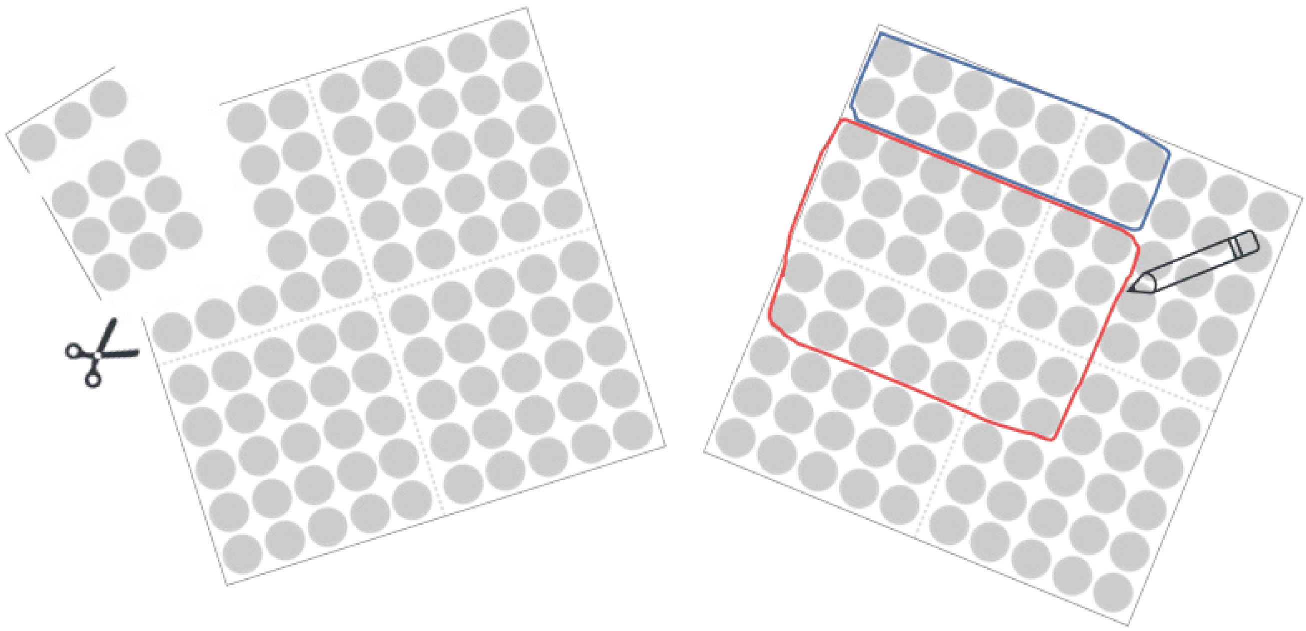
35 Schriften aus der Fakultät Humanwissenschaften der Otto-Friedrich-Universität Bamberg

Multiplikatives Verständnis fördern

Entwicklung und Evaluation eines Förderkonzepts in differenten Rahmenbedingungen

Xenia Lamprecht



University of Bamberg Press

35 Schriften aus der Fakultät Humanwissenschaften der Otto-Friedrich-Universität Bamberg

Schriften der Fakultät Humanwissenschaften
der Otto-Friedrich-Universität Bamberg

Band 35

University
of Bamberg
Press
2020

Multiplikatives Verständnis fördern

Entwicklung und Evaluation eines Förderkonzepts
in differenten Rahmenbedingungen

von Xenia Lamprecht

University
of Bamberg
Press
2020

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Diese Arbeit hat der Fakultät Humanwissenschaften der
Otto-Friedrich-Universität Bamberg als Dissertation vorgelegen.
Gutachterin: Prof. Dr. Anna Susanne Steinweg
Gutachter: Prof. Dr. Marcus Nührenbörger, TU Dortmund
Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 2019

Herstellung und Druck: docupoint, Magdeburg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press
Umschlagbild: © Xenia Lamprecht

http://www.uni-bamberg.de/ubp

ISSN: 1866-8674
ISBN: 978-3-86309-752-3 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-753-0 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-irb-485741
DOI: http://dx.doi.org/10.20378/irb-48574

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei den Menschen bedanken, die die Entstehung dieser Arbeit begleitet und unterstützt haben.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Doktormutter Prof. Dr. Anna S. Steinweg für die hervorragende Betreuung meiner Arbeit. Sie hat durch ihre konstruktive Kritik und Impulse sowie wertvollen Anmerkungen entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Zudem verdanke ich ihr spannende Einblicke in das universitäre Arbeiten an der Otto-Friedrich-Universität Bamberg.

Sehr herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. Nührenbörger für seinen Einsatz als Zweitgutachter.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Weth, Herrn Prof. Dr. Weigand sowie Herrn Prof. Dr. Siller für die hilfreichen sowie kritischen Anmerkungen im Rahmen des alljährlichen Doktorandenkolloquiums Doc^3 der Universität Bamberg, Erlangen-Nürnberg und Würzburg.

Mein Dank gilt den beteiligten studentischen Mitarbeiterinnen, die mich bei der Durchführung von Tests in den teilnehmenden Klassen sowie der Transkription ausgewählter Videoaufnahmen der durchgeführten Einzelförderung unterstützt haben.

Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Mathematikdidaktik in Bamberg danke ich sehr für das kollegiale Miteinander und den konstruktiven Austausch im Rahmen unseres Forschungsseminars sowie insbesondere für weitere inhaltliche und sprachliche Anregungen außerhalb unserer offiziellen Sitzungen.

Besonders danke ich Simon Dickopf für die Beratung und Unterstützung bei Fragen der statistischen Datenauswertung.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei den beteiligten Lehrkräften sowie Schülerinnen und Schülern. Durch ihre bereitwillige Teilnahme am Projekt haben sie es überhaupt erst ermöglicht, diese empirische Untersuchung durchzuführen.

Mein Dank gilt ganz besonders auch meiner Familie und Freunden, die mich in Höhen und Tiefen in der Zeit der Arbeit an der Dissertation immer wieder ermutigt und unterstützt haben.

Xenia Lamprecht

Inhalt

> Ein guter Unterricht [...] ist wahrscheinlich für den weniger begabten Schüler noch wertvoller als für den Begabten, denn jener wird leichter als dieser durch schlechten Unterricht aus der Bahn geworfen. (Bruner, 1970, S. 23)

1 Einleitung

Ein im Sinne des Eingangszitats guter *gemeinsamer* Unterricht für Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen stellt in der Praxis für Lehrkräfte eine große Herausforderung dar (z. B. Buholzer & Kummer Wyss, 2012, S. 7; Scherer, 2017, S. 194). Auch während meiner Tätigkeit als Grundschullehrerin wurde ich zunehmend mit der Umsetzung der Forderung nach Inklusion im Unterrichtsalltag konfrontiert. Hierbei stellte vor allem auch der Umgang mit Heterogenität bezüglich mathematischer Fähigkeiten im Unterricht eine herausfordernde Aufgabe dar. Daraus entstand die persönliche Motivation, sich auch wissenschaftlich damit auseinanderzusetzen, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen im Bereich mathematischer Fähigkeiten geeignet unterrichtet werden können.

Vor dem Hintergrund der Inklusionsforderung ist das Thema Heterogenität bildungspolitisch höchst aktuell. Es kommt dadurch zu einer Zunahme der Heterogenität in der Grundschule. Überlegungen stehen vermehrt im Raum, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen entsprechend gefördert werden können.

Natürlich wurden bereits verschiedenste Interventionen zur Förderung von Kindern mit Förderbedarf erprobt (z. B. Häsel, 2001; Moser Opitz, 2001; Scherer, 1995). Allerdings liegt der Schwerpunkt der evaluierten Konzepte bisher eher auf der Förderung im additiven Bereich. Untersuchungen zur Multiplikation existieren ebenfalls. Deren Schwerpunkte liegen z. B. auf dem Einsatz von Eigenproduktionen (Selter, 1994), der Verwendung unterschiedlicher Darstellungsformen (z. B. Bönig, 1995a; Kuhnke, 2013) oder dem Vergleich unterschiedlicher Vorgehensweisen zur Behandlung der Multiplikation (z. B. Woodward, 2006; Köhler & Gasteiger, 2016). Erste Ergebnisse zur Nutzung von Ableitungsstrategien bei der Multiplikation auch von rechenschwachen Kindern liefern Gaidoschik, Deweis & Guggenbichler (2017). Dennoch kann ein Forschungsdesiderat bei der Evaluierung von Konzepten speziell zur Förderung im multiplikativen Bereich ausgemacht werden.

Hier knüpft das Forschungsprojekt der vorliegenden Arbeit an. Es steht die Forschungsfrage im Mittelpunkt der Arbeit, welche Antworten der Mathematikunterricht der Grundschule auf die Inklusionsforderung im Inhaltsbereich Multiplikation anbieten kann. Deswegen wird auf Basis theoretischer Überlegungen ein Konzept zur *Förderung des Multiplikativen Verständnisses* entwickelt, das wissenschaftlich erprobt wird. Dies entspricht Wittmanns (1992) Vorstellung der Mathematikdidaktik als ‚design science'. Aus seiner

> Sicht kann die spezifische Aufgabe der Mathematikdidaktik nur wahrgenommen werden, wenn die Entwicklung und Erforschung inhaltsbezogener theoretischer Konzepte und praktischer Unterrichtsbeispiele mit dem Ziel einer Verbesserung des realen Unterrichts als Kernbereich in den Mittelpunkt der wissenschaftlichen Arbeit gerückt wird. (ebd., S. 56)

Bei der Entwicklung des Förderkonzepts zum Multiplikativen Verständnis fließen Erkenntnisse aus der Mathematikdidaktik als Kerndisziplin ein. Von Bedeutung sind jedoch auch mathematische, pädagogische und psychologische Perspektiven.

> Die Besonderheit der Aufgabenstellung verlangt, daß die Mathematikdidaktik einerseits stabile Beziehungen zu den Bezugsdisziplinen aufbaut und andererseits im Verhältnis zur Schule einen guten Ausgleich zwischen Praxisnähe und theoretischer Distanz herstellt. (ebd., S. 56)

Die Grundsatzfrage ist, *wie* Kinder mit Förderbedarf sinnvollerweise gefördert werden können. Ist es effektiv, Kinder einzeln zu fördern, oder kann auch eine Förderung im Klassenverband Effekte erzielen. Aus diesem Grund wird das Förderkonzept in verschiedenen Settings erprobt. Es soll herausgefunden werden, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses zeigen.

Um Perspektiven der Bezugsdisziplinen aufzuarbeiten, wird in *Kapitel 2* auf Begriffe in Zusammenhang mit gemeinsamem Unterricht von Kindern mit unterschiedlichen Voraussetzungen und auf rechtliche Grundlagen eingegangen. Zudem werden Forschungsbefunde zur Wirkung gemeinsamen Unterrichts und statistische Auswertungen zur aktuellen Umsetzung in Deutschland dargestellt. Kritikpunkte an der bisherigen Umsetzung und alternative Vorschläge werden beschrieben. In *Kapitel 3* wird Heterogenität aus mathematikdidaktischer Perspektive beleuchtet und dabei insbesondere auf Rechenschwäche eingegangen. Unterschiedliche Möglichkeiten werden beschrieben, wie Kinder mit Förderbedarf im Mathematikunterricht geeignet gefördert werden können. Festzustellen ist, dass evaluierte Förderkonzepte vielfach im additiven Bereich existieren. In *Kapitel 4* wird deswegen die Operation Multiplikation und ihre Eigenschaften aus mathematischer und didaktischer Perspektive betrachtet. Dabei spielen das Konzept der Grundvorstellungen und der Einsatz von Darstellungsformen eine wesentliche Rolle. In *Kapitel 5* werden die Forschungsfragen für die hier vorliegende Arbeit dargelegt. *Kapitel 6* stellt die im Projekt genutzten Methoden vor und in *Kapitel 7* wird auf das Design und die Durchführung des Konzepts zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses eingegangen. In *Kapitel 8* werden sowohl die qualitativen als auch die quantitativen Ergebnisse der Untersuchung präsentiert. *Kapitel 9* rundet die Arbeit mit einem zusammenfassenden Fazit sowie einem Ausblick ab.

2 Heterogenität begegnen – grundsätzliche Bemerkungen zum gemeinsamen Unterricht

Aus bildungspolitischer Perspektive ist das Thema Heterogenität höchst aktuell. In diesem Zusammenhang sind Begriffe wie ‚Integration' und ‚Inklusion' und deren Bedeutung relevant (vgl. Kap. 2.1). Auf der einen Seite stehen rechtliche Grundlagen und Forderungen, die umgesetzt werden sollen (vgl. Kap. 2.2). Auf der anderen Seite stellt aus der Perspektive der Praxis die konkrete Umsetzung von gemeinsamem Unterricht für alle Kinder mit unterschiedlichsten Voraussetzungen für Lehrkräfte eine sehr große Herausforderung dar (z. B. Scherer, 2017, S. 194). Für die Umsetzung von gemeinsamem Unterricht sind natürlich Forschungsergebnisse zu deren Wirkung auf verschiedene Bereiche bedeutsam. Deshalb werden ausgewählte Befunde dargelegt (vgl. Kap. 2.3). Wie die Umsetzung in der Praxis derzeit in Deutschland aussieht, soll ein Blick in statistische Auswertungen der Kultusministerkonferenz zeigen (vgl. Kap. 2.4). In Bezug auf die bisherige Umsetzung werden verschiedene Kritikpunkte angeführt, auf die nachfolgend eingegangen wird (vgl. Kap. 2.5). Alternative Vorschläge aus pädagogischer und didaktischer Perspektive werden dargestellt (vgl. Kap. 2.6). Abschließend werden Schlussfolgerungen für die hier vorliegende Arbeit gezogen (vgl. Kap. 2.7).

2.1 Integration und Inklusion

Bereits seit Anfang der 1970er Jahre wurde in Deutschland gemeinsamer Unterricht für Kinder mit und ohne Behinderung gefordert. Widerstand wurde von konservativen Parteien, Sonderschulen, Schulverwaltern und auch Vertretern aus der sonderpädagogischen Wissenschaft geleistet. Erste Versuche an Schulen wurden i. d. R. auf Bestrebungen von betroffenen Eltern und engagierten Lehrkräften umgesetzt. Ausgangspunkt für die entstehende Integrationsforschung war somit dieser konfliktreiche Hintergrund (Hinz, 2008, S. 197; Preuss-Lausitz, 2002, S. 458).

Der Vergleich verschiedener Schulsysteme ausgewählter PISA-Teilnehmerstaaten zeigt,

> dass die lange Zeit vorherrschende Auffassung nicht aufrecht erhalten [sic] werden kann, wonach nur über die Herstellung vermeintlich leistungshomogener Lernmilieus durch frühe äußere Differenzierung ein hohes Leistungsniveau erreichbar sei. (Arbeitsgruppe Internationale Vergleichsstudie, 2003, S. 261)

Ziel der Integrationspädagogik ist es, Menschen mit Behinderung schulisch und gesellschaftlich nicht auszusondern (Prengel, 2006, S. 139). In diesem Sinn versteht man unter

> Integration das gemeinsame Lernen aller, von geistig behinderten bis hin zu sehr guten Schülerinnen und Schülern und schließt Kinder mit allen Arten von Behinderungen, also auch blinde, gehörlose, körperbehinderte und schwermehrfachbehinderte Kinder mit ein. (ebd., S. 139)

Feuser (1982) definiert bezeichnenderweise bereits im Titel eines Beitrags Integration als „gemeinsame Tätigkeit (Spielen/Lernen/Arbeit) am gemeinsamen Gegenstand/Produkt in Kooperation von behinderten und nicht behinderten Menschen“ (S. 86). Des Weiteren bedeutet für ihn Integration „allgemein gesellschaftlich die Absage an die ‚Aussonderung‘ und ‚Besonderung‘ von Menschen, die als behindert und/oder psychisch krank gelten“ (ebd.).

Wember (2013) formuliert die Bedeutung von Inklusion für die allgemeinbildende Schule folgendermaßen:

> In schulische Praxis umgesetzt bedeutet vollständige Inklusion: Kein Kind muss besondere Leistungen erbringen oder besondere Eigenschaften nachweisen, damit es eine bestimmte Schule besuchen darf. Die Allgemeine Schule wird alle Kinder annehmen, wie sie sind und sie wird alle ohne jede Diskriminierung behandeln. (S. 380)

Die Begriffe Integration und Inklusion scheinen momentan zum Teil synonym verwendet zu werden, zunehmend wird der Begriff Inklusion auch genutzt, um den Begriff Integration abzulösen. Auch in englischsprachiger Literatur kann Ähnliches festgestellt werden (Hinz, 2002, S. 354). Es gibt aber auch Vertreter, die im Unterschied zwischen Inklusion und Integration „much more than a fashionable change in politically correct semantics“ (Mittler, 2000, S. 10) sehen.

Um die Unterschiede zwischen ‚Integration‘ und ‚Inklusion‘ aufzuzeigen, soll im folgenden Abschnitt auf fünf Entwicklungsphasen des Bildungswesens bezogen auf die Sonderpädagogik eingegangen werden, die von verschiedenen Autoren identifiziert wurden (Bürli, 1997, S. 55 f.; Hinz, 2004, S. 47 ff.; Sander 2002a, S. 147, 2002b, S. 61 f.; Wilhelm & Bintinger, 2001): Zu Beginn steht die „Exklusion“; es folgt eine Phase der „Segregation“; es schließt die „Integration“ an, gefolgt von der „Inklusion“; im Anschluss daran kommt die Allgemeine Pädagogik mit „Vielfalt als Normalfall“.

In der Phase der *Exklusion* (Abb. 2.1) werden behinderte Menschen aus dem Bildungssystem ausgeschlossen (Hinz, 2004, S. 47). Sie sind von der Schulpflicht „befreit“ (Wocken, 2015, S. 71) und werden als „bildungsunfähig“ (ebd.) angesehen.

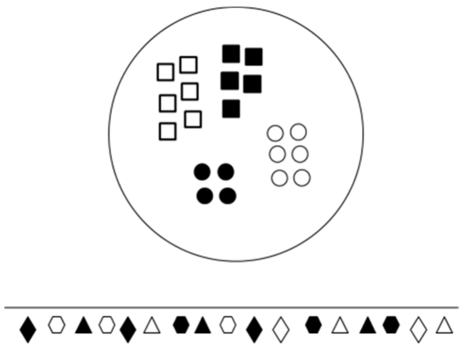


Abbildung 2.1: Exklusion (in Anlehnung an Hinz, 2004, S. 47 und Wocken, o. J., S. 4)

In der Phase der *Segregation* (Abb. 2.2) werden die Schülerinnen und Schüler nach bestimmten Kriterien verschiedenen Institutionen zugeordnet, z. T. nach Leistung, aber auch nach sozialem Milieu, wie die PISA-Studien gezeigt haben. Es gibt hier den Bereich der Normalität und einen Bereich am Rand der Normalität in einer anderen Institution. Bei größerer Abweichung steigt die Person in eine weitere Institution ab und gerät in einen weiteren Bereich. Es gibt auch noch einen Bereich, der für den Rest vom Rest vorgesehen ist (Hinz, 2004, S. 48).

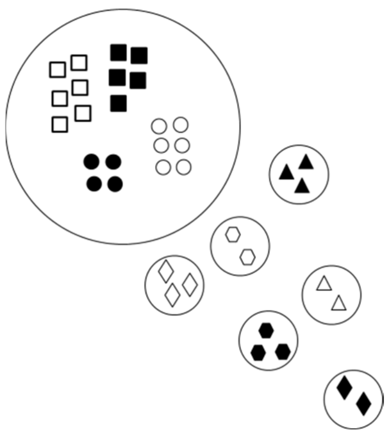


Abbildung 2.2: Segregation (in Anlehnung an Hinz, 2004, S. 48 und Wocken, o. J., S. 4)

In der Phase der *Integration* (Abb. 2.3) gibt es die verschiedenen Bereiche immer noch. Es bestimmt immer noch die Dominanz des Bereichs der Normalen. Eher am Rand gibt es aber auch Personen, die etwas vom Normalen abweichen und mit viel Glück auch Personen, die stark vom Normalen abweichen (Hinz, 2004, S. 49). Die Personen werden mit spezieller sonderpädagogischer Unterstützung in den allgemeinen Klassen unterrichtet (ebd.). Einige Personen gelten aber immer noch als nicht integrationsfähig (Wocken, o. J., S. 4).

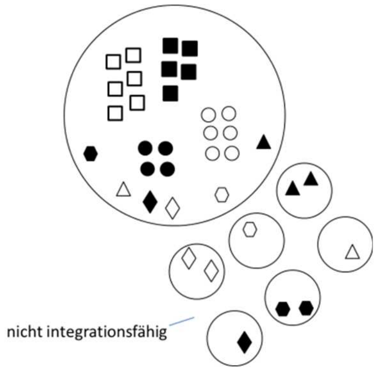


Abbildung 2.3: Integration (in Anlehnung an Hinz, 2004, S. 49 und Wocken, o. J., S. 4)

Bei der *Inklusion* (Abb. 2.4) bilden die unterschiedlichen Personen eine Gruppe. Die Normalität ist nicht mehr homogen, sondern verschiedene Menschen werden gemeinsam unterrichtet. Es ist hier keine Aussonderung mehr vorgesehen (Hinz, 2004, S. 49).

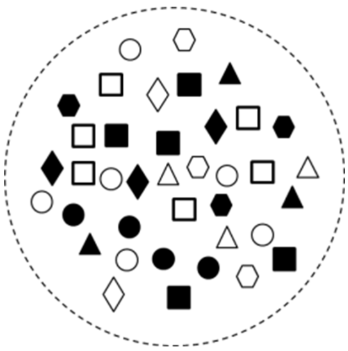


Abbildung 2.4: Inklusion (in Anlehnung an Hinz, 2004, S. 49 und Wocken, o. J., S. 4)

In der Phase der *Pädagogik der Vielfalt* ist Heterogenität der Normalfall. Deswegen wird kein spezifisches Konzept benötigt. In der allgemeinen Pädagogik ist die Inklusion enthalten und es gibt keine spezielle Abbildung (Hinz, 2004, S. 50).

Inklusion stellt hier also eine Weiterentwicklung der Integration dar. Erst bei der Umsetzung von Inklusion werden tatsächlich alle Menschen mit unterschiedlichsten Voraussetzungen gemeinsam unterrichtet und keine Aussonderung von bestimmten Gruppen findet mehr statt. Wie Inklusion rechtlichen Rahmenbedingungen gemäß umgesetzt werden soll, wird im folgenden Abschnitt erläutert.

2.2 Rahmenbedingungen

Ein wichtiger Schritt auf dem Weg, das Recht auf inklusive Bildung zu verankern, stellt die sog. Salamanca-Konferenz und die daraus hervorgehende Salamanca-Erklärung dar. Deswegen soll im Folgenden kurz auf wesentliche Forderungen dieser Erklärung eingegangen werden. Die Salamanca-Konferenz wurde von der spanischen Regierung in Zusammenarbeit mit der UNESCO, der Organisation der Vereinten Nationen für Bildung, Wissenschaft und Kultur (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization), organisiert und fand im Juni 1994 in Salamanca in Spanien statt. Es trafen sich 300 Teilnehmerinnen und Teilnehmer, 92 Regierungen und 25 internationale Organisationen mit dem Ziel, eine ‚Bildung für alle' zu unterstützen (UNESCO, 1994, S. 1). So erklären die Delegierten in der *Salamanca-Erklärung*,

- dass jedes Kind ein grundsätzliches Recht auf Bildung hat und dass ihm die Möglichkeit gegeben werden muss, ein akzeptables Lernniveau zu erreichen und zu erhalten,
- dass jedes Kind einmalige Eigenschaften, Interessen, Fähigkeiten und Lernbedürfnisse hat,
- dass Schulsysteme entworfen und Lernprogramme eingerichtet werden sollten, die dieser Vielfalt an Eigenschaften und Bedürfnissen Rechnung tragen,
- dass jene mit besonderen Bedürfnissen Zugang zu regulären Schulen haben müssen, die sie mit einer kindzentrierten Pädagogik, die ihren Bedürfnissen gerecht werden kann, aufnehmen sollten,
- dass Regelschulen mit dieser integrativen Orientierung das beste Mittel sind, um diskriminierende Haltungen zu bekämpfen, um Gemeinschaften zu schaffen, die alle willkommen heissen, um eine integrierende Gesellschaft aufzubauen und um Bildung für Alle zu erreichen; darüber hinaus gewährleisten integrative Schulen eine effektive Bildung für den Grossteil aller Kinder und erhöhen die Effizienz sowie schliesslich das Kosten-Nutzen-Verhältnis des gesamten Schulsystems. (ebd., S. 2)

Des Weiteren fordern die Delegierten die Regierungen u. a. dazu auf, ihre Schulsysteme insbesondere dahingehend zu verbessern, dass alle Kinder mit spezifischen Schwierigkeiten einbezogen werden können. Die Regierungen sollen „auf Gesetzes- bzw. politischer Ebene das Prinzip integrativer Pädagogik an[...]erkennen" (ebd.) und allen Kindern den Zugang zu Regelschulen gewähren, es sei denn, es gibt triftige Gründe, die dagegen sprechen. Zudem sollen Pilotprojekte entwickelt werden und ein Austausch mit anderen, in diesem Bereich erfahrenen Ländern stattfinden (ebd.).

Damit enthält die Salamanca-Erklärung wichtige Forderungen im Hinblick auf ein Schulsystem, das Kinder mit unterschiedlichsten Voraussetzungen in die Regelschulen einbezieht.

Das *Übereinkommen der Vereinten Nationen über die Rechte von Menschen mit Behinderung* (**Convention on the Rights of Persons with Disabilities** – CRPD) kann als weiterer Meilenstein auf dem Weg zur inklusiven Bildung gesehen werden. Es wurde von der Generalversammlung der Vereinten Nationen im Dezember 2006 beschlossen und ist im Mai 2008 in Kraft getreten. In diesem Übereinkommen werden die Rechte behinderter Menschen bezüglich verschiedener Lebensbereiche geregelt (Praetor Intermedia UG, o. J.). In Artikel 24 geht es um den Bereich ‚Bildung'. In Abs. 1 wird u. a. Folgendes gefordert:

> Die Vertragsstaaten anerkennen das Recht von Menschen mit Behinderungen auf Bildung. Um dieses Recht ohne Diskriminierung und auf der Grundlage der Chancengleichheit zu verwirklichen, gewährleisten die Vertragsstaaten ein integratives Bildungssystem auf allen Ebenen. (Bundesregierung der Bundesrepublik Deutschland, 2008, S. 1436)

In Abs. 2 wird dies weiter ausgeführt:

> Bei der Verwirklichung dieses Rechts stellen die Vertragsstaaten sicher, dass [...] Menschen mit Behinderungen nicht aufgrund von Behinderung vom allgemeinen Bildungssystem ausgeschlossen werden und dass Kinder mit Behinderungen nicht aufgrund von Behinderung vom unentgeltlichen und obligatorischen Grundschulunterricht oder vom Besuch weiterführender Schulen ausgeschlossen werden. (ebd., S. 1436)

Sie sollen „Zugang zu einem integrativen, hochwertigen und unentgeltlichen Unterricht an Grundschulen und weiterführenden Schulen haben" (ebd., S. 1437). Des Weiteren sollen

> in Übereinstimmung mit dem Ziel der vollständigen Integration wirksame individuell angepasste Unterstützungsmaßnahmen in einem Umfeld, das die bestmögliche schulische und soziale Entwicklung gestattet, angeboten werden (ebd.).

Mit diesem völkerrechtlichen Vertrag wird die Einbeziehung von Menschen mit Behinderung in das allgemeine Bildungssystem von derzeit 177 Staaten sogar vertraglich gesichert (Treaty Section. Office of Legal Affairs. United Nations, 2018).

In diesem Zusammenhang ist die Publikation „*Inklusion: Leitlinien für die Bildungspolitik*" (Deutsche UNESCO-Kommission e. V., 2010) der Deutschen UN-

ESCO-Kommission (DUK), einer der Nationalkommissionen der Organisation der Vereinten Nationen für Bildung, Wissenschaft und Kultur (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization), von Bedeutung. Darin macht die Kommission „Erkenntnisse der internationalen Beratungen über inklusive Bildung in Deutschland zugänglich und bietet einen Überblick über das Konzept der Inklusion sowie die relevanten völkerrechtlichen Instrumente" (ebd., S. 3). Die Beseitigung von Exklusion wird als Ziel inklusiver Bildung festgehalten. Exklusion „entsteht durch negative Einstellungen und mangelnde Berücksichtigung von Vielfalt in ökonomischen Voraussetzungen, sozialer Zugehörigkeit, Ethnizität, Sprache, Religion, Geschlecht, sexueller Orientierung und Fähigkeiten" (ebd., S. 4). „Ziel dieser Leitlinien ist es, Staaten dabei zu unterstützen, Inklusion in ihren Bildungsstrategien und -plänen zu stärken" (ebd., S. 7). „[I]nklusive Bildung greift das grundlegende Prinzip von ‚Bildung für Alle' (*Education for All*) auf" (ebd., S. 7, Hervorh. i. O.). Der Begriff Inklusion wird in den Leitlinien folgendermaßen beschrieben:

> Inklusion wird also als ein Prozess verstanden, bei dem auf die verschiedenen Bedürfnisse von allen Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen eingegangen wird. Erreicht wird dies durch verstärkte Partizipation an Lernprozessen, Kultur und Gemeinwesen, sowie durch Reduzierung und Abschaffung von Exklusion in der Bildung. Dazu gehören Veränderungen in den Inhalten, Ansätzen, Strukturen und Strategien. Diese Veränderungen müssen von einer gemeinsamen Vision getragen werden, die alle Kinder innerhalb einer angemessenen Altersspanne einbezieht, und von der Überzeugung, dass es in der Verantwortung des regulären Systems liegt, alle Kinder zu unterrichten. (ebd., S. 9)

Es werden zudem wichtige Schritte genannt, die dazu beitragen sollen, die politische Entwicklung voranzubringen. Unter anderem wird es als bedeutsam angesehen, „Lehrer [zu] unterstützen, ihre Rolle innerhalb des Bildungssystems zu verstehen und Vielfalt im Klassenzimmer nicht als Problem, sondern als Chance zu begreifen" (ebd., S. 14). Aus der Sichtweise der Inklusion wird die Wahrnehmung erheblich verändert: „nicht das Kind, sondern das Bildungssystem wird als das Problem gesehen" (ebd., S. 16). Diese Leitlinien schlagen somit u. a. eine Umstrukturierung des Bildungssystems vor, um inklusive Bildung zu ermöglichen.

Für die Praxis im deutschen Bildungssystem sind natürlich die Beschlüsse der Kultusministerkonferenzen ebenfalls relevant. Der *Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 20.10.2011* mit dem Titel *„Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen"* (KMK, 2011) enthält Ausführungen und Forderungen zum Thema *Inklusion*. Inklusion wird hier als „gleichberechtigte[r] Zugang zu Bildung für alle und das Erkennen sowie Überwinden von Barrieren“ (ebd., S. 3) gesehen. Des Weiteren wird ausgeführt:

> Ein inklusiver Unterricht trägt der Vielfalt von unterschiedlichen Lern- und Leistungsvorausset-zungen der Kinder und Jugendlichen Rechnung. Alle Kinder und Jugendlichen erhalten Zugang zu den verschiedenen Lernumgebungen und Lerninformationen. [...] Gleiche Lerngegenstände können im Unterricht auf unterschiedlichen Wegen und mit unterschiedlicher Zielstellung bearbeitet werden. [...] Erfolgreiches Lernen in heterogenen Gruppen setzt für einige Kinder und Jugendliche mit Behinderungen voraus, dass Unterrichtsinhalte zeitweilig oder längerfristig elementarisiert werden, um den individuellen Lernerfordernissen und Zugangsweisen eines Kindes oder eines Jugendlichen zu entsprechen. [...] Inklusiver Unterricht beinhaltet Maßnahmen innerer und äußerer Differenzierung, um flexibel und angemessen auf die Erfordernisse der Lerngruppe mit ihren unterschiedlichen Voraussetzungen eingehen zu können, und schließt personelle Überlegungen für die Unterrichtsgestaltung ein. (ebd., S. 9)

Damit werden konkrete Umsetzungsmöglichkeiten von Inklusion im Unterricht gegeben.

Auch im *LehrplanPLUS* (BY, 2014) für die bayerische Grundschule wird konsequent auf den Themenbereich *Inklusion* eingegangen. In den „Bayerischen Leitlinien für die Bildung und Erziehung von Kindern bis zum Ende der Grundschulzeit“ (ebd., S. 7 ff.) findet sich in Abschnitt 3 „Menschenbild und Bildungsverständnis“ (ebd., S. 10) der Unterpunkt „Inklusion – Pädagogik der Vielfalt“ (ebd., S. 12). In diesem wird u. a. ausgeführt: „Eine an den individuellen Bedürfnissen ausgerichtete Bildungsbegleitung, die sich durch multiprofessionelle Teams und multiprofessionelles Zusammenwirken verschiedener Bildungseinrichtungen realisiert, sichert Bildungsgerechtigkeit. Auch Differenzierungsangebote und der bewusste Wechsel zwischen heterogenen und homogenen Gruppen tragen dazu bei“ (ebd.). Im „Bildungs- und Erziehungsauftrag“ (ebd., S. 17 ff.) wird im Abschnitt 1 „Grundlegung der Bildung als Auftrag der Grundschule“ (ebd., S. 19) der Themenbereich im Unterpunkt „Inklusion als Beitrag zur gesellschaftlichen Teilhabe“ (ebd., S. 20) u. a. wie folgt weiter ausgeführt:

> Die Grundschule wirkt am gesellschaftlichen Auftrag zur Umsetzung von Inklusion mit. Alle Kinder, gleich welcher Herkunft, Kultur, Sprache, Religion, Weltanschauung, Begabung und welchen Geschlechts, haben ein Recht auf gemeinsame und bestmögliche Bildung sowie gleichberechtigte Teilhabe. Die dadurch gegebene Vielfalt in jeder Klasse

> und Schule stellt eine Bereicherung und Ressource dar. Die Grundschule bezieht diese Vielfalt gezielt und konstruktiv in den Unterricht und das Schulleben ein. (ebd.)

Abschnitt 3 „Lernen und Leistung in der Grundschule" (ebd., S. 22) enthält zudem einen Unterpunkt „Unterschiedliche Begabungen als Chance für das individuelle Lernen" (ebd., S. 25), der ebenfalls auf den Themenbereich *Inklusion* Bezug nimmt:

> Die Verschiedenheit der Schülerinnen und Schüler in der Grundschule ist eine Chance für das Von- und Miteinanderlernen. Kooperative Lernformen, offene Lernarrangements und Lernzieldifferenz kennzeichnen inklusiven Unterricht. [...] Individuelle und gemeinsame Lernprozesse stehen somit in Wechselwirkung miteinander. Die Lehrkraft nutzt das Potenzial der heterogenen Lerngruppe, indem sie im Unterricht sowohl homogene als auch heterogene Lerngruppen in flexiblen Zusammensetzungen bildet. [...] Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf sowie Schülerinnen und Schüler mit besonderen Begabungen werden durch ausgewählte Aufgabenstellungen im Rahmen ihrer Klassengemeinschaft gefördert und gefordert. (ebd., S. 25)

Der bayerische LehrplanPLUS sieht somit als geeignete Umsetzung von Inklusion einen Wechsel von individuellen und gemeinsamen Lernprozessen vor.

Es wird deutlich, dass in Verträgen und Forderungen auf völkerrechtlicher Ebene bis hin zu curricularen Vorgaben für bayerische Grundschulen die Einbeziehung von Menschen mit Behinderung in die Regelschule gefordert und festgelegt wird. Damit ist der rechtlichen Rahmen für die Umsetzung eines gemeinsamen Unterrichts für *alle* Kinder mit unterschiedlichen Vorausset-zungen geebnet. Ob und wie diese Verträge und Forderungen bereits umgesetzt werden, soll in den folgenden Abschnitten erläutert werden.

2.3 Empirische Befunde

Zur Grundsatzfrage, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen am besten unterrichtet werden können, gibt es verschiedenste wissenschaftliche Untersuchungen. Übersichten zu empirischen Belegen der bisherigen Integrationsforschung sind beispielsweise zu Themen wie Effizienz von Förderschulen, Leistungsentwicklung, Sozialentwicklung, emotionalem Wohlbefinden der Kinder und Pädagogen, Unterrichtsgestaltung, Peer-Beziehungen, Relevanz pädagogischer Beziehungen, Unterrichtsformen und Didaktik, sozialer Integration, Klassenklima, Akzeptanz, spezifischen Organisationsformen, Lehrerkompetenz und Lehrerrollen sowie systemischem Rahmen zu finden (Federolf, 2011, S. 241;

Hinz, 2008, S. 204 ff.; Prengel, 2013, S. 37 ff.; Preuss-Lausitz, 2002, S. 460 ff.). Obwohl meines Erachtens Forschungsergebnisse zu unterschiedlichsten Themen der Integrationsforschung bedeutend und spannend sind, wird im Rahmen dieser Arbeit lediglich auf einige ausgewählte v. a. zum Thema Schulleistungen im gemeinsamen Unterricht eingegangen. Die vorgestellten Studien beziehen sich in erster Linie auf Vergleiche der Effekte auf Leistungen in Regelklassen und Förderklassen sowie Regelklassen und Integrationsklassen.

2.3.1 Effekte auf Leistungen in Regelklassen versus Förderschulklassen

In ihren in der deutschsprachigen Schweiz durchgeführten Untersuchungen gehen Haeberlin, Bless, Moser & Klaghofer (1991) der Frage nach, ob „die [...] integrierenden Schulversuche den Bildungsauftrag und die Zielsetzung der Förderung schulleistungsschwacher Schüler ebenso gut oder besser [...] erfüllen wie die traditionelle Hilfsschule bzw. Sonderschule für Lernbehinderte“ (S. 17). Genauer beziehen sich ihre Forschungen auf die Förderung sozialer Beziehungen, die Einschätzung der eigenen Fähigkeiten und das subjektive Befinden schulleistungsschwacher Schülerinnen und Schüler (d. h. auch Kinder mit Behinderungen) in leistungshomogenen Förderschulklassen im Vergleich zu leistungsheterogenen Regelklassen (ebd., S. 19). Bezüglich der Schulleistungen gehen sie von der Hypothese aus, dass sich schulleistungsschwache Kinder in leistungsheterogenen Regelklassen stärker verbessern als schulleistungsschwache Schülerinnen und Schüler in leistungshomogenen Förderschulklassen (ebd., S. 169). In Mathematik werden Tests zu Grundoperationen und Textrechnen, in Deutsch zu Wortschatz, Leseverständnis, Wortverständnis und Rechtschreiben in den Klassenstufen 4 bis 6 in Regelklassen und Förderschulklassen durchgeführt (ebd., S. 182). Die Ergebnisse zeigen, dass die schulische Gesamtleistung schulleistungsschwacher Schülerinnen und Schüler in der Förderschule geringer ansteigt als in der Regelschule mit und ohne heilpädagogische Schülerhilfe (ebd., S. 231, S. 258). Dasselbe Ergebnis ergibt sich für die mathematische Gesamtleistung (ebd., S. 232, S. 258). Bei den Deutschleistungen sind ähnliche Tendenzen zu verzeichnen, die geringere Leistungssteigerung ist allerdings weniger deutlich (ebd., S. 239, S. 258).

Tent, Witt, Bürger & Zschoche-Lieberum (1991) untersuchen, ob die Schülerinnen und Schüler im Schulleistungsbereich, im emotionalen Bereich und auf Verhaltensebene in der Schule für Lernbehinderte besser gefördert werden als in der Regelschule (S. 4 ff.). Dafür werden Kinder aus der Regelschule und der Förderschule ausgewählt. Außerdem findet eine Parallelisierung statt, deren Hauptkriterium die Schulleistung vor der Überweisung in eine Förderschule ist (ebd., S. 5). Insgesamt sind bezüglich Schulleistungen und mehreren Themenfeldern des emotionalen Bereichs sowie der Verhaltensebene keine Unterschiede zwischen den Schulformen feststellbar. Teilweise sind Vorteile der Beschulung in Regelklassen erkennbar. Positive Effekte der Förderschule zeigen sich lediglich bezüglich Prüfungsangst und Einschätzung des Arbeitsverhaltens durch die Lehrkraft. Beim Selbstwertgefühl und bei der Einschätzung der eigenen Fähigkeiten ist höchstens eine Tendenz zugunsten der Förderschule feststellbar (ebd., S. 10).

Bächthold (1999) präsentiert Ergebnisse aus verschiedenen Untersuchungen zu sozialen Integrationsprozessen von Kindern mit Schulschwierigkeiten (S. 307). Effekte sonderpädagogischer Förderung zeigen sich nur dann, wenn sie in der Regelklasse integriert stattfindet (ebd., S. 311). Schülerinnen und Schüler mit Schulschwierigkeiten, die überwiegend in der Regelklasse integriert unterrichtet werden, „erleben das Unterrichtsklima positiv" (ebd.) und nehmen die Lehrkraft sowie Mitschülerinnen und Mitschüler „in der Regel als sozial-emotional unterstützend" (ebd.) war. Außerdem nimmt die Lehrkraft das abweichende Verhalten differenziert wahr. Die Kinder mit Schulschwierigkeiten, die überwiegend außerhalb der Regelklasse gefördert werden, nehmen das Unterrichtklima negativ wahr, d. h. sie sehen die Lehrkraft sowie Mitschülerinnen und -schüler nicht als sozial-emotional unterstützend an. Die Lehrkraft generalisiert und überbetont das abweichende Verhalten der Kinder mit Schulschwierigkeiten (ebd.). Kinder mit Schulschwierigkeiten können ihre Leistungen in den Klassen, in denen sie überwiegend in der Regelklasse unterrichtet werden, verbessern, in den Klassen, in denen sie überwiegend speziell unterrichtet werden, nicht (ebd.).

Wocken (2007) geht u. a. der Frage nach, ob Förderschulen tatsächlich optimal fördern und stellt folgende Hypothese auf: „Je länger ein Schüler eine Förderschule besucht, desto besser sind seine kognitiven Leistungen" (ebd., S. 50). Die Idee, die Förderschuljahre als Kontrollvariable heranzuziehen, kam laut Wocken aus der Lehrerschaft, vermutlich mit der Hoffnung und Erwartung verknüpft, dass eine höhere Anzahl an Förderschuljahren auch zu einer besseren Leistungsentwicklung führt (ebd.). Hierzu werden Ergebnisse aus verschiedenen Forschungsprojekten herangezogen (ebd., S. 36 f.), wie die Projekte LAUF-HH und LAUF-BB, die in Klassen des siebten Schuljahres in Hamburger und Brandenburger Förderschulen durchgeführt werden (Wocken, 2000; Wocken, 2005). Als Vergleichsbasis werden Ergebnisse aus dem Projekt LAU 5 verwendet, das in Klassen des fünften Schuljahres an Regelschulen realisiert wird (Lehmann, 1997). Darüber hinaus werden Ergebnisse des Folgeprojekts KESS.iF, einer Untersuchung in Hamburger Förderschulen in Klassen des siebten Schuljahres und als Vergleichsdaten Ergebnisse aus dem Grundschulprojekt KESS 4 eingesetzt (Bos & Pietsch, 2006). Es besteht eine große Streuung bei der Variable Förderschuljahre, da der Wechsel in Förderschulen in unterschiedlichen Jahrgängen stattfindet (Wocken, 2007, S. 51). Die Ergebnisse aus den verschiedenen Studien zeigen, dass die Leistungen im Rechtschreiben sinken, je länger die Schülerinnen und Schüler in Förderschulen unterrichtet werden (ebd., S. 51 f.). Des Weiteren besteht auch ein negativer Zusammenhang zwischen der Anzahl der Förderschuljahre und Intelligenzentwicklung: „Je länger Schüler eine Förderschule besucht haben, desto niedriger sind ihre Intelligenzwerte" (ebd., S. 53). Diese Ergebnisse „geben Anlass, die Losung ‚Je früher, desto besser!' kritisch zu hinterfragen" (ebd., S. 4). Die schlechten Leistungsergebnisse der Förderschülerinnen und Förderschüler könnten mit den niedrigeren Intelligenzwerten erklärt werden (ebd., S. 54). Die Frage, warum die schwächeren Schülerinnen und Schüler auch über Jahre an der Förderschule hinweg die schwächsten Kinder bleiben, trotz einer vermeintlich optimalen Förderung an Förderschulen, bleibt aber dennoch offen. Wenn man davon ausgeht, dass Begabung keine „unveränderliche, fixe Persönlichkeitsgröße" (ebd., S. 55), sondern „Intelligenz [...] lernbar und vermittelbar" (ebd.) ist, sind die Ergebnisse der beschriebenen Untersuchung eher negativ für die Förderschulen anzusehen.

> [S]ie lassen berechtigte Zweifel aufkommen, ob der Förderschule eine entwicklungsoptimierende Wirkung zugesprochen werden kann. Die frühzeitig eingeschulten, schwächeren Förderschüler verharren auf ihrem niedrigen Niveau und sind weder in den Schulleistungen noch in der Intelligenz mit jenen Schülern konkurrenzfähig, die noch einige Jahre in der allgemeinen Schule verbleiben konnten und erst Jahre später zur Förderschule wechseln. Diese Positionsstabilität der schwachen Schüler mit Lernbehinderungen spricht unzweifelhaft gegen eine kompensatorische, rehabilitative Wirksamkeit der Förderschule. Bestenfalls kann angenommen werden, dass die Langzeit-Förderschüler auf ihrem kognitiven Niveau stehen geblieben sind und die Förderschule nichts mehr ausrichten konnte. Schlimmstenfalls muss befürchtet werden, dass die Förderschule zu dieser Niveaustabilisierung anteilig beigetragen oder sogar eine weitere Niveauabsenkung bewirkt hat. (ebd., S. 55)

Insgesamt zeigen die Studien, dass sich Schulleistungen von Kindern in Regelklassen stärker verbessern als in Förderschulklassen. Teilweise weisen die Ergebnisse sogar darauf hin, dass sich die Unterrichtung an Förderschulen negativ auf Schulleistungen und Intelligenzwerte auswirkt.

2.3.2 Effekte auf Leistungen in Regelklassen versus Integrationsklassen

Die Fläming-Grundschule in Berlin ist die erste Schule im staatlichen Schulwesen der Bundesrepublik, in der gemeinsamer Unterricht praktiziert wird, nämlich bereits seit 1975 (Stoellger, 1988, S. 11). Die Zahl der Schülerinnen und

Schüler beträgt in den Integrationsklassen höchstens 15, davon höchstens fünf Kinder mit Behinderung (ebd., S. 12). In einer Klasse sind sowohl eine Lehrkraft als auch eine pädagogische Mitarbeiterin oder ein pädagogischer Mitarbeiter tätig (ebd.). In den Integrationsklassen und den parallelen Regelklassen werden weitgehend die gleichen Klassenarbeiten geschrieben. In diesen zeigen die Kinder der Integrationsklassen im Vergleich zu den Kindern in den Parallelklassen über Jahre hinweg bessere Leistungen (Hetzner, 1988, S. 251). Im Jahr 1985 wird eine Untersuchung durchgeführt, die die Leistungen in Rechtschreiben und Mathematik nicht behinderter Kinder der Klassen drei bis sechs erfasst (ebd., S. 251 f.). Dazu werden die Berliner Tests und der Diagnostische Rechtschreibtest 3 genutzt. Die durchschnittlichen Leistungen der Schülerinnen und Schüler in den Integrationsklassen entsprechen denen der Schülerinnen und Schüler in Regelklassen in dem Berliner Bezirk, in dem sich auch die Fläming-Grundschule befindet (ebd., S. 253). Abgesehen von den sog. Lateinklassen zeigen die Kinder der Integrationsklassen in Mathematiktests bessere Leistungen, bei der Rechtschreibleistung sind die Fehlerzahlen in Integrations- und Regelklassen ausgeglichen (ebd.).

In ihrem Band „Integrationsklassen in Hamburg" geben Wocken & Antor (1987) einen Überblick über den seit 1983 durchgeführten Schulversuch ‚Integrationsklassen' in Hamburger Grundschulen. Darin geht Wocken auch auf Schulleistungen in Integrationsklassen ein (1987, S. 276 ff.). Wocken nimmt zunächst Bezug auf die Problematik, dass die Betonung des Leistungsgedankens mit den Ideen des integrativen Unterrichts häufig als nicht vereinbar angesehen wird (ebd., S. 277 ff.).

> Der Nachweis einer gleichwertigen Leistungsförderung ist in erster Linie den nichtbehinderten Kindern selbst, sodann auch der kritischen Öffentlichkeit geschuldet. Ohne diesen Nachweis dürfte es um die Legitimation von Integrationsklassen und um die Nachfrage nach Integrationsklassen gleichermaßen schlecht bestellt sein. (ebd., S. 280)

Wocken geht von folgenden Hypothesen aus: Deprivationshypothese, Optimierungshypothese, Nivellierungshypothese, Homogenisierungshypothese und Patthypothese (ebd., S. 280). Die Deprivationshypothese meint, dass lediglich Kinder ohne Behinderung negative Folgen des integrativen Unterrichts tragen. Sie werden „pädagogisch unterversorgt" (ebd., S. 281), da die Lehrkräfte ihre Aufmerksamkeit in größerem Maß auf die Kinder mit Behinderung richten müssen. Es wird „eine Deprivation der Leistungsentwicklung nichtbehinderter Kinder angenommen" (ebd.). In den Integrationsklassen im Vergleich zu den Kontrollklassen wird ein niedrigerer Mittelwert der Leistungen bei gleicher Streuung erwartet (ebd., S. 280). Bei der Optimierungsthese geht man davon aus, dass durch die besseren Möglichkeiten der Betreuung – da in Integrationsklassen die Anzahl der Kinder pro Klasse gesenkt wird und eine Klasse durch mehrere Pädagoginnen und Pädagogen betreut wird – alle Kinder davon profitieren. Dies, so die Annahme, wirkt sich auch positiv auf die Leistungen aus. In den Integrationsklassen ist ein höherer Mittelwert bei gleicher Streuung der Schulleistungen im Vergleich zu den Kontrollklassen zu erwarten (ebd., S. 282 f.). Bei der Nivellierungsthese nimmt man an, dass extreme Heterogenität in den Klassen für die Beteiligten keinen Nutzen bringen kann. Die Lehrkraft ist gezwungen, „die unterrichtlichen Angebote auf ein imaginäres Mittelmaß zu[zu]schneiden und die Anforderungen insgesamt herab[zu]setzen“ (ebd., S. 283). Dadurch werden hochbegabte Schülerinnen und Schüler ausgebremst. Es können bei dieser Hypothese geringere Mittelwerte in den Integrationsklassen und eine geringere Streuung der Schulleistungen im Vergleich zu den Kontrollklassen erwartet werden (ebd., S. 282 f.). Die Homogenisierungsthese bringt eine negative Wirkung der Nivellierungshypothese für die guten Schülerinnen und Schüler und eine positive Wirkung für die schwachen Kinder zusammen. Diese These geht davon aus, dass „[v]on integrativer Erziehung [...] die Schwachen auf Kosten der Starken“ (ebd., S. 284) profitieren. Es gibt keine extrem leistungsstarken, aber auch keine extrem schwachen Kinder mehr. Erwartbar sind bei dieser Hypothese gleiche Mittelwerte in Integrations- und Kontrollklasse und eine erheblich geringere Streuung der Leistungen in der Integrationsklasse (ebd., S. 283 f.). Bei der Patthypothese geht man davon aus, „daß sich die günstigen wie ungünstigen Bedingungen integrativer Erziehung in ihrer kumulativen Wirkung insgesamt aufheben und letztendlich neutralisieren“ (ebd., S. 284 f.). Es werden Schulleistungen der nicht behinderten Kinder der Integrationsklassen als Versuchsgruppe mit denen in Grundschulklassen als Kontrollgruppe verglichen (ebd., S. 286). Dafür werden im ersten Schuljahr die Standardisierungsstichprobe eines Tests und im zweiten Schuljahr einige Parallelklassen der Integrationsklassen als Kontrollgruppe verwendet (ebd., S. 287). Die Tests werden bezüglich der Bereiche Lesen und Rechnen durchgeführt (Diagnostischer Lesetest für Frühdiagnose – DLF 1-2, Allgemeiner Schulleistungstest für 2. Klassen – AST 2) (ebd., S. 287 f.). Die Testergebnisse zeigen, dass die Integrationsklassen bezüglich der Lesefertigkeit durchschnittlich bessere Leistungen erzielen. Auch die Streuung der Leistung ist geringer als in der Kontrollgruppe (ebd., S. 294). Beim Zahlenrechnen zeigen die Kinder der Integrationsklassen signifikant bessere Leistungen. Die Leistungsstreuung ist in den Integrationsklassen signifikant geringer (ebd., S. 296). Im Bereich Leseverständnis ist ebenfalls ein geringfügig besserer Leistungsdurchschnitt der Integrationsklassen zu verzeichnen. Die geringfügig größere Streuung ist vermutlich zufallsbedingt anzusehen (ebd., S. 297). Somit treffen weder die Deprivationshypothese noch die Nivellierungshypothese zu. Auch die Optimierungshypothese (höhere Mittelwerte der Leistung in den Integrationsklassen, gleiche Streuung) und die Homogenisierungshypothese (gleiche Mittelwerte der Leistung, erheblich geringere Streuung in den Integrationsklassen) treffen demnach nicht zu, da höhere Mittelwerte zu verzeichnen sind, diese aber mit einer geringeren Streuung in den Bereichen Lesefertigkeiten und Zahlenrechnen verbunden sind (ebd., S. 299). Für Wocken ergibt sich „damit insgesamt ein Patt der konkurrierenden Systeme“ (ebd., S. 304). „Nichtbehinderte Kinder lernen in Integrationsklassen genau so viel wie in anderen Grundschulklassen; in dem einen oder anderen Falle möglicherweise sogar mehr, aber das mag dahingestellt bleiben und eine willkommene Zutat sein“ (ebd., S. 302).

Dumke & Schäfer (1993) stellen in ihrer Veröffentlichung „Entwicklung behinderter und nichtbehinderter Schüler in Integrationsklassen“ Ergebnisse zu Einstellungen, sozialen Beziehungen, Persönlichkeitsmerkmalen und Schulleistungen vor. Um Aussagen zu den Schulleistungen machen zu können, werden in Integrationsklassen und den zugehörigen Parallelklassen einer Grundschule standardisierte Tests im Lesen, Rechtschreiben und in Mathematik durchgeführt (ebd., S. 104). Außerdem werden Intelligenztests eingesetzt, um die Lernvoraussetzungen zu ermitteln (ebd.). Insgesamt werden „sowohl in Integrations- als auch in Parallelklassen insgesamt gute Schulleistungen in den drei erfaßten Bereichen erzielt“ (ebd.). Es sind nur bei neun von 32 Fällen signifikante bzw. sehr signifikante Unterschiede festzustellen, davon zeigen in vier Fällen die Kinder der Integrationsklassen und in fünf Fällen die der Parallelklassen bessere Leistungen. Bei der überwiegenden Zahl der Vergleiche werden in den Integrations- und den Parallelklassen statistisch gleich gute Leistungen erzielt (ebd., S. 105). Integrativer Unterricht ist für das Erzielen von guten Schulleistungen also nicht hinderlich. Des Weiteren werden auch Integrationsklassen und ihre Parallelklassen an einer Gesamtschule verglichen (ebd., S. 106 ff.). Hierbei werden die Leistungen der Kinder durch die Lehrkräfte eingeschätzt. Insgesamt werden die Schülerinnen und Schüler der Integrationsklassen bezüglich ihres Arbeitsverhaltens und ihrer Leistungen in Mathematik, Deutsch und Englisch besser eingeschätzt (ebd., S. 108). Zusammenfassend stellen Dumke & Schäfer (1993) fest, dass gemeinsames Lernen von Schülerinnen und Schülern mit unterschiedlichen Voraussetzungen durch integrativen Unterricht gelingen kann (S. 113). Damit werden allen Schülerinnen und Schülern die besten Entwicklungschancen angeboten. Es werden dabei die gut begabten Kinder ausdrücklich miteinbezogen (ebd.).

> Wenn integrativer Unterricht mit einer positiven Leistungsentwicklung in Zusammenhang gebracht werden kann, so ist das zwar ein erfreuliches Ergebnis. Es sollte aber auch daran erinnert werden, daß dies nicht das zentrale Anliegen des gemeinsamen Lernens ist. (ebd.)

Feyerer (1998) geht in seinem Projekt „Behindern Behinderte? Auswirkungen integrativen Unterrichts auf nichtbehinderte Kinder in der Sekundarstufe I" (Feyerer, 1997 zitiert nach Feyerer 1998, S. 94 ff.) der Frage nach, ob „die Anwesenheit behinderter Kinder auf die Schulleistung, das Selbstkonzept und das Befinden der nicht behinderten Kinder in Integrationsklassen eine positive, negative oder gar keine Auswirkung" (Feyerer, 1998, S. 94) hat. Es handelt sich um ein Folgeprojekt zu einem in Österreich durchgeführten Projekt INTSEK, das zur Erkundung von Problemfeldern und Lösungsmöglichkeiten zur Umsetzung von integrativem Unterricht durchgeführt wird (ebd., S. 11 f.). Feyerer nimmt in Abgrenzung zu vielen anderen Untersuchungen nur die Entwicklung nichtbehinderter Kinder in der achten Jahrgangsstufe in den Blick (ebd., S. 102). Es wird der Lernerfolg in den Fächern Mathematik, Deutsch und Englisch getestet (ebd., S. 110) und es werden die individuellen Schulleistungswerte der Schülerinnen und Schüler in einer Versuchs- und Kontrollgruppe verglichen (ebd., S. 114). Insgesamt werden neun Integrationsklassen der achten Jahrgangsstufe und 23 Parallelklassen als Kontrollgruppe untersucht. In den Versuchsklassen befinden sich zwischen drei und sechs Kinder mit Behinderung (ebd., S. 119). Die 651 Schülerinnen und Schüler stammen sowohl aus Gymnasien als auch aus Hauptschulen. Feyerer kann aufgrund seiner Ergebnisse u. a. feststellen, dass die Schulleistungen von Kindern ohne Behinderung durch die Anwesenheit von Kindern mit Behinderung weder positiv noch negativ beeinflusst werden. Es gibt keine signifikanten Unterschiede bei den Schulleistungswerten in den Fächern Mathematik, Deutsch und Englisch zwischen der Versuchs- und Kontrollgruppe (ebd., S. 117). Auch gut begabte und sehr leistungsfähige Kinder mit einem IQ größer 117 werden durch die soziale Integration nicht beeinträchtigt, es sind keine signifikanten Differenzen zwischen den Leistungen in Integrations- und Kontrollklassen feststellbar. Es findet „keine Nivellierung nach unten" statt (ebd., S. 178). Darüber hinaus wirkt sich die Unterrichtung in Integrationsklassen auch positiv auf das Leistungsselbstkonzept, das Selbstwertgefühl, die soziale Integration und das Wohlbefinden der Schülerinnen und Schüler sowie das Klassenklima aus (ebd., S. 178 f.).

Aus den Ergebnissen des Projekts INTSEK und seines Folgeprojekts schließt Feyerer,

> daß wirksamer integrativer Unterricht nicht in herkömmlicher, lehrerzentrierter Art und Weise erfolgen kann, sondern Prinzipien integrativer Pädagogik wie Individualisierung des Unterrichts, innere Differenzierung, kooperatives Arbeiten an einem gemeinsamen Gegenstand, projektübergreifendes und fächerübergreifendes Lernen verstärkt eingesetzt werden müssen. Es kann weiters davon ausgegangen werden, daß eine stärkere Gewichtung überfachlicher Lernziele erfolgt und so Elemente

> sozialen, emotionalen und selbstgesteuerten Lernens in höherem Ausmaß explizit in den Unterricht einbezogen werden. Durch die notwendige Teamarbeit werden auch entscheidende Impulse für eine Veränderung der LehrerInnenrolle gesetzt: Gemeinsame Planung und Strukturierung des Unterrichtsgeschehen kann nämlich nur dann professionell funktionieren, wenn die beteiligten Personen die Rolle des ‚Pädagogischen Einzelkämpfers' (Grundlagenpapier 1995, 6 f. [zit. nach ebd., S. 183]) aufgeben. (ebd., S. 183)

In seiner Synthese von über 800 Meta-Analysen untersucht Hattie den Einfluss verschiedener Komponenten auf die Lernleistung der Schülerinnen und Schüler (Hattie, 2013). Bezüglich inklusiver Beschulung wird auf Grundlage von 150 Studien und fünf Meta-Analysen ein Effekt von d = 0,28 festgestellt (ebd., S. 114), was aus Hatties Sicht eher niedrige positive Effekte indiziert (ebd., S. 11).

> Es wird gezeigt, dass sich aus Metaanalysen wie dieser zwar Orientierungspunkte für die Gestaltung von inklusivem Unterricht gewinnen lassen, dass diese jedoch nicht aus den empirischen Befunden abgeleitet werden können, sondern vielmehr einer pädagogischen Interpretation und einer eigenständigen Übertragung in bewusst gestaltete Praxis durch kompetente Lehrerinnen und Lehrer bedürfen. (Wember, 2015, S. 456)

In den genannten Untersuchungen wird deutlich, dass sich integrativer Unterricht keinesfalls negativ auf Schulleistungen von nicht beeinträchtigten Kindern auswirkt. Die Kinder lernen in den Integrationsklassen genauso gut wie in Regelklassen. Es kann sogar eine leichte Tendenz zugunsten der Integrationsklassen festgestellt werden.

Zusammenfassend lässt sich aufgrund dieser empirischen Befunde feststellen, dass sich die Schulleistungen von Kindern ohne und mit Förderbedarf in Regelklassen stärker verbessern als in Förderschulklassen. Teilweise weisen die Ergebnisse sogar darauf hin, dass sich die Unterrichtung an Förderschulen negativ auf Schulleistungen und Intelligenzwerte auswirkt. Zudem lernen nicht beeinträchtigte Kinder in Integrationsklassen genauso gut wie in Regelklassen, z. T. sind die Leistungen in den Integrationsklassen sogar etwas besser.

Einen weiteren Anhaltspunkt zur Umsetzung gemeinsamen Unterrichts in Deutschland können aktuelle Statistiken liefern, welche im Folgenden zusammenfassend dargestellt werden.

2.4 Aktuelle Statistiken in Deutschland zur Umsetzung gemeinsamen Unterrichts

Im zweijährigen Turnus berichtet die Kultusministerkonferenz „über die zahlenmäßige Entwicklung im Bereich der Förderschulen“ (KMK, 2016, XI). Welche Veränderungen in den letzten Jahren bezüglich des gemeinsamen Unterrichts zu verzeichnen sind, zeigt die Statistik der Kultusministerkonferenz (ebd., S. XVff.). Von 2009 bis 2014 ist der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf, die in allgemeinen Schulen unterrichtet werden, von 19,8 % auf 34,1 % gestiegen.

Bis zum Jahr 2014 wurden in Deutschland ca. 335.000 Schülerinnen und Schüler in Förderschulen unterrichtet (ca. 8300 Kinder weniger als im Jahr 2013). Trotz der Zunahme der Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf an allgemeinen Schulen (2009: 95.475; 2014: 173.392), bleibt der Anteil an Kindern an Förderschulen gemessen an der Gesamtzahl der schulpflichtigen Schülerinnen und Schülern seit 2005 fast stabil bei 4,6 % (ebd., S. XVI). „Seit 2005 ist der Anteil der Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischer Förderung in allgemeinen Schulen und Förderschulen von 5,7 % auf 7,0 % aller Schülerinnen und Schüler im Alter der Vollzeitschulpflicht gestiegen (Förderquote). Gegenüber dem Vorjahr ergibt sich im Jahr 2014 nur ein sehr leichter Anstieg der Förderquote (2013: 6,8 %)“ (ebd., S.XIV). Die Förderschulbesuchsquote, d. h. der Anteil der Schülerinnen und Schüler an Förderschulen gemessen am Anteil aller schulpflichtigen Schülerinnen und Schüler, lag 2005 bei 4,8 %, stieg 2010 auf 4,9 % und sank 2014 auf 4,6 % (ebd., S. 7). „Die fast gleichbleibenden Schüleranteile an Förderschulen trotz steigender Inklusionsanteile lassen sich durch höhere Förderquoten erklären. Bundesweit wird bei immer mehr Kindern ein sonderpädagogischer Förderbedarf festgestellt“ (Klemm, 2015, S. 6).

Die Anteile der Schülerinnen und Schüler, die an Förderschulen unterrichtet werden, gehen also nicht zurück, was nicht dafür spricht, dass die Inklusionsforderungen den gesetzlichen Regelungen gemäß bisher umgesetzt werden.

2.5 Kritische Äußerungen zur Umsetzung von Integration

Auch in der Literatur wird Kritik an der bisherigen Umsetzung der Integration aus inklusiver Perspektive geäußert. Auf einige Punkte soll im Folgenden eingegangen werden. Dadurch kann zudem die Abgrenzung der Begriffe *Integration* und *Inklusion* nochmals voneinander deutlich gemacht werden kann.

Hinz (2002) kritisiert, dass Versuche der Umsetzung von Integration häufig auf administrativer Ebene fixiert bleiben (Hinz, 2002, S. 356). In der Praxis der Integration wird vielfach nach dem Motto verfahren: „Sag mir deine Schädigung und ich sage dir deine Integrationsmöglichkeiten“ (ebd., S. 356).

Hinz (2002) sieht es außerdem als kritisch an, dass praktische Umsetzungen immer noch nach der „Zwei-Gruppen-Theorie“ (S. 357) erfolgen. Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf werden zu Integrationskindern und somit implizit abgewertet. Tendenziell sind für diese ‚anderen‘ Kinder ‚andere‘ Pädagogen zuständig und innerhalb der Regelschule gibt es für sie zusätzliche Ressourcen. Unterrichtsplanung geht vom Regelcurriculum aus und es wird überlegt, wie für die ‚anderen‘ Kinder dieses verändert werden kann (ebd., S. 357). „Integration is about making ordinary schools special by transplanting the best special school practices, teachers or equipment into regular settings, even when these may not be necessary” (Mittler, 2000, S. 10). Integration bezieht sich in diesem Sinn auf die räumliche „Verlagerung von Sonderpädagogik in die Allgemeine Schule ohne weitere Veränderung“ (Hinz, 2002, S. 354). Bei Inklusion sollte es aber darum gehen, dass nicht mehr die einen und die anderen Pädagogen zuständig sind für die einen und anderen Kinder, sondern alle gemeinsam für alle Personen der Lerngruppe verantwortlich sind, sowie die Gesamtsituation gemeinsam reflektiert wird (ebd., S. 357).

Feuser kritisiert, dass es aus seiner Sicht eine „Didaktik-Diskussion in Bezug auf die sog. ‚Integrationspädagogik‘“ (Feuser, 1998, S. 20) nicht gab. Die Integration scheint weitgehend ‚Segregation‘ zu betreiben (ebd., S. 20). Die historischen Wurzeln der Integrationspädagogik können als „(reformpädagogische) Anliegen einer fundamentalen ‚Humanisierung‘ und ‚Demokratisierung‘ des Erziehungs-, Bildungs- und Unterrichtssystems“ (ebd., S. 21) gesehen werden. Wenn man auf die Ursprünge der Didaktik zurückschaut, ist bei Comenius Folgendes zu lesen: „Didaktik“ als „Kunst des Lehrens“, die angesehen wird als „die vollständige Kunst, alle Menschen alles zu lehren“ (Comenius, 1982, S. 11). Integration, wie sie bisher in der Praxis vollzogen wird, erweitert das bestehende Schulsystem nur um eine weitere, die „Integrationsschule“ (Feuser, 1998, S. 21).

Hinz (2002) übt des Weiteren „Kritik an administrativer Etikettierung und an individuellen Curricula“ (ebd., S. 358). Aus seiner Sicht werden „Menschen mit Behinderungen offiziell etikettiert“ (ebd., S. 358). Das Positive daran ist, dass Menschen mit Behinderungen dadurch bestimmte Vergünstigungen erhalten (im schulischen Kontext z. B. eine besondere Förderung usw.). Negativ daran ist allerdings, dass damit eine „massive Stigmatisierung“ (ebd., S. 358) verbunden ist. Alternativ schlägt er vor, dass nicht mehr individuelle Curricula festgelegt werden sollten. Stattdessen sollte für alle ein gemeinsames Curriculum entwickelt werden, das unter bestimmten Gesichtspunkten in verschiedenen Bereichen differenziert werden muss (ebd., S. 358). Bei der Inklusion wird nicht ‚der Inklusionspädagoge', sondern es werden unterschiedliche pädagogische Fachrichtungen (Schul-, Sonder-, Sozialpädagogik) benötigt, die das gemeinsame Lernen in heterogenen Gruppen aus ganz spezifischen Blickwinkeln betrachten können (ebd., S. 359). „Inklusion [...] fasst die notwendigen Veränderungen mit geschärftem Blick ins Auge, die erst einen Paradigmenwechsel bedeuten würden" (Hinz, 2002, S. 354).

> Inclusion implies a radical reform of the school in terms of curriculum, assessment, pedagogy and grouping of pupils. It is based on a value system that welcomes and celebrates diversity arising from gender, nationality, race, language of origin, social background, level of educational achievement or disability. (Mittler, 2000, S. 10)

Auch der CRPD (Committee on the Rights of Persons with Disabilities) (2015) kritisiert in den „Abschließenden Bemerkungen über den ersten Staatenbericht Deutschlands" die bisherige Umsetzung der UN-Behindertenrechtskonvention. Zum Thema Bildung (Artikel 24 der UN-Behindertenrechtskonvention) zeigt sich der Ausschuss „besorgt darüber, dass der Großteil der Schülerinnen und Schüler mit Behinderungen in dem Bildungssystem des Vertragsstaats segregierte Förderschulen besucht" (CRPD, 2015, S. 8). Er empfiehlt, ein planmäßiges Vorgehen für die Herstellung eines „qualitativ hochwertigen, inklusiven Bildungssystem[s]" (ebd.) inbegriffen dessen Finanzierung sowie des notwendigen Personals zu entwerfen. Kinder mit Behinderungen sollen mit sofortiger Wirkung in den Regelschulen unterrichtet werden, wenn es ihr Wunsch ist (ebd.). Auf den verschiedenen Bildungsebenen sollen entsprechende Vorbereitungen getroffen werden. Alle Lehrkräfte sollen im Bereich der inklusiven Bildung geschult werden. Die Barrierefreiheit soll im schulischen Umfeld, bei Schulmaterialien und Lehrplänen sichergestellt sowie Gebärdensprache in den Bildungseinrichtungen bereitgestellt werden.

Entgegen der Kritik an der Integration versucht Wocken (2015) „die zugeschriebenen Mängel der Integration einmal auf ihren empirischen Wahrheitsgehalt hin zu überprüfen" (S. 61).

> Die beklagten Unvollkommenheiten und beklagenswerten Irregularitäten sind wohl am plausibelsten mit dem Systemwandel zu erklären. Das alte segregierende und das neu integrierende System sind eben nicht miteinander kompatibel, so dass es notwendigerweise auch zu unfreiwilligen ‚faulen' Kompromissen und imperfekten Lösungen kommen muss. Da prallen Welten aufeinander. Integration ist keine harmlose Wohltätigkeitsveranstaltung, die sich reibungslos in segregative Strukturen einfügen lässt. Aus der theoretischen Perspektive eines Systemwan-

> dels gesehen ist die Unvollkommenheit der Integrationspraxis nicht unerwartbar und als normaler Reformabrieb unkalkulierbar. (ebd., S. 63)

Wocken (2015) stellt weiter fest, dass die noch unzureichende Umsetzung der Integration nicht auf eine unzureichende theoretische Fundierung zurückzuführen ist, da die Konzepte der Integration von Anfang an inklusiv waren. Mögliche Veränderungen, so Wocken (2015), müssen in der Praxis selbst ansetzen (S. 63).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass für die Umsetzung von gemeinsamem Unterricht in allgemeinen Schulen für alle Kinder ein Wandel von einem segregativen zu einem integrativen System nötig ist. Dieser Systemwechsel ist noch nicht vollzogen.

2.6 Vorschläge zu einer allgemeinen Pädagogik und inklusiven Didaktik

Nach Feuser kann der „Weg aus der Segregation durch Integration zur Inklusion“ mit einer „Allgemeinen Pädagogik“ (Feuser, 2012, S. 1) gelingen, die auf der sog. „entwicklungslogischen Didaktik“ (ebd., S. 1) basiert. Durch diese sollen

> - ALLE (Kinder, Schüler, Aus-, Fort- u. Weiterzubildende und Studierende (ohne Ausschluss ‚Behinderter‘ wegen Art und/ oder Schweregrad einer vorliegenden Beeinträchtigung)
> - in Kooperation miteinander
> - auf ihrem jeweiligen Entwicklungsniveau
> - nach Maßgabe ihrer momentanen Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungskompetenzen
> - in Orientierung auf die ‚nächste Zone ihrer Entwicklung‘
> - an und mit einem ‚Gemeinsamen Gegenstand‘ (in Projekten vorhabenorientiert)
> - spielen, lernen, studieren und arbeiten. (ebd., S. 1 f.; Hervorh. i. O.)

Für eine inklusive Didaktik nennt Seitz (2004) mit Bezügen zu Feuser und Hinz drei „konstitutive Indikatoren“ (S. 215 f.):

- Die Überlegungen einer inklusiven Didaktik und Pädagogik beziehen sich auf *alle* Kinder (Feuser, 2012, S. 1).
- Es muss *ein* Kerncurriculum für *alle* Kinder entwickelt werden, „das unter verschiedenen Aspekten in Teilbereichen individualisiert werden muss“ (Hinz, 2002, S. 358). „Egal, wie ein Kind beschaffen ist, es hat das Recht alles Wichtige über die Welt zu erfahren, weil es in dieser Welt lebt“ (Feuser, 1998, S. 19).

- Es wird *eine* Didaktik für *alle* Kinder gefordert und davon ausgegangen, dass jede Lerngruppe große Heterogenität aufweist (vgl. auch Pädagogik der Vielfalt nach Prengel, 2006).

Freudenthal schreibt bereits Anfang der 1970er Jahre zur Unterrichtung von heterogenen Gruppen:

> In einer Gruppe sollen die Schüler zusammen, aber jeder auf der ihm gemäßen Stufe, am gleichen Gegenstande arbeiten, und diese Zusammenarbeit soll es sowohl denen auf niedriger Stufe wie denen auf höherer Stufe ermöglichen, ihre Stufe zu erhöhen, denen auf niedrigerer Stufe, weil sie sich auf die höhere Stufe orientieren können, denen auf höherer Stufe, weil die Sicht auf die niedrigere Stufe ihnen neue Einsichten verschafft. (Freudenthal, 1974, S. 167)

Aus fachdidaktischer Perspektive bedeutet dies also, weitere Unterrichtsideen zu entwickeln, die in einem zukünftigen inklusiven Unterricht für alle Kinder einsetzbar sind. Die hier beschriebenen Vorschläge zur allgemeinen Pädagogik und inklusiven Didaktik können in die Entwicklung didaktischer Konzepte einfließen.

2.7 Schlussfolgerungen

In Zusammenhang mit der Umsetzung von gemeinsamem Unterricht werden die Begriffe *Integration* und *Inklusion* häufig synonym, oft aber auch in etwas unterschiedlicher Bedeutung gebraucht. Im zweiten Fall wird Inklusion als Weiterentwicklung der Integration angesehen: Erst bei der Inklusion ist tatsächlich keine Aussonderung von Menschen im Bildungssystem mehr vorgesehen (vgl. Kap. 2.1). In den Verträgen und Forderungen auf völkerrechtlicher Ebene bis hin zu curricularen Vorgaben für bayerische Grundschulen wird die Einbeziehung von Menschen mit Behinderung in die Regelschule gefordert (vgl. Kap. 2.2). Deswegen wird es in den Grundschulen zu einer weiteren Zunahme der Heterogenität kommen, da zunehmend mehr Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf an den Regelschulen unterrichtet werden. Die Ergebnisse der dargestellten Studien deuten darauf hin, dass sich besondere Beschulung in Förderschulen keinesfalls positiver auf die Leistungen auswirkt als Unterricht in Regelklassen (Bächthold, 1999; Tent et al., 1991). Ganz im Gegenteil zeigt besondere Beschulung teilweise sogar negative Effekte auf Schulleistungen (Haeberlin et al., 1991; Wocken, 2007). Weitere Studien (Dumke & Schäfer, 1993; Feyerer, 1998; Hattie, 2013; Hetzner, 1988; Wocken & Antor, 1987) machen deutlich, dass sich integrativer Unterricht zudem nicht negativ auf die Schulleistungen nicht beeinträchtigter Kinder auswirkt (vgl. Kap. 2.3).

Aktuelle Statistiken zur Umsetzung von gemeinsamem Unterricht in der Praxis in Deutschland zeigen jedoch, dass die rechtlichen Rahmenbedingungen bei Weitem noch nicht vollständig umgesetzt sind, da noch zu wenige Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf in Regelschulen unterrichtet werden (vgl. Kap. 2.4). Die Umsetzung von gemeinsamem Unterricht für alle Kinder bedarf eines Paradigmenwechsels, d. h. es muss ein Wandel vom segregativen zum integrativen System stattfinden (CRPD, 2015; Hinz, 2002; Feuser, 1998; Mittler, 2000; Wocken, 2015). Dieser Wechsel ist aber aus Sicht dieser Autoren noch nicht erreicht (vgl. Kap. 2.5). Aus pädagogischer Perspektive werden Vorschläge einer möglichen didaktischen Umsetzung gemeinsamen Unterrichts gemacht, die in die Konzeption von Lernumgebungen zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses einfließen können (vgl. Kap. 2.6).

Aus mathematikdidaktischer Sicht gilt es zu überlegen, wie gemeinsamer Unterricht für alle Kinder realisierbar ist. Welche Antworten der Mathematikunterricht auf die Inklusionsforderung anbieten kann, ist deswegen die übergeordnete Forschungsfrage dieser Arbeit. Bei einer sinnvollen Umsetzung gemeinsamen Unterrichts aller Kinder sind verschiedenste Dimensionen von Heterogenität zu berücksichtigen (z. B. Prengel, 2013, S. 32 ff.). Im Rahmen dieser Arbeit wird der Fokus auf die Dimension Heterogenität bezüglich mathematischer Fähigkeiten und genauer auf Multiplikatives Verständnis gelegt.

3 Heterogenität aus mathematikdidaktischer Perspektive

Diese Arbeit setzt sich speziell mit der Heterogenitätsdimension Fähigkeiten im mathematischen Bereich auseinander. Für diese Heterogenitätsdimension sind beide Pole, d. h. sowohl mathematische Leistungsstärke als auch Schwierigkeiten im Mathematikunterricht relevant. In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus auf Möglichkeiten der Förderung von Kindern mit Förderbedarf und damit auf Schwierigkeiten im Mathematikunterricht. Im Folgenden wird deswegen zunächst kurz auf mathematische Leistungsstärke und ausführlicher auf Rechenschwäche eingegangen (vgl. Kap. 3.1). Zur Grundsatzfrage, wie Kinder, insbesondere diejenigen mit Förderbedarf, geeignet gefördert werden können, liegen verschiedene Vorschläge und Forschungsergebnisse vor. Einige ausgewählte Ergebnisse, die sich auf die Behandlung von mathematischen Inhalten in Förderklassen beziehen, werden vorgestellt (vgl. Kap. 3.2). Schlussfolgerungen für die eigene Arbeit werden im Anschluss daran gezogen, die in ein sich daraus ergebendes Forschungsdesiderat münden (vgl. Kap. 3.3).

3.1 Unterschiedliche Voraussetzungen

3.1.1 Mathematische Leistungsstärke

Im Zusammenhang mit dem Begriff *Leistungsstärke* fällt oft auch der Begriff *Hochbegabung*. Dies betrifft allerdings nur 2 % bis 3 % aller Kinder (Spiegel & Selter, 2003, S. 100).

Es existieren mehr als hundert Hochbegabungsdefinitionen (Feger & Prado, 1998, S. 29). Bisher gibt es also noch keine allgemein anerkannte, wissenschaftlich exakte Definition (z. B. Peter-Koop, Fischer & Begić, 2002, S. 7).

Hochbegabung wird z. B. nach Heller & Hany (1996) „als individuelles Fähigkeitspotential für herausragende Leistungen, oft (nur) in einem bestimmten Bereich“ (S. 478) angesehen. Der Begriff ist eng verknüpft mit dem psychologischen Eignungsbegriff und wird in diesem Zusammenhang eher bereichsspezifisch eingesetzt (ebd., S. 480). Den Begriff *Intelligenz* sehen Heller & Hany als bereichsunspezifisch an und definieren den Begriff als „Fähigkeit zum Denken oder Problemlösen in für das Individuum neuen, d. h. nicht aufgrund von Lernerfahrungen vertrauten, Situationen“ (ebd.). Andererseits wird von anderen Autoren besondere Fähigkeit in einem bestimmten Bereich auch als *Spezialbegabung* bzw. *Talent* bezeichnet, wohingegen *Hochbegabung* sich auf die „Gesamtheit der Leistungsdispositionen“ (Peter-Koop et al., 2002, S. 7) bezieht.

Grundlage vieler weiterer Theorieansätze ist hingegen „die Auffassung von Begabung als einer hohen bereichsunspezifischen Intelligenz“ (ebd.). Begabung bezieht sich somit „nicht nur auf einen einzigen, bestimmten Bereich, sondern setzt sich aus mehreren intellektuellen Fähigkeiten zusammen, aus denen sich die allgemeine Intelligenz ergibt“ (ebd.). Es gibt auch Definitionen, in denen Kinder dann als hochbegabt angesehen werden, wenn sie einen IQ von 130 oder mehr aufweisen (Holling & Kanning, 1999, S. 5; Käpnick, 1998, S. 50; Peter-Koop et al., 2002, S. 7; Spiegel & Selter, 2003, S. 99 f.). Allerdings wird seit den 1980er Jahren davor gewarnt, einen hohen Intelligenzquotienten mit besonderer mathematischer Begabung gleichzusetzen (Peter-Koop et al., 2002, S. 14). Käpnick (1998) schließt sich der Auffassung an, dass die Begriffe *Begabung* und *Hochbegabung* „stets in bezug [sic] auf eine spezifische Tätigkeit oder auf einen Tätigkeitskomplex gesehen“ (S. 46) werden. Dementsprechend versteht er unter mathematischer Begabung „eine vorhandene hohe Leistungspotenz für mathematisches Tätigsein“ (ebd.).

Weitere genauere Ausführungen zu dieser Thematik sind z. B. bei Feger & Prado (1998), Holling & Kanning (1999), Käpnick (1998) sowie Peter-Koop & Sorger (2002) nachzulesen. Für die hier vorliegende Arbeit soll der Schwerpunkt jedoch auf dem Bereich Rechenschwäche liegen, worauf im Folgenden genauer eingegangen wird.

3.1.2 Rechenschwäche

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit soll ein Konzept zur Förderung von Multiplikativem Verständnis entwickelt werden. Um für die Konzeption einer individuellen Förderung geeignete Schlüsse ziehen zu können, wird in diesem Zusammenhang im Folgenden auf das Phänomen *Rechenschwäche* genauer eingegangen. Es werden zunächst der Begriff und die Problematik seiner Definition beleuchtet.

3.1.2.1 Problematik der Begriffsdefinition Rechenschwäche

Das Phänomen *Rechenschwäche* ist nicht neu, man hat es schon vor 3000 Jahren untersucht (z. B. Lorenz, 2005a, S. 13). Bereits die alten Ägypter beschäftigten sich mit Schwierigkeiten im arithmetischen Bereich hauptsächlich bei Erwachsenen. Spätestens im 19. Jahrhundert mit der Entstehung der Psychologie als Wissenschaft wurde das Phänomen genauer untersucht (ebd.). In der Literatur findet man verschiedenste Unterformen und Begriffe für das Phänomen *Schwierigkeiten beim Rechnen* (ebd.). Folgende Liste von Lorenz & Radatz (1993) soll den „verwirrenden Zustand“ (S. 17) zum Thema *Rechenschwäche* zeigen:

> Akalkulie, Alexie für Zahlen, Anarithmasthenie, Anarithmetrie, Anarithmie, asemantische Aphasie, Dyskalkulie, dysgraphische Dyskalkulie, dyslektische Dyskalkulie, Dysmathematica, Entwicklungsdyskalkulie, Fingeragnosie, Gerstmann-Syndrom, graphische Dyskalkulie, ideognostische Dyskalkulie, Kalkulasthenie, Lernstörung im arithmetischen Verstehen, lexikalische Dyskalkulie, motorisch-verbale Dyskalkulie, operationale Dyskalkulie, Parakalkulie, parietale Dyskalkulie, postläsionale Dyskalkulie, praktognostische Dyskalkulie, Pseudo-Akalkulie, Pseudo-Dyskalkulie, Pseudo-Oligokalkulie, räumliche Akalkulie, sekundäre Akalkulie, sekundäre Dyskalkulie, sekundäre Oligokalkulie, sekundäre Parakalkulie, sensorisch-verbale Dyskalkulie, verbale Dyskalkulie, visuelle Agnosie, Zahlen-Aphasie, Zahlenblindheit, Zahlendysgraphie, Zahlendyslexie, Zahlendyssymbolismus. (Weitere Vorschläge nehmen die Autoren jederzeit gerne entgegen.) (ebd., S. 17)

Unterschiedliche Wissenschaftsdisziplinen haben sich mittlerweile mit dem Phänomen auseinandergesetzt, „von der Medizin, der Psychodiagnostik und Neuropsychologie über die Denkpsychologie und Pädagogische Psychologie sowie die Sonderpädagogik bis hin zur Mathematikdidaktik“ (Schipper, 2005, S. 17). Häufiger haben sich Neuropädiater und Kinderpsychiater mit der Thematik beschäftigt, weniger jedoch wurde sie aus sonderpädagogischer Sichtweise untersucht. Es dominiert immer noch eine medizinisch-klinische Sichtweise (Lorenz, 2005a, S. 14). Ein gemeinsamer interdisziplinärer Forschungsansatz fehlt bislang, was dazu führt, dass auch noch keine allgemein anerkannte einheitliche Definition existiert (Schipper, 2005, S. 17; Spiegel & Selter, 2003, S. 87; Moser Opitz, 2004, S. 179).

Begriffe wie *Rechenschwäche*, *Rechenstörung* und *Dyskalkulie* werden häufig synonym verwendet. Es gibt Tendenzen, dass die Begriffe *Rechenschwäche* und *Rechenstörung* eher in mathematikdidaktischen Ausführungen gebraucht werden, um damit auszudrücken, dass die Schwierigkeit im Inhaltsbereich Rechnen liegt. Damit sind eher die Schule und Ausbildung und somit die Mathematikdidaktik zuständig (Schipper, 2005, S. 17). *Dyskalkulie* oder *Arithmasthenie* werden häufiger in der Sonderpädagogik und Psychologie eingesetzt, um zu zeigen, dass es eher um eine Krankheit geht und die Zuständigkeit bei Fachpersonen aus der Medizin oder Psychologie liegt (ebd.).

Die vorhandenen Definitionen der Begriffe können grundsätzlich den zwei Arten *Diskrepanzdefinitionen* und *phänomenologische Definitionen* zugeordnet werden (Kaufmann, 2003, S. 13 ff.; Schipper, 2005, S. 17 ff.; Schipper, Wartha & von Schroeders, 2011, S. 13 f.), die im Folgenden genauer erläutert werden.

Diskrepanzdefinitionen

Diskrepanzdefinitionen

> versuchen, die Auffälligkeiten als einseitige und ‚erwartungswidrige' Probleme in Mathematik in Diskrepanz zu nicht vorhandenen Schwierigkeiten in anderen kognitiven Anforderungsbereichen (allgemeine Intelligenz, schulische Leistungen insgesamt, Leistungen im sprachlichen Bereich) zu kennzeichnen. (Schipper et al., 2011, S. 13)

Eine der wahrscheinlich bekanntesten Definitionen dieser Art wurde vom Deutschen Institut für Medizinische Dokumentation und Information in der „Internationalen statistischen Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme (ICD-10-GM)" herausgegeben, deren Original „**I**nternational Statistical **C**lassification of **D**iseases and Related Health Problems" von der Weltgesundheitsorganisation veröffentlicht wurde. Rechenstörung wird dort im Kapitel „Entwicklungsstörungen" (Deutsches Institut für Medizinische Dokumentation und Information – DIMDI, 2018, S. 219 ff.) folgendermaßen definiert:

> Diese Störung besteht in einer umschriebenen Beeinträchtigung von Rechenfertigkeiten, die nicht allein durch eine allgemeine Intelligenzminderung oder eine unangemessene Beschulung erklärbar ist. Das Defizit betrifft vor allem die Beherrschung grundlegender Rechenfertigkeiten, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, weniger die höheren mathematischen Fertigkeiten, die für Algebra, Trigonometrie, Geometrie oder Differential- und Integralrechnung benötigt werden. (ebd., S. 221)

Auf der Grundlage dieser Definition, eine Diagnosestellung vorzunehmen, wird aus verschiedenen Gründen kritisiert.

Es werden die vier Grundrechenarten als Problembereiche genannt, sodass die Auffälligkeiten auf Rechenfertigkeiten eingegrenzt werden (Schipper et al., 2011, S. 13).

Darüber hinaus steht das „Defektverständnis" (Moser Opitz, 2004, S. 183; Ginsburg, 1997, S. 27 f.) in der Kritik. „If the child's intelligence is normal, if instruction is adequate, and if ‚sociocultural opportunity' is present, then any failure to learn must result from some defect within the child, namely, a specific incapacity, a cognitive disorder" (ebd., S. 28). Das würde dazu führen, dass dieser ‚Defekt' im betroffenen Kind liegt, den es zu ‚reparieren' gilt. Aufzubauendes Verständnis muss aber in Zusammenhang mit dem jeweiligen Kontext, insbesondere mit dem Schulkontext betrachtet werden (ebd., S. 28).

In der Diskrepanzdefinition wird angenommen, dass sich die Lese- und Rechtschreibleistungen im normalen Bereich befinden. „Kombinierte Störungen schulischer Fertigkeiten“ (Deutsches Institut für Medizinische Dokumentation und Information – DIMDI, 2018, S. 221) sind „eine schlecht definierte Restkategorie für Störungen mit deutlicher Beeinträchtigung der Rechen-, der Lese- und der Rechtschreibfähigkeiten“ (ebd.). Es gibt aber zahlreiche Kinder, die in beiden Bereichen Probleme zeigen (Schwenck & Schneider, 2003, S. 212), sodass es sich nicht nur um eine ‚Restkategorie‘ handelt.

Das Ausschlusskriterium *Intelligenzminderung* ist aus pädagogischer Sichtweise nicht zu vertreten, da es möglicherweise dazu führt, dass Kinder mit einem IQ von unter 85 keine zusätzliche Förderung erhalten (ebd.), da normale Intelligenz zwischen 85 und 115 angenommen wird (Lorenz, 2005a, S. 15). Das Verfahren führt darüber hinaus dazu, dass eine zu große Anzahl an Kindern *Rechenschwäche* diagnostiziert bekommt, obwohl auch andere Gründe für ein Scheitern in Mathematik möglich sein können, wie wenig Motivation, geringes Selbstkonzept usw. (Ginsburg, 1997, S. 27). Zudem besteht auch die Gefahr einer willkürlichen Grenzziehung, die entscheidet, ob Kindern eine Förderung genehmigt wird oder nicht (Lorenz, 2005a, S. 15). Fraglich ist außerdem, „ob sich Lernschwierigkeiten bei Schülerinnen und Schülern mit hohem und tiefem IQ tatsächlich auch unterschiedlich äussern oder ob nicht unabhängig vom IQ sehr ähnliche Schwierigkeiten beim Erwerb der Kulturtechniken angenommen werden müssen“ (Moser Opitz, 2004, S. 182).

Das zweite Ausschlusskriterium *unangemessene Beschulung* ist ebenfalls wenig sinnvoll und unpädagogisch (Schipper et al., 2011, S. 13). Lorenz fragt berechtigterweise: „Warum sollte ein Kind von Fördermaßnahmen ausgeschlossen sein, wenn seine Probleme im Mathematikunterricht von nicht oder schlecht erteiltem Unterricht ausgehen?“ (Lorenz, 2005a, S. 14). Ginsburg (1997), der sich allerdings auf das US-amerikanische Schulsystem bezieht, geht davon aus, dass eine bedeutende Ursache von mathematischen Schwierigkeiten von Kindern gerade im Unterricht und in den entsprechenden Materialien liegt (S. 18). Es ist aus gutem Grund die Frage zu stellen, ob nicht sogar die Qualität des Unterrichts entscheidend ist für die Entwicklung von grundlegenden mathematischen Fähigkeiten (Zwack-Stier & Börner, 1998, S. 226). Zudem ist es schwer, nachzuweisen, welche Ursachen Rechenschwäche in einem bestimmten Fall hat. „Unzureichende Beschulung als Ursache“ (Lambert, 2015, S. 61) lässt sich schwer ausschließen.

Diese Definition ist somit weder für die Praxis in der Schule noch für wissenschaftliche Zwecke brauchbar (Schipper et al., 2011, S. 13; Lorenz, 2005a, S. 14).

Phänomenologische Definitionen

Phänomenologische Definitionen sind Definitionen, die auf den schulischen Inhaltsbereich Mathematik Bezug nehmen. Sie „versuchen, Phänomene zu beschreiben, die bei Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen immer wieder zu beobachten sind“ (Schipper et al., 2011, S. 13).

Auch diese Art von Definitionen sind allerdings mit Problemen behaftet, da sie davon ausgehen, „dass es möglich sei, zwischen ‚normalen‘, zu jedem Lernprozess dazu gehörenden [sic] Fehlern und besonders auffälligen, gleichsam ‚pathologischen‘ Fehlern eine Grenze zu ziehen. Eine solche exakte Grenzziehung ist nicht möglich“ (Schipper, 2005, S. 20). Fehler, die leistungsschwächere Kinder machen, können auch bei leistungsstärkeren Kindern beobachtet werden. Insgesamt machen leistungsstärkere Kinder jedoch weniger Fehler und lernen aus diesen; leistungsschwächere Kinder zeigen unterschiedlichste Fehlerstrategien, die sich jedoch häufig verfestigen (ebd.).

In der Mathematikdidaktik haben verschiedene Forscher versucht, das Phänomen *Rechenschwäche* zu definieren. Auf ausgewählte *Definitionen* wird im Folgenden eingegangen.

Gaidoschik (2012) definiert den Begriff folgendermaßen:

> ‚Rechenschwäche‘ ist […] auf der Ebene des kindlichen **Denkens** ein klar beschreibbarer […] Zusammenhang von Fehlvorstellungen, fehlerhaften Denkweisen und letztlich nicht zielführenden Lösungsmustern zu den ‚einfachsten‘ mathematischen Grundlagen.
> Dieses ‚Fehlersyndrom‘ gründet mitunter auf Ausfällen oder Rückständen in einem oder mehreren der vielen Bereiche, die als Voraussetzungen am Erlernen der vielschichtigen Kulturleistung ‚Rechnen‘ beteiligt sind. (S. 13)

Nach Gaidoschik (2012) sollte eine sinnvolle Definition von Rechenschwächen die verschiedensten Wechselwirkungen einbeziehen, die zwischen den mathematischen Vorstellungen der Kinder und anderen Bereichen bestehen (Abb. 3.1) (ebd.).

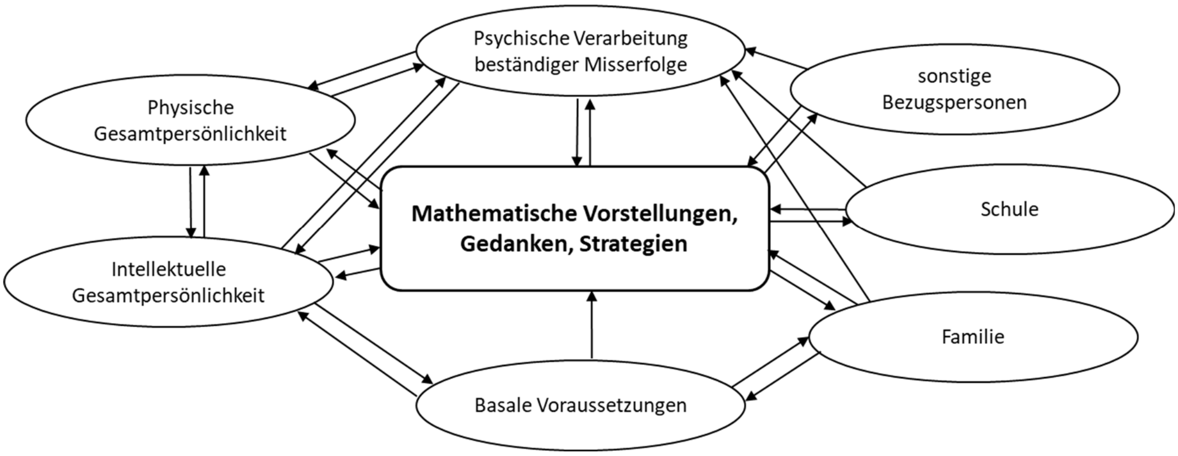


Abbildung 3.1: Gesamtsystem Rechenschwäche in Anlehnung an Gaidoschik (2012, S. 13)

Nach Schipper (2005) und Lorenz und Radatz (1993) können die Begriffe *Rechenschwäche, Rechenstörung* und *Dyskalkulie* folgendermaßen verstanden werden: *Rechenschwäche* betrifft Kinder, „die einer Förderung jenseits des Standardunterrichts bedürfen“ (Lorenz & Radatz, 1993, S. 16). Es werden also Kinder als ‚rechenschwach‘ bezeichnet, „die unabhängig von der Dauer und der Schwere ihrer Beeinträchtigung über den Normalunterricht hinaus weitere (schulische) Fördermaßnahmen benötigen“ (Schipper, 2005, S. 22). „Innerhalb der Gruppe der Kinder mit Rechenschwäche kann es Kinder mit einer Rechenstörung geben“ (ebd., S. 23). *Rechenstörung* bezieht sich auf Kinder, „die dauerhaft und schwerwiegend beim Erlernen des Rechnens beeinträchtigt sind“ (ebd.). Das Ziehen einer genauen Grenze zwischen Rechenschwäche und Rechenstörung ist jedoch kaum möglich. *Dyskalkulie* sollte nur dann verwendet werden, wenn eine Rechenstörung vorliegt und zugleich festgestellt worden ist, dass das betroffene Kind im Sinne des § 35a GB VIII seelisch behindert bzw. von einer solchen Behinderung bedroht ist.“ (ebd.)

In der hier vorliegenden Arbeit wird im Folgenden der Begriff *Rechenschwäche* verwendet und in Anlehnung an Lorenz & Radatz (1993), Schipper (2005) und Gaidoschik (2012) verstanden. Und zwar betrifft es all jene Kinder, „die einer Förderung jenseits des Standardunterrichts bedürfen“ (Lorenz & Radatz, 1993, S. 16) und „die unabhängig von der Dauer und der Schwere ihrer Beeinträchtigung über den Normalunterricht hinaus weitere (schulische) Fördermaßnahmen benötigen“ (Schipper, 2005, S. 22). Rechenschwäche bezieht sich auf „Fehlvorstellungen, fehlerhafte [...] Denkweisen und letztlich nicht zielführende [...] Lösungsmuster [...] zu den ‚einfachsten‘ mathematischen Grundlagen“, die zu „Ausfällen oder Rückständen in [...] Bereiche[n führen], die als Voraussetzungen am Erlernen der vielschichtigen Kulturleistung ‚Rechnen‘ beteiligt sind“ (Gaidoschik, 2012, S. 13).

Auf die Beschreibung von Ursachen wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet; Ausführungen hierzu sind z. B. bei Gaidoschik (2012, S. 14 ff.), Lambert (2015, S. 73 ff.), Schipper et al. (2011, S. 14 f.) sowie Spiegel & Selter (2003, S. 92 ff.) zu finden.

3.1.2.2 Umsetzung der Förderung bei Rechenschwäche im Sinne des Sozialgesetzbuchs

Schulrechtliche Regelungen, wie mit Rechenschwäche umzugehen ist, unterscheiden sich in Deutschland nach jeweiligem Bundesland (Lambert, 2015, S. 246 ff.). „Das Spektrum reicht von einer Gleichstellung mit einer Lese-Rechtschreibschwäche bin hin zur Nicht-Existenz der Rechenschwäche im Schulgesetz bzw. dem vollständigen Fehlen von Erlassen“ (ebd., S. 246). Dies bedeutet u. U. eine Ungleichbehandlung betroffener Kinder in den unterschiedlichen Bundesländern. Zudem kann zumindest in Bundesländern, in denen keine weiteren Regeln festgelegt sind, eine entsprechende Förderung häufig auch stark vom Engagement beteiligter Lehrkräfte und Eltern abhängen.

Die Umsetzung der Förderung und Therapie bei Rechenschwäche gestaltet sich auch aus weiteren Gründen nicht ganz unproblematisch. Im Achten Buch des Sozialgesetzbuches wird in § 35a geregelt, wie mit Kindern mit Rechenschwächen in der Praxis umgegangen werden soll. Es geht hier um „Eingliederungshilfe für seelisch behinderte Kinder und Jugendliche“ (§ 35a, SGB VIII).

> (1) Kinder oder Jugendliche haben Anspruch auf Eingliederungshilfe, wenn
> 1. ihre seelische Gesundheit mit hoher Wahrscheinlichkeit länger als sechs Monate von dem für ihr Lebensalter typischen Zustand abweicht, und
> 2. daher ihre Teilhabe am Leben in der Gesellschaft beeinträchtigt ist oder eine solche Beeinträchtigung zu erwarten ist.
>
> Von einer seelischen Behinderung bedroht im Sinne dieses Buches sind Kinder oder Jugendliche, bei denen eine Beeinträchtigung ihrer Teilhabe am Leben in der Gesellschaft nach fachlicher Erkenntnis mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist. [...] (§ 35a, SGBVIII, Abs. 1)

Es muss weiter eine Stellungnahme

1. eines Arztes für Kinder- und Jugendpsychiatrie und -psychotherapie,
2. eines Kinder- und Jugendpsychotherapeuten oder
3. eines Arztes oder eines psychologischen Psychotherapeuten, der über besondere Erfahrungen auf dem Gebiet seelischer Störungen bei Kindern und Jugendlichen verfügt (§ 35a, Abs. 1a, SGB VIII),

eingeholt werden.

> Die Stellungnahme ist auf der Grundlage der Internationalen Klassifikation der Krankheiten in der vom Deutschen Institut für medizinische Dokumentation und Information herausgegebenen deutschen Fassung zu erstellen. Dabei ist auch darzulegen, ob die Abweichung Krankheitswert hat oder auf einer Krankheit beruht. Die Hilfe soll nicht von der Person oder dem Dienst oder der Einrichtung, der die Person angehört, die die Stellungnahme abgibt, erbracht werden.
> (2) Die Hilfe wird nach dem Bedarf im Einzelfall
> 1. in ambulanter Form
> 2. in Tageseinrichtungen für Kinder oder in anderen teilstationären Einrichtungen
> 3. durch geeignete Pflegepersonen und
> 4. in Einrichtungen über Tag und Nacht sowie sonstigen Wohnformen geleistet. (§ 35a, SGB VIII)

„Es ist darauf hinzuweisen; [sic] dass Teilleistungsstörungen nicht mit seelischer Behinderung gleichzusetzen sind. Nicht jede Störung schulischer Fertigkeiten hat Krankheitswert und/oder ist eine vorhandene oder drohende seelische Behinderung im Sinne von § 35a SGB VIII (Bayerisches Staatsministerium für Arbeit und Sozialordnung, Familie und Frauen, 2007, S. 3). Als Folge dessen könnte aber die Gefahr bestehen, dass ein Kind „[v]on einer seelischen Behinderung bedroht“ (§ 35a, Abs. 1, SGB VIII) ist. Und das bedeutet laut Gesetzestext, dass „eine Beeinträchtigung ihrer Teilhabe am Leben in der Gesellschaft nach fachlicher Erkenntnis mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erwarten ist.“ (ebd.) Eine Bedrohung durch seelische Behinderung möchte wohl kaum jemand ausschließen (Lorenz, 2005a, S. 106). Somit ist die Entscheidung, „ob ein Kind an einer Rechenschwäche leidet (und deshalb eine seelische Behinderung droht) und so einer Eingliederungshilfe in Form einer außerschulischen Förderung bedarf, die das Jugendamt bezahlt“ (Lorenz, 2005a, S. 106), äußerst schwer zu treffen.

Festzustellen ist außerdem, dass immer mehr Einrichtungen, die Kindern mit mathematischen Lernproblemen helfen sollen, vorhanden sind (z. B. „Zentrum für Arithmasthenie“) (Lorenz, 2013, S. 181). Allerdings ist der Titel „Dyskalkulie-Therapeut“ (ebd.) ungeschützt, sodass ihn sich jeder ohne Bestätigung bestimmter Kompetenzen aneignen kann (Lorenz, 2005a, S. 106 f.; Lorenz, 2013, S. 181). Die Wahl einer geeigneten Förderung stellt somit eine große Herausforderung dar.

Demnächst wird eine ICD-11 (Internationale statistische Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme) gültig sein, deren deutsche Fassung derzeit noch überarbeitet wird. In diesem Zusammenhang werden

Leitlinien von den jeweils betroffenen Berufsverbänden entwickelt. Darin werden Standards für Diagnose und Therapie u. a. auch für Rechenstörungen festgelegt (Ruwisch & Lorenz, 2018, S. 41), in welchen u. a. folgende Hinweise gegeben werden:

> Grundsätzlich gilt es im Sinne der Leitlinie, möglichst frühzeitig Mathematikprobleme zu identifizieren und präventiv Fördermaßnahmen einzuleiten. [...] Ein zusätzlich gewährter Nachteilsausgleichs [sic] in Kombination mit Fördermaßnamen ermöglicht, je nach Schweregerad [sic] einer Rechenstörung, die erfolgreiche Teilnahme am Unterricht. Die Benotung ist bei vorhandener Diagnose einer Rechenstörung daher am besten auszusetzen oder geringer zu gewichtigen [sic]. [...] Die höchsten Fördereffekte zeigten sich zwar in Einzelsitzungen, dennoch ist ohne bisherige Diagnose einer Rechenstörung auch eine Förderung in (gegebenenfalls leistungshomogenen) Kleingruppen möglich. Eine Förderung kann zusätzlich zum generellen Unterricht stattfinden oder, sofern möglich, den Mathematikunterricht zeitweise ersetzen. (Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V., 2018, S. 44)

Genauere Hinweise zu methodischem Vorgehen werden jedoch nicht gegeben und die Mehrheit der genannten Förderprogramme stammen von Psychologinnen und Psychologen, bei denen überwiegend keine Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker hinzugezogen wurden (Ruwisch & Lorenz, 2018, S. 43). Möglicherweise kann dies als negativ angesehen werden. Man kann es jedoch „auch als Ansporn“ sehen, „Anstrengungen zu unternehmen, die bereits bestehenden Ansätze auch in Richtung evidenzbasierter Forschungsansätze auszubauen“ (Ruwisch & Lorenz, 2018, S. 43).

Insgesamt lässt sich feststellen, dass kein einheitlicher Umgang mit Kindern mit Rechenschwäche möglich ist, sondern jede Förderung individuell angepasst werden muss (Lorenz, 2005a, S. 8). Eine individuelle Anpassung an den jeweiligen Förderbedarf eines Kindes ist auch bei der Konzeption von Lernumgebungen zur Förderung im Rahmen dieser Arbeit relevant.

3.1.2.3 Merkmale von Rechenschwäche

Um den Begriff Rechenschwäche genauer zu fassen, sollen im Folgenden verschiedene Merkmale von Rechenschwäche aus mathematikdidaktischer Perspektive beschrieben werden, die z. B. bei Spiegel & Selter (2003) und Schipper et al. (2011) zu finden sind. Zur besseren Übersicht werden diese zunächst in einer Tabelle aufgelistet (Tab. 3.1) und im Anschluss daran genauer erläutert.

Merkmale, die bei beiden Autoren in ähnlicher Form auftauchen, sind in der Tabelle nebeneinander aufgeführt.

Merkmale von Rechenschwäche nach …	
… **Spiegel & Selter** (2003, S. 88 ff.)	… **Schipper et al.** (2011, S. 15 ff.)
▪ Verfestigung des zählenden Rechnens	▪ verfestigtes zählendes Rechnen
▪ Auffassung von Mathematik als bedeutungsloses Regelwerk	▪ eingeschränktes Stellenwertverständnis und unzureichende Orientierung im Zahlenraum
	▪ unzureichende Grundvorstellungen und Größenvorstellungen
▪ Unsicherheiten bei Links-/Rechts-Unterscheidung	
▪ Übersetzungsprobleme zwischen verschiedenen Darstellungen	
▪ geringes Selbstvertrauen	

Tabelle 3.1: Merkmale von Rechenschwäche nach Spiegel & Selter (2003) und Schipper et al. (2011)

Verfestigung des zählenden Rechnens

Im ersten Schuljahr ist zählendes Rechnen für längere Zeit eine erwartungsgemäß angewandte Lösungsmethode für Additions- und Subtraktionsaufgaben (Spiegel & Selter, 2003, S. 88; Schipper et al., 2011, S. 15). Im weiteren Lernprozess sollten die Kinder jedoch zu effektiveren Strategien gelangen (Spiegel & Selter, 2003, S. 88). An das Merkmal der Verfestigung des zählenden Rechnens knüpft Gaidoschiks Studie (2010a) an, in der er die Entwicklung von kindlichen Rechenstrategien im Laufe des ersten Schuljahres untersucht, Schulbücher analysiert sowie Lehrkräfte und Eltern befragt (S. 19). Er findet heraus, dass in den analysierten österreichischen Schulbüchern Rechenstrategien unzureichend thematisiert werden und die beteiligten Lehrkräfte Ableitungsstrategien zu wenig im Unterricht behandeln (ebd., S. 258 ff.; 311 ff.). Die qualitative Auswertung der Interviews mit den Kindern ergibt, dass immerhin 56 % der Kinder der Stichprobe beim Lösen additiver Grundaufgaben Ableitungsstrategien in Zusammenhang mit anderen Vorgehensweisen wie Faktenabruf oder zählendem Rechnen einsetzen, der Rest nutzt jedoch keine Ableitungsstrategien (ebd., S. 413; Gaidoschik, 2010b, S. 322 f.).

Auffassung von Mathematik als bedeutungsloses Regelwerk

„Manche Kinder empfinden selbst einfache Rechenaufgaben als unergründliche Geheimnisse. In ihrer Wahrnehmung müssen sie nichtssagende Symbole gemäß undurchsichtiger [sic] Operationen miteinander verknüpfen" (Spiegel & Selter, 2003, S. 90). Zu diesem eher allgemein formulierten Merkmal gehören meines Erachtens die zwei folgenden Symptome, die Schipper et al. (2011) getrennt formulieren:

Eingeschränktes Stellenwertverständnis und unzureichende Orientierung im Zahlenraum

Im ersten und zweiten Schuljahr geht es zunächst um Zahlenrechnen, d. h. „ein Rechnen mit Zahlen und ihren Bedeutungen" (Schipper et al., 2011, S. 18) und erst im dritten Schuljahr bei den schriftlichen Rechenverfahren um Ziffernrechnen. Es gibt jedoch Kinder, die kein Verständnis für das Zahlenrechnen entwickeln und somit Aufgaben zählend lösen müssen. Sie verwenden verschiedene „Ausweichverfahren" (ebd.), wie am Material zählen, ziffernweises Rechnen oder auch schriftlich im Kopf rechnen (ebd., S. 18.f.). Es wird dadurch „das Arbeiten mit Zahlen und ihren Beziehungen" (ebd., S. 19) umgangen und eine „weitere Entwicklung von Zahl- und Operationsverständnis" (ebd.) behindert.

Unzureichende Grundvorstellungen und Größenvorstellungen

Hierbei geht es darum, dass zum einen für ein Verständnis der Operationen die Entwicklung von Grundvorstellungen notwendig ist (vgl. Kap. 4.2.2). Die Aktivierung von Grundvorstellungen ist beispielsweise notwendig, um Rechengeschichten in den entsprechenden Term übersetzen zu können (ebd., S. 21). Dabei ist es wichtig, dass die verschiedenen Grundvorstellungen zu einer Operation entwickelt werden (ebd.). Wenn Kinder die Grundvorstellungen nicht aktivieren können, kann es passieren, dass die Zahlen in der Rechengeschichte ohne Bezug zum Inhalt verrechnet werden (ebd.).

Unsicherheiten bei Links-/Rechts-Unterscheidung

Kinder mit Rechenschwierigkeiten haben häufig Probleme, an sich selbst und an einer anderen Person links und rechts zu unterscheiden (Schipper, 2005, S. 7; Spiegel & Selter, 2003, S. 88). Diese Fähigkeit ist allerdings notwendig, da Arbeitsmittel und Darstellungen mit Richtungen arbeiten (Spiegel & Selter, 2003, S. 88).

Übersetzungsprobleme zwischen verschiedenen Darstellungen

Rechenaufgaben können mithilfe verschiedener Darstellungen und Arbeitsmittel veranschaulicht werden. Kinder mit Rechenschwäche haben häufig Probleme, zwischen verschiedenen Darstellungsformen hin und her zu übersetzen (ebd., S. 89 f.; vgl. auch Kap. 4.5.3).

Geringes Selbstvertrauen

Kinder, die Probleme beim Rechnen haben, haben häufig mit der Zeit auch ein geringes Selbstvertrauen bezüglich ihrer Rechenfähigkeiten. Das führt dazu, dass sie sich immer weniger zutrauen und dadurch die Leistungen möglicherweise tatsächlich noch weiter sinken. Es ist schwer, einem solchen Teufelskreis zu entkommen (ebd., S. 90).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Schwierigkeiten in diesen Bereichen auch zu Problemen bei der Entwicklung von Multiplikativem Verständnis führen können. Deswegen ist bei der Konzeption von Lernumgebungen zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses und evtl. auch bei der Auswahl von Kindern für eine Förderung die Kenntnis dieser Merkmale von Rechenschwäche von Bedeutung.

3.1.2.4 Zwischenfazit

Für das Phänomen *Rechenschwäche* existieren je nach Bezugsdisziplin unterschiedliche Begriffe sowie verschiedene Definitionen (vgl. Kap. 3.1.2.1). Die Umsetzung einer Förderung von Kindern mit Rechenschwäche gestaltet sich aufgrund der rechtlichen Rahmenbedingungen problematisch und in den Bundesländern Deutschlands uneinheitlich. Eine Förderung sollte individuell an das Kind angepasst werden (vgl. Kap. 3.1.2.2). Aus mathematikdidaktischer Perspektive werden verschiedene Merkmale von Rechenschwäche identifiziert, welche für die Entwicklung eines Förderkonzepts Hinweise liefern können (vgl. Kap. 3.1.2.3).

3.2 Unterrichtliche Möglichkeiten im Umgang mit unterschiedlichen Voraussetzungen

Im vorherigen Abschnitt richtete sich der Blick auf individuelle Voraussetzungen der Kinder, wobei auf den Pol Schwierigkeiten im Mathematikunterricht der Grundschule fokussiert wurde, um daraus mögliche Rückschlüsse für die inhaltliche Konzeption von Lernumgebungen zur Förderung zu ziehen. Eine Grundsatzfrage ist es, welche Form der Förderung für Kinder mit Förderbedarf effektiv ist. Auch im Rahmen dieser Arbeit stellt sich die Frage, in welcher Form eine Förderung gelingen kann. Deswegen wird im folgenden Abschnitt auf verschiedene Möglichkeiten der Förderung von Kindern mit Schwierigkeiten eingegangen, die ebenso zur ‚Forderung' leistungsstarker Kinder einsetzbar sind (vgl. Kap. 3.2.1 und Kap. 3.2.2). Für die Konzeption und Durchführung von Lernumgebungen zur Förderung sind außerdem wissenschaftliche Befunde zum Themenbereich Förderung von Kindern mit unterschiedlichen Voraussetzungen im Mathematikunterricht relevant. Deshalb wird im folgenden Kapitel auf Untersuchungen eingegangen, die sich mit entdeckendem Lernen in Förderklassen beschäftigten (vgl. Kap. 3.2.3).

3.2.1 Differenzierung ausgehend von der Lehrkraft

Aus pädagogischer Perspektive unterscheidet man verschiedene Arten der Differenzierung, um Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen möglichst optimal fördern zu können.

> Unter Differenzierung wird einmal das variierende Vorgehen in der Darbietung und Bearbeitung von Lerninhalten verstanden, zum anderen die Einteilung bzw. Zugehörigkeit von Lernenden zu Lerngruppen nach bestimmten Kriterien. Es geht um die Einlösung des Anspruchs, jedem Lernenden auf optimale Weise Lernchancen zu bieten, dabei die Ansprüche und Standards in fachlicher, institutioneller und gesellschaftlicher Hinsicht sicher und gleichzeitig lernorientiert aufzubereiten. (Bönsch, 2009, S. 14)

Inhalte können methodisch, medial, im Umfang (quantitativ), im Anspruch (qualitativ), im Bearbeitungsmodus oder nach Zielvariation differenziert werden. Aufseiten der Lernenden können Alter, Geschlecht, Leistung, Begabung, Neigung oder Interesse Differenzierungskriterien sein (ebd., S. 14 f.).

Man unterscheidet des Weiteren äußere und innere Unterrichtsdifferenzierung. Äußere Differenzierung bezieht sich auf „Maßnahmen, die lerngruppenübergreifend (klassenübergreifend) Unterricht differenziert organisieren" (ebd., S. 19). Innere Differenzierung bezieht sich auf eine Lerngruppe in einem bestimmten Fach und meint Maßnahmen, „die verschiedenen Kriterien folgend, zeitweise unterschiedliche Untergruppierungen (Gruppen-, Partnerarbeit) ermöglichen" (ebd., S. 19). Die Differenzierung erfolgt also „gruppenintern" (ebd., S. 31), man spricht auch von „Binnendifferenzierung" (ebd., S. 31). Dabei kann methodisch, medial, nach stofflichem Umfang, Ziel oder Schwierigkeiten variiert werden (ebd., S. 19).

Derartige Formen der Differenzierung werden aus mathematikdidaktischer Perspektive kritisiert: Verschiedene „Schwierigkeitsstufen zur Adaption von Aufgabenstellungen an individuelle Lernbedürfnisse sind subjektiv und variieren mit der Person, mit der Zeit und mit dem Inhalt" (Krauthausen & Scherer, 2010, S. 1). Individualisierung wird häufig in der Form umgesetzt, dass jedes Kind an seinem Inhalt für sich arbeitet und somit soziales Lernen nicht mehr stattfinden kann (ebd.). Der Begriff Offenheit ist meist eher pädagogisch ausgerichtet und oft nicht klar bestimmt (ebd.): Es gibt große Unterschiede zwischen Offenheit „vom FACH aus" (Wittmann, 1996, S. 5, Hervorh. i. O.) oder Beliebigkeit. Alle Formen der Differenzierung gehen von der Lehrkraft oder dem eingesetzten Medium aus (Krauthausen & Scherer, 2010, S. 1).

Wittmann (2010b) merkt dazu an,

> daß Pädagogik und Didaktik immer dazu geneigt haben, die didaktischen Möglichkeiten des Lehrers zu **über**- und das geistige Potential der Schüler zu **unter**schätzen. Trotz aller guter Vorsätze, die Lernvoraussetzungen der Schüler aufzunehmen und ihre Eigentätigkeit zu fördern, hat sich die traditionelle Didaktik in der Regel stets auf Maßnahmen konzentriert, wie den Schülern etwas **beizubringen** sei, anstatt auf Maßnahmen, wie ihre Aktivität **angeregt** und **organisiert** werden könne. (S. 184, Hervorh. i. O.)

Alle bisher dargestellten Differenzierungsmaßnahmen berücksichtigen jedoch das jeweilige Fach mit seinemt Inhalt und seinen spezifischen Aspekten zu wenig (Krauthausen & Scherer, 2010, S. 1).

> Wenn der Lehrer in einem klein- und gleichschrittigen Unterricht alles genau vormacht, und die Grundschüler nur rezipieren und reproduzieren können, wird es sehr schwer, wenn nicht gar unmöglich sein, sie später als Schüler der weiterführenden Schulen, als Lehrlinge, als Studenten oder als Mitarbeiter in einem beruflichen Tätigkeitsfeld zu eigenaktivem Handeln zu bewegen. Diesen simplen Zusammenhang sollte man sich überall in der Gesellschaft gründlich bewußt [sic] machen. (Wittmann, 2010b, S. 183)

3.2.2 Differenzierung vom Kind aus

In der Mathematikdidaktik wird heute auf Grundlage eines konstruktivistischen Ansatzes das *aktiv-entdeckende Lernen* vertreten (z. B. Moser Opitz, 2007, S. 34; Wittmann, 2010a, S. 157 ff.). Aus mathematikdidaktischer Sicht geht man davon aus, dass nur durch aktive Auseinandersetzung mit den Inhalten mathematisches Wissen angeeignet werden kann (Lorenz, 1997, S. 5 ff.; Wember, 1996,

S. 23 ff.; Wittmann, 2010a, S. 157 ff.; Wittmann, 1995a, S. 10 ff.; Scherer, 1995, S. 85 ff.). Beim Ansatz des aktiv-entdeckenden Lernens wird davon ausgegangen, „dass Verständnis und Einsicht wichtiger sind als das unverstandene Durchführen von auswendig gelernten Verfahren“ (Moser Opitz, 2007, S. 35). Inhalte können am besten dann für längere Zeit im Gedächtnis behalten werden, wenn sie auch verstanden werden (Lorenz, 1997, S. 10).

Es werden verschiedene Aktivitäten als „grundlegende Prozesse der mathematischen Erkenntnistätigkeit“ (Wittmann, 1995a, S. 22) genannt: Mathematisieren, Entdecken, Argumentieren, Darstellen (ebd.). Damit diese Grundprozesse erreicht werden können, wird empfohlen, den Kindern mathematisch reichhaltige Problemstellungen anzubieten (ebd., S. 10). Der Zahlenraum wird z. B. in Ganzheiten von 20, 100, 1000 und einer Million erarbeitet (ebd., S. 24). Wichtig ist dabei, die Inhalte in einen Sinnzusammenhang zu bringen, damit sie verstanden werden können (Lorenz, 1997, S. 11). Das Lernen auf eigenen Wegen wird so in den Mittelpunkt gestellt und der Lösungsweg nicht vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler können im Austausch und unter Begleitung der Lehrkraft eigene Wege finden und evtl. verändern (Wittmann, 1995a, S. 15 ff.). „Da Lernen ein aktiver Vorgang ist, ist es individuell unterschiedlich“ (Lorenz, 1997, S. 12). Dies sollte nicht als Beeinträchtigung gesehen, sondern produktiv genutzt werden, indem Diskussionen über verschiedene Lösungsstrategien angeregt werden (ebd., S. 13).

In diesem Zusammenhang gibt es unterrichtliche Anregungen, die die sog. *natürliche Differenzierung* umsetzen. Der Begriff ist eng verknüpft mit dem Konzept der substanziellen Lernumgebungen (Wittmann, 1995b, S. 528 ff.; Wittmann, 1998a, S. 337). Nach Wittmann (1998a) sollen substanzielle Lernumgebungen folgende Kriterien erfüllen:

1. Sie müssen zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien des Mathematikunterrichts repräsentieren.
2. Sie müssen reiche Möglichkeiten für mathematische Aktivitäten von Schüler/-innen bieten.
3. Sie müssen flexibel sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse angepaßt [sic] werden können.
4. Sie müssen mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten. (S. 337 f.)

Des Weiteren nennen zur genaueren Beschreibung Krauthausen & Scherer (2010) konstituierende Merkmale, die die substanziellen Lernumgebungen charakterisieren:

- Alle Kinder der Klasse erhalten das gleiche Lernangebot. [...]
- Das Angebot muss dem Kriterium der (inhaltlichen) *Ganzheitlichkeit* genügen. Das heißt, es darf eine gewisse Komplexität nicht unterschreiten. [...]
- Ganzheitliche Kontexte in diesem Sinne erfordern eine wohlüberlegte *fachliche Rahmung* (günstigenfalls eine substanzielle Lernumgebung im Sinne Wittmanns [...]), die nur durch die fachkompetente Lehrkraft erfolgen und nicht an das Grundschulkind delegiert werden kann. [...]
- Neben dem Level der Bearbeitung sind den Kindern freigestellt: die Wege, die Hilfsmittel, die Darstellungsweisen und in bestimmten Fällen auch die Problemstellungen selbst. Und auch hier gilt der Grundsatz, wo immer sinnvoll, *metakommunikativ* tätig zu werden. [...]
- Das Postulat des sozialen Mit- und Voneinanderlernens wird in ebenso natürlicher Weise erfüllt, da es *von der Natur der Sache her* sinnvoll ist, unterschiedliche Zugangsweisen, Bearbeitungen und Lösungen in einen interaktiven Austausch einzubringen
(ebd., S. 5 f., Hervorh. i. O.).

Um mit der vorhandenen Heterogenität sinnvoll umgehen zu können, ist es darüber hinaus unbedingt notwendig, „das Vorwissen und die Vorgehensweisen der Kinder am Schulbeginn angemessen zu berücksichtigen und die ‚Ausgangslage' individuell zu prüfen" (Röthlisberger, 1999, S. 22). Wichtig ist, dass man in der Klasse eigene Standortbestimmungen durchführt (ebd., S. 26). Ausgangspunkt des Unterrichts sollte die Lebenswelt der Kinder sein (ebd., S. 12).

> Kinder lernen am effektivsten, wenn man ihnen Gelegenheit gibt, neue Anforderungen von ihrem jeweiligen Wissensstand aus anzupacken. Ein ganzheitlicher Einstieg kommt den großen Unterschieden innerhalb der Klassen sehr entgegen, wenn er so gestaltet ist, dass die Kinder ihre bereits erworbenen Kenntnisse ins Spiel bringen und das aufnehmen können, was sie für ihre weitere Entwicklung brauchen. (Röthlisberger, 1999, S. 26)

Zu welchen Ergebnissen die Forschung zur Wirkung von aktiv-entdeckendem sowie offenem Mathematikunterricht im Sinne der natürlichen Differenzierung mit Kindern mit Förderbedarf kommt, wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

3.2.3 Empirische Befunde zum aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht in Förderklassen

3.2.3.1 Entdeckendes Lernen in Förderklassen

Scherer (1995) untersucht in ihrer Arbeit, inwieweit „der grundlegende Paradigmenwechsel im Verständnis von Mathematiklernen, demzufolge Lernen als konstruktive Aufbauleistung des Individuums gesehen wird“ (S. 13), „auch für sonderpädagogische Unterrichtskonzeptionen [...] Gültigkeit haben“ (ebd.). Dazu wird ein „dreimonatiges Unterrichtsexperiment“ (ebd., S. 129) durchgeführt, welches „eine Zahlenraumerweiterung (100er-Raum) mit entsprechender Einführung der Addition und Subtraktion“ (ebd., S. 128) in der dritten Klasse beinhaltet. Es werden Tests und Interviews vor und nach der Intervention eingesetzt (ebd., S. 130). Der Test beinhaltet Aufgabengruppen zur Anzahlbestimmung, zum Schreiben und Lesen einer Zahl, zum Größenvergleich, zur Addition, Subtraktion und Multiplikation (ebd., S. 139). Im Interview werden Fragen zu jeweils einer Aufgabe der Aufgabengruppen gestellt (ebd., S. 151).

Folgende Ergebnisse der Tests und Interviews vor der Intervention können unter anderem festgestellt werden: Es zeigen sich „sehr heterogene Leistungen im Hinblick auf Kenntnisse und Fertigkeiten im jeweiligen Zahlenraum, im Hinblick auf entsprechende Operationen“ (ebd., S. 196) und „bei allgemeinen Fähigkeiten sowie bei der Verwendung von Veranschaulichungen“ (ebd.). Die gezeigten Leistungen der Kinder gehen über die bereits behandelten Zahlenräume hinaus (ebd., S. 196). Die Probleme der Kinder haben somit vermutlich weniger etwas mit der Zahlenraumgröße zu tun. Die Einschränkung auf den Zahlenraum bis 30 könnte dazu führen, dass Kinder Zusammenhänge nicht erkennen (ebd.). Ein Großteil der Schülerinnen und Schüler ist in der Lage, Aufgaben zu lösen, die erst zum Ende des Schuljahres behandelt werden sollten (ebd., S. 197). Dies hat auch etwas damit zu tun, dass bei einigen Kindern der Wechsel in die Förderschule am Ende des zweiten Grundschuljahres stattfindet und sie damit den 100er-Raum schon kennengelernt haben. Kleinschrittiges Vorgehen bezüglich der Zahlenraumerweiterung wäre für diese Kinder vermutlich eine Unterforderung (ebd.). Da den Kindern „Inversionen, Verständnis des Stellenwerts, Schwierigkeiten in der Zahlwortreihe“ (ebd.) besondere Schwierigkeiten bereiten, würde wohl auch für schwächere Schülerinnen und Schüler ein ganzheitliches Vorgehen nützlich sein. Lediglich isolierte Teilfertigkeiten zu üben, wäre eher nicht sinnvoll. Mehrere Kinder zeigen „Schwächen beim Einspluseins“ (ebd.). Fingerrechnen wird häufig beobachtet, zum einen i. d. R. „dynamisch zum Zählen“ (ebd.) und zum anderen sehr selten „als statische Darstellung eines Zahlbildes“ (ebd.). Die Kinder zeigen „eine Vielfalt von Strategien“ (ebd., S. 198). Möglicherweise liegen Schwierigkeiten häufig nicht in der jeweiligen Aufgabenstellung, sondern am „vorgeschriebenen Lösungsweg“ (ebd.). Somit sollten „mehr Freiheiten bei Aufgabenbearbeitungen“ (ebd.) gewährt werden. Die Fehleranzahl kann an mehreren Stellen durch das „Ausnutzen von Strukturzusammenhängen“ (ebd.) verringert werden. Vorhandene Strategien sollten also verbessert werden, sodass sie flexibel eingesetzt werden können. Beim „Operieren auf der symbolische[n] Ebene“ (ebd.) sind bei den Kindern Schwierigkeiten festzustellen, was auf das häufige Vorkommen des zählenden Rechnens zurückzuführen ist. Deswegen sollte bei der Auswahl der Veranschaulichungen sorgfältig vorgegangen werden. Die Schülerinnen und Schüler verwenden darüber hinaus kaum unterschiedliche Strategien, um zu ein und demselben Ergebnis zu kommen (ebd., S. 199). Es kommt vor, dass verschiedene Ergebnisse bei Verwendung unterschiedlicher Strategien bei derselben Aufgabe keine Irritation auslöst (ebd.). Es ist bei den Kindern ein „eher niedriges Selbstvertrauen im Hinblick auf ihre Leistungen in Mathematik“ (ebd., S. 200) festzustellen.

Zur Durchführung des Unterrichtsexperiments können folgende Aspekte zusammenfassend festgestellt werden: Durch den „ganzheitlichen Einstieg in den 100er-Raum sowie die ganzheitliche Behandlung der Addition und Subtraktion“ (ebd., S. 294) kann vielfach natürliche Differenzierung erreicht werden. Die Kinder können „individuelle Strategien“ (ebd.) produzieren und einsetzen. Bei offenen Aufgabenformaten haben mehrere Kinder zu Beginn noch Probleme, dies legt sich aber mit der Zeit. Viele Kinder bewältigen sie aber auch von Anfang an problemlos und zeigen hohe Motivation. Die Kinder sollen immer wieder „über Beziehungen zwischen den Zahlen bzw. den Aufgaben nach[...]denken“ (ebd.). „Durch Ausnutzen operativer Beziehungen sollte ein schematisches Abarbeiten von Aufgabenformaten vermieden werden“ (ebd., S. 295). Es gibt natürlich auch Schülerinnen und Schüler, die damit Probleme haben, trotzdem sollte dieses Nachdenken angeregt werden. Beim Erkennen von Beziehungen benötigen die Kinder oft konkrete Beispiele. Nur begrenzt ist „Lernen von - und miteinander“ (ebd.) umsetzbar. Dennoch wird häufig eine Kooperation zwischen den Kindern bei Aufgabenformaten eingesetzt. Veranschaulichungen dürfen während des gesamten Unterrichts genutzt werden (ebd.). Die sprachlichen Anforderungen sind möglichst niedrig, wovon insbesondere ausländische Kinder profitieren (ebd., S. 296). Schwierigkeiten der Kinder unterscheiden sich individuell und können von Tag zu Tag schwanken. Die Einschätzung der Schwierigkeit der Kinder korreliert nicht immer mit dem tatsächlichen Leistungsvermögen. Die Selbsteinschätzung sollte deswegen weiter gefördert werden (ebd., S. 296 f.). Selbstvertrauen kann bei vielen Kindern durch die offenen Aufgabenformate verstärkt werden (ebd., S. 297). Es wird eine hohe Motivation v. a. bei „problemstrukturierten Unterrichtsbeispielen (Zahlenmauern, Zahlenketten, Zauberquadrate) oder beim Entdecken von Gesetzmäßigkeiten (operative Serien)“ (ebd.) erreicht. Zu Beginn der Unterrichtsphase scheinen mehrere Kinder „weniger experimentierfreudig“ (ebd.) als im Interview. Dies verändert sich aber im Laufe des Unterrichtsexperiments. Manche Kinder zeigen im Interview bzw. Test bessere Ergebnisse als im Unterricht, vermutlich aufgrund der ruhigeren Arbeitsatmosphäre (ebd.).

Die Ergebnisse des Nachtests und der Interviews machen deutlich, dass die Leistungen der Kinder sehr heterogen sind, alle Kinder zeigen aber Verbesserungen (ebd., S. 356). Die Kinder zeigen durchgängig sichere „Kenntnisse im Zahlenraum [...] (Lesen, Schreiben von Zahlen, Einsicht in Stellenwerte)“ (ebd.). Ein Fallbeispiel (ebd., S. 316 ff.) zeigt, dass „es nicht unbedingt erforderlich [ist], die Zahlwortreihe fehlerfrei zu beherrschen, um Aufgaben in diesem Zahlenraum sicher zu bewältigen“ (ebd., S. 356). Veranschaulichungen werden von den Kindern auch nach der Intervention noch verwendet, sie können dann aber die Aufgaben lösen (ebd.). Sie bleiben jedoch nicht abhängig von Veranschaulichungen, sondern sind selbst bestrebt, sich vom Material zu lösen (ebd.). Kenntnisse über Strategien und Einsicht in das Stellenwertsystem sind in den Nachinterviews im Vergleich zu vorher vorhanden (ebd.). Das „Fingerrechnen im Bereich des Einspluseins“ (ebd.) ist reduziert, bei einigen Kindern kommt es aber noch vor. Im Unterricht kann festgestellt werden, „daß bei vielen Kindern das Einspluseins noch nicht automatisiert ist“ (ebd.). Es ist also zu empfehlen, die „Automatisierung des Einspluseins“ (ebd., S. 357) mit Verständnis zu fördern. Die Kinder kennen nach der Intervention effektivere Strategien und setzen diese flexibler ein (ebd.). Mehrere Kinder kontrollieren unaufgefordert ihre Ergebnisse (ebd.). Über Fehler reflektierten sie immer differenzierter (ebd.). Die Sprache wird „sowohl bei geforderten Erklärungen als auch bei unaufgeforderten Kommentaren“ (ebd.) intensiver eingesetzt. Im Interview wird deutlich, dass auch Transfer geleistet werden kann, Strategien werden übertragen (ebd.). Die Ergebnisse des Unterrichtsexperiments werden fast alle auch im Interview deutlich. Einzelne Kinder zeigen in den Interviews sogar bessere Ergebnisse als im Unterricht (ebd., S. 358).

Moser Opitz (2001) stellt in ihrer Arbeit „ein aktuelles Konzept zur Entwicklung von Zahlbegriffen“ (S. 14) dar. Auf deren Grundlage sollen „Folgerungen für den mathematischen Erstunterricht“ in Sonderschulklassen für Lernbehinderte und Einführungsklassen, in denen der Stoff der ersten Klasse auf zwei Jahre verteilt wird, gezogen werden (ebd., S. 13). Sie untersucht mithilfe eines entwickelten Instruments die Frage nach den Voraussetzungen von Schulanfängerinnen und -anfängern in Kleinklassen für Lernbehinderte und Einführungsklassen bezüglich ihrer numerischen Fähigkeiten (ebd., S. 14). Des Weiteren geht sie der Frage nach,

> ob Kinder im ersten Schuljahr, die nach der Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und damit auf dem Hintergrund eines neuen Zahlbegriffsverständnisses arbeiten, bezüglich mathematischem Lernen [sic] die gleichen Fortschritte machen wie Kinder, die nach den bisher bekannten Methoden unterrichtet werden. (ebd.)

Beispielhaft wird für die Umsetzung des aktiv-entdeckenden Lernens die schweizerische Ausgabe des Zahlenbuchs verwendet (ebd., S. 123). Es wird davon ausgegangen, dass zur Entwicklung von Zahlbegriffen nicht zahlreiche „Übungen zum operationalen Denken“ (ebd., S. 163) benötigt werden, sondern Kinder „eine Welt mit Zahlen, in der sie ihre Denkwerkzeuge anwenden und ihre alltagsmathematischen Erfahrungen einbringen können“ (ebd.), brauchen.

Es werden Tests vor und nach der Intervention durchgeführt (ebd., S. 124). Die 28 teilnehmenden Klassen werden aufgrund von Unterrichtsprotokollen der Lehrkräfte den unterschiedlichen Unterrichtsformen zugeordnet: Unterrichtsform eindeutig nach dem Zahlenbuch ausgerichtet (KKZahl+), Unterrichtsform überwiegend nach dem Zahlenbuch ausgerichtet (KKZahl), Unterrichtsform mit Bezug auf bisherige Lehrmittel (KKBis) (ebd., S. 133 f.).

Folgende Ergebnisse zeigt der vor der Intervention durchgeführte Test: Weit über 50 % der Kinder beherrschen bei Schuleintritt pränumerische Übungen, wie Klassifikation bzw. Seriation nach Merkmalen und Eins- zu eins-Zuordnungen (ebd., S. 139). 79,6 % der Kinder können Mengen anschauungsgebunden durch Eins-zu-eins-Zuordnung vergleichen (ebd., S. 140). 55,6 % der Kinder können Würfelbilder von drei bis sechs immer richtig erfassen (ebd.). 73,1 % der Kinder können unstrukturierte Mengen bis drei simultan erfassen (ebd.). Nur noch 34 % der Kinder erfassen die Menge vier simultan (ebd.). Innerhalb der drei „Subtests zur Anzahlerfassung (Würfelbild, ungeordnete Mengen, strukturierte Mengen [lineare Anordnung mit Fünferstruktur]) fällt auf, dass der Bereich der unstrukturierten Mengen am schlechtesten gelöst“ (ebd., S. 141) wird. Strukturierte Mengen werden sicherer erfasst als unstrukturierte (ebd.). Die Zahlwortreihe bis 20 oder weiter können 55,6 % der Kinder ohne Fehler aufsagen (ebd., S. 142). „Jeweils mindestens 70 % der Kinder können die einzelnen Zahlen (2, 5, 8) im ersten Zehner benennen, im zweiten Zehner sind es jeweils noch knapp 40 %. In jedem folgenden neuen Zehner können weniger Zahlen bezeichnet werden“ (ebd., S. 143). 8,6 % der Kinder können keine Zahl, 46,3 % die Zahlen mindestens bis 5 und 29,6 % die Zahlen bis 10 schreiben (ebd.). Die Kinder können die Zahlen also besser benennen als diese schreiben. Zwischen 43,2 % und 66 % der Kinder können mit Benutzung der Finger oder Würfel zum Abzählen Additionen im Zahlenraum von 1 bis 10 lösen (ebd., S. 145). 34 % können trotz Kontextgebundenheit und Abzählmöglichkeit keine

Additionsaufgabe lösen. Zwischen 14,8 % und 17,9 % der Kinder lösen Aufgaben im zweiten Zehner (ebd.). Subtraktionsaufgaben mit Zählmöglichkeit im Zahlenraum von 1 bis 10 lösen zwischen 32,1 % und 40,8 % der Schülerinnen und Schüler. Zwischen 13,6 % und 17,9 % der Kinder lösen Subtraktionsaufgaben im zweiten Zehner, also fast genauso viele Kinder wie bei der Addition. Zusammenfassend stellt Moser Opitz fest, dass die pränumerischen Fähigkeiten bei Schulanfängern in Kleinklassen besser sind, als in heilpädagogischen Unterrichtskonzepten angenommen wird (ebd., S. 149). Dennoch sind die Voraussetzungen sehr heterogen (ebd.).

Bezüglich des allgemeinen mathematischen Leistungszuwachses wird die Hypothese aufgestellt, dass

> Kinder, die im ersten Schuljahr einer Klasse für Lernbehinderte oder einer Einführungsklasse nach der Methode des aktiv-entdeckenden Lernens auf der Grundlage des Lehrmittels ‚das Zahlenbuch' unterrichtet werden, [...] einen grösseren Lernzuwachs bezüglich der mathematischen Leistungen auf[weisen] als Kinder, die nach der traditionellen, in den heilpädagogischen Lehrmitteln vorgeschlagenen Methode unterrichtet werden. (ebd., S. 151)

Folgende Ergebnisse zeigt der Test nach der Intervention: Bezüglich des Bereichs ‚Zahlen kennen', in dem die Kinder Zahlen benennen und fehlende Zahlen erkennen sollen, kann diese Hypothese angenommen werden (ebd., S. 152). Es wird ein mittlerer Effekt bezüglich des Bereichs festgestellt (ebd., S. 153). Bezüglich des Bereichs ‚Anzahlerfassung' werden Würfelbilder und ungeordnete Mengen überprüft und es zeigt sich kein statistischer Unterschied (ebd., S. 153). Im Bereich ‚strukturierte Mengenbilder' zeigen die Kinder, die mit der aktiv-entdeckenden Methode unterrichtet werden, hochsignifikant bessere Ergebnisse (ebd., S. 154). Auch im Bereich ‚Zahlen schreiben' kann die Hypothese bestätigt werden, dass die Kinder, die mit der aktiv-entdeckenden Methode des Zahlenbuchs unterrichtet werden, besser abschneiden als diejenigen, die mit der heilpädagogischen Methode unterrichtet werden, (ebd., S. 156). Im Bereich ‚Zählen vorwärts' gibt es keinen Leistungsunterschied zwischen den Gruppen.

Bezüglich der Operationen wird die Hypothese aufgestellt, dass

> Kinder, die nach der Methode des aktiv-entdeckenden Lernens auf der Grundlage des Lehrmittels ‚Das Zahlenbuch' unterrichtet werden, [...] beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben weniger Techniken des Fingerrechnens bzw. des verbalen Abzählens [verwenden] als Kinder, die nach der traditionellen, in den heilpädagogischen Lehrmitteln vorgeschlagenen Methode unterrichtet werden. (ebd., S. 157)

Es werden zunächst die bearbeiteten Operationen bezüglich richtig und falsch kategorisiert. Zum ersten Messzeitpunkt vor der Intervention unterscheiden sich die Gruppen nicht. Zum zweiten Messzeitpunkt nach der Intervention unterscheiden sie sich ebenfalls nicht signifikant (ebd., S. 158). Nun wird zusätzlich bei jedem Kind gezählt, wie oft es „Operationen ohne wahrnehmbare Zähltätigkeit“ (ebd., S. 158) löst. Zum ersten Messzeitpunkt unterscheiden sich die Gruppen nicht. Zum zweiten Messzeitpunkt zeigen die Ergebnisse, dass in den Zahlenbuch-Gruppen das Abzählen und Fingerrechnen zur Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben seltener gebraucht wird (ebd., S. 159). Die Gruppe KKZahl+ zeigt die stärksten Verbesserungen und es ist ein signifikanter Unterschied zur Gruppe KKBis feststellbar. Zwischen der Gruppe KKZahl und KKBis zeigt sich kein Unterschied.

Zusammenfassend stellt Moser Opitz Folgendes fest: Die größere Verbesserung der Zahlenbuchgruppen in den Bereichen ‚Zahlen kennen‘ und ‚Zahlen schreiben‘ kann damit erklärt werden, dass im Zahlenbuch von Beginn an die Zahlen von 1 bis 20 behandelt werden (ebd., S. 160). Der stärkere Leistungszuwachs im Bereich ‚strukturierte Mengenbilder‘ zeigt, dass sich diese Kompetenz durchaus bereits im ersten Schuljahr in einer Klasse für Lernbehinderte erwerben lässt, und die Kinder nicht, wie häufig befürchtet, überfordert sind (ebd., S. 160 f.). Außerdem kann festgestellt werden, dass diese Mengenbilder mathematischer Lernstoff sind, die Kinder eher nicht ohne Unterrichtung von sich aus lernen (ebd., S. 161). Die wenigsten Abzählstrategien bei Additions- und Subtraktionsaufgaben sind bei der Gruppe KKZahl+ feststellbar. Man kann vermuten, dass dies auf die umfassende Behandlung der strukturierten Mengenbilder zurückzuführen ist (ebd., S. 162).

Die hier beschriebenen Studien zum aktiv-entdeckenden Lernen zeigen, dass Kenntnisse und Fähigkeiten von Kindern in Förderklassen im dritten Schuljahr im Pre-Test bezogen auf den Zahlenraum und Operationen (Scherer, 1995) sowie pränumerische Fähigkeiten bei Schulanfängern in Förderklassen (Moser Opitz, 2001) sehr heterogen und zudem besser als angenommen sind. Durch die ganzheitliche Behandlung des Zahlenraums bis 100 und der Addition und Subtraktion kann vielfach eine natürliche Differenzierung erreicht werden und es werden von den Kindern individuelle Strategien produziert (Scherer, 1995). Kinder in Förderklassen, die einen Unterricht mit Methoden des aktiv-entdeckenden Lernens besucht haben, erzielen einen größeren Lernfortschritt und wenden bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben weniger häufig das Abzählen und Fingerrechnen an als Kinder, die mit heilpädagogischen Lehrmitteln und damit eher kleinschrittig unterrichtet wurden (Moser Opitz, 2001).

3.2.3.2 Offene Aufgaben in Förderklassen

Häsel (2001) erhebt in ihrer Arbeit „Strategien von Schülerinnen und Schülern aus vierten Klassen der Schule für Lernbehinderte beim Lösen von unterschiedlichen Sachaufgaben. Im Mittelpunkt des Interesses stehen dabei der Einfluss des Kontexts der Sachaufgabe und der Umgang der Kinder mit offeneren Aufgabentypen“ (S. 2). Es besteht die Hoffnung, dadurch „eine stärkere Betroffenheit der Kinder“ (ebd.), „größeres Interesse“ (ebd.), „das Einbringen von Alltagsstrategien“ (ebd.) und „eine höhere Lösungshäufigkeit“ (ebd.) zu erreichen.

Bezüglich des Kontextbezugs wird die Hypothese aufgestellt, dass „Sachaufgaben generell als schwieriger [...] als rein arithmetische Aufgaben“ (ebd., S. 91) anzusehen sind („Kontext als Erschwernis“ (ebd.)). Um dies zu überprüfen, werden Kindern Aufgaben des Typs „kein Kontextbezug (rein arithmetisch)“ (ebd., S. 92), „angedeuteter Kontextbezug (mit Geldbeträgen benannt)“ (ebd.), „Kontext Einkaufen“ (ebd.) und „Kontext Ausflug“ (ebd.) angeboten. Bezüglich der Offenheit der Aufgabenstellung wird als weitere Hypothese vermutet, dass es zu „keine[r] Erhöhung des Schwierigkeitsgrads durch die Öffnung der Aufgabenstellung“ (ebd., S. 94) kommt, d. h. dass der „Anteil der Könnerinnen und Könner der einzelnen Aufgabengruppen [...] ähnlich hoch [ist]“ (ebd., S. 147). Um dies zu überprüfen, „werden Sachaufgaben im Kontext Einkaufen systematisch in ihrer Offenheit variiert“ (ebd., S. 94). Die Aufgabengruppen enthalten Aufgabenstellungen, die sich auf Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 100 beziehen (ebd., S. 123 ff., S. 328 ff.).

Die quantitativen lernzielorientierten Tests und die qualitativen klinischen Interviews werden zusätzlich durch Befragung der Schülerinnen und Schüler ergänzt (ebd., S. 97 ff.). Die Tests finden mit 72 Kindern der vierten Klassen in Schulen für Lernbehinderte statt (ebd., S. 131 f.); die Interviews werden mit 20 ausgewählten Kindern durchgeführt (ebd., S. 169).

In den lernzielorientierten Tests zeigen sich zur Frage des Kontextbezugs folgende Ergebnisse: Es gibt zwei Typen von Aufgabengruppen: „In den Gruppen mit starkem Kontextbezug haben wesentlich weniger Kinder die Lehrziele erreicht als in den anderen beiden Gruppen [Aufgaben ohne Kontextbezug und angedeuteter Kontextbezug]“ (ebd., S. 138). „Unterschiedliche Ausprä-gungen des Kontextbezugs beeinflussen die Schwierigkeit der Aufgaben.“ (ebd., S. 141) Des Weiteren besteht allerdings zwischen Aufgaben ohne Kontextbezug und Aufgaben mit angedeutetem Kontextbezug kein Unterschied in der Lösungshäufigkeit (ebd., S. 142). Ein bekannter Kontext wirkt sich positiv darauf aus, sodass Kinder zumindest den richtigen Ansatz zu einer Aufgabe finden (ebd., S. 144). Die Interpretation der klinischen Interviews deutet bezüglich des Kontextbezugs darauf hin, dass ein steigender Grad an Kontext zu vermehrten

Schwierigkeiten bei der Lösung führt. Zudem gibt es auch hier Hinweise, dass ein unbekannter Kontext für die Kinder schwieriger zu fassen ist (ebd., S. 227).

Bezüglich der Offenheit zeigen die Ergebnisse der lernzielorientierten Tests, dass die Anteile der Könnerinnen und Könner in den verschiedenen offenen Aufgabengruppen nicht ähnlich hoch ist (ebd., S. 148). Offenere Aufgaben werden am häufigsten richtig gelöst, geschlossene Aufgaben am seltensten. Die Ursache wird allerdings darin gesehen, dass bei den geschlossenen Aufgaben eine Angabe gemacht wird, die zum Weiterrechnen verleitet (ebd., S. 149). Wenn dieses Weiterrechnen als passend kategorisiert wird, kommt es zu einer Annäherung der Anzahlen der Könnerinnen und Könner je Aufgabengruppen (ebd.). Dennoch kann statistisch keine Äquivalenz festgestellt werden. Wird zusätzlich noch ein richtiger Ansatz zu den Aufgaben als richtig berücksichtigt, liegen die Anzahlen der Könnerinnen und Könner in einem ähnlichen Bereich, sind jedoch nicht signifikant äquivalent (ebd., S. 151). Die Gesamthypothese kann also statistisch nicht bestätigt werden, es gibt jedoch Tendenzen, die in Richtung der Hypothese gehen (ebd., S. 149 ff.; S. 295).

Bezogen auf die Offenheit der Aufgaben weist die Interpretation der klinischen Interviews darauf hin, dass sich die Zahl der Kinder, die im Verlauf des Interviews ein passendes mathematisches Problemmodell zu Aufgaben finden, in den verschiedenen Aufgabengruppen annähern (ebd., S. 259). „Die offenere Form der Aufgabenstellung scheint den Aufbau des Situationsverständnisses auf keinen Fall negativ zu beeinträchtigen“ (ebd.). Dies kann allerdings auch darauf zurückgeführt werden, dass die ausgewählten Aufgaben einen aus dem Alltag bekannten Kontext enthalten (ebd.).

Die Befragung hatte zum Ziel, die Einschätzung der Kinder und deren Güte bezüglich der Aufgabenschwierigkeit herauszufinden (ebd., S. 271). Insgesamt „zeigt sich deutlich, dass die subjektive Aufgabenschwierigkeit mit den Ergebnissen des Tests und zum großen Teil mit den aufgestellten Hypothesen übereinstimmt“ (ebd., S. 280). Bezogen auf den Kontextbezug entsprechen die Ergebnisse bis auf die Angaben bei einer Aufgabe der ergebnisbezogenen Auswertung im Test (ebd., S. 280). Aufgaben, die von vielen Kindern gelöst werden, werden häufiger als leichteste Aufgabe angesehen und umgekehrt (ebd., S. 280 f.). „Bezogen auf den ‚Grad der Offenheit der Aufgabenstellung‘ zeigt die Befragung der Schülerinnen und Schüler, dass Kinder die Aufgaben umso häufiger als leicht einschätzen, je offener sie waren“ (ebd., S. 282). Dies widerspricht der Forschungshypothese, in der angenommen wird, „dass der Grad der Offenheit keinen Einfluss auf die Aufgabenschwierigkeit hat“ (ebd., S. 283). Die Ergebnisse zeigen außerdem, „dass über die Hälfte der Schülerinnen und Schüler der Schule für Lernbehinderte in der Lage ist, ihre Fähigkeiten angemessen einschätzen zu können“ (ebd., S. 285). Allerdings kann nicht angenommen werden, dass die tatsächlich erlebten Schwierigkeiten den Angaben der Kinder in der Befragung entsprechen. Dennoch können die Ergebnisse zur eigenen Einschätzung der Kinder im Hinblick auf die Nutzung von natürlicher Differenzierung im Mathematikunterricht positiv stimmen (ebd., S. 286).

Häsel zieht folgende Konsequenzen für den Unterricht: Auch wenn viele arithmetische Fehler bei der Lösung von Sachaufgaben festgestellt werden, sollte frühzeitig mit deren Behandlung begonnen werden (ebd., S. 293). Die Kinder sollten verschiedenste Vorgehensweisen zum Abstrahieren erfahren und mit unterschiedlichstem Material arbeiten können (ebd., S. 293). Es sollte nicht das Ergebnis, sondern die Mathematisierung bei der Behandlung und Bewertung der Aufgabe im Mittelpunkt stehen (ebd.). Wichtig ist, zunächst Aufgaben mit bekanntem Kontext auszuwählen (ebd.). Aufgaben mit unbekannterem Kontext sollten mithilfe von Skizzen entwickelt, besprochen oder nachgespielt werden (ebd., S. 294). Bezüglich der Offenheit der Aufgaben ist festzustellen, dass Kinder der Schule für Lernbehinderte mit offenen Aufgaben sinnvoll umgehen können (ebd., S. 297). Sie können durch die Offenheit einerseits eigene Vorstellungen einbringen und andererseits auf ihrem eigenen Niveau Aufgaben auswählen (ebd., S. 297 f.). Somit wird empfohlen, offene Aufgaben mit Kindern der Schule für Lernbehinderte zu behandeln (ebd., S. 298). Diese sind „schon in kleinen Zahlenräumen möglich" (ebd.). Zusätzlich sollten „Sachaufgaben ohne Zahlen [...] eingesetzt werden" (ebd., S. 299), wie z. B. „Wie viel Kakao trinkt unsere Klasse in der Woche?" (ebd.).

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass offene Aufgaben, insbesondere wenn es sich um einen für die Kinder bekannten Kontext handelt, durchaus auch von Kindern in Förderklassen erfolgreich bearbeitet werden können.

3.2.4 Zwischenfazit

Es existieren unterschiedliche Vorstellungen, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen – insbesondere Kinder mit Förderbedarf – bestmöglich unterrichtet werden sollen. Differenzierung kann von der Lehrkraft ausgehen, was eine Einteilung in Lerngruppen durch die Lehrkraft und individualisiertes Material für die jeweiligen Gruppen beinhaltet (vgl. Kap. 3.2.1). Aus mathematikdidaktischer Sicht werden Differenzierung vom Kind aus und insbesondere natürliche Differenzierung empfohlen. Dies kann dadurch erreicht werden, dass substanzielle Lernumgebungen eingesetzt werden, die es ermöglichen, dass jedes Kind auf seinem jeweils individuellen Niveau arbeitet (vgl. Kap. 3.2.2). Ergebnisse zum aktiv-entdeckenden Lernen ergeben Folgendes: Pre-Tests zeigen, dass die Kenntnisse und Fähigkeiten der Kinder in Förderklassen im dritten Schuljahr bezogen auf den Zahlenraum und Operationen (Scherer, 1995) sowie pränumerische Fähigkeiten bei Schulanfängern in Förderklassen (Moser Opitz, 2001) sehr heterogen und zudem besser als angenommen sind. Die ganzheitliche Behandlung des Zahlenraums bis 100 und der Addition und Subtraktion bewirken vielfach natürliche Differenzierung und Kinder produzieren individuelle Strategien (Scherer, 1995). Manche Kinder haben lediglich zu Beginn Probleme mit offenen Aufgaben, andere bewältigen diese von Anfang an problemlos (Scherer, 1995). Die Leistungen der Kinder nach der Intervention sind sehr heterogen, Verbesserungen zeigen aber alle Kinder (Scherer, 1995). Kinder in Förderklassen, die einen Unterricht mit Methoden des aktiv-entdeckenden Lernens besucht haben, erreichen einen größeren Lernzuwachs und zeigen bei der Lösung von Additions- und Subtraktionsaufgaben seltener das Abzählen und Fingerrechnen als Kinder, die mit heilpädagogischen Lehrmitteln und damit eher kleinschrittig unterrichtet wurden (Moser Opitz, 2001). Die Tests nach Häsels (2001) Intervention in Förderklassen zeigen, dass Aufgaben mit stärkerem Kontextbezug für die Kinder in Förderklassen schwieriger zu lösen sind als Aufgaben ohne oder nur mit angedeutetem Kontextbezug. Zudem finden die Kinder häufiger den passenden Ansatz zu einer Aufgabe, wenn es sich um einen für sie bekannten Kontextbezug handelt. Die Ergebnisse der Tests zeigen aber außerdem, dass offene Aufgaben sogar häufiger richtig gelöst werden als geschlossene Aufgaben, was von Häsel allerdings darauf zurückgeführt wird, dass bei den geschlossenen Aufgaben eine Angabe gemacht wird, die zum Weiterrechnen verleitet. Berücksichtigt man das Weiterrechnen und einen passenden Ansatz als richtig, so nähern sich die Anzahlen richtiger Bearbeitungen bei offenen und geschlossenen Aufgaben an (Häsel, 2001). Es lässt sich also feststellen, dass entdeckendes Lernen mit Kindern in Förderklassen bezogen auf verschiedene Kenntnisse und Fähigkeiten im additiven Bereich durchaus erfolgreich möglich ist (vgl. Kap. 3.2.3).

3.3 Schlussfolgerungen und Forschungsdesiderat

Im Mathematikunterricht der Grundschule muss mit unterschiedlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler umgegangen werden (vgl. Kap. 3.1). Es werden bei ihnen verschiedene Merkmale von Rechenschwäche identifiziert, welche bei der Entwicklung von Förderkonzepten Berücksichtigung finden sollten (vgl. Kap. 3.1.2.3). Unterschiedliche Vorstellungen herrschen darüber vor, wie Kinder geeignet gefördert werden können (vgl. Kap. 3.2). Denkbar ist eine Differenzierung nach unterschiedlichen Lerngruppen, die Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades erhalten. Von der Mathematikdidaktik wird dagegen natürliche Differenzierung empfohlen, bei der Kinder auf unterschiedlichen Niveaus an einer gemeinsamen Aufgabenstellung arbeiten können (vgl. Kap. 3.2.1 und Kap. 3.2.2). Empirische Befunde zeigen, dass entdeckendes Lernen und natürliche Differenzierung mit Kindern in Förderklassen durchaus erfolgreich gelingen können (vgl. Kap. 3.2.3). Der Schwerpunkt der Untersuchungen bezieht sich aber offenbar eher auf eine geeignete Förderung von Fähigkeiten und Kenntnisse im additiven Bereich. Maier (1990) stellt hinsichtlich der „Geschichte der Zahlbegriffs-Methodik“ fest, dass „sich wohl kaum ein Thema des schulischen Mathematikunterrichts finden [lässt], zu dessen Behandlung im Unterricht mehr methodische Konzepte entwickelt worden wären, als zum Aufbau des Zahlbegriffs im mathematischen Anfangsunterricht“ (Maier, 1990, S. 111).

Es besteht ein Forschungsdesiderat bezüglich der Förderung des Multiplikativen Verständnisses zu. Somit stellt sich für die vorliegende Arbeit die Frage, welche Antworten der Mathematikunterricht der Grundschule auf die Inklusionsforderung im Inhaltsbereich Multiplikation anbieten kann.

4 Multiplikation

Ausgangspunkt für alle weiteren Überlegungen der unterrichtlichen Behandlung von Multiplikation und ihren Eigenschaften stellt die mathematische Perspektive dar, weswegen auf diese zu Beginn dieses Kapitels eingegangen wird (vgl. Kap. 4.1). Daran anschließend wird Multiplikation aus didaktischer Perspektive betrachtet (vgl. Kap. 4.2). Eine eigene Positionierung mit einer Definition von Multiplikativem Verständnis, die als Basis für das Design der in dieser Arbeit entworfenen Lernumgebungen dient, schließt das Kapitel ab (vgl. Kap. 4.3).

4.1 Multiplikation aus mathematischer Perspektive

Definitionen und Eigenschaften der Multiplikation, die im Folgenden erläutert werden, bilden die Grundlage für weitere Überlegungen, wie Multiplikation im Unterricht der Grundschule behandelt werden soll.

4.1.1 Definitionen und Begriffe

Aus mathematischer Perspektive existieren verschiedene Definitionen der Operation Multiplikation.

Abbildung

Allgemein versteht man unter einer Verknüpfung in einer Menge eine Abbildung.

Multiplikation in $\mathbb{N}$ ist diejenige Abbildung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, die jedem geordneten Paar natürlicher Zahlen sein Produkt zuordnet:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{N} \text{ gilt } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: (a, b) \rightarrow a \cdot b.$$

Es handelt sich hierbei um die Verknüpfung Multiplikation. Das Paar $(\mathbb{N}, \cdot)$ wird auch als Verknüpfungsgebilde oder algebraische Struktur bezeichnet (z. B. Scheid, 2002, S. 179 ff.).

Vereinigung gleichmächtiger Mengen oder wiederholte Addition

Das Produkt $a \cdot b$ zweier natürlicher Zahlen ist die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge von a paarweise disjunkter Mengen M, die dieselbe Mächtigkeit b haben:

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_a.$$

Für die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge ergibt sich das a-malige wiederholte Addieren desselben Summanden b (z. B. Kirsch, 1997, S. 20; Padberg & Büchter, 2015, S. 206, Schwartze, 1980, S. 31).

Kartesisches Produkt

Das Produkt $a \cdot b$ zweier natürlicher Zahlen a und b mit $|A| = a$ und $|B| = b$ ist die Mächtigkeit des Kreuzprodukts A x B:

$$a \cdot b := |A \times B|$$

Die Verknüpfung der Elemente im Kreuzprodukt kann bei den Mengen A und B in Tabellenform interpretiert werden (Tab. 4.1).

Die Zahlen a und b werden als Faktoren oder Multiplikator und Multiplikand bezeichnet (Kirsch, 1997, S. 23; Padberg & Büchter, 2015, S. 211).

	b_1	b_2	...	b_m
a_1	a_1, b_1	a_1, b_2	...	a_1, b_m
a_2	a_2, b_1	a_2, b_2	...	a_2, b_m
.	.	.		.
.	.	.		.
.	.	.		.
a_n	a_n, b_1	a_n, b_2	...	a_n, b_m

a, b, m und n sind natürliche Zahlen

Tabelle 4.1: Kartesisches Produkt in Tabellenform dargestellt (Kirsch, 1997, S. 24)

4.1.2 Eigenschaften der Operation Multiplikation

Durch die Addition und Multiplikation wird auf die Menge der natürlichen Zahlen eine algebraische Struktur mit zwei Verknüpfungen definiert $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. Diese algebraische Struktur besitzt verschiedene Eigenschaften. Für die Multiplikation gelten folgende Eigenschaften:

Kommutativität (Vertauschungsgesetz)

Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativität (Verbindungsgesetz)

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Distributivität (Verteilungsgesetz)

(a) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$(1)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (2)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

(b) Für alle natürlichen Zahlen a, b, c mit $b > c$ bzw. $a > b$ gilt:

$$(3)\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad (4)\ (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

Existenz eines neutralen Elements

Für die natürliche Zahl a gilt:

$$a \cdot 1 = a$$

Konstanz des Produkts

Für alle natürlichen Zahlen a, b, c gilt:

$$a \cdot b = (a \cdot c) \cdot (b : c)$$

(z. B. Müller, Steinbring & Wittmann, 2004, S. 373; Padberg & Benz, 2011, S. 134 f., S. 141; Padberg, Danckwerts & Stein, 1995, S. 32)

Die algebraische Struktur $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist ein Halbring. Für diesen gelten folgende Eigenschaften:

- die eine Verknüpfung ist kommutativ, assoziativ und regulär[1] (in $\mathbb{N}$ bezieht sich dies auf die Addition)

[1] Wenn man zwischen je zwei Elementen einer Menge E irgendeine bestimmte Verknüpfungsweise τ definiert hat, dann bezeichnet man ein Element $a \in E$ als regulär, wenn für beliebige Elemente x und y aus E jede der beiden Relationen $a \tau y = a \tau x$, $y \tau a = x \tau a$ nach sich zieht: $y = x$ (z. B. Fettweis & Schlechtweg, 1972, S. 130).

- die andere Verknüpfung ist assoziativ (in ℕ bezieht sich dies auf die Multiplikation)
- beide Verknüpfungen sind distributiv

Ist nicht nur die Addition, sondern auch die Multiplikation kommutativ, was hier der Fall ist (s. o.), so nennt man diese algebraische Struktur mit zwei Verknüpfungen (ℕ, +, ·) kommutativer Halbring (z. B. Fettweis & Schlechtweg, 1972, S. 39 f.).

Würde zusätzlich noch ein inverses Element bezüglich der Addition und Multiplikation nachgewiesen werden, würde es sich um einen sog. Körper handeln (z. B. Scheid, 2002, S. 199). Dies ist im Bereich der natürlichen Zahlen jedoch nicht der Fall.

Auf anschauliche Begründungen dieser Eigenschaften der Multiplikation wird in Kapitel 4.2.8 eingegangen. Die hier beschriebenen mathematischen Inhalte bilden den Ausgangspunkt für alle weiteren didaktischen Überlegungen zum Themenbereich Multiplikation.

4.2 Multiplikation aus didaktischer Perspektive

Die Operation Multiplikation in ℕ ist eine der wichtigen Kulturtechniken und bildet die Grundlage für viele Themenbereiche in höheren Jahrgangsstufen (z. B. Proportionalität, Kombinatorik, ...). Es kann deswegen weitreichende Folgen haben, wenn das Verständnis für die Operation nur lückenhaft aufgebaut wird (z. B. Bönig 1995a, S. 2). Somit ist es im Mathematikunterricht der Grundschule von großer Bedeutung, Multiplikatives Verständnis umfassend zu entwickeln. Ein wesentliches Ziel der Grundschule ist es früher wie heute, die Automatisierung der Aufgaben des kleinen Einmaleins zu ermöglichen (Padberg & Benz, 2011, S. 138; KMK, 2005, S. 9). Der Aufbau eines Multiplikativen Verständnisses sollte dieser Automatisierung jedoch in jedem Fall vorausgehen (Schipper, 2009, S. 153). Im Laufe des 20. Jahrhunderts wurden unterschiedlichste Methoden angewandt, um den Kindern Zugänge zur Multiplikation zu ermöglichen (Padberg & Benz, 2011, S. 134). Gedanken zur Einführung der Multiplikation haben sich u. a. Kühnel, J. Wittmann, Breidenbach, Schlechtweg, Dienes und Fricke gemacht (Picker, 1989, S. 268 ff.).

Da Kinder oftmals anders denken als vermutet, ist es sinnvoll, Vorerfahrungen möglichst gut zu kennen und an diese im Unterricht gezielt anzuknüpfen (Selter & Spiegel, 1997, S. 10 ff.). Somit gehört zu didaktischen Prinzipien auch die ‚Orientierung an Vorwissen' (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 132 ff.). „Der Unterricht kann im Grunde nur dann erfolgreich sein, wenn er sich ernsthaft und prinzipiell darum bemüht, in allen Phasen am Vorwissen der Kinder anzusetzen, sie dort abzuholen, wo sie stehen“ (ebd., S. 136). Deswegen wird im Folgenden zunächst auf verschiedene Forschungsbefunde eingegangen, die zu intuitiven Vorstellungen von Kindern vor und während der Behandlung des Einmaleins existieren (vgl. Kap. 4.2.1).

Grundsätzlich sind für die Behandlung der Multiplikation in der Grundschule die Definitionen der *wiederholten Addition* und des *kartesischen Produkts* relevant. Die mathematischen Inhalte bilden auch den Ausgangspunkt für das Konzept der Grundvorstellungen (vom Hofe, 1992, S. 346 f.; vom Hofe & Blum, 2016, S. 231 f.), das im daran anschließenden Abschnitt erst allgemein und dann bezogen auf die Multiplikation näher erläutert werden soll (vgl. Kap. 4.2.2).

Zwischen mathematischem Verständnis und Darstellungswechsel existiert eine enge Verbindung (Bönig, 1995a, 186 ff.; Gerster & Schultz, 2004, S. 351 ff.; Huinker, 1993, S. 80 ff.; Kaufmann & Wessolowski, 2011, S. 24; Moser Opitz, 2007, S. 119; Radatz, 1990, S. 3 ff.; Schäfer, 2005, S. 198 ff.). Der Einsatz von Darstellungsformen ist für die Entwicklung von mathematischem Verständnis somit von großer Bedeutung, weswegen der Themenbereich Darstellungsformen in einem weiteren Abschnitt aufgearbeitet wird (vgl. Kap. 4.2.3).

Bei der Bearbeitung von Multiplikationsaufgaben ist insbesondere die Anwendung von Strategien von Bedeutung (z. B. Gaidoschik, 2014, S. 15 ff.; Schipper, 2009, S. 154; Scherer, 2007, S. 6), weswegen im Anschluss daran Forschungsbefunde dazu dargestellt werden (vgl. Kap. 4.2.4).

Es können grundsätzlich zwei verschiedene Wege unterschieden werden, wie die Multiplikation im Unterricht behandelt werden soll (z. B. Krauthausen & Scherer, 2008, S. 31; Padberg & Benz, 2011, S. 138 f.). Forschungsbefunde dazu, nämlich zu traditionellem und ganzheitlichem Vorgehen, werden daran anschließend erläutert (vgl. Kap. 4.2.5).

Zudem ist für die Behandlung der Multiplikation natürlich auch entscheidend, was in Bildungsstandards und Lehrplan vorgeschrieben wird (vgl. Kap. 4.2.6).

Über die in diesen Abschnitten gewonnenen Erkenntnisse wird ein Zwischenfazit gezogen (vgl. Kap. 4.2.7), um daraus Überlegungen zur aktuellen Behandlung der Multiplikation in der Grundschule abzuleiten (vgl. Kap. 4.2.8).

4.2.1 Befunde zu intuitiven Vorstellungen zur Multiplikation

Fischbein, Deri, Nello & Marino (1985) untersuchen die *Rolle impliziter Modelle* zur Multiplikation und Division, indem sie Kinder zwischen zehn und 15 Jahren beauftragen, Sachaufgaben zur Multiplikation und Division zu lösen

(S. 3 ff.). Ein implizites Modell ist für sie dabei „[e]ach fundamental operation of arithmetic generally remains linked to an implicit, unconscious, and primitive intuitive model“ (ebd., S. 4). Die Autoren gehen davon aus, dass fundamentale Operationen grundsätzlich mit unbewussten intuitiven Vorstellungen verbunden bleiben. Die Identifikation der Operation findet nicht direkt, sondern über diese intuitive Vorstellung statt, durch die der Lösungsprozess eingeschränkt werden kann. Als Beispiel nennen sie den Fall, dass die *wiederholte Addition* als intuitive Vorstellung für die Multiplikation vorherrschen kann. $3 \cdot 5$ bedeutet dann ausschließlich $5 + 5 + 5$. Wenn die Multiplikation nur mit dieser Vorstellung angesehen wird, kann der Multiplikator nur eine ganze Zahl sein. Die Multiplikation wird hier nicht kommutativ gesehen (vgl. Kap. 4.2.8). Aufgaben mit beispielsweise 0,2 als Multiplikator können dann nicht verstanden werden und der Lösungsprozess führt möglicherweise nicht zu einer geeigneten Antwort (ebd., S. 4 ff.).

Sie gehen von der These aus,

> that the concept of an intervening intuitive model may explain in a coherent fashion most of the common difficulties children encounter when attempting to solve a problem requiring a single operation. The main exception is the difficulty caused by an unfamiliar text (terms used, situations referred to, etc.), which by itself may lead to considerable confusion and error. (ebd., S. 5)

Sie nehmen weiter an, „that the enactive prototype of an arithmetical operation may remain rigidly attached to the concept long after the concept has acquired a formal status” (ebd., S. 5 f.). Diese enaktiven Vorstellungen vollziehen sich zum größten Teil unbewusst (ebd., S. 5). Fischbein, Deri, Nello und Marino finden heraus, dass Textaufgaben zur Multiplikation mit ganzen Zahlen von den meisten Kindern richtig gelöst werden. Aufgaben mit Dezimalzahlen führen zu erheblichen Schwierigkeiten. Sie denken, dass dies dann der Fall ist, wenn als intuitive Vorstellung die *wiederholte Addition* vorliegt (ebd., S. 14). Ursachen für diese „primitive models“ (ebd., S. 3 ff.) sehen die Autoren dieser Studie zum einen darin, dass die intuitiven Vorstellungen jenes Konzept widerspiegeln, was anfangs in der Schule unterrichtet wurde. Zum anderen stehen die intuitiven Modelle in einer sehr engen Verbindung zu menschlichem mentalem Verhalten, das natürlich, grundlegend und ursprünglich ist (ebd., S. 15).

Bönig (1995a) führt im Zusammenhang mit ihrer Studie zum Darstellungswechsel bei Multiplikations- und Divisionsaufgaben (vgl. Kap. 4.4.3) zusätzlich eine Untersuchung zum *Schülervorwissen* durch. Sie konfrontiert Schülerinnen und Schüler vor der Behandlung der Multiplikation im Unterricht mit multiplikativen Sachsituationen. Dabei identifiziert sie verschiedene Strategien: die *wie-*

derholte Addition, das Wiedergeben der Aufgabe mit Material und der Rückgriff auf bereits vorhandenes Wissen (wie z. B. aus weiteren Aufgaben der Studie oder Erfahrungen aus dem Unterricht) (Bönig, 1995a, S. 94 f.).

Mulligan & Mitchelmore (1997) interviewen Mädchen ab sechs Jahren vor und während der Behandlung der Multiplikation im Unterricht bei der Lösung von Sachaufgaben zur Multiplikation und Division (S. 309 ff.). Die Definition zu intuitiven Modellen nach Fischbein, Deri, Nello und Marino (1985, S. 4, s. o.) beinhaltet nach Mulligan & Mitchelmore (1997), „that an intuitive model is an internalization of the physical operation involved in the corresponding problem situation, and therefore that a direct correspondence exists between intuitive model and semantic structure" (S. 310). Sie finden zwölf Strategien, die zu Kategorien gruppiert werden, von denen auf drei hauptsächliche *intuitive Modelle* geschlossen wird (ebd., S. 309): „Direct counting", „Repeated addition" und „Multiplicative operation" (ebd., S. 316). Direktes Zählen beinhaltet, die einzelnen Elemente zu zählen. Es wird oft beobachtet, dass die Situation mit Würfeln gelegt wird und diese gezählt werden, um das Ergebnis zu ermitteln (ebd., S. 317). Die *wiederholte Addition* beinhaltet „Rhythmic counting forward" (gemeint ist z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; dabei Betonung der unterstrichenen Zahlen), „Skip counting forward" (gemeint ist z. B. 3, 6, 9), „Repeated adding" und „Additive doubling" (z. B. 3 + 3 = 6, 6 + 6 = 12) (ebd., S. 316 f.). Zur Strategie Multiplikative Operation werden „Know multiplicative fact" und „Derived multiplicative fact" (ebd.) zugeordnet. Untersucht werden die Zusammenhänge zwischen semantischen Strukturen der Sachsituationen und Verwendung der intuitiven Modelle. Außerdem wird analysiert, wie sich der Einsatz der intuitiven Modelle verändert (ebd., S. 319). Das Modell der *wiederholten Addition* ist das am häufigsten korrekt angewandte Modell bei fast allen Arten von Sachsituationen (ebd., S. 320). Die meisten Mädchen wenden unterschiedliche intuitive Modelle in einem Interview an. Aufgabenmerkmale, wie semantische Strukturen und spezifischer Zahleneinsatz, scheinen zu beeinflussen, welches intuitive Modell eingesetzt wird. Insgesamt zeigen die Mädchen eine fortschreitende Entwicklung beim Einsatz der intuitiven Modelle, von Zählstrategien über das Modell der *wiederholten Addition* bis hin zur multiplikativen Operation (ebd., S. 324 ff.). Alle intuitiven Modelle werden über alle Arten von Sachsituationen eingesetzt (ebd., S. 326). Der Prozess des Verständnisses für multiplikative Sachsituationen scheint sich folgendermaßen zu vollziehen: Die Lernenden erwerben immer effizienter werdende Modelle, die auf Sachsituationen mit ganzen Zahlen anwendbar sind. Die Struktur jedes Modells leitet sich aus dem vorausgehenden ab, d. h. die Kinder springen nicht einfach von einem Modell zum nächsten. Hierbei spielen drei Faktoren eine Rolle: Zunächst erwerben die Kinder immer mehr Fähigkeiten, Sachsituationen zu interpretieren, auch ohne spezifische Unterrichtung. Zweitens beginnen sie die Struktur der gleichmächtigen Mengen in verschiedensten Sachsituationen zu erkennen. Als Drittes erweitern sie ihr Faktenwissen zu bestimmten Multiplikationsaufgaben (ebd., S. 327).

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass verschiedene Forscherinnen und Forscher intuitive Vorstellungen identifiziert haben, die das Lösen von Multiplikationsaufgaben möglicherweise beeinflussen (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Zudem kann festgestellt werden, dass Kinder bereits bestimmte Vorstellungen zur Multiplikation haben, bevor das Thema in der Schule behandelt wird (Bönig, 1995a, 1995b; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Die *wiederholte Addition* wurde übereinstimmend als vorherrschende intuitive Vorstellung identifiziert, sowohl vor als auch während Kinder einen Unterricht zur Multiplikation erhalten. Selter kommentiert die Untersuchung von Fischbein, Deri, Nello & Marino (1985) folgendermaßen:

> Wenn man diese Auffassungen jedoch nicht als ‚Fehlvorstellungen', sondern als *normale Begleiterscheinungen* auf dem Weg zur Entwicklung eines integrativen Konzepts von Multiplikation und Division ansieht, so erscheinen die intuitiven Modelle *nicht* – wie FISCHBEIN et al. es formulieren – als *defizitär*, sondern als *natürliche Zwischenstufen* im Lernprozeß, die es gleichwohl in der weiteren Schulzeit durch ein geeignetes Anregungspotential zu überwinden gilt. (Selter, 1994, S. 80, Hervorh. i. O.)

Dazu erwähnt er Graeber & Cambell (1993), die bemerken:

> Neither elementary school students nor adults easily 'get rid of' misconceptions. Some researchers even argue that adults never really overcome their misconceptions. They argue that, at best, we come to recognize that we have these misconceptions and learn to be on guard against the faulty thinking that some intuitive notions support. (Graeber & Cambell, 1993, S. 411)

In der hier vorliegenden Arbeit ist die *wiederholte Addition* als *eine* Vorstellung der Multiplikation wesentlich, um an sie als mutmaßlich intuitives Modell anzuknüpfen.

Aus mathematischer Perspektive sind für die Multiplikation aber sowohl die *wiederholte Addition* als auch das *kartesische Produkt* von Bedeutung. Diese mathematischen Ideen bilden die Grundlage für das Konzept der Grundvorstellungen, auf welches im Folgenden eingegangen wird.

4.2.2 Aufbau von Grundvorstellungen

Der Begriff *Grundvorstellungen* wurde in den letzten Jahren in der Mathematikdidaktik entscheidend von vom Hofe (1995, 1992) geprägt. Ausgangspunkt für seine Untersuchungen zum Grundvorstellungskonzept ist die Annahme, dass im Mathematikunterricht häufig Verständigungsprobleme vorliegen. Die Lehrperson glaubt, bestimmte Inhalte vermittelt zu haben, diese werden von den Schülerinnen und Schülern jedoch nicht verstanden oder für sinnlos gehalten (vom Hofe, 1995, S. 10). „Wesentliche Ursachen könnten darin zu suchen sein, daß die Begriffe und Symbole, mit denen im Mathematikunterricht umgegangen wird, vom Schüler mit einer völlig anderen Deutung gefüllt werden, als es im Sinne der Sache adäquat wäre“ (ebd.). Dies kann langfristig bei den Schülerinnen und Schülern zum Manipulieren inhaltsleerer Zeichen und auswendig gelernter Regeln führen. Ein Vorschlag, diesem wechselseitigen Missverstehen entgegenzuwirken, ist es, Verständnis über konstituierende *Grundvorstellungen* auszubilden.

In Anlehnung an die methodischen Vorschläge Oehls (1962) hat wohl erstmalig Griesel (1971) den Begriff *Grundvorstellungen* in die neue mathematikdidaktische Diskussion gebracht. Griesel und Postel beispielsweise haben das Grundvorstellungskonzept für die Vermittlung der Verknüpfungen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division im elementaren Zahlenbereich als didaktisches Prinzip eingesetzt (Griesel, 1971, S. 142 ff.; Postel, 1977, S. 218 ff.). Grundvorstellungen stellen hier normativ „eine Verbindung zwischen dem reinen Zahlenrechnen und der Anwendung [z. B.] der Addition auf die Wirklichkeit her“ (Griesel, 1971, S. 142). Blum und Kirsch (1979) erweitern das Konzept auf Inhalte der Sekundarstufe II und nehmen Bezug zum Ableitungs- und Integralbegriff (S. 6 ff.). Sie beziehen Grundvorstellung auf die geometrisch-anschaulichen Aspekte und verwenden zusätzlich *Grundverständnis* für eher inhaltlich-anwendungsbezogene Aspekte (vom Hofe, 1992, S. 346). Bender knüpft an Griesel, Blum und Kirsch an und ordnet die Begriffe sowohl didaktisch als auch psychologisch entsprechend ein (Bender, 1991, S. 48 ff.). Weitere Ausführungen zur Verwendung und Bedeutung des Begriffs *Grundvorstellungen* und bedeutungsähnlicher Begriffe sind bei vom Hofe (1992, 1995) zu finden.

Vom Hofe (1992) identifiziert drei Aspekte, die diesen Begriff mit unterschiedlichen Schwerpunkten kennzeichnen:

- „Sinnkonstituierung eines Begriffs“
- „Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen“
- „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs“ (S. 347)

Der Begriff *Grundvorstellung* beschreibt „Beziehungen zwischen mathematischen Strukturen, individuellen-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen“ (ebd.).

Abbildung 4.1 zeigt das Grundvorstellungskonzept in einer Übersicht. Die linke Seite der durch Pfeile dargestellten Abfolge symbolisiert didaktische Entscheidungen der Lehrperson, die rechte Seite Aktivitäten des Individuums. Ausgehend von *mathematischen Ideen* eines Inhalts werden Grundvorstellungen inhaltlich bestimmt (Abb. 4.1). Eine Grundvorstellung wird von der Lehrkraft didaktisch in ein Lernangebot umgesetzt, d. h. es wird ein entsprechender Sachzusammenhang konstruiert (vom Hofe, 1992, S. 358 f.; vom Hofe & Blum, 2016, S. 231 f.). Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand nennen diese Art von Grundvorstellungen *universelle Grundvorstellungen* (2016, S. 18).

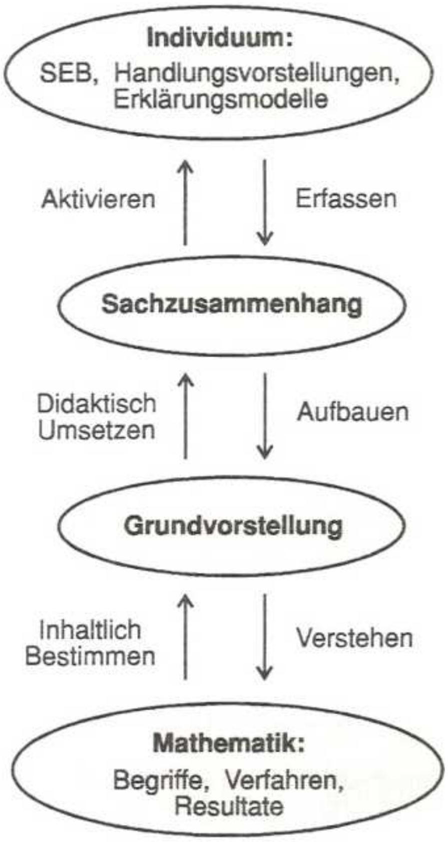


Abbildung 4.1: Übersicht für das Ausbilden von Grundvorstellungen (SEB≙ subjektive Erfahrungsbereiche, vom Hofe, 1992, S. 359)

Dieses Zusammenspiel ist Ausgangspunkt für entsprechende Lern- und Interaktionsprozesse, die beim Individuum Erfahrungsbereiche und damit ein *individuelles Erklärungsmodell* aktivieren. In Auseinandersetzung mit dem Lernangebot baut das Individuum Grundvorstellungen auf, die es ihm ermöglichen den mathematischen Inhalt zu verstehen (vom Hofe, 1992, S. 358 f.; vom Hofe & Blum, 2016, S. 231 f.). Greefrath et al. bezeichnen dies als *individuelle Grundvorstellungen* (2016, S. 38).

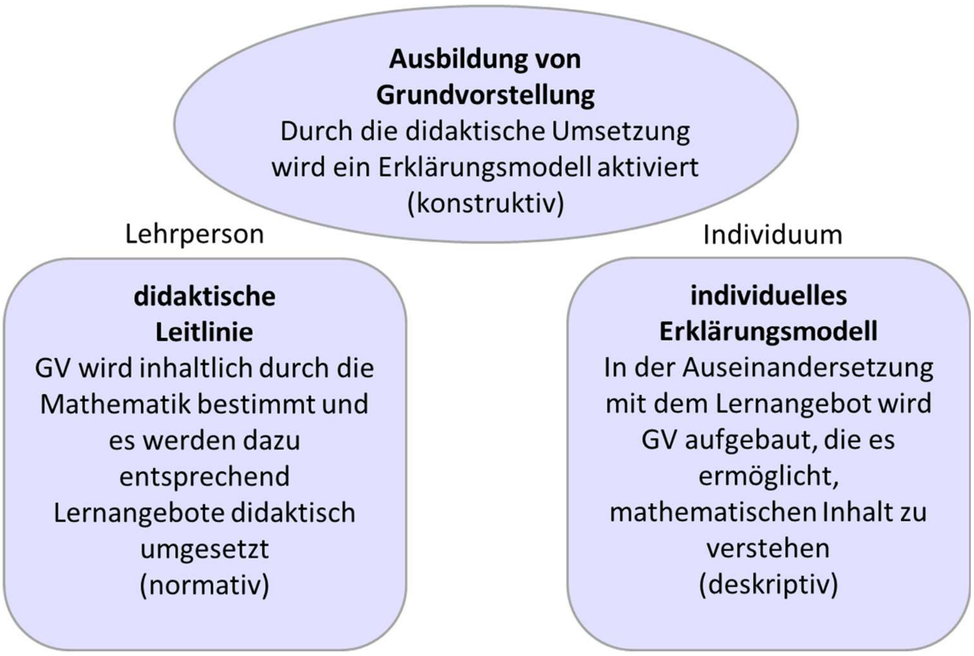


Abbildung 4.2: Grundvorstellung (GV) als didaktische Kategorie und individuelles Erklärungsmodell

Eine Grundvorstellung ist also auf der Seite der Lehrkraft eine *didaktische Leitlinie*, die durch den mathematischen Inhalt bestimmt wird und durch entsprechende Lernangebote ein didaktisches Ziel verfolgt (Abb. 4.2). Dies ist der *normative Aspekt* des Grundvorstellungskonzepts.

Im *deskriptiven Aspekt* hingegen erlaubt das Konzept, individuelle Erklärungsmodelle der Lernenden anhand von Grundvorstellungen zu charakterisieren. So kann bestimmt werden, inwieweit das aktuelle Erklärungsmodell des Individuums mit den intendierten Grundvorstellungen übereinstimmt (vom Hofe, 1992, S. 358 f.; vom Hofe & Blum, 2016, S. 231 f.).

Der *konstruktive Aspekt* des Konzepts beinhaltet die Annahme, dass sich durch die didaktische Umsetzung individuelle Erklärungsmodelle entwickeln, d. h. „*daß sich Grundvorstellungen ausbilden lassen*" (ebd., Hervorh. i. O.). Um nun adäquate Grundvorstellungen aufzubauen, ist es wichtig, dass von einem mathematischen Inhalt immer wieder ein Rückbezug zur vorgestellten Handlung stattfindet.

Spezifiziert man dies auf das Themenfeld Multiplikation in der Grundschule, so sind für die didaktische Leitlinie die Definitionen *wiederholte Addition* und *kartesisches Produkt* als Grundvorstellungen sowie die zugehörigen Eigenschaften der Multiplikation relevant. Zu diesen Grundvorstellungen können entsprechende Lernangebote ausgewählt werden, um individuelle Erklärungsmodelle möglichst passend zu den mathematischen Ideen zu entwickeln. Bei der Auswahl entsprechender Lernangebote für den Mathematikunterricht spielen unterschiedliche Darstellungsformen eine wesentliche Rolle.

4.2.3 Darstellungsformen

Da eine enge Verbindung zwischen mathematischem Verständnis und Darstellungswechsel existiert (Bönig, 1995a, 186 ff.; Gerster & Schultz, 2004, S. 351 ff.; Huinker, 1993, S. 80 ff.; Kaufmann & Wessolowski, 2011, S. 24; Moser Opitz, 2007, S. 119; Radatz, 1990, S. 3 ff.; Schäfer, 2005, S. 198 ff.), ist der Einsatz von verschiedenen Darstellungsformen für den Aufbau des mathematischen Verständnisses von großer Bedeutung.

4.2.3.1 Der Begriff Darstellungsformen

Für den Begriff Darstellung gibt es je nach Forschungsrichtung teilweise synonyme Bezeich-nungen wie Repräsentation, Repräsentationssystem, Inskription, Zeichen, Anschauungsmittel, Veranschaulichung, Visualisierung etc. Eine ausführliche Auseinandersetzung mit Darstellungen aus psychologischer, wissenschaftssoziologischer und semiotischer Perspektive ist bei Ott (2016, S. 15 ff.) zu finden.

Grundsätzlich wird zwischen internen und externen Repräsentationen unterschieden (Dufour-Janvier et al., 1987, S. 109; Goldin & Kaput, 1996, S. 399 f.; Goldin & Shteingold, 2001, S. 2). Interne Repräsentationen beziehen sich auf das persönliche Konstrukt bzw. die visuelle Vorstellung einer Person. Eine externe Repräsentation ist „a sign or a configuration of signs" (Goldin & Shteingold, 2001, S. 3).

In der Literatur werden für interne Repräsentationen z. B. auch Begriffe wie *inneres Bild, mentales Bild* oder *Vorstellungsbild* verwendet. Aus konstruktivistischer Perspektive wird ein solches inneres Bild als Repräsentation eines Objektes konstruiert. Dies wird als aktiver Vorgang angesehen, der durch schon vorhandenes Wissen gelenkt wird (Lorenz, 1993, S. 126). Innere Bilder sind idiosynkratisch, d. h. sie unterscheiden sich von Person zu Person (Lorenz, 1993, S. 130; Krauthausen, 1994, S. 32).

Von Piagets Theorie beeinflusst, identifiziert der Psychologe Bruner (1974) drei Darstellungsformen bzw. Stufen der Erschließung von Wissen: enaktive (Handlungen), ikonische (Bilder) und symbolische (Zeichen und Sprache) Darstellungsformen (S. 16 ff.). In Anlehnung an Bruners Unterteilung werden in verschiedenen Untersuchungen und Förderkonzepten nach denselben oder ähnlichen Darstellungsformen unterschieden (Bönig, 1995a, S. 60 ff.; Gerster und Schultz, 2004, S. 351; Kaufmann & Wessolowsky, 2011, S. 25; Kuhnke, 2013, S. 40 ff.; Lesh, Post & Behr, 1987, S. 33 f.; Wartha & Schultz, 2012, S. 25 ff.). Häufig wird zusätzlich noch nach symbolischer (im Sinne mathematischer Symbole) und sprachlicher Darstellung differenziert. Obwohl die Brunersche Unterteilung in der mathematikdidaktischen Forschung eine wichtige Rolle spielt, gibt es auch kritische Stimmen. So hält Freudenthal diese für weniger bedeutend:

> Instead I speak of the constitution of mental objects, which in my view precedes concept attainment and which can be highly effective even if it is not followed by concept attainment. [...] The fact that manipulating mental objects precedes making concepts explicit seems to me more important than the division of representations into enactive, ikonic, and symbolic. (Freudenthal, S. 1983, S. 33)

Auch für diese Arbeit weniger bedeutend ist somit die Unterscheidung nach enaktiv, ikonisch und symbolisch, sondern die Ausbildung tragfähiger *mental objects* bzw. *Grundvorstellungen* (vgl. Kap. 4.2.2). In den folgenden Abschnitten wird der Umgang mit Darstellungen im Sinne externer Repräsentationen beleuchtet.

4.2.3.2 Darstellungen als Lernstoff

Es ist nicht davon auszugehen, dass sich durch den Einsatz von entsprechenden Darstellungen in den Köpfen der Kinder ganz automatisch die erwünschten mentalen Bilder entwickeln (Krauthausen, 1998, S. 40). Das Verständnis für Darstellungen muss erlernt werden (Schipper, 1982, S. 109). Darstellungen sprechen „nicht einfach für sich" (Moser Opitz, 2009, S. 32). Lorenz (1992) stellt fest, „daß als notwendiger Zwischenschritt die *Ausbildung visueller Vorstellungsbilder* und das *mentale visuelle Operieren in der* Anschauung mit den im Unterricht verwendeten Mitteln notwendig ist" (ebd., S. 2, Hervorh. i. O.).

„[R]epresentations will be useful to the child to the extent that they have been 'grasped' by him" (Dufour-Janvier et al., 1987, S. 116). Schwierigkeiten können insbesondere dann auftreten, wenn Darstellungen zu früh oder in ungeeignetem Kontext eingesetzt werden, dann können sie sogar negative Effekte haben (ebd., S. 116 ff.).

Darstellungen sind keineswegs selbsterklärend und können durchaus unterschiedlich interpretiert werden (Gerster & Schultz, 2004, S. 352; Krauthausen, 1998, S. 41; Schmassmann & Diener, 2014, S. 8 f.; Voigt, 1993, S. 147 ff.). Es müssen bestimmte Konventionen erlernt werden, um Darstellungen zu verstehen und mit ihnen umgehen zu können (Gerster & Schultz, 2004, S. 352; Goldin & Shteingold, 2001, S. 4).

Wie unterschiedlich ein Bild von Kindern verstanden werden kann, zeigt die Untersuchung von Voigt (1993). Zu einem Bild sollten Grundschulkinder jeweils eine passende Regenaufgabe notieren. Auf diesem ist ein Tierwärter mit drei Bananen in einer Hand zu sehen. Der Wärter steht vor einem Käfig, hinter dessen Stangen ein Affe mit jeweils einer Banane in jeder Hand sitzt (siehe auch Voigt, 1993, S. 149).

Die Kinder notierten folgende Rechenaufgaben:

> $5 - 2 = 3$ (der Wärter gebe zwei Bananen weg)
> $3 + 2 = 5$ (Summe der Bananen)
> $1 + 1 = 2$ (der Wärter und der Affe)
> $3 \cdot 2 = 1$ (der Wärter habe eine Banane mehr als der Affe)
> $5 - 4 = 1$ (eine Banane mehr als Hände, die mittlere Banane rutsche dem Wärter gleich zwischen den Händen weg). (Voigt, 1993, S. 149)

Durch die Antworten der Kinder macht Voigt erstmalig die Mehrdeutigkeit bildlicher Darstellungen deutlich.

Darstellungen sind selbst auch Unterrichtsstoff und der Umgang mit ihnen muss eingeübt werden (Schipper, 1982, S. 109; Schipper & Hülshoff, 1984, S. 56; Moser Opitz, 2009, S. 32). Die eigenständige Entscheidung für eine Darstellungsform stellt für ein Kind eine Überforderung dar, da es dafür weitere Kenntnisse über Konventionen und Handhabung der verschiedenen Darstellungsformen benötigen würde (Lorenz, 2011, S. 40).

Seeger (1998) spricht von einem inflationären Gebrauch der Darstellungen (S. 309). Dieser „Representional overkill" (ebd.) kann sich besonders für schwache Kinder negativ auswirken. Der Einsatz von Darstellungen führt dazu, dass nicht nur der mathematische Inhalt, sondern auch der Gebrauch und die Handhabung der Darstellung verstanden werden müssen (ebd.). Darstellungen sind ambivalent zu betrachten. Sie sind einerseits Lernhilfe und andererseits Lernstoff (Selter, 1995c, S. 17). Um mit Darstellungen geeignet umgehen zu können, muss man ihre Sprache lernen (Seeger, 1998, S. 310). Es kann zur „Deutungsdifferenz" (Krauthausen, 1998, S. 133) von Darstellungen kommen, die aber über Aushandlungsprozesse behoben werden kann.

Zu beachten ist, dass verschiedene Darstellungen unterschiedliche mathematische Aspekte verdeutlichen (Schmassmann & Diener, 2014, S. 9).

> Erwachsenen sind die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Repräsentationen [...] unmittelbar klar. Die Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen sind ihnen so geläufig, dass diese ‚automatisch' ablaufen, also meistens nicht mehr bewusst wahrgenommen werden. Daher fällt es ihnen schwer, sich in die beim Kind noch erforderlichen Denkkonstruktionen hineinzuversetzen. Für das Kind ist es ein großer Unterschied, ob eine Aufgabe als konkrete Sachsituation, als bild-

> liche Darstellung oder als mit Symbolen geschriebener Rechenterm vorgelegt wird. (Gerster & Schultz, 2004, S. 352)

Die Fähigkeit, von einem Repräsentationssystem in ein anderes zu wechseln ist häufig eine kritische Schwelle im Lernprozess (Duval, 2006, S. 107; Radatz, 1990, S. 8). Darüber hinaus eignen sie sich deswegen auch für die Beschreibung von Fehlvorstellungen von Lernenden (Kuntze, 2013, S. 27). Die Übersetzungsprozesse zwischen verschiedenen Darstellungsformen müssen also ein eigenes Lernziel sein, da sie nicht automatisch ablaufen (Lorenz, 1993, S. 144).

4.2.3.3 Darstellungswechsel und mathematisches Verständnis

Fischer (1990) ‚definiert' Mathematik als „Darstellen + Operieren + Interpretieren" (S. 38) und führt dies u. a. am Beispiel einer Additionsaufgabe aus. Es wird ein Kontext in eine Additionsaufgabe übertragen (Darstellen), Operationen werden durchgeführt (Operieren) und das Ergebnis wird interpretiert (Interpretieren) (Fischer, 1990, S. 38).

Mathematische Begriffe sind nicht sichtbar. Man nimmt an, dass durch verschiedene Darstellungen verschiedene Aspekte der mathematischen Begriffe sichtbar gemacht werden können (Dufour-Janvier et al., 1987; S. 110; Goldin & Shteingold, 2001, S. 9; Janvier, 1987, S. 67 ff.; Kuntze, 2013, S. 21). Somit soll durch den Einsatz verschiedener Darstellungen das mathematische Verständnis eines Begriffs hervorgerufen werden. Janvier verdeutlicht dies am Beispiel des Funktionsbegriffs mithilfe eines Sterns, dessen Spitzen die verschiedenen Aspekte eines Begriffs symbolisieren sollen (Abb. 4.3).

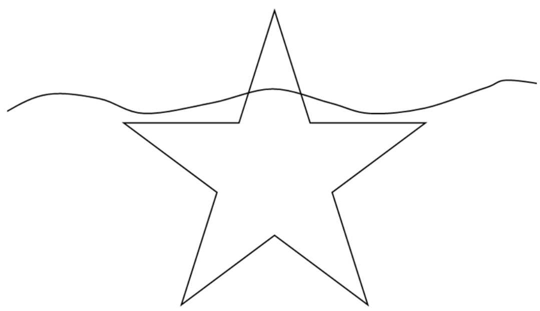


Abbildung 4.3: Aspekte des Begriffs symbolisiert durch einen Stern (in Anlehnung an Janvier, 1987, S. 69)

Die verschiedenen Darstellungen sind miteinander verbunden und jede einzelne Darstellung zeigt lediglich einen Aspekt des mathematischen Begriffs.

Das Darstellen hat deswegen einen wesentlichen Stellenwert in der Mathematik (Fischer, 1990, S. 38; Dufour-Janvier et al., 1987, S. 110). Die Nutzung verschiedener Darstellungen ist in dieser Wissenschaft zentral (Kuntze, 2013, S. 21) und das Verwenden von Darstellungen ist eine wesentliche Strategie von Mathematikern (ebd., S. 20). Um die unterschiedlichen Aspekte mathematischer Begriffe deutlich zu machen, spielt u. a. auch der Wechsel zwischen den Darstellungen eine große Rolle (Kuntze, 2013, S. 21).

„Mathematischer Erkenntnisgewinn beruht [...] nicht selten auf dem gezielten Wechseln zwischen Darstellungen, mithin der bewussten Nutzung vielfältiger Darstellungen" (Kuntze, 2013, S. 22). Auch grundlegende Strategien lassen sich häufig auf Darstellungswechsel zurückführen, wie z. B. die Strategie des Analogisierens oder des Reformulierens eines Problems (ebd., S. 22 f.).

Wechsel von Repräsentationen spielen bei mathematischen Aktivitäten eine entscheidende Rolle (Duval, 2006, S. 107; Lesh, Post & Behr, 1987, S. 33 ff.). Es gibt unterschiedliche Formen des Wechsels von Repräsentationen. Der Wechsel zwischen den Darstellungsformen wird als intermodaler Transfer bezeichnet (Bauersfeld, 1972, S. 144), während intramodaler Transfer den Wechsel innerhalb einer Darstellungsform meint, z. B. von einem Rechenstrich in ein Punktefeld (Winter, 1987, S. 23 f.).

„[U]nderstanding is a cumulative process mainly based upon the capacity of dealing with an 'ever-enriching' set of representations" (Janvier, 1987, S. 67). Der Wechsel von Darstellungsformen sowie der Wechsel innerhalb einer Darstellungsform sind für mathematisches Verständnis von Bedeutung (Hiebert & Carpenter, 1992, S. 66; Lesh, Post & Behr, 1987, S. 33 ff.). „Meaning or understanding in mathematics comes from building or recognizing relationships either *between* representations or *within* representations." (Hiebert, 1990, S. 32, Hervorhebung i.O.) Verständnis entsteht, wenn Darstellungen in einem immer größer werdenden strukturierten Netzwerk verbunden werden (Hiebert & Carpenter, 1992, S. 69).

> Effective mathematical thinking involves understanding the relationships among different representations of 'the same' concept as well as the structural similarities (and differences) among representational systems. That is, the student must develop adequate internal representations for interacting with various systems. (Goldin & Shteingold, 2001, S. 9)

Der Wechsel von Darstellungsformen wird als Zeichen eines Operationsverständnisses angesehen (Bönig, 1995a, 186 ff.; Gerster & Schultz, 2004, S. 351 ff; Huinker, 1993, S. 80 ff.; Kaufmann & Wessolowski, 2011, S. 24; Moser Opitz, 2007, S. 119; Radatz, 1990, S. 3 ff.; Schäfer, 2005, S. 198 ff.). Nach Gerster & Schultz (2004) ist Operationsverständnis die Fähigkeit, „Verbindungen herstellen zu können zwischen

a) (meist verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen,
b) modell- oder bildhaften Vorstellungen von Quantitäten,
c) symbolischen Schreibweisen (meist in Form von Gleichungen) für die zugrundeliegenden [sic] Quantitäten und Rechenoperationen“ (S. 351).

In einer Studie konnte gezeigt werden, dass zu den signifikanten Prädiktoren für die aktuelle Mathematikleistung im fünften Schuljahr u. a. auch die Fähigkeit zu mathematisieren zählt. Dies meint das Herstellen einer Verbindung zwischen Situation und Mathematik und umgekehrt (Moser Opitz, 2009, S. 37). Kinder mit Schwierigkeiten in Mathematik haben Probleme beim Mathematisieren und damit auch bei der Entwicklung von Verständnis für Operationen (ebd.).

Eine weitere Untersuchung von Moser Opitz (2007) kann in diesem Zusammenhang genannt werden, in der sie sich theoretisch und empirisch mit dem Phänomen *Rechenschwäche* beschäftigt. Von Interesse sind „die mathematischen Kompetenzen von rechenschwachen Schülerinnen und Schülern im 5. und 8. Schuljahr“ (ebd., S. 13).

> Es wird u. a. überprüft, ob sich bei diesen Kindern und Jugendlichen auf den Lernstoff Mathematik bezogene ‚typische Hürden‘ empirisch nachweisen lassen, welche die Betroffenen im Verlaufe der Schulzeit nicht überwunden haben und aus denen eine andauernde Beeinträchtigung des mathematischen Lernprozesses resultiert. (ebd.)

Moser Opitz bezieht sich bei den typischen Hürden auf „übereinstimmende Schwierigkeiten“ (ebd., S. 144), die bei rechenschwachen Schülerinnen und Schülern „bezüglich fehlender oder falscher Vorstellungen von mathematischen Operationen und Strategien“ zu beobachten sind. Im Mittelpunkt ist „die Vermutung, dass ‚Kernelemente‘ des Lernstoffes der Grundschulmathematik generelle Voraussetzung für das erfolgreiche mathematische Weiterlernen in späteren Schuljahren sind“ (ebd., S. 144). Zum Themenbereich ‚Multiplikation‘ wird festgestellt, dass die Aufgaben des kleinen Einmaleins passend gelöst werden, aber die Kinder Schwierigkeiten bei Veranschaulichungen haben (ebd., S. 223). „Operationsverständnis scheint nicht oder nur teilweise vorhanden zu sein“ (ebd.). Neben anderen scheint das eine fehlende Kompetenz zu sein, die verantwortlich dafür ist, dass es zu Schwierigkeiten beim Erwerb des Schulstoffes in späteren Jahrgangsstufen kommt (ebd., S. 224). In dieser Studie wird damit ein Zusammenhang zwischen der Fähigkeit zum Darstellungswechsel und Multiplikativem Verständnis hergestellt.

Den Darstellungswechsel beim Bearbeiten von Multiplikationsaufgaben thematisiert auch eine Studie von Bönig (1995a). Ihre Untersuchung beinhaltet, „Transferprozesse zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen“

(Bönig, 1995a, S. 2) bei Multiplikations- und Divisionsaufgaben zu analysieren, indem schriftliche Tests und Interviews mit Schülerinnen und Schülern der vierten Jahrgangsstufe (19 Kinder) durchgeführt werden (ebd., S. 104). Die Kinder sollen darin Aufgaben von einer gegebenen Repräsentationsform in eine andere übertragen (ebd., S. 102). Es werden zentrale Dimensionen für das Operationsverständnis berücksichtigt, indem „Schülerverhalten bei Transformationen zwischen Darstellungsmodi (Handlungsebene, bildliche, sprachliche und symbolische Form)“ (ebd., S. 3) analysiert werden. In den geführten Interviews wird deutlich, dass arithmetisches Wissen im Gedächtnis von Grundschülerinnen und -schülern unterschiedlich angeordnet ist. Die Umstrukturierung, die für die Übersetzungsprozesse notwendig ist, gelingt häufig nur begrenzt. Bönig zieht hier die Ausbildung von sogenannten bereichsspezifischen „*frames*“ nach Davis (1984, zitiert nach Bönig, 1995b, S. 20) heran. Es handelt sich hierbei um „zunächst abgegrenzte Strukturen, die subjektiv nichts miteinander zu tun haben. Wissen in einem bestimmten frame ist daher nicht auch automatisch in einem anderen *frame* verfügbar“ (Bönig, 1995b, S. 20, Hervorh. i. O.). Ein Grund für Übersetzungsschwierigkeiten zwischen den Repräsentationen könnte also die „Bereichsspezifität und Isoliertheit dieser *frames*“ (ebd.) sein. „Schritte zur Überwindung der Isoliertheit von *frames* bedürfen eigener konstruktiver Tätigkeit" (ebd., S. 23). Es zeigen sich folgende Ergebnisse: Bei der *Übersetzung aus der Textform in die Symbolform* haben lediglich drei Schülerinnen und Schüler weniger als die Hälfte der Aufgaben richtig gelöst (Bönig, 1995a, S. 105). Bei Aufgaben zur *Übersetzung aus der Symbolform in die Textform* (n = 14) haben sieben Kinder die Aufgaben richtig bearbeitet, sechs haben sie nicht bearbeitet und ein Kind hat eine andere Operation verwendet (ebd., S. 105). 43 % der Kinder können keine Realitätsbezüge herstellen (ebd., S. 106). Die gezeigten Sachsituationen beinhalten die Mengenvereinigung („Vereinigung paarweise elementfremder, gleichmächtiger endlicher Mengen“ (ebd., S, 109)) bzw. *wiederholte Addition* (ebd., S. 106). Bei *Übersetzungen aus der Symbolform in die ikonische Form* (n = 13) verwendet ein Kind eine Handlungsdarstellung, neun verwenden „Mengenoperationen“ (ebd., S. 108), womit „Darstellungen durch konventionelle Symbole“ (ebd., S. 71), d. h. „Darstellungen der Rechenoperationen als Mengenoperationen (Vereinigen [...])“ (ebd.) gemeint sind. Drei Kinder übertragen in eine andere Symbolform und zwei Kinder bearbeiten die Aufgabe nicht (ebd.). Alle Schülerinnen und Schüler verwenden das Modell der Mengenvereinigung (S. 109). Bei Aufgaben zur *Übersetzung aus der Symbolform in die enaktive Form* (n = 13) finden neun Kinder passende Handlungen, zwei übersetzen in eine andere Symbolform und zwei bearbeiten die Aufgaben auf sonstige Art und Weise (ebd., S. 114). Alle Kinder verwenden den Aspekt der Mengenvereinigung, Unterschiede gibt es bei der Art der Anordnung (vier Achtergruppen oder acht Vierergruppen) (ebd.). Zusammenfassend lässt sich für die *Überset-*

zung aus der Symbolform feststellen, dass alle Kinder das Modell der Mengenvereinigung verwenden (ebd., S. 117). „Dabei werden die inhaltlich unterschiedlichen Rollen der Faktoren berücksichtigt, der erste Faktor wird als Multiplikator betrachtet“ (ebd.). Oftmals wird von den Kindern die rechteckige Anordnung einer Darstellung der Multiplikation gewählt, die im Unterricht „zur Erklärung der Kommutativität herangezogen“ (ebd.) wird. Bei Aufgaben zur *Übersetzung aus der ikonischen Form in die symbolische Form* nehmen die meisten Schülerinnen und Schüler „sinnvoll begründete Mathematisierungen zu den vorgelegten Darstellungen vor“ (ebd., S. 123). Bei *Übersetzungen aus der ikonischen Form in die enaktive Form* ($n = 12$) wird $3 \cdot 5$ in einer Sachsituation (ein Bäcker räumt dreimal fünf Brote in das Regal, zweimal fünf Brote sind schon im Regal) und auf dem Zahlenstrahl dargestellt. Fünf Kinder geben eine Addition von zwei Zahlen wieder ($10 + 5$ oder $5 + 10$), sechs die intendierte Multiplikation, eine Bearbeitung enthält eine „formal-orientierte Handlung“ (ebd., S. 124). Das heißt elf von zwölf Kindern übersetzen das Bild in eine „sinnvolle Handlungssequenz mit Steinen“ (ebd., S. 125). Bei Aufgaben zur *Übersetzung aus der enaktiven Form* wird zu $3 \cdot 6$ eine Handlung präsentiert, indem die Versuchsleiterin „von einem Haufen Steinen dreimal hintereinander je sechs Steine“ (ebd., S. 131) wegnimmt und sie in Haufen dem jeweiligen Kind vorlegt. Bei *Übersetzungen aus der enaktiven Form in die Symbolform* ($n = 11$) nennen vier Kinder eine *wiederholte Addition*, neun die intendierte Multiplikationsaufgabe, zwei Divisionsaufgaben (im Sinne von Aufteilen), und ein Kind Sonstiges (ebd., S. 131). *Bei Übersetzungen aus der enaktiven Form in die ikonische Form* ($n = 12$) entwirft ein Kind eine Handlungsdarstellung, neun entwerfen Darstellungen zu Mengenoperationen und zwei vollziehen eine Übertragung in eine andere Operation (ebd., S. 137). Einige Kinder wählen vermutlich den Weg über die Zahlenebene, d. h. sie finden zunächst eine passende Multiplikationsaufgabe zur Handlung und zeichnen dann ein Bild (ebd., S. 138). Bönigs Forschungsergebnisse zeigen, dass man nicht davon ausgehen kann, dass die Fähigkeit zur Übersetzung in Richtung der symbolischen Ebene auch die Fähigkeit zur Rückübersetzung bewirkt, ohne dass man sie im Unterricht behandelt. Somit muss es darum gehen, „Beziehungen zwischen allen Repräsentationsebenen herzustellen“ (ebd., S. 191). Für das Operationsverständnis ist von Bedeutung, auch „Rückübersetzungen aus der abstrakten Ebene durchzuführen“ (ebd., S. 192). Die Übersetzungen zwischen den Darstellungsformen sollten demnach nicht nur bei der Einführung von Themen, sondern während des gesamten Lernprozesses thematisiert werden (ebd., S. 192 f.).

Ebenfalls Darstellungswechsel bei Multiplikationsaufgaben untersucht die qualitative Studie von Kuhnke (2013), in der sie die Frage untersucht, welche Kriterien Kinder nutzen, „um zwischen verschiedenen Darstellungen der Multiplikation zu wechseln und um herauszufinden, wann Darstellungen zueinander

‚passen'" (S. 3). Um dies zu erforschen, führt sie mit Kindern im zweiten Schuljahr Interviews zu Multiplikationsaufgaben durch, die sich auf Transferprozesse zwischen bildlichen, sprachlich-symbolischen und mathematischen Darstellungen beziehen (ebd., S. 105). Der Schwerpunkt der Arbeit liegt in der „Betrachtung von Transferprozessen zwischen verschiedenen multiplikativen Darstellungen, insbesondere ausgehend von und zu bildlichen Darstellungen" (ebd., S. 4). Es wird der Prozesscharakter von Darstellungswechseln betont, indem Kuhnke zum einen davon ausgeht, dass Darstellungswechsel „Deutungen von Zeichen durch die Lernenden" sind, „die in der Interaktion mit den Darstellungen, aber auch mit anderen Lernenden über die Darstellungen hergestellt werden" (ebd., S. 5). „Zum anderen wird dieser Prozesscharakter mithilfe des epistemologischen Dreiecks nach Steinbring dargestellt" (ebd., S. 5). Das epistemologische Dreieck beinhaltet nach Steinbring (2000) die Elemente „Zeichen/Symbol", „Gegenstand/Referenzkontext", und „Begriff" (S. 34), wobei sich Steinbring dabei u. a. auf Theorien von Luhmann, de Saussure und Odgen und Richards bezieht (Luhmann, 1997, de Saussure, zitiert nach Steinbring, 2000, S. 32 ff.; Odgen & Richards, 1923, zitiert nach Steinbring, 1993, S. 118). Bedeutung für mathematische Begriffe kann sich erst entwickeln, wenn Lernende wechselseitige Beziehungen zwischen Zeichen/Symbol und Gegenstand/Referenzkontext herstellen (Steinbring, 2000, S. 34), indem Beziehungen aktiv konstruiert werden (Steinbring, 1993, S. 118). „Wechselbezug zwischen Bezeichnendem [Zeichen/Symbol] und Bezeichnetem [Gegenstand/Referenzkontext] kann nur in der Interaktion zwischen den Teilnehmern hergestellt werden" (Steinbring, 2000, S. 34). Beispielhaft für diese Elemente nennt Kuhnke die Zahl 3 als Zeichen/Symbol und „die bildliche Darstellung von drei Wendeplättchen oder drei Äpfeln" (Kuhnke, 2013, S. 100) als Gegenstand/Referenzkontext, zwischen denen Lernende Beziehungen herstellen müssen, um die Bedeutung für den mathematischen Zahlbegriff ‚drei' zu entwickeln (ebd., S. 100 f.). Kuhnkes Ergebnisse zeigen, dass aus epistemologischer Perspektive ein Darstellungswechsel „als stetiges Wechselspiel zwischen Deutungen und Verbindungsherstellung zwischen verschiedenen Deutungen" angesehen werden kann (ebd., S. 264) und komplex ist. Beim Darstellungswechsel vollziehen sich „spezifische Fokussierungen" (ebd.) „auf bestimmte Relationen, Einzelelemente oder Anzahlen bzw. Ergebnisse" (ebd.). Die Fokussierungen beim Darstellungswechsel sind „Momentaufnahmen" (ebd., S. 266), sie sind spontan und flexibel, d. h. Kinder wechseln zwischen den Fokussierungen. Es kann zudem beobachtet werden, dass verschiedene Fokussierungen zusammenwirken. Bei der Bearbeitung zeigen sich kaum Unterschiede zwischen didaktischer und kontextbezogener Darstellung.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Darstellungswechsel im Grundschulunterricht breit thematisiert und erforscht sind (Bönig, 1995a, 1995b;

Kuhnke, 2013; Moser Opitz, 2007). Moser Opitz‘ (2007) Studie zeigt, dass es bei rechenschwachen Kindern im fünften und achten Schuljahr für die Unterrichtenden als eine übereinstimmende Schwierigkeit anzusehen ist, Multiplikation zu veranschaulichen. Die Behandlung von Übersetzungen von bildlichen Darstellungen in die symbolische Ebene reicht offenbar nicht aus, um automatisch auch die Fähigkeit der Übersetzung von der symbolischen Ebene in bildliche oder sprachliche Ebenen bei Kindern zu erreichen (Bönig, 1995a, 1995b). Während eines Darstellungswechsels finden verschiedene Fokussierungen des Kindes auf unterschiedliche Elemente statt, sodass es sich um einen relativ komplexen Prozess handelt (Kuhnke, 2013). Bönigs (1995a) Untersuchungen zeigen, dass insbesondere die Rückübersetzung von der symbolischen Darstellungsform in eine andere für das Verständnis von Bedeutung ist.

Der Aufbau des Operationsverständnisses sollte deswegen keinesfalls als Einbahnstraße in Richtung der anzustrebenden symbolischen Darstellungsform gesehen werden, da sich die Fähigkeit der Übersetzung ‚zurück‘ in eine andere Darstellungsform nicht automatisch vollzieht, sondern ebenfalls im Unterricht thematisiert werden muss (Bönig, 1995a, S. 191; Merschmeyer-Brüwer, 2014, S. 4; Scherer, 2007, S. 7; Schütte, 1991, S. 245).

Das „Prinzip der Interaktion der Darstellungsformen“ (Müller & Wittmann, 1984, S. 158) wird somit als ein Teil eines didaktischen Prinzips, des Spiralprinzips, beschrieben. „Alle drei Darstellungsformen [hier sind enaktiv, ikonisch, symbolisch gemeint] sollen [...] sich wechselseitig stützend eingesetzt werden“ (ebd.). „Die verschiedenen Sprachen sollen weder nacheinander noch sonstwie separiert voneinander geübt werden, es ist gerade umgekehrt das wechselseitige Übersetzen der Witz der Sache“ (Winter, 1987, S. 23).

Auf welche Darstellungsformen in der hier vorliegenden Arbeit fokussiert wird, soll im folgenden Abschnitt erläutert werden.

4.2.3.4 Arten von Darstellungsformen

Darstellungsformen können in *Kontextbezug, didaktisches Material* und *Symbolform* unterteilt werden.

Die Darstellungsform *Kontextbezug* bezieht sich auf Situationen aus der allgemeinen Lebenswelt, die Multiplikation präsentieren. Diese Situationen können in Form von Bildern oder Texten dargestellt werden. In der Unterteilung, die Bönig (1995a) in ihrer Arbeit vorgenommen hat, sind dies ikonische und sprachliche Darstellungen (S. 60 ff.), bei von Wartha & Schulz (2012) Bilder und „reale“ Situationen. Kuhnke (2013) nennt dies bildliche und sprachlich-symbolische Darstellungen (S. 25 ff.). Um Mathematik im Leben auch anwenden zu können, reicht die Beherrschung von Rechenverfahren nicht aus (Franke & Ruwisch, 2010, S. 69), sondern es ist notwendig, zu realen Situationen mathematische Modelle bilden zu können (Bönig & Ruwisch, 2004, S. 6 ff.). Aufgaben der Darstellungsform Kontextbezug beinhalten mathematisches Modellieren. In den Bildungsstandards für die Grundschule wird Modellieren folgendermaßen beschrieben:

- Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen,
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen,
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren. (KMK, 2005, S. 8)

Neben wichtigen anderen Aspekten wird das Anwenden von Mathematik als eine Funktion des Sachrechnens angesehen. Diese beinhaltet es, gezielt Sachsituationen zu präsentieren, die in mathematische Operationen übersetzt werden können, um so Operationsverständnis zu erreichen (Franke & Ruwisch, 2010, S. 20). Die Fähigkeit, zwischen Lebenswirklichkeit und Mathematik Zusammenhänge herzustellen, wird auch als Mathematisieren bezeichnet, was zu den allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts gehört (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 78). Die Darstellungsform Kontext beinhaltet somit Aufgaben, die es erfordern, Übersetzungsprozesse zwischen Kontext und mathematischer Operation zu vollziehen.

Die Darstellungsform *didaktisches Material* bezieht sich auf ausgewählte didaktische Materialien oder deren Abbildungen. Nach Bönigs (1995a) Unterteilung sind dies enaktive und ikonische Darstellungen (S. 60 ff.), bei Wartha & Schulz (2012, S. 25 ff.) und Kaufmann & Wessolowsky (2011, S. 25) sind es Bilder und Handlungen. In der hier vorliegenden Arbeit bezieht sich die Darstellungsform didaktisches Material auf abstrakte didaktische Unterrichtsmittel wie Wendeplättchen, Punktefelder und Rechenstriche sowie deren Abbildungen. Es existiert kein Bezug zu einem bestimmten Sachkontext; die Materialien könnten theoretisch für verschiedene Kontexte stehen. In diesem Sinn haben derartige Darstellungen amphibische Eigenschaften (Wittmann, 1998b, S. 158). Das Handeln mit ihnen ist in verschiedenen Situationen möglich. Sie sind einerseits konkret genug, d. h. sie können in speziellen Kontexten angewandt werden. Andererseits sind sie vage genug, da sie in verschiedenen Kontexten gebraucht werden können (Becker & Selter, 1996, S. 522; Lorenz, 1991, S. 59).

Die Darstellungsform *Symbolform* bezieht sich ausschließlich auf die rein symbolische Schreibweise von Multiplikationsaufgaben. Bei Bönig (1995a, S. 60 ff.), Gerster & Schultz (2004, S. 351) und Kaufmann & Wessolowksy (2011, S. 25) ist diese Darstellungsform die symbolische Darstellung oder das Symbol. Kuhnke (2013) nennt dies mathematisch-symbolische Darstellung (S. 40 ff.).

4.2.3.5 Darstellungen zur Multiplikation

Aus mathematischer Perspektive ergeben sich zwei für den Unterricht in der Grundschule relevante *Grundvorstellungen* der Multiplikation: *wiederholte Addition* und *kartesisches Produkt* (vgl. Kap. 4.1). Diese werden dem Konzept der Grundvorstellungen folgend didaktisch mithilfe verschiedener Darstellungsformen in Lernangebote umgesetzt, um individuelle Erklärungsmodelle zu entwickeln (vgl. Kap. 4.2.2). Im Folgenden werden Darstellungsformen vorgestellt, die für die Multiplikation geeignet sind.

Die Grundvorstellung *wiederholte Addition* beinhaltet das wiederholte Addieren gleichmächtiger disjunkter Mengen. Im Produkt $a \cdot b$ kann beim Ansatz der *wiederholten Addition* a auch als Multiplikator und b als Multiplikand bezeichnet werden. „*a* gibt die Anzahl der *gleichmächtigen Mengen* an, *b* die Anzahl der *Elemente* in den gleichmächtigen Mengen“ (Padberg & Büchter, 2015, S. 207, Hervorh. i. O.). Daraus ergibt sich eine Asymmetrie der beiden Faktoren. Die Multiplikation wird hier als *wiederholte Addition* gleicher Summanden angesehen: $a \cdot b = b_1 + b_2 + \ldots + b_a$. Bei a mal b „liegt es nahe, das Wort ‚mal‘ zu a zugehörig zu betrachten: „Also ‚a mal‘ b“ (Vollrath & Weigand, 2009, S. 33). Es gibt aber auch die Auffassung „a ‚mal b‘“ (ebd.) zu denken, was zu $a \cdot b = = a_1 + a_2 + \ldots + a_b$ führt. Aufgrund der Kommutativität (vgl. Kap. 4.1.2) ist $a \cdot b = b_1 + b_2 + \ldots + b_a = b \cdot a = a_1 + a_2 + \ldots + a_b$. In deutschen Schulbüchern wird meist der erste Faktor als Multiplikator betrachtet, während in anderen Ländern, z. B. England, der zweite Faktor als Multiplikator angesehen wird (Kuhnke, 2013, S. 37).

Die Grundvorstellung der *wiederholten Addition* kann durch Darstellungen mit *Kontextbezug* anschaulich gemacht werden. Zum einen ist dies durch Bilder möglich, in denen die Elemente so angeordnet sind, dass die gleichmächtigen disjunkten Mengen deutlich werden (Abb. 4.5). Dies kann geschehen, indem die Elemente in ungeordneten Mengen dargestellt sind, wie z. B. bei der Abbildung mit den Eisbechern (Darstellung A in Abb. 4.4). Man findet für Darstellungen wie diese auch den Begriff „räumlich-simultan“ (Schipper, 2009, S. 147), der sich nach Schipper (2009) auf Situationen bezieht, bei denen „Mengen gleicher Mächtigkeit räumlich nahe beieinander angeordnet werden“ (S. 147). Die Elemente können auch der Reihe nach angeordnet werden, wie z. B. bei der Abbildung mit den Luftballons (Darstellung B in Abb. 4.4). Es handelt sich hier um eine „lineare Anordnung“ (Selter, 2002, S. 14) der Elemente. Da einige Kinder derartige Ideen spontan entwickeln (vgl. Kap. 4.2.1) und solche Darstellungen Möglichkeiten für bestimmte Themen in der Sekundarstufe eröffnen (z. B. zur Proportionalität), macht es durchaus Sinn, Darstellungen mit linearer Anordnung der Elemente einzusetzen (Selter, 2002, S. 14).

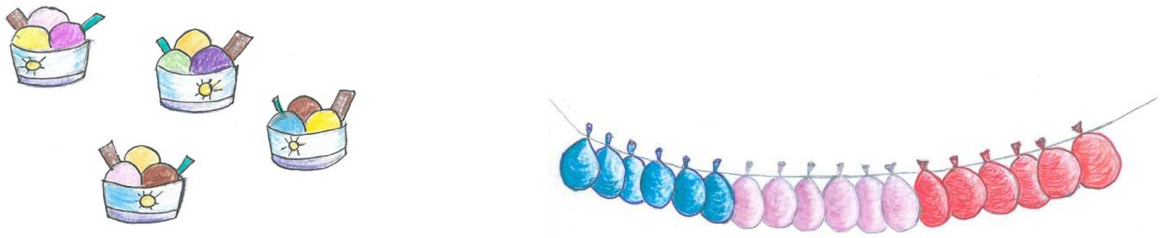


Abbildung 4.4: Darstellungen mit Kontextbezug zur wiederholten Addition (v.l. A und B)

Eine weitere Möglichkeit ist eine Bilderfolge, in der die gleiche Handlung mehrmals ausgeführt wird (Abb. 4.5). Derartige Situationen werden häufig als „zeitlich-sukzessiv“ (Padberg & Benz, 2011, S. 128 ff.; Schipper, 2009, S. 147 ff.) bezeichnet.

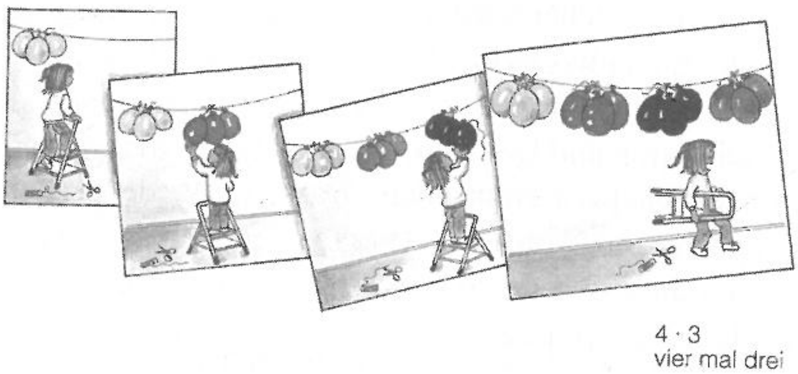


Abbildung 4.5: Bilderfolge zur wiederholten Addition (Radatz, Schipper, Dröge & Eberling, 1998, S. 82, © Westermann Gruppe, Braunschweig)

Die *wiederholte Addition* kann ebenso durch Situationen, die in Textform festgehalten sind, deutlich gemacht werden. Ein Beispiel ist folgende Geschichte:

> *In einem Netz sind 5 Orangen. Simone kauft 4 Netze. Wie viele Orangen hat sie?*

Auch Situationen wie folgende sind möglich:

> *Michael hat 2-mal so viele Stifte wie Anton. Anton hat 8 Stifte. Wie viele Stifte hat Michael?*

Derartige Situationen wie im zweiten Beispiel werden häufig als multiplikativer Vergleich bezeichnet (Bönig, 1995a, S. 93; Schipper, 2009, S. 149). Es geht um multiplikative Beziehungen, die zwischen Anzahlen und Größen hergestellt werden. Hier kann man sich die Stifte von Michael als zwei gleichmächtige Mengen von jeweils acht Stiften vorstellen, sodass dies der Grundvorstellung der *wiederholten Addition* zugeordnet werden kann.

Darstellungen mit *didaktischem Material* können ebenfalls die *wiederholte Addition* deutlich machen (Abb. 4.6).

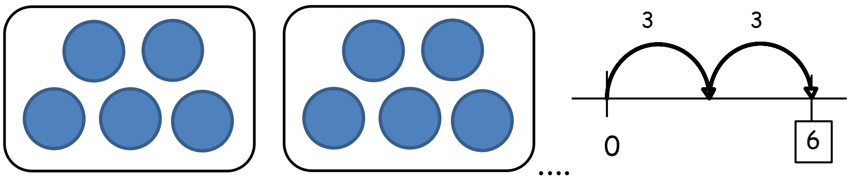


Abbildung 4.6: Darstellung mit didaktischem Material zur wiederholten Addition (v. l. A und B)

In Darstellung A wird wieder die Anordnung der Elemente in gleichmächtige disjunkte Mengen deutlich. Es wird eher der Kardinalzahlaspekt von Zahlen anschaulich gemacht, der Anzahlen beschreibt (Padberg & Benz, 2011, S. 14). Der Rechenstrich (Darstellung B in Abb. 4.7) betont eher den Ordinalzahlaspekt von Zahlen, der die Reihenfolge der Zahlen innerhalb einer Reihe kennzeichnet (Padberg & Benz, 2011, S. 14). Schipper (2009) weist darauf hin, dass diese Darstellung (Abb. 4.7, B) auf keinen Fall ausschließlich verwendet werden sollte, da sie u. a. das Zählen in Schritten betont (S. 139). Für ein tiefergehendes Verständnis der Multiplikation ist diese Darstellungsart nicht tragfähig, da sie die Eigenschaften der Multiplikation nicht deutlich machen kann (Schulz, 2017, S. 18, Steinweg, 2013, S. 136 ff.; Lamprecht & Steinweg, 2017, S. 188 f.). „Zudem ist dieses Modell nicht fortsetzbar, weil es in größeren Zahlenräumen (mit Zahlen weit über das kleine 1x1 hinaus) oder kleineren Zahlenräumen (mit Dezimalbrüchen kleiner 1) nicht mehr anschaulich ist" (Schulz, 2017, S. 18).

Bei der Grundvorstellung des *kartesischen Produkts* können zum einen die beiden Faktoren des Produkts als Dimensionen aufgefasst werden, die eine Matrix mit einer spezifischen Anzahl an Spalten und Zeilen aufspannen (Küchemann & Hodgen, 2018, S. 12; Ruwisch, 1999, S. 132; Steinweg, 2013, S. 132).

Abbildung 4.7: Darstellung mit Kontextbezug zum kartesischen Produkt

Ein Beispiel für derartige Darstellungen mit *Kontextbezug* wird in Abbildung 4.7 ersichtlich. Die Wasserflaschen sind im Kasten so angeordnet, dass die Spalten und Zeilen deutlich werden. Situationen, die eine solche „rechteckige Anordnung“ (Selter, 2002, S. 14) anschaulich machen sollen, können auch in Textform festgehalten werden. Ein Beispiel dafür ist folgende Rechengeschichte:

> *In der Kiste liegen 4 Reihen Birnen. In jeder Reihe sind 7 Birnen. Wie viele Birnen sind in der Kiste?*

Darstellungen mit *didaktischem Material* können ebenso ein Feld mit einer spezifischen Anzahl an Spalten und Zeilen deutlich machen (Abb. 4.8).

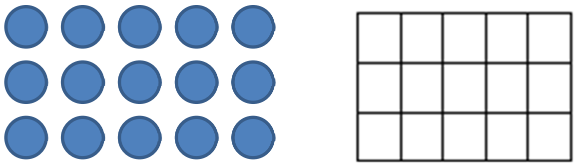


Abbildung 4.8: Darstellung mit didaktischem Material zum kartesischen Produkt (v. l. A und B)

Schipper (2009) nennt derartige Darstellungen wegen der räumlichen Nähe gleichmächtiger Mengen ebenso räumlich-simultan (S. 147). Er weist darauf hin, dass sie „mit ihrer Zeilen- und Spaltenstruktur aber auch als Veranschaulichungen des *kartesischen Produkts* interpretiert werden“ (S. 148) können. Darstellung A (Abb. 4.8) ist ein Punktefeld, dessen Punkte die spezifische Anzahl an Spalten und Zeilen angeben. In Darstellung B (Abb. 4.8) wird dies durch die Anzahl an Kästchen deutlich.

„Auch die rechteckige Anordnung ist für die Weiterentwicklung des Verständnisses zentral. So lässt sich die Multiplikation von Brüchen, von Dezimalzahlen, ja sogar von Ausdrücken mit Variablen durch das Rechtecksmodell visualisieren (z. B. $(a + b)^2$)“ (Selter, 2002, S. 14). Um ein vollständiges Erschließen der Eigenschaften der Multiplikation zu erreichen, ist der Einsatz von Darstellungsformen nötig, die die Faktoren als Zeilen und Spalten anschaulich machen (Schulz, 2017, S. 18; Steinweg, 2013, S. 136 ff.; Wittmann & Müller, 2017, S. 204).

In der mathematikdidaktischen Literatur wird die Grundvorstellung des *kartesischen Produkts* überwiegend zuerst mit dem kombinatorischen Aspekt der Multiplikation in Verbindung gebracht. Folgende Aufgabe ist ein Beispiel für eine derartige Sachsituation:

> *Tina hat 2 Hosen und 4 Pullover. Wie viele unterschiedliche Kombinationen sind möglich?* (Schipper, 2009, S. 148).

Derartige Situationen können mithilfe von Baumdiagrammen und Darstellungen, die die Kombinationsmöglichkeiten mit Verbindungslinien deutlich machen (Abb. 4.9), veranschaulicht werden. Dieser Aspekt wird in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht thematisiert.

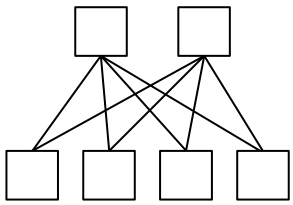


Abbildung 4.9: Darstellung zum kombinatorischen Aspekt der Multiplikation (in Anlehnung an Radatz et al., 1998, S. 83)

In der Unterscheidung nach zeitlich-sukzessiv und räumlich-simultan, wie sie Schipper (2009) vornimmt, werden sowohl Darstellungen, die die *wiederholte Addition*, als auch solche, die ein Produkt als Feld mit einer spezifischen Anzahl an Zeilen und Spalten darstellen, als räumlich-simultan bezeichnet (S. 147). Es werden in beiden Formen der Darstellung „Mengen gleicher Mächtigkeit räumlich nahe beieinander angeordnet“ (Schipper, 2009, S. 147). Darstellungen, die das wiederholte Addieren einer immer gleichen Menge verdeutlichen (Abb. 4.4; Abb. 4.5; Abb. 4.6), unterscheiden sich jedoch wesentlich von Darstellungen, die die Faktoren des Produkts als Dimensionen auffassen, wie z. B. Punktefelder oder Kästchenpapier (Abb. 4.8) (vgl. dazu auch Steinweg, 2013, S. 132 ff.). Aus mathematischer Perspektive erscheint es sinnvoll, Darstellungen nach Art der zugrunde liegenden mathematischen Definition zuzuordnen. Dies führt zur Unterscheidung nach Darstellungen, die eher die *wiederholte Addition*, und solchen, die eher das *kartesische Produkt* (i. S. eines Feldes mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten) verdeutlichen.

4.2.3.6 Zwischenfazit

In diesem Abschnitt werden verschiedene Möglichkeiten vorgestellt, wie *Grundvorstellungen* der Multiplikation durch verschiedene Darstellungsformen deutlich gemacht werden können. Für die hier vorliegende Arbeit sind Darstellungsformen im Sinne von externen Repräsentationen relevant (vgl. Kap. 4.2.3.1).

Darstellungen sind selbst auch Lernstoff und können unterschiedlich gedeutet werden (vgl. Kap. 4.2.3.2). Mathematisches Verständnis, insbesondere Operationsverständnis, beinhaltet die Fähigkeit zwischen den Darstellungsformen zu wechseln. Somit ist es von großer Bedeutung, Darstellungswechsel in verschiedene Übersetzungsrichtungen im Grundschulunterricht zu thematisieren (vgl. Kap. 4.2.3.3). Es sind unterschiedliche Unterteilungen der Darstellungsformen möglich. Die in dieser Arbeit vorgenommene Unterscheidung erfolgt nach *Kontextbezug, didaktischem Material* und *Symbolform* (vgl. Kap. 4.2.3.4). Es gibt verschiedene geeignete Darstellungsformen, die Multiplikation deutlich machen können. Für die hier vorliegende Arbeit erscheint es sinnvoll, diese nach Art der zugrunde liegenden Grundvorstellung zu unterscheiden: der *wiederholten Addition* und dem *kartesischen Produkt*. Das *kartesische Produkt* bezieht sich hier auf die Vorstellung, die Faktoren des Produkts als Dimensionen einer Matrix anzusehen (vgl. Kap. 4.2.3.5).

Bei weiteren didaktischen Überlegungen ist nun relevant, welche Strategien Kinder bei der Lösung von Multiplikationsaufgaben von sich aus nutzen.

4.2.4 Befunde zur Nutzung verschiedener Strategien bei der Lösung von Multiplikationsaufgaben

Welche Strategien bei der Bearbeitung von Multiplikationsaufgaben von Kindern genutzt werden, wird in verschiedenen Studien untersucht.

Ter Heege (1985) erforscht in seiner Studie die Fähigkeiten von Kindern beim Lösen von Multiplikationsaufgaben. Dafür befragt er Kinder der Klassen zwei bis sechs zur Lösung von Einmaleinsaufgaben. Sein Interesse bezieht sich darauf, ob Kinder die Aufgaben auswendig wissen oder nicht, und wenn nicht, ob und wie sie mithilfe von Strategien Multiplikationsaufgaben berechnen können (ebd. S. 382). Einige der interviewten Kinder haben einen Unterricht erfahren, in dem sie die Einmaleinsreihen auswendig lernen sollten (ebd., S. 383). Die meisten Kinder zeigen dennoch informelle Strategien bei der Lösung von Aufgaben. Ter Heege identifiziert sechs verschiedene *informelle Strategien*:

- Anwendung der Kommutativität
- Heranziehen von Multiplikationsaufgaben mit 10, um andere Aufgaben zu berechnen
- Heranziehen von Verdoppelungsaufgaben, um andere Aufgaben zu berechnen
- Halbieren von bekannten Aufgaben
- Erhöhung einer bekannten Aufgabe durch Addition des Multiplikanden und
- Verringerung einer bekannten Aufgabe durch Subtraktion des Multiplikanden (ebd., S. 383 f.)

Als didaktische Konsequenz fordert er, dass den Kindern im Unterricht mehr Raum gegeben werden soll, die Operation der Multiplikation kennenzulernen, Denkstrategien zu entwickeln und zugrunde liegende Beziehungen zu erfahren. Stures Auswendiglernen isolierter und unverstandener Fakten ist nicht effektiv (ebd., S. 385 f.).

Ziel Ruwischs (1999) Studie ist es, „Lösungsstrategien und Handlungsmuster von Grundschulkindern beim Bearbeiten multiplikativer Sachsituationen zu erfassen und zu beschreiben" (S. 15). In ihren Untersuchungen bearbeiten die Kinder der zweiten und dritten Klassen paarweise drei multiplikative Sachsituationen. Ruwischs Forschungsinteresse bezieht sich einerseits auf „Lösungsstrategien und Handlungsmuster von Grundschulkindern" (ebd.) und andererseits „auf multiplikative Sachsituationen als Aufgabenformate" (ebd., S. 16). Neben heuristischen werden arithmetische Strategien untersucht, die zur Lösung von multiplikativen Sachsituationen von Kindern herangezogen werden. Als mögliche arithmetische Strategien werden von ihr benannt und in der Analyse genutzt:

- Zählen
- Aufsagen von Zahlenfolgen
- Verwendung von Addition und Subtraktion
- Wissen von Einmaleins- und Divisionsgleichungen
- Mischformen (ebd., S. 159)

Auffällig ist beim Einsatz arithmetischer Strategien durch die Kinder in dieser Untersuchung, dass die *wiederholte Addition* als Strategie weniger bedeutend ist. Aber auch „distributive und assoziative Zerlegungen" (ebd.) werden selten verwendet. Kinder der zweiten Jahrgangsstufe setzen sehr häufig Zählstrategien ein, Kinder der dritten Klasse nutzen überwiegend Einmaleinsreihen und -gleichungen. Bei einer multiplikativen Sachsituation verwenden die Hälfte der Drittklässler die Addition, wobei sie diese meist mit anderen Lösungsstrategien verknüpfen (ebd., S. 253 f.). Ruwisch beschreibt folgende mögliche Ursachen: Erfahrungen im Unterricht bestimmen die Wahl der Lösungsstrategie. Möglicherweise haben viele Schülerinnen und Schüler das Einmaleins durch Aufsagen der Reihen gelernt. Für Zweitklässler bildet das additive Operationsverständnis keine Grundlage für Multiplikationsaufgaben. Sie verwenden die Strategie des Zählens (ebd., S. 254). In neuen Situationen wird von den Kindern „auf ältere, gefestigte Strategien" zurückgegriffen, auch wenn sie „neue, effektivere kennen" (ebd., S. 255). „Spontane informelle Lösungsstrategien zu multiplikativen Aufgabenstellungen bauen nicht auf einem sicheren Additionsverständnis auf, sondern stellen eine spezifische Erweiterung von Zählvorstellungen dar" (ebd., S. 256). Zusammenfassend zeigt Ruwischs Untersuchung Folgendes: Die Problemstellungen werden von den Kindern sachangemessen interpretiert und sie verwenden passende Lösungsstrategien und Handlungsmuster. Nur in Einzelfällen gehen Kinder schematisch ohne Sachbezug vor. Die Kinder verwenden bei der Lösung der Multiplikationsaufgaben arithmetische Strategien, die „durch Handlungen enaktiv“ (ebd., S. 287) unterstützt werden können. Sie nutzen dabei das vorgegebene Material und die eigenen Finger. Auch Zweitklässlerinnen und -klässler, die multiplikative Operationen im Unterricht noch nicht kennengelernt haben, können mithilfe von „informellen Lösungsstrategien und Handlungsmustern“ (ebd.) Sachsituationen zur Multiplikation bearbeiten. Wie auch die Kinder der dritten Klasse verwenden sie viele verschiedene „Lösungswege, Strategien und Handlungsmuster“ (ebd.). Spontane Strategien, die bei multiplikativen Aufgabenstellungen eingesetzt werden, beruhen hier jedoch auf spezifischen „Erweiterungen des Zählverständnisses [...] und nicht auf einem sicheren Additionsverständnis“ (ebd.).

Sherin & Fuson (2005) entwickeln eine *Taxonomie von Multiplikationsstrategien*, die einerseits auf Untersuchungen von Ergebnissen vorheriger Forschung und andererseits auf der Analyse eigener Daten basiert. Diese verwenden sie zur Beschreibung der Veränderungen des Strategiegebrauchs bei Kindern, die sie als Ergebnis von individueller Entwicklung und Unterricht ansehen. In bisherigen Untersuchungen zum Strategieeinsatz bei der Addition geht man allgemein davon aus, dass die Strategieentwicklung durch allgemeine konzeptuelle Fähigkeiten bezogen auf Zahlen gesteuert wird (ebd., S. 348). Sherin & Fuson glauben, dass auch noch andere Mechanismen einwirken und insbesondere der Strategieeinsatz bei Multiplikationsaufgaben während der Behandlung der Multiplikation hauptsächlich durch das Lernen von „number-specific computational resources“ (ebd.) beeinflusst wird. Das heißt, spezifisches Wissen über Zahlen kann dazu führen, dass der Gebrauch einer neuen Strategie ermöglicht wird oder alte Strategien in neuem Kontext eingesetzt werden können. Rechenstrategien sind nach Sherin & Fuson „patterns in computational activity, viewed at a certain level of abstraction“ (ebd., S. 350). Aus ihrer Sicht ist eine Rechenstrategie nicht als „knowledge (cognitive structures) possessed by individuals“(ebd.) anzusehen, wie das von anderen Forscherinnen und Forschern gesehen wird, sondern „a pattern in the steps taken toward producing a numerical result“ (ebd.). Der Lernfortschritt hängt vom Unterricht und von verschiedenen anderen Faktoren ab, auf die man kaum Einfluss hat, wie Strukturen der Mathematik, Vorwissen der Kinder, allgemeine Fähigkeiten der Kinder usw. Sherin & Fuson gehen jedoch davon aus, dass Faktoren, die sich auf den Lernfortschritt bei Multiplikationsaufgaben auswirken, größtenteils abhängig vom Kontext sind, d. h. dass es bestimmte spezifische Mechanismen gibt, die die Entwicklung des Strategiegebrauchs steuern (ebd.). Einige Forscherinnen und Forscher bringen die Strategieentwicklung bei der Multiplikation in Verbindung mit der

Strategieentwicklung bei der Addition (Anghileri, 1998, zitiert nach Sherin & Fuson, 2005, S. 353); andere gehen von intuitiven Modellen als Ursprung der Strategien aus (Mulligan & Mitchelmore, 1997, S. 309 ff.; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985, S. 3 ff.). Trotz der Unterschiede verbindet diese Forschung die meisten Veränderungen im Strategiegebrauch mit „changes in an underlying conceptualization" (Sherin & Fuson, 2005, S. 353). Im Gegensatz dazu glauben Sherin & Fuson, dass während der Behandlung der Multiplikation „these changes are driven by relatively incremental changes to number-specific computational resources" (ebd., S. 354). Sherin & Fuson nutzen einerseits Ergebnisse anderer Forschungen und andererseits eigene empirische Untersuchungen, die die Durchführung und Analyse von 230 Interviews mit Schülerinnen und Schülern und Beobachtungen im Unterricht beinhaltet. Sie identifizieren „a set of *canonical strategies* that are associated with a particular pattern of use of one or more of these types of number-specific resources" (ebd., S. 356, Hervorheb. i. O). Zusätzlich erkennen sie Variationen dieser Strategien („hybrids", ebd.) und es existieren auch Variationen innerhalb einer Strategie. Sie unterscheiden eine große Vielzahl von Strategien:

- Count-all [Alle Elemente werden auf unterschiedliche Weisen und mit verschiedenen Hilfsmitteln (Zeichnung, Finger ...) gezählt]
  - Count after drawing – semi-situational drawing
  - Count after drawing – math drawing
  - Count-all with fingers
  - Rhythmic counting with fingers
- Additive calculation [Additive Rechenstrategien]
  - Repeated addition
  - Collapse groups and add
- Count-by [Nennen der Einmaleinreihe (z. B. 7, 14, 21)]
  - Count-by with full drawing
  - Count-by with written groups
  - Count-by using fingers
- Pattern-based [Schnelle Findung der Lösung durch Anwendung von bestimmtem Wissen]
  - 0's rule, 1's rule, 10's rule
  - 9's finger technique
- Learned products [Schnelle Findung der Lösung ohne sichtbare Verwendung von Zeichnungen oder Fingern und]
- Hybrids [Mischformen der oben genannten Strategien]
  - Count-by + count-all
  - Learned product + count-all
  - Learned product + additive calculation
  - Split factor + learned product + additive calculation (ebd., S. 358 ff.)

Obwohl der Strategiegebrauch bei den Kindern sehr variieren kann, ist dennoch eine Entwicklung von der Nutzung von Zählstrategien bis hin zum Wissen der Ergebnisse zu beobachten. Schülerinnen und Schüler verwenden jeweils nicht nur eine Strategie, sondern verschiedenste Strategien; dies ist bis ins Erwachsenenalter beobachtbar. Die Nutzung einer Strategie variiert mit dem Wert der Faktoren. Beispielsweise fallen den Schülerinnen und Schülern Aufgaben mit kleineren Zahlenwerten, die Quadrataufgaben und Aufgaben, die 5 als einen Faktor enthalten, leichter und diese werden häufiger mit der Strategie *Learned product* gelöst. Es treten außerdem Strategievarianten auf, was auch von den Aufgabenmerkmalen abhängt. Bestimmte Bestandteile des Strategiegebrauchs sind universell, andere werden aber auch durch kulturelle Einflüsse und den Unterricht beeinflusst (ebd., S. 377 ff.).

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass während und nach der Behandlung der Multiplikation bei Kindern verschiedenste Lösungsstrategien für Multiplikationsaufgaben festgestellt werden (Ter Heege, 1985; Ruwisch, 1999; Sherin and Fuson, 2005). Es werden zum Teil unterschiedliche Zählstrategien, additive Strategien, Strategien, die verschiedene Eigenschaften der Multiplikation nutzen, Anwendung von Wissen von Einmaleinssätzen und Mischformen identifiziert. Die Nutzung von Strategien, die Eigenschaften der Operation anwenden, wird in den verschiedenen Untersuchungen zwar festgestellt, jedoch nutzen die Kinder vielfach auch ineffektivere Strategien wie Zählstrategien oder wiederholtes Addieren. Zum damaligen Zeitpunkt der Studien liegt der Schwerpunkt des Unterrichts noch sehr stark auf dem Auswendiglernen der Einmaleinsreihen. Es wird demnach im Unterricht eine stärkere Betonung der Verwendung von entsprechenden Strategien empfohlen (Ter Heege, 1985, S. 385 f.; Ruwisch, 1999, S. 254). Zur Entwicklung eines umfassenden Multiplikativen Verständnisses ist somit auch die Förderung des Verständnisses der Eigenschaften von Bedeutung, da dies für die verständige Verwendung von Strategien, die Beziehungen nutzen, notwendig ist.

4.2.5 Traditionelle versus ganzheitliche Behandlung der Multiplikation

Grundsätzlich können zwei unterschiedliche Wege genannt werden, wie die Multiplikation und speziell die Einführung des Einmaleins im Unterricht behandelt wird.

Traditionell war es allgemein üblich, die Einmaleinsreihen isoliert, teilweise mit verschiedenen Materialien, zur Veranschaulichung zu behandeln (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 31; Padberg & Benz, 2011, S. 139). Die Reihen sollten so nacheinander eingeprägt werden.

Die zweite Möglichkeit besteht darin, alle Multiplikationsaufgaben von Anfang an *ganzheitlich* mit Anschauungsmitteln zu bearbeiten (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 31; Padberg & Benz, 2011, S. 138 f.). Hier geht es um die Betonung der Anwendung verschiedener Rechenstrategien. Die einzelnen Einmaleinsreihen werden dabei nicht isoliert in den Blick genommen (Wittmann & Müller, 2010, S. 110). Genauere Erläuterungen zu dieser Vorgehensweise sind in Kapitel 4.2.8 zu finden. Verschiedene Studien haben sich mit der Wirkung unterschiedlicher Vorgehensweisen der Behandlung des Einmaleins beschäftigt, auf ausgewählte Untersuchungen wird im Folgenden eingegangen.

4.2.5.1 Befunde zum Vergleich von traditionellem und ganzheitlichem Vorgehen

Woodward (2006) vergleicht in seiner Studie „an integrated approach (i. e., strategies and timed practice drills) with timed practice drills only for teaching multiplication facts“ (S. 269). Die Untersuchung ist vor dem Hintergrund zu betrachten, dass in der Literatur mindestens zwei allgemeine Konzepte zur Automatisierung der Einmaleinssätze existieren. Die eine Vorgehensweise basiert auf dem Gebrauch von Strategien, die andere betont lediglich zeitlich festgelegtes Training der Einmaleinssätze (ebd., S. 269). In Woodwards Studie nehmen Kinder der vierten Klasse mit und ohne Lernschwäche in Mathematik teil. Es wird untersucht, ob eine integrierte Vorgehensweise, die sowohl Strategiegebrauch als auch Training der Multiplikationsaufgaben beinhaltet, zur besseren Automatisierung und zu besseren Leistungen bei analogen Multiplikationsaufgaben (gemeint ist z. B. $4 \cdot 2$ wird zu $40 \cdot 2$ und $400 \cdot 2$ usw. erweitert) und bei Überschlagsaufgaben führt, als ein Unterricht, in dem lediglich die Multiplikationssätze trainiert werden (ebd., S. 271). Um Veränderungen feststellen zu können, werden verschiedene Tests teilweise als Pre-, Post- und Follow-up-Test zu allgemeinen arithmetischen Fähigkeiten, einstelligen Multiplikationsaufgaben, analogen Multiplikationsaufgaben, Überschlagsaufgaben sowie Einstellungen zum Fach Mathematik durchgeführt (ebd., S. 278 ff.). Bei eher einfachen Multiplikationsaufgaben schneiden die Kinder in der integrierten Gruppe im Post- und Follow-up-Test besser ab als die Kinder in der Gruppe mit Schwerpunkt auf dem reinen Training der Einmaleinssätze. Die Leistungen von allen Kindern sinken vom Post- zum Follow-up-Test. Am geringsten jedoch ist der Leistungsrückgang bei den Kindern ohne Lernschwäche in der integrierten Gruppe. Bei den schwereren Multiplikationsaufgaben gibt es sichtbare Zuwächse in den Leistungen von Pre- zu Posttest in beiden Gruppen. Die Schülerinnen und Schüler mit Lernschwäche schneiden in beiden Gruppen im Post- und Follow-up-Test deutlich schlechter ab als die Kinder ohne Lernschwäche. Bei den analogen Multiplikationsaufgaben schneiden die Kinder in der integrierten Gruppe im Post-Test insgesamt besser ab. Beim Post-Test zur Berechnung von mehrstelligen Multiplikationsaufgaben zeigen die Kinder in der integrierten Gruppe geringere Leistungen als die Kinder in der anderen Gruppe. Bei Überschlagsrechnungen sind bei den Kindern in der integrierten Gruppe bessere Leistungen als bei den Kindern in der anderen Gruppe feststellbar. Bezüglich der Einstellung zum Fach Mathematik ist in beiden Gruppen sowohl bei Kindern mit und ohne Lernschwäche ein geringer Anstieg in Richtung positiver Einstellung ersichtlich. Die Kinder zeigen bereits im Pre-Test eine relativ positive Einstellung zur Mathematik. Die Schülerinnen und Schüler mit Lernschwäche in der integrierten Gruppe zeigen die stärkste Verbesserung in der Einstellung zur Mathematik (ebd., S. 280 ff.). Insgesamt ist festzustellen, dass beide unterrichtliche Vorgehen den Kindern helfen, zur Automatisierung von Multiplikationsaufgaben zu gelangen. Die Gruppe des integrierten Vorgehens zeigt etwas bessere Ergebnisse bei der Automatisierung von Multiplikationsaufgaben als die Gruppe, in der die Multiplikationsaufgaben lediglich trainiert werden (ebd., S. 285).

Köhler & Gasteiger (2016) untersuchen in ihrer Studie die Strategieverwendung bei Einmaleinsaufgaben durch Interviews mit Kindern in der Mitte des dritten Schuljahrs (S. 545 ff.). Die Kinder werden zur Nutzung ihrer Strategien bei der Lösung von Multiplikationsaufgaben befragt. Die eine Hälfte ihrer der Lehrkräfte, behandelt das Einmaleins ganzheitlich durch Thematisierung der Strategien, die andere Hälfte eher traditionell, d. h. indem die Einmaleinssätze der Reihe nach behandelt und eingeübt werden. Insgesamt zeigen die Kinder verschiedenste Strategien beim Lösen der Multiplikationsaufgaben (ebd., S. 547). Bis Mitte der dritten Klasse scheint die *wiederholte Addition* als Strategie vorherrschend zu sein. Dies zeigt sich insbesondere bei leistungsschwachen Kindern. Die leistungsstärkeren Kinder verwenden vergleichsweise häufiger Strategien, die auf operativen Beziehungen beruhen. Die leistungsstarken und durchschnittlichen Kinder nutzen am häufigsten die Strategie der Nachbaraufgabe (ebd.). Außerdem wird der adaptive Strategieeinsatz untersucht, was bedeutet, dass eine gewählte Strategie bezüglich der Merkmale einer Aufgabe als sinnvolle heuristische Strategie angesehen werden kann. Leistungsschwächere Kinder lösen signifikant weniger Aufgaben korrekt als leistungsstärkere Kinder. Leistungsstärkeren Kindern gelingt der adaptive Strategieeinsatz häufiger als leistungsschwächeren Kindern. „Durchschnittlich verfügten leistungsschwache Kinder über eine tragfähige Strategie, durchschnittliche über zwei und leistungsstarke über drei verschiedene tragfähige Strategien" (ebd.). Des Weiteren gibt es erste Anzeichen dafür, dass Schülerinnen und Schüler, die eine ganzheitliche Behandlung des Einmaleins erfahren haben, die Strategie der *wiederholten Addition* einsetzen seltener als Kinder im traditionellen Unterricht (Köhler, 2015, S. 73). Leistungsschwache Schülerinnen und Schüler nutzen seltener Strategien auf Basis von Beziehungen, die *wiederholte Addition* vergleichsweise deutlich häufiger (ebd.).

4.2.5.2 Befunde zum produktiven Lernen und zur Fokussierung auf Ableitungsstrategien

Selters (1994) Unterrichtsversuch in der zweiten Klasse zur Multiplikation und Division wird vor dem Hintergrund des *produktiven Lernens* durchgeführt, d. h. die Kinder erhalten die Möglichkeit, durch *Eigenproduktionen* wie z. B. Texte, Zeichnungen oder Rechenwege die Lehr- und Lernprozesse mitzugestalten. Der Unterrichtsversuch orientiert sich an folgenden Leitideen: „Durchgehend ganzheitliche Behandlung", „Orientierung am Vorverständnis", „Fortschreitende Mathematisierung", „Produktives Üben", „Beschränkung auf grundlegende ‚didaktische Hilfen'" (ebd., S. 92 ff.).

Die Ergebnisse der Untersuchung machen deutlich, dass die allgemeinen Lernziele wie Argumentieren, Kommunizieren und Kreativität gefördert werden können (ebd., S. 280), ohne dabei die inhaltlichen Lernziele wie Wissenselemente, Fähigkeiten und Fertigkeiten im multiplikativen Rechnen zu vernachlässigen (ebd., S. 280 f.). Weiter zeigt sich, dass alle Schülerinnen und Schüler „jeden Leistungsniveaus von der offenen Lernumgebung profitieren" (ebd., S. 281) können. Nach anfänglichen Schwierigkeiten können die Kinder die Freiheit, die sie durch die Eigenproduktionen erhalten, produktiv nutzen (ebd., S. 282).

Bezüglich der Leitideen kann Folgendes festgestellt werden: Das Einmaleins wird „durchgehend ganzheitlich" (ebd., S. 185) behandelt und die Kinder können Beziehungen zwischen den Aufgaben nutzen, um Ergebnisse zu ermitteln und sich einzuprägen. Die Orientierung am Vorverständnis findet während des gesamten Unterrichtsversuchs statt. Dabei zeigen die Kinder nicht nur die *wiederholte Addition*, sondern noch weitere unterschiedlichste Strategien (ebd., S. 286). Es findet insgesamt eine fortschreitende Schematisierung statt, da die Kinder i. d. R. zu immer effizienteren Strategien wechseln. Es gibt Kinder, die länger bei einer umständlicheren Vorgehensweise verweilen. Automatisierendes Üben wird nur in drei von 50 Unterrichtsstunden durchgeführt. Dem gestützten und strukturierten Üben wird mehr Zeit eingeräumt. Die eingesetzten Darstellungen beschränken sich auf einige ausgewählte. Einige Kinder setzen „das lineare Modell in Form von gegliederten Punktreihen oder das Rechtecksmodell in Form von Punktmustern" (ebd., S. 287) als informelle Strategie ein, ohne es bereits zu kennen. Leistungsstärkere Kinder arbeiten nach der Einführung dieser Darstellungen auf symbolischer Ebene, können die Darstellungen aber z. B. für Erklärungen heranziehen. Leistungsschwächere Kinder setzen die Darstellungen über längere Zeit als „Lösungshilfe" ein (ebd., S. 287).

Eine Studie von Gaidoschik et al. (2017) zur *Nutzung von Ableitungsstrategien bei der Multiplikation* zeigt erste Ergebnisse insbesondere mit Blick auf leistungsschwache Kinder. In der Untersuchung soll zum einen herausgefunden werden, wie Kinder am Ende der dritten Klasse Multiplikationsaufgaben lösen, nachdem sie einen Unterricht erhalten haben, der konsequent auf Ableitungsstrategien fokussiert (ebd., S. 348). Zum anderen soll festgestellt werden, wie rechenschwache Kinder mit dem Unterrichtsdesign zurechtkommen. Der Unterricht der teilnehmenden Klassen wird durch die Lehrkräfte nach bestimmten Hauptideen durchgeführt (ebd., S. 348 f.):

- Es werden Grundlagen vermittelt, um die Strategien anwenden zu können (Verdoppeln/Halbieren von zweistelligen Zahlen, flüssiges Addieren/Subtrahieren) (ebd.).
- Verständnis für Multiplikation mit ihren Eigenschaften, insbesondere Kommutativität und Distributivität, soll entwickelt werden (ebd.).
- Übersetzungsprozesse zwischen mathematischer Symbolform und anderen Darstellungen (Punktefelder, Bilder gleichmächtiger Mengen, Sachsituationen) sollen gefördert werden (ebd.).
- Das Halbieren und Verdoppeln wird wiederholt (ebd.).
- Die Ableitung von Aufgaben der 10er-Reihe zu Aufgaben der 5er-Reihe wird durch Halbieren behandelt (ebd.).
- Die Nutzung von Ableitungsstrategien zur Lösung von Multiplikationsaufgaben wird thematisiert. Die Kinder werden ermutigt, eigene Strategien zu finden, gefundene Strategien werden diskutiert und verglichen (ebd.).
- Mit den Kindern werden Interviews zur Lösung von Multiplikationsaufgaben durchgeführt (ebd.).

Identifiziert werden drei Haupttypen: A-„Masters“ (diese Kinder lösen Aufgaben richtig und meist unmittelbar; 19 von 48 Kindern), B-„Experienced users of derived facts strategies with limited fact mastery“ (15 bis 20 Kinder, fünf Kinder sind zwischen Typ A und B) und C-„Users of derived facts strategies with limited fact mastery“ (sechs von 48 Kindern) (ebd., S. 350). Drei Kinder passen in keine Kategorie. Von den 16 Kindern, die als leistungsschwach eingestuft werden, sind drei Typ A, sechs Typ B und ein Kind zwischen A und B. Sechs Kinder können Typ C zugeordnet werden und zwei werden keinem Typ zugeordnet. Alle 48 Kinder können im Interview beschreiben, was $3 \cdot 5$ bedeutet und dies mit entsprechendem Material darstellen. Auch die leistungsschwachen Kinder scheinen eine Ahnung davon zu haben, von bekannten Einmaleinsaufgaben weitere Einmaleinsaufgaben abzuleiten.

Insgesamt führt der Unterricht mit Fokus auf die Ableitung von Strategien und die Kombination von entdeckendem Lernen und direkter Behandlung von Ableitungsstrategien zu zufriedenstellenden Ergebnissen bei allen Kindern, insbesondere auch bei leistungsschwächeren. Dennoch verbleiben Kinder, die Schwierigkeiten bei der Multiplikation und in weiteren Bereichen der Arithmetik zeigen. Deswegen ist ein weiterer Durchgang des Untersuchungsdesigns geplant. Es sollen Kinder mit Schwierigkeiten in arithmetischen Teilbereichen, die Voraussetzung für die Multiplikation sind, noch besser gefördert werden (ebd., S. 352 f.).

4.2.6 Multiplikation in Bildungsstandards und Lehrplan

Die Bedeutung der Anwendung von Strategien bei der Behandlung des Einmaleins ist auch in Bildungsstandards und Lehrplan wiederzufinden.

In den Bildungsstandards für das Fach Mathematik in Grundschulen in Deutschland lässt sich der Themenbereich des kleinen Einmaleins der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz „Zahlen und Operationen" (KMK, 2005, S. 5) zuordnen. Am Ende der vierten Jahrgangsstufe sollen die Schülerinnen und Schüler „Rechenoperationen verstehen und beherrschen" (ebd.). Bezogen auf das kleine Einmaleins beinhaltet dies, dass die Schülerinnen und Schüler „die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen" (ebd.) und „die Grundaufgaben des Kopfrechnens ([...] Einmaleins [...]) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen" (ebd.). Sie sollen weiter „mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden" (ebd.) und „Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen" (ebd.).

Da das Projekt in Grundschulen in Bayern durchgeführt wird, wird der Lehrplan dieses Bundeslandes genauer in den Blick genommen. Der Lehrplan für die bayerische Grundschule (LehrplanPLUS) sieht vor, dass die Kinder der Multiplikation „verschiedene Handlungen und Sachsituationen" zuordnen „und umgekehrt" (BY, 2014, S. 275). Dabei wird explizit erwähnt, dass „Multiplikation als zeitlich-sukzessives Vervielfachen oder räumlich-simultane Gegebenheit" (ebd.) angesehen werden soll. Zudem werden die Einmaleinsaufgaben explizit in Kernaufgaben und andere unterschieden. Die Schülerinnen und Schüler „wenden Kernaufgaben des kleinen Einmaleins (Einmaleinssätze mit 1, 2, 5, 10 und die Quadratsätze), deren Umkehrungen (z. B. $14 : 7 = 2$ oder $14 : 2 = 7$ als Umkehrungen von $2 \cdot 7 = 14$) sowie Malaufgaben mit 0 automatisiert und flexibel an" (ebd., S. 276). Sie sollen „die Kernaufgaben des kleinen Einmaleins (Einmaleinssätze mit 1, 2, 5, 10 und die Quadratsätze) zur Lösung weiterer Aufgaben (z. B. $9 \cdot 8 \rightarrow 9 \cdot 8 = 10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 \rightarrow 9 \cdot 8 = 80 - 8 = 72$)" (ebd.) nutzen. Sie „nutzen Rechenstrategien ([...] Umkehr- und Tauschaufgaben, analoge Aufgaben, Nachbaraufgaben) [...] im Zahlenraum bis 100, vergleichen sowie bewerten Rechenwege und begründen ihre Vorgehensweisen" (ebd.). Sie „erkennen, beschreiben und entwickeln arithmetische Muster (z. B. fortgesetzte Addition einer Zahl, gleich- und gegensinniges Verändern) und setzen diese folgerichtig fort“ (ebd.).

Erst für die Jahrgangsstufen 3/4 sieht der Lehrplan vor, dass die Schülerinnen und Schüler „die Zahlensätze des kleinen Einmaleins sowie deren Umkehrungen (z. B. $42 : 7 = 6$ oder $42 : 6 = 7$ als Umkehrungen von $6 \cdot 7 = 42$) automatisiert und flexibel“ (ebd., S. 282) anwenden. Sie sollen außerdem „auch beim Kopfrechnen, ihre Kenntnisse zu den Zahlensätzen des kleinen Einmaleins [...] in größere Zahlenräume (z. B. $6 \cdot 4 = 24 \rightarrow 60 \cdot 4 = 240$[...])“ (ebd.) übertragen und „dabei die Fachbegriffe [...] *multiplizieren, dividieren*“ (ebd., Hervorh. i. O.) verwenden.

Bis zum Ende der zweiten Klasse sollen also die Kernaufgaben des Einmaleins automatisiert angewandt und Strategien zur Herleitung weiterer Aufgaben erlernt werden. Erst in der dritten Jahrgangsstufe sollen alle Einmaleinsreihen automatisiert und flexibel angewandt werden. Diese Vorgehensweise sah auch bereits der Lehrplan vor, der 2000 in Kraft trat (BY, 2000, S. 111, S. 207).

4.2.7 Zwischenfazit

In verschiedenen Studien werden intuitive Vorstellungen identifiziert, die auf das Lösen von Multiplikationsaufgaben möglicherweise Einfluss haben (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Kinder haben bereits bestimmte Vorstellungen zur Multiplikation, bevor das Thema in der Schule behandelt wird (Bönig, 1995a, 1995b; Mulligan & Mitchelmore, 1997). Übereinstimmend wird die *wiederholte Addition* als intuitive Vorstellung ausgemacht (Bönig, 1995a, 1995b; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997; vgl. Kap. 4.2.1). Daher ist diese für die Konzeption eines Förderkonzepts zum Multiplikativen Verständnis ein wesentlicher Bestandteil.

Dem Konzept der *Grundvorstellungen* folgend sind für die didaktische Leitlinie die Definitionen der *wiederholten Addition* und des *kartesischen Produkts* als Grundvorstellungen sowie die zugehörigen Eigenschaften der Multiplikation relevant. Um individuelle Erklärungsmodelle möglichst passend zu den mathematischen Ideen zu entwickeln, sollten zu diesen Grundvorstellungen entsprechende Lernangebote ausgewählt werden (vom Hofe, 1992, S. 346 f.; vom Hofe & Blum, 2016, S. 231 f.; vgl. Kap. 4.2.2). Für die Konzeption eines Förderkonzepts zum Multiplikativen Verständnis sind somit die Grundvorstellungen der Multiplikation sowie die Eigenschaften der Multiplikation entscheidend.

Da Entwicklung von Verständnis für mathematische Inhalte eng mit dem Wechsel von Darstellungsformen verknüpft ist, ist für die Konzeption des Förderkonzepts der Einsatz von verschiedenen Darstellungsformen entscheidend.

Für diese Arbeit erfolgt die Unterscheidung nach Kontextbezug, didaktischem Material und Symbolform. Zudem erscheint es sinnvoll, nach zugrunde liegender Grundvorstellung, nämlich *wiederholter Addition* und *kartesischem Produkt* (im Sinne einer Matrix mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten) zu unterscheiden (vgl. Kap. 4.2.3).

Sowohl während als auch nach der Behandlung der Multiplikation werden bei Kindern verschiedenste Lösungsstrategien für Multiplikationsaufgaben festgestellt (Ter Heege, 1985; Ruwisch, 1999; Sherin and Fuson, 2005). Darunter treten auch Strategien auf, die auf der Anwendung der Eigenschaften der Operation basieren. Jedoch werden sehr häufig verschiedene weniger effektive Strategien, wie Zählstrategien und wiederholtes Addieren identifiziert. Zum Zeitpunkt der Studien lag der Schwerpunkt des Unterrichts noch stark auf Auswendiglernen der Einmaleinsreihen, so dass eine stärkere Betonung des Strategieeinsatzes empfohlen wird (Ter Heege, 1985, S. 385 f.; Ruwisch, 1999, S. 254; vgl. Kap. 4.2.4). Um ein umfassendes Multiplikatives Verständnis zu entwickeln ist somit die Förderung des Verständnisses der Eigenschaften von Bedeutung, damit auf deren Grundlage Strategien sinnvoll genutzt werden können.

Die aktuelle Forschungslage zeigt ebenfalls, dass sowohl leistungsstarke als auch rechenschwache Schülerinnen und Schüler von einer ganzheitlichen Behandlung der Multiplikation mit Anschauungsmitteln und Betonung der Anwendung von Strategien profitieren (Gaidoschik et al., 2017; Köhler, 2015; Köhler & Gasteiger, 2016; Woodward, 2006; Selter, 1994). Schülerinnen und Schüler im ganzheitlichen Unterricht scheinen seltener die *wiederholte Addition* zu gebrauchen als Kinder im traditionellen Unterricht (Köhler, 2015). rechenschwache Schülerinnen und Schüler verwenden vergleichsweise deutlich häufiger die *wiederholte Addition* und seltener Strategien auf Grundlage von Beziehungen (ebd.; vgl. Kap. 4.2.5). Diese Forschungsergebnisse weisen darauf hin, dass die Thematisierung von beziehungsreichen Strategien bei allen Kindern, insbesondere auch bei rechenschwachen Kindern positive Wirkungen erzielen können. Die Förderung des Verständnisses der Eigenschaften der Multiplikation, insbesondere der Kommutativität und Distributivität, die dann eine Grundlage für die Nutzung von beziehungsreichen Strategien bilden können, spielt deswegen besonders auch für leistungsschwache Kinder eine wichtige Rolle.

Den Bildungsstandards für das Fach Mathematik an Grundschulen in Deutschland entsprechend sollen die Kinder zum Ende des vierten Schuljahres die Operation Multiplikation „verstehen und beherrschen" (KMK, 2005, S. 5), Zusammenhänge der Grundrechenarten erkennen, sowie „Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen" (ebd.). Laut aktuellem Lehrplan für die bayerische Grundschule (LehrplanPLUS) sollen in der zweiten Jahrgangsstufe zunächst die Kernaufgaben thematisiert und von diesen ausgehend die übrigen Einmaleinsaufgaben unter Verwendung von Strategien abgeleitet werden (BY, 2014, S. 275 f.). Erst ab der dritten Klasse sollen alle Einmaleinssätze automatisiert werden (ebd., S. 276; vgl. Kap. 4.2.6).

Unter Berücksichtigung dieser gewonnenen Erkenntnisse soll im folgenden Abschnitt beschrieben werden, welche Vorgehensweisen zur Behandlung der Multiplikation in der Grundschule aus aktueller didaktischer Perspektive sinnvoll erscheinen.

4.2.8 Überlegungen zur Behandlung der Multiplikation nach aktuellem Forschungsstand

Die Veränderung von einer traditionellen hin zu einer ganzheitlichen Behandlung der Multiplikation geht einher mit einem generellen Paradigmenwechsel, der sich im Mathematikunterricht seit Mitte der 1980er Jahre vollzog. Im traditionellen Unterricht „dominieren Belehrung, Kleinschrittigkeit bzw. der systematische Aufbau der Lerninhalte, verbunden mit einer extensiven Übungspraxis“ (Krauthausen & Scherer, 2008, S. 112), orientiert am Behaviorismus. Diese behavioristische Sichtweise wurde, geprägt durch den Konstruktivismus, vom „Prinzip des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens“ abgelöst (ebd., S. 112). Heute herrscht ein breiter Konsens darüber, dass Elemente aus beiden Wegen, nämlich traditionellen und ganzheitlichen Vorgehensweisen, im Unterricht zur Anwendung kommen sollten (Padberg & Benz, 2011, S. 139).

Zunächst werden die sog. Kernaufgaben (Kernreihen, Stützpunktaufgaben, Königsaufgaben, ...) mit Anschauungsmaterialien erarbeitet. Dies sind die Einser-Zweier-, Fünfer- und Zehnerreihe und meist zusätzlich noch die entsprechenden Quadratzahlen (Padberg & Benz, 2011, S. 142). Danach werden die Strategien erarbeitet, die die Kinder befähigen sollen, sich die übrigen Einmaleinsaufgaben herzuleiten. Es ist somit einerseits von großer Bedeutung, „den Charakter und die Eigenschaften der Operationen herauszuarbeiten sowie die operativen Beziehungen zwischen den Aufgaben zu verstehen und bewusst zu nutzen“ (Schipper, 2009, S. 154). Es geht also in erster Linie um „ein Lernen mit Verständnis“ (ebd., S. 154). Andererseits wird die Reihenfolge, in der die Einmaleinsreihen im Unterricht behandelt werden sollen, durch die Idee der Herstellung von Beziehungen zwischen den Aufgaben (ebd., S. 154) bestimmt.

Eine Möglichkeit, die Kernaufgaben zu erarbeiten, ist folgende: Zu Beginn kann die Einserreihe behandelt werden. Da es sich bei 1 um das neutrale Element bezüglich der Multiplikation handelt, verändert sich eine Zahl x nicht, wenn man sie mal 1 nimmt. Somit ist die Einserreihe als ‚leichte‘ Reihe anzusehen. Fortgefahren kann mit der Zweierreihe. Der Gedanke des Verdoppelns ist dabei hilfreich, dessen Verständnis trotz der scheinbaren Einfachheit nicht unterschätzt werden sollte (Rottmann, 2006, S. 1 ff., S. 33). Daraufhin kann die Zehnerreihe erarbeitet werden, welche aufgrund unseres dekadischen Stellenwertsystems ebenfalls ‚leicht' zu lösende Aufgaben beinhaltet. Anschaulich können ‚schnell' z. B. mehrere Zehnerstangen untereinandergelegt oder im Hunderterpunktefeld dargestellt werden, um dann ‚abzulesen', um welche Ergebniszahl es sich handelt. Ausgehend von der Zehnerreihe kann über die Idee des Halbierens die Fünferreihe abgeleitet werden (ebd., S. 33).

Ausgehend von den Kernaufgaben (Einserreihe, Zweierreihe, Fünferreihe, Zehnerreihe) werden dann die übrigen Einmaleinsreihen (Dreierreihe, Viererreihe, Sechserreihe, Siebenerreihe, Achterreihe, Neunerreihe) durch „Verdoppeln, Nachbarschaftsbeziehungen sowie Zerlegen und Zusammensetzen" (Schipper, 2009, S. 154) abgeleitet (siehe Beispiele unten).

„*Verstehen* sollte ein Hauptanliegen des Mathematiklernens sein, was letztlich Selbstvertrauen in die eigenen Leistungen fördern kann" (Scherer, 2007, S. S. 4; Hervorheb. i. O.). Flexibles Rechnen wird als bedeutungsvolles Ziel des Mathematikunterrichts gesehen (ebd., S. 6). Reines Auswendiglernen des Einmaleins „im Sinne des Abspeicherns isolierter Einzelfakten" (ebd.) entspricht nicht mehr dem aktuellen Kenntnisstand der Forschung (Anthony & Knight, 1999, S. 31 ff.). Bedeutsam ist ein ganzheitlicher Zugang zum Einmaleins (z. B. Wittmann & Müller, 2010, S. 110). Es sollte ein grundlegendes Verständnis der Operation und der Beziehungen entwickelt werden (Scherer, 2007, S. 57). „Das flexible Erfassen und Anwenden multiplikativer Situationen und Darstellungen sowie das Ausnutzen von Beziehungen – und dies von Beginn an – stellen dabei aber eine zentrale Voraussetzung dar." (Scherer, 2007, S. 6) Zentral erscheint Scherer die Vernetzung

- verschiedener Operationen, d. h. die Beziehung der Multiplikation zur *wiederholten Addition*
- verschiedener Repräsentationsebenen, d. h. wechselseitige Übersetzungsprozesse zwischen den verschiedenen Repräsentationsebenen, nicht nur einseitig hin zur symbolischen Ebene
- von Aufgaben innerhalb einer Operation, d. h. Verdeutlichung der Beziehungen Kommutativität, Assoziativität und Distributivität (ebd., S. 7 f.)

Daneben sieht Scherer auch die Verdeutlichung der verschiedenen Grundvorstellungen der Multiplikation (vgl. Kap. 4.1.1) als sehr bedeutsam an (Scherer, 2007, S. 8). „Automatisierung ist eine verlässlich erwartbare Folge häufig vollzogener Einsicht" (ebd.). Somit geht es aus Scherers Sicht um „verständnisvolles Verinnerlichen, was auch die Rekonstruktion von Vergessenem ermöglicht" (ebd.). Ebenfalls von wesentlicher Bedeutung ist das „Aufgreifen der individuellen Sichtweisen der Schülerinnen und Schüler“ (ebd.) durch schriftliche Tests oder Interviews (ebd., S. 9 ff.).

Gaidoschik (2014) empfiehlt einen „*konsequent ganzheitliche[n]* Zugang“ (S. 15; Hervorheb. i. O.). Als Ziel wird, wie in anderen Konzepten auch, die Automatisierung des kleinen Einmaleins angesehen (ebd.). Die 121 Einmaleinsaufgaben (die Aufgaben mit 0 mitgerechnet) können unterschiedlich angeordnet werden, in Gaidoschiks Konzept werden sie zum einen „nach Schwierigkeit, sie im Gedächtnis zu behalten“ (ebd.) und zum anderen „nach mathematischen Zusammenhängen angeordnet, die es ermöglichen, sich schwieriger zu merkende Aufgaben mithilfe von leichter zu merkenden Aufgaben zu erschließen“ (ebd., S. 15 f.). Nach Gaidoschik sollen die Aufgaben also nicht Reihe um Reihe behandelt werden, sondern zunächst die Kernaufgaben „quer über das gesamte Einmaleins“ (ebd., S. 17).

Die Vermittlung von folgenden Rechenstrategien spielt im heutigen Mathematikunterricht der Grundschule eine wesentliche Rolle, da durch sie die mathematischen Beziehungen zwischen den Einmaleinsaufgaben entdeckt und genutzt werden können:

- Finden von Tauschaufgaben (z. B.: Tauschaufgabe von $5 \cdot 4$ ist $4 \cdot 5$)
- Finden von Nachbaraufgaben (z. B.: Nachbaraufgabe von $8 \cdot 7$ ist $7 \cdot 7$ bzw. $7 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 8 \cdot 7$)
- Verdoppelung/Halbierung eines Faktors (z. B.: von $2 \cdot 7$ durch $2 \cdot 2 \cdot 7$ auf $4 \cdot 7$ kommen)
- Zerlegen des einen oder anderen Faktors (z. B.: $7 \cdot 6$ lässt sich zerlegen in $5 \cdot 6$ und $2 \cdot 6$, Spezialfall ist das Finden der Nachbaraufgabe)
- Gegensinniges Verändern beider Faktoren (z. B.: $6 \cdot 8 = 12 \cdot 4 = 24 \cdot 2 = 48$) (Padberg & Benz, 2011, S. 141)

Diese Rechenstrategien basieren auf den Eigenschaften der Multiplikation (vgl. 4.1.2), die teilweise auch als Rechengesetze bezeichnet werden (z. B. Padberg & Benz, 2011, S. 134). Mathematische Grundlage für das Finden von Tauschaufgaben ist die Kommutativität, für das Finden von Nachbaraufgaben und für das Zerlegen der Faktoren die Distributivität und für Verdoppelung sowie Halbierung die Assoziativität (Padberg & Benz, 2011, S. 141). Für das gegensinnige Verändern beider Faktoren ist die Konstanz des Produkts Basis, die die Veränderung von Termen durch eine algebraisch neutral wirkende operative Veränderung nutzt (Steinweg, 2013, S. 153).

Durch die *Kommutativität* kann die Anzahl der Einmaleinsaufgaben auf rund die Hälfte reduziert werden (Padberg & Benz, 2011, S. 137). Die Kommutativität kann mithilfe von Punktefeldern deutlich gemacht und damit gleichzeitig auch anschaulich begründet werden. Das Punktefeld kann aus zwei unterschiedlichen Perspektiven betrachtet werden kann (Abb. 4.10).

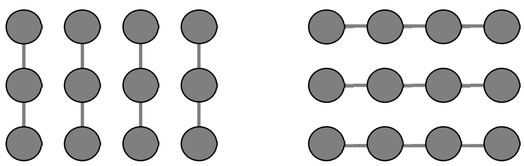


Abbildung 4.10: Punktefelder zu 3 · 4 oder 4 · 3 (z. B. in Anlehnung an Schipper, 2009, S. 150)

Hier werden im Punktefeld links vier Spalten ‚hineingesehen', die jeweils aus drei Punkten bestehen. Rechts werden drei Zeilen deutlich gemacht, die aus jeweils vier Punkten bestehen (Padberg & Benz, 2011, S. 135 f.; Schipper, 2009, S. 150; Steinweg, 2013, S. 132). Dies gilt auch für jede beliebige andere Anzahl an a Zeilen und b Spalten bzw. a Spalten und b Zeilen (für alle natürlichen Zahlen a, b). Die Gesamtzahl der Objekte ändert sich durch die veränderte Perspektive nicht (Steinweg, 2013, S. 132). Je nachdem, welchen Blickwinkel man einnimmt, richtet sich „die Aufmerksamkeit jedoch eher auf die drei Zeilen von je vier Objekten oder auf die vier Spalten von je drei Objekten" (Steinweg, 2013, S. 132).

Für die Darstellung der Kommutativität eignen sich Darstellungen weniger, denen eher die *wiederholte Addition* gleicher Mengen zugrunde liegt. Dies wird in den bildlichen Darstellungen von zwei verschiedenen Kindern der zweiten Jahrgangsstufe zu ihren Lieblingsaufgaben deutlich (Abb. 4.11). Zufällig handelt es sich dabei um die beiden zueinander kommutativen Aufgaben 4 · 5 und 5 · 4. „Die […] zueinander kommutativen Aufgaben […] sind allerdings weder innerhalb des eigenen Kontextes – geschweige denn in Beziehung der beiden Kontexte zueinander – als kommutative Aufgaben erkennbar" (Steinweg, 2013, S. 133).

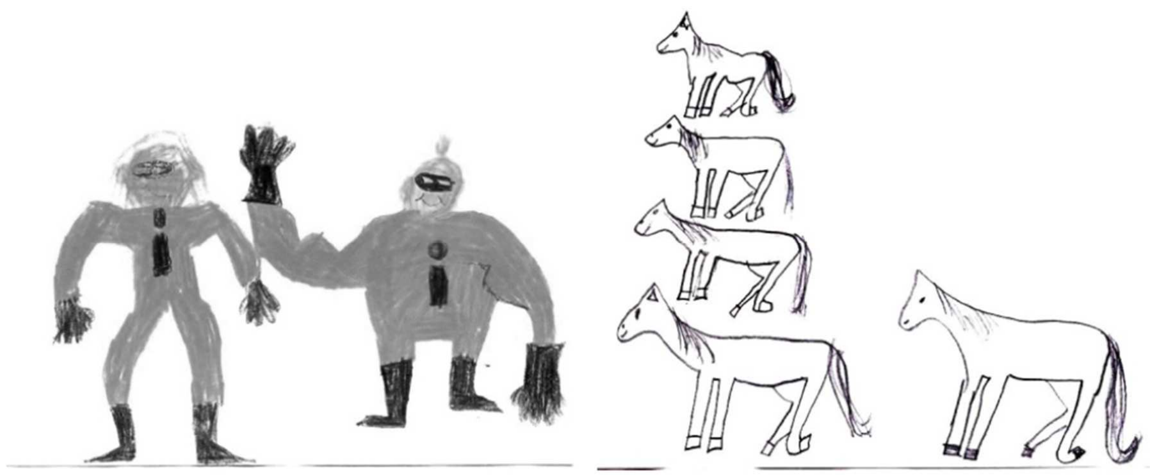


Abbildung 4.11: Darstellungen zweier Kinder zu 4 · 5 Fingern und 5 · 4 Pferdebeinen (Steinweg, 2013, S. 134)

„Unter der Voraussetzung, dass die Kommutativität der Multiplikation bekannt ist, können Punktmusterdarstellungen [...] als erste Anregung dienen, unterschiedliche ‚Zählweisen' bzw. Perspektiven des Hineindeutens von Produkten zu erproben" (Steinweg, 2013, S. 137).

Die *Assoziativität* kann v. a. für die Spezialfälle des Verdoppelns und des Halbierens genutzt und es können so von bereits bekannten weitere Aufgaben abgeleitet werden (Padberg & Benz, 2011, 136; Schipper, 2009, S. 151). Auch für diese Eigenschaften eignen sich Punktefelder zur Begründung und Verdeutlichung (Abb. 4.12).

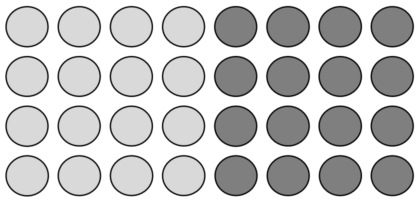


Abbildung 4.12: Punktefeld zu $4 \cdot 8 = 2 \cdot (4 \cdot 4)$

Durch die Farbabstufung kann deutlich gemacht werden, dass z. B. $4 \cdot 8$ zu $2 \cdot (4 \cdot 4)$ äquivalent ist.

Aufgrund der *Distributivität* können Aufgaben in Teilaufgaben zerlegt und von Aufgaben andere Aufgaben abgeleitet werden. Deswegen ist es eine wichtige Fähigkeit, Zerlegungen auf Grundlage dieser Eigenschaft ‚sehen' zu lernen. Die Distributivität kann ebenso durch Punktefelder anschaulich gemacht und begründet werden. Im Beispiel (Abb. 4.13) wird eine mögliche Zerlegung der Aufgabe $4 \cdot 6 = 24$ in $4 \cdot 2 = 8$ und $4 \cdot 4 = 16$ durch die Farbabstufung deutlich (Schipper, 2009, S. 151).

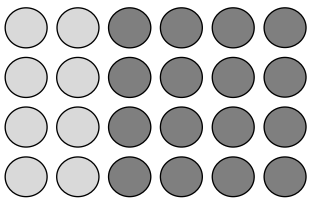


Abbildung 4.13: Punktefeld zu $4 \cdot 6 = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 4$

Weitere Möglichkeiten, in Punktefeldern Assoziativität und Distributivität darzustellen, sind z. B. bei Steinweg (2013, S. 137 ff.) zu finden.

Die *Konstanz des Produkts* ist Grundlage für gegensinniges Verändern beider Faktoren des Produkts, um dadurch weitere Multiplikationsaufgaben abzuleiten. Hierbei wird der eine Faktor des Produkts mit einer Zahl multipliziert und der andere Faktor durch dieselbe Zahl dividiert, um dadurch eine möglicherweise bereits bekannte Multiplikationsaufgabe herzuleiten. Die Konstanz des Produkts kann deutlich gemacht werden, indem ein Punktefeld von $a \cdot b$ zu $(a \cdot c) \cdot (b : c)$ umwandelt wird. In Abbildung 4.14 sieht man das beispielhaft für $3 \cdot 6 = (3 \cdot 3) \cdot (6 : 3) = 9 \cdot 2$ (Müller, Steinbring & Wittmann, 2004, S. 373).

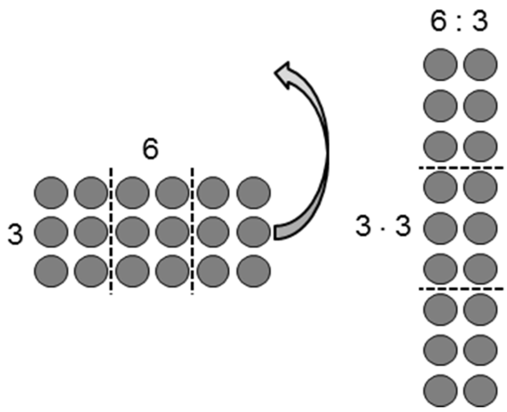


Abbildung 4.14: Punktefelder zu $3 \cdot 6 = (3 \cdot 3) \cdot (6 : 3) = 9 \cdot 2$

In Abbildung 4.15 wird am Beispiel $4 \cdot 8$ deutlich, wie unter Anwendung der Eigenschaften die Einmaleinsaufgaben zueinander in Beziehung stehen.

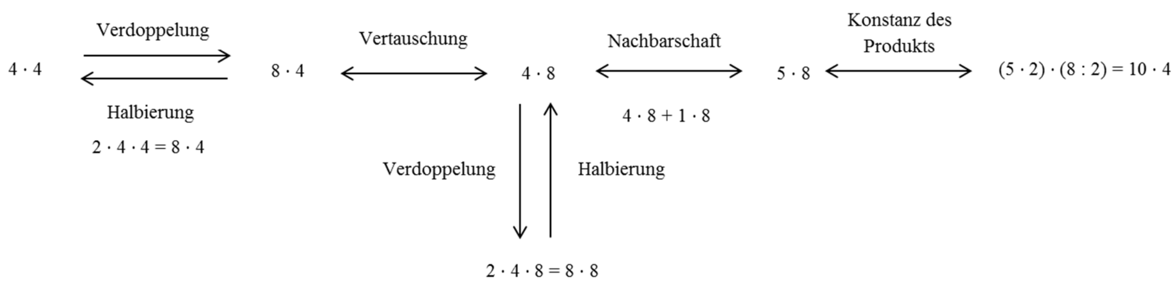


Abbildung 4.15: Beziehungen unter Ausnutzung der Operationseigenschaften zwischen den Einmaleinsaufgaben (in Anlehnung an Schipper, 2009, S. 154 und Radatz et al., 1998, S. 87)

4.3 Eigene Positionierung und Definition zum Multiplikativen Verständnis

Im vorliegenden Kapitel wird Multiplikation zunächst aus mathematischer Perspektive betrachtet, da dies die Grundlage für alle weiteren didaktischen Überlegungen darstellt (vgl. Kap. 4.1). Aus didaktischer Perspektive (vgl. Kap 4.2) soll im Unterricht unter Anknüpfung an intuitiven Vorstellungen (vgl. Kap. 4.2.1) die Entwicklung von Verständnis der Grundvorstellungen der Multiplikation (vgl. Kap. 4.2.2) durch Verwendung von verschiedenen Darstellungsformen (vgl. Kap. 4.2.3) erreicht werden. Aus heutiger Sicht erscheint es sinnvoll, die Multiplikation ganzheitlich zu behandeln und dabei beziehungsreiche Strategien besonders in den Blick zu nehmen (vgl. Kap. 4.2.5 und Kap. 4.2.8). Da Strategien nur auf Grundlage der Eigenschaften der Multiplikation eingesetzt werden können, spielt auch das Verständnis für diese eine wesentliche Rolle (vgl. Kap. 4.2.8).

Ausgehend von diesen Erkenntnissen ergibt sich für die hier vorliegende Arbeit folgende Definition für Multiplikatives Verständnis (Lamprecht, 2015, 2016).

Multiplikatives Verständnis basiert auf ***Grundvorstellungen*** *wesentlicher Aspekte der Multiplikation (wiederholte Addition, kartesisches Produkt) und ermöglicht, Multiplikationsaufgaben in unterschiedlichen* ***Darstellungsformen*** *mithilfe der* ***Eigenschaften der Operation*** *lösen zu können.*

Multiplikatives Verständnis umfasst:

- Verständnis der Kernaufgaben des Einmaleins und spätere Automatisierung
- Verständnis von Ableitungsstrategien aufgrund der Eigenschaften der Operation und spätere Automatisierung des gesamten Einmaleins
- Verständnis der Übersetzung von Darstellungen mit Kontextbezug in die Symbolform und umgekehrt
- Verständnis der Übersetzung von Darstellungen mit didaktischem Material und umgekehrt

5 Forschungsfragen

In den Verträgen und Forderungen auf völkerrechtlicher Ebene bis hin zu curricularen Vorgaben für bayerische Grundschulen wird die Einbeziehung von Menschen mit Behinderung in der Regelschule gefordert, sodass es zu einer Zunahme an Heterogenität im Unterricht kommt. Empirische Befunde deuten darauf hin, dass sich integrativer Unterricht im Vergleich zu Beschulung in Förderklassen keinesfalls negativ auf die Schulleistungen nicht beeinträchtigter Kinder auswirkt und Unterricht in Förderklassen teilweise sogar einen negativen Einfluss auf die Schulleistungsentwicklung von Kindern mit Förderbedarf hat. Aktuelle Statistiken zeigen, dass bisher erst sehr wenige Kinder mit Förderbedarf in Regelschulen unterrichtet werden. Es wird ein Paradigmenwechsel im Schulsystem gefordert, damit Inklusion vollständig gelingen kann. Zur didaktischen Umsetzung von gemeinsamem Unterricht gibt es aus pädagogischer Perspektive bereits Ideen, die möglichweise in mathematikdidaktische Überlegungen einfließen können. In dieser Arbeit wird auf die Heterogenitätsdimension mathematische Fähigkeit und dabei insbesondere auf Rechenschwäche fokussiert (vgl. Kap. 2).

Die identifizierten Merkmale von Rechenschwäche sollten bei der Entwicklung von Förderkonzepten Berücksichtigung finden. Es existieren verschiedene Ansätze, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen gefördert werden können. Aus mathematikdidaktischer Perspektive wird natürliche Differenzierung empfohlen, bei der alle Kinder an einer gemeinsamen Aufgabenstellung auf unterschiedlichen Niveaus arbeiten. Forschungsbefunde zeigen, dass dies auch in Förderklassen gelingen kann, sie beziehen sich jedoch eher auf Förderung im additiven Bereich. Es besteht ein Forschungsdesiderat in Bezug auf Förderung im multiplikativen Bereich, an das die vorliegende Arbeit anknüpft (vgl. Kap. 3).

Multiplikation wird deswegen sowohl aus mathematischer als auch aus mathematikdidaktischer Perspektive betrachtet. Definitionen und Eigenschaften der Operation sind hier von Bedeutung. Aus didaktischer Perspektive sind das Konzept der Grundvorstellungen und der Einsatz von Darstellungsformen und deren wechselseitige Übersetzung von wesentlicher Bedeutung. Es wird empfohlen, ausgehend von den Kernaufgaben die übrigen Einmaleinsreihen mithilfe von Strategien abzuleiten. Dabei spielt die Entwicklung von Verständnis der Grundvorstellungen *wiederholte Addition* und *kartesisches Produkt* sowie der Eigenschaften von Multiplikation eine wesentliche Rolle (vgl. Kap. 4).

Auf Basis der aufgearbeiteten theoretischen Überlegungen ergibt sich für die vorliegende Arbeit folgende erste Hauptforschungsfrage:

I. Welche Antworten kann der Mathematikunterricht der Grundschule auf die Inklusionsforderung im Inhaltsbereich Multiplikation anbieten?

Grundsätzlich sind unterschiedliche Förderszenarien denkbar. In dieser Arbeit werden als differente Interventionssettings *Einzelförderung* und *Förderung im Klassenverband* eingesetzt. Somit ergibt sich folgende zweite Hauptforschungsfrage:

II. Welche Effekte zeigen differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses?

Für den *quantitativen* Teil der Arbeit stehen zu verschiedenen Analysekategorien (vgl. Kap. 6.3.2) unterschiedliche Forschungsfragen im Mittelpunkt. Zur Beantwortung der Forschungsfragen werden Hypothesen formuliert und statistisch überprüft.

Forschungsfragen zur Auswertungskategorie *Angemessenheit*:

I. Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Angemessenheit* der Bearbeitung bei *allen* beteiligten Kindern?

II. Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Angemessenheit* der Bearbeitung bei den Kindern *mit Förderbedarf*?

Hypothesen zur Auswertungskategorie *Angemessenheit*:

H1: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

> H01: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *angemessen* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H2: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0₂: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *angemessen* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H3: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0₃: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *angemessen* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H4: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0₄: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *angemessen* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

Forschungsfragen zur Auswertungskategorie *Grundvorstellungen*:

I. Wie spiegelt sich die in einer Aufgabenstellung zugrunde gelegte *Grundvorstellung* in der von den Kindern genutzten *Grundvorstellung* wider?

II. Unterscheiden sich die *Grundvorstellungen*, die in den Bearbeitungen *aller* Kinder in den verschiedenen Settings der Erprobung auftreten?

III. Unterscheiden sich die *Grundvorstellungen*, die in den Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* auftreten?

Hypothesen zu den Forschungsfragen II und III zur Auswertungskategorie *Grundvorstellungen*:

H1: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0₁: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H2: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0$_2$: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H3: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0$_3$: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H4: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0$_4$: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

Forschungsfragen zur Auswertungskategorie *Ergebnisrichtigkeit*:

I. Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Richtigkeit des Ergebnisses* bei *allen* beteiligten Kindern?

II. Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Richtigkeit des Ergebnisses* bei den Kindern *mit Förderbedarf*?

Hypothesen zur Auswertungskategorie *Ergebnisrichtigkeit*:

H1: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H0$_1$: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H2: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

$H0_2$: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H3: Die acht Kinder *mit Förderbedarf* in Setting A *Einzelförderung* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

$H0_3$: Die acht Kinder *mit Förderbedarf* in Setting A *Einzelförderung* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H4: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

$H0_4$: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

Für den *qualitativen* Teil der Arbeit liegt der Schwerpunkt auf folgender Forschungsfrage:

Wie wird das Förderangebot bezüglich des Erkennens und der Nutzung der Eigenschaft Distributivität von den Kindern angenommen?

6 Methodische Überlegungen

In der Untersuchung der vorliegenden Arbeit wird in der Intervention ein Konzept zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses eingesetzt. Um das Konzept zur Förderung zu evaluieren, sollen mithilfe von Pre-, Post- und Follow-up-Tests Veränderungen im Verhalten der Kinder vor und nach der Intervention festgestellt werden. Damit ist die Untersuchung der Interventions- und Evaluationsforschung zuzuordnen.

Die Interventionsforschung beschäftigt sich mit „der Entwicklung und Überprüfung von Theorien, die auf Techniken der zielgerichteten Veränderung von Sachverhalten abzielen" (Döring & Bortz, 2016, S. 977).

Die Evaluationsforschung hingegen „befasst sich mit der wissenschaftlich fundierten Bewertung von Sachverhalten und insbesondere von Interventionsmaßnahmen hinsichtlich verschiedener Bewertungskriterien, wie etwa Effektivität, Effizienz, Akzeptanz oder Nachhaltigkeit" (ebd.). Ergebnisse der Evaluationsforschung sollen die evaluierte Intervention verbessern und es ermöglichen, „über die Nutzung oder Nichtnutzung bzw. Weiterführung einer Intervention" (ebd.) zu entscheiden. Evaluationsforschung hat verschiedene Ziele und Funktionen. Sie soll „wissenschaftliche Erkenntnisse über die Eigenschaften und Wirkungen von Evaluationsgegenständen [...] sammeln" (ebd., S. 987) (*Erkenntnisfunktion*). Während der Evaluation sollen bei den Beteiligten Lernprozesse und Dialoge zwischen den Anspruchsgruppen stattfinden (*Lern- und Dialogfunktion*). Die *Optimierungsfunktion* bezieht sich darauf, dass die Evaluation Erkenntnisse zur Verbesserung liefern soll. Die Verbesserungshinweise werden fortlaufend oder am Ende den Verantwortlichen mitgeteilt (ebd.). Die Evaluationsergebnisse müssen zu klaren Empfehlungen für die Praxis zusammengefasst werden, damit die *Entscheidungsfunktion* erfüllt ist. Dabei spielen Entscheidungen zwischen verschiedenen Maßnahmen oder auch Entscheidungen für oder gegen die Weiterführung einer Maßnahme eine Rolle (ebd.). Bei der *Legitimationsfunktion* geht es darum, die Legitimation einer Intervention durch die Ausführung der Evaluationsforschung zu erreichen (ebd.). Wenn die Entwicklung einer Maßnahme und deren Evaluation von derselben Person übernommen wird, handelt es sich um eine interne Evaluation (ebd., S. 989). Dies ist in der vorliegenden Arbeit der Fall.

Da sowohl Methoden qualitativer als auch quantitativer Forschungsansätze kombiniert werden, ist die hier beschriebene Untersuchung in einem Mixed-Methods-Design geplant (Döring & Bortz, 2016, S. 184; Hussy, Schreier & Echterhoff, 2013, S. 290). Typischerweise werden dabei „nacheinander oder gleichzeitig qualitative und quantitative Teilstudien durchgeführt. Die Teilstudien stehen dabei jedoch nicht unabhängig nebeneinander, sondern sind direkt aufeinander bezogen“ (ebd.). Dabei können qualitative und quantitative Verfahren sowohl in der Phase der Datenerhebung als auch in der Phase der Auswertung kombiniert werden (ebd., S. 291). Da unterschiedliche Methoden aus qualitativen und quantitativen Forschungsansätzen bereits in der Erhebung zum Einsatz kommen, spricht man zusätzlich von Triangulation (ebd., S. 288 ff.).

Im folgenden Kapitel werden die in der Erhebung (vgl. Kap. 6.1), Intervention (vgl. Kap. 6.2) und Auswertung (vgl. Kap. 6.3) verwendeten Methoden der hier beschriebenen Mixed-Methods-Studie vorgestellt.

6.1 Erhebung

„Alle diagnostischen Verfahren gehen davon aus, dass Unterschiede bestehen und diese gemessen werden können“ (Amelang & Schmidt-Atzert, 2006, S. 26). Dies können Unterschiede z. B. „zwischen Personen, Objekten, Behandlungen, Institutionen“ (ebd.) sein. Um Unterschiede im Verhalten der Kinder vor und nach der Intervention festzustellen, werden verschiedene Testverfahren eingesetzt.

Allgemein ist ein Test

> ein wissenschaftliches Routineverfahren zur Untersuchung eines oder mehrerer empirisch unterscheidbarer Persönlichkeitsmerkmale mit dem Ziel einer möglichst genauen quantitativen Aussage über den relativen Grad der individuellen Merkmalsausprägung. Ein Test besteht in der Regel aus mehreren Aufgaben oder Fragen (Items), die von verschiedenen Menschen mit unterschiedlichen Fähigkeiten oder Eigenschaften unterschiedlich gelöst bzw. beantwortet werden. (Hussy et al., 2013, S. 81)

Man unterscheidet zwischen produkt- und prozessorientierter Diagnostik (Schipper et al., 2011, S. 25 ff.). Klassische Schulleistungstests sind sehr häufig der produktorientierten Diagnostik zuzuordnen. Es wird die Anzahl der richtig bzw. falsch gelösten Aufgaben und damit letztlich ein Gesamtwert ermittelt (ebd., S. 25). Die Festlegung einer Grenzziehung von z. B. „normalen Schwierigkeiten“ und „besonderen Schwierigkeiten“ (ebd.) ist notwendig, die allerdings willkürlich sein kann. Möglicherweise können Inhaltsbereiche identifiziert werden, in dem das betreffende Kind Schwierigkeiten hat. Genauere Informationen über die Art der Schwierigkeiten sind durch diese Tests aber meist nicht zu erkennen, sodass es schwierig ist, individuelle Förderpläne zu erstellen (ebd., S. 26). Prozessorientierte Tests hingegen beziehen sich stärker „auf die individuellen Prozesse der Lösungen von Aufgaben“ (ebd.). Es wird versucht, das Verständnis der Denkprozesse des Kindes durch gezielte und bewusste Beobachtungen und durch die Methode des „lauten Denkens“ (ebd.) (Aufforderung, jeden Lösungsschritt zu versprachlichen) zu erreichen (ebd.).

In der hier beschriebenen Untersuchung kommen ein computerbasierter Test und ein Paper-Pencil-Test zum Einsatz, die jeweils in ihrer Auswertung auch prozessbezogene Komponenten einbeziehen.

6.1.1 Computerbasierter Test

Um zu Beginn der Intervention die allgemeinen arithmetischen Fähigkeiten im additiven Bereich und eine mögliche Rechenschwäche der Kinder identifizieren zu können, wird der computerbasierte, standardisierte Bielefelder Rechentest für das zweite Schuljahr (BIRTE 2) (Schipper et al., 2011) eingesetzt. Es handelt sich hierbei um eine quantitative Erhebungsmethode.

Im Rahmen der computerbasierten Testdiagnostik können sowohl die Testdurchführung als auch die Testauswertung mithilfe des Computers durchgeführt werden (Fisseni, 2004, S. 281). Bei BIRTE 2 ist beides der Fall. Es werden 25 Notebooks mit abnehmbaren Tablets (sog. Convertibles) eingesetzt. Als Eingabemedium dienen Tastatur und Maus der Geräte (ebd.), die auditive Wahrnehmung erfolgt über Kopfhörer.

Im Gegensatz zur konventionellen Diagnostik, bei der sich die Testperson mithilfe von Durchblättern eines Testheftes einen Überblick über die Testaufgaben verschaffen kann, wird bei einem computerbasierten Test jeweils nur ein Item auf dem Bildschirm präsentiert (ebd., S. 281 f.). So geschieht dies auch bei BIRTE 2. Es kann somit erwartet werden, dass sich die Testperson auf das jeweilige Item konzentriert, wodurch Fehlerquellen vermindert werden können (ebd., S. 282). Dadurch kann die Messgenauigkeit erhöht werden (ebd., S. 49).

Der Computer übernimmt Testinstruktion und Testübungsphase (ebd., S. 282). Testleitereffekte können dadurch ausgeschlossen werden, sodass die Durchführungsobjektivität steigt. Es werden neben personenbezogenen Daten auch zusätzliche Daten wie Latenzzeiten und Gesamtbearbeitungsdauer der Testpersonen erfasst (ebd., S. 283). Die Auswertung wie auch die Rückmeldung für die Testpersonen werden automatisch erstellt (ebd., S. 284 f.).

6.1.2 Paper-Pencil-Test

Um einen möglichen Förderbedarf bezogen auf Multiplikatives Verständnis feststellen zu können, wird ein dafür spezifisch entworfener Paper-Pencil-Test (vgl. Anhang A) eingesetzt. Dies ist ein schriftliches Erhebungsverfahren, bei dem Testaufgaben von Testpersonen in Anwesenheit der Testanwender mit Stift auf dem Papier beantwortet werden (Döring & Bortz, 2016, S. 431). Es handelt sich ursprünglich eher um eine quantitative Erhebungsmethode.

Aus Sicht der Unterrichtsforschung wird kritisiert, dass Paper-Pencil-Tests individuelle Strategien zur Bearbeitung nicht berücksichtigen und damit zu wenig aussagekräftig sind (van den Heuvel-Panhuizen, 1995, S. 87 f.; van den Heuvel-Panhuizen 1996, S. 18 ff.; van den Heuvel-Panhuizen & Gravemeijer, 1991, S. 139 ff.; Voßmeier, 2012, S. 71). Somit gibt es mittlerweile Überlegungen, diese Nachteile zu beheben und es werden immer häufiger schriftliche Tests auch in der qualitativen Forschung eingesetzt (van den Heuvel-Panhuizen & Gravemeijer, 1991; Steinweg, 2001; Selter & Spiegel, 1997; Voßmeier, 2012; Ott, 2016).

Im Bereich der qualitativen Methoden können die eingesetzten Testitems z. T. der Methode der schriftlichen offenen Befragung (Hussy et al., 2013, S. 234) und z. T. der Methode der Eigenproduktionen zur Erhebung visueller Daten (ebd., S. 243) zugeordnet werden. Bei der schriftlichen offenen Befragung schreiben die Befragten ihre Antworten auf (ebd., S. 234). Bei Eigenproduktionen „werden die Teilnehmenden aufgefordert, vergleichsweise frei zu einer bestimmten Fragestellung Material zu produzieren“ (ebd., S. 243), wobei es sich dabei um visuelle Daten handelt. Eigenproduktionen sind „das Äquivalent im visuellen Bereich zur schriftlichen offenen Befragung im verbalen Bereich“ (ebd.).

Qualitative Daten bilden die Realität nicht durch numerisches Material ab. Beispiele dafür können verbale oder visuelle Dokumente sein (Döring & Bortz, 2016, S. 533). Durch die Bearbeitungen des eingesetzten Paper-Pencil-Tests entstehen verbale und visuelle Dokumente.

Herkömmliche Tests erfordern „Standardisierung durch Gleichheit des Materials, Identität der Instruktion, genaue Anleitungen zur Durchführung und Auswertung“ (Amelang & Schmidt-Atzert, 2006, S. 28). Der Paper-Pencil-Test zum Multiplikativen Verständnis wird mit allen Kindern durch eine Testanwenderin mit denselben Anweisungen zur Bearbeitung durchgeführt.

Nach van den Heuvel-Panhuizen (1995) gibt es grundlegende Kriterien, die für die Gestaltung und Durchführung von Tests bedeutsam sind (S. 89 f.):

- es soll „das gesamte Spektrum der Lernziele“ (van den Heuvel-Panhuizen, 1995, S. 89) einbezogen werden; dabei sollen unterschiedliche Inhaltsbereiche integriert und vernetzt und verschiedene Schwierigkeitsgrade berücksichtigt werden (ebd., S. 91 f.)
- die Kinder sollen die Möglichkeit erhalten, ihre Fähigkeiten zu zeigen (ebd., S. 89): Der Test sollte „weniger darauf abzielen, ihre Defizite [hier Defizite der Kinder] zu diagnostizieren (*positives Testen*)“ (ebd., S. 89, Hervorh. i. O.);

dies soll durch den Einsatz „anregender und vertrauter Kontexte“ (ebd., S. 94), durch Aufgaben, die auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet werden können, und durch die „Anregung eigener Beiträge der Kinder“ (ebd.) geschehen
- der Test soll über die Kompetenzen und Strategien der Kinder informieren (ebd., S. 89): Es sollte möglich sein, die Aufgaben auf unterschiedliche Art und Weise zu lösen (ebd., S. 100); es können Hilfsaufgaben vorgegeben werden, um zu sehen, ob Kinder diese verwenden (ebd.); eigene Gedankengänge können auf „Notizzetteln“ (ebd.) notiert werden
- der Test soll leicht einsetzbar sein (ebd., S. 89): Die Aufgaben sollten für die Kinder einfach zu verstehen sein und ohne viele Hinweise bearbeitet werden können (ebd., S. 89 f.)

Bei der Entwicklung des Paper-Pencil-Tests im Rahmen der hier beschriebenen Untersuchung werden diese Kriterien weitgehend berücksichtigt.

Um sowohl kurzzeitige als auch langfristige Veränderungen und Effekte der Intervention herausfinden zu können, werden mehrere Messwiederholungen mithilfe des Paper-Pencil-Tests durchgeführt (Döring & Bortz, 2016, S. 208 ff.). Die hier beschriebene Untersuchung ist in einem Pre-Post-Follow-up-Design geplant.

6.2 Intervention

6.2.1 Förderung in verschiedenen Settings

Die Grundsatzfrage bezogen auf Förderung ist, wie Kinder mit unterschiedlichen Vorausset-zungen geeignet gefördert werden können (z. B. Haeberlin et al., 1991; Wocken, 2007; Wocken & Antor, 1987; vgl. Kap. 2.2). Deswegen werden die Pre-Post- und Follow-up-Tests in zwei Interventionsgruppen und einer Kontrollgruppe durchgeführt (Döring & Bortz, 2016, S. 209). Es handelt sich dabei um eine Längsschnittstudie, da „[d]ieselbe Stichprobe (das Panel) […] in zeitlichem Abstand zu mehreren Messzeitpunkten mit demselben Instrument untersucht“ (ebd., S. 211) wird. „Nur auf diese Weise können individuelle Veränderungen nachvollzogen werden“ (ebd.). In der Intervention sind verschiedene Settings geplant: In Setting A *Einzelförderung* werden einige ausgewählte Kinder einzeln mit den entworfenen Lernumgebungen gefördert. In Setting B *Klassenverband* werden die entworfenen Lernumgebungen von Lehrkräften in ihren Klassen gefördert. Setting C ist eine *Kontrollgruppe*, in der Lehrkräfte ihren herkömmlichen Unterricht durchführen.

Es handelt sich um eine quasi-experimentelle Studie, da im Unterschied zu einer experimentellen Studie keine Randomisierung stattfindet (Döring & Bortz, 2016, S. 193 ff.). Das heißt, dass die Versuchspersonen den Untersuchungsgruppen nicht zufällig zugeordnet werden, sondern in den vorgefundenen Gruppen, nämlich den Klassen, bleiben (ebd., S. 199). Derartiges Untersuchungsdesign wird häufig dann eingesetzt, wenn es sich um Feldstudien handelt, da es im natürlichen Umfeld meist nicht möglich ist, die vorgefundenen Gruppen zu trennen (ebd., S. 200). Wember (2015) weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass eine zufällige Auswahl der Versuchspersonen und eine zufällige Zuordnung zu den Untersuchungs- und Kontrollgruppen in der sonderpädagogischen Forschung nicht möglich sind, da mit bestehenden Klassen und Schulen gearbeitet werden muss und unterrichtliche Maßnahmen „blind" nicht realisierbar sind (S. 460). Dies trifft auch auf die hier beschriebene Studie zu.

6.2.2 Klinisches Interview

Um die Fördereinheiten optimal an das jeweilige Kind anpassen zu können, wird jeweils zu Beginn jeder Fördereinheit ein klinisches Interview durchgeführt. Der Begriff geht zurück auf Jean Piaget, der in seiner Forschungsarbeit klinische Interviews einsetzte (Selter & Spiegel, 1997, S. 100).

„For Piaget, the important goal was not to rank children on standard tests but to gain insight into the fundamental nature of their thought" (Ginsburg, 1981, S. 4). Er entwickelte die Methode des klinischen Interviews, um die Einschränkungen der Methode des standardisierten Tests und der freien Beobachtung zu überwinden (ebd., S. 6). Dies kommt zum einen der „*Unvorhersagbarkeit* der Denkwege" (Selter & Spiegel, 1997, S. 101, Hervorh. i. O.) und zum anderen der „*Vergleichbarkeit* durch verbindlich festgelegte Leitfragen bzw. Kernaufgaben" (ebd., Hervorh. i. O.) entgegen.

Das klinische Interview kann als halbstandardisiertes Verfahren bezeichnet werden (Selter & Spiegel, 1997, S. 101). Das Interview wird den qualitativen Erhebungsmethoden zugeordnet (Hussy et al., 2013, S. 225 f.). Wie auch bei einem Leitfadeninterview wird ein Leitfaden verwendet, der als Anhaltspunkt bei der Durchführung dient (ebd., S. 225). Dadurch soll sichergestellt werden, dass zum einen „alle relevanten Aspekte im Laufe des Interviews auch tatsächlich angesprochen werden" (ebd.), und zum anderen, „dass die Interviews in etwa vergleichbar sind" (ebd.).

Das Hauptziel des klinischen Interviews ist es herauszufinden, was und wie Kinder denken (Ginsburg, 1981, S. S. 5 f.; Krauthausen, 1998, S. 115; Selter & Spiegel, 1997, S. 101), „ohne es [das kindliche Denken] suggestiv zu verformen oder ihm den Standpunkt des Erwachsenen aufzuzwingen“ (Ginsburg & Opper, 1991, S. 125). Das klinische Interview beginnt mit einer offenen Problemstellung.

Die bzw. der Interviewende stellt weitere Fragen und verlangt Reflexion über den betreffenden Themenbereich (Ginsburg, 1981, S. 6). Das Ziel ist es, dem Kind keine Worte in den Mund zu legen, sondern es Problemstellungen bearbeiten zu lassen, wie es ihm geeignet erscheint (ebd.). Das Kind soll durch gezielte Fragen zur Reflexion angeregt werden. Einerseits sollen die Prozesse in Erfahrung gebracht werden, wie das Kind zu einer bestimmten Antwort gekommen ist. Andererseits hat man Interesse an den Begründungen, warum es bestimmte Verfahren verwendet (ebd.).

Die bzw. der Interviewende muss während des Interviews Annahmen über die Gedanken der Kinder treffen, „um in einer flexiblen Weise Fragen stellen zu können, die sich in der Regel auf deren vorangehende Antworten oder Handlungen beziehen“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 101). Es wird grundsätzlich jedoch kein negatives Feedback auf Antworten des Kindes gegeben, da das Handeln des Kindes unabhängig von der Reaktion der bzw. des Interviewenden geschehen sollte (ebd.; Wittmann, 1982, S. 37). Die bzw. der Interviewende sollte sich bewusst zurückhalten. „Das schließt ein, dass sie [die Interviewerin] sparsam, aber gezielt interveniert, indem sie durch situationsadäquate Fragen oder Impulse ihr offenkundiges Interesse an den Denk- und Handlungsweisen der Kinder deutlich zum Ausdruck bringt“ (ebd.). Im klinischen Interview wird ursprünglich lediglich Sprache eingesetzt. Das heißt, dass die bzw. der Interviewende eine Frage stellt und das Kind so ohne Hilfe von konkreten Objekten antworten sollte (Ginsburg & Opper, 1991, S. 151). Da Piaget der Meinung war, dass dies zu wenig genau war, entwickelte er die „revidierte klinische Methode“ (ebd., S. 152). Bei diesem Verfahren bezieht der bzw. die Interviewende seine Fragen auf konkrete Objekte und das Kind hat die Möglichkeit, seine Antwort ebenfalls durch die Manipulation von Gegenständen zu geben (ebd.). Die Interviews, die zu Beginn der Fördereinheiten im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt werden, enthalten ebenfalls u. a. Fragen, die sich auf konkretes Material und Aufgaben aus dem Paper-Pencil-Test beziehen.

6.2.3 Unterrichtsdokumentation

Um möglichst viele Informationen über den in den teilnehmenden Klassen abgehaltenen Regelunterricht zur Multiplikation zu erhalten, sollen die teilnehmenden Lehrkräfte Auskünfte über Unterrichtsthemen, verwendetes Material, Anzahl der Unterrichtsstunden usw. geben. Als Erhebungsmethode eignet sich dafür eine qualitative, schriftliche Befragung (Döring & Bortz, 2016, S. 401).

Qualitative Fragebögen beinhalten offene Fragen, zu denen sich die Befragten schriftlich äußern können (ebd.). Es handelt sich um eine halb- oder teilstrukturierte Befragung, wenn den Personen eine Liste von Fragen vorgelegt wird, die sie in eigenen Worten beantworten sollen (ebd., S. 403).

Um möglichst einheitliche Übersichten zur jeweiligen Behandlung der Multiplikation zu erhalten, enthält der eingesetzte Bogen eine Tabelle, in die entsprechende Informationen eingetragen werden können (Abb. 6.1).

Name der

Lehrkraft:_________________________Schule:_____________________________

Klasse: _________ Schülerzahl: ________

verwendetes Schulbuch:____

Februar	**Mathestunden** 1 2 3 4 5 6 ○○○○○○	**Schulbuchseite, Aufgabe Kopiervorlage***	**Anschauungs-Material**	**Unterrichtsthema****
Mo, 23.2.	○●○○○○	*B. S. 53, Nr. 1, 4 - 6*	*Plättchen*	*Tauschaufgaben*
Die, 24.2.	●○○○○○	*AB ‚Quadratzahlen'*	*Punktefelder*	*Einmaleins mit Quadratzahlen*
…	…	…	…	…

Abbildung 6.1: Ausschnitt aus der Unterrichtsdokumentation

6.3 Auswertung

6.3.1 Auswertung des computerbasierten Tests

Im eingesetzten Test BIRTE 2 wird zunächst quantitativ ermittelt, wie viele Aufgaben jedes Kind für jedes Modul und jede Modulgruppe richtig bearbeitet hat (Schipper et al., 2011, S. 29). Es findet dann ein Vergleich mit der Verteilung der Werte in der Normierungsstichprobe statt. Die Leistungen werden nach

- deutlich überdurchschnittliche (++)
- überdurchschnittlich (+)
- durchschnittlich (o)
- unterdurchschnittlich (-)
- deutlich unterdurchschnittlich (--)

kategorisiert (ebd.). Bei manchen Aufgaben wird auf den Auswertungsseiten in einer Tabelle gezeigt, ob sie richtig oder falsch gelöst wurden (ebd.).

Es wird zudem die jeweilige Bearbeitungszeit der Aufgaben erfasst und ein Mittelwert berechnet (ebd., S. 71). Der Mittelwert des Arbeitstempos aus allen Aufgaben wird mit der Normierungsstichprobe verglichen. Die Bearbeitungszeit wird folgenden Ausprägungen zugeordnet:

- besonders niedrig
- niedrig
- durchschnittlich
- hoch
- besonders hoch

Das Auftreten von bestimmten Fehlertypen kann auf die Hauptsymptome von Rechenstörungen hinweisen (in diesem Handbuch unterteilt in verfestigtes zählendes Rechnen, eingeschränktes Stellenwertverständnis und unzureichende Orientierung im Zahlenraum und unzureichende Grundvorstellungen und Größenvorstellungen (ebd., S. 15 ff.)).

Ein Fehler um +/– 1 kann z. B. ein Anzeichen für zählendes Rechnen sein (ebd., S. 29). Werden Fehler beim Rückwärtszählen festgestellt, kann das auf nicht ausreichende Orientierung im Zahlenraum hindeuten. Zahlendreher können auf Schwierigkeiten beim Stellenwertverständnis hinweisen. Werden lange Bearbeitungszeiten bei Aufgaben festgestellt, die zum Ende der ersten Klasse bereits auswendig gekonnt werden sollten, kann das auf unzureichendes Faktenwissen hindeuten. Dies ist oft bei Kindern anzutreffen, die zählend rechnen (ebd.).

Da die Fehleranalyse Vermutungen darstellt, werden die Befunde, die auf Grundlage von Fehler- und Zeitanalysen erstellt werden, als Hypothesen formuliert. Nur durch weitere prozessorientierte Diagnostik kann herausgefunden werden, welche Strategien von den Kindern tatsächlich eingesetzt werden. Im zugehörigen Handbuch werden Anregungen gegeben, welche Aufgaben die Lehrkraft zusätzlich durchführen kann, um herauszufinden, ob das angenommene Problem tatsächlich vorhanden ist (ebd.).

6.3.2 Auswertung des Paper-Pencil-Tests

6.3.2.1 Entwicklung von Analysekategorien

Ziel der Auswertung der Bearbeitung der angebotenen Testaufgaben ist es, bei den Kindern den Entwicklungsstand des Multiplikativen Verständnisses zu erfassen und über die verschiedenen Testzeitpunkte Veränderungen auszumachen. Um die Heterogenität und Individualität der Bearbeitungen möglichst vollständig zu erfassen, wäre eine dichotome Auswertung nicht zielführend. Deswegen wird ein umfassendes Kategoriensystem entwickelt, das unterschiedlichste Aspekte in den Bearbeitungen berücksichtigt. Die Auswertung orientiert sich wesentlich an der zugrunde gelegten Definition eines vollständigen Multiplikativen Verständnisses (vgl. Kap. 4.3). Zur Entwicklung dieses Kategoriensystems werden qualitative Methoden herangezogen.

Um die Heterogenität der Bearbeitungen durch die Kinder möglichst detailliert erfassen zu können, kommt das Prinzip der emergenten Flexibilität zum Einsatz. Dieses Prinzip beinhaltet, dass Instrumente und Fragestellungen der Datenerhebung und Auswertung im Laufe der Untersuchung flexibel angepasst werden können (Hussy et al., 2013, S. 191).

Empirische mathematikdidaktische Forschung kann dadurch charakterisiert werden, „daß sie den Sinngehalt von Texten zu heben versucht“ (Beck & Maier, 1994, S. 43). Texte, die als Basis dazu dienen, können Videoaufnahmen, Transkripte von Mathematikunterricht oder ähnlichen Situationen, Situationen in Interviews oder auch Bearbeitungen von mathematischen Tests durch Schülerinnen und Schüler sein (ebd.).

In der qualitativen Forschung liegt ein besonderes Verhältnis von Gegenstand zu Methode vor. Im Gegensatz zur quantitativen Forschung, bei der einzelne Bausteine des Forschungsprozesses unabhängig voneinander und nacheinander ablaufen können, sind die einzelnen Schritte bei der qualitativen Forschung stärker voneinander abhängig.

Die Bearbeitungen durchlaufen verschiedene Analyseschritte im Sinne der Qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015). Folgende Merkmale der qualitativen Inhaltsanalyse können genannt werden: Qualitative Inhaltsanalyse analysiert *Kommunikation*, z. B. Sprache, Musik oder Bilder (Mayring, 2015, S. 12). Es handelt sich dabei um Kommunikation, die in irgendeiner Weise *fixiert* ist, d. h. die schriftlich festgehalten wurde (ebd.). Die Analyse geht *systematisch* vor und grenzt sich damit „gegen freie Interpretation“ (ebd.) ab. Sie ist *regelgeleitet*, d. h. die Analyse läuft nach speziellen Regeln ab (ebd.). Dies soll es ermöglichen, dass die Analyse verständlich, nachvollziehbar und überprüfbar ist (ebd.). Qualitative Inhaltsanalyse ist aber auch *theoriegeleitet*, d. h. das Material wird „unter einer theoretisch ausgewiesenen Fragestellung“ (ebd., S. 13) analysiert. Genauer gesagt bedeutet dies „Anknüpfen an den Erfahrungen anderer mit dem zu untersuchenden Gegenstand“ (ebd.), „um einen Erkenntnisfortschritt zu erreichen“ (ebd., S. 60).

Im hier vorliegenden Fall bezieht sich die Analyse auf die Kinder-Bearbeitungen der Testaufgaben des Paper-Pencil-Tests, die schriftlich fixiert sind. Die Anwendung der entwickelten Kategorien erfolgt systematisch. Es wird bei der Analyse der Kinder-Bearbeitungen nach bestimmten Regeln vorgegangen, die im Folgenden transparent gemacht werden. Die Analyse erfolgt theoriegeleitet, da an bereits vorhandene Kenntnisse aus der Forschung angeknüpft wird.

Um die Individualität der Kinder-Bearbeitungen abbilden zu können, enthält das Kategoriensystem zur Auswertung des Paper-Pencil-Tests zum Multiplikativen Verständnis nominalskalierte und ordinalskalierte Kategorien (Variablen). Bei einer Nominalskala steht die Verschiedenheit im Mittelpunkt, die „Ordnung oder gar Größe der Abstände zwischen den Merkmalsausprägungen" (Hussy et al., 2013, S. 67) ist jedoch nicht feststellbar. Eine Nominalskala ermöglicht es, „lediglich Äquivalenzklassen von Objekten numerisch" (ebd.) zu beziffern. Bei der Ordinalskala werden die Merkmalsausprägungen in eine bestimmte Rangordnung gebracht (größer als, kleiner als) (ebd.). „Aus den Rängen lassen sich jedoch keine Rückschlüsse auf die genauen Differenzen oder Verhältnisse zwischen den Merkmalsausprägungen ziehen" (ebd.). Eine ordinalskalierte Variable gibt zusätzlich darüber Informationen, „bei welchen Objekten das Merkmal stärker bzw. weniger stark ausgeprägt ist" (ebd.).

Bei der qualitativen Inhaltsanalyse unterscheidet man zwischen den Grundformen Z*usammenfassende Qualitative Inhaltsanalyse*, *Induktive Kategorienbildung*, *Explikative Qualitative Inhaltsanalyse* und *Strukturierende Qualitative Inhaltsanalyse* (Mayring & Brunner, 2013, S. 326 ff.).

Das Vorgehen der Kategorienbildung für den Test zum Multiplikativen Verständnis kann zum Teil der Strukturierenden Qualitativen Inhaltsanalyse und zum Teil der Induktiven Kategorienbildung zugeordnet werden.

Zum einen folgen die Schritte der *Strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse*: Bei diesem Vorgehen wird die *deduktive Kategorienanwendung* eingesetzt, d. h. das Kategoriensystem steht „schon vor der Arbeit am Material" (ebd., S. 327) fest. Die Kategorien werden durch die inhaltsanalytischen Regeln beschrieben, die es ermöglichen, Kategorien immer eindeutig dem Material zuordnen zu können. Dies erfolgt in drei Schritten, häufig in Spaltenschreibweise angelegt. Der erste Schritt beinhaltet die „Kategoriendefinition" und „legt theoriegeleitet genau fest, wie die Kategorie zu verstehen ist" (ebd., S. 327). Der zweite Schritt besteht darin, „Ankerbeispiele" (ebd.) zu finden. Dies sind „Musterbeispiele" (ebd.) für eine bestimmte Kategorie. Im dritten Schritt werden „Kodierregeln" entwickelt. Sie stellen „Abgrenzungsregeln" dar, um „Schnittstellen zwischen den Kategorien" aufzuzeigen (ebd., S. 328). „Diese Regeln werden schrittweise am Material entwickelt bzw. verfeinert" (ebd., S. 328). In der vorliegenden Arbeit wird das Kategoriensystem überwiegend durch die theoriebasierte Arbeitsdefinition festgelegt. Die Schritte der inhaltsanalytischen Regeln werden durchlaufen, indem am Material Kategorien für verschiedene Bearbei-tungen der Kinder definiert und dafür Ankerbeispiele in den Bearbeitungen gefunden werden. Um die Kategorien voneinander abzugrenzen, werden genaue Kodierregeln festgelegt.

Zum anderen werden bei der Durchsicht der Kinder-Bearbeitungen noch weitere Ausprägungen identifiziert. Dieses Vorgehen folgt der *Induktiven Kategorienbildung* und wird für die Entwicklung bestimmter Unterkategorien herangezogen. Bei dieser Vorgehensweise werden einzelne Analyseperspektiven „erst aus dem Material heraus entwickelt“ (ebd., S. 327). Die Induktive Kategorienbildung beinhaltet eine Art selektive Zusammenfassung (ebd., S. 327).

Die Analyse der Bearbeitungen des Paper-Pencil-Tests zum Multiplikativen Verständnis erfolgt insgesamt nach folgenden Kategorien:

1. Grundvorstellungen
2. Angemessenheit
3. Verknüpfung
4. Ergebnisrichtigkeit
5. Verwendung der Eigenschaften

Die Kategorien werden durch Zuweisung von Ausprägungen analytisch erfasst. Das so entwickelte Kategoriensystem erlaubt, letztlich jeder der Bearbeitungen einen fünfgliedrigen Zahlencode (eine Stelle für jede Analyseebene, z. B. 2-0.2-1-2-1) zuzuweisen.

Diese Kategorien mit ihren Ausprägungen (vgl. Übersicht in Tab. 6.1) werden im Folgenden mit ihren Kodierregeln sowie an Ankerbeispielen zu zwei exemplarischen Aufgaben A und B (Abb. 6.2) genauer erläutert.

Um die Zuordnung der Bearbeitungen der jeweiligen Ausprägung möglichst umfassend deutlich zu machen, werden bewusst diese zwei wesentlich verschiedenartigen Aufgaben ausgewählt. Ihre Unterschiedlichkeit liegt zuerst einmal in der Übersetzungsrichtung, die für eine angemessene Bearbeitung bedeutend ist. Bei Aufgabe A muss von einer Abbildung von didaktischem Material in die symbolische Form ($3 \cdot 4$, $4 \cdot 3$) ‚übersetzt‘ werden. Im Gegensatz dazu soll bei Aufgabe B die symbolische Form $2 \cdot 3$ in ein Bild übertragen werden. Die für eine passende Bearbeitung notwendige Denkrichtung ist also entgegengesetzt. Des Weiteren ist für eine vollständige Bearbeitung der Aufgabe A die Angabe von zwei passenden Aufgaben notwendig, bei Aufgabe B genügt eine einzige Zeichnung. Darüber hinaus bezieht sich Aufgabe A auf eine Abbildung von didaktischem Material. Für Aufgabe B sind Zeichnungen von Bildern mit Sachbezug oder von Material passend. Die Unterschiede in diesen drei Merkmalen, nämlich Übersetzungsrichtung, Anzahl der notwendigen Aufgaben für eine vollständige Bearbeitung und Material- bzw. Sachbezug, lassen sich auch in den meisten übrigen Testaufgaben wiederfinden.

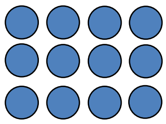
Aufgabe A	Aufgabe B
Schreibe **zwei passende** Malaufgaben auf. 	Zeichne ein Bild zu $\boxed{2 \cdot 3}$.

Abbildung 6.2: Exemplarische Aufgaben A und B im Paper-Pencil-Test

1. Grundvorstellungen

Die Arbeitsdefinition zum Multiplikativen Verständnis basiert auf den *Grundvorstellungen* der Multiplikation (vgl. Kap. 4.3). Bearbeitungen werden deswegen bezüglich der vermutlich zugrunde liegenden *Grundvorstellung* kategorisiert. Es wird unterschieden, ob eine Bearbeitung als

- *multiplikativ (3)*
- *beide (2)*
- *additiv (1)* und
- *nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos (0)*

interpretiert werden kann. Finesilver (2017) kategorisiert in einer Studie mit schwachen Schülerinnen und Schülern (11-15 Jahre) ähnlich (S. 3920 ff.). In dieser Studie sollten die Kinder zu multiplikativen Situationen sowie zu Multiplikationsaufgaben in symbolischer Form passende Darstellungen zeichnen oder Material legen. Finesilver (2017) findet neben einer weiteren ebenfalls die drei hier genannten Ausprägungen. Bei der weiteren vierten Ausprägung handelt sich um „Number Container" (Finesilver, 2017, S. 3923 f.), bei der eine entsprechende Anzahl (passend zu dem einen Faktor des Produkts) an Kreisen oder Vierecken gezeichnet wird und der andere Faktor des Produkts jeweils als Ziffer in die Kreise bzw. Vierecke notiert wird. Diese vierte Ausprägung wird in den im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit analysierten Kinder-Bearbeitungen nicht identifiziert und deswegen nicht als mögliche Ausprägung mitaufgenommen.

Code (3): Bei Aufgaben, die die Übersetzung von einer Darstellung in die symbolische Form erfordern, werden der Ausprägung *multiplikativ* Bearbeitungen zugeordnet, die multiplikative Lösungen enthalten (*kartesisches Produkt*). Ist ein

Transfer von symbolischer Form in eine passende Zeichnung notwendig, müssen in der Bearbeitung die Elemente in Reihen und Spalten angeordnet sein. Ankerbeispiele zu dieser Ausprägung sind in Abbildung 6.3 ersichtlich.

Aufgabe A	Aufgabe B
$4 \cdot 3 = 12$ $3 \cdot 4 = 12$	

Abbildung 6.3: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Kerstin, Post-Test) und B (Heike, Pre-Test) zur Ausprägung multiplikativ

Es erfolgt eine kompetenzorientierte Kategorisierung. Das bedeutet, dass eine Bearbeitung als *multiplikativ* kategorisiert wird, wenn sie eine multiplikative Aufgabe und z. B. eine weitere passende additive Aufgabe enthält, die nicht der *wiederholten Addition* zugeordnet werden kann.

Code (2): Bearbeitungen, die der Ausprägung *beide* zugeordnet werden, enthalten beide Grundvorstellungen (Abb. 6.4).

Die Bearbeitung in Aufgabe B enthält die Elemente angeordnet in Reihen und Spalten. Zusätzlich werden aber zwei Mengen mit jeweils drei Elementen kenntlich gemacht. Somit kann nicht eindeutig entschieden werden, welche Grundvorstellung eher zugrunde liegt.

Aufgabe A	Aufgabe B
$3 \cdot 4 = 12$ $4 + 4 + 4 = 12$	

Abbildung 6.4: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Elias, Post-Test) und B (Laurenz, Pre-Test) zur Ausprägung beide

Code (1): Bei Aufgaben, die eine Übersetzung von einer Darstellung in eine symbolische Form erfordern, werden Bearbeitungen der Ausprägung *additiv* zugeordnet, die eine *wiederholte Addition* in symbolischer Schreibweise enthalten. Bei Aufgaben, für die die Übersetzung von Symbolform in ein Bild oder eine Darstellung notwendig ist, muss das Bild die Elemente in mehreren Mengen mit jeweils gleicher Anzahl von Elementen angeordnet enthalten (Abb. 6.5).

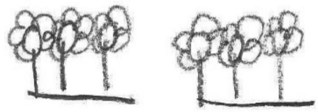
Aufgabe A	Aufgabe B
4+4+4=12	

Abbildung 6.5: Ankerbeispiel für Aufgabe A (z. T. Elias, Post-Test) und B (Sarah, Post-Test) zur Ausprägung additiv

Code (0): Der Ausprägung *nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos* werden Bearbeitungen zugeordnet, die keine der beiden Grundvorstellungen enthalten (Abb. 6.6).

Aufgabe A	Aufgabe B
16	

Abbildung 6.6: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Paul, Follow-up-Test) und B (Luana 2, Pre-Test) zur Ausprägung nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos

Das Ankerbeispiel zu Aufgabe A enthält nur eine Zahl als Ergebnis, was in diesem Fall jedoch nicht zur Aufgabe passt. Bei der beispielhaften Bearbeitung zu Aufgabe B sind Elemente in der passenden Anzahl gezeichnet, es ist jedoch keine Struktur erkennbar, die eine der Grundvorstellungen erkennen lässt.

2. Angemessenheit

Angemessenheit bezieht sich auf die Adäquatheit der Bearbeitung entsprechend der Aufgabenstellung unter Anwendung der Grundvorstellungen des *kartesischen Produkts* und der *wiederholten Addition*. Mit Blick auf die *Angemessenheit* werden die Bearbeitungen in

- *angemessen (2)*
- *teilweise angemessen (1)* und
- *nicht angemessen (0)*

unterteilt.

Code (2): Der Ausprägung *angemessen* werden Bearbeitungen zugeordnet, die entsprechend der Aufgabenstellung als adäquat anzusehen sind und in denen passende Grundvorstellungen identifiziert werden können. Um den verschiedenen Kinder-Bearbeitungen gerecht zu werden, werden dieser Ausprägung nochmals drei verschiedene Ausprägungen zugeordnet.

Grundsätzlich ist eine Bearbeitung als *angemessen* anzusehen, wenn sie *eine* adäquate Bearbeitung enthält, auf die oben genannte Kriterien zutreffen. Ein Ankerbeispiel für die Aufgabe A und B ist in Abbildung 6.7 zu sehen.

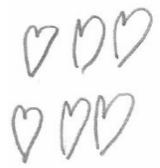
Aufgabe A	Aufgabe B
$3 \cdot 4 = 12$	

Abbildung 6.7: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Sarah 2, Pre-Test) und Aufgabe B (Heike, Pre-Test) zur Ausprägung angemessen

Der Ausprägung *angemessen und Sinnvolles* werden Bearbeitungen zugeordnet, die zwei angemessene Bearbeitungen (bezieht sich auch auf Aufgaben, die explizit zwei Aufgaben erfordern), nämlich eine angemessene Bearbeitung und weitere passende Aufgaben, Nebenrechnungen oder auch weitere Aufgaben, die ebenso alle Elemente berücksichtigen, aber nicht zuallererst mit der Aufgabenstellung getriggert werden sollen, beinhalten. Ankerbeispiele für Aufgabe A finden sich in Abbildung 6.3 und 6.4.

Der Ausprägung *angemessen anders* werden Bearbeitungen zugeordnet, die sowohl eine angemessene Grundvorstellung nutzen als auch alle Elemente in der Darstellung der Aufgabe berücksichtigen, jedoch durch die Aufgabenstellung nicht direkt nahegelegt werden. Eine mögliche Bearbeitung dieser Ausprägung für Aufgabe A ist in Abbildung 6.8 zu finden.

Aufgabe A
$6 \cdot 2 = 12$ $2 \cdot 6 = 12$

Abbildung 6.8: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Katharina Pre-Test) zur Ausprägung angemessen anders

Code (1): *Teilweise angemessen* ist eine Bearbeitung, wenn sinnvolle Ansätze erkennbar sind, diese aber entweder nicht zu Ende geführt werden oder zusätzlich unangemessene Angaben notiert sind. Aus der Bearbeitung kann somit auf ein teilweises, d. h. noch nicht vollständig angemessenes Verständnis geschlossen werden. Um auch hier der Individualität der verschiedenen Kinder-Bearbeitungen gerecht zu werden, gliedert sich diese Ausprägung in zwei Unterausprägungen.

Der Ausprägung *angemessen und Unsinniges* werden Bearbeitungen zugeordnet, die angemessene und teilweise bzw. nicht angemessene Bearbeitungen enthalten. In Abbildung 6.9 wird ein Ankerbeispiel für Aufgabe A ersichtlich.

Aufgabe A

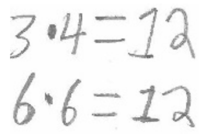


Abbildung 6.9: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Leonard, Pre-Test) zur Ausprägung angemessen und Unsinniges

Die Aufgabe $3 \cdot 4 = 12$ ist als angemessen anzusehen, Aufgabe $6 \cdot 6 = 12$ aber als nicht zu diesem Punktefeld passende Bearbeitung. In dieser Ausprägung wird von der kompetenzorientierten Sichtweise abgewichen, da Bearbeitungen, die unpassende Angaben enthalten, möglicherweise auf eine gewisse Unsicherheit des Kindes hindeuten können.

Die Ausprägung *Teilaufgabe* bezieht sich auf Bearbeitungen, die angemessene Teilaufgaben enthalten, d. h. die nur einen Teil der Elemente berücksichtigen und aber ebenso hineingesehen werden können (Abb. 6.10). Bei Aufgaben, bei denen etwas (ein)gezeichnet werden soll, bezieht sich dies auf Zeichnungen, die einen Teil der passenden Zeichnung enthalten, in denen aber bestimmte Elemente fehlen.

Aufgabe A

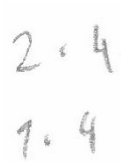


Abbildung 6.10: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Franziska, Pre-Test) zur Ausprägung Teilaufgabe

Ab dieser Ausprägung werden die Bearbeitungen wieder kompetenzorientiert betrachtet, d. h. enthält eine Bearbeitung eine Teilaufgabe und noch weitere Aufgaben, die überhaupt nicht zur Aufgabenstellung passen, so wird die Bearbeitung dennoch der Ausprägung *Teilaufgabe* zugeordnet.

Code (0): *Nicht angemessen* sind Bearbeitungen, die keine sinnvollen Ansätze enthalten. Um die Verschiedenartigkeiten der Kinder-Bearbeitungen ebenso in dieser Ausprägung abzubilden, werden auch hier die Bearbeitungen in verschiedenen Unterausprägungen genauer erfasst. Dabei sind einige dieser Unterausprägungen bei der ersten Durchsicht der Bearbeitungen induktiv entstanden.

Der Ausprägung *weitere additive Interpretation* werden Bearbeitungen zugeordnet, die beispielsweise eine Aufgabe enthalten, die in die Darstellung hineingesehen, aber nicht mit dem Multiplikativen Verständnis in Verbindung gebracht werden kann. Eine solche Bearbeitung kann alle oder nur einige der Einzelelemente berücksichtigen.

Die Ausprägung *Anzahl der Elemente mit 1 multipliziert* bezieht sich auf Bearbeitungen, bei denen die Gesamtanzahl oder eine Anzahl, die in der Gesamtanzahl enthalten ist, mit 1 multipliziert wird.

Aufgabe A

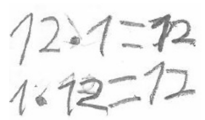


Abbildung 6.11: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Alexander, Pre-Test) zur Ausprägung Anzahl der Elemente mit 1 multipliziert

In diesem Ankerbeispiel (Abb. 6.11) wird die Zahl aller Einzelelemente des Punktefeldes mit eins multipliziert.

Die Bearbeitungen der Ausprägungen *weitere additive Interpretation* und *Anzahl der Elemente mit 1 multipliziert* machen nicht deutlich, ob ein Verständnis für die multiplikative Struktur des Punktefeldes erkannt wird, sodass derartige Bearbeitungen als nicht angemessen anzusehen sind.

Die Ausprägung *nur Ergebnis* ist die schlichte Notation des Ergebnisses. An dieser Stelle wird noch nicht unterschieden, ob die Zahl das passende Ergebnis für die Aufgabe ist oder nicht. Dies wird unter der Kategorie *Ergebnisrichtigkeit* (siehe 4.) zugeordnet. In der Notation eines passenden Ergebnisses kann kein Verständnis multiplikativer Strukturen abgelesen werden, sodass diese Ausprägung als nicht angemessen angesehen wird. Ein Ankerbeispiel für diese Ausprägung zu Aufgabe A findet sich in Abbildung 6.6.

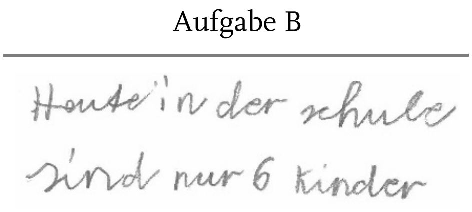


Abbildung 6.12: Ankerbeispiel für Aufgabe B (Martin, Pre-Test) zur Ausprägung Verständnis für bzw. Bezug zur Aufgabe nicht ersichtlich

Der Ausprägung *Verständnis für bzw. Bezug zur Aufgabe nicht ersichtlich* werden Bearbeitungen zugeordnet, wenn kein Verständnis für bzw. kein Bezug zur Aufgabe erkennbar ist (Abb. 6.12).

Die Ausprägung *nichts notiert* bezieht sich auf Bearbeitungen, in denen nichts aufgeschrieben wurde.

3. Verknüpfung

Da bei der Durchsicht der Kinder-Bearbeitungen festgestellt wird, dass nicht nur Operationen, sondern auch Umkehroperationen von den Kindern in den Bearbeitungen notiert wurden, ist diese Kategorie *Verknüpfung* induktiv entstanden. Sie bezieht sich darauf, welche Verknüpfung in der Bearbeitung gewählt wurde. Bearbeitungen werden danach unterschieden, ob sie

- *die Operation (2)*
- *die Umkehroperation (1)* und
- *keine Zuordnung (0)*

enthalten.

In der Zuordnung der *Grundvorstellungen* (s. o.) wird jede Bearbeitung bezüglich multiplikativer bzw. additiver Operationen kategorisiert. Die Kategorisierung *Verknüpfung* betrachtet hingegen ausschließlich, ob die *Operation* oder *Umkehroperation* genutzt wird.

Code (2): Bearbeitungen mit Multiplikationsaufgaben und Additionsaufgaben werden entsprechend der Ausprägung *Operation* zugeordnet. Ein Ankerbeispiel für Aufgabe A und B ist in Abbildung 6.13 zu finden.

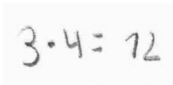
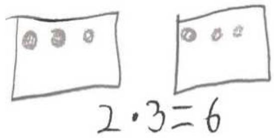
Aufgabe A	Aufgabe B
	

Abbildung 6.13: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Sarah 2, Pre-Test) Aufgabe B (Andrea, Post-Test) zur Ausprägung Operation

Code (1): Der Ausprägung *Umkehroperation* werden Bearbeitungen mit Divisionsaufgaben oder Subtraktionsaufgaben zugeordnet (Abb. 6.14).

Aufgabe A

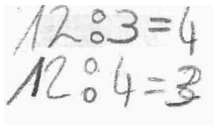


Abbildung 6.14: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Eduard, Post-Test) zur Ausprägung Umkehroperation

Code (0): Bearbeitungen, die sich nicht zuordnen lassen, da sie beispielsweise sowohl eine Operation als auch eine Umkehroperation oder keines von beidem enthalten, werden der Ausprägung *keine Zuordnung* zugeordnet. Ein Ankerbeispiel für diese Ausprägung ist z. B. für Aufgabe B in Abbildung 6.7 zu finden. Hier enthält die Bearbeitung weder eine Operation noch eine Umkehroperation.

4. Ergebnisrichtigkeit

In der Analyse der Dokumente zeigt sich, dass nicht alle Bearbeitungen Gleichungen anbieten, sondern auch Terme ohne Nennung eines Ergebniswerts auftreten. Zudem sind die Gleichungen mitunter falsch, d. h. es geht hier um die mathematische Richtigkeit. Bezüglich des Ergebnisses wird nach

- *vollständig passend (2)*
- *nicht passend (1)* und
- *ohne (0)*

kategorisiert.

Code (2): Bearbeitungen werden der Ausprägung *vollständig passend* zugeordnet, wenn die Ergebnisse aller angegebenen Aufgaben korrekt sind und auch die Gleichung stimmt.

Code (1): Der Ausprägung *nicht passend* werden Bearbeitungen zugeordnet, wenn die Ergebnisse zu Termen bzw. die Gleichung nicht korrekt sind.

Code (0): Bearbeitungen gehören zur Ausprägung *ohne* Ergebnis, wenn sie kein Ergebnis enthalten.

5. Verwendung der Eigenschaften

Da es bei manchen Aufgaben möglich ist, Eigenschaften der Operation bei der Lösung zu verwenden, soll diese Ausprägung anzeigen, ob in der Bearbeitung die Eigenschaften Kommutativität oder Distributivität erkennbar sind. Bezüglich der Eigenschaften wird nach

- *Distributivität und Kommutativität (3)*
- *Distributivität (2)*
- *Kommutativität (1)* und
- *keine (0)*

unterschieden.

Code (3): Der Ausprägung *Distributivität und Kommutativität* werden Bearbeitungen zugeordnet, die beide Eigenschaften nutzen (Abb. 6.15).

Aufgabe A

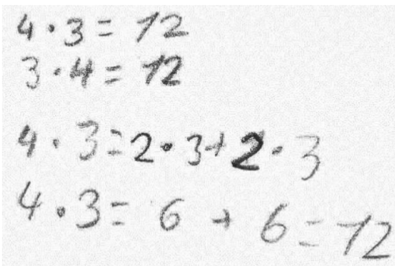


Abbildung 6.15: Ankerbeispiel für Aufgabe A (Susanne, Post-Test) zur Ausprägung Distributivität und Kommutativität

Code (2): Der Ausprägung *Distributivität* werden Bearbeitungen zugeordnet, die diese Eigenschaft nutzen.

Code (1): Bearbeitungen, die der Ausprägung *Kommutativität* zugeordnet werden, nutzen die Kommutativität. Ein Ankerbeispiel für Aufgabe A ist in Abbildung 6.3 und 6.8 zu finden.

Code (0): Der Ausprägung *keine* Eigenschaften werden Bearbeitungen zugeordnet, die keine Nutzung von Eigenschaften erkennen lassen.

Kategorienzuordnung von exemplarischen Kinder-Bearbeitungen

Um die Kategorien exemplarisch deutlich zu machen, werden im Folgenden zwei Kinder-Bearbeitungen vollständig kategorisiert.

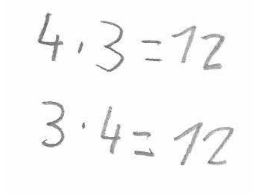


Abbildung 6.16: Kinder-Bearbeitung 1 (Kerstin, Post-Test) zu Aufgabe A

Für Kinder-Bearbeitung 1 (Abb. 6.16) zu Aufgabe A ergeben sich folgende Kategorien und damit Code 3-22-2-2-1:

- Grundvorstellung: *multiplikativ*
- Angemessenheit: *angemessen (angemessen und Sinnvolles)*
- Verknüpfung: *Operation*
- Ergebnisrichtigkeit: *vollständig passend*
- Verwendung der Eigenschaften: *Kommutativität*

Kinder-Bearbeitung 2 (Abb. 6.17) gehört zu Aufgabe B.

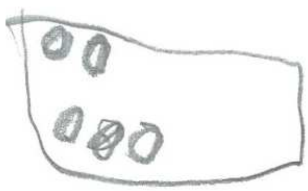


Abbildung 6.17: Kinder-Bearbeitung 2 zu Aufgabe B (Benjamin, Pre-Test)

Die Kategorienzuordnung sieht folgendermaßen aus, woraus sich der Code 0-01-0-0-0 ergibt:

- Grundvorstellung: *nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos*
- Angemessenheit: *nicht angemessen (Verständnis für bzw. Bezug zur Aufgabe nicht ersichtlich)*
- Verknüpfung: *keine Zuordnung*
- Ergebnisrichtigkeit: *ohne*
- Verwendung der Eigenschaften: *keine*

Grundvorstellungen	**Angemessenheit**	**Unterausprägungen**	**Verknüpfung**	**Ergebnisrichtigkeit**	**Verwendung der Eigenschaften**
multiplikativ (3)	angemessen (2)	angemessen und Sinnvolles (22)	Operation (2)	vollständig passend (2)	Distributivität und Kommutativität (3)
nicht eindeutig (2)		angemessen (21)	Umkehroperation (1)	nicht passend (1)	Distributivität (2)
additiv (1)		angemessen anders (20)	keine Zuordnung (0)	ohne (0)	Kommutativität (1)
nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos (0)					keine (0)
	teilweise angemessen (1)	angemessen und Unsinniges (11)			
		Teilaufgabe (10)			
	nicht angemessen (0)	weitere additive Interpretation (04)			
		Anzahl der Elemente mit 1 multipliziert (03)			
		nur Ergebnis (02)			
		Verständnis für bzw. Bezug zur Aufgabe nicht ersichtlich (01)			
		nichts notiert (00)			

Tabelle 6.1: Übersicht über die Kategorien zur Auswertung des Tests zum Multiplikativen Verständnis

6.3.2.2 Vorgehen bei der Analyse

Um Veränderungen im Verhalten der Kinder vor und nach der Intervention feststellen zu können, werden nach Analyse der Bearbeitungen der Pre-, Post- und Follow-up-Tests durch die Kinder entsprechend den entwickelten Kategorien die Häufigkeiten zu den verschiedenen Merkmalsausprägungen *quantitativ* ermittelt. Forschungsmethodisch lässt sich dieses Vorgehen der *Deskriptivstatistik* zuordnen (Hussy et al., 2013, S. 169). Mit Deskriptivstatistik sind Verfahren gemeint, „mit deren Hilfe quantitative Daten zusammenfassend beschrieben und dargestellt werden“ (ebd.). In der vorliegenden Studie werden prozentuale Häufigkeiten von Merkmalsausprägungen verschiedener Kategorien bestimmt (ebd., S. 170). Es können damit Aussagen über Veränderungen bezogen auf die untersuchten Personengruppen getroffen werden.

Es werden dabei Veränderungen der Anteile an Bearbeitungen zu den drei Messzeitpunkten (MZP) aller Versuchspersonen in den drei Settings analysiert. Zusätzlich sollen die Entwicklungen ausschließlich der Kinder mit Förderbedarf in den verschiedenen Settings betrachtet werden. Deswegen wird ein sog. Matching-Verfahren (Döring & Bortz, 2016, S. 200) bezüglich des Förderbedarfs eingesetzt. Dabei wird für jedes Kind, das an der Einzelförderung teilgenommen hat, ein bezüglich des Förderbedarfs möglichst ähnliches Kind in Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* ermittelt.

Um „Aussagen auf der allgemeinen Ebene von (nicht untersuchten oder untersuchbaren) Populationen (Grundgesamtheiten)“ (Hussy et al., 2013, S. 179) treffen zu können, die über die untersuchte Stichprobe hinausgehen, wird der Einsatz von Methoden der *Inferenzstatistik* notwendig. Mit deren Hilfe können wissenschaftlich formulierte Hypothesen überprüft werden. Die klassische Methode, Hypothesentests durchzuführen, sind Signifikanztests, welche auch in der vorliegenden Arbeit zum Einsatz kommen. Hierbei können Entscheidungen über ein Hypothesenpaar, nämlich die Nullhypothese (H_0), sowie die dazu komplementäre Alternativhypothese (H_1) getroffen werden (ebd., S. 179). Da in der vorliegenden Studie Unterschiedshypothesen überprüft werden sollen, bietet sich der Einsatz von varianzanalytischen Verfahren an (Bühner & Ziegler, 2017, S. 373 ff.).

In der vorliegenden Arbeit wird der Paper-Pencil-Test zum Multiplikativen Verständnis in drei verschiedenen Settings (Stichproben) zu drei verschiedenen MZP durchgeführt. Unterschiede der Mittelwerte der Kategorien *Angemessenheit, Grundvorstellungen* sowie *Ergebnisrichtigkeit* sollen auf Signifikanz geprüft werden. Somit bilden diese Kategorien jeweils eine abhängige Variable. Die sog. Gruppenvariable (Einsatz in verschieden Settings) stellt eine dreistufige unabhängige Variable bzw. einen Gruppenfaktor dar (Bühner & Ziegler, 2017,

S. 529). Es soll der Einfluss des Gruppenfaktors (Einsatz in verschiedenen Settings) auf die abhängige Variable (*Angemessenheit*, *Grundvorstellungen* bzw. *Ergebnisrichtigkeit*) geprüft werden. Zusätzlich liegen drei MZP vor, d. h. die Variation der MZP ist ein weiterer Faktor im Untersuchungsdesign (Messwiederholungsfaktor) (ebd.). Dieser ist ebenso dreistufig sowie unabhängig. Es ergeben sich damit zwei Faktoren, die die Messwerte der Versuchspersonen systematisch beeinflussen: unterschiedliche Settings (dreistufig) sowie verschiedene MZP (dreistufig) (ebd.). Man nennt dies deswegen ein zweifaktorielles Design (ebd., S. 530). Da es sich um einen Gruppenfaktor (Between-subject-Faktor) und einen Messwiederholungsfaktor (Within-subject-Faktor) handelt, wird zusätzlich ein Between-subject-Design mit einem Within-subject-Design gemischt. Es bietet sich somit die Durchführung einer zweifaktoriellen Varianzanalyse (A-NOVA = Analysis of Variance) mit Messwiederholung im gemischten Design an (Bühner & Ziegler, 2017, S. 529 ff.). Es können dabei jeweils der Haupteffekt des Gruppenfaktors und des Messwiederholungsfaktors sowie der Interaktionseffekt zwischen den beiden Faktoren auf die abhängige Variable (Bearbeitung im Test) überprüft werden. Da statistisch überprüft werden soll, ob der Einsatz des Konzepts zum Multiplikativen Verständnis im Verlauf der MZP positive Effekte in den Interventionssettings A *Einzelförderung* und B *Klassenverband* zeigt, interessiert für die vorliegende Arbeit insbesondere der Interaktionseffekt zwischen Gruppenfaktor und Messwiederholungsfaktor (ebd.). In Fällen, in denen eine oder mehrere der Voraussetzungen (Normalverteilung, Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen, Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix, Sphärizität) für die Berechnung einer zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung im gemischten Design (und damit des Interaktionseffekts) nicht gegeben sind, werden zwei einfaktorielle Varianzanalysen gerechnet.

Die Heterogenität und Individualität der Bearbeitungen werden jeweils in der Beschreibung der prozentualen Anteile (s. o.) ausführlich dargestellt. Für die statistische Überprüfung möglicher Effekte der Intervention werden diese Ausprägungen nun zusätzlich vergröbert betrachtet. Dies ermöglicht es, Aussagen darüber zu treffen, ob Kinder im jeweiligen Setting nach der Intervention die Testaufgaben im Sinne der jeweiligen Kategorie systematisch häufiger erfolgreich bearbeiten.

Deswegen werden die Kategorien *Angemessenheit*, *Grundvorstellungen* und *Ergebnisrichtigkeit* in einem weiteren Schritt in eine metrische Variable umcodiert. Diese Variable wird als abhängige Variable in der anschließenden ANOVA verwendet. Es entstehen folgende Variablen:

- *Angemessenheit*
  - *angemessen (1)*
  - *nicht angemessen* (0), bestehend aus *nicht angemessen* und *teilweise angemessen*
- *Grundvorstellungen*
  - *multiplikativ (1)*
  - *nicht multiplikativ* (0), bestehend aus *additiv*, *beide* und *nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos*
- *Ergebnisrichtigkeit*
  - *vollständig passend (1)*
  - *nicht vollständig passend* (0), bestehend aus *nicht passend* und *ohne*

Damit entsteht jeweils eine sog. Dummy-Variable mit den Ausprägungen 0 und 1. Es werden jeweils die Anzahl der *angemessenen*, *multiplikativen* Bearbeitungen bzw. Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis für jedes Kind und jeden MZP aufsummiert (Summenindex). Dadurch ist zugleich eine der Voraussetzungen für den Einsatz einer ANOVA gegeben, dass die abhängige Variable intervallskaliert sein muss. Anmerkungen zur Erfüllung weiterer Voraussetzungen sind an entsprechender Stelle in Kapitel 8.1. zu finden.

Die quantitative Auswertung der Pre-Post- und Follow-up-Tests (vgl. Kap. 8.1) hat zum Ziel, das Konzept zur Förderung des Multiplikativen Verständnis über alle Settings insgesamt zu evaluieren.

6.3.3 Auswertung der Einzelförderung und Unterrichtsdokumentation

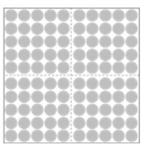
Die *qualitative* Analyse in der vorliegenden Arbeit fokussiert auf die Fallbeispiele der Kinder, die an den Einzelfördersitzungen (Setting A) teilgenommen haben.

Schon aufgrund des großen Umfangs des vorliegenden Datenmaterials (ca. 2385 Min.) kann die Einzelförderung mit acht Kindern in der vorliegenden Arbeit nicht vollständig analysiert werden. Es wird deswegen ein spezifischer Inhaltsaspekt bestimmt, zu dem bei allen acht Kindern entsprechende Abschnitte der Fördersitzungen ausgewählt werden. Eine ausführliche Darstellung und Begründung der Auswahl finden sich in Kap. 8.2.2.

Um die individuellen Vorgehensweisen der Kinder möglichst detailliert analysieren zu können, wird auch hier das Prinzip der emergenten Flexibilität angewandt, d. h. Instrumente und Fragestellungen der Datenerhebung und Auswertung können im Laufe der Untersuchung flexibel angepasst werden (Hussy et al., 2013, S. 191).

Da die Kinder in den Fördereinheiten (und Interviews) nicht nur zu sprachlichen Äußerungen, sondern auch zu Handlungen angeregt werden, werden von den Einzelsitzungen Videoaufnahmen erstellt. Es ist u. a. damit möglich, „das Geschehene mit einer gewissen Distanz zu verfolgen“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 146). Zu beachten ist dabei allerdings auch, dass mit Videokamera aufgezeichnete Gespräche „nie vollkommen authentisch abgebildet“ (ebd., S. 147) werden. Die handelnden Personen verhalten sich möglicherweise anders als sonst, da die Videokamera unter Umständen „eine hemmende Wirkung“ (ebd.) haben kann.

Für die Analyse ausgewählter Ausschnitte der Fördersitzungen werden Transkripte der Videoaufnahmen erstellt. Bereits das Übersetzen des Gehörten und Gesehenen in Schriftsprache beinhaltet Interpretation (Langer, 2013, S. 515). „Beim Transkribieren werden die gesprochenen Worte bzw. Wortfolgen, eventuell auch die lautliche Gestaltung sowie die die Rede begleitenden nichtsprachlichen Gesten oder Handlungen verschriftet“ (Langer 2013, S. 515 f.). Die Transkripte spiegeln jedoch die Gesprächssituationen nicht unmittelbar wider (ebd.). Sie sind als „spezifische wissenschaftliche Konstruktion“ (ebd.) anzusehen und bilden damit einen „stabile[n] Referenztext innerhalb der Forschung“ (ebd.). Transkripte können sehr unterschiedlich gestaltet sein (ebd.). Der Forschungsgegenstand, die Ziele und Fragen bestimmen die Detailliertheit und den Fokus (ebd.). Folgende Transkriptionsregeln werden für die Erstellung der Transkripte festgelegt (Selter & Spiegel, 1997, S. 150; Steinbring, 2000, S. 27) (Tab. 6.2).

36	eine Nummer pro Sprechbeitrag
I	Interviewerin
A, B/ AN, BE, A1, B2	Anfangsbuchstabe des Namens des Kindes; haben mehrere Kinder denselben Anfangsbuchstaben, wird der zweite Buchstabe des Namens hinzugefügt; haben mehrere Kinder denselben Namen, werden Ziffern hinzugefügt
Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ 	Angabe der Aufgabenstellung zu Beginn der Bearbeitung

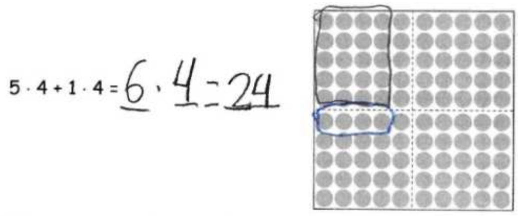
	eingescannte Kinder-Bearbeitung am Ende der Bearbeitung
‚Da hast du ja ‚ne interessante Lösung hingeschrieben.‘ wird zu ‚Da hast du ja eine interessante Lösung hingeschrieben.‘ ‚des‘ wird zu ‚das‘ ‚is‘ wird zu ‚ist‘	grundsätzlich wörtliche Transkription; Wortverschleifungen werden an das Schriftdeutsch angeglichen; Dialekt wird möglichst wortgenau ins Hochdeutsche übersetzt; syntaktische Fehler im Satzbau werden jedoch beibehalten
Ich gehe heuer auf das Oktoberfest, gell	ist keine eindeutige Übersetzung möglich, so wird der Dialekt beibehalten
(14 sec)	bei längeren Pausen ab 5 Sekunden ist deren Dauer angegeben; Sprechpausen bis zu vier Sekunden Länge werden nicht gekennzeichnet
die	besonders betonte Wörter werden durch Unterstreichung kenntlich gemacht
(lachend)	emotionale nonverbale Äußerungen werden in Klammern notiert
(unv.) (unv. rauschendes Mikrofon) (Punktefeld?)	unverständliche Wörter werden entsprechend gekennzeichnet, wenn möglich mit Ursache versehen; Vermutungen werden in Klammern mit Fragezeichen gesetzt
[*A zeigt auf die Darstellung*]	Handlungen etc. werden in kursiver Schrift und eckiger Klammer wiedergegeben
#	Der nächste Sprecher fällt dem vorherigen ohne Pause ins Wort
.,?	Satzzeichen werden weitgehend nach syntaktischen Regeln notiert, bei Senken der Stimme oder nicht eindeutiger Betonung wird eher ein Punkt als ein Komma gesetzt
Wenn/ da ist eine 3 und da ist auch eine 3.	unvollständige Wörter oder Halbsätze werden mit Abbruchzeichen gekennzeichnet
mhm (bejahend)	zustimmendes mhm
mhm (fragend)	fragendes mhm
mhm (verneinend)	ablehnendes mhm
	eigene Absätze für jeden Sprechbeitrag, auch kurze Einwürfe

Tabelle 6.2: Verwendete Transkriptionsregeln für die Erstellung der Transkripte

Im Unterschied zur quantitativen Auswertung der Tests (vgl. Kap. 8.1) werden bei der qualitativen Analyse zunächst stärker beschreibend Handlungen und Sprechinhalte des jeweiligen Kindes mit der Interviewerin interpretiert. Um dies zu erreichen, wird die Methode der systematisch-extensionalen Interpretation (Beck & Maier, 1994) bzw. die Interaktionsanalyse der Interpretativen Unterrichtsforschung nach Krummheuer & Naujok (1999) herangezogen. Bei der Interpretativen Unterrichtsforschung handelt es sich um eine Richtung innerhalb der Unterrichtsforschung (Krummheuer, Naujok, 1999, S. 15).

Ein charakteristisches Merkmal für Arbeiten der Interpretativen Unterrichtsforschung ist „die Fokussierung auf alltägliche Unterrichtsprozesse“ (ebd.). Ursprünglich fokussierten die An-hänger der Interpretativen Unterrichtsforschung der Mathematikdidaktik „stärker beschreibend auf das ‚Verstehen-Wollen‘ als vorschreibend auf ein ‚Verändern-Wollen‘ des Mathematikunterrichts“ (Schütte, 2009, S. 79). Neuere Arbeiten verfolgen das Ziel, neben der Beschreibung von Unterricht auch Vorschläge zu dessen Veränderung darzustellen (z. B. Fetzer, 2007; Schütte, 2009). Auch in der vorliegenden Arbeit sollen zusätzlich zur Analyse der Einzelfördersituation Vorschläge für die Umsetzung im alltäglichen Unterricht entwickelt werden.

Im Folgenden werden die einzelnen Verfahrensschritte der Analyse beschrieben. Die Schritte beziehen sich auf die systematisch-extensionale Interpretation nach Beck und Maier (1994, S. 50 ff.) bzw. die Interaktionsanalyse nach Krummheuer & Naujok (1999, S. 68 ff.).

1. Gliederung des Transkripts in kleinere Einheiten

Die Gliederung kann nach unterschiedlichen Kriterien stattfinden. In der vorliegenden Arbeit bietet es sich an, nach fachdidaktischen Kriterien zu gliedern (Krummheuer & Naujok, 1999, S. 69). Das heißt, ein Transkriptausschnitt wird eingeteilt in Elemente des Bearbeitungsprozesses der jeweils bearbeiteten Aufgabenstellung. Beck & Maier (1994) nennen diese Einheiten „Episoden“ (S. 51). Es wird zudem entschieden, mit welchem Transkriptausschnitt begonnen wird (ebd.).

2. Beschreibung einer ausgewählten Einheit

Es erfolgt im zweiten Schritt eine Beschreibung der ausgewählten Einheit „nach dem gesunden Menschenverstand“ (ebd.). Es geht hier um „eine erste mehr oder weniger spontane und oberflächliche Schilderung“ (Krummheuer & Naujok, 1999, S. 69).

3. Ausführliche Analyse

Im dritten Schritt werden die Einzeläußerungen ausführlich analysiert, Beck & Maier (1994) nennen dies „extensive Interpretation" (S. 51). Es werden mögliche Deutungsalternativen entwickelt (Krummheuer & Naujok, 1999, S. 69). Krummheuer & Naujok (1999) nennen folgende Eigenschaften der Interpretationsmöglichkeiten: „Die Äußerungen werden eine nach der anderen in der Reihenfolge ihres Vorkommens interpretiert, womit die Interpretationen nach vorne offen bleiben. Plausibilisierungen dürfen und können nur rückwärts gewandt erfolgen, Interpretationen müssen sich im Verlauf der Interaktion bewähren" (S. 69). Es soll „bewußt eine möglichst große Vielfalt von Interpretationsmöglichkeiten angestrebt" (Beck & Maier, 1994, S. 51) werden. Dafür versucht man „die Einzelhandlung zu verfremden, d. h. aus dem Blickwinkel einer Analyseperson zu betrachten" (ebd.).

4. Turn-by-Turn-Analyse

Mithilfe der Turn-by-Turn-Analyse im vierten Schritt „können die in der ausführlichen Analyse gewonnenen Deutungsalternativen eventuell wieder eingeschränkt werden" (Krummheuer & Naujok, 1999, S. 70), indem die verschiedenen Alternativen „mit den nächsten Handlungen der an der Interaktion Beteiligten verglichen" (Beck & Maier, 1994, S. 51) werden. Es wird also Äußerung B, die auf A folgt, analysiert und mit den entwickelten Interpretationsalternativen für Äußerung A verglichen (Krummheuer & Naujok, 1999, S. 70). Es wird dabei rekonstruiert, ob die Person der Äußerung B die vorausgehende Äußerung A entsprechend den entwickelten Deutungen aufgefasst haben könnte. Dadurch können einige alternative Deutungen, die im dritten Schritt entstanden sind, wegfallen.

Wie in anderen Arbeiten geschehen (z. B. Brand, 2004, S. 53; Tiedemann, 2012, S. 93), erfolgt bei der qualitativen Analyse der vorliegenden Arbeit eine Verbindung der ausführlichen Analyse (3) mit der Turn-by-Turn-Analyse (4).

> Dabei zeigt sich immer wieder eine besonders enge Verknüpfung zwischen der Interpretation von Einzeläußerungen und der sich anschließenden Einschränkung der Deutungsvielfalt durch Turn-by-Turn-Betrachtungen: Nicht alle Äußerungen werden extensiv ausgedeutet. Der Sinngehalt vieler Einzeläußerungen scheint – kontextgebunden – unter den InterpretInnen unstrittig und wird auch durch die Turn-by-Turn-Analyse bestätigt. (Brand, 2004, S. 53)

5. Zusammenfassende Interpretation

Die Einheit wird in einer begründeten Gesamtinterpretation zusammengefasst.

6. Auswahl weiterer Einheiten

Beck & Maier (1994) nennen zusätzlich einen sechsten Schritt, in dem weitere Einheiten aus den Transkripten ausgewählt werden, um eine vergleichende Analyse zu ermöglichen (S. 52). In der vorliegenden Arbeit werden aus den Fördersitzungen mit den acht Kindern bei jedem Kind jeweils dieselben Aufgabenstellungen ausgewählt.

Die Testergebnisse und Dokumentationen des Regelunterrichts (vgl. Kap. 6.2.3) ermöglichen eine Einbettung der in den Fördersitzungen gezeigten Verstehensprozesse. Zum einen werden die qualitativen Ergebnisse mit den quantitativen Ergebnissen der Auswertung des Paper-Pencil-Tests in Beziehung gesetzt. Zum anderen fließen die in den Unterrichtsdokumentationen erhaltenen Informationen über den erfahrenen Regelunterricht der teilnehmenden Kinder in die qualitative Analyse der Fördereinheiten ein, sodass ein umfassendes Bild der Einzelförderkinder entstehen kann.

7 Design und Durchführung

Im folgenden Kapitel wird auf Design und Durchführung des im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Projekts eingegangen. Um zunächst einen groben Überblick zu erhalten, wird das Gesamtkonzept zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses und dessen Durchführung vorgestellt (vgl. Kap. 7.1). In weiteren Abschnitten des Kapitels wird immer detaillierter auf einzelne Bestandteile des Konzepts eingegangen. Es werden allgemeine Designgrundlagen und die eigentliche Konzeption der Lernumgebungen zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses erläutert (vgl. Kap. 7.2 und Kap. 7.3). Um Kinder mit Förderbedarf bezüglich des Multiplikativen Verständnisses zu identifizieren, wird ein Paper-Pencil-Test zum Multiplikativen Verständnisses entworfen, der hier im Einzelnen vorgestellt wird (vgl. Kap. 7.4). Um zusätzlich Informationen über allgemeine arithmetische Kompetenzen der teilnehmenden Kinder zu erhalten, wird zudem der standardisierte Test BIRTE 2 eingesetzt, der im darauffolgenden Kapitel dargestellt wird (vgl. Kap. 7.5). Wie aufgrund der Auswertung des Tests zum Multiplikativen Verständnisses Kinder mit Förderbedarf identifiziert werden, wird im Anschluss daran dargelegt (vgl. Kap. 7.6).

7.1 Gesamtkonzept und Rahmenbedingungen

Nach Wittmann (1992, 1998a) kann Mathematikdidaktik als *design science* verstanden werden. In diesem Sinne sollte die Mathematikdidaktik „stabile Beziehungen zu den Bezugsdisziplinen“ (Wittmann, 1992, S. 56; Wittmann, 1998a, S. 330) sowie „einen guten Ausgleich zwischen Praxisnähe und theoretischer Distanz“ (ebd.) herstellen. Aus Sicht Wittmanns (1992; 1998a) „kann die spezifische Aufgabe der Mathematikdidaktik nur wahrgenommen werden, wenn die Entwicklung und Erforschung inhaltsbezogener theoretischer Konzepte und praktischer Unterrichtsbeispiele mit dem Ziel einer Verbesserung des realen Unterrichts als Kernbereich in den Mittelpunkt der wissenschaftlichen Arbeit gerückt wird“ (ebd.). Im Einzelnen nennt Wittmann (1998a) folgende Elemente, die seiner Ansicht nach zu diesem Kern gehören:

- Konzipierung lokaler mathematikdidaktischer Theorien [...]
- elementarmathematische Durchdringung von Unterrichtsinhalten [...]
- kritische Hinterfragung bzw. Rechtfertigung von Inhalten
- Erforschung von Lernvoraussetzungen und von Lehr-/Lernprozessen [...]
- Entwicklung substantieller Lernumgebungen und die Erforschung ihrer praktischen Umsetzbarkeit [...]
- Entwicklung und Evaluation von Curricula [...]

- Entwicklung von Methoden zur Vorbereitung, Gestaltung, Beobachtung und Analyse des Unterrichts. (ebd., S. 330)

Die Konzeption des Projekts zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses der vorliegenden Arbeit kann im Sinne dieser Idee von Mathematikdidaktik als *design science* verstanden werden. Dies soll in den folgenden Ausführungen deutlich werden.

Das Gesamtkonzept gliedert sich in verschiedene Ebenen (Abb. 7.1) (Lamprecht, 2015, S. 548). Es basiert auf einer Theorieebene mit drei Bausteinen. Diese beinhalten die übergeordneten Themenfelder *Inklusion*, *Fördern* und *Multiplikation* (vgl. Kap. 2, Kap. 3 und Kap. 4). Mit diesen drei Bausteinen trifft die Mathematikdidaktik auf die Bezugswissenschaften *Pädagogik*, *Psychologie* und *Mathematik*. Aufgrund der aus der Theorie gewonnenen Erkenntnisse werden auf der Designebene Lernumgebungen zum Multiplikativen Verständnis konzipiert. Diese Entwicklung der Lernumgebungen stellt das konstruktive Element des Projekts dar.

Da die Grundsatzfrage ist, wie Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen geeignet gefördert werden können (z. B. Haeberlin et al., 1991; Wocken, 2007; Wocken & Antor, 1987; vgl. Kap. 2.2), sind auf der Interventionsebene verschiedene Settings geplant: Setting A sieht den Einsatz des Förderkonzepts in der Einzelförderung vor (vgl. Kap. 7.3.1). In Setting B wird das Konzept im Klassenverband von Lehrkräften eingesetzt (vgl. Kap. 7.3.2). In der *Kontrollgruppe* wird der alltägliche Unterricht zur Multiplikation durchgeführt. Auf der Auswertungsebene können Effekte festgestellt, Vergleiche gezogen und Implikationen abgeleitet werden.

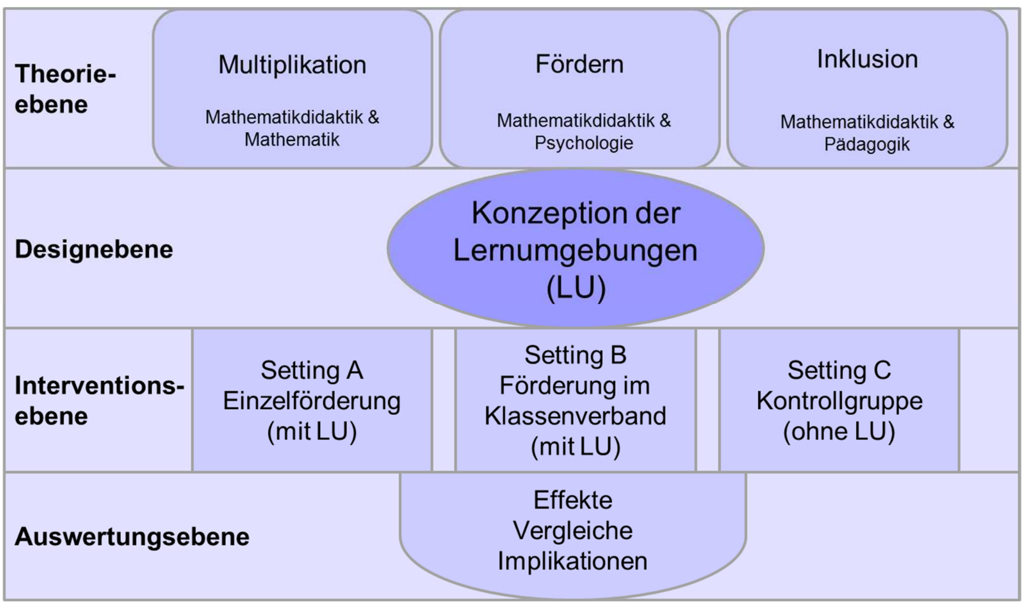


Abbildung 7.1: Übersicht über das Gesamtkonzept

Die Mixed-Methods-Studie wird mit drei Versuchsgruppen bestehend aus insgesamt 335 Schülerinnen und Schülern in 18 Klassen von Januar bis November 2015 durchgeführt. Zu drei Messzeitpunkten (MZP) werden Pre-, Post- und Follow-up-Tests durchgeführt. Es sind fünf Klassen dem Setting A *Einzelförderung* (89 Schülerinnen und Schüler), sieben Klassen (134 Schülerinnen und Schüler) dem Setting B *Klassenverband* und sechs Klassen (112 Schülerinnen und Schüler) dem Setting C *Kontrollgruppe* zugeordnet. Da zu Messzeitpunkt (MZP) 1 die Schülerinnen und Schüler bereits ein grundlegendes Verständnis zur Multiplikation erworben haben sollen, findet der Pre-Test ca. zwei Wochen nach Beginn der Behandlung der Multiplikation im Unterricht statt. Der Post-Test wird kurz nach der Intervention durchgeführt. Um Nachhaltigkeitseffekte feststellen zu können, wird der Follow-up-Test ca. drei Monate nach der Intervention durchgeführt. Die Pre-, Post-und Follow-up-Tests in den drei Settings führen zu Daten, die quantitativ ausgewertet werden können (vgl. Kap. 8.1).

Aus den fünf Klassen, die Setting A zugeordnet sind, nehmen acht Kinder (vier weiblich, vier männlich) an der Einzelförderung teil. Diese wird in der Lernwerkstatt der Mathematikdidaktik der Otto-Friedrich-Universität Bamberg durchgeführt. Die Einzelfördersitzungen werden durch Videoaufnahmen dokumentiert und können so qualitativ ausgewertet werden (vgl. Kap. 8.2).

Abbildung 7.2: Übersicht der Durchführung

7.2 Allgemeine Designgrundlagen

Aus der Arbeitsdefinition zum Multiplikativen Verständnis (vgl. Kap. 4.3) ergeben sich wichtige Wesenselemente, die beim Design der Lernumgebungen berücksichtigt werden, und auf die im Folgenden näher eingegangen wird.

7.2.1 Aufbau von Grundvorstellungen

Aus mathematischer Perspektive ergeben sich zwei Grundvorstellungen der Multiplikation (vgl. Kap. 4.2.2), die in die Arbeitsdefinition aufgenommen werden (vgl. Kap. 4.3) und die somit als didaktische Kategorien (vom Hofe, 1992, S. 358) für die Entwicklung der Testaufgaben zum Multiplikativen Verständnis leitend sind:

- *wiederholte Addition*
- *kartesisches Produkt*

Je nach Art der Aufgabenstellung kann die eine oder andere Grundvorstellung für den Bearbeitungsprozess nahegelegt werden.

Die Grundvorstellung der *wiederholten Addition* wird in Aufgaben mit Veranschaulichungen nahegelegt, die die gleichmächtigen disjunkten Mengen deutlich machen (Abb. 7.3) (z. B. Padberg & Benz, 2011, S. 14; vgl. 4.2.8). In diesem Fall kann dies zunächst additiv als $5 + 5 + 5$ und dann als verkürzte Addition multiplikativ mit $3 \cdot 5$ interpretiert werden.

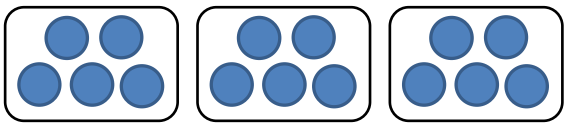


Abbildung 7.3: Abbildung von didaktischem Material zu 3 · 5 (wiederholte Addition)

Die Grundvorstellung des *kartesischen Produkts* kann anschaulich gemacht werden, indem die beiden Faktoren des Produkts als Dimensionen einer Felddarstellung aufgefasst werden. Diese spannen eine Matrix mit einer spezifischen Anzahl an Spalten und Zeilen auf (Küchemann & Hodgen, 2018, S. 12; Ruwisch, 1999, S. 132; Steinweg, 2013, S. 132). Aufgaben, die diese Grundvorstellung nahelegen, enthalten Veranschaulichungen, die die Elemente in Zeilen und Spalten angeordnet darstellen (Abb. 7.4) (vgl. 4.2.8).

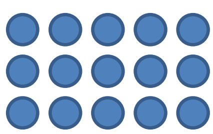


Abbildung 7.4: Abbildung von didaktischem Material zu 3 · 5 oder 5 · 3 (kartesisches Produkt)

7.2.2 Verwendung von Darstellungsformen

Verständnis für einen mathematischen Inhalt kann dann angenommen werden, wenn die Schülerinnen und Schüler unterschiedliche Darstellungen (Handlung, Bild oder Realsituation) aktivieren können (Bönig, 1995a, 1995b; Wartha & Schulz, 2011; vgl. 4.2.3.3). Um bei Kindern Multiplikatives Verständnis zu entwickeln, werden deswegen neben Aufgaben in der Symbolform geeignete Sachkontexte und passendes didaktisches Material eingesetzt. Die Aufgaben der Lernumgebungen und Testaufgaben werden in unterschiedlichen Darstellungsformen präsentiert. Unterschieden wird zwischen

- Kontextbezug,
- didaktischem Material und
- Symbolform.

Aufgaben mit *Kontextbezug* beziehen sich grundsätzlich auf einen bestimmten Kontext (Abb. 7.5). Für derartige Aufgaben werden Kompetenzen erforderlich, die unter der inhaltlichen Kompetenz *Modellieren* der Bildungsstandards für den Primarbereich im Fach Mathematik für die bayerischen Grundschulen zu finden sind.

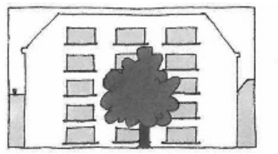


Abbildung 7.5: Kontextbezug zu 3 · 5 oder 5 · 3 (Selter, 2002, S. 19)

Hier versteht man unter Modellieren u. a. die Kompetenz, „Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen [zu] entnehmen" und „Sachprobleme in die Sprache der Mathematik [zu] übersetzen" (KMK, 2005, S. 8). Aufgaben mit Kontextbezug sind Aufgaben, die ein Bild oder einen Text mit Sachbezug enthalten (Abb. 7.5).

Aufgaben mit *didaktischem Material* enthalten Darstellungen von didaktischem Material und erfordern Kompetenzen, die unter der inhaltlichen Kompetenz *Darstellen* der Bildungsstandards genannt werden. Darstellen meint dort u. a., dass „für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickel[t], auswähl[t] und [ge]nutz[t]" werden (KMK, 2005, S. 8). Aufgaben mit didaktischen Darstellungen erfordern es, Abbildungen von didaktischem Material zu erstellen oder diese entsprechend zu deuten.

Als geeignetes didaktisches Material werden für das *kartesische Produkt* das Punktefeld (Darstellung A in Abb. 7.6), für die *wiederholte Addition* Punktemengen (Darstellung B in Abb. B) sowie Rechenstriche (Darstellung C in Abb. 7.6) ausgewählt.

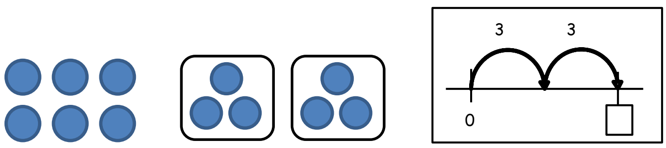


Abbildung 7.6: Didaktisches Material zu 2 · 3 (v. l. A, B und C)

Zur Kategorie *Symbolform* gehören Aufgaben, die lediglich in der symbolischen Form dargestellt sind. Hierbei werden weder Kontext noch didaktisches Material durch die Aufgabe vorgegeben.

7.2.3 Wechsel zwischen den Darstellungsformen

Multiplikatives Verständnis liegt dann vor, wenn unterschiedliche Darstellungsformen genutzt werden (vgl. 4.2.3). Dazu ist es wichtig, dass wechselseitige Übersetzungsprozesse stattfinden (Bönig, 1995a, 1995b; Wartha & Schulz, 2011; vgl. 4.2.3.3).

Die Aufgaben der Darstellungsformen *Kontextbezug* und *didaktisches Material* werden deswegen so ausgewählt, dass zur Bearbeitung verschiedener Aufgaben jeweils unterschiedliche Übersetzungsrichtungen erforderlich sind:

- Übersetzung in die Symbolform
- Übersetzung von der Symbolform

Die Übersetzung in die Symbolform beinhaltet, dass Kontext oder didaktisches Material bzw. Abbildungen davon in die Symbolform übersetzt werden. Bei der umgekehrten Übersetzungsrichtung werden Aufgaben in der Symbolform in den Kontext oder didaktisches Material bzw. Abbildungen davon übersetzt.

7.2.4 Eigenschaften der Multiplikation

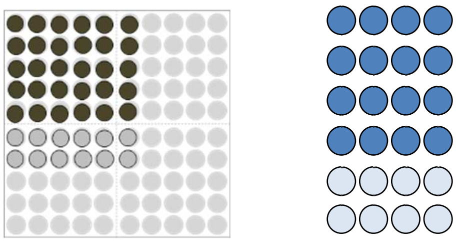


Abbildung 7.7: Darstellungen von didaktischem Material für $5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 7 \cdot 6$ und $5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 7 \cdot 4$

Es werden Aufgaben entworfen, bei denen die Eigenschaften Kommutativität und Distributivität durch die Aufgabe deutlich werden und bei der Bearbeitung genutzt werden können (vgl. Kap. 4.2.8). Dies kann durch wechselseitige Übersetzungsprozesse zwischen Darstellungen von didaktischem Material und Symbolform erfolgen (Abb. 7.7).

Um die Multiplikation und insbesondere ihre Eigenschaften mathematisch vollständig erschließen zu können, sind Darstellungen wie das Punktefeld geeignet, die die Faktoren des Produkts in Zeilen und Spalten darstellen

(Lamprecht & Steinweg, 2017, S. 189; Schulz, 2017, S. 18; Steinweg, 2013, 132 ff.; Wittmann & Müller, 2017, S. 204; vgl. 4.2.8).

7.2.5 Weitere Anmerkungen

In den Lernumgebungen zur Förderung und im Test werden Aufgaben eingesetzt, die aus Zusammenspiel von Text und Bild bestehen, oder nur Text enthalten. Verschiedene Studien zu Fehlern beim Lösen von Sachaufgaben (Bremer & Dahlke, 1980, S. 11 ff.; Radatz, 1983, S. 212 ff.) haben gezeigt, dass u. a. sprachlich-syntaktische und semantische Strukturen schwierigkeitssteigernde Faktoren darstellen können (Franke & Ruwisch, 2010, S. 80). Somit wird bei der Konzeption der Lernumgebungen darauf geachtet, dass der Text möglichst einfach und kurz formuliert ist, um Verständnisschwierigkeiten, die allein auf sprachliche oder semantische Schwierigkeiten zurückzuführen sind, zu verringern bzw. möglichst zu vermeiden.

Um die Möglichkeit des vollständigen Abzählens der einzelnen Elemente innerhalb der dargebotenen Bilder zu verhindern, werden im Test Bilder eingesetzt, „bei denen die multiplikative Struktur gestört ist“ (Selter, 2002, S. 15), d. h. bei denen ein Teil der Elemente verdeckt ist (Abb. 7.5). Scherer (2007) unterscheidet diesbezüglich zwischen Darstellungen, in denen die Elemente vollständig *abzählbar* bzw. *abzählbar mit mentaler Ergänzung* präsentiert werden. *Abzählbar* bedeutet, dass alle Elemente tatsächlich in der Darstellung enthalten sind. *Abzählbar mit mentaler Ergänzung* meint, dass z. B. ein Punktefeld teilweise verdeckt ist und einige Elemente sich dazugedacht werden müssen (ebd., S. 10).

7.2.6 Zusammenfassende Übersicht

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2"></th><th colspan="2">Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><th>kartesisches Produkt</th><th>wiederholte Addition</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Darstellungsformen</td><td rowspan="2">Kontextbezug</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">didaktisches Material</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 7.1: Matrix für die Lernumgebungen zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses

In der Zusammenfassung der obigen Überlegungen ergibt sich eine Matrix von Aufgaben zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses (Tab. 7.1).

7.3 Konzeption der Lernumgebungen zur Förderung des Multiplikativen Verständnisses

Um Förderung in allen Bereichen der Matrix zu ermöglichen, werden für jeden Bereich passende Aufgaben entworfen. Die grauen Markierungen in Tabelle 7.1 umfassen jeweils einen Bereich, der, wenn möglich, in einer Fördersitzung thematisiert werden soll.

7.3.1 Design und Durchführung des Konzepts in der Einzelförderung

Die Einzelförderung zum Multiplikativen Verständnis wird im Allgemeinen nach den Fördergrundsätzen nach Schipper et al. (2011) konzipiert. Diese empfehlen folgende Grundsätze:

1. Die Förderung knüpft an vorhandene Kompetenzen an,
2. entwickelt Rechenoperationen aus Handlungen an Materialien und
3. unterstützt den Prozess der Verinnerlichung von Handlungen zu mentalen Vorstellungen und Schemata. (ebd., S. 108)

Damit an vorhandene Kompetenzen angeknüpft werden kann, wird die Bearbeitung des jeweiligen Kindes im Pre-Test zum Multiplikativen Verständnis genau analysiert und die Aufgaben aus den Förderbausteinen für die Fördereinheiten entsprechend ausgewählt. Je nach individuellem Bedarf finden pro Kind durchschnittlich 6,6 Sitzungen von ca. 45 Minuten statt, die per Video aufgenommen werden (insgesamt ca. 2385 Min.). Insgesamt nehmen acht Kinder an der Einzelförderung teil.

Pro Sitzung werden ein bzw. zwei Einzelbereiche entsprechend den grauen Markierungen in Tabelle 7.1 geplant. Sollten die vorgenommenen Aufgaben in der gegebenen Zeit nicht bearbeitet werden können, werden sie auf die folgende Sitzung verschoben.

Im Vorfeld der Intervention findet von Juni bis Oktober 2014 in der Lernwerkstatt der Mathematikdidaktik und des Sachunterricht der Otto-Friedrich-Universität Bamberg eine Pilotstudie im Setting A *Einzelförderung* mit acht Kindern (vier weiblich, vier männlich) in einem Pre-Post-Follow-up-Design statt. Die Post- und Follow-up-Ergebnisse der Tests zeigen, dass die Fördereinheiten noch zu wenig nachhaltig sind. Rückbezüge und Vernetzungen sind für ein nachhaltiges Lernen natürlich sehr wichtig (z. B. Schermer, 2006, S. 116 ff.). Deswegen wird die Einzelförderung im Wesentlichen durch Wiederholungseinheiten erweitert. In jeder Sitzung werden Inhalte der vorangegangen Sitzung wiederholt, in der letzten Sitzung findet eine Wiederholung aller Sitzungen statt.

Auf die Durchführung der Förderung in den verschiedenen Bereichen wird in den folgenden Abschnitten eingegangen.

7.3.1.1 Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit Kontextbezug

Kartesisches Produkt

In diesem Bereich werden den Kindern Abbildungen (Abb. 7.8), Gegenstände und Texte mit Kontextbezug vorgelegt, in denen Produkte in Form von Zeilen und Spalten angeordnet sind (z. B. Lorenz, 2005b, S. 4). Zu diesem sollen die Multiplikationsaufgaben in symbolischer Schreibweise gefunden werden.

Abbildung 7.8: Beispiel für eine Abbildung zu 3 · 4 oder 4 · 3 (Faktoren in Spalten und Zeilen angeordnet)

In Abbildung 7.8 wird jeweils die Malaufgabe 3 · 4 oder 4 · 3 dargestellt. Dies ist abhängig davon, ob man zuerst die 3 Zeilen und dann die 4 Spalten ‚liest' oder umgekehrt. Beides ist als mögliche, richtige Lösung zu akzeptieren, da die Gesamtzahl der Objekte gleich bleibt (Steinweg, 2013, S. 132).

Ein Beispiel für eine Geschichte zum *kartesischen Produkt* ist folgende:

> *In der Kiste liegen 4 Reihen Birnen. In jeder Reihe sind 7 Birnen. Wie viele Birnen sind in der Kiste?*

Geeignete Gegenstände können z. B. Eierschachteln, Toffifee-Schachteln (Plastik), Getränkekästen oder Puzzle sein, in denen die Zeilen und Spalten als Dimensionen des Produkts deutlich werden.

Der Arbeitsauftrag zu dieser Aufgabe sowie auch zu weiteren Aufgaben, die eine Übersetzung in die Symbolform erfordern, lautet jeweils:

> *Finde passende Malaufgaben und rechne aus.*

Wiederholte Addition

Auch bei diesem Förderbereich werden Abbildungen, Texte oder Gegenstände eingesetzt, die jeweils durch Sachkontext ein Produkt darstellen (z. B. Bönig, 1995a, S. 93; Lorenz, 2005b, S. 4). Es soll jeweils die symbolische Form des Produkts gefunden werden. In diesem Bereich wird die *wiederholte Addition* nahegelegt (Abb. 7.9).

Abbildung 7.9: Beispiel für eine Abbildung zu 4 · 3 (wiederholte Addition)

Mögliche Gegenstände, die hierzu verwendet werden können, sind z. B. Holzperlenketten oder Luftballons an einer Schnur (jeweils in bestimmter farblicher Anordnung, z. B. immer drei in einer Farbe).

7.3.1.2 Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform mit Kontextbezug

Kartesisches Produkt/wiederholte Addition

Umgekehrt werden verschiedene Malaufgaben vorgegeben, zu denen jeweils konkrete Sachkontexte gefunden werden sollen. Diese können entweder als Bilder dargestellt oder als Geschichten erzählt und aufgeschrieben werden.

Die Arbeitsaufträge lauten hier:

> *Zeichne ein Bild zu ... und rechne aus. Schreibe eine Geschichte zu ... und rechne aus.*

Die Besonderheit ist hier, dass die Grundvorstellung aufgrund der Aufgabenstellung nicht eindeutig zugeordnet werden kann. Erst wenn die Aufgabe ausgeführt wurde, kann die entsprechende Bearbeitung möglicherweise einer Grundvorstellung zugeordnet werden (vgl. 6.3.2.1).

7.3.1.3 Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit didaktischem Material

Kartesisches Produkt

Dieser Bereich enthält Aufgaben, die eine Übersetzung von didaktischem Material oder dessen Abbildungen in die symbolische Schreibweise erfordern. Es soll die Grundvorstellung des *kartesischen Produkts* entwickelt werden, sodass die Einzelelemente des didaktischen Materials in Zeilen und Spalten angeordnet sind (Abb.7.10). Der Einsatz von Punktefeldern bietet sich hier an.

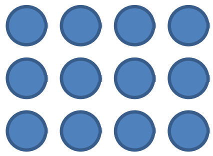


Abbildung 7.10: Abbildung von didaktischem Material zu 3 · 4 oder 4 · 3 (kartesisches Produkt)

Im Konzept werden Punktefelder auf unterschiedliche Art und Weise eingesetzt (z. B. Wittmann & Müller, 2010, S. 110 ff.).

Zu entsprechend auf das Punktefeld gelegten Plättchen wird jeweils das passende Produkt gefunden (Abb. 7.11).

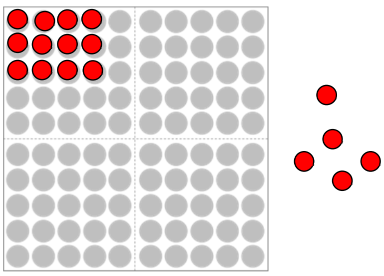


Abbildung 7.11: Malaufgabe auf dem Punktefeld abgedeckt und mit Plättchen gelegt (3 · 4 oder 4 · 3)

In aus Punktefeldern ausgeschnittenen Feldern werden entsprechende Produkte identifiziert (Abb. 7.12).

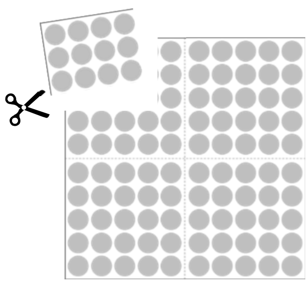


Abbildung 7.12: Malaufgabe aus dem Punktefeld ausgeschnitten (3 · 4 oder 4 · 3)

Darstellungen auf dem Punktefeld sind geeignet, die Eigenschaften der Multiplikation Kommutativität und Distributivität anschaulich zu machen.

Wie bereits erwähnt, kann in den Abbildungen 7.10 bis 7.12 die Malaufgabe $3 \cdot 4$ und die zugehörige Tauschaufgabe $4 \cdot 3$ hineingesehen werden, je nachdem, von welcher Seite man die Aufgabe ‚zuerst' sieht. Es findet also die Eigenschaft der Kommutativität Anwendung. Hier ist das Bewusstmachen der zwei verschiedenen Sichtweisen von Bedeutung.

Mithilfe von Plättchen, durch Einzeichnen oder durch Zerschneiden kann auf dem Punktefeld auch die Eigenschaft der Distributivität ($4 \cdot 3 = (1 + 3) \cdot 3 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3$ oder auch $3 \cdot 3 = (4 - 1) \cdot 3 = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 3$) anschaulich gemacht werden (Steinweg, 2013, S. 141 ff.; Wittmann & Müller, 2010, S. 110 ff.). Die Distributivität wird durch das Finden der passenden Aufgaben zu entsprechend gelegten Plättchen oder zerschnittenen Punktefeldern anschaulich gemacht (Abb. 7.13). Dazu können dann die passenden Summen bzw. Differenzen von Produkten gefunden werden.

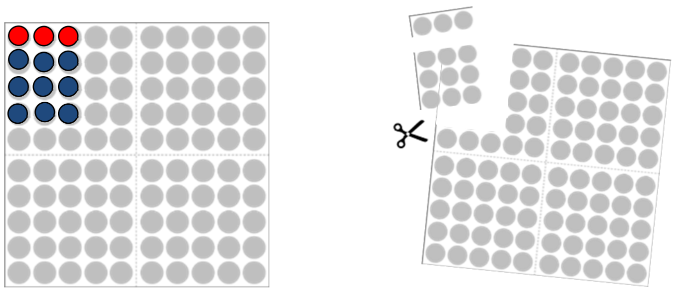


Abbildung 7.13: Distributivität auf dem Punktefeld anschaulich gemacht ($1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$, $3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$ oder auch $4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$)

Einzugehen ist hier auch auf den Zusammenhang von $1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$ oder $3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$ zu $4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3$ oder $4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3 \cdot 3$, da dieser nicht automatisch von den Kindern gesehen wird.

Wiederholte Addition

Auch die Entwicklung der Grundvorstellung der *wiederholten Addition* ist möglich, indem die Elemente des didaktischen Materials (oder deren Abbildungen) entsprechend angeordnet sind (Abb. 7.14 und Abb. 7.15).

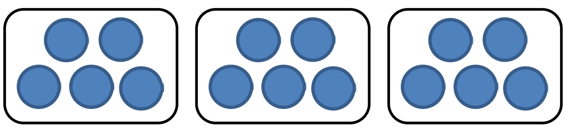


Abbildung 7.14: Abbildung von didaktischem Material zu $5 + 5 + 5$ und $3 \cdot 5$ (wiederholte Addition)

Dies ist in Form von Mengenbildern möglich (Abb. 7.14), in denen die Punkte zu gleichmächtigen Mengen gruppiert sind. Eine weitere Möglichkeit ist es, Produkte auf dem Rechenstrich darzustellen (Abb. 7.15).

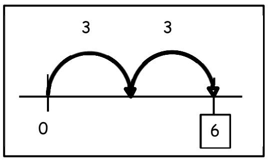


Abbildung 7.15: Didaktisches Material ‚Rechenstrich' zu 3 + 3 oder 2 · 3

7.3.1.4 Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform mit didaktischem Material

Kartesisches Produkt

Umgekehrt soll auch hier Verständnis für die entgegengesetzte Übersetzungsrichtung entwickelt werden, d. h. zu den Aufgaben in der Symbolform werden jeweils passende Darstellungen gefunden (Wittmann & Müller, 2010, S. 110 ff.). Zu Produkten werden Plättchen entsprechend auf ein Punktefeld gelegt (Abb. 7.11) oder zu Malaufgaben werden passende Punktefelder eingezeichnet (Abb. 7.16). Es können Produkte auch aus Punktefeldern entsprechend ausgeschnitten werden (Abb. 7.12).

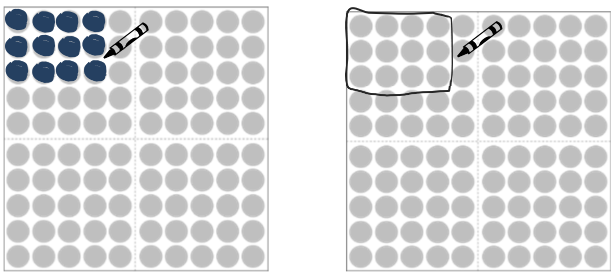


Abbildung 7.16: Malaufgabe auf dem Punktefeld eingezeichnet (3 · 4 oder 4 · 3)

Auch Verständnis für die Eigenschaften der Multiplikation, Kommutativität und Distributivität, kann in dieser Übersetzungsrichtung gefördert werden. Im Konzept soll dies durch Einzeichnen (Abb. 7.17) und Zerschneiden (Abb. 7.13) von Ausschnitten auf dem Hunderterpunktefeld erreicht werden.

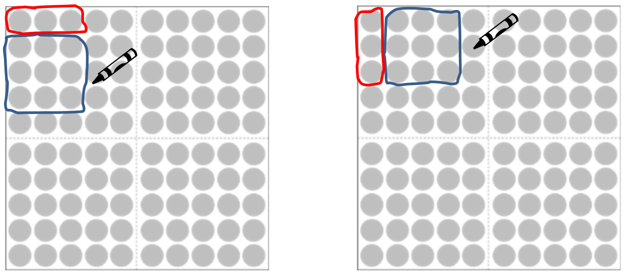


Abbildung 7.17: Distributivität auf dem Punktefeld durch Einzeichnen anschaulich gemacht ($1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$, $3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$ oder auch $4 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9$, $4 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$)

Passende Arbeitsaufträge sind hier:

Lege .... Zeichne .... Schneide ... und rechne aus.

Verwendete Materialien sind leere Punktefelder, Wendeplättchen, Schere und Stifte.

Wiederholte Addition

Auch hier können Malaufgaben von der symbolischen Form in die Darstellung von didaktischem Material übertragen werden. Es werden einzelne Elemente in Form von Punkten so eingerahmt, dass die entsprechende Malaufgabe deutlich wird. Auf dem leeren Rechenstrich werden vorgegebene Malaufgaben eingezeichnet bzw. auf dem am Boden fixierten Rechenstrich gelegt.

Die Arbeitsaufträge lauten hier:

Zeichne ... ein und rechne aus.

Benötigte Materialien sind Mengenbilder und leere Rechenstriche.

7.3.1.5 Symbolform

In diesem Förderbereich werden Aufgaben in symbolischer Form ohne Veranschaulichung oder Sachkontext dargeboten.

Es werden Aufgabenpäckchen zum Weiterdenken und Ergänzen angeboten. ‚Schwere' Malaufgaben werden präsentiert, die unter Anwendung der Distributivität mithilfe von Kernaufgaben gelöst werden sollen. Wenn die Aufgaben $1 \cdot 6$ und $2 \cdot 6$ gelöst wurden, kann zu $3 \cdot 6$ die Lösung durch $1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 6 + 12 = 18$ gefunden werden.

Folgende Arbeitsaufträge sind hier denkbar:

Rechne aus. Womit hast du angefangen?

Eine weitere Aufgabenstellung beinhaltet, neben dem Ausrechnen der Aufgaben noch weitere Aufgaben aufzuschreiben, die dazu passen (Wittmann & Müller, 2010, S. 123 f.). Der erste Faktor wird beim Päckchen in Abbildung 7.18 immer um 2 erhöht. Dadurch erhöht sich das Ergebnis immer um zweimal den zweiten Faktor, also $2 \cdot 3 = 6$.

$2 \cdot 3 =$ ___
$4 \cdot 3 =$ ___
$6 \cdot 3 =$ ___
____
____

Abbildung 7.18: Aufgabenpäckchen zum Weiterdenken

Die fehlenden Aufgaben würden hier lauten:

$8 \cdot 3 =$ ___
$10 \cdot 3 =$ ___

Arbeitsaufträge lauten hier:

Rechne aus. Wie geht es weiter? Was passiert?

Bei einer weiteren Aufgabenstellung sollen möglichst viele Rechenwege zu einer angegebenen Malaufgabe gefunden werden (Selter, 1995b, S. 12). Das angegebene Beispiel zeigt mögliche Ideen.

Die Eigenschaften Kommutativität und Distributivität können hier von den Kindern genutzt werden.

Durch die Aufgabenstellung *Finde viele Rechenwege* sollen die Kinder angeregt werden, von den angegebenen Malaufgaben Beziehungen zu weiteren Malaufgaben herzustellen.

Beispiel:
$6 \cdot 8 =$
$5 \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 40 + 8 = 48$
$8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48$
$8 \cdot 6 = 48$
$2 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 16 + 32 = 48$
$8 \cdot 8 - 2 \cdot 8 = 64 - 16 = 48$

Abbildung 7.19: Verschiedene Rechenwege zu 6 · 8

Des Weiteren wird eine Gleichung vorgegeben, deren Richtigkeit überprüft werden soll. Es ist jeweils *richtig* oder *falsch* anzukreuzen (Abb. 7.20).

$3 \cdot 10 = 10 \cdot 2$
☐ ja ☐ nein

Abbildung 7.20: Beispiel für eine Gleichung, deren Richtigkeit überprüft werden soll

Die Eigenschaften Kommutativität und Distributivität werden durch die Aufgaben bestätigt oder kontrastiert.

Unter dem Arbeitsauftrag *Stimmt das?* zeigen die Kinder ihr Wissen über die Nutzung dieser Eigenschaften.

7.3.1.6 Einsatz von Interviews

Um die Fördersitzungen noch genauer auf die Kompetenzen des jeweiligen Kindes abstimmen zu können, werden zu Beginn jeder Fördersitzung Interviews durchgeführt. Das erste Interview in der ersten Fördereinheit bezieht sich auf jeweils ein Testitem aus allen Bereichen, in denen das Kind nur teilweise oder nicht angemessene Bearbeitungen zeigt. Die kurzen Interviews zu Beginn jeder weiteren Sitzung beziehen sich auf ein Item aus dem für die jeweilige Sitzung ausgewählten Bereich. Um dem Verständnis der Kinder für den jeweiligen Inhaltsbereich genauer auf die Spur zu kommen, gehen die vor jedem Interview festgelegten Leitfragen gezielt auf das Vorgehen der Kinder bei den Testitems ein, wie z. B. in folgender Art: *Hier hast du ja eine spannende Lösung aufgeschrieben. Woher hast du das gewusst?* (Selter & Spiegel, 1997, S. 102; Steinweg, 2001, S. 213). Auf diese Weise sollen die Kinder dazu ermutigt werden, ihre Vorgehensweise zu erklären. Für den Fall, dass das jeweilige Kind bei einem Testitem nichts notiert hat, wird dem Kind eine zum jeweiligen Item angemessene Bearbeitung gezeigt, zu der es sich äußern soll. Hat das Kind die Aufgabe unpassend bearbeitet, kann der Vergleich der eigenen nicht angemessenen Bearbeitung mit einer anderen angemessenen Bearbeitung kognitive Konflikte provozieren (ebd., S. 103). Auch dadurch soll das Kind angeregt werden, über die Bearbeitungen nachzudenken und sich zu diesen zu äußern. Je nach Äußerungen des Kindes werden die Fördersitzungen entsprechend den spezifischen Fähigkeiten des Kindes angepasst.

7.3.2 Design und Durchführung des Konzepts im Klassenverband

Da das Konzept zur Förderung im alltäglichen Unterricht einsetzbar sein soll, wird es in Setting B *Klassenverband* von Lehrkräften, die freiwillig ihre Teilnahme am Projekt zugesagt haben, in ihren jeweiligen Klassen durchgeführt. Die Lehrkräfte erhalten dafür entwickelte „Unterrichtsmaterialien zur Förderung des Einmaleins" (Lamprecht, 2014). Mit den Lehrkräften wird vereinbart, dass sie diese Materialien zusätzlich bzw. anstelle ihrer bisher verwendeten Unterrichtsmittel in ihrer jeweiligen Klasse einsetzen. Die Unterrichtsmaterialien enthalten zu Beginn allgemeine Hinweise zu Grundvorstellungen der Multiplikation, den Eigenschaften Kommutatvitität und Distributivität, den drei Darstellungsformen und den empfohlenen Übersetzungsprozessen. Es folgt die Beschreibung der Lernumgebungen mit Kopiervorlagen in drei Bausteinen: kontextbezogene Aufgaben, Aufgaben mit didaktischem Material und Aufgaben in der Symbolform.

Um einen Einblick in den tatsächlich stattgefundenen Unterricht zu erhalten, werden die Lehrkräfte gebeten, eine Lehrerdokumentation über die Anzahl der Unterrichtsstunden, das verwendete Material und die Unterrichtsthemen anzufertigen. Um diese Dokumentation zu erleichtern, erhalten alle teilnehmenden Lehrkräfte eine Vorlage, in die sie entsprechende Informationen eintragen (Tab. 7.21).

Name der

Lehrkraft:________________________Schule:____________________________

Klasse: _________ Schülerzahl: ________

verwendetes Schulbuch:____

Februar	**Mathestunden** 1 2 3 4 5 6 ○○○○○○	**Schulbuchseite, Aufgabe Kopiervorlage***	**Anschauungs-Material**	**Unterrichtsthema****
Mo, 23.2.	○●○○○○	*B. S. 53, Nr. 1, 4 - 6*	*Plättchen*	*Tauschaufgaben*
Die, 24.2.	●○○○○○	*AB ‚Quadratzahlen‘*	*Punktefelder*	*Einmaleins mit Quadratzahlen*
...	...	…	…	…

Abbildung 7.21: Ausschnitt aus der Unterrichtsdokumentation

7.4 Konzeption des Paper-Pencil-Tests zum Multiplikativen Verständnis

Um Hinweise auf einen möglichen Förderbedarf bezüglich des Multiplikativen Verständnisses feststellen zu können, wird der Test zum Multiplikativen Verständnis als Paper-Pencil-Test durchgeführt und zusätzlich bei den Kindern, die an der Einzelförderung teilgenommen haben, durch Interviews ergänzt (vgl. Kap. 7.3.1.6). Die Reihenfolge der Testaufgaben wurde so gewählt, dass Aufgaben verschiedener Kategorien aufeinanderfolgen (Tab. 7.2).

Um den Kinder-Bearbeitungen der Testaufgaben möglichst umfangreiche Informationen entnehmen zu können, werden die Aufgabenstellungen entsprechend gestaltet. Die drei Kategorien Informativität, Offenheit und Prozessbezug von Sundermann & Selter (2006) liefern Hinweise bezüglich der Gestaltung von Aufgaben (ebd., S. 74 ff.). Informative Aufgaben sind nach Sundermann & Selter (2006) solche, „bei denen die Vorgehensweise für die Einschätzung der Leistungen der Schülerinnen und Schüler relevant ist“ (ebd. S. 75). Das heißt, mit dieser Art von Aufgaben kann „mehr über die Lösungswege der Kinder erfahren“ (ebd. S. 79) werden und es wird Raum für Nebenrechnungen und Erläuterungen gelassen (ebd.). Offene Aufgaben sind so konzipiert, dass verschiedene Ergebnisse möglich sind (ebd. S. 75). Prozessbezogene Aufgaben richten den

Schwerpunkt auf das Entdecken, Begründen und Übertragen von Ergebnissen (ebd. S. 96). Die Aufforderung *So rechne ich* mit genügend Platz für Rechenschritte in einigen der Testitems soll Raum für Lösungswege und Nebenrechnungen geben (Informativität) und zudem die Bearbeitungen hinsichtlich einer Lösung möglichst wenig einengen (Offenheit). Der Arbeitsauftrag *So rechne ich im Kopf* (Nr. 9) wird gewählt, um ebenfalls Raum für Erläuterungen (Informativität) und Begründungen (Prozessbezogenheit) zu geben (vgl. auch Kap. 6.1.2).

Aufgrund der Erfahrungen in der Pilotstudie werden geringfügige Veränderungen an einzelnen Testitems vorgenommen.

Der Test besteht in der Endfassung aus 16 Items. 15 Items ermöglichen offene Beantwortungen, ein Item enthält Antwortvorgaben zum Ankreuzen (Döring & Bortz, 2016, S. 408).

7.4.1 Überblick zum Testdesign

<table>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="2">Grundvorstellungen</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>kartesisches Produkt</td><td>wiederholte Addition</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Darstellungsformen</td><td rowspan="2">Kontextbezug</td><td>in die Symbolform</td><td>Nr. 1 (K)
$\boxed{\text{Nr. 5 (NK)}}$</td><td>Nr. 8 (K)
Nr. 4 (NK)</td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td colspan="2">$\boxed{\text{Nr. 16 (K)}}$
Nr. 13 (NK)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">didaktisches Material</td><td>in die Symbolform</td><td>Nr. 7 (K) $\boxed{\text{E}}$
Nr. 2 (NK) $\boxed{\text{E}}$</td><td>Nr. 6 (K)
$\boxed{\text{Nr. 10 (NK)}}$</td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td>$\boxed{\text{Nr. 14 (K) E}}$
Nr. 11 (NK)</td><td>Nr. 15 (K)
Nr. 12 (NK)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbolform</td><td colspan="2">Nr. 3 (K) $\boxed{\text{E}}$
Nr. 9 (NK) $\boxed{\text{E}}$</td></tr>
</table>

$\boxed{\text{E}}$ *Nutzung der Eigenschaften der Operation wird nahegelegt*
K *Kernaufgabe*
NK *Nicht-Kernaufgabe*

Tabelle 7.2. Matrix der Testitems

Die entworfenen Testitems zum Multiplikativen Verständnis orientieren sich an der Matrix für die Lernumgebungen zur Förderung (Tab. 7.2).

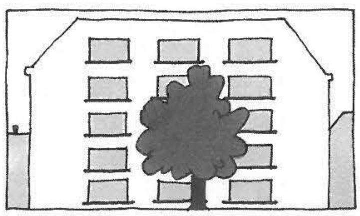
Die Aufgaben werden gleichmäßig auf die verschiedenen Matrixfelder verteilt, sodass jedem Matrixfeld jeweils zwei Aufgaben zugeordnet werden. Die Matrixfelder enthalten jeweils eine Kernaufgabe und eine Nicht-Kernaufgabe.

Da die Nutzung von Eigenschaften (Kommutativität und Distributivität) für das Multiplikative Verständnis von Bedeutung sind (vgl. Kap. 4.1.2 und 4.2.8), gibt es zudem Aufgaben, die die Nutzung der Eigenschaften der Multiplikation nahelegen (mit E gekennzeichnet).

7.4.2 Exemplarische Kurzdarstellung einzelner Testitems

Im Folgenden werden vier Testitems (in Tab. 7.2. mit einem Rahmen markiert) genauer beschrieben. Die Items sind so ausgewählt, dass der Aufbau des Tests deutlich wird. Die Testitems sind vollständig in Anhang A zu finden.

Aufgabe Nr. 1 (Abb. 7.22) bezieht sich auf einen *Kontext*, der in diesem Fall als Bild dargestellt ist. Kontext kann ebenso auch als Text beschrieben werden. Die zugrunde gelegte Grundvorstellung ist das *kartesische Produkt*, da die Faktoren des Produkts als Zeilen und Spalten angeordnet sind. Zur passenden Bearbeitung muss eine *Übersetzung in die Symbolform* erfolgen. Die Elemente werden hier *abzählbar mit mentaler Ergänzung* präsentiert (Scherer, 2007, S. 10), da drei der Fenster durch den Baum verdeckt werden.



So rechne ich:

Abbildung 7.22: Aufgabe Nr. 1 (Bild aus Selter, 2002, S. 19)

Es handelt sich um eine *Kernaufgabe* (K). Angemessene *additive* Bearbeitungen sind $5 + 5 + 5 = 15$ oder $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$. Angemessene *multiplikative* Bearbeitungen sind $5 \cdot 3 = 15$ oder $3 \cdot 5 = 15$.

Aufgabe Nr. 13 (Abb. 7.23) bezieht sich ebenfalls auf einen *Kontext*, da eine Geschichte zu der Aufgabe gezeichnet werden soll. Die *Grundvorstellung* wird durch die Aufgabenstellung *nicht vorgegeben*. Zur angemessenen Bearbeitung muss eine *Übersetzung von der Symbolform* erfolgen. Es handelt sich um *keine Kernaufgabe* (NK).

Schreibe eine Rechengeschichte zu $\boxed{3 \cdot 7}$.

Abbildung 7.23: Aufgabe Nr. 13

Eine mögliche angemessene *additive* Bearbeitung ist: *In einem Schrank stehen drei Stapel Teller. In jedem Stapel sind 7 Teller.* Eine mögliche angemessene *multiplikative* Bearbeitung wäre: *In einem Karton sind 3 Reihen Äpfel. In jeder Reihe sind 7 Äpfel.*

Aufgabe Nr. 10 (Abb. 7.24) beinhaltet eine Abbildung eines Rechenstrichs und wird somit der Darstellungsform *didaktisches Material* zugeordnet.

Die zugrunde gelegte Grundvorstellung ist die *wiederholte Addition*. Zur angemessenen Bearbeitung muss eine *Übersetzung in die Symbolform* erfolgen. Es handelt sich um *keine Kernaufgabe* (NK). Die angemessene additive Bearbeitung ist $8 + 8 + 8 = 24$. Die angemessenen *multiplikativen* Bearbeitungen wären $3 \cdot 8 = 24$ und $8 \cdot 3 = 24$.

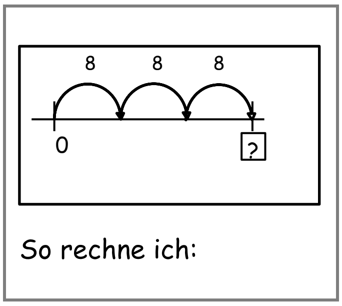


Abbildung 7.24: Aufgabe Nr. 10

Aufgabe Nr. 14 (Abb. 7.25) beinhaltet eine Abbildung eines Punktefeldes und wird deswegen ebenso der Darstellungsform *didaktisches Material* zugeordnet. Die zugrunde liegende Grundvorstellung ist das *kartesische Produkt*.

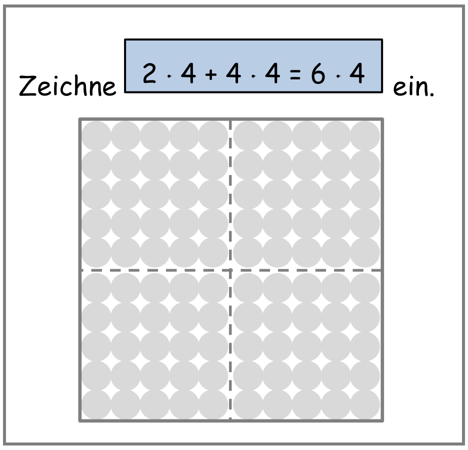


Abbildung 7.25: Aufgabe Nr. 14

Für eine angemessene Bearbeitung muss eine *Übersetzung von der Symbolform* erfolgen. Die Aufgabe enthält *Kernaufgaben* (K). Mögliche angemessene *multiplikative* Bearbeitungen sind in Abbildung 7.26 zu sehen.

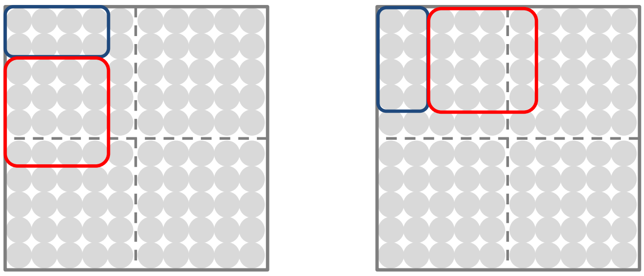


Abbildung 7.26: Multiplikative Bearbeitung zu Aufgabe Nr. 14

7.4.3 Basisaufgaben

Im Test sind sog. Basisaufgaben enthalten. Dabei handelt es sich um Aufgaben, die ein grundlegendes Multiplikatives Verständnis zu ihrer vollständig passenden Bearbeitung erfordern. In der Regel kann davon ausgegangen werden, dass ein solches grundlegendes Verständnis zwei Wochen nach Beginn der Behandlung des Einmaleins (MZP 1) aufgebaut ist.

Die Verteilung der Basisaufgaben auf die Matrixfelder wird in Tabelle 7.3 ersichtlich. Ein X steht für eine Basisaufgabe. Folgende Kriterien werden bei der Auswahl und dem Design der Basisaufgaben berücksichtigt:

- die Basisaufgaben verteilen sich auf verschiedene Matrixfelder
- sie erfordern sowohl eine Übersetzung in die Symbolform als auch von der Symbolform
- es überwiegen Aufgaben mit Übersetzung in die Symbolform, da davon ausgegangen wird, dass die Übersetzung von der Symbolform einen höheren Anspruch aufweist und somit zu diesem ersten MZP noch nicht unbedingt geleistet werden muss
- das Matrixfeld Symbolform enthält keine Basisaufgaben, da angenommen wird, dass diese Aufgaben ebenfalls ein höheres Schwierigkeitsniveau aufweisen

<table>
<tr><th colspan="3"></th><th colspan="2">Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><th colspan="3"></th><th>kartesisches Produkt</th><th>wiederholte Addition</th></tr>
<tr><th rowspan="5">Darstellungsformen</th><th rowspan="2">Kontextbezug</th><th>in die Symbolform</th><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><th>von der Symbolform</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th rowspan="2">didaktisches Material</th><th>in die Symbolform</th><td>X</td><td>X X</td></tr>
<tr><th>von der Symbolform</th><td>X</td><td>X X</td></tr>
<tr><th colspan="2">Symbolform</th><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 7.3: Basisaufgaben in der Matrix der Testaufgaben

7.4.4 Durchführung des Tests

Der Paper-Pencil-Test als Test zum Multiplikativen Verständnis erweist sich in der Pilotstudie als durchführbar und nützlich, um Förderbedarf bezüglich des Multiplikativen Verständnisses festzustellen. Es werden geringfügige Änderungen in einer sprachlichen Formulierung sowie einer Darstellung vorgenommen.

Der Test zum Multiplikativen Verständnis wird in der Hauptstudie als Paper-Pencil-Test in den 18 am Projekt teilnehmenden Klassen der zweiten Jahrgangsstufe mit insgesamt 335 Kindern durchgeführt. Da man davon ausgehen kann, dass ca. zwei Wochen nach Beginn der Einführung des Einmaleins Grundlagen eines Multiplikativen Verständnisses bereits vorhanden sein können, wird der Paper-Pencil-Test als Pretest in der jeweiligen Klasse etwa zu diesem Zeitpunkt eingesetzt. Als Posttest wird er direkt im Anschluss an die Intervention und nochmals als Follow-up-Test ca. drei Monate nach der Intervention genutzt. Für am festgelegten Tag der Durchführung erkrankte Kinder werden Nachholtermine vereinbart.

7.5 Test BIRTE 2

Um zusätzliche Informationen über allgemeine arithmetische Kompetenzen der an der Untersuchung teilnehmenden Kinder zu erhalten, wird der Bielefelder Rechentest (BIRTE 2) als Korrektiv eingesetzt. Es soll damit überprüft werden, welche Kinder zusätzlich zum Förderbedarf im multiplikativen Bereich auch allgemeine Rechenschwächen im additiven Bereich zeigen.

7.5.1 Ziele und Inhalte

Der Bielefelder Rechentest (BIRTE 2) wurde zur Ermittlung arithmetischer Kompetenzen für das zweite Schuljahr konzipiert (Schipper et al., 2011, S. 28). Es werden sowohl „die aktuellen rechnerischen Fähigkeiten und Fertigkeiten in verschiedenen Inhaltsbereichen“ (ebd.) als auch „das Vorhandensein solcher basalen Kompetenzen und Lösungsstrategien, die für ein erfolgreiches Weiterlernen in der Arithmetik unverzichtbar sind“ (ebd.), ermittelt. Durch den Einsatz einfacher Aufgaben kann der Test insbesondere im unteren Leistungsbereich differenzieren (ebd.). Es werden auf der Grundlage von Schülerfehlern und Bearbeitungszeiten Annahmen über möglicherweise vorhandene Schwierigkeiten beim Rechnen entwickelt (ebd.). Auf der Grundlage von Schülerfehleranalysen und Bearbeitungszeiten gibt der Test Empfehlungen zur Überprüfung dieser Annahmen und weist auf verschiedene Fördermaßnahmen hin, die zur Überwindung entsprechender Schwierigkeiten geeignet sind (ebd.).

Es werden arithmetische Kompetenzen im gesamten Leistungsspektrum erfasst (ebd.). BIRTE 2 lässt sich neben der zweiten Jahrgangstufe auch in der dritten und vierten Klasse durchführen (ebd., S. 29), wenn es um die Identifizierung von möglichen Rechenschwächen geht und nicht um eine objektive Leistungsfeststellung in der Mitte der zweiten Klasse (ebd.). Die Autoren des Tests sind sich der Grenzen bewusst; ein computerbasierter Test kann einen kompetenten Diagnostiker nicht ersetzen (ebd.).

Modulgruppe	Nr.	Modul
Orientierung im Zahlenraum	1 2 3	Rückwärtszählen Zahlen einordnen Zahlenstrich
Basiskompetenzen	4 5 6 7	Schnelles Sehen (schnelle Zahlauffassung) Spielstein (Zahldarstellung) Zahlenhäuser (Zahlzerlegungen) Verdoppeln und Halbieren
Rechnen	8 9 10	Addition Subtraktion Aufgabenbeziehungen
Grundvorstellungen	11 12 13	Größen Operation wählen Rechengeschichten

Tabelle 7.4: Module und Modulgruppen in BIRTE 2 (in Anlehnung an Schipper et al., 2011, S. 28, S. 33 ff.)

BIRTE 2 ist in 13 verschiedene Module unterteilt, die sich zu vier Modulgruppen zusammenfassen lassen (Tab. 7.4). Insgesamt besteht der Test aus 145 Items.

Ein Intro-Modul wird nach Anmeldung des Kindes direkt durchlaufen, indem das Anklicken von Objekten oder von passenden Ziffern auf einem Nummernfeld auf dem Bildfeld geübt wird (ebd., S. 33). Das Kind kann dann die Reihenfolge der Bearbeitung der Module durch Anklicken des entsprechenden Symbols selbst bestimmen (ebd.). Innerhalb der Module ist dann die jeweilige Reihenfolge der Aufgaben vorgegeben (ebd.). Aufgaben können nicht übersprungen werden, müssen also in irgendeiner Form bearbeitet werden. Grundsätzlich wird mit BIRTE 2 überprüft

- ob die Kinder sich in den Zahlenräumen bis 20 und bis 100 sicher orientieren können,
- ob sie über die arithmetischen Basiskompetenzen verfügen, die für die Entwicklung leistungsfähiger und fortsetzbarer operativer Rechenstrategien unverzichtbar sind,
- wie sicher sie beim Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 100 sind und ob sie Aufgabenbeziehungen nutzen, und
- ob sie in ausreichendem Maße über Größenvorstellungen und Grundvorstellungen für Rechenoperationen verfügen, die beim Sachrechnen und bei der Lösung von Textaufgaben benötigt werden. (ebd. 34)

Die Zuordnung der Module zu den Modulgruppen ist nicht immer ganz trennscharf (ebd., S. 35). Ausführliche Informationen zu den einzelnen Modulgruppen sind im dazugehörigen Handbuch des Tests zu finden (ebd., S. 35 ff.) In den Modulen steht den Kindern eine bestimmte Zeitspanne zu Verfügung. Die Aufgabe wird bei Überschreitung der Zeit nicht abgebrochen, die jeweiligen Bearbeitungszeiten gehen aber teilweise mit in die Auswertung ein. Längere Bearbeitungszeiten können Hinweise auf zählendes Rechnen sein (ebd., S. 35 ff.).

7.5.2 Durchführung

BIRTE 2 wird mit einer Mehrbenutzerlizenz auf den 25 Convertibles installiert, die allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Professur für Didaktik der Mathematik und Informatik an der Universität Bamberg zu Verfügung stehen. Der Test wird an der jeweiligen Schule der Klasse in Form eines Gruppentests durchgeführt. Tastatur und Maus der Geräte dienten als Eingabemedium, über Kopfhörer erfolgt die auditive Wahrnehmung.

Nach Anmeldung der Kinder beginnt der Test sofort mit dem Intro. BIRTE 2 wird in den Klassen jeweils an einem Schultag innerhalb ein bis zweier Schulstunden durchgeführt. Für am festgelegten Tag der Durchführung erkrankte Kinder werden Nachholtermine vereinbart.

7.6 Identifizierung von Förderbedarf

Nach der Durchführung der Tests gilt es, Kinder mit Förderbedarf zu identifizieren. Ziel ist es zunächst, aus dem Setting A *Einzelförderung* Kinder auszuwählen, für die eine Einzelförderung aufgrund der Testbearbeitungen notwendig erscheint. Die Bearbeitungen der Kinder werden nach bestimmten Kriterien sortiert, um jene Kinder zu identifizieren, die möglicherweise einen Förderbedarf aufweisen. Außerdem ist mit diesem System auch feststellbar, in welchen Bereichen bzw. welchen Aufgaben das jeweilige Kind Förderbedarf zeigt, um später gegebenenfalls eine Einzelförderung individueller anpassen zu können. Für die Analyse werden drei Ausprägungen festgelegt:

- *Förderbedarf*
- *teilweise Förderbedarf*
- *kein Förderbedarf*

Die Bearbeitung jeder einzelnen Aufgabe wird der jeweiligen Ausprägung eindeutig zugeordnet. Die beschriebenen Kategorien der Testauswertung (vgl. Kap. 6.3.2.1) spielen bei dieser Einteilung eine Rolle und es wird im Folgenden darauf Bezug genommen.

Förderbedarf

Der Ausprägung *Förderbedarf* werden alle Aufgabenbearbeitungen zugeordnet, die in der Testauswertung unter *Angemessenheit* als *nicht angemessen* angesehen werden. Bearbeitungen, die dieser Ausprägung zugeordnet werden, deuten darauf hin, dass das jeweilige Kind in diesem Bereich noch kein Verständnis hat oder in diesem Moment sein Verständnis nicht auf die jeweilige Aufgabe anwenden konnte. Alle übrigen Kategorien müssen folglich nicht weiter berücksichtigt werden.

Teilweise Förderbedarf

Die Ausprägung *teilweise Förderbedarf* bedeutet, dass die jeweilige Bearbeitung Bestandteile aufweist, die darauf schließen lassen, dass das Verständnis noch nicht vollständig vorhanden ist oder es in diesem Moment nicht vollständig angewandt werden konnte. Bezüglich dieser Ausprägung muss etwas genauer differenziert werden, welche Kombinationen von Kategorienausprägungen zugeordnet werden. Grundsätzlich gehören dazu Bearbeitungen mit folgenden Merkmalen:

- *angemessen anders*
- *teilweise angemessen*
- *angemessen und Umkehroperation*
- *angemessen und additiv*

Bearbeitungen, die der Ausprägung *angemessen anders* zugeordnet werden, enthalten zwar Grundvorstellungen und berücksichtigen alle Elemente der Aufgabenstellung, waren aber nicht mit der Aufgabenstellung intendiert. Eine solche Bearbeitung wird also als Indiz angesehen, dass in Bezug auf den jeweiligen Aufgabentyp bei dem entsprechenden Kind noch zu überprüfen ist, ob es ebenso die intendierte Struktur bzw. Deutung verstehen kann.

Bearbeitungen, die der Ausprägung *teilweise angemessen* zugeordnet werden, enthalten sinnvolle Ansätze; diese sind aber entweder nicht zu Ende geführt oder es werden zusätzlich unangemessene Angaben gemacht. Dies sind Indikatoren dafür, dass auch hier in einer Einzelförderung nochmals genauer überprüft werden sollte, ob eine intendierte Bearbeitung vom jeweiligen Kind bereits erbracht werden kann oder ein Verständnis noch weiter gefördert werden sollte.

Wenn Bearbeitungen als *angemessen* angesehen werden und zusätzlich aber unter der Kategorie *Verknüpfung Umkehroperation* kategorisiert werden, werden diese ebenfalls der Ausprägung *teilweise Förderbedarf* zugeordnet. In den Testaufgaben werden Multiplikationsaufgaben intendiert, sodass auftauchende Divisionsaufgaben mögliche Indikatoren für Unsicherheiten des jeweiligen Kindes darstellen können. Es sollte in einer Förderung noch mal genauer festgestellt werden, ob das Kind beispielsweise eine Darstellung auch in eine entsprechende Multiplikationsaufgabe übertragen kann.

Werden Bearbeitungen zwar als angemessen angesehen, ist zusätzlich jedoch die *wiederholte Addition* als Grundvorstellung (*additiv*) enthalten, wird diese Bearbeitung ebenso in die Ausprägung *teilweise Förderbedarf* eingeordnet. Die Definition zum Multiplikativen Verständnis (vgl. 4.3) enthält zwar sowohl das *kartesische Produkt* als auch die *wiederholte Addition*, da dies die zugrunde liegenden mathematischen Strukturen der Multiplikation sind. Dennoch kann eine *additive* Bearbeitung ein Indiz darstellen, dass das jeweilige Kind ein noch nicht vollständiges Multiplikatives Verständnis aufweist. Auch hier sollte also nochmals genauer überprüft werden, ob das Kind auch eine *multiplikative* Bearbeitung erstellen kann. Zwei Ausnahmen bilden die Aufgaben Nr. 12 und Nr. 15. Hier gelten *angemessene* Bearbeitungen auch dann als *kein Förderbedarf*, wenn *additiv* unter *Grundvorstellungen* kategorisiert wird, da das Vervollständigen derartiger Darstellungen nur der *wiederholten Addition* zugeordnet werden kann (Zahlenstrahl, Mengenbilder).

Ein weiteres Merkmal wird relevant bei Aufgaben, die zwei oder mehrere Bearbeitungen erfordern. Bearbeitungen gehören in diesem Fall auch zu *teilweise Förderbedarf*, wenn sie *angemessen* kategorisiert werden, da dies bedeutet, dass nur *eine angemessene* Bearbeitung notiert wurde.

Kein Förderbedarf

Bearbeitungen werden dann der Ausprägung *kein Förderbedarf* zugeordnet, wenn sie eine oder mehrere *angemessene* Bearbeitungen sowie unter Grundvorstellungen als *multiplikativ* oder *beide* kategorisiert werden können. Bei Aufgaben, die nur eine *angemessene* Bearbeitung erfordern, trifft dies zu, wenn *angemessen/angemessen und Sinnvolles* und *multiplikativ* kategorisiert werden. Bei Aufgaben, die zwei oder mehrere Bearbeitungen erfordern, müssen *angemessen und Sinnvolles* und *multiplikativ* kategorisiert sein, da mindestens zwei *angemessene* Bearbeitungen angegeben werden sollen.

Die Kategorie *Ergebnisrichtigkeit* bleibt unberücksichtigt, da ein falsches Ergebnis nur als ein sehr schwacher Indikator für ein unzureichendes Multiplikatives Verständnis angesehen wird.

7.6.1 Auswahl für die Einzelförderung

Grundlage der Auswahl der Kinder für Setting A *Einzelförderung* sind die Ergebnisse des Pre-Tests zum Multiplikativen Verständnis. Der Test wird im Pre-Post-Follow-Up-Design unverändert zu allen drei MZP eingesetzt. Die Erwartungshorizonte bezüglich der Aufgabenbearbeitungen sind dabei angepasst differenziert. Zum ersten MZP kann die Bearbeitung der grundlegenden Basisaufgaben (vgl. 7.4.3) erwartet werden, zu MZP 2 und MZP 3 hingegen die Bearbeitung aller Aufgaben.

Es werden Kinder ausgewählt, die bei mindestens fünf dieser Basisaufgaben mindestens *teilweise Förderbedarf* und davon bei mindestens zwei Aufgaben *Förderbedarf* aufweisen.

Durch dieses Verfahren werden zwölf Kinder identifiziert und zur Förderung eingeladen. Acht Kinder nehmen schließlich an den individuellen Fördersitzungen teil (vgl. Anhang B).

Als weiteres Kriterium für die Auswahl der Kinder werden ihre Ergebnisse in BIRTE 2 herangezogen. Die Idee ist ursprünglich, Kinder für die Förderung auszuwählen, die ausschließlich bezüglich des Multiplikativen Verständnisses Förderbedarf zeigen, in weiteren eher additiven Bereichen aufgrund der Ergebnisse in BIRTE 2 jedoch keinen oder kaum Förderbedarf aufweisen. Auf vier der acht Kinder trifft dieses Kriterium zu. Denn diese Kinder zeigen überdurchschnittliche bzw. durchschnittliche Leistungen in BIRTE 2 und sind somit eher unauffällig bezüglich allgemeiner Kompetenzen im additiven Bereich. Die begrenzte Anzahl an Kindern, die aufgrund des Tests zum Multiplikativen Verständnis identifiziert werden, führt allerdings dazu, dass dieses weitere Kriterium, nämlich auch die Ergebnisse in BIRTE 2 einzubeziehen, teilweise verworfen werden muss. Die ausgewählten vier weiteren Förderkinder zeigen demnach in BIRTE 2 unterdurchschnittliche und deutlich unterdurchschnittliche Leistungen. Eine Übersicht der Verteilung bezüglich Leistung und Arbeitsgeschwindigkeit in BIRTE 2 der Einzelförderkinder ist im Anhang zu finden (vgl. Anhang B).

7.6.2 Identifizierung von Matching-Kindern

In der späteren Auswertung sollen zunächst Vergleiche zwischen den Ergebnissen aller teilnehmenden Kinder in Setting A *Einzelförderung*, Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* gezogen werden. Spannend kann es aber auch sein, die Ergebnisse nur der Kinder mit Förderbedarf in den drei unterschiedlichen Settings zu analysieren. Deswegen wird ein sog. Matching-Verfahren (Döring & Bortz, 2016, S. 200) bezüglich des Förderbedarfs eingesetzt und es werden in den Settings *Klassenverband* und *Kontrollgruppe* ebenfalls Förderkinder in einem dreistufigen Verfahren identifiziert.

- Im ersten Schritt wird darauf geachtet, dass die Matching-Kinder (ebenso wie die Einzelförderkinder) in mindestens fünf Basisaufgaben mindestens *teilweise Förderbedarf* und in mindestens zwei Basisaufgaben *Förderbedarf* zeigen.
- Im zweiten Schritt werden die Testergebnisse der Förderkinder in Setting A als Grundlage verwendet und Kinder in Setting B und C gesucht, die jeweils eine möglichst hohe Anzahl an Übereinstimmungen in den Aufgaben des Tests zum Multiplikativen Verständnis bezüglich des Förderbedarfs aufweisen. Das jeweilige Förderkind aus Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* soll also in ähnlichen Bereichen Förderbedarf zeigen wie das jeweilige Einzelförderkind.
- Im dritten Schritt wird jeweils ein Kind ausgewählt, das zusätzlich das gleiche Geschlecht wie das jeweilige Einzelförderkind hat.

Auf diese Weise werden jeweils acht Förderkinder in Setting B und C identifiziert, die aufgrund der Ergebnisse des Tests zum Multiplikativen Verständnisses einen ähnlichen Förderbedarf in vergleichbaren Bereichen aufweisen. Übersichten der Verteilung der Kinder bezüglich ihrer Ergebnisse im Test zum Multiplikativen Verständnis und in BIRTE 2 sind in Anhang B zu finden.

8 Ergebnisse der Untersuchung

Im folgenden Kapitel werden zunächst quantitative Ergebnisse auf Grundlage der Auswertung des Paper-Pencil-Tests präsentiert (vgl. Kap. 8.1). Im Anschluss daran werden ausgewählte Ausschnitte der Fördersitzungen in Setting A qualitativ analysiert (vgl. Kap. 8.2).

8.1 Quantitative Analyse

Grundsätzliches Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, Effekte verschiedener Formen von Förderung im Bereich Multiplikation zu evaluieren. Zu diesem Zweck werden Kategorien zur Auswertung des Paper-Pencil-Tests entwickelt (vgl. Kap. 6.3.2.1). Die Anteile der Bearbeitungen bezüglich der verschiedenen Ausprägungen der Kategorien können so quantitativ dargestellt und analysiert werden. Als wesentlich anzusehen ist die Kategorie *Angemessenheit*, auf die im Folgenden zuerst eingegangen wird (vgl. Kap. 8.1.1). Da aus mathematischer Perspektive die in den Bearbeitungen der Kinder auftretenden Grundvorstellungen wesentlich sind, wird im Anschluss daran das Auftreten von *Grundvorstellungen* beschrieben und im Zusammenspiel mit der Aufgabenstellung interpretiert (vgl. Kap. 8.1.2). Spannend ist es natürlich auch, zu welchen Anteilen in den *angemessenen* Bearbeitungen jeweils zu einem *vollständig passenden* Ergebnis gelangt wird. Deswegen werden Ergebnisse zur Kategorie *Ergebnis* ebenfalls beschrieben und analysiert (vgl. Kap. 8.1.3). Zum Schluss folgen einige Anmerkungen zu Ergebnissen der induktiv entwickelten Kategorie *Verknüpfung* (vgl. Kap. 8.1.4).

8.1.1 Angemessenheit

Bezüglich der Kategorie *Angemessenheit* sollen Veränderungen der Anteile in den verschiedenen Settings bei *allen* Kindern und bei den Kindern *mit Förderbedarf* über die drei Messzeitpunkte (MZP) hinweg analysiert werden.

Die Testergebnisse werden bezogen auf die *Angemessenheit* hinsichtlich folgender Forschungsfragen analysiert:

I. *Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Angemessenheit der Bearbeitung bei allen beteiligten Kindern?*

II. *Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Angemessenheit der Bearbeitung bei den Kindern mit Förderbedarf?*

8.1.1.1 Aufgabenauswahl

Die Aufgaben Nr. 3 und 9 (vgl. Anhang A) werden nicht in die Analyse von *Angemessenheit* einbezogen. Dies geschieht aus zwei Gründen:

- Bei Aufgabe Nr. 3 wird jeweils ein Term passend oder unpassend angekreuzt, die Kategorisierung nach *Angemessenheit* kann für die Gesamtaufgaben also nicht erfolgen.
- Bei Aufgabe Nr. 9 zeigt die Auswertung der Daten, dass in ca. 45 % der Bearbeitungen die Aufgabenstellung $7 \cdot 8$ (mit oder ohne Ergebnis) lediglich abgeschrieben bzw. die Tauschaufgabe notiert wurde. Eine Analyse bzgl. *Angemessenheit* ist hier jeweils nicht möglich.

Es fließen in die Auswertung somit 14 von 16 Aufgabenbearbeitungen und damit sechs Aufgabenbereiche ein (Tab. 8.1). Im Weiteren werden diese vollständig in die Analyse eingegangen Aufgaben der Lesbarkeit halber als ‚alle' Aufgaben gekennzeichnet.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2"></td><td colspan="2">Grundvorstellungen</td></tr>
<tr><td>Kartesisches Produkt</td><td>Wiederholte Addition</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Darstellungsformen</td><td rowspan="2">Kontextbezug</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Didaktisches Material</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 8.1: Bereiche aller analysierten Aufgaben

8.1.1.2 Vorgehensweise der Analyse

In der deskriptiven Beschreibung werden die Bearbeitungen der Kinder hinsichtlich folgender Ausprägungen analysiert (vgl. Kap. 6.3.2.1). Es werden Bearbeitungen als *angemessen* kategorisiert, wenn sie entsprechend der Aufgabenstellung als adäquat anzusehen sind und passende Grundvorstellungen identifiziert werden können. *Teilweise angemessen* ist eine Bearbeitung, wenn sinnvolle Ansätze erkennbar sind, diese aber entweder nicht zu Ende geführt oder zusätzlich unangemessene Angaben gemacht werden. Aus der Bearbeitung kann somit auf ein teilweises, d. h. noch nicht vollständig angemessenes Verständnis geschlossen werden. *Nicht angemessen* sind Bearbeitungen, die keine sinnvollen Ansätze enthalten.

Für eine Übersicht über alle Aufgaben werden zunächst die prozentualen Anteile an Bearbeitungen in jeder einzelnen Aufgabe zu den drei Messzeitpunkten (MZP) ermittelt und daraus der jeweilige Durchschnitt berechnet. So ergeben sich Durchschnittswerte in Prozent der Anteile der unterschiedlichen Bearbeitungen für die drei MZP bzw. für die drei Settings. Werden Entwicklungsverläufe von einem früheren Messzeitpunkt (MZP) zu einem späteren MZP betrachtet, so wird die relative Änderung in Prozent angegeben.

Im Weiteren soll überprüft werden, ob sich die Effekte bezüglich der *Angemessenheit* der differenten Interventionssettings über die MZP auch statistisch bestätigen lassen. Dafür wird die Kategorie *Angemessenheit* umcodiert:

- *angemessen (1)*
- *nicht angemessen (0),* bestehend aus *nicht angemessen* und *teilweise angemessen*

In einem weiteren Schritt werden jeweils die Anzahl der *angemessen* gelösten Aufgaben pro Schülerin bzw. Schüler und je MZP gezählt (Summenindex). So entsteht eine metrisch skalierte Variable, die höhere Ausprägungen aufweist, je *angemessener* die Aufgaben insgesamt gelöst worden sind (vgl. Kap. 6.3.2.2). Da für die Kategorie *Angemessenheit* 14 Testaufgaben analysiert werden, entsteht bei Aufsummierung aller angemessenen Bearbeitungen für jedes Kind zu jedem der MZP ein Wert zwischen 0 und 14. Mit diesem jeweiligen Summenindex werden die weiteren Berechnungen durchgeführt.

8.1.1.3 Veränderungen bei *allen* Kindern

Im Weiteren soll folgender Forschungsfrage nachgegangen werden:

I. *Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Angemessenheit der Bearbeitung bei allen beteiligten Kindern?*

Im Folgenden werden die Veränderungen in den Bearbeitungen *aller* Kinder in den drei Settings (*Einzelförderung, Klassenverband* und *Kontrollgruppe*) beschrieben, die sich auf die Kategorie *Angemessenheit* beziehen. Dabei handelt es sich um eine kleine Gruppe in Setting A *Einzelförderung* (n = 8) und zwei größere Gruppen in Setting B *Klassenverband* (n = 134/124) und in Setting C *Kontrollgruppe* (n = 112/111/108).

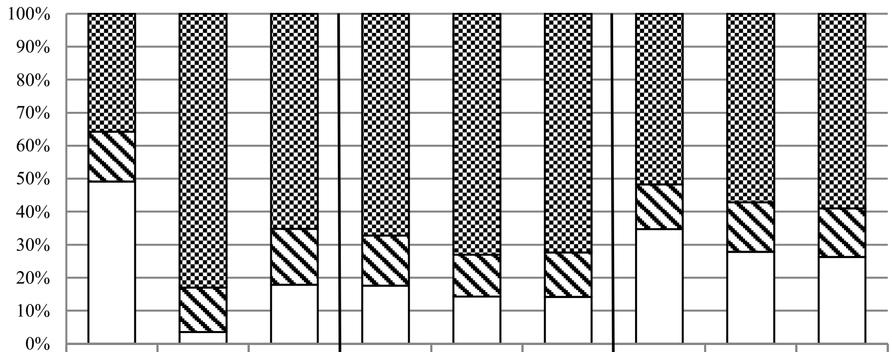
Ergebnisse ...

... *zu allen Aufgaben*

Deskriptive Darstellung der Anteile

Um herauszufinden, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Angemessenheit* der Bearbeitung bei *allen* beteiligten Kindern haben, werden zunächst *deskriptiv* die prozentualen Anteile zum einen im Säulendiagramm dargestellt (Abb. 8.1). Zum anderen interessieren insbesondere auch Veränderungen in den verschiedenen Settings sowohl während der Interventionsphase als auch drei Monate später. Deswegen werden jeweils die prozentualen Veränderungen von MZP 1 zu MZP 2 und von MZP 1 zu MZP 3 in den drei Settings zur besseren Übersicht in Tabellen nebeneinander dargestellt (Tab. 8.2 und Tab. 8.3).

Alle Aufgaben – alle Kinder



	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	35,7%	83,0%	65,2%	67,3%	73,0%	72,3%	51,7%	57,2%	59,0%
teilweise angemessen	15,2%	13,4%	17,0%	15,2%	12,8%	13,4%	13,6%	15,0%	14,7%
nicht angemessen	49,1%	3,6%	17,9%	17,6%	14,2%	14,2%	34,7%	27,9%	26,3%

Abbildung 8.1: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Angemessenheit zu den drei MZP aller Kinder in den Settings (LU ≙ Lernumgebungen)

Es kann festgestellt werden, dass die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen drei Settings im Laufe der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, ansteigen (Abb. 8.1). Der Anteil an *angemessenen* Bearbeitungen ist in Setting A *Einzelförderung* sehr stark gestiegen, nämlich von 35,7 % auf 83,0 % um 132,5 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.2). In Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband* sinken die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen von MZP 2 zu MZP 3 wieder, in der *Kontrollgruppe* (Setting C) steigen sie geringfügig an. Bezogen auf Langzeiteffekte, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, steigen die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen drei Settings. In Setting A *Einzelförderung* ist ein sehr starker Anstieg feststellbar, nämlich um 82,6 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.3).

Die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen sind in allen drei Settings zu allen drei MZP eher niedrig; sie liegen zwischen 12,8 % und 17,0 %.

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 2, bezogen auf den Wert zu MZP 1	**Alle Kinder in den Settings**		
Ausprägung	**Einzelförderung (A)**	**Klassenverband (B)**	**Kontrollgruppe (C)**
angemessen	Anstieg um 132,5 %	Anstieg um 8,5 %	Anstieg um 10,6 %
teilweise angemessen	Senkung um 11,8 %	Senkung um 15,8 %	Anstieg um 10,3 %
nicht angemessen	Senkung um 92,7 %	Senkung um 19,3 %	Senkung um 19,6 %

Tabelle 8.2: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 2

Die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen sinken in allen drei Settings während der Interventionsphase, d. h. von MZP 1 zu MZP 2. Sehr stark sinkt der Anteil an *nicht angemessenen* Bearbeitungen in Setting A *Einzelförderung* von 49,1 % auf 3,6 % um 92,7 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1.

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 3, bezogen auf den Wert zu MZP 1	**Alle Kinder in den Settings**		
Ausprägung	**Einzelförderung (A)**	**Klassenverband (B)**	**Kontrollgruppe (C)**
angemessen	Anstieg um 82,6 %	Anstieg um 7,4 %	Anstieg um 14,1 %
teilweise angemessen	Anstieg um 11,8 %	Senkung um 11,8 %	Anstieg um 8,1 %
nicht angemessen	Senkung um 63,5 %	Senkung um 19,3 %	Senkung um 24,2 %

Tabelle 8.3: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 3

In Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband* steigen die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen von MZP 2 zu MZP 3 wieder, in der *Kontroll-*

gruppe (Setting C) sinkt der Anteil geringfügig. Im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, sinken die Anteile in allen drei Settings. Groß ist die Senkung von MZP 1 zu MZP 3 in Setting A *Einzelförderung* von 49,1 % auf 17,9 % um 63,5 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1.

Statistische Überprüfung der Hypothesen

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Angemessenheit* der Bearbeitung *aller* beteiligten Kinder haben, sollen Hypothesen getestet werden. Im Folgenden werden die Hypothesen sowie die jeweils entsprechenden Nullhypothesen formuliert:

H1: Die acht Kinder in Setting A Einzelförderung bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger angemessen als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_1$: Die acht Kinder in Setting A Einzelförderung bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger angemessen als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

H2: Alle Kinder in Setting B Klassenverband bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger angemessen als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_2$: Alle Kinder in Setting B Klassenverband bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger angemessen als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

In Tabelle 8.4 wird die Verteilung der Testbearbeitungen zu *Angemessenheit* (bezogen nun auf den Summenindex, Werte zwischen 0 und 14 möglich) für *alle* Kinder der Interventionsgruppen (Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*) und der *Kontrollgruppe* (Setting C) zu den drei MZP zunächst deskriptiv dargestellt (vgl. Kap. 6.3.2.2. und 8.1.1.2).

Angemessenheit – alle Kinder						
	Einzelförderung		Klassenverband		Kontrollgruppe	
MZP	MW	SD	MW	SD	MW	SD
1	5.00	1.20	9.47	2.31	7.37	2.88
2	11.63	1.60	10.20	2.08	8.11	2.47
3	9.13	2.48	10.13	2.06	8.26	2.56
	n = 8		n = 124		n = 108	

Tabelle 8.4: Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) aller Kinder zu den MZP (Angemessenheit)

Die Mittelwerte bezüglich *Angemessenheit* steigen bei *allen* Kindern in allen drei Settings von MZP 1 zu MZP 2 an (Tab. 8.4). In Setting A *Einzelförderung* und in Setting B *Klassenverband* sinken sie von MZP 2 zu MZP 3 wieder etwas, in der *Kontrollgruppe* (Setting C) steigen sie von MZP 2 zu MZP 3 geringfügig. Von MZP 1 zu MZP 3 steigen die Mittelwerte in allen drei Settings an.

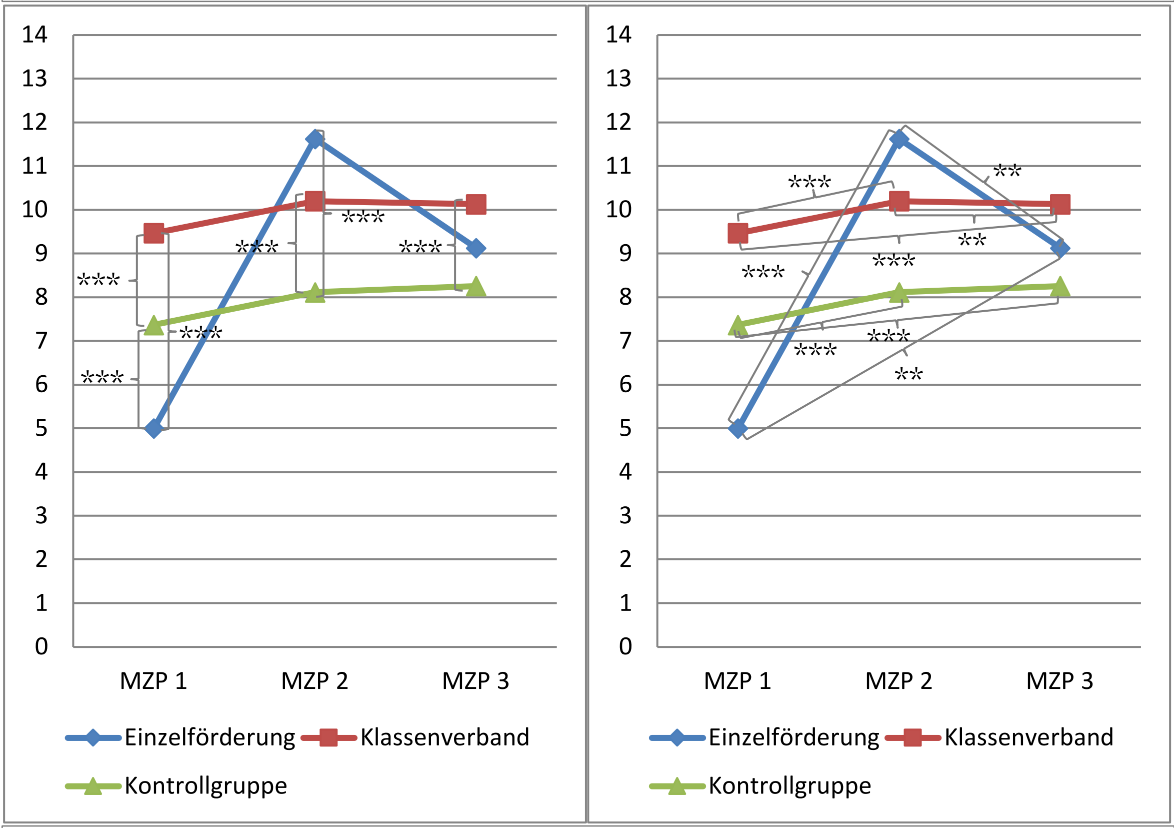
Abbildung 8.2 zeigt Veränderungen der Mittelwerte über die MZP in den drei Settings sowie signifikante Unterschiede.

Zudem werden Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Haupteffekten (HE) angegeben (F-Wert, Standardfehler ≙ SE, Effektstärke angegeben als (partielles) Eta-Quadrat ≙ (part.) η^2[2]) und Voraussetzungen (Normalverteilung, Homogeni-

[2] Die Varianzanalyse vergleicht die Variabilität zwischen den Versuchspersonen (*Varianz Zwischen*) mit der Variabilität innerhalb der Gruppen der Versuchspersonen (*Varianz Innerhalb*). Die *Varianz Zwischen* den Versuchspersonen kommt dadurch zustande, dass die Bedingungen durch eine Intervention „systematisch manipuliert werden“ (Bühner & Ziegler, 2017, S. 390). Die *Varianz Innerhalb* der Gruppen der Versuchspersonen beschreibt jenen Teil der Varianz, der nicht durch die Gruppenzuordnung oder MZP, sondern durch andere Merkmale zustande kommt, wie z. B. den unterschiedlichen Kompetenzen der Kinder. Die *Varianz Innerhalb* der Gruppen der Versuchspersonen wird deswegen auch als Fehlervarianz bezeichnet. Zur Prüfung von Effekten einer Intervention betrachtet man das Verhältnis der *geschätzten Varianz Zwischen* und der *geschätzten Varianz Innerhalb* (ebd., S. 387, 536; Bortz & Schuster, 2010, S. 206ff.). Dieser gebildete Quotient folgt einer F-Verteilung. Sind die beiden geschätzten Varianzen gleich, kann von der Gültigkeit der Nullhypothese ausgegangen werden (F-Wert = 1). Weicht der Quotient (F-Wert) von 1 ab, trifft die Nullhypothese nicht zu. Ein häufig angewandtes Maß für die Effektstärke bei Varianzanalysen ist (part.) η^2 ((partielles) Eta-Quadrat). Es soll damit ausgedrückt werden, „wie viel Variation in der abhängigen Variable [Testbearbeitung] auf die Unterschiede in der unabhängigen Variable […] [hier: Gruppenfaktor und Messwiederholungsfaktor] zurückgeht“ (ebd., S. 409). Die Effektstärke gibt an, wie sehr die Gruppenzugehörigkeit „die Varianz der Mittelwerte beeinflusst und welchen Anteil diese Variation an der Gesamtvariation der abhängigen Variable [Testbearbeitung] erklärt“ (ebd.).

tätsannahmen der Fehlervarianzen, Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix, Sphärizität), Post-hoc-Tests sowie ggf. Korrekturen zur Durchführung der Varianzanalyse genannt (Tab. 8.5). In derartiger Weise wird ebenso bei den Ergebnissen zu *Grundvorstellungen* (vgl. Kap. 8.1.2.4) und *Ergebnisrichtigkeit* (vgl. Kap. 8.1.3) verfahren.

Angemessenheit – alle Kinder



n (Einzelförderung) = 8, n (Klassenverband) = 124; n (Kontrollgruppe) = 108

* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Abbildung 8.2: Veränderungen der Mittelwerte aller Kinder im Verlauf der MZP (Angemessenheit)

Bei den Ergebnissen *aller* Kinder in den Settings zu *Angemessenheit* sind nicht alle Vorausset-zungen für die Anwendung einer zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung im gemischten Design (vgl. Kap. 6.3.2.2) gegeben. Die Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen sind verletzt (Levene-Test: $p < .05$), sodass zur Überprüfung der Haupteffekte des Gruppen- sowie Messwiederholungsfaktors zwei einfaktorielle Varianzanalysen gerechnet wurden (Tab. 8.5). Die Verletzung könnte an den unterschiedlichen Gruppengrößen liegen, lässt sich ohne weitere Analysen jedoch nicht mit Sicherheit darauf zurückführen.

Bei den Post-hoc-Tests sind die Homogenitätsannahmen der Varianzen bezüglich des Haupteffekts des Gruppenfaktors zu MZP 1 und zu MZP 3 nicht gegeben (Levene-Test: $p < .05$), sodass Korrekturen nach Games-Howell vorgenommen wurden (Tab. 8.5).

Es werden im Weiteren die Haupteffekte des Gruppenfaktors sowie des Messwiederholungsfaktors analysiert. Die Berechnungen zeigen einen signifikanten Haupteffekt des Gruppenfaktors ($F = 26.585$, $p = .000$, $\eta^2 = .183$) sowie einen signifikanten Haupteffekt des Messwiederholungsfaktors auf die Angemessenheitswerte ($F = 62{,}784$, $p = .000$, $\eta^2 = .209$) (Tab. 8.5).

Angemessenheit – alle Kinder

Setting		MZP 1 *Mittlere Differenz*		MZP 1 *SE*	MZP 2 *Mittlere Differenz*		MZP 2 *SE*	MZP 3 *Mittlere Differenz*		MZP 3 *SE*
Klassenverband	*Einzelförderung*	4.47	***	0.471	–1.42		0.822	1.00		0.894
	Kontrollgruppe	2.10	***	0.346	2.09	***	0.296	1.87	***	0.308
Einzelförderung	*Kontrollgruppe*	–2.37	***	0.505	3.51	***	0.825	0.87		0.909

MZP		Klassenverband *Mittlere Differenz*		Klassenverband *SE*	Einzelförderung *Mittlere Differenz*		Einzelförderung *SE*	Kontrollgruppe *Mittlere Differenz*		Kontrollgruppe *SE*
1	*2*	–0.73	***	0.163	–6.63	***	0.625	–0.74	***	0.195
	3	–0.66	**	0.178	–4.13	**	0.766	–0.89	***	0.216
2	*3*	0.07	**	0.160	2.50	**	0.567	–0.15		0.190

n (Klassenverband) = 124, n (Förderkinder) = 8, n (Kontrollgruppe) = 108 *p < .05, **p < .01, ***p < .001

Einfaktorielle ANOVA (Gruppenfaktor): $F = 26.585^{***}$, $\eta^2 = .183$ & einfaktorielle ANOVA mit Messwiederholung: $F = 62.784^{***}$, $\eta^2 = .209$

HE-Gruppen (MZP 1): $F = 26.585^{***}$, part. $\eta^2 = .183$, HE-Gruppen (MZP 2): $F = 29.236^{***}$, part. $\eta^2 = .198$, HE-Gruppen (MZP 3): $F = 18.909^{***}$, part. $\eta^2 = .138$

HE-MZP (Klassenverband): $F = 11.688^{***}$, part. $\eta^2 = .087$, HE-MZP (Förderkinder): $F = 51.694^{***}$, part. $\eta^2 = .881$, HE-MZP (Kontrollgruppe): $F = 11.256^{***}$, part. $\eta^2 = .095$

Normalverteilung: Shapiro-Wilk $p > .05$, Sphärizität: Mauchly $p > .05$, Homogenität der Fehlervarianzen: Levene $p < .05$, Homogenität der Kovarianzmatrix: Box $p > .05$

Post-hoc-Tests Gruppeneffekte: Korrektur n. Games-Howell, wenn Varianzhomogenitätsannahme verletzt ist (Levene: $p < .05$), andernfalls Tukey-HSD

Post-hoc-Tests Messwiederholungseffekte: Korrektur n. Greenhouse-Geisser, wenn Sphärizitätsannahme verletzt ist (Mauchly: $p < .05$), andernfalls ohne Korrektur

SE = Standardfehler, HE = Haupteffekt, Effektstärke angegeben in (part.) η^2 Quelle: Eigene Berechnungen

Tabelle 8.5: Ergebnisse der Varianzanalyse (Angemessenheit – alle Kinder)

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.2., links; Tab. 8.5) zeigen, dass die Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 1 die Testaufgaben signifikant seltener *angemessen* bearbeiten als jeweils die Kinder in den übrigen beiden Settings (*Einzelförderung – Kontrollgruppe*: mittl. Diff. = –2.37, $p = .000$; *Einzelförderung – Klassenverband*: mittl. Diff. = –4.47; $p = .000$). Dies überrascht nicht, da die Einzelförderkinder mit *allen* Kindern (mit und ohne Förderbedarf) in den übrigen Settings verglichen werden. Zu MZP 2 erzielen die Kinder in Setting A *Einzelförderung* signifikant höhere Angemessenheitswerte als die Kinder in Setting C *Kontrollgruppe* (*Einzelförderung – Kontrollgruppe*: mittl. Diff. = 3.51, $p = .000$) und sie unterscheiden sich von den Kindern in Setting B *Klassenverband* nicht mehr signifikant. Die Kinder in Setting A *Einzelförderung* unterscheiden sich zu MZP 3 nicht signifikant von *allen* Kindern in Setting B *Klassenverband* und von *allen* Kindern in der *Kontrollgruppe* (Setting C), d. h. die Werte der Settings liegen auf ähnlichem Niveau.

Die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP (Abb. 8.2., rechts; Tab. 8.5) zeigen in Setting A *Einzelförderung* einen signifikanten Anstieg von MZP 1 zu MZP 2 sowie zu MZP 3 (MZP 1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –6.63, $p = .000$; MZP 1 zu MZP 3: mittl. Diff. = –4.13, $p = .003$). Auch in Setting B *Klassenverband* sowie in der *Kontrollgruppe* (Setting C) zeigen sich signifikante Anstiege von MZP 1 zu MZP 2 sowie zu MZP 3 (*Klassenverband*: MZP 1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –0.73, $p = .000$, MZP 1 zu MZP 3: mittl. Diff. = –0.66, $p = .001$; *Kontrollgruppe*: MZP 1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –0.74, $p = .001$, MZP 1 zu MZP 3: mittl. Diff. = –0.89, $p = .001$) Die Beträge der mittleren Differenzen in Setting B und Setting C sind jedoch wesentlich geringer als in Setting A *Einzelförderung*, was darauf hindeutet, dass der Anstieg in Setting A *Einzelförderung* größer ist als in den übrigen Settings. Die in Tab. 8.5. angegebenen Effektstärken deuten darauf hin, dass sich die Angemessenheitswerte durch die Unterschiede der Kinder in Setting A *Einzelförderung* (part. $\eta^2 = .881$) stärker erklären lassen als durch die Unterschiede der Kinder in den übrigen beiden Settings (*Klassenverband*: part. $\eta^2 = .087$; *Kontrollgruppe*: part $\eta^2 = .095$).

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP sowie die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP zeigen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind.

Des Weiteren zeigen die Gruppenunterschiede zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.2., links; Tab. 8.5), dass die Angemessenheitswerte *aller* Kinder in Setting B *Klassenverband* zu allen drei MZP auf einem signifikant höheren Niveau liegen als in der *Kontrollgruppe* (Setting C) (MZP 1: mittl. Diff. = 2.10, $p = .000$; MZP 2: mittl. Diff. = 2.09, $p = .000$; MZP 3: mittl. Diff. = 1.87, $p = .000$). Die Kinder in

Setting B *Klassenverband* starten also schon auf signifikant höherem Niveau als die Kinder der *Kontrollgruppe* und dies bleibt auch im Verlauf der MZP so.

In Setting *B Klassenverband* sind somit keine signifikant positiven Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar.

Aufgrund der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden.

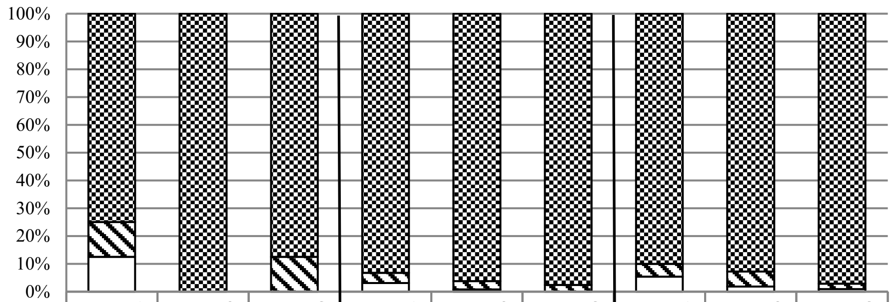
Auf Basis der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

...zu ‚besonderen' Aufgaben

Um herauszufinden, ob es mögliche ‚besondere' Aufgaben gibt, deren jeweilige Einzelergebnisse sehr stark von den jeweils gebildeten Durchschnittswerten aller Aufgaben abweichen, werden zusätzlich die Ergebnisse *aller* Kinder in allen Aufgaben mit den Ergebnissen *aller* Kinder in den einzelnen Aufgaben verglichen. Die Einzelergebnisse von Aufgaben werden hier aufgeführt und einzeln analysiert, wenn Unterschiede zwischen den jeweiligen Werten in den einzelnen Aufgaben und den Werten über alle Aufgaben von mindestens 30 Prozentpunkten in mindestens zwei Werten vorliegen. Die Ergebnisse zu den übrigen einzelnen Testaufgaben sind in Anhang C zu finden.

Bei Durchsicht der Ergebnisse der einzelnen Aufgaben zeigt sich, dass sich vier Aufgaben (Nr. 2, 5, 7 und 14) in mindestens zwei Werten mindestens um 30 Prozentpunkte von den durchschnittlichen Ergebnissen aller Aufgaben unterscheiden.

Aufgabe Nr. 2

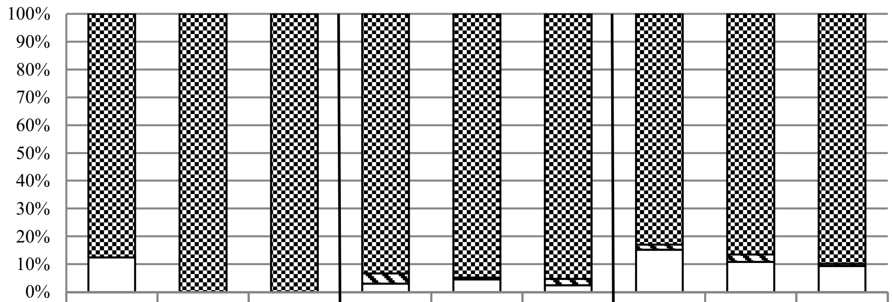


	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	75,0%	100,0%	87,5%	93,3%	96,3%	97,6%	90,2%	92,8%	97,2%
teilweise angemessen	12,5%	0,0%	12,5%	3,7%	3,0%	2,4%	4,5%	5,4%	1,9%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	3,0%	0,7%	0,0%	5,4%	1,8%	0,9%

Abbildung 8.3: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Angemessenheit zu den drei MZP aller Kinder in den Settings in Aufgabe Nr. 2

Bei den Aufgaben Nr. 2 und 5 ist auffällig, dass die jeweiligen Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in den drei Settings und zu allen drei MZP im Vergleich zu den Anteilen an *teilweise* und *nicht angemessenen* Bearbeitungen stark überwiegen (Abb. 8.3 und Abb. 8.4).

Aufgabe Nr. 5

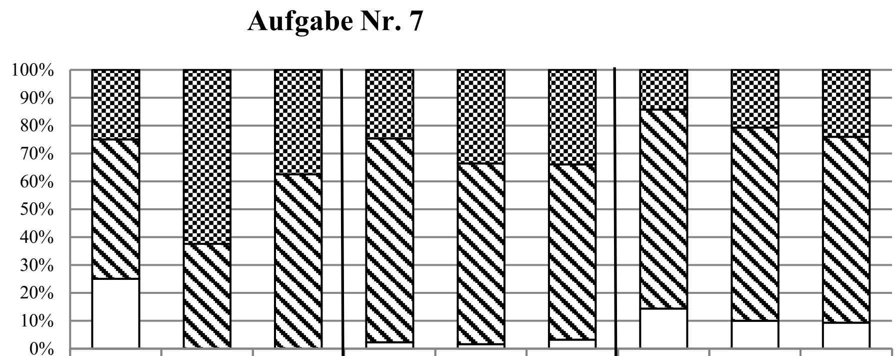


	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	87,5%	100,0%	100,0%	93,3%	94,8%	95,2%	83,0%	86,5%	89,8%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	0,7%	2,4%	1,8%	2,7%	0,9%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	3,0%	4,5%	2,4%	15,2%	10,8%	9,3%

Abbildung 8.4: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Angemessenheit zu den drei MZP aller Kinder in den Settings in Aufgabe Nr. 5

Die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen liegen bereits zu MZP 1 bei mindestens 75,0 % (dies ist der Wert in Aufgabe Nr. 2, Setting A *Einzelförderung,* MZP 1).

Bei Aufgabe Nr. 7 kann festgestellt werden, dass die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen Settings zu allen MZP zwischen 14,3 % und 62,5 % liegen (Abb. 8.5).



	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
angemessen	25,0%	62,5%	37,5%	24,6%	33,6%	33,9%	14,3%	20,7%	24,1%
teilweise angemessen	50,0%	37,5%	62,5%	73,1%	64,9%	62,9%	71,4%	69,4%	66,7%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	0,0%	2,2%	1,5%	3,2%	14,3%	9,9%	9,3%

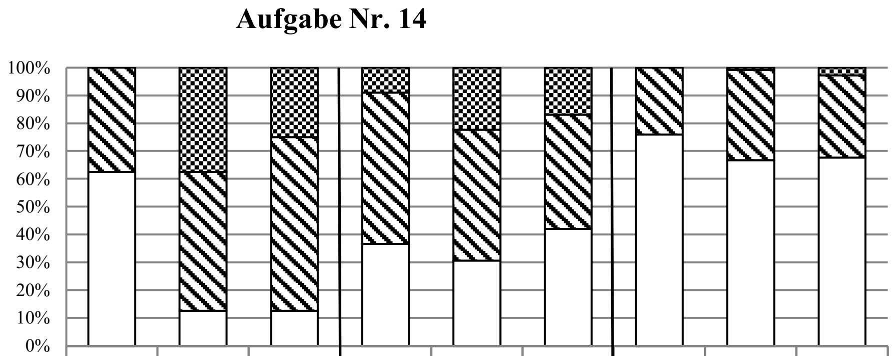
Abbildung 8.5: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Angemessenheit zu den drei MZP aller Kinder in den Settings in Aufgabe Nr. 7

Die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen bei Aufgabe Nr. 7 sind in allen Settings und zu allen drei MZP jeweils im Vergleich zu den übrigen Anteilen am geringsten (zwischen 0,0 % und 25,0 %). Mit Ausnahme von MZP 2 in Setting A *Einzelförderung* sind die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen im Vergleich zu den Anteilen an *angemessenen* und *nicht angemessenen* Bearbeitungen bei Aufgabe Nr. 7 jeweils am größten (Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen: zwischen 37,5 % und 73,1 %).

Bei Aufgabe Nr. 14 sind die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen drei Settings zu allen drei MZP jeweils im Vergleich zu den übrigen Anteilen am geringsten (zwischen 0,0 % und 37,5 %) (Abb. 8.6).

Die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen liegen bei Aufgabe Nr. 14 zwischen 24,1 % und 54,5 % und sind damit in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 2 und MZP 3 und in Setting B *Klassenverband* zu MZP 1 und MZP 2 jeweils größer als die übrigen Anteile.

Die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen liegen bei Aufgabe Nr. 14 zwischen 12,5 % und 75,9 % und sind damit in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 1, in Setting B *Klassenverband* zu MZP 3 und in der *Kontrollgruppe* zu allen drei MZP jeweils größer als die übrigen Anteile.



	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
angemessen	0,0%	37,5%	25,0%	9,0%	22,4%	16,9%	0,0%	0,9%	2,8%
teilweise angemessen	37,5%	50,0%	62,5%	54,5%	47,0%	41,1%	24,1%	32,4%	29,6%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	12,5%	36,6%	30,6%	41,9%	75,9%	66,7%	67,6%

Abbildung 8.6: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Angemessenheit zu den drei MZP aller Kinder in den Settings in Aufgabe Nr. 14

Diskussion

Bei Betrachtung der prozentualen Anteile an *angemessenen*, *teilweise angemessenen* und *nicht angemessenen* Bearbeitungen ist festzustellen, dass bei der Ausprägung *angemessen* und *nicht angemessen* sehr starke Veränderungen in Setting A *Einzelförderung* zu verzeichnen sind. In diesem Setting kommt es während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, zu einem starken Anstieg des Anteils an *angemessenen* Bearbeitungen. Der Anteil sinkt zwar von MZP 2 zu MZP 3 wieder, dennoch kann immer noch ein sehr starker Anstieg von MZP1 zu MZP 3 festgestellt werden. Der Anteil an *nicht angemessenen* Bearbeitungen sinkt von MZP 1 zu MZP 2 beträchtlich und steigt zu MZP 3 wieder etwas an. Diese Senkung ist im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, abgeschwächt, aber immer noch feststellbar. Die Veränderungen in Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* sind insgesamt eher gering. Die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen liegen in allen drei Settings zu allen drei MZP auf einem niedrigen Niveau. Bei Betrachtung der absoluten Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen stellt man fest, dass sie in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 2 und MZP 3 jeweils auf einem hohen Niveau bei 83,0 % sowie 65,2 % und in

Setting B *Klassenverband* bei jeweils knapp über 70 % liegen. In Setting C *Kontrollgruppe* ist zu MZP 2 und MZP 3 ein mittleres Niveau bei jeweils knapp unter 60 % feststellbar.

Betrachtet man die Ergebnisse zu den Aufgaben Nr. 2 und Nr. 5, so ist festzustellen, dass die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen bei diesen Einzelaufgaben wesentlich größer sind als bei den durchschnittlichen Anteilen *angemessener* Bearbeitungen aller Aufgaben. Diese Aufgaben scheinen von *allen* Kindern von MZP 1 an leicht lösbar zu sein. Bei beiden Aufgaben handelt es sich jeweils um eine Übersetzung in die Symbolform (Aufgabe Nr. 2: Darstellung von didaktischem Material; Aufgabe Nr. 5: Kontext in Textform). Beide Aufgaben lassen sich dem *kartesischen Produkt* zuordnen (Anordnung der Elemente in Zeilen und Spalten). Die überwiegend *angemessene* Bearbeitung von Aufgabe Nr. 2 in allen Settings zu allen drei MZP könnte darauf hindeuten, dass das Punktefeld, welches Aufgabe Nr. 2 beinhaltet, mittlerweile von den meisten Lehrkräften bei der Behandlung der Multiplikation von Beginn an eingesetzt wird. Bei Aufgabe Nr. 5 (Übersetzung von Text in Symbolform) überrascht es vermutlich mehr, dass mehrheitlich *angemessene* Bearbeitungen auftreten, da die Erfassung von Text und das Finden der passenden Aufgabe durchaus anspruchsvoll sein kann. Denkbar ist, dass lediglich die Zahlen im Text erkannt werden und daraus eine Multiplikationsaufgabe gebildet wird, was zu den hohen Anteilen an *angemessenen* Bearbeitungen führen könnte.

Bei Aufgabe Nr. 7 sind die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen im Vergleich zu den durchschnittlichen Anteilen an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen in allen Aufgaben wesentlich größer. Die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen sind im Gegenzug bei Aufgabe Nr. 7 kleiner als die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen Aufgaben. Bei Aufgabe Nr. 14 sind ebenfalls die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen wesentlich größer als die durchschnittlichen Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen in allen Aufgaben. Die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen sind wesentlich kleiner als die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen Aufgaben. Die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen sind bei Aufgabe Nr. 14 größer als die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen in allen Aufgaben. Beiden Aufgaben ist gemeinsam, dass sie zu fast allen MZP in allen drei Settings verhältnismäßig selten *angemessen* bearbeitet werden, sondern überwiegend *teilweise* und *nicht angemessen*. Aufgabe Nr. 7 enthält die Aufgabenstellung, von didaktischem Material in die Symbolform zu übersetzen. In Aufgabe Nr. 14 soll die entgegengesetzte Übersetzungsrichtung vollzogen werden. Gemeinsam ist beiden Aufgaben die Darstellung mit Punktefeld (*kartesisches Produkt*) und die Thematisierung von Distributivität. Scheinbar werden bei der Bearbeitung der Aufgaben häufig nur einzelne Elemente zur *angemessenen* Bearbeitung erkannt. Bei beiden Aufgaben sind die Anteile an *teilweise angemessenen* und *angemessenen* Bearbeitungen zu MZP 2 und MZP 3 in Setting A *Einzelförderung* sehr groß. Dies könnte darauf hindeuten, dass Entwicklung von Verständnis für Distributivität mit gezielter Förderung (wie in der *Einzelförderung*) auch bei Kindern *mit Förderbedarf* durchaus möglich ist. Die hohen Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen auch in Setting A *Einzelförderung* zeigen jedoch auch Grenzen bzw. möglicherweise eine Notwendigkeit der Weiterentwicklung des Konzepts zur Förderung auf.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse zu *allen* Kindern und allen Aufgaben kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

8.1.1.4 Veränderungen bei den Kindern *mit Förderbedarf*

Es wird im Weiteren folgender Forschungsfrage nachgegangen:

I. *Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Angemessenheit der Bearbeitung bei den Kindern mit Förderbedarf?*

Um diese Forschungsfrage zu beantworten, wurden auch in Setting B und Setting C Kinder identifiziert, die in den einzelnen Testaufgaben bezüglich des Multiplikativen Verständnisses einen entsprechenden Förderbedarf aufweisen. Diese Kinder *mit Förderbedarf* (Matching-Kinder) in Setting B und C haben aufgrund des Pre-Tests also ebenfalls Förderbedarf bezüglich des Multiplikativen Verständnisses. Das heißt, es wurde nach möglichst hohen Übereinstimmungen in allen der analysierten Kategorien gesucht (vgl. Kap. 7.6.2).

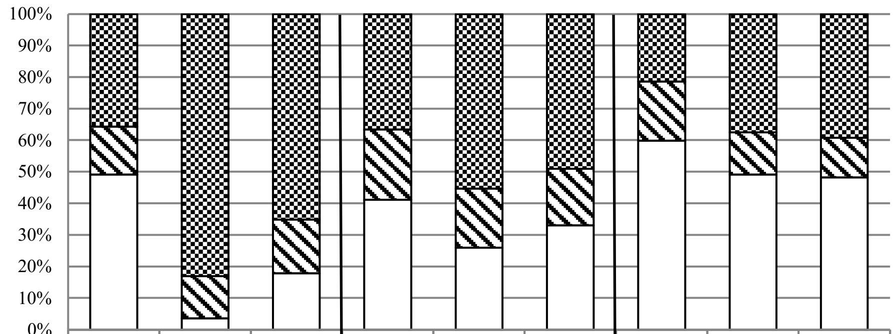
Aufgrund dieser Vorgehensweise der Auswahl der Matching-Kinder lässt es sich nicht vermeiden, dass nun die Anteile an Ausprägungen im Pre-Test bezüglich jeweils einer einzelnen Kategorie, hier der Kategorie *Angemessenheit*, nicht vollständig identisch sind. Es ist in der folgenden Analyse somit zu berücksichtigen, dass sich die durchschnittlichen Ausgangslagen im Pre-Test etwas voneinander unterscheiden.

Im Folgenden werden die Anteile der Kinder *mit Förderbedarf* in den drei Settings über alle Aufgaben hinweg betrachtet und analysiert, die sich auf die Kategorie *Angemessenheit* beziehen. Hierbei handelt es sich jeweils um eine kleine Gruppe (n = 8). Bei den Kindern *mit Förderbedarf* werden die Durchschnittswerte über alle Aufgaben betrachtet.

Ergebnisse

Deskriptive Darstellung der Anteile

Alle Aufgaben – Kinder mit Förderbedarf



	Setting A - Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B - Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C - Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	35,7%	83,0%	65,2%	36,6%	55,4%	49,1%	21,4%	37,5%	39,3%
teilweise angemessen	15,2%	13,4%	17,0%	22,3%	18,8%	17,9%	18,8%	13,4%	12,5%
nicht angemessen	49,1%	3,6%	17,9%	41,1%	25,9%	33,0%	59,8%	49,1%	48,2%

Abbildung 8.7: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Angemessenheit zu den drei MZP der Kinder mit Förderbedarf in den Settings

Um herauszufinden, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Angemessenheit* der Bearbeitung bei den Kindern *mit Förderbedarf* haben, werden wieder zunächst *deskriptiv* sowohl die prozentualen Anteile in den jeweiligen Settings zu den drei MZP (Abb. 8.7) als auch jeweils die prozentualen Veränderungen von MZP 1 zu MZP 2 und von MZP 1 zu MZP 3 in den drei Settings dargestellt (Tab. 8.6 und Tab. 8.7).

Es lässt sich feststellen, dass die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen drei Settings während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, ansteigen (Abb. 8.6). Sehr stark ist der Anstieg in Setting A *Einzelförderung* von 35,7 % auf 83,0 % um 132,5 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.6). Beträchtliche Anstiege sind aber auch in den beiden übrigen Settings feststellbar: In Setting B *Klassenverband* steigt der Anteil an *angemessenen* Bearbeitungen von MZP 1 zu MZP 2 von 36,6 % auf 55,4 % um 51,4 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1. In der *Kontrollgruppe* (Setting C) steigt der Wert von MZP 1 zu MZP 2 von 21,4 %

auf 37,5 % um 75,2 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1. Von MZP 2 zu MZP 3 sinken die Anteile in Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband* wieder, in der *Kontrollgruppe* (Setting C) steigen sie geringfügig. Im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, steigen die Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen in allen drei Settings an. Sehr stark ist der Anstieg in Setting A *Einzelförderung* von 35,7 % zu 65,2 % um 82,6 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.7). Ebenso sehr stark ist der Anstieg in der *Kontrollgruppe* von 21,4 % zu 39,3 % um 83,6 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1.

Die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen sind in allen drei Settings zu allen drei MZP jeweils eher gering zwischen 12,5 % und 18,8 %.

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 2, bezogen auf den Wert zu MZP 1	**Kinder mit Förderbedarf in den Settings**		
Ausprägung	**Einzelförderung (A)**	**Klassenverband (B)**	**Kontrollgruppe (C)**
angemessen	Anstieg um 132,5 %	Anstieg um 51,4 %	Anstieg um 75,2 %
teilweise angemessen	Senkung um 11,8 %	Senkung um 15,7 %	Senkung um 28,7 %
nicht angemessen	Senkung um 92,7 %	Senkung um 37,0 %	Senkung um 17,9 %

Tabelle 8.6: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 2

Von MZP 1 zu MZP 2 sinken die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen in allen drei Settings. Sehr stark ist die Senkung in Setting A *Einzelförderung*, nämlich von 49,1 % auf 3,6 % um 92,7 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1. Von MZP 2 zu MZP 3 steigen die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen in Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband* wieder etwas an, in der *Kontrollgruppe* (Setting C) sinken sie geringfügig. Von MZP 1 zu MZP 3 sinken die Anteile an *nicht angemessenen* Bearbeitungen in allen drei Settings. Sehr stark ist die Senkung in Setting A *Einzelförderung*, nämlich von 49,1 % zu 17,9 % um 63,5 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1.

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 3, bezogen auf den Wert zu MZP 1	Kinder mit Förderbedarf in den Settings		
Ausprägung	**Einzelförderung (A)**	**Klassenverband (B)**	**Kontrollgruppe (C)**
angemessen	Anstieg um 82,6 %	Anstieg um 34,2 %	Anstieg um 83,6 %
teilweise angemessen	Anstieg um 11,8 %	Senkung um 19,7 %	Senkung um 33,5 %
nicht angemessen	Senkung um 63,5 %	Senkung um 19,7 %	Senkung um 19,4 %

Tabelle 8.7: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 3

Statistische Überprüfung der Hypothesen

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Angemessenheit* der Bearbeitung der Kinder *mit Förderbedarf* haben, sollen Hypothesen getestet werden. Im Folgenden werden die Hypothesen sowie die jeweils entsprechenden Nullhypothesen formuliert:

H3: Die acht Kinder in Setting A Einzelförderung bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger angemessen als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_3$: Die acht Kinder in Setting A Einzelförderung bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger angemessen als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

H4: Die Kinder mit Förderbedarf in Setting B Klassenverband bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger angemessen als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_4$: Die Kinder mit Förderbedarf in Setting B Klassenverband bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger angemessen als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

In Tabelle 8.8 wird die Verteilung der Testbearbeitungen zu *Angemessenheit* (bezogen nun auf den Summenindex, Werte zwischen 0 und 14 möglich) für die Kinder *mit Förderbedarf* der Interventionsgruppen (Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*) und der *Kontrollgruppe* (Setting C) zu den drei MZP dargestellt.

	Angemessenheit – Kinder mit Förderbedarf					
	Einzelförderung		Klassenverband		Kontrollgruppe	
MZP	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**
1	5.00	1.20	5.13	0.99	3.00	1.07
2	11.63	1.60	7.75	1.75	5.25	2.61
3	9.13	2.48	6.88	2.64	5.50	2.51
			n = 8			

Tabelle 8.8: Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) der Kinder mit Förderbedarf zu den MZP (Angemessenheit)

Die Mittelwerte bezüglich *Angemessenheit* steigen bei den Kindern *mit Förderbedarf* von MZP 1 zu MZP 2 in allen drei Settings an (Tab. 8.8). Von MZP 2 zu MZP 3 sinken sie in Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband* wieder; in der *Kontrollgruppe* steigen so nochmals minimal an. Von MZP 1 zu MZP 3 steigen sie in allen drei Settings.

Abbildung 8.8 zeigt Veränderungen der Mittelwerte über die MZP in den drei Settings sowie signifikante Unterschiede. Zudem werden die Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Haupteffekten (HE) sowie zum Interaktionseffekt angegeben (F-Wert, Standardfehler ≙ SE, Effektstärke angegeben als (partielles) Eta-Quadrat ≙ (part.) η^2) und Voraussetzungen (Normalverteilung, Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen, Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix, Sphärizität) sowie Post-hoc-Tests sowie ggf. Korrekturen zur Durchführung der Varianzanalyse genannt (Tab. 8.9).

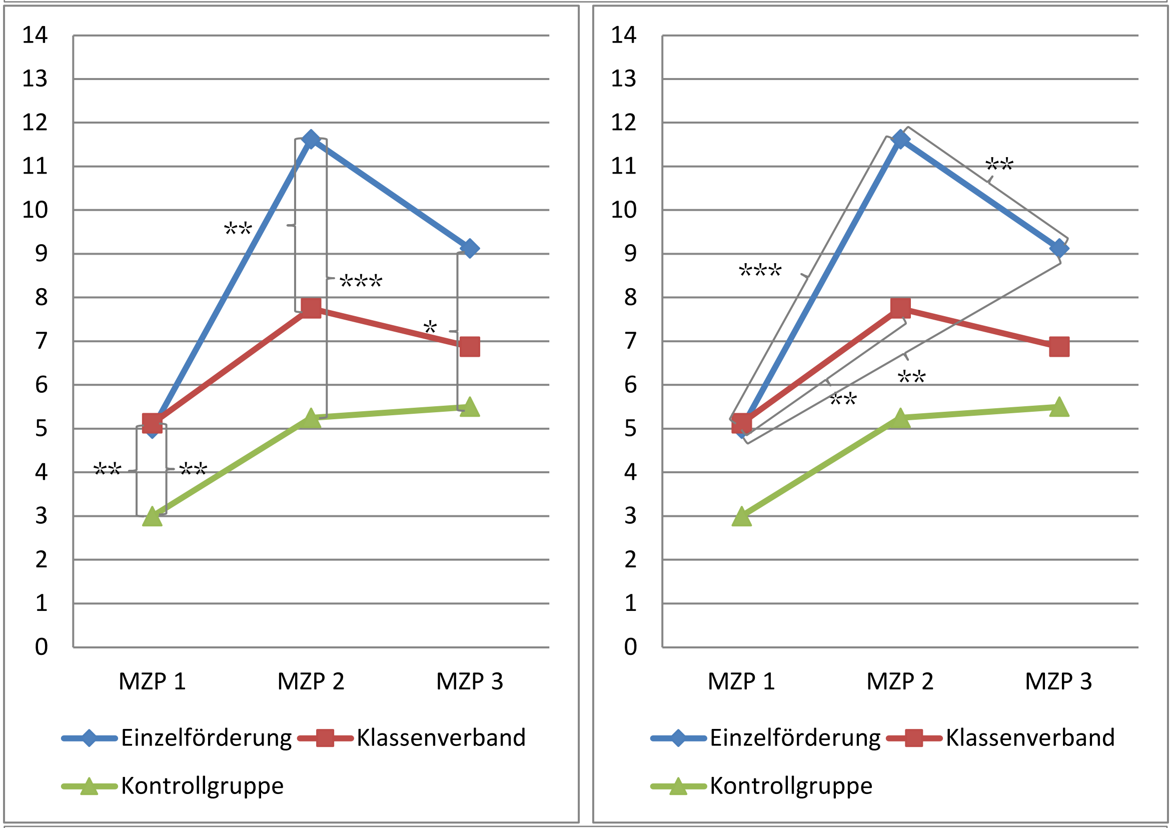
Bei den Ergebnissen der Kinder *mit Förderbedarf* in den Settings sind die Voraussetzungen gegeben, sodass eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung im gemischten Design gerechnet werden konnte (Tab. 8.9).

Der Interaktionseffekt zwischen Gruppenfaktor und Messwiederholungsfaktor kann bestätigt werden ($F = 5.896$, $p = .001$, part. $\eta^2 = .36$) (Tab. 8.9). Mindestens in einem der Settings unterscheidet sich die Veränderung der Angemessenheitswerte von den Veränderungen der übrigen Settings.

Im Weiteren werden wiederum die Haupteffekte des Gruppenfaktors sowie des Messwiederholungsfaktors analysiert (Tab. 8.9). Es zeigen sich signifikante Haupteffekte des Gruppenfaktors (HE-Gruppen: $F = 12.639$, $p = .000$, part. $\eta^2 = .546$) sowie des Messwiederholungsfaktors auf die Angemessenheitswerte (HE-MZP: $F = 45.003$, $p = .000$, part. $\eta^2 = .682$). Die Effektstärke des

Haupteffekts des Messwiederholungsfaktors ist etwas größer als der des Gruppenfaktors, was darauf hindeutet, dass die Zeit die Testbearbeitung bezüglich *Angemessenheit* etwas stärker beeinflusst als die Gruppenzugehörigkeit.

Angemessenheit – Kinder mit Förderbedarf



Interaktionseffekt bestätigt

n (Einzelförderung) = 8, n (Klassenverband) = 8; n (Kontrollgruppe) = 8

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Abbildung 8.8: Veränderungen der Mittelwerte der Kinder mit Förderbedarf im Verlauf der MZP (Angemessenheit)

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.8, links; Tab. 8.9) zeigen, dass sich die Angemessenheitswerte der acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 1 von denen der Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* nicht signifikant unterscheiden. Zu MZP 2 bearbeiten die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben dann aber signifikant häufiger *angemessen* als die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* (*Einzelförderung – Klassenverband*: mittl. Diff. = 3.88, $p = .003$). Zu MZP 3 unterscheiden sich die Kinder in Setting A *Einzelförderung* jedoch nicht mehr signifikant von den Kindern *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* und in der *Kontrollgruppe* (Setting C), d. h. die Werte der Settings liegen auf ähnlichem Niveau.

Die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP (Abb. 8.8., rechts; Tab. 8.9) zeigen, dass in Setting A *Einzelförderung* zudem im Gegensatz zur *Kontrollgruppe* ein signifikanter Zuwachs von MZP 1 zu MZP 2 feststellbar ist (mittl. Diff. = –6.63, p = .000). Von MZP 1 zu MZP 3 steigen die Werte der Kinder in Setting A *Einzelförderung* ebenfalls signifikant an (mittl. Diff. = –4.13, p = .003). Dies ist in der *Kontrollgruppe* (Setting C) nicht der Fall.

Angemessenheit – Kinder mit Förderbedarf

		MZP 1			**MZP 2**			**MZP 3**		
Setting		*Mittlere Differenz*		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*
Klassenverband	*Einzelförderung*	0.13		0.544	–3.88	**	1.017	–2.25		1.271
	Kontrollgruppe	2.13	**	0.544	2.50		1.017	1.38		1.271
Einzelförderung	*Kontrollgruppe*	2.00	**	0.544	6.38	***	1.017	3.63	*	1.271

		Klassenverband			**Einzelförderung**			**Kontrollgruppe**		
MZP		*Mittlere Differenz*		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*
1	*2*	–2.63	**	0.532	–6.63	***	.625	–2.25		0.901
	3	–1.75		0.977	–4.13	**	.766	–2.50		0.824
2	*3*	0.88		0.693	2.50	**	.567	–0.25		0.453

n (Klassenverband) = 8, n (Förderkinder) = 8, n (Kontrollgruppe) = 8 — *p <. 05, **p <. 01, ***p <. 001

Zweifaktorielle ANOVA gemischtes Design, HE-Gruppen: F = 12.639***, part. η^2 = .546,
HE-MZP: F = 45.003***, part. η^2 = .682, Interaktion: F = 5.896**, part. η^2 = .36

Normalverteilung: Shapiro-Wilk p > .05, Sphärizität: Mauchly p > .05,
Homogenität der Fehlervarianzen: Levene p > .05, Homogenität der Kovarianzmatrix: Box p > .05

Post-hoc-Tests Gruppeneffekte: Korrektur n. Games-Howell, wenn Varianzhomogenitätsannahme verletzt ist (Levene: p < .05), andernfalls Tukey-HSD

Post-hoc-Tests Messwiederholungseffekte: Korrektur n. Greenhouse-Geisser,
wenn Sphärizitätsannahme verletzt ist (Mauchly: p < .05), andernfalls ohne Korrektur

SE = Standardfehler, HE = Haupteffekt, Effektstärke angegeben in (part.) η^2 — Quelle: Eigene Berechnungen

Tabelle 8.9: Ergebnisse der Varianzanalyse (Angemessenheit – Kinder mit Förderbedarf)

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP sowie die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP zeigen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind.

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.8, links; Tab. 8.9) zeigen außerdem, dass sich die Angemessenheitswerte der Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* lediglich zu MZP 1 signifikant von denjenigen in Setting C *Kontrollgruppe* unterscheiden (*Klassenverband – Kontrollgruppe*: mittl. Diff. = 2.13, p = .002), zu MZP 2 und MZP 3 ist der Unterschied nicht mehr signifikant.

Die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP (Abb. 8.8., rechts) zeigen dennoch, dass bei den Kindern *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* ein signifikanter Zuwachs von MZP 1 zu MZP 2 feststellbar ist (mittl. Diff. = –2.63, p = .005), für die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C) ist dies jedoch nicht der Fall. Somit sind die Werte der Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* zumindest von MZP 1 zu MZP 2 signifikant stärker angestiegen als die Werte der Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe*.

Es lassen sich somit auch in Setting B *Klassenverband* signifikant positive Effekte direkt nach der Intervention nachweisen.

Aufgrund der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden.

Auf Grundlage der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_4$ verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden.

Diskussion

Bei Betrachtung der prozentualen Anteile an *angemessenen*, *teilweise angemessenen* und *nicht angemessenen* Bearbeitungen wird deutlich, dass die prozentualen Veränderungen zu den MZP bei den *angemessenen* Bearbeitungen in Setting A *Einzelförderung* sowie in Setting C *Kontrollgruppe* und bei den *nicht angemessenen* Bearbeitungen in Setting A *Einzelförderung* sehr stark sind. Die übrigen Veränderungen liegen in einem mittleren bzw. niedrigen Bereich. Es lässt sich feststellen, dass die Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 2 im Vergleich zu MZP 1 die Aufgaben wesentlich häufiger *angemessen* und wesentlich seltener *nicht angemessen* bearbeiten. Von MZP 1 zu MZP 3 ist diese Veränderung zwar etwas weniger ausgeprägt, aber immer noch sehr deutlich. Die Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen liegen in allen Settings zu allen MZP auf einem eher niedrigen Niveau. Bei Betrachtung der absoluten Anteile an *angemes-*

senen Bearbeitungen ist festzustellen, dass sie in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 2 und MZP 3 jeweils auf einem hohen Niveau bei 83,0 % sowie 65,2 % und in Setting B *Klassenverband* jeweils auf einem mittleren Niveau bei 55,4 % und 49,1 % liegen. In Setting C *Kontrollgruppe* ist zu MZP 2 und MZP 3 ein eher niedriges Niveau (37,5 % und 39,3 %) feststellbar.

Auf Basis der Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Kindern *mit Förderbedarf* zu allen Aufgaben kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden.

8.1.1.5 Zwischenfazit

Bei Betrachtung der prozentualen Anteile an *angemessenen, teilweise angemessenen* und *nicht angemessenen* Bearbeitungen kann Folgendes festgestellt werden: In Setting A *Einzelförderung* kommt es zu einem starken Anstieg des Anteils an *angemessenen* Bearbeitungen während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, sowie im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, jeweils bezogen auf den Wert zu MZP 1. Außerdem sinkt der Anteil an *nicht angemessenen* Bearbeitungen von MZP 1 zu MZP 2 sowie von MZP 1 zu MZP 3 stark, jeweils bezogen auf den Wert zu MZP 1.

Die Veränderungen *aller* Kinder in Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* sind insgesamt eher gering. Bei Betrachtung der absoluten Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen *aller* Kinder stellt man fest, dass sie in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 2 und MZP 3 jeweils auf einem hohen Niveau bei 83,0 % sowie 65,2 % und in Setting B *Klassenverband* bei jeweils knapp über 70 % liegen. In Setting C *Kontrollgruppe* ist zu MZP 2 und MZP 3 ein mittleres Niveau bei jeweils knapp unter 60 % feststellbar.

Die Veränderungen an *angemessenen* Bearbeitungen sind bei den Kindern *mit Förderbedarf* auch in der *Kontrollgruppe* (Setting C) sehr stark. Die übrigen Veränderungen liegen bei den Kindern *mit Förderbedarf* im mittleren bzw. niedrigen Bereich. Die absoluten Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* liegen in Setting B *Klassenverband* zu MZP 2 und MZP 3 jeweils auf einem mittleren Niveau bei 55,4 % und 49,1 %. In Setting C *Kontrollgruppe* ist zu MZP 2 und MZP 3 ein eher niedriges Niveau bei 37,5 % und 39,3 % feststellbar.

Zu den ‚besonderen' Aufgaben lässt sich zu den Veränderungen der prozentualen Anteile der Ausprägungen zusammenfassend Folgendes feststellen: Aufgabe Nr. 2 (Übersetzung von Punktefeld in Symbolform) wurde von *allen* teilnehmenden Kindern in allen Settings und zu allen MZP überwiegend *angemessen* bearbeitet, was darauf hindeuten könnte, dass das Punktefeld von vielen Lehrkräften im Unterricht thematisiert wird und deswegen vielen Kindern bereits vertraut ist. Aufgabe Nr. 5 (Übersetzung von Text in Symbolform, *kartesisches Produkt*) wird ebenfalls in allen Settings zu allen MZP überwiegend *angemessen* bearbeitet. Denkbar ist, dass der Text für die Kinder so verständlich ist, dass sie ihn mehrheitlich *angemessen* in die Symbolform übersetzen oder aber dass sie lediglich auf die Zahlen im Text fokussieren und daraus eine passende Multiplikationsaufgabe bilden. Aufgaben Nr. 7 und Nr. 14 (Übersetzung von Punktefeld in Symbolform bzw. umgekehrt) thematisieren beide die Distributivität und werden in allen drei Settings zu fast allen MZP überwiegend *nicht* bzw. *teilweise angemessen* bearbeitet. In Setting A *Einzelförderung* sind die Anteile an *teilweise angemessenen* und *angemessenen* Bearbeitungen zusammen sehr groß. Dies deutet darauf hin, dass es möglich ist, sogar Kindern *mit Förderbedarf* in der zweiten Klasse Verständnis für Distributivität zu vermitteln. Allerdings zeigen die großen Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen in beiden Interventionssettings, dass die Vorgehensweise im Konzept, Verständnis für Distributivität zu entwickeln, noch optimiert werden kann.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse zu *allen* Kindern und allen Aufgaben kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind somit signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar. In Setting B *Klassenverband* lassen sich dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisen.

Auf Grundlage der Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Kindern *mit Förderbedarf* zu allen Aufgaben kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind somit signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar. Auch in Setting B *Klassenverband* lassen sich signifikant positive Effekte immerhin direkt nach der Intervention nachweisen.

Zusammenfassend lässt sich aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalysen sagen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind, in Setting B *Klassenverband* bei den Kindern *mit Förderbedarf* immerhin direkt nach der Intervention. In Setting *B Klassenverband* sind bei *allen* Kindern dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage I und II).

8.1.2 Nutzung von Grundvorstellungen

Das Design von Förder- und Testaufgaben im Projekt basiert fachdidaktisch auf Grundvorstellungen der Multiplikation, die durch entsprechende Aufgaben nahegelegt werden (vgl. Kap. 7.2.1). In den individuellen Bearbeitungen der Kinder werden hingegen Grundvorstellungen als subjektive Deutungsmodelle der angebotenen Aufgaben durch die Kinder genutzt (vgl. Kap. 4.2.2).

Die Testergebnisse zum Multiplikativen Verständnis werden bezogen auf die Nutzung von Grundvorstellungen hinsichtlich folgender Forschungsfragen analysiert:

I. Wie spiegelt sich die in einer Aufgabenstellung zugrunde gelegte Grundvorstellung in der von den Kindern genutzten Grundvorstellung wider?

II. Unterscheiden sich die Grundvorstellungen, die in den Bearbeitungen aller Kinder in den verschiedenen Settings der Erprobung auftreten?

III. Unterscheiden sich die Grundvorstellungen, die in den Bearbeitungen der Kinder mit Förderbedarf auftreten?

8.1.2.1 Aufgabenauswahl

Es werden sinnvollerweise lediglich diejenigen Bearbeitungen analysiert, die mindestens als *teilweise angemessene* Bearbeitungen kategorisiert werden.

Die Aufgaben Nr. 3, 9, 12 und 15 (vgl. Anhang A) werden nicht in die Analyse von Grundvorstellungen einbezogen. Dies geschieht aus folgenden Gründen:

- Bei Aufgabe Nr. 3 kann die Nutzung einer Grundvorstellung in der Bearbeitung nicht deutlich werden, da lediglich der jeweils passende Term angekreuzt werden muss.
- Bei Aufgabe Nr. 9 zeigt die Auswertung der Daten, dass in ca. 45 % der Bearbeitungen die Aufgabenstellung $7 \cdot 8$ (mit oder ohne Ergebnis) lediglich abgeschrieben bzw. die Tauschaufgabe notiert wurde. Eine Analyse bzgl. *Angemessenheit* ist hier jeweils nicht möglich.
- Die Aufgabenstellungen Nr. 12 und Nr. 15 gibt die Nutzung einer spezifischen Grundvorstellung vor. Eine individuelle Deutung durch die Kinder wird nicht erwartet.

In die Auswertung fließen somit 12 der 16 Aufgabenbearbeitungen und damit sechs Aufgabenbereiche ein (Tab. 8.10). Im Weiteren werden diese vollständig in die Analyse eingegangen Aufgaben der Lesbarkeit halber wiederum als ‚alle' Aufgaben gekennzeichnet.

			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	**wiederholte Addition**
Darstellungsformen	**Kontextbezug**	**in die Symbolform**		
		von der Symbolform		
	didaktisches Material	**in die Symbolform**		
		von der Symbolform		
	Symbolform			

Tabelle 8.10: Bereiche aller analysierten Aufgaben

8.1.2.2 Vorgehensweise der Analyse

Die Bearbeitungen der Kinder werden hinsichtlich folgender Ausprägungen analysiert (vgl. 6.3.2.1). *Multiplikative* Bearbeitungen enthalten die Grundvorstellung des *kartesischen Produkts, additive* Bearbeitungen enthalten die Grundvorstellung der *wiederholten Addition*. Die Ausprägung *beide* bezieht sich auf Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten. Der übrige Anteil sind *nicht angemessene* Bearbeitungen. Bei diesen ist die Zuordnung zu einer Grundvorstellung nicht sinnvoll möglich. Auf die Analyse der Anteile bezüglich der Kategorie *Angemessenheit* wurde in Abschnitt 8.1.1 eingegangen.

Um Ergebnisse einzelner Aufgaben analysieren zu können, werden die prozentualen Anteile an Bearbeitungen in jeder einzelnen Aufgabe zu den drei MZP ermittelt. Für gröbere Übersichten über Aufgabenbereiche bzw. alle Aufgaben wird der jeweilige Durchschnitt aus den Prozentwerten der Aufgaben berechnet. So ergeben sich Durchschnittswerte in Prozent der Anteile der unterschiedlichen Bearbeitungen für die drei MZP bzw. für die drei Settings. Es werden zunächst deskriptiv die Anteile der Bearbeitungen bezüglich der Nutzung verschiedener Grundvorstellungen beschrieben.

Werden verschiedene Aufgabengruppen zu einem MZP verglichen, so werden absolute Unterschiede in Prozentpunkten angegeben. Handelt es sich um Entwicklungsverläufe von einem früheren MZP zu einem späteren MZP, so wird die relative Änderung in Prozent angegeben.

Um Forschungsfrage II und III beantworten zu können, wird für die statistische Überprüfung der Effekte der Intervention die Kategorie *Grundvorstellungen* umcodiert:

- *multiplikativ (1)*
- *nicht multiplikativ* (0), bestehend aus *additiv*, *beide* und *nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos*

In einem weiteren Schritt werden jeweils die Anzahl der *multiplikativ* gelösten Aufgaben pro Schülerin bzw. Schüler und je MZP gezählt (Summenindex) (vgl. Kap. 6.3.2.2). Da für diese Kategorie 12 Testaufgaben analysiert werden, entsteht bei Aufsummierung aller angemessenen Bearbeitungen für jedes Kind zu jedem der MZP ein Wert zwischen 0 und 12. Mit diesen Werten werden die weiteren Berechnungen durchgeführt.

8.1.2.3 Wirkung der Aufgabenstellung auf die Nutzung von Grundvorstellungen

Zunächst soll folgende Forschungsfrage beantwortet werden:

I. *Wie spiegelt sich die in einer Aufgabenstellung zugrunde gelegte Grundvorstellung in der von den Kindern genutzten Grundvorstellung wider?*

Um dies herauszufinden, werden in den folgenden Abschnitten die Anteile an Bearbeitungen bezüglich der Kategorie *Grundvorstellungen* in allen Settings zusammenfassend analysiert (MZP 1: n = 335; MZP 2: n = 334; MZP 3: n = 316).

Bei der Analyse der Ergebnisse zu den einzelnen Bereichen werden zusätzlich die Einzelergebnisse der jeweiligen beiden Aufgaben betrachtet. Es interessiert hier der jeweilige Unterschied zwischen den Anteilen in den Ergebnissen der beiden Aufgaben. Hier aufgeführt und einzeln analysiert werden sie dann, wenn Unterschiede zwischen den jeweiligen Werten der Einzelaufgaben von mindestens 20 Prozentpunkten vorliegen.

Ergebnisse …

… zu allen Aufgaben

Betrachtet werden zunächst die Durchschnittswerte aller Aufgaben insgesamt, unabhängig davon, welche Grundvorstellungen in der Aufgabenstellung nahegelegt werden (Abb. 8.9).

Die Ergebnisse zeigen, dass die *multiplikative* Grundvorstellung zu allen drei MZP über alle Aufgaben hinweg durchschnittlich deutlich am häufigsten (über 60 %) genutzt wird.

Es zeigt sich darüber hinaus, dass sich bei dieser ersten Grobanalyse über alle Testaufgaben und alle Settings hinweg die Verteilung der Nutzung der Grundvorstellungen zu den drei MZP kaum verändert. Der Anteil *multiplikativer* Bearbeitungen liegt zu MZP 1 bei 63,3 % und steigt zu MZP 2 auf 67,5 % um 6,6 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1. Der Anteil sinkt zu MZP 3 auf 66,2 %, d. h. um 1,9 %, bezogen auf den Wert zu MZP 2. Die Nutzung *beider* Grundvorstellungen tritt jeweils am seltensten auf (MZP 1: 4,0 %; MZP 2: 3,8 %, MZP 3: 4,1 %). Jeweils am zweithäufigsten zu allen drei MZP tritt die *additive* Grundvorstellung auf (MZP 1: 8,8 %; MZP 2: 8,9 %; MZP 3: 10,1 %).

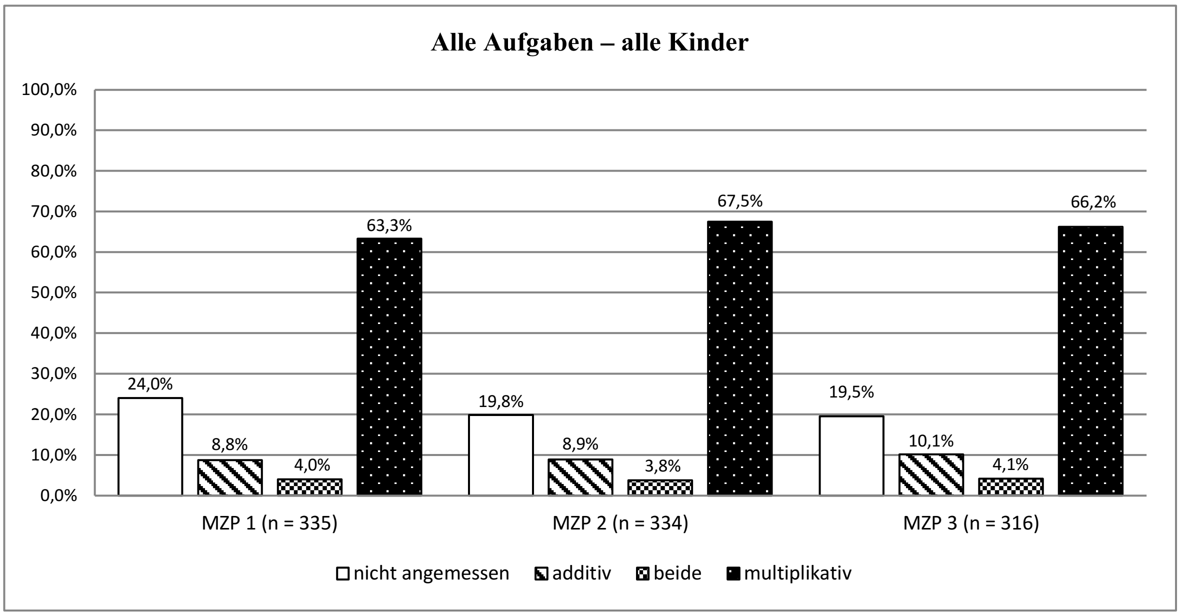


Abbildung 8.9: *Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen bei allen Aufgaben in allen Settings*

... zum kartesischen Produkt und zur wiederholten Addition

Nun ist es interessant, inwieweit die in den jeweiligen Aufgaben nahegelegten Grundvorstel-lungen das Auftreten der Grundvorstellung in den Bearbeitungen der Kinder möglicherweise beeinflusst.

Es werden jeweils diejenigen Aufgaben zusammenfassend ausgewertet, die die Grundvorstellung des *kartesischen Produkts* bzw. der *wiederholten Addition* nahelegen (Tab. 8.11).

			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	didaktisches Material	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	Symbolform			

			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	didaktisches Material	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	Symbolform			

Tabelle 8.11: Bereiche der Aufgaben zum kartesischen Produkt (links) und zur wiederholten Addition (rechts)

In der kontrastierenden Gegenüberstellung der Ergebnisse der beiden Aufgabengruppen wird deutlich, dass sowohl bei den Bearbeitungen der Aufgaben zum *kartesischen Produkt* als auch bei jenen zur *wiederholten Addition* der durchschnittliche Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen jeweils am größten ist (Abb. 8.10). Insgesamt liegt er bei den Aufgaben zum *kartesischen Produkt* nur geringfügig höher als bei den Aufgaben zur *wiederholten Addition* (Unterschied in Prozentpunkten: MZP 1: 8,7; MZP 2: 7,5; MZP 3: 10,3).

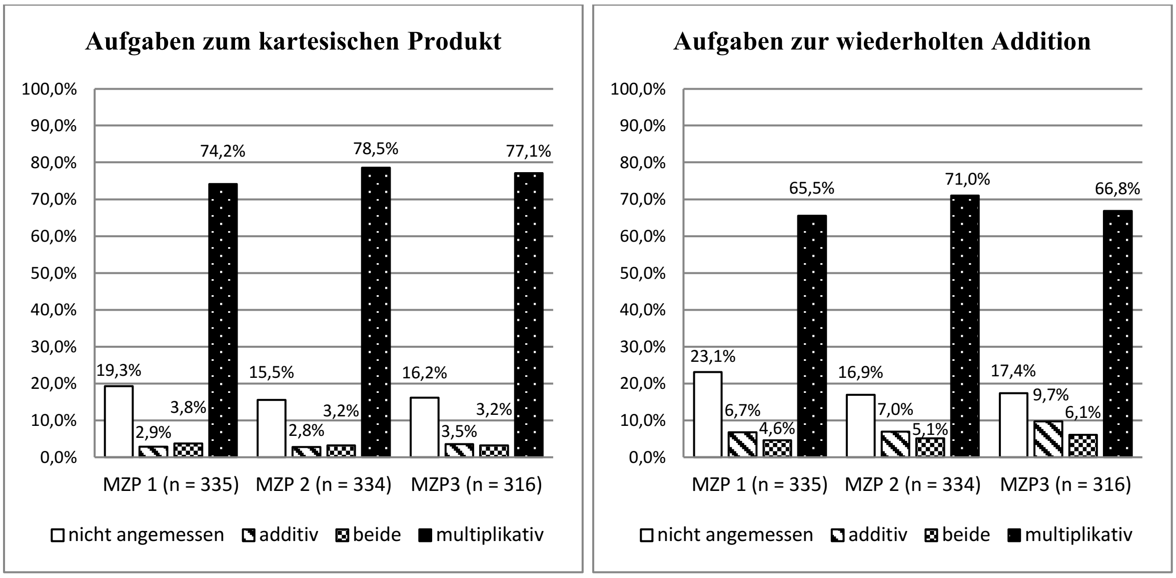


Abbildung 8.10: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen in den Aufgaben zum kartesischen Produkt (links) und zur wiederholten Addition (rechts)

Der durchschnittliche Anteil an *additiven* Bearbeitungen ist bei beiden Aufgabentypen sehr gering. Bei den Aufgaben zum *kartesischen Produkt* treten *additive* Bearbeitungen etwas seltener auf als bei den Aufgaben zur *wiederholten Addition* (Unterschied in Prozentpunkten: MZP 1: 3,8; MZP 2: 4,2; MZP 3: 6,2).

Der Anteil an Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, ist jeweils noch geringer als die Anteile an *additiven* Bearbeitungen.

... in die Symbolform mit Kontextbezug

			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontext-bezug	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	didaktisches Material	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	Symbolform			

			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontext-bezug	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	didaktisches Material	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	Symbolform			

Tabelle 8.12: Bereiche und Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit Kontextbezug zum kartesischen Produkt (links) sowie zur wiederholten Addition (rechts)

Weiter ausdifferenziert ist es möglich, die Aufgaben zum *kartesischen Produkt* bzw. zur *wiederholten Addition* nach Darstellungsform und Übersetzungsrichtung auch einzeln zu betrachten. Zunächst werden Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit Kontextbezug jeweils zum *kartesischen Produkt* und zur *wiederholten Addition* analysiert (Tab. 8.12).

Die Ergebnisse zeigen, dass die *multiplikative* Grundvorstellung in den Bearbeitungen der Aufgaben beider Bereiche am häufigsten genutzt wird (Abb. 8.11). Bei den Bearbeitungen zu Aufgaben, die das *kartesische Produkt* intendieren, wird zu allen drei MZP jeweils die *multiplikative* Grundvorstellung häufiger genutzt als bei den Bearbeitungen zu Aufgaben, die die *wiederholte Addition* intendieren (Unterschied der Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen in Prozentpunkten: MZP 1: 18,0; MZP 2: 14,7; MZP 3: 16,8).

Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen sind jeweils bei beiden Aufgabentypen zu allen drei MZP ähnlich gering und liegen jeweils bei höchstens 4 %.

Auch die Nutzung *beider* Grundvorstellungen tritt bei den Aufgaben beider Bereiche zu höchstens 3,5 % ähnlich selten auf.

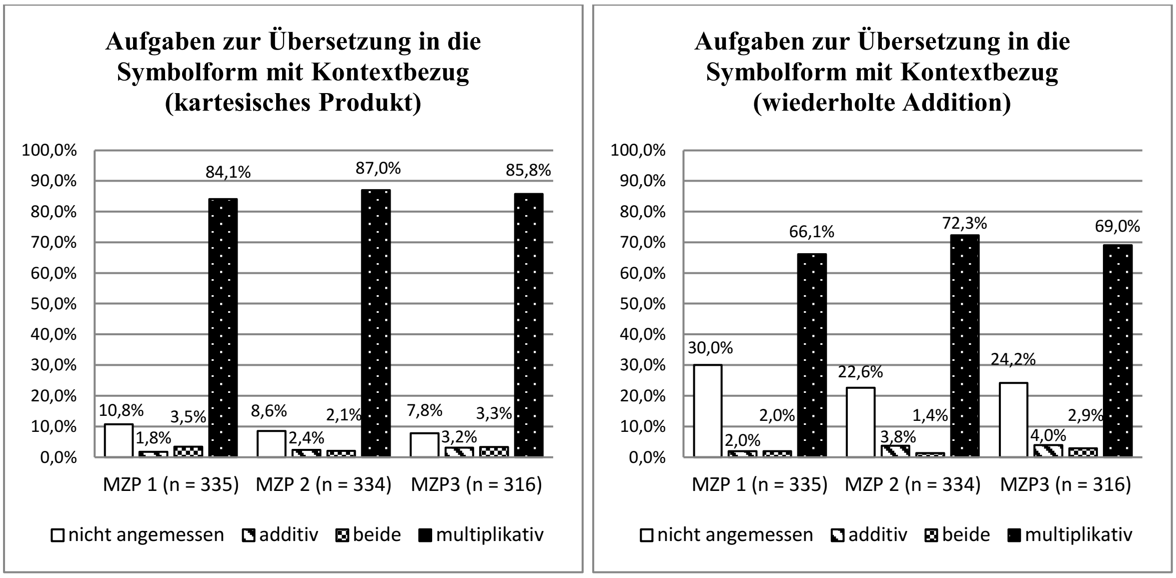


Abbildung 8.11: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen in Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit Kontextbezug zum kartesischen Produkt (links) und zur wiederholten Addition (rechts)

Die Einzelergebnisse beider Aufgaben (Nr. 1 und Nr. 5) des Bereichs zum *kartesischen Produkt* zeigen tendenziell ähnliche Ergebnisse. Die Unterschiede der Anteile *multiplikativer* Bearbei-tungen liegen jeweils bei höchstens 9 Prozentpunkten, sodass sie hier nicht zusätzlich aufgeführt und analysiert werden.

Die Einzelergebnisse beider Aufgaben (Nr. 4 und Nr. 8) des Bereichs zur *wiederholten Addition* unterscheiden sich etwas mehr voneinander. Der jeweilige Unterschied bezüglich der *multiplikativen* Bearbeitungen liegt jedoch jeweils bei höchstens 17,6 Prozentpunkten, die Tendenz der Einzelergebnisse ist also immer noch ähnlich, sodass die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben hier ebenfalls nicht näher aufgeführt und analysiert werden.

... in die Symbolform mit didaktischem Material

Es werden nun Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit didaktischem Material jeweils zum *kartesischen Produkt* sowie zur *wiederholten Addition* analysiert (Tab. 8.13).

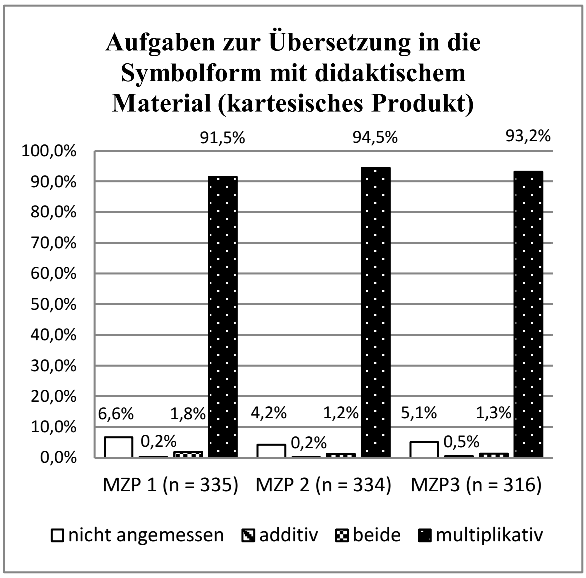
Es zeigt sich ein sehr ähnliches Bild (Abb. 8.12) wie bei den Ergebnissen zu den Aufgaben mit Kontextbezug. Die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen bei den Aufgaben mit didaktischem Material zum *kartesischen Produkt* sind zu den drei MZP noch etwas größer als bei den Aufgaben mit Kontextbezug zum *kartesischen Produkt*.

			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontext-bezug	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	didaktisches Material	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	Symbolform			

			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontext-bezug	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	didaktisches Material	in die Symbolform		
		von der Symbolform		
	Symbolform			

Tabelle 8.13: *Bereiche und Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit didaktischem Material zum kartesischen Produkt (links) und zur wiederholten Addition (rechts)*

Die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen bei den Aufgaben mit didaktischem Material zur *wiederholten Addition* sind zu den drei MZP geringfügig kleiner als bei den Aufgaben mit Kontextbezug zur *wiederholten Addition*.



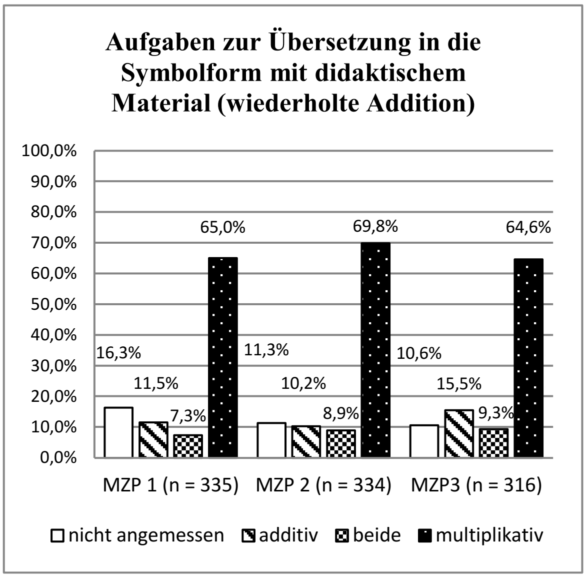


Abbildung 8.12: *Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen in Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit didaktischem Material zum kartesischen Produkt (links) und zur wiederholten Addition (rechts)*

Die Einzelergebnisse der Aufgaben Nr. 2 und Nr. 7 dieses Bereichs zum *kartesischen Produkt* unterscheiden sich wenig voneinander. Die Unterschiede der Anteile der *multiplikativen* Bearbeitungen etwa liegen jeweils höchstens bei 7,5

Prozentpunkten, sodass die Ergebnisse der Aufgaben an dieser Stelle nicht einzeln aufgeführt und analysiert werden.

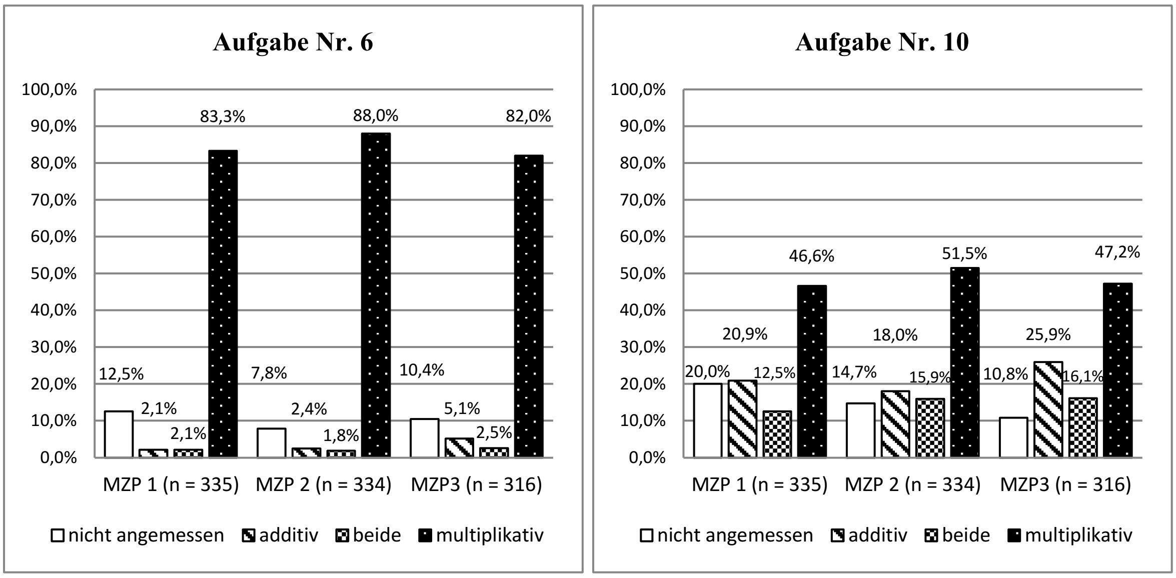


Abbildung 8.13: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen in den Aufgaben Nr. 6 (links) und Nr. 10 (rechts)

Die Einzelergebnisse der beiden Aufgaben Nr. 6 und Nr. 10 dieses Bereichs zur *wiederholten Addition* unterscheiden sich stärker voneinander (Abb. 8.13).

Die Anteile der *multiplikativen* Bearbeitungen sind bei Aufgabe Nr. 6 sehr hoch (mindestens 82 %), die Anteile der übrigen Bearbeitungen sind sehr gering.

Betrachtet man die Ergebnisse der Aufgabe Nr. 10, so wird ersichtlich, dass die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen im Vergleich zu Aufgabe Nr. 6 jeweils zu den drei MZP wesentlich geringer sind (Unterschied in Prozentpunkte: MZP 1: 36,7; MZP 2: 36,5; MZP 3: 34,8). Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen sind bei Aufgabe Nr. 10 im Unterschied zu den Ergebnissen bei Aufgabe Nr. 6 je zu den MZP größer (Unterschied in Prozentpunkte: MZP 1: 18,8; MZP 2: 15,6; MZP 3: 20,4). Auch die Anteile an Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, sind bei Aufgabe Nr. 10 jeweils zu den MZP etwas größer als bei Aufgabe Nr. 6 (Unterschied in Prozentpunkten: MZP 1: 10,4; MZP 2: 14,1; MZP 3: 11).

... von der Symbolform in didaktisches Material

Im Folgenden werden die Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform in didaktisches Material zum *kartesischen Produkt* betrachtet (Tab. 8.14).

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2"></td><td colspan="2">Grundvorstellungen</td></tr>
<tr><td>kartesisches Produkt</td><td>wiederholte Addition</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Darstellungsformen</td><td rowspan="2">Kontextbezug</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">didaktisches Material</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 8.14: Bereich und Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform in didaktisches Material zum kartesischen Produkt

Es zeigt sich, dass die *multiplikative* Grundvorstellung ebenfalls zu allen drei MZP am häufigsten genutzt wird (MZP 1: 46,9 %; MZP 2: 54,2 %; MZP 3: 52,2 %) (Abb. 8.14).

Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen ist, ähnlich wie in den übrigen Bereichen, zu allen drei MZP gering (MZP 1: 6,6 %; MZP 2: 5,7 %; MZP 3: 7,0 %).

Dasselbe gilt für die Nutzung *beider* Grundvorstellungen; auch diese Anteile sind zu allen drei MZP sehr gering (MZP 1: 6,0 %; MZP 2: 6,3 %; MZP 3: 5,1 %).

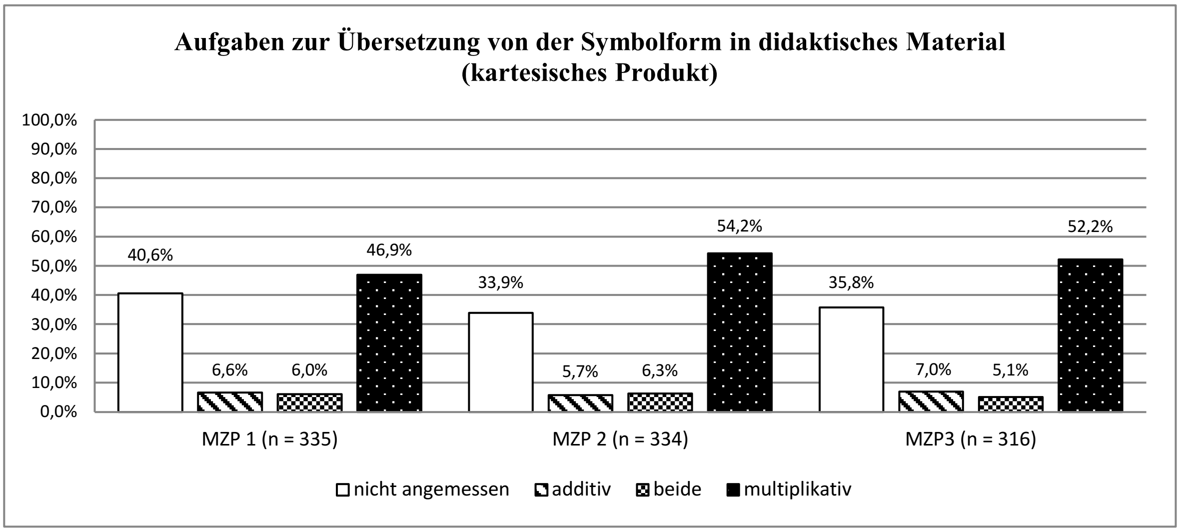


Abbildung 8.14: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen in Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform in didaktisches Material zum kartesischen Produkt

... von der Symbolform in einen Kontext

In den Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform in einen Kontextbezug wird keine der beiden Grundvorstellungen explizit nahegelegt (*kartesisches Produkt/wiederholte Addition*) (Tab. 8.15).

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2"></td><th colspan="2">Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><th>kartesisches Produkt</th><th>wiederholte Addition</th></tr>
<tr><th rowspan="5">Darstellungsformen</th><th rowspan="2">Kontextbezug</th><th>in die Symbolform</th><td></td><td></td></tr>
<tr><th>von der Symbolform</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th rowspan="2">didaktisches Material</th><th>in die Symbolform</th><td></td><td></td></tr>
<tr><th>von der Symbolform</th><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Symbolform</th><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 8.15: Bereich und Aufgaben mit Kontextbezug zur Übersetzung von der Symbolform

Zur Beantwortung der in diesem Abschnitt vorliegenden Forschungsfrage trägt die Analyse dieses Bereichs somit nur indirekt bei. Vielmehr geben die Analyseergebnisse spannende Hinweise darauf, welche Grundvorstellungen die Kinder von sich aus im Laufe des Untersuchungszeitraums wählen, wenn durch die Aufgabenstellung weder die eine noch die andere Grundvorstellung direkt nahegelegt wird.

Die Ergebnisse zeigen, dass sich zu allen drei MZP die Anteile an *multiplikativen* und *additiven* Bearbeitungen nicht sehr stark voneinander unterscheiden (Abb. 8.15). Zu MZP 1 ist der Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen mit 26,3 % etwas geringer als der Anteil an *additiven* Bearbeitungen mit 30,8 %. Zu MZP 2 steigen beide Werte geringfügig an, der Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen liegt nun bei 27,3 %, der Anteil an *additiven* Bearbeitungen liegt bei 31,3 %. Zu MZP 3 steigt der Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen auf 32,5 % weiter an. Der Anteil an *additiven* Bearbeitungen sinkt geringfügig und liegt nun bei 30,9 %. Damit ist zu MZP 3 im Gegensatz zu MZP 1 und MZP 2 der Anteil an *additiven* Bearbeitungen nun etwas niedriger als der Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen.

Die Anteile an Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, sind zu allen drei MZP sehr gering (MZP 1: 3,5 %; MZP 2: 3,0 %; MZP 3: 3,0 %).

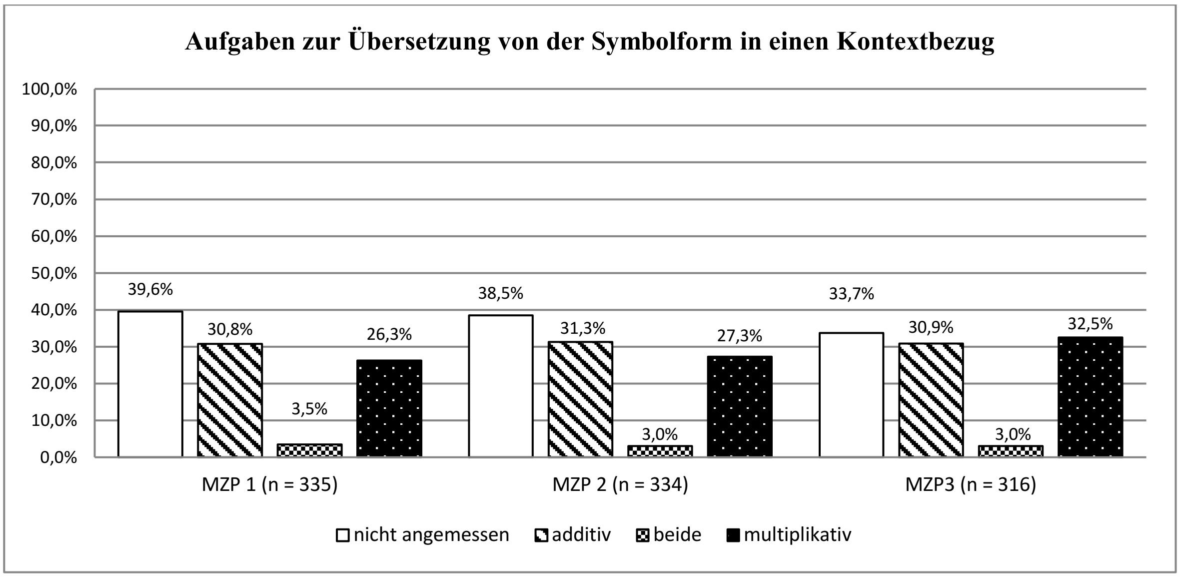
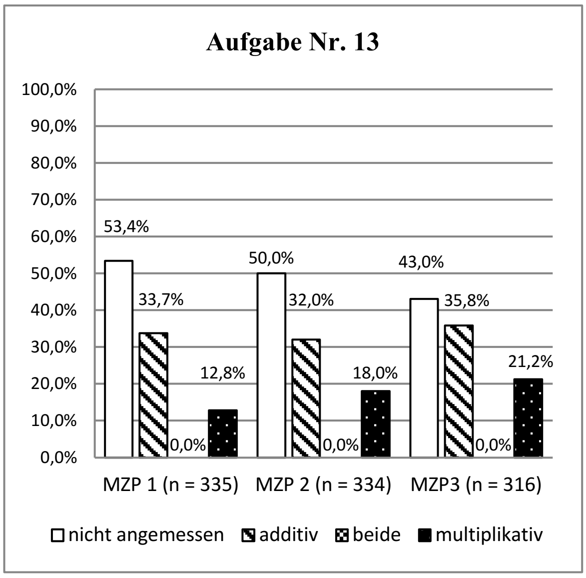


Abbildung 8.15: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen in Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform in einen Kontextbezug

Die Ergebnisse der beiden Aufgaben Nr. 13 und Nr. 16 unterscheiden sich einzeln betrachtet um bis zu 26,9 Prozentpunkte voneinander bezüglich der Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen und werden hier gesondert aufgeführt (Abb. 8.16).



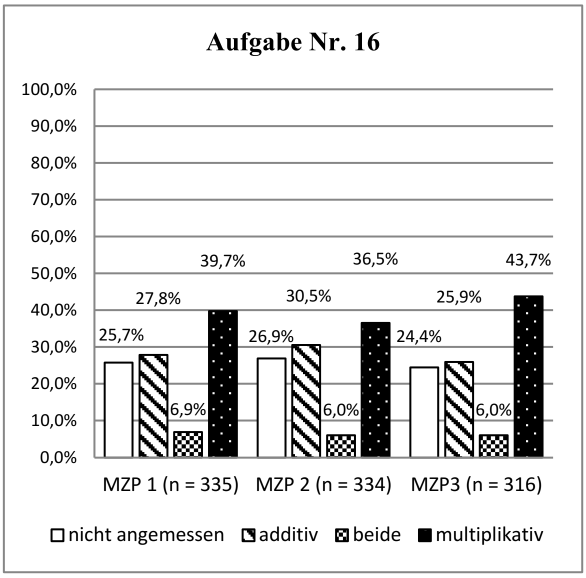


Abbildung 8.16: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen in den Aufgaben Nr. 13 (links) und Nr. 16 (rechts)

Festzustellen ist, dass sich die jeweiligen Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen in den beiden Aufgaben stärker voneinander unterscheiden, sie sind bei Aufgabe Nr. 13 wesentlich kleiner als bei Aufgabe Nr. 16 (Unterschied in Prozentpunkten: MZP 1: 26,9; MZP 2: 18,5; MZP 3: 22,5).

Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen unterscheiden sich weniger stark, sie sind bei Aufgabe Nr. 13 nur etwas größer als bei Aufgabe Nr. 16 (Unterschied in Prozentpunkten: MZP 1: 5,9; MZP 2: 1,5; MZP 3: 9,9).

Noch kleiner sind die Unterschiede bei den Anteilen an Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstel-lungen enthalten; sie treten bei Aufgabe Nr. 13 nicht auf, bei Aufgabe Nr. 16 liegen sie zu MZP 1 bei 6,9 %, zu MZP 2 und MZP 3 bei 6,0 %.

Diskussion

Die *wiederholte Addition* wurde neben anderen als eine intuitive Vorstellung der Multiplikation identifiziert (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Bönig, 1995a; Mulligan & Mitchelmore, 1997) bzw. kann als eine „natürliche Zwischenstufe [...] im Lernprozeß“ (Selter, 1994, S. 80) angesehen werden (vgl. Kap. 4.2.1). Deswegen wäre es denkbar gewesen, dass mindestens zu MZP 1 die *wiederholte Addition* als *additive* Grundvorstellung in der Auswertung der Testaufgaben der hier vorliegenden Untersuchung am häufigsten auftritt.

Vermutet werden konnte außerdem, dass die in der jeweiligen Aufgabenstellung nahegelegte Grundvorstellung von den Kindern in ihren Bearbeitungen priorisiert wird.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass in allen Bereichen die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen jeweils deutlich größer sind als die Anteile an *additiven* Bearbeitungen und an Bearbeitungen mit *beiden* Grundvorstellungen. Beim Vergleich der Aufgabenbereiche zeigt sich, dass sowohl bei Aufgaben zum *kartesischen Produkt* als auch zur *wiederholten Addition multiplikative* Bearbeitungen deutlich am häufigsten auftreten. Bei Aufgaben zum *kartesischen Produkt* sind die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen noch etwas höher als bei den Aufgaben zur *wiederholten Addition*. In den Aufgabenstellungen zum *kartesischen Produkt* spiegelt sich die Grundvorstellung in der von den Kindern genutzten Grundvorstellung wider, da überwiegend die *multiplikative* Grundvorstellung genutzt wird. In den Aufgabenstellungen zur *wiederholten Addition* spiegelt sich die Grundvorstellung in der von den Kindern genutzten Grundvorstellung nicht wider, da auch hier die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen am größten sind.

Sehr deutlich wird dies bei allen Aufgaben zur Übersetzung *in* die Symbolform. Vergleicht man die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen bei den Aufgaben zur Übersetzung *von* der Symbolform in didaktisches Material mit den übrigen Aufgabenbereichen zum *kartesischen Produkt*, so kann man feststellen, dass die Anteile hier deutlich geringer sind. In diesem Aufgabenbereich sind zwar die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen im Vergleich zu den übrigen Anteilen an Bearbeitungen auch am größten. Allerdings sind sie wesentlich geringer als in den übrigen Aufgabenbereichen. Die Anteile an Bearbeitungen mit *beiden* Grundvorstellungen und *additive* Bearbeitungen sind ähnlich gering wie in den übrigen Bereichen.

Bei den Aufgaben zur Übersetzung in die Symbolform mit didaktischem Material (Nr. 6 und Nr. 10) zeigen die Ergebnisse Besonderheiten. Die Ergebnisse zur Aufgabe Nr. 6 (Abbildung Punktemengen) ähneln eher den Ergebnissen der Aufgaben zum *kartesischen Produkt*. Denkbar ist, dass eine abgebildete Anordnung von Punktemengen mit jeweils gleicher Anzahl an Punkten von den Kindern offenbar bereits sehr stark mit einer Multiplikationsaufgabe verknüpft wird. Bei Aufgabe Nr. 10 (Abbildung von Rechenstrich) sind die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen zwar am größten, jedoch sind die Unterschiede zu den übrigen Anteilen an Bearbeitungen nicht ganz so groß. Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen sind hier auch verhältnismäßig groß. Die Darstellung am Rechenstrich scheint offenbar sehr stark mit der Vorstellung von Addition verbunden zu werden, was nicht überrascht.

Die durchweg hohen Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen lassen sich möglicherweise dadurch erklären, dass im Unterricht bei der Behandlung der Multiplikation bereits zu Beginn vermehrt auf eine *multiplikative* Bearbeitung hin gearbeitet wurde, sodass eine *additive* Bearbeitung nicht mehr so stark präsent ist. Denkbar ist auch, dass die teilnehmenden Kinder sinnvollerweise durch die entsprechende Instruktion im Vorfeld des Tests auf Multiplikationsaufgaben eingestellt wurden, sodass sie deswegen häufiger Multiplikationsaufgaben notierten.

Die Ergebnisse bei Aufgaben zur Übersetzung von der Symbolform in einen Kontextbezug, die keine der beiden Grundvorstellungen intendieren, machen deutlich, dass die Kinder die Aufgaben durchschnittlich offenbar ähnlich häufig *multiplikativ* und *additiv* lösen. Die Analyse der einzelnen Aufgaben dieses Bereichs (Nr. 13 und 16) zeigen Folgendes: Für das Schreiben einer Geschichte zu einer Multiplikationsaufgabe (Nr. 13) wird offenbar häufiger die *additive* Grundvorstellung herangezogen als die *multiplikative*, Bearbeitungen mit *beiden* Grundvorstellungen treten nicht auf. Beim Zeichnen eines Bildes zu einer Multiplikationsaufgabe (Nr. 16) tritt die *multiplikative* Grundvorstellung etwas häufiger auf als die *additive*; auch die Anteile der *additiven* Bearbeitungen liegen aber bei mindestens 25,9 %. Bearbeitungen mit *beiden* Grundvorstellungen treten auf, die Anteile liegen aber bei höchstens 6,9 %. Diese Ergebnisse sind nicht überraschend. Es fällt vermutlich leichter, ein Bild zu zeichnen, das die *multiplikative* Grundvorstellung enthält (z. B. Blumen oder Äpfel in Zeilen und Spalten angeordnet), als eine Geschichte zu schreiben, in der erklärt wird, dass z. B. die Äpfel in einer bestimmten Anzahl an Spalten und Zeilen angeordnet liegen.

Eine Geschichte zu einer Multiplikation mit *additiver* Grundvorstellung, die häufig zeitlich sukzessiv einer Chronologie folgt, lässt sich dagegen möglicherweise etwas einfacher formulieren (z. B.: Hier stehen 3 Eisbecher. In jedem Eisbecher sind 2 Kugeln Eis.).

8.1.2.4 Nutzung von Grundvorstellungen in den Settings

Es soll im Weiteren folgender Forschungsfrage nachgegangen werden:

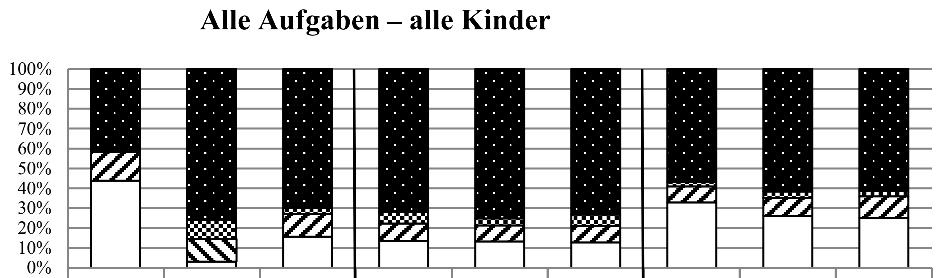
I. Unterscheiden sich die Grundvorstellungen, die in den Bearbeitungen der Kinder in den verschiedenen Settings der Erprobung auftreten?

Analysiert wird das Auftreten von Grundvorstellungen in den relevanten Testaufgaben insgesamt bei *allen* teilnehmenden Kindern in den drei Settings. Zu beachten ist hier, dass die Gruppe der Kinder in Setting A *Einzelförderung* wesentlich kleiner ist (n = 8) als die übrigen beiden Gruppen in Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* mit jeweils ca. 130 bzw. 110 Kindern.

Ergebnisse

Deskriptive Darstellung der Anteile

Um herauszufinden, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Nutzung von Grundvorstellungen in den Bearbeitungen *aller* teilnehmenden Kinder haben, werden wieder zunächst deskriptiv sowohl die prozentualen Anteile in den jeweiligen Settings zu den drei MZP (Abb. 8.17) als auch jeweils die prozentualen Veränderungen von MZP 1 zu MZP 2 und von MZP 1 zu MZP 3 in den drei Settings dargestellt (Tab. 8.16 und Tab. 8.17).



	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
■ multiplikativ	41,7%	76,0%	69,8%	71,8%	75,2%	73,2%	56,8%	61,6%	61,3%
⊠ beide	0,0%	9,4%	3,1%	6,0%	3,5%	5,6%	2,2%	3,3%	2,8%
◪ additiv	14,6%	11,5%	11,5%	8,8%	8,0%	8,3%	8,0%	9,0%	10,7%
□ nicht angemessen	43,8%	3,1%	15,6%	13,4%	13,3%	12,8%	33,0%	26,1%	25,2%

Abbildung 8.17: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen zu den drei MZP aller Kinder in den Settings (LU ≙ Lernumgebungen)

Es ist festzustellen, dass in allen drei Settings während der Interventionsphase, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, ein Anstieg an *multiplikativen* Bearbeitungen zu verzeichnen ist (Abb. 8.17). Sehr stark ist der Anstieg in Setting A *Einzelförderung* von 41,7 % auf 76,0 % um 82,3 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.16). Der Anteil sinkt in allen drei Settings von MZP 2 zu MZP 3 wieder etwas. In der Langzeitperspektive, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, steigt der Anteil in allen drei Settings. Sehr stark ist der Anstieg in Setting A *Einzelförderung* von 41,7 % zu 69,8 % um 67,4 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.17).

Die Anteile an Bearbeitungen, in denen *beide* Grundvorstellungen genutzt werden, sind in allen drei Settings zu allen drei MZP im Vergleich zu den jeweiligen übrigen Anteilen jeweils am geringsten (zwischen 0,0 % und 9,4 %).

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 2, bezogen auf den Wert zu MZP 1	**Alle Kinder in den Settings**		
Ausprägung	**Einzelförderung (A)**	**Klassenverband (B)**	**Kontrollgruppe (C)**
multiplikativ	Anstieg um 82,3 %	Anstieg um 4,7 %	Anstieg um 8,5 %
additiv	Senkung um 21,2 %	Senkung um 9,1 %	Senkung um 12,5 %
beide	Anstieg von 0,0 % auf 9,4 %	Senkung um 41,7 %	Anstieg um 50,0 %

Tabelle 8.16: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 2

Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen sind ebenfalls sehr gering; sie liegen zwischen 8,0 % und 14,6 % und verändern sich im Verlauf der MZP eher wenig.

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 3, bezogen auf den Wert zu MZP 1	**Alle Kinder in den Settings**		
Ausprägung	**Einzelförderung (A)**	**Klassenverband (B)**	**Kontrollgruppe (C)**
multiplikativ	Anstieg um 67,4 %	Anstieg um 1,9 %	Anstieg um 7,9 %
additiv	Senkung um 21,2 %	Senkung um 5,7 %	Anstieg um 33,8 %
beide	Anstieg von 0,0 % auf 3,1 %	Senkung um 6,7 %	Anstieg um 27,3 %

Tabelle 8.17: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 3

Statistische Überprüfung der Hypothesen

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf das Auftreten von Grundvorstellungen in den Bearbeitungen *aller* beteiligten Kinder haben, sollen Hypothesen getestet werden. Im Folgenden werden die Hypothesen sowie die jeweils entsprechenden Nullhypothesen formuliert:

H1: Die acht Kinder in Setting A Einzelförderung bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger multiplikativ als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_1$: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H2: Alle Kinder in Setting B Klassenverband bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger multiplikativ als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_2$: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als alle Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

Grundvorstellungen – alle Kinder						
	Einzelförderung		Klassenverband		Kontrollgruppe	
MZP	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**
1	5.00	1.69	8.62	1.82	6.81	2.38
2	9.13	1.81	9.02	1.81	7.33	2.09
3	8.38	1.06	8.13	2.99	7.09	2.64
	n = 8		n = 124		n = 108	

Tabelle 8.18: Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) aller Kinder zu den MZP (Grundvorstellungen)

In Tabelle 8.18 wird die Verteilung der Testbearbeitungen zu *Grundvorstellungen* (bezogen nun auf den Summenindex, Werte zwischen 0 und 12 möglich) für *alle* Kinder der Interventionsgruppen (Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*) dargestellt.

Die Mittelwerte bezüglich *Grundvorstellungen* steigen bei *allen* Kindern in allen drei Settings von MZP 1 zu MZP 2 an (Tab. 8.18). Von MZP 2 zu MZP 3 sinken sie in allen drei Settings. Von MZP 1 zu MZP 3 steigen sie in Setting A *Einzelförderung* und in der *Kontrollgruppe* (Setting C), in Setting B *Klassenverband* sinken sie geringfügig.

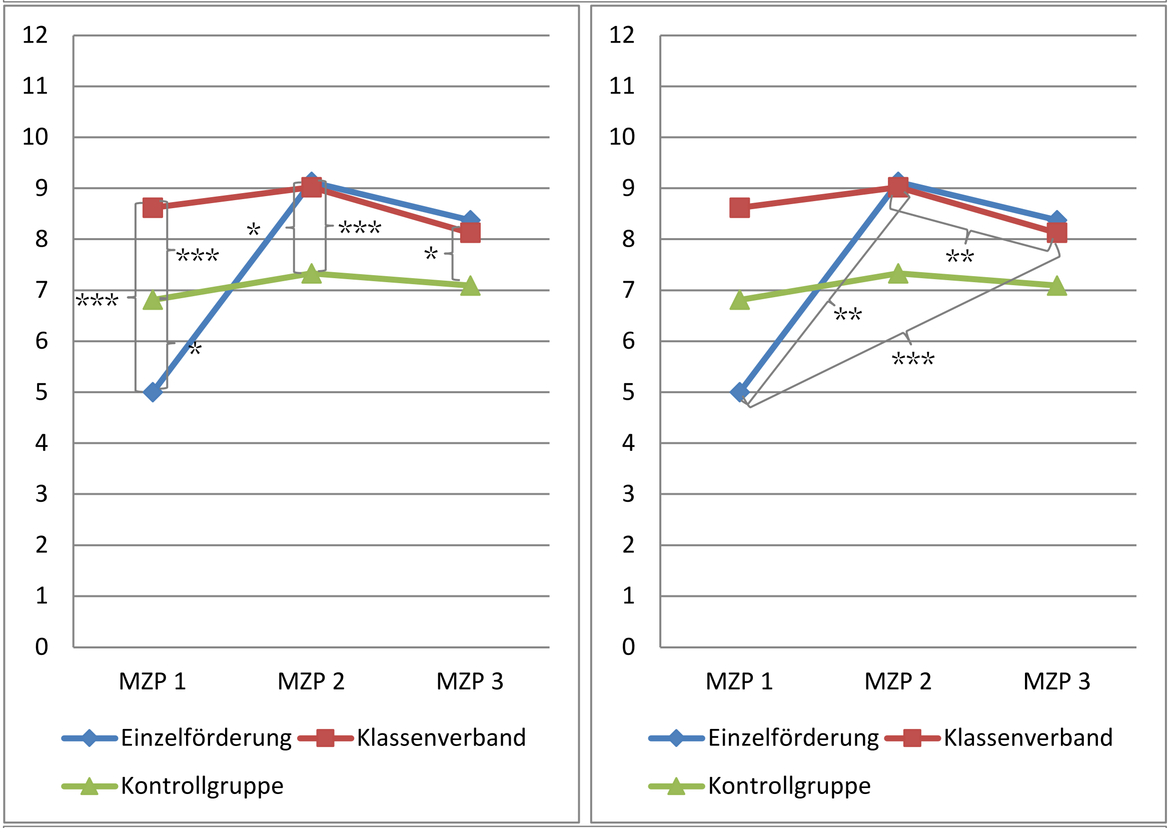
Abbildung 8.18 zeigt Veränderungen der Mittelwerte über die MZP in den drei Settings sowie signifikante Unterschiede. Es werden zudem Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Haupteffekten (HE) angegeben (F-Wert, Standardfehler ≙ SE, Effektstärke angegeben in (part.) η^2) und Voraussetzungen (Normalverteilung, Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen, Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix, Sphärizität), Post-hoc-Tests sowie ggf. Korrekturen zur Durchführung der Varianzanalyse genannt (Tab. 8.19).

Bei den Ergebnissen *aller* Kinder zu *Grundvorstellungen* sind die Voraussetzungen für eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung im gemischten Design, nämlich Normalverteilung (Shapiro-Wilk-Test: $p < .05$), Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix (Box-Test: $p < .05$) sowie Sphärizität (Mauchly-Test: $p < .05$) nicht gegeben, sodass zur Überprüfung der Haupteffekte des Gruppen- sowie Messwiederholungsfaktors zwei einfaktorielle Varianzanalysen gerechnet wurden (Tab. 8.19). Bei den Post-hoc-Tests ist die Sphärizität bezüglich des Haupteffekts des Messwiederholungsfaktors in Setting *Klassenverband* nicht gegeben (Mauchly-Test: $p < .05$), sodass Korrekturen nach Greenhouse-Geisser vorgenommen wurden (Tab. 8.19).

Es werden im Weiteren die Haupteffekte des Gruppenfaktors sowie des Messwiederholungsfaktors analysiert. Es zeigt sich ein signifikanter Haupteffekt des Gruppenfaktors ($F = 22.888$, $p = .000$, $\eta^2 = .831$) sowie ein signifikanter Haupteffekt des Messwiederholungsfaktors auf die Werte ($F = 13.641$, $p = .000$, $\eta^2 = .052$).

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.18, links; Tab. 8.19) zeigen, dass die Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben zu MZP 1 signifikant seltener *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder in den übrigen Settings (*Einzelförderung – Klassenverband*: mittl. Diff. = –3.62, $p = .000$; *Einzelförderung – Kontrollgruppe*: mittl. Diff. = –1.81, $p = .048$). Dies ist nicht überraschend, da die Einzelförderkinder mit *allen* Kindern (mit und ohne Förderbedarf) in den übrigen Settings verglichen werden. Zu MZP 2 gibt es zwischen den Kindern in Setting A *Einzelförderung* und *allen* Kindern in Setting B *Klassenverband* keinen signifikanten Unterschied. Die Werte der Kinder in Setting A *Einzelförderung* liegen zu MZP 2 zudem auf signifikant höherem Niveau als die Werte *aller* Kinder in Setting C *Kontrollgruppe* (*Einzelförderung – Kontrollgruppe*: mittl. Diff. = 1.79, $p = .032$). Zu MZP 3 unterscheiden sich die Kinder in Setting A *Einzelförderung* nicht signifikant von *allen* Kindern in den übrigen Settings, d. h. die Werte der Settings liegen auf ähnlichem Niveau.

Grundvorstellungen – alle Kinder



n (Einzelförderung) = 8, n (Klassenverband) = 124; n (Kontrollgruppe) = 108
* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Abbildung 8.18: Veränderungen der Mittelwerte aller Kinder im Verlauf der MZP (Grundvorstellungen)

Die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP (Abb. 8.18., rechts; Tab. 8.19) zeigen zudem, dass die Kinder in Setting A *Einzelförderung* sowohl zu MZP 2 als auch zu MZP 3 die Testaufgaben signifikant häufiger *multiplikativ* bearbeiten als zu MZP 1 (MZP 1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –4.13, $p = .006$; MZP 1 zu MZP 3: mittl. Diff. = –3.38, $p = .000$). Dies ist in den übrigen Settings nicht der Fall. Die in Tab. 8.19 angegebenen Effektstärken deuten darauf hin, dass sich die Werte zu *Grundvorstellungen* durch die Unterschiede der Kinder in Setting A *Einzelförderung* (part. $\eta^2 = .752$) stärker erklären lassen als durch die Unterschiede der Kinder in den übrigen beiden Settings (*Klassenverband*: part. $\eta^2 = .050$; *Kontrollgruppe*: part. $\eta^2 = .023$).

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP sowie die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP zeigen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte sowohl nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind.

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.18, links; Tab. 8.19) zeigen außerdem, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben zu allen drei MZP signifikant häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in Setting C *Kontrollgruppe* (*Klassenverband* – *Kontrollgruppe*: MZP 1: mittl. Diff. = 1.81, p = .000; MZP 2: mittl. Diff. = 1.69, p = .000; MZP 3: mittl. Diff. = 1.04, p = .012). Die Kinder in Setting B *Klassenverband* starten schon auf signifikant höherem Niveau als die Kinder der *Kontrollgruppe* und dies bleibt auch im Verlauf der MZP so.

Grundvorstellungen – alle Kinder

Setting		MZP 1 *Mittlere Differenz*		*SE*	MZP 2 *Mittlere Differenz*		*SE*	MZP 3 *Mittlere Differenz*		*SE*
Klassenverband	*Einzelförderung*	3.62	***	0.759	–0.10		0.706	–0.25		1.020
	Kontrollgruppe	1.81	***	0.267	1.69	***	0.248	1.04	*	0.359
Einzelförderung	*Kontrollgruppe*	–1.81	*	0.764	1.79	*	0.710	1.29		1.025
MZP		**Klassenverband** *Mittlere Differenz*		*SE*	**Einzelförderung** *Mittlere Differenz*		*SE*	**Kontrollgruppe** *Mittlere Differenz*		*SE*
1	*2*	–0.40		0.190	–4.13	**	0.854	–0.52		0.227
	3	0.49		0.266	–3.38	***	0.375	–0.28		0.241
2	*3*	0.90	**	0.255	0.75		0.701	0.24		0.214

n (Klassenverband) = 124, n (Förderkinder) = 8, n (Kontrollgruppe) = 108 *p < .05, **p < .01, ***p < .001

Einfaktorielle ANOVA (Gruppenfaktor): F = 22.888***, η^2 = .831 & einfaktorielle ANOVA mit Messwiederholung: F = 13.641***, η^2 = .052

HE-Gruppen (MZP 1): F = 29.839***, part. η^2 = .192, HE-Gruppen (MZP 2): F = 23.991***, part. η^2 = .160, HE-Gruppen (MZP 3): F = 4.441*, part. η^2 = .034

HE-MZP (Klassenverband): F = 7.011**, part. η^2 = .050, HE-MZP (Förderkinder): F = 21.275***, part. η^2 = .752, HE-MZP (Kontrollgruppe): F = 2.594, part. η^2 = .023

Normalverteilung: Shapiro-Wilk p < .05, Sphärizität: Mauchly p < .05,
Homogenität der Fehlervarianzen: Levene p > .05, Homogenität der Kovarianzmatrix: Box p < .05

Post-hoc-Tests Gruppeneffekte: Korrektur n. Games-Howell,
wenn Varianzhomogenitätsannahme verletzt ist (Levene: p < .05), andernfalls Tukey-HSD

Post-hoc-Tests Messwiederholungseffekte: Korrektur n. Greenhouse-Geisser,
wenn Sphärizitätsannahme verletzt ist (Mauchly: p < .05), andernfalls ohne Korrektur

SE = Standardfehler, HE = Haupteffekt, Effektstärke angegeben in (part.) η^2 Quelle: Eigene Berechnungen

Tabelle 8.19: Ergebnisse der Varianzanalyse (Grundvorstellungen – alle Kinder)

In Setting *B Klassenverband* sind somit keine signifikant positiven Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar.

Aufgrund der Ergebnisse kann die Nullhypothese H01 verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden.

Aufgrund der Ergebnisse kann die Nullhypothese H02 nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

Diskussion

Bei Betrachtung der prozentualen Anteile an *multiplikativen* sowie *additiven* Bearbeitungen und Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, ist Folgendes festzustellen: In allen drei Settings sind zu allen drei MZP jeweils die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen mit Abstand am größten (zwischen 41,7 % und 76,0 %). Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen sind wesentlich geringer (zwischen 8,0 % und 14,6 %) sowie die Anteile, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, sehr gering (höchstens 9,4 %).

In Setting A *Einzelförderung* steigt der Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, sehr stark an. In Setting B und Setting C ist der jeweilige Anstieg von MZP 1 zu MZP 2 eher gering. Im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, vergrößert sich der Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen ebenfalls in Setting A *Einzelförderung* sehr stark, in Setting B und Setting C ist der Anstieg eher gering. Sowohl während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, als auch im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, verringern sich die Anteile an *additiven* Bearbeitungen in den Settings A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband* etwas, in der *Kontrollgruppe* steigen sie geringfügig.

In Setting B *Klassenverband* liegen die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen von MZP 1 an auf einem hohen Niveau bei über 70 %. Der jeweilige Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen in der *Kontrollgruppe* (Setting C) liegt zu MZP 1 bei knapp 57 %, zu MZP 2 und MZP 3 auf einem mittleren Niveau bei knapp über 60 %.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei *allen* Kindern kann die Nullhypothese H01 verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese H0₂ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

Während der Behandlung der Multiplikation soll bei den Kindern, anknüpfend an die *additive* Grundvorstellung, zunehmend die *multiplikative* Grundvorstellung entwickelt werden, um eine Basis für weiterführende mathematische Inhalte zu schaffen. Somit können hohe Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen als positiv gewertet werden.

8.1.2.5 Nutzung von Grundvorstellungen bei Kindern *mit Förderbedarf*

Im Weiteren wird folgender Forschungsfrage nachgegangen:

I. Unterscheiden sich die Grundvorstellungen, die in den Bearbeitungen der Kinder mit Förderbedarf auftreten?

Um diese Forschungsfrage zu beantworten, wurden auch in Setting B und Setting C Kinder identifiziert, die in den einzelnen Testaufgaben bezüglich des Multiplikativen Verständnisses einen entsprechenden Förderbedarf aufweisen. Diese Kinder *mit Förderbedarf* (Matching-Kinder) in Setting B und C haben aufgrund des Pre-Tests also ebenfalls Förderbedarf bezüglich des Multiplikativen Verständnisses. Das heißt, es wurde nach möglichst hohen Übereinstimmungen in allen der analysierten Kategorien gesucht (vgl. Kap. 7.6.2).

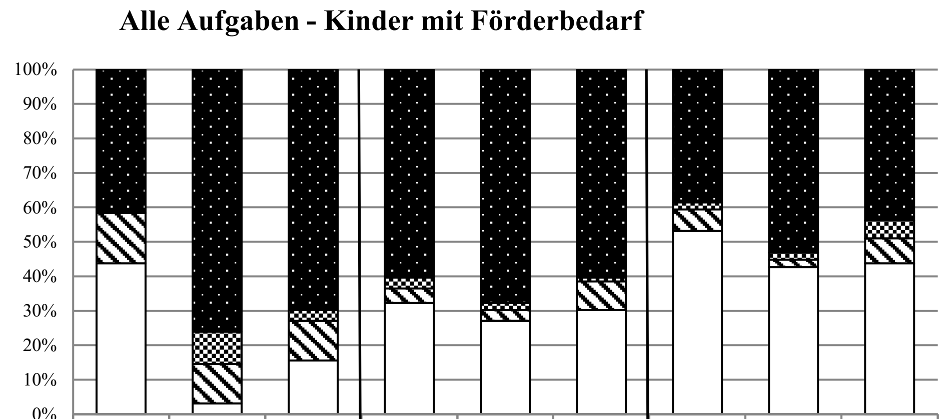
Aufgrund dieser Vorgehensweise der Auswahl der Matching-Kinder lässt es sich nicht vermeiden, dass nun die Anteile an Ausprägungen im Pre-Test bezüglich jeweils einer einzelnen Kategorie, hier die Kategorie *Grundvorstellungen*, nicht vollständig identisch sind. Es ist in der folgenden Analyse somit zu berücksichtigen, dass sich die durchschnittlichen Ausgangslagen im Pre-Test etwas voneinander unterscheiden.

Ergebnisse

Deskriptive Darstellung der Anteile

Um herauszufinden, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Nutzung von Grundvorstellungen in den Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* haben, werden wieder zunächst deskriptiv sowohl die prozentualen Anteile in den jeweiligen Settings zu den drei MZP (Abb. 8.19) als auch jeweils die prozentualen Veränderungen von

MZP 1 zu MZP 2 und von MZP 1 zu MZP 3 in den drei Settings dargestellt (Tab. 8.20 und Tab. 8.21).



	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	41,7%	76,0%	69,8%	60,4%	67,7%	60,4%	38,5%	53,1%	43,8%
beide	0,0%	9,4%	3,1%	3,1%	2,1%	1,0%	2,1%	2,1%	5,2%
additiv	14,6%	11,5%	11,5%	4,2%	3,1%	8,3%	6,3%	2,1%	7,3%
nicht angemessen	43,8%	3,1%	15,6%	32,3%	27,1%	30,2%	53,1%	42,7%	43,8%

Abbildung 8.19: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Grundvorstellungen zu den drei MZP der Kinder mit Förderbedarf in den Settings

Bei Betrachtung der prozentualen Anteile an *multiplikativen* sowie *additiven* Bearbeitungen und Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, ist festzustellen, dass die prozentualen Anteile der Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* denen der Bearbeitungen *aller* teilnehmenden Kinder ähneln (vgl. Kap. 8.1.2.4). