-02	4,276E+01	3,221E-02	1,70E-03
2,250E+00	4,028E+01	2,816E-02	4,031E+01	3,824E-02	2,02E-03
2,500E+00	3,815E+01	2,585E-02	3,818E+01	4,461E-02	2,35E-03
2,750E+00	3,629E+01	2,392E-02	3,631E+01	5,133E-02	2,71E-03
3,000E+00	3,463E+01	2,228E-02	3,465E+01	5,838E-02	3,08E-03
3,500E+00	3,182E+01	1,962E-02	3,184E+01	7,345E-02	3,88E-03
4,000E+00	2,952E+01	1,757E-02	2,954E+01	8,977E-02	4,74E-03
4,500E+00	2,759E+01	1,593E-02	2,760E+01	1,073E-01	5,66E-03
5,000E+00	2,594E+01	1,459E-02	2,595E+01	1,260E-01	6,65E-03
5,500E+00	2,451E+01	1,347E-02	2,452E+01	1,458E-01	7,69E-03
6,000E+00	2,326E+01	1,252E-02	2,327E+01	1,668E-01	8,80E-03
6,500E+00	2,215E+01	1,170E-02	2,216E+01	1,888E-01	9,96E-03
7,000E+00	2,116E+01	1,099E-02	2,117E+01	2,119E-01	1,12E-02
7,500E+00	2,027E+01	1,037E-02	2,028E+01	2,360E-01	1,25E-02
8,000E+00	1,947E+01	9,819E-03	1,948E+01	2,612E-01	1,38E-02
8,500E+00	1,874E+01	9,326E-03	1,875E+01	2,873E-01	1,52E-02
9,000E+00	1,807E+01	8,882E-03	1,808E+01	3,145E-01	1,66E-02
9,500E+00	1,746E+01	8,481E-03	1,747E+01	3,426E-01	1,81E-02
1,000E+01	1,689E+01	8,117E-03	1,690E+01	3,718E-01	1,96E-02

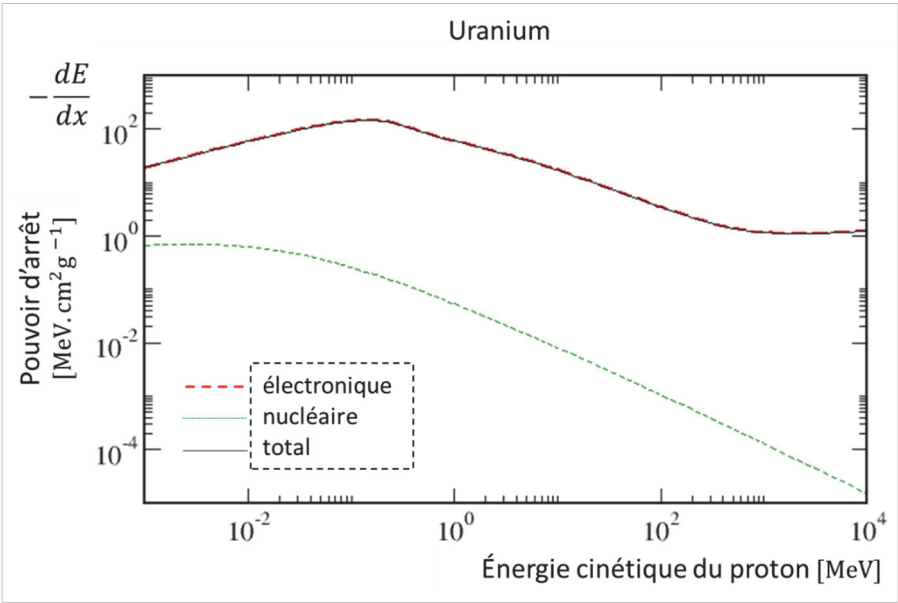


Figure 21. Pouvoirs d'arrêt d'un proton dans de l'uranium en fonction de son énergie cinétique.

▪ Oxyde de silicium

Tableau 24. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours d'un proton dans de l'oxyde de silicium (SiO<sub>2</sub>) en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 2.32 g cm<sup>-3</sup>)<sup>47</sup>.

Énergie <i>E</i>	Pouvoir d'arrêt électronique	Pouvoir d'arrêt nucléaire	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>
MeV	MeV. cm <sup>2</sup> /g	MeV. cm <sup>2</sup> /g	MeV. cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,000E-03	8,564E+01	1,624E+01	1,019E+02	1,395E-05	6,01E-06
1,500E-03	1,049E+02	1,418E+01	1,191E+02	1,844E-05	7,95E-06
2,000E-03	1,211E+02	1,267E+01	1,338E+02	2,240E-05	9,66E-06
2,500E-03	1,354E+02	1,150E+01	1,469E+02	2,596E-05	1,12E-05
3,000E-03	1,483E+02	1,057E+01	1,589E+02	2,923E-05	1,26E-05
4,000E-03	1,713E+02	9,160E+00	1,804E+02	3,513E-05	1,51E-05
5,000E-03	1,915E+02	8,132E+00	1,996E+02	4,039E-05	1,74E-05
6,000E-03	2,098E+02	7,342E+00	2,171E+02	4,519E-05	1,95E-05
7,000E-03	2,266E+02	6,712E+00	2,333E+02	4,963E-05	2,14E-05
8,000E-03	2,422E+02	6,196E+00	2,484E+02	5,378E-05	2,32E-05
9,000E-03	2,569E+02	5,763E+00	2,627E+02	5,769E-05	2,49E-05
1,000E-02	2,708E+02	5,395E+00	2,762E+02	6,140E-05	2,65E-05
1,250E-02	2,981E+02	4,672E+00	3,028E+02	7,003E-05	3,02E-05
1,500E-02	3,220E+02	4,139E+00	3,261E+02	7,798E-05	3,36E-05
1,750E-02	3,431E+02	3,726E+00	3,469E+02	8,540E-05	3,68E-05
2,000E-02	3,621E+02	3,396E+00	3,655E+02	9,242E-05	3,98E-05
2,250E-02	3,793E+02	3,126E+00	3,824E+02	9,910E-05	4,27E-05
2,500E-02	3,949E+02	2,899E+00	3,978E+02	1,055E-04	4,55E-05
2,750E-02	4,091E+02	2,706E+00	4,118E+02	1,117E-04	4,81E-05
3,000E-02	4,221E+02	2,540E+00	4,246E+02	1,177E-04	5,07E-05
3,500E-02	4,448E+02	2,267E+00	4,471E+02	1,291E-04	5,56E-05
4,000E-02	4,638E+02	2,052E+00	4,659E+02	1,401E-04	6,04E-05
4,500E-02	4,797E+02	1,877E+00	4,815E+02	1,506E-04	6,49E-05
5,000E-02	4,928E+02	1,733E+00	4,945E+02	1,609E-04	6,94E-05
5,500E-02	5,036E+02	1,610E+00	5,052E+02	1,709E-04	7,37E-05
6,000E-02	5,123E+02	1,506E+00	5,138E+02	1,807E-04	7,79E-05
6,500E-02	5,192E+02	1,415E+00	5,206E+02	1,903E-04	8,20E-05
7,000E-02	5,245E+02	1,335E+00	5,259E+02	1,999E-04	8,62E-05
7,500E-02	5,285E+02	1,265E+00	5,298E+02	2,094E-04	9,03E-05
8,000E-02	5,312E+02	1,202E+00	5,324E+02	2,188E-04	9,43E-05
8,500E-02	5,329E+02	1,146E+00	5,341E+02	2,282E-04	9,84E-05
9,000E-02	5,337E+02	1,095E+00	5,348E+02	2,375E-04	1,02E-04
9,500E-02	5,336E+02	1,049E+00	5,347E+02	2,469E-04	1,06E-04
1,000E-01	5,329E+02	1,007E+00	5,339E+02	2,562E-04	1,10E-04
1,250E-01	5,219E+02	8,416E-01	5,227E+02	3,035E-04	1,31E-04
1,500E-01	5,039E+02	7,258E-01	5,046E+02	3,521E-04	1,52E-04
1,750E-01	4,835E+02	6,398E-01	4,841E+02	4,027E-04	1,74E-04
2,000E-01	4,628E+02	5,732E-01	4,634E+02	4,554E-04	1,96E-04
2,250E-01	4,429E+02	5,200E-01	4,434E+02	5,106E-04	2,20E-04
2,500E-01	4,242E+02	4,764E-01	4,246E+02	5,682E-04	2,45E-04
2,750E-01	4,067E+02	4,400E-01	4,072E+02	6,284E-04	2,71E-04
3,000E-01	3,906E+02	4,091E-01	3,910E+02	6,910E-04	2,98E-04
3,500E-01	3,589E+02	3,594E-01	3,592E+02	8,245E-04	3,55E-04
4,000E-01	3,308E+02	3,211E-01	3,311E+02	9,696E-04	4,18E-04
4,500E-01	3,076E+02	2,907E-01	3,079E+02	1,126E-03	4,85E-04
5,000E-01	2,889E+02	2,658E-01	2,892E+02	1,294E-03	5,58E-04
5,500E-01	2,736E+02	2,450E-01	2,738E+02	1,472E-03	6,34E-04
6,000E-01	2,599E+02	2,275E-01	2,601E+02	1,659E-03	7,15E-04
6,500E-01	2,478E+02	2,124E-01	2,480E+02	1,856E-03	8,00E-04
7,000E-01	2,369E+02	1,993E-01	2,371E+02	2,063E-03	8,89E-04
7,500E-01	2,271E+02	1,879E-01	2,273E+02	2,278E-03	9,82E-04
8,000E-01	2,182E+02	1,777E-01	2,184E+02	2,502E-03	1,08E-03
8,500E-01	2,101E+02	1,686E-01	2,102E+02	2,736E-03	1,18E-03

<sup>47</sup> Source : base de données PSTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/PSTAR.html>.

9,000E-01	2,027E+02	1,604E-01	2,029E+02	2,978E-03	1,28E-03
9,500E-01	1,959E+02	1,530E-01	1,961E+02	3,229E-03	1,39E-03
1,000E+00	1,897E+02	1,464E-01	1,898E+02	3,488E-03	1,50E-03
1,250E+00	1,642E+02	1,204E-01	1,643E+02	4,908E-03	2,12E-03
1,500E+00	1,455E+02	1,026E-01	1,456E+02	6,528E-03	2,81E-03
1,750E+00	1,311E+02	8,954E-02	1,312E+02	8,340E-03	3,59E-03
2,000E+00	1,196E+02	7,954E-02	1,196E+02	1,034E-02	4,46E-03
2,250E+00	1,102E+02	7,162E-02	1,102E+02	1,252E-02	5,40E-03
2,500E+00	1,023E+02	6,520E-02	1,023E+02	1,487E-02	6,41E-03
2,750E+00	9,559E+01	5,987E-02	9,565E+01	1,740E-02	7,50E-03
3,000E+00	8,981E+01	5,538E-02	8,986E+01	2,010E-02	8,66E-03
3,500E+00	8,032E+01	4,822E-02	8,037E+01	2,599E-02	1,12E-02
4,000E+00	7,284E+01	4,274E-02	7,288E+01	3,254E-02	1,40E-02
4,500E+00	6,676E+01	3,842E-02	6,680E+01	3,971E-02	1,71E-02
5,000E+00	6,173E+01	3,492E-02	6,176E+01	4,750E-02	2,05E-02
5,500E+00	5,747E+01	3,202E-02	5,750E+01	5,590E-02	2,41E-02
6,000E+00	5,382E+01	2,958E-02	5,385E+01	6,489E-02	2,80E-02
6,500E+00	5,065E+01	2,750E-02	5,067E+01	7,447E-02	3,21E-02
7,000E+00	4,786E+01	2,570E-02	4,789E+01	8,462E-02	3,65E-02
7,500E+00	4,540E+01	2,413E-02	4,543E+01	9,535E-02	4,11E-02
8,000E+00	4,321E+01	2,274E-02	4,323E+01	1,066E-01	4,59E-02
8,500E+00	4,123E+01	2,151E-02	4,126E+01	1,185E-01	5,11E-02
9,000E+00	3,945E+01	2,041E-02	3,947E+01	1,309E-01	5,64E-02
9,500E+00	3,783E+01	1,942E-02	3,785E+01	1,438E-01	6,20E-02
1,000E+01	3,636E+01	1,852E-02	3,638E+01	1,573E-01	6,78E-02

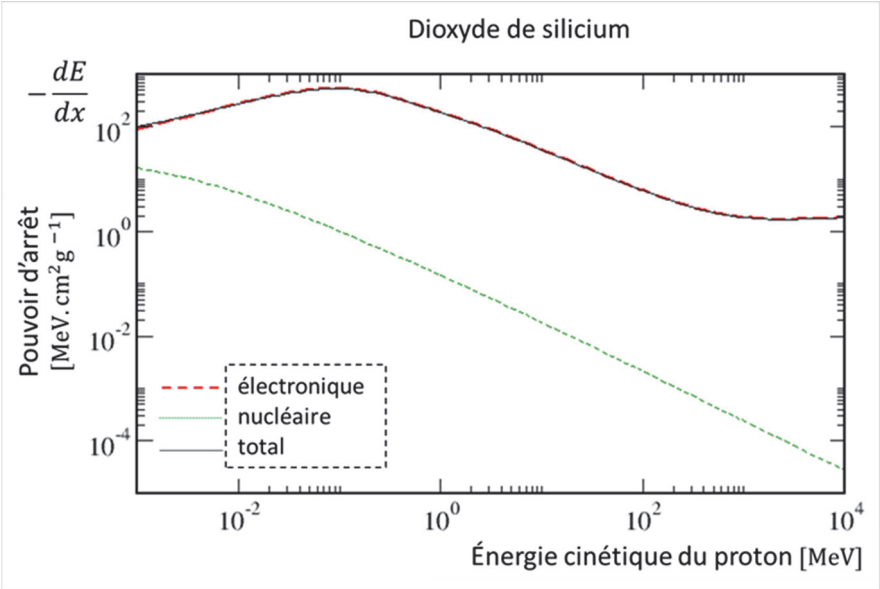


Figure 22. Pouvoirs d'arrêt d'un proton dans de l'oxyde de silicium en fonction de son énergie cinétique.

## Annexe IV : pouvoirs d'arrêt des électrons dans différents matériaux

Les **tableaux 25 à 29** ainsi que les **figures 23 à 27** fournissent des exemples de valeurs  $dE/dx$  et  $r_0$  respectivement dans le cas de l'eau (liquide) et de l'aluminium, de l'uranium, de l'oxyde de silicium ( $\text{SiO}_2$ ), et de l'oxyde d'uranium ( $\text{UO}_2$ ). Dans ces tableaux, les parcours des électrons ont été déterminés selon l'approche *Continuous Slowing Down Approximation*, CSDA, qui consiste en une intégration numérique de l'expression (2.35) sur le parcours de l'électron supposé en ligne droite et sous l'hypothèse de son ralentissement continu.

▪ Eau liquide

Tableau 25. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours de l'électron dans l'eau en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 1 g. cm<sup>-3</sup>).<sup>48</sup>

Énergie <i>E</i>	Pouvoir d'arrêt collisionnel	Pouvoir d'arrêt radiatif	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub>
MeV	MeV. cm <sup>2</sup> /g	MeV. cm <sup>2</sup> /g	MeV. cm <sup>2</sup> /g	g/cm <sup>2</sup>	cm
1,00E-02	2,26E+01	3,90E-03	2,26E+01	2,52E-04	2,52E-04
1,25E-02	1,90E+01	3,93E-03	1,90E+01	3,73E-04	3,73E-04
1,50E-02	1,65E+01	3,94E-03	1,65E+01	5,15E-04	5,15E-04
1,75E-02	1,46E+01	3,96E-03	1,46E+01	6,76E-04	6,76E-04
2,00E-02	1,32E+01	3,96E-03	1,32E+01	8,57E-04	8,57E-04
2,50E-02	1,11E+01	3,97E-03	1,11E+01	1,27E-03	1,27E-03
3,00E-02	9,65E+00	3,98E-03	9,66E+00	1,76E-03	1,76E-03
3,50E-02	8,59E+00	3,99E-03	8,60E+00	2,31E-03	2,31E-03
4,00E-02	7,78E+00	4,01E-03	7,78E+00	2,92E-03	2,92E-03
4,50E-02	7,13E+00	4,02E-03	7,13E+00	3,59E-03	3,59E-03
5,00E-02	6,60E+00	4,03E-03	6,61E+00	4,32E-03	4,32E-03
5,50E-02	6,17E+00	4,05E-03	6,17E+00	5,10E-03	5,10E-03
6,00E-02	5,80E+00	4,06E-03	5,80E+00	5,94E-03	5,94E-03
7,00E-02	5,21E+00	4,10E-03	5,21E+00	7,76E-03	7,76E-03
8,00E-02	4,76E+00	4,14E-03	4,76E+00	9,77E-03	9,77E-03
9,00E-02	4,40E+00	4,18E-03	4,41E+00	1,20E-02	1,20E-02
1,00E-01	4,12E+00	4,23E-03	4,12E+00	1,43E-02	1,43E-02
1,25E-01	3,59E+00	4,36E-03	3,60E+00	2,08E-02	2,08E-02
1,50E-01	3,24E+00	4,49E-03	3,24E+00	2,82E-02	2,82E-02
1,75E-01	2,98E+00	4,64E-03	2,99E+00	3,62E-02	3,62E-02
2,00E-01	2,79E+00	4,80E-03	2,80E+00	4,49E-02	4,49E-02
2,50E-01	2,53E+00	5,14E-03	2,53E+00	6,37E-02	6,37E-02
3,00E-01	2,36E+00	5,51E-03	2,36E+00	8,42E-02	8,42E-02
3,50E-01	2,24E+00	5,91E-03	2,24E+00	1,06E-01	1,06E-01
4,00E-01	2,15E+00	6,34E-03	2,15E+00	1,29E-01	1,29E-01
4,50E-01	2,08E+00	6,79E-03	2,09E+00	1,52E-01	1,52E-01
5,00E-01	2,03E+00	7,26E-03	2,04E+00	1,77E-01	1,77E-01
5,50E-01	2,00E+00	7,75E-03	2,00E+00	2,01E-01	2,01E-01
6,00E-01	1,96E+00	8,25E-03	1,97E+00	2,27E-01	2,27E-01
7,00E-01	1,92E+00	9,31E-03	1,93E+00	2,78E-01	2,78E-01
8,00E-01	1,89E+00	1,04E-02	1,90E+00	3,30E-01	3,30E-01
9,00E-01	1,86E+00	1,16E-02	1,88E+00	3,83E-01	3,83E-01
1,00E+00	1,85E+00	1,28E-02	1,86E+00	4,37E-01	4,37E-01
1,25E+00	1,83E+00	1,60E-02	1,85E+00	5,72E-01	5,72E-01
1,50E+00	1,82E+00	1,94E-02	1,84E+00	7,08E-01	7,08E-01
1,75E+00	1,82E+00	2,30E-02	1,84E+00	8,43E-01	8,43E-01
2,00E+00	1,82E+00	2,68E-02	1,85E+00	9,79E-01	9,79E-01
2,50E+00	1,83E+00	3,47E-02	1,87E+00	1,25E+00	1,25E+00
3,00E+00	1,85E+00	4,30E-02	1,89E+00	1,51E+00	1,51E+00
3,50E+00	1,86E+00	5,16E-02	1,91E+00	1,78E+00	1,78E+00
4,00E+00	1,87E+00	6,06E-02	1,93E+00	2,04E+00	2,04E+00
4,50E+00	1,88E+00	6,98E-02	1,95E+00	2,30E+00	2,30E+00
5,00E+00	1,89E+00	7,92E-02	1,97E+00	2,55E+00	2,55E+00
5,50E+00	1,90E+00	8,88E-02	1,99E+00	2,80E+00	2,80E+00
6,00E+00	1,91E+00	9,85E-02	2,01E+00	3,05E+00	3,05E+00
7,00E+00	1,93E+00	1,19E-01	2,05E+00	3,55E+00	3,55E+00
8,00E+00	1,94E+00	1,39E-01	2,08E+00	4,03E+00	4,03E+00
9,00E+00	1,96E+00	1,60E-01	2,12E+00	4,51E+00	4,51E+00
1,00E+01	1,97E+00	1,81E-01	2,15E+00	4,98E+00	4,98E+00

<sup>48</sup> Source : base de données ESTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>.

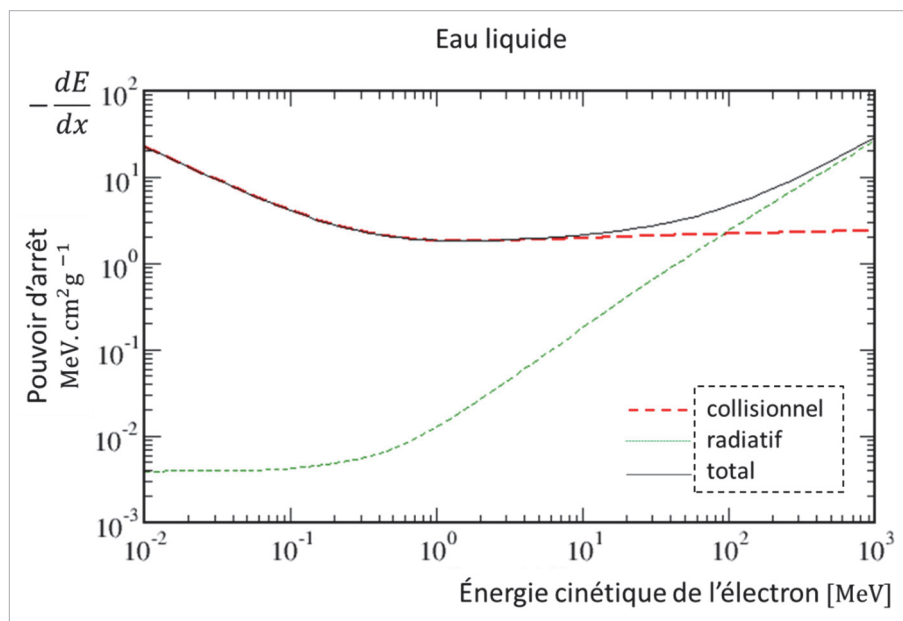


Figure 23. Pouvoirs d'arrêt de l'électron dans l'eau liquide en fonction de son énergie cinétique.

▪ Aluminium

Tableau 26. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours de l'électron dans l'aluminium en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 2.7 g cm<sup>-3</sup>).<sup>49</sup>

Énergie <i>E</i> MeV	Pouvoir d'arrêt collisionnel MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt radiatif MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i> MeV.cm <sup>2</sup> /g	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> g/cm <sup>2</sup>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> cm
1,00E-02	1,649E+01	6,559E-03	1,650E+01	3,539E-04	1,311E-04
1,250E-02	1,398E+01	6,700E-03	1,398E+01	5,192E-04	1,923E-04
1,500E-02	1,220E+01	6,798E-03	1,221E+01	7,111E-04	2,634E-04
1,750E-02	1,088E+01	6,871E-03	1,088E+01	9,284E-04	3,439E-04
2,000E-02	9,844E+00	6,926E-03	9,851E+00	1,170E-03	4,333E-04
2,500E-02	8,338E+00	7,004E-03	8,345E+00	1,724E-03	6,385E-04
3,000E-02	7,287E+00	7,059E-03	7,294E+00	2,367E-03	8,767E-04
3,500E-02	6,509E+00	7,100E-03	6,516E+00	3,094E-03	1,146E-03
4,000E-02	5,909E+00	7,133E-03	5,916E+00	3,900E-03	1,444E-03
4,500E-02	5,430E+00	7,162E-03	5,437E+00	4,783E-03	1,771E-03
5,000E-02	5,039E+00	7,191E-03	5,046E+00	5,738E-03	2,125E-03
5,500E-02	4,714E+00	7,217E-03	4,721E+00	6,763E-03	2,505E-03
6,000E-02	4,439E+00	7,243E-03	4,446E+00	7,855E-03	2,909E-03
7,000E-02	3,998E+00	7,295E-03	4,005E+00	1,023E-02	3,789E-03
8,000E-02	3,661E+00	7,350E-03	3,668E+00	1,284E-02	4,756E-03
9,000E-02	3,394E+00	7,411E-03	3,401E+00	1,568E-02	5,807E-03
1,000E-01	3,177E+00	7,476E-03	3,185E+00	1,872E-02	6,933E-03
1,250E-01	2,781E+00	7,659E-03	2,789E+00	2,714E-02	1,005E-02
1,500E-01	2,513E+00	7,865E-03	2,521E+00	3,659E-02	1,355E-02
1,750E-01	2,320E+00	8,096E-03	2,328E+00	4,693E-02	1,738E-02
2,000E-01	2,174E+00	8,344E-03	2,183E+00	5,804E-02	2,150E-02
2,500E-01	1,972E+00	8,888E-03	1,981E+00	8,217E-02	3,043E-02
3,000E-01	1,839E+00	9,487E-03	1,849E+00	1,083E-01	4,011E-02
3,500E-01	1,747E+00	1,013E-02	1,757E+00	1,361E-01	5,041E-02
4,000E-01	1,680E+00	1,082E-02	1,691E+00	1,652E-01	6,119E-02
4,500E-01	1,630E+00	1,154E-02	1,642E+00	1,952E-01	7,230E-02
5,000E-01	1,592E+00	1,230E-02	1,604E+00	2,260E-01	8,370E-02
5,500E-01	1,563E+00	1,309E-02	1,576E+00	2,575E-01	9,537E-02
6,000E-01	1,540E+00	1,390E-02	1,554E+00	2,894E-01	1,072E-01
7,000E-01	1,507E+00	1,560E-02	1,522E+00	3,545E-01	1,313E-01
8,000E-01	1,486E+00	1,739E-02	1,503E+00	4,206E-01	1,558E-01
9,000E-01	1,473E+00	1,925E-02	1,492E+00	4,874E-01	1,805E-01
1,000E+00	1,465E+00	2,119E-02	1,486E+00	5,546E-01	2,054E-01
1,250E+00	1,457E+00	2,630E-02	1,484E+00	7,231E-01	2,678E-01
1,500E+00	1,460E+00	3,177E-02	1,491E+00	8,913E-01	3,301E-01
1,750E+00	1,466E+00	3,752E-02	1,504E+00	1,058E+00	3,919E-01
2,000E+00	1,475E+00	4,350E-02	1,518E+00	1,224E+00	4,533E-01
2,500E+00	1,493E+00	5,605E-02	1,549E+00	1,550E+00	5,741E-01
3,000E+00	1,510E+00	6,924E-02	1,580E+00	1,869E+00	6,922E-01

<sup>49</sup> Source : base de données ESTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>.

3,500E+00	1,526E+00	8,292E-02	1,609E+00	2,183E+00	8,085E-01
4,000E+00	1,540E+00	9,702E-02	1,637E+00	2,491E+00	9,226E-01
4,500E+00	1,552E+00	1,115E-01	1,664E+00	2,794E+00	1,035E+00
5,000E+00	1,564E+00	1,263E-01	1,690E+00	3,092E+00	1,145E+00
5,500E+00	1,574E+00	1,413E-01	1,715E+00	3,386E+00	1,254E+00
6,000E+00	1,583E+00	1,567E-01	1,739E+00	3,675E+00	1,361E+00
7,000E+00	1,599E+00	1,879E-01	1,787E+00	4,242E+00	1,571E+00
8,000E+00	1,613E+00	2,200E-01	1,833E+00	4,795E+00	1,776E+00
9,000E+00	1,625E+00	2,526E-01	1,877E+00	5,334E+00	1,976E+00
1.000E+01	1,636E+00	2,858E-01	1,921E+00	5,861E+00	2,171E+00

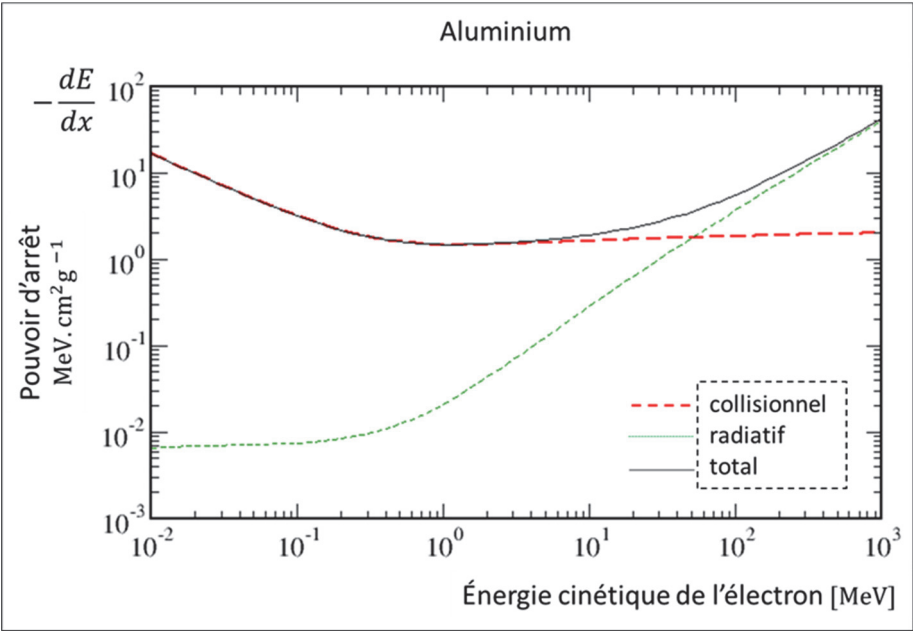


Figure 24. Pouvoirs d'arrêt de l'électron dans l'aluminium en fonction de son énergie cinétique.



■ Uranium

Tableau 27. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours de l'électron dans de l'uranium en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 18.95 g cm<sup>-3</sup>).<sup>50</sup>

Énergie <i>E</i> MeV	Pouvoir d'arrêt collisionnel MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt radiatif MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i> MeV.cm <sup>2</sup> /g	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> g/cm <sup>2</sup>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> cm
1,00E-02	7,98E+00	2,10E-02	8,01E+00	8,98E-04	1,29E-03
1,25E-02	6,99E+00	2,33E-02	7,01E+00	1,23E-03	1,63E-03
1,50E-02	6,24E+00	2,52E-02	6,27E+00	1,61E-03	1,97E-03
1,75E-02	5,66E+00	2,68E-02	5,69E+00	2,03E-03	2,31E-03
2,00E-02	5,20E+00	2,82E-02	5,23E+00	2,49E-03	2,65E-03
2,50E-02	4,50E+00	3,07E-02	4,53E+00	3,52E-03	3,34E-03
3,00E-02	4,00E+00	3,27E-02	4,03E+00	4,69E-03	4,03E-03
3,50E-02	3,61E+00	3,45E-02	3,65E+00	6,00E-03	4,71E-03
4,00E-02	3,31E+00	3,61E-02	3,35E+00	7,43E-03	5,38E-03
4,50E-02	3,07E+00	3,76E-02	3,11E+00	8,98E-03	6,06E-03
5,00E-02	2,87E+00	3,89E-02	2,91E+00	1,07E-02	6,72E-03
5,50E-02	2,70E+00	4,01E-02	2,74E+00	1,24E-02	7,39E-03
6,00E-02	2,56E+00	4,13E-02	2,60E+00	1,43E-02	8,04E-03
7,00E-02	2,33E+00	4,34E-02	2,37E+00	1,83E-02	9,34E-03
8,00E-02	2,14E+00	4,53E-02	2,19E+00	2,27E-02	1,06E-02
9,00E-02	2,00E+00	4,71E-02	2,05E+00	2,75E-02	1,19E-02
1,00E-01	1,88E+00	4,88E-02	1,93E+00	3,25E-02	1,31E-02
1,25E-01	1,67E+00	5,25E-02	1,72E+00	4,63E-02	1,61E-02
1,50E-01	1,52E+00	5,59E-02	1,57E+00	6,15E-02	1,89E-02
1,75E-01	1,41E+00	5,89E-02	1,47E+00	7,80E-02	2,16E-02
2,00E-01	1,33E+00	6,18E-02	1,39E+00	9,55E-02	2,42E-02
2,50E-01	1,22E+00	6,74E-02	1,29E+00	1,33E-01	2,90E-02
3,00E-01	1,14E+00	7,26E-02	1,22E+00	1,73E-01	3,36E-02
3,50E-01	1,09E+00	7,78E-02	1,17E+00	2,15E-01	3,78E-02
4,00E-01	1,06E+00	8,29E-02	1,14E+00	2,58E-01	4,18E-02
4,50E-01	1,03E+00	8,81E-02	1,12E+00	3,03E-01	4,55E-02
5,00E-01	1,01E+00	9,32E-02	1,10E+00	3,48E-01	4,91E-02
5,50E-01	9,96E-01	9,83E-02	1,09E+00	3,93E-01	5,26E-02
6,00E-01	9,84E-01	1,03E-01	1,09E+00	4,39E-01	5,59E-02
7,00E-01	9,69E-01	1,14E-01	1,08E+00	5,31E-01	6,22E-02
8,00E-01	9,60E-01	1,24E-01	1,08E+00	6,23E-01	6,82E-02
9,00E-01	9,56E-01	1,35E-01	1,09E+00	7,15E-01	7,38E-02
1,00E+00	9,54E-01	1,45E-01	1,10E+00	8,07E-01	7,92E-02
1,25E+00	9,57E-01	1,72E-01	1,13E+00	1,03E+00	9,18E-02
1,50E+00	9,65E-01	2,00E-01	1,16E+00	1,25E+00	1,04E-01
1,75E+00	9,74E-01	2,28E-01	1,20E+00	1,46E+00	1,15E-01
2,00E+00	9,84E-01	2,56E-01	1,24E+00	1,67E+00	1,25E-01

<sup>50</sup> Source : base de données ESTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>.

2,50E+00	1,00E+00	3,14E-01	1,32E+00	2,06E+00	1,44E-01
3,00E+00	1,02E+00	3,73E-01	1,40E+00	2,43E+00	1,63E-01
3,50E+00	1,04E+00	4,34E-01	1,47E+00	2,77E+00	1,80E-01
4,00E+00	1,05E+00	4,96E-01	1,55E+00	3,11E+00	1,96E-01
4,50E+00	1,07E+00	5,58E-01	1,63E+00	3,42E+00	2,11E-01
5,00E+00	1,08E+00	6,21E-01	1,70E+00	3,72E+00	2,25E-01
5,50E+00	1,09E+00	6,86E-01	1,78E+00	4,01E+00	2,39E-01
6,00E+00	1,10E+00	7,50E-01	1,85E+00	4,28E+00	2,52E-01
7,00E+00	1,12E+00	8,82E-01	2,00E+00	4,80E+00	2,76E-01
8,00E+00	1,13E+00	1,02E+00	2,15E+00	5,29E+00	2,99E-01
9,00E+00	1,15E+00	1,15E+00	2,30E+00	5,74E+00	3,20E-01
1,00E+01	1,16E+00	1,29E+00	2,44E+00	6,16E+00	3,39E-01

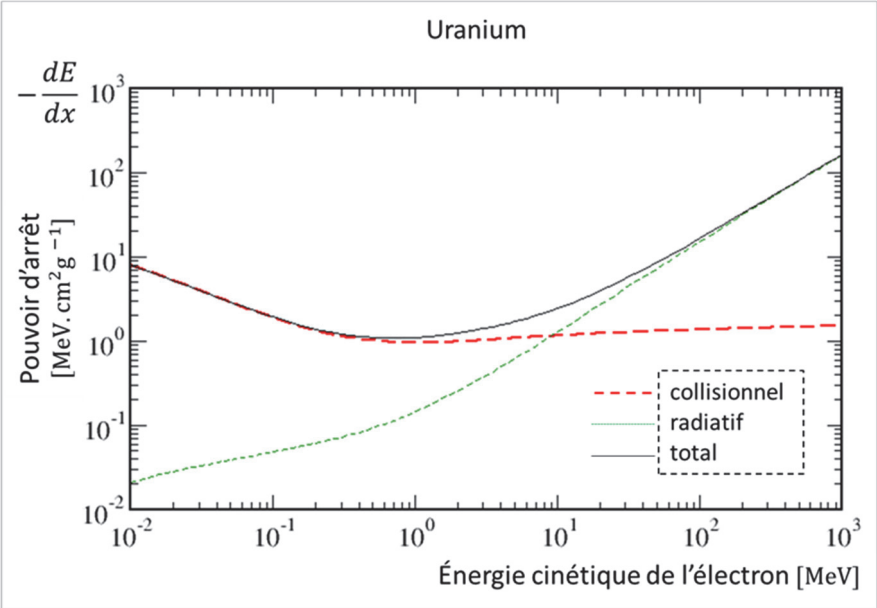


Figure 25. Pouvoirs d'arrêt de l'électron dans l'uranium en fonction de son énergie cinétique.

▪ Oxyde de silicium, SiO<sub>2</sub>

Tableau 28. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours de l'électron dans de l'oxyde de silicium, en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 2.32 g cm<sup>-3</sup>).<sup>51</sup>

Énergie <i>E</i> MeV	Pouvoir d'arrêt collisionnel MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt radiatif MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i> MeV.cm <sup>2</sup> /g	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> g/cm <sup>2</sup>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> cm
1,000E-02	1,780E+01	5,664E-03	1,781E+01	3,255E-04	1,403E-04
1,250E-02	1,506E+01	5,762E-03	1,506E+01	4,788E-04	2,074E-04
1,500E-02	1,313E+01	5,830E-03	1,313E+01	6,570E-04	2,417E-04
1,750E-02	1,169E+01	5,880E-03	1,169E+01	8,592E-04	2,749E-04
2,000E-02	1,057E+01	5,918E-03	1,057E+01	1,084E-03	3,069E-04
2,500E-02	8,939E+00	5,971E-03	8,944E+00	1,601E-03	3,684E-04
3,000E-02	7,804E+00	6,009E-03	7,810E+00	2,201E-03	4,268E-04
3,500E-02	6,965E+00	6,039E-03	6,971E+00	2,880E-03	4,827E-04
4,000E-02	6,318E+00	6,065E-03	6,324E+00	3,634E-03	5,365E-04
4,500E-02	5,803E+00	6,089E-03	5,809E+00	4,460E-03	5,884E-04
5,000E-02	5,383E+00	6,112E-03	5,389E+00	5,355E-03	6,387E-04
5,500E-02	5,033E+00	6,135E-03	5,040E+00	6,315E-03	6,876E-04
6,000E-02	4,738E+00	6,159E-03	4,744E+00	7,338E-03	7,351E-04
7,000E-02	4,265E+00	6,207E-03	4,271E+00	9,564E-03	8,267E-04
8,000E-02	3,904E+00	6,259E-03	3,910E+00	1,201E-02	9,143E-04
9,000E-02	3,618E+00	6,315E-03	3,624E+00	1,467E-02	9,985E-04
1,000E-01	3,386E+00	6,375E-03	3,393E+00	1,753E-02	1,080E-03
1,250E-01	2,963E+00	6,541E-03	2,969E+00	2,544E-02	1,272E-03
1,500E-01	2,677E+00	6,727E-03	2,683E+00	3,432E-02	1,453E-03
1,750E-01	2,471E+00	6,930E-03	2,478E+00	4,403E-02	1,624E-03
2,000E-01	2,316E+00	7,148E-03	2,323E+00	5,446E-02	1,789E-03
2,500E-01	2,101E+00	7,622E-03	2,109E+00	7,713E-02	2,100E-03
3,000E-01	1,961E+00	8,144E-03	1,969E+00	1,017E-01	2,396E-03
3,500E-01	1,864E+00	8,706E-03	1,872E+00	1,278E-01	2,682E-03
4,000E-01	1,792E+00	9,304E-03	1,801E+00	1,550E-01	2,960E-03
4,500E-01	1,738E+00	9,935E-03	1,748E+00	1,832E-01	3,233E-03
5,000E-01	1,697E+00	1,060E-02	1,708E+00	2,122E-01	3,504E-03
5,500E-01	1,665E+00	1,128E-02	1,676E+00	2,417E-01	3,774E-03
6,000E-01	1,639E+00	1,199E-02	1,651E+00	2,718E-01	4,042E-03
7,000E-01	1,603E+00	1,348E-02	1,616E+00	3,331E-01	4,579E-03
8,000E-01	1,579E+00	1,504E-02	1,594E+00	3,954E-01	5,118E-03
9,000E-01	1,563E+00	1,667E-02	1,579E+00	4,585E-01	5,659E-03
1,000E+00	1,552E+00	1,836E-02	1,570E+00	5,220E-01	6,206E-03
1,250E+00	1,540E+00	2,283E-02	1,563E+00	6,817E-01	7,593E-03
1,500E+00	1,538E+00	2,761E-02	1,566E+00	8,416E-01	9,013E-03
1,750E+00	1,542E+00	3,264E-02	1,575E+00	1,001E+00	1,046E-02
2,000E+00	1,548E+00	3,787E-02	1,586E+00	1,159E+00	1,194E-02
2,500E+00	1,563E+00	4,886E-02	1,612E+00	1,472E+00	1,497E-02
3,000E+00	1,578E+00	6,039E-02	1,639E+00	1,780E+00	1,807E-02

<sup>51</sup> Source : base de données ESTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>.

3,500E+00	1,593E+00	7,238E-02	1,665E+00	2,082E+00	2,123E-02
4,000E+00	1,606E+00	8,475E-02	1,691E+00	2,380E+00	2,442E-02
4,500E+00	1,619E+00	9,743E-02	1,716E+00	2,674E+00	2,765E-02
5,000E+00	1,630E+00	1,104E-01	1,741E+00	2,963E+00	3,089E-02
5,500E+00	1,641E+00	1,236E-01	1,764E+00	3,248E+00	3,415E-02
6,000E+00	1,650E+00	1,371E-01	1,787E+00	3,530E+00	3,742E-02
7,000E+00	1,667E+00	1,646E-01	1,832E+00	4,082E+00	4,397E-02
8,000E+00	1,682E+00	1,927E-01	1,875E+00	4,622E+00	5,052E-02
9,000E+00	1,695E+00	2,214E-01	1,916E+00	5,150E+00	5,704E-02
1,000E+01	1,706E+00	2,507E-01	1,957E+00	5,666E+00	6,352E-02

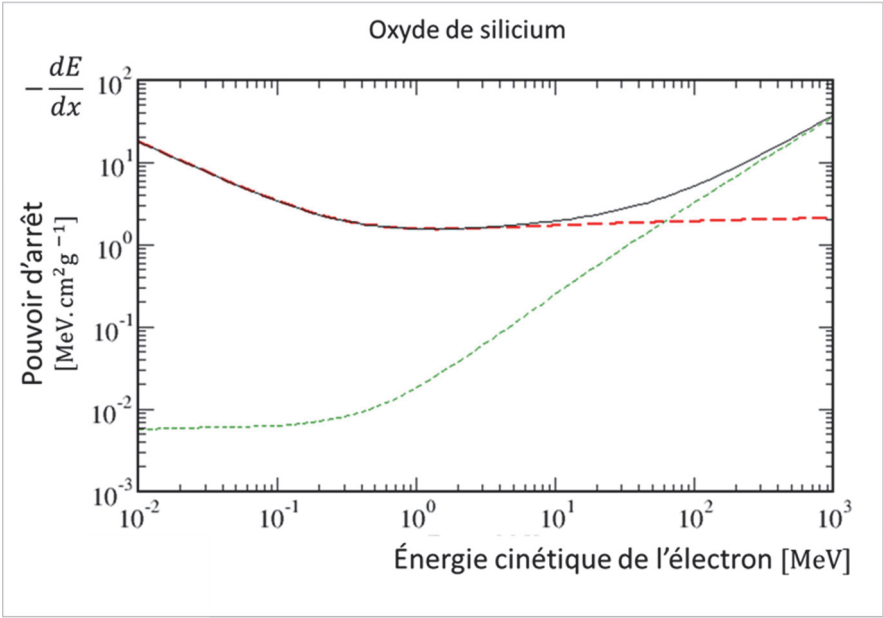


Figure 26. Pouvoirs d'arrêt de l'électron dans l'oxyde de silicium en fonction de son énergie cinétique.

