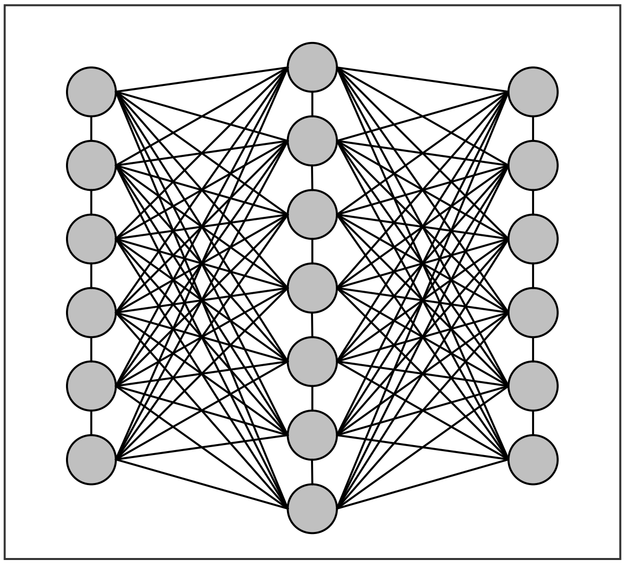
Niklas Krebs

Evolutionäre Ursprünge des mathematischen Denkens



λογος

Die Open-Access-Stellung der Datei erfolgte mit finanzieller Unterstützung des Fachinformationsdiensts Philosophie (https://philportal.de/)

DOI: https://doi.org/10.30819/2091

Evolutionäre Ursprünge des mathematischen Denkens

Niklas Krebs

Logos Verlag Berlin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8325-2091-5

Logos Verlag Berlin GmbH
Georg-Knorr-Str. 4, Geb. 10,
12681 Berlin, Germany

Tel.: +49 (0)30 / 42 85 10 90
Fax: +49 (0)30 / 42 85 10 92
https://www.logos-verlag.com

Evolutionäre Ursprünge des mathematischen Denkens

2008

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie des Fachbereiches Geschichts- und Kulturwissenschaften aus dem Zentrum für Philosophie und Grundlagen der Wissenschaft der Justus-Liebig-Universitt in Giessen (Dekan: Prof. Dr. Peter von Möllendorff, 1. Berichterstatter: Prof. Dr. Eckart Voland, 2. Berichterstatter: Prof. Dr. Bernulf Kanitscheider, Tag der Disputation: 03.11.2008).

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Viele Mathematiker und andere Mathematikbetreibende gehen ihrem mathematischen Tagesgeschäft nach, ohne sich auch nur die geringsten Gedanken darüber zu machen, was sie da eigentlich bewerkstelligen, wenn sie mathematisch denken. Sie machen ihre Arbeit, ohne ihre mathematische Tätigkeit jemals zu hinterfragen, obwohl sie im Grunde die einzigen sind, von denen eine diesbezüglich befriedigende Antwort überhaupt zu erwarten wäre, da nur sie über die entsprechende Innenperspektive auf das mathematische Denken verfügen. Aber es kommt in der Tat selten vor, dass sich Mathematiker mit dem mathematischen Denken als kognitiver Fähigkeit auseinandersetzen, geschweige denn, einen mathematischen Denkprozess einmal so beschrieben hätten, dass man im Rahmen der Philosophie der Mathematik auf dieser Grundlage hätte weiterarbeiten können.
Reuben Hersh charakterisiert die philosophische Gemengelage, in der sich derzeit die meisten Mathematiker befinden, in [163][S. 11, Z. 23-29] äußerst zutreffend wiefolgt:

Most writers on the subjekt seem to agree that the typical "working mathematician" is a Platonist on weekdays and a Formalist on Sundays. That is, when he is doing mathematics, he is convinced that he is dealing with an objective reality whose properties he is attempting to determine. But then, when challenged to give a philosophical account of this reality, he finds it easiest to pretend that he does not believe in it after all.

Hinter dem von Hersh in diesem Zitat angesprochenen Problem verbirgt sich eine der grundlegendsten Fragen der Philosophie der Mathematik, nämlich die nach dem ontologischen Status mathematischer Objekte: Was sind diese mathematischen Objekte? Reale Dinge? Metaphysische Entitäten, z.B. Ideen? Formale

Erfindungen des Geistes? Repräsentationen des menschlichen Gehirns? Hersh's Beobachtung besteht darin, dass viele Mathematiker diese mathematischen Objekte für äußerst real halten, da sie tagtäglich mit ihnen zu tun haben, wobei sie sich aber nach eingehender Überlegung über diese Realität nicht mehr ganz so sicher sind und sie eher als "formale Erfindungen" des menschlichen Geistes abtun. Dies ist auch ein Grund dafür, warum es naturalistische Erklärungsansätze in der Philosophie der Mathematik sehr schwer haben, denn die Mathematiker schwanken in der Regel bezüglich des ontologischen Status mathematischer Objekte zwischen platonischen und formalistischen Auffassungen. Dabei wäre gerade eine naturalistische Erklärung im Falle der mathematischen Objekte hilfreich, vor allem auch, wenn man sich die Disziplinen betrachtet, die sich mit der mathematischen Kognition befassen, da diese sich bisher fast ausschießlich nur mit Zahlen und der dazugehörigen Zahlenverarbeitung im Gehirn und nicht mit dem eigentlichen mathematischen Denken beschäftigt haben. Dazu wäre eine naturalistische Klärung des mathematischen Denkens nötig, welche insbesondere die Seinsweise mathematischer Objekte naturalistisch erklären könnte. Kurzum: Möchte man den ontologischen Status mathematischer Objekte naturalistisch erklären, muss man zunächst einmal das mathematische Denken selbst charakterisieren, bevor man darauf aufbauend im Zuge einer naturalistischen Erklärung des mathematischen Denkens diesen ontologischen Status der mathematischen Objekte erklären kann. Dies ist aber bisher noch nicht gelungen, was die derzeitige Situation aus mathematischer, philosophischer, kognitionswissenschaftlicher und didaktischer Sicht mehr als nur unbefriedigend erscheinen lässt!

Die vorliegende Arbeit soll daher einen Beitrag leisten, diese unbefriedigende Situation überwinden zu können, indem der Frage nach den evolutionären Ursprüngen des mathematischen Denkens nachgegangen werden soll, und zwar in der Hoffnung, mit Hilfe dieser evolutionären Zusammenhänge einen naturalistischen Erklärungsansatz für die Philosophie der Mathematik bereitsstellen zu können, auf dessen Grundlage man die zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik, insbesondere die nach dem ontologischen Status mathematischer Objekte, naturalistisch beantworten kann.

Hünfelden-Heringen, den 20.04.2008. Niklas Krebs

Einleitung

Da sich in der gegenwärtigen Philosophie der Mathematik kein "mainstream" ausmachen lässt und sie im Grunde aus einem Sammelsurium verschiedener Ansätze besteht, existiert auch keine gemeinsame mathematisch-philosophische Grundlage, von welcher man ausgehend die zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik

1. Was ist Mathematik?
2. Was ist das mathematische Denken?
3. Warum können Menschen überhaupt mathematisch denken?
4. Warum passt die Mathematik so gut auf die Welt?
5. Warum entwickelt die Mathematik eine solche Eigendynamik?

würde beantworten können. In der Regel beinhalten diese Erklärungsansätze metaphysische, insbesondere platonische, logizistische, formalistische, intuitionistische, physikalistische und sozial-konstruktivistische Elemente, die auf die verschiedenste Art und Weise kombiniert werden, wobei gegenwärtig im Unterschied zu vielen anderen Disziplinen immer noch platonische Erklärungsansätze nicht nur vertreten werden, sondern sich auch in der Spielart eines ontologischen Platonismus bzgl. der Existenz mathematischer Objekte stark behaupten können. Diese hartnäckige Widerstandskraft eines ontologischen Platonismus im Rahmen der Philosophie der Mathematik rührt hauptsächlich daher, dass dieser vor allem auf die beiden letzten obigen zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik überzeugende Antworten zur Verfügung stellen kann. Daher wird dieser ontologische Platonismus sogar im Zuge naturalistischer Ansätze im Rahmen der Philosophie der Mathematik gerne vertreten. Bernulf Kanitscheider argumentiert daher in [87] auch für die Kombination eines Naturalismus mit einem ontologischen Platonismus bzgl. der Existenz mathematischer Objekte, um damit die Objektivität der mathematischen Erkenntnis und den Erfolg der Mathematik in der physikalischen Realität erklären zu können. Bei aller naturalistischen und nicht-metaphysichen Kritik, die man einem irgendwie gearteten Platonismus in der Philosophie der Mathematik berechtigterweise entgegenhalten kann, muss man aber immer noch berücksichtigen, dass noch keine nicht-metaphysischen, naturalistischen Erklärungsansätze im Rahmen der Philosophie der Mathematik vorgelegt wurden, die einerseits hätten erklären können, warum die Mathematik so gut auf die Welt passt, und andererseits eine Erklärung hätten liefern können für die der Mathematik inhärente Eigendynamik. So lange sich diese beiden der fünf zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik nur mit Hilfe eines ontologischen Platonismus plausibel erklären lassen, besteht keine Aussicht auf eine belastbar vertretbare nicht-metaphysische, naturalistische Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik. Eine bis jetzt noch weitestgehend ungenutzte Möglichkeit, diese beiden Fragen nicht-metaphysisch bzw. naturalistisch zu beantworten, bieten evolutionäre Erklärungsansätze. Allerdings wurden diese im Rahmen der Philosophie der Mathematik noch größtenteils vernachlässigt, was auch daran liegt, dass man nicht wusste, wie man Mathematik mit Evolution zusammenbringen sollte. Einen Ansatzpunkt liefert in diesem Zusammenhang die Zahlenverarbeitung im menschlichen Gehirn, welche man nicht nur neuronal lokalisieren konnte, sondern sogar zu einem Sinn für Anzahlen - dem Zahlensinn - evolutionär zurückverfolgen konnte. Stanislas Dehaene widmete sich diesem Thema in [40], Brain Butterworth analysierte das "number-modul" in [19] und Jamie Campbell trug den diesbezüglich aktuellen Kenntnisstand in [26] zusammen. Alle drei behandeln dabei aber im Grunde "nur" den Zahlensinn, die Zahlen und die Zahlenverarbeitung, und nicht das mathematische Denken bzw. die "eigentliche" Mathematik.[1]

[1] Lediglich eine Arbeit in [26] beschäftigt sich mit den kognitiven Grundlagen der "eigentlichen" Mathematik. In [118] gehen Rafael Núñez & George Lakoff der Frage nach, welche kognitive Grundlage die "eigentliche" Mathematik haben könnte. Sie beantworten diese Frage allerdings nicht aus evolutionärer Sicht, sondern aus kognitiv-linguistischer - genauer: aus kognitiv-semantischer - Sicht. Ihr kognitiv-linguistischer Ansatzpunkt ist dabei der Begriff der konzeptualen Metapher (conceptual metaphor), welchen die kognitive Linguistik dazu verwendet hat, metaphorische Ausdrücke zu modellieren. Der entscheidende Punkt bei dieser kognitiv-

Der einzige bisherige Ansatz, der eine mathematisch-philosophische Position mit einem evolutionären Ansatz in Einklang zu bringen versucht, gelang Keith Devlin in [43]. In diesem verbindet Devlin den mathematisch-philosophischen Ansatz, der die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, mit einem evolutionären Ansatz, welcher im Grunde darin besteht, die kognitiven Fähigkeiten des Menschen, die am mathematischen Denken beteiligt zu sein scheinen, aufzuspüren und diese dann evolutionär zurückzuverfolgen, bis man an den Ursprung des mathematischen Denkens gelangt ist. Bei allem Respekt vor diesem ersten evolutionären Versuch im Rahmen der Philosophie der Mathematik muss man doch einige Kritikpunkte in Anbetracht von Devlins Ausführungen vorbringen. Er unterlässt es erstens, aus dem mathematisch-philosophischen Ansatz heraus, der die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, einen mathematischen Denkprozess herzuleiten, welcher sich dann auch tatsächlich konkret evolutionär zurückverfolgen lässt, zweitens, eine evolutionäre Begriffs- und Prinzipiengrundlage anzuführen, auf welcher seine Theoriebildung einerseits fußt und andererseits sich in diesem Rahmen auch weiter bewegt, was zur Folge hat, drittens, dass seine Argumentation streckenweise zum einen nicht kohärent genug ist, um einer genaueren Prüfung seitens der evolutionären Psychologie, Anthropologie und Soziobiologie standzuhalten, und zum anderen nicht konsequent genug durchgeführt worden ist, so dass man sich an einem roten Faden durch seine Theoriebildung hätte entlangbewegen können. Daher wird in der im Folgenden anstehenden Untersuchung über die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens zwar auch am "modus operandi" festgehalten, welcher darin besteht, die mit dem mathematischen Denken zusammenhängenden kognitiven Fähigkeiten und menschlichen Charakteristika evolutionär zurückzuverfolgen, aber vor dieser evolutionären Analyse wird zum einen ein mathematischer Denkprozess entwickelt und vorgestellt, welcher sich aus der mathematisch-philosophischen Auffassung heraus ergibt, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, und zum anderen ein evolutionärer Ansatz mitsamt dazugehöriger Begriffs- und Prinzipiengrundlage

semantischen Modellierung ist ihre schlussfolgernde Organisation (inferential organisation). Diese wollen Núñez & Lakoff im Falle der Mathematik untersuchen und haben dafür die Methode der Mathematischen Ideenanalyse (Mathematical Idea Analysis) entwickelt (vgl. Lakoff & Núñez in [101]).

vorausgeschickt, welcher den evolutionären Rahmen der Theoriebildung fundieren und abstecken soll, damit diese auch einer Prüfung seitens der evolutionären Psychologie, Anthropologie und Soziobiologie standhalten kann.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchung bilden daher im ersten Kapitel die mathematisch-philosophischen und die evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundbegriffe und Grundlagen, welche dieser Theoriebildung vorangestellt werden. Dabei werden zunächst in Abschnitt 1.1 die mathematisch-philosophischen Grundbegriffe und Grundlagen vorgestellt und entwickelt, indem in Unterabschnitt 1.1.1 in die wissenschaftshistorische Entwicklung der mathematisch-philosophischen Auffassung, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, eingeführt wird und anschließend eine eigene Interpretation dieser Auffassung vorgestellt wird. In Unterabschnitt 1.1.2 wird dann die dazugehörige Begriffsgrundlage zum einen für die weitere Theoriebildung definitorisch festgehalten und zum anderen der sich daraus ergebende mathematische Denkprozess in einem Flussdiagramm veranschaulicht. Anschließend wird in Unterabschnitt 1.1.3 der Innenperspektive der Mathematikbetreibenden auf das mathematische Denken nachgegangen und untersucht, ob diese mit dem abgeleiteten mathematischen Denkprozess kompatibel ist, und überdies in Unterabschnitt 1.1.4 einer Außenperspektive auf das mathematische Denken nachgegangen, welche ebenfalls Indizien für diesen mathematischen Denkprozess bereitstellt. In Unterabschnitt 1.1.5 wird dann auf dieser mathematisch-philosophischen Grundlage eine vorläufige Arbeitshypothese über die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens formuliert, welche diese im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz verortet. Im Anschluss daran werden in Abschnitt 1.2 die evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundbegriffe und Grundlagen vorgestellt. Dabei wird in Unterabschnitt 1.2.1 ausgehend von Tinbergen's vier Warum-Fragen der Biologie eine evolutionspsychologische Sicht auf die Hominisation und das menschliche Gehirn im Sinne von Leda Cosmides & John Tooby ("Massive-Modularitäts-Hypothese") vorgestellt und in die dazugehörigen Begrifflichkeiten eingeführt, welche dann anschließend in Unterabschnitt 1.2.2 für die weitere Theoriebildung noch einmal definitorisch festgehalten werden. In Unterabschnitt 1.2.3 wird dann die "Massive-Modularitäts-Hypothese" kritisch betrachtet und diverse andere modulare Sichtweisen auf das menschliche Gehirn vorgestellt und diskutiert, bevor in Unterabschnitt 1.2.4 eine mögliche evolutionspsychologische und soziobiologische Sicht auf das menschliche Gehirn entwickelt und festgehalten wird, welche eine schwache "Massive-Modularitäts-Hypothese" beinhaltet und welche der weiteren Theoriebildung hier vorangestellt werden wird.

Um der vorläufigen Arbeitshypothese aus Unterabschnitt 1.1.5 nachgehen zu können, wird im zweiten Kapitel dann die soziale Intelligenz und ihr evolutionäres Umfeld untersucht. Dabei wird zunächst in Abschnitt 2.1 geklärt, wie sich auf der Grundlage einer schwachen "Massiven-Modularitäts-Hypothese" (soziale) Intelligenz überhaupt charakterisieren lässt, indem als erstes in Unterabschnitt 2.1.1 der Frage nachgegangen wird, wie sich Intelligenz allgemein modular charakterisieren lässt, und zweitens in Unterabschnitt 2.1.2 die Frage im Zentrum steht, warum die soziale und nicht die ökologische Intelligenz für die menschliche Intelligenzevolution entscheidend war. Im anschließenden Abschnitt 2.2 wird dann das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenz analysiert, indem insbesondere die evolutionären Zusammenhänge zwischen der sozialen Intelligenz und der Sprachfähigkeit (Unterabschnitt 2.2.1), der "Theory-of-Mind"-Fähigkeit (Unterabschnitt 2.2.2), der Repräsentationsfähigkeit (Unterabschnitt 2.2.3), der Bewusstseinsfähigkeit (Unterabschnitt 2.2.4), der Denkfähigkeit (Unterabschnitt 2.2.5), dem Symbolverständnis (Unterabschnitt 2.2.6), der Fiktionsfähigkeit (Unterabschnitt 2.2.7) und der Ritualfähigkeit (Unterabschnitt 2.2.8) untersucht werden.

Auf dieser Grundlage wird dann im dritten Kapitel in Abschnitt 3.1 versucht, die vorläufige Arbeitshypothese aus Unterabschnitt 1.1.5 zu bestätigen und zu konkretisieren, indem zunächst in Unterabschnitt 3.1.1 die "Beziehungsnetzwerk-Metapher", mit welcher der mathematische Denkprozess in Unterabschnitt 1.1.3 verglichen wurde, mittels der evolutionären Zusammenhänge, die im zweiten Kapitel untersucht wurden, als sozialen Denkprozess zu erklären. Anschließend wird in Unterabschnitt 3.1.2 dargelegt, wie dieses soziale Denken das mathematische Denken ermöglichen kann und in Unterabschnitt 3.1.3 wird mit Hilfe der repräsentationalen Einordnung des sozialen Denkprozesses in das in Unterabschnitt 2.2.3 vorgestellte Ordnungssystem der menschlichen Repräsentationsfähigkeit der mathematische Denkprozess repräsentational eingeordnet. In Anbetracht dieser evolutionären und repräsentationalen Resultate bzgl. des mathematischen Denkens wird dann in Abschnitt 3.2 versucht, die oben genannten fünf grundlegenden Fragen der Philosophie der Mathematik naturalistisch so zu beantworten (Unterabschnitte 3.2.1-5), ohne dass man dabei auf einen ontologischen Platonismus wird zurückgreifen müssen. Den Abschluss der Arbeit bildet dann Abschnitt 3.3, in welchem die Argumentation der ganzen Arbeit und die dazugehörigen Resultate noch einmal konzis zusammengefasst werden.

Kapitel 1

Grundbegriffe und theoretische Grundlagen

Bevor man sich der Betrachtung der evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens zuwenden kann, sind die beiden dafür notwendigen Erklärungsansätze, ein mathematisch-philosophischer und ein evolutionärer, zu konkretisieren. Das heißt, es muss zum einen klar festgelegt sein, was im Zuge dieser Theoriebildung unter der Mathematik und dem mathematischen Denken grundlegend verstanden wird, und zum anderen, was man sich überhaupt unter einem evolutionären Ursprung einer "höheren" kognitiven Fähigkeit des Menschen vorstellen kann. Dies soll nun für die weitere Argumentation entwickelt und festgehalten werden, indem in Abschnitt 1.1 ausgehend von der mathematisch-philosophischen Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, eine mögliche Sicht auf die Mathematik und der dazugehörige mathematische Denkprozess vorgestellt und konkretisiert wird, und in Abschnitt 1.2 ausgehend von Tinbergen's vier Warum-Fragen der Biologie eine evolutionspsychologische und soziobiologische Sicht auf das (menschliche) Gehirn dargelegt und ausdifferenziert wird, welche gezielt evolutionäre Erklärungen im Hinblick auf die "höheren" kognitiven Fähigkeiten des Menschen ermöglicht. Diese Grundbegriffe und theoretischen Grundlagen bilden dann die operative Ausgangsbasis für die ganze weitere Analyse im Zuge dieser Theoriebildung.

1.1 Mathematisch-philosophische Grundbegriffe und Grundlagen

In diesem Abschnitt wird in die mathematisch-philosophischen Grundbegriffe und Grundlagen, welche die mathematisch-philosophische Ausgangsbasis dieser Arbeit bilden, eingeführt, indem zunächst einmal die zum Einsatz kommende mathematisch-philosophische Grundposition vorgestellt, erläutert und ihr historisch-philosophischer Verlauf von ihren Anfängen bis in die Gegenwart skizziert wird. Anschließend wird dann darauf aufbauend die eigene Interpretation dieser Grundposition vorgestellt, definitorisch gefestigt und ein dazugehöriger mathematischer Denkprozess abgeleitet. Im Weiteren wird dann die Innenperspektive des mathematischen Denkens dahingehend untersucht, ob sie mit diesem mathematischen Denkprozess kompatibel ist. Anschließend wird der Außenperspektive auf das mathematische Denken im Rahmen der kognitiven Neuropsychologie nachgegangen und es werden Ergebnisse vorgestellt, welche weitere Indizien für den entwickelten mathematischen Denkprozess bereitstellen. Abschließend wird dann eine sich auf dieser Grundlage ergebende vorläufige Arbeitshypothese über die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens aufgestellt.

1.1.1 Mathematik: Die Wissenschaft der Muster

Grundlegend für das Verständnis dieser Arbeit ist die Auffassung, dass die Mathematik als die Wissenschaft der Muster angesehen werden kann. Diese Auffassung ist nicht neu und sie wurde bereits von vielen anderen Mathematikern und Philosophen (Devlin in [42], [43], Oliveri in [119], Resnik in [133], [134], [135], [163][S. 317-336], Sawyers in [143] und Steen in [152]) auf die verschiedenste Art und Weise interpretiert und vertreten, so dass hier zunächst einmal zur Einführung der historisch-philosophische Entwicklungsverlauf dieser Auffassung skizziert wird:
Diese mathematisch-philosophische Grundposition lässt sich im Rahmen der Philosophie der Mathematik bis zu Sawyers in die 50-iger Jahre des letzten Jahrhunderts zurückverfolgen,[1] welcher diese in seinem Buch "Prelude to Mathematics"

[1] Im Grunde sogar bis zu G. H. Hardy (Hardy in [71]) in die 40-iger Jahre des letzten Jahrhunderts. Allerdings erklärt Hardy nicht, dass die Mathematik die Wissenschaft der Muster ist,

(Sawyers in [143][S. 12, Z. 7-11]) wiefolgt charakterisiert hat:

For the purposes of this book we may say, 'Mathematics is the classification and study of all possible patterns'. Pattern is here used in a way that not everybody may agree with. It is to be understood in a very wide sense, to cover almost any kind of regularity that can be recognized by the mind.

In den 70-iger und 80-iger Jahren wurde diese Grundposition von Michael Resnik wieder aufgegriffen, welcher damit seine strukturalistische Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik entwickelte. In dieser gesteht Resnik den mathematischen Strukturen eine metaphysische Existenzform zu, wobei die mathematischen Objekte als Punkte bzw. Knoten innerhalb der dazugehörigen mathematischen Strukturen angesehen werden. Diese strukturalistische Position beschreibt Resnik in [133] auf die folgende Weise:

The Structuralist does not claim that all structures are perceived directly without the aid of ordinary experience. He believes instead that the mathematical patterns are known in the same way as, say, linguistic or musical patterns. Simple patterns are encountered in ordinary experience, but once one can deal skillfully with these patterns one can come to know other patterns which are not previously experienced. Thus one can develop music never heard before, comprehend sentences not previously uttered, and describe mathematical structures not directly exhibited in experience.

An diesem Zitat wird nun auch schon die besondere argumentative Stärke die-

---

sondern für ihn ist ein Mathematiker ein Mustermacher, und diese Muster werden mit Ideen gemacht (Hardy in [71][S. 84, Z. 1-4]). Diese Ideen sind schichtweise geordnet (Hardy in [71][S. 110, Z. 7-12]:

It seems that mathematical ideas are arranged somehow in strata, the ideas in each stratum being linked by a complex of relations both among themselves and with those above and below. The lower the stratum, the deeper (and in gerneral the more difficult) the idea.

Ein solches Muster von Ideen nennt er dann Modell, was er am Beispiel der drei Geometrien (projektive, euklidische und nicht-euklidische) erklärt (Hardy in [71][S. 124, Z. 14-17]):

Each of these geometries is a model, a pattern of ideas, and is to be judged by the interest and beauty of its particular pattern.

Damit vertritt eigentlich auch schon Hardy eine Position, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht. Aber er spricht es nicht konkret aus!

ser strukturalistischen Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik ersichtlich. Sie vertritt insbesondere einen ontologischen Platonismus bezüglich der Existenz der mathematischen Objekte, welcher es zum einen ermöglicht, erklären zu können, warum die Mathematik so gut auf die Welt passt, und zum anderen plausibel machen kann, wie es zu der der Mathematik inhärenten Eigendynamik kommen kann. Mit einem ontologischen Platonismus dieser Spielart kann man also schon zwei der fünf genannten wesentlichen Fragen in der Philosophie der Mathematik erklären. Dies ist auch der tiefere Grund, warum Mathematiker und Philosophen bis heute mit einem ontologischen Platonismus liebäugeln (w.z.B. Kanitscheider in [87]).

Nichtsdestotrotz sind bereits in Reaktion auf Resnik Versuche unternommen worden, diese Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, so zu formulieren, dass sie ohne einen irgendwie gearteten ontologischen und/oder epistemologischen Platonismus auskommt. Zum Beispiel entwickelte Gianluigi Oliveri in [119] in den 90-iger Jahren eine diesbezügliche Position, welche ohne einen ontologischen Platonismus bzgl. der Existenz mathematischer Objekte auskommt. Dies gelingt ihm, indem er auf Wittgensteins "Aspekt"-Begriff[2] zurückgreift, wenn er sein Verständnis der Mathematik als die Wissenschaft der Muster erklärt (Oliveri in [119][3. The third way]):

What I am going to suggest is that a pattern is an aspect of an objekt, which becomes perspicuous to us when we consider the object in relation to a given mathematical theory. An aspect, therefore, is not an entity which can stand on his own feet. The position that I am here going to defend is that mathematics is a science of aspects and not of particular given objects.

Auf dieser Grundlage entwirft Oliveri seinen dritten Weg zwischen Platonismus und Anti-Realismus (Oliveri in [119][3. The third way]):

The cruical characteristics of a pattern which allows us to find a third way bet-

[2]Wittgenstein hat "das Bemerken eines Aspekts" in [179][S. 518] folgendermaßen erklärt:

Ich betrachte ein Gesicht, auf einmal bemerke ich seine Ähnlichkeit mit einem anderen. Ich sehe, daß es sich nicht geändert hat; und ich sehe es doch anders. Diese Erfahrung nenne ich "das Bemerken eines Aspekts".

ween Platonism and anti-realism are: given a set of objects, a pattern associated with these objects (i) is neither an object nor, as we have already seen above, a poperty of an object, (ii) is theory dependent and (iii) is object-dependent.

Somit schlägt Oliveri den ontologischen Platonismus bzgl. der Existenz mathematischer Objekte aus dem Feld, indem er ein Verständnis der Mathematik als der Wissenschaft der Muster entwickelt, in welchem Muster Aspekte sind, welche weder Objekte noch Eigenschaften von Objekten darstellen, ohne dass er dabei seinen Realismus bzgl. der unabhängigen Existenz der Objekte der Wahrnehmung aufgeben müsste (Oliveri in [119][4. Which Realism?]):

What I do is: assuming that there are objects, that is, entities which exists independently of anybody's thinking about them, attempt to show that what I call 'patterns' are neither objects nor properties of objects.

Dabei ist es Oliveri auch nicht entgangen, dass Wittgensteins "Aspekt"-Begriff im Grunde ein Beziehungsbegriff ist (Oliveri [119][3. The third way]):

What is, however, very interesting . . . , is that the aspect we percieve is not "[...] a property of the object, but an internal relation between it and other objects". This internal relation that an object has to other objects is the relation which becomes perspicuous when, within a given theory, we give a representation of the objects in question.

Somit sind bei Oliveri die Aspekte letztendlich Beziehungen zwischen Objekten der Wahrnehmung innerhalb einer gegebenen (mathematischen) Theorie. Jetzt wäre es natürlich interessant zu wissen, wie man von den Objekten der Wahrnehmung zu einer entsprechenden mathematischen Theorie kommt? Auf diese Frage geht Oliveri in [119] allerdings nicht mehr genau ein, aber sie wird im Zuge meiner Theoriebildung hier noch detailliert beantwortet werden (vgl. Kap. 3.1).
Zuvor griff auch Lynn A. Steen gegen Ende der 80-iger Jahre die Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster betrachtet, wieder auf. In [152] erklärt Steen die enorme Ausdifferenzierung der Mathematik und die damit einhergehende Eigendynamik in den einzelnen mathematischen Teildisziplinen damit, dass sich die Mathematik als Wissenschaft von Raum und Zahl weiterent-

wickelt hat zur Wissenschaft der Muster, was sich Steen folgendermaßen erklärt:

The mathematician seeks patterns in number, in space, in science, in computers, and imagination. Mathematical theories explain the relation among patterns; functions and maps, operators and morphisms bind one type of pattern to another to yield lasting mathematical structures. Applications of mathematics use these patterns to "explain" and predict natural phemonena that fit the patterns. Patterns suggest other patterns, often yielding patterns of patterns. In this way mathematics follows its own logic, beginning with patterns from science and completing the portrait by adding all patterns that derive from the initial ones. ... It begins with the search for patterns in data - perhaps numbers, but often in geometric or algebraic structures. Generalization leads to abstraction, to patterns in the mind.

Allerdings erklärt Steen in seinen Ausführungen nicht, wie die mathematischen Muster in das Gehirn kommen. Er entwickelt auch keinen mathematischen Denkprozess aus dieser Grundposition heraus, was aber auch nicht sein Bestreben war, da er erst einmal die enorme Ausdifferenzierung der einzelnen mathematischen Disziplinen und das damit einhergehende schnelle Wachstum der ganzen Mathematik erklären wollte, was ihm ja auch gelungen ist, indem er den Wandel der Mathematik als Wissenschaft von Raum und Zahl zur Wissenschaft der Muster darlegt hat. Dabei stellt er sich aber auch nicht die Frage, ob die Mathematik nicht schon immer die Wissenschaft der Muster war und diese aber bisher sich nur mit räumlich-geometrischen und arithmetisch-algebraischen Betrachtungsgegenständen beschäftigt hat. Ferner unterlässt es Steen, diese Grundposition im Rahmen der Philosophie der Mathematik einzuordnen, was in Anbetracht des Wandels der Mathematik als Wissenschaft von Raum und Zahl hin zur Wissenschaft der Muster, den Steen ja postuliert, auch bestimmt grundlegende Konsequenzen für die Philosophie der Mathematik nach sich gezogen haben würde.
Aber auch Keith Devlin, welcher Ende der 90-iger Jahren diese Grundposition aufgriff (Devlin in [42], [43]) und mit einem evolutionären Ansatz in Einklang zu bringen versuchte, vermeidet innerhalb seiner Ausführungen eine genaue philosophische Auseinandersetzung mit den anderen Positionen im Rahmen der Philosophie der Mathematik. Dabei kann aber auch er sich in [43] nicht gänzlich von

einem ontologischen Platonismus lösen, auch wenn er im Rahmen seines evolutionären Ansatzes die Möglichkeit dazu gehabt hätte. Er beschreibt Mathematik nämlich als Entdeckungsprozess und auf die Frage, ob es denn mehrere mathematische Welten gäbe, antwortet er (Devlin in [43][S. 174, Z. 10-11, Z. 16-19, S. 175, Z. 28-31]):

Es gibt nur eine einzige mathematische Welt. ... Die mathematische Welt ist ein Produkt der Art und Weise, wie das menschliche Gehirn auf die Außenwelt reagiert. Damit wird die Mathematik also zugleich von der Welt, in der wir leben, und von der Struktur unseres Gehirns geprägt. ... Wenn ich also sage, Mathematik stellt einen Entdeckungsprozeß dar, dann bezieht sich dies sowohl auf die Entdeckung unserer Welt wie auf die von uns selbst als denkende Wesen, die diese Welt bewohnen.

An diesem Zitat wird nun Devlin's Dilemma offenkundig: Er kann sich im Grunde nicht entscheiden, ob nun die Mathematik entdeckt oder erfunden wird. Devlin entscheidet sich schließlich für einen Entdeckungsprozess, welcher von der Außenwelt und der Struktur unseres Gehirns geprägt wird. Da er aber den mathematischen Denkprozess als Entdeckungsprozess im Rahmen seines evolutionären Ansatzes nicht soweit konkretisiert, dass man mit ihm tatsächlich auch hätte erklären können, wie genau die Außenwelt zusammen mit der Struktur des menschlichen Gehirns die Mathematik prägt, ist natürlich konsequenterweise auch die Schlussfolgerung, dass die Mathematik ein Entdeckungsprozess ist, nicht zwingend. Auch scheint Devlin dabei nicht auf die Idee gekommen zu sein, dass die Mathematik weder ein reiner Entdeckungsprozess noch eine reine Erfindung des menschlichen Gehirns sein könnte, obwohl dieser dritte Weg im Zusammenspiel der Außenwelt mit der Struktur des Gehirns bereits ersichtlich wird. Aber auch sein evolutionärer Ansatz ist leider, wie bereits in der vorangegangenen Einleitung geschildert, nicht sehr differenziert. Devlin reduziert seinen evolutionären Ansatz im Grunde auf den "modus operandi", die einzelnen kognitiven Fähigkeiten, die er in Verdacht hat, mit dem mathematischen Denken zusammenzuhängen,[3] zu

[3] Bei diesen kognitiven Fähigkeiten handelt es sich nach Devlin um die folgenden (Devlin in [43][S. 26ff]: Zahlensinn, Numerische Kompetenz, Algorithmische Fähigkeiten, die Fähigkeit zu abstrahieren, ein Sinn für Ursache und Wirkung, die Fähigkeit, eine längere Kausalkette zu konstruieren und zu verfolgen, die Fähigkeit zum logischen Denken, die Fähigkeit, Bezüge

ihren evolutionären Ursprüngen zurückzuverfolgen, um somit letztendlich einen evolutionären Pfad des mathematischen Denkens aufzudecken, was er selbst wiefolgt formuliert (Devlin in [43][S. 28, Z. 33 - S. 29, Z. 8]):

Diese Fähigkeiten zusammengenommen erlauben uns also, Mathematik zu betreiben. Damit reduziert sich unsere Suche nach den Ursprüngen unserer mathematischen Fähigkeiten weitgehend auf die Erforschung jeder dieser Einzelfähigkeiten, die sich alle im Verlauf der Evolution entwickelt haben. Der Preis für jede einzelne Fähigkeit bestand in einem erhöhten Energieverbrauch des Gehirns. Nach den Prinzipien der Evolutionstheorie mußte aber der Erwerb jeder dieser Fähigkeiten mit einem Überlebensvorteil einhergehen, der diese erhöhten Kosten aufwog. Bei einigen dieser Fähigkeiten - etwa bei dem räumlichen Vorstellungsvermögen oder dem Sinn für Ursache und Wirkung - liegt dieser Vorteil auf der Hand. Bei anderen müssen wir etwas tiefer danach suchen.

Am "modus operandi" selbst, die einzelnen Fähigkeiten evolutionär zurückzuverfolgen, ist dabei nichts auszusetzen. Aber Devlin unterlässt es, wie bereits erwähnt, in die dazugehörigen Prinzipien und Begrifflichkeiten der Evolutionstheorie soweit einzuführen, dass eine kohärente und konsequente evolutionäre Zurückverfolgung überhaupt möglich ist, was im Rahmen seiner Theoriebildung dann leider stellenweise mehr zu einem evolutionären Geschichtenerzählen führt, auch wenn die Zusammenhänge ansonsten richtig zitiert und dargelegt sind. Dabei erhält Devlin letztendlich als Ergebnis seiner Theoriebildung, dass Sprache und Mathematik Nebenprodukte des "offline"-Denkens sind, einer kognitiven Fähigkeit, die er charakterisiert als (Devlin in [43][S. 280, Z. 29-31]):

... das [ist] Nachdenken über eine Welt, die nur aus Symbolen besteht, die wir in unserem Kopf selbst geschaffen haben.

Den Kern seiner Argumentation bildet also diese hypothetisch-symbolische Denkfähigkeit, bei der es sich aber schon um eine ziemlich weit entwickelte kognitive Fähigkeit des Menschen handelt, welche Devlin selbst noch weiter evolutionär zur Fähigkeit des "online"-Denkens zurückverfolgt. Den evolutionären Zusammenhang zwischen diesen beiden sieht Devlin dabei folgendermaßen (Devlin in

herzustellen, und ein räumliches Vorstellungsvermögen.

[43][S. 288, Z. 8-17]):

Das Offline-Denken wurde dadurch erreicht, daß eine Fähigkeit, die sich für einen anderen Zweck entwickelt hatte, umfunktioniert wurde: das online-Denken. Online-Denken (bzw. Protosprache) entwickelte sich als Instrument zur Beherrschung eines immer besseren Stimulus-Response-Verhaltens und (möglicherweise) zur Weitergabe einer ständig größer werdenden Zahl einfacher Informationen. Indem die Evolution einen Weg fand, die Bedingungen des online-Denkens im Gehirn selbst zu stimulieren, entstanden plötzlich Fähigkeiten einer vollkommen neuen Stufe.

Damit ist Devlin's evolutionärer Argumentationspfad offengelegt: Die Evolution der menschlichen Sprachfähigkeit verläuft bei ihm parallel zur Evolution der menschlichen Denkfähigkeit. Verwunderlich dabei ist allerdings, warum Sprache ein Nebenprodukt des Denkens sein soll, wenn sie doch mit diesem sozusagen koevolutiv zusammenhängt? Auch der evolutionäre Zusammenhang mit den anderen neun kognitiven Fähigkeiten (s. Fußnote 3), die mit dem mathematischen Denken zusammenhängen sollen, wird nicht ausdrücklich geklärt. Trotz aller Schwierigkeiten bietet Devlin's Versuch, die mathematisch-philosophische Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, mit einem evolutionären Erklärungsansatz zu kombinieren, um das mathematische Denken und die Mathematik erklären zu können, einen geeigneten Ausgangspunkt für eine nicht-metaphysische, naturalistische Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik, die die fünf in der Einleitung genannten zentralen Fragen in der Philosophie der Mathematik ohne Rückzug auf einen irgendwie gearteten ontologischen Platonismus beantworten kann. Doch wie sieht die Interpretation dieser mathematisch-philosophischen Grundposition aus, welche den weiteren Ausführungen hier vorangestellt werden soll?

In der Mathematik beschäftigt man sich mit den Mustern der physischen, sozialen und mental-repräsentationalen Welt.[4] Zu ihrem Betrachtungsgegenstand

[4]Und genau an dieser Stelle unterscheidet sich diese Grundposition im Rahmen der Philosophie der Mathematik schon von den vielen anderen, die zum Beispiel davon ausgehen, dass die Mathematik anzusehen ist als die Wissenschaft der Zahlen (eine gängige populärwissenschaftliche Auffassung, auf welcher auch die neuro- und kognitionswissenschaftliche Theoriebildung im Rahmen der Untersuchung der mathematischen Kognition mehr oder weniger fusst (z.B.

kann all das werden, was irgendwie (physisch, sozial, mental-repräsentational) miteinander in Beziehung steht. Das mathematische Denken erfasst dann das auf den ersten Blick erkennbare Beziehungsmuster, formalisiert es mittels Axiomen exakt und zieht in weiteren Schritten die Konsequenzen (Sätze und Definitionen) aus diesen grundlegenden Beziehungen, erfasst und formalisiert also weitere in diesem Zusammenhang gültige Beziehungen. In diesen einzelnen Schritten - bei der Betrachtung der jeweils nächsten Theorieebene des jeweiligen Betrachtungsgegenstandes - erfasst und formalisiert das mathematische Denken dann wieder weitere Beziehungen auf der Basis der zuvor erfassten und formalisierten Theorieebenen (Axiome, Sätze und Definitionen), was sich theoretisch im Falle eines finiten Betrachtungsgegenstandes zumindest solange fortsetzten lässt, bis die Beziehungen in diesem vollständig erfasst und formalisiert sind, und im Falle eines infiniten Betrachtungsgegenstandes sich prinzipiell unendlich lange fortsetzen lässt, es sei denn, die bis dato erfassten und formalisierten Beziehungen auf der Basis des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes reichen zur Beschreibung des Beziehungsmusters erst einmal aus. So entwickelt sich letztendlich ein formalisiertes Beziehungsmuster des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes, welches den Anspruch erhebt, diesen exakt, eindeutig und widerspruchsfrei

---

Campbell in [26])), des Raumes und der Zeit (z.B. Kant in [88]), der zeitlichen Bewegung (z.B. Brouwer in [15], Snapper in [144]), von Raum und Quantität (z.B. Davis & Hersh in [36]) und der Unendlichkeit (z.B. Kanitscheider in [87], Weyl in [181]). Mathematik ist nicht gleich Rechnen mit Zahlen! Der Umgang mit Zahlen ist nur ein Teil der Mathematik, insbesondere der Arithmetik, und diese nur eines von vielen Teilgebieten der Mathematik, in welcher es mittlerweile, je nach Zählung, circa 70 Hauptgebiete gibt, welche sich dann noch einmal weiter in mehrere Teilgebiete aufsplitten, so dass ca. 3400 Unterabteilungen daraus entstehen (Davis & Hersh in [36][S. 25-26]). Sie ist auch nicht die Wissenschaft des Raumes, auch wenn die Geometrie eine wichtige Rolle inne hat. Gleiches gilt für die Auffassungen, die die Mathematik auf die zeitliche Bewegung oder die Quantität zurückführen. Auch die Auffassung, dass die Mathematik die Wissenschaft des Unendlichen ist, erfasst nicht ihre ganze Breite. Zugegebenermaßen spielen in der Mathematik die Zahlen, der Raum, die Zeit, die Bewegung, die Quantität und die Unendlichkeit alle eine bestimmte und teilweise auch besondere Rolle, aber sie machen die Mathematik nicht aus! Zahlenmuster, räumliche Muster, zeitliche Muster, Bewegungsmuster und Muster von Mengen sind letztendlich nur spezielle mathematische Muster, die sich aus den entsprechenden Betrachtungsgegenständen ergeben, in welchen oftmals auch eine Unendlichkeit erfasst und formalisiert wird. Was ihnen allerdings allen gemeinsam ist, ist die Tatsache, dass es mathematische Muster sind!

beschreiben zu können. Deswegen sagt man auch, dass die Mathematik die Wissenschaft der Muster sei. Übrigens können als Betrachtungsgegenstand auch bereits existierende mathematische Muster verwendet werden und man untersucht dann das Muster der Muster, sozusagen, das Metamuster.[5]
Das mathematische Denken selbst spaltet sich dabei, wie eben bereits angedeutet, in zwei getrennte Bereiche auf, nämlich einerseits in die Erfassung und andererseits in die Formalisierung der Beziehungen innerhalb des jeweiligen zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes. Daher soll im Weiteren die Erfassung der Beziehungen im Zuge des mathematischen Denkprozesses als intuitiv-mathematisches Denken bezeichnet werden und die Formalisierung derselben als formal-mathematischen Denken. Mit Hilfe des intuitiv-mathematischen Denkens erfasst man also die Beziehungen im Rahmen eines zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes, ohne diese jedoch gleich auch exakt beschreiben zu können: man weiß, dass es eine Beziehung gibt, aber man kann sie noch nicht "in Worte fassen", geschweige denn "deduktiv beweisen".[6] "In Worte fassen" und "deduktiv beweisen" sind dann auch die Aufgaben des formal-mathematischen Denkens. Dieses versucht, die vom intuitiv-mathematischen Denken erfassten Beziehungen zu beschreiben, genauer zu formalisieren, und zwar mittels einer exakten, eindeutigen und widerspruchsfreien Symbolik und Sprache. Der Hauptunterschied zur "normalen" Sprache ist dabei der, dass hier Bedeutung und Symbol eindeutig zusammen geführt werden, d.h., dass eine Bedeutung nur <u>ein</u> Symbol und dass das entsprechende Symbol nur <u>eine</u> Bedeutung hat. Das entscheidende bei einer mathematischen Formalisierung ist also die Art und Weise der Modellierung einerseits der Symbole untereinander und andererseits der Symbole und dem, was

[5] Ein schönes Beispiel für solche Metastrukturen in der Mathematik liefert nicht nur die formalistische Metamathematik, sondern auch die Analysis, welche man u.a. auf $\mathbb{R}$, auf $\mathbb{R}^n$ und allgemein auf Banachräumen betreiben kann (z.B. Heuser in [75], [76], Forster in [60], [61]). Ein Metamuster deswegen, weil $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^n$ ein Banachraum ist.

[6] Bei dieser mathematischen Intuition handelt es sich nicht um die Innenperspektive des mathematischen Denkens, welche die, die "höhere" Mathematik betreiben, von Innen her haben. Die mathematische Intuition ist im Grunde anzusehen als ein "richtiger Riecher" für mathematische Beziehungsstrukturen und somit klar zu unterscheiden von der genannten Innenperspektive auf das mathematischen Denken, der im Unterabschnitt 1.1.3 nachgegangen werden soll, und welche sich als "innerer Beobachter", der das mathematische Denken verfolgt, charakterisieren lässt.

sie symbolisieren sollen.[7] So werden die Missverständnisse und Widersprüche der "normalen" Sprache weitestgehend ausgeschlossen und man erhält einen in sich zwingenden Formalismus, der eine Beziehungsstruktur exakt, eindeutig und widerspruchsfrei beschreibt.[8] Dabei lässt sich das formal-mathematische Denken in zwei weitere Teilbereiche aufspalten: zum einen, in die Formalisierung der ersten vom intuitiv-mathematischen Denken erfassten grundlegenden Beziehungen innerhalb des jeweiligen Betrachtungsgegenstandes, welche die Axiomierung des Betrachtungsgegenstandes darstellt, und zum anderen, in die Formalisierung und der damit einhergehenden deduktiven Beweisführung der auf dieser Axiomierung aufbauenden Beziehungen. Daher soll im Weiteren die Formalisierung der grundlegenden Beziehungen innerhalb eines Betrachtungsgegenstandes als das synthetisch-formal-mathematische Denken und die gesamte darauf aufbauende Formalisierung und deduktive Beweisführung als analytisch-formal-mathematisches Denken bezeichnet werden. Das synthetisch-formal-mathematische Denken ist also ausschließlich für die Formulierung der Axiome zuständig, d.h. es formalisiert die im ersten Schritt des mathematischen Denkprozesses vom intuitiv-mathematischen Denken erfassten grundlegenden Beziehungen eines zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes. Ist dann einmal eine solche grundlegende Formalisierung - die Axiomierung - der grundlegenden, auf den ersten Blick er-

[7]Symbolisiert werden im Zuge der Formalisierung in der Regel Beziehungen und keine konkreten Objekte der Wahrnehmung. Lediglich im Falle der Axiome kann es vorkommen, dass konkrete Objekte der Wahrnehmung von Symbolen repräsentiert werden müssen, damit man die dazugehörigen Beziehungen erfassen kann. Dies ändert aber prinzipiell nichts daran, dass das Augenmerk der Mathematiker auf die Beziehungsstruktur gerichtet ist. M.a.W.: Was für konkrete Objekte der Wahrnehmung sich auch immer hinter x und y verbergen mögen, die Mathematiker interessiert vor allem, wie sich x und y zueinander verhalten bzw. miteinander in Beziehung stehen.

[8]Diese exakte, eindeutige und widerspruchsfreie Formalisierung der Beziehungstrukturen innerhalb des jeweils zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes, die der mathematische Denkprozess letztendlich liefert, ist auch der Hauptgrund für den Anspruch der Mathematik auf eine epistemologische Sonderstellung, welcher sich einfach ausgedrückt darauf zurückführen lässt, dass der mathematische Formalismus sprachliche, inhaltliche und sozio-kulturelle Missverständnisse ausschließt bzw. prinzipiell darauf ausgelegt ist, diese auszuschließen. In diesem Punkt unterscheidet sich die Mathematik insbesondere von den empirischen Wissenschaften und daher wird sie auch von diesen im Rahmen ihrer empirischen Theoriebildung zur Verifizierung der dazugehörigen Hypothesen angewandt.

kennbaren, Beziehungen eines Betrachtungsgegenstandes gelungen, dann kommt das intuitiv-mathematische Denken wieder zum Zuge. Mit seiner Hilfe erkennt man die nächsthöhere Beziehungsebene der axiomatischen Grundlage, welche man dann mittels des analytisch-formal-mathematischen Denkens formalisieren kann und jetzt auch auf der zu Grunde gelegten Axiomierung deduktiv beweisen muss, damit der Anspruch auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit gewahrt bleibt. Das so entstehende komplexe Beziehungsnetzwerk bzw. -muster nennt man dann die Mathematik des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes. Da auch solche bereits existierenden komplexen Beziehungsmuster nochmals zum Betrachtungsgegenstand werden können, sind der Komplexität in diesem Zusammenhang keine Grenzen gesetzt, was man auch an der rasant voranschreitenden Ausweitung, Ausdifferenzierung und Spezialisierung der verschiedenen mathematischen Disziplinen erkennen kann (Steen in [152], Kline in [94], Davis & Hersh in [36]), und welche die Eigendynamik, die der Mathematik inhärent ist, mit begründen.
Die Unterscheidung zwischen synthetisch- und analytisch-formal-mathematischem Denken ist hier eigentlich rein philosophischer Natur und wird vor allem durch die Tatsache motiviert, dass dem formal-mathematischen Denken erst ab der zweiten Theorieebene die Aufgabe der deduktiven Beweisführung zukommt. Auf der ersten Theorieebene formalisiert das formal-mathematische Denken "nur" die vom intuitiv-mathematischen Denken auf den ersten Blick erfassten grundlegenden Beziehungen, ohne sie deduktiv beweisen zu müssen, da es sich hierbei um die grundlegenden Axiome handelt, die die Basis für die weitere mathematische Theoriebildung im Rahmen des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes bilden. Da die Formalisierung innerhalb der ersten Theorieebene sozusagen abstrakten Symbolen eine neue eindeutige Bedeutung im Rahmen des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes zukommen lässt, wobei die Bedeutung, die sie vielleicht bis dato hatten, nun keine Rolle mehr spielt bzw. auch nicht mehr spielen darf, stellt diese Formalisierung - die besagte Axiomierung - eine Art der Erweiterung dar. Im Gegensatz dazu operiert das formal-mathematische Denken ab der zweiten Theorieebene nur auf dem vorangegangenen Theorieebenen, d.h. für Definitionen und Sätze werden nur Axiome, Definitionen und Sätze verwendet, die dieser Theorieebene vorausgehen, was auch die deduktive Beweisführung sicher-

stellen soll. Nimmt man sich daher einen Satz oder eine Definition einer höheren Theorieebene vor, so zerfällt er nur in Axiome, Definitionen und Sätze vorangegangener Theorieebenen. Bei diesen Definitionen und Sätzen kommt somit nichts mehr von Außen dazu. Sie werden nicht in diesem Sinne erweitert, sondern formalisieren sozusagen nicht-offensichtliche Beziehungen, die das intuitiv-mathematische Denken zuvor erfasst hat. In einem gewissen Sinne erklären sie also die vorausgehenden Theorieebenen. Daher wird im Zuge dieser Theoriebildung hier die Unterscheidung zwischen synthetisch- und analytisch-formal-mathematischen Denken getroffen. Eine Unterscheidung die sich begrifflich gesehen auf die von Immanuel Kant in [88] entwickelte Unterscheidung zwischen "synthetisch" und "analytisch" zurückführen lässt. Kant erklärt sie in [88][S. 33, Z. 16 - S. 34, Z. 1] folgendermaßen:

Entweder das Prädikat B gehört zum Subjekt A als etwas, was in diesem Begriffe A (versteckter Weise) enthalten ist; oder B liegt ganz außer dem Begriff A, ob es zwar mit demselben in Verknüpfung steht. Im ersten Fall nenne ich das Urteil analytisch, in dem anderen synthetisch. ... Die erstere könnte man auch Erläuterungs-, die andere Erweiterungsurteile heißen, weil jene durch das Prädikat nichts zum Begriff des Subjekts hinzutun, sondern diesen nur durch Zergliederung in seine Teilbegriffe zerfällen, die in selbigen schon (obgleich verworren) gedacht waren: da hingegen die letztere zu dem Begriffe des Subjekts ein Prädikat hinzutun, welches in jenem gar nicht gedacht war, und durch keine Zergliederung desselben hätte können herausgezogen werden.

Mit dieser Begrifflichkeit kann man dann die Axiomierung eines mathematischen Betrachtungsgegenstandes als eine Menge von Erweiterungsurteilen auffassen, weil sie Begriffen und Symbolen im Rahmen der Formalisierung - der Axiomierung - neue Bedeutungen zukommen lassen bzw. neue Bedeutungen für Begriffe und Symbole - die es eventuell schon gab! - schafft. Die darauf aufbauenden Sätze und Definitionen kann man nun weiter als Erläuterungsurteile auffassen, welche lediglich die in der axiomatischen Grundlage nicht-offensichtlichen Begriffe (Definitionen) und Urteile bzw. Aussagen (Sätze) aufzeigen, was bedeutet, dass eine Definition oder ein Satz einer mathematischen Theorie stets nur in Axiome, Definitionen und Sätze zerfällt bzw. zerfallen darf, die diesem Stand der jeweiligen mathematischen Theoriebildung vorausgehen. Entscheidend dabei ist, dass nichts von Außen dazu kommt, da dies mit dem mathematischen Anspruch auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit kollidieren würde. Daher verhält es sich auch so, dass es, wenn wirklich einmal grundlegende Probleme oder Streitfragen innerhalb einer mathematischen Theorie auftreten, dann in der Regel die Axiomierung ist, auf die sich die Probleme bzw. Streitigkeiten zurückführen lassen und welche dann entsprechend angepasst oder ganz neu aufgebaut wird. Die Forderung nach Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit ist es denn auch, die es der Gemeinschaft der Mathematiker ermöglicht, sich ziemlich schnell über etwaige Fehler oder die Richtigkeit eines mathematischen Beweises einig zu werden. Ein Tatbestand, der die Mathematik grundlegend von allen anderen wissenschaftlichen Disziplinen unterscheidet und auch die Soziologie der Mathematik vor die schwierige Herausforderung stellt, entweder den epistemologischen Sonderstatus der Mathematik oder dessen Aufgabe soziologisch zu erklären, wenn sie die Mathematik als soziales Phänomen erfassen möchte. Die erste wissenschaftssoziologische Studie dazu, die sich der Mathematik von Innen her nähert, ist von Bettina Heintz (Heintz in [73]) vorgelegt worden und basiert auf ihrem mehrwöchigen Feldaufenthalt am Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn. Auch sie sieht diese Herausforderung und erklärt in diesem Zusammenhang (Heintz in [73][S. 23, Z. 6-19]):

Die konstruktivistische Wissenschaftsforschung hat eindrücklich demonstriert, in welchem Ausmass die wissenschaftliche Wissensproduktion durch lokale und situative Faktoren geprägt ist. Entsprechend stellt sich die Frage, wie es gelingt, lokal produziertes Wissen in Faktizitätsbehauptungen mit universellem Anspruch zu transformieren. Für die Mathematik stellt sich diese Frage in besonderer Schärfe: Woher kommt die Überzeugungskraft der Mathematik? Über welche Mechanismen wird die Kluft zwischen lokaler Produktion und universellem Anspruch geschlossen? Während die Mathematikphilosophie dazu neigt, den zwingenden Charakter der Mathematik auf ihre Beweisstruktur und das Vorhandensein einer verbindlichen (formalen) Sprache zurückzuführen, sucht die Soziologie nach sozialen Faktoren. Doch was heisst "sozial"? Und wie könnte eine soziologische Erklärung *mathematischen Wissens aussehen?*

Auf diesen Mechanismus, mit welchem diese von Heintz beschriebene Kluft zwischen lokaler Produktion und universellem Anspruch geschlossen wird, werde ich später noch abschießend zu sprechen kommen (vgl. Kap. 3.1.2). Heintz selbst argumentiert in diesem Zusammenhang, dass der formale Beweis als normiertes Kommunikationsverfahren diese Kluft schießt (Heintz in [73][S. 218, Z. 33 - S. 219, Z. 3]):

Der Beweis ist, so meine These, ein hochgradig normiertes Kommunikationsverfahren, das die spezifischen Verständigungsprobleme der Mathematik zu lösen verhilft.

Dabei betont Heintz auch die Schwierigkeiten, die die Überwindung dieser Kluft zwischen dem subjektiven mathematischen Denkprozess und der von der mathematischen Gemeinschaft akzeptierten mathematischen Theorie mit sich bringt, und betont die Übersetzungsfunktion der Beweise (Heintz in [73][S. 221, Z. 33-42]):

Genau dies leistet der Beweis. Die Übersetzung selbst geschieht in der Regel beim "Aufschreiben" (4.3.). Im Rahmen dieser Übersetzung kommt dem Beweis eine wichtige Aufgabe zu, indem er das Sprechverhalten regelt. Der Beweis ist gewissermaßen das Schanier, das zwischen Bewusstsein und Kommunikation, zwischen "psychischem System" und "sozialen System" vermittelt. Keine andere Disziplin hat dermaßen detaillierte Kommunikationsregeln aufgestellt wie die Mathematik mit ihrer Institution des Beweises. Beweisen heißt, eine Argumentation in einzelne Schritte zu zerlegen und sie in Termini einer gemeinsamen, hoch präsizen Sprache zu formulieren.

Mit dieser Reduzierung der Funktion der Beweise auf die kommunikativen Aspekte unterschlägt Heintz aber die Funktion der Beweise innerhalb des subjektiven mathematischen Denkprozesses, in welchem sie auch dazu dienen, die eigene Intuition zu bestätigen und zu konkretisieren. Dieser Mechanismus, der die besagte Kluft schließt, hat mit dem gesamten mathematischen Denkprozess zu tun, insbesondere mit dessen Anspruch auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit. Die Beweise spielen dabei natürlich auch eine große Rolle, aber sie sind

nicht allein für die Überwindung der Kluft zwischen subjektiven und objektiven mathematischen Denkprozess verantwortlich, sondern die sozial-rituelle Interaktion der daran beteiligten Mathematiker spielt dabei eine entscheidende Rolle, vor allem wie sie mit mathematischen Objekten und Sachverhalten umgehen.
Als Beispiel für die Funktionsweise eines solchen mathematischen Denkprozesses können natürlich nahezu alle mathematischen Disziplinen herangezogen werden. Eine übersichtliche und auch für Nicht-Mathematiker geeignete, verständliche Vorstellung einiger dieser mathematischen Muster findet sich insbesondere bei Devlin in [42]. Um aber im Zuge dieser Untersuchung wenigstens ein mathematische Muster einmal ansatzweise vorzustellen, damit auch Nicht-Mathematiker zum einen einen ersten Eindruck dieser Funktionsweise des mathematischen Denkens erhalten können und damit sie zum anderen dann auch in die Lage versetzt werden, die Auffassung, die Mathematik als die Wissenschaft der Muster ansieht, verstehen und der weiteren Theoriebildung hier folgen zu können, wird im Anhang dieser Arbeit erstens die Peano'sche Axiomierung der natürlichen Zahlen vorgestellt und der erste auf dieser Axiomierung aufbauende mathematische Satz bewiesen und zweitens werden anhand einer einfachen Aussage über die natürlichen Zahlen die drei gängigen und akzeptierten Beweismethoden demonstriert. Um es an dieser Stelle einmal ausdrücklich zu betonen, möchte ich darauf hinweisen, dass es für das Verständnis der Philosophie der Mathematik generell und meiner eigenen Theoriebildung hier eine Notwendigkeit ist, sich auf die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin einzulassen, so dass man auch die Funktionsweise der "höheren" Mathematik ansatzweise nachvollziehen kann. Ohne eine solche Einlassung auf die Mathematik und ihr Innenleben ist Philosophie der Mathematik nicht möglich, genausowenig, wie eine Philosophie der Biologie ohne Einlassung auf die Biologie möglich wäre. Alles andere würde bedeuten, um es einmal salopp zu formulieren, die Rechnung ohne den Wirt zu machen. Daher ist die Kompatibilität des hier vorgestellten und entwickelten mathematischen Denkprozesses mit der Innenperspektive der Mathematiker auf das mathematische Denken eine schiere Notwendigkeit, welcher in Unterabschnitt 1.1.3 nachgegangen werden soll.
Im folgenden Unterabschnitt sollen nun zum einen diese hier entwickelten Begrifflichkeiten einmal definitorisch festgehalten werden und zum anderen der be-

schriebene mathematische Denkprozess als Ganzes in einem Flussdiagramm veranschaulicht werden, damit man im Rahmen der weiteren Theoriebildung mit diesen Begrifflichkeiten und dem dazugehörigen mathematischen Denkprozess ohne ergänzende Erklärungen weiterarbeiten kann.

1.1.2 Grundlegende mathematisch-philosophische Definitionen

Bei den nun folgenden Definitionen[9] handelt es sich um die mathematisch-philosophische Grundlegung der gesamten weiteren Theoriebildung:

Definition 1.1 (Mathematisches Denken)
Das ***mathematische Denken*** *ist eine Fähigkeit des menschlichen Gehirns und sie setzt sich zusammen aus dem intuitiv- und dem formal-mathematischen Denken.*

Definition 1.2 (Intuitiv-mathematisches Denken)
Das ***intuitiv-mathematische Denken*** *ist die Fähigkeit des menschlichen Gehirns, die es dem Menschen ermöglicht, die grundlegenden Beziehungen und Zusammenhänge eines gewählten physischen, sozialen oder mental-repräsentationalen Betrachtungsgegenstandes intuitiv zu erfassen, ohne sie aber sofort beschreiben und/oder symbolisieren zu können.*

Definition 1.3 (Formal-mathematisches Denken)
Das ***formal-mathematische Denken*** *ist die Fähigkeit des menschlichen Gehirns, die es dem Menschen ermöglicht, die durch das intuitiv-mathematische Denken gewonnenen Beziehungen und Zusammenhänge abstrakt mittels Sprache und Symbolik exakt, eindeutig und widerspruchsfrei zu formalisieren. Überdies setzt sich das formal-mathematische Denken aus dem synthetisch- und dem analytisch-formal-mathematischen Denken zusammen.*

[9] Das sind hier natürlich keine streng mathematischen Definitionen. Die Bezeichnung "Definition" soll in diesem theoretischen Zusammenhang lediglich klarstellen, dass die Begriffe und Bezeichnungen in dieser Arbeit bzw. in der hier vorgestellten Theorie die in der entsprechenden Definition festgelegte Bedeutung bzw. Charakterisierung haben und ihnen in diesem theoretischen Zusammenhang keine andere zukommt!

Definition 1.4 (Synthetisch-formal-mathematisches Denken)

*Das **synthetisch-formal-mathematische Denken** ist der Teil des formal-mathematischen Denkens, der die ersten Beziehungen und Zusammenhänge eines mathematischen Betrachtungsgegenstandes zu beschreiben versucht bzw. formalisiert und somit die grundlegenden Axiome in Worte und Symbole fasst, also die Axiomatik des jeweiligen mathematischen Betrachtungsgegenstandes festlegt.*

Definition 1.5 (Analytisch-formal-mathematisches Denken)

*Das **analytisch-formal-mathematische Denken** ist der Teil des formal-mathematischen Denkens, der die über der zu Grunde gelegten Axiomatik befindlichen Definitionen und Sätze formuliert und deduktiv beweist.*

Um den theoretischen Zusammenhang dieser Reihe von Definitionen im Rahmen des mathematischen Denkens und den daraus resultierenden mathematischen Denkprozess anschaulich zu machen, wird die bisherige Theoriebildung einmal in einem, auf der Basis des bisher gesagten, selbsterklärenden Flussdiagramm zusammengefasst, welches in Abbildung 1.1 veranschaulicht wird. Dabei werden die im weiteren Verlauf dieser Untersuchung noch zu klärenden Fragen durch die beiden Rauten und die darin befindlichen Fragenzeichen symbolisiert: Welche kognitiven Fähigkeiten ermöglichen das intuitiv-mathematische Denken und welche kognitiven Fähigkeiten ermöglichen das formal-mathematische Denken und wie hängen diese gegebenenfalls miteinander zusammen? Welche evolutionären Ursprünge besitzen sie? Wie sieht der evolutionäre Pfad aus, der zum mathematischen Denken führt?
Bei dem hier entwickelten Begriff des mathematischen Denkens fällt es auch nicht leicht, ihn von vorneherein in die Philosophie der Mathematik einzuordnen, da er intuitionistische, konstruktivistische und formalistische Aspekte vereinigt, indem er sich in das intuitiv- und das formal-mathematische Denken aufspaltet und mittels Modellierung der Beziehungstrukturen vom intuitiven zum formalen gelangt. Lediglich platonische bzw. metaphysische Aspekte finden sich in dem hier entwickelten Begriff nicht, was auch nicht weiter verwunderlich ist, da sich eine evolutionäre Sichtweise mit zum Beispiel der platonischen Ideenwelt bzw. einer dualistischen Sicht ziemlich schwer tut, da diese nach meiner Auffassung nicht plausibel erklären kann, wie denn das menschliche Gehirn bzw. der menschli-

che Geist - was in der evolutionären bzw. biologischen Sicht ein und dasselbe ist! - Zugang zu einer externen, rein metaphysischen Ideenwelt bzw. metaphysischen Entität bekommen kann. M.a.W.: Wie kann ein rein physisches System (Gehirn bzw. Geist) einen Zugang zu einem rein metaphysischen System (Ideenwelt) erhalten? Die dafür notwendige Wechselwirkung lässt sich weder natur- noch geisteswissenschaftlich plausibel erklären, auch wenn es immer wieder diesbezügliche Versuche gibt, die eine Brücke zwischen "Metaphysik" und "Physik" bauen wollen (z.B. Treml in [162]).[10] Natürlich liegen auch die weiteren Vorteile einer platonischen bzw. einer metaphysischen Sicht auf das mathematische

[10] Eine Brücke zwischen "Metaphysik" und "Physik" zu bauen, würde bedeuten, dass man metaphysische, physisch-empirische und insbesondere evolutionäre Erklärungen irgendwie miteinander verknüpfen müsste. Dies ist alleine schon deshalb im Grunde unmöglich, da physisch-empirischen und evolutionären Erklärungen eine monistische (Mikro-, Meso- und Makrokosmos) und metaphysischen Erklärungen eine dualistische (Mikro-, Meso- und Makrokosmos vs. Metakosmos) Position zu Grunde liegt. Daher kann im Zuge einer evolutionären Erklärung niemals eine metaphysische Erklärung verwendet werden, da dies einen Widerspruch bzw. eine Verletzung der monistischen Grundposition bedeuten würde und diese evolutionäre Erklärung zu einer pseudo-evolutionären Erklärung reduziert werden würde. Metaphysische Erklärungen sind stets Erklärungen, die über irgendwie geartete metaphysische Entitäten gehen, und genau dies schließen evolutionäre Erklärungen von vorneherein aus. Wenn man umgekehrt Metaphysik mittels evolutionären Erklärungen erklären möchte, bleibt man bei einer monistischen Position, d.h. man reduziert "Metaphysik" auf "Physik". Somit hätte man in diesem Fall aus metaphysischer Sicht höchstens eine pseudo-metaphysische Erklärung. Wie man es auch immer dreht, metaphysische und evolutionäre Erklärungsansätze kann man nicht miteinander verbinden, ohne dass man entweder den metaphysischen oder den evolutionären Charakter aufgibt. Da man die Existenz eines Metakosmos weder beweisen noch widerlegen kann, hat man es im Prinzip mit zwei gleichrangigen Erklärungsansätzen zu tun, wobei allerdings evolutionäre oder allgemeiner physisch-empirische Erklärungsansätze den entscheidenen Vorteil haben, dass man sie auch tatsächlich verifizieren bzw. auf der Grundlage der Empirie wenigstens plausibel machen kann, wobei ich mir aber durchaus darüber im Klaren bin, dass jeder Empirie letztendlich eine Festlegung der dazugehörigen für relevant gehaltenen Größen bzw. Variablen vorausgeht, deren Zusammenhänge man empirisch untersuchen möchte. Eine solche Festlegung ist dabei im Grunde schon eine normative Entscheidung, die sich nicht immer notwendigerweise auf vorausgegangene empirische Resultate stützen muss bzw. im Falle neuer theoretischer Ansätze auch nicht stützen kann, da diesbezüglich noch gar keine empirischen Befunde vorliegen, so dass man es zumindest in diesen Fällen - erkenntnistheoretisch! - mit einer letztendlich nur metaphysisch begründbaren normativen Festlegung zu tun hat.

Denken auf der Hand: man erhält mit ihr nicht nur eine Theorie, was das mathematische Denken ausmacht (z.B. das Erkennen und das Streben nach den mathematischen Ideen), sondern auch eine moralische Rechtfertigung für dieses mathematische Denken (z.B. ein Streben nach dem Höheren bzw. nach den Guten bzw. nach dem Idealen), welche man wenn überhaupt nur bei metaphysischen Ansätzen, sozusagen gratis, mitgeliefert bekommt. Aus diesem Grund kann man auch hier im Rahmen eines evolutionären Ansatzes nicht damit rechnen, eine Art Rechtfertigung für das mathematische Denken zu erhalten, sondern vielmehr eine Erklärung dafür, warum Menschen mathematisch denken können und welche ihrer kognitiven Fähigkeiten daran beteiligt sind. Evolutionäre Erklärungen liefern weder irgendwie geartete moralische Rechtfertigungen noch irgendwelche Vorhersagen, sondern stets Nachhersagen, was einerseits ihre ganze Stärke ausmacht und anderseits ihre ganze Schwäche offenlegt.
Doch als nächstes ist die Innenperspektive auf das mathematische Denken zu untersuchen. Was beobachten Mathematiker bzw. Mathematikbetreibende, wenn sie sich selbst von Innen heraus beim mathematischen Denken zuschauen und wie beschreiben sie es? Ist der hier entwickelte mathematische Denkprozess überhaupt mit dieser Innenperspektive der Mathematiker kompatibel?

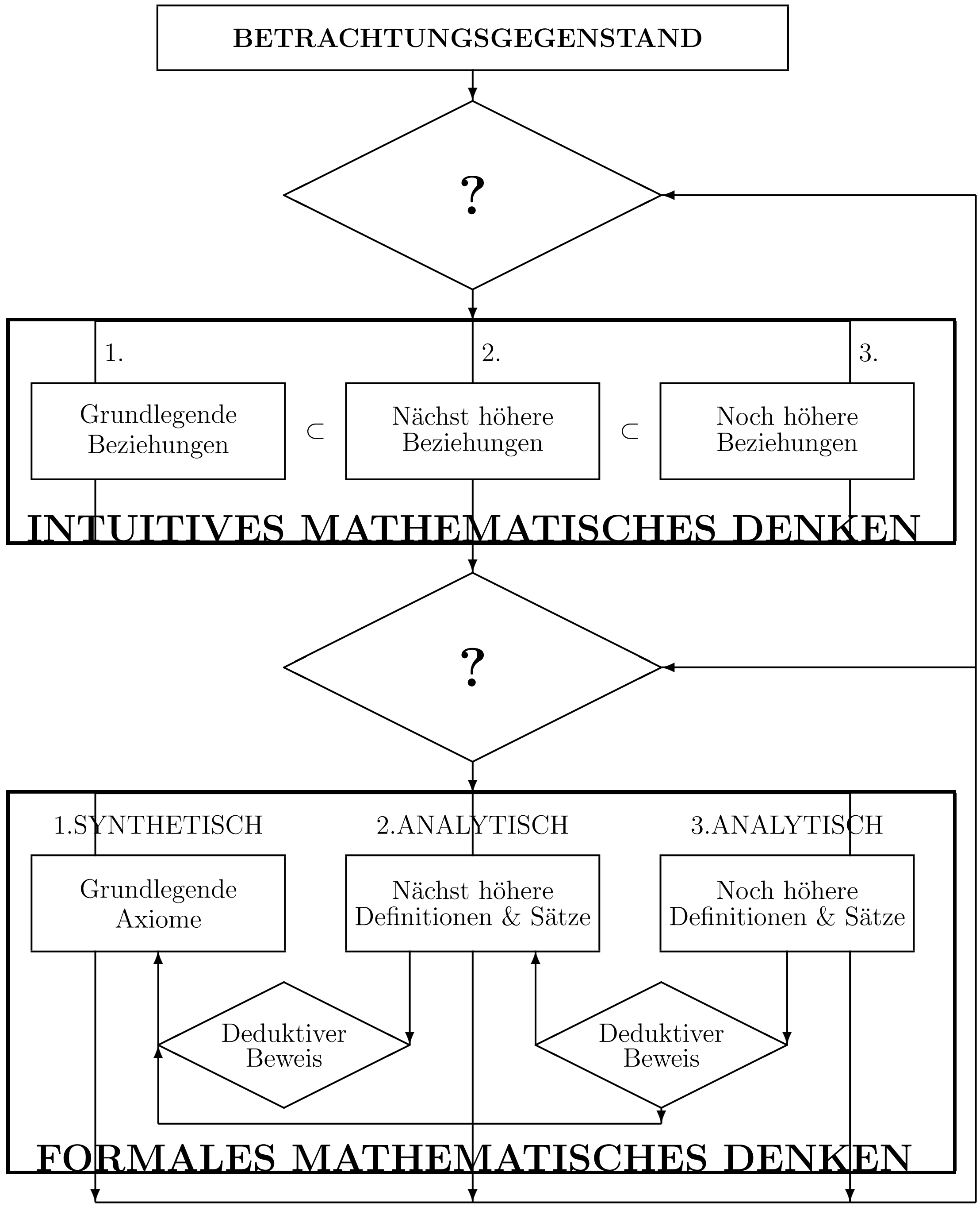


Abbildung 1.1.: Das mathematische Denken besteht aus dem intuitiv- und dem formal-mathematischen Denken, wobei sich das formal-mathematische Denken weiter in das synthetisch- und das analytisch-formal-mathematische Denken aufteilt. Insbesondere spiegelt der Verlauf des Flussdiagramms den mathematischen Denkprozess wieder.

1.1.3 Die Innenperspektive des mathematischen Denkens

Ist diese genaue Trennung des mathematischen Denkprozesses in einen intuitiven und einen formalen Teil denn auch kompatibel mit der Innenperspektive derjenigen, die höhere Mathematik betreiben? Und, wenn ja, wie sieht eine solche Innenperspektive aus? Wie kann man sich auch als Nicht-Mathematiker ein Bild von ihr machen?
Eine erste Antwort auf diese Fragen lieferte Jacques Hadamard in seinem Buch "The Psychology of Invention in the mathematical Field" (Hadamard in [70]), in welchem Hadamard der Frage nachgeht, was im Kopf eines Mathematikers vor sich geht, wenn er mathematisch denkt. Dazu sammelte er unter anderem die Beschreibungen anderer Mathematiker und Mathematikbetreibender (u.a. Henri Poincaré) über ihre Innenperspektive beim mathematischen Denken. Bereits zu Beginn seiner Ausführungen lässt Hadamard keinen Zweifel daran aufkommen, dass nur ein interdisziplinärer Ansatz brauchbare Erklärungen liefern kann, wenn er schreibt (Hadamard in [70][S. 1, Z. 8-15]):

I mean the fact that the subject involves two disciplines, psychology and mathematics, and would require, in order to be treated adequatly, that one be both a psychologist and a mathematician. Owing to the lack of this composite equipment, the subject has been investigated by mathematicians on one side, by psychologist on the other and even, as we shall see, by neurologist.

Ein interdisziplinärer Ansatz, der sich im Rahmen meines evolutionären Ansatzes noch ausweiten wird und letztendlich die Mathematik, die Philosophie, die Soziologie und die modernen Bio-, Neuro- und Kognitionwissenschaften verbindet. Überdies versucht Hadamard die mathematische Intuition zu charakterisieren und zwar ausgehend von seiner eigenen Innenperspektive (Hadamard in [70][S. 8, Z. 2-13]):

One phenomenon is certain and I can vouch for its absolutly certainty: the sudden and immediate appearrance of a solution at the very moment of sudden awakening. On being very abruptly awakened by an external noise, a solution long searched for appeared to me at once without the slightest instant of reflection on my part - the fact was remarkable enough to have struck me unforgottably - and *in a quite different direction from any of those which I had previously tried to follow. Of course, such a phenomenon, which is fully certain in my own case, could be easily confused with a "mathematical dream," from which it differs.*

Er selbst versucht dies, nachdem er sich mit Poincaré und Gauss beschäftigt hat, folgendermaßen genauer zu erklären (Hadarmard in [70][S. 15, Z. 22-27]):

It is unnecessary to observe that what happend to me on my awakening is perfectly similar and typical, as the solution which appeared to me: (1) was without any relation to my attempts of former days, so that it could not have been elaborated by my previous conscious work; (2) appeared without any time for thought, however brief.

Diese inspirativ-intuitiven Momente beim mathematischen Denken sind extrem schwer zu erfassen und zu beschreiben. Die meisten Mathematiker, insbesondere auch die, die Hadamard in [70] zitiert, sind sich allerdings darin einig, dass dabei keine Sprache im Spiel ist. Devlin kommentiert diesen Zusammenhang in [43][S. 154, Z. 9-19] in Anbetracht von Hadamards Ausführungen folgendermaßen:

Darüber hinaus schien in diesen Momenten der Inspiration die gesamte Lösung plötzlich klar vor Augen zu stehen, so als hätte jemand ein Puzzle in Einzelteilen auf den Boden geworfen, und diese Teile hätten sich wie durch ein Wunder zu dem vollständigen Puzzle zusammengefügt. Die Mathematiker "sahen" die Lösung und wußten intuitiv, daß es die richtige war. Bei solchen Vorgängen ist keine Sprache im Spiel. Tatsächlich dauert es bei komplizierteren Lösungen oft Wochen oder Monate, bis sie Schritt für Schritt in einer logischen Argumentation dargestellt werden können, die die offizielle Lösung des Problems (den "Beweis") darstellt.

An dieser Stelle wird nun die Trennung des mathematischen Denkprozesses in einen eher inspirativ-intuitiven und einen eher sprachlich-formalen Teil aus der Innenperspektive heraus offensichtlich. Doch wie denkt dann ein Mathematiker, wenn er mathematisch denkt und ein wichtiger Teil dieses Denkens ohne Sprache auskommt? Wie kann man sich das vorstellen? Auch Devlin stellt sich im Weiteren diese Frage und erläutert seine Innenperspektive auf das mathematische Denken (Devlin in [43][S. 154, Z. 30 - S. 155, Z. 31]):

Wenn ich mich mit einem neuen Mathematikfeld oder einer neuen Aufgabe aus-

einandersetzen will, schaue ich zuerst einmal danach, welche mathematischen Konzepte damit befaßt sind. Das ist ähnlich wie wenn ich genaue Anweisungen (einschließlich Bauplänen und Modellzeichnungen) zum Bau und zur Innenausstattung eines neuen Hauses erhalten hätte. Wenn ich mir diese Pläne ansehe, kann ich mir zunächst das nötige Material, Werkzeug und die Einrichtung beschaffen und dann Schritt für Schritt an den Bau herangehen. Wenn ich damit fertig bin, ziehe ich ein. Obwohl mir zunächst alles ein wenig fremd vorkommen wird, werde ich mich nach einigen Tagen so gut auskennen, daß ich mich sogar im Dunkeln zurechtfinde. ... Ähnlich verhält es sich mit einem neuen mathematischen Problem. Zuerst kümmere ich mich darum, "ein Haus zu bauen" - ein "Haus" aus mathematischen Objekten, die durch abstrakte logische und strukturelle Beziehungen miteinander verbunden werden. Mathematik verstehen ist etwas ähnliches wie ein Haus zu bauen und sich dann darin auszukennen.

Das Entscheidende ist also, sich im jeweiligen mathematischen Beziehungsgeflecht auszukennen und zurechtfinden zu können. Dies deckt sich auch mit meiner eigenen Innenperspektive auf das mathematische Denken, welche sich im Grunde mit der folgenden "Beziehungsnetzwerk-Metapher" beschreiben lässt:

Es fühlt sich im Prinzip so an, als wenn man in eine neue Stadt zieht, eine neue Arbeitsstelle hat und damit dann auch mit einem neuen Beziehungsumfeld konfrontiert wird. Am Anfang erfährt man die Namen von ein paar Arbeitskollegen und Bekannten und man hat schon langsam eine Ahnung, wer mit wem, was, warum zu schaffen hat. Im weiteren Verlauf erfährt man dann immer mehr über die Beziehungen, die die einzelnen Arbeitskollegen und Bekannten untereinander unterhalten und kann diese auch beschreiben (w.z.B.: Verwandtschaftsbeziehungen, Freundschaften, Konkurrenzverhältnisse, etc.) und findet seine Intuition teilweise bestätigt und manchmal widerlegt. Schließlich eröffnet sich einem aber so die gesamte Beziehungsstruktur und man weiß, wer mit wem, was, warum und wann gemacht bzw. zu schaffen hat und hatte, und zum anderen ist man in der Lage, seine soziale Intuition auf der Basis seines Wissens über das soziale Beziehungsmuster zu beschreiben, was letztendlich auch dazu führt, dass man mögliche hypothetische Beziehungen (w.z.B. mögliche Allianzen von Arbeitskollegen, etc.)

erfassen und beschreiben kann.

Das Entscheidende, nicht nur bei meiner eigenen Innenperspektive und der von Devlin, ist die Tatsache, dass im Grunde alle Mathematiker und Mathematikbetreibende einer Trennung des mathematischen Denkprozesses in einen eher inspirativ-intuitiven und einen eher sprachlich-formalen Teil aus ihrer Innenperspektive heraus prinzipiell zustimmen könnten. Wo man genau die Trennlinie zieht, das lässt sich aus den vielen subjektiven Berichten heraus nicht ermitteln. Das Entscheidende für die Theoriebildung dieser Untersuchung ist aber, dass sich die Innenperspektive der Mathematiker auf ihr mathematisches Denken mit dem bereits vorgestellten und entwickelten mathematischen Denkprozess, welcher aus der Grundposition heraus, dass die Mathematik die Wissenschaft der Muster ist, abgeleitet wurde, in Einklang steht, wobei allerdings zu beachten ist, dass bei diesem mathematischen Denkprozess die Trennlinie zwischen intuitiv- und formal-mathematischen Denken scharf gezogen worden ist, damit man im weiteren Verlauf der Untersuchung auf einer gefestigten begrifflichen und strukturellen Grundlage operieren kann.

Wenn ein Mathematiker sich also einem neuen mathematischen Betrachtungsgegenstand zuwendet, dann macht er sich im Idealfall zunächst einmal mit den unmittelbar erfassbaren Beziehungen und Sachverhalten, welche von den Axiomen formalisiert werden, vertraut. D.h. er schaut, ob er diese grundlegenden Beziehungen und deren Formalisierung nachvollziehen kann. Wenn dies gelungen ist, wendet er sich dem theoretischen Überbau zu und erkundet mehr oder weniger Schritt für Schritt jede Theorieebene, wobei er stets aber zu beachten hat, dass höhere mathematische Sätze und Definitionen nicht nur deduktiv mit der nächst unteren Theorieebene verbunden sein können, sondern prinzipell mit allen darunter befindlichen Sätzen, Definitionen und natürlich Axiomen.[11] Man denkt sich also in ein Beziehungs- und Bezeichnungsnetzwerk ein, in welchem theoretisch alle Punkte (Sätze, Definitionen und Axiome) eine direkte oder indirekte (deduktive) Beziehung miteinander besitzen können. Eine Besonderheit stellen

[11]Der Normalfall der Mathematikstudenten besteht allerdings in der Regel darin, dass sie mitten in eine mathematische Theorie hineingeworfen werden und sie dann von dieser jeweiligen Position aus die dazugehörigen Beziehungen nachzuvollziehen versuchen, indem sie sich langsam in alle möglichen Richtungen vorarbeiten.

lediglich die Axiome dar, da diese die "unverrückbare" Grundlage bilden, auf der das ganze Beziehungs- und Bezeichnungsnetzwerk fußt.[12] Die Axiome stellen somit sozusagen eine Art Eingangstor zum Beziehungs- und Bezeichnungsnetzwerk einer mathematischen Theorie dar, welches sich aber erst im Laufe der Zeit festigt, wenn die daran beteiligten Mathematiker sicher sind, dass die Beziehungsgrundlage innerhalb des jeweiligen Betrachtungsgegenstandes soweit sicher intuitiv erfasst ist, dass man im Weiteren davon ausgehen kann, mit dieser axiomatischen Grundlage auch weiterarbeiten zu können. Aber ein Primat auf den mathematischen Denkprozess hat diese Axiomatik nicht, sie ist ein Teil der Formalisierung des intuitiv-mathematischen Denkens, in welchem die eigentlichen mathematischen Beziehungen erfasst werden. Dieser Sachverhalt ist auch Heintz in [73] bei ihrem Gesprächen mit Mathematikern[13] aufgefallen und sie resümiert dies wiefolgt (Heintz in [73][S. 138, Z. 15-24]):

Auf der einen Seite gibt es die "Probleme", für deren Lösung es mathematische Intuition und Kreativität braucht. Das ist die "wirkliche" Mathematik. Auf der anderen Seite steht die Systematisierung des bereits geschaffenen, die Disziplin und auch eine gewisse "Pedanterie" erfordert. Das ist die Aufgabe der Axiomier-

[12] Natürlich kann man auch die axiomatische Grundlage verändern bzw. auf einer niedrigeren oder höheren Theorieebene neu verankern. Dies ist in der Mathematik eine gängige Praxis, um etwaige Widersprüchlichkeiten zu beheben, um einem erweiterten Betrachtungsgegestand gerecht zu werden oder auch nur um die jeweilige Theorie in ihren Anfängen zu vereinfachen, wenn sich zum Beispiel im späteren Verlauf dieser Theoriebildung herausstellt, dass man das Ganze auch hätte "einfacher" haben können. Ein gutes Beispiel ist auch hier die Analysis, die sich direkt auf den Axiomen der natürlichen Zahlen oder zum Beispiel auch auf einer höheren Theorieebene, den Axiome (Körperaxiome) der reellen Zahlen, entwickeln lässt.

[13] Bei diesen Gesprächen ist Heintz (Heintz in [73][S. 153]) auch insbesondere aufgefallen, dass viele Mathematiker ihren Umgang mit mathematischen Objekten als eine Art "soziale Interaktion" sehen (vgl. auch Kap 1.1.5), und erklärt dies mit Hilfe des Begriffs der "Objektzentrierten Sozialität", welcher von Karin Knorr Cetina in [95] für quasi-soziale Beziehungen mit (Wissens-)Objekten geprägt worden ist, wobei ihr auch aufgefallen ist, dass diese Interaktion mit mathematischen Objekten anderen Regeln folgt als die soziale Interaktion. Diese Regeln für die Bildung und den Umgang mit mathematischen Objekten sind im Grunde im mathematischen Denkprozess, wie ich ihn hier vorgestellt habe, durch den Anspruch auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit enthalten. Und ich stimme mit Heintz darin überein, dass es sich dabei um mathematische Konventionen bzw. Normen handelt, was in der weiteren Theoriebildung noch genauer erklärt werden wird (vgl. Kap. 3.1.2).

ung. Beide Tätigkeitsfelder sind Teil der Mathematik, sie haben jedoch in den Augen der meisten Mathematiker nicht die gleiche Bedeutung. Axiomierung wird oft als eine Pflichtaufgabe betrachtet, die am Ende der wirklichen Arbeit steht und der mathematischen Kreativität unter Umständen sogar gefährlich werden kann.

Doch ergibt sich diese Trennung des mathematischen Denkprozesses nur aus der Innenperspektive und aus der Auffassung heraus, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht? Oder ergeben sich auch Indizien dafür aus der Außenperspekive auf das mathematische Denken, wenn man zum Beispiel einen Patienten mit einer Akalkulie untersucht?

1.1.4 Eine Außenperspektive auf das mathematische Denken

Solche Indizien liefert mittlerweile die kognitive Neuropsychologie, welche sich unter anderem auch mit Akalkulien und Dyskalkulien befasst. Zum Beispiel wurde festgestellt, dass Patienten mit Dyskalkulie bzw. Akalkulie, welche Teile ihres arithmetischen Faktenwissens und Teile ihrer numerischen Intuition aufgrund von bestimmten Hirnläsionen verloren haben, diesen Verlust mit Hilfe ihres formal algebraischen Wissens kompensieren können (Hittmair-Delazer et al. in [82] und [83]). In [83] untersuchten Hittmair-Delazer et al. in diesem Zusammenhang den Patienten DA, welcher durch eine zerebrale Läsion nicht mehr in der Lage war, einfache Rechenaufgaben, w.z.B. $5+4, 2+7, 3 \cdot 4, 4 \cdot 4$, durch Zugriff auf sein arithmetisches Fakenwissen oder mittels numerischer Intuition, welche beide durch die Läsion stark beeinträchtigt waren, zu lösen. Allerdings gelang es diesem Patienten die gestellten formal-abstrakten Aufgaben mit Hilfe seines sehr guten formal algebraischen Wissens zu lösen, indem er die Kommutativität, die Assoziativizät und die Distributivität der Rechenoperationen "$+$" und "$\cdot$" gekonnt zum Einsatz brachte (Hittmair-Delazer et al. in [83][Table III: Examples of Abstract Problems]). In [82] - einer vorausgegangenen Fallstudie - erhielten Hittmair-Delazer et al. ähnliche Resultate. Der Patient BE, der nach einer zerebralen Embolie unter einer Aphasie und einer Akalkulie litt, konnte ebenfalls nicht mehr in allen Fällen auf sein arithmetisches Faktenwissen oder auf die entsprechende numerische Intuition zurückgreifen und benutzte stattdessen Lösungsstrategien, welche auf den drei genannten Gesetzen der Rechenoperationen "+" und "·", sowie dem noch zur Verfügung stehenden arithmetischen Faktenwissen beruhten. Zum Beispiel berechnete er $4 \cdot 9$ durch $9 \cdot 2 + 9 \cdot 2$ und $5 \cdot 8$ durch $(8 \cdot 10) : 2$. Diese Resultate führten Hittmair-Delazer et al. in beide Fällen zu dem Schluss, dass es eine klare Trennung zwischen einerseits dem arithmetischen Faktenwissen (z.B.: $5 + 3 = 8$) und andererseits dem formal algebraischen Wissen (z.B. das Assoziativgesetz der Addition reeller Zahlen: $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$) geben muss. Überdies lieferte die Fallstudie des Patienten DA auch Hinweise darauf, dass es eine dritte unabhängige Komponente in diesem Zusammenhang gibt, nämlich eine arithmetisch-numerische, welche aus der konkreten Anwendung der Gesetze der Rechenoperationen besteht (z.B. die Verifizierung der abstrakt-formalen Gleichung $(a+b)+(a+b)+(a+b) = 3 \cdot (a+b)$ durch Einsetzen von Zahlenbeispielen, wie $a = 3$ und $b = 4$, und nicht durch Anwendung des formal algebraischen Wissens, wie dem Distributivgesetz). Im Gegensatz zum Patienten BE, welcher die gestellten Aufgaben durch Anwendung der Gesetze auf bestimmte Zahlen löste, verwendete der Patient DA zur Verifizierung der formal-abstrakten Aufgaben nie konkrete Zahlenbeispiele, sondern zog sich auf die abstrakten Gesetze selbst zurück, was in der Kontrollgruppe dieser Untersuchung nicht der Fall war. Daher kommen Hittmair-Delazer et al. in [83][Discussion] auch zu dem Schuss:

According to this view, two logical levels, one formal-algebraic and one arithmetical-numerical, may function in parallel and independently from each other.

Dieses Sich-Zurückziehen-Können auf einerseits eine konkrete und andererseits eine abstrakte Anwendung von Gesetzen der Rechenoperationen "+" und "·", welche Teil der Körperaxiome[14] sind, bestätigt zunächst einmal eine Trennung zwischen elementarer Zahlenverarbeitung (Umgang mit Zahlen, insb. elementares Rechnen) und dem "höheren" mathematischen Denken (insb. formalisierte arithmetische Beziehungsmuster). Aber finden sich darin auch Hinweise auf die weiterführende Trennung in einen intuitiven und einen formalen Bereich des mathematischen Denkens? Im Falle der Arithmetik ja, denn beide Fallstudien zeigen, dass verlorengegangenes mathematisch-numerisches Faktenwissen und be-

[14]Eine vollständige Erklärung und Darstellung der Körperaxiome bietet u.a. Forster in [60][§2] und Heuser in [75][Kap. I.3].

einträchtigte mathematisch-numerische Intuition im Falle von elementaren Rechenoperationen durch die Anwendung von formal-abstrakten Gesetzen der entsprechenden Rechenoperationen kompensiert werden können. D.h.: Mittels der formalisierten Beziehungsmuster (Arithmetische Sätze und Definitionen) ist man in der Lage, die diesen zu Grunde liegenden arithmetischen Beziehungsmuster neu zu erfassen, d.h. die Intuition für diese in einem gewissen Sinne zurück zu gewinnen, oder genauer, zu rekonstruieren, indem man sie unter anderem im konkreten Einzelfall, sei es nun zur Verifikation einer "Rechengleichung" (z.B.: $8 \cdot (2 \cdot 4 + 3 \cdot 5) = 184$) oder sei es zur Berechnung eines vorgegebenen Problems (z.B.: $5 \cdot 7 = 5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$) zur Anwendung bringt.[15]
Somit kann man die Hypothese aufstellen, dass letztendlich auch das intuitiv- und das formal-mathematische Denken in verschiedenen neuronalen Schaltkreisen verankert sind, welchen dann auch möglicherweise verschiedene kognitive Fähigkeiten zu Grunde liegen.
Lässt sich denn nun schon auf dieser bisherigen Basis eine vorläufige Hypothese über den evolutionären Ursprung bzw. die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens aufstellen?

1.1.5 Eine vorläufige Arbeitshypothese über den evolutionären Ursprung des mathematischen Denkens

Die im Unterabschnitt 1.1.3 vorgestellte Beziehungsnetzwerk-Metapher für die Innenperspektive des mathematischen Denkens motiviert nicht nur die getroffene Trennung zwischen intuitiv- und formal-mathematischen Denken, sondern eröffnet auch einen Hinweis auf einen möglichen evolutionären Ursprung des mathematische Denkens, nämlich vor allem die Verwandtschaft des intuitiv-mathematischen Denkens mit dem Beziehungsdenken innerhalb von sozialen Netzwerken, in denen im Prinzip auch jedes Subjekt mit jedem anderen direkt und/oder indirekt in Beziehung stehen kann; ganz zu schweigen von der Masse der zu verarbeitenden Informationen, die beim sozialen Beziehungsdenken wie auch beim

[15] Auf den konkreten Zusammenhang zwischen (arithmetischer) Zahlenverarbeitung und intuitiv- und formal-mathematischen Denken werde ich im weiteren Verlauf meiner Ausführungen noch einmal zu sprechen kommen (vgl. Kap. 3.1.2).

mathematischen Denken anfallen, nämlich wer mit wem, wann, wieso und warum. Dieser Zusammenhang zwischen mathematischem Denken und sozialem Denken bzw. Mathematik von Innen heraus als soziales Phänomen zu sehen, ist nicht neu und er ist bereits nicht nur Mathematikern (Bourbaki in [8], Devlin in [43]), sondern auch Soziologen (Heintz in [73]) aufgefallen.
Bourbaki zieht diesen Vergleich zwischen dem (intuitiv-)mathematischen Denken und dem sozialen Denken in [8][S. 151, Z. 21-29] wiefolgt:

Wir müssen vielmehr wieder die fundamentale Rolle hervorheben, die im Forschen des Mathematikers jene eigentümliche, von gewöhnlichen Sinnesanschauungen ganz verschiedene Art von Intuition spielt, die aller eigentlichen Verstandestätigkeit vorausgeht und die in dem richtigen Erspüren des normalen Verhaltens besteht, das er von seinen mathematischen Wesen glaubt erwarten zu dürfen. Wesen, mit denen er durch lange Bekanntschaft so vertraut geworden ist wie mit den Wesen der wirklichen Welt.

Auch Devlin bringt diesen Zusammenhang in [43][S. 304. Z. 34 - S. 305, Z. 5] treffsicher auf den Punkt:

Die "Rollen" der mathematischen Seifenoper übernehmen also nicht Menschen aus Fleich und Blut, sondern mathematische Objekte - Zahlen, geometrische Figuren, Gruppen, topologische Räume usw. Die Fakten und Zusammenhänge, denen alle Aufmerksamkeit gilt, sind hier keine Geburten und Todesfälle, keine Hochzeiten, Liebesaffären und Geschäftsbeziehungen, sondern mathematische Sachverhalte und Beziehungen zwischen mathematischen Objekten: ...

Aber auch die Wissenschaftssoziologie ist bereits auf diesem Zusammenhang aufmerksam geworden. Heintz beschreibt ihn aus der soziologischen Außenperspektive in [73][S. 153, Z. 16-25] folgendermaßen (vgl. dazu auch Fußnote 13):

Wie die Haltung der Mathematiker ihren Objekten gegenüber zeigt, scheinen sich jedoch geistige Objekte für eine solche objektzentrierte Sozialität besonders zu eignen. Das für die Mathematik typische Sich-Verlieren in geistigen Welten ist auch vor diesem Hintergrund zu sehen. Der Umgang, die "Interaktion" mit diesen Objekten, ist jedoch nicht beliebig, sondern folgt Regeln - Normen gewissermaßen -, die durch die mathematischen Konventionen festgelegt und in den Definitionen *der Objekte implizit enthalten sind. Wie ich in Abschnitt 2.3.3 ausgeführt habe, besteht ein wesentlicher Teil der mathematischen Forschung darin, diese verborgenen Implikationen zu entdecken.*

Es scheint so, als spiele diese spezielle soziale Intelligenz des Menschen, welche es ihm ermöglicht, sich zum einen in seinem sozialen Umfeld zurechtzufinden und zum anderen auf dieser Basis zu verhalten, beim intuitiv-mathematischen Denken eine zentrale Rolle. Dabei stellt sich natürlich zuerst einmal die Frage, was diese soziale Intelligenz des Menschen überhaupt charakterisiert. Wozu auch die Frage gehört, ob diese soziale Intelligenz mehr als kognitive Fähigkeit oder mehr als prinzipielles Potential des menschlichen Gehirns zu verstehen ist. Auch die Frage, ob diese soziale Intelligenz ein spezifisch menschliches Phänomen ist, stellt sich, denn irgendwo muss auch diese evolutionär verankert sein. Also wird insbesondere die Frage nach dem evolutionären Ursprung bzw. den evolutionären Ursprüngen dieser sozialen Intelligenz aufgeworfen, und deren Phylogenese gilt es im Weiteren besondere Beachtung zukommen zu lassen (vgl. Kap. 2).
Insgesamt kann man somit folgende vorläufige Arbeitshypothese über den evolutionären Ursprung bzw. die evolutionären Urspünge des mathematischen Denken formulieren:

Der evolutionäre Ursprung bzw. die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens befinden sich im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz.

Es bleiben also im weiteren Verlauf dieser Theoriebildung noch einige offene Fragen zu klären, vor allem, wie man Intelligenz, insbesondere soziale Intelligenz, charakterisieren kann (vgl. Kap. 2.1), wie das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenz aussieht (vgl. Kap. 2.2) und was an dieser sozialen Intelligenz bzw. an deren evolutionärem Umfeld dem Menschen das mathematische Denken ermöglicht (vgl. Kap. 3.1).
Bevor ich allerdings in der Lage bin, diese Arbeitshypothese nach Abschluss meiner Theoriebildung zu konkretisieren und genauer zu erklären, kann man diesen vorläufigen Stand meiner Argumentation schon einmal festhalten, indem man gedanklich das Fragezeichen in der oberen Raute des Flussdiagramms in Abbildung 1.1 durch den Ausdruck "Soziale Intelligenz" und das Fragezeichen in der unteren

Raute durch "Sprache und Symbole" ersetzt. Doch zunächst muss man sich noch mit dem zweiten Teil der theoretischen Ausgangsbasis, den evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundbegriffen und Grundlagen beschäftigen, da diese erst eine evolutionäre Zurückverfolgung ermöglichen bzw. den entsprechenden Erklärungsrahmen bereitstellen.

1.2 Evolutionspsychologische und soziobiologische Grundbegriffe und Grundlagen

In diesem Abschnitt soll nun der zweite Teil der theoretischen Ausgangsbasis dieser Arbeit, die evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundbegriffe und Grundlagen, entwickelt und vorgestellt werden. Dazu wird zunächst analysiert, was überhaupt ein evolutionärer Ursprung bzw. evolutionäre Ursprünge einer menschlichen (kognitiven) Fähigkeit sein können und wie man an diese herantreten kann. Dabei werden die entsprechenden Begrifflichkeiten noch einmal definitorisch für die weitere Analyse festgehalten. Im Weiteren werden dann mehrere modulare Sichtweisen auf das menschliche Gehirn im Zusammenhang mit der "Massiven Modularitäts-Hypothese" (MMH) vorgestellt und diskutiert, bevor eine mögliche evolutionspsychologische und soziobiologische Sicht auf das Gehirn entwickelt und festgehalten wird, welche dann die evolutions- und kognitionstheoretische Grundlage für die weitere Theoriebildung darstellt.

1.2.1 Über die Frage nach den evolutionären Ursprüngen

Was ist der evolutionäre Ursprung einer (menschlichen) Fähigkeit bzw. Charakteristik? Wie gelangt man von einer konkreten Fähigkeit bzw. Charakteristik, sei sie kognitiver oder physischer Natur, zu ihrem evolutionären Ursprung bzw. zu ihren evolutionären Ursprüngen? Die Basis für die Beantwortung dieser Fragen lieferte Niko Tinbergen in [157] mit seinen vier Warumfragen der Biologie:

1. Nach dem zu Grunde liegenden physischen Mechanismus?

2. Nach der Ontogenese?

3. Nach dem Anpassungswert bzw. der adaptiven Funktion?

4. Nach der Phylogenese?

Dabei bezeichnet man Antworten auf die Fragen 1 und 2 als proximate Erklärungen und die auf 3 und 4 als ultimate (evolutionäre) Erklärungen. Eine Möglichkeit sich diese beiden Erklärungsebenen einmal zu veranschaulichen bietet sich beim weißen Fell der Eisbären an. Die proximate Erklärung dafür, dass dieses Eisbärenfell weiß ist, lautet - einfach ausgedrückt -, weil es keine Farbpartikel besitzt. Und die ultimate Erklärung dafür lautet, weil der Eisbär mit einem weißen Fell im Eis besser getarnt ist und unter anderem dann einen besseren Jagderfolg hat.[16] Im Folgenden stehen ausschließlich die ultimaten bzw. evolutionären Erklärungen[17] im Mittelpunkt, bei welchen man unter anderem die evolutionären Ursprünge offenlegen und charakterisieren muss. Doch wie kann man nun gesichert an diese evolutionäre Erklärungsebene herantreten? Welcher Ansatz ermöglich gezielt evolutionäre Erklärungen, insbesondere auch im Hinblick auf die höheren kognitiven Fähigkeiten des Menschen? Hier gibt es nun mehrere theoretische Ansätze (Fodor in [59], Cosmides & Tooby in [30], Sperber in [145]), welche für die angestrebte Untersuchung in Frage kommen und welche sich unter dem Stichwort "Modulare Sicht auf das Gehirn" zusammenfassen lassen. Da dieser Untersuchung eine abgeschwächte Form des streng modularen Ansatzes von Leda Cosmides & John Tooby (Cosmides & Tooby in [30]) zu Grunde gelegt werden soll, welcher unter dem Sichwort "Massive Modularitäts-Hypothese" bekannt ist, soll dieser auch nun als erster vorgestellt und im weiteren Verlauf (vgl. Kap. 1.2.3) im Hinblick auf die anderen modularen Ansätze kritisch diskutiert werden.

Dieser evolutionspsychologische Ansatz verortet die evolutionären Ursprünge menschlicher Fähigkeiten und Charakteristika im Rahmen der Umwelt der evolutionären Anpassung (<u>E</u>nviroment of <u>E</u>volutionary <u>A</u>daptedness (EEA)), unter welcher sich Cosmides & Tooby eine Jäger- und Sammlergesellschaft in der afri-

[16] Dies ist nur eines von vielen bekannten Beispielen, welche zur Veranschaulichung der ultimaten und der proximaten Erklärungesebene herangezogen werden können. Eckart Voland erklärt diese unterschiedlichen Erklärungenebenen in [165][S. 12f] zum Beispiel anhand des Quakens männlicher Frösche im Frühjahr, und Luise Barrett, Robin Dunbar und John Lycett verwenden in [3][S. 5f] in diesem Zusammenhang die vier möglichen Antworten auf die Frage, warum Mütter ihr Kind stillen.

[17] Da diese beiden Begriffe in der Regel synonym verwendet werden, wird im Folgenden nur noch der Begriff "evolutionär" verwendet.

kanischen Savanne[18] vorstellen, in welcher die Anpassungen an die Anpassungsprobleme mittels natürlicher Selektion evolviert sind. Dabei betonen Cosmides & Tooby in [30], dass dieses EEA nicht an einen bestimmten Ort oder Zeitpunkt gebunden ist:

Although the hominid line is thought to have evolved on the African savannahs, the enviroment of evolutionary adaptedness, or EEA, is not a place or time. It is the statistical composite of selection pressures that caused the design of an adaptation. Thus the EEA for one adaptation may be different from that for another.

Eine Anpassungsproblem ist in diesem Modellkontext ein soziales und/oder ökologisches Problem, dass in dieser Umwelt der evolutionären Anpassung regelmäßig auftrat und dessen Lösung den individuellen Fortpflanzungserfolg direkt und/oder indirekt beeinflusste. Cosmides & Tooby formulieren diese zwei definierende Charakteristika von Anpassungsproblemen in [30] wiefolgt:

First, they are ones that cropped up again and again during the evolutionary history of a species. Second, they are problems whose solution affected the reproduction of individual organisms – however indirekt the causal chain may be, and however small the effect on number of offspring produced. This is because differential reproduction (and not survival per se) is the engine that drives natural selection.

Da dieser unterschiedliche Reproduktionserfolg der einzelnen Individuen sich insbesondere auf genetische Unterschiede zurückführen lässt (Voland in [165][S. 2, Z. 20-21]):

..., kommt es zu Verschiebungen von Genfrequenzen, und evolutiver Wandel findet statt.

Eine solche Genfrequenzverschiebung auf Grund von natürlicher Selektion im Verlauf der Stammesgeschichte wird Anpassung (Adaptation) genannt. Sie ist eine funktions- und bereichsspezifische Lösung des dazugehörigen Anpassungs-

[18] Jäger- und Sammlergesellschaft in der afrikanischen Savanne deshalb, weil man heute davon ausgeht, dass die Menschen den größten und evolutionär gesehen prägendsten Teil ihrer Entwicklungsgeschichte, der Hominisation, in dieser Lebensform im Afrika der Savannen zugebracht haben.

problems; funktionsspezifisch deshalb, weil zu jedem Anpassungsproblem genau eine Anpassung gehört und umgekehrt, und bereichsspezifisch deshalb, weil jedem Anpassungsproblem ein bestimmter sozialer und/oder ökologischer Kontext, sein Bereich, in welchem es zu lösen ist, zu Grunde liegt. Doch nicht alle biologischen Merkmale sind Anpassungen (Voland in [165][S. 19, Z. 42 - S. 20, Z. 3]):

Häufig sind biologische Merkmale lediglich funktionslose, mitgeschleppte Nebeneffekte (by-products) eigentlicher Angepasstheiten. Sie lösen kein adaptives Problem, sie tragen weder zum Überleben noch zur Reproduktion ihrer Träger bei.

Ein Nebenprodukt ist in diesem Kontext also ein mehr oder weniger zufälliger Nebeneffekt einer oder mehrerer Anpassungen und unter "noise" versteht man durch zufällige Einflüsse (w.z.B. Mutationen, Umweltveränderungen, Entwicklungsbedingungen, etc.) im Laufe der Evolution entstandene Charakteristika (Cosmides & Tooby in [30]). Cosmides & Tooby partitionieren daher auch den Phänotyp eines Organismus, welcher aus dem dazugehörigen Genotyp im Zuge der Ontogenese hervorgeht, in [30] folgendermaßen:

An organism's phenotype can be partitioned into adaptations, which are present because they were selected for, by-products, which are present because they are causally coupled to traits that were selected for (e.g., the whiteness of bone), and noise, which was injected by the stochastic components of evolution.

Eine noch genauere Charakterisierung dieser drei Begriffe lieferte David Buss in [17][S. 37, Table 2.1]:

Anpassungen sind demnach

Inherited and reliably developing characteristics that came into existence throught natural selection because they helped to solve problems of survival or reproduction during the period of their evolution; example: umbilical cord.

Nebenprodukte sind demnach

Characteristics that do not solve adaptive problems and do not have functional design; they are "carried along" with characteristics that do have functional design *because they happen to be coupled with those adaptations; example: belly button.*

Und unter "noise" versteht er:

Random effects produced by forces such as chance mutations, sudden and unprecedented changes in the enviroment, or chance effects during development; example: particular shape of a person's belly button.

Da nun aber Anpassungen im EEA evolviert sind, stellt sich natürlich sofort die Frage, wie es sich denn heute - in modernen Umwelten - mit ihnen verhält? Erzeugen sie auch heute noch angepasstes Verhalten? Nicht notwendigerweise, denn zum Beispiel war eine Präferenz für zucker- und fetthaltige Lebensmittel im EEA, in welchem diese selten waren und nicht zur freien Verfügung standen, vorteilhaft, während heute in einer modernen westlichen Überflussgesellschaft eine solche Präferenz nachteilig ist, da diese Lebensmittel praktisch jedem zur freien Verfügung stehen, was sich in einer stets steigenden Zahl von einerseits Diabetesfällen des entsprechenden Typs und andererseits von krankhaften Übergewicht bemerkbar macht. Daher haben sich in diesem evolutionären Modellrahmen ausgehend von Stephen Gould in [69] zwei weitere Begrifflichkeiten, zum einen "exaptation" und zum anderen "spandrel", eingebürgert, welche Buss et al. in [16] in Anbetracht von Goulds Ausführungen wiefolgt charakterisieren:

In sum, Gould (1991) proposed two types of functional exaptations - adaptations that initially arose through natural selection and were subsequently co-opted for another function (co-opted adaptations) and features that did not arise as adaptations through natural selection but rather as side effects of adaptive processes and that have been co-opted for a biological function (co-opted spandrels).[19]

Unter einer "exaptation" versteht man dabei also eine Anpassung, die heute ein

[19] Gould verwendt in [69] den Begriff "exaptation" zunächst einmal, um Eigenschaften zu charakterisieren, die zwar heute die Fitness erhöhen, aber für diese heutige Rolle nicht evolviert sind. Diesen unterteilt er dann wiefolgt:

Coopted characters may have been built by natural selection for a different function ..., or may have arisen for no adaptive purpose at all. ... In either case, coopted structures will probably undergo some secondary modification ... for the newly seized function.

Im weiten Verlauf seiner Ausführungen verwendet Gould dann für den zweiten Typ von "exaptation" den Begriff "spandrels".

vom ursprünglichen Anpassungsproblem verschiedenes Anpassungsproblem löst, und unter einem "spandrel" versteht man ein Nebenprodukt einer Anpassung, welchem im Laufe der Zeit doch noch eine adaptive Funktion zukam.[20] Barrett, Dunbar & Lycett erklären in diesem Zusammenhang den Begriff "exaptation" in [3][S. 9, Z. 15-18] mit

..., behaviour that confer selective advantages today need not have been selected for that purpose in the past: they may have evolved for another reason entirely, and later become secondarily co-opted into their present role by change in envirомental circumstances - a process known as exaptation.

Doch es ist gegenwärtig immer noch umstritten, wie man in moderen Umwelten diese Begrifflichkeiten in der wissenschaftlichen Praxis auseinander halten kann bzw. Forschungsprogramme entwickeln kann, die eine solche Unterscheidung auch ermöglichen. Paul Andrews, Steven Gangestad und Dan Metthews diskutieren daher in [1]:

... the standard of evidence that could be used to identify adaptations and when and how they may be appropriately used.

Sie argumentieren dabei unter anderem, dass man, wenn man eine bestimmte Eigenschaft als Exaptation oder "spandrel" charakterisieren möchte, dann insbesondere eine Begründung dafür finden muss, dass es keine Anpassung sein kann (Andrews et al. in [1]):

Building an empirical case that certain features of a trait are best explained by exaptation, spandrel, or constraint requires a demonstration that the trait's features cannot be better accounted for by adaptationist hypotheses. Confidence in alternative hypotheses for trait design only increases after consideration of all plausible adaptationist hypotheses and their failure to live up to special design scrutiny.

Eine ähnliche Problematik ergibt sich natürlich auch schon bei der Unterscheidung zwischen Nebenprodukten und Anpassungen. Justin Park diskutiert in [121] zum Beispiel, in welchen Fällen diese Unterscheidung problematisch werden könn-

[20] Buss et al. beschäftigen sich in [16] mit den, zu den vier Begriffen "adaptation, by-product, exaptation, spandrel" gehörenden, Definitionskriterien (insb. [16][Table 2]) und sie betonen die Notwendigkeit einer empirischen Überprüfbarkeit der jeweiligen evolutionären Hypothese.

te. Dabei betont er, dass diese vor allem bei informationsverarbeitenden Algorithmen, also kognitiven Fähigkeiten, schwierig wird, da man streng zwischen dem Algorithmus und dem von ihm in der entsprechenden Umwelt erzeugten Verhalten unterscheiden muss. Denn ein informationsverarbeitender Algorithmus kann je nach Umwelt-"input" unterschiedliches Verhalten erzeugen. Dies führt er am Beispiel des "coalition-alliance detecting mechanism" vor:

Although encoding race may indeed be an incidental effect of an adaptation for tracking coalitional alliances, it is not an evolved feature and is demonstrable not inextricably linked to this adaptation - it is just one possible effect in one possible social millieu. ... In different social contexts, this algorithmic mechanism may detect a range of coalition-connoting cues (some diagnostic, other not) and produce a response (some functional, others not). The functional component of this adaptation is the algorithmic mechanism. Thus, one can claim to have identified a byproduct of this adaptation only when one has identified some evolved feature that is inextricably linked to this algorithmic mechanism. The various effects of this algorithmic adaptation - whether they are adaptive effects or incidental effects - are not properly the focus of the adaptation-versus-byproduct debate, because they logically cannot be either. Therefore, asking whether encoding race is an adaptation or an byproduct is misleading.

Statt sich nun in diesen fruchtlosen "Anpassung vs. Nebenprodukt"-Debatten zu verlieren, schlägt Park die Unterscheidung zwischen adaptivem Effekt (adaptive effects) und nicht-adaptivem Effekt (non-adaptive effects) vor (Park in [121]):

..., I propose a distinction between adaptive effects (e.g., responding to ancestrally existing "proper" cues) and non-adaptive effects (e.g., responding to evolutionarily novel "actual" cues). Then, automatic encoding of race can be characterized as a non-adaptive effect of the coallition-alliance detecting adaptation.

Parks Idee besteht also darin, im Falle von kognitiven Anpassungen zwischen adaptiven und nicht-adaptiven Effekten zu unterscheiden, statt sich durch eine nicht-entscheidbare "Anpassung vs. Nebenprodukt"-Debatte verwirren zu lassen. Daher wird im Zuge dieser Theoriebildung hier auch nicht der Fokus der Untersuchung auf diesen Unterscheidungen (Anpassung vs. Nebenprodukt vs. Exaptation vs. Spandrel) gelegt, sondern auf die evolutionären Zusammenhänge, welche zwischen den zu untersuchenden einzelnen menschlichen Charakteristika und (kogitiven) Fähigkeiten bestehen, wobei insbesondere nach einer jeweils möglichen adaptiven Funktion gesucht werden soll. Dafür benötigt man aber ein entsprechendes evolutionäres Erklärungsmodell, und die Frage ist nun, welche evolutionspsychologische und soziobiologische Sicht auf das menschliche Gehirn Cosmides & Tooby aus diesem evolutionären Kontext heraus entwickeln? In [30] fassen sie ihre streng modulare Sicht - "Massive Modularität-Hypothese" - auf das menschliche Gehirn in fünf Grundprinzipien zusammen, welche die Grundlage ihrer evolutionären Psychologie bilden:

- *Principle 1. The brain is a physical system. It functions as a computer. Its circuits are designed to generate behavior that is appropriate to your enviromental circumstances.*
- *Principle 2. Our neuronal circuits were designed by natural selection to solve problems that our ancestors faced during our species' evolutionary history.*
- *Principle 3. Conciousness is just the tip of the iceberg; most of what goes on in your mind is hidden from you. As a result, your conscious experience can mislead you into thinking that your circuitry is simpler that it really is. Most problems that you experience as easy to solve are very difficult to solve – they require very complicated neural circuitry.*
- *Principle 4. Different neural circuits are specialized for solving different adaptive problems.*
- *Principle 5. Our modern skulls house a stone age mind.*

Somit besteht das menschliche Gehirn aus einem Sammelsurium von Schaltkreisen, welche alle jeweils darauf spezialisiert sind, einen ihnen zugehöriges Anpassungsproblem zu lösen. Doch warum "Massive Modularitäts-Hypothese"? Der Begriff Modul wird in diesen fünf Grundprinzipien doch eigentlich gar nicht erwähnt. Was verstehen Cosmides & Tooby denn im Zusammenhang mit neuronalen Schaltkreisen unter einem Modul? Diesen Zusammenhang bringen sie in [30] wiefolgt auf den Punkt:

You can think of each of these specialized circuits as a mini-computer that is dedi-

cated to solving one problem. Such dedicated mini-computers are sometimes called modules. There is, then, a sense in which you can view the brain as a collection of dedicated mini-computers – a collection of modules. ... So, more precisely, one can view the brain as a collection of dedicated mini-computers whose operations are functionally integrated to produce behavior.

Insgesamt besteht also die streng modulare Sichtweise auf das menschliche Gehirn, welche von Cosmides & Tooby vertreten wird, im Kern in der Hypothese, dass das menschliche Gehirn nur aus Modulen besteht bzw. die Gehirnfunktionen letztendlich modular organisiert sind, welche als kognitive Anpassungen, die entsprechenden Anpassungsprobleme lösen. Doch wie entscheidet das Gehirn, welches Anpassungsproblem als erstes gelöst wird? M.a.W.: Welche Module lösen das Anpassungsproblem der Modulkoordination im Gehirn? Auch auf diese Frage haben Cosmides & Tooby eine plausible Antwort parat. In [31] erklären sie:

Emotions are such programms. To behave functionally according to evolutionary standards, the mind's many subprograms need to be orchestrated so that their joint product at any given time is functionally coordinated, rather than cacophonous and self-defeating. This coordination is accomplished by a set of superordinate programs - the emotions. They are adaptations that have arisen in response to the adaptive problem of mechanism orchestration.

Emotionen sind also Module, welche in ihrer Gesamtheit das adaptive Problem der Modulkoordinierung im Gehirn lösen und somit erst das Handeln bzw. das Verhalten selbst ermöglichen.[21] Mit Hilfe dieser evolutionspsychologischen und soziobiologischen Sichtweise auf das (menschliche) Gehirn ist man nun erst einmal prinzipiell in der Lage die evolutionären Ursprünge (menschlicher) kognitiver Fähigkeiten aufzuspüren, da sie eine Zurückverfolgung im evolutionären Kontext ermöglicht, und zwar einerseits, ausgehend vom Anpassungsproblem (adaptive problem) über die dazugehörige Anpassung (cognitive program) zur entsprechen-

[21]Eine ähnliche Auffassung über Emotionen vertritt auch Randolph Nesse in [117], wobei aber Nesse die fitnessmaximierende Funktion der Emotionen in den Vordergrund stellt, während für Cosmides & Tooby in [31] das Anpassungsproblem der Modulkoordination im Gehirn an erster Stelle steht. Letztendlich führen aber beide Herangehensweisen zu einer ähnlichen Sicht auf die Emotionen, bei welcher die entscheidende Rolle der Emotionen beim Handeln bzw. Verhalten betont wird.

den neurophysiologischen Grundlage im Gehirn (neurophysiological basis), und andererseits, ausgehend von der neurophysiologischen Grundlage über die dazugehörige Anpassung zum entsprechenden Anpassungsproblem. Cosmides & Tooby erklären in [30] im Zusammenhang mit diesen drei Erklärungsebenen der evolutionären Psychologie, dass:

Theories of adaptive problems can guide the search for the cognitive programs that solve them; knowing what cognitive program exist can, in turn, guide the search for their neural basis.

Im Weiteren interessiert vor allem die Verbindung zwischen den einzelnen Modulen (cognitive programs) und den dazugehörigen Anpassungsproblemen. Denn dieser evolutionäre Zusammenhang eröffnet einem die Möglichkeit, eine bestimmte kognitive Fähigkeit des Menschen, w.z.B. die mathematische Denkfähigkeit, zu ihren evolutionären Wurzeln zurückverfolgen zu können, indem man nach einem dazugehörigen evolutionären Pfad sucht. Da aber dieser streng modulare Ansatz - "Massive Modularitäts-Hypothese" - von Cosmides & Tooby mit einigen Schwierigkeiten behaftet ist, sollen diese in Unterabschnitt 1.2.3 diskutiert werden und in diesem Zusammenhang weitere modulare Ansätze bzw. Ausweitungen bestehender Ansätze vorgestellt und kritisch in Augenschein genommen werden. Doch zunächst werden die in diesem Unterabschnitt vorgestellten Begrifflichkeiten und evolutionären Zusammenhänge definitorisch festgehalten, damit man im Folgenden ohne weitere Erklärungen auf sie zurückgreifen kann.

1.2.2 Grundlegende evolutionspsychologische und soziobiologische Definitionen

Die nun folgenden Definitionen beinhalten die vorgestellten grundlegenden Begrifflichkeiten der Evolutionspsychologie und der Soziobiologie, welche als Grundlage für die weitere Theoriebildung an dieser Stelle hier festgehalten werden. Sie befinden sich in ähnlicher und größterteils noch genauerer Darstellung in den entsprechenden Standardwerken, Handbüchern und Grundlagenarbeiten (Barkow in [2], Buss et al. in [16], Buss in [17], [18], Cosmides & Tooby in [30], [31], Dunbar & Barrett in [49], Tooby & Cosmides in [158], [159], [160], Voland in [165]):

Definition 1.6 (Umwelt der evolutionären Anpassung)

*Unter der **Umwelt der evolutionären Anpassung** (Enviroment of Evolutionary Adaptedness (EEA)) stellt man sich eine Jäger- und Sammler-Gesellschaft in der afrikanischen Savanne vor, in welcher die Anpassungen an die Anpassungsprobleme im Zuge der natürlichen Selektion evolviert sind. Diese EEA ist dabei aber im Grunde nicht an einen speziellen Ort und/oder Zeit gebunden, sondern als "statistisches Mittel" der historischen Selektionsdrücke zu verstehen.*

Definition 1.7 (Anpassungsproblem)

*Ein **Anpassungsproblem** (auch adaptives Problem genannt) wird durch die folgenden zwei Eigenschaften charakterisiert:*
1. Es wiederholt sich im Laufe der Hominisation, d.h. der evolutionären Geschichte des Menschen, immer wieder.
2. Von der Lösung dieses Problems hängt direkt und/oder indirekt der Fortpflanzungserfolg des einzelnen Individuums ab.

Definition 1.8 (Anpassung)

*Eine **Anpassung** (Adaptation) ist die funktions- und bereichsspezifische Lösung eines Anpassungsproblems, d.h. biologisch genauer, eine Verschiebung von Genfrequenzen auf Grund von natürlicher Selektion, welche als Ergebnis die biologische Angepasstheit der betreffenden Merkmale an die Selektionsbedingungen hat. Insbesondere ist dabei zu beachten, dass verschiedenen Anpassungen auch verschiedene Anpassungsprobleme zu Grunde liegen müssen und umgekehrt.*

Definition 1.9 (Modul)

*Ein **Modul** ist eine kognitive Anpassung. Genauer ein spezialisierter neuronaler Schaltkreis - ein Mini-Computer - der ein ganz bestimmtes dazugehöriges kognitives Anpassungsproblem löst.*

Definition 1.10 (Exaptation)

*Eine **Exaptation** ist eine Angepasstheit, welche heute ein vom ursprünglichen Anpassungsproblem verschiedenes Anpassungsproblem löst.*

Definition 1.11 (Nebenprodukt)

*Ein **Nebenprodukt** ist ein mehr oder weniger zufälliger Nebeneffekt einer oder mehrerer Anpassungen.*

Definition 1.12 (spandrel)

*Kommt einem Nebenprodukt dann im Laufe der Zeit doch noch eine Funktion zu, dann nennt man es "**spandrel** ".*

Definition 1.13 (noise)

*Unter "**noise** " versteht man durch zufällige Einflüsse (w.z.B. Mutationen, Umweltveränderungen, Entwicklungsbedingungen, etc.) im Laufe der Evolution entstandene Charakteristika.*

Zum besseren Verständnis der evolutionären Zusammenhänge dieser Begrifflichkeiten diene das in Abbildung 1.2 veranschaulichte Flussdiagramm.

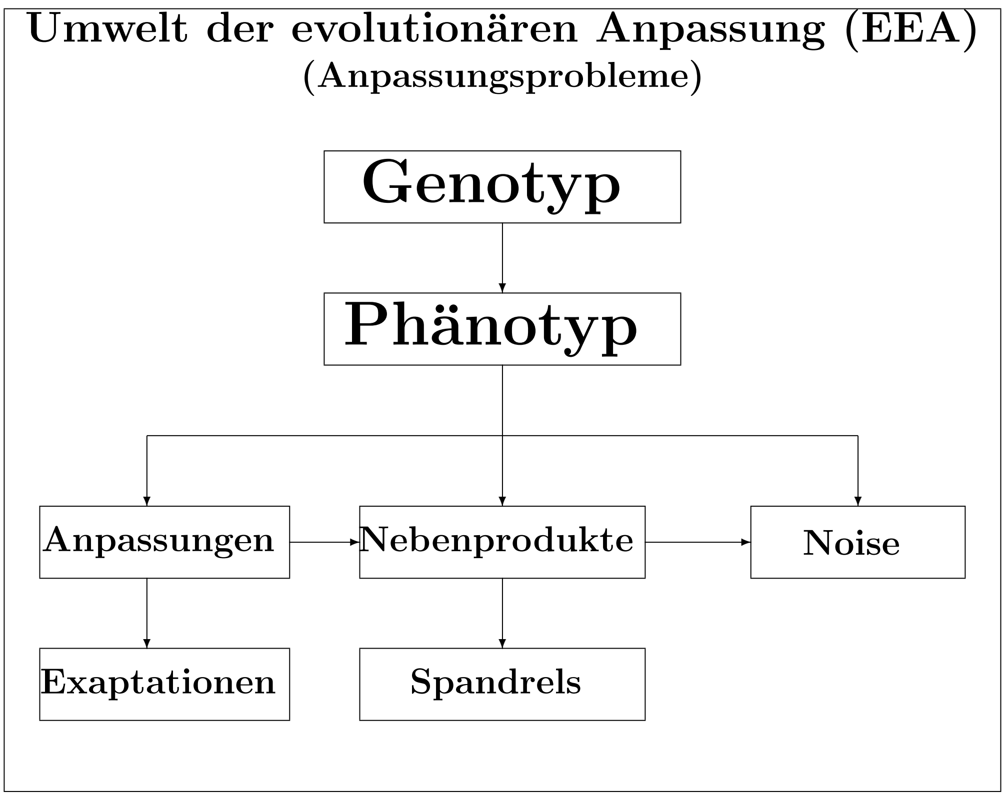


Abbildung 1.2.: Die evolutionären Zusammenhänge der grundlegenden evolutionspsychologischen und soziobiologischen Begrifflichkeiten.

1.2.3 Die "Massive-Modularitäts-Hypothese": Ein kritischer Blick

Um die MMH kritisch betrachten zu können, muss man sich vor allem erst einmal vergegenwärtigen, von welcher Position die ganze Modularitätsdiskussion ausgegangen ist. Diese Position hat Jerry Fodor in [59] formuliert, indem er sich im Hinblick auf das kognitive System des Menschen fünf zentrale Fragen stellte (Fodor in [59][S. 36, Z. 37 - S. 37, Z. 12]):

1. *Is it domain specific, or do its operations cross content domains? ...*
2. *Is the computational system innately specified, or is its structure formed by some sort of learing process?*
3. *Is the computational system 'assembled' (in the sense of having been put together from some stock of more elementary subprocesses) or does its virtual architecture map relatively direct onto its neural implementations?*
4. *Is it hardwired (in the sense of being associated with specific, localized, and elaborately structured neural system) or is it implement by relatively equipotential neural mechanisms?*
5. *Is it computationally autonomous (in Gall's sense)*[22]*, or does it share horizontal resources (of memory, attention, or whatever) with other cognitive systems?*

Und den Begriff "modular" prägt er dann auf der Basis dieser fünf Fragen folgendermaßen (Fodor in [59][S. 37, Z. 27-32]):

So what I propose to do instead of defining "modular" is to associate the notion

[22]Hier bezieht sich Fodor auf die von Franz-Joseph Gall im 19-ten Jahrhundert aufgestellte phrenologische Theorie der geistigen Organe, welche das menschliche Gehirn in viele spezialisierte Bereiche aufteilt, die angeborene und voneinander unabhängige geistige Organe darstellen. Für Fodor von besonderem Interesse ist dabei die Unabhängigkeit dieser geistigen Organe (Fodor in [59][S. 21, Z. 15-19]):

The relevant consideration about computationally autonomy is that Gall's fundamental powers do not share - and hence do not compete for - such horizontal resources as memory, attention, intelligence, judgment or whatever.

with a pattern of answers to such questions as 1-5. Roughly, modular cognitive systems are domain specific, innately specified, hardwired, autonomous, and not assembled. Since modular cognitive systems are domain-specific computational mechanisms, it follows that they are species of vertical faculties.

Doch welche kognitiven Fähigkeiten sind dann nun nach Fodor modular verankert? Fodor geht davon aus, dass vor allem die Wahrnehmungsprozesse (input systems), w.z.B. Sehen, Hören, Sprachverständnis, etc., modular organisiert sind (Fodor in [59][S. 47, Z. 25-34]):

Candidates might include, in the case of vision, mechanisms for color perception, for the analysis of shape, and for the analysis of three-dimensional spatial relations. They might also include quite narrowly task-specific 'higher level' systems concerned with the visual guidance of bodily motions or with the recognition of faces of conspecifics. Candidates in audition might include computational systems that assign grammatical descriptions to token utterances; or once that detect the melodic or rhythmic structure of acoustic arrays; or, for that matter, ones that mediate the recognition of the voices of conspecifics.

Diese Wahrnehmungsprozesse[23] sind für Fodor also modular organisiert, d.h. bereichs-spezifisch, "angeboren", neuronal verankert, automom ablaufend und nicht zusammengesetzt. Besonders wichtig ist ihm dabei, dass Module "informationally encapsulated" sind, d.h. die Informationsverarbeitung erfolgt in einem Modul ohne Beeinflussung anderer Module oder auch anderer kognitiver Prozesse (Fodor in [59][S. 64ff]). Im Gegensatz zu diesen "informationally encapsulated" Modulen verortet Fodor noch allgemein-zentrale kognitive Verarbeitungsprozesse, w.z.B. die Denkfähigkeit, welche nicht modular organisiert sind, d.h. vor allem nicht "informationally encapsulated" sind (Fodor in [59][S. 103, Z. 7-16, Z. 25-30]):

So, again, the moral seems to be that there must be some mechanisms which cross the domains that input systems establish. For these and other similar reasons, I

[23] Einige dieser Wahrnehmungsprozesse, w.z.B. das räumliche Sehen, die visuelle Objektverfolgung, die Einschätzung von Abständen, das Wiedererkennen von Figuren und Formen, etc., sind auch für das mathematische Denken wichtig, da diese Informationen die dem mathematischen Denken zu Grunde liegenden Wahrnehmungsrepräsentationen liefern.

assume that there must be relatively nondenominational (i.e. domain-inspecific) psychological systems which operate, inter alia, to exploit the information that input systems provide. Following the tradition, I shall call these "central" systems, and I will assume that it is the operation of these sort of systems that people have in mind when they talk, pretheoretical, of such mental processes as thought and problemsolving. ...
Briefly, my argument is going to be this: we have seen that much of what is typical of the input system is more or less directly a product of their informationally encapsulation. By contrast, I'll claim that central systems are, in important respects, unencapsulated, and that it is primarily for this reason that they are not plausible viewed as modular.

Den strukturellen Zusammenhang zwischen den Wahrnehmungssystemen und den allgemein-kognitiven Verarbeitungssystemen sieht Fodor dabei folgendermaßen (Fodor in [59][S. 42, Z. 13-16]):

Input systems function to get information into the central processors; specifically, they mediate between transducer outputs and central cognitive mechanisms by encoding the mental representation which provide domains for the operations of the latter.

Die Module liefern also die Informationen mit welchen die allgemein-zentralen kognitiven Verarbeitungsprozesse weiterarbeiten. Der zentrale Punkt bei Fodor ist also, dass nur die "Input"-Systeme modular verankert sind. Und genau an diesem Punkt setzen Cosmides & Tooby mit ihrer MMH an. Denn wie im vorangegangenen Unterabschnitt bereits ausgeführt, ist für sie das ganze menschliche Gehirn modular organisiert und nicht nur die Wahrnehmungsprozesse, die peripheren Module. Doch wie kann man im Rahmen der MMH zu den höheren kognitiven Fähigkeiten des Menschen gelangen? Bei Fodor funktioniert dies über die allgemein-zentralen kognitiven Verarbeitungsmechanismen, welche allerdings in der streng modularen Sichtweise von Cosmides & Tooby nicht mehr vorkommen. Wie lassen sich Gedanken über Gedanken bzw. Repräsentationen über Repräsentationen im menschlichen Gehirn modular erklären? An dieser Stelle kommt Dan Sperbers "Modularity of thought" ins Spiel. In [145] entwickelt Sperber den Gedanken, dass es im Grunde eine hierachische Modulstruktur im menschlichen Gehirn geben könnte, welche zu den höheren kognitiven Fähigkeiten führt. Sperber geht davon aus, dass sich das Gehirn neben den Wahrnehmungsbereichen auch in verschiedene konzeptuale Bereiche (conceptual domains) aufteilt, in welchen alle Informationen zu einem bestimmten Konzept (z.B. Hund) zusammenfließen. Die Trennlinie zwischen den dazugehörigen kognitiven Prozessen sieht Sperber in [145] folgendermaßen:

Perceptual processes have, as input, information provided by sensory receptors and, as output, a conceptual representation categorizing the object perceived. Conceptual processes have conceptual representations both as input and as output. Thus seeing a cloud and thinking "here is a cloud" is a perceptual process. Inferring from this perception "it might rain" is a conceptual process.

Diese konzeptualen Bereiche erhalten also ihre Informationen nicht nur von den peripheren Modulen, sondern darüber hinaus von den anderen konzeptualen Modulen, woraus sich dann Sperbers Modulhierarchie ergibt. Barrett, Dunbar und Lycett beschreiben die sich daraus ergebende modulare Sichtweise in [3][S. 276, Z. 4-9] folgendermaßen:

In this way, a complex network of conceptual modules could be created: some would receive their input from perceptual modules, some would recieve at least some input from other conceptual modules and some could just have other conceptual modules as their input. A network of this kind might be capable of high levels of flexibility even though all the individual modules operated in a Fodorian manner.

Letztendlich entstehen nach Sperber in [145] so metarepräsentationale Module (metarepresentational modules), die Gedanken über Gedanken entwickeln und verarbeiten können:

The metarepresentational Module is a special conceptual module, however, a second-order one, so to speak. Whereas other conceptual modules process concepts and representations of things, typically of things perceived, the metarepresentational module processes concepts of concepts and representations of representations.

Somit zeigt Sperber, wie ein modularer Weg zu den höheren kognitiven Fähigkeiten des Menschen führen kann. Doch der Preis, den er dafür bezahlt, ist hoch!

Denn mit diesen konzeptualen Modulen gibt Sperber im Grunde den von Fodor für entscheidend gehaltenen Gedanken der "informationally encapsulation" auf. Zwar funktionieren diese konzeptualen Module immer noch wie Mini-Computer, doch diese Mini-Computer verarbeiten nicht nur eingehende Informationen ohne sonstige Beeinflussung von Außen, sonderen können sich dann auch präferentiell zusammenschließen, um neue konzeptuale Module zu bilden, d.h. die sich zusammenschließenden Informationen bestimmen ihre eigene Verarbeitung mit. Somit lassen sich diese konzeptualen Module nicht mehr so einfach von anderen Modulen abgrenzen, was zur Folge hat, dass man zum einen nie sicher sein kann, es auch wirklich nur mit einem Modul zu tun zu haben, und zum anderen auch nicht davon ausgehen kann, dass diese konzeptualen Module sich auch wirklich im Gehirn lokalisieren lassen, so wie das für die peripheren Module zu erwarten ist. Es ergibt sich also erstens das Problem der Singularität und zweitens das Problem der Lokalisierbarkeit von konzeptualen Modulen und es ist, drittens, zu erwarten, dass sich diese Probleme im Hinblick auf höhere kognitive Fähigkeiten stets weiter verschärfen, da man davon ausgehen kann, dass immer mehr periphere und konzeptuale Module diesen höheren konzeptualen Modulen vorausgehen. Diese Problematik soll hier nun an einem Beipiel, dem Zahlensinn und der darauf aufbauenden Zahlenverarbeitung, vertieft werden. Folgt man Dehaene in [40], so versteht man heute unter dem Zahlensinn ein Modul, welches im tierischen und menschlichen Gehirn gleichermaßen vorkommt. Es ermöglicht den Umgang mit numerischen Größen, d.h. die Vorstellung von Anzahlen und deren Umwandlung nach elementaren Rechenregeln. Dieses periphere Modul wird häufig auch als Akkumulator bezeichnet. Dehaene erläutert diesen Akkumulatormechanismus[24] in [40][S. 40, Z. 6-19] mit Hilfe eines einfachen Beispiels:

Denken wir an Robinson Crusoe auf seiner verlassenen Insel, einsam und hilflos, und stellen wir uns für unsere Zwecke sogar vor, daß ein Schlag auf den Kopf ihn jeder Sprache beraubt hat, er also zum Zählen und Rechnen keine Zahlwörter verwenden kann. Wie könnte Robinson allein unter Benutzung der ihm zur Verfügung

[24]Dieser Akkumulatormechanismus geht ursprünglich auf Meck & Church in [112][Figure 3] zurück, welche diesen vorgeschlagen haben, um die Fähigkeit von Ratten zu beschreiben, zum einen Anzahlen unterscheiden zu können (counting process) und zum anderen eine Zeitdauer messen zu können (timing process).

stehenden Hilfsmittel so etwas wie eine Rechenmaschine entwickeln? Einfacher, als man zunächst denken möchte. Nehmen wir an, Robinson habe in der Nähe eine Quelle gefunden. Dann höhlt er aus einem Baumstamm einen großen Wasserspeicher aus und stellt ihn in den Bach. Das Wasser fließt nicht direkt in den Wasserspeicher, sondern wird mit Hilfe eines dünnen Bambusrohres zeitweise hineingeleitet. Mit diesem rudimentären Gerät, dessen zentraler Bestandteil und Gedächtnisspeicher der Wasserbehälter ist, kann Robinson zählen, addieren und Anzahlen nährungsweise vergleichen, also im Wesentlichen so gut rechnen wie eine Ratte oder eine Taube.

Ein solcher Mechanismus ist natürlich nicht in der Lage, diskrete Dinge abzuzählen, da er dafür zum einen viel zu unpräzise ist und zum anderen ohne Sprache auskommt.[25] Aber abschätzen kann dieser Mechanismus, auch wenn die Ungenauigkeit mit größer werdenden und/oder dicht beieinander liegenden Anzahlen schnell zunimmt. Diese beiden Effekte werden im Allgemeinen "Größeneffekt" und "Distanzeffekt" genannt. Dabei ist es jedoch erst einmal völlig unverständlich, wie eine gegebene Anzahl ohne Zählen von einem Individuum erfasst werden kann. Diese Fähigkeit, eine Anzahl ohne Zählen zu erfassen, nennt man in der Psychologie Subitisation (subitizing).[26] Genauer gesagt funktioniert beim

[25]Die Folgerung, dass Sprache keinen Einfluß auf den grundlegenden Zahlensinn hat, ergibt sich unter anderem aus den Untersuchungen von Hinrichs et al. in [80] und Dehaene et al. in [38]. Hinrichs et al. erhielten ihre Resultate mit englisch-sprachigen Personen und Dehaene et al. mit französich-sprachigen Personen, wobei Dehaene et al. die Resultate von Hinrichs et al. bzgl. des Vergleichs zweistelliger Anzahlen (two-digit number comparison) zum einen bestätigten und konkretisierten und zum anderen weitere Untersuchungen auf dieser Basis durchführten, welche letztendlich zur Verwerfung des lexikographischen Modells (lexicographic model) des zweistelligen Zahlenvergleichs zugunsten eines holistischen Modells (holistic model) geführt haben. Das lexikographische Modell postulierte beim Vergleich zweier gegebener zweistelliger Zahlen, dass erst die beiden Zehnerstellen der beiden Zahlen verglichen werden, und nur wenn diese gleich sind, ein Vergleich der Einerstellen vorgenommen wird. Dagegen erklärt das holistische Modell, dass der Zahlenvergleich nicht auf der Zahlenebene (Sprach- und Symbolebene) stattfindet, sondern auf der zur jeweils gegebenen Zahl dazugehörigen repräsentationalen Größenebene, welche die Zahl als Ganzes verarbeitet und vergleicht.

[26]Dieser Begriff wurde von Kaufmann et al. in [89] geprägt und bezeichnet die schnelle, sichere und genaue Wiedergabe einer gegebenen Anzahl von bis zu sechs Dingen (Punkten, Kreisen, etc.), welche von einer Versuchsperson nur kurz wahrgenommen werden konnten. Aufgrund

erwachsenen Menschen diese Subitisation im Falle der Anzahlen 1, 2, und 3 problemlos, aber ab der Anzahl 4 nehmen Fehlerhäufigkeit und Reaktionszeit zu, wie man anhand genauerer Untersuchungen des Subitisationskurvenverlaufs erkennen kann (Mandler & Shebo in [110][Figure 3]). Die offene und bislang auch noch strittige Frage ist nun, wie das Verfahren des Subitisierens überhaupt funktioniert. Mandler & Shebo untersuchten dieses Verfahren in [110] im Falle von erwachsenen Menschen und kamen unter anderem zu dem Ergebnis, dass sich das Verfahren bzw. der Prozess des Subitisierens im Falle der Anzahlen 1 bis 6 in zwei getrennte Bereiche (1-3 & 4-6) aufspaltet. Im ersten Fall, den Anzahlen 1 bis 3, erklären sie den nur geringfügigen Anstieg der Reaktionszeit und die sehr niedrige Fehlerquote mit "acquired canonical patterns" (Einheit, Zweiheit, Dreiheit), und im zweiten Fall, den Anzahlen 4 bis 6, erklären sie den nun wesentlich steileren Anstieg der Reaktionszeit und der Fehlerhäufigkeit damit, dass nun zu den "acquired canonical patterns" noch ein "counting of the array held in consciousness" dazu kommt. Diese Repräsentation der Anzahl im Bewusstsein mit anschließendem diskretem Zählen ist aber begrenzt, so dass Mandler & Shebo davon ausgehen, dass höhere Anzahlen, größer als 7, nicht mehr ohne weiteres im Bewusstsein gehalten werden können, so dass nur noch ein Abschätzen der gegebenen Anzahl bleibt, welches das Verfahren des Subitisierens ersetzt. Im Gegensatz dazu erklärt Dehaene in [40] das Verfahren des Subitisierens mit seinem Akkumulatormechanismus (Robinsons Wasserspeicher), wobei er davon ausgeht, dass das Verfahren des Subitisierens beim erwachsenen Menschen, wie auch bei Kindern und Tieren, von der Fähigkeit abhängt, Objekte im Raum zu lokalisieren und weiter verfolgen zu können. Mit dieser kann man eine wahr-

---

vorangegangener Untersuchungen und ihrer eigenen Resultate (Kaufmann et al. in [89][Fig. 12-21]) kamen Kaufmann et al. zu dem Schluss, dass der Fähigkeit des Erfassens einer Anzahl von gegebenen Dingen (Punkten, Kreisen, etc.) zwei Verfahren zu Grunde liegen müssen, nämlich eines, das auf Anzahlen von 1 bis 6 beschränkt ist, und ein weiteres für Anzahlen über 6. Das erste Verfahren bezeichnen Kaufmann et al. als Subitisation und das zweite als Abschätzen, wobei sie die beiden Begriffe wiefolgt weiter von einander abgrenzen:

Subitizing is, on average, more accurate and more rapid than estimating, and it is done with more confidence.

Als dritten Begriff in diesem Kontext definieren sie das Zählen, als reines verbales Durchnummerieren der gegeben Objekte, und trennen das Zählen somit vom Subitisieren und Abschätzen.

genommene Anzahl schnell in diskrete Objekte zerlegen, um sie dann mit dem Akkumulatormechanismus abzuschätzen, wobei anscheinend die Anzahl 4 die erste ist, die der Akkumulatormechanismus nicht mehr so genau abschätzen kann, dass man sie mit einem genauen Zahlwort belegen könnte. Nach Dehaene müssen wir deshalb bei Anzahlen über 4 auf das Zählen zurückgreifen, obwohl uns der Akkumulatormechanismus weiter mit Abschätzungen versorgt.[27] Dabei geht er davon aus, dass beim Verfahren des Subitisierens alle Objekte gleichzeitig ohne Aufmerksamkeit verarbeitet werden (parallele, präattentive Verarbeitung). Dies wiederum sehen Gallistel & Gelman in [66] anders, nach ihrem Zähl-Modell, welches durch fünf Zähl-Prinzipien (One-One Principle[28], Stable-Order Principle[29], Cardinal Principle[30], Abstraction Principle[31], Order-Irrelevance Principle[32]) definiert wird, zählen Menschen auch bei kleinen Anzahlen ab und zwar Element für Element (serielle, algorithmische Verarbeitung), was aber beim erwachsenen Menschen sehr schnell bzw. nahezu augenblicklich geschieht. Letztendlich schließen sich Gallistel & Gelman daher der sogenannten Beckmann-Hypothese an, welche besagt, dass ein Kind zuerst die Anzahl der Elemente einer gegebenen Menge durch Zählen erhält und erst später in seiner Entwicklung die Anzahl der Elemente einer gegebenen Menge durch Subitisieren erfasst, womit sie dem Begriff "Subitisation" im Grunde neu definieren, da in ihrem Modell das Zählen dem

[27] Bei diesem ersten Übergang vom Abschätzen zum Zählen, von Zahlensinn zur Zahlenverarbeitung, wird im Grunde die Information, die das periphere Modul "Zahlensinn" liefert, in einer konzeputal-modular organisierten "Zahlenverarbeitung" weiterverarbeitet (vgl. auch Kap. 3.1.2).

[28] Das Eins-zu-Eins-Prinzip besagt, dass jedes Element einer gegebenen Menge beim Zählen sozusagen durchetikettiert, d.h. mit einer Kennzeichnung (Etikett, Symbol, Zahl, etc.) versehen werden muss.

[29] Das Prinzip der stabilen Ordnung besagt, dass die verwendete Kennzeichnung der einzelnen Elemente einer gegebenen Menge wiederholbar sein muss, d.h. dass keine Unregelmäßigkeiten bzgl. der Kennzeichnungsordnung auftreten dürfen.

[30] Das Kardinal-Prinzip besagt, dass die letzte Kennzeichung innerhalb einer Kennzeichungsserie für die Elemente einer gegebenen Menge eine besondere Bedeutung hat, denn sie repräsentiert die Anzahl der Elemente der gegebenen Menge.

[31] Das Abstraktions-Prinzip besagt, dass die ersten drei Prinzipien auf jede beliebige Reihe oder Zusammenstellung von Größen angewendet werden können.

[32] Das Prinzip der beliebigen Reihenfolge besagt, dass die Reihenfolge der Kennzeichung der einzelnen Elemente einer gegebenen Menge irrelevant ist.

Subitisieren vorausgeht. Eine Vorstellung, die allerdings mittlerweile zu Gunsten der einer parallelen, präattentiven Verarbeitung weitestgehend verworfen wurde. Insgesamt gesehen scheint es sich also so zu verhalten, dass man schon mit der Erklärung des Subitisationskurvenverlaufs, welche sich um die Begriffe "Subitisieren", "Abschätzen" und "Zählen" dreht, und erst recht bei der darauf aufbauenden Zahlenverarbeitung mehrere Module und Modulebenen trennen muss.

Und wie sieht es mit der Lokalisierbarkeit von Zahlensinn und Zahlenverarbeitung aus? Erste bildgebende Hinweise in diesem Zusammenhang lieferten P. Roland & L. Friberg in [137], welche unter anderem das neuronale Aktivierungsmuster, welches sich bei einer Kopfrechenoperation ergibt, untersuchten. In dieser Arbeit definierten sie "Denken" als

brain work in the form of operations on internal information, done by an awake subjekt

und untersuchten drei Arten des Denkens, nämlich $50-3$-Denken ($50-3$-thinking), Reim-Denken (jingle thinking) und Streckenfindungs-Denken (route-finding thinking). Im Hinblick auf den Zahlensinn und auf die Zahlenverarbeitung von besonderem Interesse ist das $50-3$-Denken, welches im Grunde aus der Aufgabe besteht, von einer vorgegebenen Zahl immer wieder die Zahl 3 zu subtrahieren, so dass man im Falle, dass man sich nicht verrechnet, die Folge $50, 47, 44, 41, 38, \ldots$ erhält. Roland & Friberg konnten diesem $50-3$-Denken zwei spezielle Hirnregionen zuordnen. Zum einen, als Kernregion (core region), ein großes präfrontales Areal (Linke Hemisphäre: superior prefrontal cortex, anterior midfrontal cortex, Broca area, angular cortex; Rechte Hemisphäre: middle superior prefrontal cortex, anterior midfrontal cortex, anterior intermediate prefrontal cortex, anterior and middle inferior frontal cortex, angular cortex) und zum anderen, als fakultative Region (facultative region), ein kleineres inferior parietales Areal (Linke Hemisphäre: either the anterior and posterior midfrontal cortex or the middle inferior frontal cortex; Rechte Hemisphäre: either the superior or inferior polar region).[33] In Anbetracht ihrer Resultate kamen Roland & Friberg zu dem Schluss,

[33]Roland & Friberg bieten in [137][Figure 4] eine Übersicht über die Einteilung der Hirnregionen, welche sie zur Beschreibung ihrer Versuche und zur Zuordnung ihrer Messdaten verwendet haben. Einen vollständigen und konzisen Überblick über den Aufbau des menschlichen Gehirns stellt unter anderem Roth in [139][S. 91ff] bereit.

dass die drei Arten des Denkens, welche jeweils aus einer speziellen Operation auf der Basis einer entsprechenden Gedächtnisleistung bestanden, unterschiedliche kortikale Regionen aktivieren, die aus mehreren wiederum unterschiedlich lokalisierten Teilregionen bestehen, welchen auch verschiedene Aufgaben zukommen. Insbesondere ist es also scheinbar so, dass schon bei elementaren Kopfrechenaufgaben ein präfrontales und ein inferior parietales Areal zusammenarbeiten bzw. zusammen aktiviert werden müssen.[34] Auch Stanislas Dehaene resümiert auf der Basis dieser, einiger anderer (Posner, Petersen, Fox & Raichle in [125])[35] und vor allem seinen eigenen Resultate (Dehaene et al. in [39]) zur Lokalisierbarkeit mit modernen bildgebenden Verfahren (z.B. die Positronen Emissions Tomographie, (PET)) in [40][S. 253, Z. 11-18] die Situation wiefolgt:

Die Vielfalt der Hirnareale, die an der Multiplikation und dem Zahlenvergleich

---

[34]Mittels der "functional Magnetic Resonance Imaging (fMRI)" ist es mittlerweile gelungen, noch feiner auflösende Studien zur Neuroanatomie der Zahlenverarbeitung zu bewerkstelligen. Ein Überblick und Vergleich dieser Studien ermöglichten Dehaene et al. in [41] die Lokalisierung von drei parietalen Schaltkreisen, welche an der elementaren Zahlenverarbeitung beteiligt zu sein scheinen: Erstens, das "Horizontal segment of the IntraPariental Sulcus (HIPS)", welches für die nichtverbale Repräsentation numerischer Größen zuständig ist und zwar gleichermaßen in beiden Hemisphären; zweitens, der "left Angular Gyrus (AG)", welcher zur Sprachverarbeitung gehört, linkshemisphärisch lokalisiert ist und nur dann an der Zahlenverarbeitung (z.B. Multiplikation) beteiligt ist, wenn die Zahlen verbal kodiert sind; drittens, der "Posterior Superior Parietal Lobule (PSPL)", welcher zur Aufmerksamkeitssteuerung im Raum gehört, links- und rechtshemisphärisch lokalisiert ist und daneben auch beim Zahlenvergleich, bei der Zahlenabschätzung, der Subtraktion zweier Zahlen und dem Zählen aktiv ist. Von diesen drei, an der Zahlenverarbeitung beteiligten, Schaltkreisen ist nach Dehaene et al. der HIPS der einzige plausible Kandidat für eine bereichspezifische Fähigkeit, da die anderen beiden, AG und PSPL, jeweils noch an anderen Fähigkeiten primär beteiligt sind. Nach dem gegenwärtigen Kenntnisstand ist also das HIPS das parietale Kernareal des Zahlensinns.

[35]Posner, Petersen, Fox & Raichle gingen in [125] der Hypothese nach, dass die elementaren Operationen, welche die neuronale Verarbeitungsbasis für jedwede kognitive Aufgabe bilden, genau zu lokalisieren sind, und welche erst durch eine orchestrierende Gesamtleistung die dazugehörige kognitive Aufgabe lösen können. Dabei zeigten sie insbesondere, dass verschiedene Aspekte der Sprachverarbeitung im (menschlichen) Gehirn verschieden lokalisiert sind und kamen zu dem Schluss, dass die bildliche Vorstellungskraft, das Lesen von Wörtern und die Verlagerung der visuellen Aufmerksamkeit nicht von einem einzigen Areal im menschlichen Gehirn verrichtet werden, sondern dass bei allen eine große Anzahl von Verarbeitungskomponenten involviert und unterschiedlich lokalisiert sind.

beteiligt sind, zeigt wieder einmal, daß die Arithmetik keine einheitliche phrenologische Fähigkeit ist, die mit nur einem einzigen Rechnenzentrum verknüpft ist. Jede Operation rekrutiert ein ausgedehntes zerebrales Netzwerk. Anders als ein Computer hat das Gehrin keinen spezialisierten Rechenprozessor. Man vergleicht es besser mit einer bunten Menge wenig intelligenter Agenten. Einer alleine kann nicht viel ausrichten, aber als Gruppe schaffen sie es, ein Problem zu lösen, indem sie sich die Arbeit aufteilen.

Die Warnung vor der Phrenologie, welche Dehaene hier ausspricht, ist wichtig! Weder von den peripheren noch von den konzeptualen Modulen ist zu erwarten, dass sie einen streng abgegrenzten Ort im Gehirn besitzen und sie stellen auch keine untereinander unabhängigen "geistige Organe" dar. Man muss also ausgesprochen vorsichtig sein, wenn man mit dem Modulbegriff umgehen und Module im (menschlichen) Gehirn lokalisieren möchten. Die neuronalen Aktivierungsmuster einzelner, vor allem konzeptualer, Module können sich auch über mehrere Gehirnareale erstrecken, so dass eine strenge Lokalisierung nicht möglich ist, selbst wenn man glaubt einen Kernbereich eines Moduls ausgemacht zu haben.

Diese Probleme, welche sich in Zusammenhang mit Singularität und Lokalisierbarkeit von einzelnen Modulen ergeben, können letztendlich nur von den entsprechenden Einzeldisziplinen (w.z.B. die kognitive Neuropsychologie und die Neurobiologie) experimentell untersucht und im Einzelfall dann auch vielleicht genau beantwortet werden. Im Hinblick auf meine Theoriebildung hier werden diese beiden Problematiken keine weitere Rolle spielen, da hier vor allem die evolutionären Zusammenhänge aufgezeigt werden sollen. D.h.: In Anbetracht einer kognitiven Fähigkeit des Gehirns soll als erstes einmal versucht werden, die Frage nach der adaptiven Funktion zu beantworten. Gibt es eine evolutionäre Funktion dieser kognitiven Fähigkeit, und wenn ja, welche, und wie hängt diese mit den anderen kognitiven Fähigkeiten zusammen? Auch dies lässt sich am Beispiel des Zahlensinns gut verdeutlichen. Welchen adaptiven Vorteil bietet ein solcher Akkumulatormechanismus, dass man ihn unter anderem bei Ratten (Meck & Church in [112], E. J. Capaldi & D. J. Miller in [27][36]), bei Papageien (I. M. Pepperberg

[36]Capaldi & Miller demonstrierten in dieser Arbeit unter anderen zum einen, dass Ratten in der Lage sind zu zählen (und zwar bis 3!), und zum anderen, dass die beobachtete Zählstrategie

in [122][37]), bei Katzen (R. F. Thompson et al. in [156][38]), bei Rhesusaffen (Wash-

von Ratten nicht auf die "Letzte Zuflucht"-Hypothese (last-resort-hypothesis) hinweist, welche betont, dass Tiere nur in den Situationen zum Zählen zurückgreifen, wenn sonst kein anderer Mechanismus eingesetzt werden kann, sondern vielmehr auf die von den Autoren präferierte sequentielle Sichtweise ("Erste Zuflucht"-Hypothese), dass Tiere wichtige Ereignisse (hier: reinforceing events) routiniert und fast schon automatisch abzählen, wobei sie die Vorstellung verwerfen, dass die Ratten die Anzahl der "reinforceing events" subitisiert haben könnten, was sich allerdings auch mehr oder weniger aus ihrem seriellen Versuchsaufbau und -durchführung ergibt.

[37]In dieser Arbeit trainierte Pepperberg einen afrikanischen Graupapagei, namens Alex, dahingehend, dass er nach dem Training in der Lage war, auf die Frage "How many?" mit sprachlich-numerischen Bezeichnungen (z.B. 5 Holzstückchen) für entsprechende Zusammenstellungen von zwei bis sechs Objekten (Holzstückchen u.a.) zu antworten. In ihren Experimenten ging sie unter anderem der Frage nach, ob Alex dieses Verhalten auch auf bis dato für ihn unbekannte Objekte verallgemeinern kann, und ferner, ob Alex dann auch in der Lage ist, die Anzahl der Objekte einer Teilmenge (z.B. 3 Schlüssel) aus einer gegebenen heterogenen Menge (z.B. 2 Korken und 3 Schlüssel) heraus zu bestimmen. In Anbetracht ihrer positiven Resultate resümiert Pepperberg abschließend:

Overall, the experiments described in this paper present evidence for certain, albeit limited, number-related abilities in the gray parrot. Whether this ability is or can be developed into counting is a question we hope eventually to answer.

Pepperberg ist es somit gelungen die Existenz eines Akkumulatormechnanismus bei afrikanischen Graupapageien nachzuweisen, wobei sie allerdings nicht genau entscheiden konnte, ob, und wenn ja, wie dieser Mechanismus letztendlich mit dem Zählen in Beziehung steht.

[38]In dieser Arbeit wiesen Tompson et al. nicht nur die Existenz eines solchen Akkumulatormechanismus nach, sondern bemühten sich auch bereits um eine Lokalisierung desselben im assoziativen Cortex von Katzen. Dabei gelang es ihnen, Neuronen zu identifizieren, welche sich speziell bei bestimmten Anzahlen entluden. Genauer konnten sie Neuronen für Anzahlen "2", "5", "6" (zwei Neuronen!) und "7" lokalisieren, wobei sich in ihrer Auswertung im Falle des "7"-Neurons auch schon der Größen- und Distanzeffekt des Akkumulatormechanismus beobachten lässt, da dieses "7"-Neuron auch schon bei den Anzahlen "6" und "8" schwach aktiviert wurde. Diese Arbeit stützt demnach zum einen Dehaene's Wasserspeichermodell vom Zahlensinn und zum anderen stützt es eher die von Dehaene vertretene Position, dass eine parallele präattentive Verarbeitung dem Subitisieren kleiner Anzahlen zu Grunde liegt, da sich entsprechende Neuronen tatsächlich lokalisieren lassen, wobei allerdings Thompson et al. die Frage unberücksichtigt ließen bzw. nicht beantworteten, ob vor der Aktivierung eines bestimmten Anzahl-Neurons nicht auch zuvor die dieser Anzahl vorausgehenden Anzahl-Neuronen aktiviert wurden. Erst wenn man dies wirklich ausschließen kann, kann man die Vermutung einer seriellen (algorithmischen)

burn & Rumbaugh in [172][39]) und bei Schimpansen (G. Woodruff & D. Premack

Verarbeitung verwerfen.

[39]In dieser Studie lernten die beiden Rhesusaffen (*macaca mulatta*), Abel und Baker, dass die arabischen Ziffern 0 bis 9 mit einer entsprechenden Anzahl von Futterstückchen korrespondieren. Bei den Experimenten wurden ihnen zwei Zahlen auf einem Bildschirm präsentiert, von denen sie eine mittels eines Joysticks durch eine entsprechende Cursorausrichtung auswählen konnten und dann die mit der Zahl korrespondierende Anzahl von Futterstückchen erhielten. Die beiden Rhesusaffen entschieden sich signifikant häufiger für die größere der beiden vorgegebenen Zahlen, wobei die Sicherheit mit wachsendem Größenunterschied und zunehmender Distanz der beiden vorgegebenen Zahlen zunahm (Washburn & Rumbaugh in [172][Table 1]). In einem abschließenden Experiment demonstrierten die Rhesusaffen sogar eine Ausweitung ihrer bisher gezeigten numerischen Kompetenzen. Es wurden ihnen in diesem Experiment nicht nur, wie bisher, zwei Ziffern auf einem Bildschirm präsentiert, sondern gleichzeitig fünf Ziffern, von denen sie solange jeweils eine auswählen mussten und die entsprechende Anzahl Futterstückchen erhielten, bis nur noch eine Zahl übrig blieb. In [172][Fig.1] sieht man Abel bei der Durchführung einer diesbezüglichen Aufgabe, wobei die Zifferen 8, 6, 5, 4, und 1 gleichzeitig präsentiert werden und er zuerst die 8, dann die 6, dann die 5 und abschließend die 4 wählt. Insgesamt ergibt sich somit aus den Experimenten von Washburn & Rumbaugh, dass Rhesusaffen über einen Akkumulatormechanismus verfügen müssen und dass sich auch bei ihnen der Größen- und Distanzeffekt nachweisen lässt.

in [180][40], Matsuzawa in [111][41], Boysen & Berntson in [9][42]) nachweisen konnte? Dehaene erklärt sich dies in [40][S. 38, Z. 39 - S. 39, Z. 8] wiefolgt:

Die Evolution hat höchst komplexe Strategien zum Erbeuten, Sammeln und Speichern von Nahrungsmitteln entwickeln können, deshalb sollte es uns nicht überraschen, wenn viele Arten über so einen einfachen Mechanismus verfügen, wie es der Vergleich von zwei Mengen ist. Es ist sogar wahrscheinlich, dass ein mentaler Vergleichsalgorithmus schon früh in der Evolution gefunden wurde - und viel-

[40]In diesen Experimenten zeigte eine erwachsenen Schimpansin (*pan troglodytes*), Sarah, dass sie ein einfaches Verständnis von den Zahlen 1, 2, 3, 4 und den Proportionen $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ hat. Die vier jugendlichen Schimpansen, die ebenfalls an den Experimenten teilnahmen, scheiterten jedoch zum größten Teil an den gestellten Aufgaben. Nichtsdestotrotz ziehen Woodruff & Premack den folgenden Schluss:

The results reveal the presence of simple 'proportion' and 'number' concepts in a nonhuman primate.

Somit wurde in dieser Arbeit nicht nur die Existenz eines Akkumulatormechanismus bei Schimpansen nachgewiesen, sondern auch der Umgang mit einfachen proportionalen Verhältnissen.

[41]Matsuzawa trainierte seine 5-jährige Schimpansin (*pan troglodytes*), Ai, unter anderem dahingehend, dass sie arabische Ziffern von 1 bis 6 verwenden konnte, um die Anzahl von vorgegebenen Gegenständen anzugeben, wobei sich stets bei der Einführung einer neuen Zahl (z.B. beim Übergang von 5 zu 6) ein Größen- und Distanzeffekt einstellte, welcher sich vor allem bei benachbarten Zahlen zeigte (94,9 % der Fehler). In Anbetracht seiner Resultate resümiert Matsuzawa:

The present study suggests that the chimpanzee was able to match the sample items on the basis of numerosity in addition to colour and types of objects.

Somit wurde auch in dieser Arbeit die Existenz des Akkumulatormechanismus, samt Größen- und Distanzeffekt, nachgewiesen.

[42]Boysen & Berntson trainierten die 5.8-jährige Schimpansin (*pan troglodytes*), Sheba, dahingehend, dass sie arabische Zifferen von 0 bis 4 verwenden konnte, um die Anzahl vorgelegter Futterstückchen anzugeben und umgekehrt, dass sie zu einer gegebenen arabischen Ziffer von 0 bis 4 die entsprechende Anzahl von Futterstückchen auswählen konnte. In Anbetracht ihrer Resultate ziehen Boyson & Berntson zusammenfassend den folgenden Schluss:

These findings demonstrate that counting strategies and the representational use of numbers lie within the cognitive domain of the chimpanzee and compare favorable with the spontaneous use of addition algorithms demonstrated in preschool children.

Somit zeigt diese Arbeit nicht nur die bloße Existenz eines Akkumulatormechanismus, sondern gibt auch Auskunft darüber, wie weit das numerische Verständnis bei Schimpansen gehen kann.

leicht sogar im Laufe der Evolution mehrmals. Selbst die einfachsten Organismen müssen schließlich unablässig nach der besten Umwelt mit der meisten Nahrung, den wenigsten Feinden, den meisten gegengeschlechtlichen Partnern und so weiter suchen. Man muss optimieren, um überleben zu können, und vergleichen, um optimieren zu können.

Somit liegt der evolutionäre Vorteil bzw. die adaptive Funktion des Akkumulatormechanismus in der Erfassung und nährungsweisen Verarbeitung von Anzahlen, so dass sich ein Individuum in seiner Umwelt besser zurechtfinden kann. An dieser Stelle wird auch bereits deutlich, dass nur die hochentwickelte Zahlenverarbeitung und nicht der Zahlensinn selbst ein menschliches Charakteristikum ist. Der Zahlensinn geht als kognitive Fähigkeit der spezifisch menschlichen Intelligenzevolution im Zuge der Hominisation voraus, aber nichtsdestodrotz besitzt jeder neurologisch normale Mensch dieses periphere Modul.
Aber nicht nur der Modulbegriff der evolutionären Psychologie findet sich in den verschiedenen modularen Sichtweisen auf das menschliche Gehirn, auch andere Modulbegriffe, w.z.B. der des Chomsky-Moduls, werden zur Erklärung der kognitiven Struktur des Menschen verwendet. Der Bergiff des Chomsky-Moduls unterscheidet sich grundlegend vom oben vorgestellten Modulbegriff von Cosmides & Tooby. Richard Samuels prägte diesen Modulbegriff in [142] folgendermaßen:

A Chomskian modul, to a first approximation, is a domain-specific body of mentally represented knowledge or information that accounts for a cognitive capacity. As the name suggests, the notion of a Chomskian module can be traced to Chomsky's work in linguistics - in particular, to the claim that our linguistic competence consists in the possession of an internally represented grammar of our natural language. This grammar is a paradigm example of what I mean when speaking of Chomskian modules. ... For present purposes, then, I adopt a rough characterisation of Chomskian modules as domain-specific systems of truth-evaluable mental representations that are innate and/or subject to informational restrictions.

Chomsky-Module sind also bereichspezifische, wahrheitsauswertende, mentale Repräsentationssysteme, welche allerdings keine Informationen verarbeiten, sondern sozusagen "verankerte" Wissenstrukturen zur kognitiven Verarbeitung bereitstellen, was sie grundlegend von den Berechnungsmodulen (computational modules) unterscheidet, die Samuels in [142] wiefolgt charakterisiert:

Computational modules are species of computational device. As a first pass, we can charakterise them as domain-specific computational devices.

Dabei betont er in [142] vier Charakteristika dieser Berechnungsmodule:

Erstens ..., *computational modules are ordinarily assumed to be classical computers - symbol (or representation) manipulating devices which receive representations as input and manipulate them according to formally specifiable rules in order to generate representations (or actions) as outputs.*

Zweitens ..., *it is ordinarily assumed that computational modules are dedicated to solving problems in a specific domain because they are only capable of carrying out computations on a restricted range of inputs, namely representations of the properties and objects found in a particular domain.*

Drittens ..., *computational modules are usually assumed to be relatively autonomous components of the mind. Thought they receive input from, and sent output to, other cognitive processes or structures, they perform their own internal information processing unperturbed by external systems.*

Viertens ... *I want to emphasise the fact that computational modules are a very different kind of mental structure from Chomskian modules. Chomskian modules are systems of representations. In a sense, they are 'inert'. They only eventuate in behaviour when manipulated by various cognitive mechanisms. By contrast, computational modules are processing devices - mechanism that manipulate representations.*

Ein Modul im Sinne von Cosmides & Tooby ist dann für Samuels ein spezielles Berechnungsmodul, welches er als darwinisches Modul (Darwinian module) bezeichnet und welchen er in [142] die drei folgenden Charakteristika zuschreibt:

First, in accordance with their computationalism, evolutionary psychologists characterise modules as domain-specific computational mechanisms - ...
Second, in keeping with their nativism, evolutionary psychologists tend to think of Darwinian modules as innate cognitive structures whose characteristic properties are largely determined by genetic factors.

Finally, in accord with their adaptationism, they maintain that many or perhaps even all Darwinian modules are the products of natural selection.

Der entscheidende Punkt bei der Unterscheidung zwischen Chomsky-Modulen und Berechnungsmodulen, insbesondere darwinischen Modulen, ist die Tatsache, dass Chomsky-Module mindestens einen allgemeinen (domain general) kognitiven Verabeitungsmechanismus benötigen, da sie selbst keine "Berechnungen" vornehmen können. Darwinische Module dagegen benötigen einen solchen allgemeinen kognitiven Verarbeitungsmechanismus nicht unbedingt, weswegen Cosmides & Tooby auch ihre MMH aufstellen konnten, ohne auf einen solchen zurückgreifen zu müssen. Samuels diskutiert im Anschluss an seine Modulbegriffsklärung in [142] dann verschiedene Varianten der MMH aus der evolutionären Psychologie und kommt zu dem Schluss, dass diese sich letztendlich nur in einem Punkt unterscheiden, und zwar in dem, ob das menschliche Gehirn gänzlich (starke MMH) oder nur größtenteils (schwache MMH) aus darwinischen Modulen besteht:

According to strong MMH, all cognitive mechanisms are Darwinian modules. Such a view would be undermined if we were to discover that any cognitive mechanism was non-modular in character. By contrast, weak MMH maintains only that the human mind - including those parts responsible for central processing - is largely modular in structure. In contrast to strong MMH, such a view is clearly compatible with the claim that there are some non-modular mechanisms.

Und genau an dieser Stelle verbinden sich nun die oben angesprochen Probleme, Singularität und Lokalisierbarkeit von Modulen, mit den beiden Varianten der "Massiven Modularitäts-Hypothese": Auf Grund dieser beiden Probleme, vor allem im Hinblick auf die höheren kognitiven Fähigkeiten des Menschen, kann man nicht sicher davon ausgehen, dass das menschliche Gehirn gänzlich modular organisiert ist. Vor allem die Option eines oder mehrerer allgemeiner kognitiver Verarbeitungsmechanismen, die insbesondere auch auf einer Basis von Chomsky-Modulen operieren können, ist dabei noch offen bzw. kann nicht ausgeschlossen werden. So, resümiert Samuels in [142] auch:

To sum up, while some evolutionary psychologists think that strong MMH might be true, evolutionary psychology is only committed to the weaker thesis. Moreover, I claim that given the current state of our knowledge, this is the more plausible *of the two positions to adopt.*

Daher wird den folgenden Ausführungen hier auch keine starke MMH vorangestellt, sondern eine bestimmte schwache Variante dieser, welche nun in dem das erste Kapitel abschließenden Unterabschnitt entwickelt und vorgestellt werden soll.

1.2.4 Eine mögliche evolutionspsychologische und soziobiologische Sicht auf das Gehirn

Da im Rahmen dieser Untersuchung die Fähigkeit des mathematischen Denkens zu ihrem evolutionären Ursprung bzw. zu ihren evolutionären Ursprüngen zurückverfolgt werden soll, ist man vom Prinzip her auf einen evolutionspsychologischen und soziobiologischen Ansatz, wie der von Cosmides & Tooby, welcher die Grundlage ihrer evolutionären Psychologie bildet, auch angewiesen, da nur dieser im Grunde eine konsequente evolutionäre Zurückverfolgung überhaupt ermöglicht. Denn (Tooby & Cosmides in [158]):

...: humans are adaptation-executers, not fitness-strivers. For this reason, human behavior is not well explained by attempts to show how it corresponds to contextually appropriate fitness pursuit. Instead, it should be explained as the output of adaptations (using present circumstances as input), which are themselves the constructed product of selection under ancestral conditions.

Doch dabei sind nicht alle Komponenten dieses Ansatzes hier von gleicher Bedeutung! Vor allem der evolutionäre Kontext im Rahmen der Umwelt der evolutionären Anpassung ist entscheidend, insbesondere die dazugehörigen Begrifflichkeiten (vgl. Def. 1.6-1.13). Dabei ist anzumerken, dass der Begriff Modul dort im Sinne von Cosmides & Tooby definiert ist (vgl. Def. 1.9), d.h. in dieser Untersuchung wird im Weiteren unter Modul stets darwinisches Modul zu verstehen sein, auch wenn von pheripheren und/oder konzeptualen Modulen die Rede ist. Die von Cosmides & Tooby entwickelte streng modulare Sicht auf das menschliche Gehirn, die starke MMH, ist allerdings in dieser Form für die folgende Theoriebildung nicht notwendig und wie oben gesehen mit diversen Problemen behaftet. Daher wird hier eine schwache MMH zu Grunde gelegt, welche zwar davon ausgeht, dass das Gehirn größtenteils modular organisiert ist, welche aber auch insbesondere die Option offen lässt, dass es auch allgemeine kognitive Verarbeitungsmechanismen gibt, die nicht bereichsspezifisch sind. Doch wie kann man sich nun darauf aufbauend die kognitive Architektur des menschlichen Gehirns vorstellen? Da wären zunächst einmal die Wahrnehmungsmodule, die peripheren Module, w.z.B. das räumliche Sehen, die visuelle Objektverfolgung, die Einschätzung von Abständen, das Wiedererkennen von Figuren und Formen, der Zahlensinn, etc., und die Emotionsmodule, welche nicht nur charakteristisch für das menschliche Gehirn sind, d.h. sie gehören nicht zur spezifisch menschlichen Intelligenzevolution im Zuge der Hominisation, sondern ihre Evolution geht dieser weitestgehend voraus. Die Informationen bzw. ersten Repräsentationen, die diese Module bereitstellen, werden dann im Gehirn weiterverarbeitet. Wie oben erklärt, vermutet Fodor, dass diese kognitive Weiterverarbeitung von allgemein-zentralen kognitiven Verarbeitungsmechanismen geleistet wird, die nicht modular aufgestellt sind, während Sperber mit Hilfe des Begriffs des konzeptualen Moduls, eine Modulhierachie bzw. ein Modulnetzwerk, favorisiert, welche ebenfalls diese Rolle übernehmen könnte (Sperber in [145]):

The mind is here pictured as involving three tiers: a single thick layer of input modules, just as Fodor says, then a complex network of first-order conceptual modules of all kinds, and then a second-order metarepresentational module.

Da man aber weder die Existenz von allgemein-zentralen kognitiven Verarbeitungsmechanismen noch die von konzeptualen Modulen empirisch eindeutig bestätigen oder widerlegen kann, werde ich mich hier an dieser Stelle zunächst einmal im Falle der kognitiven Weiterverarbeitung nicht festlegen, ob es nun einer oder mehrere allgemeine kognitive Verarbeitungsmechanismen oder eine Reihe von konzeptualen Modulen sind oder sogar eine Kombination aus beiden Möglichkeiten ist, die die Weiterverarbeitung des repräsentationalen Inputs der darunter befindlichen Module übernehmen. Überdies kann man in diesem repräsentationalen Zusammenhang wohl auch davon ausgehen, dass es metarepräsentationale Module noch höherer Ordnung (d.h.: > 2) gibt. Ganz pragmatisch werde ich daher all die höheren kognitiven Fähigkeiten als modular organisiert ansehen, die sich zum einen in eine solche repräsentationale Verarbeitungsstruktur einordnen lassen und für die sich zum anderen eine evolutionäre Funktion finden lässt. Denn es kommt bei der evolutionären Zurückverfolgung hauptsächlich auf diese funktionalen Zusammenhänge an. Dabei ist zu berücksichtigen, dass es sich bei dieser evolutionären Zurückverfolgung nicht um eine ingenieurwissenschaftliche Rekonstruktion handelt, da die natürliche Selektion im Zuge der Evolution nicht wie ein Ingenieur arbeitet, sondern vielmehr wie ein Kesselflicker, der mit einem gegebenen löchrigen Kessel und mit den zur Verfügung stehenden Materialien versucht, die Löcher im Kessel so gut wie möglich zu flicken. Daher gilt es bei der evolutionären Zurückverfolgung auch nicht eine zielgerichte Konstruktion zurückzuverfolgen, also eine Rekonstruktion zu bewerkstelligen, sondern den Versuch zu unternehmen, eine ziellose und lokal opportunistische Konstruktion zurückzuverfolgen, also eine mögliche "Rekesselflickation" offenzulegen. Paul Andrews, Steven Gangestad und Dan Metthews betonen dies ebenfalls in [1]:

If selection should be thought of not as an engineer but rather as a tinkerer, the evolutionary biologist confronted with understanding the outcomes of selection faces a task not of reverse engineering, but rather, of "reverse tinkering".

Daher werde ich mich, wie oben bereits angedeutet, im Zuge meiner Theoriebildung hier nicht mit fruchtlosen Diskussionen über "Anpassung vs. Nebenprodukt vs. Exaptation vs. Spandrel" beschäftigen, sondern mich auf das grundlegende evolutionären Gesamtbild konzentrieren,[43] bei dem vor allem die Intelligenzevolution im Zuge der Hominisation, welche zum heutigen moderenen Menschen (*homo sapiens*) geführt hat, ins Zentrum der Betrachtung rückt, da meine vorläufige Arbeitshypothese, welche ich in Unterabschnitt 1.1.5 aufgestellt habe, den evolutionären Ursprung bzw. die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz verortet und sich diese spezifisch menschliche hochentwickelte soziale Intelligenz vornehmlich im Zuge der Hominisation entwickelt hat. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Intelligenzevolution im Zuge der Hominisation als sekundäre Intelligenzevolution

[43]Die genaue empirische Prüfung, ob es sich bei einer vorliegenden kognitiven Fähigkeit tatsächlich um eine Anpassung, etc. handelt, bleibt letztendlich im Detail von den entsprechenden Einzeldisziplinen zu untersuchen und kann im Zuge meiner Theoriebildung hier auch gar nicht geleistet werden und ist auch nicht das Ziel dieser Analyse, welche zunächst einmal einen möglichen evolutionären Pfad, der zum mathematischen Denken führen könnte, aufdecken soll.

bezeichnet und die dieser vorausgehende Intelligenzevolution als primäre Intelligenzevolution, welche zwar ebenfalls für das mathematische Denken wichtig ist - man denke nur an den Zahlensinn! - aber eben nicht charakteristisch menschlich ist und somit nicht hinreichend für eine Erklärung des mathematischen Denkens. Zusammenfassend kann man sich den so abgesteckten konzeptualen Rahmen einer modularen Sichtweise auf das menschliche Gehirn, der meiner weiteren Theoriebildung vorangestellt wird, durch das Flussdiagramm in Abbildung 1.3 noch einmal vergegenwärtigen.[44]

Auf dieser mathematisch-philosophischen und evolutionspsychologisch-soziobiologischen Grundlage kann man sich nun, begrifflich und theoretisch abgesichert, die Untersuchung des evolutionären Ursprungs bzw. der evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens vornehmen, welche ich bereits in Unterabschnitt 1.1.5 im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz grob lokalisiert habe. Die nächste Frage im Zuge der weiteren Theoriebildung betrifft die Intelligenz. Wie lässt sich Intelligenz, insbesondere soziale Intelligenz, auf dieser evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundlage charakterisieren? Wie hängt sie mit den kognitiven Fähigkeiten des Menschen evolutionär zusammen bzw. wie sieht das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenz aus? Und was hat das alles genau

[44]Zu beachten ist dabei insbesondere, dass diese modulare Sichtweise erstens eine schwache MMH beinhaltet und zweitens weitestgehend in den konzeptualen Rahmen einer evolutionären Psychologie von Cosmides & Tooby fällt, welche Matteo Mameli in [109] als *narrow-sense evolutionary psychologists* bezeichnet hat und sie so von den *broad-sense evolutionary psychologists* (z.B. Dunbar & Barrett (Dunbar & Barrett in [49][Kap. 1])) abgrenzt. Dabei betreffen die Differenzen dieser beiden "Schulen" hauptsächlich die "Adaptation executers vs. Fitness maximizer"-Debatte, welche sich insbesondere um die beiden Identifizierungsprobleme (einerseits die Identifizierung von Anpassungen und andererseits die Identifizierung von Anpassungsproblemen im EEA) und um die "reengineering vs. retinkering"-Problematik dreht (Matteo Mameli in [109][3.7]). Die von mir hier vertretene Position befindet sich zwischen diesen beiden Lagern, wobei ich mich allerdings im Falle des konzeptualen Rahmens der evolutionären Psychologie der Seite der "Adaptation executers" anschließe, da nur dieser eng gesteckte evolutionäre Rahmen, meines Erachtens, eine evolutionäre Zurückverfolgung überhaupt ermöglicht, wobei man sich allerdings, und darin besteht im Grunde mein Entgegenkommen im Hinblick auf die Seite der "Fitness maximizer", sich stets der beiden Identifizierungsprobleme und der Tatsache, dass es sich bei einer evolutionären Zurückverfolgung mehr um ein "retinkering" als um ein "reengineering" handelt, bewusst sein sollte.

mit dem mathematischen Denken zu tun? Diesen grundlegenden Fragen soll nun im folgenden zweiten und dritten Kapitel nachgegangen werden.

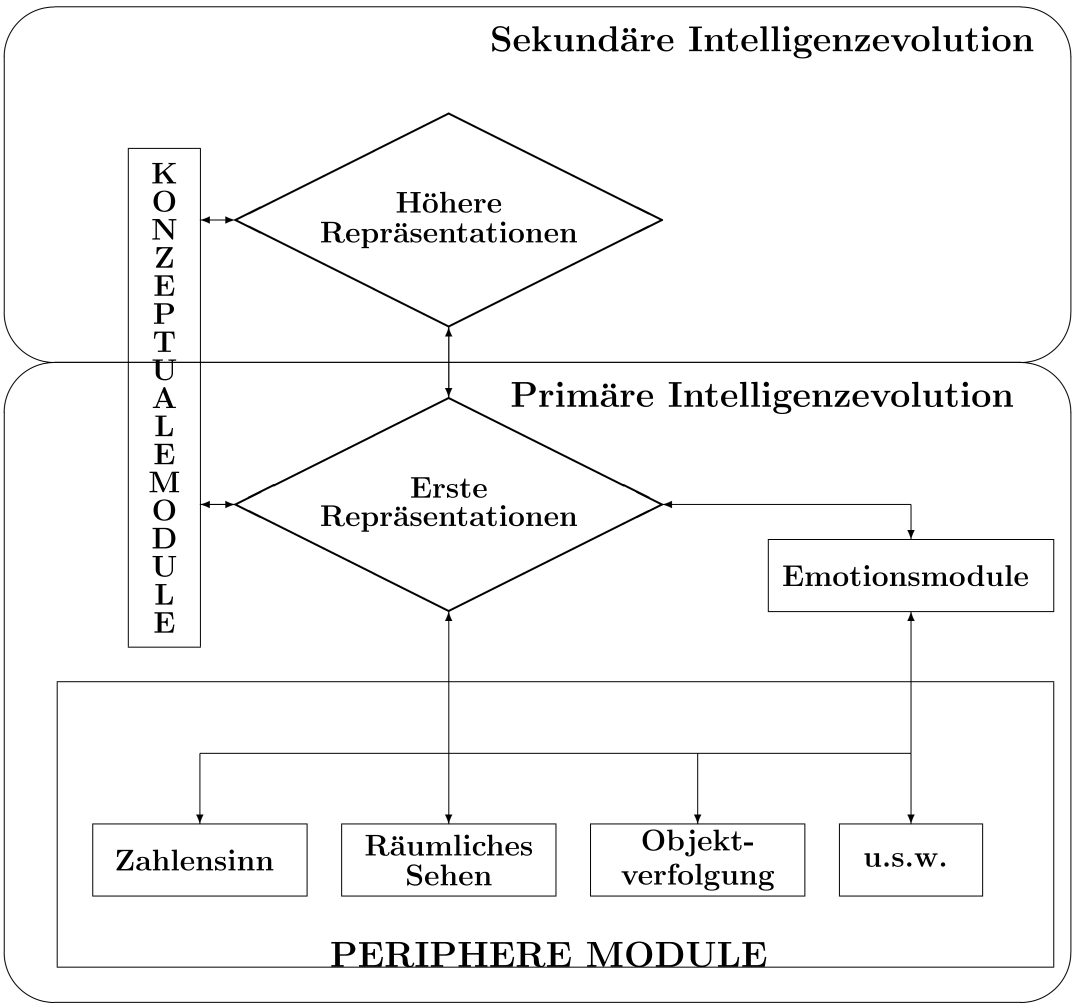


Abbildung 1.3.: Eine mögliche evolutionspsychologische und soziobiologische Sicht auf das menschliche Gehirn.

Kapitel 2

Die soziale Intelligenz und ihr evolutionäres Umfeld

In diesem Kapitel geht es um den Zusammenhang zwischen sozialer Intelligenz und ihrem evolutionären Umfeld. Der erste Abschnitt teilt sich dabei in zwei Unterabschnitte, wobei sich der erste dieser Unterabschnitte mit der Frage beschäftigt, wie man Intelligenz modular charakterisieren kann, und der zweite der Frage nachgeht, warum der Ausgangspunkt der spezifisch menschlichen Intelligenz einen sozialen Ursprung hat und nicht ausschließlich einen ökologischen. Im zweiten Abschnitt wird dann das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenz untersucht, indem versucht wird, die evolutionären Zusammenhänge zwischen den diversen physischen und kognitiven Fähigkeiten aufzudecken, die im Zuge der sozialen Intelligenzevolution eine Rolle gespielt haben könnten. Dies alles geschieht mit dem Ziel, die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" aus Unterabschnitt 1.1.3 , mit welcher das mathematische Denken beschrieben worden ist, auf dieser evolutionären Grundlage erklären zu können, um damit dann auch einen Erklärungsansatz für das mathematische Denken zu erhalten, mit welchem man weiterführend die in Unterabschnitt 1.1.5 getroffene vorläufige Arbeitshypothese über die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denken bestätigen und konkretisieren kann.

2.1 Die soziale Intelligenz

Bevor man sich mit der sozialen Intelligenz genauer beschäftigen kann, muss man zunächst einmal auf der bisher entwickelten theoretischen Basis charakterisieren, was Intelligenz überhaupt ist. Anschließend ist dann zu klären, warum ausgerechnet die soziale Intelligenz hier die entscheidende Rolle spielt und nicht eine ökologische Intelligenz.

2.1.1 Wie lässt sich Intelligenz modular charakterisieren?

Nach der vorgestellten evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundlage setzt sich das menschliche Gehirn weitestgehend aus Modulen zusammen (schwache MMH), welche funktions- und bereichsspezifisch Anpassungsprobleme und auch Nichtanpassungsprobleme lösen können, indem sie (adaptives) Verhalten erzeugen. Die Frage ist nun, wie man auf dieser modularen Grundlage Intelligenz definieren kann? Dies ist nämlich alles andere als offensichtlich, da eine modulare Intelligenzdefinition beinhalten muss, dass Intelligenz stets funktions- und bereichsspezifisch ist, d.h. angepasst an eine bestimmte evolutionäre Umwelt bzw. an bestimmte evolutionäre Kontexte, seien sie sozialer und/oder ökologischer Natur. Verändert sich nun aber die Umwelt, dann ermöglichen die Module zwar immer noch ein Verhalten, welches aber vielleicht nicht mehr angepasst ist bzw. weniger intelligent erscheint, je nachdem, wie stark sich die diesbezügliche Umwelt verändert hat. Diese Problematik kam bereits in Unterabschnitt 1.2.1 anhand von Park's Unterscheidung zwischen adaptiven und nicht-adaptiven Effekten zur Sprache und sie spiegelt sich auch in Sperber's Unterscheidung zwischen "proper domain" und "actual domain" wieder (Sperber in [145], Sperber & Hirschfeld in [149]). In [145] erreicht Sperber im Rahmen seiner hierarchischen Modulstruktur die höheren kognitiven Fähigkeiten mit dem Begriff des konzeptualen Moduls, welchen er jeweils über die dazugehörigen konzeptualen Bereiche charakterisiert (vgl. Unterabschnitt 1.2.3). Da diese konzeptualen Bereiche aber umweltabhängig sind, unterscheidet Sperber weiter zwischen tatsächlichem Bereich (actual domain) und geeignetem Bereich (proper domain) und nennt die sich so zusammensetzenden konzeptualen Bereiche dann kulturelle Bereiche. Der tatsächliche Bereich eines konzeptualen Moduls sind dann all die Informationen, welche die Eingangsbedingungen dieses konzeptualen Moduls erfüllen, wogegen der geeignete Bereich lediglich aus den Informationen besteht, die das konzeptuale Modul für seine ursprüngliche adaptive Funktion benötigt. Zusammen bilden tatsächlicher und geeigneter Bereich dann den kulturellen Bereich eines konzeptualen Moduls. In [149] greifen Sperber & Hirschfeld diese Unterscheidung wieder auf, um die Existenz, die Verschiedenheit und die Stabilität menschlicher Kulturen erklären zu können, und verdeutlichen sie detailliert unter anderem anhand des Gesichtererkennungsmoduls (face-recognition module). Der geeignete Bereich dieses konzeptualen Moduls sind dann Gesichter von Personen und der tatsächliche Bereich sind gesichtsähnliche Stimuli (face-like stimuli), w.z.B. Portraits, Karikaturen und Masken. Zusammengenommen machen dann Gesichter, Portraits, Karikaturen und Masken den kulturellen Bereich des Gesichtererkennungsmoduls aus.

Es sieht so aus, als komme man bei einer modularen Intelligenzdefinition nicht um eine Zweiteilung umhin, welche diese evolutionäre Problematik im Zuge von Umweltveränderungen berücksichtigt. So ist es auch wenig überraschend, dass Cosmides & Tooby in [32] zwei zusammenhängende Intelligenzdefinitionen, "dedicated intelligence" und "improvisational intelligence", vorstellen:

$Intelligence_1$: *A computational system or program is intelligent*$_1$*, when it is well designed for solving a target set of adaptive computational problems. We will call this dedicated intelligence.*

$Intelligence_2$: *A computational system is intelligent*$_2$ *to the extent that it is well designed for solving adaptive computational problems, and has components designed to exploit transient or novel local conditions to archiev adaptive outcomes. We call this improvisational intelligence.*

Diese beiden zusammenhängenden Intelligenzdefinitionen werden der evolutionär-modularen Problematik gerecht. Die "dedicated intelligence" zielt im Hinblick auf das modular organisierte menschliche Gehirn auf die "Intelligenz" der einzelnen Module ab, die jeweils als kognitive Anpassungen ein dazugehöriges Anpassungsproblem "intelligent" lösen können, in dem sie angepasstes Verhalten erzeugen.[1]

[1]Bei der Definition der "dedicated intelligence" ist zu beachten, dass diese nicht von der Existenz eines Gehirns abhängig ist, worauf Cosmides & Tooby in [32] auch ausdrücklich hin-

Die "improvisational intelligence" geht darüber hinaus: sie zielt zwar ebenfalls auf die "Intelligenz" der einzelnen Module ab, tut dies aber in Anbetracht einer sich verändernden Umwelt bzw. zeitlich und räumlich beschränkter, kontingenter Bedingungen. M.a.W.: Module und ihre Interaktion untereinander können neben den dazugehörigen Anpassungsproblemen auch neue Anpassungsprobleme und insbesondere Nicht-Anpassungsprobleme "intelligent" lösen, in dem sie (angepasstes) Verhalten erzeugen.[2] Dabei ist zu berücksichtigen, dass dieses erzeugte Verhalten in einer veränderten Umwelt nicht $intelligent_1$ sein muss. Als Beispiel denke man sich wieder die menschliche Präferenz für süße und fetthaltige Nahrungsmittel, welche im EEA vorteilhaft und damit adaptiv war, da diese Nahrungsmittel nicht im Überfluss zu freien Verfügung standen. In der heutigen

---

weisen. Sie legen Wert darauf, dass auch berechnende biologische Regulationsprozesse, die nicht im Gehirn lokalisiert sind, als $intelligent_1$ charakterisiert werden können.

[2]Bei der Definition von "improvisational intelligence" ist zu beachten, dass diese jetzt von der Existenz eines Gehirns abhängig ist, denn Cosmides & Tooby verorten in [32] als den entscheidenden Schritt hin zu einer "improvisational intelligence" den Eintritt der Hominiden in die kognitive Nische und der damit einhergehenden Vergrößerung des zu verarbeitenden Informationsflusses, insbesondere der zeitlich und räumlich beschränkten, kontingenten Umweltinformationen, welche zu flüchtig sind, um direkt evolutionär wirksam werden zu können. Die Verwendung solcher Informationen zur Regulation improvisierten Verhaltens verursacht nach Cosmides & Tooby das "scope problem", welches in der Handhabung und Kontrolle dieses ausufernden zeitlich und räumlich kontingenten Informationsflusses besteht. Den Übergang von einer "dedicated intelligence" hin zu einer "improvisational intelligence" sehen Cosmides & Tooby dabei in der Bewältigung dieses "scope problems" durch eine Reihe entsprechender kognitiver Anpassungen, welche sie als "scope syntax" bezeichnen. Nach Cosmides & Tooby besitzt jedes System, dem man eine "improvisational intelligence" zuschreiben kann, eine "scope syntax". Unter diese "scope syntax" fallen dabei unter anderem metarepräsentationale Anpassungen und Entkopplungssysteme, welche auf einer repräsentationalen Verarbeitungsstruktur ("scope operator", "scope representations") basieren. Die mögliche Existenz einer solchen repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im modular organisierten Gehirn ist bereits in Abschnitt 1.2 angesprochen geworden (vgl. Abbildung 1.3), wobei sie allerdings noch nicht genauer charakterisiert wurde, was auch daran liegt, dass diese repräsentationale Verarbeitungsstruktur der erste Kandidat für einen allgemein-zentralen kognitiven Verarbeitungsprozess ist, was auch für mich ein wesentlicher Grund dafür ist, mich im Zuge meiner Theoriebildung hier auf eine schwache und nicht auf eine starke MMH festgelegt zu haben. Im Folgenden (vgl. Abschnitt 2.2) wird daher diese repräsentationale Verarbeitungsstruktur in einem modular organisierten Gehirn noch eine entscheidende Rolle für die Theoriebildung spielen.

Überflussgesellschaft dagegen ist eine solche Präferenz nicht mehr adaptiv, da der übermäßige Verzehr dieser Nahrungsmittel zu diversen Erkrankungen führen kann (z.B.: Herz-Kreislauf- und Gelenkerkrankungen). Somit würde man wohl sagen, dass die Präferenz für süße und fetthaltige Nahrungsmittel im EEA, wo diese selten vorkamen, "intelligent" war ($intelligent_1$), während sie heute in einer Überflussgesellschaft als "nicht-intelligent" einzustufen ist (nicht-$intelligent_2$). Ein Verzicht auf den übermäßigen Verzehr von süßen- und fetthaltigen Lebensmitteln wäre in der heutigen Überflussgesellschaft adaptiv und somit als $intelligent_2$ einzustufen, auch wenn die einzelnen Teilschritte (der jeweilige Verzicht auf diese sofort verfügbaren Nahrungsmittel) hin zum adaptiven Verhalten in einem solchen Fall als nicht-$intelligent_1$ vermerkt werden müssen. Somit reflektieren diese beiden zusammenhängenden modularen Intelligenzdefinitionen zum einen die Funktions- und Bereichsspezifität einer evolutionär-modularen Sichtweise auf das menschliche Gehirn und zum anderen beziehen sie eine sich veränderende Umwelt mit ein. Aber ist es wirklich nicht möglich, diese beiden zusammenhängenden Intelligenzdefinitionen zu einer einzelnen bzgl. eines modular organisierten Gehirns zu verallgemeinern?

Hans Kummer, Lorraine Daston, Gerd Gigerenzer und Joan Silk haben in [98] eine Intelligenzdefinition vorgelegt, welche dabei helfen könnte, eine einheitliche modulare Intelligenzdefinition zu formulieren. Unter Intelligenz verstehen sie die Fähigkeit eines Subjekts, in komplexen Situationen entsprechende flexible Antworten zu geben bzw. Reaktionen zu zeigen, die einer veränderten Zielsetzung des Subjekts Rechnung tragen. Komplexe Situationen sind bei ihnen Situationen, die reich an kombinatorischen Möglichkeiten sind und variabel in dem Sinne, dass ihre Objekte regulären Veränderungen unterliegen können und/oder unvorhersagbar in dem Sinne sind, dass plötzliche Veränderungen nicht einfach ausgewertet werden können. Weiter verstehen sie unter flexiblen Antworten bzw. Reaktionen die Fähigkeit, das eigene Verhalten an eine große Bandbreite von spezifischen Situationen anzupassen. Mal abgesehen davon, dass dies bereits eine sehr allgemeine Intelligenzdefinition ist, bietet sie dennoch einen Ansatzpunkt, die von Cosmides & Tooby vertretenen zwei zusammenhängenden Intelligenzdefinitionen zu vereinigen und zwar, ohne dass man dabei die evolutionär-modulare Problematik vernachlässigen würde. Komplexe Situationen sind evolutionär gesehen soziale und/oder ökologische Anpassungsprobleme und Nicht-Anpassungsprobleme. Bei flexiblen Antworten bzw. Reaktionen handelt es sich um Verhalten, welches die zu den Anpassungsproblemen bzw. Nicht-Anpassungsproblemen gehörenden Module erzeugen. Ob dieses Verhalten intelligent ist oder nicht, spielt dabei erst einmal als normative Wertung keine Rolle. Entscheidend ist, dass Verhalten erzeugt wird, welches angepasst oder auch nicht angepasst ist, wobei man dann sagen kann, dass angepasstes Verhalten intelligent und nicht-angepasstes Verhalten nicht-intelligent ist. Allerdings kann Intelligenz im modularen Sinne keine kognitive Fähigkeit sein, da in diesem Kontext kognitive Fähigkeiten entweder selbst Module sind oder sich auf diese zurückführen lassen. Sie muss im Kern, wie dies schon bei Cosmides & Tooby ersichtlich ist, als Potential der einzelnen Module und damit des dazugehörigen modularen Systems verstanden werden. Jetzt ist man auch in der Lage, eine verallgemeinerte modulare Intelligenzdefinition zu formulieren, welche die zwei zusammenhängenden Intelligenzdefinitionen von Cosmides & Tooby im Rahmen einer modularen Sicht auf das Gehirn, sei es nun ein starke MMH oder auch, wie hier von mir vertreten, eine schwache MMH zusammenführt. Meiner weiteren Argumentation hier wird daher die folgende modulare Intelligenzdefinition zu Grunde gelegt:

Definition 2.1 (Intelligenz)

*Unter **Intelligenz** versteht man das Potential des (menschlichen) Gehirns, mit Hilfe seiner Module Verhalten zu erzeugen, welches an die gegebenen Umstände bzw. Kontexte möglichst gut angepasst ist.*

Diese verallgemeinerte modulare Intelligenzdefinition beinhaltet beides, eine "dedicated intelligence" und eine "improvisational intelligence", da sie die gegebenen Umstände und Kontexte erst einmal variabel hält. Handelt es sich dabei um die zu den Modulen gehörenden evolutionären Umstände und Kontexte, dann beinhaltet sie eine "dedicated intelligence". Handelt es sich dagegen um moderne Umstände und Kontexte, dann entspricht sie einer "improvisational intelligence". Wichtig dabei ist vor allem, dass eine modulare Intelligenzdefinition, sei es nun auf der Basis einer starken oder schwachen MMH, sich verändernde Umwelten berücksichtigt, indem sie Intelligenz an angepasstes Verhalten knüpft und somit der damit einhergehenden normativen Falle bei der Definition von Intelligenz ent-

geht.
Unter Verwendung dieser modularen Intelligenzdefinition kann man nun weiter zwischen sozialer und ökologischer Intelligenz unterscheiden:

Definition 2.2 (Soziale und ökologische Intelligenz)

*Unter **sozialer Intelligenz** versteht man eine Intelligenz in sozialen Kontexten, welche sich in einer sozialen Umwelt zwangsläufig ergeben. Entsprechend versteht man unter **ökologischer Intelligenz** eine Intelligenz in ökologischen Kontexten.*

Nun stellt sich natürlich sofort die Frage, welche Intelligenzform - soziale oder ökologische - für die menschliche Intelligenzevolution ausschlaggebend war?

2.1.2 Warum soziale und nicht ökologische Intelligenz?

Zur Beantwortung dieser Frage muss man sich zunächst einmal darüber im Klaren sein, um welche konkreten Sachverhalte es sich eigentlich bei sozialen bzw. ökologischen Kontexten handelt, denn diese Kontexte sind es schließlich, die eine dazugehörige soziale bzw. ökologische Intelligenz-Hypothese motivieren. Bei ökologischen Kontexten dreht es sich hauptsächlich um Probleme des primären Überlebens, w.z.B. die Nahrungsbeschaffung und -verarbeitung (Erreichbarkeit der Nahrungsmittel, Einsatz von Werkzeugen, etc.), die Habitatwahl (wenige Fressfeinde, wenige Wettbewerber, ausreichend Nahrung, wenige Parasiten, etc.) und das Klima (Temperatur, Luftfeuchtigkeit, etc.), während es sich bei sozialen Kontexten vorwiegend um Probleme handelt, die innerhalb sozialer Gruppen auftreten können, w.z.B. die soziale Komplexität (ein prinzipielles soziales Zurechtfinden in der Gruppe, Freunde, Verbündete, Konkurrenten, Verwandte, etc.), die machiavellistischen Taktiken (Täuschen, Heucheln, Ausnutzen, Paktieren, etc.), die Kooperation (Reziprozität, Nahrungsteilung, Fiktionen, Rituale, etc.), die Kommunikation (visuelle und akustische Signale, Sprache, Symbole, etc.) und das Lehren (Imitation, Unterweisung, etc.). Diese ökologischen und sozialen Kontexte führen dann zu den entsprechenden Ökologischen und Sozialen Intelligenz-Hypothesen (ÖIH bzw. SIH). Dabei fallen unter die ÖIH hauptsächlich Hypothesen, welche das Problem der Nahrungsbeschaffung oder der Habitatgröße in den Vordergrund stellen. Robin Dunbar klassifiziert in [47] die ÖIH in drei

Kategorien, welche er als "dietary"-, "mental maps"- und "extractive foraging"-Hypothese bezeichnet und fasst deren Argumentation folgendenmaßen zusammen:

In essence, these argue, respectively, that primate species will need larger brains if (i) they are frugivorous because fruits are more ehpemeral and pathy in their distribution than leaves are, and hence require more memory to find; (ii) they have larger ranges because of the greater memory requirements of large-scale mental maps; or (iii) their diet requires them to extract resources from a matrix in which they are embedded (e.g., they must remove fruit pulp from a case, stimulate gum flow from a tree, extract termites from a termitarium, or hunt species that are cryptic or behave evasively.

Richard Byrne unterscheidet in diesem Zusammenhang in [23] vier Versionen der ÖIH ("cognitive maps", "simulation of movement", "constructional skills" und "skilled feeding techniques")[3], welche er unter dem Sammelbegriff "Technical Intelligence Hypothesis (TIH)" bindet und mit welchen er die Intelligenzunterschiede zwischen Affen und Menschenaffen erklären möchte. In Anbetracht dieser vier Versionen der TIH erklärt Byrne, dass sich diese lediglich in der Art der mentalen Repräsentationen unterscheiden, die für die entsprechenden Fähigkeiten notwendig sind. Insgesamt sieht Byrne in [23] die TIH als Ergänzung zur machiavellistischen Variante einer SIH (s. unten):

It needs to be emphasised that this hypothesis is intended to complement the Machiavellian intelligence explanation, which is certainly the better explanation of

[3]Die "cognitive maps"-Hypothese beinhaltet dabei im Grunde Dunbar's "dietary"- und "mental maps"-Hypothese und besteht aus der Argumentation, dass die Komplexität der Nahrungsverteilung und -beschaffung einen Selektionsdruck ausübt, mentale Repräsentationen zu bilden, welche einem Individuum eine effiziente Navigation in einer sich über die Zeit verändernden Umwelt ermöglichen. Der "simulation of movement"-Hypothese liegt die Argumentation zu Grunde, dass die relativ schweren in den Bäumen lebenden großen Affen bei ihrer hangelnden Fortbewegung Gefahr laufen abzustürzen, da zu dünne Äste ihr Gewicht nicht tragen können, was dann einen Selektionsdruck dahingehend bewirkt, eine äußere Perspektive auf den eigenen Körper zu entwickeln, um die Tragfähigkeit von Ästen abschätzen zu können. Ähnlich verläuft auch das Argument der "constructional skills"-Hypothese, welche sich auf die technischen Nestbau-Fähigkeiten großer Affen bezieht. Und die Argumentation der "skilled feeding techniques"-Hypothese entspricht der von Dunbar's "extracting foraging"-Hypothese.

the earlier haplorhine rise in intelligence, and might (or might not) explain the later hominid one that led to Homo erectus.

Aber auch die resultierenden SIH weichen minimal voneinander ab, da sie die verschiedenen genannten sozialen Kontexte (machiavellistische Taktiken, Kooperation, Kommunikation, Lehren, soziale Komplexität) unterschiedlich gewichten und in Zusammenhang bringen, w.z.B. "Machiavellian Intelligence Hypothesis (MIH)"(Humphrey in [84], Byrne & Whiten in [20], Byrne in [21], [22]), die SIH als "Niche Construction Hypothesis (NCH)" (Sterelny in [151])[4], die "Vygotskian Intelligence Hypothesis (VIH)" (Vygotsky in [171], Moll & Tomasello in [115])[5],

---

[4]Kim Sterelny vertritt in [151] keine reine MIH, sondern konzentriert sich auf die menschliche Intelligenzevolution der letzten 4.5 Millionen Jahre, bei welcher er die Kooperation in den Vordergrund stellt, die sich zwangsläufig einstellen muss, wenn in Gruppen lebende Individuen gemeinsam auf ökologische Herausforderungen reagieren. Machiavellistische Taktiken spielten zwar dabei auch eine Rolle, aber sie seien überbewertet, vielmehr habe die Erzeugung von Kooperationsgewinnen die menschliche Intelligenzevolution vorangetrieben. Nach Sterelny hängt die menschliche Intelligenzevolution von den Eigenschaften der Umwelten ab, die sich die Menschen selbst geschaffen haben. Daher sieht er die SIH als eine NCH an, bei welcher man ökologische und soziale Selektionsdrücke nicht mehr unabhängig voneinander betrachten kann.

[5]Vygotsky selbst betont in [171] zwar die sozialen Aspekte der Intelligenz im Zuge von Kultur, Kooperation, Kommunikation und Lehren, aber er beschränkt sich größtenteil auf die Ontogenese und nicht auf die Phylogenese (Vygotsky in [171][S. 90, Z. 16-20]):

We propose that an essential feature of learning is that it creates the zone of proximal development; that is, learning awakens a variety of internal developmental processes that are able to operate only when the child is interacting with people in his enviroment and in cooperation with his peers.

Vygotski formuliert in [171] zwar keine dezidierte SIH, erklärt im Zuge seiner Ausführungen aber den Tier/Mensch-Intelligenzunterschied damit, dass Primaten keine "zone of proximate development" besitzen, was zur Folge hat, dass sie nicht zum Lernen im menschlichen Sinne fähig sind (Vygotsky in [171][S. 88, Z. 26-33]):

A primate can learn a great deal through training by using its mechanical and mental skills, but it cannot be made more intelligent, that is, it cannot be taught to solve a variety of more advanced problems independently. For this reason animals are incapable of learning in the human sense of the term; human learning presupposes a specific social nature and a process by which children grow into the intellectual life of those around them.

Die Bezeichnung "vygotskian intelligence hypothesis" geht dabei auf Moll & Tomasello in [115] zurück, welche unter anderem von Vygotsky's Ausführungen motiviert wurden:

eine allgemeine SIH (Kummer et al. in [98])[6] und die "Social Brain Hypothesis (SBH)" (Dunbar in [45], [46], [47], [48], Dunbar & Shultz in [50]). Wie anhand der Referenzen bereits ersichtlich ist, gibt es mehr Evidenzen, die eine SIH unterstützen. Doch um verstehen zu können, warum sich dies so verhält, muss man zum Ausgangspunkt der sozialen Intelligenzdiskussion im evolutionären Rahmen zurückgehen und den diesbezüglichen Diskussionsverlauf bis heute betrachten.

Am Anfang dieser sozialen Intelligenzdiskussion im evolutionären Rahmen steht eine Arbeit von Nicholas Humphrey (Humphrey in [84])[7], in welcher Humphrey

---

A reasonable proposal is therefore that primate cognition in general was driven by social competition, but beyond that the unique aspects of human cognition - the cognitive skills needed to create complex technologies, cultural institutions and systems of symbols, for example - were driven by, or even constituted by, social cooperation. We call this the Vygotskian intelligence hypothesis.

Im Grunde dreht sich die VIH um die Erklärung der Intelligenzunterschiede zwischen Menschenaffen und Menschen. Während bei Affen und Menschenaffen noch eine MIH zu Grunde gelegt wird und machiavellistische Taktiken im Innergruppenwettbewerb um Nahrungsresourcen im Zentrum stehen, verlagert sich im Falle des Menschen der Schwerpunkt der Intelligenzevolution auf die Kooperation innerhalb sozialer Gruppen.

[6] Die SIH von Kummer et al., welche auf deren, bereits im vorangegangenen Unterabschnitt erwähnten, Intelligenzdefinition beruht, besagt im Grunde erst einmal, dass die natürliche Intelligenz von Primaten und Menschen dem sozialen Bereich entspringt. Gerd Gigerenzer erklärt diese SIH in [68] noch einmal und betont, dass sie sich lediglich insofern von der MIH unterscheidet, dass sie nicht den Schwerpunkt auf die machiavellistischen Ausbeutungstaktiken legt, sondern Ausbeutung und Kooperation nicht unterschiedlich gewichtet werden. Sie ist sozusagen allgemeiner gehalten und schließt daher die MIH mit ein. Wichtiger ist Gigerenzer der modulare Charakter der sozialen Intelligenz: ein soziales Intelligenzmodul ist eine Fähigkeit, ist bereichspezifisch, besitzt einen tatsächlichen und einen passenden Bereich, wird von einem Auslöseralgorithmus aktiviert, ist eingebettet in eine hierarchische Modulorganisation und ist schnell und sparsam beim Lösen des dazugehörigen sozialen Anpassungsproblems. Das bereits angesprochene grundlegende Problem dieser modularen Intelligenzdefinition ist die Sichtweise, die Intelligenz als Fähigkeit sieht und nicht erst einmal als Potential jedes einzelnen Moduls.

[7] Genauer muss man eigentlich von zwei voneinander unabhängigen Ursprüngen der sozialen Intelligenzdiskussion ausgehen. Bei dem einem handelt es sich um die genannte Arbeit von Humphrey und bei dem anderen um eine Arbeit von Alison Jolly (Jolly in [86]), welche zehn Jahre früher publiziert wurde, aber Humphrey beim Verfassen seiner Arbeit noch nicht bekannt war (Humphrey in [84][Postscript]). Obwohl Jolly ausgehend vom sozialen Verhalten von Lemuren (*lemur catta*, *propithecus verreauxi*) ähnlich argumentiert, formulierte sie keine dezidierte SIH für Primaten und Hominiden, sondern beschränkte sich auf den Übergang "from prosimian

argumentiert, dass die höheren intellektuellen Fähigkeiten von Primaten als Anpassungen an eine komplexe soziale Umwelt evolviert sind. Dabei legt Humphrey in [84] besonderes Gewicht auf die soziale Komplexität, die ab einem bestimmten Komplexitätslevel wie eine evolutionäre Ratsche wirkt und die Intelligenzevolution vorantreibt:

And in these circumstances there can be no going back: an evolutionary "ratchet" has been set up, acting like a self-winding watch to increase the general intellectual standing of the species.

Insbesondere sieht Humphrey in [84] einen Selektionsdruck, den größten individuellen Nutzen aus dem Gruppenleben zu ziehen, ohne die Vorteile, die ein Gruppenleben mit sich bringt, zu gefährden:

In a complex society, such as those we know exists in higher primates, there are benefits to be gained for each individual member both from preserving the overall structure of the group and at the same time from exploiting and out-manoeuvring others within it.

Diese höhere soziale Intelligenz ist nun für Humphrey in [84] die Voraussetzung für eine ökologische (insb. technische) Intelligenz:

To put the matter badly: if an animal spends all morning in non-productive socialising, he must be at least twice as efficient a producer in the afternoon.

Damit hat Humphrey in [84] eine evolutionäre SIH vorgelegt: Die Intelligenz von Primaten und Menschen ist eine Anpassung an ihre komplexe soziale Umwelt. Diese soziale Intelligenz ist die Voraussetzung für eine ökologische (insb. technische) Intelligenz.

Diese SIH, welche beinhaltet, dass diejenigen Individuen evolutionär im Vor-

---

to monkey intelligence":

However, even at this early stage, primate social life provided the evolutionary context of primate intelligence.

Dabei ist insbesondere ihre phylogenetische Erklärung für diese Hypothese von Bedeutung. Sie argumentiert, dass die sozialen Lemuren den üblichen Typ einer Primatengesellschaft und des sozialen Lernens besitzen, aber nicht die Fähigkeit, Objekte zu manipulieren, wie dies Affen tun. Daher schlussfolgert sie, dass der Ursprung der Intelligenzevolution von Primaten im sozialen Kontext liegen muss.

teil sind, die andere Mitglieder ihrer sozialen Gruppe benutzen und ausbeuten können, ohne dabei eine Spaltung oder Zerrüttung der sozialen Gruppe zu verursachen, wurde dann von Byrne & Whiten in [20][Kap. 1] wieder aufgegriffen und als MIH bezeichnet. Daher wird bis heute auch unter sozialer Intelligenz meistens machiavellistische Intelligenz verstanden, auch wenn konkurrierende SIH aufgestellt wurden, die wie im Falle der VIH Kooperation, Kommunkation und Lehren stärker gewichten, oder wie im Falle der SBH von Robin Dunbar (Dunbar in [45], [47], [48], Dundar & Shultz in [50]) ihren Ausgangspunkt im Problem der sozialen Komplexität einer sich stets vergrößernden sozialen Gruppe nehmen. Entscheidend bei dieser Gewichtung ist letztendlich die Sicht auf den Verlauf der Intelligenzevolution bei Primaten. Betrachtet man sich den Kenntnisstand im Falle der Intelligenzevolution von Primaten (Byrne in [21], [23], [24]), dann muss man feststellen, dass zwar eine SIH bevorzugt und detaillierter dargelegt wird, aber eine ÖIH bzw. TIH nicht ausgeschlossen werden kann und überdies auch Mischformen beider vorstellbar sind. Richard Byrne formuliert dies in [21][S. 209, Z. 4-8] folgendermaßen:

Nor it is clear that one theory is right, the other wrong; there are two other possibilities. It could be that both theories are correct in suggesting a single selective pressure as the key, but at different times in our evolutionary history. Or perhaps the answer is not "either/or" at all. Social and technical skills are not independent in practise.

Dieser Zusammenhang von sozialen und technischen Fähigkeiten wird im Falle der "skilled feeding techniques"- bzw. "extractive foraging"-Hypothese und der VIH besonders deutlich. Erstere bezieht sich auf die technischen Fähigkeiten im Zuge der Nahrungsbeschaffung, w.z.B. das Nüsseknacken mit zwei Steinen oder Hölzern, die als Hammer und Amboß dienen, welches bei Schimpansen (*pan troglodytes*) bereits beobachtet wurde (vgl. Byrne in [21][S. 93f, Figure 7.5]), letztere bezieht sich auf die soziale Kooperation, w.z.B. die Fähigkeit des Lehrens, welche eben genau unter anderem im Zusammenhang mit dem Nüsseknacken bei Schimpansen beobachtet wurde, was für Schimpansen allerdings sehr schwierig und extrem langwierig (teilweise mehr als 14 Jahre!) zu lernen ist (Byrne in [21][S. 143, Figure 9.10]). Da diese technischen Fähigkeiten lokal beschränkt sind, d.h.

auf eine bestimmte Schimpansengruppe, während andere Gruppen andere abweichende Techniken entwickelt haben, w.z.B. Terminten mit einem an einem Ende ausgefransten Stöckchen aus dem Termitenbau herauszuholen (Byrne in [21][insb. Figure 7.3-4]), liegt die Vermutung nahe, dass die Vermittlung dieser Kompetenzen in die nächste Schimpansengeneration durch intentionales Lehren erfolgt. Bei einem solchen engen koevolutiven Zusammenhang ist es natürlich sehr schwierig festzustellen, was jetzt Ursache und was Folge ist, SIH oder ÖIH. Und auch Byrne's neuere Darlegung des Verlaufs der Intelligenzevolution, angefangen bei den ersten Primaten bis hin zu den Hominiden, endet im Falle des letzten gemeinsamen Vorfahrens von Schimpansen (*pan troglodytes*), Bonobos (*pan paniscus*) und dem modernen Menschen (*homo sapiens*) unentschieden (Byrne in [24][S. 92, Z. 1-9]):

In any case, the last common ancestor at 4.5 M was equipped with a number of cognitive apitudes that form the bedrock of later, distinctively human adaptations. These apes were already large-brained and able to keep track of extensive and complex social relationships; quick to learn and able to exploit other individuals in ways sufficiently complex as to be labeled political and Machiavellian; able to understand how actions change objects in the world, and how their own and others' actions can be organized into hierachical programs to archieve novel goals; and that other individuels sometimes have knowledge and goals different from their own.

Somit lässt sich aus rein primatologischer Sicht die Frage nach dem evolutionären Ursprung der spezifisch menschlichen Intelligenz nicht eindeutig beantworten. Was bleibt, ist der weitere Verlauf der Hominisation! Oder, wie es Kim Sterelny in [151] formulierte:

Over the next 4.5 Myr, a lot happend. ... Our ancestors of 4 Myr ago lived in a world as they found it. We have transformed our physical, biological, social and informational enviroments. Humans of one generation bequeath an engineered world to the next generation, who often alter it further before transmitted it to their successors.

In diesem Zusammenhang baut Sterelny dann seine NCH auf, bei welcher man

ökologische und soziale Selektionsdrücke nicht mehr unabhängig voneinander betrachten kann. Aber gibt es vielleicht nicht doch Ansatzpunkte, welche einem ein besseres Verständnis von Ursache und Folge im Zuge der Intelligenzevolution von Hominiden ermöglichen?
An dieser Stelle, am Beginn der Hominisation vor ca. 4.5 Millionen Jahren, aufbauend auf Byrne & Whiten's MIH (Byrne & Whiten in [20]) und auf die bisherigen Erkenntnisse über den Verlauf der Intelligenzevolution bei Primaten, setzt auch Robin Dunbar's Argumentation für seine SBH an.[8] In [48] argumentiert er, dass der selektive Druck der ökologischen Umwelt (insb. der Raubdruck) zunächst einmal eine stete Gruppenvergrößerung im Laufe der Hominisation bewirkte, welche für eine stete Vergrößerung des selektiven Drucks der sozialen Umwelt sorgte, was dann schließlich ein stetes Gehirnwachstum (Neokortexzunahme) und die soziale Intelligenzevolution zur Folge hatte. Aber wie genau erklärt sich Dunbar diese stete Verstärkung des selektiven Drucks der sozialen Umwelt im Laufe der Hominisation? Dunbar geht davon aus, dass es einen Zusammenhang zwischen der Gruppengröße und dem Neokortexvolumen gibt. Er vergleicht die Gruppengröße von Affen und Menschenaffen mit ihrer jeweiligen relativen Neokortexgröße, welche sich ergibt, wenn man das Neokortexvolumen durch das Volumen des restlichen Gehirns dividiert, und weist darauf hin, dass man dadurch zwei Regressionsgeraden erhält, eine für die Affen und eine für die Menschenaffen (Dunbar in [48][Figure 1]), welche beide deutlich belegen, dass eine Vergrößerung der sozialen Gruppe mit einer Vergrößerung des Neokortexvolumens einhergeht.[9] Die Frage

[8]Und in diesem evolutionären Zeitrahmen setzt auch Moll & Tomasello's VIH an (Moll & Tomasello in [115]), allerdings, wie gesagt, mit dem Fokus auf die soziale Kooperation und nicht mit dem Fokus auf die soziale Komplexität, wie bei Dunbar's SBH.

[9]Wendet man die Regressionsgleichung

$$\log N = 0.093 + 3.389 \log C_R, \tag{2.1}$$

wobei N die mittlere Gruppengröße und C_R die relative Neokortexgröße (das Verhältnis des Neokortexvolumens zum Volumen des restlichen Gehirns) repräsentiert und welche man allgemein für Primaten erhalten hat (Dunbar in [44]), auf das relative Neokortexvolumen des modernen Menschen (*homo sapiens*) an ($C_R = 4.1$), so ergibt sich eine voraussichtliche, soziale Gruppengröße von ca. 150 Individuen (genauer: 147,8) (Dunbar in [45]). Eine Zahl, welche man zum einen auch erhält, wenn man die Gruppengröße heute noch frei und weitestgehend unberührt lebender Wildbeuter in Augenschein nimmt (Dunbar in [45][Table 1 & Figure 2]) und ist nun, was von den beiden ist Ursache und was Folge? Dunbar argumentiert, dass die durch ökologische Probleme bzw. Zwänge ausgelöste Vergrößerung der sozialen Gruppe die Ursache und die Vergrößerung des Neokortexvolumens die Folge ist, weil eine Vergrößerung der sozialen Gruppe zu einer Vergrößerung des selektiven Drucks der sozialen Umwelt führt, sich in dieser neuen größeren sozialen Umwelt auch zurechtzufinden bzw. die entsprechenenden Informationen auch neuronal verarbeiten zu können.[10] Die stete Gruppenvergrößerung hatte also eine stete Zunahme des selektiven Drucks der sozialen Umwelt zur Folge, sich an die komplexer werdenden sozialen Kontexte anzupassen, was nur ein größeres Gehirn bzw. ein größerer Neokortex zu leisten vermochte und was daher die Vergrößerung des Neokortexvolumens zur Folge hatte.[11] Nach Dunbar in [48][Figure 2] gab es so

---

zum anderen, wenn man die Gruppengröße sozialer Netzwerke in modernen Milieus untersucht (Hill & Dunbar in [79]).

[10]Dunbar geht dabei in [48] von fünf Anzeichen sozialer Komplexität aus, welche bei Primaten mit der Neokortexgröße in Korrelation stehen: die Größe der sozialen Gruppe, die "grooming"-Gruppengröße, das Ausmaß der Anwendung sozialer Fähigkeiten bei männlichen Paarungsstrategien, die Häufigkeit des taktischen Täuschens und die Häufigkeit des sozialen Spiels. Im Gegensatz dazu korreliert die Neokortexgröße mit keinem Anzeichen (Prozentsatz der Früchte in der Nahrung → "dietary hypothesis", Habitatgröße → "mental mapping hypothesis", "types of extractive foraging" → "extractive foraging hypothesis"), welches eine ÖIH unterstützen würde (Dunbar in [44][insb. Figure 4, 5, 7], [47][insb. Figure 2]).

[11]Diese Komplexität einer sozialen Umwelt hängt natürlich nicht nur von der Größe der sozialen Gruppe ab, sondern auch von ihrer Binnenstruktur, d.h. zum einen, ob es sich um eine eng oder weiter verstreut lebende soziale Gruppen handelt, und zum anderen, welche soziale Hierarchieebenen sie strukturieren. Interessanterweise änderte sich genau diese Binnenstruktur im Falle der Primaten- bzw. Hominidenevolution, und zwar von einer eng zusammenhängenden Binnenstruktur, in welcher sich alle Gruppenmitglieder jeden Tag begegnen, hin zu einer Binnenstruktur, in welcher sich die einzelnen Gruppenmitglieder nicht mehr täglich sehen, sondern nur noch in bestimmten Intervallen, welche "fission-fusion societies" genannt werden (Barrett et al. in [4]). Und genau in dieser Veränderung der Binnenstruktur sehen Barrett et al. in [4] die Möglichkeit zu erklären, warum Menschen, Menschenaffen und Affen sich kognitiv unterscheiden, denn:

In such systems, individuals must be able to represent mentally individuals that are not present and not retain and manipulate information about them for substantial periods of time, whereas there is no such pressure for these abilities to evolve in spatially and temporally stable monkey groups where animals are only out of view for at most a few hours.

Daher argumentieren Barrett et al. in [4] auch, dass diese Anforderungen (insb. die Fähigkeit mit im Laufe der Hominisation vor ca. 2.5 Millionen Jahren zunächst einen linearen Anstieg der Gruppen- und Gehirngröße, welcher sich dann vor ca. 500 Tausend Jahren zu einem exponentiellen Anstieg verstärkte und zum heutigen modernen Menschen (*homo sapiens*) führte. Den Auslöser für die stetige Gruppenvergrößerung sieht Dunbar dabei, wie bereits oben erwähnt, im selektiven Druck, den eine ökologische Umwelt ausübt. Im Falle der Hominisation geht Dunbar also von einem koevolutiven Verhältnis zwischen Gruppengröße und Gehirnwachstum aus, welches die soziale Intelligenzevolution vorangetrieben hat. Letztendlich kann man also sagen, dass die Vergrößerung der sozialen Gruppe eine Anpassung an die ökologische Umwelt und das Gehirnwachstum (die Neokortexzunahme) eine Anpassung an die soziale Umwelt ist, wobei es bei diesem koevolutiven Verhältnis so aussieht, dass im Verlauf der Intelligenzevolution, ausgehend von den ersten Primaten über die Hominisation bis hin zum moderenen Menschen (*homo sapiens*), der selektive Druck, den eine stets komplexer werdende soziale Umwelt auf ein einzelnes Individuum ausübt, eine immer entscheidendere Rolle einnimmt, was vor allem durch den exponentiellen Anstieg von Gruppen- und Gehirngröße vor ca. 500 Tausend Jahren deutlich wird, da dieser sich anscheinend nicht mit ökologischen Faktoren erklären lässt, wohl aber mit sozialen, worauf im weiteren Verlauf dieser Theoriebildung hier noch genauer eingegangen wird (vgl. Abschnitt 2.2).

Diese Vermutung, dass sich im Laufe der Gehirnevolution bei Primaten bzw. Hominiden die Gewichtung der selektiven Einflüsse von ökologischen hin zu sozialen veränderte und somit die soziale Intelligenzevolution vorangetrieben wurde, wird auch durch das Pfad-Modell von Dunbar & Shultz in [50][Figure 2] untermauert. Mit diesem Pfad-Modell erklären Dunbar & Shultz die Beziehungen zwischen "life history", Ökologie, Gehirngröße und Gruppengröße bei Primaten.[12] Dabei

---

einer teilweise virtuellen sozialen Welt umzugehen), welche sich durch größere und vertreuter lebende soziale Gruppe ergeben, bereits im Falle der Menschenaffen einen Selektionsdruck hin zu einer Gehirnvergrößerung und zu den entsprechenden kognitiven Fähigkeiten konstituieren, welche zum sozialen Überleben auf dem "social market place" notwendig sind.

[12]Dazu verwenden Dunbar & Shultz diverse Variablen der einzelnen Einflussgebiete, w.z.B. im Falle der "life history" die Körpergröße (log body), die basale metabolische Rate (residual BMR), Lebenszeit (longevity) und die Jugendzeit (juvenile period), und untersuchen, welche Einflüsse diese auf die Koevolution von Neokortxgröße und sozialer Gruppengröße gehabt haben

machen Dunbar & Shultz folgende Voraussetzungen:

(i) inherent life-history characteristics are nescessary to allow species to support the development and maintenance of large brains, (ii) these characteristics and the high metabolic demands of large brains drive and/or contrain ecology, and (iii) social complexity (or group size) represents the functional benefit of maintaining large brains.

Auf dieser Basis erhalten Dunbar & Shultz, nach Auswertung der ihnen vorliegenden Daten und Studien, dann die folgenden Zusammenhänge:

- Die Faktoren, die direkt mit der Gruppengröße zusammenhängen, sind die relative Neokortexgröße (relative neocortex size), die Aktivitätsmuster (activity pattern) und die Heimatgebietgröße (home range size), wobei externe Faktoren, wie der Raubdruck, die soziale Gruppengröße entscheidend vorantrieben, während gleichzeitig ökologische und kognitive Zwänge diese beschränkten.

- Die ökologischen und "life history" Variablen (life span, BMR, body size, diet, day range, home range) erleichtern oder beschränken die Aufrechterhaltung großer Gehirne und damit auch die Erhaltung großer sozialer Gruppen, aber sie stehen nicht direkt mit dem koevolutiven Verhältnis zwischen relativer Neokortexgröße und Gruppengröße in Beziehung.

- Die relative Neokortexgröße steht nur in direkter Wechselbeziehung mit der Gehirngröße und der Gruppengröße. Alle anderen genannten Einflüsse wirken indirekt auf diese, entweder über die Gehirngröße oder die Gruppengröße.

- Die externen Faktoren, wie insbesondere der Raubdruck, wirken sich auf das System wie eine evolutionäre Ratsche aus, indem sie zunächst einen Selektionsdruck auf die Gruppengröße ausüben, was wiederum einen Selektionsdruck auf die relative Neokortexgröße und die Gehirngröße ausübt.

Diese Zusammenhänge in Dunbar & Shultz Pfad-Modell bestätigen vor allem, dass die relative Neokortexgröße die entscheidende Variable in der Gehirnevolu-

können.

tion von Primaten und damit auch Hominiden ist, denn letztendlich laufen alle Pfade direkt oder indirekt dort zusammen. Und genau diese Variable, die relative Neokortexgröße, ist es dann auch, die nach Byrne & Corp in [25] neben der absoluten Neokortexgröße die Häufigkeit des taktischen Täuschens bei Primaten vorhersagt, wobei sie Daten von achtzehn Primatenarten, darunter drei Halbaffenarten, vier Neuweltaffenarten, sieben Altweltaffenarten und vier Menschenaffenarten, in ihre Untersuchung einbezogen, was die SIH für die einzelnen Etappen der Intelligenzevolution von Primaten (Halbaffen → Affen → Menschenaffen) deutlich stützt. Aber hier bleibt, im Gegensatz zur oben vorgestellten Argumentation von Dunbar, die letzte Etappe (Menschenaffen → Menschen) unberücksichtigt, was hauptsächlich daran liegt, dass die einzige rezente Art der Gattung *homo* der moderne Mensch (*homo sapiens*) ist, und von anderen Mitgliedern dieser Gattung die entsprechenden Daten nicht mehr direkt, durch lebende Exemplare, erhalten werden können. Daher ist es notwendig, beim modernen Menschen nach den entsprechenden Indizien für eine SIH zu suchen. Und ein solches Indiz, welches eine SIH untermauert, gelingt mit Hilfe der Wason-Auswahl-Tests (Wason in [173][S. 145f] und [174]), welche von Cosmides in [29] unter anderem dazu verwendet worden sind, zu zeigen, dass es Menschen sehr viel leichter fällt, Betrüger innerhalb eines sozialen Kosten-Nutzen-Kontextes aufzuspüren bzw. zu entlarven, als ein entsprechendes deskriptives oder gar logisches Problem zu lösen, was man weiterführend dahingehend interpretieren könnte, dass nicht nur bestimmte soziale Kosten-Nutzen-Kontexte, sondern die gesamte soziale Intelligenz weitestgehend automatisiert und unbewusst abläuft, während die ökologische Intelligenz noch nicht in dieser Weise automatisiert ist und erst unter mehr oder weniger bewusster Verwendung der entsprechenden Module, die die soziale Intelligenzevolution hervorgebracht hat, entsteht. Eine Vermutung, die sich noch weiter verstärken wird, wenn erst einmal der Zusammenhang zwischen dem sozialen und dem mathematischen Denken, welchen schon die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" aus Unterabschnitt 1.1.3 nahelegt, genauer dargelegt wurde (vgl. Abschnitt 3.1).

Insgesamt gesehen, sprechen die Resultate im Falle der Intelligenzevolution von Primaten bzw. Hominiden doch eher dafür, dass es die sozialen Kontexte waren, die vor allem auch im Zuge der Hominisation die Intelligenzevolution vorangetrieben haben, was nicht heißen soll, dass die sozialen Anpassungsprobleme komplexer waren als die ökologischen, sondern vielmehr, dass der selektive Druck, den eine soziale Umwelt auf ein Individuum ausübt, größer zu sein scheint als der ökologische Druck auf dasselbe Individuum. Doch welche kognitiven Fähigkeiten werden mit diesen Anpassungsproblemen in sozialen Kontexten in Verbindung gebracht? Welche kognitiven Fähigkeiten sind im Zuge der menschlichen Intelligenzevolution ausgebildet worden? Kurz: Wie sieht das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenz aus? Welche Module im menschlichen Gehirn bilden die Basis, auf der die (soziale) Intelligenz (angepasstes) Verhalten erzeugen kann?

2.2 Das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenz

Wie bereits im vorausgehenden Unterabschnitt erklärt wurde, hängen mit sozialer Intelligenz das Gehirnwachstum und die Gruppengröße zusammen, wobei die soziale Komplexität größerer und weiter verstreut lebender sozialer Gruppen (fission-fusion-societies) eine entscheidende, wenn nicht so gar die entscheidende Selektionskomponente darstellt. Um sich in solchen sozialen Gruppen behaupten zu können, war es zunächst einmal für jedes dazugehörige Individuum notwendig, diese soziale Gruppenstruktur im Gehirn verarbeiten und repräsentieren zu können.[13] Dass eine solche repräsentationale Verarbeitungsstruktur im Gehirn von Primaten bzw. Hominiden evolviert ist, wurde auch bereits bei der Entwicklung der dieser Analyse vorangestellten evolutionspsychologischen und soziobiologischen Sicht auf das (menschliche) Gehirn deutlich (vgl. Unterabschnitt 1.2.4, insb. Abbildung 1.3), nur war zu diesem Zeitpunkt noch nicht ersichtlich, warum,

[13]Es sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, dass der gemeinsame Kern von Byrne's vier Versionen der TIH aus einer mentalen Repräsentationsfähigkeit besteht. Diese mentale Repräsentationsfähigkeit lässt sich allerdings, wie anhand von Dunbar's Ausführungen dargelegt, mit der sozialen Komplexität großer Gruppen erklären. Von entscheidener Wichtigkeit ist dabei aber, dass anscheinend für soziale wie auch technische Fertigkeiten eine repräsentationale Verarbeitungsstruktur im Gehirn eine notwendige Voraussetzung ist. D.h.: Es wird an dieser Stelle der Argumentation schon deutlich, dass soziale und technische Kompetenzen durch eine repräsentationale Verarbeitungstruktur im Gehirn gleichermaßen ermöglicht werden und dass der evolutionäre Ursprung genau dieser repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im sozialen Bereich liegt!

weswegen und wofür. Es gibt also einen grundlegenden Zusammenhang zwischen der sozialen Intelligenz und der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im Gehirn, deren Struktur es noch genauer zu untersuchen gilt (vgl. Unterabschnitt 2.2.3).

Grundlegend für ein solches Sichzurechtfinden innerhalb einer sozialen Gruppe ist auch eine "Subjekt-Objekt"-Unterscheidung und überdies hinaus die Fähigkeit, sich selbst und anderen Individuen mentale Zustände zuschreiben zu können. Somit spielt eine "Theory of Mind (ToM)" ebenfalls eine entscheidende Rolle bei der sozialen Intelligenzevolution. Um in einer solchen Gruppe auch entsprechend sozial intelligent agieren zu können, müssen auch die entsprechenden machiavellistischen und kooperativen Taktiken beherrscht werden, so dass die Kohäsion der sozialen Gruppe nicht gefährdet und ihr grundlegender sozialer Zusammenhalt aufrechterhalten wird. In diesem Zusammenhang spielen beim modernen Menschen vor allem das Denken, das Bewusstsein, die Sprache und Rituale (bzw. soziale Normen) eine wichtige Rolle. Daher ist anzunehmen, dass diese nicht nur mit der sozialen Intelligenz, sondern auch untereinander zusammenhängen. Was auch für Symbole und Fiktionen zu gelten scheint, da in diesen größeren und vertreuter lebenden sozialen Gruppen, in welchen sich die einzelnen Gruppenmitglieder vielleicht über Wochen auch einmal nicht sehen können, insbesondere über nicht anwesende Gruppenmitglieder nachgedacht und ihre womöglichen Reaktionen und ihr zu erwartendes Verhalten in das eigene Verhaltensmuster einbezogen werden muss, was entsprechende virtuelle, fiktionale und auch symbolische Repräsentationen im Gehirn voraussetzt.

Somit ergibt sich bereits ein mögliches evolutionäres Umfeld der sozialen Intelligenz, welches aus den Charakteristika Repräsentationsfähigkeit, ToM-Fähigkeit, Denkfähigkeit, Sprachfähigkeit, Bewusstseinsfähigkeit, Symbolverständnis, Fiktionsfähigkeit und Ritualfähigkeit besteht. Doch wie hängen diese Fähigkeiten genau mit der sozialen Intelligenz zusammen, wenn Intelligenz definiert ist als das Potential eines modular organisierten Gehirns, adaptives Verhalten zu erzeugen? Dann müssten sich diese Fähigkeiten doch auf die modulare Organisation im menschlichen Gehirn zurückführen lassen, d.h. mit Ausnahme der Repräsentationsfähigkeit bzw. der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur, müssten sich alle genannten Fähigkeiten entweder auf Module oder Modulkombinationen zurückführen lassen, was bedeutet, dass sie entweder selbst Anpassungen oder funktionslose Nebenprodukte sind. Daher wird nun bei der Analyse der einzelnen evolutionären Zusammenhänge

- Soziale Intelligenz und Sprachfähigkeit,
- Soziale Intelligenz und ToM-Fähigkeit,
- Soziale Intelligenz und Repräsentationsfähigkeit,
- Soziale Intelligenz und Bewusstseinsfähigkeit,
- Soziale Intelligenz und Denkfähigkeit,
- Soziale Intelligenz und Symbolverständnis,
- Soziale Intelligenz und Fiktionsfähigkeit,
- Soziale Intelligenz und Ritualfähigkeit,

insbesondere nach möglichen evolutionären Funktionen der einzelnen Fähigkeiten gesucht, da sich nur so eine Nebenprodukt-Hypothese ausschließen lässt.

2.2.1 Soziale Intelligenz und Sprachfähigkeit

Welche Rolle spielt nun die menschliche Sprachfähigkeit in diesem evolutionären Szenario? Auch dafür liefert Dunbar in Verbindung mit seiner SBH eine plausible Antwort. In [46] argumentiert er, dass Primatengruppen ihren inneren sozialen Zusammenhalt durch "grooming" (Lausen) erhalten und weisst darauf hin, dass es eine lineare Beziehung zwischen Gruppengröße und "grooming"-Zeit gibt.[14] Diese wendet er dann auf die menschlichen Verhältnisse - eine soziale Gruppengröße von ca. 150 Individuen - an und erhält letztendlich damit, dass moderne Menschen ca. 40% ihrer aktiven Tageszeit mit "grooming" verbringen müssten,

[14]Die "grooming"-Zeit ist dabei der Teil der aktiven Tageszeit, welche zum "grooming" genutzt wird. Bei den Primaten beträgt die beobachtete "grooming"-Zeit im linearen Zusammenhang mit ihrer jeweiligen Gruppengröße maximal ca. 20% an der jeweils aktiven Tageszeit (Dunbar in [45][Figure 3]).

um eine soziale Gruppengröße von ca. 150 Individuen zu binden.[15] Die tatsächliche Zeit, die moderne Menschen aber mit sozialen Interaktionen im Laufe ihrer aktiven Tageszeit verwenden, lokalisiert Dunbar auch nur bei ca. 20% an der aktiven Tageszeit (Dunbar in [46][Table 6.1]). Aber wie ist es nun den Menschen gelungen, diese Lücke zu schließen, da sie offensichtlich dafür nicht das "grooming" verwendet haben? Nach Dunbar in [46] mittels Sprache, denn Sprache hat gegenüber dem "grooming" entscheidende Vorteile:

1. Mit sprachlicher Interaktion kann man gleichzeitig mehrere Individuen einbeziehen. Eine Zeitersparnis, die mit "grooming" nicht einmal annähernd zu erreichen ist.

2. Mittels Sprache kann man über Individuen sprechen, die gar nicht anwesend sind bzw. die zum Zeitpunkt des betreffenden Ereignisses nicht anwesend waren. Mittels Sprache kann man somit auch Individuen in die soziale Interaktion einbeziehen, insbesondere sozial relevante Informationen über sie austauschen, die zum entsprechenden Zeitpunkt nicht anwesend sind, was die soziale Bindungsreichweite vergrößert und die Dichte des sozialen Informationsflusses erhöht.

Also ermöglicht Sprache eine soziale Interaktion innerhalb größerer und verstreut lebender Gruppen und kann somit die bei sich stets vergrößernden Gruppen entstehende Zunahme der "grooming"-Zeit kompensieren. Die evolutionäre Funktion der Sprachfähigkeit besteht also nach Dunbar in [46] darin, den sozialen Zusammenhalt bei sich stets vergrößernden sozialen Gruppen herzustellen und aufrechtzuerhalten:

I suggest, then, that the principal function of language was (and still is!) to ena-

[15] Dunbar berechnete in [45] diesen "grooming"-Zeitanteil mittels der folgenden Regressionsgleichung, welche er unter Verwendung der diesbezüglichen Daten von 22 Primatenarten erhalten hat:

$$G = -0.772 + 0.287N, \tag{2.2}$$

wobei G für den "grooming"-Prozentsatz an der jeweils aktiven Tageszeit und N für die jeweilige mittlere Gruppengröße steht. Im Falle des modernen Menschen, bei welchen sich eine berechnete Gruppengröße von ca. 150 Individuen (genauer: 147,8) ergab, erhält Dunbar somit einen "grooming"-Prozentsatz von ca. 40% (genauer: 41,7%).

ble the exchange of social information ('gossip') in order to facilitate bonding in larger, more dispersed social groups.

Dieser soziale Zusammenhalt wird also über den Austausch von sozialen Informationen, also wer mit wem, was, warum und wann gemacht hat oder machen wird, sichergestellt. Dass es die sozialen und nicht ökologischen Informationen sind, die die entscheidende evolutionäre Komponente bei der Sprache als "grooming"-Ersatz spielen, lässt sich nach Dunbar in [45][Table 4] unter anderem daran erkennen, dass die Konversationen von modernen Menschen sich zu ca. 60 % aus Klatsch, Tratsch und der Schilderung persönlicher Erlebnisse zusammensetzen. Letztendlich geht Dunbar in [45] im evolutionären Zusammenhang von Gruppengröße, Gehirnwachstum und Sprachfähigkeit von einem koevolutiven Prozess aus. In [48] vergleicht Dunbar dann in diesem Kontext die Gruppengröße mit dem jeweils geschätzten "grooming"-Zeitanteil an der aktiven Tageszeit und errechnet, ausgehend von den Primaten, welche einen maximalen "grooming"-Zeitanteil von ca. 20% an der aktiven Tageszeit aufweisen, als kritische Schwelle im Verlauf der Hominisation einen "grooming"-Zeitanteil von ca. 30% der aktiven Tageszeit, ab welchem sich Sprache als "grooming"-Ersatz evolvieren musste:

Recognizing that living catarrhine primates (at least) have an observed upper limit on grooming time at 20 % of their time budget, we can make some allowance beyond this for time budgets to be squeezed unter strong selection pressure for larger groups. This might allow an additional 5 % of time to be allocated to social grooming. ... That is to say, the use of vocal exchanges to reinforce grooming relationships may allow group size to increase by an amount equivalent to about 5 % of grooming time (but probably not more) without adding significantly to the time budget. This would give us a rubicon at around 30 % of grooming time requirement beyond which group size could not increase unless language came into play.

Nach Dunbar in [48][Figure 3] war diese kritische Schwelle vor ca. 500 Tausend Jahren erreicht und fällt genau in die Übergangszeit vom *homo erectus* zum archaischen Homo sapiens (*homo heidelbergensis*). Demnach müsste es dem *homo erectus* noch an einer grundlegenden Sprachfähigkeit gemangelt haben, welche sich erst mit dem Auftreten des archaischen Homo sapiens (*homo heidelbergen-*

sis) einstellte, wobei aber zu beachten ist, dass diese Sprachfähigkeit noch nicht mit der des heutigen modernen Menschen (*homo sapiens*) zu vergleichen ist, was sich auch aus den archäologischen Evidenzen des Sprachursprungs ergibt. Nach Davidson in [34] handelt es sich bei den archäologischen Evidenzen des Sprachursprungs im Wesentlichen um die Gegenstände (Stein- und Knochenwerkzeuge, Skulpturen, etc.), welchen man eine symbolische Bedeutung zuschreiben kann. Um entscheiden zu können, ob ein vorliegender Gegenstand womöglich eine symbolische Bedeutung haben könnte, entwickelte Davidson in [34] sein "Convention Criterion":

We can infer a convention or code through which meaning might be recognized if we find depictive or non-depictive marks on objekts in repeated patterns, restricted in time and distribution.

Als Grundlage für diesen Ansatz fasst Davidson notwendigerweise Sprache als Symbolkommunikation auf. Dies ist aber in diesem evolutionären Zusammenhang nicht weiter problematisch, da eine sich als "grooming"-Ersatz in sozialen Kontexten evolvierende Sprachfähigkeit einer Verwendung von Symbolen und einer auf ökologische Kontexte ausgeweiteten Anwendung nicht widerspricht, sondern vielmehr einer solchen Ausweitung und Ausdifferenzierung in ökologischen Kontexten vorausgehen muss. Dafür sprechen auch die archäologische Evidenzen für einen Gebrauch symbolischer Gegenstände, welche nach Davidsons Analyse in [34] ca. 70 Tausend Jahre weit zurückreichen. Ein Zeitpunkt, an dem es den modernen Menschen (*homo sapiens*) schon mehr als 100 Tausend Jahre gab, was im Grunde garantiert, dass der symbolische Gebrauch von Gegenständen bzw. überhaupt ihre Anfertigung mit einem im modernen Sinne voll sprachfähigen Menschen verbunden ist.[16] Somit kann man durchaus davon ausgehen, dass die Sprachfähigkeit

[16]Diese Zeitlücke von mehr als 100 Tausend Jahren garantiert zwar, dass die Sprache im heutigen Sinne an den modernen Menschen (*homo sapiens*) gebunden ist, aber zugleich stellt sie eine Erklärungslücke dar, weil sie die Frage aufwirft, warum der moderne Mensch (*homo sapiens*) schon mehr als 100 Tausend Jahre existiert hat, bevor es zur "Symbolischen Revolution" kam? Eine Möglichkeit, diese Erklärungslücke zu schließen, bieten genetische Evidenzen über zwei Schlüsselmutationen auf dem FOXP2-Gen (forkhead box P2), welche mit den gramatikalischen Kompetenzen in Zusammenhang gebracht werden (Enard et al. in [51], Lai et al. in [100]), denn diese beiden sind bei den Menschenaffen nicht vorhanden und sie scheinen nicht

als "grooming"-Ersatz beim Übergang vom *homo erectus* zum archaischen Homo sapiens (*homo heidelbergensis*) vor ca. 500 Tausend Jahren evolviert sein könnte und sich dann zusammen mit dem Symbolverständnis in einen koevolutiven Prozess begeben haben könnte, welcher beim modernen Menschen (*homo sapiens*) eine reichhaltige und ausdifferenzierte Kommunikation mittels Symbolen und Syntax, also Sprache im heutigen Sinne, letztendlich hervorgebracht haben könnte.
Insgesamt verortet Dunbar in [48] vier Etappen in der Evolution der menschlichen Sprachfähigkeit:

1. Ein bei den Australopithecinen (*australopithecus*) auf "groomig" basierender sozialer Bindungsmechanismus.

2. Eine beim *homo erectus* neben dem "grooming" wachsende Verwendung von Lauten zur Gruppenbindung.

3. Eine sich beim archaischen Homo sapiens (*homo heidelbergensis*) einstellende einfache Sprachfähigkeit zur Bindung der sich weiter vergrößernden sozialen Gruppen.

4. Die beim modernen Menschen (*homo sapiens*) vorhandene Sprachfähigkeit (inkl. Reflexion, Diskussion, Lehren, u.s.f.).

Für die weitere Argumentation kann man also festhalten, dass die menschliche Sprachfähigkeit eine Anpassung an die sich im Laufe der Hominisation stets weiter vergrößernden sozialen Gruppen ist - eine Anpassung an die soziale Umwelt! - und dass die evolutionäre Funktion der Sprachfähigkeit darin besteht, den sozialen Zusammenhalt innerhalb der sich stets weiter vergrößernden und vertreuter lebender Gruppen zu gewährleisten.[17] Überdies kann man im evolutionären

älter als 200 Tausend Jahre zu sein (Enard et al. in [51]). Damit fallen beide Schlüsselmutationen auf dem FOXP2-Gen in diese Zeitlücke nach dem ersten Auftritt des anatomisch modernen Menschen (*homo sapiens*).

[17]Genauer gesagt, sind es wohl in Anbetracht der Evolution der Sprachfähigkeit diverse kognitive und physiologische Anpassungen, die die Sprache im heutigen Sinne ermöglicht haben, was insbesondere dafür spricht, dass die Sprachfähigkeit im Gehirn selbst modular organisiert ist.

Zusammenhang von Gruppengröße, Gehirngröße, Sprachfähigkeit und Symbolverständnis von einem koevolutiven Prozess ausgehen.

2.2.2 Soziale Intelligenz und ToM-Fähigkeit

Nicht nur der macchiavellistische Gebrauch der Sprache lässt darauf schießen, dass auch eine ToM im Rahmen der sozialen Intelligenzevolution eine Rolle gespielt hat, sondern auch die schlichte Tatsache, dass es so etwas wie (vorsätzliches) taktisches Täuschen und eine Verstellung im Spiel (pretend play) bei Menschenaffen (Byrne in [21][Figure 9.4-6, 9.9], Whiten in [177], Suddendorf & Whiten in [154][Table 8.1]) und Menschen gibt, was auch sehr gut ohne Sprache funktioniert. Für solche vorsätzlichen Manipulationen, seien sie sprachlicher oder nicht-sprachlicher Natur, müssen die beteiligten Individuen aber über eine gewisse Intentionalitäts- bzw. Repräsentationsfähigkeit verfügen, welche es ihnen ermöglicht, ihre Artgenossen als eigenständig handelnde Subjekte anzusehen, welche ebenfalls Gedanken, Gefühle, Bedürfnisse, u.s.f. entwickeln und diese dann mittels bestimmter Handlungen - ggf. vorsätzlicher Manipulationen - zu erreichen gedenken. Und genau da setzen in der Regel alle ToM-Definitionen an.
Nach Alan Leslie, welcher in [103] das Verhältnis zwischen Verstellung im Spiel und Intentionalitäts- bzw. Repräsentationsfähigkeit untersucht hat, besitzt ein Individuum dann eine ToM, wenn es in der Lage ist, sich selbst und anderen mentale Zustände zuzuschreiben, d.h. im Grunde wenn es Gedankenlesen kann:

This term is borrowed from Premack and Woodruff (1978) who used it to denote the ability of a person to impute mentale states to self and others and to predict behavior on the basis of such states.

Dabei übernimmt Leslie im Zuge seiner Theoriebildung den Begriff "Theory of Mind" und dessen Bedeutung von David Premack & Guy Woodruff, welche diesen Begriff in [127] geprägt haben und damit die diesbezügliche ToM-Diskussion ausgelöst haben. In dieser Arbeit gehen Premack & Woodruff der Frage nach, ob Schimpansen (*pan troglodytes*) eine menschenähnliche ToM besitzen. Dabei definieren sie in [127] den Begriff "Theory of Mind" wiefolgt:

In saying that an individual has a theory of mind, we mean that an individual imputes mental states to himself and to others (either to conspecifics or to other *species as well).*

Unter mentalen Zuständen verstehen Premack & Woodruff dabei in [127] Absichten oder Intentionen, welche zum Beispiel durch die Worte glauben, denken, wissen, möchten, raten, zweifeln, versprechen, etc. ausgedrückt werden:

It seems beyond question that purpose of intention is the state we impute most widely; several other states are not far behind, however. They include all those designated by the italicized term (in Normalschrift, Anm.d.A.) *in each of the following statements: John* believes *in ghosts; he* thinks *he has a fair chance of winning; ...; Bill is only* pretending.

Um festzustellen, ob ein Schimpanse (*pan troglodytes*) prinzipiell in der Lage ist, anderen Individuen mentale Zustände zuzuschreiben, präsentierten sie ihrer Schimpansin, names Sarah, Videobänder, auf welchen ein Mensch mit für ihn unerreichbaren Objekten (z.B. Bananen, die über seinem Kopf hängen) zu sehen ist. Dann legten sie der Schimpansin zwei Photographien vor, von denen eine, eine Lösung des Problems und die andere keine Lösung des Problems darstellt. Die größtenteils positiven Testergebnisse motivierten sie dann zu weiteren Untersuchungen und zu der Vermutung, dass

... the chimpanzee solves problems such as the present one (and others a good deal more complicated) by imputing states of mind to the human actor. In looking at the videotape, he imputes at least two states of mind to the human actor, namely, intention or purpose on the one hand, and knowledge or belief on the other. The chimpanzee makes sense of what he sees by assuming that the human actor wants the banana and is struggling to reach it. He further assumes that the actor knows how to attain the banana, so what when the animal is shown photographs depicting solutions to the problem, he chooses correctly in three out of four cases.

Diese primäre Intentionalitätsfähigkeit ("the human actor *wants* the banana"), welche Premack & Woodruff in [127] den Schimpansen zuschreiben, kann man weiterführend mit Hilfe von Intentionlitätsordnungen modellieren. Zum Beispiel wäre "Ich *glaube*, dass dieser Ball blau ist" eine Intention erster Ordnung und "Ich *glaube*, dass Du *denkst*, dass dieser Ball blau ist" einen Intention zweiter Ordnung, u.s.w. Und genau bei dieser Intentionalitäts- bzw. Repräsentationsfähigkeit setzt nun auch Leslie in [103] bei seiner Untersuchung an, wenn er die Verstellung im Spiel als ein erstes Anzeichen einer ToM ansieht:

Pretending oneself is thus a special case of the ability to understand pretense in others (someone else's attitude to information). In short, pretense is an early manifestation of what has been called theory of mind (Premack and Woodruff, 1978).

Leslie's Ziel in [103] ist es nun mittels Ausdrücken über mentale Zustände einen Zusammenhang zwischen der Verstellung im Spiel und der Intentionalitäts- bzw. Repräsentationsfähigkeit herzustellen:

I now want to point out a striking similarity between these properties of pretend play and the logical properties of sentences containing mental state terms. By mental state terms I mean words such als believe, expect, and want.

Nach Leslie in [103] wird die Verstellung im Spiel durch drei Eigenschaften charakterisiert, nämlich durch Objektsubstitution (object substitution), Zuschreibung von verstellenden Eigenschaften (attribution of pretend properties) und imaginäre Objekte (imaginary objects), denen mentale Repräsentationen zu Grunde liegen müssen, mit welchen er die Verstellung im Spiel letztendlich erklären möchte:

At the very least, mental state expressions can provide a model with which to characterize the representations underlying pretend play.

Dabei geht er in [103] im Falle dieser internen Repräsentationen zunächst einmal von Repräsentationen erster Ordnung aus, das sind bei ihm mentale Repräsentationen über die unmittelbar erfahrbare physische Welt:

Such a basic capacity for representation can be called a capacity for primary representation. Primary representation is thus defined in terms of its direct semantic relation with the word.

Aus diesen Repräsentationen erster Ordnung ergeben sich dann die Repräsentationen zweiter Ordnung, das sind für Leslie in [103] mentale Repräsentationen von mentalen Repräsentationen erster Ordnung, welche er als Metarepräsentationen bezeichnet:

Pretend representations, by contrast, are opaque, even to the organism who entertains them. They are in effect not representations of the world but representations of representations. For this reason I shall call them second order or, borrowing a term from Pylyshyn (1978), metarepresentations.

Diesen Begriff hat Zenon Pylyshyn in [128] in Reaktion auf Premack & Woodruff's Zuschreibung von mentalen Überzeugungen im Falle von Schimpansen, welche oben vorgestellt wurde, als rekursive metarepräsentationale Fähigkeit (recursive meta-representational ability) geprägt, d.h. als

... ability to represent the representing relation itself: ... not only represents the belief B but also the notion of "a belief that B".

Dabei sieht Pylyshyn in [128] in den von Premack & Woodruff vorgestellten Studien einen Versuch zu zeigen, dass Schimpansen nicht nur zu Intentionen erster Ordnung

(*e.g., believing that B, wanting to be the case that B, expecting that B, wondering whether it is the case that B, or even considering what would happen if B were the case*),

sondern zur Repräsentation dieser Beziehungen selbst in der Lage sind. M.a.W.: Dass Schimpansen zu Intentionen zweiter Ordnung (z.B.: A *glaubt*, dass B *glaubt*, dass der blaue Ball auf der Wiese liegt) in der Lage sind. Anzumerken ist dabei allerdings, dass Leslie in [103] nicht die von Pylyshyn geprägte Bedeutung des Begriffes "Metarepräsentation" übernommen hat, sondern diesen als Repräsentation zweiter Ordnung und nicht wie im Grunde bei Pylyshyn als Intention zweiter Ordnung verwendet. Diese Intentions- und Repräsentationsordnungen hängen zwar miteinander zusammen, aber sie stimmen nicht überein! Bei Intentionalitätsordnungen werden die intentionalen Zuschreibungen (w.z.B. Ich glaube, Ich denke, Ich vermute, etc.) gezählt. Dagegen zählt man bei Repräsentationsordnungen die mentalen Repräsentationen ausgehend von den ersten Repräsentationen über die unmmittelbar erfahrbare physische Welt. Dieser Zählunterschied und der Zusammenhang zwischen Intentions- und Repräsentationsordnungen lassen sich an folgendem Beispiel verdeutlichen: Ich *denke*, dass da ein blauer Ball auf der Wiese liegt. Dies ist eine Intention erster Ordnung und gleichzeitig eine Repräsentation zweiter Ordnung, da bereits "ein blauer Ball liegt auf der Wiese" als Repräsentation erster Ordnung einzustufen ist. Die unmittelbare Repräsentation "ein blauer Ball liegt auf der Wiese" wäre dann sozusagen eine Intention 0-ter Ordnung. Somit bezeichnet Pylyshyn in [128] Repräsentationen dritter Ordnung als Metarepräsentationen, während Leslie in [103][Figure 1] bereits Repräsentationen zweiter Ordnung Metarepräsentationen nennt.

Zur Erklärung, wie es zu diesen Metarepräsentationen im Falle einer Verstellung im Spiel überhaupt kommt, verwendet Leslie in [103][Figure 2] sein Entkopplungsmodell der Verstellung (decoupler model of pretense), welches im Grunde Metarepräsentationen als entkoppelte und neu zusammengesetzte Repräsentationen erster Ordnung charakterisiert. Dies erläutert Leslie in [103] unter anderem am Beispiel des Verstellungsspiels eines Kindes, das mit einer Banane telefonieren spielt. Dazu benötigt das Kind erst einmal zwei Repräsentationen erster Ordnung, nämlich die von einer Banane und die von einem Telefon. Nach Leslie's Entkopplungsmodell entkoppelt sich nun im ersten Schritt, im "expression raiser", die Repräsentation erster Ordnung von einer Banane von der konkreten Banane. Diese von der konkrete Realität entkoppelte "Banane als Banane" wird nun im zweiten Schritt, im "manipulator", mit Hilfe der Repräsentation erster Ordnung von einem Telefon neu zusammengesetzt zu "Banane als Telefon", was sich dann als eine Repräsentation zweiter Ordnung - eine Metarepräsentation - einordnen lässt. Im letzten Schritt, im "interpreter", wird nun diese Repräsentation zweiter Ordnung von einer Banane als Telefon mit der Realität bzw. der Erinnerung abgeglichen, was eine Speicherung dieser Repräsentation ermöglicht, welche benötigt wird, damit ein solches Verstellungspiel auch vom Kind selbst bei der Beobachtung anderer als solches erkannt werden kann. Daher schlussfolgert Leslie in [103] auch:

Pretend play is thus one of the earliest manifestations of the ability to characterize and manipulate one's own and others' cognitive relations to information. This ability, which is central to commonsense theory of mind, will eventually include characterizing relations such as believing, expecting, and hoping, and manipulating these relations in others, for example, getting someone to expect that *something will happen by promising.*

Zusammenfassend kann man also festhalten, dass Leslie in [103] das Verstellungsspiel bei Kleinkindern, welches zwischen dem 18 und 24 Lebensmonat auftritt, mittels Metarepräsentationen erklären kann, wobei er diese Metarepräsentationen als Repräsentationen zweiter Ordnung definiert.
Obwohl Josef Perner in [123] im Falle der Verstellung im Spiel bei Kleinkindern bzgl. des Zusammenhangs zwischen Verstellung und Repräsentationen zweiter Ordnung mit Leslie in [103] übereinstimmt, kritisiert er dessen Verwendung des Begriffs "Metarepräsentation" (Perner in [123][S. 65, Z. 5-7]):

In sum, despite my agreement with Alan Leslie on several points about the features of mental representation required by pretense ... I can see no need for metarepresentation.

Im Gegensatz zu Leslie verwendet Perner nämlich den Begriff "Metarepräsentation" im oben genannten Sinne von Pylyshyn als rekursive metarepräsentationale Fähigkeit bzw. als Fähigkeit die repräsentationale Beziehung selbst zu repräsentieren (Perner in [123][S. 35, Z. 19-20]):

I reserve the expression "metarepresentation" for this recusiv meaning.

Dabei verwendet Perner in [123][S. 16f] den Begriff "Repräsentation" erst einmal im Hinblick auf das repräsentationale Medium (z.B. ein Bild) und trennt ihn so vom repräsentationalen Gehalt (z.B. dem im Bild Dargestellten) und von der repräsentationalen Beziehung zwischen beiden. Konkret definiert er den Begriff "Repräsentation" in [123][S. 18, Z. 32] folgendermaßen:

A representation is something that stands in a representational relation to something else.

Eine Repräsentation ist bei ihm also etwas, was mit etwas anderem in einer repräsentationalen Beziehung steht (z.B. Bild $\sim$ Gehalt des Bildes), welche sich nach Perner in [123][S. 20] noch weiter über die Kriterien Asymmetrie,[18] Singu-

[18] Eine repräsentationale Beziehung zwischen repräsentationalem Medium und repräsentationalem Gehalt ist asymmetrisch, weil das repräsentationale Medium (z.B. ein Passfoto) etwas repräsentiert, aber das Repräsentierte (die fotografierte Person) nicht das Medium repräsentiert.

larität,[19] Fehlrepräsentation[20] und Nichtexistenz[21] konkretisieren lässt. Metarepräsentationen sind nun für Perner in [123][S. 35f] diejenigen Repräsentationen, die die repräsentationale Beziehung zwischen repräsentationalen Medium und repräsentationalen Gehalt repräsentieren, d.h. die Fähigkeit zur Metarepräsentation ist nach Perner, wie auch nach Pylyshyn, die Fähigkeit, die repräsentationale Beziehung selbst zu repräsentieren. Somit stimmen Leslie's und Perner's Fassungen des Begriffs "Metarepräsentation" nicht überein! Aber wie genau erklärt Perner dann die Verstellung im Spiel? Perner geht in [123][S. 45ff] davon aus, dass Babies von Geburt an ein einzelnes, mentales Modell ihrer unmittelbaren Umwelt besitzen, welches sie mit jeder neu aufgenommen Information über die Umwelt aktualisieren können (a single updating model tied to reality). Ab dem zweiten Lebensjahr - genauer: ab dem 15 Lebensmonat! - wird dieses einzelne Modell (ein analoges Modell) durch andere multiple Modelle (hypothetische Modelle) erweitert, mit welchen man auch zeitliche Veränderungen einbeziehen kann (z.B. hypothetische Situationen in der Zukunft oder in der Vergangenheit). Dieser Einsatz von multiplen Modellen (multiple models freed from reality) ermöglicht nach Perner dann auch eine Verstellung im Spiel (Perner in [123][S. 54, Z. 15-21]):

The theoretical important question is what the relationship between these two models has to be. My answer to this question is that the two models simply represent two different situations: the real situation and a hypothetical situation. And so pretend play involves an intellectual skill similar to the one needed for understanding temporal change, where again two distinct situations need to be represented: the present situation and the past situation.

Somit kommt Perner's Erklärung des Verstellungsspiels bei Kleinkindern ohne Metarepräsentationen aus. Überdies bemerkt Perner in [123][S. 60], dass Leslie

[19] Eine repräsentationale Beziehung zwischen repräsentationalem Medium und repräsentationalem Gehalt ist singulär, weil das repräsentationale Medium etwas repräsentiert auch wenn es ununterscheidbar von einem anderen repräsentationalem Medium ist, was etwas Ähnliches repräsentiert.

[20] Eine repräsentationale Beziehung zwischen repräsentationalem Medium und repräsentationalem Gehalt kann fehlrepräsentativ sein, d.h. das Repräsentierte kann fehl- bzw. falschrepräsentiert sein.

[21] Eine repräsentationale Beziehung zwischen repräsentationalem Medium und repräsentationalem Gehalt setzt nicht zwingend die physische Existenz des Repräsentierten voraus.

mit dem Begriff "Metarepräsentation" Repräsentationen zweiter Ordnung charakterisiert und stellt fest (Perner in [123][S. 60, Z. 13-14]:

If this is what Leslie means by "metarepresentation", then we are engaging here in a purly terminological squabble.

Und dies ist meines Erachtens auch der Fall, da Leslie, wie oben gesehen, sich lediglich den Begriff "Metarepräsentation" von Pylyshyn ausleiht und nicht dessen rekursive metarepräsentationale Bedeutung. In Perner's Modellkontext ist dann auch eine Metarepräsentation ein Metamodell, welches die repräsentationale Beziehung zwischen analogem Modell und mindestens einem hypothetischen Modell modelliert bzw. repräsentiert (Perner in [123][S. 82, Z. 39 - S. 83, Z. 7]):

By analogy, a child capable of mental metarepresentation who, for instance, represents that a picture is a representation needs to construct a mental model containing two substructures and their relationship. One structure has to represent the picture (as a physical entity) and the other what the picture depicts (its interpretation), and, very importantly, the model has to include links between these two structures representing how the picture relates to the depicted. Without these links the model would not be a metamodel.

Perner erläutert diesen Zusammenhang zwischen analogem Modell, multiplen Modellen und Metamodellen in [123][S. 25ff, insb. Figure 2.1-4] mittels eines Sandkastens, der als Schlachtfeldmodell dienen soll (Perner in [123][S. 25, Z. 18-20]):

The sandbox happens to be an analoque model of the battlefield, because the spatial relations between objects on the battlefield are represented by spatial relations between the objects in the sandbox.

Dieses analoge Modell des Schlachtfeldes repräsentiert dann die derzeitige Situation auf dem Schlachtfeld, aber es kann weitergehend auch hypothetische Situationen auf dem Schlachtfeld repräsentieren (Perner in [123][S. 26, Z. 5-7]):

Another important use of the sandbox is to project future states of the battlefield. Here, the sandbox represents not the actual state of the battle but merely hypothetical situations.

Dieses hypothetische Modell des Schlachtfeldes repräsentiert also hypothetische

Situationen auf dem Schlachtfeld. Somit reichen nach Perner ein analoges und multiple Modelle zur Unterscheidung zwischen realen und hypothetischen Situatione aus, ohne dass man auf Metarepräsentationen zurückgreifen müsste (Perner in [123][S. 35, Z. 35-38]):

Our military models also make clear that the distinction between real and hypothetical does not involves metarepresentation in the recursive sense of representations representing representations.

Metamodelle bzw. Metarepräsentationen werden nach Perner erst dann notwendig, wenn man die repräsentationale Beziehung zwischen Schlachtfeldmodell und realem Schlachtfeld erklären möchte (Perner in [123][S. 40, Z. 3-4]):

Back to metamodels. They allow the generals to represent the relationship between their battlefield-model and the battlefield itself.

Perner charakterisiert weiter im Zuge seiner Ausführungen den Begriff "Mind" dann als ein repräsentationales informationsverarbeitendes System (Perner in [123][S. 112]) und argumentiert, dass es beim Übergang von multiplen Modellen hin zu Metamodellen einen Theoriewechsel von einer "Theory of Behavior" hin zu einer ToM geben muss, da das Verständnis von "Mind", das Kinder zwischen dem zweiten und dem vierten Lebenjahr haben, nichtrepräsentational ist, da sie die repräsentationale Verbindung zwischen den einzelnen Modellen nicht modellieren können, während das Kinder im Alter von vier Jahren mittels Metarepräsentationen können, was ein repräsentationales Verständnis von "Mind" und somit eine ToM sicherstellt (Perner in [123][S. 123f, insb. Table 5.2]).
Vergleicht man nun Leslie's und Perner's Theorien, so stellt man fest, dass Leslie's Repräsentationen erster Ordnung Perner's einzelnen, aktualisierbarem Modell über die Umwelt entsprechen und dass Leslie's Repräsentationen zweiter Ordnung Perner's multiplen Modellen entsprechen. Auch kommt Leslie's Entkopplungsmodell, welches er zur Erklärung der Verstellung im Spiel verwendet, Perner's Erklärungsansatz mittels analogen und multiplen Modellen recht nahe. Worin sich allerdings beide grundlegend unterscheiden, ist die Charakterisierung des Begriffs "Metarepräsentation". Leslie nennt die Repräsentationen zweiter Ordnung bereits Metarepräsentationen, während Perner diesen Begriff im Grunde erst für - um bei der repräsentationalen Begrifflichkeit zu bleiben - Repräsenta-

tionen dritter Ordnung verwendet, welche sich dadurch auszeichen, dass sie die repräsentationale Beziehung zwischen Repräsentationen erster Ordnung und Repräsentationen zweiter Ordnung repräsentieren. Und genau so werde ich hier den Begriff "Metarepräsentation" weiter verwenden, nämlich als Repräsentation dritter Ordnung, die die repräsentationale Beziehung zwischen einer Repräsentation erster Ordnung und einer Repräsentation zweiter Ordnung repräsentiert. Doch es gibt noch einen weiteren viel fundamentaleren Unterschied zwischen den Theorien von Leslie und Perner. Perner sieht, wie oben bereits dargelegt, "Mind" als ein repräsentationales informationsverarbeitendes System an, welches einer ToM zugrunde liegt. Für ihn ist die ToM nicht modular organisiert, sondern entspringt einem repräsentationalen Verarbeitungsmechanismus, welcher sich im Zuge der Ontogense entwickelt (Perner in [123][S. 284, Z. 2-5]):

My intention is not to provide a description of what children can understand about the mind at different ages. Instead, it is to show that developmental levels can be theoretically tied in with my analysis of the concept of representation.

Leslie geht dagegen in [104] von einer modular organisierten ToM aus:

In fact, the theory of mind module may have a complex internal (and modular) architecture as, for example, the visual and language faculties appears to have.

Doch diese beiden scheinbar nicht miteinander vereinbaren Positionen sind gar nicht so unvereinbar. Ich habe meinen Ausführungen hier eine schwache MMH vorangestellt, welche sich die Existenz zumindest eines allgemein-zentralen Verarbeitungsmechanismus offenhält, da man weder die Existenz von allgemein-zentralen Verarbeitungsmechanismen noch die von konzeptualen Modulen im Sperber'schen Sinne eindeutig bestätigen oder widerlegen kann (vgl. Kap. 1.2.4, insb. Abbildung 1.3). Ob der kognitive Weg hin zu den höheren kognitiven Fähigkeiten, w.z.B. der ToM, nun über allgemein-zentrale Verarbeitungsmechanismen (w.z.B. bei Perner in [123]) oder über Module (w.z.B. bei Leslie in [104], [105], [106] und Sperber in [145], [146], [147]) läuft, ist in meiner Argumentation nicht entscheidend, sondern vielmehr, ob diese Fähigkeiten eine evolutionäre Funktion besitzen und sich überdies, wie bereits die Sprach- und die ToM-Fähigkeit, in eine repräsentationale Verarbeitungsstruktur, welche der erste Kandidat eines allgemein-zentralen Verarbeitungsmechanismus ist, einordnen lassen.[22] Denn konzeptuale Module können auch auf einem allgemein-zentralen (repräsentationalen!) Verarbeitungsmechanismus operieren. Man kann also davon ausgehen, dass die ToM im Sinne eines konzeptualen Moduls modular organisiert ist, ohne dass man dabei gleichzeitig auf einen allgemein-zentralen Verarbeitungsmechanismus als Grundlage der repräsentationalen Verarbeitung im Gehirn verzichten müsste und umgekehrt. Allerdings stimme ich im Falle des geeigneten (proper) und tatsächlichen (actual) Bereichs dieses ToM-Moduls nicht mit Sperber in [145] und [146][S. 146ff] gänzlich überein. Sperber argumentiert dort (Sperber in [145], [146][S. 147, Z. 20-22]):

... its proper domain is that of the beliefs, desires, and intentions that cause human behavior.

Dass Sperber den geeigneten Bereich in der Zuschreibung verhaltenswirksamer mentaler bzw. intentionaler Zustände bei sich selbst und anderen sieht, ist noch unproblematisch, da die evolutionäre Funktion der ToM-Fähigkeit, wie durch die vorangegangene Argumentation ersichtlich wurde, in der Fähigkeit besteht sich selbst und anderen mentale bzw. intentionale Zustände zuschreiben zu können. Problematisch wird es erst, wenn Sperber in [145] und [146][S. 147, Z. 13-16] den tatsächlichen Bereich des ToM-Moduls charakterisiert:

The actual domain of the metarepresentationale module is clear enough: It is the set of all representations of which the organism is capable of inferring or otherwise apprehending the existence and content.

Der tatsächliche Bereich des ToM-Moduls soll die gesamte Menge aller Repräsentationen sein, auf deren Basis ein Organismus schlussfolgern oder deren Existenz und Inhalt ein Organismus begreifen kann? Das wären die Repräsentationen, die die Wahrnehmung und die vorausgehenden konzeptualen Module liefern, also alle Repräsentationen erster und zweiter Ordnung. Damit würde man das ToM-Modul und die repräsentationale Verarbeitungstruktur im Gehirn weitestgehend gleichsetzen und der tatsächliche Bereich des ToM-Moduls würde dann alles umfassen,

[22] Das sich die Sprachfähigkeit repräsentational einordnen lässt, bedarf an sich keiner näheren Erläuterung, da jede repräsentationale Einordnung sprachlicher Natur ist. M.a.W.: Der Sprache selbst ist eine repräsentationale bzw. intentionale Struktur inhärent.

was sich repräsentational bis einschließlich auf der zweiten Repräsentationsordnung einstufen lässt, wobei das ToM-Modul dann auf dieser Grundlage Repräsentationen dritter und noch höherer Ordnung erzeugt. Und dies ist auch tatsächlich Sperber's Sicht auf "Mind" (Sperber in [145], [146][S. 150, Z. 14-18], vgl. auch Unterabschnitt 1.2.4):

The mind is here pictured as involving three tiers: a single, thick layer of input modules, just as Fodor says; a complex network of first-order conceptual modules of all kinds; and a second-order meta-representational module.

Wenn man, wie Sperber hier, den Bereich eines Moduls so ausdehnt, dass er im Grunde alle vorausgehenden Repräsentationen umfasst, dann kann man auch gleich den modularen Gedanken ganz aufgeben und stattdessen zumindest eine grundlegende repräsentationale Verarbeitungsstruktur annehmen (vgl. Unterabschnitt 1.2.4, Abbildung 1.3). Da hilft es auch wenig, einem solchen metarepräsentationalen Modul noch zwei weitere metarepräsentationale Module - ein Verständnismodul zur Interpretation von Äußerungen und ein Logikmodul zur Überredung anderer, ohne selbst überredet zu werden - zur Seite zu stellen (Sperber in [147]), da alle drei metarepräsentationalen Module auf vorausgehenden Repräsentationen operieren. Obwohl Sperber in [147] die Komplexität einer repräsentationalen Verarbeitungsstruktur vollständig erfasst hat und sich damit über den potentiellen Bereich eines solchen metarepräsentationalen Moduls bewusst zu sein scheint, bleibt er weiter seiner starken MMH treu und schränkt sie nicht zu einer schwachen MMH ein. Dagegen bin ich in Abschnitt 1.2 letzteren Weg gegangen. Meine Hypothese über den tatsächlichen Bereich des ToM-Moduls sieht daher auf der Basis einer allgemein-zentralen repräsentationalen Verarbeitungsstruktur anders aus: er beinhaltet nicht nur die Zuschreibung von mentalen bzw. intentionalen Zuständen bei Subjekten, sondern auch bei beliebigen Objekten oder fiktiven Subjekten. Wie reagieren denn Menschen auf Objekte, die scheinbar Verhalten produzieren, w.z.B. Autos, Computer, etc.? Sie behandeln sie in der Regel wie Subjekte, die eigene Wünsche, Intentionen, etc. haben. Damit das ToM-Modul aktiv wird, muss Verhalten wahrgenommen werden, das einer intentionalen Quelle entspringen könnte. Ob es sich bei dieser Quelle um reale Subjekte (Menschen, Tiere), fiktive Subjekte (Fabelwesen, Götter) oder Objekte (Computer, Autos,

Bäume) handelt, spielt keine unmittelbare Rolle.
Insgesamt kann man also für die weitere Theoriebildung festhalten, dass die ToM-Fähigkeit zum einen eine modular organisierte Anpassung - eine Anpassung an die soziale Umwelt! - ist, und zum anderen, dass man sie als metarepräsentationale Fähigkeit mit Hilfe von Repräsentationsordnungen bzw. Intentionalitätsordnungen auf der Basis einer repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im Gehirn strukturieren und beschreiben kann.[23] Überdies kann man durch die evolutionären Zusammenhänge von ToM-Fähigkeit, Sprachfähigkeit und repräsentationaler Verarbeitungsstruktur bzw. Repräsentationsfähigkeit wohl auch davon ausgehen, dass sich die ToM-Fähigkeit und die Repräsentationsfähigkeit in den koevolutiven Prozess um die Anpassungen Gruppengröße, Gehirngröße, Sprachfähigkeit und Symbolverständnis eingliedern.

2.2.3 Soziale Intelligenz und Repräsentationsfähigkeit

Doch wie weit geht diese repräsentationale Verarbeitungsstruktur im menschlichen Gehirn? Genauer: Bis zu welcher Repräsentationsordnung reicht sie? Denn ohne eine solche Repräsentationsfähigkeit, welche weitestgehend problemlos und fehlerfrei mit Repräsentationen dritter Ordnung umgehen kann und somit eine ToM ermöglicht, kann Sprache als "Grooming"-Ersatz überhaupt nicht funktionieren, da die Menschen ohne ToM gar nicht in der Lage wären, ihre sozialen Beziehungen untereinander zu erfassen, geschweige denn zu beschreiben. Dazu benötigen sie ein Verständnis über die mentalen Befindlichkeiten der einzelnen Gruppenmitglieder. Daher schießt auch Dunbar in [46], dass nicht die Sprache

[23] Nach Whiten in [177][apes and secondary representations] verfügen in diesem Zusammenhang Menschenaffen maximal über die mentalen Kapazitäten von dreieinhalbjährigen Kindern. Sie sind zu Repräsentationen erster und zweiter Ordnung in der Lage, aber sie erreichen wahrscheinlich niemals Repräsentationen dritter Ordnung. Dies ist allerdings keineswegs sicher, wie später im Unterabschnitt 2.2.6 noch deutlich wird, wenn es um das Symbolverständnis bei Menschen und Schimpansen geht. Wenn man also die ToM zur Tier/Mensch-Unterscheidung heranziehen möchte, lässt sich keine eindeutige Antwort auf die Frage geben, ob nun die beiden Schimpansenarten eher zu den Hominiden oder doch zu den Affen zu zählen sind. Biologisch gesehen, gehören sie als zwei weitere rezente Arten zur Gattung *homo*, wenn man bedenkt, dass sie selbst mit dem modernen Menschen 99% der Gene teilen, was nach Roth in [140] dafür spricht, dass man Mensch, Schimpanse und Bonobo taxonomisch zusammen eingliedern sollte.

die Haupttriebkraft hinter der Zunahme der Neokortexvolumens war, sondern vielmehr eine ToM bzw. eine dementsprechende Intentionalitäts- bzw. Repräsentationsfähigkeit, welche es Individuen überhaupt erst ermöglicht, die sozialen Beziehungen untereinander zu erfassen und somit mittels Sprache beschreibbar zu machen, welche dann zur besseren Gruppenbindung eingesetzt werden kann. Bereits Premack & Woodruff bemerkten in [127], dass im Falle des Menschen diese repräsentationale Verarbeitungstruktur begrenzt zu sein scheint:

Human limits on embedding are not impressive: only about four steps make our species uncomfortable.

Da sie sich in ihren Ausführungen auf Intentionalitätsordnungen beziehen, erhält man mittels der bereits erklärten Umrechnungsformel (n-te Intentionalitätsordnung = $n+1$-te Repräsentationsordnung), dass die Grenze im Falle des modernen Menschen bei Repräsentationen fünfter Ordnung zu liegen scheint. Diese bei Premack & Woodruff nicht belegte Vermutung wird von Dunbar in [48][Figure 4] dadurch bestätigt, dass er die ereichbaren Intentionalitätsordnungen mit dem zeitlichen Verlauf der Hominisation in Zusammenhang bringt und dabei in Anbetracht dessen zu dem Schluss kommt, dass erst der moderne Mensch (*homo sapiens*) zu Intentionen vierter Ordnung (Repräsentationen fünfter Ordnung) fähig gewesen zu sein scheint. Doch sagt damit Dunbar erst einmal nichts über die Obergrenze der menschlichen Repräsentationsfähigkeit aus, sondern primär über die Untergrenze. Nach Dunbar in [48] müssen moderne Menschen (*homo sapiens*) mindestens zu Repräsentationen fünfter Ordnung in der Lage sein und dies erkläre sich schon auf Grund der gemeinschaftlichen Ausübung von Religion, welche Dunbar intentional einordnet:

For a supernatural-based religion to have any force in making use to the social line, I have to believe that you suppose that there are supernatural beings who can be made to understand that you and I desire that things should happen in a particular way. This involves four level of intentionality.

Somit müssen moderne Menschen (*homo sapiens*) zumindest mit Repräsentationen fünfter Ordnung weitestgehend problemlos umgehen können, wenn sie gemeinschaftlich eine Religion ausüben wollen. Doch wo liegt die repräsentationale Obergrenze? Peter Kinderman et al. gingen unter anderem dieser Frage in [93] nach und kamen zu dem Schluss, dass eine intentionale Verarbeitung bis einschließlich zur vierten Ordnung weitestgehend fehlerfrei abläuft, aber ab der fünften Ordnung die Fehlerhäufigkeit drastisch ansteigt. Damit hätte man dann eine Obergrenze für die repräsentationale Verarbeitungstruktur, nämlich Repräsentationen fünfter Ordnung. Doch diese Schlussfolgerung wäre in Anbetracht der Versuchsmethoden von Kinderman et al. voreilig. Um nämlich die intentionale Verarbeitung bzw. die ToM-Fähigkeit zu messen, wurden bei Kinderman et al. 77 Studenten nacheinander fünf Geschichten vorgelesen, wobei insbesondere vier davon komplexe soziale Situationen beinhalteten, bei welchen man die Perspektiven und Intentionen der Akteure nachvollziehen musste. Nach jeder einzelnen Geschichte mussten die Versuchspersonen entsprechende Fragen aus einem Fragenheftchen beantworten, welche einerseits auf Intentionalitätsordnungen (ToM-Fähigkeit) und andererseits auf logische Verknüpfung von Informationen (Kausalitätsordnungen) abzielten.[24] Die Resultate in [93][Figure 1] sind eindeutig. Während der Umgang mit Kausalitätsordnungen bis einschließlich der sechsten Ordnung weitestgehend fehlerfrei verläuft, steigt im Vergleich dazu bereits bei Intentionen zweiter Ordnung die Fehlerhäufigkeit leicht an und "explodiert" geradezu bei Intentionen fünfter Ordnung. Doch wie bei der Versuchsdurchführung in [93][Procedure] deutlich wird, basieren diese Resultate auf der Leistungsfähigkeit des Arbeitsgedächtnisses. Diese repräsentationale Obergrenze ist also erst einmal nur für das Arbeitsgedächtnis von Bedeutung. Bei der Auswertung ihrer Ergebnisse ist Kinderman et al. in [93] zudem aufgefallen, dass ToM-Fehler mit Kausalitäts-Fehlern, welche sie als "memory errors" bezeichnen, einher zu gehen scheinen:

It is interesting to note that, although ToM errors were more common at high levels of complexity, a significant correlation was observed between memory errors and ToM errors and there was a tendency for the ToM 'deficit' group to fail more memory questions.

Dies deutet daraufhin, dass beiden, der ToM-Fähigkeit und der Fähigkeit Infor-

[24]Zum Beispiel verwendeten Kinderman et al. in [93] die folgenden Fragen: "*Henry thought Sam would find the Post Office in Elm Street*" und "*The Post Office had moved from Elm Street to Bold Street*". Erstere bezieht sich auf Intentionlitätsordnugen und letztere auf eine verkettete logische Verknüpfung von Informationen (Kausalitätsordnungen).

mationen logisch zu verknüpfen, einerseits die repräsentationale Verarbeitungsstruktur und andererseits das Arbeitsgedächtnis zu Grunde liegen. Dabei betonen Kinderman et al. in [93], dass ihre Resultate mit der Hypothese übereinstimmen, die die ToM-Fähigkeit in Abhängigkeit von allgemeineren kognitiven Ressourcen, wie der exekutiven Funktion des Arbeitsgedächtnisses, sieht.[25] Doch, was ist das Besondere am Arbeitsgedächtnis, was diese repräsentationale Obergrenze bzw. den Zusammenhang mit der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur erklären könnte? Es ist seine Kopplung an das Bewusstsein, die entscheidend ist! Christof Koch verwendet in [96][S. 204, Z. 10-11] im Zuge seiner Untersuchung der neuronalen Korrelate des Bewusstseins die folgende Gedächtnisdefinition: Gedächtnis

... ist die Rückhaltung von erfahrungsabhängigen internen Repräsentationen über die Zeit.

Dabei erklärt Koch, dass es in diesem Zusammenhang einen fundamentalen Unterschied zwischen dem aktivitätsabhängigen Kurzzeitgedächtnis und dem strukturellen Langzeitgedächtnis gibt. Koch erklärt diesen Unterschied in [96][S. 205, Z. 3-7] mit Hilfe einer Computeranalogie:

Als Analogie könnte man sich vorstellen, dass es auch zwei Arten von Computerspeichern gibt, nämlich RAM und ROM. Während der Inhalt des dynamischen RAM-Speichers nur solange präsent ist, wie der Chip Strom hat, behält der ROM-Speicher seine Informationen über Jahre ohne elektrischen Strom. Ähnliches gilt

[25] Diese Hypothese überprüften Helen Davis und Chris Pratt in [35], indem sie Vorschulkindern zwischen drei und fünf Jahren erstens zwei "false belief tasks", zweitens zwei "false photograph tasks", drittens ein Vokabeltest (Peabody Picture Vocabulary Test - Revised (PPVT-R)) und viertens zwei Arbeitsgedächtnisaufgaben (Backward Digit Span (BDS), Forward Digit Span (FDS)) stellten. Als Resultate erhielten sie unter anderem, dass BDS und FDS signifikant die Leistung bei den ToM-Aufgaben (false belief tasks) vorhersagen, wobei FDS gegenüber BDS der schwächere "predictor" ist. Somit konnten sie die Hypothese empirisch stützen, die die Enwicklung der ToM-Fähigkeit in Abhängigkeit der Leistungfähigkeit des Arbeitsgedächtnisses sieht. Interessanterweise erhielten sie als Nebenresultat, dass ein erfolgreiches Absolvieren der BDS-Aufgabe für ein erfolgreiches Absolvieren einer ToM-Aufgabe nicht notwendig ist, was sich dahingehend interpretieren lässt, dass entweder beide Fähigkeiten im Zuge der Ontogense sich mehr oder weniger zeitgleich entwickeln oder die ToM-Fähigkeit sogar der Fähigkeit "Rückwärts-zu-Zählen" leicht vorausgeht. M.a.W.: ToM ist eine notwendige Bedingung für BDS, aber nicht umgekehrt.

für den Menschen.

Nach Koch ist diese Unterscheidung deshalb so wichtig, da die neuronalen Korrelate des Bewusstseins von aktivitätsabhängigen Gedächtnisformen abhängen und nicht von strukturellen. Er weist weiter in [96][S. 213f] darauf hin, dass die Psychologen das relativ ungenaue Konzept von Kurzzeitgedächtnis durch das vom Arbeitsgedächtnis ersetzt haben (Koch in [96][S. 213, Z. 23-26])

..., das sich aus einer zentralen Exekutive und mehreren untergeordnete Modalitäten zusammensetzt, wie dem räumlich-visuellen Kurzzeitspeicher oder Notizblock für visuelle Information oder der phonologischen Schleife für Sprache.

Dabei sei dieses Arbeitsgedächtnis nötig, um unmittelbar anstehende Probleme zu lösen, und nach seinen diesbezüglichen Ausführungen schlussfolgert Koch in [96][S. 222, Z. 22-27]:

In einem gut funktionierenden Gehirn geht das Arbeitsgedächtnis Hand in Hand mit Bewusstsein. Jeder Organismus mit Arbeitsgedächtnisfähigkeiten verfügt wahrscheinlich über Bewusstsein, was die Präsenz eines Arbeitsgedächtnisses zu einem Lackmus-Test für Bewusstsein bei Tieren, Babies oder Patienten macht, die nicht sprechen können. Der Umkehrschluss ist jedoch möglicherweise nicht zulässig.

Es bestätigt sich also, dass die von Kinderman et al. in [93] gefundenen Obergrenze nur für das Arbeitsgedächtnis und damit insbesondere für das Bewusstsein gilt. D.h., dass die bewusste Repräsentationsfähigkeit, die mit dem Arbeitsgedächtnis verbunden ist, im Falle des modernen Menschen (*homo sapiens*) auf Repräsentationen der fünften Ordnung begrenzt zu sein scheint. In Anbetracht dessen erscheint auch Dunbar's Einordnung der im Verlauf der Hominisation erreichbaren Intentionalitätsordnungen in [48][Figure 4] in einem etwas anderen Lichte. Diese Einordnung scheint sich auf bewusste Repräsentationen zu beschränken und der selektive Druck, der von einer stets komplexer werdenden sozialen Umwelt ausgeht, besteht nicht nur in der allgemeinen Erfassung und Verarbeitung dieser komplexen Beziehungsmuster, sondern insbesondere in der kurzfristigen, schnellen repräsentationalen Verarbeitung der jeweiligen Beziehungsstrukturen auf der Basis des Arbeitsgedächtnisses. Und was ist nun mit den unbewussten Repräsentationen bzw. mit den internen Repräsentationen, die sich bereits im strukturellen Langzeitgedächtnis befinden? Gibt es dort auch eine repräsentationale Obergrenze? Dies ist eine offene empirische Frage! Aber ist es überhaupt sinnvoll, eine solche repräsentationale Obergrenze im Falle des Langzeitgedächtnisses anzunehmen? Die kulturelle Vielfalt lässt sich doch bestimmt nicht bloß auf eine repräsentationale Verarbeitungsstruktur zurückführen, welche lediglich auf Repräsentationen bis maximal der fünften Ordnung operiert. Könnte es nicht vielmehr so sein, dass lediglich die bewusste Repräsentationsfähigkeit mehr oder weniger auf Repräsentationen bis einschließlich der fünften Ordnung beschränkt ist, da nicht mehr im Arbeitsgedächtnis gehalten werden kann, weil dies energetisch zu kostspielig ist? Und höhere Repräsentationsordnungen nur möglich sind, wenn die ihnen zu Grunde liegenden Repräsentationen bereits im strukturellen Langzeitgedächtnis sicher abgelegt sind? Wenn dem so wäre, müsste sich eine evolutionäre Funktion zum einen des Bewusstseins und zum anderen des Denkens in diesem repräsentationalen Kontext finden lassen, welche zusammen diese Hypothese stützen könnten.

Es wird in Anbetracht der bisherigen Ausführungen nun immer deutlicher, welche besondere Schlüsselstellung diese allgemein-zentrale repräsentationale Verarbeitungstruktur im Gehirn einzunehmen scheint, und es wird insbesondere deutlich, dass es sich um genau eine solche Struktur im Gehirn handeln muss.[26] Daher möchte ich zum Abschluss dieses Unterabschnitts, bevor ich zu dem evolutionären Zusammenhang zwischen Repräsentationsfähigkeit, Bewusstsein und Denken komme, diese repräsentationale Verarbeitungsstruktur im Gehirn einmal bis zur vierten Repräsentationsordnung in dem folgenden Flussdiagramm veranschaulichen:

[26]In Unterabschnitt 1.2.4 bin ich noch von der Annahme ausgegangen, dass es zumindest eine geben könnte, habe aber in Abbildung 1.3 hauptsächlich aus Gründen der Übersichtlichkeit und auf Grund einer noch fehlenden detaillierteren Erklärung der evolutionären Zusammenhänge zwischen dieser repräsentationalen Verarbeitungsstruktur und der konzeptualen Modularität nur genau eine in das Flussdiagramm über eine mögliche evolutionspsychologische uns soziobiologische Sicht auf das menschliche Gehirn integriert.

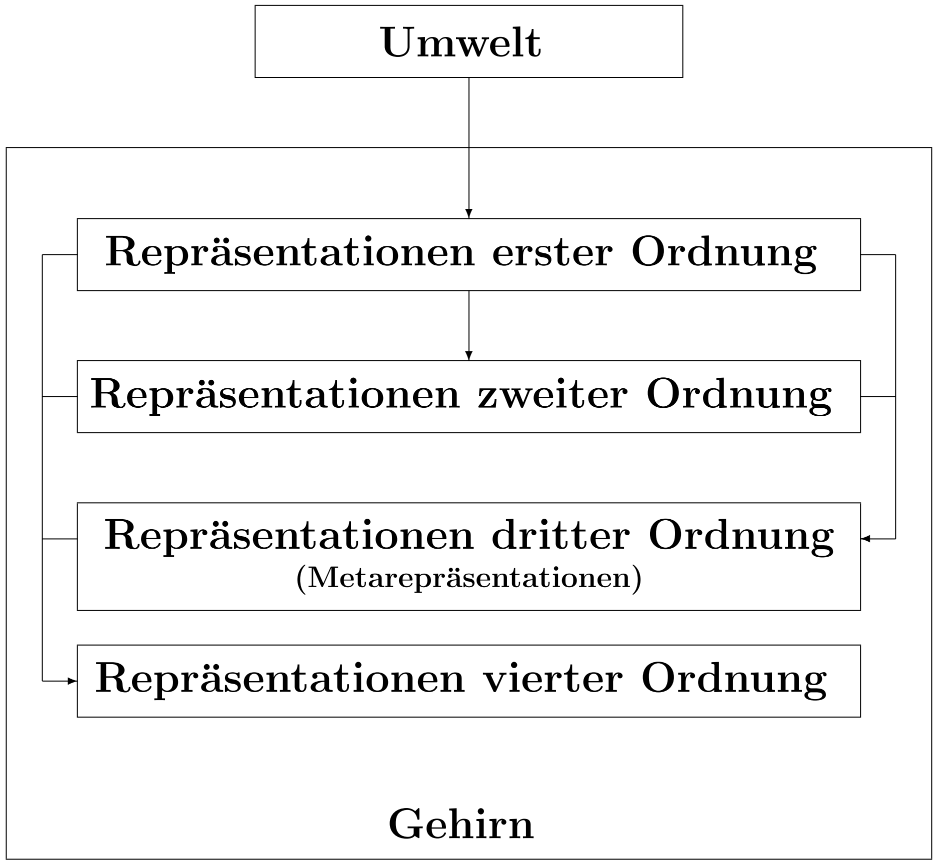


Abbildung 2.1.: Die repräsentationale Verarbeitungsstruktur des Gehirns, veranschaulicht bis zur vierten Repräsentationsordnung.

2.2.4 Soziale Intelligenz und Bewusstseinsfähigkeit

Welche Rolle spielt nun die Bewusstseinsfähigkeit in diesem evolutionären Kontext? Besitzt auch sie eine evolutionäre Funktion? Wozu benötigt ein Gehirn ein Bewusstsein? Was macht überhaupt ein Bewusstsein aus? Nach Gerhard Roth in [139][S. 193] umfasst das Bewusstsein alle Zustände, die von einem Individuum erlebt und von denen es prinzipiell auch erzählen könnte. Dazu rechnet er, die

(Roth in [139][S. 193, Z. 4-12]):

(1) Wahrnehmung von Vorgängen in der Umwelt und im eigenen Körper;
(2) mentale Zustände und Tätigkeiten wie Denken, Vorstellen und Erinnern;
(3) Emotionen, Affekte, Bedürfniszustände;
(4) Erleben der eigenen Identität und Kontinuität;
(5) "Meinigkeit" des eigenen Körpers;
(6) Autorschaft und Kontrolle der eigenen Handlungen und mentalen Akte;
(7) Verortung des Selbst und des Körpers in Raum und Zeit; und
(8) Realitätscharakter von Erlebtem und Unterscheidung zwischen Realität und Vorstellung.

Nach Roth bilden diese zusammen den charakteristischen Strom des Bewusstseins, welcher aus einem Hintergrundbewusstsein ((4)-(8)) und einem Aktualbewusstsein ((1)-(3)) besteht. Das Bewusstsein ist also kein singuläres Phänomen und auch Roth betont in [139][S. 203] den modularen Charakter von Bewusstsein. Nichtsdestotrotz verortet Roth in [139][S. 210ff] einen "Sitz" des Bewusstseins, nämlich den assoziativen Cortex, welcher auf Grund der folgenden Eigenschaften dazu werde (Roth in [139][S. 213, Z. 29-39]):

(1) eine Konvergenz der unterschiedlichen sensorischen Informationen (mit Ausnahme des Geruchsinns);
(2) eine hohe Gleichförmigkeit im zellulären Aufbau;
(3) eine hohe synaptische Verknüpfungsdichte und Plastizität, die ihn zum idealen assoziativen Speicher und zum Sitz des deklarativen Gedächtnisses macht;
(4) ein massiver Einfluss des limbischen Systems und damit von Emotionen, Motivation und Bewertung;
(5) eine Rückkopplung zwischen assoziativem Cortex und subcorticalen motorischen Zentren im Rahmen der Planung und Steuerung von Willkürhandlungen.

Aus diesen Eigenschaften, so Roth, resultiert die Fähigkeit des assoziativen Cortex eine schnelle synaptische Umverknüpfung seiner neuronalen Netzwerke leisten zu können, welche dieser allerdings mit einem erhöhten Sauerstoff- und Glucosebedarf bezahlt. Und das macht nun diese Bewusstseinsfähigkeit energetisch sehr teuer, was sofort evolutionär gesehen die Frage aufwirft, welcher Nutzen der Bewusstseinsfähigkeit diese hohen Kosten erklärt? Nach Roth in [139][S. 231, Z. 15-17] wird das Bewusstsein vom Gehirn eingesetzt,

wenn es um neuartige kognitiv oder motorisch schwierige und bedeutungshafte Probleme geht, die zu lösen sind.

Doch um welche konkreten Probleme handelt es sich dabei, wenn ausgerechnet nur wir Menschen mit einer solchen Bewusstseinsfähigkeit ausgestattet sein sollen? Auch diese Frage beantwortet Roth in [139][S. 231, Z. 32-39]:

Wir Menschen leben jedoch in einer Umwelt, besonders einer sozialen Umgebung, die uns ständig neue, wichtige und komplizierte Probleme stellt, so dass es ratsam ist, das Bewusstsein mehr oder weniger durchgehend "eingeschaltet" zu lassen, auch wenn dies energetisch kostspielig ist. Der damit erkaufte Vorteil, nämlich eine sofortige Handlungsbereitschaft, wiegt diese Kosten ganz offensichtlich auf.

Somit sieht Roth die evolutionäre Funktion des Bewusstseins in der ständigen Handlungsbereitschaft, die in einer sozialen Umwelt notwendig zu sein scheint. Ein Ergebnis, was in Anbetracht der vorangegangenen Diskussion um die Repräsentationsfähigkeit nicht weiter überrascht, denn das Bewusstsein scheint dazu benötigt zu werden, neue Repräsentationen im Arbeitsgedächtnis zu verarbeiten. Die konkrete Funktion der Bewusstseinsfähigkeit besteht also in der neuronalen Verarbeitung von Repräsentationen, die dem Gehirn bisher unbekannt waren, d.h. noch nicht im strukturellen Langzeitgedächtnis abrufbar sind und daher noch keine dazugehörigen automatisierten Handlungsschemata zur Verfügung stehen. Auch Hans Flohr erkennt die Verbindung zwischen Bewusstseinszuständen, ihren neuronalen Korrelaten und einer repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im Gehirn (Flohr in [54], [55], [56], [58]; Flohr et al. in [57]). In [54] und [55] untersucht Flohr die physiologischen Bedingungen des phänomenalen Bewusstseins und begründet und entwickelt die folgende Hypothese (Flohr in [55]):

Bewußtsein ist das Resultat der selbstreferentiellen repräsentationalen Aktivität des Gehirns. Ist diese hoch, entsteht Bewusstsein; ist diese gering, ist es nicht vorhanden. Qualia sind vorhanden, wenn im Gehirn eine hochkomplexe, aktive, repräsentationale Struktur entsteht.

Der Ausgangspunkt seiner Untersuchungen bildet dabei das Hebb'sche Konzept der sogenannten "cell assemblies",[27] das sind vereinfacht ausgedrückt Gruppen von präferentiell über plastische Synapsen zusammengeschaltete Neuronen, welche immer dann im Gehirn gebildet werden, wenn Neuronen an verschiedenen Orten im Gehirn gleichzeitig aktiviert werden und so ein einzigartiges Aktivierungsmuster erzeugen.[28] Dieses Aktivierungsmuster repräsentiert dann einen entsprechenden äußeren oder inneren Sachverhalt. Die Hebb'schen "assemblies" sind also Repräsentationen der äußeren und/oder inneren Welt. Daher folgert auch Flohr in [55]:

Man kann sich leicht vorstellen, daß der output solcher Neuronenverbände als input in nachgeschaltete plastische Netzwerke wirkt und dort Selbstorganisationsprozesse nach dem gleichen Prinzip auslöst. Eine Iteration derartiger Prozesse wird zu immer abstrakteren Metarepräsentationen [hier im Sinne von höheren Repräsentationen, Anm.d.A.] *führen.*

Das Auftreten und der Grad von Bewusstsein hängen also von dem Auftreten solcher "assemblies" ab.[29] Und nach Flohr in [55] bestimmt die Geschwindigkeit, mit der "assemblies" gebildet werden,

1. *die Menge der pro Zeit durch das Gehirn generierten Repräsentationen;*
2. *die Größe und Komplexität eines repräsentationalen Zustandes, der in einer gegebenen Zeitspanne aufgebaut werden kann;*

---

[27] Dieses Konzept entwickelte Hebb in [72][S. 69-74].

[28] Das grundlegende Problem mit dem Hebb'schen Konzept der "cell assemblies" bestand dabei lange darin, dass man sich gar nicht sicher war, ob es überhaupt solche plastischen Synapse im Gehirn gibt. Erst mit der Entdeckung der NMDA-Synapsen (<u>N</u>-<u>M</u>ethyl-<u>D</u>-<u>A</u>spartate receptor) in der Hirnrinde, welche genau die von Hebb postulierten Eigenschaften aufweisen, wurden diese Zweifel behoben (Flohr in [54], [55], [56], [58]). Auch ihre Funktionsweise ist mittlerweile, vor allem auch im Hinblick auf narkotische Substanzen, neurophysiologisch gut verstanden (Flohr et al. in [57][Figure 1], Flohr in [58][Figure 16.1]).

[29] Insbesondere muss betont werden, dass sich solche "assemblies" durch häufige Aktivierung verfestigen, was zur Folge hat, dass auch höhere Repräsentationen im Prinzip unbewusst ablaufen können, wenn nur die entsprechenden Aktivierungsmuster oft genug auftreten. M.a.W.: Das Auftreten von Bewusstsein ist mit dem Zustand der Neuverknüpfung von Nervennetzen verbunden. Je höher die Rate der Neuverknüpfung ist, desto bewusster wird ein Vorgang. Je mehr bereits vorhandene Netzwerke zum Einsatz kommen, desto unbewusster ist ein Vorgang (Roth in [138][S. 231ff]).

3. *die Menge und Komplexität von Metarepräsentationen, die pro Zeiteinheit gebildet werden können;*
4. *Umfang und Art aller weiteren computationalen Prozesse, die von den gebildeten Repräsentationen abhängen.*

Damit ist der Zusammenhang des Bewusstseins, seiner neuralen Korrelate und der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im Gehirn hinreichend gut aufgedeckt: Eine äußere Wahrnehmung aktiviert im Gehirn eine Gruppe von Neuronen, welche über plastische NMDA-Synapsen miteinander verbunden sind und welche sich über diese plastischen Synapsen auch wieder lösen und mit anderen Neuronen verbinden können. Solche Gruppen von Neuronen, die besagten "assemblies", können dann im Gehirn weiter verarbeitet werden, indem sich "assemblies" bilden, die die Verbindungen dieser ersten "assemblies" repräsentieren, was letztendlich eine repräsentationale Verarbeitung im Gehirn ermöglicht. Die Grade des Bewusstseins sind dabei an die einzelnen Repräsentationsordnungen dieser repräsentationalen Verarbeitungstruktur gebunden, wenn diese es mit neuen Repräsentationen zu tun hat, welche im Arbeitsgedächtnis verarbeitet werden. Dort können, wie bereits erklärt, Repräsentationen bis einschließlich der fünften Ordnung weitestgehend fehlerfrei verarbeitet werden. Dies sagt aber nichts darüber aus, wieviele Repräsentationsordnungen sich im Zuge dieser speziellen repräsentationalen Verarbeitung bereits im Langzeitgedächtnis befinden. Auch sagt es nichts darüber aus, auf welcher repräsentationalen Stufe sich die verschiedenen Bewusstseinsphänomene (Ereignisbewusstsein, Intentionsbewusstsein, Selbstbewusstsein, u.a.) einordnen lassen. Als Beispiel für eine solche repräsentationale Einordnung diene jetzt einmal das Selbstbewusstsein, d.h. das Sich-selbst-bewusst-sein, insbesondere das Bewusstsein über die eigenen Intentionen. Wie lässt sich dies repräsentational einordnen? Zunächst einmal ergibt sich eine Repräsentation erster Ordnung, z.B., die einer Banane. Daraus kann sich dann durch eine Intention eine Repräsentation zweiter Ordnung ergeben:

Ich möchte die Banane.

Doch diese Intention erster Ordnung ist im Prinzip erst einmal unbewusst. Bewusst wird sie erst, wenn man sich darüber im Klaren ist, dass man die Banane möchte:

Ich weiß, dass ich die Banane möchte.

Um sich seiner unmittelbaren Intentionen bewusst zu sein, benötigt man also Intentionen zweiter Ordnung bzw. Repräsentationen dritter Ordnung. Und was ist mit dem Bewusstsein über die unmittelbaren Intentionen der anderen? Wie verhält es sich da? Im Prinzip genauso:

A möchte die Banane. B weiß, dass A die Banane möchte.

Also benötigt man auch in diesem Fall eine Repräsentationsfähigkeit dritter Ordnung; also eine ToM, um sich einerseits seiner eigenen unmittelbaren Intentionen und andererseits der der anderen bewusst zu sein. Das Selbstbewusstsein ist also schon ein Bewusstseinszustand höherer repräsentationaler Ordnung, dem andere Bewusstseinszustände vorausgehen können bzw. sogar müssen, je nach Grad des Bewusstseinszustandes. Da dieser graduelle Übergang von unbewusster hin zu bewusster Wahrnehmung an Repräsentationsordnungen gebunden ist, ist auch zu vermuten, dass er sich in der Ontogenese des Menschen widerspiegelt. In Unterabschnitt 2.2.2 wurde bereits erklärt, dass sich die ToM-Fähigkeit, d.h. der Umgang mit Repräsentationen dritter Ordnung, in der Regel im Laufe des vierten Lebensjahres entwickelt und spätestens im Alter von fünf Jahren abgeschlossen ist. Aus der obigen repräsentationalen Einordnung des Selbstbewusstseins als Repräsentation von mindestens der dritten Ordnung, ist nun auch zu erwarten, dass dieses auch erst frühstens ab dem vierten Lebensjahr zu beobachten ist. Und dies verhält sich tatsächlich so, wie Roth in [139][S. 227, Z. 20-24] erklärt:

Eine unbewusste Wahrnehmung ganz besonderer Art hat jeder von uns erfahren, und zwar in seinem ersten Lebensabschnitt, der von den allerersten Aktivitäten der Sinnesorgane bis zur Herausbildung eines bewusst empfindenen und erinnerenden Ich etwa ab dem vierten Lebensjahr reicht.

Dies bedeutet natürlich nicht, dass Kinder vor dem vierten Lebensjahr kein Bewusstsein hätten, wie auch Roth in [139][S. 227f] ausdrücklich betont, sondern lediglich, dass dieser Grad von Bewussteinsfähigkeit bis zum vierten Lebensjahr noch nicht entwickelt ist. Dieser graduelle Übergang der Bewussteinsfähigkeit, welcher an die Repräsentationsfähigkeit und an eine ToM gekoppelt ist, spiegelt sich auch in den Resultaten von Perner & Dienes in [124] wider. In [124] gehen Perner & Dienes der Frage nach, wann Kinder sich der Ereignisse in ihrer Umwelt bewusst werden (become consciously aware)? In ihrer Analyse untersuchen sie fünf Strategien, um diesen Zeitpunkt in der Entwicklung von Kindern festzustellen. Drei von diesen Strategien (verbale Kommunikation, exekutive Kontrolle, explizites Gedächtnis) sehen sie als hinreichende Bedingungen für ein Ereignisbewusstsein an, während sie zwei Strategien (Zugangsbewusstsein und ToM, Phänomenales Bewusstsein und ToM) als notwendige Bedingungen für ein Ereignisbewusstsein einstufen. Nach Betrachtung und Analyse aller fünf Strategien erhalten sie ein Alter von $12-15\ (\pm 3)$ Monaten als Schwelle zu einem Ereignisbewusstsein (consciously aware of events in the world). Perner & Dienes machen dann noch darauf aufmerksam, dass dies in Perner's Repräsentationstheorie (Perner in [123]) der Ebene der multiplen Modelle entspricht (vgl. Unterabschnitt 2.2.2), welche Repräsentationen zweiter Ordnung bzw. Intentionen erster Ordnung entsprechen. Anhand der von Perner & Dienes in [124][Table 1] ausgewerteten Strategien und ihrer getroffenen repräsentationalen Einordnung bzgl. eines Ereignisbewusstseins wird nun auch ausgehend vom Alter von $12 - 15\ \ (\pm 3)$ Monaten bis hin zum Alter von $3 - 5$ Jahren deutlich, dass der jeweilige Bewusstseinsgrad an die entsprechende Repräsentations- bzw. Intentionsordnung gebunden ist. Erst im Alter zwischen $3 - 5$ Jahren liefern ausnahmslos alle fünf Strategien positive Befunde, was auf eine Repräsentationsfähigkeit dritter Ordnung, also eine ToM, hinweist. Wenn man also Repräsentationen dritter Ordnung benötigt, um sich unter anderem einerseits seiner eigenen unmittelbaren Intentionen bewusst zu sein und andererseits sich der unmittelbaren Intentionen anderer bewusst zu sein, dann stellt sich natürlich aus evolutionärer Sicht sofort die Frage, was kommt denn zuerst? Ist es das Bewusstsein über die unmittelbaren Intentionen der anderen oder das über die eigenen unmittelbaren Intentionen? Beide lassen sich, wie oben gesehen, als Repräsentationen dritter Ordnung einstufen! Eckard Voland bietet auf diese Frage in [167] den Schlüssel zur Anwort. Dort argumentiert er im Zuge seiner evolutionären Erklärung der Intuition der Freiheit, dass es das Verständnis der prinzipiellen Handlungsfreiheit der anderen ist, welches dem Verständnis der eigenen prinzipiellen Handlungsfreiheit und damit der eigenen Intuition der Freiheit vorausgeht. Dies begründet er mit dem Selektionsdruck, den eine komplexe soziale Umwelt, in der macchiavellische und kooperative Taktiken an der Tagesordnung sind, auf ein einzelnes Individuum ausübt:

If, as the "social brain hypothesis" alleges, the main selective pressure among primates lies on generating social knowledge about one's cooperators and competitors and utilizing this knowledge for one's own production of strategic behavior, then it is the knowledge about others and not the knowledge about oneself that is the scarce resource, the maximation of which is promoted by natural selection. From an evolutionary standpoint, it is advantageous to make the others calculable, i.e. to form hypothesis about their probable behavioral forms and tendencies.

Genauso scheint es sich mit dem Verständnis der Intentionen zu verhalten: Zuerst nimmt man die Intentionen der anderen bewusst wahr und dann darauf aufbauend die eigenen Intentionen. Es ist also das Bewusstsein über die Intentionen der anderen und nicht das Bewusstsein über die eigenen Intentionen, welches evolutionär gesehen den Anfang zu machen scheint. Aber wozu dann überhaupt noch Selbstbewusstsein? Es scheint doch in Anbetracht des Selektionsdruckes der sozialen Umwelt auszureichen, wenn man sich der Intentionen der anderen bewusst ist, um entsprechend handeln zu können? Zumindest solange man keine Gegenstrategie entwickeln möchte! Erst in der Wettbewerbssituation wird Selbstbewusstsein in diesem Sinne notwendig. Dies kann man sich repräsentational anhand einer Konkurrenzsituation um eine Banane vorstellen:

1. *A möchte die Banane.*
2. *B möchte die Banane.*
3. *A weiß, dass B die Banane möchte.*
4. *B weiß, dass A die Banane möchte.*
5. *A weiß, dass B weiß, dass A die Banane möchte.*
6. *B weiß, dass A weiß, dass B die Banane möchte.*

Bei 1 & 2 handelt es sich um Repräsentationen zweiter Ordnung und bei 3 & 4 um Repräsentationen dritter Ordnung. In 3 & 4 ist sich jeder der beiden A und B darüber bewusst, dass der jeweils andere die Banane möchte. Aber damit nun jeder der beiden sein/ihr Interesse an der Banane durchsetzen kann, muss er/sie sich darüber bewusst sein, dass der jeweils andere weiß, dass er/sie die Banane auch möchte (5 & 6). Und dies macht jetzt das Bewusstsein über die eigene Intention notwendig, denn um wissen zu können, dass ein anderer die eigenen Intentionen durchschaut hat, muss man sich der eigenen Intentionen bewusst sein. Dieses Bewusstsein benötigt man nicht, um unmittelbar (sozial isoliert) zu handeln, indem man nach der besagten Banane greift, wenn man diese alleine vor sich liegen hat. Selbstbewusstsein wird evolutionär gesehen erst dann notwendig, wenn man in sozialer Interaktion handeln muss. Dies sind dann Repräsentationen vierter Ordnung bzw. Intentionen dritter Ordnung (vgl. 5 & 6), und für die Täuschung benötigt man dann noch mindestens eine Repräsentationsordnung mehr:

1. *A täuscht B, der/die weiß, dass A die Banane möchte, vor, dass er/sie kein Interesse an der Banane hat.*

Also eine Repräsentation fünfter Ordnung bzw. eine Intention vierter Ordnung. Dementsprechend bestünde dann B's Gegentäuschung in einer Repräsentation sechster Ordnung bzw. einer Intention fünfter Ordnung. Und interessanterweise steigt genau bei diesem Übergang von Täuschung zu Gegentäuschung (Repräsentationen fünfter zu sechster Ordnung) die Fehlerhäufigkeit bei der Verarbeitung, wie im vorangegangenen Unterabschnitt dargelegt, drastisch an. Das Selbstbewusstsein lässt sich also im Rahmen dieser repräsentationalen Bewusstseinshypothese repräsentational einordnen, und zwar als bewusste Repräsentation höherer Ordnung.

Doch nicht nur der Zusammenhang zwischen Bewusstsein, seinen neuralen Korrelaten und der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im menschlichen Gehirn konnte somit hinreichend geklärt werden, sondern insbesondere, *en passant*, zum einen die Bestätigung, dass es sich um genau eine solche repräsentationale Verarbeitungsstruktur im Gehirn handeln muss, die von den entsprechenden neuronalen Korrelaten erzeugt wird, und zum anderen der Zusammenhang zwischen dieser repräsentationalen Verarbeitungsstruktur und den konzeptualen Modulen. Es ist nämlich zu vermuten, dass sich die neuronalen Aktivierungsmuster, d.h. die neuronalen Korrelate von Repräsentationen, sich nicht nur bei genau dem einen entsprechenden Stimulus, sondern bereits bei ähnlichen Stimuli mehr oder weniger aktivieren, so dass es eine neuronale Entsprechung von dem tatsächlichen und den geeigneten Bereich eines konzeptualen Moduls zu geben scheint. War die meiner Untersuchung hier vorausgehende evolutionspsychologische und soziobiologische Sicht auf das menschliche Gehirn (vgl. Unterabschnitt 1.2.4 und Abbildung 1.3) bisher vor allem in Bezug auf die Existenz und Eindeutigkeit einer repräsentationalen Verarbeitungstruktur und ihrer Verbindung zu den konzeptualen Modulen hypothetisch und wurde hauptsächlich deswegen angenommen, da man ihre Existenz auch nicht sicher ausschließen konnte und man somit eine starke MMH nicht richtig argumentativ absichern konnte, so kann man diese Existenz und Eindeutigkeit jetzt nach Betrachtung der neuronalen Grundlagen von Bewusstsein als weitestgehend gesichert ansehen. Gleiches gilt für die konzeptualen Module im Sperber'schen Sinne. Somit gliedert sich insgesamt die Bewusstseinsfähigkeit als soziale Anpassung einerseits in die repräsentationale Verarbeitungsstruktur und andererseits in den koevolutiven Prozess im Rahmen von Gruppengröße, Gehirngröße, Sprachfähigkeit, ToM-Fähigkeit und Repräsentationsfähigkeit ein. Die jetzt vor allem im Verhältnis zwischen repräsentationaler Verarbeitungsstruktur und Bewusstsein noch offene Frage ist die nach der Rolle der Denkfähigkeit? Bewusstes und unbewusstes Denken müssen sich auch einerseits in diesen repräsentationalen und andererseits in diesen evolutionären Prozess eingliedern lassen, wobei es letztendlich auch wiederum darum geht, eine evolutionäre Funktion des Denkens aufzuspüren.

2.2.5 Soziale Intelligenz und Denkfähigkeit

Wie lässt sich nun die Denkfähigkeit in diesen evolutionären und repräsentationalen Kontext eingliedern? Im vorangegangenen Unterabschnitt wurde argumentiert, dass einerseits die evolutionäre Funktion des Bewusstseins in der Ermöglichung einer sofortigen Handlungsbereitschaft besteht und andererseits sich Bewusstseinszustände, wie insbesondere auch das Selbstbewusstsein, repräsentational als Repräsentationen höherer Ordnung charakterisieren lassen, bei welchen die Leistungsfähigkeit des Arbeitsgedächtnisses eine eintscheidende Rolle spielt. Damit hat man zumindest schon einmal einen Erklärungsansatz für das Denken:

das bewusste Denken ermöglicht die Planung, Durchführung und Überwachung von Verhaltensmustern in neuen, dem Gehirn bisher unbekannten Problemsituationen, in welchen es nicht auf bereits bestehende Handlungsschemata, die im Langzeitgedächtnis abrufbar wären, zurückgreifen kann. Ist ein solcher Zurückgriff auf derartig im Langzeitgedächtnis abgelegte Handlungsschemata allerdings möglich, so kann das Gehirn ohne Bewusstsein dieses Handlungsschemata aktivieren und das dazugehörige Problem lösen. Darin besteht dann das unbewusste Denken. Wenn dies so wäre, dann müsste es beim Problemlösen auch so sein, dass das unbewusste Denken die für die Lösung eines mehr oder weniger neuen Problems notwendigen Informationen aus dem Langzeitgedächtnis abrufen kann und dem bewussten Denken dann im Arbeitsgedächtnis zur Verfügung stellt. Neurobiologisch gesehen verhält es sich tatsächlich so. Roth erklärt den Gehirnprozess, der dem Problemlösen, zu Grunde liegt in [139][S. 176ff] - kurz gefasst - folgendermaßen:

Das Wissen ist in verschiedenen spezialisierten Gedächtnissen abgelegt, welche sich über die gesamte Großhirnrinde verstreuen. Beim Problemlösen und der Handlungsplanung werden dann diese Gedächtnisinhalte - je nach Bedarf - abgerufen und dem Arbeitsgedächtnis im dorsolateralen präfrontalen Cortex zugeführt, wo die Handlungsplanung und -steuerung umgesetzt werden.

Es ist dem Menschen also nur ein Teil des Denkens mehr oder weniger bewusst, und zwar der, der sich im Arbeitsgedächtnis abspielt. Somit kann man die Denkfähigkeit als die Fähigkeit des menschlichen Gehirns charakterisieren, bei der die Menschen ihre Intelligenz bewusst oder unbewusst einsetzen, um Verhalten zu erzeugen. In Anbetracht der Intelligenzdefinition aus Abschnitt 2.1 besteht dann der Unterschied zwischen der Intelligenz und dem Denken darin, dass die Intelligenz das Potential eines modular organisierten Gehirns darstellt, Verhalten zu erzeugen, während das Denken dieses Potential eines modular organisierten Gehirns umsetzt, indem es bewusst oder unbewusst zum tatsächlichen Verhalten führt. Demnach scheint die Denkfähigkeit, wie schon die Bewusstseinsfähigkeit, modular organisiert zu sein und ihre evolutionäre Funktion scheint darin zu bestehen, zum tatsächlichen Verhalten zu führen. Aber ist sie dann auch eine Anpassung an die soziale Umwelt? Im Falle der Bewusstseinsfähigkeit ließ sich dies mit Verweis auf die Probleme, die eine komplexe soziale Umwelt für ein einzelnes menschliches Individuum mit sich bringt, erklären. Also träfe dies zumindest auch auf das bewusste Denken zu. Aber was ist mit dem unbewussten Denken? Sich-Verhalten muss man natürlich auch im Falle von ökologischen Problemen, was zu der begründeten Annahmen führen würde, dass die Denkfähigkeit ihren evolutionären Ausgangspunkt wohl nicht im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz genommen hat, sondern erst bei Beginn der Hominisation, vielleicht bereits in der Primatenevolution, in dieses Umfeld als mehr oder weniger bewusste Denkfähigkeit eintrat, welche sich dann im koevolutiven Prozess um Gruppengröße, Gehirngröße, Repräsentationsfähigkeit, Sprachfähigkeit, ToM-Fähigkeit und Bewusstseinsfähigkeit zur heutigen Denkfähigkeit im Falle des modernen Menschen (*homo sapiens*) entwickelt hat. Damit wäre eine evolutionäre Erklärung der spezifisch menschlichen Denkfähigkeit im koevolutiven Prozess im Rahmen der sozialen Intelligenzevolution gefunden. Doch wie verhält es sich mit einer repräsentationalen Einordnung der Denkfähigkeit? Auch hier ergibt sich aus der im vorangegangenen Unterabschnitt vorgenommenen Einordnung der Bewusstseinsfähigkeit ein Erklärungsansatz. Es wurde dort argumentiert, dass Bewusstseinszuständen jeweils Repräsentationen höherer Ordnung, welche im Arbeitsgedächtnis verarbeitet werden, zu Grunde liegen. Wie oben erklärt, versorgt das unbewusste Denken das Arbeitsgedächtnis mit im Langzeitgedächtnis abgelegten Informationen, die bei der Bewältigung eines Problems notwendig bzw. hilfreich sein könnten. Bei diesen Informationen handelt es sich natürlich auch um Repräsentationen und somit organisiert das Denken die für ein zu lösendes Problem notwendigen Repräsentationen. Das unbewusste Denken trifft sozusagen eine repräsentationale Vorauswahl und gibt nur diejenigen Repräsentationen an das Arbeitsgedächtnis bzw. das Bewusstsein weiter, die für das zu lösende Problem eine Relevanz zu besitzen scheinen. Das bewusste Denken bildet dann auf dieser Grundlage neue Repräsentationen und entwickelt somit Handlungsschemata, die zur Lösung eines neuen Problems eingesetzt werden können. Eine besondere Vielfalt solcher neuer Denkergebnisse wird dann häufig mit Kreativität gleichgesetzt und diese mit der Intelligenz in Zusammenhang gebracht (Roth in [139][S. 183, Z. 10-14]):

Vermutungen über den Zusammenhang zwischen Kreativität und Intelligenz gehen *in die Richtung, dass Intelligenz eher etwas mit basalen Eigenschaften kognitiver Prozesse, Kreativität dagegen mehr mit komplexeren Eigenschaften dieser Prozesse zu tun hat.*

Diese Vermutung über den Zusammenhang zwischen Kreativität und Intelligenz bestätigt sich auch hier. Denn die Intelligenz ist, wie mehrfach erklärt, das Potential eines modular organisierten Gehirns, Verhalten zu erzeugen. Das Denken exekutiert sozusagen dieses Potential und führt in Form des bewussten Denkens zu neuen Repäsentationen, die dem Individuum zuvor unbekannt waren. Kreativität ist dann die Vielfalt solcher neuerer Repräsentationen, die das bewusste Denken hervorbringt. Letztendlich ist die Denkfähigkeit also die Fähigkeit, die im Rahmen der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur die Repräsentationen organisiert und in den verschiedenen Gedächtnissen abspeichert sowie gegebenenfalls auf diese zurückreifen kann und somit im Falle neuerer Probleme diese Repräsentationen dem Arbeitsgedächtnis und damit dem Bewusstsein zur Weiterverarbeitung zur Verfügung stellen kann. Diese Weiterverarbeitung im Bewusstein, also das bewusste Denken, ist es dann auch, was sich im koevolutiven Prozess im Rahmen der sozialen Intelligenzevolution im Laufe der Hominisation weiterentwickelt hat. Diese Argumentation zeigt auch, dass die Denkfähigkeit allgemein vor der Sprachfähigkeit evolviert ist, denn Verhalten muss man sich, aber Sprechen nicht! Nichtsdestotrotz kann in diesem koevolutiven Prozess die Sprachfähigkeit auf die Denkfähigkeit einen katalytischen Effekt gehabt haben, welcher bereits in sprachphilosophischen Ansätzen diskutiert wurde (Franzen in [64]).[30]

Insgesamt konnte somit das Denken bzw. die Denkfähigkeit einerseits repräsentational und andererseits evolutionär eingeordnet werden und auf Grund ihres wichtigen und besonderen Zusammenhangs mit der Intelligenz sei sie nun noch einmal definitiorisch festgehalten:

---

[30] Franzen stellt sich dieses Wechselverhältnis zwischen Denken und Sprache in [64] wiefolgt vor:

1. Ein bisschen Denken - Ein bisschen Sprache.

⇒ 2. Etwas mehr Denken - Etwas mehr Sprache.

⇒ 3. Noch mehr Denken - Noch mehr Sprache.

Definition 2.3 (Denken)

*Unter **Denken** versteht man die Fähigkeit des menschlichen Gehirns, die dem Menschen eigene Intelligenz bewusst oder unbewusst einzusetzen, um Verhalten zu erzeugen, d.h. einerseits um Handlungen zu planen und auszuführen und andereseits um die Handlungsdurchführung zu überwachen und gegebenenfalls zu korrigieren.*

Als nächstes stellt sich nun die Frage, ob eine solche evolutionäre und repräsentationale Einordnung auch mit dem Symbolverständnis gelingt, welches bei der Verstellung im Spiel, beim Denken und beim Sprechen eine wichtige Rolle spielt.

2.2.6 Soziale Intelligenz und Symbolverständnis

In Unterabschnitt 2.2.1 ist bereits festgestellt worden, dass das Symbolverständnis ebenfalls zu dem koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenz gehören muss, ohne aber genau auf den konkreten evolutionären Zusammenhang zwischen sozialer Intelligenz und Symbolverständnis eingegangen zu sein. Wie sieht es nun also mit dem Verhältnis zwischen sozialer Intelligenz und Symbolverständnis aus? Spielen Symbole in sozialen Kontexten eine besondere Rolle? Betrachtet man das aus Unterabschnitt 2.2.2 bekannte, von Leslie in [103] stammende Beispiel eines Verstellungsspiels "Banane als Telefon", dann stellt man insbesondere fest, dass die Banane sozusagen als Telefonsymbol eingesetzt wird. Somit arbeitet die Verstellung im Spiel bzw. die Imitation bereits mit ersten symbolischen Repräsentationen. Diese ersten symbolischen Repräsentation lassen sich dabei, wie in Unterabschnitt 2.2.2 erklärt, als Repräsentationen zweiter Ordnung einstufen. Aber nicht alle symbolischen Repräsentationen sind von der Art, dass sie Eigenschaften bzw. Charakteristika des zu Repräsentierenden beinhalten (w.z.B. die Telefonhörerform, die man in einer leicht gekrümmten Banane wiedererkennen kann). Vor allem die abstrakten symbolischen Repräsentationen (w.z.B. Schriftzeichen oder mathematische Symbole) lassen sich zu dieser repräsentationalen Ebene nicht zuordnen, da man sich bei ihrer Definition darüber im Klaren sein muss, dass man einem bisher inhaltsleeren bzw. bedeutungslosen Symbol einen beliebigen Inhalt bzw. eine beliebige Bedeutung zuschreiben kann, was voraussetzt, dass die repräsentationale Beziehung zwischen repräsentationalem Medium und repräsentationalem Gehalt modelliert werden muss, was wiederum mindestens eine Repräsentation der dritten Ordnung voraussetzt. Somit ist bereits eine repräsentationale Einordnung symbolischer Repräsentationen innerhalb der repräsentationalen Verabeitungsstruktur gelungen: Symbolische Repräsentationen, welche dem zu Repräsentierenden in irgend einer Art und Weise ähneln, sind Repräsentationen von mindestens zweiter Ordnung (w.z.B. Banane als Telefonsymbol), und symbolische Repräsentationen, bei welchen einem beliebigen Symbol ein beliebiger Inhalt bzw. Bedeutung zugeschrieben wird, ohne dass irgend eine Ähnlichkeit zwischen beiden besteht, sind Repräsentationen von mindestens dritter Ordnung (w.z.B. Schriftzeichen und mathematische Symbole). Demnach ist dieses Symbolverständnis wohl auch modular organisiert, da sich zum Beispiel das Verstellungsspiel "Banane als Telefon" vergleichbar mit Sperber's Gesichtererkennungsmodul, welches in Unterabschnitt 2.1.1 erklärt wurde, als konzeptuales Modul auffassen lässt. Doch wie sieht es mit einer evolutionären Funktion des Symbolverständnisses aus? Welchen evolutionären Nutzen können Symbole, vor allem abstrakte Symbole, in sozialen Kontexten mit sich bringen? Diesen evolutionären Zusammenhang deckten Sarah Boysen und Gary Berntson in [10] auf. Sie untersuchten, wie Schimpansen (*pan troglodytes*) ihr Symbolverständnis innerhalb sozialer Optimierungsprobleme einsetzen. Die Aufgabe für den einen Schimpansen ("the selector") bestand nun darin, zwischen zwei unterschiedlich großen Schokoerdnussreihen, welche sich jeweils in kleinen Schälchen befanden, eine auszuwählen, die dann der andere Schimpanse ("the observer") bekam. Der "selector" bekam dann die im anderen (nicht von ihm ausgewählten!) Schälchen befindlichen Schokoerdnüsse. Boysen & Berntson erwarteten nun, dass der "selector" zuerst die Schale mit der geringeren Anzahl von Schokoerdnüssen auswählt, um letztendlich die Schale mit der größeren Anzahl selbst erhalten zu können. Doch wider Erwarten zeigte im Mittel keiner von beiden Schimpansen diese optimale Verhaltensstrategie. Trotz hunderter Trainingsversuche nahm sich der "selector" im Mittel als erstes immer das Schälchen mit der größeren Anzahl von Schokoerdnüssen, obwohl er dies an den "observer" abgeben musste. Um dieses überraschende Verhalten genauer zu untersuchen, ersetzten Boysen & Berntson die Schalen mit Schokoerdnüssen durch arabische Ziffern, mit welchen beide

Schimpansen, Sheba und Sarah, vertraut waren.[31] Auf dieser Basis wurde der ursprüngliche Versuch wiederholt, nur dass der "selector" diesmal arabische Ziffern auswählen musste und dann er und der "observer" die entsprechende Anzahl Schokoerdnüsse im Anschluss an seine Wahl erhielten. Das Ergebnis war wieder überraschend, denn im Falle der arabischen Ziffern wählte der "selector" (Sheba) im Mittel zuerst die kleinere Zahl und erhielt dann natürlich die größere Anzahl von Schokoerdnüssen. Aber sobald die Zahlen wieder direkt durch Schokoerdnüsse ersetzt wurden, wählte der "selector" im Mittel gleich die Schale mit der größeren Anzahl von Schokoerdnüssen, obwohl der "observer" diese erhielt. Um sicherzugehen, dass dieses von Sheba gezeigte Verhalten keine Ausnahme war und um andere Einflüsse auszuschließen,[32] wiederholten Boysen & Berntson et al. in [11] diese Versuche mit weiteren Schimpansen, wobei sich das bereits beobachtete Verhalten nicht nur stets wiederholte, sondern auch die Einführung von Steinchen als Schokoerdnusssymbolen zeigte, dass Schimpansen anscheinend im Falle von Schokoerdnüssen direkt und Steinchen als Schokoerdnusssymbolen nicht in der Lage sind, die für sie optimale Strategie als "selector" durchzuführen (Boysen & Berntson et al. in [11][Figure 1, 3]), obwohl sie ihnen vertraut ist, was die reibungslose Durchführung dieser Strategie im Falle von arabischen Ziffern zeigt (Boysen & Berntson et al. in [11][Figure 5]). Boysen & Berntson et al. schlussfolgerten daraufhin, dass der Schokoerdnussstimulus einen so starken Einfluss auf die Handlungsausführung hat, dass die Schimpansen nicht die optimale Strategie (obwohl bekannt!) in ihrem Verhalten zeigen konnten. Erst symbolische Repräsentationen in Form von arabischen Ziffern ermöglichten ihnen die Durchführung der optimalen Strategie. Demnach, vermuteten Boysen & Berntson et al., spielen Zahlensymbole für die Anzahl von Schokoladenerdnüssen nicht die gleiche Rolle wie die verwendeten Steinsymbole, da die Zahlensymbole nur die Anzahl ihrer Bezüge (der Schokoerdnüsse) übernehmen, während Steinchen als direkte Repräsentanten von Schokoerdnüssen anzusehen sind. Somit sieht es so

[31] Beide Schimpansen waren in der Lage, mit arabische Ziffern als Anzahlsymbolen umzugehen, wobei aber Sheba auf Grund von vorangegangen Studien (Boysen & Berntson in [9]) mit dem Zahlenumgang vertrauter war als Sarah, weshalb auch nur sie die "selector"-Rolle im Falle der Verwendung arabischer Ziffern übernahm.

[32] Insbesondere wurde der "observer" bei dieser neuen Versuchsreihe ganz weggelassen.

aus, als könnten Schimpansen mittels abstrakten Symbolen ein Verhalten zeigen, welches "sozial intelligenter" ist, und welches sie ohne abstrakte Symbole nicht durchführen könnten. So resümierten auch Boysen & Berntson in [10][Discussion]:

The use of symbols as representations for quantities of food, however, may free the animals from the dispositional imperative invoked by the direct perceptual features of the food arrays, thus permitting more optimal responding to maximum reward.

Also bestünde die evolutionäre Funktion des Symbolverständnisses darin, im Rahmen sozialer Optimierungsprobleme direkte Reizstimuli unterdrücken zu können, damit eine intelligentere Verhaltensstrategie ermöglicht und durchführbar wird.
Doch trifft dies auch für den Menschen (*homo sapiens*) zu? In [114] rekapitulieren Walter Mischel, Yuichi Shoda und Monica Rodriguez dies auch für menschliche Kinder im Alter von vier Jahren. Auch sie haben Probleme damit einen direkten Anreiz zu unterdrücken bzw. ein Verlangen hinauszuzögern, auch wenn ihnen später eine noch größere Belohnung in Aussicht gestellt wird. Erst wenn man den direkten Anreiz durch ein Bild der Belohnung ersetzt, fällt ihnen das Hinauszögern bzw. das Unterdrücken des eigenen Verlangens leichter. In diesem Zusammenhang schlussfolgerten Mischel et al. in [114][From Distraction to Abstraction]:

Consitent with earlier work, we hypothesized that stimuli can be represented both in an arousing (consummatory) and in an abstract (nonconsummatory) informative manner. In an arousing representation, the focus is on the motivation, "hot" qualities of the stimulus that tend to elicit completion of the action sequence associated with it, such as eating a food or playing with a toy. In abstract representation the focus is on the more informative, "cool", symbolic aspects of the stimulus, for example, as in a cue or reminder of the contingency or reason for delaying the action sequence associated with it.

So ergibt sich auch bei vierjährigen Kindern, dass sie mittels symbolischer Repräsentationen in der Lage sind, ein "sozial intelligenters" Verhalten zu zeigen, welches sie ohne solche Repräsentationen nicht ohne weiteres zeigen könnten und ihrem Verlangen schneller nachgeben würden.
Ein Resultat, was sich auch bei erwachsenen Menschen noch ergibt, wie L. For-

zano und A. Logue in [62] nachgewiesen haben. Als Stimuli in ihren Versuchen verwendeten Forzano & Logue zum einen den von der jeweiligen Testperson präferierten Fruchtsaft und zum anderen Punkte, welche im Versuchsablauf entweder gegen Geld oder gegen entsprechende Mengen des jeweils präferierten Fruchtsaftes eingetauscht werden konnten. Ihre Resultate auswertend, stellten Forzano & Logue fest, dass erstens

..., subjects showed greater self-control for points exchangeable for money or juice than for juice available during the session

und dass zweitens

..., subjects did not differ in their degree of self-control between the two different reinforcers that were both delivered at the end of the session.

Also wird auch in dieser Versuchsreihe offengelegt, welchen evolutionären Nutzen symbolische Repräsentationen haben können: Sie ermöglichen ein intelligenteres Verhalten in sozialen Konkurrenzsituationen, indem sie direkte Anreize des jeweiligen repräsentationalen Bezuges zu unterdrücken helfen.
Somit ist eine mögliche evolutionäre Funktion des Symbolverständnisses aufgedeckt, welche mit der vorgenommenen repräsentationalen Einordnung des Symbolverständnisses in die repräsentationale Verarbeitungstruktur kompatibel ist. Denn, damit zum Beispiel Schimpansen an den geschilderten Versuchen überhaupt teilnehmen können bzw. das oben erläuterte Verhalten zeigen können, benötigen sie erstens Repräsentationen erster Ordnung ("Schokoerdnuss als Schokoerdnuss", "Stein als Stein", "ungefähre Anzahl von Steinen", "ungefähre Anzahl von Schokoerdnüssen"), und zweitens (darauf aufbauend) Repräsentationen zweiter Ordnung ("Stein als Schokoerdnuss", "Anzahl als vergleichbare Eigenschaft von Steinen und Schokoerdnüssen"), sowie eine (darauf aufbauend) Repräsentationen dritter Ordnung ("Arabische Ziffern als Anzahlen von Steinen bzw. Schokoerdnüssen"). Somit scheinen Schimpamsen doch zu Repräsentationen dritter Ordnung, also zu Metarepräsentationen, fähig zu sein. Wie bereits in Unterabschnitt 2.2.2 (Fußnote 23) bemerkt, sind nach Whiten in [177] Schimpansen vergleichbar mit menschlichen Kindern im Alter von dreieinhalb Jahren. Demnach müssten dann auch Kinder in diesem Alter bereits den Umgang mit arabischen Ziffern, als Anzahlsymbolen, anfangen zu lernen. Dies ist auch

tatsächlich der Fall, wie Karen Wynn in [182] festgestellt hat. Sie untersuchte in dieser Studie das "Kardinalwort"-Prinzip bei Kindern, bei welchem es sich im Grunde um das Prinzip handelt, dass das letzte Zahlwort in einer Abzählkette die Anzahl der Elemente der abgezählten Menge repräsentiert. Im Rahmen ihrer Untersuchung stellte sie dann fest, dass Kinder erst ab einem Alter von dreieinhalb Jahren ein solches Verständnis aufweisen. Dabei scheint es sich so zu verhalten, dass dieser Umgang mit arabischen Ziffern als Anzahlsymbolen ziemlich plötzlich aufzutreten scheint, da sich die "Performance" von Kindern sprunghaft von 34% bei einem Durchschnittsalter von drei Jahren und fünf Monaten auf 71% bei einem Durchschnittsalter von drei Jahren und sechs Monaten verbessert (Wynn in [182][Figure 2]), was daraufhin deutet, dass sich eine weitreichernde kognitive Verbesserung im Umgang mit Anzahlen entwickelt hat. Und da ein Kindesalter von dreieinhalb Jahren, wie in Unterabschnitt 2.2.2 gesehen, charakteristisch ist für den Beginn einer metarepräsentationalen Verarbeitung, ist nach den obigen Ausführungen im Falle der Schimpansen begründet zu vermuten, dass man für das Verständnis von Zahlen als Anzahlsymbole in der Lage sein muss, mit Repräsentationen dritter Ordnung umzugehen bzw. diese auch erst einmal bilden können muss.[33] Überdies kann man an dieser repräsentationalen Einordnung der arabischen Ziffern als Anzahlsymbole auch erkennen, dass der Zahlensinn, das näherungsweise Erfassen und Verarbeiten von Anzahlen (vgl. Unterabschnitt 1.2.3), als peripheres Modul das Gehirn nicht direkt mit Zahlenrepräsentationen versorgt, sondern erst einmal mit einer ungefähren Anzahlrepräsentation (z.B. eine ungefähre Anzahl von Schokoerdnüssen) auf der Basis eines konkreten Stimulus (z.B. Schokoerdnüsse). Die konkrete Zahlenrepräsentation kommt dann auf dieser repräsentationalen Grundlage als Repräsentation dritter Ordnung dazu. Somit sind Zahlensinn und Zahlenverarbeitung kognitiv zu trennende Fähigkeiten.[34] Es bestätigt sich somit, wie anfangs vermutet, dass

[33] An diesen Untersuchungen an Schimpansen und menschlichen Kindern wird auch deutlich, wie grob die von Whiten in [177] vorgenommene Einordnung der mentalen Kapazitäten der großen Menschenaffen doch ist. Zumindest im Falle von Schimpansen (*pan troglodytes*) und Bonobos (*pan paniscus*) muss man wohl davon ausgehen, dass sie doch zu "einfachen" Repräsentationen dritter Ordnung in der Lage sind.

[34] Eine genauere evolutionäre Einordnung der Zahlenverarbeitung wird noch in dritten Kapitel vorgestellt, wenn es um die evolutionäre und repräsentationale Einordnung des mathematischen

symbolische Repräsentationen stets Repräsentationen zweiter oder noch höherer Ordnung sind, je nachdem wie abstrakt sie sich letztendlich darstellen. Doch sind nicht auch fiktionale Repräsentationen, w.z.B. Einhörner, Minotauren, Gottheiten etc., symbolische Repräsentationen? Zumindestens keine abstrakten im oben genannten Sinne, d.h. sie lassen sich repräsentational so nicht einordnen. Gleiches scheint auch für ihre etwaige evolutionäre Funktion zu gelten, da sie wohl anscheinend nicht dazu dienen, einen konkreten Stimulus zu unterdrücken. Für fiktionale Repräsentationen benötigt man also eine eigenständige repräsentationale Einordnung und eine eigenständige evolutionäre Erklärung.

2.2.7 Soziale Intelligenz und Fiktionsfähigkeit

Wie könnte nun eine solche repräsentationale und evolutionäre Einordnung aussehen? Betrachtet man sich die intentionale Einordnung der Religion, welche Dunbar in [48] vorgenommen hat und welche bereits in Unterabschnitt 2.2.3 vorgestellt wurde, dann folgt aus dieser Einordnung, dass eine fiktionale Repräsentation "Gott" sich als Repräsentation vierter Ordnung einstufen lässt:

Ich glaube, dass es ein übernatürliches Wesen gibt, dem ich verständlich machen kann, was ich möchte.

Doch verhält es sich mit allen fiktionalen Repräsentationen so? Sind sie alle Repräsentationen vierter oder höherer Ordnung? Wie sieht es zum Beispiel mit der fiktionalen Repräsentation "Minotauros" aus? Der Minotauros ist eine Gestalt der griechischen Mythologie, bei welcher es sich um ein Ungeheuer mit Menschenkörper und Stierkopf handelt.[35] Um diese fiktionale Repräsentation zu bilden, benötigt man zunächst einmal zwei konkrete Repräsentationen erster Ordnung, nämlich "Mensch als Mensch" und "Stier als Stier", von welchen man dann die Repräsentationen zweiter Ordnung "Menschenkörper" und "Stierkopf" bildet, die von den konkreten Repräsentationen erster Ordnung entkoppelt werden. Diese Entkopplung kann man sich analog zum in Unterabschnitt 2.2.2 vorgestellten Beispiel "Banane als Telefon" vorstellen. Doch um aus diesen beiden

Denkens geht.

[35]Eine ausführliche Darstellung des Minotauros-Mythos findet sich u.a. bei Kerényi in [91] und [92].

Repräsentationen zweiter Ordnung die fiktionale Repräsentation "Minotauros" bilden zu können, bedarf es eines Subjektmodells, welches zumindest beinhaltet, dass ein Subjekt einen Körper und mindestens einen Kopf hat. Somit ein Modell, welches die repräsentationale Beziehung zwischen dem repräsentationalen Medium (bzw. der Repräsentation selbst) und dem repräsentationalen Gehalt (bzw. dem zu Repräsentierenden) modelliert, also ein Metamodell (vgl. Unterabschnitt 2.2.2). Ein solches Subjektmodell, eine Anleitung zum Zusammensetzen eines Subjektes, führt dann zu der fiktionalen Repräsentation "Menschenkörper mit Stierkopf", einer Repräsentation dritter Ordnung.
An dieser repräsentationalen Einordnung der beiden fiktionalen Repräsentationen "Gott" und "Minotauros" lässt sich auch erklären, warum sie sich nicht auf derselben repräsentationalen Stufe einordnen lassen. Die fiktionale Repräsentation "Minotauros" ist letztendlich eine Repräsentation, die auf Ähnlichkeitsbeziehungen beruht. Sie ist in diesem Sinne nicht abstrakt, ähnlich wie im Beispiel "Banane als Telefon", von dem sie sich lediglich durch das benötigte Subjektmodell unterscheidet. Die fiktionale Repräsentation "Gott" dagegen ist abstrakt, da ihr kein konkretes Subjektmodell, wie im Falle des "Minotauros" zu Grunde liegen muss, sondern vielmehr ein abstrakteres Subjektmodell als übernatürliches Wesen. Somit sind die einfacheren fiktionalen Repräsentationen, w.z.B. der "Minotauros", Repräsentationen dritter Ordnung und die abstrakteren fiktionalen Repräsentationen, w.z.B. der "Gott", Repräsentationen zumindest vierter Ordnung. Doch dies sind alles letztendlich Subjektrepräsentationen! Was ist mit fiktionalen Repräsentationen, die sich nicht auf Subjekte beziehen, w.z.B. die Idee des leistungsbedingten Fortschritts? Eine diesbezügliche repräsentationale Einordnung könnte dabei wiefolgt aussehen:

Ich bin davon überzeugt, dass ich mit meinem Verhalten die von mir gedachten Ziele durch ein stetiges leistungsbedingtes Voranschreiten erreichen kann.

Die Idee eines leistungsbedingten Fortschritts lässt sich also als Repräsentation vierter Ordnung einstufen. An dieser Stelle könnte man allerdings noch einwenden, dass die Idee eines leistungsbedingten Fortschritts doch keine fiktionale Repräsentation ist, die sich mehr oder weniger in dieselbe Kategorie einordnen lässt, wie die Illusion "Minotauros". Ist denn die Idee eines leistungsbedingten Fortschritts aus evolutionärer Sicht eine Illusion? Im Prinzip ja, wie Voland in [168] erklärt:

Zu den nützlichen Konstruktionen des Gehirns gehört auch die Idee des Fortschritts.

Doch worin besteht der evolutionäre Nutzen dieser Idee? Nach Voland in [168] benötigen Menschen diese Idee, weil sie ständig nach dem Besseren, im Vergleich zum Istzustand, streben. Somit bliebe einem gar nichts anderes übrig, als die geschichtlich vorausgehenden Etappen als weniger fortschrittlich anzusehen. Voland sieht die evolutionäre Funktion der Idee des Fortschritts in der Bewertung von Unterschieden, die sich in einer evolutionären Wettbewerbssituation, w.z.B. innerhalb einer sozialen Gruppe, zwangsläufig ergeben. So resümiert Voland in [168] auch abschließend:

In dieser evolutionär gewachsenen Psychologie wird Fortschritt zwar gedacht, aber nur als strategische Konstruktion zur Motivation in der "Tretmühle des Lebens".

Somit ist die Idee des Fortschritts evolutionär gesehen eine Illusion, also auch eine fiktionale Repräsentation, und ihre evolutionäre Funktion besteht in der Bewertung von Unterschieden, die ein Individuum im "struggle for life" vorfindet, einschätzen und sich auf dieser Basis gen-egoistisch verhalten muss.[36] Voland liefert damit in [168] nicht nur eine Argumentation, warum die Idee des Fortschritts aus evolutionärer Sicht als Illusion anzusehen ist, sondern auch einen allgemeinen evolutionären Erklärungsansatz für fiktionale Repräsentationen. Die

[36]Zu beachten ist hier natürlich, dass Fortschritt und insbesondere leistungsbedingter Fortschritt evolutionär gesehen werden. D.h. es ist nicht der triviale Fortschritt gemeint, den man zum Beispiel erkennt, wenn man eine endliche Distanz von Punkt A zum Punkt B überwindet. Dies ist natürlich keine Illusion! Aber so verläuft die Evolution auch nicht. Sie verläuft nicht vom Punkt A zum Punkt B. Sie hat kein endgültiges Ziel vor Augen, welches man durch Überwindung einer endlichen Abfolge von Schritten erreichen könnte. Wie in Unterabschnitt 1.2.4 bereits erklärt, arbeitet die Evolution wie ein Kesselflicker, der einen löchrigen Topf bekommt, um ihn für das Kochen am nächsten Tag wieder "fit" zu machen. Genauso geht die Evolution vor! Entscheidend ist immer nur der nächste Schritt, welcher auf der Grundlage der bisherigen Schritte durchgeführt werden muss. Ein endgültiges Ziel gibt es dabei nicht! Und somit kann man nicht messen, wie weit man noch davon weg ist bzw. wie nah man schon dran ist. Und deshalb ist Fortschritt evolutionär gesehen eine Illusion.

evolutionäre Funktion von fiktionalen Repräsentationen bestünde demnach in der Möglichkeit, mit ihnen die vorgefundenen, vor allem sozialen Situationen besser bewerten, einschätzen und sich damit dann vorteilhafter verhalten zu können. Dies mag im Falle von fiktionalen Subjektrepräsentationen auf den ersten Blick unplausibel erscheinen. Ist es aber nicht! Denn in einer komplexen sozialen Umwelt, in welcher permanenter macchiavellistischer und kooperativer Wettbewerb herrschen, wäre es fatal, hinter einem Phänomen (z.B. einer Intrige, Allianzenbildung, etc.), welches für einen aus evolutionärer Sicht bedrohlich sein könnte, keinen intentionalen Agenten zu vermuten. In einer solchen sozialen Umwelt gibt es eigentlich immer einen intentionalen Agenten, der hinter einem zu beobachteten Phänomen steckt. Und diese Möglichkeit muss in das zukünftige eigene Verhalten einkalkuliert werden, d.h. die dazugehörige Situation muss richtig bewertet und eingeschätzt werden, damit man sich entsprechend verhalten kann. Und zwar auch in dem Fall, wo man keinen intentionalen Agenten auf den ersten Blick als Verursacher ausmachen kann, was dann zu der Vorstellung von fiktionalen intentionalen Agenten führen kann. Ein solches Konzept lässt sich dann natürlich auch auf ökologische Phänomene (z.B. Blitzschläge) übertragen, was dann zu fiktionalen Repräsentationen von übernatürlichen Wesen führen kann. Da diese fiktionalen Repräsentationen mindestens Repräsentationen der dritten Ordnung darstellen, insbesondere die Subjektrepräsentationen, ist eine ToM eine notwendige Voraussetzung für eine solche Fiktionsfähigkeit. Damit lässt sich ihre evolutionäre Entwicklung anhand von Dunbar's Einordnung (Dunbar in [48][Figure 4]) auch in den Verlauf der Hominisation einordnen und ergibt, dass im Grunde frühestens erst ab der *homo erectus*-Periode mit dem evolutionären Auftreten einer solchen Fiktionsfähigkeit zu rechnen ist. Somit kann man die Fiktionsfähigkeit auch zu den kognitiven Anpassungen zählen, welche koevolutiv im Rahmen der sozialen Intelligenzevolution evolviert sind. Es ist überdies davon auszugehen, dass auch diese kognitive Fähigkeit, wie bereits das Symbolverständnis, im Sinne von konzeptualen Modulen, modular im Gehirn organisiert ist. Da diese fiktionalen Repräsentationen, w.z.B. "Gottheiten", bei Ritualen eine besondere Rolle spielen, ist überdies zu vermuten, dass es auch eine repräsentationale Verbindung zwischen Fiktions- und Ritualfähigkeit gibt. Als nächstes ist daher einerseits zu klären, wie sich Rituale in diese repräsentationale Verarbeitungsstruktur einordnen lassen, und andererseits, ob sich für die Ritualfähigkeit möglicherweise eine eigene evolutionäre Funktion ausmachen lässt.

2.2.8 Soziale Intelligenz und Ritualfähigkeit

In Unterabschnitt 2.2.3 wurde bereits darauf hingewiesen, dass nach Dunbars intentionaler Einordnung für eine gemeinschaftliche Ausübung von Religion (Dunbar in [48]) mindestens Intentionen vierter Ordnung bzw. Repräsentationen fünfter Ordnung notwendig sind. Doch dies trifft erst einmal auf den Fall einer gemeinschaftlichen Ausübung von Religion zu, bei welcher mehrere Individuen einem übernatürlichen Wesen verständlich machen wollen, was sie sich wünschen. Welche Repräsentationsfähigkeit benötigt denn ein Individuum, wenn es einer Geschichte über den Minotauros folgen möchte? Im vorangegangenen Unterabschnitt wurde bereits erläutert, dass für die Bildung der fiktionalen Repräsentation "Minotauros" eine Repräsentationsfähigkeit dritter Ordnung notwendig ist. Demzufolge müsste das Verständnis einer Geschichte über den Minotauros zumindest eine Repräsentationsfähigkeit vierter Ordnung voraussetzen:

A möchte B, von dem A weiß, dass B an den Minotauros glaubt und an dessen Verhalten interessiert ist, eine Geschichte über den Minotauros erzählen.

Um eine solche fiktive Erzählung zu verstehen, muss ein Individuum also mit Repräsentationen vierter Ordnung umgehen können, welche im Grunde schon nötig sind, wenn Sprache, wie in Unterabschnitt 2.2.1 dargelegt, die soziale Bindungsreichweite vergößern soll, indem über Personen gesprochen wird, die zum Zeitpunkt des Gesprächs gar nicht anwesend sind:

A möchte B, von dem A weiß, dass B mit C in Beziehung steht und an C's Verhalten interessiert ist, eine Begebenheit über C erzählen.

Die Vorteile, die Sprache als "grooming"-Ersatz mit sich bringt, vor allem was die Dichte des sozialen Informationsflusses betrifft, scheinen also auch auf einer sich weiter ausdehnenden repräsentationalen Verarbeitungsstruktur zu beruhen. Somit lässt sich die Ritualfähigkeit mit einer Repräsentationsfähigkeit von mindestens der vierten Ordnung (bzw. einer Intentionalitätsfähigkeit von mindestens der dritten Ordnung) in Verbindung bringen, was nach Dunbars Einordnung der

Intentionalitätsordnungen in den Verlauf der Hominisation (Dunbar in [48][Figure 4]) sicherstellt, dass das Auftreten von Ritualen, Mythen, fiktiven Erzählungen etc. im Grunde an das Auftreten des archaischen Homo sapiens (*homo heidelbergensis*) gekoppelt ist. Insbesondere kann man bei dieser Einordnung auch erkennen, was Dunbar auch betont, dass eine gemeinschaftliche Ausübung von Religion mit dem modernen Menschen (*homo sapiens*) verbunden ist, da erst dieser über eine Intentionalitätsfähigkeit vierter Ordnung bzw. eine Repräsentationsfähigkeit fünfter Ordnung verfügt. Daher schlussfolgert Dunbar in [48] auch,

... that religion (at least) and presumably higher culture in general was lacking in H. erectus and probably came into being only with the appearance of the earliest populations of archaic H. sapiens.

Nachdem nun eine repräsentationale Einordnung der Ritualfähigkeit in die bisherigen repräsentationalen Zusammenhänge gelungen ist, stellt sich aus evolutionärer Sicht sofort die Frage, wozu Rituale gut sind? Welche evolutionäre Funktion könnten sie erfüllen? Welches Anpassungsproblem liegt ihnen möglicherweise zu Grunde? Allein schon auf Grund ihrer Wichtigkeit im Leben einer jeden menschlichen Gemeinschaft ist doch zu vermuten, dass sie nicht einfach als funktionsloses Nebenprodukt der bisher vorgestellten kognitiven Anpassungen im koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenzevolution anzusehen sind. Der wichtigste Hinweis darauf, dass es sich bei dieser Ritualfähigkeit um eine Anpassung handeln muss, ergibt sich wieder einmal aus den evolutionären Kosten, die durch die Teilnahme an einem Ritual dem teilnehmenden Individuum mehr oder weniger entstehen (z.B. Zeitaufwand und Verbrauch wertvoller Ressourcen). Evolutionär gesehen müssen sich diese Kosten in der Gesamtfitnessbilanz wieder amortisieren, was direkt zu der Frage nach dem evolutionären Nutzen von Ritualen führt. Aus der Sicht eines Individuums stellen Rituale kostspielige soziale Normen dar, welchen man innerhalb einer sozialen Gruppe genügen muss, und zwar, um als Gruppenmitglied anerkannt zu werden. Sie signalisieren sozusagen die Zugehörigkeit zu einer bestimmten sozialen Gruppe. Doch welchen evolutionären Nutzen bringt das mit sich? Man wird doch, evolutionär gesehen, in eine soziale Gemeinschaft hineingeboren, was die Zugehörigkeit von Vorneherein gewährleistet. Wozu dann noch teure Signale diesbezüglich abgeben? Dies wird erst ersichtlich, wenn man sich den evolutionären Wettstreit zwischen Ausbeutung und Kooperation, den Motor der sozialen Intelligenzevolution, noch einmal genauer vor Augen führt. Nur weil man in eine soziale Gruppe hineingeboren wurde und somit ein Mitglied dieser Gruppe geworden ist, bedeutet das für die anderen Mitglieder der Gruppe noch lange nicht, dass man auch ein vertrauenswürdiges Gruppenmitglied ist, welches bereit ist, in den unterschiedlichsten Lagen mit jedem anderen Gruppenmitglied gleichermaßen zu kooperieren. Man muss erst signalisieren, dass man ein Interesse hat, in bestimmten Situationen mit bestimmten potentiellen Kooperationspartnern zu kooperieren. Das heißt, dass man erst einmal über teure Signale in Form von Ritualen bzw. durch die Erfüllung sozialer Normen seine Integrität in einem bestimmten sozialen Kontext unter Beweis stellen muss. Dabei steckt hinter diesen teuren Signalen die Funktionslogik des sogenanten "Handicap"-Prinzips, welches auf Amotz Zahavi in [183] zurück geht und dessen Grundidee Voland in [166] folgendermaßen formulierte:

Die Grundidee, ..., entspringt der Beobachtung, dass Organismen gegebenenfalls kostspielige, aber im engeren Sinne unnütze Merkmale zur Schau stellen, weil sie auf diese Weise verborgene Eigenschaften verlässlich kommunizieren können.

Somit stellen diese unnützen Merkmale letztendlich "Handicaps" bzw. teure Signale dar und ihr evolutionärer Nutzen liegt gerade in ihrer ökologischen Unnützlichkeit. Voland vergleicht in [166][Tab. 2] nützliche Merkmale mit diesen teuren Signalen und vermerkt vier Punkte, an welchen sie sich grundlegend voneinander unterscheiden:

- Während nützliche Merkmale der Selbsterhaltung und Reproduktion dienen, würden teure Signale verborgene Qualitäten zeigen.
- Während nützliche Merkmale nach ökonomischer Effizienz selektiert sind, seien teure Signale nach Zuverlässigkeit selektiert.
- Während bei nützlichen Merkmalen die Herstellungskosten nachteilig, aber unvermeidbar sind, seien es im Falle von teuren Signalen gerade diese, die zählen würden.
- Während nützliche Mermale nicht ihre Nützlichkeit verlieren, wenn ihr Preis sinkt, würden teure Signale in diesem Fall ihre Funktion verlieren.

Als Standardbeispiel für diese Unterscheidung wird in der Literatur (u.a. Uhl & Voland in [164], Voland in [165], [166], Zahavi in [183], Zahavi & Zahavi in [184]) oftmals das Prachtgefider von Pfauenhähnen angeführt, welches für den Pfauenhahn energetisch kostspielig zu erzeugen und nachteilig bei der Flucht vor Raubfeinden ist. Aber es signalisiert gute Gene, da nur ein gesunder und vitaler Pfauenhahn ein solches Prachtgefider ausprägen kann. Es ist somit ein fälschungssicheres Signal, welches von den Pfauenhennen im Zuge ihrer Partnerwahl bevorzugt wird. Doch lässt sich dieses "Handicap"-Prinzip so einfach auf menschliche Verhältnisse übertragen? Liegt der menschlichen Ritualfähigkeit in sozialen Kontexten dieselbe Funktionslogik zu Grunde? Welche Kriterien müssen in diesem Zusammenhang überhaupt erfüllt sein, bevor man sicher sein kann, dass eine bestimmte Signalkommunikation nach der Funktionslogik des "Handicap"-Prinzips abläuft? James Boone stellte diesbezüglich in [7] die folgenden fünf Kriterien auf, welche erfüllt sein müssen, bevor man ein kostspieliges Signal als "Handicap" einstufen kann:

(1) individuals will choose with whom to interact and how, when, or how much to interact with them on the basis of varying levels of extravagance of displays;

(2) the process of choosing will itself be costly, or making an error in the choice thereof will be costly;

(3) costly displays must consititute a fitness-related handicap to the displayer;

(4) costly displays must reveal in some way underlying, unobservable character in the sender that is of interest to the recievers; and

(5) the revelation of this underlying character will cause receivers to behave in a way that increases a component of the fitness of the sender other than the one that is being handicapped.

Formuliert man nun diese fünf Kriterien im Rahmen einer Signalkommunikation mit den Begriffen "Signalgeber" und "Signalempfänger", so lassen sie sich wie folgt zusammenfassen:

1. *Die Signalpartner werden nach Aufwand des Signals ausgewählt.*

2. *Dem Signalempfänger enstehen durch seine Wahl Kosten.*

3. *Dem Signalgeber entstehen durch den Aufwand des Signals Kosten.*

4. *Das Signal des Signalgebers deutet auf eine oder mehrere, ihm eigene, bestimmte verborgene Qualitäten hin, welche für den Signalempfänger interessant sind.*

5. *Im Falle des Signalgebers sind Kosten und Nutzen des Signals in unterschiedlichen Bereichen ansässig.*

Es stellt sich also nun die Frage, ob Rituale in sozialen Kontexten diese fünf Kriterien erfüllen. Voland argumentiert in [166] dafür, indem er diese fünf Kriterien im Falle des Teilens von Jagdbeute bei Wildbeutergesellschaften überprüft und diese Argumentation dann auf soziale Normen allgemein im Hinblick auf die Moralevolution ausweitet. Aber kann man nicht auch direkt diese fünf Kriterien für Rituale allgemein bestätigen? Im Falle des ersten Kriteriums ist doch offensichtlich, dass Menschen ihre Kooperationspartner nach Zuverlässigkeit auswählen, wobei sie macchiavellistische Taktiken in ihrer Wahl berücksichtigen müssen, welche sich mittels teuren Signalen mehr oder weniger ausschießen lassen, je nachdem, wie hoch der Signalaufwand für den Signalgeber ist. M.a.W.: Je höher die Kosten der Teilnahme an einem Ritual für den Signalgeber sind, desto zuverlässiger ist es als Signal für den Signalempfänger. Auch das zweite und das dritte Kriterium sind im Falle von Ritualen erfüllt, da einerseits die Wahl eines unzuverlässigen Kooperationspartners für den Signalempfänger zu schwerwiegenden evolutionären Kosten führen kann und andererseits dem Signalgeber durch die Teilnahme an einem Ritual stets Kosten entstehen. Das vierte und fünfte Kriterium sind nicht ganz so offensichtlich erfüllt, da man sie eigentlich nur an konkreten Ritualkontexten verifizieren kann, bei welchen man die genaue Kopplung zwischen Kosten, Nutzen und verborgenen Qualitäten kennt. Doch allgemein kann man festhalten, dass die Kosten, die einem Signalgeber durch die Teilnahme an einem Ritual entstehen, irgendwie von ihm aufgebracht werden müssen. Die Quelle, mit welcher diese Kosten beglichen werden können, wäre dann die interessante verborgene Qualität (z.B. wenn ein Individuum bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung besonders viel spenden kann, dann könnte dies auf den wirtschaftlichen Erfolg dieses

Individuums hinweisen). Dann wären auch Kosten und Nutzen des Signals in verschiedenen Bereichen angesiedelt, denn der Signalempfänger kooperiert nur mit Signalgebern, welche er als zuverlässig und vertrauenswürdig einstuft (z.B. mit dem, der bei der Wohltätigkeitsveranstaltung am meisten gespendet hat, da dieser in wirtschaftlichen Fragen der beste Berater zu sein scheint). Für den Signalgeber wäre dann die Teilnahme an einem Ritual ein Kostenfaktor (Zeit- und Ressourcenaufwand), welcher sich dadurch amortisiert, dass die Signalempfänger ihn als Kooperationspartener (Soziale Anerkennung, Beistand, politische Macht, etc.) in den entsprechenden sozialen Kontexten bevorzugen. Doch insbesondere im Falle des Menschen können auch diese Signale macchiavellistisch vereinnahmt werden, was dazu führen kann, dass ihre Kosten hochgetrieben werden, damit das Signal zuverlässig bleibt. M.a.W.: Die Signalempfänger werden einen Selektionsdruck auf die Kosten des Signalgebers ausüben, und somit entsteht für den Signalgeber ein Abgleichproblem, ob sich die Teilnahme an einem Ritual überhaupt noch lohnt, wenn die Kosten weiter steigen. Nur wenn sich für den Signalgeber und den Signalempfänger ein akzeptables Kosten-Nutzen-Gleichgewicht einstellt, werden beide weiter an dem entsprechenden Ritual teilnehmen.

Insgesamt kann man also festhalten, dass die evolutionäre Funktion der Ritualfähigkeit in ihrer Signalwirkung in sozialen Kontexten besteht und dass sie sich als kognitive Anpassung im koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenzevolution eingliedert. Da alle diese Anpassungen im koevolutiven Umfeld der sozialen Intelligenz modular organisiert zu sein scheinen, gilt dies vermutlich auch für die Ritualfähigkeit, denn sie basiert unter anderem auf den entsprechenden konzeptualen Modulen der Fiktionsfähigkeit.[37]

Nachdem nun das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenzevolution aufge-

[37] Es lassen sich zwischen Symbolverständnis und Fiktions- und Ritualfähigkeit auch nicht so einfach exakte Trennlinien ziehen, da einerseits zur Fiktionsfähigkeit ein grundlegendes Symbolverständnis und andererseits zur Ritualfähigkeit eine grundlegende Fiktionsfähigkeit evolutionär gesehen Voraussetzung sind. In meiner Argumentation beruhen die Trennlinien vorwiegend auf den unterschiedlichen evolutionären Funktionen der drei kognitiven Anpassungen, da sich die jeweilige repräsentationale Einordnung nur nach unten abgrenzen lässt, indem herausgearbeitet wurde, dass das Symbolverständnis mindestens auf Repräsentationen der zweiten Ordnung, die Fiktionsfähigkeit auf mindestens Repräsentationen der dritten Ordnung und die Ritualfähigkeit auf mindestens Repräsentationen der vierten Ordnung beruht.

deckt ist und die einzelnen koevolutiven Zusammenhängen erklärt wurden, soll nun im dritten Kapitel geklärt werden, wie man auf dieser Grundlage die "Beziehungsnetzwerk-Metapher", welche zur Erklärung des mathematischen Denkprozesses herangezogen wurde (vgl. Unterabschnitt 1.1.3), evolutionär erklären und repräsentational einordnen kann. Anschließend ist dann noch eine evolutionäre und repräsentationale Einordnung des mathematischen Denkprozesses selbst vorzunehmen, damit man die vorläufige Arbeitshypothese aus Unterabschnitt 1.1.5 gegebenenfalls bestätigen und weiter konkretisieren kann.

Kapitel 3

Das soziale Denken und das mathematische Denken

In diesem letzten Kapitel wird nun versucht auf der Grundlage der vorangegangenen beiden Kapitel die in Unterabschnitt 1.1.5 formulierte Arbeitshypothese über die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens zu konkretisieren und zu bestätigen. Dazu wird als erstes erläutert, wie sich die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" aus Unterabschnitt 1.1.3 mittels des sozialen Denkens, welches sich aus dem koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenzevolution ergibt, erklären lässt, zweitens, wie dieses soziale Denken das mathematische Denken ermöglicht, und drittens, wie sich das mathematische Denken bzw. der mathematische Denkprozess repräsentational einordnen lässt. Anschließend wird dann noch versucht auf dieser evolutionären und repräsentationalen Grundlage die in der Einleitung vorgestellten fünf zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik zu beantworten und zu diskutieren, und zwar mit dem Ziel, eine naturalistische Philosophie der Mathematik zu fundieren, welche ohne einen irgendwie gearteten ontologischen Platonismus auskommt. Den Abschluss dieser Arbeit bildet dann eine konzise Zusammenfassung der gesamten Argumentation.

3.1 Das mathematische Denken als Nebenprodukt des sozialen Denkens

In diesem Abschnitt soll nun die zentrale Argumentation dargelgt werden, welche erklärt, wie sich das mathematische Denken aus dem evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz ergibt. Es werden dabei zwei argumentative Brücken geschlagen: Erstens eine zwischen dem koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenzevolution und dem sozialen Denken, mit welchem man die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" erklären kann, und zweitens eine weitere zwischen dem sozialen und dem mathematischen Denken, welche dann auch eine repräsentationale Einordnung des mathematischen Denkprozesses über der des sozialen Denkprozesses ermöglicht.

3.1.1 Wie sich das soziale Denken aus dem evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz ergibt

Wie kann man also mit Hilfe des evolutionären Umfeldes der sozialen Intelligenz die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" aus Unterabschnitt 1.1.3 erklären? Um dies verständlich zu machen, bedarf es zunächst einmal einer konzisen Zusammenfassung der Resultate aus dem zweiten Kapitel, damit die einzelnen evolutionären und repräsentationalen Zusammenhänge im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz für die weitere Argumentation noch einmal aufbereitet werden. Im Zentrum des koevolutiven Rahmens der sozialen Intelligenzevolution steht die Definition von sozialer Intelligenz, welche am Anfang vom zweiten Kapitel vorgelegt wurde (vgl. Definition 2.1-2). Diese Definition von sozialer Intelligenz definiert soziale Intelligenz als das Potential des (menschlichen) Gehirns, mit Hilfe seiner Module Verhalten zu erzeugen, welches an die gegebenen sozialen Kontexte innerhalb einer sozialen Gemeinschaft möglichst gut angepasst ist. Anschießend wurde dann im zweiten Kapitel der koevolutive Rahmen der sozialen Intelligenzevolution abgesteckt, welcher aus den (kognitiven) Anpassungen "Sprachfähigkeit","ToM-Fähigkeit", "Repräsentationsfähigkeit", "Bewusstseinsfähigkeit", "Denkfähigkeit", "Symbolverständnis", "Fiktions"- und "Ritualfähigkeit" besteht. Dabei ist bei der Aufdeckung der evolutionären Zusammenhänge deutlich geworden, welche besondere zentrale Rolle die Repräsentationsfähigkeit bzw. die repräsentationale

Verarbeitungsstruktur des (menschlichen) Gehirns im Zuge der sozialen Intelligenzevolution im Laufe der Hominisation gespielt hat, was insbesondere daran ersichtlich wurde, dass sich alle anderen kognitiven Fähigkeiten in ein Ordnungsmodell dieser repräsentationalen Verarbeitungsstruktur einordnen ließen. Im Laufe der Argumentation des zweiten Kapitels konnte daher jeder der modular organisierten kognitiven Fähigkeiten einerseits eine evolutionäre Funktion zugeschrieben und andererseits eine repräsentationale Einordnung vorgenommen werden und es ergaben sich die folgenden Resultate:

1. **Im Falle der Sprachfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Aufrechterhaltung des sozialen Zusammenhalts innerhalb der sich im Laufe der Hominisation stets weiter vergrößernden und vertreuter lebenden sozialen Gruppen.
   Repräsentationsordnung: Die Sprachfähigkeit des modernen Menschen macht die Beschreibung von Repräsentationen beliebiger Ordnung überhaupt erst möglich.

2. **Im Falle der ToM-Fähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Die Zuschreibung von mentalen Zuständen bei sich selbst und anderen.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen dritter Ordnung.

3. **Im Falle der Bewusstseinsfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Sicherstellung einer sofortigen Handlungsbereitschaft.
   Repräsentationsordnung: Bis einschließlich Repräsentationen fünfter Ordnung.

4. **Im Falle der Denkfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Ermöglicht tatsächliches Verhalten durch Planung, Durchführung und Überwachung von Verhaltensmustern in bekannten und unbekannten Problemsituationen.
   Repräsentationsordnung: Verarbeitung von Repräsentationen jeder generierbaren Ordnung.

5. **Im Falle des Symbolverständnis:**
   Evolutionäre Funktion: Ermöglichung eines intelligenteren Verhaltens in sozialen Konkurrenzsituationen durch Unterdrückung des direkten Anreizes eines Stimulus.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen zweiter Ordnung.

6. **Im Falle der Fiktionsfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Ermöglichung einer Bewertung in sozialen Kontexten, welche von macchiavellistischen und kooperativen Taktiken geprägt sind.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen dritter Ordnung.

7. **Im Falle der Ritualfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Signalwirkung in sozialen Kontexten, welche von macchiavellistischen und kooperativen Taktiken geprägt sind.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen vierter Ordnung.

Dabei scheint die Repräsentationsfähigkeit bzw. die repräsentationale Verarbeitungsstruktur allen diesen modular organisierten kognitiven Fähigkeiten als allgemein-kognitive Verarbeitungsstruktur im (menschlichen) Gehirn zu Grunde zu liegen. Diese Ausgangsbasis - der koevolutive Rahmen der sozialen Intelligenzevolution - kann man nun für die weitere Argumentation in diesem Abschnitt in Form des folgenden Flussdiagramms veranschaulichen, bei welchem sich die modular organisierten kognitiven Fähigkeiten auf der Grundlage einer repräsentationalen Verarbeitungsstruktur in (menschlichen) Gehirn um die soziale Intelligenz gruppieren, wobei die Pfeile auf die evolutionären und repräsentationalen Zusammenhänge hinweisen sollen.[1]

[1] Es ist hier zu beachten, dass die Pfeile nicht alle evolutionären und repräsentationalen Zusammenhänge widerspiegeln können, welche im Laufe des zweiten Kapitels herausgearbeitet worden sind, da dafür eine dreidimensionale Darstellung des koevolutiven Rahmens der sozialen Intelligenzevolution notwendig gewesen wäre. Aus Gründen der Übersichtlichkeit habe ich mich aber für eine zweidimensionale Darstellung entschieden.

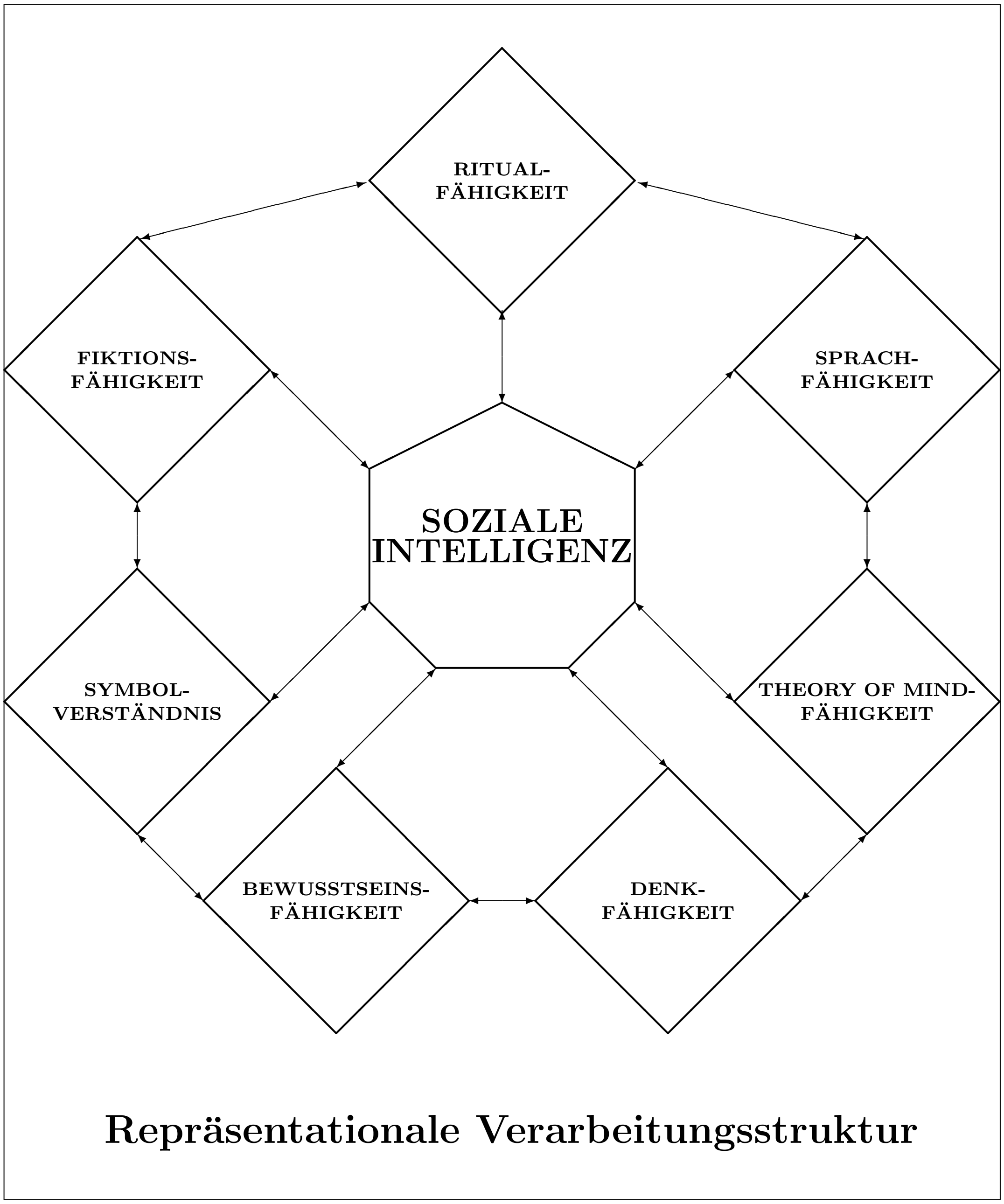


Abbildung 3.1.: Der koevolutive Rahmen der sozialen Intelligenzevolution.

Die weiterführende Frage ist nun, wie sich mit Hilfe dieses evolutionären Umfeldes der sozialen Intelligenz die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" aus Unterabschnitt 1.1.3 erklären lässt? Um hierzu einen Ansatzpunkt zu finden, muss man sich zunächst einmal darüber im Klaren werden, welche Situation die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" aus evolutionärer Sicht darstellt. Was bedeutet es evolutionär gesehen, sich in einem Beziehungsumfeld zurechtfinden zu müssen und zwar unabhängig davon, ob man in dieses hineingeboren wurde oder sich im Laufe seines Lebens in ein neues hineinfinden muss?

Im Grunde besteht jedes soziale Beziehungsumfeld aus Individuen, welche durch bestimmte Beziehungen (z.B.: Verwandtschafts-, Arbeits-, Freundschaftsbeziehungen, etc.) miteinander verbunden sein können, wobei auch natürlich mehrere Beziehungen zwischen den einzelnen Individuen auftreten können (z.B. kann ein Verwandter auch ein Arbeitskollege sein, etc.). Diese Individuen und ihre Beziehungen untereinander stellen somit ein komplexes Beziehungsmuster dar, welches ein Individum erfassen und verarbeiten muss, um sich in ihm zurechtfinden und handeln - evolutionär gesehen: sozial überleben! - zu können. Ein Mensch muss also in der Lage sein, seine Mitmenschen als Subjekte mit eigenen Gedanken wahrzunehmen, d.h. er/sie muss ihnen und sich selbst mentale Zustände zuschreiben können. Und genau dies ist die evolutionäre Funktion der ToM-Fähigkeit! Für diesen ersten Schritt, die Erfassung der Subjekte innerhalb einer sozialen Relevanzgruppe (bzw. eines beliebigen sozialen Beziehungsumfeldes)[2] dieses sozialen Denkprozesses benötigt ein Mensch somit die ToM-Fähigkeit. Im Zuge dieser intuitiven Erfassung der Subjekte innerhalb einer sozialen Relevanzgruppe erfährt man auch die Namen bzw. Bezeichnungen dieser Individuen, was man nur kann, wenn man über eine entsprechende Sprachfähigkeit und ein hinreichendes Symbolverständnis verfügt. Somit besteht der auf der intuitiven Erfassung der Subjekte beruhende weitere Erfassungsverlauf aus einer symbolisch-sprachlichen Erfassung in Form der Namen bzw. Bezeichnungen der einzelnen Subjekte. Da repräsentational gesehen in diesem ersten Schritt des sozialen Denkprozesses neue Repräsentationen gebildet werden, müssen auch die Denkfähigkeit und die Be-

[2]Das soziale Beziehungsumfeld eines Individuums besteht in der Regel aus mehreren sozialen Relevanzgruppen (Verwandte, Freunde, Arbeitskollegen, etc.), so dass ein Individuum, welches sich in ein neues Beziehungsumfeld hineinfinden bzw. sein Beziehungsumfeld erweitern muss, zunächst einmal sich in den jeweils neuen dazugehörigen sozialen Relevanzgruppen einfinden muss, bevor es die etwaigen Beziehungen einzelner Subjekte zwischen den dazugehörigen sozialen Relevanzgruppen innerhalb des sozialen Beziehungsumfeldes erfassen kann.

wusstseinsfähigkeit an der intuitiven und der symbolisch-sprachlichen Erfassung beteiligt sein. Im nächsten Schritt muss man dann die Beziehungen, die die einzelnen Individuen untereinander unterhalten, intuitiv erfassen und beschreiben können, was auf den Subjektrepräsentationen und Bezeichnungsrepräsentationen beruht, welche man im ersten Schritt gebildet hat. Es werden also wieder neue Repräsentationen auf der Basis der vorangegangenen Subjekt- und Bezeichnungsrepräsentationen generiert. Somit spielen die Denk- und die Bewusstseinsfähigkeit wieder eine zentrale Rolle bei beiden Erfassungsteilschritten, wobei bei der Erfassung im zweiten Schritt auch wieder zunächst die ToM-Fähigkeit zum Zuge kommt, da die intuitive Erfassung von Beziehungen zwischen Menschen unter anderem über die Zuschreibung von mentalen Zuständen verlaufen muss,[3] bevor mittels Sprache und Symbolen eine Beschreibung dieser unmittelbaren Beziehungen, die die einzelnen Gruppenmitglieder untereinander unterhalten, möglich ist. Auf dieser repräsentationalen Grundlage geht es dann im dritten Schritt dieser Erfassung weiter mit der intuitiven Erfassung der hypothetischen Beziehungen, welche die einzelnen Individuen innerhalb der jeweiligen sozialen Relevanzgruppe unterhalten könnten. Er werden also fiktionale Repräsentationen benötigt und daher spielt die Fiktionsfähigkeit auch spätestens an dieser Stelle eine wichtige Rolle, wenn nicht sogar schon früher, wenn sich zum Beispiel Subjektbezeichnungen aus rituellen Kontexten ergeben, die auf fiktionalen Repräsentationen beruhen. Wichtig in diesem Zusammenhang ist vor allem, dass man rituelle Kontexte erst intuitiv und symbolisch-sprachlich erfassen kann, wenn man zuvor die fiktionalen Zusammenhänge intuitiv und symbolisch-sprachlich erfasst hat. Zusammengenommen kommen also Fiktionen und Rituale bei der intuitiven wie auch der symbolisch-sprachlichen Erfassung gleichermaßen ins Spiel, allerdings aus Sicht des sozialen Denkprozesses nicht im gleichen Schritt, da fiktionale Repräsentationen den rituellen Repräsentationen erst vorausgehen müssen. Inge-

[3]Denn die Zuschreibung von mentalen Zuständen beinhaltet auch die Zuschreibung von gemeinsamen mentalen Zuständen (z.B. einen gemeinsamen Plan haben), d.h. ein Individuen kann über die Zuschreibung gemeinsamer mentaler Zustände auch erkennen, welche Individuen, was miteinander zu tun haben bzw. hatten bzw. vor haben zu tun. Eine ToM ist daher nicht nur bei der intuitiven Erfassung von Subjekten notwendig, sondern auch bei der intuitiven Erfassung der Beziehungen, die diese Subjekte untereinander unterhalten bzw. unterhalten haben bzw. unterhalten können.

samt gesehen sieht es auch so aus, dass sich der soziale Denkprozess in zwei voneinander getrennte Bereiche gliedert, nämlich in ein intuitiv soziales Denken und ein symbolisch-sprachlich soziales Denken. Ersteres ist von der ToM-Fähigkeit geprägt und letzteres von dem Symbolverständnis und der Sprachfähigkeit, wobei Denkfähigkeit, Bewusstseinsfähigkeit, Fiktions- und Ritualfähigkeit bei beiden gleichermaßen beteiligt zu sein scheinen. Somit kann man diesen sozialen Denkprozess auch in einem Flussdiagramm veranschaulichen (vgl. Abbildung 3.2), in welchem die Pfeile letztendlich den repräsentationalen Verlauf darstellen, und der Wichtigkeit halber wird überdies der hier entwickelte Begriff des sozialen Denkens noch einmal definitorisch festgehalten:

Definition 3.1 (Soziales Denken)

*Das **soziale Denken** besteht aus dem intuitiv und dem symbolisch-sprachlich sozialen Denken, wobei das intuitiv soziale Denken die Erfassung der einzelnen Subjekte und ihrer (hypothetischen) Beziehungen ermöglicht, während das symbolisch-sprachliche soziale Denken diese Subjekte bezeichnet und ihre (hypothetischen) Beziehungen untereinander beschreibt.*

Anhand des Verlaufs des sozialen Denkprozesses ist man jetzt auch in der Lage, eine detaillierte repräsentationale Einordnung dieses sozialen Erfassungsvorgangs vorzunehmen: Da im ersten Schritt beim intuitiv sozialen Denken bereits die ToM-Fähigkeit zum Einsatz kommt, damit man die Subjekte innerhalb der sozialen Relevanzgruppe erfassen kann, ist davon auszugehen, dass dieser Prozess mit Repräsentationen dritter Ordnung startet. Wenn diese Subjekte dann im weiteren Verlauf dieses ersten Schrittes, beim symbolisch-sprachlichen sozialen Denken, eine Bezeichnung erhalten, dann kommt je nach Abstraktheit mindestens eine Repräsentationsordnung dazu.[4] Im zweiten Schritt des sozialen Denkprozesses

[4] Diesen ersten Schritt des sozialen Denkprozesses kann man sich - allerdings bereits formalisiert! - wiefolgt vorstellen: Sei $\mathcal{B}$ eine soziale Relevanzgruppe mit vier Individuen a, b, c, d. Das intuitiv soziale Denken (genauer: die ToM-Fähigkeit) ermöglicht es jedem dieser vier Individuen, die jeweils anderen und sich selbst als eigenständige Subjekte zu erfassen, was zu den Repräsentationen dritter Ordnung $R_3(a), R_3(b), R_3(c), R_3(d)$ führt. Diese Subjektrepräsentationen werden dann vom symbolisch-sprachlich sozialen Denken mit ihren entsprechenden Namen bezeichnet, was zu Repräsentationen von mindestens vierter Ordnung führt, z.B.: $R_4(a) = \text{Hans}, R_4(b) = \text{Dieter}, R_4(c) = \text{Lena}, R_4(d) = \text{Stefanie}$.

erfasst dann zunächst das intuitiv soziale Denken die unmittelbaren Beziehungen, die diese zuvor erfassten und bezeichneten Subjekte untereinander unterhalten, was wiederum die Repräsentationsordnung um zumindest eine Ordnung ansteigen lässt. Werden dann diese unmittelbaren Beziehungen noch mittels des symbolisch-sprachlichen sozialen Denkens bezeichnet, dann steigt die Repräsentationsordnung wiederum um mindestens eine Ordnung an.[5] Zu beachten ist an dieser Stelle des repräsentationalen Verlaufs des sozialen Denkprozesses, dass man sich jetzt schon an der für das Bewusstsein kritischen Schwelle von Repräsentationen sechster Ordnung befindet. D.h., wenn es nun bewusst weiter gehen soll, dann müssen die vorausgehenden Repräsentationen schrittweise von unten her bereits soweit gefestigt werden, dass sie im strukturellen Langzeitgedächnis abgelegt werden können und sozusagen im Bewusstsein Platz gemacht wird für neue darauf aufbauende Repräsentationen, die dann im dritten Schritt des sozialen Denkprozesses bei der intuitiven Erfassung möglicher hypothetischer Beziehungen gebildet und im weiteren Verlauf beim symbolisch-sprachlichen sozialen Denken auch beschrieben werden müssen, was die jeweilige Repräsentationsordnung auf jeden Fall wiederum um mindestens zwei Ordnungen anwachsen lässt. Insgesamt kann man also bei diesem nach oben unbeschränkten sozialen Denkprozess davon ausgehen, dass er basierend auf den unmittelbaren Subjektrepräsentationen, welche Repräsentationen dritter Ordnung darstellen, in jedem weiteren Schritt um mindestens zwei Repräsentationsordnungen anwächst. Dabei ist zu beachten, dass dieser permanente Anstieg von Repräsentationsordnungen natürlich schnell dazu führt, dass nicht mehr alle tieferen diesbezüglichen Repräsentationsordnungen im Bewusstsein gehalten werden können und dann gefestigt im strukturellen Langzeitgedächnis abgelegt oder vergessen werden, je nachdem wie gefestigt sie sind bzw. wie oft sie wieder generiert wurden.
An dieser Stelle ist es auch wichtig sich darüber im Klaren zu sein, wie das Verhältnis zwischen den einzelnen modular organisierten Fähigkeiten (z.B. der

[5]Auf der Grundlage der sozialen Relevanzgruppe $\mathcal{B}$ generiert dann das intuitiv soziale Denken im zweiten Schritt des sozialen Denkprozesses die unmittelbaren Beziehungsrepräsentationen, z.B. $R_5(a;c) =$ Hans $\sim$ Lena, welche dann vom symbolisch-sprachlich sozialen Denken bezeichnet werden, z.B. durch $\sim$ als "befreundet sein mit", was dann zu Beziehungsrepräsentationen sechster Ordnung führt, z.B.: $R_6(a;b;\sim) =$ Hans ist mit Lena befreundet.

Sprachfähigkeit), den dazugehörigen exekutiven Prozessen (z.B. der Sprache) und der sozialen Intelligenz ist. Auf der Grundlage der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im (menschlichen) Gehirn operieren die einzelnen modular organisierten Fähigkeiten, welche zusammengenommen das Potential besitzen, (angepasstes) Verhalten zu erzeugen, und genau in diesem Potential besteht die soziale Intelligenz (vgl. Definition 2.1-2). Während also die soziale Intelligenz "lediglich" das Potential darstellt, auf der Basis der modular organisierten Fähigkeiten Verhalten zu erzeugen, entsteht tatsächliches Verhalten erst durch die dazugehörigen exekutiven Prozesse, bei welchen das Denken die besondere Funktion hat, diese zu koordinieren bzw. die dazugehörigen Repräsentationen zu verarbeiten, so dass tatsächlich (angepasstes) Verhalten entsteht. Somit ist der soziale Denkprozess, wie er in Abbildung 3.2 veranschaulicht ist, ein bestimmtes Zusammenspiel einerseits der daran beteiligten modular organisierten Fähigkeiten und andererseits der jeweils dazugehörigen exekutiven Prozesse, welches auf den geeigneten Bereichen der daran beteiligten (konzeptual) modular organisierten Fähigkeiten beruht. Somit ist die kognitive Fähigkeit des sozialen Denkens in diesem hochkomplexen Sinne eine Anpassung an eine komplexe soziale Umwelt, welche die Form einer sozialen Gemeinschaft aufweist, in welcher ein permanentes Wechselspiel zwischen macchiavellistischen und kooperativen Taktiken an der Tagesordnung ist. Diese kognitive Fähigkeit ist ebenfalls (konzeptual) modular organisiert, da die ihr zu Grunde liegenden kognitiven Fähigkeiten (konzeptual) modular organisiert sind, und ihr exekutiver Prozess, der soziale Denkprozess, ergibt sich aus einem bestimmten Zusammenspiel der entsprechenden anderen exekutiven Prozesse. Auch diesen Zusammenhang kann man in einem Flussdiagramm veranschaulichen (vgl. Abbildung 3.3), in welchem die Pfeile letztendlich auch wieder die Richtung der repräsentationalen Verarbeitung angeben. Wichtig für meine weitere Argumentation ist an dieser Stelle vor allem die Tatsache, dass sich der geeignete Bereich einer solchen hochentwickelten sozialen Denkfähigkeit aus den geeigneten Bereichen der daran beteiligten (konzeptualen) Module zusammensetzt. Dies eröffnet die begründete Vermutung, dass sich auch der tatsächliche Bereich dieser sozialen Denkfähigkeit aus den tätsächlichen Bereichen der daran beteiligten (konzeptualen) Module zusammensetzt, was eine Ausweitung dieses sozialen Denkprozesses auf ökologische, insbesondere mathematische, Beziehungsmuster erklären könnte.

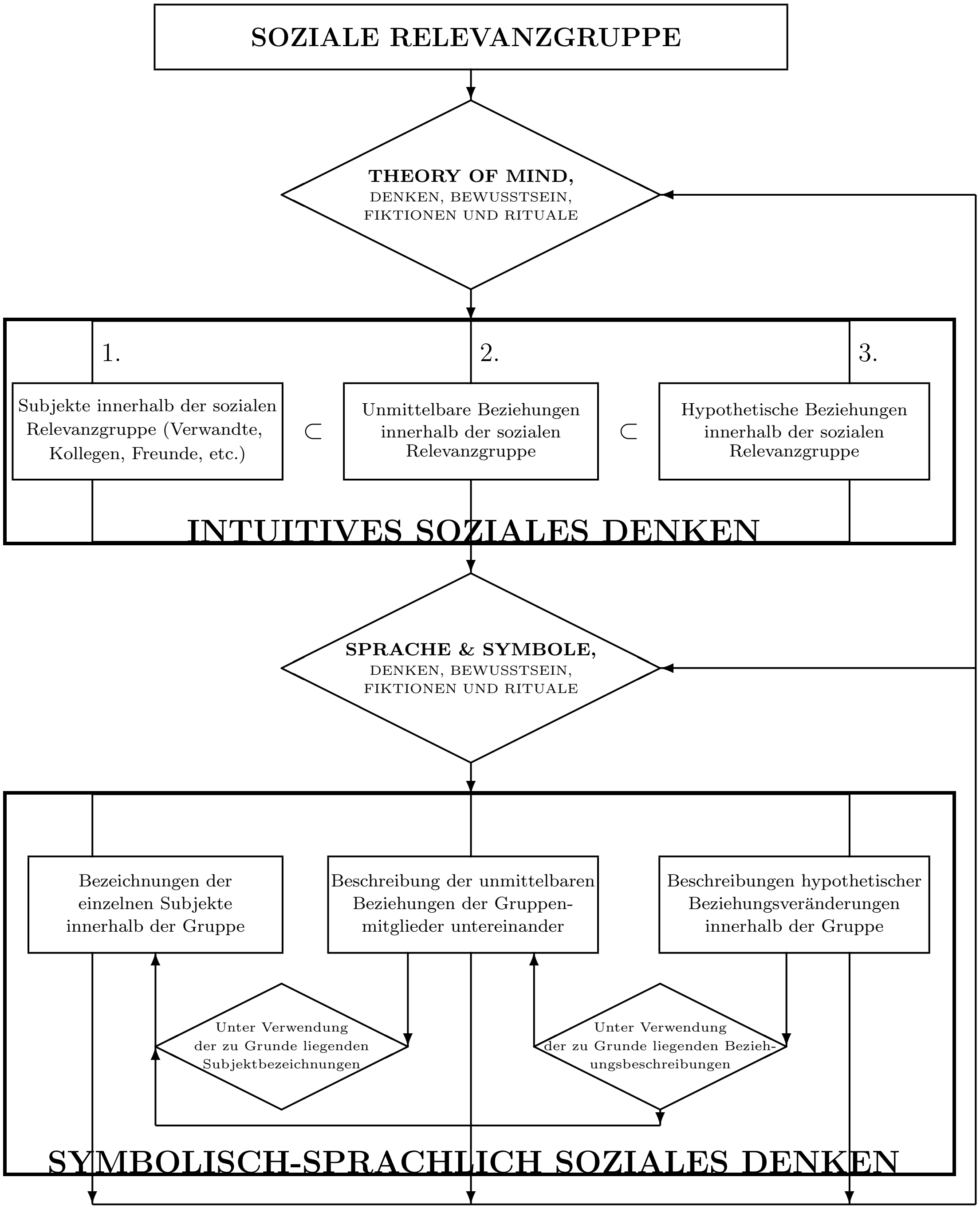


Abbildung 3.2.: Das soziale Denken besteht aus dem intuitiv- und dem symbolisch-sprachlich sozialen Denken, wobei beim intuitiv-sozialen Denken die ToM und beim symbolisch-sprachlich sozialen Denken die Sprache und die Symbole eine besondere Rolle einnehmen, während das Denken, das Bewusstsein, die Fiktionen und die Rituale an beiden gleichermaßen beteiligt zu sein scheinen.

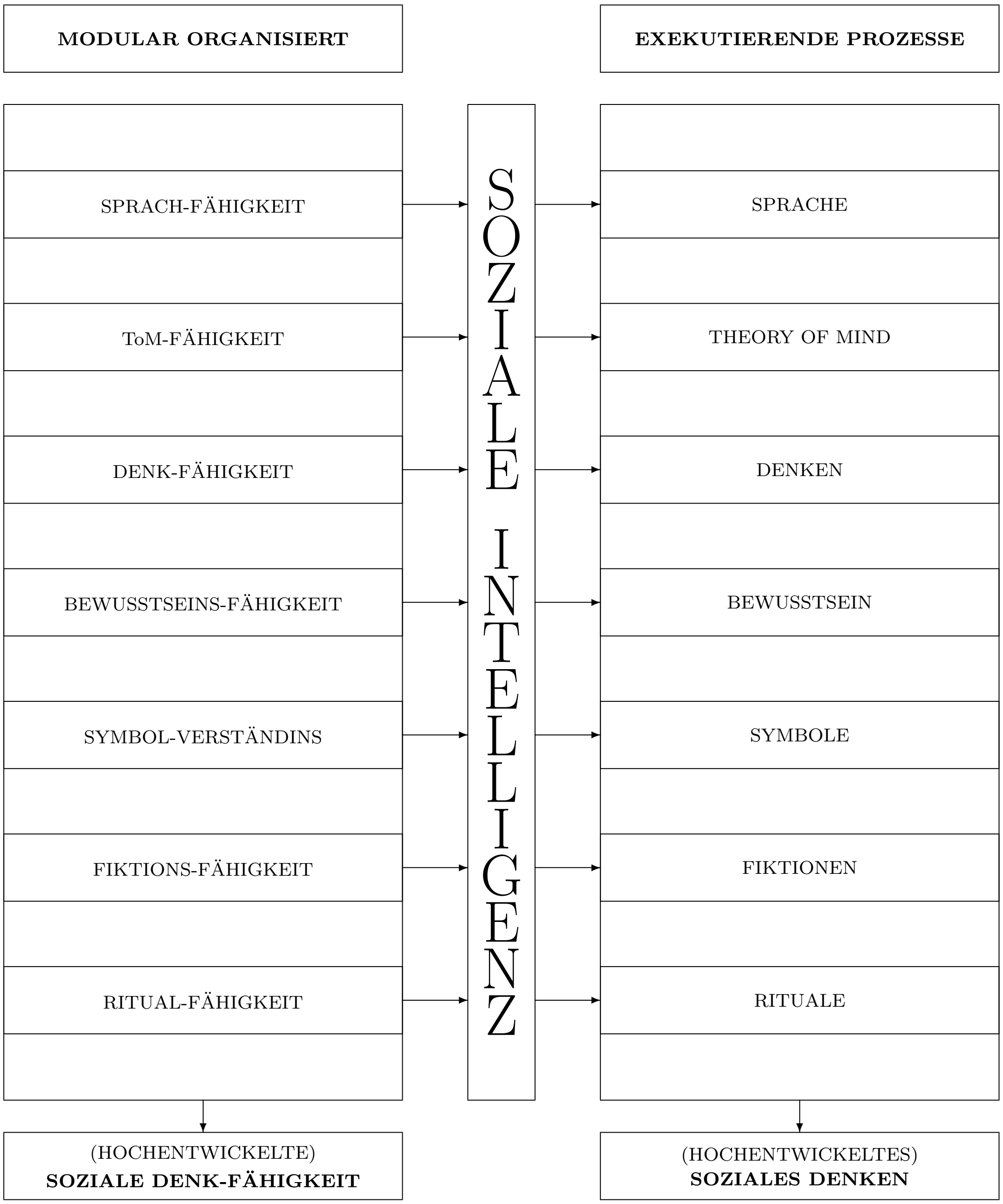


Abbildung 3.3.: Das Verhältnis der sozialen Intelligenz, erstens zu den modular organisierten Fähigkeiten, auf denen sie selbst fußt, zweitens zu den exekutiven Prozessen dieser kognitiven Fähigkeiten, welche auf dieser Grundlage operieren, und drittens zur Fähigkeit und zum Prozess des sozialen Denkens.

3.1.2 Wie sich das mathematische Denken aus dem sozialen Denken ergibt

Im vorangegangen Unterabschnitt wurde dargelegt, dass das soziale Denken in dieser Form eine modular organisierte Anpassung an eine stets komplexer werdende soziale Umwelt ist. Es stellt sich in Anbetracht des daraus resultierenden sozialen Denkprozesses (vgl. Abbildung 3.2) im Zusammenhang mit dem mathematischen Denkprozess (vgl. Abbildung 1.1) sofort die Frage, wie sich dieser denn aus dem sozialen ergeben soll? Obwohl sich nämlich die beiden dazugehörigen Flussdiagramme aus den Abildungen 1.1 und 3.2 in ihrer grundlegenden Struktur ähneln, ist weder der evolutionäre noch der repräsentationale Zusammenhang auf den ersten Blick ersichtlich. Der erste basale Unterschied zwischen beiden Denkprozessen ergibt sich bereits daraus, dass der soziale Denkprozess sich mit sozialen Beziehungsmustern beschäftigt, in welchen Subjekte die Knotenpunkte darstellen, während der mathematische Denkprozess sich zwar auch mit Beziehungsmustern beschäftigt, aber in welchen nicht Subjekte, sondern mathematische Objekte die Knotenpunkte repräsentieren. Wenn sich, wie vermutet, der mathematische Denkprozess aus dem sozialen ergeben soll, d.h. evolutionär gesehen möglicherweise ein Nebenprodukt dieses sozialen Denkprozesses sein soll, dann muss sich evolutionär erklären lassen, warum sich der soziale Denkprozess auf Beziehungsmuster ausweiten lässt, welche auf (fiktiven) Objekt- statt auf Subjektrepräsentationen beruhen. Eine möglicher Erklärungsansatz dieser zentralen Frage liegt im tatsächlichen Bereich dieser hochentwickelten sozialen Denkfähigkeit, bei deren Denkprozess zunächst einmal das intuitiv soziale Denken zum Einsatz kommt, bei welchen die ToM-Fähigkeit eine entscheidende Rolle einnimmt. Doch diese ToM-Fähigkeit wird, wie bereits mehrfach erläutert - evolutionär gesehen -, dazu benötigt, sich selbst und anderen mentale Zustände zuschreiben zu können, d.h. andere und sich selbst erst einmal als Subjekte zu erkennen. Überdies benötigt man sie auch dafür, wie im vorangegangenen Unterabschnitt erklärt, auf dieser Basis von Subjektrepräsentationen die Beziehungen, die diese Subjekte untereinander unterhalten, zu erfassen. Damit reduziert sich die obige zentrale Frage über den Zusammenhang von sozialen und mathematischen Denken zu der Frage, ob denn die ToM-Fähigkeit auch dazu in der Lage ist, Beziehungsmuster auf Objektbasis zu erfassen, oder ob sie an Subjekte als Beziehungsgrundlage gebunden ist? Wie sieht es mit dem tatsächlichen Bereich der ToM-Fähigkeit aus? In Unterabschnitt 2.2.2 wurde bereits dargelegt, dass der geeignete Bereich des ToM-Moduls aus der Zuschreibung verhaltenswirksamer mentaler bzw. intentionaler Zustände bei sich selbst und bei anderen besteht und dass der tatsächliche Bereich des ToM-Moduls aus der Zuschreibung verhaltenswirksamer mentaler bzw. intentionaler Zustände nicht nur bei sich selbst und anderen Subjekten, sondern auch bei beliebigen Objekten und fiktiven Subjekten besteht. Denn das entscheidende Kriterium für eine Aktivierung des ToM-Moduls ist anscheinend dabei die Beobachtung von intentionalem Verhalten, welches sich nicht in jedem Fall auf eines oder meherere Subjekte zurückführen lässt, was die Verarbeitung entsprechender (fiktiver) Objekt- oder Subjektrepräsentationen im ToM-Modul erklären kann (z.B. der Computer hat dieses Verhalten gezeigt oder Gott war dafür verantwortlich). Und darin besteht jetzt der Erklärungsansatz für den evolutionären Zusammenhang zwischen sozialen und mathematischen Denken! Beim sozialen Denken operiert das ToM-Modul auf seinem geeigneten Bereich und beim mathematischen Denken auf seinem tatsächlichen Bereich. Dies kann man nun natürlich auch für alle anderen am mathematischen Denken beteiligten konzeptual-modular organisierten Anpassungen vermuten, was dann insgesamt den mathematischen Denkprozess evolutionär aus dem sozialen erklärbar macht. Demnach verhält es sich also tatsächlich so, dass man die kognitive Fähigkeit des mathematischen Denkens als Nebenprodukt dieser sozialen Denkfähigkeit ansehen kann bzw. als Produkt dieser soziale Denkfähigkeit, welches sich ergibt, wenn sie auf Teilen ihres tatsächlichen Bereiches operiert. Diese Argumentation macht aus der vorläufigen Arbeitshypothese aus Unterabschnitt 1.1.5, welche die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz vermutet hat, eine konkrete, begrifflich und empirisch begründete Hypothese und erweitert sie sogar, indem sie die evolutionären Brückenschläge ausgehend von den evolutionären Ursprüngen der sozialen Intelligenz über die Fähigkeit des sozialen Denkens hin zum mathematischen Denken aufzeigt. Letztendlich ergibt sich dann das mathematische Denken als Nebenprodukt aus dem koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenzevolution und seine evolutionären Ursprünge lassen sich somit bis zum evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz zurückverfolgen. Damit ist an dieser Stelle bereits ein zentrales Anliegen dieser Untersuchung erreicht worden, nämlich die Bestätigung und Erweiterung der vorläufigen Arbeitshypothese aus Unterabschnitt 1.1.5 zu der folgenden, jetzt evolutionär begründeten, Hypothese:

Die kognitive Fähigkeit des mathematischen Denkens ist ein Nebenprodukt der kognitiven Fähigkeit des sozialen Denkens, welche im Zuge der Hominisation im koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenzevolution evolviert ist. Die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens liegen daher im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz.

Doch bevor die noch ausstehende repräsentationale Einordung des mathematischen Denkprozesses vorgenommen werden kann, werden zunächst einmal die übrigen am mathematischen Denkprozess beteiligten kognitiven Fähigkeiten aus dem evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz im Hinblick auf ihren Beitrag zum mathematischen Denken untersucht.
Genauso wie beim sozialen Denken kommt auch beim mathematischen Denken die Sprache zum Einsatz. Der Unterschied scheint lediglich darin zu bestehen, dass im Falle der Mathematik nicht über die Beziehungen von Subjekten innerhalb einer sozialen Gemeinschaft gesprochen wird, sondern über die Beziehungen, die mathematische Objekte innerhalb eines mathematischen Betrachtungsgegenstandes untereinander unterhalten (vgl. auch Unterabschnitt 1.1.3). Die Sprachfähigkeit ermöglicht also Klatsch & Tratsch über mathematische Objekte. Diese mathematischen Objekte sind dabei aber fiktionale bzw. abstrakte symbolische Repräsentationen, da ihnen kein direkt entsprechendes reales Objekt zu Grunde liegt, sondern lediglich Beziehungen innerhalb eines mathematischen Betrachtungsgegenstandes. Darin besteht ein fundamentaler Unterschied zum sozialen Denken! Während das soziale Denken letztendlich auf Subjektrepräsentationen beruht, die tatsächliche reale Individuen als Bezüge besitzen, ist dies beim mathematischen Denken nicht der Fall. Die mathematischen Objekte haben keine realen Objekte als Bezüge. Dies kann man sich am einfachsten an einem Beispiel klarmachen. Man betrachte sich die natürlichen Zahlen, d.h. die Menge $I\!N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$. Wie bereits in Unterabschnitt 2.2.6 erklärt, benötigt man für die Bildung dieser abstrakten Symbole eine Repräsentationsfähigkeit

dritter Ordnung. Man könnte somit analog zum sozialen Denkprozess argumentieren, dass im Falle der natürlichen Zahlen als mathematischem Betrachtungsgegenstand die mathematischen Objektrepräsentationen $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ im ersten Schritt des mathematischen Denkprozesses, beim intuitiv-mathematischen Denken, generiert werden. Doch diese analoge Vorgehensweise ist im Falle des mathematischen Denkens nicht möglich, da die mathematischen Objekte $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ keine realen Bezüge in der Umwelt besitzen, sondern als abstrakte symbolische Repräsentationen dritter Ordnung zunächst einmal auf den dazugehörigen Anzahlrepräsentationen beruhen. Doch wie erhält man nun im Falle der Menge der natürlichen Zahlen als mathematischen Betrachtungsgegenstand die natürlichen Zahlen, wenn sie sich nicht unmittelbar aus der Wahrnehmung ergeben? Man erhält sie letztendlich, indem das mathematischen Denken zunächst einmal die unmittelbaren Beziehungen repräsentiert und bezeichnet, die diese mathematischen Objekte untereinander unterhalten. Diese Axiomierung (vgl. Anhang, (A.1)-(A.9)) besteht also nicht aus den Objekten des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes, sondern aus den grundlegenden unmittelbaren Beziehungen, die diese zu unterhalten scheinen. Erst auf dieser axiomatischen Grundlage, den unmittelbaren Beziehungsrepräsentationen, ist man dann in der Lage nachzuweisen, welche Beziehungsrepräsentationen als mathematische Objekte zu den natürlichen Zahlen gehören (vgl. Anhang, Satz A.1). Somit spielt beim mathematischen Denken die Fiktionsfähigkeit und das Symbolverständnis eine stärkere Rolle als beim sozialen Denken, da es nicht wie das soziale Denken auf Repräsentationen beruht, die einen realen Bezug haben, sondern bereits auf einer höheren repräsentationalen Beziehungsebene ansetzt. Dieser Umgang mit mathematischen Objekten beim mathematischen Denken unterliegt dabei, wie bereits in Unterabschnitt 1.1.3 erwähnt (vgl. Fussnote 13), strengen Regeln bzw. mathematischen Normen, welche den Anspruch des mathematischen Denkprozesses auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit umsetzen sollen. Diese mathematischen Normen erfüllen dabei dieselbe Funktion, wie die sozialen Normen im sozialen Denkprozess. Sie stellen Signale dar, mit welchen man eine Bewertung der mathematischen Zuverlässigkeit vornehmen kann. Sie signalisieren den an einem gemeinschaftlichen mathematischen Denkprozess beteiligten Individuen die Integrität und Vertrauenswürdigkeit der einzelnen beteiligten Individuen. Auch im

Falle von mathematischen Normen garantiert die Normentreue soziales Prestige, indem man zum Beispiel von anderen beteiligten Mathematikern als Kooperationspartner gewählt wird. Somit wird die bereits in Unterabschnitt 1.1.1 dargelegte Kluft zwischen subjektiven und objektiven mathematischen Denkprozess mittels mathematischer Normen, insbesondere in Form der streng reglementierten Beweisführung (vgl. Anhang), geschlossen. Die Ritualfähigkeit spielt also bei der mathematischen Interaktion, genauso wie bei der sozialen, eine entscheiden Rolle beim Übergang von der subjektiven Beziehungssichtweise hin zu einer gemeinschaftlichen (bzw. "objektiven") Sichtweise.

Insgesamt gesehen haben also die (konzeptual) modular organisierten Anpassungen "ToM-Fahigkeit", "Sprachfähigkeit", "Symbolverständnis", "Fiktionsfähigkeit" und "Ritualfähigkeit" jeweils einen besonderen Einfluss auf das mathematische Denken, der sich aus einem ähnlichen Einfluss auf das soziale Denken ableiten lässt, während die Repräsentationsfähigkeit, die Denkfähigkeit und die Bewusstseinsfähigkeit beim mathematischen wie beim sozialen Denken letztendlich die Verarbeitung der dazugehörigen Repräsentationen und ein entsprechendes Verhalten gewährleisten, und man kann die Fragezeichen in den Rauten im Flussdiagramm in Abbildung 1.1 durch die entsprechenden kognitiven Fähigkeiten ersetzen, was zu einem aktualisierten Flussdiagramm des mathematischen Denkprozesses führt, welches in Abbildung 3.4 veranschaulicht ist.

Auf dieser Grundlage kann man nun auch die arithmetische Zahlenverarbeitung, welche auf der im Anhang dargelegten axiomatischen Grundlage operiert, als Teil des mathematischen Denkens ausgehend vom Betrachtungsgegenstand "natürliche Zahlen" charakterisieren.[6] Was jetzt noch bleibt, ist die Frage nach einer repräsentationalen Einordnung des mathematischen Denkprozesses, welche sich auf der Grundlage der dargelegten evolutionären und repräsentationalen Zusammenhänge detailliert vornehmen lassen müsste.

[6]Hier ist jetzt natürlich nicht die weitestgehend automatisierte arithmetische Verarbeitung von Anzahlrepräsentationen gemeint, mit welcher der Sinn für Anzahlen das Gehirn versorgt (vgl. Unterabschnitt 1.2.3), sondern der darauf basierende arithmetische Umgang mit Zahlen, d.h. mit mathematischen Objekten.

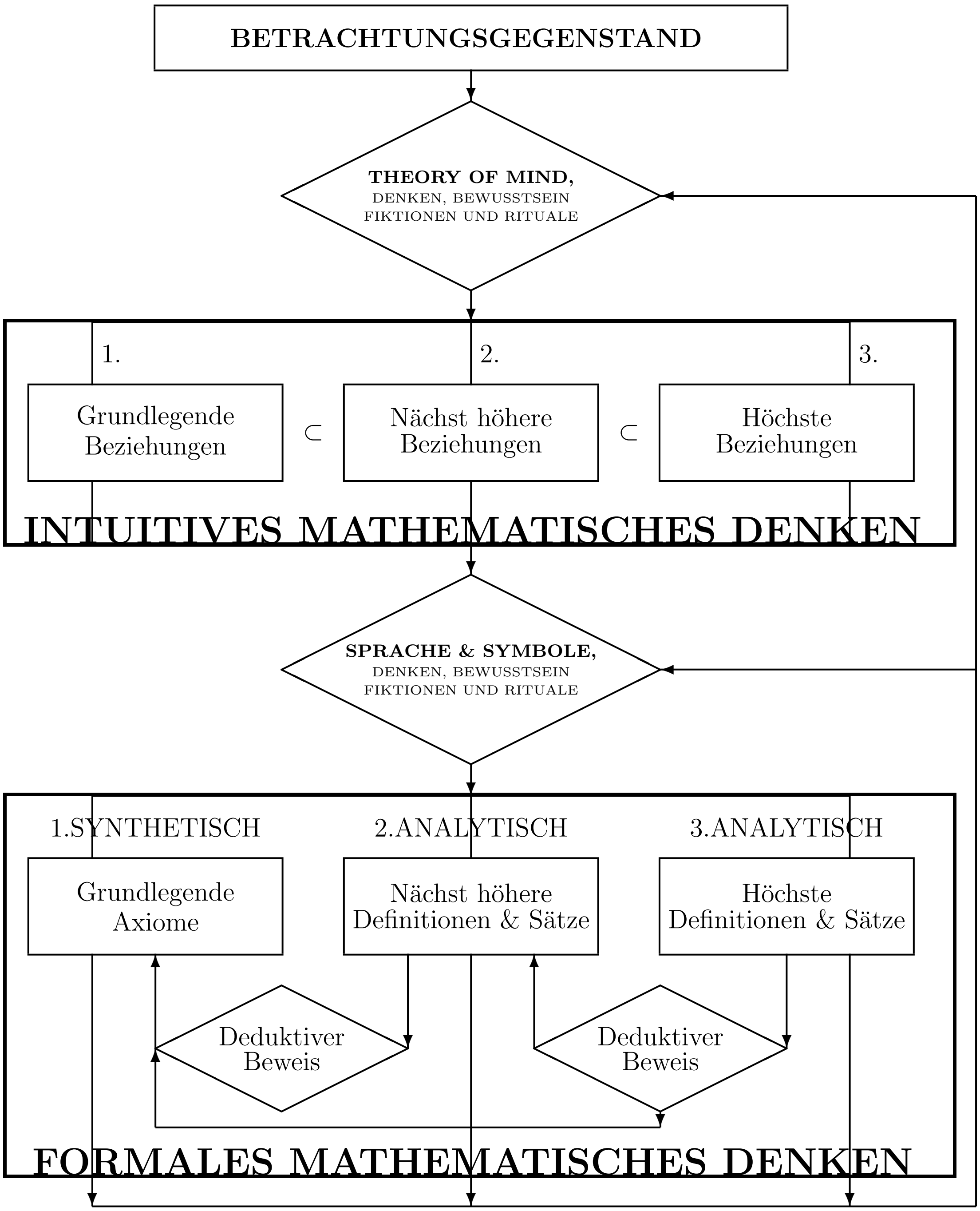


Abbildung 3.4.: Das mathematische Denken besteht aus dem intuitiv- und dem formal-mathematischen Denken, wobei beim intuitiv-mathematischen Denken die ToM und beim formal-mathematischen Denken die Sprache und die Symbole eine besondere Rolle einnehmen, während das Denken, das Bewusstsein, die Fiktionen und die Rituale an beiden gleichermaßen beteiligt zu sein scheinen.

3.1.3 Eine mögliche repräsentationale Einordnung des mathematischen Denkprozesses

Wie verhält es sich nun mit einer möglichen repräsentationalen Einordnung des mathematischen Denkprozesses? Durch die vorangegangene repräsentationale Einordnung einerseits des sozialen Denkprozesses und andererseits der Zahlen müsste es doch auch möglich sein, eine repräsentationale Einordnung des mathematischen Denkprozesses zu formulieren. Betrachtet man sich das Flussdiagramm in Abbildung 3.4, so stellt man fest, dass im ersten Schritt des mathematischen Denkprozesses das intuitiv-mathematische Denken zunächst einmal die unmittelbaren Beziehungen innerhalb des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes erfasst bzw. repräsentiert. Wie könnte man sich nun eine solche Erfassung von unmittelbaren Zusammenhängen vorstellen? Im Falle der natürlichen Zahlen wären das die Axiome ((A.1)-(A.9)) (vgl. Anhang), welche allerdings bereits abstrakt formalisiert sind. Die unmittelbaren Beziehungen, die sie beschreiben, lassen sich umgangsprachlich auch viel einfacher formulieren:
Ausgehend von der 1 als Einheit werden die grundlegenden unmittelbaren Beziehungen der natürlichen Zahlen untereinander über ihre jeweiligen Nachfolger beschrieben (vgl. (A.1) & (A.8)). Die nächste unmittelbare Beziehung wäre dann, dass von jeder natürlichen Zahl auch ihr Nachfolger eine natürliche Zahl ist (vgl. (A.6)). Auch das sogenannte Induktionsprinzip ist als unmittelbare Beziehung ziemlich einleuchtend (vgl. (A.9)): Wenn eine Zahlenmenge, die 1 enthält, und von jeder weiteren natürlichen Zahl auch ihr jeweiliger Nachfolger in dieser Zahlenmenge liegt, dann ist diese Zahlenmenge entweder eine Teilmenge der natürlichen Zahlen oder sie ist selbst die Menge der natürlichen Zahlen. Auch die unmittelbare Beziehung, die Axiom (A.5) zu Grunde liegt, ist offensichtlich: Ist eine Zahl gleich einer natürliche Zahl, dann ist diese Zahl eine natürliche Zahl. Lediglich die unmittelbaren Beziehungen, die den Axiomen (A.2)-(A.4) zu Grunde gelegt sind, sind nicht ganz so einfach, da sie sicherstellen sollen, dass die Gleichheitsrelation im Falle der natürlichen Zahlen eine Äquivalenzrelation ist, d.h. jede natürliche Zahl ist selbstidentisch (vgl. (A.2)); ist eine natürliche Zahl identisch mit einer anderen natürlichen Zahl, so gilt auch die Umkehrung (vgl. (A.3)); ist eine erste natürliche Zahl identisch mit einer zweiten natürlichen Zahl und ist diese wieder-

um identisch mit einer dritten natürlichen Zahl, dann ist auch die erste natürliche Zahl identisch mit der dritten natürlichen Zahl (vgl. (A.4)). Dagegen beschreibt Axiom (A.7) wieder eine einfache unmittelbare Beziehung: Sind zwei natürliche Zahlen identisch, so sind auch ihre Nachfolger identisch.

Da es sich nun bei diesen unmittelbaren Beziehungen um Beziehungen handelt, die auf Zahlenrepräsentationen beruhen und diese Zahlenrepräsentationen, wie bereits mehrfach erklärt, Repräsentationen (mindestens) dritter Ordnung sind,[7] so kann man davon ausgehen, dass für die Erfassung dieser repräsentationalen Beziehungen (mindestens) Repräsentationen vierter Ordnung generiert werden müssen. Diese unmittelbaren Beziehungsrepräsentationen werden dann vom formal-mathematischen Denken formalisiert, d.h. symbolisch-sprachlich repräsentiert, was wiederum eine Erhöhung von zumindest zwei Repräsentationsordnungen nach sich zieht, da mittels abstrakten Symbolen formalisiert wird. Am Ende des ersten Schrittes des mathematischen Denkprozesses ist man somit schon bei Repräsentationen (mindestens) sechster Ordnung angelangt, d.h. man hat die für das Bewusstsein kritische Schwelle von Repräsentationen fünfter Ordnung bereits überschritten.[8] Im zweiten Schritt des mathematischen Denkprozesses generiert dann wieder das intuitiv-mathematische Denken auf dieser Repräsentationsgrundlage neue Beziehungsrepräsentationen, was wiederum einen Anstieg der repräsentationalen Ordnung um (mindestens) eine Stufe nach sich zieht. Und genauso wie im ersten Schritt des mathematischen Denkprozesses erzeugt dann darauf aufbauend das formal-mathematische Denken formalisierte Beziehungsrepräsentationen (Sätze und Definitionen), deren Ordnung zumindest

[7] Insbesondere sind Zahlenrepräsentationen auch den Beziehungsrepräsentationen zuzuordnen, da sie auf den dazugehörigen Anzahlrepräsentationen beruhen.

[8] Diese Überschreitung liefert nun auch eine gute Erklärung dafür, warum sich Menschen, die mit dem mathematischen Denken zum ersten Mal in Kontakt kommen, so unglaublich schwer tun, mit einer formalisierten Axiomatik umzugehen. Das Bewusstsein kann, wie in Unterabschnitt 2.2.4 erklärt, zwar weitestgehend fehlerfrei mit Repräsentationen bis einschließlich der fünften Ordnung umgehen, aber bei Repräsentationen sechster Ordnung explodiert die Fehlerhäufigkeit. Es ist daher zu vermuten, dass die dazugehörigen unmittelbaren Beziehungsrepräsentationen erst soweit gefestigt bzw. vertraut sein müssen, damit sie im Langzeitgedächnis abgelegt werden können, bevor das Bewusstsein in der Lage ist, diese weitestgehend fehlerfrei zu formalisieren.

um zwei Stufen höher liegt. Wie man sieht, steigen beim mathematischen Denken die Repräsentationsordnungen deutlich schneller an als beim sozialen Denken, bei dem die für das Bewusstsein kritische Schwelle von Repräsentationen sechster Ordnung erst nach Abschluss des zweiten Schrittes des sozialen Denkprozesses erreicht wird (vgl. Unterabschnitt 3.1.2), während dies im Falle des mathematischen Denkprozesses schon nach Abschluss des ersten Schrittes der Fall ist. Es ist demnach zu vermuten, dass man sich mit den Beziehungen innerhalb eins mathematischen Betrachtungsgegenstandes viel intensiver auseinandersetzen muss, als mit Beziehungen innerhalb einer sozialen Relevanzgruppe.[9] Während der soziale Denkprozess zunächst einmal Subjektrepräsentationen generiert, startet der mathematische Denkprozess gleich mit Beziehungsrepräsentationen und nicht mit Objektrepräsentationen, wie man eigentlich bei einer Ausweitung des sozialen Denkprozesses auf mathematische Kontexte vermuten könnte. Mathematische Objektrepräsentationen sind stets Beziehungsrepräsentationen, was bei Subjekt- und bei Objektrepräsentationen nicht der Fall ist. Dieser basale repräsentationale Unterschied könnte daher auch der tiefere Grund für einen epistemologischen Sonderstatus der Mathematik sein. Im Gegensatz zum sozialen Denken (Grundlage: Subjektrepräsentationen) und der Ausweitung des sozialen Denkens auf ökologische Kontexte (Grundlage: Objektrepräsentationen) operiert das mathematische Denken ausschließlich mit Beziehungsrepräsentationen, bei welchen auch die repräsentationalen Knotenpunkte, die mathematischen Objekte, Beziehungsrepräsentationen sind. Er ist somit völlig losgelöst von einer Subjekt- und Objektgrundlage in der wahrnehmbaren Umwelt. Und genau dies ist der zentrale Aspekt, der es den empirischen Wissenschaften scheinbar erlaubt, die mathematische Theoriebildung bzgl. bestimmter für sie relevanter

[9] Es zeigt sich also auch, dass es repräsentational gesehen nicht relevant ist, auf welcher Ebene man sich in eine mathematische Theorie einzudenken versucht. Jeder Schritt des mathematischen Denkprozesses operiert auf Repräsentationen von (mindestens) der vierten Ordnung, aus welchen dann mittels einer Formalisierung Repräsentationen von (mindestens) der sechsten Ordnung generiert werden. Man muss sich stets erst mit den zu formalisierenden Beziehungsrepräsentationen, die vom intuitiv-mathematischen Denken erfasst werden, hinreichend vertraut machen, bevor man sie mittels des formal-mathematischen Denkens tatsächlich formalisieren kann, da man ansonsten die für das Bewusstsein kritische Schwelle von Repräsentationen fünfter Ordnung überschreitet, was zu einer weit höheren Fehlerhäufigkeit führt.

Betrachtungsgegenstände anzuwenden, damit sie dann die Möglichkeit erhalten, ihre eigene Theoriebildung zu verifizieren bzw. quantifizierbar zu machen. Dies ist in Anbetracht dieser repräsentationalen Zusammenhänge zwischen sozialem und mathematischem Denken tatsächlich nur deswegen möglich, da für die Anwendung einer mathematischen Theorie lediglich überprüft werden muss, ob sich die unmittelbaren Beziehungen innerhalb des jeweils zu untersuchenden empirischen Betrachtungsgegenstandes mit Hilfe der formalisierten unmittelbaren Beziehungen eines mathematischen Betrachtungsgegenstandes beschreiben lassen. Ist dies der Fall, kann der Wissenschaftler unabhängig von den realen Subjekten bzw. Objekten in seinem empirischen Betrachtungsgegenstand die entsprechende mathematische Theorie für seine Zwecke anwenden. Ist dies aber nicht der Fall und lässt sich keine passende mathematische Theorie finden, so muss eine auf diesen vermuteten unmittelbaren Beziehungen neue mathematische Theorie entwickelt werden.

Insgesamt hat somit diese repräsentationale Einordnung des mathematischen Denkprozesses den basalen Unterschied zwischen sozialem, ökologischem und mathematischem Denken offenbart. Während der soziale Denkprozess letztendlich auf Subjektrepräsentationen beruht und seine Ausweitung auf ökologische Kontexte - der ökologische Denkprozess - auf Objektrepräsentationen basiert, liegen dem mathematischen Denkprozess bereits von Anfang an Beziehungsrepräsentationen zu Grunde. Demnach besteht die epistemologische Besonderheit des mathematischen Denkprozesses in der Tatsache, dass er ausschießlich nur mit Beziehungsrepräsentationen auskommt und nicht erst diese auf einer unmittelbaren Subjekt- oder Objektbasis generieren muss. Dies ist damit auch tatsächlich, wie oben vermutet, eine plausible Erklärung für den epistemologischen Sonderstatus, den die Mathematik seit jeher beansprucht, aber welcher im Grunde nie hinreichend erklärt werden konnte. Auch Heintz bemerkte in [73] zwar im Zuge ihrer Studie den epistemologischen Sonderstatus der Mathematik, war aber nicht in der Lage, diesen soziologisch hinreichend zu erklären, obwohl sie ihn damit zu begründen versuchte, dass das mathematisches Wissen kumulativ sei und Meinungsverschiedenheiten rational gelöst werden würden und nicht diskursiv. Im Hinblick auf eine Soziologie der Mathematik vertritt Heintz letztendlich die These (Heintz in [73][S. 273, Z. 42 - S. 274, Z. 6])

... , dass es in der Mathematik zur Entwicklung eines eigenständigen Kommunikationsmediums kommt, das gegenüber dem Kommunikationsmedium Wahrheit die Form einer Zweitcodierung annimmt und für die Mathematik (auch) die Funktion hat, die Anschlussfähigkeit von Kommunikation zu sichern, d.h. die Zustimmung zu einer Aussage wahrscheinlicher zu machen. Ich habe dieses Kommunikationsmedium als "Formalisierung" bezeichnet.

Sie geht dabei davon aus, dass die Mathematik ein von der Außenwelt unabhängiges, geschlossenes, repräsentationales System darstellt, in welchen folgendes gilt (Heintz in [73][S. 114, Z. 20-22]):

Mathematische Repräsentationen verweisen auf andere Repräsentationen, ohne dass diese Verweisungskette jemals an einem Punkt anlangt, der gewissermassen als letzter Bezugspunkt fungieren könnte.

Dass die Mathematik als in sich geschlossenes Repräsentationssystem angesehen werden kann, ergibt sich prinzipiell auch aus dieser Analyse. Aber im Gegensatz zu Heintz wurde hier auch der repräsentationale Bezugspunkt einer jeden mathematischen Theorie aufgedeckt, nämlich die jeweiligen unmittelbaren Beziehungen, die in einem dazugehörigen Betrachtungsgegenstand gelten. In der mathematischen Theoriebildung werden, wie oben dargelegt, von Anfang an Beziehungen repräsentiert und keine Subjekte oder Objekte. Dies ist der fundamentale Unterschied zwischen der Mathematik und allen anderen wissenschaftlichen Disziplinen und nicht ausschließlich der formale Beweis, wie Heintz in [73][S. 215, Z. 33-34] vermutet:

Die Mathematik ist über den Beweis definiert, und genau dies macht ihre Differenz zu den anderen Wissenschaften aus.

Zugegebenermaßen spielt der formale Beweis in der Mathematik eine besondere Rolle, indem er die einzelnen Ebenen des mathematischen Denkprozesses sichert und somit zur Umsetzung des Anspruches auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit des mathematischen Denkprozesses beiträgt. Aber er ist nicht alleine das entscheidende Charakteristikum der Mathematik, welches wie erklärt in der Tatsache zu finden ist, dass der mathematische Denkprozess ausnahmslos nur mit Beziehungsrepräsentationen arbeitet. Die formalisierten Beziehungsrepräsentationen führen dann zu einer eigenständigen mathematischen Sprache, welche dann natürlich auch von Mathematikern als Kommunikationsmedium eingesetzt wird, welches unter anderem auch erst einen gemeinschaftlichen mathematischen Denkprozess ermöglicht. Demnach stimme ich mit Heintz in [73] zwar darin überein, dass die Mathematik ein eigenständiges Kommunikationsmedium aufweist, dass die "Anschlussfähigkeit" der mathematischen Kommunikation sicherstellen soll, welches aber allerdings auch einen eigenständigen Wahrheitsgehalt hat und nicht, wie Heintz vermutet, das Kommunikationsmedium "Wahrheit" zweitcodiert.[10] Doch in Anbetracht meiner Ausführungen, ergibt sich hier die Möglichkeit einer Soziologie der Mathematik nicht über das der Mathematik eigene Kommunikationssystem "Formalisierung" samt dazugehörigen Beweisen, sondern aus der Tatsache, dass der mathematische Denkprozess ausschließlich mit Beziehungsrepräsentationen arbeitet und evolutionär gesehen ein Nebenprodukt des sozialen Denkprozesses ist, indem sich dieser von der Erfassung und Verarbeitung von sozialen Mustern hin zur Erfassung von ökologischen und weiter zu mathematischen Mustern ausgeweitet hat. Das soziale ist somit dem mathematischen Denkprozess von Anfang an inhärent und ergibt sich nicht erst durch das sich aus ihm ergebende, eigenständige Kommunikationsmedium. Das mathematische Denken und damit letztendlich die Mathematik ist also ein soziales Phänomen, da es bzw. sie erst durch ein hochentwickeltes soziales Denken ermöglicht wird. Um dies zu verstehen, ist es vor allem notwendig, sich im Klaren darüber zu sein, dass die mathematischen Objekte ausnahmslos Beziehungsrepräsentationen darstellen, welchen keine konkreten Subjekte oder Objekte zu Grunde liegen, sondern ausnahmslos deren unmittelbaren Beziehungen innerhalb eines gewählten Betrachtungsgegenstandes, falls dieser Betrachtungsgegestand reale Objekte bzw. Subjekte beinhaltet, deren Beziehungsmuster vom mathematischen Denkprozess erfasst werden sollen. Mathematische Objekte sind aus dieser Perspektive heraus weder frei erfunden noch konstruiert noch repräsentieren sie irgendwelche metaphysischen Entitäten, w.z.B. mathematische Ideen, sondern sie stellen ausnahmslos Beziehungsrepräsentationen dar, welche durch die unmittelbaren Bezie-

[10] Auf den mathematischen Wahrheitsbegriff, der sich aus meiner Theoriebildung ergibt bzw. mit ihr kompatibel ist, werde ich in Unterabschnitt 3.2.4 noch zu sprechen kommen.

hungen innerhalb eines mathematisch untersuchten Betrachtungsgegenstandes, sozusagen, in der Realität geerdet sein können, wenn der zu Grunde gelegte Betrachtungsgegenstand nicht selbst schon ein mathematisches Muster ist.
Letztendlich kann man über die evolutionäre und repräsentationale Einordnung des sozialen und des mathematischen Denkprozesses auch die von mir in Unterabschnitt 1.2.4 skizzierte Sicht auf das (menschliche) Gehirn konkretisieren, indem man die repräsentationale Verabeitungsstruktur in das Flussdiagramm aus Abbildung 1.3 integriert. Man erhält dann die in Abbildung 3.5 festgehaltene Sicht auf ein weitestgehend modular organisiertes (menschliches) Gehirn.

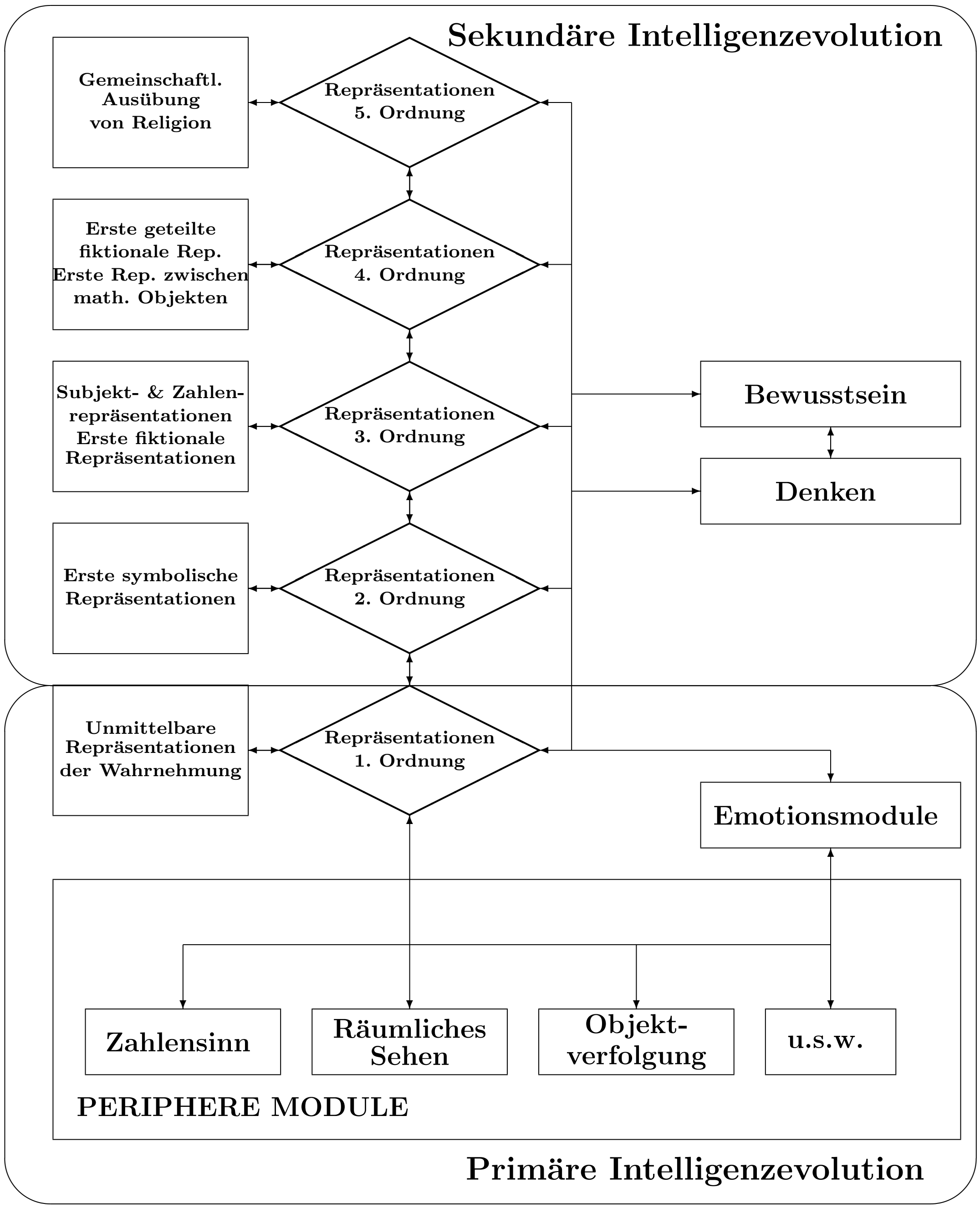


Abbildung 3.5.: Eine mögliche Einordnung der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur in ein modular organisiertes Gehirn.

3.2 Antworten zu den fünf grundlegenden Fragen der Philosophie der Mathematik

Nachdem nun der mathematische Denkprozess evolutionär und repräsentational eingeordnet ist, stellt sich natürlich sofort die Frage, welche weiteren Konsequenzen sich aus diesen Resultaten für eine diesbezügliche Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik ergeben, welche, wie in Unterabschnitt 1.1.1 dargelegt, davon ausgeht, dass die Mathematik die Wissenschaft der Muster ist? Im Grunde gilt es die in der Einleitung vorgestellten fünf zentralen Fragen, die letztendlich eine jede Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik beantworten sollte, auf dieser neu gewonnenen evolutionären und repräsentationalen Grundlage zu analysieren.

3.2.1 Was ist Mathematik?

Den philosophischen Ausgangspunkt meiner Untersuchung bildete die mathematisch-philosophische Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht (vgl. Unterabschnitt 1.1.1), welche bereits die Frage, was Mathematik sei, allgemein beantwortet. Aber eben nur allgemein! Nachdem nun eine evolutionäre und repräsentationale Einordnung des mathematischen Denkprozesses gelungen ist, besteht auch die Möglichkeit, die Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, detaillierter zu erklären und sie somit noch besser von anderen Grundpositionen im Rahmen der Philosophie der Mathematik abgrenzen und stärken zu können. In Anbetracht der erhaltenen evolutionären und repräsentationalen Resultate (vgl. Abschnitt 3.1) besteht die Mathematik nahezu ausnahmslos aus Beziehungsrepräsentationen, welche durch eine Formalisierung zu symbolisch-sprachlichen Beziehungsrepräsentationen werden. Diese Beziehungsrepräsentationen repräsentieren Beziehungen, seien sie nun zwischen Subjekten oder Objekten der realen Welt oder zwischen fiktiven Subjekten oder Objekten oder zwischen mathematischen Objekten, welche selbst bereits Beziehungsrepräsentationen darstellen, wie in Unterabschnitt 3.1.3 erklärt wurde. Demnach erfasst und beschreibt die Mathematik in jedem Fall ein Beziehungsmuster, welches von den konkreten (fiktiven) Subjekten und/oder (fiktiven)

Objekten losgelöst ist und bei welchem nur die Eigenschaften und Charakteristika der Beziehungen eine Rolle spielen. Mathematik erfasst und beschreibt also Beziehungsmuster, wobei es irrelevant ist, ob diese Beziehungsmuster der physischen, der sozialen oder einer mental-repräsentationalen Welt entspringen. Wie bereits erwähnt (vgl. Kap.1, Fussnote 4), ist dies der zentrale Aspekt, der diese Grundposition von den anderen Grundpositionen unterscheidet, die die Mathematik als die Wissenschaft der Zahlen, des Raumes und der Zeit, der zeitlichen Bewegung, des Raumes und der Quantität oder der Unendlichkeit ansehen. Ich habe dort auch angemerkt, dass dies alles spezielle mathematische Muster sind, Muster von Anzahlen, räumliche Muster, zeitliche Muster, Bewegungsmuster und Muster von Mengen. Somit ist allen zum einen gemeinsam, dass sie Beziehungsmuster darstellen, die man mittels des mathematischen Denkens erfassen und beschreiben kann, und zum anderen, dass im Zuge ihrer mathematischen Erfassung und Beschreibung auch die dazugehörige Unendlichkeitsproblematik mathematisch erfasst und beschrieben werden muss. Die Tatsache, dass die Unendlichkeitsproblematik nahezu jedem mathematischen Betrachtungsgegenstand inhärent ist, führt natürlich zu der Versuchung die Mathematik als die Wissenschaft des Unendlichen zu charakterisieren, wie dies auch Kanitscheider in [87] vorschlägt:

Alle Mathematik zentriert sich um den Begriff des Unendlichen. Sie umgreift zwar auch das Endliche, aber als einen kaum erwähnenswerten Sonderfall. Damit setzt sich diese Disziplin deutlich von ihren Nachbardisziplinen ab, keine von ihnen handelt von einer unendlichen Zahl von Systemen mit einer eventuellen Ausnahme - der Kosmologie.

Somit ist die mathematisch-philosophische Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft des Unendlichen ansieht, wohl der schärfste Konkurrent der von mir hier vertretenen Grundposition, da die dazugehörige Unendlichkeitsproblematik auch allen anderen Grundpositionen inhärent ist, und es muss somit geklärt werden, ob nicht doch diese beiden Grundpositionen miteinander vereinbar sind.
Die mathematische Fassung des Unendlichen stellte nicht nur die Mathematik, sondern auch die Philosophie der Mathematik vor grundlegende Probleme (u.a. Körner in [97]). Ihre neuere historische Entwicklung lässt sich dabei folgender-

maßen zusammenfassen: Zunächst versuchte man das Unendliche mathematisch-philosophisch zu fassen, indem man zwischen potentiell und aktual unendlichen Mengen unterschied. Potentiell unendliche Mengen sind Mengen, die unbegrenzt in dem Sinne sind, dass jede beschränkte Teilmenge dieser unbegrenzten Menge endlich viele Elemente enthält. Als Beispiele denke man sich die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen oder die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Und aktual unendliche Mengen sind Mengen, die unbegrenzt in dem Sinne sind, dass jede beschränkte Teilmenge dieser unbegrenzten Menge (mindestens) potentiell unendlich viele Elemente enthalten kann. Als Beispiele denke man sich die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Vor allem intuitionistische und formalistische Positionen im Rahmen der Philosphie der Mathematik unterschieden sich grundlegend in diesem Punkt. Während intuitionistische Positionen lediglich die potentielle Unendlichkeit zuließen, gingen formalistische Positionen darüber hinaus, indem sie auch die aktuale Unendlichkeit in ihre Theoriebildung miteinbezogen. Dieser Streit äußerte sich vor allem am Satz vom ausgeschlossenen Dritten, da Intuitionisten dessen Gültigkeit im Falle von aktual unendlichen Mengen ablehnten, während Formalisten sie akzeptierten. Dieser strittige Punkt im Falle des mathematisch-philosophischen Unendlichkeitsbegriffs ist in der Philosophie der Mathematik letztendlich nie wirklich beigelegt worden, was vor allem daher rührt, dass die Mathematik eine ähnliche Variante der Unterscheidung zwischen potentiell und aktual unendlichen Mengen sehr erfolgreich bis heute im Zuge der mathematischen Theoriebildung einsetzt, ohne dass die intuitionistischen Bedenken dagegen ausgeräumt worden wären, nämlich die Unterscheidung zwischen abzählbar und überabzählbar unendlichen Mengen. Abzählbar unendliche Mengen sind Mengen, die unbegrenzt in dem Sinne sind, dass man ihre Elemente als eine (abzählbare) Folge schreiben kann, deren Glieder alle voneinander verschieden sind. Als Beispiele denke man sich die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Dagegen sind überabzählbar unendliche Mengen diejenigen Mengen, die unbegrenzt in dem Sinne sind, dass sie nicht in dieser Weise abgezählt werden können, d.h., dass jede begrenzte Teilmenge mehr als abzählbar viele Elemente aufweist. Als Beispiele denke man sich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen oder die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Somit besteht der Unterschied zwischen diesen beiden mathematisch-philosophischen Unendlichkeitsbegriffen lediglich darin, wo man die Trennlinie innerhalb der Unendlichkeit zieht. Im Falle der Unterscheidung zwischen potentiell und aktual unendlichen Mengen wird diese Trennlinie im Grunde zwischen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ gezogen und im Falle der Unterscheidung zwischen abzählbar und überabzählbar unendlichen Mengen wird diese Trennlinie zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gezogen. Diese Unterscheidung kann natürlich nicht die intuitionistischen Bedenken gegen einen aktualen Unendlichkeitsbegriff aufheben, da sie auch für einen Begriff der überabzählbaren Unendlichkeit bestehen bleiben. Nichtsdestotrotz erwies sich die Unterscheidung zwischen abzählbarer und überabzählbarer Unendlichkeit im Zuge der mathematischen Theoriebildung als äußert geeignet und fruchtbar, die innerhalb bestimmter mathematischer Betrachtungsgegenstände erfasste Unendlichkeit zu formalisieren, ohne dass die Mathematiker dabei ständig auf irgendwelche Widersprüche innerhalb ihrer Theoriebildungen gestoßen wären, was auch der Grund dafür ist, dass sich die meisten Mathematiker in ihrer alltäglichen Arbeit darüber keine Gedanken mehr machen. In Anbetracht des mathematischen Denkprozesses, welcher sich im Zuge der vorangegangenen Theoriebildung evolutionär und repräsentational erklären ließ (vgl. Abbildung 3.4), wird die Unendlichkeitsproblematik, die vielen mathematischen Betrachtungsgegenständen inhärent ist, nicht sofort deutlich, da sie sich zum einen aus der Tatsache ergibt, dass im Zuge eines mathematischen Denkrozesses immer wieder neue Beziehungsebenen eines zu Grunde liegenden Betrachtungsgegenstandes erfasst und formalisiert werden können, und sich zum anderen aus der Komplexität des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes ergibt, welcher prinzipiell zu unendlich vielen mathematischen Objekten bzw. Beziehungsrepräsentationen führen kann, wie das auch im Falle der Arithmetik ersichtlich wird, wenn man sich die Axiomierung der natürlichen Zahlen (vgl. Anhang, (A.1)-(A.9)) nochmals vergegenwärtigt. Alleine schon Axiom (A.6) stellt dabei sicher, dass die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ eine abzählbar unendliche Menge ist. Somit ist - intuitiv gesehen - allgemein bei einer mathematischen Erfassung und Beschreibung auch nicht zu erwarten, dass zum einen der dazugehörige mathematische Denkprozess jemals vollständig abgeschlossen sein könnte, d.h. alle auf der axiomatischen Basis möglichen Sätze erfasst werden können, und zum anderen, dass auch jeder Satz, den man auf dieser axiomatischen Grundlage bilden kann, entweder beweisbar oder widerlegbar ist, d.h. es ist nicht sicher, ob jeder Satz zum Beispiel innerhalb der Arithmetik letztendlich entscheidbar ist. Die zweite Unsicherheit wurde im Zuge des formalistischen Programms von Kurt Gödel bestätigt, welcher im Falle eines formalen Systems, das nur die elementare Arithmetik formalisiert, bewiesen hat, dass diese Formalisierung nicht vollständig in dem Sinne ist, dass jeder Satz letztendlich auch entscheidbar ist (Körner in [97][S. 108f]).[11] Auch im Falle des allgemeinen Anspruches auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit eines solchen mathematischen Denkprozesses ist daher zumindest der Anspruch auf Widerspruchsfreiheit letztendlich schwer zu gewährleisten. Man wird damit rechnen müssen, eventuell auf Widersprüche zu stoßen und diese dann unter anderem mit Hilfe einer Erweiterung oder Einschränkung der axiomatischen Grundlage zu beheben.

Zusammenfassend kann man also festhalten, dass sich auch bei dem mathematischen Denkprozess im Rahmen der vorliegenden Theoriebildung die sich durch die Philosophie der Mathematik ziehende grundlegende Unendlichkeitsproblematik einstellt und dabei vor allem die Begriffe der aktualen und der überabzählbaren Unendlichkeit intuitiv problematisch sind, obwohl sich vor allem letzterer zusammen mit dem Begriff der abzählbaren Unendlichkeit innerhalb vieler mathematischer Theoriebildungen als geeignete Fassung und Formalisierung der Unendlichkeit erwiesen hat.[12] Diese Fassung und Formalisierung des Unendlichen kann daher auch ganz pragmatisch solange eingesetzt werden, bis sich innerhalb der entsprechenden Theoriebildung bzw. im Zuge des dazugehörigen mathematischen Denkprozesses Widersprüche ergeben, die sich zum einen auf sie zurückführen lassen und zum anderen nicht durch eine Erweiterung oder auch Einschränkung der diesbezüglichen axiomatischen Grundlage zu kompensieren sind. Die gesamte Unendlichkeitsproblematik scheint sich dabei vor allem um die genaue Erfassung und Formalisierung der Unendlichkeit in einem entsprechenden Betrachtungsgegenstand zu drehen, d.h. um die Frage, wie erfasst und vor allem formalisiert man Beziehungen innerhalb eines Betrachtungsgegenstandes

[11]Eine konzise und detaillierte Darstellung der Entwicklung der Logik bis zu Gödels Resultaten und ihren Stellenwert sowie ihre Konsequenzen für das formalistische Programm findet sich speziell bei Dawson in [37][Kap. III und IV].

[12]Man denke nur an die Analysis (vgl.u.a. Forster in [60], [61]; Heuser in [75], [76]).

mit unendlich vielen mathematischen Objekten. Evolutionär gesehen ist dies für den mathematischen Denkprozess als Nebenprodukt des sozialen Denkprozesses schon alleine deswegen ein Problem, da man es im Falle des sozialen Denkprozesses nur mit einer stets endlichen Anzahl von Individuen zu tun hat und nicht mit unendlich vielen. Die Möglichkeit eine Menge mit unendlich vielen Elementen zu erhalten, ergibt sich erst durch die theoretische Unbeschränkheit des mathematischen Denkprozesses, welcher immer wieder neue Beziehungsrepräsentationen auf vorausgehenden Beziehungsrepräsentationen bilden kann und dabei insbesondere auch bereits erfasste und formalisierte mathematische Muster, die eine abzählbare oder auch überabzählbare Menge von mathematischen Objekten enthalten, als Betrachtungsgegenständ wählen kann.[13] Somit kann man mit Hilfe des mathematischen Denkprozesses zwar erklären, warum es überhaupt zur Unendlichkeitsproblematik kommen muss, aber man kann diese mit ihm nicht lösen, da eine solche Lösung nämlich abhängig ist von der Akzeptanz der mathematischen Gemeinschaft. Damit ist die Unendlichkeitsproblematik ein gutes Beispiel dafür, dass es in der Mathematik auch Meinungsverschiedenheiten gibt, die nicht so schnell aus dem Weg geräumt werden können, wie Heintz dies in [73] vermutet (vgl. auch Unterabschnitt 3.1.3). Für Intuitionisten ist im Gegensatz zu Formalisten die mathematische Fassung und Formalisierung des aktual bzw. überabzählbar Unendlichen nicht vertrauenswürdig genug, um damit im Zuge einer mathematischen Theorebildung zu arbeiten. Daher trachteten die Intuitionisten auch danach, eine (Meta-) Mathematik zu entwickeln, die ohne eine solche Fassung des Unendlichkeitsbegriffes auskommt (Brouwer in [12], [13], [14], [15]), und die Formalisten strebten nach einer Metamathematik, die eine Mathematik mit einem solchen Unendlichkeitsbegriff absichern sollte (Hilbert in [78][Neubegründung der Mathematik]). Aus meiner evolutionären und repräsentationalen Sicht ist somit die Unendlichkeitsproblematik letztendlich ein Problem der Vertrauenswürdigkeit einer mathematischen Kommunikation über die mathematische Fassung und Formalisierung des Unendlichen innerhalb mathematischer Betrachtungsgegenstände und stellt nicht das zentrale Problem bei der Erklärung von Mathematik bzw.

[13]In einem solchen Fall, wo der mathematische Denkprozess als Betrachtungsgegenstand ein oder mehrere mathematische Muster wählt, versucht er das Muster dieser mathematischen Muster zu erfassen und zu formalisieren. Also Metamathematik zu betreiben!

des mathematischen Denkprozesses dar, auch wenn diese Problematik nahezu allen mathematischen Betrachtungegegenständen inhärent ist. M.a.W.: Die Unendlichkeitsproblematik stellt sich zwar oftmals beim mathematischen Denken ein, aber sie charakterisiert das mathematische Denken nicht alleinig, weswegen sie auch als alleiniges Charakteristikum für Mathematik bzw. mathematisches Denken äußerst problematisch ist. Nicht problematisch in diesem Sinne ist dagegen die Tatsache, dass es sich bei allen mathematischen Theorien um formalisierte Beziehungen handelt, die die Zusammenhänge innerhalb eines dazugehörigen Betrachtungsgegestandes repräsentieren. Man kann im Grunde somit festhalten, dass sich die beiden Grundpositionen, Mathematik als Wissenschaft der Muster und Mathematik als Wissenschaft des Unendlichen, letztendlich nicht gegenseitig ausschließen, da fast jedem mathematischen Beziehungsmuster die Unendlichkeitsproblematik inhärent ist, diese sich aber nicht um das mathematische Denken, sondern stets um eine mathematisch akzeptable Erfassung und Formalisierung des Unendlichen dreht, und zwar weitestgehend unabhängig davon, welcher mathematische Betrachtungsgegenstand vorliegt. Das einzig wirkliche Problem, das bei beiden Grundpositionen gleichermaßen auftritt, ist die Frage nach dem ontologischen Status mathematischer Objekte. Kanitscheider vertritt in diesem Zusammenhang in [87] einen ontologischen Platonismus, der den ontologischen Status aller theoretischen Objekte als gleichwertig ansieht und bei dem die mathematischen Objekte eine in der Natur verschränkte Existenzform besitzen, welche mit seinem naturalistischen Ansatz in der Philosophie der Mathematik kompatibel ist. Einer der Hauptgründe für einen solchen platonischen Rückzug innerhalb eines naturalistischen Ansatzes in der Philosophie der Mathematik besteht in der Erklärungslücke, die sich zwischen mathematischen Objekten und den dazugehörigen mathematischen Theorien auftut. Auch Kanitscheider kommt in [87] im Zuge seiner Ausführungen auf dieses Problem zu sprechen:

Dennoch bleibt die Schwierigkeit bestehen, dass niemand den kausalen Weg von den mathematischen Objekten zu den fertigen Theorien wirklich rekonstruieren kann. Auf irgendeine Weise müssten aber doch die abstrakten Entitäten mit den neuronalen Systemen, die sie denken, verbunden werden.

Und genau dies habe ich im Zuge meiner evolutionären und repräsentationalen

Theorieblidung versucht und eine evolutionär hergeleitete, mögliche mathematische Repräsentationstheorie erhalten, welche den mathematischen Objekten den ontologischen Status von Beziehungsrepräsentationen zuschreibt bzw. diese als Beziehungsrepräsentationen im (menschlichen) Gehirn identifiziert. Überdies gelingt auch über den repräsentational eingeordneten mathematischen Denkprozess (vgl. Unterabschnitt 3.1.3) repräsentational erklären zu können, nicht nur wie es zu den mathematischen Objekten kommt, sondern auch, wie diese mit den dazugehörigen mathematischen Theorien zusammenhängen können. Somit ist es auf der Basis meiner Theoriebildung möglich, einen repräsentationalen Pfad der mathematischen Beziehungsrepräsentationen, ausgehend von Beziehungen in der Umwelt, welche über die Wahrnehmung in das menschlichen Gehirn gelangen, in diesem als Beziehungsrepräsentationen erfasst und verarbeitet werden und zu formalisierten Beziehungsrepräsentationen - den mathematischen Objekten! - führen, bis hin zu den dazugehörigen mathematischen Theorien, anzugeben (vgl. auch Unterabschnitt 3.2.2). Daher gibt es in Anbetracht meiner Ausführungen jetzt auch keinen Grund mehr, sich im Zuge eines naturalistischen Ansatzes im Rahmen der Philosophie der Mathematik auf einen irgendwie gearteten ontologischen Platonismus zurückziehen zu müssen. Denn auch der Erfolg der Mathematik in der physikalischen Realität lässt sich, wie im Folgenden noch genauer dargelegt wird (vgl. Unterabschnitt 3.2.4), auf dieser Basis hinreichend genau erklären.

3.2.2 Was ist das mathematische Denken?

Aufbauend auf der mathematisch-philosophischen Grundposition, die die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, wurde in den Unterabschnitten 1.1.1-2 eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man sich den mathematischen Denkprozess bzw. das mathematische Denken vorstellen kann, welche dann in einem Flussdiagramm in Abbildung 1.1 festgehalten worden ist. Anschließend wurde ein Zusammenhang zwischen diesem mathematischen Denkprozess und dem Beziehungsdenken innerhalb von sozialen Beziehungsmuster - die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" - aufgezeigt (vgl. Unterabschnitt 1.1.3), welcher dann letztendlich zu einer vorläufigen Arbeitshypothese über die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens führte, welche diese im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz verortete (vgl. Unterabschnitt 1.1.5). Zum Zwecke der Untersuchung dieses evolutionären Umfeldes der sozialen Intelligenz wurden dann die evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundlagen dieser Untersuchung dargelegt (vgl. Abschnitt 1.2), auf welchen dann die soziale Intelligenz charakterisiert wurde (vgl. Abschnitt 2.1) und ihr evolutionäres Umfeld aufgedeckt werden konnte (vgl. Abschnitt 2.2 und Unterabschnitt 3.1.1, insb. Abbildung 3.1). Aus diesem evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz ergab sich dann die Möglichkeit, das soziale Denken (vgl. Definition 3.1) und den sozialen Denkprozess (vgl. Abbildung 3.2) innerhalb von sozialen Beziehungsmustern zu charakterisieren und festzuhalten. Damit war man dann in der Lage, die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" aus Unterabschnitt 1.1.3 evolutionär und repräsentational erklären zu können, was dann auch zum einen die Möglichkeit eröffnete, den mathematischen Denkprozess bzw. das mathematische Denken evolutionär als Nebenprodukt dieses sozialen Denkprozesses erklären (vgl. Unterschnitt 3.1.2) und zum anderen diesen mathematischen Denkprozess auch repräsentational einordnen zu können (vgl. Unterabschnitt 3.1.3), was letztendlich zu dem in Abbildung 3.4 festgehaltenen Flussdiagramm über den mathematischen Denkprozess führte und damit einen repräsentationalen Pfad von den (unmittelbaren) Beziehungen innerhalb eines mathematischen Betrachtungsgegenstandes zu den mathematischen Objekten als formalisierte Beziehungsrepräsentationen und weiter zu den darauf aufbauenden mathematischen Theorien als formalisierte Muster von Beziehungsrepräsentationen aufdeckte.

Dabei spielen diese als formalisierte Muster von Beziehungsrepräsentationen charakterisierte mathematische Theorien nicht die Rolle einer Metamathematik, welche sozusagen das Muster der mathematischen Muster erfassen und formalisieren soll, also als Betrachtungsgegenstand eines mathematischen Denkprozesses ein oder mehrere bereits erfasste und formalisierte mathematische Muster aufweist. Metamathematik im logizistischen, formalistischen und intuitionistischen Sinne (u.a. Körner in [97]) ist selbst mathematisches Denken, welches zu einer mathematischen Theorie führt, die ein formalisiertes Muster von Beziehungsrepräsentationen darstellt. Dies ergibt sich alleine schon aus den drei dazugehörigen Forschungsprogrammen:

1. Das logizistische Programm bestand seit Gottlob Frege's "Die Grundlagen der Arithmetik" (u.a. Thiel in [155]) im Grunde darin, die gesamte Mathematik, vor allem die Arithmetik, letztendlich auf die Logik zurückführen zu können und zwar mit dem klar formulierten Ziel, einen Beweis vorzulegen, dass zum einen die Begriffe der Mathematik auf einer sehr kleinen Anzahl logischer Begriffe basieren und zum anderen die Sätze der Mathematik von einer sehr kleinen Anzahl logischer Prinzipien abgeleitet werden können (Körner in [97][S. 44f]). Dabei setzt sich jedes logizistische System aus Postulaten und Schlussregeln der Logik der Wahrheitsfunktionen, der Klassenlogik und der Quantorenlogik zusammen (u.a. Quine in [129]). Eines der Hauptprobleme, auf die die Logiker im Zuge der Umsetzung ihres Programms stießen, war die Tatsache, dass nicht alle Begriffe und Prinzipien, welche ein widerspruchsfreies logizistisches System fundieren, auch logischen Charakter haben. Es stellte sich insbesondere im Falle der Klassenlogik heraus, dass um die Widerspruchsfreiheit der Klassenlogik zu gewährleisten, auch nicht-logische Voraussetzungen getroffen werden mussten, was Körner in [97][S. 53, Z. 28-37] zu dem folgenden Schluss führte:

Das Programm des Logizismus will die Mathematik aus logischen Prinzipien deduzieren, und nicht nur aus Prinzipien, von denen manche logisch und andere nicht logisch sind. Wenn die Prämissen nicht als logisch ausgewiesen werden können, ist das Ziel nicht erreicht. Man muß natürlich eine deduktive Technik bewundern, die die gesamte Arithmetik und mehr mittels formalisierter Schlußregeln aus einer sehr beschränkten Anzahl von Postulaten deduziert. Wenn aber die besagte kleine Menge nicht aus entweder offensichtlich oder beweisbar logischen Postulaten besteht, dann zeigt sie nicht die Wahrheit des Logizismus.

Jetzt wird auch deutlich, in welchem Verhältnis der Logizismus zu dem mathematischen Denkprozess steht. Innerhalb meiner Theoriebildung ist es so, dass jedem mathematischen Denkprozess ein Betrachtungsgegenstand zu Grunde liegt. Auf dieser Basis führt die Hintereinanderausführung von intuitiv- und formal-mathematischen Denken zu der gewünschten mathematischen Theoriebildung. Die formale Grundlage - die Axiomierung - dieser mathematischen Theoriebildung wird dabei vom synthetisch-formal-mathematischen Denken im ersten Schritt des mathematischen Denkprozesses vorgenommen und sie stellt, wie ich bereits erwähnt habe (vgl. Unterabschnitt 1.1.3, Fussnote 12), keine unverrückbare Grundlage dar. Und genau an dieser Stelle setzen die Logiker an: sie möchten die Axiomierung einer mathematischen Theorie, insbesondere der Arithmetik, auf eine logische Axiomierung zurückführen, so dass sie im Idealfall eine logische Axiomierungen aller mathematischen Theorien vorlegen können. Bertrand Russell formulierte dieses Verhältnis zwischen Logik und Mathematik in [102][S. 217, Z. 9-10] wiefolgt:

Die Logik ist die Jugend der Mathematik und die Mathematik ist das Mannesalter der Logik.

Somit sollte die Logik nach den Vorstellungen der Logizisten die axiomatische Grundlage einer jeden mathematischen Theorie bilden. Ihr Betrachtungsgegenstand war demnach jede bekannte mathematische Axiomierung und ihre Aufgabe bestand darin, das Muster der Axiomierung der mathematischen Muster zu erfassen und zu formalisieren, also auf dieser Grundlage mathematisch zu denken. Dies versuchte sie aus ihrer philosophischen Tradition, als Begriffs-, Urteils- und Schlusslehre heraus, zu bewerkstelligen, was ihr allerdings misslang (u.a. Körner in [97][Kap. II, III]; Dawson in [37][Kap. III]).
2. Das formalistische Programm, das auf David Hilbert (Hilbert in [78][insb. S. 34, Z. 14 - S. 36, Z. 20] zurückgeht und welches zum Ziel hatte, die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik zu beweisen, fasst Körner in [97][S. 90, Z. 34 - S. 91, Z. 2] in den folgenden drei Punkten zusammen:

1. *mit größtmöglicher Klarheit zu definieren, was in der Mathematik mit finiten, im Gegensatz zu nicht-finiten Methoden gemeint ist;*

2. *die klassische Arithmetik soweit wie möglich zu rekonstruieren als ein klar abgegrenztes konkretes Objekt, das in der Wahrnehmung gegeben ist oder in ihr verwirklicht werden kann; und*

3. *nachzuweisen, daß dieses Objekt eine Eigenschaft besitzt, welche die Widerspruchsfreiheit der klassischen Arithmetik eindeutig gewährleistet.*

Offensichtlich beinhaltet der erste Punkt die Unendlichkeitsproblematik, welche bereits in Unterabschnitt 3.2.1 dargelegt wurde. Der zweite Punkt beschäftigt sich, aufbauend auf einer mathematischen Klärung des Unendlichkeitsbegriffes, welche die Basis einer Konkretisierung mathematisch zulässiger finiter und nicht-finiter Methoden bildet, mit der Forderung nach einer vollständigen Formalisierung der klassischen Arithmetik, in welcher zum einen jeder gültige Satz auf der Basis der zu Grunde gelegten Axiomierung abgeleitet werden kann und zum anderen jeder Satz, der auf der axiomatischen Basis gebildet werden kann, entweder beweisbar oder widerlegbar sein muss. Schießlich wird im dritten Punkt noch die Widerspruchsfreiheit eines solchen formalen Systems gefordert, welche man innerhalb eines formalen System sicherstellen kann, indem man sich auf finite Methoden beschränkt und somit die Unendlichkeitsproblematik zu umgehen versucht, indem man auf der Ebene der Metamathematik lediglich finite Methoden zulässt. Somit erhebt das formalistische Programm den Anspruch auf eine vollständige, widerspruchsfreie und mittels finiter Methoden erreichte Formalisierung der Arithmetik, welche letztendlich das Muster aller mathematischen Muster aufdecken sollte. Da die Logik zwar darin gescheitert ist, die Arithmetik auf der Basis rein logischer Axiome widerspruchsfrei zu fundieren (s. oben), aber mittels einer nicht-logischen Erweiterung dieser axiomatischen Grundlage doch in die Lage versetzt wurde, die Arithmetik zu fundieren (u.a. Körner in [97]), stellte die Logik aus Sicht der Formalisten ein geeignetes Mittel zur Verwirklichung ihres formalistischen Programms dar, da sie bereits ein widerspruchsfreies formales System zur Verfügung stellte, mit welchem man die Arbeit beginnen konnte. Streng genommen galt es "nur" noch die Vollständigkeit eines solchen Systems mittels finiter Methoden zu beweisen. Und genau das Gegenteil gelang Gödel mit seinem Unvollständigkeitsbeweis (Dawson in [37][Kap. IV, S. 53ff]). Dieses Resultat beendete letztendlich das von Hilbert begründete formalistische Programm, da nach Gödels Unvollständigkeitsbeweis klar war, dass ein formales, widerspruchsfreies, mittels finiter Methoden erstelltes System, welches die Arithmetik formalisiert, stets unvollständig ist. Hilbert gelang es zwar die Vollständigkeit zu retten, indem er nicht-finite Methoden zum Einsatz brachte (Dawson in [37][S. 62f]), was aber nichts daran änderte, dass das ursprüngliche formalistische Programm aufgegeben werden musste, da mit dem Einsatz nicht-finiter Methoden die gewünschte Widerspruchsfreiheit eines die Arithmetik formalisierenden Systems nicht gewährleistet werden konnte. Somit ist natürlich auch die Möglichkeit verlorengegangen, einen Formalismus zu finden, der die gesamte Mathematik

vollständig, widerspruchsfrei und mittels finiter Methoden formalisiert und damit auch die Idee einer Metamathematik, welche die Gesamtheit der Mathematik unter Berücksichtigung dieser Ansprüche (Vollständigkeit, Widerspruchsfreiheit, finite Methodik) erfasst und formalisiert. Es gelang den Formalisten also nicht, mittels des mathematischen Denkens das Muster der mathematischen Muster zu erfassen und zu formalisieren.
3. Das intuitionistische Programm, welches auf L. Brouwer (u.a. Brouwer in [15]) zurückgeht, fasst Körner in [97][S. 149, Z. 4-10] wiefolgt zusammen:

Es ist das Programm der Intuitionisten, intuitionistische Mathematik zu praktizieren, d.h. mathematische Objekte zu schaffen und zu konstruieren, da nur konstruierte Objekte mathematische Existenz haben. Es ist kein Teil dieses Programms, die Legitimität der Konstruktionen durch Logik oder Formalisierung nachzuweisen; denn sie sind in sich selbst legitimiert; sie bestätigen sich selbst.

Der Intuitionismus umfasst also die Aufgabe, die Mathematik durch eine intuitive Mathematik neu zu begründen.[14] Brouwer selbst trennte die Intervention des Intuitionismus in [15] wiefolgt in zwei Akte auf:

FIRST ACT OF INTUITIONISM completely separates mathematics from mathematical language, in particular from the phenomena of language which are described by theoretical logic, and recognizes that intuitionist mathematics is an essentially languageless activity of the mind having its origin in the perception of a move of time, i.e. of the falling apart of a life moment into two distinct things, one of which gives way to the other, but is retained by memory. If the two-ity thus born is divested of all quality, there remains the empty form of the common substratum of all two-ities. It is this common substratum, this empty form, which is the basic intuition of mathematics.

SECOND ACT OF INTUITIONISM which recognizes the possibility of generating new mathematical entities: firstly in the form of infinitely proceeding sequences $p_1, p_2, \ldots$, *whose terms are chosen more or less freely from mathematical entities previously acquired; in such a way that the freedom of choice existing perhaps for*

[14]Eine solche Neubegründung der Mathematik, also eine intuitive Mathematik, formulierte Brouwer in [12], [13] und [14].

the first element p_1 may be subjected to a lasting restriction at some following p_ν, and again and again to sharper lasting restrictions or even abolition at further subsequent p_ν's, while all these restricting interventions, as well as the choices of the p_ν's themselves, at any stage may be made to depend on possible future mathematical experiences of the creating subject; secondly in the form of mathematical species, i.e. properties supposable for mathematical entities previously acquired, and satisfying the condition that, if they hold for a certain mathematical entity, they also hold for all mathematical entities which have been defined to be equal to it, relations of equality having to be symmetric, reflexive and transitive; mathematical entities previously acquired for which the property holds are called elements of the species.

Der erste Akt des Intuitionismus bestand also darin, zunächst einmal die Mathematik von der mathematischen Sprache zu trennen und festzustellen, dass intuitive Mathematik eine sprachlose Geistestätigkeit ist, welche ihren Ursprung in der Wahrnehmung der zeitlichen Bewegung hat, die jede Qualität in ein Voher und Nachher trennt, wobei das Voher im Gedächnis festgehalten wird. Diese Zweiheit aller Qualitäten bringt dann die leere Form des gemeinsamen Substrats aller Zweiheiten ans Licht, welche die grundlegende Intuition der Mathematik darstellt.

Der zweite Akt des Intuitionismus bestand im Kern in der Erkennung der Möglichkeit, neue mathematische Entitäten zu erzeugen, zum einen in der Form von unendlichen konstruierbaren Folgen von bereits vorhandenen mathematischen Entitäten und zum anderen in der Form von mathematischen Spezies, insbesondere von Eigenschaften, die von bereits vorhandenen mathematischen Entitäten angenommen werden können und die Bedingung erfüllen, dass sie, wenn sie für eine bestimmte mathematische Entität gelten, auch für alle gleich definierten mathematischen Entitäten gelten, wobei man mathematische Entitäten, die diese Bedingung erfüllen, als Elemente einer Spezies bezeichnet.

Das in Anbetracht meiner Theoriebildung Besondere am Intuitionismus liegt in seinem ersten Akt. Dort wird die Mathematik in zwei Bereiche getrennt, nämlich in einen intuitiven und einen sprachlichen Teil. Zwar wird der intuitive Teil auf die leere Form des gemeinsamen Substrats aller Zweiheiten zurückgeführt, von welchem erst einmal gar nicht ersichtlich ist, was es überhaupt sein soll, aber das Entscheidende ist die Erkenntnis, dass es sich bei der Quelle der mathematischen Intuition nicht um etwas Sprachliches handelt. Dies hat sich auch im Zuge meiner Ausführungen herausgestellt. Das intuitiv-mathematische Denken erfasst lediglich die Beziehungen und generiert diesbezügliche Beziehungsrepräsentationen, ohne sie gleich auch symbolisch-sprachlich zu formalisieren. Der Intuitionismus nach Brouwer versuchte dann auf seiner neuen intuitiven Grundlage, die Mathematik neu zu begründen, indem generell insbesondere auf den Begriff des aktual bzw. überabzählbar Unendlichen verzichtet wurde. Der Intuitionismus versuchte somit die mathematischen Muster zu erfassen und zu formalisieren, ohne dabei die aus seiner Sicht kontra-intuitive aktuale Unendlichkeit miteinzubeziehen. Aber auch dieser Versuch wurde letztendlich aufgegeben, da sich die mathematische Fassung des Unendlichen in Form der Trennung zwischen abzählbarer und überabzählbarer Unendlichkeit als für die Mathematik überaus fruchtbar erwies und sich nicht die gefürchteten Widersprüchlichkeiten einstellten.

Insgesamt kann man festhalten, dass der hier charakterisierte mathematische Denkprozess auch das mathematische Denken im Zuge des Logizismus, des Formalismus und des Intuitionismus erfasst, ohne dass die dazugehörigen (meta-) mathematischen Theoriebildungen auf ihn irgend einen speziellen Einfluss ausüben würden. Die strittigen Punkte innerhalb der (meta-) mathematischen Theoriebildungen lassen sich dabei letztendlich vorwiegend auf die Unendlichkeitsproblematik zurückführen, von welcher der mathematische Denkprozess selbst, wie bereits in vorangegangenen Unterabschnitt erklärt, erst einmal unabhängig ist, da es sich dabei um eine Frage mathematischer Konvention handelt, welche innerhalb der Gemeinschaft der Mathematiker lange Zeit höchst umstritten war und es heute auch immer noch ist.

3.2.3 Warum können Menschen überhaupt mathematisch denken?

Die Frage nach den evolutionären Ursprüngen des mathematischen Denkens wurde bisher, mit wenigen Ausnahmen (Devlin in [43], Rav in [131], [132]), im weiten Rahmen der Philosophie der Mathematik selten tangiert oder gar angesprochen.

Im Focus der Aufmerksamkeit stand bisher oftmals der Zahlensinn und die Zahlenverarbeitung im (menschlichen) Gehirn (u.a. Butterworth in [19], Dehaene in [40], Campbell in [26]), aber nicht das tatsächliche mathematische Denken. Wie in Unterabschnitt 1.1.1 bereits dargelegt, entwickelte Devlin in [43] einen evolutionären Erklärungsansatz, der das mathematische Denken auf die kognitive Fähigkeit des "offline"-Denkens zurückführt, indem er es als Nebenprodukt der Sprachfähigkeit ansieht, welche er wiederum als Nebenprodukt der kognitiven Fähigkeit des "offline"-Denkens charakterisiert. Dabei steckt zum einen Devlin in [43] den evolutionären Rahmen aber nicht genau genug ab und zum anderen vermeidet er eine genaue Charakterisierung des mathematischen Denkprozesses, was zusammmengenommen dazu führt, dass seine evolutionäre Zurückverfolgung teilweise den "roten Faden" zu verlieren scheint und insgesamt einer genaueren Prüfung seitens der evolutionären Psychologie und Soziobiologie nicht standzuhalten vermag (vgl. auch Unterabschnitt 1.1.1). Nichtsdestotrotz handelt es sich bei Devlin's Ausführungen um den bis heute genauesten, mir bekannten, evolutionären Erklärungsansatz im Rahmen einer Philosophie der Mathematik. Ein weiterer, allerdings weitaus weniger genauerer, evolutionärer Ansatz im Rahmen der Philosophie der Mathematik wurde von Yehuda Rav in [131] und [132] vorgelegt. In beiden Arbeiten geht Rav von einer zweischichtigen Struktur der Mathematik aus, welche er in [131] folgendermaßen beschreibt:

Vom erkenntnistheoretischen Standpunkt ist die Mathematik doppelschichtig strukturiert. Die eine Schicht besteht aus den inhaltlichen, thematischen Komponenten, und die andere aus dem logischen Gerüst, auf welchem sich die inhaltliche Schicht stützt. So gehört, z.B. der Begriff der Primzahl zur inhaltlichen Schicht, während der Beweis des Satzes, daß es keine größte Primzahl gibt, mittels des Apparats der logischen Schicht erwiesen wird.

Obwohl das mathematische Denken auch im Zuge meiner Argumentation hier doppelschichtig charakterisiert wurde (vgl. Unterabschnitt 1.1.2, insb. Abbildung 1.1), hat sie mit Rav's Sichtweise wenig gemein. Rav's doppelschichtige Struktur bezieht sich allein auf die bereits formalisierten mathematischen Zusammenhänge und nicht auf die notwendigerweise vorausgehende intuitive Erfassung dieser Zusammenhänge. Er ignoriert somit das intuitiv-mathematische Denken komplett und konzentriert sich auf das formal-mathematische Denken. Ein weiteres Problem bei Rav's Ansatz ist die Tatsache, dass er davon ausgeht, dass die inhaltliche, thematische Schicht ausschließlich von einem logischen Gerüst getragen wird. Dies ist, wie im vorangegangenen Unterabschnitt offensichtlich wurde, eine zu kurz greifende Anschauung, welche die grundlegenden nicht-logischen Aspekte des mathematischen Denkens unterschlägt, welche sich nicht nur auf einer sich über dem logischen Gerüst befindlichen thematischen Schicht befinden, sondern vielmehr dem intuitiv- und dem formal-mathematischen Denken bereits inhärent sind. Daher ist seine Schlussfolgerung, die er in [131] aus dieser doppelschichtigen Struktur der Mathematik zieht, auch keineswegs zwingend:

Es ist klar, daß die inhaltliche Komponente der Mathematik von kulturellen, sozialen und oft zufälligen Faktoren abhängt; dagegen hat die logische Komponente tiefliegende biologische Wurzeln.

Bei dieser Schlussfolgerung ist vor allem verwunderlich, dass Rav anscheinend zwischen kultureller und natürlicher Verursachung unterscheidet und dies, obwohl er aus der Perspektive einer evolutionären Erkenntnistheorie heraus argumentiert, wobei er sich u.a. ausdrücklich auf die von Gerhard Vollmer in [169] dargelegte evolutionäre Erkenntnistheorie stützt. Es leuchtet hier bei Rav eine Natur-Kultur-Dichotomie durch, die innerhalb eines evolutionären Ansatzes nicht haltbar ist, da innerhalb eines solchen Kultur stets als Natur mit anderen "Mitteln" anzusehen ist und welche sich auch nicht aus Vollmer's Ausführungen in [169] in dieser strikten Form ergibt. Vollmer unterscheidet zwar in [169][S. 84f] zwischen einer biologischen, sozialen und kulturellen Evolution des Menschen, wobei er allerdings dieser Unterscheidung die folgende Einschränkung vorausschickt (Vollmer in [169][S. 84, Z. 12-16]):

Von Mutation und Selektion oder Anpassung zu sprechen, ist wiederum erst sinnvoll bei Organismen, die sich fortpflanzen und eine gewisse Variabilität besitzen. Bei anderen Systemen können diese Begriffe zunächst nur zu Analogien dienen, oder sie müssen ganz neu definiert werden.

Da es sich im Falle des Menschen (*homo sapiens*) um einen sich fortpflanzenden Organismus handelt, der auch eine gewisse Variablität besitzt, müssen sich auch aus der Sicht der evolutionären Erkenntnistheorie all seine Charakteristika letztendlich auf biologische Wuzeln zurückführen lassen, was auch Vollmer in [169][S. 84, Z. 19-20] ausdrücklich betont:

Dabei werden jedoch die biologischen Gesetze nie ungültig, sondern nur ergänzt durch weitere Faktoren.

Daher ist es auch aus der Sicht einer evolutionären Erkenntnistheorie völlig unplausibel im Falle einer kognitiven Fähigkeit des Menschen davon auszugehen, dass sich ein Teil dieser Fähigkeit auf ausschließlich biologische und ein anderer auf ausdrücklich nur kulturelle Wurzeln zurückführen lässt. Innerhalb eines evolutionären Ansatzes hat jedes menschliche Charakteristikum biologische Wurzeln! Aber auch in seiner Charakterisierung des evolutionären Ursprungs des mathematischen Denkens greift Rav in [132] zu kurz, wenn er diesen in einer Art "logischen Denkmechanismus" verortet:

The core element, the depth structure of mathematics, incorporates cognitive mechanisms, which have evolved like other biological mechanisms, by confrontation with reality and which have become genetically fixed in the course of evolution. I shall refer to this structure as the logical-operational component of mathematics.

Diese evolutionäre Zurückführung unterschlägt genau die dem mathematischen Denken inhärenten sozialen Wurzeln, welche vor allem durch das intuitiv-mathematische Denken deutlich werden, welches Rav, wie gesagt, gänzlich vernachlässigt. Den genauen Zusammenhang zwischen diesem "logischen Denkmechanismus" und seiner inhaltlichen Komponente sieht Rav in [132] dabei wiefolgt:

Upon this scaffold grew and continues to grow the thematic component of mathematics, which consists of the specific content of mathematics. This second level is culturally determined and originated, most likely, from ritual needs.

An dieser Stelle tritt nun Rav's Natur-Kultur-Dichotomie gänzlich ans Tageslicht. Die rituellen Aspekte der Mathematik führt er auf einen kulturellen Ursprung zurück, ohne dabei auch nur zu erwähnen, dass Rituale bzw. die menschliche Ritualfähigkeit ebenfalls biologische Wurzeln besitzt (vgl. auch Unterabschnitt 2.2.8). Dass Rituale beim mathematischen Denkprozess und in der mathematischen Praxis eine wichtige Rolle spielen, ist dabei nicht der strittige Punkt! Aber diese Ritualfähigkeit hat biologische Wurzeln, welche man bei einer evolutionären Zurückverfolgung der kognitiven Fähigkeit des mathematischen Denkens mit berücksichtigen und auch offenlegen muss. Aber auch seine Sicht auf die Hauptprobleme der Philosophie der Mathematik, welche er in [131] zum einen in der Klärung des Verhältnisses zwischen Mathematik und Realität und zum anderen in der Untersuchung der Natur der mathematischen Erkenntnis sieht, greift nicht weit genug, da sie alle ontologischen Fragestellungen mit Verweis auf die Inadäquatheit eines ontologischen Platonismus ausschließt:

Diese epistemologisch-orientierte Einstellung steht dem ontologisch-gerichteten Platonismus diametral gegenüber. Sowie es sinnlos ist, die Existenz der realen Welt zu "beweisen" oder zu "widerlegen", so soll auch jede ontologisch gerichtete Fragestellung in der Philosophie der Mathematik abgewiesen werden, wie z.B. die "Existenz abstrakter Objekte", die ein Überbleibsel der Scholastik ist.

Rav macht es sich hier sehr einfach! Er versucht die Erklärungskraft eines ontologischen Platonismus, welcher diese vor allem bei der Erklärung des Verhältnisses zwischen Mathematik und Realität ins Spiel bringt (vgl. insb. Kanitscheider in [87]), dadurch zu umgehen, dass er einfach bestreitet, dass eine ontologisch orientierte Fragestellung im Rahmen der Philosophie der Mathematik sinnvoll ist. Wie sinnvoll eine solche Fragestellung sein kann, zeigt sich aber auch in meiner Theoriebildung, in welcher ein möglicher naturalistischer ontologischer Status mathematischer Objekte im Zuge eines evolutionären Ansatzes offengelegt werden konnte, mit welchem dann erklärt wurde, wie es von der Umwelt über die Wahrnehmung zu den mathematischen Objekten und den dazugehörigen mathematischen Theorien kommen kann (vgl. Abschnitt 3.1). Damit kann man einem ontologischen Platonismus argumentativ entgegentreten, da man so die Möglichkeit hat das Verhältnis, zwischen Mathematik und Realität, welches im folgenden Unterabschnitt in Anbetracht der von mir herausgearbeiteten evolutionären und repräsentationalen Zusammenhänge noch genauer dargelegt werden wird, naturalistisch erklären zu können, was dann tatsächlich ein Zurückgreifen auf einen ontologischen Platonismus im Rahmen einer Philosophie der Mathematik überflüssig macht. Eine solche ontologische Fragestellung im Zuge eines naturalistischen Ansatzes im Rahmen der Philosophie der Mathematik aber einfach zu leugnen, dass würde meines Erachtens zum einen eine unvollständige und unbefriedigende Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik zurücklassen und zum anderen den Vertretern eines ontologischen Platonismus noch argumentativ "Tür und Tor" öffnen, da sie sich dann auf die leicht zu verteidigende Position zurückziehen könnten, dass nur sie das Verhältnis zwischen Mathematik und Realität adäquat erklären können. M.a.W.: Diese letzte Bastion eines ontologischen Platonismus kann man nicht schleifen, indem man sie ignoriert, sondern man muss sich mit dem ontologischen Status mathematischer Objekte im Rahmen eines naturalistischen Ansatzes auseinandersetzen und diesen naturalistisch erklären. In der vorliegenden Arbeit habe ich dafür eine Möglichkeit aufgezeigt, indem ich das mathematische Denken auf das soziale Denken evolutionär und repräsentational zurückführen konnte. In diesem Zusammenhang wurde ich dann in die Lage versetzt, die mathematischen Objekte allesamt als Beziehungsrepräsentationen identifizieren zu können, welche letztendlich auf der Grundlage der unmittelbaren Wahrnehmungsrepräsentationen im menschlichen Gehirn generiert werden können und somit dann zu einer repräsentationalen Beziehungsstruktur führen, welche formalisiert die entsprechenden mathematischen Theoriebildungen ergeben. Der soziale Charakter, der dem mathematischen Denken inhärent ist, den Devlin in [43] als erster in seiner ganzen Breite voll erfasst und dargelegt hat, ist somit evolutionär gesehen der Schlüssel zur Klärung der Frage, warum wir Menschen mathematisch denken können. Er ermöglicht beides, einen ontologischen und einen epistemologischen, naturalistischen Erklärungsansatz, welcher als ganzes eine naturalistische Position im Rahmen der Philosophie der Mathematik ermöglicht, die nicht mehr auf einen ontologischen Platonismus zurückgreifen oder ontologische Fragestellungen gar ignorieren muss.

3.2.4 Warum passt die Mathematik so gut auf die Welt?

Wie sieht es nun aus, das Verhältnis zwischen Mathematik und Wirklichkeit bzw. Realität? Gelangt man mittels des mathematischen Denkprozesses von der Wirklichkeit zur Mathematik? Zunächst muss dabei erst einmal betont werden, dass die Begriffe "Wirklichkeit" und "Realität" aus evolutionärer Sicht sehr problematisch sind, da sozusagen jedes menschliche Individuum seine Umwelt im Gehirn letztendlich unterschiedlich repräsentiert, auch wenn diese Repräsentationen in vielen Fällen ähnlich sind. Genauso wenig wie ein Mensch jemals wissen oder fühlen kann, wie es genau ist, eine Fledermaus zu sein (Nagel in [116]), so kann auch ein Mensch niemals genau wissen oder fühlen, wie es ist, ein bestimmter anderer Mensch zu sein. Jeder repräsentiert seine Umwelt auf eine andere Art und Weise, welche mehr oder weniger ähnlich sein können, je nachdem wie ähnlich die Lebensumstände, die Lebensgeschichte, die Sozialisation, etc. sind bzw. waren. Somit erzeugt auch jeder Mensch seine eigene Wirklichkeit bzw. Realität in seinem Gehirn. Man könnte jetzt natürlich vorschlagen, dass man die Begriffe "Wirklichkeit" und "Realität" für die Schnittmenge aller subjektiven Wirklichkeiten bzw. Realitäten einsetzt und somit wieder zu einer objektiven Wirklichkeit bzw. Realität gelangen kann, aber dabei würde sofort die Frage ins Zentrum des Interesses rücken, wie sich eine solche Schnittmenge bestimmen ließe. Statt also zu fragen, wie das Verhältnis zwischen Mathematik und Wirklichkeit bzw. Realität aussieht, ist es aus evolutionärer Sicht vielleicht geschickter zu fragen, warum die Mathematik so gut auf die uns umgebende Umwelt passt? Diese Frage beinhaltet nämlich nicht sofort die höchst strittige Frage, was nun wirklich bzw. real ist, sondern sie geht dieser voraus, da sie erst einmal auf einen Wahrheitsanspruch bzgl. realer Existenzen verzichtet. Dies ist auch in Anbetracht meiner Ausführungen sinnvoll, da sich in diesen die mathematischen Objekte als Beziehungsrepräsentationen herausgestellt haben, welche nicht Subjekte oder Objekte der Umwelt repräsentieren, sondern die (möglichen) Beziehungen, die diese Subjekte oder Objekte untereinander unterhalten können. Dies gilt insbesondere wieder für fiktive Subjekte und Objekte, wie die mathematischen Objekte selbst, dann werden Beziehungen von Beziehungen repräsentiert. Doch das bedeutet nicht, dass die Mathematik nichts mit der Umwelt zu tun hat! Sie hat zwar nichts mit konkreten Subjekten oder Objekten der Umwelt zu tun, aber mit deren (möglichen) Beziehungen untereinander! Somit hat Vollmer in [170][S. 98, Z. 40 - S. 99, Z. 5] erst einmal den grundlegenden Punkt getroffen, wenn er schreibt:

Und als Strukturwissenschaft ist sie ontologisch neutral, sie sagt nichts über die Welt aus, und für die Lösung eines mathematischen Problems sind Beobachtungen und Experimente weder notwendig noch möglich. Hier tritt nun das Anwendungsproblem in einer noch schärferen Form auf: Wir sehen jetzt, daß es keine triviale

Lösung geben kann.

Die Mathematik selbst sagt zwar erst einmal nichts über die Welt aus, wenn man keinen, einer mathematischen Theorie entsprechenden, grundlegenden Beziehungszusammenhang gefunden hat bzw. diese Theorie selbst nicht auf der Basis eines solchen entstanden ist. Aber hat man eine Beziehungsgrundlage zwischen konkreten Subjekten bzw. Objekten in der Umwelt gefunden, welche auf eine bestimmte Axiomatik passt, dann kann man diese dazugehörige mathematische Theorie auf die konkrete Situation anwenden und erhält somit das dazugehörige tatsächliche und mögliche Beziehungsgeflecht, das diese konkreten Subjekte bzw. Objekte untereinander unterhalten (können). Somit müssen die Beziehungen, die die konkreten Subjekte bzw. Objekte innerhalb eines Betrachtungsgegenstandes untereinander unterhalten, letztendlich in ihrem Beziehungsmuster mit dem der dazugehörigen mathematischen Theorie übereinstimmen, d.h. die mathematischen Objekte repräsentieren diese (möglichen) Beziehungen und nicht die konkreten Subjekte oder Objekte der Umwelt selbst, wie zum Beispiel Vollmer in [170][S. 99, Z. 12-14] fordert:

Wir fordern also, daß mathematische und reale Strukturen übereinstimmen, daß mathematischer Objektbereich und realer Objektbereich strukturgleich, "isomorph" sind.

Im Gegensatz zu Vollmer sehe ich diesen Isomorphismus nicht zwischen den mathematischen Objekten und den konkreten Subjekten oder Objekten der Umwelt, sondern zwischen den mathematischen Objekten und den Beziehungen, die diese konkreten Subjekte oder Objekte untereinander unterhalten (können). Das macht meines Erachtens die ontologische Neutralität der Mathematik aus! Herkömmliche Repräsentationstheorien, welche lediglich auf konkreten Subjekten oder Objekten der Umwelt aufbauen und somit erst einmmal die Beziehungen, die diese konkreten Subjekte oder Objekte untereinander unterhalten (können), vernachlässigen, sind zur Charakterisierung des mathematischen Denkprozesses und damit zur Erklärung der Frage, warum die Mathematik so gut auf die Welt passt, nicht hinreichend geeignet. Dies wird schon an der Kernfrage deutlich, die zum Beispiel nach Andreas Bartels in [5][S. 15, Z. 2-6] jede Repräsentationstheorie erklären muss:

Die Kernfrage, die eine Theorie der Repräsentation beantworten muss, ist: Wodurch wird ein Gegenstand B zu einer Repräsentation eines anderen Gegenstandes A? Anders ausgedrückt: Was sind die hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, dass Gegenstand B Gegenstand A repräsentiert?

Meines Erachtens ist eine solche gegenständliche Fixierung im Zuge einer Repräsentationstheorie aus evolutionärer und kognitiver Sicht extrem irreführend, da doch vorausgehend erst einmal die Frage zu beantworten ist, wie das (menschliche) Gehirn seine Umwelt repräsentiert und somit zunächst einmal seine eigene subjektive Wirklichkeit bzw. Realität generiert, welche insbesondere auch erst einmal zu seiner eigenen subjektiven Wahrheit über die Welt führt. Speziell im Falle des mathematischen Denkprozesses spielt nämlich Gegenständlichkeit überhaupt keine Rolle! Das mathematische Denken ist im oben dargelegten Sinne ontologisch neutral. Das macht die Anwendung einer auf Gegenständlichkeit operierenden Repräsentationstheorie problematisch. Aber nach Bartels in [5][S. 17, Z. 27-31] sollte eine Repräsentationstheorie noch weitere Bedingungen erfüllen:

Sie sollte weiterhin erklären, weshalb Repräsentationen Information über ihre Bezugsgegenstände vermitteln. Und sie sollte schießlich die Möglichkeit des Auftretens von Fehlrepräsentationen erklären, also korrekte von inkorrekten Repräsentationen unterscheiden können.

Repräsentationstheorien sollten also erklären können, wie Repräsentationen Informationen über ihre Bezüge vermitteln können. Im Falle des menschlichen Gehirns bedeutet das, dass dargelegt werden muss, welcher kognitive Mechanismus ein solches Repräsentationssystem überhaupt ermöglicht, wie dieses funktioniert und wie seine Entwicklung im Zuge der Hominisation ausgesehen haben könnte. Dieser repräsentationalen Verarbeitungsstruktur bzw. dieser Repräsentationsfähigkeit bin ich vor allem im Unterabschnitt 2.2.3 nachgegangen und habe im weiteren Verlauf meiner Ausführungen auch ihre evolutionären und repräsentationalen Zusammenhänge zu den anderen kognitiven Fähigkeiten des menschlichen Gehirns im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz aufzudecken versucht. Die letzte Bedingung aber, die Bartels formuliert, ist aus evolutionärer Sicht überflüssig, da es sich dabei um eine normative Frage handelt. Wenn man nämlich Fehlrepräsentationen von korrekten Repräsentationen unterscheiden möchte, muss man ein Maß für die Genauigkeit einer beliebigen Repräsentation besitzen! Aus evolutionärer Sicht kann es gar kein solches Maß geben, da jedes menschliche Gehirn seine Umwelt selbst subjektiv repräsentiert, ohne dabei direkten Zugang zu Informationen zu haben, welche ihm mitteilen könnten, ob es sich bei einer bestimmten von ihm generierten Repräsentation um eine Fehlrepräsentation handeln könnte oder nicht. Lediglich die Tatsache, dass das menschliche Gehirn und der zugehörige Wahrnehmungsapparat an die soziale und ökologische Umwelt des Menschen angepasst ist, lassen aus evolutionärer Sicht vermuten, dass die vom Gehirn generierten Repräsenationen hinreichend genug die Charakteristika der sozialen und ökologischen Umwelt repräsentieren, um in ihr nicht nur überleben, sondern auch sich fortpflanzen zu können. Dies bedeutet aber, dass das menschliche Gehirn bei dem, was es von der Umwelt repräsentiert, höchst selektiv vorgeht, und man keineswegs in der Lage ist, auf dieser repräsentationalen Informationsgrundlage entscheiden zu können, ob bestimmte Repräsentationen korrekt sind oder nicht. Somit bleiben für eine evolutionäre Repräsentationstheorie eigentlich nur zwei zentrale Fragen zu beantworten:

1. Wodurch wird etwas zu einer Repräsentation von etwas anderem?
2. Weshalb und wie übertragen Repräsentationen Informationen über ihre Bezüge?

Und diese beiden Fragen wurden im Grunde bereits in den Abschnitten 2.2 und 3.1 im Falle des menschlichen Gehirns im Zuge der evolutionären und repräsentationalen Erklärung des sozialen und des mathematischen Denkprozesses beantwortet. Das soziale Denken führt dabei, ausgehend von einer Menge von Subjektrepräsentationen, zu dem dazugehörigen sozialen Beziehungsmuster und das mathematische Denken führt dabei, ausgehend von den mathematischen Objekten als Beziehungsrepräsentationen, zu den dazugehörigen mathematischen Beziehungsmustern. In beiden Fällen wird eine Beziehungsstruktur übertragen! Und dies macht den von Bartels in [5][S. 30, Z. 2-5] entwickelten und verteidigten strukturalen Begriff der Repräsentation auf diese evolutionäre Situation anwendbar:

Der strukturale Begriff der Repräsentation besagt, dass ein Gegenstand B einen *anderen Gegenstand A nur dann repräsentieren kann, wenn irgendeine Struktur des Ausgangsgegenstandes A auf den Zielgegenstand B übertragen wird.*

Hier stellt sich natürlich die Frage, was Bartels unter Gegenständen und Strukturübertragung genau versteht. Auch dies erklärt und formalisiert er in [5][S. 30f]. Sein Grundgedanke besteht dabei darin, dass A und B durch ähnliche relationale Strukturen beschieben werden können, d.h. wenn die entsprechen Relationen in A und B korrespondieren. Er fordert überdies, dass Repräsentationen nur mittels verlässlicher Abbildungen von A in B modelliert werden sollten, welche sicherstellen sollen, dass nur Tatsachen aus A in B repräsentiert werden. Weiter fordert er eine Strukturerhaltung, die jeder Tatsache in A eine entsprechende Tatsache in B zuschreibt. Dies mache dann die verlässliche Abbildung zu einem Homomorphismus.[15] Diese Forderung einer verlässlichen homomorphen Abbildung von A nach B ist in Anbetracht meiner evolutionären und repräsentationalen Ausführungen aber viel zu weit gegriffen, da das von der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur im menschlichen Gehirn erzeugte Repräsentationssystem bzgl. eines zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes weder ausschließlich durch eine verlässliche noch durch eine homomorphe Abbildung modelliert werden kann, da es tatsächliche, mögliche und vielleicht auch unmögliche Repräsentationen auf der Grundlage seines Betrachtungsgegenstandes enthalten kann. Überdies erzeugt die repräsentationale Verarbeitungsstruktur stets weitere neue Repräsentationen über einen zu Grunde liegenden Betrachtungsgegenstand, was dann die Angabe einer einzigen verlässlichen homomorphen Abbildung gänzlich unmöglich macht, weil stets neue Repräsentationen, vor allem Beziehungsrepräsentationen, dazu kommen. Für die Angabe einer solchen Abbildung wäre es notwendig, das ganze generierte Repräsentationssystem zu kennen. Dies ist im Falle eines jeden menschlichen Gehirns unmöglich! Man kann daher lediglich jeweils einen Ausschnitt eines solchen bestimmten Repräsentationssystems, welches von der repräsentationalen Verarbeitungsstruktur des menschlichen Gehirns erzeugt wurde, versuchen zu rekonstruieren, was von mir im Falle des sozialen

[15] Für die genaue Formalisierung sei auf die Ausführungen von Bartels in [5][S. 30f] verwiesen, welche hier aus Gründen des Umfangs nicht in aller mathematischen Genauigkeit vorgestellt und erklärt werden können, was für meine weitere Argumentation hier aber auch nicht notwendig ist.

und des mathematischen Denkens skizziert wurde. Daher liefert auch eine mögliche evolutionäre Repräsentationstheorie, deren grundlegende Strukturen im Zuge meiner Ausführungen in den Abschnitten 2.2 und 3.1 herausgeschält werden konnten, lediglich nur repräsentationale Nachhersagen über die entsprechenden Repräsentationssysteme. Nichtsdestotrotz konnte aus evolutionärer Perspektive eine repräsentationaler Pfad ausgehend von der Umwelt über die unmittelbaren Wahrnehmungsrepräsentationen zu den darauf aufbauenden dazugehörigen mentalen Repräsentationssystem angegeben werden. Ob sich ein solches spezielles Repräsentationssystem allerdings mit mathematischer Schärfe, wie bei Bartels in [5] letztendlich gefordert, modellieren lässt, ist fraglich und generiert Möglichkeiten für zukünftige Untersuchungen. Wenn überhaupt eine solche mathematische Modellierung gelingen sollte, dann nur auf der Basis eines strukturalen Begriffs der Repräsentation, da nur ein solcher alle möglichen Beziehungsmuster erfassen kann, wenn auch sicher nicht mit einer einzigen Abbildung, und somit von den Gegenständen der Wahrnehmung zum dazugehörigen Repräsentationssystem führen kann, mit welchem man dann erklären kann, warum das entsprechende Repräsentationssystem so gut zum dazugehörigen Ausschnitt der Welt passt. Ein solcher strukturaler Begriff der Repräsentation eröffnet auch bei Bartels in [5][S. 187ff] dann die Möglichkeit für einen repräsentationalen Realismus, welche sich allerdings nicht zwingend aus diesem ergibt (Bartels in [5][S. 187, Z. 34 - S. 188, Z. 2]):

Wer einen strukturalen Repräsentationsbegriff vertritt, so die These dieses letzten Kapitels, kann, muss aber nicht zwangsläufig erkenntnistheorietischer Realist sein.

Dies verhält sich ähnlich in der von mir vorgestellten evolutionären und repräsentationalen Theorie.[16] In dieser eröffnet die evolutionäre und repräsentationale Einordnung des sozialen und mathematischen Denkens die Möglichkeit über die

[16]Auf Grund der relativen Kürze dieser abschließenden Unterabschnitte und der Komplexität einer jeden repräsentationalen Theoriebildung muss ich an dieser Stelle auf eine genaue und detaillierte Auseinandersetzung meines evolutionären Repräsentationsbegriffes mit dem strukturalen, wie er insbesondere von Bartels in [5] vertreten wird, verzichten. Dies würde den Rahmen und die Zielsetzung meiner Ausführungen hier weit übersteigen und bietet daher Raum für zukünftige weiterführende Untersuchungen.

vorgestellte evolutionäre Theorie der Repräsentation - ich nenne es einen evolutionären Repräsentationismus! - erklären zu können, warum das soziale und damit letztendlich das mathematische Denken so gut auf die Welt passt, was insbesondere die Möglichkeit eines erkenntnistheoretischen Realismus im evolutionären Sinne offenbart,[17] wobei ein normativer, repräsentationaler Wahrheitsbegriff auf Grund der evolutionären Perspektive nicht ableitbar ist. Doch wie verhält es sich dann in diesem Kontext mit der mathematischen Wahrheit?
Der mathematisch-philosophische Wahrheitsbegriff gründet sich im Rahmen der Philosophie der Mathematik zumeist auf die Unterscheidungen "wahr - falsch", "gültig - ungültig", "entscheidbar - unentscheidbar" oder "beweisbar - widerlegbar" in Bezug auf die Sätze einer (meta-)mathematischen Theorie. In der modernen Logik setzt man zum Beispiel das Postulat der Wahrheitsdefinitheit voraus, welches sicherstellen soll, dass alle im Rahmen der logischen Theoriebildung betrachteten Sätze bzw. Aussagen entweder wahr oder falsch sind (u.a. Kutschera & Breitkopf in [99][S. 20, Z. 11-12]):

Jeder Aussagesatz, der keine Indikatoren enthält, ist entweder wahr oder falsch.

Ein solches Postulat der Wahrheitsdefinitheit macht in Anbetracht des vorgestellten mathematischen Denkprozesses (vgl. Abbildung 3.4) auf den ersten Blick keinen Sinn. Daher stellt sich auch die Frage, welchen Wahrheitsanspruch man im Rahmen meiner Theoriebildung umsetzen kann bzw. welcher mathematisch-philosophische Wahrheitsbegriff sich aus meiner Theoriebildung hier überhaupt ableiten bzw. anwenden lässt? Dies ist vor allem deswegen problematisch, da ein solcher geeigneter Wahrheitsbegriff nicht normativ sein darf. Beim mathematischen Denkprozess, vor allem beim formal-mathematischen Denken, wird zwar auch in meiner Theoriebildung die Umsetzung eines Anspruches auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit eingefordert, aber dieser Anspruch ist zunächst einmal mehr eine Absichtserklärung, deren genaue Umsetzung in jedem Einzelfall vom jeweiligen Mathematikbetreibenden genau geprüft werden

[17]Ein solcher erkenntnistheoretischer Realismus aus evolutionärer Sicht setzt, wie aus dem vorangegangenen Ausführungen deutlich wurde, keinen strikten ontologischen Realismus voraus. Die im Gehirn generierten Repräsentationen können in der uns umgebenden Welt real existierende bzw. wirkliche Bezüge - Subjekte, Objekte oder Beziehungen zwischen Subjekten bzw. Objekten - besitzen, aber sie müssen es nicht.

muss, d.h. er/sie muss überprüfen, ob sich der vorliegende mathematische Satz innerhalb der dazugehörigen mathematischen Theoriebildung auf der zu Grunde gelegten Axiomatik beweisen oder widerlegen lässt. Wichtig dabei ist, dass nur Sätze in die mathematische Theoriebildung aufgenommen werden, die auch in ihr beweisbar oder widerlegbar, also entscheidbar, sind. Dies eröffnet nämlich dann die Möglichkeit, einen mathematisch-philosophischen Wahrheitsbegriff in meiner Theoriebildung zu verwenden, der auf der Unterscheidung "beweisbar - widerlegbar" beruht. Denn dann kann man, wie in der mathematischen Praxis üblich, die mathematischen Sätze als wahre Aussagen ansehen, die sich im Rahmen der dazugehörigen mathematischen Theoriebildung bzw. im Zuge des dazugehörigen formal-mathematischen Denkprozesses auch beweisen lassen, und man kann die mathematischen Sätze als falsch charakterisieren, die sich widerlegen lassen. Wichtig in diesem Zusammenhang ist, dass man genau die Sätze, die sich weder beweisen noch widerlegen lassen, nicht in die dazugehörige Theoriebildung aufnimmt, auch wenn es sich um in Rahmen dieser mathematischen Theorie bildbare Sätze handelt. Erst wenn sie bewiesen oder widerlegt worden sind, können sie in die dazugehörige mathematische Theoriebildung aufgenommen werden und auf ihrer Basis weitere Sätze bewiesen oder widerlegt werden. Bis dahin gelten sie als mehr oder weniger gut begründete Vermutungen, welche erst noch genauer untersucht werden müssen, bevor man sie bedenkenlos einsetzen kann. Somit leitet sich im Rahmen meiner Theoriebildung über den mathematischen Denkprozess der mathematisch-philosophische Wahrheitsbegriff vorwiegend aus dem formal-mathematischen Denken ab, welches letztendlich den Anspruch auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit umsetzen muss. Dieser Anspruch ist natürlich letzten Endes ein sozial-normativer, denn damit ein einzelner subjektiver mathematischer Denkprozess von der Gruppe der Mathematiker, die sich mit dem dazugehörigen Betrachtungsgegenstand beschäftigen und auf dieser Grundlage alle ihren subjektiven eigenen mathematischen Denkprozess besitzen, akzeptiert wird, muss dieser diesen strengen Kriterien genügen. Tut er das nicht, wird er entweder nicht akzeptiert oder neu diskutiert. In diesem Sinne stellt sich auch im Zuge meiner Theoriebildung heraus, dass Mathematik und das mathematische Denken sozial konstruiert sind, wobei der zunächst einmal subjektive mathematische Denkprozess des einzelnen Mathematikers mittels Erfüllung der mathematischen Normen (Axiomatik, Deduktive Methode, Anspruch auf Exaktheit, Eindeutigkeit und Widerspruchsfreiheit) durch die soziale Gemeinschaft der Mathematikbetreibenden, welche die Erfüllung dieser Normen bei jedem einzelnen beteiligten Mathematiker überprüft, zum objektiven mathematischen Denkprozess dieser sozialen Gemeinschaft wird. Dabei ist die Position, dass Mathematik ein soziales Konstrukt ist, nicht neu (u.a. Ernest in [52][Kap. 5-7], Heintz in [73][S. 272ff], Prediger in [126][Abschnitt 2.1]), aber diese einzelnen Positionen leiten die genannten Autoren/Innen nicht aus dem mathematischen Denkprozess von Innen heraus her, sondern führen über die kulturelle Außenperspektive - die Praxis der Mathematik - , die auch den Nichtmathematikern zur Verfügung steht, an diese heran, auch wenn sie bemerken und argumentieren, dass die Subjektivität der Mathematik dem einzelnen mathematikbetreibenden Individuum entspringen muss. Dennoch kommt zum Beispiel Paul Ernest in [52][S. 135, Z. 40 - S. 136, Z. 7] innerhalb seiner Argumentation für einen sozialen Konstruktivismus in der Philosophie der Mathematik auf ein Verhältnis zwischen subjektiven und objektiven mathematischen Wissen, welches meinem Verständnis des Verhältnisses zwischen subjektiven und objektiven mathematischen Denken in der Gesamtbetrachtung recht nahe kommt:

The social constructivist philosophy of mathematics presented here accords an essential role to the social, on the grounds that there are epistemologically central social phenomena such as language, negotiation, conversation, and group acceptance that cannot be accounted for in purely individual or objective terms. Quite the reverse; social constructivism offers a theoretical social account of both "objective" and "subjective" knowledge in mathematics and describes the mechanisms underlying the genesis and warranting of these two types of knowledge socially. In each case, it claims that the mechanisms are analogous, being based on dialectical, socially situated interpersonal "conversations".

Dabei versteht Ernest in [52][S. 144f] unter objektivem mathematischen Wissen intersubjektives und von der Gemeinschaft der Mathematiker geteiltes und akzeptiertes mathematisches Wissen und er erklärt sich in [52][S. 148, Z. 38 - S. 149, Z. 4] den Übergang, ausgehend von der Praxis und Kultur der Mathematik, vom subjektiven zum objektiven mathematischen Wissen folgendermaßen:

Thus within the contexts of professional research mathematics, individuals use their subjective (personal) mathematical knowledge to (a) construct mathematical knowledge claims (possibly jointly with others) and (b) participate in the social process of criticism and warranting of others' mathematical knowledge claims. In each case, the individual mathematician's symbolic productions are (or are part of) one of the voices in the warranting converstation.

Während also Ernest von Außen her das subjektive und objektive mathematische Wissen als soziales Konstrukt erklärt, bin ich im Zuge meiner Ausführungen von Innen her an diese Problematik herangegangen, indem ich vom mathematischen Denkprozess des einzelnen mathematikbetreibenden Individuums ausgegangen bin und diesen dann mit Hilfe des sozialen Denkprozesses des einzelnen Individuums evolutionär und repräsentational erklären konnte, wobei meine Zielsetzung aber nicht primär die Mathematik als soziales Konstrukt war, sondern vielmehr die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens beinhaltete, welche ich im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz lokalisieren konnte. Daher passt auch hier die Mathematik deswegen so gut auf die Welt, weil das menschliche Gehirn so gut auf seine ökologische und vor allem seine soziale Umwelt anpasst ist und es überdies dazu in der Lage ist, diese seine Umwelt mittels mentaler Repräsentationen zu verarbeiten, was insbesondere die Erzeugung und Verarbeitung von Beziehungsrepräsentationen miteinschließt, welche für das mathematische Denken in Form der mathematischen Objekte entscheidend sind. Damit ist dann evolutionär und repräsentational aufgezeigt, wie es zum subjektiven mathematischen Denkprozess kommen kann, welcher dann von der sozialen Gemeinschaft der Mathematikbetreibenden, die auf dem jeweiligen mathematischen Betrachtungsgegenstand mathematisch denken, durch Prüfung und Akzeptanz zu einem objektiven mathematischen Denkprozess werden kann.

3.2.5 Warum entwickelt die Mathematik eine solche Eigendynamik?

Meine Ausführungen abschließend soll nun auch noch die letzte der fünf zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik auf der Basis der von mir hier entwickelten Theorie beantwortet werden. Wie verhält es sich also mit der Eigendynamik der Mathematik? Welche Ursachen hat sie? Vor allem im Laufe des 20-ten Jahrhunderts hat doch die Mathematik eine enorme Ausdifferenzierung und Anwendung auf alle möglichen natur- , wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Bereiche erfahren (u.a. Davis & Hersh in [36], Steen in [152]), und es ist auch bis heute kein Ende dieses doppelten Ausdehnungsprozesses der Mathematik, nämlich der Ausdifferenzierung der Mathematik als Wissenschaft und der Anwendung mathematischer Theoriebildungen in den Natur-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, in Sicht. Bereits Davis & Hersh betonten in [36][S. 22, Z. 17-27] diese zwei Quellen der Eigendynamik, die der Mathematik inhärent zu sein scheinen:

Die gesamte Erfahrung deutet bis heute darauf hin, daß es zwei unerschöpfliche Quellen für neue mathematische Fragen gibt, nämlich die wissenschaftliche und die technische Entwicklung, die von der Mathematik immer neue Hilfsmittel fordert, und zweitens, die Mathematik selbst. In dem Maße, in dem sie immer elaborater und komplexer wird, wird jedes neue erreichte Resultat potentiell zum Ausgangspunkt verschiedener, neuer Untersuchungen. Jedes Paar scheinbar voneinander unabhängiger mathematischer Spezialgebiete fordert implizit dazu heraus, eine fruchtbare Verbindung zwischen den beiden zu finden.

Und genau diese beiden Ursachen für die Eigendynamik der Mathematik lassen sich auch im Rahmen meiner Ausführungen erklären. Die Mathematik als Wissenschaft der Muster, welche ausgehend von einem zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstand über den mathematischen Denkprozess zu der dazugehörigen mathematischen Theorie führt, ermöglicht eine Erfassung (intuitiv-mathematisches Denken) und Formalisierung (formal-mathematisches Denken) des Beziehungsmusters, welches sich tatsächlich, potentiell oder fiktiv in dem dazugehörigen Betrachtungsgegenstand befindet. In diesem Zusammenhang verarbeitet dann das menschliche Gehirn Beziehungsrepräsentationen in Form der mathematischen

Objekte und generiert darauf aufbauend stets weitere neue Beziehungsrepräsentationen. Diesem Prozess sind dabei aber letztendlich keine Grenzen gesetzt, da man als Betrachtungsgegenstand auch bereits erfasste und formalisierte mathematische Muster wählen kann oder sich, wie Davis & Hersh oben erklären, mit den Verbindungen zwischen scheinbar voneinander unabhängigen mathematischen Spezialgebieten befassen kann. Der Mathematik als Wissenschaft ist somit schon eine Eigendynamik inhärent, welche zu einer steten Ausdifferenzierung der mathematischen Subdisziplinen führen muss und daher eine Erklärung für den mathematischen Ausdehnungsprozess vor allem des letzten Jahrhunderts liefern kann. Doch auch die anderen Wissenschaften, vor allem aus dem natur-, wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Bereich, leisten ihren Beitrag zu diesem mathematischen Ausdehungsprozess, indem sie die Mathematik vor immer neue Anwendungsprobleme stellen. Denn, wie im vorangegangenen Unterabschnitt bereits erklärt wurde, können andere Wissenschaften die mathematische Theoriebildung anwenden, wenn eine bestimmte Axiomatik einer bestimmten mathematischen Theorie auf die grundlegenden Beziehungen innerhalb eines entsprechenden natur-, wirtschafts- oder sozialwissenschaftlichen Betrachtungsgegenstandes passt. Finden sie allerdings keine passende mathematische Theorie, die ihren Ansprüchen genügt, dann stellen sie in der Regel an die Mathematiker den Anspruch, eine solche zu entwicklen, welche sich mit den Beziehungszusammenhängen ihrer jeweiligen Betrachtungsgegenstände deckt. Dies katalysiert natürlich auch die Eigendynamik der Mathematik und führt einerseits wieder zu einer weiteren Ausdifferenzierung der Mathematik selbst, als auch zu einer stets weiter voranschreitenden Mathematisierung der Natur-, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften. Das Wichtige für die wissenschaftlichen Disziplinen ist dabei, dass die Mathematisierung ihrer jeweiligen Theorien es ihnen nicht nur ermöglicht, weitere Beziehungen innerhalb ihres Forschungsgegenstandes zu erkennen, sondern auch diese sozusagen mit einem Streich erfasst und formalisiert, d.h. quantitativ beschreibbar, verarbeitbar und somit bewertbar macht. Dies ist allerdings nur möglich, weil die Mathematik, im oben erklärten Sinne, ontologisch neutral ist. Mathematische Objekte können ausnahmslos als Beziehungsrepräsentationen angesehen werden! Und genau das ist der tiefere Grund, einen epistemologischen Sonderstatus der Mathematik trotz ihrer zum einen subjektiven sozialen inneren Natur und zum anderen trotz ihrer sozial-normativen äußeren Konstruiertheit zu verteidigen. Dazu bedarf es weder eines ontologischen noch eines epistemologischen Platonismus, sondern dies lässt sich evolutionär-repräsentational erklären. Auch die sich daraus ergebende Unterscheidung zwischen angewandter und reiner Mathematik ist eine andere als die meist philosophisch betonte, welche die Trennlinie oftmals zwischen der von der Wahrnehmung unabhängigen Mathematik - der reinen Mathematik - und der von der Wahrnehmung abhängigen Mathematik - der angewandten Mathematik - gezogen hat, was sich auch in den Zuordnungen innerhalb eines Mathematikstudiums bis heute widerspiegelt, wo unter anderem die Stochastik und die Numerik der angewandten Mathematik und die Zahlentheorie und die Topologie der reinen Mathematik zugeschrieben werden. Diese Unterscheidung ist aber hier im Grunde nicht mehr vertretbar, da der mathematische Denkprozess ausgehend von einem beliebigen Betrachtungsgegenstand zu einer diesbezüglichen mathematischen Theorie führt, wobei die Wahrnehmung letzten Endes immer eine entscheidende Rolle einnimmt, weil der zu Grunde gelegte Betrachtungsgegenstand entweder direkt der Umwelt entstammt oder sich indirkt über bereits erfasste und formalisierte mathematische Beziehungsmuster ergibt. Evolutionär gesehen gibt es somit keine Mathematik, die gänzlich unabhängig von der Wahrnehmung ist. Daher kann man hier auch nicht die Trennlinie zwischen einer von der Wahrnehmung abhängigen und unabhängigen Mathematik ziehen, sondern man muss vielmehr jede mathematische Theorie selbst als reine Mathematik bezeichnen und ihre Anwendung auf konkrete natur-, wirtschafts- oder sozialwissenschaftlichen Betrachtungsgegenstände als angewandte Mathematik charakterisieren. Wer reine Mathematik betreibt, muss somit zwangsläufig mathematisch denken, und wer angewandte Mathematik betreibt, muss "lediglich" die Resultate der reinen Mathematik anwenden.[18] Insgesamt betrachtet, ist

[18]Diese Trennlinie kann man sich auch wiefolgt vorstellen: Was braucht man, um einen Kuchen zu backen? Ein Rezept und die dazugehörigen Zutaten. Wenn man sich an das Rezept hält und die Zutaten richtig abgewogen und zusammengeführt hat, dann erhält man einen schmackhaften Kuchen, ohne dass man ein Konditor sein müsste. Der Konditior weiß zwar, warum gerade diese Zutaten harmonieren und einen schmackhaften Kuchen ergeben, aber dieses Wissen um die Beziehungsstruktur der einzelnen Zutaten untereinander benötigt man nur, wenn man ein neues Kuchenrezept entwickeln will, und nicht, wenn man lediglich einen Kuchen nach vorgegebenen Rezept backen möchte. Man muss also kein Konditor sein, um schmackhafte Ku-

es also die ontologische Neutralität der mathematischen Theorien - der (reinen) Mathematik! - welche der Eigendynamik der gesamten Mathematik zu Grunde liegt.

3.3 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Untersuchung bestand darin, durch Aufdeckung und Entschlüsselung der evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens einen naturalistischen Erklärungsansatz für die Philosophie der Mathematik bereitszustellen, welcher die fünf zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik

1. Was ist Mathematik?
2. Was ist das mathematische Denken?
3. Warum können Menschen überhaupt mathematisch denken?
4. Warum passt die Mathematik so gut auf die Welt?
5. Warum entwickelt die Mathematik eine solche Eigendynamik?

naturalistisch beantworten kann. Daher habe ich meine Ausführungen im ersten Kapitel mit einer Einführung in die der Untersuchung zu Grunde liegenden mathematisch-philosophischen, evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundbegriffe und Grundlagen begonnen. Dabei wurden in Abschnitt 1.1 die mathematisch-philosophischen Grundbegriffe und Grundlagen vorgestellt und entwickelt, indem zunächst einmal in die historisch-philosophische Entwicklung der mathematisch-philosophischen Auffassung, welche die Mathematik als die Wissenschaft der Muster sieht, eingeführt wurde. Im Zuge dessen wurde auch die eigene Interpretation dieser Auffassung vorgestellt (vgl. S. 7f):

In der Mathematik beschäftigt man sich mit den Mustern der physischen, sozialen und mental-repräsentationalen Welt. Zu ihrem Betrachtungsgegenstand kann

chen backen zu können! Aber man muss ein Konditor sein bzw. die Kenntnisse eines Konditors besitzen, um ein Rezept für einen schmackhaften Kuchen erstellen zu können! Es reicht also ein "angewandter" Konditor zu sein, um Kuchen zu backen! Genauso reicht es, ein "angewandter" Mathematiker zu sein, um mathematische Resultate in der Praxis anwenden - "rechnen" - zu können!

all das werden, was irgendwie (physisch, sozial, mental-repräsentational) miteinander in Beziehung steht. Das mathematische Denken erfasst dann das auf den ersten Blick erkennbare Beziehungsmuster, formalisiert es mittels Axiomen exakt und zieht in weiteren Schritten die Konsequenzen (Sätze und Definitionen) aus diesen grundlegenden Beziehungen, erfasst und formalisiert also weitere in diesem Zusammenhang gültige Beziehungen. In diesen einzelnen Schritten - bei der Betrachtung der jeweils nächsten Theorieebene des jeweiligen Betrachtungsgegenstandes - erfasst und formalisiert das mathematische Denken dann wieder weitere Beziehungen auf der Basis der zuvor erfassten und formalisierten Theorieebenen (Axiome, Sätze und Definitionen), was sich theoretisch im Falle eines finiten Betrachtungsgegenstandes zumindest solange fortsetzten lässt, bis die Beziehungen in diesem vollständig erfasst und formalisiert sind, und im Falle eines infiniten Betrachtungsgegenstandes sich prinzipiell unendlich lange fortsetzen lässt, es sei denn, die bis dato erfassten und formalisierten Beziehungen auf der Basis des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes reichen zur Beschreibung des Beziehungsmusters erst einmal aus. So entwickelt sich letztendlich ein formalisiertes Beziehungsmuster des zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstandes, welches den Anspruch erhebt, diesen exakt, eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben zu können.

Aus dieser mathematisch-philosophischen Auffassung heraus wurde dann ein mathematischer Denkprozess abgeleitet, welcher das mathematische Denken in einen eher inspirativ-intuitiven und einen eher sprachlich-formalen Teil trennt. Dieser wurde dann zusammen mit den dazugehörigen mathematisch-philosophischen Begrifflichkeiten im darauf folgenden Unterabschitt festgehalten (vgl. Definition 1.1-5 und Abbildung 1.1). Im Anschluss daran wurde der Frage nachgegangen, was Mathematikbetreibende beobachten, wenn sie sich selbst beim mathematischen Denken zuschauen. Dabei wurde insbesondere überprüft, ob diese Innenperspektive auf das mathematische Denken mit dem abgeleiteten mathematischen Denkprozess kompatibel ist. Überdies wurde die eigene Innenperspektive auf das mathematische Denken - die "Beziehungsnetzwerk-Metapher" - vorgestellt, bei welcher der soziale Beziehungscharakter des mathematischen Denkens betont wurde (vgl. S. 20f):

Es fühlt sich im Prinzip so an, als wenn man in eine neue Stadt zieht, eine neue Arbeitsstelle hat und damit dann auch mit einem neuen Beziehungsumfeld konfrontiert wird. Am Anfang erfährt man die Namen von ein paar Arbeitskollegen und Bekannten und man hat schon langsam eine Ahnung, wer mit wem, was, warum zu schaffen hat. Im weiteren Verlauf erfährt man dann immer mehr über die Beziehungen, die die einzelnen Arbeitskollegen und Bekannten untereinander unterhalten und kann diese auch beschreiben (w.z.B.: Verwandtschaftsbeziehungen, Freundschaften, Konkurrenzverhältnisse, etc.) und findet seine Intuition teilweise bestätigt und manchmal widerlegt. Schließlich eröffnet sich einem aber so die gesamte Beziehungsstruktur und man weiß, wer mit wem, was, warum und wann gemacht bzw. zu schaffen hat und hatte, und zum anderen ist man in der Lage, seine soziale Intuition auf der Basis seines Wissens über das soziale Beziehungsmuster zu beschreiben, was letztendlich auch dazu führt, dass man mögliche hypothetische Beziehungen (w.z.B. mögliche Allianzen von Arbeitskollegen, etc.) erfassen und beschreiben kann.

Im Weiteren wurde dann einer Außenperspektive auf das mathematische Denken nachgegangen und auch dabei stand die Frage im Mittelpunkt, ob diese Außenperspektive mit dem vorgestellten mathematischen Denkprozess kompatibel ist. Dies wurde im Falle der kognitiven Neuropsychologie, welche sich unter anderem mit Dyskalkulien bzw. Akalkulien befasst, prinzipiell durch entsprechende Untersuchungen indirekt bestätigt und es konnte die Hypothese aufgestellt werden, dass das intuitiv- und das formal-mathematische Denken in verschiedenen neuronalen Schaltkreisen verankert sind. Diese Resultate führten dann zuammen mit der "Beziehungsnetzwerk-Metapher" und der offensichtlich vorhandenen Verbindung zwischen mathematischem und sozialem Denken, für welche diverse Belege angeführt wurden, zu der vorläufigen Arbeitshypothese, welche die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens im evolutionären Umfeld der sozialen Intelligenz lokalisiert. Bevor dann die Untersuchung der sozialen Intelligenz und ihres evolutionären Umfeldes vorgenommen werden konnte, mussten noch in Abschnitt 1.2 des ersten Kapitels die evolutionspsychologischen und soziobiologischen Grundbegriffe und Grundelagen vorgestellt, entwickelt und festgehalten werden. Ausgehend von den vier Warum-Fragen der Biologie (vgl. S. 27) wurde dann mit Hilfe des evolutionspsychologischen Ansatzes von Leda Cosmides & John Tooby, welche die evolutionären Ursprünge menschlicher Fähigkeiten und Charakteristika in der Umwelt der evolutionären Anpassung lokalisieren, in welcher die Anpassungen an die Anpassungsprobleme evolviert sind, eine Möglichkeit aufgezeigt, wie man einzelne menschliche Fähigkeiten zu ihren evolutionären Ursprüngen zurückverfolgen kann. Dabei wurde auch in die von Cosmides & Tooby vertretene "Massive-Modularitäts-Hypothese" eingeführt, welche postuliert, dass das Gehirn gänzlich aus Modulen besteht, bei welchen es sich einerseits um kognitive Anpassungen und andererseits um neuronale Schaltkreise (Mini-Computer) handelt. Anschließend wurden die diesbezüglichen Begriffe (vgl. Definition 1.6-13) und ihre evolutionären Zusammenhänge (vgl. Abbildung 1.2) noch einmal für die weitere Untersuchung festgehalten, bevor die "Massive-Modularitäts-Hypothese" im Vergleich mit anderen modularen Ansätzen kritisch betrachtet wurde. Diese Auseinandersetzung mit den verschiedenen modularen Ansätzen führte dann zu einer eigenen modularen Sicht auf das Gehirn (vgl. Abbildung 1.3), welche "nur" noch eine schwache "Massive-Modularitäts-Hypothese" beinhaltet und welche den Weg hin zu den höheren kognitiven Fähigkeiten des Menschen mittels einer repräsentationalen Verarbeitungsstruktur und dem Sperber'schen Begriff des "konzeptualen Moduls" zu erklären versucht. Im anschließenden zweiten Kapitel wurde zunächst in Abschnitt 2.1 der Frage nachgegangen, wie sich Intelligenz in einem modular organisierten Gehirn überhaupt charakterisieren lässt. Von besonderer Bedeutung für die Formulierung einer modularen Intelligenzdefinition erwiesen sich dabei einerseits Sperber's Unterscheidung zwischen tatsächlichem und geeignetem Bereich eines konzeptualen Moduls, und andererseits Cosmides & Tooby's Unterscheidung zwischen "dedicated intelligence" und "improvisational intelligence". Diese führten dann zu einer modularen Intelligenzdefinition (vgl. Definition 2.1), welche Intelligenz als das Potential des Gehirns ansieht, mit Hilfe seiner Module Verhalten zu erzeugen, welches an die gegebenen Umstände bzw. Kontexte möglichst gut angepasst ist. Daraus ergaben sich weiter die dazugehörige soziale und ökologische Intelligenzdefinition (vgl. Defintion 2.2). Im zweiten Teil von Abschnitt 2.1 wurde dann der Frage nachgegangen, welche der beiden Intelligenzformen - soziale und/oder ökologische - für die menschliche Intelligenzevolution ausschlagebend war. Dazu wurden die verschiedenen sozialen und ökologischen Intelligenzhypothesen betrachtet und die dazugehörige soziale Intelligenzdiskussion analysiert, was letztendlich in einer Befürwortung der sozialen Intelligenzhypothese mündete, welche die Intelligenz von Primaten und Menschen als Anpassung an ihre komplexe soziale Umwelt sieht. Im anschließenden Abschnitt 2.2 des zweiten Kapitels wurde dann der Frage nachgegangen, welche kognitiven Fähigkeiten (Module) mit den Anpassungsproblemen in sozialen Kontexten zusammenhängen. Dazu wurde dann das evolutionäre Umfeld der sozialen Intelligenz durch einen evolutionären Rahmen abgegrenzt, welcher sich durch die (kognitiven) Fähigkeiten "Sprachfähigkeit, ToM-Fähigkeit, Repräsentationsfähigkeit, Bewusstseinsfähigkeit, Denkfähigkeit, Symbolverständnis, Fiktionsfähigkeit, Ritualfähigkeit" konstituiert. Im Weiteren wurde dann der evolutionäre Zuammenhang jeder einzelnen (kognitiven) Fähigkeit mit der sozialen Intelligenz untersucht, wobei eine jeweils mögliche evolutionäre Funktion im Fokus der Betrachtung lag. Letztendlich führten dabei die jeweiligen Untersuchungen zu den folgenden Resultaten:

1. **Im Falle der Sprachfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Aufrechterhaltung des sozialen Zusammenhalts innerhalb der sich im Laufe der Hominisation stets weiter vergrößernden und vertreuter lebenden sozialen Gruppen.
   Repräsentationsordnung: Die Sprachfähigkeit des modernen Menschen macht die Beschreibung von Repräsentationen beliebiger Ordnung überhaupt erst möglich.

2. **Im Falle der ToM-Fähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Die Zuschreibung von mentalen Zuständen bei sich selbst und anderen.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen dritter Ordnung.

3. **Im Falle der Bewusstseinsfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Sicherstellung einer sofortigen Handlungsbereitschaft.
   Repräsentationsordnung: Bis einschließlich Repräsentationen fünfter Ordnung.

4. **Im Falle der Denkfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Ermöglicht tatsächliches Verhalten durch Planung, Durchführung und Überwachung von Verhaltensmustern in bekannten und unbekannten Problemsituationen.
   Repräsentationsordnung: Verarbeitung von Repräsentationen jeder generierbaren Ordnung.

5. **Im Falle des Symbolverständnis:**
   Evolutionäre Funktion: Ermöglichung eines intelligenteren Verhaltens in sozialen Konkurrenzsituationen durch Unterdrückung des direkten Anreizes eines Stimulus.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen zweiter Ordnung.

6. **Im Falle der Fiktionsfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Ermöglichung einer Bewertung in sozialen Kontexten, welche von macchiavellistischen und kooperativen Taktiken geprägt sind.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen dritter Ordnung.

7. **Im Falle der Ritualfähigkeit:**
   Evolutionäre Funktion: Signalwirkung in sozialen Kontexten, welche von macchiavellistischen und kooperativen Taktiken geprägt sind.
   Repräsentationsordnung: Mindestens Repräsentationen vierter Ordnung.

Dabei stellte sich insbesondere heraus, dass die Repräsentationsfähigkeit bzw. eine repräsentationale Verarbeitungsstruktur im (menschlichen) Gehirn im Zuge der menschlichen Intelligenzevolution eine besondere Rolle gespielt hat, da sich alle anderen (kognitiven) Fähigkeiten in ein Ordnungsmodell (vgl. Abbildung 2.1) dieser repräsentationalen Verarbeitungsstruktur einordnen ließen. Mit Hilfe dieser evolutionären Erklärungen und repräsentationalen Zusammenhänge, welche den koevolutiven Rahmen der sozialen Intelligenzevolution abstecken (vgl. Abbildung 3.1), wurde dann zu Beginn des ersten Abschnitts des dritten Kapitels das soziale Denken (vgl. Definition 3.1) und ein möglicher sozialer Denkprozess (vgl. Abbildung 3.2) erklärt und repräsentational eingeordnet, was eine Erklärung der "Beziehungsnetzwerk-Metapher" ermöglichte. Dabei wurde insbesondere festgehalten, wie sich das soziale Denken aus den exekutiven Prozessen der anderen kognitiven Fähigkeiten zu ergeben scheint (vgl. Abbildung 3.3). Es stellte sich heraus, dass dieses hochkomplexe soziale Denken ebenfalls eine (konzeptual) modular organisierte kognitive Fähigkeit ist, welche eine Anpassung an eine komplexe soziale Umwelt darstellt. Überdies wurde deutlich, dass sich der geeignete und der tatsächliche Bereich dieser hochentwickelten sozialen Denkfähigkeit aus den geeigneten und den tatsächlichen Bereichen der daran beteiligten (konzeptual) modular organisierten kognitiven Fähigkeiten ergibt. Dadurch wurde es möglich, das mathematische Denken als Nebenprodukt des sozialen Denkens zu erklären, indem am Beipiel des ToM-Moduls aufgezeigt wurde, dass das ToM-Modul beim sozialen Denken auf seinem geeigneten Bereich operiert, während es beim mathematischen Denken auf seinem tatsächlichen Bereich arbeitet. Eine Argumentation, die auf alle anderen (konzeptual) modular organisierten kognitiven Fähigkeiten, die am sozialen und am mathematischen Denken beteiligt zu sein scheinen, ausgeweitet werden konnte, was auch eine genauere Erklärung des mathematischen Denkprozesses ermöglichte (vgl. Abbildung 3.4). Nachdem nun das mathematische Denken als Nebenprodukt dieses sozialen Denkens erklärt werden konnte, wurde abschließend noch eine Möglichkeit aufgezeigt, diesen mathematischen Denkprozess repräsentational einzuordnen, was letztendlich zusammen mit der evolutionären und repräsentationalen Erklärung des sozialen Denkprozesses auch eine Konkretisierung der in Abbildung 1.3 skizzierten Sicht auf das Gehirn ermöglichte, in welcher die repräsentationale Verarbeitungsstruktur detaillierter integriert wurde (vgl. Abbildung 3.5). Im zweiten Abschnitt des dritten Kapitels wurde dann die Argumentation abgeschlossen, indem auf dieser Basis die in der Einleitung vorgestellten fünf zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik aus evolutionärer Sicht wiefolgt beantwortet werden konnten:

1. **Was ist Mathematik?** Die Wissenschaft der Muster, welche Beziehungen intuitiv erfasst, symbolisch-sprachlich formalisiert und weiter verarbeitet.

2. **Was ist das mathematische Denken?** Der in Abbildung 3.4 festgehaltene repräsentationale Verarbeitungsprozess, welcher von einem zu Grunde gelegten Betrachtungsgegenstand zu einer dazugehörigen mathematischen Theorie führt.

3. **Warum können Menschen überhaupt mathematisch denken?** Die Menschen können mathematisch denken, weil das mathematische Denken ein Nebenprodukt der kognitiven Fähigkeiten ist, die sich im Umfeld der sozialen Intelligenz befinden bzw. weil das mathematische Denken letztendlich nichts anderes ist als soziales Denken auf bestimmten Teilen seines tatsächlichen Bereiches.

4. **Warum passt die Mathematik so gut auf die Welt?** Die Mathematik passt so gut auf die Welt, weil sie einerseits als Beziehungswissenschaft ausschließlich Beziehungen über mathematische Objekte als Beziehungsrepräsentationen beschreibt, die man in der Umwelt vorfinden kann, und anderseits gleichzeitig ontologisch neutral ist und somit nicht an konkrete Subjekte oder Objekte der wahrnehmbaren Umwelt gebunden ist.

5. **Warum entwickelt die Mathematik eine solche Eigendynamik?** Die Eigendynamik der Mathematik resultiert zum einen aus der Mathematik als Wissenschaft, die auf der Basis von Beziehungen immer neue Beziehungen erfassen und formalisieren kann, und zum anderen aus der Anwendung der Mathematik durch die natur-, wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Disziplinen, die die Mathematik stets mit neuen Betrachtungsgegenständen konfrontieren.

Diese Möglichkeit, die zentralen Fragen der Philosophie der Mathematik aus der von mir hier evolutionär hergeleiteten Perspektive beantworten zu können, beinhaltet insbesondere eine naturalistische Erklärung der Mathematik, welche auch auf einen ontologischen Platonismus verzichten kann. Im Zuge meiner Ausführungen sind allerdings noch so manche Fragen, w.z.B.:

- eine mathematische Beschreibung des evolutionären Repräsentationsbegriffes;

- eine genaue Auseinandersetzung mit dem strukturalen Repräsentationsbegriff;

- ein besseres Verständnis, wie sich aus dem sozialen Charakter der Mathematik von Innen heraus die sozial-normative Konstruiertheit der Mathematik, welche man von der Außenperspektive wahrnehmen kann, erklären lässt;

- eine genauere evolutionäre Untersuchung zu den Übergängen zwischen sozialem, ökologischem (insb. technologischem) und mathematischem Denken;

für weitere zukünftige Untersuchungen offen geblieben bzw. konnten in diesem Zusammenhang aus Gründen des Arbeitsumfangs noch nicht so detailliert untersucht werden, wie dies eigentlich notwendig gewesen wäre.

Anhang A

Beispiel: Die Axiomierung der natürlichen Zahlen

Anhand des Beispiels der Axiomierung der natürlichen Zahlen soll nun kurz die Funktionsweise des mathematischen Denkprozesses, welcher in Unterabschnitt 1.1.1 entwickelt, vorgestellt und in Abbildung 1.1 im Form eines Flussdiagramms festgehaltenen wurde, demonstriert werden.
Das **Peano'sche Axiomensystem** für die natürlichen Zahlen[1], ohne die "Null", kurz: $\mathbb{N}$, besteht aus den folgenden neun Axiomen (Kennedy in [90][S. 113]):[2]

(A.1) 1 ist eine natürliche Zahl, kurz: $1 \in \mathbb{N}$.

(A.2) $a \in \mathbb{N} \Rightarrow (a = a)$.

(A.3) $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow [(a = b) \Leftrightarrow (b = a)]$.

(A.4) $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow [(a = b), (b = c) \Rightarrow (a = c)]$.

(A.5) $(a = b), b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{N}$.

(A.6) $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$.

(A.7) $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow [(a = b) \Leftrightarrow (a + 1 = b + 1)]$.

(A.8) 1 ist kein Nachfolger, kurz: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 1 \neq 1$.

---

[1] Dieses wurde von Giuseppe Peano (1858-1932) im Jahre 1889 vorgestellt und liegt in englischsprachiger Übersetzung von H.C. Kennedy [90][Kap. VII] vor.

[2] Dabei bezeichnet 1 "eine Einheit", $a + 1$ "den Nachfolger von a bzw. a plus 1", $\in$ "ist Element aus", $=$ "ist gleich", $\neq$ "ist ungleich", $\Rightarrow$ "es folgt", $\Leftrightarrow$ "ist äquivalent" und $\subseteq$ "ist enthalten in".

$$
\text{(A.9)} \qquad \begin{cases} \text{Induktionsprinzip: Enthält eine Menge } M \text{ die Zahl 1} \\ \text{und folgt aus } n \in I\!N \text{ und } n \in M \text{ stets } n+1 \in M, \\ \text{so gilt } I\!N \subseteq M.^{3} \end{cases}
$$

Definiert man nun noch

$$
\text{(A.10)} \qquad 2 = 1+1,\ 3 = 2+1,\ 4 = 3+1,\ \text{u.s.w.}
$$

dann kann man auch schon den ersten Satz beweisen:

Satz A.1 *Die* 2 *ist eine natürliche Zahl, kurz:* $2 \in I\!N$.

Beweis von Satz A.1:

Nach (A.1) ist die 1 eine natürliche Zahl. Der Nachfolger von 1 ist $1+1$.
Nach (A.6) ist dann auch $1+1$ eine natürliche Zahl. Nach (A.10) ist $2 = 1+1$.
Nach (A.5) ist dann die 2 eine natürliche Zahl. □

Als nächstes zeigt man dann, dass $3, 4, 5, \ldots \in I\!N$ sind. Aber um mit den so axiomierten natürlichen Zahlen auch "rechnen" zu können, bedarf es noch weiterer Sätze und Definitionen, bis man für eine funktionierende Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division alles zusammen hat (vgl. Kennedy in [90][S. 113-125]). Eine solch genaue Einführung kann hier aus Gründen des Umfangs natürlich nicht geschehen und ist auch nicht von Nöten, da die grundlegenden neun Axiome der natürlichen Zahlen und die dazugehörige erste Definition völlig ausreichen, um eine nächst höhere Aussage über die natürlichen Zahlen zu beweisen und damit die Funktionsweise des mathematischen Denkens bzw. des mathematischen Denkprozesses zu demonstrieren. Die Aussage, dass die 2 eine natürliche Zahl ist, erscheint den meisten Menschen als vollkommen trivial, grundlegend intuitiv und keines strengen Beweises bedürftig. Auch die meisten Mathematiker finden diese Aussage auf der Basis der neun Axiome ((A.1)-(A.9)) der natürlichen Zahlen zusammen mit der dazugehörigen ersten Definition (A.10) vollkommen intuitiv, aber keineswegs trivial, da man diese Aussage streng genommen

[3] Oft wird das Induktionsprinzip in einer etwas schärferen Formulierung verwendet: Enthält eine Menge M natürlicher Zahlen die Zahl 1 und folgt aus $a \in M$ stets $a+1 \in M$, so ist $M = I\!N$. Die Beweisform der vollständigen Induktion beruht direkt auf dieser Formulierung des Induktionsprinzips.

erst einmal beweisen muss. Das intuitiv-mathematische Denken erkennt also die 2 als eine natürliche Zahl und das formal-mathematische Denken ermöglicht den formalen Beweis auf dem Vorangegangenen ((A.1)-(A.10)). Die Axiome ((A.1)-(A.9)) selbst erscheinen dabei nicht alle ganz so intuitiv zu sein, vor allem die abstrakt formalisierten Axiome (A.2)-(A.7) wirken für Nicht-Mathematiker auf den ersten Blick alles andere als intuitiv zugänglich, was einfach gesagt daran liegt, dass Nicht-Mathematiker sich mit dem grundlegenden Muster der natürliche Zahlen noch nicht so tiefgreifend vertraut gemacht haben, wie Mathematiker dies in der Regel tun. M.a.W.: Nicht-Mathematikern sind die grundlegenden Charakteristika des Beziehungsmusters der natürlichen Zahlen eigentlich noch eher fremd, während es für die Mathematiker vertraute Beziehungen sind. Dies liegt auch daran, dass Nicht-Mathematiker große Probleme damit haben, ihre Intuition zu formalisieren, d.h. ein intuitiv erfasstes Beziehungsmuster symbolisch-sprachlich zu beschreiben, was auch bei den Mathematikern selbst eine langwierige und geistig anstrengende Tätigkeit ist. Dagegen ist die erste Definition (A.10) nun wirklich intuitiv, da sie die natürlichen Zahlen ausgehend von der 1 über ihre jeweiligen Vorgänger definiert (z.B.: $2 = 1 + 1$) und diese Intuition auf der axiomatischen Basis auch einfach zu formalisieren ist.
Zusammenfassend kann man also anhand des Beispiels der Axiomierung der natürlichen Zahlen festhalten, dass dem intuitiv-mathematischen Denken die Aufgabe zuteil wird, dass dem jeweiligen Stand der mathematischen Theoriebildung zu Grunde liegende Beziehungsgeflecht offenzulegen, während dem formal-mathematischen Denken im Anschluss daran jeweils die weitaus schwierigere Aufgabe auferlegt wird, dass vom intuitiv-mathematischen Denken erkannte Beziehungsgeflecht zu formalisieren und gegebenenfalls diese Aussagen in Form von Sätzen deduktiv zu beweisen, was auf der diesem Stand vorausgehenden mathematischen Theoriebildung geschehen muss.
Dieses Beispiel abschießend soll nun noch eine weiterführende Aussage über die natürlichen Zahlen betrachten werden, an welcher man besonders gut die drei verschiedenen, gängigen Beweisverfahren der Mathematik (direkter Beweis, indirekter Beweis und Beweis durch vollständige Induktion) demonstrieren kann, welche als deduktive Beweise die einzelnen mathematischen Beziehungsebenen im mathematischen Denkprozess miteinander verbinden. Dabei werden allerdings

die vollständig eingeführten natürlichen Zahlen mit der Null, samt Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und einige hier nicht näher beschriebene Sätze als gegeben vorausgesetzt.

Satz A.2 *Für alle natürlichen Zahlen n gilt:*
Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n(n+1)}{2}$.
Kurz: $\forall n \in \mathbb{N} : 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Direkter Beweis von Satz A.2:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{1+2+\ldots+n}_{n-\text{Sumanden.}} &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{(0+1+2+\ldots+n)}_{(n+1)-\text{Sumanden.}} + \underbrace{(n+(n-1)+\ldots+1+0)}_{(n+1)-\text{Sumanden.}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{(0+n)+(1+n-1)+\ldots+(n+0)}_{(n+1)-\text{Sumanden.}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{(n+\ldots+n)}_{(n+1)-\text{mal.}} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

□

Indirekter Beweis von Satz A.2:

Angenommen, Satz A.2 ist falsch, d.h. es gibt eine natürliche Zahl $\hat{n}$ mit

$$1+2+\ldots+\hat{n} \neq \frac{\hat{n}(\hat{n}+1)}{2}. \tag{A.11}$$

Kurz: $\exists\, \hat{n} \in \mathbb{N} : 1+2+\ldots+\hat{n} \neq \frac{\hat{n}(\hat{n}+1)}{2}$.
(Beachte dabei, dass für $\hat{n}=1$ die Formel (A.11) mit $=$ richtig ist.)
Dann gibt es eine kleinste natürliche Zahl $n_1 \leq \hat{n}$ mit

$$1+2+\ldots+n_1 \neq \frac{n_1(n_1+1)}{2},\ n_1 \geq 2.$$

Dann ist die Formel (A.11) mit = richtig für $n_1 - 1$, d.h.:

$$1 + 2 + \ldots + (n_1 - 1) = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2}. \tag{A.12}$$

Daraus ergibt sich aber nun der folgende Widerspruch:

$$n_1 = (1 + 2 + \ldots + n_1) - (1 + 2 + \ldots + (n_1 - 1)) \neq \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} = n_1.$$

Folglich ist die obige Annahme falsch und somit Satz A.2 richtig.

□

Beweis von Satz A.2 durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig, denn es ist

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung: Für n sei die Behauptung richtig, d.h. es gelte

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}. \tag{A.13}$$

Induktionsschluss: $(n \to n + 1)$
Es gilt:

$$1{+}2{+}\ldots{+}(n{+}1) = 1{+}2{+}\ldots{+}n{+}(n{+}1) \overset{(A.13)}{=} \frac{1}{2}n(n{+}1){+}(n{+}1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Somit ist die Behauptung auch für $n + 1$ richtig.

□

Anhand dieser Beispiele konnte man sich nun die Funktionsweise des in Unterabschnitt 1.1.1 entwickelten und vorgestellten mathematischen Denkprozesses einmal vergegenwärtigen. Insbesondere wird hier auch noch einmal deutlich, dass nur die Axiome rein synthetischen Charakter besitzen, während die darauf basierenden Sätze und Definitionen in diesen bereits "enthalten" waren, was die deduktiven Beweise bei den Sätzen und der deduktive Charakter der Definitionen gewährleisten und somit der analytische Charakter dieser Sätze und Definitionen sichergestellt ist.

Literaturverzeichnis

[1] Andrews, P.W.; Gangestad, S.W. & Metthews, D. (2002): Adaptationism - how to carry out an exaptationist program, Behavioral and Brain Sciences, 25, pp. 489-553.

[2] Barkow, J.H.; Cosmides, L. & Tooby, J. (eds.)(1992): The Adapted Mind - Evolutionary Psychology and the Generation of Culture, Oxford: Oxford University Press.

[3] Barrett, L.; Dunbar, R. & Lycett, J. (2002): Human Evolutionary Psychology, Basingstoke: Palgrave, Macmillian; Princeton, NJ: Princeton University Press.

[4] Barrett, L.; Henzi, P. & Dunbar, R. (2003): Primate cognition: from "what now?" to "what if?", Trends in Cognitive Sciences, Vol. 7, No. 11, pp. 494-497.

[5] Bartels, A. (2005): Strukturale Repräsentation, Paderborn: Mentis Verlag.

[6] Bateson, P.P.G. & Hinde, R.A. (1976): Growing points in ethology, Cambridge: Cambridge University Press.

[7] Boone, J.L. (1998): The Evolution of Magnanimity - When Is It Better To Give Than To Receive?, Human Nature, Vol. 9, No. 1, pp. 1-21.

[8] Bourbaki, N. (1974): Die Architektur der Mathematik, S. 140-159, in [120].

[9] Boysen, S.T. & Berntson, G.G. (1989): Numerical Competence in a Chimpanzee (Pan Troglodytes), Journal of Comparative Psychology, Vol. 103, No. 1, pp. 23-31.

[10] Boysen, S.T. & Berntson, G.G. (1995): Responses to Quantity: Perceptual versus Cognitive Mechanisms in Chimpanzees (Pan Troglodytes), Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, Vol. 21, No. 1, pp. 83-86.

[11] Boysen, S.T.; Berntson, G.G.; Hannan, M.B. & Cacioppo, J.T. (1996): Quantity-Based Interference and Symbolic Representations in Chimpanzees (Pan Troglodytes), Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, Vol. 22, No. 1, pp. 76-86.

[12] Brouwer, L.E.J. (1925): Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik I, S. 301-314, in [77].

[13] Brouwer, L.E.J. (1926): Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik II, S. 321-340, in [77].

[14] Brouwer, L.E.J. (1927): Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik III, S. 352-389, in [77].

[15] Brouwer, L.E.J. (1952): Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism, S. 508-515, in [77].

[16] Buss, D.M.; Haselton, M.G.; Shackelford, T.K.; Bleske, A.L. & Wakefield, J.C. (1998): Adaptations, Exaptations, and Spandrels, American Psychologist, Vol. 53, No. 5, pp. 533-548.

[17] Buss, D. (1999): Evolutionary Psychology, Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

[18] Buss, D. (ed.)(2005): The Handbook of Evolutionary Psychology, Hoboken, NJ: Wiley.

[19] Butterworth, B. (1999): The Mathematical Brain, Basingstoke, UK: Macmillian.

[20] Byrne, R.W. & Whiten, A. (1988): Machiavellian Intelligence: Social Expertise and the Evolution of Intellect in Monkeys, Apes and Humans, Oxford: Clarendon Press.

[21] Byrne, R.W. (1995): The Thinking Ape: Evolutionary Origins of Intelligence, Oxford: Oxford University Press.

[22] Byrne, R.W. (1996): Machiavellian Intelligence, Evolutionary Anthropology, Vol. 5, pp. 172-180.

[23] Byrne, R.W. (1997): The Technical Intelligence Hypothesis, pp. 289-311, in [178].

[24] Byrne, R.W. (2002): The Primate Origins of Human Intelligence, pp. 79-95, in [153].

[25] Byrne, R.W. & Corp, N. (2004): Neocortex size predicts deception rate in primates, Proc. R. Soc. B, 271, pp. 1693-1699.

[26] Campbell, J.I.D. (ed.)(2005): Handbook of Mathematical Cognition, New York & Hove: Psychology Press.

[27] Capaldi, E.J. & Miller, D.J. (1988): Counting in Rats: Its Functional Significance and the Independent Cognitive Processes That Constitute It, Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes, Vol. 14, No. 1, pp. 3-17.

[28] Carruthers, P. & Chamberlain, A. (eds.)(2000): Evolution and the human mind: Modularity, language and meta-cognition, Cambridge: Cambridge University Press.

[29] Cosmides, L. (1989): The logic of social exchange: Has natural selection shaped how humans reason? Studies with the Wason selection task, Cognition, 31, pp. 187-276.

[30] Cosmides, L. & Tooby, J. (1997): Evolutionary Psychology: A Primer, (www.Psych.ucsb.edu/research/cep/primer.html).

[31] Cosmides, L. & Tooby, J. (2000): Evolutionary Psychology and the Emotions, pp. 91-115 in [107].

[32] Cosmides, L. & Tooby, J. (2002): Unraveling the Enigma of Human Intelligence: Evolutionary Psychology an the Multimodular Mind, pp. 145-198 in [153].

[33] Christiansen, M.H. & Kirby, S. (eds.)(2003): Language Evolution, Oxford: Oxford University Press.

[34] Davidson, I. (2003): The Archaeological Evidence of Language Origins: States of Art, pp. 140-157 in [33].

[35] Davis, H.L. & Pratt, C. (1995): The Development of Children's Theory of Mind: The Working Memory Explanation, Australian Journal of Psychology, Vol. 47, No.1, pp. 25-31.

[36] Davis, P.J. & Hersh, R. (1986): Erfahrung Mathematik, Basel & Bosten & Stuttgart: Birkhäuser Verlag.

[37] Dawson, J.W. (1999): Kurt Gödel: Leben und Werk, Wien & New York: Springer Verlag.

[38] Dehaene, S.; Dupoux, E. & Mehler, J. (1990): Is Numerical Comparison Digital? Analogical and Symbolic Effects in Two-Digit Number Comparison, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, Vol. 16, No. 3, pp. 626-641.

[39] Dehaene, S.; Tzourio, N.; Frak, V.; Raynaud, L.; Cohen, L.; Mehler, J. & Mazoyer, B. (1996): Cerebral activations during number multiplication and comparison: a PET study, Neuropsychologia, Vol. 34, No. 11, pp. 1097-1106.

[40] Dehaene, S. (1999): Der Zahlensinn, Basel & Bosten & Berlin: Birkhäuser Verlag.

[41] Dehaene, S.; Piazza, M.; Pinel, P. & Cohen, L. (2005): Three Parietal Circuits for Number Processing, pp. 433-453, in [26].

[42] Devlin, K. (2002): Muster der Mathematik, 2. Auflage, Heidelberg & Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

[43] Devlin, K. (2004): Das Mathe-Gen, 3. Auflage, München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

[44] Dunbar, R. (1992): Neocortex size as a contraint on group size in primates, Journal of Human Evolution, 20, pp. 469-493.

[45] Dunbar, R. (1993): Coevolution of neocortex size, group size and language in humans, Behavioral and Brain Sciences, 16, pp. 681-735.

[46] Dunbar, R. (1998): Theory of mind and the evolution of language, pp. 92-110 in [85].

[47] Dunbar, R. (1998): The Social Brain Hypothesis, Evolutionary Anthropology, Vol. 6, No. 5, pp. 178-190.

[48] Dunbar, R. (2003): The Social Brain: Mind, Language, and Society in Evolutionary Perspective, Annual Review of Anthropology, 32, pp. 163-181.

[49] Dunbar, R. & Barrett, L. (eds.)(2007): Oxford Handbook of Evolutionary Psychology, Oxford: Oxford University Press.

[50] Dunbar, R. & Schultz, S. (2007): Understanding primate brain evolution, Philosophical Transactions of the Royal Society B, 362, pp. 649-658.

[51] Enard, W. et al. (2002): Molecular evolution of FOXP2, a gene involved in speech and language, Nature, Vol. 418, pp. 869-872.

[52] Ernest, P. (1998): Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, New York: State University of New York Press.

[53] Evans, J.St.B.T. (ed.)(1983): Thinking and reasoning: Psychological approaches, London: Routledge.

[54] Flohr, H. (1991): Brain Processes and Phenomenal Consciousness. A New and Specific Hypothesis, Theory and Psychology, Vol. 1(2), pp. 245-262.

[55] Flohr, H. (1992): Die physiologischen Bedingungen des phänomenalen Bewußtseins, Forum für interdisziplinäre Forschnung 1, S. 49-55.

[56] Flohr, H. (1994): Denken und Bewußtsein, S. 335-352, in [65].

[57] Flohr, H.; Glade, U. & Motzko, D. (1998): The role of the NMDA synapse in general anesthesia, Toxicology Letters, 100-101, pp. 23-29.

[58] Flohr, H. (2002): NMDA Receptor-Mediated Computational Processes and Phenomenal Consciousness, pp. 245-258, in [113].

[59] Fodor, J.A. (1983): The Modularity of Mind, Cambridge, MA: MIT Press.

[60] Forster, O. (1996): Analysis 1, 4. Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.

[61] Forster, O. (1996): Analysis 2, 5. Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg Verlag.

[62] Forzano, L.B. & Logue, A.W. (1994): Self-Control in Adult Humans: Comparison of Qualitatively Different Reinforcers, Learing and Motivation, 25, pp. 65-82.

[63] Foss, B.M. (ed.)(1966): New Horizons in Psychology, I, Harmondsworth: Penguin Books.

[64] Franzen, W. (1995): Die Sprachen und das Denken. Zum Stand der Diskussion über den "linguistischen Relativismus", S. 249-268 in [161].

[65] Fedrowitz, J.; Matejovski, D. & Kaiser, G. (Hrsg.)(1994): Neuroworlds: Gehirn - Geist - Kultur, Frankfurt & New York: Campus Verlag.

[66] Gallistel, C.R. & Gelman, R. (1978): The Child's Understanding of Number, Cambridge, Mass.: Havard University Press.

[67] Gebauer, M. (Hrsg.)(1996): Thomas Nagel - Letzte Fragen, Bodenheim b. Mainz: Philo Verlagsgesellschaft.

[68] Gigerenzer, G. (2000): Adaptive Thinking - Rationality in the Real World, Oxford: Oxford University Press.

[69] Gould, S.J. (1991): Exaptation: A crucial Tool for an Evolutionary Psychology, Journal of Social Issues, Vol. 47, No. 3, pp. 43-65.

[70] Hadamard, J. (1945): The Psychology of Invention in the Mathematical Field, New York: Dover.

[71] Hardy, G.H. (1976): A Mathematician's Apology, Reprinted with Foreword by C.P. Snow, Cambridge: Cambridge University Press.

[72] Hebb, D.O. (1949): The Organisation of Behavior, New York: Wiley.

[73] Heintz, B. (2000): Die Innenwelt der Mathematik - Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin, Wien & New York: Springer Verlag.

[74] Hersh, R. (ed.)(2006): 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics, New York: Springer Science+Business Media.

[75] Heuser, H. (1994): Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 11. Auflage, Stuttgart: B.G. Teubner.

[76] Heuser, H. (1995): Lehrbuch der Analysis, Teil 2, 9. Auflage, Stuttgart: B.G. Teubner.

[77] Heyting, A. (ed.)(1975): L.E.J. Brouwer - Collected Works, Volume 1, Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

[78] Hilbert, D. (1964): Hilbertiana - Fünf Aufsätze von David Hilbert, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

[79] Hill, R.A. & Dunbar, R. (2003): Social network size in humans, Human Nature, Vol. 14, No. 1, pp. 53-72.

[80] Hinrichs, J. V.; Yurko, D.S. & Hu, J.M. (1981): Two-Digit Number Comparison: Use of Place Information, Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, Vol. 7, No. 4, pp. 890-901.

[81] Hirschfeld, L.A. & Gelman, S.A. (eds.)(1994): Mapping the mind: Domain specifity in cognition and culture, Cambridge: Cambridge University Press.

[82] Hittmair-Delazer, M.; Semenza, C. & Denes, G. (1994): Concepts and Facts in Calculation, Brain, 117, pp. 715-728.

[83] Hittmair-Delazer, M.; Sailer, U. & Benke, T. (1995): Impaired arithmetic facts but intact conceptual knowledge - a single-case study of dyscalculia, Cortex, 31, pp. 139-147.

[84] Humphry, N.K. (1976): The social function of intellect, pp. 303-317, in [6].

[85] Hurford, J.R.; Studdert-Kennedy, M. & Knight, C. (eds.)(1998): Approaches to the Evolution of Language - Social and Cognitive Basis, Cambridge: Cambridge University Press.

[86] Jolly, A. (1966): Lemur Social Behavior and Primate Intelligence, Science, Vol. 153, pp. 501-506.

[87] Kanitscheider, B. (2006): Naturalismus und logisch-mathematische Grundlagenprobleme, Erwägen Wissen Ethik (EWE), 17, Heft 3, S. 325-338.

[88] Kant, I. (1968): Kants Werke, Akademie Textausgabe, Band III: Kritik der reinen Vernunft, Berlin: Walter de Gruyter & Co.

[89] Kaufmann, E.L.; Lord, M.W.; Reese, T.W. & Volkmann, J. (1949): The Discrimination of Visual Number, American Journal of Psychology, 62, pp. 498-525.

[90] Kennedy, H.C. (1973): Selected works of Guiseppe Peano, Translated and edited by H.C. Kennedy, Toronto & Buffalo: University of Toronto Press.

[91] Kerényi, K. (1966): Die Mythologie der Griechen, Band I: Die Götter- und Menschengeschichten, München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

[92] Kerényi, K. (1966): Die Mythologie der Griechen, Band II: Die Heroen-Geschichten, München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

[93] Kinderman, P.; Dunbar, R. & Bentall, R.P. (1998): Theory-of-mind deficits and causal attributions, British Journal of Psychology, 89, pp. 191-204.

[94] Kline, M. (1972): Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York: Oxford University Press.

[95] Knorr Cetina, K. (1998): Sozialität mit Objekten. Soziale Beziehungen in post-traditionellen Wissensgesellschaften, S. 83-120 in [130].

[96] Koch, C. (2005): Bewusstsein - ein neurobiologisches Rätsel, München: Elsevier.

[97] Körner, S. (1968): Philosophie der Mathematik, München: Nymphenburger Verlagshandlung.

[98] Kummer, H.; Daston, L.; Gigerenzer, G & Silk, J. B. (1997): The Social Intelligence Hypothesis, pp. 157-179 in [175].

[99] von Kutschera, F. & Breitkopf, A. (2000): Einführung in die moderen Logik, 7. neu bearbeitete Auflage, München: Alber Verlag.

[100] Lai, C.S.L. et al. (2001): A forkhead-domain gene is mutated in a serve speech and language disorder, Nature, Vol. 413, pp. 519-523.

[101] Lakoff, G. & Núñez, R. (2000): Where Mathematics Comes From, New York: Basic Books.

[102] Lenhard, J. & Otte, M. (Hrsg.)(2002): Bertrand Russell - Einführung in die mathematische Philosophie, Hamburg: Felix Meiner Verlag.

[103] Leslie, A.M. (1987): Pretense and Representation: The Origins of "Theory of Mind", Psychological Review, Vol. 94, No. 4, pp. 412-426.

[104] Leslie, A.M. (1991): The Theory of Mind Impairment in Autism: Evidence for a Modular Mechanism of Development, pp. 63-78, in [176].

[105] Leslie, A.M. (1994): ToMM, ToBy, and Agency: Core architecture and domain specificty, pp. 119-148 in [81].

[106] Leslie, A.M. (2000): How to Aquire a Representational Theory of Mind, pp. 197-223, in [148].

[107] Lewis, M. & Haviland-Jones, J.M. (eds.)(2000): Handbook of Emotions, 2nd Edition (paperback edition 2004), New York: Guilford Press.

[108] Lütge, C. & Vollmer, G. (Hrsg.)(2004): Fakten statt Normen?, Baden-Baden: Nomos Verlagsgesellschaft.

[109] Mameli, M. (2007): Evolution and psychology in philosophical perspective, pp. 21-34, in [49].

[110] Mandler, G. & Shebo, B.J. (1982): Subitizing: An Analysis of Its Component Processes, Journal of Experimental Psychology: General, Vol. 111, No. 1, pp. 1-22.

[111] Matsuzawa, T. (1985): Use of numbers by a chimpanzee, Nature, Vol. 315, pp. 57-59.

[112] Meck, W.H. & Church, R.M. (1983): A Mode Controle Model of Counting and Timing Processes, Journal of Experimental Psychology: Animal Behaviour Processes, Vol. 9, No. 3, pp. 320-334.

[113] Metzinger, T. (ed.)(2002): Neural Corrolates of Consciousness - Empirical and Conceptual Questions, Cambridge, MA. & London: MIT Press.

[114] Mischel, W.; Shoda, Y. & Rodriguez, M.L. (1989): Delay of Gratification in Children, Science, Vol. 244, pp. 933-938.

[115] Moll, H. & Tomasello, M. (2007): Cooperation and human cognition: the Vygotskian intelligence hypothesis, Philosophical Transactions of the Royal Society B, 362, pp. 639-648.

[116] Nagel, T. (1996): Wie fühlt es sich an, eine Fledermaus zu sein?, S. 229-249, in [67].

[117] Nesse, R.M. (1990): Evolutionary Explanations of Emotions, Human Nature, Vol. 1, No. 3, pp. 261-289.

[118] Núñez, R. & Lakoff, G. (2005): The Cognitive Foundations of Mathematics: The Role of Conceptual Metapher, pp. 109-124, in [26].

[119] Oliveri, G. (1997): Mathematics. A Science of Patterns?, Synthese, 112, pp. 379-402.

[120] Otte, M. (Hrsg.)(1974): Mathematiker über die Mathematik, Berlin & Heidelberg & New York: Springer Verlag.

[121] Park, J.H. (2007): Distinguishing Byprodukts from Non-Adaptive Effects of Algorithmic Adaptations, Evolutionary Psychology, Vol. 5(1), pp. 47-51.

[122] Pepperberg, I.M. (1987): Evidence for Conceptual Quantitative Abilities in the African Grey Parrot: Labeling of Cardinal Sets, Ethology, 75, pp. 37-61.

[123] Perner, J. (1991): Understandig the Representational Mind, Cambridge, MA: Bradford/MIT Press.

[124] Perner, J. & Dienes, Z. (2003): Developmental aspects of consciousness: How much theory of mind do you need to be consciously aware?, Consciousness and Cognition, 12, pp. 63-82.

[125] Posner, M.I.; Petersen, S.E.; Fox, P.T. & Raichle, M.E. (1988): Localization of Cognitive Operations in the Human Brain, Science, Vol. 240, pp. 1627-1631.

[126] Prediger, S. (2004): Mathematiklernen in interkultureller Perspektive. Mathematischphilosophische, deskriptive und präskriptive Betrachtungen, München/Wien: Profil Verlag.

[127] Premack, D. & Woodruff, G. (1978): Does the chimpanzee have a theory of mind?, The Behavioral and Brain Sciences, 4, pp. 515-526.

[128] Pylyshyn, Z.W. (1978): When is attribution of beliefs justified?, The Behavioral and Brain Sciences, 4, pp. 592-593.

[129] Quine, W.V.O. (1974): Grundzüge der Logik, Frankfurt am Main: Suhrkamp Taschenbuch Verlag.

[130] Rammert, W. (Hrsg.)(1998): Technik und Sozialtheorie, Frankfurt & New York: Campus Verlag.

[131] Rav, Y. (1996): Die mathematische Tätigkeit aus der Perspektive der EE, S. 22-35, in [136].

[132] Rav, Y. (2006): Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology, pp. 71-96, in [74].

[133] Resnik, M. (1975): Mathematical Knowledge and Pattern Cognition, Canadian Journal of Philosophy, 5.1, pp. 25-39.

[134] Resnik, M. (1981): Mathematics as a Science of Patterns: Ontology and Reference, Noûs, 15, pp. 529-550.

[135] Resnik, M. (1982): Mathematics as a Science of Patterns: Epistemology, Noûs, 16, pp. 95-105.

[136] Riedl, R. & Delpos, M. (Hrsg.)(1996): Die Evolutionäre Erkenntnistheorie im Spiegel der Wissenschaften, Wien: WUV-Universitätsverlag.

[137] Roland, P.E. & Friberg, L. (1985): Localization of Cortical Areas Activated By Thinking, Journal of Neurophysiology, Vol. 53, No. 5, pp. 1219-1243.

[138] Roth, G. (1996): Das Gehirn und seine Wirklichkeit, 5. Auflage, Frankfurt/Main: Suhrkamp Verlag.

[139] Roth, G. (2001): Fühlen, Denken, Handeln - Wie das Gehirn unser Verhalten steuert, Frankfurt/Main: Suhrkamp Verlag.

[140] Roth, G. (2002): The Evolution and Ontogeny of Consciousness, pp. 77-97, in [113].

[141] Russon, A.; Bard, K.A. & Parker, S.T. (eds.)(1996): Reaching into Thought - The Minds of the Great Apes, Cambridge: Cambridge University Press.

[142] Samuels, R. (2000): Massively modular minds: evolutionary psychology and cognitive architecture, pp. 13-46, in [28].

[143] Sawyer, W.W. (1955): Prelude to Mathematics, London: Penguin Books.

[144] Snapper, E. (1988): What do we do when we do Mathematics?, The Mathematical Intelligencer, Vol. 10, No. 4, pp. 53-58.

[145] Sperber, D. (1994): The modularity of thought and the epidemiology of representations, pp. 39-67, in [81].

[146] Sperber, D. (1996): Explaining Culture, Oxford: Blackwell.

[147] Sperber, D. (2000): Metarepresentations in an Evolutionary Perspective, pp. 117-137 in [148].

[148] Sperber, D. (ed.)(2000): Metarepresentations, Oxford: Oxford University Press.

[149] Sperber, D. & Hirschfeld L.A. (2004): The cognitive foundations of cultural stability and diversity, Trends in Cognitive Sciences, Vol. 8, No.1, pp. 40-46.

[150] Sterelny, K. & Fitness, J. (eds.)(2003): From Mating to Mentality - Evaluating Evolutionary Psychology, New York & Hove: Psychology Press.

[151] Sterelny, K. (2007): Social intelligence, human intelligence and niche construction, Philosophical Transactions of the Royal Society B, 362, pp. 719-730.

[152] Steen, L.A. (1988): The Science of Patterns, Science, Vol. 240, pp. 611-616.

[153] Sternberg, R.J. & Kaufman, J.C. (eds.)(2002): The Evolution of Intelligence, Mahwah, NJ: Erlbaum.

[154] Suddendorf, T. & Whiten, A. (2003): Reinterpreting the mentality of apes, pp. 174-196 in [150].

[155] Thiel, C. (Hrsg.)(1988): Gottlob Frege - Die Grundlagen der Arithmetik, Hamburg: Felix Meiner Verlag.

[156] Thompson, R.F.; Mayers, K.S.; Robertson, R.T. & Patterson, C.J. (1970): Number Coding in Association Cortex of the Cat, Science, Vol. 168, pp. 271-273.

[157] Tinbergen, N. (1963): On aims and methods of Ethology, Zeitschrift für Tierpsychologie, Bd. 20, S. 410-433.

[158] Tooby, J. & Cosmides, L. (1990): The Past Explains the Present: Emotional Adaptations and the Structure of Ancestral Enviroment, Ethology and Sociobiology, 11, pp. 375-424.

[159] Tooby, J. & Cosmides, L. (1992): The Psychological Foundations of Culture, pp. 19-136, in [2].

[160] Tooby, J. & Cosmides, L. (2005): Conceptual Foundations of Evolutionary Psychology, pp. 5-67, in [18].

[161] Trabant, J. (Hrsg.)(1995): Sprache denken - Positionen aktueller Sprachphilosophie, Frankfurt/Main: Fischer Verlag.

[162] Treml, A. (2006): Die Drei-Welten-Theorie als Brücke zwischen Natur- und Geisteswissenschaften, Bielefeld: (Preprint).

[163] Tymoczko, T. (ed.)(1998): New Directions in the Philosophy of Mathematics - an Anthology, Revised and expanded edition, Princeton, NJ: Princeton University Press.

[164] Uhl, M. & Voland, E. (2002): Angeber haben mehr vom Leben, Heidelberg & Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

[165] Voland, E. (2000): Grundriss der Soziobiologie, 2. Auflage, Heidelberg & Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

[166] Voland, E. (2004): Normentreue zwischen Reziprozität und Prestige-Ökonomie: Eine soziobiologische Interpretation kostspieliger sozialer Konformität, S. 177-189, in [108].

[167] Voland, E. (2007): We Recognize Ourselves as Being Similar to Others: Implications of the "Social Brain Hypothesis" for the Biological Evolution of the Intuition of Freedom, Evolutionary Psychology, 5(3), pp. 442-452.

[168] Voland, E. (2007): Die Fortschrittsillusion, Spektrum der Wissenschaft, 04/07, S. 108-113.

[169] Vollmer, G. (1975): Evolutionäre Erkenntnistheorie, Stuttgart: Hirzel Verlag.

[170] Vollmer, G. (1985): Was können wir wissen?, Band 1, Stuttgart: Hirzel Verlag.

[171] Vygotsky, L.S. (1978): Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes, Cambridge, MA: Havard University Press.

[172] Washburn, D.A. & Rumbaugh, D.M. (1991): Ordinal Judgements of Numerical Symbols by Macaques (Macaca mulatta), Psychological Science, Vol. 2, No.3, pp. 190-193.

[173] Wason, P.C. (1966): Reasoning, pp. 135-151 in [63].

[174] Wason, P.C. (1983): Realism and rationality in the selection task, pp. 44-75 in [53].

[175] Weingart, P; Mitchell, S. D.; Richerson, P. J. & Maasen, S. (eds.)(1997): Human by Nature - Between Biology and the Social Sciences, Mahwah & London: Erlbaum.

[176] Whiten, A. (ed.)(1991): Natural Theories of Mind, Oxford: Blackwell.

[177] Whiten, A. (1996): Imitation, pretense, and mindreading: Secondary representation in comparative primatology and developmental psychology?, pp. 300-324 in [141].

[178] Whiten, A. & Byrne, R.W. (eds.)(1997): Machiavellian Intelligence II: Extensions and Evaluations, Cambridge: Cambridge University Press.

[179] Wittgenstein, L. (1990): Tractatus logico-philosophicus, Tagebücher 1914-1916, Philosophische Untersuchungen, Werkausgabe, Band 1, 7. Auflage, Frankfurt a. M.: Suhrkamp Verlag.

[180] Woodruff, G. & Premack, D. (1981): Primative, mathematical concepts in the chimpanzee: proportionality and numerosity, Nature, Vol. 293, pp. 568-570.

[181] Weyl, H. (1966): Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 3. wesentlich erweiterte Auflage, München & Wien: R. Oldenbourg.

[182] Wynn, K. (1990): Children's understanding of counting, Cognition, 36, pp. 155-193.

[183] Zahavi, A. (1975): Mate Selection - A Selection for a Handicap, Journal of theoretical Biology, 53, pp. 205-214.

[184] Zahavi, A. & Zahavi, A. (1998): Signale der Verständigung - Das Handicap-Prinzip, Frankfurt a.M. & Leipzig: Insel Verlag.

Warum können Menschen mathematisch denken? Welche evolutionäre Erklärung für das mathematische Beziehungsdenken könnte es geben? Gibt es vielleicht einen evolutionären Zusammenhang zwischen dem mathematischen und dem sozialen Beziehungsdenken? Spielt sogar die soziale Intelligenz des Menschen dabei eine zentrale Rolle? Und, wenn ja, welche? Was für Auswirkungen könnten diese evolutionären Zusammenhänge auf grundlegende Fragen im Rahmen der Philosophie der Mathematik haben? Dies alles sind Fragestellungen, denen im vorliegenden Buch über die evolutionären Ursprünge des mathematischen Denkens nachgegangen wird.

Logos Verlag Berlin

ISBN 978-3-8325-2091-5