▪ Oxyde d'uranium

Tableau 29. Valeurs du pouvoir d'arrêt et de parcours de l'électron dans de l'oxyde d'uranium, en fonction de son énergie cinétique (masse volumique 10.96 g cm<sup>-3</sup>).<sup>52</sup>

Énergie <i>E</i> MeV	Pouvoir d'arrêt collisionnel MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt radiatif MeV.cm <sup>2</sup> /g	Pouvoir d'arrêt total <i>p(E)</i> MeV.cm <sup>2</sup> /g	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> g/cm <sup>2</sup>	Parcours CSDA <i>r</i> <sub>0</sub> cm
1,00E-02	8,95E+00	1,90E-02	8,97E+00	7,50E-04	6,84E-05
1,250E-02	7,78E+00	2,10E-02	7,80E+00	1,05E-03	9,58E-05
1,500E-02	6,92E+00	2,27E-02	6,95E+00	1,39E-03	1,27E-04
1,750E-02	6,26E+00	2,41E-02	6,28E+00	1,77E-03	1,61E-04
2,000E-02	5,73E+00	2,54E-02	5,76E+00	2,19E-03	1,99E-04
2,500E-02	4,94E+00	2,76E-02	4,97E+00	3,12E-03	2,85E-04
3,000E-02	4,38E+00	2,94E-02	4,41E+00	4,19E-03	3,83E-04
3,500E-02	3,95E+00	3,10E-02	3,98E+00	5,39E-03	4,92E-04
4,000E-02	3,62E+00	3,24E-02	3,65E+00	6,70E-03	6,11E-04
4,500E-02	3,35E+00	3,36E-02	3,38E+00	8,13E-03	7,42E-04
5,000E-02	3,13E+00	3,48E-02	3,16E+00	9,66E-03	8,81E-04
5,500E-02	2,94E+00	3,59E-02	2,98E+00	1,13E-02	1,03E-03
6,000E-02	2,78E+00	3,69E-02	2,82E+00	1,30E-02	1,19E-03
7,000E-02	2,53E+00	3,88E-02	2,56E+00	1,67E-02	1,53E-03
8,000E-02	2,33E+00	4,05E-02	2,37E+00	2,08E-02	1,90E-03
9,000E-02	2,17E+00	4,21E-02	2,21E+00	2,52E-02	2,30E-03
1,000E-01	2,04E+00	4,35E-02	2,08E+00	2,99E-02	2,72E-03
1,250E-01	1,80E+00	4,68E-02	1,85E+00	4,26E-02	3,89E-03
1,500E-01	1,64E+00	4,98E-02	1,69E+00	5,68E-02	5,18E-03
1,750E-01	1,52E+00	5,26E-02	1,57E+00	7,22E-02	6,58E-03
2,000E-01	1,43E+00	5,51E-02	1,49E+00	8,85E-02	8,08E-03
2,500E-01	1,31E+00	6,00E-02	1,37E+00	1,24E-01	1,13E-02
3,000E-01	1,23E+00	6,47E-02	1,29E+00	1,61E-01	1,47E-02
3,500E-01	1,17E+00	6,94E-02	1,24E+00	2,01E-01	1,83E-02
4,000E-01	1,13E+00	7,39E-02	1,21E+00	2,42E-01	2,21E-02
4,500E-01	1,10E+00	7,85E-02	1,18E+00	2,84E-01	2,59E-02
5,000E-01	1,08E+00	8,31E-02	1,16E+00	3,27E-01	2,98E-02
5,500E-01	1,06E+00	8,76E-02	1,15E+00	3,70E-01	3,37E-02
6,000E-01	1,05E+00	9,22E-02	1,14E+00	4,13E-01	3,77E-02
7,000E-01	1,03E+00	1,01E-01	1,13E+00	5,01E-01	4,57E-02
8,000E-01	1,02E+00	1,11E-01	1,13E+00	5,90E-01	5,38E-02
9,000E-01	1,02E+00	1,20E-01	1,14E+00	6,78E-01	6,18E-02
1,000E+00	1,01E+00	1,30E-01	1,14E+00	7,66E-01	6,98E-02
1,250E+00	1,02E+00	1,54E-01	1,17E+00	9,82E-01	8,96E-02
1,500E+00	1,02E+00	1,78E-01	1,20E+00	1,19E+00	1,09E-01
1,750E+00	1,03E+00	2,04E-01	1,23E+00	1,40E+00	1,28E-01
2,000E+00	1,04E+00	2,29E-01	1,27E+00	1,60E+00	1,46E-01

<sup>52</sup> Source : base de données ESTAR du NIST : <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/ESTAR.html>.

2,500E+00	1,06E+00	2,81E-01	1,34E+00	1,98E+00	1,81E-01
3,000E+00	1,08E+00	3,34E-01	1,41E+00	2,35E+00	2,14E-01
3,500E+00	1,10E+00	3,89E-01	1,48E+00	2,69E+00	2,45E-01
4,000E+00	1,11E+00	4,44E-01	1,56E+00	3,02E+00	2,75E-01
4,500E+00	1,12E+00	5,01E-01	1,63E+00	3,33E+00	3,04E-01
5,000E+00	1,14E+00	5,58E-01	1,69E+00	3,64E+00	3,32E-01
5,500E+00	1,15E+00	6,16E-01	1,76E+00	3,93E+00	3,58E-01
6,000E+00	1,16E+00	6,74E-01	1,83E+00	4,20E+00	3,83E-01
7,000E+00	1,18E+00	7,92E-01	1,97E+00	4,73E+00	4,31E-01
8,000E+00	1,19E+00	9,13E-01	2,11E+00	5,22E+00	4,76E-01
9,000E+00	1,21E+00	1,04E+00	2,24E+00	5,68E+00	5,18E-01
1.000E+01	1,22E+00	1,16E+00	2,38E+00	6,11E+00	5,58E-01

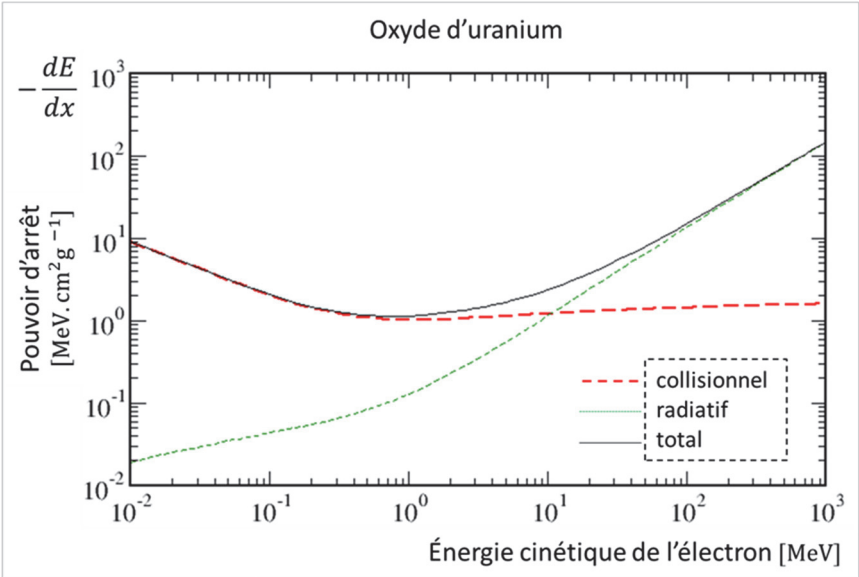


Figure 27. Pouvoirs d'arrêt de l'électron dans de l'oxyde d'uranium en fonction de son énergie cinétique.

## Annexe V : pouvoir d'arrêt pour des électrons ou positrons de haute énergie

Pour déterminer le pouvoir d'arrêt radiatif, des électrons ou positons (des leptons de manière générale) de haute énergie, on introduit la notion de « **longueur de radiation** »<sup>53</sup> <sup>54</sup> (*radiation length*), notée  $X_0(z)$ , qui représente l'épaisseur de matériau pour laquelle l'énergie de l'électron d'énergie initiale  $E_0$  est réduite d'un facteur  $e = 2.718$ .

L'énergie  $E$  de l'électron en fonction de l'épaisseur  $x$  du matériau traversé est approximée par l'expression :

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{x}{X_0(z)}\right) \quad (I - 1)$$

La « **longueur de radiation** »  $X_0(z)$  est supposée indépendante de  $E_0$ , ne dépendant que de la nature du matériau ralentisseur. L'on en déduit le **pouvoir d'arrêt radiatif** par dérivation par rapport à la variable  $x$  :

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = -\frac{1}{X_0} E_0 \exp\left(-\frac{x}{X_0(z)}\right) \quad (I - 2)$$

Soit, compte tenu de (I - 1) :

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad} = \frac{E}{X_0(z)} \quad (I - 3)$$

La « longueur de radiation »  $X_0(z)$  est modélisée par une formule semi-empirique paramétrique et ses valeurs peuvent être tabulées :

$$\frac{1}{X_0(z)} = 4\alpha r_0^2 \frac{N_{av}}{A} \{z^2 [L_{rad} - f(z)] + zL'_{rad}\} \quad (I - 4)$$

où :

$r_0$  est le rayon classique de l'électron :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 2.818 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

$\alpha$  est la constante de structure fine :

<sup>53</sup> Y.-S. Tsai, « Pair production and bremsstrahlung of charged leptons », *Rev. Mod. Phys.* 46, 1974, pp. 815-851, [Erratum: *Rev. Mod. Phys.* 49, 1977, p. 521].

<sup>54</sup> M. Tanabashi *et al.* (Particle Data Group), *Physical Review D* 98, 030001, 2018 et 2019 update 6<sup>th</sup> December, 2019, *op. cit.*, p. 452.

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.036}$$

$$4\alpha r_0^2 N_{av} = 1.386 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

$f(z)$  est la fonction donnée par<sup>55</sup> :

$$f(z) = a^2 \left[ \frac{1}{1+a^2} + 0.20206 - 0.0369 a^2 + 0.0083 a^4 + 0.002 a^6 \right] \tag{I - 5}$$

avec  $a = \alpha z$ .

$L_{rad}, L'_{rad}$  sont des paramètres dont des valeurs sont données dans le tableau 30.

Tableau 30. Valeurs des paramètres  $L_{rad}$  et  $L'_{rad}$ .

Élément	$z$	$L_{rad}$	$L'_{rad}$
H	1	5.31	6.144
He	2	4.79	5.621
Li	3	4.74	5.805
Be	4	4.71	5.924
Others	> 4	$\ln(184.15 Z^{-1/3})$	$\ln(194 Z^{-2/3})$

La perte d'énergie par *bremsstrahlung* (ou **rayonnement de freinage**) augmente donc avec l'énergie cinétique de l'électron et avec le numéro atomique des noyaux du milieu de propagation.

Le rapport entre la perte d'énergie par radiation par collision et celle par radiation est donné approximativement par la formule :

$$\frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{rad}}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{coll}} = \frac{zE}{700} \tag{I - 6}$$

où  $E$  est l'énergie cinétique de l'électron et  $z$  le numéro atomique du milieu.

En utilisant comme unité d'épaisseur le  $\text{g cm}^{-2}$ , les valeurs de la **longueur de radiation**  $X_0(z)$  est de  $63 \text{ g cm}^{-2}$  pour  $z = 1$ , et va de  $94 \text{ g cm}^{-2}$  à  $6 \text{ g cm}^{-2}$  lorsque l'on passe de  $z = 2$  à  $z = 92$ .

Pour obtenir l'épaisseur correspondante en cm, il faut diviser  $X_0(z)$  exprimé en  $\text{g cm}^{-2}$  par la masse volumique exprimée en  $\text{g cm}^{-3}$ .

<sup>55</sup> H. Davies, H. A. Bethe, L. C. Maximon, « Theory of Bremsstrahlung and Pair Production. II. Integral Cross Section for Pair Production », *Physical Review* 93, 788, February 15, 1954, <https://doi.org/10.1103/PhysRev.93.788>.



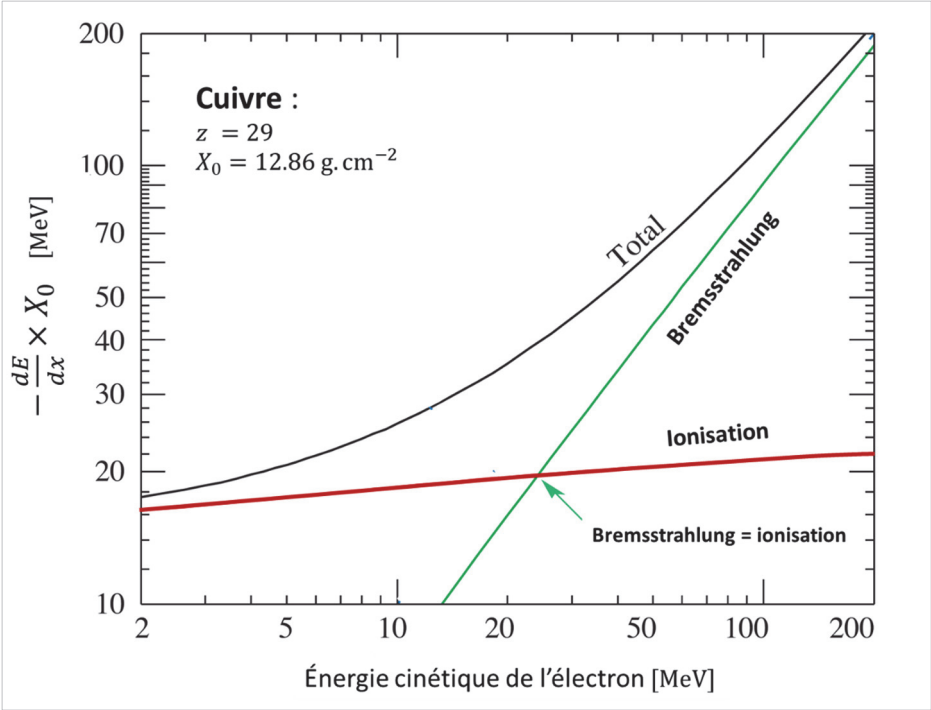


Figure 28. Illustration à l'aide de la longueur de radiation  $X_0(z)$  de l'importance relative des phénomènes de perte d'énergie par *bremsstrahlung* et ionisation d'un électron en fonction de son énergie cinétique, dans une cible de cuivre.<sup>56</sup>

<sup>56</sup> D'après D. E. Groom (LBNL), S. R. Klein (LBNL), <https://pdg.lbl.gov/2019/reviews/rpp2019-rev-passage-particles-matter.pdf>, *op. cit.*, figure 33.13, p. 19.

Annexe VI : sources radioactives de neutrons produits par réactions (α,n)<sup>57</sup>

Source de photoneutrons: mélange émetteur α + nucléide cible	Période de l'émetteur α	Réaction (α, n)	Énergie disponible (MeV)	Énergie maximale des neutrons émis	Rendement : nombre de neutrons produits pour 10 <sup>6</sup> désintégrations
<sup>242</sup> <sub>96</sub> Cm + Be	162.8 j	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	11.8	112
<sup>241</sup> <sub>95</sub> Am + Be	432.7 a	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	11	74
<sup>239</sup> <sub>94</sub> Pu + Be	2.41 10 <sup>4</sup> a	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	10.8	60
Ra ( <sup>226</sup> <sub>88</sub> Ra) + Be	1599 a	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	13	550
Rn ( <sup>222</sup> <sub>86</sub> Rn) + Be	3.82 j	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	13	500
<sup>227</sup> <sub>89</sub> Ac + Be	21.77 j	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	13	710
<sup>223</sup> <sub>88</sub> Ra + Be	11.43 j	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	13	610
<sup>210</sup> <sub>84</sub> Po + Be	138.38 j	<sup>9</sup> <sub>4</sub> Be(α, n) <sup>12</sup> <sub>6</sub> C	5.65	11	67
<sup>210</sup> <sub>84</sub> Po + B	138.38 j	<sup>10</sup> <sub>5</sub> B(α, n) <sup>13</sup> <sub>7</sub> N	1.11	6.4	22
<sup>210</sup> <sub>84</sub> Po + C	138.38 j	<sup>12</sup> <sub>6</sub> C(α, n) <sup>16</sup> <sub>8</sub> O	2.24	0.1 7.5	0.1

<sup>57</sup> R. G. Jaeger (Ed. en chef), *Engineering Compendium on Radiation Shielding, Volume I: Shielding Fundamentals and Methods*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1968, pp. 31-32.

# 13

## **Les données nucléaires et atomiques**



La connaissance et la disponibilité des données nucléaires et atomiques constituent un enjeu majeur pour l'ensemble des applications nucléaires. Elles sont issues de mesures réalisées dans des laboratoires<sup>1</sup> parmi lesquels, à titre illustratif, on peut actuellement citer en Europe : l'accélérateur linéaire GELINA (*GEel LINEar Accelerator*) de l'Institut des matériaux et des mesures de référence (IRMM) installé à Geel (Belgique), l'installation n-TOF située au CERN<sup>2</sup> lui-même construit à la frontière helvético-française, *Gesellschaft für Schwerionenforschung* (GSI) à Darmstadt, en Allemagne, le *Réacteur à Haut Flux* (RHF) de l'Institut Laue-Langevin (ILL) à Grenoble<sup>3</sup>, en France, l'installation *Neutron for Science* (NFS) au *Grand Accélérateur national d'Ions lourds* (GANIL) à Caen, l'installation ALTO (*Accélérateur Linéaire et Tandem à Orsay*) d'IJCLab à Orsay, les réacteurs expérimentaux du centre CEA de Cadarache, etc.

L'annexe I fournit quelques repères chronologiques sur l'élaboration, dans le monde, de **bases de données nucléaires** et de **logiciels de traitement** associés en particulier dans le domaine de la **physique des réacteurs nucléaires**. Il faut également noter qu'elles mobilisent des groupes de travail internationaux et font l'objet de rencontres internationales régulières (groupes de travail et conférences) telles que celles organisées par l'*Agence pour l'énergie nucléaire* (AEN) de l'OCDE<sup>4</sup>, axées sur l'évaluation de données nucléaires européenne « JEFF »<sup>5</sup>, l'*International Conference on Nuclear Data for Science and Technology – ND year* – et l'*International Workshop On Nuclear Data Evaluation for Reactor applications – WONDER* – conjointement organisés par l'OCDE/AEN et le CEA/Cadarache.

Le présent chapitre a pour objectif d'appréhender le lien entre :

- les données nucléaires et atomiques qui résultent à la fois de mesures et de la mise en œuvre de formalismes physico-mathématiques ;
- leur présence dans les équations qui régissent la propagation des particules dans la matière (équation de Boltzmann) ainsi que l'évolution temporelle des compositions isotopiques du milieu sous irradiation (équations de Bateman généralisées) (voir annexe II) ;
- leur mise en forme requise conjointement par les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations précitées et l'implémentation de ces méthodes dans des logiciels (ou codes) de calcul destinés à la fois à la recherche et aux applications industrielles<sup>6</sup>.

<sup>1</sup> Voir *La neutronique*, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire, Éditions Le Moniteur/CEA, 2013, 2015 (version anglaise), Chapitre « De la mesure à l'évaluation des données nucléaires », pp. 21-29.

<sup>2</sup> *Conseil européen pour la recherche nucléaire*, devenu *Organisation européenne pour la recherche nucléaire*.

<sup>3</sup> G. Kessedjian, A. Chebboubi, H. Faust, U. Köster, T. Materna, C. Sage, O. Serot, « Development of a Gas Filled Magnet spectrometer coupled with the Lohengrin spectrometer for fission study », WONDER-2012 – 3<sup>rd</sup> International Workshop On Nuclear Data Evaluation for Reactor applications, EPJ Web of Conferences 42 01007, 2013, <https://doi.org/10.1051/epjconf/20134201007>.

<sup>4</sup> OCDE : Organisation de coopération et de développement économiques dont le siège est à Paris.

<sup>5</sup> *Joint Evaluated Fission and Fusion file*.

<sup>6</sup> *La neutronique*, op. cit., Chapitre « Les principaux codes de calcul », pp. 127-142.

Si ces données nucléaires et atomiques sont de nature variée, comme l'ont montré les précédents chapitres, les sections efficaces occupent une place centrale.

Une première partie – **partie A** – est consacrée à un bref exposé des différents **modes de représentation des sections efficaces** d'interaction des particules neutres (neutron et gamma) avec la matière.

La **partie B** fournit des informations générales sur les **bases/bibliothèques de données nucléaires et atomiques évaluées** (*evaluated nuclear data libraries*) existantes plus directement dénommées « **évaluations** ». Elle se focalise ensuite sur la description du **traitement** effectué de ces données qui conduit à les compiler dans des bases de données spécifiques aussi appelées bibliothèques au format informatique approprié pour les rendre utilisables par les **codes de calcul** dédiés à la conception et à l'étude de systèmes nucléaires, les réacteurs nucléaires notamment. La problématique cruciale et complexe des **incertitudes associées aux données nucléaires** est brièvement évoquée, en indiquant des références permettant de l'aborder et de l'approfondir.

En annexe II, on rappelle les deux équations fondamentales de la neutronique, à savoir **l'équation de Boltzmann** (ou équation du transport) et les **équations de Bateman généralisées**, ainsi que la définition des différentes grandeurs physiques qui leur sont attachées, intéressant les études relatives au cœur des réacteurs nucléaires et des différentes étapes du cycle du combustible nucléaire. L'annexe III précise la notion d'**intégrale de résonance** utilisée dans le domaine expérimental et pour effectuer des calculs de taux de réaction à l'aide d'un formalisme physico-mathématique très simplifié.

## A. Les modes de représentation des sections efficaces

Dans la pratique les sections efficaces scalaires et différentielles sont représentées de différentes façons en fonction des variables dont elles dépendent. Ces représentations sont liées aux formalismes physico-mathématiques et aux méthodes numériques mises en œuvre pour résoudre les équations de transport et/ou d'évolution dont la présentation a été esquissée dans le chapitre 1<sup>7</sup>.

La méthode stochastique Monte-Carlo qui simule le cheminement des particules dans la matière utilise préférentiellement des **données nucléaires** dites « **ponctuelles** » (*pointwise*) en fonction des variables énergie et directionnelles.

Les **méthodes numériques déterministes** discrétisent l'espace des phases, en particulier le domaine en énergie qui est subdivisé en **groupes d'énergie** ; elles rendent nécessaire l'élaboration d'une base ou **bibliothèque de sections efficaces multigroupes**, c'est-à-dire moyennées sur chaque groupe d'énergie, construite à partir de la base de données de sections efficaces ponctuelles. On comprend du point de vue de la représentation des données nucléaires, toutes choses égales par ailleurs, qu'un calcul de transport Monte-Carlo utilisant les sections efficaces ponctuelles issues d'une évaluation de données nucléaires puisse constituer une référence pour un calcul déterministe qui exploite des

<sup>7</sup> Voir aussi *La neutronique, op. cit.* pp. 31-38.

sections efficaces multigroupes, par définition fabriquées sous des hypothèses modélisatrices.

## 1. La représentation ponctuelle

La représentation dite **ponctuelle** (*pointwise*) d'une section efficace, scalaire ou différentielle signifie que celle-ci est considérée formellement ou numériquement pour une énergie cinétique donnée de la particule incidente  $E$  ainsi que pour une énergie  $E'$  et une direction  $\vec{\Omega}'$  de la particule d'intérêt émise. Plusieurs exemples de représentation en ont été donnés dans le chapitre 8. On les note usuellement respectivement :

- $\sigma(E)$  pour la section efficace scalaire ;
- pour la section efficace différentielle (voir chapitre 8) :

$$\frac{d^3\sigma(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}')}{dE' d\vec{\Omega}'} \equiv \frac{1}{2\pi} \frac{d^2\sigma(E \rightarrow E', \mu_0)}{dE' d\mu_0} \equiv \frac{1}{2\pi} \sigma(E \rightarrow E', \mu_0) \quad (\text{A1.1})$$

en tenant compte de l'isotropie en  $\varphi$  de la diffusion (facteur  $1/2\pi$ ) par rapport à la direction initiale du neutron  $\vec{\Omega} : \mu_0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$  (voir figure 1). On pose :  $\mu = \cos \theta$  et  $\mu' = \cos \theta'$ .

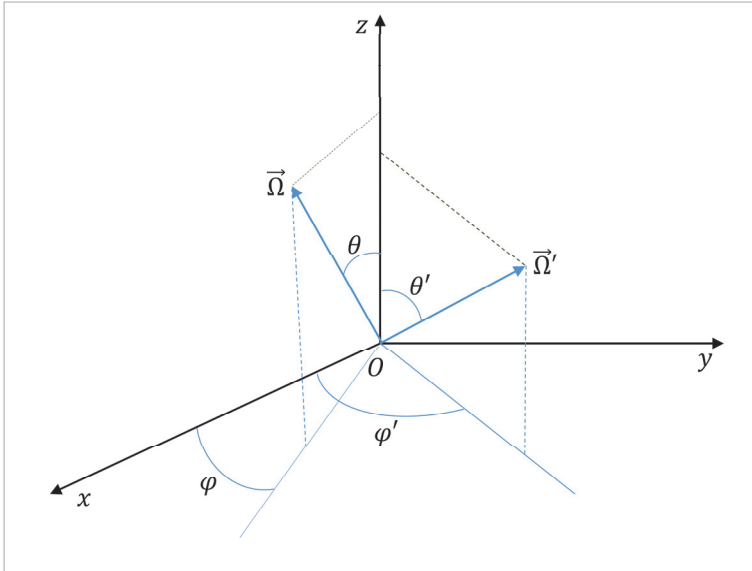


Figure A1. Représentation en coordonnées sphériques des vecteurs unitaires  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{\Omega}'$  respectivement associés aux directions du neutron avant et après diffusion. Les composantes des directions  $\vec{\Omega}$  et  $\vec{\Omega}'$  et leur produit scalaire sont :

$$\vec{\Omega} \begin{cases} \sqrt{1-\mu^2} \cos \varphi \\ \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi \\ \mu \end{cases} \quad \vec{\Omega}' \begin{cases} \sqrt{1-\mu'^2} \cos \varphi' \\ \sqrt{1-\mu'^2} \sin \varphi' \\ \mu' \end{cases}$$

$$\mu_0 = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}' = \mu\mu' + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu'^2)} \cos(\varphi - \varphi')$$

## 2. La représentation multigroupe

La représentation dite **multigroupe** consiste à définir une valeur moyenne de la section efficace sur un intervalle donné du domaine d'énergie considéré que l'on a préalablement discrétisé. Cet intervalle est dénommé **groupe d'énergie** dans le domaine de la physique des réacteurs nucléaires. On désigne par «  $g$  » un de ces groupes d'énergie. La section efficace multigroupe relative au groupe d'énergie  $g$  est définie par :

$$\sigma_g = \frac{\int_{E_g}^{E_{g+1}} f(E) \sigma(E) dE}{\int_{E_g}^{E_{g+1}} f(E) dE} \quad (\text{A2.1})$$

où  $f(E)$  est une fonction de pondération « bien choisie » en rapport avec la nature du problème à traiter<sup>8</sup>.

Ce mode de représentation des sections efficaces, illustré par la **figure 2**, substitue donc à leur **représentation continue**  $\{E, \sigma(E)\}$  une **représentation discrète**  $\{g, \sigma_g\}$ .

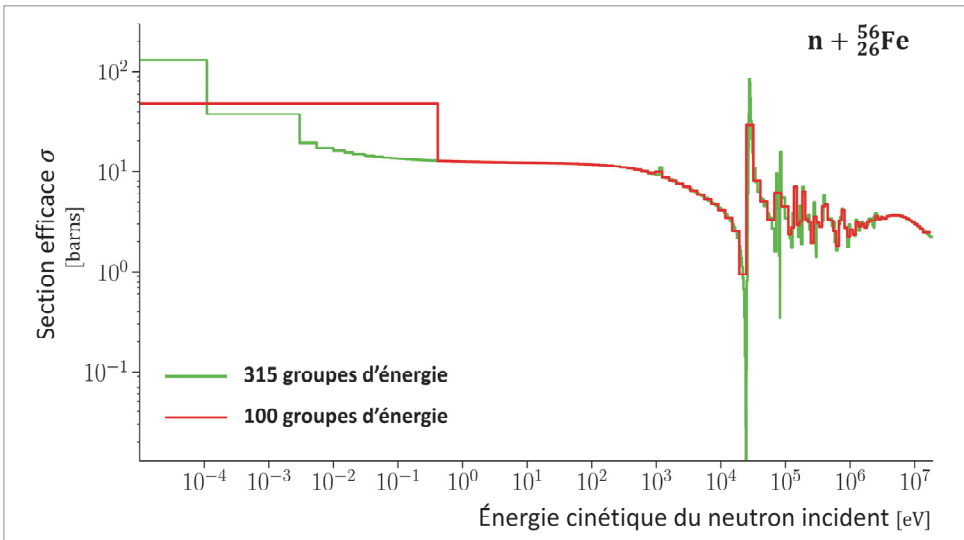


Figure A.2. Représentation de la section efficace microscopique totale « multigroupe » de l'interaction d'un neutron avec l'isotope du fer  $^{56}\text{Fe}$ . Le tracé rouge correspond à la section efficace totale sur un découpage à 100 groupes d'énergie du domaine  $[0, 20 \text{ MeV}]$  ; le tracé vert est celui de la section efficace totale sur un découpage sensiblement plus fin à 315 groupes d'énergie du domaine  $[0, 20 \text{ MeV}]$ .

<sup>8</sup> Dans le domaine de neutronique, la construction de sections efficaces multigroupes peut se faire de différentes manières ; en raison du phénomène dit d'« autoprotection » des résonances il s'agit d'un problème délicat faisant toujours l'objet de travaux de recherche, voir *La neutronique*, op. cit., pp. 64-72.



**Remarque :**

On voit sur (2.1) que :

$$F(E) = \frac{f(E)}{\int_{E_g}^{E_{g+1}} f(E) dE} \quad (\text{A2.2})$$

s'interprète comme une densité de probabilité associée à  $\sigma(E)$  considérée comme une variable aléatoire.

On donne ci-après quelques exemples de la fonction  $f(E)$  que l'on rencontre dans le domaine de la physique des systèmes nucléaires sur la gamme d'énergie 0 – 20 MeV, l'énergie  $E$  étant exprimée en eV.

- **Spectre de Maxwell** à une température donnée  $T$

$$f(E) = \frac{2\pi}{(\pi k_B T)^3} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) \quad \text{neutrons eV}^{-1} \quad (\text{A2.3})$$

$k_B$  : constante de Boltzmann ; exemple :  $k_B T = 0.0253$  eV.

- **Spectres de fission** (voir chapitre 9)

- *Spectre de Watt* :

$$f(E) = 2 \exp\left(-\frac{ab}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi b a^3}} \exp\left(-\frac{E}{a}\right) \text{sh} \sqrt{bE} \quad \text{neutrons eV}^{-1} \quad (\text{A2.4})$$

Exemple de valeur des paramètres  $a$  et  $b$  pour la fission de l'uranium 235 induite par neutron :

$$1/a = 1.036 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^{-1}, \quad b = 2.29 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^{-1}.$$

- autre spectre :

$$f(E) = \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{\theta}\right) \quad \text{neutrons eV}^{-1} \quad (\text{A2.5})$$

$$\theta = 1.4 \times 10^6 \text{ eV}$$

- **Spectre de ralentissement**

$$f(E) = \frac{1}{E} \quad \text{neutrons eV}^{-1} \quad (\text{A2.6})$$

▪ **Spectres de fusion**

$$f(E) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left[\frac{E - \langle E \rangle}{\alpha}\right]^2\right) \quad \text{neutrons eV}^{-1} \quad (\text{A2.7})$$

pour  $E > 12.523 \cdot 10^6 \text{ eV}$ ,  $\langle E \rangle = 14.07 \cdot 10^6 \text{ eV}$ ,  $\alpha = 0.53199 \cdot 10^6 \text{ eV}$

$$f(E) = \exp\left(-\frac{5}{k_B T} [\sqrt{E} - \sqrt{E_p}]^2\right) \quad \text{neutrons eV}^{-1} \quad (\text{A2.8})$$

$$k_B T = 0.025 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

$$E_p = 1.4 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

▪ **Spectre mixte fission et fusion**

$$f(E) = a + \sqrt{E} \exp\left(\frac{6E}{b}\right) + c \exp\left(-5 \left[\sqrt{\frac{E}{d}} - \sqrt{\frac{e}{d}}\right]^2\right) \quad \text{neutrons.eV}^{-1} \quad (\text{A2.9})$$

avec :

$$a = 2.324 \cdot 72 \cdot 10^{-12} \text{ eV}^{-1}$$

$$b = 1.4 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

$$c = 2.516 \cdot 97 \cdot 10^{-11} \text{ eV}^{-1}$$

$$d = 2.5 \cdot 10^4 \text{ eV}$$

$$e = 1.407 \cdot 10^7 \text{ eV}$$

- Spectre décrit par points en énergie (spectre précalculé ou mesuré) : dans ce cas, sont spécifiées les valeurs ponctuelles du spectre et les lois d'interpolation à appliquer entre deux points en énergie.

### 3. La représentation sous forme de tables de probabilité

Le **mode table de probabilité** introduit un niveau de description supplémentaire de la section efficace à l'intérieur d'un groupe d'énergie : à l'intérieur d'un même groupe d'énergie, la section efficace peut prendre plusieurs valeurs, chacune de ces valeurs,  $\sigma_i$ , étant affectée d'un poids ou d'une probabilité,  $p_i$ .

La section efficace dans un groupe d'énergie donné  $[E_g, E_{g+1}]$  est donc représentée par un ensemble de couples  $(p_i, \sigma_i)$  appelé **table de probabilité** associée au groupe  $g$ .<sup>9 10</sup>

Dans sa formulation la plus simple, cette représentation définit les couples  $(p_{i,g}, \sigma_{i,g})$  de la

<sup>9</sup> D. E. Cullen, « Application of the Probability Table Method to Multigroup Calculations of Neutron Transport », *Nuclear Science and Engineering*, 55, 1974, 387-400, <https://doi.org/10.13182/NSE74-3>.

<sup>10</sup> P. Ribon, J. M. Maillard, *Les tables de probabilité. Application au traitement des sections efficaces pour la neutronique*, Note CEA-N-2485, CEA/Saclay, France.

manière suivante :

$$p_{i,g} = \frac{\int_{E_g}^{E_{g+1}} \delta(\sigma(E), i) dE}{E_{g+1} - E_g}, \quad \delta(\sigma(E), i) = 1 \text{ si } S_{i-1} \leq \sigma(E) \leq S_i, 0 \text{ sinon} \quad (\text{A3.1})$$

$$p_{i,g} \sigma_{i,g} = \frac{\int_{E_g}^{E_{g+1}} \sigma(E) \delta(\sigma(E), i) dE}{E_{g+1} - E_g} \quad (\text{A3.2})$$

où les  $S_i$  sont des valeurs discrètes choisies de la section efficace considérée, délimitant ainsi des intervalles ou **paliers**. La **figure 3** schématise ce mode de représentation :

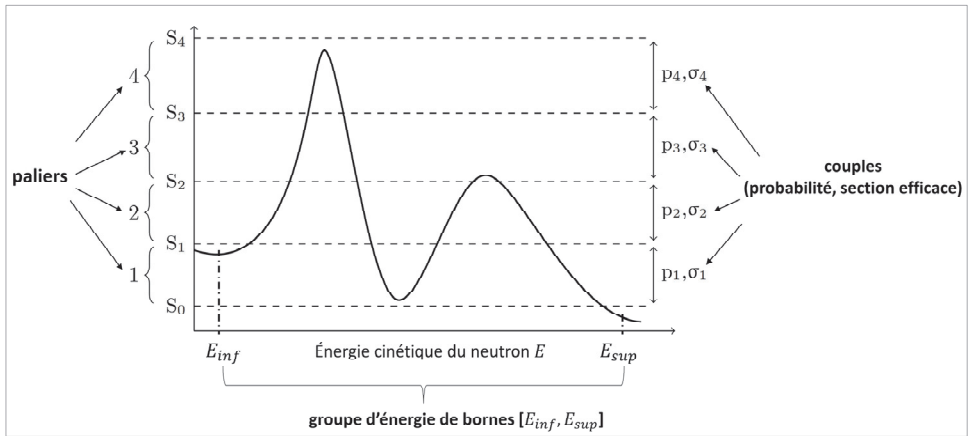


Figure A3. Représentation schématique d'une section efficace par une table de probabilité dans un intervalle (ou groupe) d'énergie dont les bornes sont  $E_{inf}$  et  $E_{sup}$ .

Une méthode plus sophistiquée, appelée **méthode des moments**<sup>11 12</sup>, permet d'obtenir les couples  $(p_{i,g}, \sigma_{i,g})$ . Ce type de représentation a été initialement introduit pour décrire les sections efficaces dans le **domaine d'énergie non résolu** (voir chapitre 8 § 4), c'est-à-dire dans lequel les résonances sont si nombreuses qu'un traitement statistique apparaît tout à fait adapté.

<sup>11</sup> P. Ribon, J. M. Maillard, *Les tables de probabilité. Application au traitement des sections efficaces pour la neutronique*, op. cit.

<sup>12</sup> J.-C. Sublet, P. Ribon, M. Coste-Delclaux, CALENDF-2010: User Manual, Rapport CEA-R-6277, 2011 ; <http://www.oecd-nea.org/tools/abstract/detail/nea-1278>.

Il a été étendu avec succès au domaine résolu où les résonances sont bien distinctes les unes des autres.<sup>13 14</sup> Si la table de probabilité se réduit à un seul couple, alors ce mode de description des sections efficaces coïncide avec le mode multigroupe classique (voir relation (A2.1)).

#### 4. Représentation des transferts énergétique et angulaire ponctuels

Plusieurs cas de figure sont à considérer relatifs à l'interdépendance angle-énergie du processus collisionnel.<sup>15 16 17 18</sup>

##### 4.1. Cas d'une indépendance entre angle et énergie de déviation

La section efficace microscopique différentielle de diffusion se présente sous une forme où les distributions angulaire  $h(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}')$  et énergétique  $q(E, E')$  sont factorisées (dans le système du centre de masse ou dans celui du laboratoire) :

$$\sigma_s(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}') = \sigma_s(E) \frac{1}{2\pi} h(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') q(E, E') = \sigma_s(E) \frac{1}{2\pi} h_E(\mu)(E, E') \quad (\text{A4.1})$$

où l'on a posé  $\mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}'$  (voir figure 1) en prenant comme axe de référence la direction  $\vec{\Omega}$  du neutron incident.

L'anisotropie  $h_E(\mu)$  du processus de diffusion peut être décrite de différentes façons pour une valeur fixée de l'énergie  $E$ . Trois modes de représentation sont couramment rencontrés :

- le développement sur la base des polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre  $\ell = L$  :

$$h_E(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} a_{\ell}(E) P_{\ell}(\mu) \quad (\text{A4.2})$$

<sup>13</sup> L. Lunéville, *Méthode multibande aux ordonnées discrètes. Formalisme et résultats*, Note CEA-N-2832, juin 1998 ; L. Lunéville, « Multiband Discrete Ordinates Calculations », *Radiation Protection and Shielding Conference*, ANS, Nashville, USA, *Proceedings*, Vol. I, 1998, pp. 465-472.

<sup>14</sup> S. H. Zheng, T. Vergnaud, J.-C. Nimal, « Neutron-Cross Section Probability Tables in Tripoli-3 Monte Carlo Transport Code », *Nuclear Science and Engineering*, 128, 1998, pp. 321-328 ; <https://doi.org/10.13182/NSE98-A1959>.

<sup>15</sup> H. Brockmann, « Treatment of Anisotropic Scattering in Numerical Neutron Transport Theory », *Nuclear Science and Engineering*, 77, 1981, pp. 377-414 ; <https://doi.org/10.13182/NSE81-3>.

<sup>16</sup> C. Kalbach, F. M. Mann, « Phenomenology of continuum angular distributions. I. Systematics and parametrization », *Physical Review C*, Vol. 23, Number 1, January 1981, pp. 112-123 ; <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.23.112>.

<sup>17</sup> C. Kalbach, « Phenomenology of continuum angular distributions. II. Griffin preequilibrium model », *Physical Review C*, Vol. 23, Number 1, January 1981, pp. 124-135 ; <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.23.124>.

<sup>18</sup> C. Kalbach, « Systematics of continuum angular distributions: extensions to higher energies », *Physical Review C*, Vol. 37, Number 6, 1988, pp. 2350-2370 ; <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.37.2350>.

où les  $a_\ell(E)$  sont les coefficients du développement de l'anisotropie sur la base des polynômes de Legendre  $P_\ell(\mu)$  d'ordre  $\ell$  et qui sont tabulés jusqu'à un ordre fixé  $L$  :

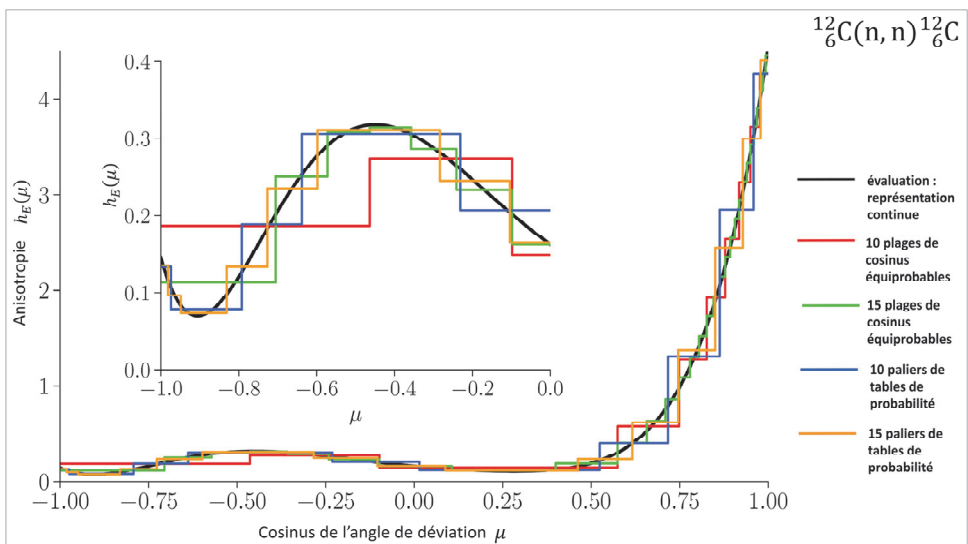
$$a_\ell(E) = \int_{-1}^{+1} h_E(\mu) P_\ell(\mu) d\mu \quad (\text{A4.3})$$

- la tabulation de  $h_E(\mu)$  pour  $N$  valeurs de  $\mu$  :  $\{\mu_k, h_E(\mu_k)\}_{k=1,N}$  à laquelle est associée une ou plusieurs lois d'interpolation en  $\mu$  ;
- une suite de cosinus délimitant  $N$  aires équiprobables  $\{\mu_k, h_E(\mu_k)\}_{k=1,N}$  entre lesquels la densité  $h_E(\mu)$  est approximée par une densité constante,  $p_E(\mu)$  :

$$h_E(\mu) \approx p_E(\mu) = \frac{1}{N} \frac{1}{\mu_{k+1} - \mu_k}, \quad \mu_k \leq \mu < \mu_{k+1} \quad (\text{A4.4})$$

- une table de probabilités.

La **figure 4** superpose ces différentes représentations dans le cas de la diffusion d'un neutron sur un noyau de carbone 12.



équiprobables – en rouge et vert : 10 et 15 pages – et enfin à la représentation continue (en noir) du développement en polynômes de Legendre issue directement de l'évaluation.<sup>19</sup> La région [-1,0] est grossie.

On notera que plus une diffusion est anisotrope, plus il faut de termes de la série de Legendre ou d'intervalles de cosinus équiprobables ou encore de paliers pour en représenter suffisamment fidèlement l'anisotropie.

Le transfert en énergie  $q(E, E')$  est donné sous forme d'un spectre analytique ou bien d'une tabulation avec lois d'interpolation associées.

#### 4.2. Cas d'une dépendance entre angle et énergie de déviation

C'est le cas des diffusions élastique et inélastique des neutrons par un noyau cible étudiées dans le chapitre 8. L'énergie  $E'$  après interaction est déduite d'une relation cinématique en fonction de l'énergie cinétique  $E$  du neutron incident et du cosinus  $\mu$  de l'angle de déviation du neutron diffusé par rapport à la direction initiale d'incidence.

#### 4.3. Cas général des sections efficaces doublement différentielles en angle et en énergie

Les différents modes possibles de représentation sont :

- le développement sur la base des polynômes de Legendre jusqu'à l'ordre  $\ell = L$  :

$$\sigma_s(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}') = \frac{1}{2\pi} \sigma_s(E, \rightarrow E', \mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') = \sigma_s(E) \frac{1}{2\pi} H(E, \rightarrow E', \mu) \quad (\text{A4.5})$$

$$\begin{aligned} \sigma_s(E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}') &= \frac{1}{2\pi} \sigma_s(E, \rightarrow E', \mu = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \\ &= \sigma_s(E) \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} a_{\ell}(E \rightarrow E') P_{\ell}(\mu) \end{aligned} \quad (\text{A4.6})$$

où les  $a_{\ell}(E \rightarrow E')$  sont les coefficients du développement de l'anisotropie sur la base des polynômes de Legendre  $P_{\ell}(\mu)$  d'ordre  $\ell$  et qui sont tabulés jusqu'à un ordre fixé  $L$  :

$$a_{\ell}(E \rightarrow E') = \int_{-1}^{+1} H(E, \rightarrow E', \mu) P_{\ell}(\mu) d\mu \quad (\text{A4.7})$$

- la tabulation en énergie et en angle des distributions énergétique  $q()$  et angulaire  $h()$  après collision :

$$\left\{ E_i \left\{ E'_{i,k}, q(E_i \rightarrow E'_{i,k}), \{ \mu_{i,k,j}, h(\mu_{i,k,j}) \}_{j=1,} \right\}_{k=1,K} \right\}_{i=1,I}$$

<sup>19</sup> P. Ribon, M. Coste-Delclaux, C. Jouanne, C. M. Diop, « Angular anisotropy representation by probability tables », *International Conference on the Physics of Reactors « Nuclear Power: A Sustainable Resource »*, Casino-Kursaal Conference Center, Interlaken, Switzerland, September 14-19, 2008.

pour lesquelles sont spécifiées les lois d'interpolation à appliquer relativement aux variables énergétiques et angulaire :  $E$ ,  $E'$  et  $\mu$ . Comme au paragraphe A4.2, la distribution angulaire peut être décrite à l'aide d'une suite de cosinus limitant  $N$  aires équiprobables (voir équation (A4.4)).

## 5. Représentation des transferts énergétique et angulaire multigroupes

Les transferts en énergie et en angle ont une forme similaire au cas ponctuel ; aux énergies ponctuelles  $E$  et  $E'$ , on substitue les groupes d'énergie  $g$  et  $g'$  respectivement. Ils sont obtenus par intégration sur les énergies des groupes d'énergie de départ ( $g$ ) et d'arrivée ( $g'$ ). La section efficace microscopique multigroupe de diffusion s'écrit donc :

$$\sigma_{g \rightarrow g'}(\mu) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \sigma_{\ell, g \rightarrow g'} P_{\ell}(\mu) \quad (\text{A5.1})$$

avec :

$$\sigma_{\ell, g \rightarrow g'} = \frac{\int_{E_{g'}}^{E_{g'+1}} dE f(E) \int_{E_g}^{E_{g+1}} dE' \int_{-1}^{+1} \sigma_s(E \rightarrow E', \mu) P_{\ell}(\mu) d\mu}{\int_{E_g}^{E_{g+1}} f(E) dE} \quad (\text{A5.2})$$

Il est à noter que l'obtention de sections efficaces multigroupes appropriées pour traiter des problèmes de neutronique est un problème complexe.<sup>20</sup>

## B. Évaluations des données nucléaires et atomiques – Traitement pour les codes de transport de particules et d'évolution temporelle isotopique.

Différentes bases de données nucléaires et atomiques sont mises à disposition des utilisateurs par des organismes internationaux. S'agissant des caractéristiques des nucléides telles que celles rencontrées dans le chapitre 3, on recense parmi d'autres les bases de données suivantes :

- la *Live Chart of Nuclides* de l'Agence internationale de l'énergie atomique (AIEA) de Vienne en Autriche : <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html> ;
- la *Karlsruhe Nuclide Chart* : <https://ec.europa.eu/jrc/en/training-programme/karlsruhe-nuclide-chart><sup>22</sup> ;
- la *Table of nuclides* du Nuclear Data Center du Korea Atomic Energy Research Institute (KAERI) : <https://atom.kaeri.re.kr/> ;

<sup>20</sup> *La neutronique, op. cit.*, pp. 51-72.

<sup>21</sup> Z. Soti, J. Magill, R. Dreher, « Karlsruhe Nuclide Chart – New 10<sup>th</sup> edition 2018 », *EPJ Nuclear Sci. Technol.*, Volume 5, 6, 2019, <https://doi.org/10.1051/epjn/2019004>.

<sup>22</sup> *Ibid.*, pp. 1-11.

- La *Chart of Nuclides* du *National Nuclear Data Center* du *Brookhaven National Laboratory* aux États-Unis : <https://www.nndc.bnl.gov/nudat2/> ;
- Les « Données atomiques et nucléaires » du Laboratoire National Henri Becquerel (LNHB) au CEA, en France : <http://www.lnhb.fr/donnees-nucleaires/donnees-nucleaires-tableau/>.

L'utilisation des données physiques de base ne se réduit pas à une simple exploitation des résultats de mesures stockés dans un fichier informatique, mais demande de traiter ces données par des formalismes physico-mathématiques et des logiciels associés afin d'aboutir à des ensembles de données cohérents appelés évaluations.

Ces évaluations sont à leur tour traitées sur le plan physique, numérique et informatique pour constituer des bibliothèques de données exploitables par les codes de transport de particules et d'évolution temporelle des radionucléides formés par irradiation. Il est aussi important de disposer des valeurs des incertitudes associées aux valeurs des données stockées.

Le volume d'informations enregistrées dans une évaluation ou une bibliothèque de données physiques se chiffre en centaines de mégaoctets, en gigaoctets, voire en téraoctets.

Évaluations et bibliothèques, tout comme le code de neutronique, ont un nom et font l'objet d'un versionnage qui les identifie. Ce point est essentiel pour assurer la traçabilité des résultats des calculs applicatifs exécutés ainsi que le contrôle de leur qualité.

Les informations reportées dans cette section n'ont pas vocation à être exhaustives. L'objectif est de donner un bref aperçu des bases de données nucléaires, dénommées « évaluations » :

- les organismes qui mettent ces évaluations à la disposition de la communauté scientifique internationale ;
- les évaluations existantes qui préférentiellement intéressent le domaine des réacteurs nucléaires : neutrons, gamma, particules chargées dans la gamme d'énergie entre 0 et 20 MeV ;
- leur structuration dans les fichiers informatiques sur lesquels elles sont stockées ;
- les logiciels qui soit contribuent à leur genèse, soit les traitent<sup>23</sup> dans le but de les rendre aptes à être exploitables par les codes de simulation de la propagation des neutrons, des photons et des particules chargées dans la matière ainsi que par les codes de simulation de la transmutation isotopique.

Ce descriptif s'appuie sur l'ensemble des notions présentées dans les précédents chapitres.

## 1. Les organismes de distribution des bases de données nucléaires et atomiques

Les données nucléaires et atomiques destinées notamment aux études de réacteurs

---

<sup>23</sup> D. E. Cullen, « Nuclear Data Preparation », dans Cacuci, Dan Gabriel (Ed.), *Handbook of Nuclear Engineering*, Vol. 1: *Nuclear Engineering Fundamentals*, Springer, Boston, MA, 2010, pp. 189-238.



nucléaires proviennent de mesures et de modèles physiques. On les désigne aussi par le vocable de données physiques de base. Elles sont rendues disponibles :

- soit sous la forme d'une **compilation** informatique des données expérimentales, à l'instar de la base *Experimental Nuclear Reaction Data (EXFOR)* relative aux réactions nucléaires induites par les neutrons, les particules chargées et les photons jusqu'à une énergie de 1 GeV<sup>24 25</sup>, dont le développement et la maintenance sont coordonnés par l'AIEA (<https://www-nds.iaea.org/exfor/>) ;
- soit sous la forme d'une **évaluation**<sup>26</sup>. Dans ce cas, elles sont produites par des physiciens nucléaires, dénommés **évaluateurs**, à la suite d'un délicat et long travail d'analyse des résultats de mesures ( $\approx 1$  homme · an/isotope), de mise en œuvre de méthodes d'ajustements et de formalismes théoriques.<sup>27</sup> À cette fin, des codes de calcul spécifiques sont développés et mis en œuvre, parmi lesquels les codes **SAMMY**<sup>28</sup>, **TALYS**<sup>29</sup>, **GEF**<sup>30</sup>, **CONRAD**<sup>31</sup>, **FIFRELIN**<sup>32 33</sup>, etc. Ces données nucléaires évaluées sont rassemblées dans un ou plusieurs fichiers informatiques et constituent ce que l'on appelle une **évaluation**.

Les évaluations sont distribuées par des organismes nationaux et internationaux habilités tels que ceux indiqués dans le tableau B.1.

**Tableau B1. Organismes distributeurs de données physiques de base pour la physique des réacteurs nucléaires.**

<sup>24</sup> N. Otuka *et al.*, « Towards a More Complete and Accurate Experimental Nuclear Reaction Data Library (EXFOR): International Collaboration Between Nuclear Reaction Data Centres (NRDC) », *Nuclear Data Sheets* 120, 2014, pp. 272–276.

<sup>25</sup> V. V. Zerkina, B. Pritychenko, « The experimental nuclear reaction data (EXFOR): Extended computer database and Web retrieval system », *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A*, Volume 888, 21 April 2018, pp 31-43.

<sup>26</sup> P. Obložinsky, M. Herman, S. F. Mughabghab, « Evaluated Nuclear Data », dans *Handbook of Nuclear Engineering*, *op. cit.*, chapitre 3.

<sup>27</sup> M. Salvatores, É. Fort, « Améliorer et compléter les données nucléaires indispensables aux neutroniciens », dans *Clefs CEA*, n° 45, automne 2001, p. 22-29. BNL-90873-2009-BC.

<sup>28</sup> N. M. Larson, *Updated users guide for SAMMY: multilevel R-matrix fits to neutron data using Bayes equations*, ORNL/TM-9179/R8, ENDF-364/R2, Nuclear Science and Technology Division, UT Batelle, 2008.

<sup>29</sup> A. J. Koning, D. Rochman, « Modern Nuclear Data Evaluation with the TALYS code system », *Nuclear Data Sheets*, Volume 113, Issue 12, December 2012, pp. 2841-2934 ; A. Koning, S. Hilaire, S. Goriely, *TALYS-1.8, A nuclear reaction program, User Manual*, December 26, 2015 <http://www.talys.eu/documentation/>.

<sup>30</sup> K.-H. Schmidt, B. Jurado, C. Amouroux, *General view on nuclear fission*, 2014 ; <http://hal.in2p3.fr/in2p3-00976648>.

<sup>31</sup> C. De Saint Jean, B. Habert, O. Litaize, G. Noguère, C. Suteau, « Status of CONRAD, a nuclear reaction analysis tool », *International Conference on Nuclear Data for Science and Technology*, Nice, France (2007) ; <http://nd2007.edpsciences.org/>.

<sup>32</sup> O. Litaize, O. Serot, « Investigation of phenomenological models for the Monte-Carlo simulation of the prompt fission neutron and gamma emission », *Physical Review C* 82, 054616, 2010.

<sup>33</sup> H. Almazán, L. Bernard, A. Blanchet *et al.*, « Improved STEREO simulation with a new gamma ray spectrum of excited gadolinium isotopes using FIFRELIN », *The European Physical Journal A* 55, 183, 2019 ; <https://doi.org/10.1140/epja/i2019-12886-y>.

<b>BNL/NNDC</b>	Le <i>National Nuclear Data Center</i> du <i>National Brookhaven Laboratory</i> aux États-Unis : <a href="http://www.nndc.bnl.gov/">http://www.nndc.bnl.gov/</a> .
<b>OCDE/AEN</b>	L'Agence pour l'énergie nucléaire de l'Organisation de coopération et de développement européenne, dont le siège est à Paris, en France : <a href="https://www.oecd-neo.org/nea/index-fr.html">https://www.oecd-neo.org/nea/index-fr.html</a> <sup>34</sup>
<b>IAEA/NDS</b>	Le <i>Nuclear Data Services</i> de l' <i>International Atomic Energy Agency</i> à Vienne, en Autriche : <a href="https://www.nds.iaea.org/">https://www.nds.iaea.org/</a> . Le NDS anime le <i>International Network of Nuclear Reaction Data Centres</i> (NRDC).
<b>FEI/CJD</b>	Le <i>Centre Jadernykh Dannyykh</i> ( <i>Russian Nuclear Data Center</i> ) du <i>Fiziko-Energeticheskij Institut</i> ( <i>Institute of Physics and Power Engineering</i> , IPPE) à Obninsk en Russie.

La plupart de ces bases de données sont accessibles par le **réseau Internet**. Les centres de distribution susmentionnés publient des lettres d'information – ***Nuclear Data News Letter***, ***Nuclear Data Sheets*** par exemple – et mettent périodiquement à jour des compilations de données nucléaires. Par exemple, la base de données **CINDA** – **Computer Index of Neutron Data** – contient les références bibliographiques sur l'ensemble des réactions induites par les neutrons.<sup>35</sup>

Un nom est attribué à ces fichiers de données et/ou évaluations : il caractérise la provenance des données nucléaires et atomiques ainsi que leur niveau de mise à jour.

Le **tableau B2** donne quelques exemples d'évaluations utilisées aujourd'hui par les codes de calcul (transport de particules, évolution isotopique temporelle) du domaine de la physique des réacteurs nucléaires.

Plusieurs de ces évaluations partagent un **même format informatique** d'origine américaine et adopté de fait au plan international : c'est le format dénommé **ENDF-*x***<sup>36</sup> – **ENDF : *Evaluated Nuclear Data File*** – où le suffixe *x* est un chiffre arabe qui spécifie la version de ce format. Il est décrit de manière exhaustive dans une publication spécifique<sup>37</sup>.

Les données physiques des évaluations de données nucléaires **ENDF/B-VII** et **JEFF-3** sont organisées selon le même format, le **format ENDF-6**.

D'autres bases d'informations existent, relatives aux **données spectroscopiques** et de **décroissance radioactive** (voir § B3).

<sup>34</sup> Voir aussi A. Hasegawa, H. Henriksson, F. J. Mompean, C. Nordborg, Y. Rugama, E. Sartori, « Nuclear data activities at the NEA Data Bank », 2014, OECD, *International Conference on Nuclear Data for Science and Technology* 2007 ; <https://doi.org/10.1051/ndata:07686>.

<sup>35</sup> <https://www.nds.iaea.org/exfor/cinda.htm>.

<sup>36</sup> R. E. MacFarlane, LANL, « An Introduction to the ENDF Formats », *Workshop on Nuclear Data and Nuclear Reactors Physics, Design and Safety*, Trieste 13-March -14 April 2000, LNS 015012, <https://www.osti.gov/etdeweb/servlets/purl/20854877>.

<sup>37</sup> *ENDF-102 - ENDF-6 Formats Manual, Data Formats and Procedures for the Evaluated Nuclear Data File ENDF/B-VI and ENDF/B-VII*, June 2009, National Nuclear Data Center (NNDC), Brookhaven National Laboratory, USA. Rapport faisant l'objet de versions révisées.

Tableau B.2. Évaluations de données physiques de base utilisées par les codes de propagation de rayonnements et d'évolution isotopique temporelle.

Sigle de l'évaluation	Signification de l'acronyme	Origine	Site web d'accès <sup>38</sup>
ENDF/B-VIII <sup>39</sup>	Evaluated Nuclear Data File	BNL/NNDC, USA	<a href="https://www.nndc.bnl.gov/ndf/">https://www.nndc.bnl.gov/ndf/</a> Évaluation contenant des données pour 3821 nucléides allant de l'hydrogène au fermium, dont 557 relatifs aux interactions avec les neutrons.
JEFF-3.3 <sup>40</sup>	Joint Evaluated Fission and Fusion file	OCD/AEN/ Data Bank, France	<a href="https://www.oecd-neo.org/dbdata/jeff/jeff33/index.html">https://www.oecd-neo.org/dbdata/jeff/jeff33/index.html</a> Évaluation contenant des données pour 3852 nucléides allant de l'hydrogène au fermium, dont 562 relatifs aux interactions avec les neutrons.
JENDL-4	Japanese Evaluated Data Library	Japan Atomic Energy Agency, Japon	<a href="https://www.nndc.jaea.go.jp/jendl/j40/j40.html">https://www.nndc.jaea.go.jp/jendl/j40/j40.html</a> Évaluation contenant des données pour 406 nucléides allant de l'hydrogène au fermium, relativement aux interactions avec les neutrons.
CENDL-3	Chinese Evaluated Data Library	Chinese Nuclear Data Center, Institute of Atomic Energy, Chine	<a href="http://www.nuclear.csdb.cn/">http://www.nuclear.csdb.cn/</a> et via <a href="http://www.oecd-neo.org/janisweb/search/ndf">http://www.oecd-neo.org/janisweb/search/ndf</a> ou <a href="https://www-nds.iaea.org/exfor/ndf.htm">https://www-nds.iaea.org/exfor/ndf.htm</a> Évaluation contenant des données pour 240 nucléides allant de l'hydrogène au californium, relativement aux interactions avec les neutrons.
FENDL-3.1d	Fusion Evaluated Nuclear Data Library	IAEA/ND, Autriche	<a href="http://www-nds.iaea.org/fendl/">http://www-nds.iaea.org/fendl/</a> Évaluation contenant des données pour 71 nucléides d'intérêt pour la fusion thermonucléaire, relativement aux interactions avec les neutrons.
BROND	Библиотека Рекомендованных Оцененных Нейтронных Данных	Obninsk Data Center, Russie	<a href="https://vant.ippe.ru/en/brond-3-1">https://vant.ippe.ru/en/brond-3-1</a> Évaluation contenant des données pour 121 nucléides allant de l'hydrogène au californium, relativement aux interactions avec les neutrons.
ROSFOND (ou RUSFOND)	RUSSian File Of evaluated Neutron Data	Obninsk Data Center, Russie	<a href="https://vant.ippe.ru/en/year2007/neutron-constants/774-1.html">https://vant.ippe.ru/en/year2007/neutron-constants/774-1.html</a> Évaluation contenant des données pour 686 nucléides allant de l'hydrogène au fermium, relativement aux interactions avec les neutrons.
TENDL	TALYS-based Evaluated Nuclear Data Library	Nuclear Research and Consultancy Group (NRG), Pays-Bas	<a href="https://tendl.web.psi.ch/tendl_2019/tendl2019.html">https://tendl.web.psi.ch/tendl_2019/tendl2019.html</a> Évaluation contenant des données pour 2 600 nucléides.
EAF-2010	European	Europe :	<a href="https://www-nds.iaea.org/public/download-ndf/EAF-2010-n-">https://www-nds.iaea.org/public/download-ndf/EAF-2010-n-</a>

<sup>38</sup> Il est à noter que plusieurs de ces sites offrent à l'utilisateur des utilitaires s'exécutant en ligne pour récupérer sous forme de fichiers et afficher dans des tableaux ou représenter graphiquement ces données nucléaires. L'OCDE/AEN distribue l'outil de manipulation, consultation et visualisation des données nucléaires « Janis - Java-based Nuclear Data Information System » : <https://www.oecd-neo.org/janis/> ; Brookhaven National Laboratory propose l'outil « sigma » : <https://www.nndc.bnl.gov/sigma/basicsearch.jsp> ; JAEA : <https://www.nndc.jaea.go.jp/tools/index.html> ; IAEA : <https://www-nds.iaea.org/exfor/ndf.htm>.

<sup>39</sup> D. A. Brown, M. B. Chadwick, *et al.*, « ENDF/B-VIII.0: The 8<sup>th</sup> Major Release of the Nuclear Reaction Data Library with CIELO-project Cross Sections, New Standards and Thermal Scattering Data », *Nuclear Data Sheets*, Vol. 148, February 2018, pp. 1-142 ; <https://doi.org/10.1016/j.nds.2018.02.001>.

<sup>40</sup> A. J. M. Plompen, O. Cabellos, C. De Saint Jean *et al.*, « The joint evaluated fission and fusion nuclear data library, JEFF-3.3 ; », *Eur. Phys. J. A* 56, 181 (2020) ; <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-020-00141-9>.

	Activation File	OCDE/AEN, France	<a href="#">index.htm</a> Évaluation contenant des données pour 818 nucléides cibles et des neutrons incidents d'énergie allant jusqu'à 60 MeV.
EPDL-92	Evaluated Photon Data Library	Lawrence Livermore National Laboratory, USA	<a href="https://www-nds.iaea.org/epdl97/">https://www-nds.iaea.org/epdl97/</a> Évaluation contenant des données pour les éléments allant des numéros atomiques $Z = 1$ à $Z = 100$ pour des photons incidents d'énergies de 10 eV à 100 GeV.
EPICS2014:	Electron Photon Interaction Cross Sections (Version 2014)	Lawrence Livermore National Laboratory, USA & IAEA/ND, Autriche	<a href="https://rsicc.ornl.gov/codes/dlc/dlc2/dlc-272.html">https://rsicc.ornl.gov/codes/dlc/dlc2/dlc-272.html</a> <a href="https://www-nds.iaea.org/epics2014/">https://www-nds.iaea.org/epics2014/</a> EPICS2014 est une bibliothèque de données permettant le calcul de transport des électrons et des photons dans la matière, ce transport pouvant être couplé. Les données atomiques sont fournies pour les éléments allant des numéros atomiques $Z = 1$ à $Z = 100$ (elle n'inclut pas les données photonucléaires). EPICS comporte quatre bases de données séparées pouvant être combinées : <i>Electron Data Library</i> (EEDL), <i>Evaluated Photon Data Library</i> (EPDL), <i>Evaluated Atomic Data Library</i> (EADL) and <i>Excitation Data Library</i> (EXDL).
IAEA PDL	IAEA Photonuclear Data Library	IAEA/NDS, Autriche	<a href="http://www-nds.iaea.org/photonuclear/">http://www-nds.iaea.org/photonuclear/</a> Évaluation contenant des données pour 164 nucléides et pour des photons incidents d'énergies allant jusqu'à 140 MeV.
ESTAR, PSTAR, ASTAR	Electron Stopping-Power and Range, Protons Stopping-Power and Range, Alpha Stopping-Power and Range	National Institute of Standards and Technology (NIST), USA,	<a href="http://www.nist.gov/pml/data/star/">http://www.nist.gov/pml/data/star/</a> <a href="http://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/intro.html">http://physics.nist.gov/PhysRefData/Star/Text/intro.html</a> Les bases de données ESTAR, PSTAR, and ASTAR permettent de calculer les pertes d'énergies par unité de longueur et le pouvoir d'arrêt des électrons, des protons et des particules alpha dans la matière. Ces données sont tabulées pour 250 éléments simples et matériaux composites. Les énergies incidentes vont de 1 keV à 1 GeV.

Les deux liens suivants permettent d'accéder à l'ensemble des bases de données intéressant la physique des réacteurs nucléaires incluant celles citées en exemple ci-dessus relatives à l'interaction des neutrons avec la matière :

- <https://www-nds.iaea.org/public/download-endf/> ;
- [https://www.oecd-neo.org/dbdata/data/nds\\_eval\\_libs.htm](https://www.oecd-neo.org/dbdata/data/nds_eval_libs.htm).

Il convient également de mentionner l'existence du projet **CIELO** pour *Collaborative International Evaluated Library Organization*<sup>41</sup>, visant à parfaire la qualité des données nucléaires relatives à l'interaction des neutrons avec la matière. En effet, pour un certain nombre de réactions nucléaires induites par des neutrons sur certains nucléides importants comme l'hydrogène léger, l'oxygène 16, le fer 56, les uraniums 235 et 238, le plutonium 239, des écarts existent entre différentes évaluations, entre des mesures, et des divergences sont également constatées entre des interprétations de modèles de calcul. Parallèlement, une réflexion est engagée au niveau international dans le but de définir un format informatique modernisé, dénommé **GNDS – Generalized Nuclear Data Structure** – pour stocker les données nucléaires, devant remplacer l'actuel format ENDF-6 vieux de

<sup>41</sup> M. B. Chadwick *et al.*, « The CIELO Collaboration: Neutron Reactions on 1H, 16O, 56Fe, 235,238U, and 239Pu », *Nuclear Data Sheets* 118 (2014) 1–25, <http://dx.doi.org/10.1016/j.nds.2014.04.002>, 0090-3752/2014 Published by Elsevier B.V ; <https://www-nds.iaea.org/CIELO/>.

plusieurs décennies.<sup>42</sup>Il est à noter que des groupes d’experts définissent les nucléides dont l’évaluation revêt une importance et une urgence particulières tels que le *Expert Group on the High Priority Request List (HPRL) for Nuclear Data* mis en place par l’OCDE/AEN<sup>43</sup>.

2. Sections efficaces des neutrons et des photons : organisation de stockage et traitement

On donne un aperçu de la manière dont sont stockées les données nucléaires dans les fichiers d’évaluation « classiques » au format « ENDF/B » en vigueur internationalement.

2.1. Les sections efficaces des neutrons

Le **tableau B3** donne en exemple la liste des réactions nucléaires répertoriées au sein d’une évaluation, chaque processus d’interaction est repéré par un **numéro conventionnel** : « **MT** » (au fil du temps, les conventions comme les formats ont subi des modifications).

Tableau B3. Liste (non exhaustive) des types de sections efficaces neutroniques présentes dans une évaluation de données nucléaires : ENDF/B-VII, JEFF-3...

MT : type de section efficace	Nature de la section efficace des réactions induites par un neutron	MT : type de section efficace	Nature de la section efficace des réactions induites par un neutron
1	totale (somme de toutes les sections efficaces)	37	(n, 4n)
2	diffusion élastique	38	(n,3nf) : fission de 4 <sup>e</sup> chance
3	non élastique (somme de toutes les sections partielles hors diffusion élastique MT = 4, 5,1 6-18,2 2-26, 28-37, 41-42, 102-116	41	(n, 2np)
4	Somme des sections efficaces inélastiques (MT = 50, 51,..., 91)	42	(n, 3np)
10	Somme des réactions continuum, à l’exclusion des réactions discrètes	50	production d’un neutron
11	(n, 2d)	51	inélastique (1 <sup>er</sup> état excité)
16	(n, 2n)	...	inélastique (i-ème état excité)
17	(n, 3n)	90	inélastique (40 <sup>e</sup> état excité)
18	fission (totale) somme de MT = 19, 20, 21 et 38	91	(n, n’), continuum
19	(n, f) : fission de 1 <sup>re</sup> chance	101	disparition du neutron (somme de MT = 102 à 116)
20	(n, n’f) : fission de 2 <sup>e</sup> chance	102	capture radiative (n, γ)

<sup>42</sup> C. M. Mattoona, B. R. Beck, « Designing a new structure for storing nuclear data - Progress of the Working Party for Evaluation Cooperation subgroup #38 », *Eur. Phys. J. A* (2015) 51: 183 ; C. M. Mattoon, B. R. Beck, N.R. Patel, N. C. Summers, G.W. Hedstrom, « Generalized Nuclear Data: a New Structure (with Supporting Infrastructure) for Handling Nuclear Data », *Nuclear Data Sheets* 113, 2012, pp. 3145–3171 ; <https://www.oecd-neo.org/science/wpec/gnds/> ; *Specifications for the Generalised Nuclear Database Structure*, Version 1.9, OECD/NEA, 2020, <https://www.oecd-neo.org/science/wpec/documents/7519-GNDS.pdf>.

<sup>43</sup> <https://www.oecd-neo.org/science/wpec/hprl/>.

21	(n,2nf) : fission de 3 <sup>e</sup> chance	103	(n, p) (si MT = 600-649 sont présentes, MT = 103 est leur somme)
22	(n, n'α)	104	(n, d)
23	(n, n' 3α)	105	(n, t)
24	(n, 2n α)	106	(n, <sup>3</sup> He)
25	(n, 3n α)	107	(n, α)
27	absorption (somme de MT = 18 et 102 à 116)	108	(n, 2α)
28	(n, n' p)	109	(n, 3α)
29	(n, n' 2α)	111	(n, 2p)
30	(n, 2n 2α)	112	(n, p α)
32	(n, n' d)	113	(n, t 2α)
33	(n, n' t)	114	(n, d 2α)
34	(n, n' <sup>3</sup> He)	115	(n, p d)
35	(n, n' d 2α)	116	(n, p t)
36	(n, n' t 2α)	117	(n, dα)

Les données physiques relatives à ces processus d’interaction sont contenues dans les évaluations sous la forme de *files*, c’est-à-dire d’ensembles compilant, pour plusieurs dizaines ou centaines d’isotopes (stables et radioactifs), des données de même nature comme le montre le **tableau B4**.

Tableau B4. Exemples de différents ensembles de données neutroniques présents dans une évaluation : ENDF/B-VII, JEFF-3...

N° « <i>file</i> »	Nature de l’information stockée
1	Information générale sur le contenu de l’évaluation
2	Paramètres de résonance en fonction de l’énergie
3	Sections efficaces des neutrons en fonction de l’énergie
4	Distributions angulaires des neutrons secondaires
5	Distributions en énergie des neutrons secondaires
6	Distributions énergie-angle des neutrons secondaires
7	Données pour les lois de diffusion des neutrons thermiques
12	Multiplicités pour les photons issus des réactions neutroniques
14	Distributions angulaires des photons issus des réactions neutroniques
15	Distributions des énergies des photons issus des réactions neutroniques

2.2. Sections efficaces des photons

S’agissant des photons, à l’instar des neutrons, les types de sections efficaces sont repérés par numéro conventionnel « MT » tel que figurant dans le **tableau B5**. Les ensembles de données relatives aux photons sont structurés selon les *files* spécifiées dans le **tableau B6**.

Tableau B5. Exemples de différents types de sections efficaces photoniques présentes dans une évaluation de données photoniques : ENDF/B-VIII, JEFF-3...

MT : n° section efficace	Nature de la section efficace des réactions induites par un photon
501	Section efficace totale (photon)
502	Section efficace de diffusion cohérente)
504	Section efficace de diffusion incohérente
505	Facteur de diffusion partie imaginaire
506	Facteur de diffusion partie réelle
515	Section efficace création de paires – champ de l’électron
516	Section efficace création de paires – champ noyau + électrons (somme de MT = 515 et MT = 517)
517	Section efficace création de paires – champ du noyau
522	Section efficace absorption photoélectrique
534-572	Section efficace photoélectrique par niveau d’énergie ( <i>subshell</i> )

Tableau B.6. Différents ensembles de données photoniques présents dans une évaluation : ENDF/B-VII, JEFF-3...

N° « file »	Nature de l’information stockée
23	Sections efficaces des interactions des photons en fonction de l’énergie
26	Distributions énergie-angle des photons issus des interactions photoniques
27	Facteurs de forme
28	Données de relaxation atomique

2.3. Traitement des sections efficaces neutroniques et photoniques

Pour être utilisables dans les codes de propagation des rayonnements, les sections efficaces doivent obligatoirement subir un **traitement** à la fois **physique**, **numérique** et **informatique**. Celui-ci découle de la nature des informations stockées dans les évaluations, de la nature du problème physique étudié et des méthodes numériques implémentées dans les codes de transport utilisés. Par exemple, comme déjà signalé plus haut, les sections efficaces utilisées par les **codes de propagation des particules par la méthode de Monte-**

**Carlo**<sup>44</sup> sont généralement ponctuelles en énergie, c'est-à-dire décrites par couples de valeurs  $(E, \sigma(E))$  où  $E$  est l'énergie du neutron incident.

Les **codes de transport déterministes** (méthode aux ordonnées discrètes/ $S_N$ , éléments finis...) <sup>45</sup> utilisent des sections efficaces **multigroupes**, c'est-à-dire moyennées de manière appropriée par intervalle d'énergie. Le produit final du traitement est une **bibliothèque de données physiques** exploitable par le code de transport de particules désigné.

Il existe dans le monde plusieurs systèmes de codes capables de réaliser partiellement ou en totalité ce traitement des sections efficaces neutron et gamma.<sup>46</sup> Le système **NJOY**<sup>47</sup> élaboré au Centre de Los Alamos, distribué par **RSICC – Radiation Shielding Information and Computational Center** – d'Oak Ridge aux États-Unis, et l'**AEN/OCDE**, le système de codes **PREPRO** distribué par l'**IAEA/NDS**<sup>48</sup>, le système de codes **FRENDY** de JAEA au Japon<sup>49</sup>, et le code **CALENDF** développé au CEA également distribué par l'**OCDE/AEN**<sup>50</sup> en sont des exemples. Le système **GALILÉE**<sup>51</sup> du CEA a pour vocation de traiter non seulement les sections efficaces mais également les données de décroissance.

Le traitement physico-numérique des données nucléaires est particulièrement bien illustré par le cas des sections efficaces d'interaction des neutrons avec un noyau atomique. On distingue deux grandes étapes : la génération des sections efficaces ponctuelles et la génération des sections efficaces multigroupes à partir de ces dernières.

Les codes de calcul déterministes (résolution de l'équation du transport par la méthode  $S_N$ /ordonnées discrètes) utilisent des sections efficaces multigroupes sous leurs différents modes de représentation alors que les codes de transport Monte-Carlo fonctionnent préférentiellement avec les sections efficaces ponctuelles en raison de la finalité « logiciels de référence » qui leur est généralement assignée.

L'organisation des données nucléaires est faite dans des fichiers informatiques selon des formats d'enregistrement définis. Des logiciels spécifiques ont pour fonction de gérer

<sup>44</sup> SNA+MC 2013 *Annals of Nuclear Energy Special Issue*, Annals of Nuclear Energy 82 (2015) et *La Neutronique*, op. cit., pp 140-141.

<sup>45</sup> *La neutronique*, op. cit., pp 138-139.

<sup>46</sup> *La neutronique*, op. cit. p. 35.

<sup>47</sup> R. E. MacFarlane, D. W. Muir, *The NJOY Nuclear Data Processing System. - Version 91*, Los Alamos National Laboratory, USA. <https://t2.lanl.gov/nis/codes/NJOY12/index.html> ; R. E. MacFarlane, A. C. Kahler, « Methods for Processing ENDF/B-VII with NJOY », *Nuclear Data Sheets* 111, 2010, pp. 2739-2890.

<sup>48</sup> PREPRO 2015, 2015 ENDF/B Pre-processing Codes, IAEA/NDS, <https://www-nds.iaea.org/public/endf/prepro/>

<sup>49</sup> K. Tada, S. Kunieda, Y. Nagaya, *Nuclear Data Processing Code FRENDY Version 1*, Japan Atomic Energy Agency, January 2019, <https://jopss.jaea.go.jp/pdfdata/JAEA-Data-Code-2018-014.pdf>.

<sup>50</sup> J.-C. Sublet, P. Ribon, M. Coste-Delclaux, *CALENDF-2010: User Manual*, Rapport CEA-R-6277, 2011, <http://www.oecd-neo.org/tools/abstract/detail/nea-1278>.

<sup>51</sup> M. Coste-Delclaux, « GALILÉE: A nuclear data processing system for transport, depletion and shielding codes », *PHYSOR'08: International Conference on the Physics of Reactors "Nuclear Power: A Sustainable Resource"*, Interlaken (Switzerland), 14-19 Septembre 2008.



informatiquement ces données nucléaires : conversion de format, transferts des évaluations vers les **bibliothèques** de données physiques des codes de neutronique, etc.

On résume dans le **tableau B.9** et sur la **figure B.2** respectivement, les types de fichiers rencontrés au cours des étapes de préparation des bibliothèques de sections efficaces pour les codes de transport de particules et le processus de leur élaboration.

### 2.3.1. Génération des sections efficaces ponctuelles

**Le mode de représentation ponctuelle** des sections efficaces en fonction de l'énergie (on dira *mode ponctuel*) est défini par une suite discrète de couples  $(E_i, \sigma(E_i))$  où  $E_i$  est l'énergie de la particule et  $\sigma(E_i)$  la valeur de la section efficace à l'énergie  $E_i$ . La section efficace est décrite point d'énergie par point d'énergie. Entre deux points consécutifs en énergie est définie une loi d'interpolation qui peut être de différents types : *linéaire-linéaire* (lin-lin), *logarithmique-linéaire* (log-lin), *linéaire-logarithmique* (lin-log) ou *logarithmique-logarithmique* (log-log). Cette description ponctuelle vaut également pour les sections efficaces différentielles en angle et en énergie.

Le mode de représentation ponctuelle des sections efficaces permet une description aussi « exacte » que possible de l'interaction particule-matière.

Les codes probabilistes qui simulent la propagation des neutrons dans la matière – tels que les codes de transport Monte-Carlo MCNP<sup>52</sup> et TRIPOLI-4®<sup>53</sup> – sont à même d'exploiter des sections efficaces décrites selon le mode ponctuel. C'est cette propriété qui concourt à faire de ces logiciels des outils de calcul de référence ou « étalon ».

Pour les neutrons, le traitement consiste à obtenir des sections efficaces en fonction de l'énergie à partir des évaluations, en effectuant les principales opérations que sont la **reconstruction** à 0 Kelvin et l'**élargissement Doppler** des sections efficaces à une température donnée, puis le traitement des données de **thermalisation** des neutrons.

#### La reconstruction à 0 Kelvin

Les évaluations contiennent les sections efficaces neutroniques sous deux formes :

- une forme ponctuelle en énergie  $(E_i, \sigma(E_i))$  avec loi d'interpolation associée entre deux énergies consécutives. Cette description est utilisée dans les domaines d'énergie où la section efficace varie régulièrement et lentement ;
- sous forme de paramètres physiques appelés **paramètres de résonance** tabulés en fonction de l'énergie du neutron et associés à des formalismes physiques

<sup>52</sup> J. T. Goorley *et al.*, « Initial MCNP6 Release Overview - MCNP6 version 1.0 », LA-UR-13-22934, 2013-04-24 (Draft) ; [https://laws.lanl.gov/vhosts/mcnp.lanl.gov/pdf\\_files/la-ur-13-22934.pdf](https://laws.lanl.gov/vhosts/mcnp.lanl.gov/pdf_files/la-ur-13-22934.pdf).

<sup>53</sup> É. Brun, F. Damian, C. M. Diop, É. Dumonteil, F. X. Hugot, C. Jouanne, Y. K. Lee, F. Malvagi, A. Mazzolo, O. Petit, J.-C. Trama, T. Visonneau, A. Zoia, « TRIPOLI-4®, CEA, EDF and AREVA reference Monte Carlo code », *Annals of Nuclear Energy*, Volume 82, August 2015, pp. 151-160 ; <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2014.07.053>.

identifiés par un codage spécifique. On a vu dans le chapitre 8 que ces différents formalismes (**Breit-Wigner simple niveau**, **Breit-Wigner multiniveaux**, **Reich-Moore...**) décrivent la section efficace de manière très précise dans les domaines d'énergie où elle présente des résonances.

La reconstruction consiste, entre autres, à restituer les couples  $(E_i, \sigma(E_i))$  à partir de la tabulation des paramètres de résonance et des formalismes physico-mathématiques correspondants.

Une des procédures de reconstruction employées assure la linéarité de chaque type de section efficace entre deux points en énergie consécutifs compte tenu d'un critère de précision fixé par l'utilisateur du code de traitement et qui impose un écart maximal (typiquement 1/1 000<sup>e</sup>) entre la valeur « vraie » et la valeur linéarisée de la section efficace. La linéarité garantit de manière évidente la cohérence entre sections efficaces partielles et totale (section efficace totale = somme des sections efficaces partielles) pour tout point en énergie, qu'il appartienne ou non à la tabulation.

La **figure B1** en illustre une procédure algorithmique. On a pour toute énergie  $E$  comprise entre deux énergies retenues dans la tabulation :

$$\sigma(E) = \sigma(E_i) + \frac{\sigma(E_{i+1}) - \sigma(E_i)}{E_{i+1} - E_i}(E - E_i) \quad (\text{B2.1})$$

Le **tableau B7** montre que :

- pour les corps légers, le nombre de points en énergies issus de la reconstruction est de l'ordre de quelques centaines, l'hydrogène par exemple ;
- pour les corps de masse intermédiaire tels que le fer, ce nombre est de l'ordre de 40 000 points et de 250 000 points pour les noyaux lourds tels que l'uranium 238.

Il est essentiel de noter pour la suite que cette reconstruction est effectuée à la température de 0 Kelvin.

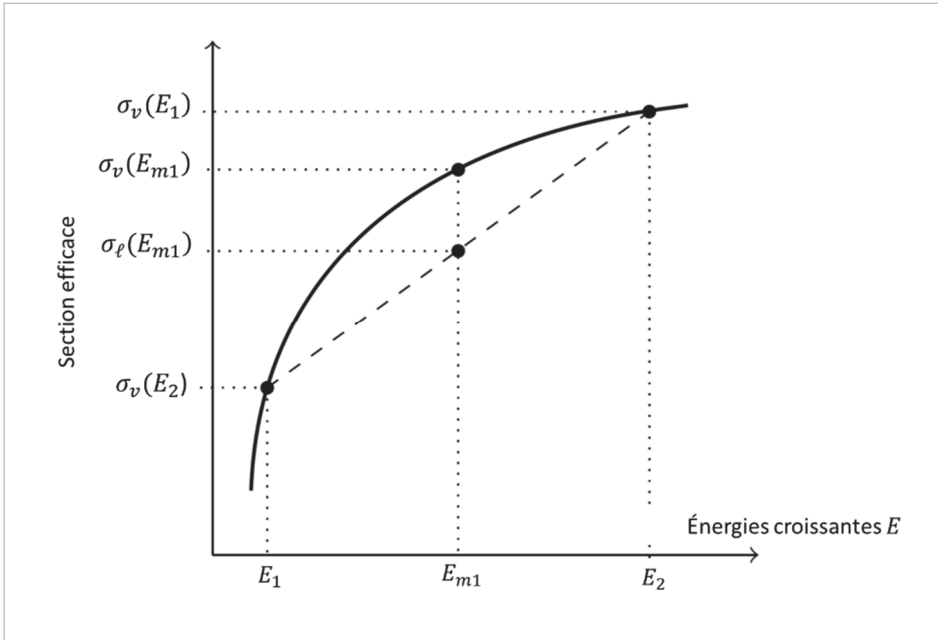


Figure B1. Illustration d'une procédure algorithmique de linéarisation d'une section efficace. Un algorithme approprié calcule la valeur linéarisée de la section efficace  $\sigma_\ell(E_{m1})$  par interpolation linéaire à partir des valeurs « vraies » des sections efficaces  $\sigma_v(E_1)$  et  $\sigma_v(E_2)$  et vérifie que l'écart entre  $\sigma_\ell(E_{m1})$  et la valeur « vraie » de la section efficace  $\sigma_v(E_{m1})$  à l'énergie intermédiaire  $E_{m1}$  est inférieur à une valeur imposée (critère de précision : 0.001 par exemple). Si tel n'est pas le cas, l'énergie  $E_{m1}$  est conservée et le même processus est alors appliqué sur les intervalles d'énergie  $[E_1, E_{m1}]$  et  $[E_2, E_{m2}]$ .

Il est à noter qu'il existe un autre formalisme de représentation des sections efficaces, introduit par R. N. Hwang<sup>54</sup>. Son principe consiste à exprimer une section efficace  $\sigma(E)$  sous la forme d'une somme de fonctions rationnelles faisant intervenir des pôles ( $p_k$ ) et des résidus ( $r_k$ ) :

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} \sum_k \operatorname{Re} \left[ \frac{ir_k}{\sqrt{E} - p_k} \right] \quad (\text{B2.2})$$

Un tel **formalisme** dit « **multipôle** » permet un calcul des sections efficaces plus rapide sans perte de précision, d'où son intérêt pratique lorsqu'une configuration physique exige de prendre en compte les diverses températures variables des structures traversées par les neutrons (voir chapitre 10 partie A sur l'effet Doppler)<sup>55</sup>.

<sup>54</sup> R. N. Hwang, « A rigorous pole representation of multilevel cross sections and its practical applications », *Nucl. Sci. Eng.*, 96:192–209, 1987.

<sup>55</sup> T. Freiman, *Méthode multipôle pour l'évaluation au vol de la dépendance en température des sections efficaces nucléaires*, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, 8 janvier 2020.

*L'élargissement Doppler à une température  $T$  quelconque*

L'étape de reconstruction étant réalisée à la température de 0 K, cela signifie que le noyau cible est immobile dans le repère du laboratoire. Dans les applications courantes, les neutrons se déplacent dans des systèmes physiques où la température est non nulle : 300 à 2 500 K pour donner un ordre d'idée. Le noyau cible n'est plus immobile dans le repère du laboratoire, et pour des énergies de neutron inférieures à une énergie caractéristique dépendant de la nature du noyau et de la température du milieu, cette mobilité du noyau atomique cible doit être prise en compte. Cette étape d'élargissement Doppler est réalisée numériquement conformément aux formalismes exposés dans le chapitre 10.

*Le traitement de la thermalisation*

Le phénomène de thermalisation tel qu'il a été décrit dans le chapitre 10 partie B est également traité pour produire sur un fichier informatique l'ensemble des sections efficaces qui lui sont associées.

*Les fichiers résultats « PENDF »*

Le traitement de l'évaluation conduit à l'obtention d'un fichier contenant les sections efficaces ponctuelles en fonction de l'énergie et organisées selon un format informatique spécifique : le **format « PENDF »**, *Pointwise Evaluated Nuclear Data File*. Entre deux points consécutifs, la section efficace varie linéairement. Le nombre de points en énergie diffère selon l'isotope traité, le critère de précision et les températures choisies par l'utilisateur pour la reconstruction des sections efficaces, comme le montre le **tableau B7**.

Tableau B7. Ordre de grandeur du nombre de points en énergie générés pour décrire les sections efficaces de l'hydrogène  $^1\text{H}$ , du fer  $^{56}\text{Fe}$  et de l'uranium  $^{238}\text{U}$  à différentes températures : 0, 300 et 600 kelvins (K).

Élément	0 K	300 K	600 K
$^1\text{H}$	703	627	627
$^{56}\text{Fe}$	39 636	31 817	30 749
$^{238}\text{U}$	246 930	103 428	89 485

**2.3.2. Génération des sections efficaces multigroupes**

Comme cela a été décrit dans la partie A du présent chapitre, dans le **mode de représentation multigroupe** en énergie, l'ensemble du domaine en énergie est partitionné en intervalles, appelés **groupes d'énergie** et notés  $g$ . Selon le mode de représentation, **mode multigroupe pondéré** ou **tables de probabilités**<sup>56</sup>, une valeur unique ou un jeu de valeurs discrètes de la section efficace sont affectées à un groupe  $g$  donné. Les sections efficaces multigroupes calculées à partir des sections efficaces ponctuelles et des données nucléaires annexes stockées respectivement sur les **fichiers PENDF** et **ENDF**, sont

<sup>56</sup> Le code CALENDF et le module PUUR du système NJOY calculent de telles tables de probabilité.

enregistrées sur un fichier dénommé conventionnellement **GENDF** pour *Groupwise Evaluated Nuclear Data File*.

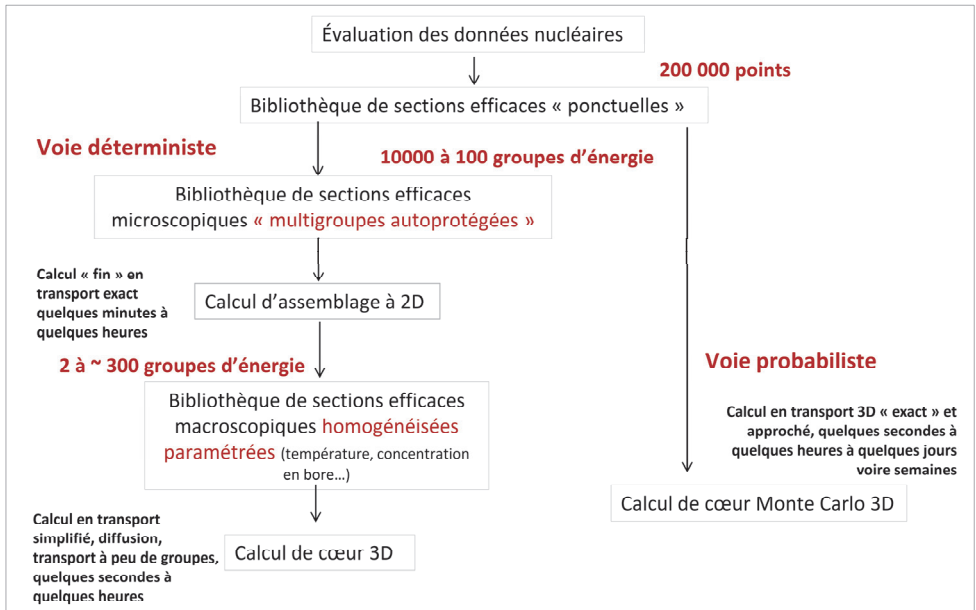


Figure B2. Schéma simplifié d'élaboration des bibliothèques de sections efficaces pour les codes de transport déterministes et probabilistes (Monte-Carlo) dans le cas d'un calcul de neutronique visant à établir une cartographie tridimensionnelle (3D) de la puissance produite par le cœur d'un réacteur nucléaire (« calcul de cœur »). On voit que l'enjeu de la mise en groupe des données nucléaires réside dans la compaction de celles-ci en deux étapes sans « perdre » la physique afin d'être capable de calculer un cœur de réacteur en quelques secondes pour les besoins industriels. Les données ponctuelles permettent la réalisation de calculs de référence avec comme contrepartie un coût de calcul élevé.<sup>57</sup>

Dans le cadre de la neutronique, la problématique fondamentale sous-jacente à la mise en groupe des sections efficaces est le phénomène dit d'**autoprotection des résonances**<sup>58</sup> qui affecte significativement la population des neutrons dont l'énergie avoisine celle des résonances. La détermination des sections efficaces de transfert angulaire et énergétique multigroupe soulève également des problèmes spécifiques.<sup>59</sup>

On voit par conséquent que la constitution d'une bibliothèque de données nucléaires à une fin applicative (voir **figure B.2**) est une séquence qui relie le domaine de l'évaluation des données nucléaires et celui de la neutronique gouvernée respectivement par les équations de Boltzmann et de Bateman généralisées (voir annexe II).

<sup>57</sup> Voir *La neutronique*, op. cit., pp. 51-54.

<sup>58</sup> M. Coste-Delclaux, *Modélisation du phénomène d'autoprotection dans le code de transport multigroupe APOLLO-2*, Thèse de Doctorat en Sciences, CNAM, Paris, mars 2006.

<sup>59</sup> A. Calloo, *Développement d'une nouvelle modélisation de la loi de choc dans les codes de transport neutronique multigroupes*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 10 octobre 2012.

De manière analogue aux neutrons, les sections efficaces relatives aux processus d’interaction gamma-matière sont fournies dans des évaluations au **format ENDF** et sont soumises à un traitement de reconstruction et de mise en groupes d’énergie le cas échéant. Le **tableau B8** synthétise ces différents formats.

Tableau B8. Dénomination des différents fichiers de sections efficaces produits par un code de traitement des données nucléaires et exploités par les codes de transport des neutrons et des gamma dans la matière.

Formats « standard »	Types de représentation des sections	Codes de transport d’accueil
Evaluated Nuclear Data File : <b>ENDF</b>	Évaluation	Déterministes, Monte-Carlo
Pointwise Evaluated Nuclear Data File : <b>PENDF</b>	Sections efficaces ponctuelles	Monte-Carlo
Groupwise Evaluated Nuclear Data File : <b>GENDF</b>	Sections efficaces multigroupes/tables de probabilité	Déterministes, Monte-Carlo, etc.

3. Données de décroissance radioactive et rendements de fission

On a vu dans le chapitre 5 que la radioactivité est induite par toute une variété de phénomènes physiques :

- la **fission** provoquée par neutron et la **fission spontanée** ;
- l’**activation neutronique** ;
- les **réactions photonucléaires** : ( $\gamma$ , n), (n, f), etc. ;
- les **réactions nucléaires induites par les particules chargées** (p, d,  $\alpha$ ...).

Ils sont responsables de la formation de noyaux radioactifs que l’on a classés dans les catégories suivantes :

- les **produits de fission** ;
- les **actinides** ou **noyaux lourds** ;
- les **produits d’activation** ;
- les **produits de spallation**.

La résolution des équations différentielles d’évolution (équations de Bateman généralisées, voir annexe II) que satisfont les concentrations des isotopes radioactifs exige de disposer, en plus des sections efficaces, des **données de décroissance radioactive (decay data)**<sup>60 61</sup>

<sup>60</sup> G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, A. H. Wapstra, *The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties*. La base de données NUBASE2003 comporte les informations pour 3177 isotopes, voir Atomic Mass Data Center. *Nuclear Physics A*, Vol. 729, 2003, pp. 3-128 ; <https://www.sciencedirect.com/journal/nuclear-physics-a/vol/729/issue/1>.

<sup>61</sup> G. Audi, A. H. Wapstra, *Atomic mass Evaluation*, *Nucl. Phys. A* 595, 409, 1995.

<sup>62</sup> <sup>63</sup>, dont les principales sont :

- les **isotopes radioactifs** en distinguant les états stables et **isomériques** ;
- les **modes de décroissance** précisés dans le tableau B.9 ;
- les **périodes de désintégration** ;
- les **rapports de branchement** entre plusieurs voies possibles de désintégration ;
- les **rendements de fission**<sup>64</sup> <sup>65</sup> (de fission induite par neutron et de fission spontanée)
- les **multiplicités de neutrons de fission**<sup>66</sup>.

La détermination des grandeurs dérivées requiert de connaître :

- les **énergies moyennes** mises en jeu dans les transitions radioactives : ce sont les énergies des particules  $\alpha$ ,  $\beta$  et des photons  $\gamma$  et/ou  $X$  ;
- les **spectres en énergie** des particules émises  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  ;
- les **rendements des réactions** ( $\alpha, n$ ).

La plupart de ces données sont compilées et mises à jour dans une bibliothèque spectroscopique « **Evaluated Nuclear Structure Data File** » (ENSDF), élaborée par l'*International Network of Nuclear Structure and Decay Data Evaluators* (NSDD, <https://www-nds.iaea.org/nsdd/>)<sup>67</sup>, qui contient de nombreuses autres informations. Dans la pratique, les codes de calcul tirent leurs données de bibliothèques élaborées spécialement et qui ne comportent que les informations « utiles ». La *file* 8 des évaluations **JEFF-3.3** (données de décroissance radioactive pour 3 852 isotopes) et **ENDF/B-VIII** (données de décroissance radioactive pour 3 821 isotopes) en sont des exemples.

Outre la base de données atomiques et nucléaires du LNHB mentionnée plus haut, il est à noter la création en Europe, en 2003, de la base de données **NUBASE**, *a database of*

<sup>62</sup> R. B. Firestone, *Tables of Isotopes*, Wiley, USA (avec C.D. ROM), 1996.

<sup>63</sup> J. Blachot, C. Fiche, B. Duchemin, *Tableau des isotopes radioactifs et des principaux rayonnements émis*, Rapport CEA-R-5329, France, 1986.

<sup>64</sup> A. Chebboubi, G. Kessedjian, O. Serot, H. Faust, U. Köster, O. Litaize, C. Sage, A. Blanc, D. Bernard, A. Letourneau, T. Materna, O. Méplan, P. Mutti, M. Rapala, M. Ramdhane, « Measurements of  $^{233}\text{U}(n_{\text{th}},f)$  fission product mass yields with the LOHENGRIN recoil mass spectrometer », *The European Physical Journal A* volume 57, 335, 2021, <https://link.springer.com/article/10.1140/epja/s10050-021-00645-y>.

<sup>65</sup> L. Audouin, J. Taïeb *et al.*, « High-precision measurement of isotopic fission yields of  $^{236}\text{U}^*$  », 6th Workshop on Nuclear Fission and Spectroscopy of Neutron-Rich Nuclei (FISSION 2017), *EPJ Web of Conferences* 193, 02001, 2018, <https://doi.org/10.1051/epjconf/201819302001>.

<sup>66</sup> J.-F. Martin, J. Taïeb *et al.*, « Fission-fragment yields and prompt-neutron multiplicity for Coulomb-induced fission of  $^{234,235}\text{U}$  and  $^{237,238}\text{Np}$  », *Physical Review C* 104, 044602, October 4, 2021 <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.104.044602>.

<sup>67</sup> *Evaluated Nuclear Structure Data File* – Base de données contenant les informations sur la structure nucléaire et les modes de décroissance de 3 408 isotopes (au 3 août 2021) : <https://www.nndc.bnl.gov/ensdf/ensdf/ensdf-info.jsp>.

*nuclear and decay properties*, qui comporte plus de 3 000 noyaux<sup>68 69</sup> ainsi que de la *Atomic Mass Evaluation*<sup>70</sup> du *Atomic Mass Data Center* (AMDC)<sup>71</sup>. Le **tableau B9** énonce les différents modes de décroissance radioactive d’un nucléide considérés dans les bases de données nucléaires.

Tableau B9. Les différents modes de décroissance radioactive d’un noyau atomique.

Modes de décroissance
Émission d’un $\beta$
Émission de 2 $\beta$
Émission d’un $\beta +$
Émission d’un électron après capture électronique
Transition interne
Émission de neutrons prompts et retardés
Émission de protons prompts et retardés
Émission de particules $\alpha$
Fission spontanée
Émission d’un <i>cluster</i> de nucléons

À l’instar des sections efficaces, les données de décroissance sont soumises à un traitement physique et informatique pour aboutir à des bibliothèques de données utilisables par les codes d’évolution. Il s’agit en particulier :

- des tests de cohérence interne de l’évaluation : par exemple, adéquation entre les spectres de désintégration alpha et l’énergie de la désintégration alpha ;
- de la constitution des chaînes de filiation radioactive utilisées par les codes d’évolution ;
- de la conversion de formats pour la constitution de la bibliothèque de données de décroissance exploitée par les codes d’évolution.

<sup>68</sup> G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, A. H. Wapstra, The NUBASE evaluation of nuclear and decay properties, *op. cit.*

<sup>69</sup> F. G. Kondev, M. Wang, W.J. Huang, S. Naimi, G. Audi, « The NUBASE2020 evaluation of nuclear physics properties », *Chinese Physics C*, Vol. 45, No. 3 030001, 2021, pp. 1-180.

<sup>70</sup> M. Wang, W. J. Huang, F. G. Kondev, G. Audi, S. Naimi, « The Ame2020 atomic mass evaluation (I). Evaluation of input data, and adjustment procedures », *Chinese Physics C* Vol. 45, No. 3, 030002, 2021, pp. 1-342, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1137/abddb0>.

M. Wang, W. J. Huang, F. G. Kondev, G. Audi, S. Naimi, « The Ame2020 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references », *Chinese Physics C* Vol. 45, No. 3, 030003, 2021, pp. 1-512, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1137/abddef>.

<sup>71</sup> <http://amdc.impcas.ac.cn/>, <https://www.anl.gov/phy/atomic-mass-data-resources>, <https://www-nds.iaea.org/amdc/>.



#### 4. Données de dosimétrie

Ce sont des indicateurs – appelés aussi **réponses de détecteur** – sensibles au flux de particules qui renseignent sur la nature et le niveau d’une irradiation. À côté des **facteurs de conversion de flux de particules en débit de dose** et des **facteurs de radiotoxicité** (voir les normes de la **Commission internationale de protection radiologique (CIPR)**) qui permettent d’évaluer le risque encouru par un être vivant, on peut citer des **sections efficaces particulières** utiles à l’étude des modifications des propriétés des matériaux soumis à l’irradiation neutronique telle que celle de la cuve en acier contenant le cœur du réacteur nucléaire :

- réactions d’activation indicatrices du flux des neutrons thermiques, épithermiques ou rapides :  $^{103}\text{Rh}(n,n')^{103m}\text{Rh}$ ,  $^{115}\text{In}(n,n')^{115m}\text{In}$ ,  $^{32}\text{Sn}(n,p)^{32}\text{P}$ ,  $^{31}\text{P}(n,p)^{31}\text{Si}$ ,  $^{27}\text{Al}(n,\alpha)^{24}\text{Na}$ ,  $^{238}\text{U}(n,f)$ ,  $^{237}\text{Np}(n,f)$ ,  $^{58}\text{Ni}(n,p)^{58}\text{Co}$ ,  $^{54}\text{Fe}(n,p)^{54}\text{Mn}$ ,  $^{63}\text{Cu}(n,\alpha)^{60}\text{Co}$ ,  $^{59}\text{Co}(n,\gamma)^{60}\text{Co}$  ;
- (n, p) production d’hydrogène ;
- (n, d) production de deutérium ;
- (n, t) production de tritium ;
- (n,  $^3\text{He}$ ) production d’hélium 3 ;
- (n, $\alpha$ ) production d’hélium 4 ;
- les déplacements par atome (dpa).

L’AIEA livre des bibliothèques de données dosimétriques, comme l’*International Reactor Dosimetry and Fusion File* (IRDFF) qui contient les données pour 119 réactions intéressant la dosimétrie dans la version IRDFF-II.<sup>72</sup>

#### 5. Données relatives au transport des particules chargées

Les **particules chargées** apparaissent suite aux processus d’interaction nucléaire ou atomique : particules  $\alpha$  et  $\beta$  des processus radioactifs, électron de recul de l’effet Compton ou paire électron-positron issue de la matérialisation des gamma. Ces phénomènes, présentés dans les chapitres 11 et 12, donnent naissance à ce que l’on appelle la **cascade électromagnétique** correspondant à une propagation en arborescence de photons, d’électrons et de positrons.

Les données sont essentiellement :

- les sections efficaces des réactions nucléaires induites par les particules chargées ;
- les sections efficaces de *bremsstrahlung* (ou rayonnement de freinage) ;
- les sections efficaces de diffusion des électrons/positrons dans la matière ;

<sup>72</sup> A. Trkov, P.J. Griffin, S.P. Simakov, L.R. Greenwood, K.I. Zolotarev, R. Capote, D.L. Aldama, V. Chechev, C. Destouches, A.C. Kahler, C. Konno, M. Kostal, M. Majerle, E. Malambu, M. Ohta, V.G. Pronyaev, V. Radulovic, S. Sato, M. Schulc, E. Simeckova, I. Vavtar, J. Wagemans, M. White, and H. Yashima, « IRDFF-II: A New Neutron Metrology Library », Special issue of *Nuclear Data Sheets*, Vol. 163, 2020, pp. 1-108, <https://www-nds.iaea.org/IRDFF/>.

- les **pouvoirs d'arrêt** (ou pertes d'énergie par unité de longueur) des électrons/positrons et des ions dans la matière.

Ces données sont disponibles sous forme de valeurs tabulées ou bien déterminées par des programmes informatiques permettant de les calculer<sup>73</sup>, voir **tableau B.2**.

## 6. Domaine des énergies intermédiaires

Le domaine d'énergie situé entre 20 MeV et quelques GeV est qualifié de domaine des énergies intermédiaires. Il est l'objet d'un intérêt particulier, en raison des études menées sur la transmutation des déchets radioactifs et la recherche de dispositifs nucléaires moins producteurs de déchets et présentant un degré de sûreté plus élevé que celui des réacteurs actuels. Certains systèmes imaginés mettent en jeu un accélérateur couplé à un réacteur sous-critique. Les particules accélérées (des protons, le plus souvent) dont l'énergie est de l'ordre du GeV viennent frapper une cible dans laquelle on cherche à produire un surplus de neutrons par des **réactions** dites de **spallation**<sup>74</sup> (voir chapitre 6 § 3), c'est-à-dire provoquant un éclatement partiel ou total des noyaux choqués. Les fragments sont appelés **produits de spallation**.

Les modèles d'interaction appliqués aux particules dont l'énergie est en deçà de 20 MeV peuvent être étendus jusqu'à 100 ou 200 MeV. Il existe des évaluations comme **TENDL** et **ENDF/B-VIII** fournissant des valeurs de sections efficaces dans cette gamme d'énergie (voir tableau B.2).

Au-delà de ces énergies, la physique de l'interaction particule/noyau atomique cible proprement dit conduit à mettre en œuvre d'autres modèles. La tabulation des sections efficaces soulève, dans cette gamme d'énergie, des difficultés en raison de la multiplicité et de la complexité des phénomènes possibles. Les codes de calculs ont recours alors à une double simulation Monte-Carlo :

- celle « usuelle » qui propage la particule spatialement dans le système physique étudié ;
- celle qui simule l'interaction de la particule incidente dans le noyau cible ; les déplacements et les collisions de la particule à l'intérieur même du noyau cible sont simulés à partir des sections efficaces nucléon-nucléon et des potentiels d'interaction régnant au sein du noyau : c'est ce que l'on appelle la **cascade intranucléaire** déjà évoquée dans le chapitre 6. Elle permet de déterminer la nature des produits de réaction ainsi que leurs diverses caractéristiques : énergie, direction, etc., avant que

<sup>73</sup> A. Fasso et al., *Shielding Against High Energy Radiation. - Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*, op. cit.

<sup>74</sup> S. Leray, « Les données nucléaires de haute énergie : la spallation », dans *La neutronique*, op. cit, pp. 39-41.

n'interviennent des phénomènes compétitifs de désexcitation comme l'évaporation de particules légères et la fission rapide.<sup>75 76</sup>

Par exemple, le code de transport Monte-Carlo de particules **FLUKA**<sup>77</sup> traite les **réactions de spallation**.

## 7. Mesures de données nucléaires – Importance des données d'incertitudes

Diverses équipes dans le monde (voir en début de chapitre) poursuivent les recherches (mesures, modèles...) visant à améliorer la connaissance sur les données nucléaires de base telles que les **sections efficaces**, les **spectres d'émission de particules** (neutrons et gamma prompts de fission par exemple), les **données de décroissance**, les **rendements de fission**, etc., et contribuent à l'élaboration de nouvelles évaluations.<sup>78</sup> C'est dire que des **incertitudes** affectent encore les **données nucléaires** utilisées et que les actions engagées pour les réduire contribuent à répondre aux exigences accrues d'exactitude sur ces dernières, liées à des problématiques de **sûreté** et d'**optimisation d'exploitation des installations nucléaires**.

De manière générale, on cherche à attribuer une **incertitude** à la valeur calculée d'une grandeur physique, à connaître sa **sensibilité** à une variation élémentaire des données physiques dont elle dépend. Cette incertitude résulte d'incertitudes de natures différentes : incertitudes sur les données physiques de base, en l'occurrence ici les données nucléaires, incertitudes ou biais dus à la méthode de calcul, incertitudes sur les données technologiques, etc.<sup>79</sup> Il en résulte la nécessité de connaître les incertitudes sur les données de base et de disposer de méthodes permettant d'évaluer leur contribution à l'incertitude globale associée à la grandeur physique d'intérêt considérée. À titre d'exemple, la **figure B3** montre l'impact des incertitudes existant sur les données nucléaires de décroissance radioactives et les rendements de fission sur la puissance résiduelle dégagée par la fission élémentaire d'un noyau de plutonium 239.

Un travail ardu d'évaluation des incertitudes attachées aux différentes données nucléaires de base est effectué par les évaluateurs. Il débouche entre autres sur l'élaboration des *files* 30 à 40 des évaluations au format ENDF qui contiennent les données de covariances (c'est-à-dire d'incertitudes avec les corrélations éventuelles) relatives notamment aux sections

---

<sup>75</sup> M. Blann, H. Gruppelaar (editors), *International code comparison for intermediate energy nuclear data*, AEN/OECD (1994) ; *Intermediate energy nuclear data : models and codes. Proceedings of a specialist's meeting*, AEN/OECD, Issy-les-Moulineaux, France, 30 mai-1er juin 1994.

<sup>76</sup> *Électronucléaire – Une présentation par des physiciens*, ouvrage collectif, publication du Cercle d'Études sur l'Énergie nucléaire (CESEN), chapitre 9, « La spallation », 1999.

<sup>77</sup> G. Battistoni, T. Boehlen, F. Cerutti, P. Wai Chin, L. S. Esposito, A. Fassò, A. Ferrari, A. Mereghetti, P. Garcia Ortega, J. Ranft, S. Roesler, P. A. R. Sala, V. Vlachoudis, « Overview of the FLUKA code », *SNA + MC 2013 - Joint International Conference on Supercomputing in Nuclear Applications + Monte Carlo*, Paris, October 28-31, 2013 ; *Annals of Nuclear Energy* 82, 2015, pp. 10-18; <http://www.fluka.org/fluka.php>.

<sup>78</sup> A. J. M. Plompen, O. Cabellos, C. de Saint Jean *et al.*, « The joint evaluated fission and fusion nuclear data library, JEFF-3.3 », *Eur. Phys. J. A* 56, 181, 2020, <https://doi.org/10.1140/epja/s10050-020-00141-9>.

<sup>79</sup> B. Bonin, C. M. Diop, A. Nicolas, C. De Saint Jean, « S'assurer de la qualité des outils de calcul neutronique », dans *La neutronique, op. cit.*, pp. 165-170.

efficaces et à certaines données de décroissance radioactive. On peut aussi citer la base de données « **COMAC** » élaborée au CEA<sup>80</sup>.

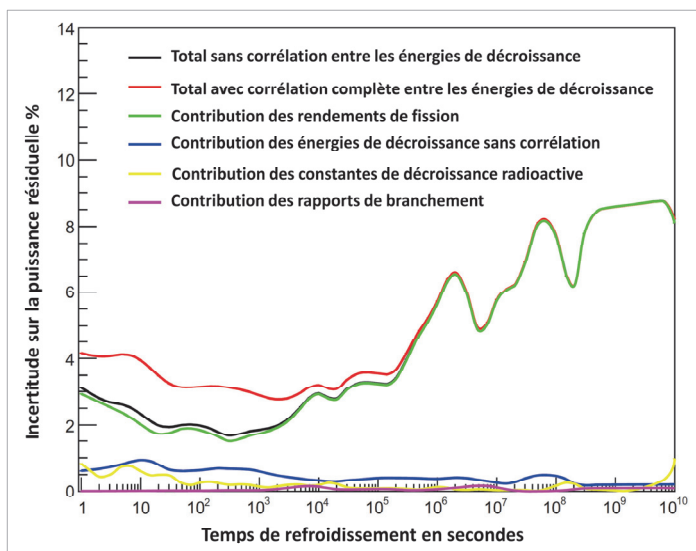


Figure B3. Fission élémentaire d'un noyau de plutonium 239, impact des incertitudes affectant les données nucléaires de décroissance radioactives – énergies de décroissance, constante de désintégration radioactive, rapport de branchement – et les rendements de fission sur la puissance résiduelle dégagée par la fission élémentaire d'un noyau de plutonium 239<sup>81 82 83</sup> avec utilisation des données d'incertitudes provenant de l'évaluation européenne JEFF-3.1.1. Ces incertitudes sont exprimées en pourcentage de la valeur de la puissance résiduelle en fonction du temps de refroidissement (durée comptée après la fission) exprimé en seconde. Les résultats sont fournis dans le cas où l'on suppose qu'il n'y a pas de corrélation entre les énergies de décroissance et celui pour lequel on admet que ces énergies sont complètement corrélées.

<sup>80</sup> P. Archier, C. De Saint Jean *et al.*, « COMAC: nuclear data covariance matrices library for reactor applications », *PHYSOR 2014*, Kyoto, Japan, 2014 ; E. Privas, P. Archier, D. Bernard, C. De Saint Jean, C. Destouche, P. Leconte, G. Noguère, Y. Pénéliou, R. Capote, « Generation of <sup>238</sup>U Covariance Matrices by Using the Integral Data Assimilation Technique of the CONRAD Code », ISRD 15 – International Symposium on Reactor Dosimetry, Aix-en-Provence, May 18-23, 2014, EPJ Web of Conferences, Vol. 106, 2016.

<sup>81</sup> A. Tsilanizara, N. Gilardi, T.-D. Huynh, C. Jouanne, S. Lahaye, J.-M. Martinez, C. M. Diop, « Probabilistic approach for decay heat uncertainty estimation using URANIE platform and MENDEL depletion code », *Annals of Nuclear Energy* 90, 2016, 62-70, Figure 7, p. 67, <https://doi.org/10.1051/snmc/201402409>.

<sup>82</sup> A. Tsilanizara, T.-D. Huynh, « New feature of DARWIN/PEPIN2 inventory code: Propagation of nuclear data uncertainties to decay heat and nuclide density », *Annals of Nuclear Energy* 164, 15 December 2021, 108579, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2021.108579>.

<sup>83</sup> Voir aussi les travaux portant spécifiquement sur l'évaluation des rendements de fission : G. Kessedjian, S. M. Cheikh, A. Chebboubi, O. Sérot, « From fission yield measurements to evaluation: new statistical methodology applied to <sup>235</sup>U(n<sub>th</sub>;f) mass yields », International Workshop on Fission Product Yields (FPY 2019), EPJ Web of Conferences 242, 05001, 2020, <https://doi.org/10.1051/epjconf/202024205001> ; S. M. Cheikh, G. Kessedjian, O. Sérot, A. Chebboubi, R. Mills, V. Vallet, D. Bernard, L. Capponi, « From fission yield measurements to evaluation: propositions of <sup>235</sup>U(n<sub>th</sub>;f) fission yields for JEFF-4 », 15<sup>th</sup> International Conference on Nuclear Data for Science and Technology (ND2022), EPJ Web of Conferences, 08002, Volume 284, 2023, <https://doi.org/10.1051/epjconf/202328408002>.

Les évaluations de données nucléaires comportant les données d'incertitudes associées et les bibliothèques de données nucléaires sont ainsi parties prenantes dans la démarche incontournable de **qualification des codes de calcul** qui les utilisent<sup>84</sup>. Très schématiquement, la qualification implique l'exécution de *benchmarks*<sup>85 86 87 88</sup>, c'est-à-dire des comparaisons calcul/expérience et calcul/calcul, dans des situations parfaitement définies allant du problème simple académique à la configuration réelle<sup>89</sup>. Cette qualification contribue d'une part à l'amélioration des données physiques de base, et d'autre part permet de conférer aux codes de transport et d'évolution ainsi qu'aux bibliothèques de données associées le niveau de qualité requis.

Le traitement des incertitudes sur les données nucléaires à la fois en termes de production de bases de données et de propagation dans les équations de la neutronique s'appuie sur des théories et formalismes mathématiques spécifiques<sup>90 91 92 93 94</sup> au centre desquels se trouvent non seulement les probabilités et les statistiques,<sup>95</sup> mais également des techniques algorithmiques particulières de l'intelligence artificielle et de la science des données

---

<sup>84</sup> E. Sartori, « Basic Data, Computer Codes and Integral Experiments: The Tools for Modelling in Nuclear Technology », Lecture given at the *Workshop on Nuclear Data and Nuclear Reactors: Physics, Design and Safety*, Trieste, 13 March - 14 April 2000, [https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/38/027/38027903.pdf](https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/38/027/38027903.pdf).

<sup>85</sup> P. Fougeras, P. Blaise, S. Bourganel, Y.-K. Lee, M. Chiron, F. Damian, C. Mounier, « La neutronique expérimentale. Expériences en maquettes critiques », dans *La neutronique, op. cit.*, pp. 171-182.

<sup>86</sup> I. A. Kodeli, V. Mastrangelo, E. Ivanov, A. Aures, W. Zwermann, M. Aufiero, Y. Pénéliou, K. Ivanov, E. Sartori, « OECD/NEA Intercomparison of deterministic and Monte Carlo cross-section sensitivity codes using SNEAK-7 benchmarks », PHYSOR 2016: Unifying Theory and Experiments in the 21st Century, May 2016, Sun Valley, United States, <https://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-02431813>.

<sup>87</sup> I. Kodeli, A. Milocco, P. Ortego, E. Sartori, « 20 Years of SINBAD (Shielding Integral Benchmark Archive and Database) », *Progress in Nuclear Science and Technology*, Vol. 4, pp. 308-311, 2014, [https://www.aesj.net/document/pnst004/308\\_311.pdf](https://www.aesj.net/document/pnst004/308_311.pdf).

<sup>88</sup> D. A. Rochman, E. Bauge, « Fission yields and cross sections: correlated or not? », *EPJ Nuclear Sci. Technol.* 7, 5 (2021), <https://doi.org/10.1051/epjn/2021005>.

<sup>89</sup> G. Palmiotti, M. Salvatores, « Cross section covariances: a user perspective », *EPJ Nuclear Sci. Technol.* 4, 40 (2018), <https://doi.org/10.1051/epjn/2018021>.

<sup>90</sup> M. L. Williams, « Development of Depletion Perturbation Theory for Coupled Neutron/Nuclide Fields », *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 70, 1, 1979, pp. 20-36, <https://doi.org/10.1318/NSE79-3>.

<sup>91</sup> C. J. Diez, O. Buss, A. Hoefer, D. Porsch, O. Cabellos, « Comparison of nuclear data uncertainty propagation methodologies for PWR burn-up simulations », *Annals of Nuclear Energy* 77, 2015, pp. 101-114, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2014.10.022>.

<sup>92</sup> M. T. Pigni, S. Croft, I. C. Gauld, « Uncertainty quantification in (a,n) neutron source calculations for an oxide matrix », *Progress in Nuclear Energy* 91, 2016, pp. 147-52, <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2016.04.006>.

<sup>93</sup> N. Terranova, *Covariance Evaluation for Nuclear Data of Interest to the Reactivity Loss Estimation of the Jules Horowitz Material Testing Reactor*, Dottorato in Ingegneria Energetica, Nucleare e del Controllo Ambientale, Università di Bologna, 2016.

<sup>94</sup> N. Linden, *Élaboration d'une méthodologie de calcul de sensibilités couplées fondée sur la théorie des perturbations généralisée. Application aux grandeurs physiques du cycle du combustible*, Thèse de doctorat, Aix-Marseille Université, 14 mars 2023.

<sup>95</sup> D. L. Smith, *Probability, Statistics, and Data Uncertainties in Nuclear Science and Technology*, American Nuclear Society, 1991.

(réseaux de neurones<sup>96</sup>, algorithmes génétiques évolutionnaires, etc.<sup>97</sup>). Elles requièrent des ressources de calcul très importantes qu'offrent les superordinateurs<sup>98</sup> pour réaliser des calculs à **haute performance** (*High Performance Computing*, HPC).

On signale enfin que l'interprétation de mesures ou bien la conception de dispositifs de mesure nécessitent de réaliser des simulations Monte-Carlo de la propagation des particules dans la matière dites « **analogues** » dans le sens où l'on cherche à reproduire au plus près la réalité physique sans recours à des techniques algorithmiques permettant de réduire le temps de calcul (ou « techniques de réduction de variance » : dans ce cas, les simulations sont qualifiées de « non-analogues »). Cette exigence de fidélité physique peut conduire à des recommandations particulières dans la manière d'exploiter les données nucléaires présentes dans les évaluations ou encore à suggérer des évolutions de format et de codage des informations qui y sont stockées<sup>99</sup>.

---

<sup>96</sup> G. Dreyfus, J.-M. Martinez, M. Samuelides, M. B. Gordon, F. Badran, S. Thiria, L. Hérault, *Réseaux de neurones - Méthodologie et applications*, Paris, Eyrolles, Collection Algorithmes, 2002.

<sup>97</sup> G. Arnaud, J.-M. Martinez, K. Ammar, J.-M. Do, « Neutronique et Big data », *CLEFS CEA* N°64 - Les voix de la recherche - voyage au cœur du big data, <http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/clefs-cea/CLEFS64-BIGDATA.pdf>.

<sup>98</sup> Par exemple les supercalculateurs du *Très Grand Centre de Calcul* (TGCC) installé en région parisienne : <http://www-hpc.cea.fr/fr/complex/tgcc.htm>

<sup>99</sup> C. Cordero-Ramirez, *Nuclear data generation and implementation for analog Monte Carlo simulation*, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, décembre 2022.

## Annexe I : bases de données nucléaires et codes de calcul/traitement associés dans le domaine de la physique des réacteurs nucléaires et des autres systèmes nucléaires

### États-Unis

1958 : *Evaluated Nuclear Data Library* (LLNL<sup>100</sup>), R. J. Howerton, R. E. Dye, S. T. Perkins<sup>101</sup> : bibliothèque de données nucléaires.

1962 : EVAP - *A Fortran Program for Calculating the Evaporation of Various Particles from Excited Compound Nuclei*, L. Dresner (ORNL)<sup>102</sup>.

1963 : *Low-Energy Intranuclear Cascade Calculation*, H. W. Bertini (ORNL<sup>103</sup>)<sup>104</sup> : modèle et code de calcul de la cascade intranucléaire pour les réactions nucléaires aux énergies intermédiaires

1965 (à partir de) :

- *Evaluated Nuclear Data File* (ENDF<sup>105</sup>), bibliothèque de sections efficaces neutroniques et photoniques (ENDF/B- IV (1974), ENDF/B-V (1979), ENDF/BVI.r8 (2002), ENDF/B-VII.0 (2006), ENDF/B-VIII (2018)<sup>106</sup>, etc. élaborée sur le modèle anglais, H. C. Honeck (BNL<sup>107</sup>, 1965, 1966)<sup>108</sup>, M. K. Drake (BNL, 1970, 1974) ;

- GNASH – *A nuclear theory code* (1974, 1996, LANL), P. G. Young, E. D. Arthur and M. B. Chadwick, McGNASH (2004, LANL), P. Talou, M. Chadwick *et al.*

- EMPIRE – *Nuclear Reaction Model Code System for Data Evaluation* (2007, BNL), M. Herman *et al.* ;

- *Evaluated nuclear structure data file* (ENSDF), depuis 1986 base de données de la structure nucléaire, *National Nuclear Data Center*, BNL, M. R. Bhat *et al.* (1986), J. K. Tuli (2001) *et al.* ;

- AMPX – *A Modular System for Multigroup Cross-Section Generation and Manipulation* : code de mise en groupe d'énergie pour code de transport déterministe, N. M. Greene *et al.* (ORNL<sup>14</sup>, 1973), Michael E. Dunn *et al.* (1981, 2000) ;

- MINX – *A Multigroup Interpretation of Nuclear X-Sections*, C. R. Weisbin *et al.* (LANL<sup>109</sup>, 1973) ;

- NJOY – *A comprehensive ENDF/B Processing System*, R. E. Mac Farlane *et al.* (LANL, 1978, 1983, 1989.62, 1994,...) ;

- PREPRO – « *Pre-processing* » codes dédiés au traitement des données nucléaires au format ENDF/B, D. E. Cullen, K. McLaughlin (USA : LLNL, BNL, Vienne IAEA, 2007, 2015).

<sup>100</sup> Lawrence Livermore National Laboratory, USA.

<sup>101</sup> UCRL-50400 Vol. 4 Rev. 1, October 8, 1981, Lawrence Livermore Laboratory, University of California, p. 1.

<sup>102</sup> ORNL-TM-196, April 11, 1962.

<sup>103</sup> Oak Ridge National Laboratory, USA.

<sup>104</sup> *Physical Review* 131, 1801, 15 August 1963 ; *Erratum Physical Review* 138, AB2 (1965).

<sup>105</sup> <https://www.nndc.bnl.gov/endl/history.html> ; D. A. Brown, *Brief History of Iron Evaluations in the ENDF/B Library*, BNL-114315-2017-IR, National Nuclear Data Center, Brookhaven National Laboratory, September 06, 2017, <https://www.bnl.gov/isd/documents/95298.pdf>.

<sup>106</sup> D. A. Brown, M. B. Chadwick, R. Capote *et al.*, « ENDF/B-VIII.0: The 8<sup>th</sup> Major Release of the Nuclear Reaction Data Library with CIELO-project Cross Sections, New Standards and Thermal Scattering Data », *Nuclear Data Sheets*, Volume 148, February 2018, pp. 1-142.

<sup>107</sup> Brookhaven National Laboratory, USA.

<sup>108</sup> ENDF, *Evaluated Nuclear Data File Description and Specifications*, BNL-8381, 1965.

<sup>109</sup> Los Alamos National Laboratory, USA.

### Royaume-Uni (AWRE, UKAEA)

1957 : Base de sections efficaces système de traitement associé pour machines IBM 704/709/7090, K. Parker.

1960 (à partir de) :

- *Aldermaston Nuclear Data Library (UKNDL)*, bibliothèque de sections efficaces neutroniques et photoniques, K. Parker (1963) ;
- GALAXY, code de mise en groupe d'énergie pour code de transport déterministe ( $S_N$ ), J. A. Price (1964) ;
- MURAL, code de mise en groupe d'énergie pour code de transport déterministe ;
- DICE Mark IV, code de traitement des sections efficaces pour code de transport Monte-Carlo, W.W. M. Kerr (1964).

### France (CEA)

Décennie 70<sup>110</sup> :

- MICRAL, CELADON, élaboration de bibliothèques de sections efficaces multigroupes à partir de données nucléaires compilées ;
- CARLERESONNE, SECOL, AUTOSECOL, élaboration de bibliothèques de sections efficaces dans le domaine des résonances. AUTOSECOL, CARLERESONNE, codes de traitement des sections efficaces au CEA (« autoprotection », « mise en groupe » d'énergie).

Décennies 80-90 :

- *Joint Evaluated File* (JEF-1, 1985), évaluation internationale de données nucléaires pour la physique des réacteurs nucléaires élaborée sous l'égide de l'Agence de l'énergie nucléaire de l'OCDE ;
- THEMIS (1983), système de traitement des données nucléaires pour les codes déterministes et Monte-Carlo de neutronique et radioprotection, incluant le système américain NJOY, J. Gonnord, G. Dejonghe, C. Diop *et al* ;
- CALENDF (1986, 1994), code de traitement des sections efficaces par la méthode des tables de probabilité, P. Ribon *et al*.

2000 (à partir de) :

- *Joint Evaluated Fission and Fusion File-3* (JEFF-3), évaluation internationale de données nucléaires pour la physique des réacteurs nucléaires et les dispositifs à fusion, élaborée sous l'égide de l'Agence de l'énergie nucléaire de l'OCDE, JEFF-3.2 ;
- CALENDF (2002, 2010), code de traitement des sections efficaces par la méthode des tables de probabilité, P. Ribon *et al* ;
- CONRAD (2007), code de modélisation des réactions nucléaires prenant en compte les incertitudes associées aux paramètres nucléaires, C. De Saint Jean *et al* ;
- GALILÉE (2008), système de traitement des données nucléaires pour les codes déterministes et Monte-Carlo de neutronique et radioprotection (propagation de particules et évolution temporelle isotopique), M. Coste-Delclaux *et al*.

### Russie

1992 : *Biblioteka Rekomendovannykh Ocenennykh Neutronnykh Danykh*, BROND 2.2 du *Obninsk data Data center*, A.I. Blokhin *et al*.

---

<sup>110</sup> P. Reuss, *Du noyau atomique au réacteur nucléaire – La saga de la neutronique française*, edpsciences, Les Ulis, 2013.



2008 : *Russian file of evaluated neutron data*, RUSFOND (ROSFOND), M. N. Nikolaev et V. N. Koscheev *et al.*

### Pays Bas

2007 (à partir de) : TALYS, code de réaction nucléaire, produisant des sections efficaces de réactions induites par des particules neutres et chargées légères, à partir de modèles nucléaires, entre 1 keV et 200 MeV, A. Koning (NRG<sup>111</sup> Petten), S. Hilaire, S. Goriely (CEA Bruyères-le-Châtel, France).

2008 (à partir de) : *TALYS-based Evaluated Nuclear Data Library* (TENDL), bibliothèque de données nucléaires relatives au transport des particules neutres et chargées légères jusqu'à 200 MeV, A.J. Koning, D. Rochman (NRG Petten) *et al.*

### Japon

1977 : *Japanese Evaluated Nuclear Data Library-1* (JENDL-1), JENDL-4 en 2010, K. Shibata *et al.*, évaluation de données nucléaires délivrées par le *Nuclear Data Center* de la *Japan Atomic Energy Agency* (JAEA).

1983 : *Japanese Nuclear Data Committee Fission Product Decay Data File* version 1, version 2 en 1990, base de données de décroissance radioactive relative aux produits de fission, K. Tasaka *et al.*

2018 : *Nuclear Data Processing Code FRENDY* Version 1, K. Tada, S. Kunieda, Y. Nagaya, *Japan Atomic Energy Agency* (JAEA).

### Chine

1991 : *Chinese Evaluated Nuclear Data Library-2*, CENDL-2, *Chinese Nuclear Data Center* du *China Institute of Atomic Energy* (CIAE), CENDL-3.0 in 2000, 2005, Ge Zhigang *et al.*

### AIEA (Vienne)

1995 (à partir de) : *Fusion Evaluated Nuclear Data Library* (FENDL), FENDL-2.1 en 2004, FENDL-3 en 2009, bibliothèque de données nucléaires dédiées aux études/applications relatives à la fusion thermonucléaire, A. B. Pashchenko *et al.* (1995), D. López Aldama et A. Trkov *et al.* (2004), M. Sawan, R.A. Forrest *et al.* (2012).

2000 : *IAEA Photonuclear Data Library*, bibliothèque de sections efficaces photonucléaires, P. Obložinský.

---

<sup>111</sup> NRG : groupe industriel du nucléaire basé à Petten aux Pays-Bas.

**Annexe II : les équations de Boltzmann et de Bateman généralisées – Grandeurs physiques associées**

On présente ici les expressions des deux équations fondamentales de la neutronique, à savoir l'équation de Boltzmann – ou équation du transport – et les équations de Bateman généralisées (ou équations d'évolution, sous-entendu temporelle).<sup>112</sup> L'objectif est d'apporter un complément mathématiquement formalisé à la présentation générale du chapitre 1 en explicitant dans ces équations différentes grandeurs physiques et données nucléaires présentées dans l'ensemble des précédents chapitres.

**1. Notations et définitions des grandeurs physiques d'intérêt**

Variables caractérisant une particule		
$\vec{r}$	Position dans le système	cm
$E, E', E'_n, E'_\gamma, E_e, E_\alpha$	Énergie de la particule : neutron, gamma, électron, particule alpha	eV, keV, MeV
$t$	Instant considéré, temps	s
$\vec{\Omega}$	Direction de la particule	sr
Grandeurs relatives à la propagation de particules		
$N_k(\vec{r}, t), N_i(\vec{r}), N(\vec{r}, t)$	Concentration : nombre d'atomes d'espèce $k$ par unité de volume ou par unité de masse en $\vec{r}$ et à un instant $t$ donné	$\text{cm}^{-3}$ $\text{kg}^{-1}$
$\psi_n(\vec{r}, E'_n, \vec{\Omega}'_n, t)$ $\psi_\gamma(\vec{r}, E'_\gamma, \vec{\Omega}'_\gamma, t)$	Flux en phase ou flux angulaire : nombre de neutrons d'énergie $E'_n$ (resp. $E'_\gamma$ ), traversant perpendiculairement une surface unité située en $\vec{r}$ , de normale $\vec{\Omega}'_n$ (resp. $\vec{\Omega}'_\gamma$ ) par unités d'énergie en $E'_n$ (resp. $E'_\gamma$ ), d'angle solide dans la direction $\vec{\Omega}'_n$ (resp. $\vec{\Omega}'_\gamma$ ) et de temps en $t$	$\text{cm}^{-2} \text{MeV}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{s}^{-1}$
$\phi(\vec{r}, E', t), \phi(\vec{r}, E)$	Flux scalaire : intégrale en angle du flux angulaire	$\text{cm}^{-2} \text{MeV}^{-1} \text{s}^{-1}$
$\sigma(E)$	Section efficace microscopique : caractérise l'occurrence d'interactions entre une particule incidente d'énergie $E$ et une particule cible (noyau atomique pour le neutron, électron pour un photon)	$\text{cm}^2$
$\Sigma(\vec{r}, E) = N(\vec{r}, t)\sigma(E)$	Section efficace macroscopique : probabilité d'interaction par unité de longueur au point $\vec{r}$ et à l'énergie $E$ .	$\text{cm}^{-1}$
$\tau(\vec{r}, E) = \sigma(E)\phi(\vec{r}, E)$	Taux de réaction microscopique au point $\vec{r}$ et à l'énergie $E$	$\text{MeV}^{-1} \text{s}^{-1}$

<sup>112</sup> On reprend ici les présentations faites de ces deux équations dans l'ouvrage *La neutronique*, op. cit., pp. 12-13 et pp. 45-49. [http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA\\_Monographie4\\_Neutronique\\_2015\\_Fr.pdf](http://www.cea.fr/multimedia/Documents/publications/monographie-nucleaire/CEA_Monographie4_Neutronique_2015_Fr.pdf).

$\int_0^{20\text{ MeV}} \tau(\vec{r}, E) dE$ $= \int_0^{20\text{ eV}} \sigma(E) \phi(\vec{r}, E) dE$	<p>Taux de réaction microscopique intégré. C'est une donnée d'entrée pour résoudre les équations d'évolution temporelle.</p> <p>Le rapport :</p> $\bar{\sigma} = \frac{\int_0^{20\text{ MeV}} \sigma(E) \phi(\vec{r}, E) dE}{\int_0^{20\text{ MeV}} \phi(\vec{r}, E) dE}$ <p>appelé « section efficace à un groupe » est aussi utilisé et tabulé dans des bibliothèques dédiées à des configurations de réacteur et d'irradiation données.</p>	$\text{s}^{-1}$
$\sigma_{\gamma,q,k}(E'_\gamma \rightarrow E, \vec{\Omega}'_\gamma \rightarrow \vec{\Omega})$	Section efficace différentielle de production de neutrons à l'énergie $E$ dans la direction $\vec{\Omega}$ par la réaction photonucléaire de type $q$ sur le nucléide $k$	$\text{cm}^2 \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$
$\sigma_{n,q,k}(E'_n \rightarrow E, \vec{\Omega}'_n \rightarrow \vec{\Omega})$	Section efficace différentielle de production de gamma à l'énergie $E$ dans la direction $\vec{\Omega}$ par la réaction induite par neutron de type $q$ sur nucléide $k$	$\text{cm}^2 \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$
$k_{ij}(E_n)$	Section efficace d'énergie déposée localement ou section efficace de kerma ( <i>kinetics energy released in matter</i> )	$\text{eV cm}^2 \text{ atome}^{-1}$
$\sigma_k^{dpa}(E_n)$	Section efficace microscopique de production de déplacements ou <i>section efficace de déplacements par atome</i> (dpa) relatif au nucléide $k$	$\text{dpa cm}^2 \text{ atome}^{-1}$
$\bar{\nu}_{p,k}(E')$	Nombre moyen de neutrons prompts émis à la suite d'une fission induite sur un noyau $k$ par un neutron incident d'énergie $E'$	
$\chi_{p,k}(E' \rightarrow E)$	Spectre en énergie des neutrons prompts émis de manière isotrope à la suite d'une fission induite sur un noyau $k$ par un neutron incident d'énergie $E'$	$\text{MeV}^{-1}$
$\bar{E}_f$	Énergie moyenne libérée par la fission dans un combustible nucléaire donné	$\text{MeV}$
$\Sigma_f$	Section efficace macroscopique de fission relative à un combustible nucléaire donné	$\text{cm}^{-1}$
$\phi_{DN}(\vec{r}, t)$	Dlux de neutrons retardés ( <i>delayed neutrons</i> , DN) au point $\vec{r}$ et à l'instant $t$ dans un combustible nucléaire donné	$\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
$k_{eff}$	Facteur de multiplication effectif des neutrons	
$F(E_e)$	Faisceau monodirectionnel et monocinétique d'électrons d'énergie $E_e$ incident sur une cible	$\text{cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$
$p_{brem}(E_e, E_\gamma, \vec{\Omega}_\gamma)$	Rendement différentiel de production de gamma de freinage dans une cible : nombre	$\text{cm}^{-2} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$

	de gamma d'énergie $E_\gamma$ émis dans la direction $\vec{\Omega}_\gamma$ au point $\vec{r}$ pour un faisceau unitaire d'électrons d'énergie $E_e$	
$\mathcal{E}_d(\vec{r})$	Énergie déposée dans la matière, échauffement	$\text{W g}^{-1}$
$N_{dpa}(\vec{r})$	Nombre de déplacements par atome	$\text{dpa s}^{-1}$
<b>Grandeurs relatives à la désintégration radioactive</b>		
$\lambda_{\alpha,k}$	Constante de décroissance radioactive partielle du nucléide $k$ , correspondant à la voie $\alpha$	$\text{s}^{-1}$
$\lambda_{d,k}$	Constante partielle de décroissance radioactive du nucléide $k$ , correspondant à la voie $(\beta, n)$	$\text{s}^{-1}$
$\lambda_{p,fs,k}$	Constante de décroissance radioactive de fission spontanée du nucléide $k$	$\text{s}^{-1}$
$\bar{\nu}_{p,fs,k}$	Nombre moyen de neutrons prompts émis par fission spontanée du nucléide $k$	
$\chi_{p,fs,k}(E)$	Spectre des neutrons prompts émis de manière isotrope par fission spontanée du nucléide $k$	$\text{MeV}^{-1}$
$\chi_{d,k}(E)$	Spectre en énergie des neutrons retardés émis de manière isotrope par le nucléide $k$	$\text{MeV}^{-1}$
$\chi_{d,i}^{(k)}(E)$	Spectre des neutrons retardés émis à l'énergie $E$ par le précurseur $i$ issu de la fission induite par un neutron sur le noyau $k$	$\text{MeV}^{-1}$
$\zeta_{(\alpha,n)}^{(k)}(E, \vec{\Omega})$	Rendement différentiel des neutrons d'énergie $E$ et de direction $\vec{\Omega}$ produits par réaction $(\alpha, n)$ pour un nucléide $k$ émetteur $\alpha$ (prend en compte l'ensemble du spectre des $\alpha$ émis)	$\text{MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$
$\lambda_i$	Constante de décroissance radioactive totale du nucléide $i$	$\text{s}^{-1}$
$N_i(\vec{r}, t)$	Concentration : nombre d'atomes d'espèce $i$ par unité de volume ou par unité de masse en $\vec{r}$ et à un instant $t$ donné	$\text{cm}^{-3}$ $\text{kg}^{-1}$
$A_i(\vec{r}, t)$	Activité : nombre de désintégrations du nucléide $i$ par unité de volume (ou de masse) en $\vec{r}$ et par unité de temps en $t$ relatives au processus radioactif de constante $\lambda_i$	$\text{Bq cm}^{-3}$ $\text{Bq kg}^{-1}$
$I_{\gamma ik}$	Spectre discret en énergie des gamma de décroissance : nombre de gamma émis à l'énergie $E_{\gamma ik}$ lors de la désintégration du radionucléide d'espèce $i$	

$I_{\alpha ik}$	Spectre discret en énergie des particules alpha de décroissance : nombre de particules $\alpha$ émises à l'énergie $E_{\alpha ik}$ lors de la désintégration du radionucléide d'espèce $i$ par la voie $\alpha$	
$I_{\beta i}(E)$	Spectre continu en énergie des particules alpha de décroissance : nombre de particules $\beta$ émises par unité d'énergie à l'énergie $E$ lors de la désintégration du radionucléide d'espèce $i$ par la voie $\beta$	$\text{MeV}^{-1}$
$\bar{E}_{\gamma i}$	Énergie moyenne emportée par l'ensemble des gamma émis par désintégration du radionucléide d'espèce $i$	$\text{MeV}$
$\bar{E}_{\alpha i}$	Énergie moyenne emportée par l'ensemble des alpha émis par désintégration du radionucléide d'espèce $i$	$\text{MeV}$
$\bar{E}_{\beta i}$	Énergie moyenne emportée par l'ensemble des bêta émis par désintégration du radionucléide d'espèce $i$	$\text{MeV}$

2. L'équation de Boltzmann

L'équation de Boltzmann<sup>113</sup> ou équation de transport est le bilan du nombre des neutrons d'énergie  $E$  et de direction  $\vec{\Omega}$  dans un volume élémentaire  $D$  de l'espace des phases  $d\vec{r}.dE.d\vec{\Omega}$  et dans l'intervalle de temps élémentaire  $dt$ .

Sept termes sont impliqués dans ce bilan.

- a) La disparition algébrique des neutrons du domaine  $D$  par fuite à travers les surfaces délimitant le volume élémentaire autour du point  $\vec{r}$  (bilan net des neutrons entrant et sortant) :

$$-\vec{\Omega}.\vec{\nabla}\psi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)d\vec{r}.dE.d\vec{\Omega}.dt \tag{II - 1}$$

- b) La disparition des neutrons du domaine  $D$ , par absorption et diffusion□□ les absorptions faisant disparaître les neutrons et les diffusions les faisant passer à une autre énergie et les envoyant dans une autre direction, à l'instant  $t$  :

$$-\sum_k N_k(\vec{r},t)\sigma_k(E)\psi(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)d\vec{r}.dE.d\vec{\Omega}.dt \tag{II - 2}$$

- $N_k(\vec{r},t)$  : concentration des nucléides  $k$  au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ .

<sup>113</sup> L. Boltzmann, *Leçons sur la théorie des gaz*, traduction française, Paris, Éditions Jacques Gaby, 1987. L'équation de Boltzmann est appliquée ici aux neutrons.

- $\sigma_k(E)$  : section efficace microscopique totale d'un neutron à l'énergie  $E$  avec un nucléide  $k$ .

c) L'arrivée de neutrons dans le domaine  $D$  résultant des diffusions. Il s'agit des neutrons qui avant la collision étaient à une autre énergie et se déplaçaient dans une autre direction, et qui sortent de la collision à l'énergie  $E$  et dans la direction  $\vec{\Omega}$  à l'instant  $t$  :

$$\sum_k N_k(\vec{r}, t) \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \sigma_{s,k}(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) d\vec{r} \cdot dE \cdot d\vec{\Omega} \cdot dt \quad (\text{II} - 3)$$

$\sigma_{s,k}(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$  : section efficace microscopique de transfert faisant passer le neutron de l'énergie  $E'$  à l'énergie  $E$  et de la direction  $\vec{\Omega}'$  à la direction  $\vec{\Omega}$  lors d'une diffusion sur un nucléide  $k$ .

d) La source de **neutrons prompts** émis à l'énergie  $E$  et dans la direction  $\vec{\Omega}$ , à l'instant  $t$ , par une **fission induite par un neutron** d'énergie  $E'$  :

$$\frac{1}{4\pi} \sum_k N_k((\vec{r}, t) \int_0^\infty dE' \bar{\nu}_{p,k}(E') \sigma_{f,k}(E') \chi_{p,k}(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) d\vec{r} \cdot dE \cdot d\vec{\Omega} \cdot dt \quad (\text{II} - 4a)$$

- $\sigma_{f,k}(E')$  : section efficace microscopique de fission d'un neutron à l'énergie  $E'$  relative au nucléide  $k$ .
- $\bar{\nu}_{p,k}(E')$  : nombre moyen de neutrons prompts émis suite à une fission induite sur un noyau fissile  $k$  par un neutron d'énergie  $E'$ .
- $\chi_{p,k}(E' \rightarrow E)$  : spectre en énergie des **neutrons prompts** émis de manière isotrope suite à une fission induite sur un noyau fissile  $k$  par un neutron d'énergie  $E'$ .

e) La source de **neutrons prompts** émis à l'énergie  $E$  et dans la direction  $\vec{\Omega}$ , à l'instant  $t$ , par une **fission spontanée** d'un nucléide  $k$  :

$$\frac{1}{4\pi} \sum_k \bar{\nu}_{p,fs,k} \lambda_{p,fs,k} N_k((\vec{r}, t) \chi_{p,fs,k}(E) \quad (\text{II} - 4b)$$

- $\lambda_{p,fs,k}$  : constante de décroissance radioactive de fission spontanée du nucléide  $k$ .
- $\bar{\nu}_{p,fs,k}$  : nombre moyen de neutrons prompts émis suite à une fission induite sur un noyau fissile  $k$  par un neutron d'énergie  $E'$ .
- $\chi_{p,fs,k}(E)$  : spectre en énergie des **neutrons prompts** émis de manière isotrope suite à une fission spontanée d'un noyau  $k$ .

f) La source de **neutrons retardés** émis par fission à l'énergie  $E$  et dans la direction  $\vec{\Omega}$  à l'instant  $t$ . Ces neutrons proviennent de **produits de fission** radioactifs particuliers

dénommés **précurseurs** (voir chapitre 9). Comme la décroissance radioactive d'un noyau précurseur conduit à l'émission d'un neutron unique, la source de neutrons retardés s'écrit :

$$\frac{1}{4\pi} \sum_k \lambda_k b_k N_k(\vec{r}, t) \chi_{d,k}(E) d\vec{r} \cdot dE \cdot d\vec{\Omega} \cdot dt \quad (\text{II} - 5)$$

- $\lambda_k$  : constante de décroissance radioactive totale du noyau  $k$ .
- $b_k$  : rapport de branchement de la décroissance radioactive du noyau  $k$  dans la voie émettrice de neutrons.
- $\chi_{d,k}(E)$  : spectre en énergie des neutrons retardés émis de manière isotrope par le nucléide  $k$ .

**g)** Les sources de neutrons externes :

$$S_{ext}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{r} \cdot dE \cdot d\vec{\Omega} \cdot dt \quad (\text{II} - 6)$$

La variation du flux en phase dans le temps :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} d\vec{r} \cdot dE \cdot d\vec{\Omega} \cdot dt \quad (\text{II} - 7)$$

est égale à la somme algébrique des six quantités précédemment recensées. Cette égalité conduit à l'**équation intégrro-différentielle de Boltzmann**<sup>114</sup> satisfaite par le flux angulaire des neutrons,  $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} = & -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) - \sum_k N_k(\vec{r}, t) \sigma_k(E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \\ & + \sum_k N_k(\vec{r}, t) \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \sigma_{s,k}(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_k N_k(\vec{r}, t) \int_0^\infty dE' \bar{v}_{p,k}(E') \sigma_{f,k}(E') \chi_{p,k}(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_k \nu_{p,f,s,k} \lambda_{p,f,s,k} N_k(\vec{r}, t) \chi_{p,f,s,k}(E) \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_k \chi_{d,k}(E) \lambda_k N_k(\vec{r}, t) b_k d\vec{r} \cdot dE \cdot d\vec{\Omega} \cdot dt \\ & + S_{ext}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \end{aligned} \quad (\text{II} - 8)$$

<sup>114</sup> Il en existe aussi une forme intégrale, voir *La neutronique*, op. cit., pp. 55-58.

### Termes sources dérivés du flux de particules.

Source de neutrons prompts de fission induite par neutron	$\frac{1}{4\pi} \sum_k N_k(\vec{r}, t) \int_0^\infty dE' v_{p,k}(E') \sigma_{f,k}(E') \chi_{p,k}(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t)$	$\text{n cm}^{-3} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Source de neutrons ( $\alpha, n$ )	$\sum_k \zeta_{(\alpha,n)}^{(k)}(E, \vec{\Omega}) \lambda_{\alpha,k} N_k(\vec{r}, t)$	$\text{n cm}^{-3} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Source de neutrons ( $\gamma, xn$ ), ( $\gamma, f$ )	$\sum_k N_k(\vec{r}, t) \int_0^\infty dE'_\gamma \int_{4\pi} d\vec{\Omega}'_\gamma \sum_q \sigma_{\gamma,q,k}(E'_\gamma \rightarrow E, \vec{\Omega}'_\gamma \rightarrow \vec{\Omega}) \psi_\gamma(\vec{r}, E'_\gamma, \vec{\Omega}'_\gamma, t)$	$\text{n cm}^{-3} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Source de gamma induite par neutrons	$\sum_k N_k(\vec{r}, t) \int_0^\infty dE'_n \int_{4\pi} d\vec{\Omega}'_n \sum_q \sigma_{n,q,k}(E'_n \rightarrow E, \vec{\Omega}'_n \rightarrow \vec{\Omega}) \psi_n(\vec{r}, E'_n, \vec{\Omega}'_n, t)$	$\gamma \text{ cm}^{-3} \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Puissance résiduelle neutrons retardés	$P_{DN}(\vec{r}, t) = \phi_{DN}(\vec{r}, t) \Sigma_f \bar{E}_f$	$\text{W cm}^{-3}, \text{W g}^{-1}, \text{W cm}^{-3} \text{ W t}^{-1}, \text{W}$
Facteur d'amplification des neutrons	$\frac{1}{1-k_{eff}} (S_{(\alpha,n)} + S_{fission spontanée} + S_{(\gamma,n)} \dots)$	—
Source de gamma de <i>bremsstrahlung</i>	$\int F(E_e) p_{brem}(E_e, E_\gamma, \vec{\Omega}_\gamma) dE_e$	$\gamma \text{ MeV}^{-1} \text{ sr}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Énergie déposée : Kerma	$\mathcal{E}_d(\vec{r}) = \int_0^{E_{max}} dE \sum_i N_i(\vec{r}) \sum_j k_{ij}(E) \phi(\vec{r}, E)$	$\text{W cm}^{-3}$
Production de dpa	$N_{dpa}(\vec{r}) = \int_V d\vec{r} \sum_i N_i(\vec{r}) \int_0^{E_{max}} \sigma_i^{dpa}(E) \phi(\vec{r}, E) dE$	$\text{dpa s}^{-1}$

### 3. Les équations de Bateman généralisées ou équations d'évolution

Les équations générales gouvernant l'évolution temporelle de la concentration  $N_k(\vec{r}, t)$  des noyaux atomiques au cours de l'irradiation dérivent du bilan établi au point  $\vec{r}$  et dans l'intervalle de temps élémentaire  $dt$  autour de l'instant  $t$  des nucléides  $N_k(\vec{r}, t)$  qui :

a) apparaissent par réactions nucléaires :

$$\sum_{m \neq k} \varsigma_{k \leftarrow m}(\vec{r}, t) N_m(\vec{r}, t) dt \quad (\text{II} - 9)$$

où  $\varsigma_{k \leftarrow m}(\vec{r}, t)$  est le taux de réaction microscopique relatif à la formation du nucléide  $k$  à partir du nucléide  $m$  :



$$\varsigma_{k \leftarrow m}(\vec{r}, t) = \sum_q \int_0^\infty \sigma_{q, k \leftarrow m}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (\text{II} - 10)$$

$\sigma_{q, k \leftarrow m}(E)$  est la section efficace microscopique de la réaction  $q$  induite par neutron d'énergie  $E$  sur le nucléide  $m$  conduisant à la formation du nucléide  $k$  ;

b) apparaissent par désintégration radioactive :

$$\sum_{m \neq k} \lambda_{k \leftarrow m} N_m(\vec{r}, t) dt \quad (\text{II} - 11)$$

- $\lambda_{k \leftarrow m}$  est la constante de décroissance radioactive d'un nucléide de type  $m$  vers le nucléide  $k$  considéré ;

c) disparaissent par réactions nucléaires :

$$-\varsigma_k(\vec{r}, t) N_k(\vec{r}, t) dt \quad (\text{II} - 12)$$

où  $\varsigma_k(\vec{r}, t)$  est le taux de réaction microscopique relatif à la disparition du nucléide  $k$  :

$$\varsigma_k(\vec{r}, t) = \sum_q \int_0^\infty \sigma_{q, k}(E) \phi(\vec{r}, E, t) dE \quad (\text{II} - 13)$$

- $\sigma_{q, k}(E)$  est la section efficace microscopique de la réaction  $q$  induite par neutron d'énergie  $E$  sur le nucléide  $k$ , conduisant à la disparition du nucléide  $k$  ;

d) disparaissent par désintégration radioactive :

$$-\lambda_k N_k(\vec{r}, t) dt \quad (\text{II} - 14)$$

- $\lambda_k$  est la constante de décroissance radioactive totale du nucléide de type  $k$  (tous noyaux d'arrivée confondus).

La variation  $dN_k(\vec{r}, t)$  est un bilan au point  $\vec{r}$ , dans l'intervalle de temps élémentaire  $dt$  autour de l'instant  $t$ , des nucléides précurseurs  $N_k(\vec{r}, t)$  qui sont formés et qui disparaissent.

L'expression de la variation  $dN_k(\vec{r}, t)$  du nombre de nucléides  $N_k(\vec{r}, t)$  au point  $\vec{r}$  par unité de temps au temps  $t$  conduit à un système d'équations différentielles couplées, appelées **équations de Bateman généralisées** ou **équations d'évolution** dont la forme est la suivante :

$$\frac{dN_k(\vec{r}, t)}{dt} = \sum_{m \neq k} \varsigma_{k \leftarrow m}(\vec{r}, t) N_m(\vec{r}, t) + \sum_{m \neq k} \lambda_{k \leftarrow m} N_m(\vec{r}, t) - \lambda_k N_k(\vec{r}, t) - \varsigma_k(\vec{r}, t) N_k(\vec{r}, t) \quad (\text{II} - 15)$$

Les **termes sources** dérivés de la concentration de nucléides radioactifs sont recensés ci-après :

Activité	$A_i(\vec{r}, t) = \lambda_i N_i(\vec{r}, t)$	Bq, Bq kg <sup>-1</sup> , Bq cm <sup>-3</sup>
Source de gamma discrète	$S_{\gamma ik}(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}, t) I_{\gamma ik}$	$\gamma$ cm <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup> à l'énergie $\gamma_{ik}$
Source de particules alpha discrète	$S_{\alpha ik}(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}, t) I_{\alpha ik}$	$\alpha$ cm <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup> à l'énergie $E_{\alpha ik}$
Source de bêta continue	$S_{\beta i}(\vec{r}, E, t) = A_i(\vec{r}, t) I_{\beta i}(E)$	$\beta$ cm <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup> à l'énergie $E$
Puissance résiduelle gamma	$P_{\gamma i}(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}, t) \bar{E}_{\gamma i}$	W cm <sup>-3</sup> , W g <sup>-1</sup> , W cm <sup>-3</sup> , W t <sup>-1</sup> , W
Puissance résiduelle alpha	$P_{\alpha i}(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}, t) \bar{E}_{\alpha i}$	W cm <sup>-3</sup> , W g <sup>-1</sup> , W cm <sup>-3</sup> , W t <sup>-1</sup> , W
Puissance résiduelle bêta	$P_{\beta ik}(\vec{r}, t) = A_i(\vec{r}, t) \bar{E}_{\beta i}$	W cm <sup>-3</sup> , W g <sup>-1</sup> , W cm <sup>-3</sup> , W t <sup>-1</sup> , W
Source de neutrons de fission spontanée	$\frac{1}{4\pi} \sum_k \bar{\nu}_{p,fs,k} \lambda_{fs,k} N_k(\vec{r}, t) \chi_{p,fs,k}(E)$	n cm <sup>-3</sup> MeV <sup>-1</sup> sr <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>
Source de neutrons retardés	$\frac{1}{4\pi} \sum_k \lambda_{d,k} N_k(\vec{r}, t) \chi_{d,k}(E)$	n cm <sup>-3</sup> MeV <sup>-1</sup> sr <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>

L'établissement présenté ci-dessus de l'équation de Boltzmann (1) et de celles de Bateman (2) montre qu'elles sont **couplées** par le fait qu'y interviennent conjointement les concentrations des nucléides et le flux de neutrons.

Une forme dérivée importante du système formé par ces équations est connue sous la dénomination « équations » de la cinétique spatiale :

- bilan au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$  des concentrations des nucléides précurseurs de neutrons retardés, notées  $C_i^{(k)}(\vec{r}, t)$  :

$$\frac{dC_i^{(k)}(\vec{r}, t)}{dt} = -\lambda_i^{(k)} C_i^{(k)}(\vec{r}, t) + N_k(\vec{r}, t) \beta_i^{(k)} \int_0^\infty dE' \bar{\nu}_{t,k}(E') \sigma_{f,k}(E') \phi(\vec{r}, E', t) dE' \quad (\text{II} - 16)$$

avec :

- $-\lambda_i^{(k)} C_i^{(k)}(\vec{r}, t)$  disparition par décroissance radioactive du précurseur  $i$  ;
- $\bar{\nu}_{t,k}(E')$  : nombre total moyen de neutrons émis par fission induite par un neutron d'énergie  $E'$  ;

- $\beta_i^{(k)}$  : fraction de neutrons retardés relative au précurseur  $i$  issu de la fission induite par un neutron sur un noyau de type  $k$  ;
  - $\int_0^\infty dE' \bar{v}_{d,i}^{(k)}(E') N_k((\vec{r}, t) \sigma_{f,k}(E') \phi(\vec{r}, E', t)$  représente la production du nombre de précurseurs par fission sachant que l'on admet qu'à 1 neutron retardé émis correspond 1 noyau précurseur formé.
- réécriture de l'équation du transport des neutrons en faisant apparaître la famille  $F$  des noyaux atomiques fissiles et les précurseurs de neutrons retardés :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} = & -\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) - \sum_k N_k(\vec{r}, t) \sigma_k(E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \\
 & + \sum_k N_k(\vec{r}, t) \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' \sigma_{s,k}(E' \rightarrow E, \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) \\
 & + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \in F} N_k((\vec{r}, t) \int_0^\infty dE' \bar{v}_{p,k}(E') \sigma_{f,k}(E') \chi_{p,k}(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E', t) \\
 & + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \in F} \sum_i \lambda_i^{(k)} C_i^{(k)}(\vec{r}, t) \chi_{d,i}^{(k)}(E) \\
 & + S_{ext}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)
 \end{aligned} \tag{II - 17}$$

avec :

$\chi_{d,i}^{(k)}(E)$  le spectre des neutrons retardés émis à l'énergie  $E$  par le précurseur  $i$  issu de la fission induite par un neutron sur le noyau  $k$ .

### Remarque

Dans la pratique, on considère dans (II - 17) 6 ou 8 familles de précurseurs (voir chapitre 9, § 9), ce qui permet de simplifier la réalisation des calculs.

### Annexe III : facteur de Westcott et notion d'intégrale de résonance

La **neutronique**, en particulier celle des réacteurs à neutrons thermiques, utilise traditionnellement ces deux grandeurs – **facteur de Westcott et intégrale de résonance** – d'une part dans le **domaine de l'instrumentation nucléaire** (mesures de flux de neutrons par exemple) et d'autre part pour effectuer certains calculs simples tels que ceux des taux de réaction.<sup>115 116 117</sup>

On suppose que l'on veuille calculer le **taux de réaction** suivant :

$$\tau_j = \int_0^\infty \phi(E) \sigma_j(E) dE \quad (\text{III} - 1)$$

où :

- $\phi(E)$  est le flux de neutrons d'énergie  $E$ , unité : neutrons  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  ;
- $\sigma_j(E)$  est la section efficace neutronique ( $j$  : diffusion élastique, capture radiative, fission), unité :  $\text{cm}^2$ .

On introduit la variable vitesse  $v$  via la relation  $E = (1/2) m_n v^2$  ( $m_n$  masse du neutron) et l'on a :

$$\varphi(v) \sigma_j(v) dv = \phi(E) \sigma_j(E) dE \quad (\text{III} - 2)$$

avec :

$$\varphi(v) = \phi(E) \frac{dE}{dv} = \phi(E) m_n v$$

puisque  $\sigma_j(v) \equiv \sigma_j(E)$  (vis-à-vis des variables  $v$  et  $E$ , la section efficace est une fonction et non une densité de probabilité).

Sachant que par définition  $\varphi(v) = n(v)v$  où  $n(v)$  ( $\text{cm}^{-3}$ ) est la densité des neutrons de vitesse  $v$ , l'expression (1) du taux de réaction se réécrit alors :

$$\tau = \int_0^\infty \varphi(v) \sigma_j(v) dv = \int_0^\infty n(v) v \sigma_j(v) dv = \int_0^\infty n(v) dv \int_0^\infty \rho(v) v \sigma_j(v) dv \quad (\text{III} - 3)$$

en ayant posé :

<sup>115</sup> Voir *Standard Test Method for Measuring Neutron Fluence Rates by Radioactivation of Cobalt and Silver*, ASTM Committee E10 on Nuclear Technology and Applications, E 481 – 97.

<sup>116</sup> *Neutron Fluence Measurements*, Technical Reports Series No 10, IAEA, Vienne, 1970.

<sup>117</sup> S. Marguet, *La physique des réacteurs nucléaires*, Lavoisier, Collection EDF R&D, Paris, 2017, Chapitre 7 « Thermalisation de neutrons », § 16, 17 et 18, pp. 391-416.

$$\rho(v) = \frac{n(v)}{\int_0^\infty n(v)dv} \quad (\text{III} - 4)$$

$$\int_0^\infty n(v)dv = n \quad (\text{III} - 5)$$

La densité de probabilité  $\rho(v)$  définie par (8.3) représente donc la distribution des vitesses des neutrons, et  $n$  la densité neutronique s'exprimant en nombre de neutrons par unité de volume. Dans un cœur de réacteur à neutrons thermiques, le spectre des neutrons  $\rho(v)$  peut être représenté idéalement par un spectre de Maxwell à la température  $T$  considérée, dans sa partie thermique, et un spectre en  $1/E$  dans le domaine épithermique. Les spectres réels s'écartent néanmoins peu ou prou de ces deux formes selon la nature du milieu de propagation des neutrons en raison de l'existence des résonances.

Pour déterminer l'intégrale  $\int_0^\infty n(v)v\sigma_j(v)dv$ , des auteurs ont introduit la notion de **section efficace effective**,  $\hat{\sigma}_r$ , définie par les relations suivantes<sup>118</sup> :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_j v_0 n &= \int_0^\infty n(v)v\sigma_j(v)dv = n \int_0^\infty \rho(v)v\sigma_j(v)dv \Leftrightarrow \hat{\sigma}_j v_0 \\ &= \int_0^\infty \rho(v)v\sigma_j(v)dv \end{aligned} \quad (\text{III} - 6a)$$

$$\hat{\sigma}_j = \frac{\int_0^\infty \rho(v)v\sigma_j(v)dv}{v_0} \quad (\text{III} - 6b)$$

où :

$v_0 = 2200 \text{ m s}^{-1} \equiv 2.2 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$  est la vitesse conventionnelle des neutrons dans le domaine des énergies thermiques à la température  $T_0 = 293.6 \text{ K}$ .

La **section efficace effective**  $\hat{\sigma}_j$  s'interprète alors comme la section efficace qui rendrait compte de  $\tau_j(v)$  si les neutrons avaient tous la même vitesse  $v_0$ <sup>119</sup>.

C. S. Westcott, dans le cadre de l'étude neutronique des réacteurs nucléaires, modélise la **section efficace effective**  $\hat{\sigma}$  sous une forme qui distingue la réaction se produisant dans le domaine thermique et celle se produisant dans le domaine épithermique (c'est-à-dire au-dessus du domaine thermique) :

<sup>118</sup> C. S. Westcott, « Effective cross section values for well moderated thermal reactor spectra », 3<sup>rd</sup> edition corrected, AECL-1101, November 1970, p. 1. ; C.H. Westcott, W.H. Walker, T.K. Alexander, « Effective cross sections and cadmium ratios for the neutron spectra of thermal reactors », *Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, A/C0NF.15/P/202 Canada 26 May 1958, AECL 6/2.

<sup>119</sup> La dénomination « section efficace effective » est également utilisée en neutronique avec une définition différente mais reposant sur la même idée de base qui est celle d'exprimer un taux de réaction par le produit d'une section efficace effective par un flux intégré (en vitesse ou en énergie).

$$\hat{\sigma}_j = \sigma_{0,j}(g_{w,j} + rs_{w,j}) \quad (\text{III} - 7)$$

où :

- $\sigma_{0,j}$  est la section efficace neutronique à  $v_0 = 2200 \text{ m s}^{-1}$  ;
- $r$  : est un indice de spectre des neutrons caractérisant le rapport entre neutrons épithermiques et neutrons thermiques ;
- $g_{w,j}$  et  $s_{w,j}$  sont des paramètres qui dépendent de la température :
  - $g_{w,j}$  est appelé **facteur de Westcott**, il est caractéristique du domaine thermique ;
  - $s_{w,j}$  recouvre la notion d'**intégrale de résonance** qui caractérise la réaction nucléaire considérée dans le domaine des énergies épithermiques.

Le taux de réaction  $\tau$  devient alors :

$$\tau_j = nv_0\hat{\sigma}_j = nv_0\sigma_{0,j}(g_{w,j} + rs_{w,j}) \quad (\text{III} - 8)$$

dont l'utilisation suppose une prétabulation des valeurs des paramètres  $g_{w,j}$  et  $s_{w,j}$ .

### Remarque

Si le spectre des neutrons est purement maxwellien et les sections efficaces strictement en  $1/v$ , alors  $g_{w,j} = 1$  et  $s_{w,j} = 0$ .

## 1. Le facteur de Westcott

À la température  $T$ , le facteur de Westcott  $g_w(T)$  est défini par le rapport de la section efficace neutronique  $\bar{\sigma}_{Maxw,j}(T)$  (diffusion élastique, capture radiative, fission) moyennée sur un spectre maxwellien,  $M(v_{rel}, T)$ , et de la section efficace neutronique à la vitesse thermique conventionnelle de  $v_0 = 2200 \text{ m s}^{-1}$  (sections efficaces thermiques souvent mesurées à cette vitesse),  $\sigma_{0,j}$ <sup>120</sup> :

$$g_{w,j}(T) = \frac{\bar{\sigma}_{Maxw}(T)}{\sigma_{0,j}} = \frac{\frac{\int_0^\infty \sigma_j(v)M(v,T)v dv}{\int_0^\infty vM(v,T)dv}}{\sigma_{0,j}} = \frac{\int_0^\infty \sigma_j(v)M(v,T)v dv}{v_T\sigma_{0,j}} \quad (\text{III} - 9)$$

où :

<sup>120</sup> B. Pritychenko, S.F. Mughabghab, « Neutron Thermal Cross Sections, Westcott Factors, Resonance Integrals, Maxwellian Averaged Cross Sections and Astrophysical Reaction Rates Calculated from the ENDF/B-VII.1, JEFF-3.1.2, JENDL-4.0, ROSFOND-2010, CENDL-3.1 and EAF-2010 Evaluated Data Libraries », *Nuclear Data Sheets* 113 (2012) 3120–3144, pp. 3122–3123, <https://doi.org/10.1016/j.nds.2012.11.007>, (Brookhaven National Laboratory Report BNL-98403-2012-JA).

- $v$  est la vitesse relative du neutron et du noyau atomique cible (si le noyau atomique cible est supposé immobile,  $v$  se confond avec la vitesse dans le système du laboratoire) ;
- $v_T = \sqrt{2kT/\mu}$ ,  $\mu$  masse réduite du système neutron (n) et noyau cible (N),  $\mu = m_n/(m_n + m_N)$ ,  $v_T$  représente la vitesse thermique moyenne.<sup>121</sup>

Le facteur de Westcott  $g_{w,j}(T)$  est proche de l'unité pour les noyaux pour lesquels la section efficace de capture radiative varie en  $1/v$ . Le tableau 12 donne quelques exemples de valeurs de  $g_{w,j}(T)$  à la température  $T = 293.6$  K pour différents types  $j$  de réactions neutron-noyau atomique.

**Exemples de valeurs de sections efficaces du facteur de Westcott à la température  $T = 293.6$  K  $\equiv 0.025$  eV ; à droite des facteurs de Westcott sont indiquées les valeurs correspondantes, en barns (b), de la section efficace thermique (à la vitesse 2200 m s<sup>-1</sup> du neutron).<sup>122</sup>**

Diffusion élastique	Capture radiative	Fission
Hydrogène : 1.085 ; 30.10 (b)	Fer 56 : 1. ; 2.586 (b)	Uranium 235 : 0.9767; 585 (b)
Oxygène 16 : 1.129 ; 3.97 (b)	Samarium 149 : 1.717 ; 4.172 10 <sup>4</sup> (b)	Plutonium 239 : 1.05 ; 747.1 (b)

2. Intégrale de résonance

Il existe deux manières de définir l'intégrale de résonance. La première introduit une énergie de coupure  $E_c$  (resp. la léthargie  $u_c$ ) entre les domaines d'énergie thermique et épithermique. L'intégrale de résonance  $I_{R,j,\text{épi}}$  relative à une réaction nucléaire de type  $j$  ( $j$  : diffusion élastique, capture radiative, fission) est définie conventionnellement par l'expression :

$$I_{R,j,\text{épi}} = \int_{E_c}^{\infty} \sigma_j(E) \frac{dE}{E} \equiv \int_0^{u_c} \sigma_j(u) du \tag{III - 10}$$

où  $E$  est l'énergie cinétique du neutron dans le référentiel du laboratoire et  $u$  la léthargie correspondante.

La grandeur  $I_{R,j,\text{épi}}$  caractérise la réaction neutronique considérée en dehors du domaine d'énergie thermique ; le facteur de pondération  $1/E$  apparaissant dans l'intégrale correspond à un spectre typique de neutrons se propageant dans un milieu dans lequel l'élément absorbant est suffisamment dilué pour ne pas perturber leur ralentissement

<sup>121</sup> La vitesse moyennée sur le spectre maxwelllien est obtenue en écrivant :  $\bar{v} = \int_0^{\infty} vM(v,T)dv = \frac{2v_T}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}$ .

<sup>122</sup> B. Pritychenko, S.F. Mughabghab, « Neutron Thermal Cross Sections, Westcott Factors... », *op. cit.*, voir Tables.

supposé se faire par chocs élastiques ; c'est la raison pour laquelle  $I_{R,j}$  est qualifiée d'intégrale de résonance à dilution infinie.<sup>123 124</sup>

Dans la pratique, cette définition présente deux limitations :

- l'énergie de coupure  $E_c$  n'est pas toujours connue avec précision ; conventionnellement, elle est prise en général égale à la valeur 0.5 eV, valeur correspondant à une feuille de cadmium d'épaisseur 1 mm ; en effet, le cadmium est un absorbant de neutrons thermiques en raison de la valeur élevée de la section efficace de capture radiative du  $^{113}_{48}\text{Cd}$  à l'énergie 0.178 eV et qui vaut environ 20 000 barns ;
- le flux épithermique est supposé être en  $1/E$ , ce qui n'est pas toujours vrai dans la réalité.

Il lui est généralement préférée la définition suivante, cohérente avec le formalisme de Westcott qui ne fait plus explicitement apparaître une énergie de coupure entre les domaines d'énergie thermique et épithermique<sup>125</sup> :

$$I_{R,j} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[ \sigma_j(E) - g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \right] \frac{dE}{E} \quad (\text{III} - 11)$$

où le facteur  $g_j$  est similaire à celui défini par Westcott,  $E_0 = 0.0253$  eV l'énergie cinétique du neutron correspondant à la vitesse  $v_0 = 2200 \text{ m s}^{-1}$ , et  $\varepsilon$  la borne inférieure en énergie à considérer ; celle-ci n'est pas physiquement parlant rigoureusement nulle et doit être choisie de manière appropriée selon le milieu thermaliseur des neutrons : 0.126 eV pour l'eau lourde, 0.076 eV pour le graphite par exemple.<sup>126</sup>

Dans l'expression (11), l'intégrale couvre tout le domaine en énergie et on y retranche la partie thermique de la section efficace représentée par le terme :

$$\sigma_{j,th}(E) = g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \quad (\text{III} - 12)$$

<sup>123</sup> R. Vidal, E. Cardoso-Martinho, *Mesure des intégrales de résonance d'absorption (Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zr, Mo)*, Rapport CEA-R 2840, 1965.

<sup>124</sup> Dans certaines tables, la borne supérieure est prise égale à 100 keV.

<sup>125</sup> R. Vidal, *Mesure des intégrales de résonance d'absorption*, Rapport CEA-R 2486, 1964 ; ces formalismes soulèvent la question du raccordement des spectres thermique et épithermique des neutrons, notamment à l'énergie de coupure  $E_c$ .

<sup>126</sup> Voir C. S. Westcott, « Effective cross section values for well moderated thermal reactor spectra », *op. cit.*, p. 13 § 7.2.



qui traduit le comportement en  $\frac{1}{\sqrt{E}} \equiv \frac{1}{v}$  des sections efficaces dans le domaine d'énergie thermique (voir chapitres 8 et 10). C'est la raison pour laquelle (III – 11) est aussi écrite sous la forme suivante :

$$I_{R,j} = I_{R,j,t} - I_j(1/v) \quad (\text{III} - 13)$$

avec :

$$I_{R,j,t} = \int_{\varepsilon}^{\infty} \sigma_j(E) \frac{dE}{E} \quad (\text{III} - 14)$$

et

$$I_j(1/v) = \int_{\varepsilon}^{\infty} g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{dE}{E} \quad (\text{III} - 15)$$

Si on réintroduit l'énergie de coupure  $E_c$  dans (III – 11), alors :

$$I_{R,j} = \int_{\varepsilon}^{E_c} \left[ \sigma_j(E) - g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \right] \frac{dE}{E} + \int_{E_c}^{\infty} \left[ \sigma_j(E) - g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \right] \frac{dE}{E} \quad (\text{III} - 16)$$

$$I_{R,j} = [\Delta I_{R,j,th} - \Delta I_{j,th}(1/v)] + I_{R,j,epi} - I_{R,j,epi}(1/v) \quad (\text{III} - 17)$$

en ayant posé :

$$\Delta I_{R,j,th} = \int_{\varepsilon}^{E_c} \sigma_j(E) \frac{dE}{E} \quad (\text{III} - 18)$$

$$\Delta I_{j,th}(1/v) = \int_{\varepsilon}^{E_c} g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{dE}{E} \quad (\text{III} - 19)$$

$$I_{R,j,epi} = \int_{E_c}^{\infty} \sigma_j(E) \frac{dE}{E} \quad (\text{III} - 20)$$

$$I_{R,j,epi}(1/v) = \int_{E_c}^{\infty} g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{dE}{E} = 2 g_j \sigma_{0,j} \sqrt{\frac{E_0}{E_c}} \quad (\text{III} - 21)$$

Le terme entre crochets dans (III – 17) a une valeur corrective liée à l'écart susceptible d'exister entre le comportement réel de la section efficace en fonction de l'énergie du neutron et le comportement fréquent en  $1/v$ . Le terme  $I_{R,j}$  dans (III – 17) est appelé **intégrale d'excès de résonance** par rapport à la partie en  $1/v$ . On a donc :

$$I_{R,j,\text{épi}} \approx I_{R,j} + 2\,g_j\,\sigma_{0,j}\sqrt{\frac{E_0}{E_c}}$$

(III – 22)

Les intégrales de résonance  $I_{R,j}$  et/ou  $I_{R,j,\text{épi}}$  font l’objet de tabulations dans la littérature<sup>127</sup> ; par exemple, pour la réaction (n,γ) sur le cobalt 59,  $^{59}_{27}\text{Co}$  :  $g = 1.$ ,  $\sigma_0 = 37.45\text{ b}$ ,  $I_{R,\text{épi}} = 71.\text{b}$  et  $I_R = 54.2\text{ b}$ , avec  $E_0 = 0.0253\text{ eV}$  et  $E_c = 0.5\text{ eV}$ .

Le domaine d’énergie considéré en physique des réacteurs étant situé entre 0 et 20 MeV, la borne supérieure considérée dans les intégrales définissant les intégrales de résonance n’est pas égale à l’infini. Par exemple, on trouve des valeurs tabulées pour lesquelles l’énergie maximale d’intégration a été fixée à 100 keV.<sup>128</sup>

Le tableau 13 fournit quelques valeurs de l’intégrale de résonance  $I_{R,j,\text{épi}}$ .

Tableau 13. Exemple de valeurs de l’intégrale de résonance  $I_R$  en barns.<sup>129</sup>

Isotope	Diffusion élastique	Capture radiative	Fission
Hydrogène 1	264.7	0.149	
Oxygène 16	61.38	$8.55\,10^{-5}$	
Fer 56	134.3	1.343	
Samarium 149	562.5	3487	
Uranium 235	170.3	140.5	276.
Plutonium 239	180.7	181.5	302.8

En accord avec le formalisme de Westcott, le paramètre  $s_{w,j}$  apparaissant dans l’expression (8) s’écrit<sup>130</sup> :

$$s_{w,j} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{I_{R,j}}{\sigma_{0,j}}$$

(III – 23)

Par exemple, en reprenant l’exemple du cobalt 59, on a :

$$s_w = \frac{2}{\sqrt{3.14}} \frac{54.2}{37.45} = 1.63$$

<sup>127</sup> Par exemple : B. Pritychenko, S. F. Mughabghab, « Neutron Thermal Cross Sections, Westcott Factors, Resonance Integrals, Maxwellian Averaged Cross Sections and Astrophysical Reaction Rates Calculated from the ENDF/B-VII.1, JEFF-3.1.2, JENDL-4.0, ROSFOND-2010, CENDL-3.1 and EAF-2010 Evaluated Data Libraries », *Brookhaven National Laboratory Report BNL-98403-2012-JA* ; E. M., J. I. Kim, « A compilation of resonance integrals - Part I, Z = 1-52 (Hydrogen-Tellurium) », *Journal of Radioanalytical Chemistry*, Vol. 29 (1976) 175-224, pp. 180-221 ; Part II, Z= 53-100, *Journal of Radioanalytical Chemistry*, Vol. 42 (1978), pp. 181-278.

<sup>128</sup> JEF-Report 14, *Table of Simple Integral Neutron Cross Section Data from JEF-2.2, ENDF/BVI, JENDL-3.2, BROND-2 and CENDL-2*, AEN/OCDE, 1994, *Janis Nuclear Display Program*, AEN/OCDE, <http://www.nea.fr/janis>.

<sup>129</sup> B. Pritychenko, S. F. Mughabghab, *op. cit.*

<sup>130</sup> C. S. Westcott, « Effective cross section values for well moderated thermal reactor spectra », *op. cit.*, p. 5.

### Exemple

#### Calcul de la contribution de la résonance à 6.67 eV à l'intégrale de résonance de la réaction de capture radiative des neutrons par l'uranium 238.

En utilisant la relation (5.69) du chapitre 8 exprimant la section efficace  $\sigma_{(n,\gamma)}(E)$  de la réaction  $(n, \gamma)$ , cette contribution est obtenue en calculant l'intégrale suivante :

$$I_{R,\text{épi}} = \int_{0.5 \text{ eV}}^{20 \text{ MeV}} \sigma_{(n,\gamma)}(E) \frac{dE}{E} = \int_{0.5 \text{ eV}}^{\infty} \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{1}{\left(\frac{E-E_0}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2 + 1} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \frac{dE}{E}$$

avec :

- $\sigma_0 = 21700$  barns
- $\Gamma_\gamma = 25 \cdot 10^{-3}$  eV
- $\Gamma = 26.5 \cdot 10^{-3}$  eV

Comme  $E$  varie peu dans la résonance et que l'essentiel de l'intégrale provient du domaine d'énergie associé à la forte variation de la résonance on peut considérer  $E \approx E_0$  ; par ailleurs  $\Gamma$  et  $\Gamma_\gamma$  ont des valeurs très proches,  $\Gamma \approx \Gamma_\gamma$ . L'expression ci-dessus de  $I_{R,\text{épi}}$  devient<sup>131</sup> :

$$I_{R,\text{épi}} \approx \frac{\sigma_0}{E_0} \int_{0.5 \text{ eV}}^{\infty} \frac{dE}{\left(\frac{E-E_0}{\frac{\Gamma}{2}}\right)^2 + 1}$$

On pose :

$$x = \frac{E - E_0}{\frac{\Gamma}{2}}$$

Et on étend l'intégrale de  $-\infty$  à  $+\infty$ , ce qui ne change pas sensiblement sa valeur pour la raison invoquée précédemment :

$$I_{R,\text{épi}} \approx \frac{\sigma_0}{E_0} \frac{\Gamma}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\sigma_0}{E_0} \frac{\Gamma}{2} [\tan^{-1} x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi \sigma_0 \Gamma}{2 E_0}$$

$$I_{R,\text{épi}} \approx \frac{3.14 \times 21700 \text{ (barns)} \times 26.5 \cdot 10^{-3} \text{ (eV)}}{2 \times 6.67 \text{ (eV)}} = 135.35 \text{ barns}$$

<sup>131</sup> Un calcul exact de cette intégrale est donné dans : W. G. Pettus, M. N. Baldwin, C. Samuel, *Resonance absorption in thorium metal and oxide rods*, Joint U.S.-EURATOM research and development program, Final report, BAW-1286, Ca-7, November 1963, Appendix B ; une forme approchée intermédiaire est fournie par J. S., Story, *Nuclear Data Series*, Atomic Energy Research Establishment, A.E.R.E. T/R 2389, Harwell, Great Britain, 1957.

En faisant apparaître explicitement la température  $T$  des neutrons, le taux de réaction (III – 8) prend la forme :

$$\tau_j(T) = \varphi_0 \hat{\sigma}_j = \varphi_0 \sigma_{0,j} \left( g_{w,j}(T) + r \sqrt{\frac{T}{T_0}} s_{w,j} \right) \quad (\text{III} - 24)$$

où :

- $T_0 = 293.6 \text{ K}$  ;
- $\varphi_0 = nv_0$  : flux des neutrons à la vitesse  $v_0 = 2200 \text{ m s}^{-1}$ .

L'expression alternative que l'on rencontre également dans la littérature est la suivante<sup>132</sup> :

$$\tau_j = \phi_{th} \sigma_{j,th} + E_c \phi_{ep}(E_c) I_{R,j} = \phi_{th} \sigma_{j,th} \left( 1 + r \frac{I_{R,j}}{\sigma_{th,j}} \right) \quad (\text{III} - 25)$$

avec :

- $\phi_{th}$  le flux des neutrons thermiques ;
- $\sigma_{j,th}$  la section efficace moyenne des neutrons thermiques relative à la réaction  $j$  considérée (élastique, absorption, fission) ;
- $I_{R,j}$  l'intégrale de résonance définie par la relation (III – 10) ;
- $r = \frac{E_c \phi_{ep}(E_c)}{\phi_{th}}$  le rapport du flux épithermique par unité de léthargie au flux thermique.

Une correspondance peut être établie entre les deux expressions du taux de réaction  $\tau_j$  (III – 24) et (III – 25).

---

<sup>132</sup> E. M. Gryntakis, J. I. Kim, « A compilation of resonance integrals - Part I, Z = 1-52 (Hydrogen-Tellurium) », *Journal of Radioanalytical Chemistry*, Vol. 29 (1976) 175-224, p. 178, .

# **Quelques dates marquantes**

On rappelle quelques-unes des étapes du développement de la physique nucléaire au plan expérimental, théorique et applicatif.<sup>1 2 3</sup>

### Découvertes expérimentales

- 1808 : vérification de l'hypothèse atomique, J. Dalton.
- 1896 : rayons X, W. Röntgen.
- 1896 : radioactivité, H. Becquerel.
- 1897 : électron, J. J. Thomson.
- 1898 : polonium, radium, M. Curie.
- 1899 : rayonnements  $\alpha$  et  $\beta^-$ , E. Rutherford.
- 1900 : rayonnement  $\gamma$ , P. Villard.
- 1911 : existence du noyau de l'atome, E. Rutherford.
- 1919 : proton, E. Rutherford.
- 1923 : effet Compton, A. H. Compton.
- 1931 : deutérium, H. C. Urey.
- 1932 : neutron, J. Chadwick.
- 1932 : positron, muon, C. D. Anderson.
- 1934 : rayonnement  $\beta^+$ , radioactivité artificielle, I. et F. Joliot-Curie.
- 1937 : capture électronique, L. Alvarez.
- 1938 : fission de l' $^{238}\text{U}$ , O. Hahn et F. Strassmann, Lise Meitner.
- 1939 : libération de neutrons, von Halban, F. Joliot, L. Kowalski.
- 1947 : pions (muon  $\pi$ ), C. F. Powell.
- 1949 : hypothèse de la formation par nucleosynthèse du carbone 12, F. Hoyle.
- 1955 : antiproton, O. Chamberlain, E. Segré.
- 1956 : neutrino, C. L. Cowan et F. Reines.
- 1964 : fond diffus cosmologique, A. A. Penzias, R. W. Wilson.
- 1974 : quark charmé, B. Richter.
- 1975 : lepton tau, M. L. Perl.
- 1977 : quark bottom, L. M. Lederman.
- 1983 : bosons W et  $Z^0$ , C. Rubbia, S. van der Meer.
- 1984 : noyaux exotiques, H.J. Rose and G.A. Jones.
- 1985 : noyaux avec halos de neutrons, noyaux exotiques, GANIL.
- 1987 : double désintégration bêta, M. Moe.
- 2006 : fluctuations de température du fond diffus cosmologique, G. F. Smoot, J. C. Mather.
- 2006 : production de l'élément 118, l'Oganesson ( $^{294}_{118}\text{Og}$ ), confirmation en 2015 .
- 2012 : boson de Higgs, CERN.
- ...

<sup>1</sup> Voir entre autres, E. Segré, *Les physiciens et leurs découvertes*, Fayard, Paris, 1984.

<sup>2</sup> P. Reuss, *L'épopée de l'énergie nucléaire – Une histoire scientifique et industrielle*, Collection Génie Atomique, INSTN/EDP Sciences, Les Ulis, 2007.

<sup>3</sup> Bertrand Goldschmidt, *Lec complexe atomique*, Fayard, Paris 1980.

## Développements théoriques

- 1815 : hydrogène, unité de base de la constitution des atomes, W. Prout.
- 1868 : classification périodique des éléments, D. Mendeleïev.
- 1872 : théorie cinétique des gaz, L. Boltzmann.
- 1901 : quanta d'énergie, M. Planck.
- 1905 : équivalence masse-énergie, effet photo-électrique, A. Einstein.
- 1913 : modèle de l'atome, N. Bohr.
- 1915 : théorie de la relativité générale, A. Einstein.
- 1922 : théorie du « Big Bang », A. Friedmann.
- 1924 : ondes de matière, L. de Broglie.
- 1925 : principe d'exclusion de W. Pauli.
- 1926 : équation de E. Schrödinger.
- 1927 : principe d'incertitude de W. Heisenberg.
- 1934 : théorie de la radioactivité  $\beta$  (interaction faible), E. Fermi
- 1935 : théorie de l'interaction forte, H. Yukawa.
- 1935 : double désintégration bêta, M. Goeppert-Mayer, E. Majorana<sup>4</sup>, W. H. Furry.
- 1935 : formule de masse des noyaux, H. Bethe, C. F. Weizsäcker.
- 1936 : modèle de la goutte liquide, N. Bohr.
- 1936 : formule de Breit et Wigner décrivant une résonance isolée.
- 1946 : théorie de la « matrice R », E. P. Wigner et L. Eisenbud.
- 1947 : phénoménologie des réactions induites par des neutrons de plusieurs dizaines ou centaines de MeV, R. Serber.
- 1948-49 : modèle en couches, H. D. Jensen et M. Goeppert-Mayer.
- 1955 : critère de rentabilité d'une machine à fusion thermonucléaire dénommé « critère de Lawson » du nom de son auteur.
- 1956 : interaction nucléon-nucléon : force de Skyrme (T. H. R. Skyrme).
- 1962 : théorie des cordes, Dirac, puis G. Veneziano, J. Scherk, J. H. Schwarz, T. Yoneya, J. Polchinski (D-branes).
- 1964 : hypothèse des quarks, M. Gell-Mann, G. Zweig.
- 1964 : prédiction du spectre fond diffus cosmologique (domaine micro-onde), G. Doroshkevitch, I. D. Novikov.
- 1967 : modèle des quarks, M. Gell-Mann.
- 1973 : chromodynamique quantique (QCD) pour décrire l'interaction forte, H. D. Politzer, F. Wilczek, J. Gross.
- 1974 : Chromodynamique quantique sur réseau, K. Wilson
- 1980 : interaction nucléon-nucléon, D. Gogny.
- 1986 : traitement numérique du problème à  $N$  corps, J. Barnes, P. Hut.
- 2019 : théories concurrentes sur l'existence ou la non-existence de la matière noire et de l'énergie noire.

...

---

<sup>4</sup> Voir É. Klein, *En cherchant Majorana*, Flammarion, Équateurs Essais, Paris, 2013.

## Applications nucléaires

1914-18 : appareil radiographique.  
1930 : cyclotron à proton, Berkeley, USA.  
1931 : Van de Graaf, USA.  
1942 : « pile de Fermi », Chicago.  
1945 : bombes atomiques uranium et plutonium.  
1946 : première pile atomique canadienne et anglaise.  
1948 : ZOE, première pile atomique française.  
1951 : production d'énergie nucléaire par réacteur à neutrons rapides (USA).  
1953 : première chambre à bulles.  
1950 (~) : première machine à fusion thermonucléaire ou tokamak<sup>5</sup> conçue en ex-Union soviétique.  
1954 : réacteur à uranium enrichi modéré au graphite, URSS.  
1955 : premier sous-marin à propulsion nucléaire, USA.  
1956 : premier réacteur français producteur d'énergie, Marcoule, filière UNGG.  
1966 : réacteur de recherche OSIRIS au CEA/Saclay.  
1967 : démarrage de Chooz A, premier REP français, arrêté définitivement en 1991.  
1976 : mise en fonctionnement de l'usine de La Hague.  
2006 : début construction du premier EPR en Finlande.

## Accidents nucléaires majeurs

1957 : Windscale, Royaume-Uni.  
1979 : Three Miles Island, États-Unis.  
1986 : Tchernobyl, Ukraine.  
1999 : Tokai Mura, Japon.  
2011 : Fukushima, Japon.

---

<sup>5</sup> Acronyme de *toroidalnaïa kamera s magnitnymi katouchkami* (transcrit de l'alphabet cyrillique) : « chambre toroïdale avec bobines magnétiques ».



# **Unités et constantes physiques**

## Rappel sur les unités d'énergie

Le **joule (J)** est l'unité d'énergie dans le **système d'unités internationales (SI)**.<sup>1</sup> Il est souvent converti selon les usages dans d'autres unités.

- La conversion en **calories** : 1 calorie (cal) = 4.18 J.
- La conversion en **kilowatt-heure** : le watt est une unité de puissance correspondant à une quantité d'énergie mise en jeu pendant une durée d'une seconde ; 1 watt (W) = 1 joule par seconde (1 J/s). 1 kilowatt-heure (kWh) est la quantité d'énergie correspondant à une puissance de 1 000 watts délivrée pendant une heure, soit 3 600 secondes ; on a donc 1 Wh = 3600 J et 1 kWh =  $3.6 \cdot 10^6$  J = 3.6 MJ (mégajoules).
- La conversion en **tonnes équivalent pétrole** : la tonne équivalent pétrole est notée « **tep** » : 1 tep =  $10^{10}$  calories =  $41.8 \cdot 10^9$  joules = 41.8 GJ (gigajoules).
- Le « **kgep** » est un sous-multiple de la tep : 1 kgep =  $10^{-3}$  tep (un millième de tep) =  $10^7$  calories =  $10^4$  kilocalories.
- La conversion en électronvolt (eV) est usuelle en physique atomique et nucléaire :  
 $1\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}$  joule,  $1\text{keV} = 10^3\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-16}$  joule,  $1\text{MeV} = 10^6\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-13}$  joule,  $1\text{meV} = 10^{-3}\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-22}$  J.

Cette unité est souvent reliée à la température  $T$  exprimée en kelvin (K) *via* la relation :  $E$  (eV) =  $k_B$  (eV par kelvin)  $\times T$  (kelvin), où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $8.61734 \cdot 10^{-5}$  eV par kelvin (ou  $k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23}$  joules par kelvin) ; par exemple, la température  $T = 300$  K correspond à l'énergie  $E = 300 \times 8.61734 \cdot 10^{-5} = 0.02585$  eV.

- La conversion en thermies (th) est une unité ancienne encore utilisée : **1 thermie** =  $10^6$  calories =  $4.18 \cdot 10^6$  J = 4.18 MJ.
- La conversion en **British Thermal Unit (BTU)** : 1 BTU = 252 calories = 1.055 J.

## Quelques ordres de grandeur

L'énergie libérée par la fission d'un noyau d'uranium 235 induite par un neutron est d'environ :

$$200\text{ MeV} = 200 \cdot 10^6 \times 1.602 \cdot 10^{-19} = 3.2 \cdot 10^{-11}\text{ J}$$

La fission induite par neutrons de 1 gramme d'uranium 235, qui contient environ  $2.56 \cdot 10^{21}$  atomes d'uranium 235, produit une énergie de :

$$3.2 \cdot 10^{-11}\text{ J} \times 2.56 \cdot 10^{21} = 8,53 \cdot 10^{10}\text{ J} \approx 2\text{ tep} = 2000\text{ kgep}$$

(Le nombre d'atomes d'uranium 235 dans 1g d'uranium 235 s'écrit :  $\frac{6.02 \cdot 10^{23} \times 1}{235} = 2.56 \cdot 10^{21}$ )

<sup>1</sup> *Le Système international d'unités (SI)*, Bureau international des poids et mesures (BIPM), Organisation intergouvernementale de la Convention du Mètre, 9<sup>e</sup> édition 2019, <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure>.

L'énergie libérée par la fusion d'un noyau de tritium (T) avec un noyau de deutérium (D) est de l'ordre de :

$$17.5 \text{ MeV} = 17.5 \cdot 10^6 \times 1.602 \cdot 10^{-19} = 2.8 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

La fusion d'un gramme de tritium, qui contient  $2 \cdot 10^{23}$  atomes de tritium, produit une énergie de :

$$2.8 \cdot 10^{-12} \text{ J} \times 2 \cdot 10^{23} = 5,6 \cdot 10^{11} \text{ J} \approx 13 \text{ tep} = 13 \text{ 000 kgep}$$

L'énergie thermique produite en un jour par un réacteur à eau sous pression (REP) d'une puissance thermique de 2 700 MW est :

$$2700 \cdot 10^6 \text{ (W)} \times 24 \text{ (h)} \times 3600 \text{ (s)} \approx 2.33 \cdot 10^{14} \text{ J} \approx 5.58 \cdot 10^{10} \text{ kcal} = 5.58 \cdot 10^7 \text{ th} \\ \approx 6.47 \cdot 10^7 \text{ kW h} \approx 5.58 \cdot 10^3 \text{ tep.}$$

La combustion de 1 gramme de charbon (carbone) produit une énergie de :

$$7 \text{ kilocalories} = 7 \cdot 10^3 \times 4.18 = 2.93 \cdot 10^4 \text{ J} \approx 7 \cdot 10^{-7} \text{ tep} = 7 \cdot 10^{-4} \text{ kgep},$$

par conséquent 1 gramme d'uranium 235 et 2.86 tonnes de charbon ( $\frac{8,53 \cdot 10^{10} \text{ J}}{293 \cdot 10^4 \text{ J}} = 2.86 \cdot 10^6$  grammes de charbon) s'équivalent en termes d'énergie dégagée.

L'homme a un besoin énergétique quotidien d'environ 2 400 kcal :  $2 \text{ 400 kcal} \approx 10^7 \text{ J} = 10 \text{ MJ} \approx 2.77 \text{ kW h} \approx 0.24 \text{ kgep}$ .

La consommation électrique moyenne par an et par personne en France est d'environ 2240 kWh, soit 6 kWh par jour (2020), et d'environ 6 400 kWh si l'on inclut la consommation des entreprises, la moyenne mondiale étant d'environ 2 600 kWh.

Le mégawatt-jour par tonne d'uranium métal initial : MWj/t.<sup>2</sup>

Par définition :

$$1 \text{ mégawatt} - \text{jour} = 10^6 \times 24 \text{ heures} = 24 \text{ 000 kWh} = 0.864 \cdot 10^{11} \text{ joules}$$

Le « mégawatt-jour par tonne » d'uranium métal initial est l'unité utilisée pour exprimer l'énergie thermique extraite d'une tonne d'uranium du combustible nucléaire initial sur une durée d'irradiation donnée.

Par exemple, en admettant qu'un combustible nucléaire délivre 35 watts par gramme d'uranium métal, soit 35 MW/t, alors un taux d'irradiation de 33 000 MWj/t représente  $33 \text{ 000}/35 = 943$  jours d'irradiation du combustible nucléaire considéré.

L'irradiation d'un combustible nucléaire est également mesurée par la fluence neutronique, c'est-à-dire le produit du flux de neutrons ( $\text{neutrons cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ ) par la durée (s) d'irradiation (ou bien l'intégrale du flux de neutrons sur le temps si ce flux n'est pas constant pendant la durée de l'irradiation). L'unité de fluence est le nombre de neutrons par unité de surface :  $n \text{ cm}^{-2}$ .

---

<sup>2</sup> Voir J. Bussac, P. Reuss, *Traité de neutronique – Physique et calcul de réacteurs nucléaires*, Hermann, Paris, 1978, p. 432.

Pour des raisons de commodité, la fluence est exprimée en « neutrons par kilobarn » (n/kb) :  
 $1 \text{ n/kb} = 10^{21} \text{ n/cm}^2$  puisque  $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$ .

En utilisant la section efficace macroscopique de fission et l'énergie délivrée par une fission (de l'ordre de 200 MeV), on établit, pour un combustible d'un enrichissement en uranium 235,  $e$  (en %), donné, une correspondance entre le taux d'irradiation exprimé en MWj/t et ce même taux (ou fluence) exprimé en n/kb :

$1 \text{ n/kb}$  équivaut à  $5515 \times e \text{ (}\%) \text{ MWj/t}$ .

	Joule J	Calorie cal	Thermie th	Kilowatt- heure kW h	Électronvolt eV	Tonnes équivalent pétrole tep	British Thermal Unit BTU
1 joule (J)	1	0.239	$2.39 \cdot 10^{-7}$	$2.778 \cdot 10^{-7}$	$6.24 \cdot 10^{18}$	$2.39 \cdot 10^{-11}$	$9.479 \cdot 10^{-4}$
1 calorie (cal)	4.18	1	$10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{19}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$3.96 \cdot 10^{-3}$
1 thermie (th)	$4.18 \cdot 10^6$	$10^6$	1	1.16	$2.6 \cdot 10^{25}$	$10^{-4}$	$3.96 \cdot 10^3$
1 kilowatt- heure (kW h)	$3.6 \cdot 10^6$	$8.6 \cdot 10^5$	0.86	1	$2.25 \cdot 10^{25}$	$8.6 \cdot 10^{-5}$	$2.93 \cdot 10^{-4}$
1 Électronvolt (eV)	$1.602 \cdot 10^{-19}$	$3.85 \cdot 10^{-20}$	$3.85 \cdot 10^{-26}$	$4.45 \cdot 10^{-26}$	1	$3.83 \cdot 10^{-30}$	$1.52 \cdot 10^{-22}$
1 tep	$41.8 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^{10}$	$10^4$	$1.16 \cdot 10^4$	$2.6 \cdot 10^{29}$	1	$3.96 \cdot 10^7$
1 BTU	$1.055 \cdot 10^3$	$2.52 \cdot 10^2$	$3.96 \cdot 10^3$	$2.93 \cdot 10^{-4}$	$6.59 \cdot 10^{21}$	$3.96 \cdot 10^7$	1

## Constantes physiques et unités

<https://codata.org/>.

<https://codata.org/?s=fundamental+constants>.

- Publication de 2014 :

P. J. Mohr, D. B. Newell, B. N. Taylor, « CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014 », *Reviews of Modern Physics*, Volume 88, July-September 2016 ;

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.88.035009> ;

[http://ws680.nist.gov/publication/get\\_pdf.cfm?pub\\_id=920687](http://ws680.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=920687).

- Accès interactif aux constantes physiques :

<https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.

- Accès au fichier des valeurs des constantes physiques :

[https://physics.nist.gov/cuu/pdf/wallet\\_2018.pdf](https://physics.nist.gov/cuu/pdf/wallet_2018.pdf) ;

[https://physics.nist.gov/cuu/pdf/wall\\_2018.pdf](https://physics.nist.gov/cuu/pdf/wall_2018.pdf) ;

<https://physics.nist.gov/cuu/Constants/Table/allascii.txt> (listing des valeurs).

- Lien entre le Système international d'unités (SI) et le CODATA :

« Redefinition of the International System of Units (SI) based on the CODATA Fundamental Constant » :

<https://codata.org/initiatives/data-science-and-stewardship/fundamental-physical-constants/redefinition-of-the-international-system-of-units-si-based-on-the-codata-fundamental-constant/>.

Quelques constantes physiques

Grandeur physique	Symbole usuel	Valeur Les nombres entre parenthèses sont les valeurs d'incertitude à l'écart-type ( $1\sigma$ ) sur les deux derniers chiffres de la valeur de la grandeur physique concernée.
Vitesse de la lumière dans le vide	$c$	$299\,792\,458\,\text{m s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{Hz}^{-1}$ ou $\text{J s}$ $4.135\,667 \times 10^{-21}\,\text{MeV s}$ $\hbar = h/2\pi \quad 1.054\,571\,817 \dots \times 10^{-34}\,\text{J s}$ $6.582\,118 \dots \times 10^{-22}\,\text{MeV s}$ $6.582\,118 \dots \times 10^{-19}\,\text{keV s}$ $6.582\,118 \dots \times 10^{-16}\,\text{eV s}$
	$\hbar c$	$3.16\,10^{-26}\,\text{N m}^2$ $197.327 \times 10^{-15}\,\text{MeV m}$ $197.327 \times 10^{-10}\,\text{keV cm}$ $197.327 \times 10^{-13}\,\text{MeV cm}$
Charge élémentaire	$e$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\text{C}$
Constante d'Avogadro	$N_A$	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Nombre d'Avogadro	$N_{Av}$	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k, k_B$	$1.380\,649 \times 10^{-23}\,\text{J K}^{-1}$ $8.617\,333 \times 10^{-5}\,\text{eV K}^{-1}$
Électronvolt	$\text{eV}$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\text{J}$
Unité de masse atomique $\frac{1}{12}$ masse carbone 12	$u$	$1.660\,539\,066\,60(50) \times 10^{-27}\,\text{kg}$ $1.492\,418\,085\,60(45) \times 10^{-10}\,\text{J}$ $931.494\,102\,42(28)\,\text{MeV}$
Constante newtonienne de gravitation	$G$ $G/\hbar c$	$6.674\,30(15) \times 10^{-11}\,\text{m}^3\,\text{kg}^{-1}\,\text{s}^{-2}$ $6.708\,83(15) \times 10^{-39}\,(\text{GeV}/c^2)^{-2}$
Constante de structure fine $e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$	$\alpha$	$7.297\,352\,5693\,(11) \times 10^{-3}$
Inverse	$\alpha^{-1}$ $e^2/(4\pi\epsilon_0)$	$137.035\,999\,084(21)$ $1.439964 \times 10^{-13}\,\text{MeV cm}$ $1.439964\,\text{MeV fm}$
Constante de Rydberg	$R_\infty$	$1.0\,973\,731.568\,160 \times 10^7\,\text{m}^{-1}$
Fréquence de Rydberg $\alpha^2 M_e c^2/(2h)$	$cR_\infty$	$3.289\,841\,960\,2508(64) \times 10^{15}\,\text{Hz}$
Perméabilité magnétique du vide $4\pi\alpha\hbar c/(e^2 c)$	$\mu_0$	$1.256\,637\,062\,12(19) \times 10^{-6}\,\text{N A}^{-2}$
Permittivité électrique du vide $1/(\mu_0 c^2)$	$\epsilon_0$	$8.854\,187\,8128(13) \times 10^{-12}\,\text{F m}^{-1}$
Masse de l'électron	$M_e$	$9.109\,383\,7015(28) \times 10^{-31}\,\text{kg}$ $8.187\,105\,7769(25) \times 10^{-14}\,\text{J}$ $0.510\,998\,950\,00(15)\,\text{MeV}$ $5.485\,799\,090\,65\,(16) \times 10^{-4}\,\text{u}$
en unité d'énergie équivalente $M_e c^2$		
en unité de masse atomique		
Rayon classique de l'électron	$r_0$	$2.817\,940\,3262(13) \times 10^{-15}\,\text{m}$
Longueur d'onde Compton de l'électron $h/(M_e c)$		$2.426\,310\,238\,67(73) \times 10^{-12}\,\text{m}$
Masse du proton	$M_p$	$1.672\,621\,923\,69(51) \times 10^{-27}\,\text{kg}$ $1.503\,277\,615\,98(46) \times 10^{-10}\,\text{J}$ $938.272\,088\,16(29)\,\text{MeV}$ $1.007\,276\,466\,621(53)\,\text{u}$
en unité d'énergie équivalente $M_p c^2$		
en unité de masse atomique		
Rapport masse du proton/masse de l'électron	$M_p/M_e$	$1836.152\,673\,43(11)$
Longueur d'onde Compton du proton $h/(M_p c)$		$1.321\,409\,855\,39(40) \times 10^{-15}\,\text{m}$
Masse du neutron	$m_n$	$1.674\,927\,498\,04(95) \times 10^{-27}\,\text{kg}$ $1.505\,349\,762\,87(86) \times 10^{-10}\,\text{J}$ $939.565\,420\,52(54)\,\text{MeV}$ $1.008\,664\,915\,95(49)\,\text{u}$
en unité de masse atomique		
Rapport masse du neutron/masse de l'électron	$M_n/M_e$	$1838.683\,661\,73\,(89)$
Longueur d'onde Compton du neutron $h/(M_n c)$		$1.319\,590\,905\,81(75) \times 10^{-15}\,\text{m}$
Magnéton de Bohr $e\hbar/(2M_e)$	$\mu_B$	$9.274\,010\,0783(28) \times 10^{-24}\,\text{J T}^{-1}$ ou $\text{A m}^2$
Magnéton nucléaire $e\hbar/(2M_p)$	$\mu_N$	$5.050\,783\,53 \times 10^{-27}\,\text{J T}^{-1}$ ou $\text{A m}^2$
Rayon de Bohr $\alpha/(4\pi R_\infty)$	$\alpha_0$	$5.291\,772\,109\,03(80) \times 10^{-11}\,\text{m}$
Constante de Faraday	$F$	$9.648\,533\,212 \times 10^4\,\text{C mol}^{-1}$

# **Liste des éléments et isotopes naturels associés**

Z : numéro atomique  
g/l (g l<sup>-1</sup>) : gramme par litre, unité utilisée pour les éléments gazeux  
E+nm : notation pour 10<sup>nm</sup>  
 $N \text{ atomes cm}^{-3} = N_{av} \times [\rho \text{ (g cm}^{-3})/M \text{ (g mol}^{-1})]$  ,  $N_{av}$  nombre d'Avogadro,  $N_{av} = 6.02214 \text{ E} + 23 \equiv 6.02214 \text{ } 10^{23}$   
 $N \text{ atomes cm}^{-3} = N_{av} \times [\rho \text{ (g l}^{-1})/M \text{ (g mol}^{-1})] \times 10^{-3}$

Z	Élément	Sym-bole	Masse atomique (g mol <sup>-1</sup> ) <i>M</i>	Masse volumique g cm <sup>-3</sup> <i>ρ</i>	Nombre atomes cm <sup>-3</sup> <i>N</i>	Isotopes naturels, classés par abondance décroissante (les isotopes radioactifs sont marqués d'un astérisque)
1	Hydrogène	H	1,00794	0,084 g/l	5,01875E+19	<sup>1</sup> H, <sup>2</sup> H
2	Hélium	He	4,002602	0,17 g/l	2,55775E+19	<sup>4</sup> He, <sup>3</sup> He
3	Lithium	Li	6,941	0,53	4,59838E+22	<sup>7</sup> Li, <sup>6</sup> Li
4	Béryllium	Be	9,012182	1,85	1,23621E+23	<sup>9</sup> Be
5	Bore	B	10,811	2,46	1,37031E+23	<sup>11</sup> B, <sup>10</sup> B
6	Carbone	C	12,0107	3,51	1,75991E+23	<sup>12</sup> C, <sup>13</sup> C
7	Azote	N	14,0067	1,17 g/l	5,03038E+19	<sup>14</sup> N, <sup>15</sup> N
8	Oxygène	O	15,9994	1,33 g/l	5,00903E+19	<sup>16</sup> O, <sup>18</sup> O, <sup>17</sup> O
9	Fluor	F	18,9984032	1,58 g/l	5,00831E+19	<sup>19</sup> F
10	Néon	Ne	20,1797	0,84 g/l	2,50677E+19	<sup>20</sup> Ne, <sup>22</sup> Ne, <sup>21</sup> Ne
11	Sodium	Na	22,98976928	0,97	2,54090E+22	<sup>23</sup> Na
12	Magnésium	Mg	24,3050	1,74	4,31126E+22	<sup>24</sup> Mg, <sup>26</sup> Mg, <sup>25</sup> Mg
13	Aluminium	Al	26,9815386	2,70	6,02626E+22	<sup>27</sup> Al
14	Silicium	Si	28,0855	2,33	4,99603E+22	<sup>28</sup> Si, <sup>29</sup> Si, <sup>30</sup> Si
15	Phosphore	P	30,973762	1,82	3,53857E+22	<sup>31</sup> P
16	Soufre	S	32,065	2,06	3,86889E+22	<sup>32</sup> S, <sup>34</sup> S, <sup>33</sup> S, <sup>36</sup> S
17	Chlore	Cl	35,453	2,95 g/l	5,01095E+19	<sup>35</sup> Cl, <sup>37</sup> Cl
18	Argon	Ar	39,948	1,66 g/l	2,50244E+19	<sup>40</sup> Ar, <sup>36</sup> Ar, <sup>38</sup> Ar
19	Potassium	K	39,0983	0,86	1,32462E+22	<sup>39</sup> K, <sup>41</sup> K, <sup>40</sup> K*
20	Calcium	Ca	40,078	1,54	2,31401E+22	<sup>40</sup> Ca, <sup>44</sup> Ca, <sup>42</sup> Ca, <sup>48</sup> Ca*, <sup>43</sup> Ca, <sup>46</sup> Ca
21	Scandium	Sc	44,955912	2,99	4,00530E+22	<sup>45</sup> Sc
22	Titane	Ti	47,867	4,51	5,67402E+22	<sup>48</sup> Ti, <sup>46</sup> Ti, <sup>47</sup> Ti, <sup>49</sup> Ti, <sup>50</sup> Ti
23	Vanadium	V	50,9415	6,09	7,19940E+22	<sup>51</sup> V, <sup>50</sup> V*
24	Chrome	Cr	51,9961	7,14	8,26948E+22	<sup>52</sup> Cr, <sup>53</sup> Cr, <sup>50</sup> Cr, <sup>54</sup> Cr
25	Manganèse	Mn	54,938045	7,44	8,15550E+22	<sup>55</sup> Mn
26	Fer	Fe	55,845	7,87	8,48675E+22	<sup>56</sup> Fe, <sup>54</sup> Fe, <sup>57</sup> Fe, <sup>58</sup> Fe
27	Cobalt	Co	58,933195	8,89	9,08432E+22	<sup>59</sup> Co
28	Nickel	Ni	58,6934	8,91	9,14196E+22	<sup>58</sup> Ni, <sup>60</sup> Ni, <sup>62</sup> Ni, <sup>61</sup> Ni, <sup>64</sup> Ni
29	Cuivre	Cu	63,546	8,92	8,45332E+22	<sup>63</sup> Cu, <sup>65</sup> Cu
30	Zinc	Zn	65,38	7,14	6,57664E+22	<sup>64</sup> Zn, <sup>66</sup> Zn, <sup>68</sup> Zn, <sup>67</sup> Zn, <sup>70</sup> Zn
31	Gallium	Ga	69,723	5,91	5,10461E+22	<sup>69</sup> Ga, <sup>71</sup> Ga
32	Germanium	Ge	72,64	5,32	4,41049E+22	<sup>74</sup> Ge, <sup>72</sup> Ge, <sup>70</sup> Ge, <sup>73</sup> Ge, <sup>76</sup> Ge
33	Arsenic	As	74,92160	5,72	4,59769E+22	<sup>75</sup> As
34	Sélénium	Se	78,96	4,82	3,67613E+22	<sup>80</sup> Se, <sup>78</sup> Se, <sup>76</sup> Se, <sup>82</sup> Se, <sup>77</sup> Se, <sup>74</sup> Se
35	Brome	Br	79,904	3,14	2,36653E+22	<sup>79</sup> Br, <sup>81</sup> Br
36	Krypton	Kr	83,798	3,48	2,50090E+22	<sup>84</sup> Kr, <sup>86</sup> Kr, <sup>82</sup> Kr, <sup>83</sup> Kr, <sup>80</sup> Kr, <sup>78</sup> Kr



37	Rubidium	Rb	85,4678	1,53	1,07805E+22	<sup>85</sup> Rb, <sup>87</sup> Rb*
38	Strontium	Sr	87,62	2,63	1,80760E+22	<sup>88</sup> Sr, <sup>86</sup> Sr, <sup>87</sup> Sr, <sup>84</sup> Sr
39	Yttrium	Y	88,90585	4,47	3,02781E+22	<sup>89</sup> Y
40	Zirconium	Zr	91,224	6,51	4,29757E+22	<sup>90</sup> Zr, <sup>94</sup> Zr*, <sup>92</sup> Zr, <sup>91</sup> Zr, <sup>96</sup> Zr*
41	Niobium	Nb	92,90638	8,58	5,56151E+22	<sup>93</sup> Nb
42	Molybdène	Mo	95,96	10,28	6,45140E+22	<sup>98</sup> Mo, <sup>96</sup> Mo, <sup>95</sup> Mo, <sup>92</sup> Mo, <sup>100</sup> Mo*, <sup>97</sup> Mo, <sup>94</sup> Mo
43	Technétium	Tc	98,9063	11,49	6,99595E+22	<sup>99</sup> Tc*, <sup>99m</sup> Tc*
44	Ruthénium	Ru	101,07	12,45	7,41819E+22	<sup>102</sup> Ru, <sup>104</sup> Ru, <sup>101</sup> Ru, <sup>99</sup> Ru, <sup>100</sup> Ru, <sup>96</sup> Ru, <sup>98</sup> Ru
45	Rhodium	Rh	102,90550	12,41	7,26246E+22	<sup>103</sup> Rh
46	Palladium	Pd	106,42	12,02	6,80193E+22	<sup>106</sup> Pd, <sup>108</sup> Pd, <sup>105</sup> Pd, <sup>110</sup> Pd, <sup>104</sup> Pd, <sup>102</sup> Pd
47	Argent	Ag	107,8682	10,49	5,85643E+22	<sup>107</sup> Ag, <sup>109</sup> Ag
48	Cadmium	Cd	112,411	8,64	4,62867E+22	<sup>114</sup> Cd, <sup>112</sup> Cd, <sup>111</sup> Cd, <sup>110</sup> Cd, <sup>113</sup> Cd*, <sup>116</sup> Cd*, <sup>106</sup> Cd, <sup>108</sup> Cd
49	Indium	In	114,818	7,31	3,83405E+22	<sup>115</sup> In*, <sup>113</sup> In
50	Étain	Sn	118,710	7,29	3,69821E+22	<sup>120</sup> Sn, <sup>118</sup> Sn, <sup>116</sup> Sn, <sup>119</sup> Sn, <sup>117</sup> Sn, <sup>124</sup> Sn, <sup>123</sup> Sn, <sup>112</sup> Sn, <sup>114</sup> Sn, <sup>115</sup> Sn
51	Antimoine	Sb	121,760	6,69	3,30881E+22	<sup>121</sup> Sb, <sup>123</sup> Sb
52	Tellure	Te	127,60	6,25	2,94972E+22	<sup>130</sup> Te*, <sup>128</sup> Te*, <sup>126</sup> Te, <sup>125</sup> Te, <sup>124</sup> Te, <sup>122</sup> Te, <sup>123</sup> Te, <sup>120</sup> Te
53	Iode	I	126,90447	4,94	2,34423E+22	<sup>127</sup> I
54	Xénon	Xe	131,293	4,49 g/l	1,92979E+19	<sup>132</sup> Xe, <sup>129</sup> Xe, <sup>131</sup> Xe, <sup>134</sup> Xe, <sup>136</sup> Xe, <sup>130</sup> Xe, <sup>128</sup> Xe, <sup>124</sup> Xe, <sup>126</sup> Xe
55	Césium	Cs	132,9054519	1,90	8,60918E+21	<sup>133</sup> Cs
56	Baryum	Ba	137,327	3,65	1,60062E+22	<sup>138</sup> Ba, <sup>137</sup> Ba, <sup>136</sup> Ba, <sup>135</sup> Ba, <sup>134</sup> Ba, <sup>130</sup> Ba, <sup>132</sup> Ba
57	Lanthane	La	138,90547	6,16	2,67062E+22	<sup>139</sup> La, <sup>138</sup> La*
58	Cérium	Ce	140,116	6,77	2,90972E+22	<sup>140</sup> Ce, <sup>142</sup> Ce, <sup>138</sup> Ce, <sup>136</sup> Ce
59	Praséodyme	Pr	140,90765	6,48	2,76944E+22	<sup>141</sup> Pr
60	Néodyme	Nd	144,242	7,00	2,92252E+22	<sup>142</sup> Nd, <sup>144</sup> Nd*, <sup>146</sup> Nd, <sup>143</sup> Nd, <sup>145</sup> Nd, <sup>148</sup> Nd, <sup>150</sup> Nd*
61	Prométhium	Pm	146,9151	7,22	2,95952E+22	<sup>145</sup> Pm*
62	Samarium	Sm	150,36	7,54	3,01988E+22	<sup>152</sup> Sm, <sup>154</sup> Sm, <sup>147</sup> Sm*, <sup>149</sup> Sm, <sup>148</sup> Sm*, <sup>150</sup> Sm, <sup>144</sup> Sm
63	Europium	Eu	151,964	5,25	2,08051E+22	<sup>153</sup> Eu, <sup>151</sup> Eu*
64	Gadolinium	Gd	157,25	7,89	3,0216E+22	<sup>158</sup> Gd, <sup>160</sup> Gd, <sup>156</sup> Gd, <sup>157</sup> Gd, <sup>155</sup> Gd, <sup>154</sup> Gd, <sup>152</sup> Gd*
65	Terbium	Tb	158,92535	8,25	3,12616E+22	<sup>159</sup> Tb
66	Dysprosium	Dy	162,500	8,56	3,17228E+22	<sup>164</sup> Dy, <sup>162</sup> Dy, <sup>163</sup> Dy, <sup>161</sup> Dy, <sup>160</sup> Dy, <sup>158</sup> Dy, <sup>156</sup> Dy
67	Holmium	Ho	164,93032	8,78	3,20586E+22	<sup>165</sup> Ho
68	Erbium	Er	167,259	9,05	3,25844E+22	<sup>166</sup> Er, <sup>168</sup> Er, <sup>167</sup> Er, <sup>170</sup> Er, <sup>164</sup> Er, <sup>162</sup> Er
69	Thulium	Tm	168,93421	9,32	3,32238E+22	<sup>169</sup> Tm
70	Ytterbium	Yb	173,054	6,97	2,4255E+22	<sup>174</sup> Yb, <sup>172</sup> Yb, <sup>173</sup> Yb, <sup>171</sup> Yb, <sup>176</sup> Yb, <sup>170</sup> Yb, <sup>168</sup> Yb
71	Lutécium	Lu	174,9668	9,84	3,38681E+22	<sup>175</sup> Lu, <sup>176</sup> Lu*
72	Hafnium	Hf	178,49	13,31	4,49071E+22	<sup>180</sup> Hf, <sup>178</sup> Hf, <sup>177</sup> Hf, <sup>179</sup> Hf, <sup>176</sup> Hf, <sup>174</sup> Hf*
73	Tantale	Ta	180,9479	16,68	5,55128E+22	<sup>181</sup> Ta, <sup>180m1</sup> Ta

74	Tungstène	W	183,84	19,26	6,30910E+22	<sup>184</sup> W, <sup>186</sup> W, <sup>182</sup> W, <sup>183</sup> W, <sup>180</sup> W*
75	Rhénium	Re	186,207	21,03	6,80133E+22	<sup>187</sup> Re*, <sup>185</sup> Re
76	Osmium	Os	190,23	22,61	7,15768E+22	<sup>192</sup> Os, <sup>190</sup> Os, <sup>189</sup> Os, <sup>188</sup> Os, <sup>187</sup> Os, <sup>186</sup> Os*, <sup>184</sup> Os
77	Iridium	Ir	192,217	22,65	7,09622E+22	<sup>193</sup> Ir, <sup>191</sup> Ir
78	Platine	Pt	195,084	21,45	6,62150E+22	<sup>195</sup> Pt, <sup>194</sup> Pt, <sup>196</sup> Pt, <sup>198</sup> Pt, <sup>192</sup> Pt, <sup>190</sup> Pt*
79	Or	Au	196,966569	19,32	5,90698E+22	<sup>197</sup> Au
80	Mercure	Hg	200,59	13,55	4,06800E+22	<sup>202</sup> Hg, <sup>200</sup> Hg, <sup>199</sup> Hg, <sup>201</sup> Hg, <sup>198</sup> Hg, <sup>204</sup> Hg, <sup>196</sup> Hg
81	Thallium	Tl	204,3833	11,85	3,49159E+22	<sup>205</sup> Tl, <sup>203</sup> Tl
82	Plomb	Pb	207,2	11,34	3,29590E+22	<sup>208</sup> Pb, <sup>206</sup> Pb, <sup>207</sup> Pb, <sup>204</sup> Pb
83	Bismuth	Bi	208,98040	9,80	2,82404E+22	<sup>209</sup> Bi*
84	Polonium	Po	208,9824	9,20	2,65112E+22	<sup>209</sup> Po*
85	Astate	At	209,9871			<sup>210</sup> At*
86	Radon	Rn	222,0176	9,23 g/l	2,50360E+22	<sup>222</sup> Rn*
87	Francium	Fr	223,0197			<sup>223</sup> Fr*, <sup>221</sup> Fr*
88	Radium	Ra	226,0254	5,50	1,46540E+22	<sup>226</sup> Ra*
89	Actinium	Ac	227,0278	10,07	2,67117E+22	<sup>227</sup> Ac*
90	Thorium	Th	232,03806	11,72	3,04172E+22	<sup>232</sup> Th*
91	Protactinium	Pa	231,03588	15,37	4,00632E+22	<sup>231</sup> Pa*
92	Uranium	U	238,02891	18,97	4,79942E+22	<sup>238</sup> U*, <sup>236</sup> U*, <sup>235</sup> U*, <sup>234</sup> U*
93	Neptunium	Np	237,0482	20,48	5,20288E+22	<sup>237</sup> Np*, <sup>238</sup> Np*, <sup>239</sup> Np*
94	Plutonium	Pu	244,0642	19,74	4,87073E+22	<sup>238</sup> Pu*, <sup>239</sup> Pu*, <sup>240</sup> Pu*, <sup>241</sup> Pu*, <sup>242</sup> Pu*, <sup>243</sup> Pu*, <sup>244</sup> Pu*
95	Américium	Am	243,0614	13,67	3,38691E+22	<sup>241</sup> Am*, <sup>242</sup> Am*
96	Curium	Cm	247,0704	13,51	3,29295E+22	<sup>242</sup> Cm*, <sup>243</sup> Cm*, <sup>244</sup> Cm*
97	Berkélium	Bk	247,0703	13,25	3,22958E+22	
98	Californium	Cf	251,0796	15,1	3,62173E+22	
99	Einsteinium	Es	252,0829	8,840	2,11183E+22	
100	Fermium	Fm	257,0951			
101	Mendélévium	Md	258,0986			
102	Nobélium	No	259,1009			
103	Lawrencium	Lr	264			
104	Rutherfordium	Rf	265	23	5,22676E+22	
105	Dubnium	Db	268	29	6,51649E+22	
106	Seaborgium	Sg	272	35	7,74908E+22	
107	Bohrium	Bh	273	37	8,16187E+22	
108	Hassium	Hs	276	41	8,94593E+22	
109	Meitnérium	Mt	279	37,4	8,07269E+22	
110	Darmstadtium	Ds	278	34,8	7,53851E+22	
111	Roentgenium	Rg	283	28,7	6,10726E+22	
112	Copernicium	Cn	285	23,7	5,00788E+22	
113	Nihonium	Nh	287	16	3,35729E+22	
114	Flérovium	Fl	289	14	2,91730E+22	
115	Moscovium	Mc	291	13,5	2,79378E+22	
116	Livermorium	Lv	293			

117	Tennessee	Ts	294	7,1 à 7,3	1,45433E+22 à 1,49529E+22	
118	Oganesson	Og	294	4,9 à 5,1	1,00369E+22 à 1,04466E+22	



## **Acronymes – Abréviations**

AEN / NEA : Agence pour l'énergie nucléaire / Nuclear Energy Agency  
 ADMC : Atomic Mass Data Center  
 AIEA / IAEA : Agence internationale de l'énergie atomique / International Atomic Energy Agency  
 ALTO : Accélérateur Linéaire et Tandem à Orsay  
 ANL : Argonne National Laboratory, USA  
 ASTAR : Alpha Stopping-Power and Range  
 BIPM : Bureau international des poids et mesures  
 BNL : Brookhaven National Laboratory, USA  
 Bricc : *Band-Raman internal Conversion Coefficients*  
 BROND : RUSSian File Of evaluated Neutron Data  
 CALENDF : nom de système de traitement (processing) des sections efficaces, CEA, France  
 CANDU : CANada Deutérium Uranium  
 CE : Capture électronique  
 CEA : Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives  
 CENDL : Chinese Evaluated Data Library  
 CESEN : Cercle d'Études Sur l'Énergie Nucléaire  
 CIELO : Collaborative International Evaluated Library Organization  
 CINDA : Computer Index of Neutron Data  
 (CM) : référentiel du centre de masse  
 COMAC : COvariance MATrices from Cadarache  
 CONRAD : Code for Nuclear Reaction Analysis and Data assimilation, CEA, France  
 C. R. : Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, France  
 CRAM : Chebyshev Rational Approximation Method  
 C.R.A.S. : Comptes-Rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences, France  
 CSDA : Continuous Slowing Down Approximation  
 DARWIN : Développement Appliqué aux Recyclages, Vérifié et Validé pour les Installations Nucléaires, code d'évolution, CEA, France  
 DBRC : Doppler Broadening Rejection Correction  
 dpa : déplacements par atome  
 EAF : European Activation File  
 ENS : École Normale Supérieure  
 ENDF : Evaluated Nuclear Data File  
 ENSDF : Evaluated Nuclear Structure Data File  
*EPJ Nuclear Sci. Technol.* (EPJ N) : European Physical Journal Nuclear Science & Technologies  
*Eur. Phys. J.* : European Physical Journal  
 EPDL : Evaluated Photon Data Library  
 EPICS : Electron Photon Interaction Cross Sections  
 ESTAR : Electron Stopping-Power and Range, Protons Stopping-Power  
 EXFOR : Experimental Nuclear Reaction Data  
 FEI : Fiziko-Energeticheskij Institut (Institute of Physics and Power Engineering, IPPE), Russie  
 FENDL : Fusion Evaluated Nuclear Data Library  
 FIFRELIN : Fission Fragment Evaporation Leading to an Investigation of Nuclear data  
 FRENDY : nom de système de traitement (processing) des sections efficaces, JAEA, Japon  
 FRLDM : Finite-Range Liquid-Drop Model  
 GALILEE : nom de système de traitement (processing) des sections efficaces, CEA, France  
 GANIL : Grand Accélérateur National d'Ions Lourds  
 GEF : GEneral description of Fission observables  
 GLDM : Generalized Liquid-Drop Model  
 GENDF : Groupwise Evaluated Nuclear Data File  
 MGLDM : modified generalized liquid drop model  
 GNDS : Generalized Nuclear Data Structure  
 HF : Hartree-Fock  
 HFB : Hartree-Fock-Bogolyubov  
 HPC : High Performance Computing  
 HPRL : High Priority Request List  
 Hz : hertz  
 IPAC : International Particle Accelerator Conference

IUPAC : International Union of Pure and Applied Chemistry  
 JAEA : Japan Atomic Energy Agency  
 JANIS : Java-based Nuclear Information Software  
 JEF : Joint Evaluated File  
 JEFF : Joint Evaluated Fission and Fusion file  
 JENDL : Japanese Evaluated Data Library  
*Japanese Evaluated Data Library* *J. Phys.:Conf. Ser.* : Journal of Physics:Conferences Series (JPCS, Institut of Physics (IOP) publishing)  
*J. Mathematical Phys.* : Journal of Mathematical Physics  
*J. Phys. Radium* : Journal de Physique et Le Radium  
 KAERI : Korea Atomic Energy Research Institute  
 kb : kilobarn  
 KERMA : Kinetic energy released per unit mass  
 KnE : Knowledge E (Publishing)  
 (L) : Référentiel du laboratoire  
 LAMS : Los Alamos Manuscript (type de rapport technique du Los Alamos National Laboratory, USA)  
 LANL : Los Alamos Natopnal Laboratory, USA  
 LDM : Liquid-Drop Model  
 LNHB : Laboratoire National Henri Becquerel  
 mb : millibarn  
 MCNP : Monte Carlo N-Particle, nom de code de transport de particules dans la matière par la méthode de Monte-Carlo, LANL, USA  
 mn : minute  
 Mox : *Mixed oxides*, combustible mélange d'oxydes d'uranium et de plutonium (U, Pu)O<sub>2</sub>  
 MSC : MultiStep Compound  
 MSD : MultiStep Direct  
 NDE : Nuclear Data Ensemble  
 NDS : Nuclear Data Structure  
 NIST : National Institute of Standards and Technology  
 NJOY : nom du système de traitement (processing) des sections efficaces de LANL, USA  
 NL : Noyau Lourd  
 NSDD : Nuclear Structure and Decay Data  
 NSE : *Nuclear Science and Engineering*  
 NUBASE : a database of nuclear and decay properties  
*Nucl. Phys.* : Nuclear Physics  
 Nuclear Structure and Decay Data  
 OCDE / OECD : Organisation de coopération et de développement économiques / Organisation for Economic Co-operation and Development  
 OH : oscillateur harmonique  
 ORNL : Oak-Ridge National Laboratory  
 PDL: Photonuclear Data Library  
 PA : Produit d'Activation  
 PF : Produit de Fission  
 PHYSOR : International conference su PHYSics Of Reactors  
 PKA : Primary Knocked Atoms  
 PREPRO : nom du système de traitement (processing) des sections efficaces de l'AIEA, Vienne  
*Phys.Lett.* : Physics Letters  
*Phys. Rev.* : Physical Review  
*Phys. Rev. Lett.* : Physical Review Letters  
*Phil. Trans. R. Soc. Lond.* : Philosophical transactions of the Royal Society of London  
*Pnst* : Progress in Nuclear Science and Technology  
 PS : Produit de Spallation  
 PSTAR : Protons Stopping-Power and Range  
 PENDF : Pointwise Evaluated Nuclear Data File  
 PREX Collaboration : Lead radius experiment Collaboration  
*Proc. Roy. Soc.* : Proceedings of the Royal Society  
*Pure Appl. Chem.* : Pure and Applied Chemistry  
 QED : Quantum electrodynamics  
 QCD : Quantum chromodynamics

QRPA : Quasi-particle Random Phase Approximation

REB : réacteur à eau bouillante

REP : réacteur à eau sous pression

Resp. : respectivement

*Rev. Mod. Phys.* : Review of Modern Physics

RUSFOND/ROSFOND : RUSSian File Of evaluated Neutron Data

RPA : Random Phase Approximation

SAMMY : « Multilevel R-Matrix Fits to Neutron Data Using Bayes' Equations »

sh : sinus hyperbolique

SINBAD : Shielding Integral Benchmark Archive and Database

SNA+MC : nom de conference internationale, Supercomputing on Nuclear Applications and Monte Carlo

*Space Sci. Rev.* : Space Science Reviews

sr : stériadian

SI : Système international d'unités

TENDL : TALYS-based Evaluated Nuclear Data Library

TI : Transition isomérique

TRIPOLI : Tridimensionnel polycinétique, nom de code de transport de particules dans la matière par la méthode de Monte-Carlo, CEA, France

UCN : Ultra Cold Neutron

UNGG : réacteur à Uranium Naturel Graphite Gaz

WCM : Weight Correction Method

WONDER : International Workshop On Nuclear Data Evaluation for Reactor applications

WS : Woods-Saxon (potential de)

*Z. Phys.* : Zeitschrift für Physik



# Index

Cet index est un complément à la table des matières sans être exhaustif.

## A

Aaltonen T., 94

*ab initio*, 16, 139, 357, 497, 573, 703

Abdou M. A., 351

abondance

isotopique, 59, 62, 75, 76, 713, 714,  
770, 914

naturelle, 59

absorption, 64, 152, 398, 406, 416

des ondes partielles, 402

phénomène d', 25, 406

réaction d', 279

section efficace d', 406, 407, 413, 678

taux d', 26

actinide, 56, 63, 88, 194, 282, 284, 285,

286, 287, 506, 508, 509, 590, 646,

647, 648, 649, 769, 770, 803, 872

majeur, 63

mineur, 63, 284, 285, 286, 287, 646

actinium, 63, 175

activité, 26, 44, 65, 69, 175, 176, 251,

252, 253, 254, 255, 695

Adair R. K., 458

Adam B. H., 597

Adamian G. G., 57

Adhikari D., 150

AEN, 847

Aichelin J., 285

AIEA, 44, 173, 221, 228, 648, 857, 859,  
875, 883

Ajzenberg F., 128

Akkermans J. M., 506, 507

Algora A., 233, 648

Alhassid Y., 145, 488

Almazán H., 859

alpha

désintégration, 178, 180, 223, 805,  
874

particule, 20, 23, 26, 38, 276, 606,  
782, 862, 887, 892

radioactivité, 180

Alpher R. A., 45, 53

Alvarez L. W., 219

Amian W. B., 286

Ammar K., 880

Amsler C., 781

Anders E., 62

Andreoiu C., 145

anisotropie, 363, 366, 367, 391, 405,  
504, 520, 530, 615, 747, 854, 855,  
856

annihilation, 233, 801

antineutrino, 199, 210, 211, 233, 570,  
603, 604, 605, 606, 648, 659

Antonenko N. V., 57

Antoni R., 811

appariement, 108, 133, 240, 243, 473,  
573

approximation

"short collision time", 733

de Born, 715

de Sköld, 733

de Vineyard, 733

gaussienne, 726

gaz libre, 706

incohérente, 723, 727, 728, 733

Approximation

Continuous Slowing Down (CSDA),  
810, 812, 821, 830

Local Density (LDA), 141

Quasi-particle Random Phase  
(QRPA), 508, 509

Random Phase (RPA), 508

Archier P., 609, 878

Arnaud G., 880

Assad A., 799, 811

Assimakopoulos P. A., 351

ASTAR, 794, 813, 815, 817, 819, 862

Aston F. W., 68, 78

atome de recul, 23

Audi G., 635, 872, 874

Audouin L., 574, 873

Audouze J., 15

Auger

effet, 234

électron, 234, 796

- Auger P., 234  
 Aumann T., 148  
 autocorrélation, 722  
 autocorrélation de paires, 726  
 autocorrélation des vitesses  
   fonction d', 703  
 Avogadro  
   nombre d', 69, 70, 71, 76, 417, 798,  
   914
- B**
- Babut R., 802  
 Bacher R. F., 102  
 Badash L., 175  
 Bajc B., 42  
 Baker C. P., 360  
 Baldin A. M., 351  
 Barber W. C., 767  
 Barjon R., 689  
 Barlett  
   force de, 91  
 barn, 17, 360  
 Barnes J., 905  
 barrière  
   centrifuge, 165, 184, 436  
   coulombienne, 181, 290, 316, 317,  
   436, 742  
   de fission, 484, 574, 580, 581, 582,  
   583, 585, 586, 587, 588, 589, 624  
   de potentiel, 180, 181, 183, 184, 316,  
   435, 581  
 baryon, 94  
 Basdevant J.-L., 151, 167  
 bases de données, 17, 59, 73, 173, 202,  
   204, 220, 228, 232, 452, 459, 512,  
   751, 847, 848, 857, 858, 860, 862,  
   874, 879, 881  
 Bateman H., 175, 257, 259  
 Battistoni G., 877  
 Bauge E., 15, 357, 358, 506, 508, 509,  
   879  
 Baye D., 489  
 Beck B. R., 863  
 Becker H., 43  
 becquerel, 176  
 Becquerel H., 44, 198, 904
- Bell G. I., 705, 707, 708, 710, 713, 727  
 Bell J. S., 497  
 benchmark, 27, 626, 879, 922  
 Berge L., 609, 615, 616  
 Berger J.-F., 139, 141, 143, 144, 146,  
   147, 590, 591, 596, 599  
 Berger M. J., 797, 810, 811  
 Bernard D., 514, 518, 621, 700, 873,  
   878  
 Bernard L., 859  
 Bernard R., 599  
 Bernauer J., 42  
 Bersillon O., 500, 625, 632, 872, 874  
 Bertel E., 788, 798, 811  
 Bertini  
   modèle de, 283  
 Bertini H. W., 283, 881  
 Bertrand F. E., 505  
 Bertsch G. F., 488  
 bêta  
   désintégration, 27, 98, 108, 199, 200,  
   206, 207, 233, 512, 537, 634, 662  
   double désintégration, 199, 904, 905  
   radioactivité, 198, 248
- Bethe  
   formule de, 789  
 Bethe H., 45, 53, 102, 398, 467, 493,  
   788, 842, 905  
 Bethe-Weizsäcker  
   formule de, 106, 575  
 Beyer R., 450  
 Beyster J. R., 697  
 Bichsel H., 800  
 Birch M., 642, 643, 645, 663  
 Bisch C., 210  
 Bitbol M., 16  
 Blachot J., 872, 873, 874  
 Blackett P. M. S., 752  
 Blackshaw G. L., 681, 682  
 Blaise P., 879  
 Blanc A., 621, 873  
 Blanc D., 289, 741, 781  
 Blanchet A., 859  
 Blann M., 285, 505, 877  
 Blatt J. M., 208, 226, 228, 275, 357, 393,  
   436, 437, 449, 493, 501, 502, 503

Blaum K., 62  
 Bohm D., 508  
 Bohr  
     formule de, 783, 787  
 Bohr N., 102, 146, 155, 428, 570, 581, 582, 654, 787, 905  
 Boilley D., 133  
 Boireau G., 649  
 Boltwood B. B., 44  
 Boltzmann L., 905  
 Bonin B., 515, 877  
 Bonnet-Bidaud J.-M., 54  
 Borgonovi G. M., 733  
 bosons, 89, 93, 94, 904  
 Bothe W., 43  
 Bouchez R., 217  
 Boudard A., 283  
 Boulard O., 802  
 Bourganel S., 514, 879  
 Bourgois L., 811  
 Boutard J.-L., 515  
 Brady M. C., 634, 639, 642  
 Bragg  
     courbe de, 792  
     équation de, 712  
     pics de, 713, 723, 728, 730  
 branchement, 178, 179, 197, 222, 263, 268, 441, 511, 512, 570, 626, 640, 641, 873, 878, 889  
 Breit G., 448, 715, 752  
 Breit-Wigner  
     formalisme multiniveaux, 490, 549, 868  
     formalisme simple niveau, 448, 449, 453, 454, 488, 490, 689, 868  
 bremsstrahlung, 742, 767, 791, 793, 795, 796, 798, 799, 841, 842, 843, 875, 890  
 Brésard I., 263  
 Brink-Boeker  
     force de, 91  
 Brockmann H., 854  
 Brosa U., 573, 607, 610  
 Brown B. A., 210  
 Brown D. A., 511, 512, 729, 733, 861, 881

Brown F. B., 686  
 Brueckner K. A., 138  
 Brun É., 686, 867  
 Budaca A. I., 188  
 Budaca R., 188  
 Burbidge E. M., 53  
 Burbidge G. R., 53  
 Bürvenich T. J., 139  
 Bussac J., 417, 642, 689, 741, 781, 909  
 Butland A. T. D., 689  
  
**C**  
 Cabet C., 514  
 Caillot A., 15, 64  
 calcul haute performance, 880  
 CALENDF, 853, 866, 870, 882  
 Calloo A., 871  
 Cameron A. G. W., 62, 472  
 Caner M., 503  
 Capote R., 875, 878, 881  
 Cappelaere C., 515  
 Capponi L., 878  
 capture électronique, 27, 29, 107, 110, 173, 175, 204, 205, 219, 220, 223, 233, 244, 246, 570, 591, 874, 904  
 capture radiative, 279  
 Carbonell J., 148  
 Carjan N., 574, 602, 607, 632  
 Carlson B. C., 797, 811  
 Carlson B. V., 285  
 cascade de déplacements d'atomes, 515  
 cascade électromagnétique, 800, 875  
 cascade intranucléaire, 283, 285, 876  
 Casoli P., 590  
 Cauchois B., 133  
 centre de masse, 295, 297, 298  
     référentiel du, 310  
 Čerenkov  
     effet, 801  
 CERN, 847  
 Cetnar J., 266  
 Chadwick J., 43, 904  
 Chadwick M. B., 506, 508, 861, 862, 881  
 champ coulombien, 20, 148, 180, 213, 360, 767, 768

- champ moyen, 140, 144
  - approches de, 138
  - central, 114
  - méthode HFB de, 146
  - théorie du, 91
- charge
  - électrique, 38, 43, 55, 89, 92, 93, 96, 102, 167, 170, 173, 223, 225, 383, 652, 742
  - mesures de, 37
  - nucléaire, 37, 41, 66, 67, 68, 69, 89, 107, 630
- Chaussidon M., 57
- Chebboubi A., 615, 621, 847, 873, 878
- Cheikh S. M., 878
- Chelet Y., 44, 55
- Chen S., 514, 518
- Chi B. E., 134
- Chiba S., 632
- Chiron M., 879
- choc
  - élastique, 347, 368, 372, 374, 375, 397, 706
  - inélastique, 279
- chromodynamique quantique, 88, 101
- CIELO, 862
- CINDA, 860
- Cindro C., 288
- CIPR, 875
- coefficient d'atténuation
  - linéaire, 758
  - massique, 758, 759, 762, 764, 766
- coefficient de transmission, 436, 437, 438, 466, 484, 551
  - des gamma, 617
- coefficient de transparence, 435, 465, 466, 467
- cœur
  - calcul de, 871
  - d'un réacteur nucléaire, 19, 23, 238, 595, 642, 648, 685, 704, 871
- Cohen S., 576, 580
- Cohen-Tannoudji C., 116, 151, 164, 383, 396, 402, 406, 559, 561, 715, 720
- Cole A. J., 501
- collectifs
  - degrés de liberté, 599
  - effets, 144
  - états quantiques, 599
  - mouvements des nucléons, 586
- Collins G. B., 802
- collision
  - catastrophique, 796
  - diamètre de, 360
  - dure, 796
  - molle, 796
- COMAC, 878
- combustible, 24, 29, 30, 31, 56, 63, 64, 65, 175, 194, 198, 239, 257, 266, 267, 276, 281, 282, 291, 569, 571, 595, 604, 646, 647, 648, 649, 673, 769, 848, 885, 909, 910, 921
- Compton
  - effet, 747
- Compton A. H., 745, 904
- Condon E. U., 180
- CONRAD, 859
- constantes de couplage, 89, 95, 217
- continuum, 424
- conversion interne, 175, 227, 229, 230, 233, 234, 235, 236, 237, 279, 797
- Coplen T. B., 69
- Cordero-Ramirez C., 880
- Cork J. M., 214
- corpuscule, 152, 153
- correction de couche, 791
- corrélation
  - fonction de, 722
- cosmogénique, 53
- Costache C., 145
- Coste-Delclaux M., 853, 856, 866, 871, 882
- Cottureau M., 116, 337
- couche
  - atomique, 236, 237, 745
  - effets de, 573, 583
  - quantique, 108, 113, 118, 122, 124, 145, 157, 583
- couplage spin-orbite, 135, 137
- coupure de spin, 473
- Cowan Jr. C. L., 199
- Cranberg L., 611

Crawford F. S., Jr., 534  
 Croft S., 879  
 Cross W. G., 811  
 Csige L., 588, 589  
 Cugnon J., 283, 285  
 Cullen D. E., 691, 692, 852, 858, 881  
 curie, 176  
 Curie I., 43, 45  
 cyclotron, 906

## D

D'Alembert  
   équation de, 155  
 Dagan R., 694  
 Dalibard J., 151, 167  
 Dalton, 70, 904  
 Damian F., 867, 879  
 DARWIN/PEPIN2, 664, 665, 666, 667,  
   668, 669, 878  
 David J.-C., 283  
 Davies H., 842  
 De Bievre P., 72  
 de Broglie  
   relation de, 131, 153, 157, 182  
 de Broglie L., 151, 152, 905  
 De Jager C. W., 68  
 De Saint Jean C., 15, 358, 514, 609, 859,  
   861, 877, 878, 882  
 De Vries C., 68  
 De Vries H., 68  
 Dean D. J., 133  
 débit de dose, 26  
 décalage, 454, 468, 539, 540, 541, 546,  
   548, 633  
 Dechargé J., 139, 188  
 décroissance radioactive  
   constante de, 176  
 défaut ponctuel, 514  
 déformation des fragments de fission,  
   573  
 déformation du noyau atomique, 146  
 déformations  
   fortes, 196  
   petites, 195, 576, 577, 654, 655  
 Delacroix D., 64  
 Delafosse C., 145

Delaroche J.-P., 498  
 Delattre M.-C., 145  
 Deliyergiyev M. A., 134  
 Deloncle I., 145  
 demi-vie, 177  
 Demyanova A. S., 149  
 densité de probabilité, 371  
 densité nucléaire  
   locale, 141  
   non locale, 141  
 déphasage, 386, 389, 392, 539  
 déplacement d'atomes, 26, 510, 515  
 déplacements par atome, 515, 517, 518,  
   875, 885, 886  
 Desbois J., 285  
 Descouvemont P., 489  
 désexcitation, 128, 176, 179, 223, 226,  
   232, 235, 283, 285, 332, 347, 428,  
   441, 466, 479, 482, 484, 488, 512,  
   534, 570, 634, 741, 767, 797, 877  
 désintégration radioactive, 26, 57, 101,  
   132, 174, 589, 648, 886, 891  
   constante de, 176, 180  
 Dessagne P., 506, 508, 509  
 Destouche C., 878  
 deutéron, 80, 84  
 deuton, 80, 276, 283, 285  
 déviation angulaire, 380, 523, 530  
 Devillers C., 520, 530  
 Diaz-Torres A., 57  
 Dieperink A. E. L., 133  
 Dietrich F. S., 508  
 Díez C. J., 879  
 diffraction  
   de la lumière, 712  
   de neutrons thermiques, 154  
   phénomène de, 403  
 diffusion  
   cohérente, 25, 714, 717, 718, 719,  
     720, 728, 729, 742, 743, 751, 752,  
     755, 758  
   Compton, 745, 755, 758, 768  
   élastique potentielle, 278, 358, 371  
   inélastique, 278  
   inélastique continue, 279, 416, 516,  
     522, 523

inélastique discrète, 279, 416, 521  
 isotrope, 353, 363, 381, 391, 403, 511, 521, 533  
 phénomène de, 25, 362, 392, 396, 398, 714, 728  
 potentielle, 67, 361, 395, 438, 447, 454, 455  
 Rayleigh, 741, 743, 751  
 résonnante, 392, 432, 447, 454  
 Thomson, 748, 751  
 diffusivité  
   paramètre de, 66  
 Diop C. A., 65  
 Diop C. M., 15, 263, 291, 799, 811, 856, 867, 877, 878  
 Dirac P. A. M., 45  
 dispersion  
   spatiale, 159  
   spectrale, 159  
 distance minimale d'approche, 37, 38, 39  
 distribution  
   angulaire, 39, 91, 359, 376, 381, 383, 391, 504, 613, 713, 748, 810, 857  
   de Dirac, 511  
   en énergie, 523, 525, 534, 645, 646, 810  
 distribution angulaire, 41  
 Diu B., 116, 151, 164, 383, 396, 402, 406, 559, 561, 715, 720  
 Divadeenam M., 450, 459, 460, 461, 462, 469  
 Diven B. C., 597  
 Do J.-M., 880  
 dommages, 26, 28, 194, 346, 510, 514, 515, 518  
 données de décroissance radioactive, 26  
 données nucléaires  
   bibliothèque de, 452, 848, 879  
   évaluation de, 452, 457, 516, 543, 860, 879  
 Dorochkevitch G., 905  
 Dresner, 881  
   facteur correctif de, 551  
   formule de, 551  
 Dreyfus G., 880  
 drip line, 150

droite de Kurie, 214, 215  
 Ducru P., 694  
 Duderstadt J. J., 426  
 Duer M., 148  
 Dumonteil É., 867  
 Dunford C. L., 423  
 Dupont E., 635  
 Dupuis M., 498, 506, 508, 509  
 Dyson F. J., 478

## E

Ebel G., 97  
 Ebran J.-P., 148, 189  
 échange  
   composante d', 142  
   d'énergie, 152, 699  
   de particules, 89, 91  
   entre milieux, 268  
   force d', 91  
 échauffement, 26  
 Eden R. J., 138  
 effet  
   atomique, 132  
   Compton, 152, 752, 757, 762, 764, 766  
   d'écran, 214  
   de bord, 134  
   de paire, 757, 771  
   de parité, 631  
   des rayonnements, 23  
   Doppler, 19, 427, 673, 678, 688, 690, 694  
   en réactivité, 685  
   moléculaire, 132  
   Pandemonium, 233, 512  
   photoélectrique, 152, 742, 743, 744, 757, 905  
   stabilisateur, 694  
   tunnel, 180  
 effet de densité, 791  
 Eid M., 263  
 Eidelman S., 800  
 Einstein A., 16, 71, 79, 152, 743, 905  
   relation d', 534  
 Eisenbud L., 489, 905  
 élargissement des résonances *voir*  
   élargissement Doppler

- élargissement Doppler, 673, 677, 678, 679, 693, 867, 870, *voir* effet Doppler
- électro-désintégration, 802
- électrodynamique quantique, 88
- électrofaible
  - théorie, 89
- électromagnétisme, 88
- électron, 20, 23, 55, 795
  - perte d'énergie par collision, 797
  - secondaire, 796
- élément, 55
  - chimique, 53, 55, 281, 282
- élément léger, 53, 59, 62, 278, 802
- ellipsoïde
  - aplati, 145
  - oblong, 145
- Ellis C. D., 210
- ENDF, 860
- énergie
  - de déformation, 574
  - domaine non résolu, 853
- énergie coulombienne, 41, 104, 170, 195, 575, 599, 654
- énergie d'appariement, 105
- énergie d'asymétrie, 104
- énergie d'excitation, 190, 233, 234, 279, 427, 442, 450, 472, 473, 484, 522, 580, 584, 586, 600, 601, 616, 633, 657, 660, 767
- énergie d'excitation collective, 599
- énergie d'excitation intrinsèque, 599
- énergie de liaison, 54, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 88, 103, 106, 193, 201, 203, 220, 234, 301, 501, 512, 575, 654, 663
  - des électrons, 764
  - du « dernier neutron », 442, 585
  - moyenne par nucléon, 105, 106, 111
  - terme correctif à l', 133
- énergie de séparation
  - du « dernier neutron », 85
  - du « dernier proton », 85
- énergie de seuil, 223, 295, 296, 313, 314, 318, 336, 337, 338, 343, 345
  - de déplacement d'un atome, 518
  - de la réaction de diffusion inélastique continue, 522
  - effective, 315, 317
- énergie de surface, 104, 575, 576, 578, 581, 651, 653, 654
- énergie de volume, 103
- énergie disponible, 88
- England T. R., 621, 640
- épaisseur de peau, 66
- équation
  - d'évolution, 257, 269, 270, 420, 884, 885, 890, 891
  - de Boltzmann, 19, 25, 276, 420, 847, 848, 884, 887, 892
  - de Schrödinger, 102, 156, 159
  - du transport, 19, 25, 362, 729, 810, 848, 866, 884, 893
- équation de Schrödinger, 114, 115, 116, 139, 155
- équation de transport, 887
- équations
  - d'évolution, 26, 175
  - de Bateman, 19, 175, 257, 263, 265, 266, 268, 420, 847, 848, 872, 884, 890, 891
  - généralisées de Bateman, 26
- équilibre
  - de régime, 254
  - idéal, 253
  - séculaire, 255
- espacement
  - des niveaux d'énergie, 433
  - des résonances, 472
  - entre résonances, 467
  - moyen, 474
  - moyen des niveaux quantiques, 470
  - nombre d', 478
  - réduit, 476
- ESTAR, 800, 831, 833, 835, 837, 839, 862
- Estienne M., 621, 648
- état
  - lié, 92, 399, 430
  - non lié, 131, 398, 429
- état quantique, 122, 134, 147, 167, 168, 200, 207, 224, 232, 234, 427, 440
- état stationnaire, 159, 429, 798
- Etiévant C., 289
- Etilé A., 145
- Euler H., 129

évaluation, 27, 423, 640, 641, 859

Evans R. D., 38, 39, 44, 90, 106, 111, 112, 131, 132, 146, 156, 160, 181, 210, 213, 214, 215, 223, 236, 253, 255, 285, 360, 382, 387, 392, 398, 399, 400, 406, 436, 452, 493, 496, 572, 575, 741, 746, 750, 754, 759, 765, 781

évaporation, 283, 285, 358, 428, 501, 503, 598, 623, 877

## F

F. Rohrllich, 811

facteur

- correctif, 798
- coulombien, 214
- d'accumulation, 810
- d'amplification des neutrons, 890
- d'atténuation de spin, 473
- d'empêchement, 228
- de conversion de flux, 875
- de Debye-Waller, 728, 732
- de décalage de niveau, 468, 541
- de déphasage, 387
- de diffusion, 865
- de forme, 748, 751, 865
- de Gamow, 183
- de multiplication des neutrons, 694
- de multiplication effectif des neutrons, 885
- de pénétrabilité, 436, 450, 479, 543
- de radiotoxicité, 875
- de structure, 723, 733
- de transmission, 181
- de Westcott, 894, 896
- statistique, 443, 445, 455, 457, 460, 466, 471, 501

facteur de pénétrabilité, 437, 539

facteur statistique, 443, 445, 457, 458, 461, 463, 464

Falk-Vairant P., 181

Fallot M., 233, 621, 648

famille

- « saveurs », 93
- de niveaux d'énergie, 476, 478
- de noyaux atomiques fissiles, 893
- de résonances, 467, 475
- des hadrons, 92

isobarique, 103

radioactive, 44, 175

radioactive de l'uranium 235, 45

radioactive de l'uranium 238, 45, 48

radioactive du neptunium 237, 45, 47

radioactive du thorium, 44, 46, 175

radioactive du thorium 232, 44, 46

Fanto P., 488

Fasso A., 800, 876

Faust H., 621, 635, 847, 873

Fea G., 60

fentes de Young, 152

fermi, 39

Fermi

- break up, 285

- constante de, 213, 217

- constante universelle de, 97

- énergie de, 129, 130, 429

- F., 198

- fonction de, 213, 214, 216, 258, 662

- fonction intégrale de, 216

- gaz de, 129, 130, 285, 613

- impulsion de, 129

- interception de, 399

- modèle de, 131, 143, 440

- modèle du gaz de, 102, 129, 130, 472, 473

- niveau de, 429, 430, 490, 506

- paramètre de, 473

- pseudo-potentiel de, 715, 716, 726

- règle d'or de, 200, 213, 552, 662

- règles de sélection de, 208

- transition de, 208

Fermi E., 198, 200, 213, 285, 360, 398, 715, 905

fermion, 92, 94, 120, 129, 208

fermium, 861, 916

Ferran G., 693

Feshbach H., 448, 497, 504, 506, 616

FIFRELIN, 859

Firestone R. B., 110, 193, 206, 207, 216, 221, 222, 225, 226, 228, 229, 230, 232, 242, 247, 873

fission

- binaire, 281, 570, 571, 572, 591, 613, 625, 645, 656

- canaux de, 573



- fragments de, 195, 570, 571, 572, 574, 589, 591, 599, 602, 609, 613, 616, 620, 656, 659, 660
- produits de, 570
- quaternaire, 571
- spontanée, 59, 175, 179, 195, 196, 197, 198, 569, 570, 571, 574, 577, 580, 582, 591, 592, 608, 618, 625, 633, 646, 647, 872, 886, 888, 890, 892
- ternaire, 280, 281, 570, 571, 606, 623, 645
- Flerov G., 195
- FLUKA, 877
- fluorescence X, 234, 235, 796
- Foldy L. L., 81, 282
- Foligno D., 635, 641, 644
- fonction d'onde, 114, 115, 119, 139, 147, 155, 157, 159, 168, 386, 438, 444, 465, 534, 537, 538, 540, 541, 553, 561
  - continuité de la, 395
  - diffusée, 392
  - incidente, 392
  - partielle, 562
  - plane, 381, 382, 563
  - totale sortante, 392
- fonction d'onde sortante, 399
- fonction densité, 468
- fonction force
  - de la transition gamma, 617
- fonctions de Bessel sphériques, 565
- fonctions  $S(\alpha, \beta)$ , 723
- force
  - électromagnétique, 781
  - électrostatique, 96, 783
  - magnétique, 90
  - répulsive, 575
- force forte résiduelle, 90
- force nucléaire, 39, 43, 54, 67, 81, 90, 91, 92, 102, 103, 106, 131, 316, 376, 387, 399, 434, 537, 538
- Forget B., 694
- formule de Bohr et Wheeler, 485
- Forrester P. J., 478
- Fort É., 802, 859
- Fougeras P., 879
- Fowler W. A., 53
- Fraenkel Z., 283
- fragments de fission, 607
- Fragneto G., 406
- Frame P. W., 360
- Franchoo S., 145
- Francis N. C., 138
- Frankel S., 582
- Freiman T., 694, 869
- FRENDY, 866
- Friedmann A., 905
- Frisch O. R., 569
- Fröbrich P., 289, 381, 382, 387, 389, 406, 561
- Fröhner F. H., 470, 492
- front Compton, 751
- Fukuda Y., 199
- G**
  - Gaimard J. J., 283
  - Galhaut B., 280, 412
  - GALILÉE, 866
  - Gall B. J. P., 147
  - gamma
    - spectroscopie, 233
  - Gamow G., 45, 53, 102, 180, 185, 208
  - Gamow, Gurney et Condon
    - théorie de, 181
  - Gamow-Teller
    - règles de sélection de, 207
    - transition interdite de, 209
    - transition de, 208
    - transition permise de, 209
  - GANIL, 147, 276, 847, 904
  - Gao H., 42
  - Gary J., 133
  - Garzenne C., 263
  - Gasparian A., 42
  - Gaulard C., 145
  - Gauld I. C., 879
  - Gauss
    - quadrature de, 693
    - théorème de, 784
  - gaz libre
    - hypothèse, 676
    - modèle du, 688, 726

- GEF, 859  
 Geiger H., 37, 185  
 GELINA, 847  
 Gell-Mann M., 905  
 GENDF, 871  
 Gentils A., 514  
 George W. D., 767  
 Gerlach W., 92  
 Gernhäuser R., 148  
 Gesell T. F., 811  
 Gil C.-S., 626  
 Gilbert M. R., 515, 516  
 Girod M., 139, 146, 147  
 Glasstone S., 705, 707, 708, 710, 713, 727  
 GNDS, 862  
 Goebel K., 800  
 Goepfert-Mayer M., 53, 102, 114, 905  
 Gogny D., 139, 146, 147, 590, 905  
 Goncalves A. C., 693  
 Gönnerwein F., 571  
 Gonnord J., 731, 882  
 Gonzalez F. M., 43, 206  
 Göök A., 609, 618  
 Goorley J. T., 867  
 Goriely S., 859, 883  
 Gottardo A., 145  
 Goudsmit S., 811  
 Goutte H., 590  
 Gove N. B., 214  
 Green A. E. S., 170  
 Gregson K., 691  
 Grevesse N., 62  
 Griesheimer D. P., 803  
 Griffin J. J., 285, 505  
 Groom D. E., 781, 800, 843  
 groupe d'énergie, 848, 850, 852  
 Gryntakis E. M., 902  
 GSI, 847  
 Guerre J.-P., 64  
 Guillaumont R., 649  
 Guinier G., 55  
 Günsing F., 537, 539, 540  
 Gupta R. K., 631, 632  
 Gurney R. W., 180  
 Guth E., 802  
**H**  
 Habert B., 859  
 Hahn O., 198, 569, 904  
 Hahn Otto, 569  
 Halban H., 569  
 halo, 149, 150  
 Hambsch F.-J., 574, 600, 602, 609  
 Hamby D. M., 811  
 Hamilton L., 426  
 hamiltonien, 155  
 Hardy J. C., 233  
 Hartree-Fock  
     méthode de, 139  
 Hartree-Fock-Bogoliubov, 573, 590  
 Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB)  
     méthode de, 498  
 Harvey A., 479  
 Harvey J. A., 470  
 Hasegawa A., 860  
 Hauser W., 504, 616  
 Haxel O., 114  
 Hehr B. D., 703  
 Heinz S., 57  
 Heisenberg  
     force  $d'$ , 91  
 Heisenberg W., 16, 54, 158, 905  
 hélion, 23  
 Henning G., 506, 508, 509  
 Henriksson H., 860  
 Herman M., 66, 511, 512, 729, 733, 859, 881  
 Hilaire S., 15, 357, 358, 506, 508, 509, 859, 883  
 Hill D. L., 484, 585, 587  
 Hinke C. B., 210  
 Hirsch C., 27  
 Hirtz J., 283  
 Hisano J., 42  
 Höfert M., 800  
 Holden N. E., 450, 459, 460, 461, 462, 469, 597  
 Holloway M. G., 360  
 Hove L. van, 721, 722  
 Hoyle F., 53

HPRL, 863  
 Huby R., 129  
 Hugot F. X., 867  
 Hustache-Ottini S., 741, 781  
 Hut P., 905  
 Huynh  
   T.-D., 664, 665, 666, 667, 668, 669  
 Huynh T.-D., 263, 806, 807, 878  
 Hwang R. N., 693, 694, 869

## I

Ibrahim F., 145  
 Ichikawa T., 133, 590  
 Ighezou F. Z., 285  
 ILL, 847  
 incertitude  
   données d', 877  
   propagation, 27  
 inélastique, 301  
   réaction profondément, 288  
 intégrale de résonance, 848, 894, 896,  
   897, 898, 900, 901, 902  
 interaction faible, 89, 96, 97, 98, 168,  
   199, 537, 905  
 interaction forte, 37, 40, 81, 88, 89, 90,  
   92, 94, 96, 97, 102, 121, 127, 134,  
   200, 506, 537, 905  
 interaction gravitationnelle, 90, 94, 96  
 interaction interaction nucléon-nucléon  
   effective de Gogny, 498  
 interaction nucléon-nucléon, 138, 139,  
   140, 146, 147, 427, 508, 905  
   effective de Skyrme, 498  
 interférences  
   constructives, 801  
   entre atomes, 718  
   entre niveaux et voies des résonances,  
     490  
   entre résonances, 428, 490  
   figure d', 712  
   phénomène d', 712, 722  
 intermoléculaire, 697  
 ionisation, 743, 744, 793, 795, 796, 843  
   potentiel d', 787, 788, 790, 791  
 Ishizuka C., 632  
 isodiaphères, 58  
 isomère de forme, 232

isomère de spin, 232  
 isomère K, 232  
 isomères, 58, 101, 232, 589, 640  
 isospin, 121, 139, 140, 209, 234  
 isotone, 58  
 isotropie  
   de la matière, 298, 384, 403  
   du choc, 368, 397, 683, 688, 708  
 Israel H. I., 755

## J

J.-P. Scotta, 700  
 Jacobs E., 769  
 Jacobs G. J. H., 805  
 Jacques V., 152  
 Jaeger R. G., 777, 844  
 James M. F., 603, 605, 606, 691  
 JANIS, 61, 150, 174, 621, 627  
 JEFF, 408, 847  
 Jenkins R., 236  
 Jensen H. D., 905  
 Jensen J. H. D., 114  
 Jeukenne J.-P., 497  
 Joffre H., 788, 798, 811  
 Joliot F., 43, 45, 569, 904  
 Joliot-Curie  
   F. et I., 43, 45  
   I. et F., 904  
 Jones A., 62, 904  
 Jönsson C., 152  
 Jouanne C., 635, 686, 694, 856, 867,  
   878  
 Jurado B., 573, 596, 600, 621, 859

## K

Kadi Y., 284, 286, 287  
 Kahler A. C., 490, 549, 613, 616, 707,  
   729, 732, 866  
 Kalbach C., 854  
 Kapur P. L., 489, 543  
 Kawai M., 90, 283  
 Keinert J., 697, 702, 703, 711, 712, 728  
 Kellet M. A., 625, 632  
 Kelly K. J., 609, 616  
 Kerveno M., 506, 508, 509  
 Kessedjian G., 621, 847, 873, 878

Khan E., 148, 189  
 Kibédi T., 233, 236  
 Kiedrowski B. C., 686  
 Kikuchi K., 90, 283  
 kilonova, 53  
 Kim D. H., 626  
 Kim J. I., 902  
 Kitsos S., 799, 811  
 Klein É., 905  
 Klein J. C., 263  
 Klein O., 746  
 Klein S. R., 781, 800, 843  
 Klein-Nishina, 746, 748  
 Klüpfel P., 139  
 Kneissi U., 769  
 Knitter H.-H., 607, 610  
 Knoll G. F., 741, 781, 799  
 Koch H. W., 798, 799  
 Kodeli I. A., 879  
 Koehler P. E., 488  
 Koenig J. L., 697  
 Kondev F. G., 874  
 Koning A. J., 498, 506, 507, 859  
 Konopinski E. J., 216  
 Kopecky J., 617  
 Kothari L. S., 715, 716  
 Koura H., 188  
 Krane K. S., 98, 132, 199, 236  
 Kratz K.-L., 663  
 Kuroda P. K., 53  
 Kuwahara T., 42

## L

Labeyrie J., 65  
 Lachîze-Rey M., 16  
 Lahaye S., 266, 878  
 Laloë F., 116, 151, 164, 167, 383, 396,  
 402, 406, 559, 561, 715, 720  
 Landau L., 39  
 Lane A. M., 476, 479, 489  
 Lantuéjoulé I., 505, 506  
 largeur  
 de voie, 542  
 Doppler, 688, 690  
 gamma, 450

neutronique, 444  
 réduite, 458, 481, 482  
 largeur partielle réduite  
 amplitude des, 479  
 Larson N. M., 429, 551, 859  
 Lauritsen T., 128  
 Lawrence J. N. P., 650  
 Lawson J. D., 289  
 Lawson J. L., 214  
 Le Sech C., 89, 288  
 Leal L. C., 693  
 Leal-Hwang  
 méthode, 693  
 Leblanc P., 64  
 Leconte P., 878  
 Lee D., 685  
 Lee T. D., 168  
 Lee Y. K., 867  
 Lefebvres F., 116, 337  
 Lefort M., 57, 276, 288  
 Legendre  
 équation de, 161, 162, 562  
 fonctions de, 163  
 polynôme de, 386, 650  
 polynômes de, 163, 386, 389, 530,  
 562, 564, 856  
 série de, 856  
 Lejeune A., 497  
 Lemaignan C., 514  
 Leo W. R., 741  
 Léon J., 88  
 Lepeltier T., 54  
 lepton, 89, 93, 94, 841, 904  
 lepton tau, 199  
 Leray S., 283, 285, 286, 876  
 Lestone J. P., 610  
 léthargie, 373, 897  
 gain maximal par choc, 374, 375  
 gain moyen de, 374  
 gain moyen par choc, 375  
 perte par choc, 374  
 Letourneau A., 621, 635, 873  
 Levinson C. A., 138  
 Libby W. F., 65  
 Lifchitz E., 39  
 Linden N., 879

Liotta R. J., 188  
 Lipperheide R., 289, 381, 382, 387, 389, 406, 561  
 Liskien H., 805  
 Litaize O., 608, 609, 615, 617, 618, 619, 621, 635, 859, 873  
 Livingood J. J., 802  
 Lodders K., 62  
 loi de Coulomb, 39  
 loi de décroissance  
     exponentielle, 175  
     radioactive, 175  
 loi de Porter et Thomas, 479, 481, 482, 483, 484, 557  
 loi de Wigner, 472, 476, 477, 478  
 longueur d'onde  
     de Compton réduite, 97  
     de de Broglie, 41, 154, 288, 712  
     réduite, 376  
 longueur d'onde de de Broglie  
     rationalisée, 376, 381, 402  
 Lü H., 133  
 Lunéville L., 263, 515, 516, 854  
 Lunney D., 69, 81  
 Lynn J. E., 489, 542  
 Lyoussi A., 770

## M

MacFarlane R. E., 490, 549, 699, 707, 725, 729, 731, 732, 860, 866  
 Madland D. G., 598, 599, 613, 640, 656, 659, 660, 805  
 Madland-Nix  
     modèle de, 613  
 magicité, 105, 188  
 magnéton  
     de Bohr, 912  
     nucléaire, 132  
 Mahaux C., 497  
 Majorana, 905  
     force de, 91  
 Malouch F., 515, 517, 518  
 Malvagi F., 686, 694, 867  
 Manailescu C., 600  
 Mancusi D., 283  
 Manea V., 574, 602

Mann F. M., 854  
 Mannhart W., 609  
 Marguet S., 689, 894  
 Marimbeau P., 263  
 Marini P., 609  
 Marquez Damian J. I., 700  
 Marsden E., 37  
 Martin J.-F., 873  
 Martin M. J., 214  
 Martin W. R., 686  
 Martinez A. S., 693  
 Martinez J.-M., 878, 880  
 Maruhn J. A., 139  
 masse  
     atomique d'un atome neutre, 72  
     atomique relative, 72  
     des nucléides, 68  
     distribution de la, 37  
     du noyau atomique, 66  
     formule semi-empirique de la, 103  
     mesures de, 37  
     molaire atomique, 72  
     nombre de, 55, 57, 59  
     nucléaire, 41  
     spectrométrie de, 68  
     volumique, 69  
 Matea I., 145, 147  
 Materna T., 615, 621, 635, 847, 873  
 Mathieu L., 635  
 matrice de collision, 489, 538, 539, 548, 549  
 matrice R, 66  
     éléments de la, 479  
     formalisme de la, 488, 537  
     matrice de collision, 540  
     matrice des largeurs, 542  
     théorie de la, 443, 449, 479, 537  
 Matsumoto A., 607  
 Matsunaka M., 624  
 Mattes M., 697, 702, 703, 711, 712, 728  
 Mattoon C. M., 863  
 Mavrodiev S. Cht., 134  
 Mazzolo A., 867  
 McKeegan K. D., 57  
 McLane V., 423  
 MCNP, 867

- Meaker Davisson C., 746, 750  
 mécanique classique, 151, 359, 380  
 mécanique quantique, 16, 88, 151  
 Meek M. E., 621  
 Mehtat M. L., 476  
 Meija J., 59  
 Meitner L., 198, 234, 569, 904  
 Mendeleïev  
     tableau de, 55  
 Mendeleïev D., 905  
 Méplan O., 621, 873  
 Mercier F., 189  
 méson, 90  
 Messiah A., 151  
 mesures intégrales, 27  
 mesures microscopiques différentielles, 27  
 méthode  $S_N$ /ordonnées discrètes, 866  
 Métivier H., 513  
 Metropolis N., 283, 582  
 Meyer J., 139  
 Meyerhof W. E., 181, 209, 224, 225, 228, 275, 357  
 Michaudon A., 575, 579, 580, 586, 588, 591, 653  
 Miguel Marques F., 148  
 Mihai C., 145  
 Mills R., 878  
 Mills R. W., 625, 627, 632  
 Milocco A., 879  
 Mitu I., 145  
 Mizutori S., 133  
 modèle de la goutte liquide, 106  
 modèle du noyau noir, 428, 436  
 modèle en couches, 16, 88, 102, 108, 113, 114, 122, 125, 132, 133, 134, 137, 138, 143, 587, 905  
 modèle optique, 428  
 modèle standard, 53  
 modèle statistique, 285, 504, 640  
 modèles de pré-équilibre, 428  
     quantiques, 506, 507  
 Möller P., 133, 590, 640, 644, 645  
 moment angulaire, 120  
     intrinsèque de spin, 102, 120  
     mesures de, 37  
     total, 120, 124  
 moment dipolaire magnétique, 132  
 moment octupolaire, 145  
 moment quadrupolaire, 146, 577, 653, 654  
     électrique, 132, 655  
 moments multipolaires, 145, 147, 223, 577, 589  
     électriques, 132  
     électriques et magnétiques, 617  
 Mompean F. J., 860  
 Moon C.-B., 150  
 Morariu C., 600, 601  
 Mori T., 694  
 Morillon B., 67, 499  
 Mostacci D., 683  
 Motz J. W., 798, 799  
 Mounier C., 673, 879  
 mouvement  
     intermoléculaire, 699  
     intramoléculaire, 699  
 Muga M. L., 571  
 Mughabghab S. F., 450, 459, 460, 461, 462, 469, 859, 900  
 Muir D. W., 866  
 multifragmentation, 283  
 multipôle  
     formalisme, 869  
 multistep, 506, 507, 508  
     compound, 507  
     direct, 506, 507  
 muons, 199  
 Murray R. L., 681, 682  
 Mutti P., 621, 873  
 Myers W. D., 583  
  
**N**  
 Nagaya Y., 694, 866, 883  
 Nasri A., 498  
 Nataf R., 217  
 Naudet R., 57  
 Nazarewicz W., 133  
 Nelkin M. S., 733  
 neptunium, 47, 57, 63, 175, 267, 285, 286, 450, 646

- neutrinos, 199, 210, 212, 570, 603, 604, 605, 606, 648, 659
  - neutron, 19, 43, 94
    - découverte du, 43
    - désintégration du, 205
    - excès de, 59, 101, 103, 109
    - lent, 63
    - prompt, 19, 238, 598, 603, 888
    - rapide, 63
    - retardé, 19, 150, 238, 275, 574, 591, 598, 603, 634, 888
    - thermique, 63
  - neutronique, 23, 373, 420, 421, 647, 673, 693, 694, 729, 848, 857, 871, 879
  - Ngô C., 89, 151, 285, 288
  - Ngô H., 151, 285
  - Nicolas A., 15, 358, 877
  - Nikšić T., 189
  - Nilsson S. G., 134
  - Nimal B., 263
  - Nimal J.-C., 799, 811, 854
  - Nishina Y., 746
  - NIST, 794, 800, 813, 815, 817, 819, 822, 824, 826, 828, 831, 833, 835, 837, 839, 862
  - niveau d'énergie, 110, 122, 223, 231, 237, 450, 464, 476, 511, 523, 541, 546, 865
    - lié, 423, 490
    - non lié, 423
  - niveau d'énergie
    - lié, 131
  - niveaux d'énergie
    - densité de, 551
    - espacement moyen, 464
    - famille de, 476
    - loi de répulsion des, 476
    - non liés, 432
  - Nix J. R., 613
  - Noguère G., 66, 457, 464, 514, 700, 859, 878
  - nombre de masse, 55
  - nombre leptonique, 199
  - nombre quantique, 119
    - de moment angulaire total, 120
    - magnétique de spin, 120
    - magnétique orbital, 120
    - orbital, 119
    - principal, 119
    - radial, 119
  - nombre quantique de spin
    - de spin, 120
  - Norgett M. J., 518
  - Novikov A. G., 701
  - Novikov I. D., 905
  - Nowacki F., 145
  - noyau composé, 285, 316, 387, 402, 436, 438, 457, 458, 466
    - formation du, 288
    - modèle du, 428
    - niveaux d'énergie, 430
    - section efficace de formation du, 442, 443, 445, 468
    - temps de vie du, 439
    - vie moyenne du, 440
  - noyau exotique, 147
  - noyau impair-impair, 126, 133, 583
  - noyau lourd, 63, 281, 283, 437, 581, 633, 684
  - noyau pair-impair, 583
  - noyau pair-pair, 126, 133, 139, 186, 196, 583
  - noyaux miroirs, 58, 208, 209
  - n-TOF, 847
  - NUBASE, 635, 872, 873, 874
  - nucléide
    - artificiel, 3, 57
    - fertile, 64
    - fissible, 63
    - fissile, 63
    - naturel, 55, 56
  - nucléide (ou nuclide), 55
  - nucléide, nuclide, 55
  - nucléon, 43
  - nucléosynthèse, 15, 53, 57
  - numéro atomique, 55, 57, 63, 72, 107, 109, 914
  - Nuttall J. M., 185
- O**
- O'Keeffe G., 360
  - Oberkampff W. L., 27
  - Obersted S., 600

- Oblozinsky P., 859  
 Occhialini G. P. S., 752  
 Odette G. R., 503  
 Oganessian Y., 57  
 Ohta M., 624, 875  
 Oklo, 57  
 Olivier L., 145  
 Omura Y., 42  
 onde  
   incidente, 387, 468, 499, 538, 539  
   partielle, 385, 391, 402, 561  
   plane, 157, 382, 385, 386, 387  
   réfléchie, 436  
   sphérique, 386, 387  
 onde de matière, 153, 905  
 opérateur  
   de collision, 387  
   de parité, 168  
   différentiel, 157  
   du moment cinétique, 164  
   hamiltonien, 156  
   laplacien, 158  
 orbite nucléaire, 114  
 Ortego P., 879  
 Osborn R. K., 707  
 Otuka N., 859  
 Ouisloumen M., 680, 684, 688  
  
**P**  
 Pagès L., 788, 798, 811  
 paire  
   création de, 752  
   effet de, 752  
   production de, 752  
 Palma D. A., 693  
 Palme H., 62  
 Panebianco S., 635  
 Pangault L., 188  
 Pappas A. C., 662  
 paramètre de fissilité, 195, 196, 574, 576, 578, 580, 582, 654  
 parité, 121  
 Parize J. M., 263  
 particule, 23  
   élémentaire, 23, 93  
   particule alpha, 37, 38, 87, 179, 181, 277, 412, 527, 645, 794, 814, 816, 818, 884  
   particules chargées, 20, 23, 25, 38, 89, 198, 275, 280, 282, 283, 290, 346, 350, 361, 510, 513, 514, 742, 779, 781, 782, 788, 789, 791, 793, 794, 795, 858, 859, 872, 875  
 Paschen-Back  
   effet, 132  
 Patterson C., 175  
 Pauli  
   principe d'exclusion de, 92, 104, 114, 120, 138, 427  
 Pauli W., 92, 120, 198, 199, 905  
 Pearson J. M., 69, 81  
 Peelle R. W., 505  
 Peierls R., 489, 543  
 Peiser H. S., 69, 72  
 PENDF, 870  
 Pénéliou Y., 609, 878, 879  
 pénétrabilité, 436, 437, 459, 467, 539, 540, 543, 548  
 Perego A., 53  
 période de décroissance radioactive, 177  
 Perrin F., 569, 752, 774  
 Péru S., 506, 508, 509  
 Petit B., 65  
 Petit O., 867  
 Petrjak K. A., 195  
 Pettus W. G., 901  
 phonons, 699, 700, 701, 702, 703, 727  
 photonucléaire, 80, 305, 306, 345, 885  
 Pigni M. T., 879  
 pion, 90, 92, 94, 904  
 Planck M., 152, 905  
 Planck-Einstein  
   relations de, 153  
 Plesset M. S., 650, 654  
 Plompen A. J. M., 861, 877  
 Pohl R., 42  
 poids atomique, 72  
 polarisation de charge, 632  
 Politzer H. D., 905  
 Portail C., 145



portée, 37, 38, 40, 43, 89, 93, 97, 103, 106, 119, 131, 139, 315, 316, 387, 398, 434, 463, 540, 660, 665, 744  
 Porter C. E., 448, 478, 479, 480, 497  
 potentiel, 89  
   central, 114  
   central coulombien, 39  
   d'interaction, 95  
   d'interaction entre nucléons, 101, 114  
   de Gogny, 91  
   de l'oscillateur harmonique, 116, 134, 586  
   de Skyrme, 91  
   de Woods-Saxon, 115, 118, 498  
   nucléaire, 41, 67  
   nucléaire réel, 101  
 potentiel d'ionisation, 788  
 pouvoir d'arrêt, 787, 789, 792, 793, 804  
   collisionnel, 795, 800  
   électronique, 793  
   électrons, 830  
   nucléaire, 794  
   particules  $\alpha$ , 812  
   protons, 821  
   radiatif, 795, 800  
 Poves A., 145  
 précurseur, 238, 591, 889  
   de neutrons retardés, 634  
 PREPRO, 866  
 Preston M. A., 180  
 Prestwich W. V., 811  
 Previti A., 683  
 principe de correspondance, 155, 156  
 Pritychenko B., 859, 896, 897, 900  
 Privas E., 878  
 processus  
   « r », 53  
   « s », 53  
 produit de fission  
   primaire, 571, 632  
 produit d'activation, 63  
 produit de fission, 27  
   primaire, 571, 591  
   secondaire, 571, 591  
 produit de spallation, 63  
 produits de fission, 63  
 proton, 23, 55

Prout W., 38, 905  
 Prussin S. G., 115, 132, 134, 164, 194, 226, 288, 382, 390, 391, 443, 448, 452, 534, 576  
 PSTAR, 794, 822, 824, 826, 828, 862  
 puissance résiduelle, 26  
 puits de potentiel, 102  
   extérieur du, 392, 393  
   intérieur du, 392, 393  
   nucléaire, 116, 149  
   nucléaire carré, 156  
   nucléaire de Woods-Saxon, 156  
   nucléaire de Yukawa, 156  
   nucléaire exponentiel, 156  
   nucléaire gaussien, 156  
   profondeur du, 129  
 Pynn R., 716

## Q

Qi C., 188  
 Qi L., 145  
 Qi Liqiang, 617  
 qualification, 27, 879  
 quanta, 152, 699, 905  
 quark, 93, 101, 199, 282, 904, 905

## R

radioactivité, 23, 27, 44, 82, 168  
   artificielle, 45, 904  
   éteinte, 57  
 radioélément  
   artificiel, 59  
   naturel, 44, 59  
 radiotoxicité, 875  
 raie  $\delta$ , 796  
 raies  
   atomiques, 41  
   gamma, 777  
   spectre des particules  $\alpha$ , 805  
   spectre discret de, 527  
 ralentissement, 295, 301, 346, 347, 373, 589, 595, 673, 767, 793, 803, 810, 812, 821, 830, 897  
 ralentissement des neutrons, 673  
 Ramdhane M., 621, 873  
 Ranft J., 800  
 Rapala M., 615, 621, 873

- Rayleigh F. R. S., 751
- rayon
- de charge, 41, 66
  - de diffusion, 67, 393
  - de masse, 41
  - de voie, 66, 537, 540
  - nucléaire, 37, 41, 66, 114, 145, 146, 654, 715
- rayonnement de freinage *Voir* bremsstrahlung
- réaction
- de *breakup*, 288
  - de diffusion élastique, 416, 548
  - de diffusion élastique résonnante, 446
  - de diffusion élastique totale, 447
  - de *knock out*, 288
  - de *pickup*, 288
  - de *stripping*, 288
  - directe, 6, 288, 358, 427, 428, 497, 504, 506, 507
  - endoénergétique, 295, 336, 343
  - endothermique, 295
  - exoénergétique, 295, 336, 579
  - exothermique, 295
  - inélastique, 319, 347, 452
  - non élastique, 548
  - nucléaire, 15, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 41, 53, 63, 87, 88, 91, 101, 132, 168, 173, 175, 176, 192, 256, 273, 275, 277, 282, 290, 291, 293, 295, 355, 497, 537, 741, 859, 890
  - profondément inélastique, 288
- Reeves H., 53
- Régnier D., 590, 608, 609, 617, 618, 619
- Reich-Moore
- formalisme, 490, 868
- Reinhard P.-G., 139
- relation d'incertitude d'Heisenberg, 231, 440, 490
- relation d'incertitude d'Heisenberg, 156
- remontée en énergie, 673
- résonance, 231
- énergie de la, 440, 677, 690
  - isolée, 443, 449, 454, 488, 490, 534, 689, 905
  - largeur d'une, 440, 462
  - non résolue, 424, 433
  - paramètres de, 423, 441, 443, 457, 549, 864, 867
  - paramètres moyens de, 466
  - parité de la, 464
  - pic d'une, 427
  - recouvrement de, 490
  - résolue, 424, 425, 433
- résonance négative, 490, 491, 492
- Reuss P., 32, 33, 417, 642, 644, 647, 689, 707, 741, 781, 882, 904, 909
- RHF, 847
- Rhodes J., 685
- Ribon P., 852, 853, 856, 866, 882
- Rider B. F., 621
- Ridoux P., 799
- Robert F., 57
- Robin S., 801
- Robinson M. T., 515, 518
- Roccia S., 145
- Rochman D. A., 879
- Rodriguez-Sanchez J. L., 283
- Rohrlich F. et Carlson B. C.
- formule de, 797
- Romain P., 67, 499
- Roque B., 263
- Rose P. F., 423
- Roth É., 65
- Roth G., 713, 714
- Rothenstein W., 694
- Roussière B., 145
- Rovelli C., 16
- Royer G., 133
- Rubinson W., 257, 263
- Rutherford E., 37, 39, 42, 44, 45, 175, 180, 198, 361, 904
- modèle de, 41
  - modèle initial de, 38
  - section efficace de, 39, 371
- S**
- Sagawa H., 133
- Sage C., 621, 847, 873
- Sakho I., 224, 226
- Salvatores M., 859, 879
- SAMMY, 859
- Sanchez R., 680, 683, 684, 688

Santamarina A., 700  
 San-Tsiang T., 571  
 Saroha D. R., 631, 632  
 Sartori E., 860, 879  
 Satula W., 133  
 saturation de la force nucléaire, 134  
 Saunderson J. L., 811  
 Saxon D. S., 115  
 Schatz H., 62  
 Scherm R., 716, 717  
 Schmidt K. H., 283  
 Schmidt K.-H., 573, 596, 600, 621, 859  
 Schmidt-Böcking H., 92  
 Schopper H., 800  
 Schrödinger  
   équation de, 101  
 Schrödinger E., 101, 151, 905  
 Schunck N., 590  
 Scotta J.-P., 700  
 Seaborg G. T., 185, 187, 188, 196, 216, 582  
 Sears V. F., 714, 719  
 section efficace, 25, 357, 358, 359  
   de diffusion, 543  
   de réaction non élastique, 538  
   différentielle, 286  
   macroscopique, 415  
   microscopique élastique potentielle, 360  
   microscopique partielle, 407  
   microscopique totale, 407  
   neutronique, 448  
   partielle, 538  
   présentation ponctuelle d'une, 849  
   représentation continue d'une, 850  
   représentation discrète d'une, 850  
   représentation multigroupe d'une, 850  
   scalaire, 360, 849  
   totale, 538  
 section efficace de diffusion, 370, 380, 402, 407, 434  
   cohérente photon, 865  
   élastique, 376, 395, 449  
   élastique potentielle, 361, 447  
   élastique résonnante, 447  
   élastique totale Breit-Wigner, 451

  incohérente photon, 865  
   neutron-électron, 282  
 section efficace différentielle, 389, 717, 746, 849, 885  
   angle et énergie, 706  
   Compton, 746, 764, 775  
   de *bremsstrahlung*, 798, 799  
   de création de paires électron-positron, 753, 754  
   de diffusion, 388, 715, 719, 733  
   de diffusion cohérente, 729  
   de diffusion élastique, 680, 716, 728  
   de diffusion élastique incohérente, 732  
   de diffusion inélastique incohérente, 730  
   en angle, 362, 366, 371, 384, 405, 530, 704, 747  
   en angle et en énergie, 404  
   en énergie, 372, 503, 504, 508, 516, 518, 708  
   en énergie électron Compton, 749  
   en énergie émission électron Compton, 750  
   en énergie production gamma, 511  
   en énergie production neutrons, 805  
   production de particules secondaires, 510  
 section efficace effective, 895  
 section efficace élargie, 689  
   méthode « multipôle », 693  
   méthode « psi-chi », 689  
   méthode « SIGMA1 », 692  
   méthode « TEMPO », 691  
   méthode Leal-Hwang, 693  
   méthodes Monte-Carlo, 694  
 section efficace microscopique de diffusion, 417  
 sections efficace, 848  
 Segev M., 320, 503  
 Segre A., 60  
 Segrè E., 197, 198, 904  
 Serber R., 283, 905  
 Sérot O., 15, 358, 569, 607, 608, 609, 615, 617, 619, 621, 635, 847, 859, 873, 878  
 Seth K. K., 459, 467, 470  
 Shimizu N., 210

- Shultis J. K., 811  
 Sierk A. J., 590  
 Sierka A. J., 133  
 Silisteanu I., 188  
 Simeone D., 515, 516  
 Simpson E. C., 56  
 Singh B., 217, 642, 643, 663  
 singulet  
   état, 720  
 Singwi K. S., 715, 716  
 Six J., 43  
 Sklavenitis L., 788, 798, 811  
 Sköld K., 733  
 Skyrme, 905  
 Slater  
   J. C., 139  
 Slater J. C., 139  
   déterminant de, 139  
 Smith D. L., 879  
 Smith K., 685, 694  
 Smolin L., 16  
 Snell A. H., 802  
 Soddy F., 44, 175  
 Solbrig  
   noyau de, 676  
 Solbrig A. W. Jr., 676  
 Soti Z., 277, 857  
 Sotty C., 145  
 sources de rayonnements, 26  
 SOURCES-4C, 806, 807  
 spectre, 851  
   de fusion, 852  
   de Maxwell, 851  
   de ralentissement, 851  
   de Watt, 851  
   mixte fission et fusion, 852  
 Spencer L. V., 810, 811  
 spin  
   isobarique, 121  
   isotopique, 121  
 Squires E. J., 497  
 Squires G. L., 703, 716, 719, 720, 726  
 Stan L., 145  
 statistique de  
   Bose-Einstein, 94  
   Fermi-Dirac, 94, 120  
 Stern O., 92  
 Sternheimer R. M., 788  
 Stetcu I., 597, 617, 620  
 Stevenson G., 800  
 Storm E., 755  
 Strassmann Fritz, 569  
 Strutinsky V. M., 133  
 Sublet J.-Ch., 514, 515, 516, 853, 866  
 Suess H. E., 114  
 Sunny E. E., 686, 694  
 supernova, 53  
 superordinateur, 102, 880  
 surface nucléaire, 434  
 Suteau C., 859  
 Swan P., 351  
 Swiatecki W. J., 576, 580, 583
- T**  
 table de probabilité, 852, 853, 855, 870,  
   872, 882  
 Tada K., 866, 883  
 Taieb J., 609, 873  
 Takahashi A., 624  
 Talou P., 607, 616, 617, 620, 640, 881  
 Taloua P., 597  
 TALYS, 859  
 Tamagno P., 514  
 Tanabashi M., 762, 781, 841  
 Tanihata I., 148  
 Taniuchi R., 145  
 tauons, 199  
 taux de réaction, 26  
 Tcherenkov P. A., 801  
 Teller E., 53, 208  
 Tellier H., 358, 428, 430, 436, 448, 454,  
   464, 470, 471, 472, 477, 481, 483,  
   485, 688, 689, 734  
 température  
   de Debye, 688  
   effective, 688  
 tension de surface, 575  
 Terranova N., 879  
 Terrell J., 597, 601, 608, 615, 632  
 Testov D., 145  
 tetraneutron, 148

Thibault C., 69, 81  
 Thirolf P., 588  
 Thomas R. G., 479, 480, 489  
 Tobias A., 648  
 Tommasi J., 514  
 Torrens I. M., 518  
 Trama J.-C., 867  
 transfert  
   d'énergie, 234, 301, 350, 705, 717, 724  
   de nucléons, 276  
   énergétique, 7, 371, 372, 680, 706, 708  
 transition  
   bêta, 209  
   bêta favorisée, 208  
   bêta non favorisée, 208  
   bêta super-permises, 209  
   interdite, 214  
   isobarique, 27  
   isomérique, 29, 173  
   permise, 214  
   radioactive, 637  
 transition isomérique, 232, 233  
 Travar M., 618  
 triplet  
   état, 720  
 TRIPOLI-4®, 867  
 Trkov A., 66, 511, 512, 729, 733, 875, 883  
 Trucano T. G., 27  
 Tsai Y.-S., 841  
 Tsilanizara A., 263, 266, 878  
 Tudora A., 574, 600, 602

## U

Uchiyama F., 149  
 Uhler Condon E., 180  
 unité de masse  
   atomique  
   unifiée, 70  
 unité de masse atomique, 70  
 upscattering remontée en énergie

## V

Vaibhav J., 701, 703

Valentin L., 15, 38, 40, 41, 67, 68, 92, 97, 105, 122, 124, 130, 167, 200, 380, 499  
 vallée de stabilité, 59, 60, 61, 82, 109, 110, 145, 147, 173, 279, 280, 281, 570, 589, 602, 620, 770  
 Vallet V., 878  
 Van Isacker P., 133  
 Vaclair S., 15  
 Veneziano G., 905  
 Verbeke J. M., 617  
 Vergnaud T., 854  
 Vergne C., 263  
 Verney D., 145  
 Vineyard G. H., 733  
 Viola V. E., 185, 187, 188, 196, 216  
 Visonneau T., 867  
 Vlaskin G., 805  
 Vogt E., 543  
 voie  
   d'entrée, 538  
   de sortie, 538  
 Volant C., 285  
 von Bayer O., 198  
 von Weizsäcker  
   formule semi-empirique de, 106  
 Vondy D. R., 263  
 Vorobyev A. S., 607  
 Vretenar D., 189  
 Vuillier S., 285

## W

Wagemans C., 197, 585, 588, 589, 607, 610, 645, 769  
 Wahl A. C., 630, 631  
 Waldman B., 802  
 Wang M., 59, 874  
 Wapstra A. H., 237, 872, 874  
 Watt B., 610  
 Wattenberg A., 769, 777  
 Weber W. J., 515  
 Weigmann H., 585, 588, 589  
 Weinberg A. M., 360, 591  
 Weinberg-Salam, 98  
 Weisbin C. R., 691, 692, 881

Weisskopf V. F., 208, 226, 228, 275,  
 357, 393, 428, 436, 437, 448, 449,  
 493, 497, 501, 502, 503, 512  
 Weizsäcker C. F. von, 103  
 Wheeler J. A., 102, 484, 570, 581, 582,  
 585, 587, 752  
 Wick G. C., 91, 733  
 Wigner  
   énergie, 133  
   force de, 91  
 Wigner E. P., 360, 448, 476, 489, 591,  
 905  
 Wilczek F., 905  
 Wilets L., 579, 580, 650  
 Wilkins B. D., 573  
 Wilkinson D. H., 233  
 Williams E. J., 752  
 Williams M. L., 879  
 Wilson F., 198  
 Wilson J., 145  
 Wilson K., 905  
 Wilson P. P. H., 266  
 Wilson W., 198, 904  
 Wilson W. B., 640, 644, 805  
 WONDER, 847  
 Wong S. S. M., 117, 217  
 Woods R. D., 115  
 Wooster W. A., 210  
 Wu C. S., 168  
 Wyss R., 188

## X

Xiong W., 42  
 Xu Sheng, 694  
 Xuan Chuan C., 351

## Y

Yang C. N., 168  
 Yariv Y., 283  
 Yashima H., 875  
 Yazaki Y., 746  
 Yoo J. K., 626  
 Yordanov T., 145  
 Young P. G., 508, 881  
 Yukawa  
   force de, 91  
 Yukawa H., 91, 905

## Z

Zakari A.-A., 233, 648  
 Zanolini J.-M., 695, 722  
 Zeeman  
   effet, 132  
 Zemach A. C., 715  
 Zerkina V. V., 859  
 Zhang L., 351  
 Zhao J., 189  
 Zheng S. H., 854  
 Zoia A., 686, 694, 867  
 Zucker M. S., 597  
 Zweig G., 905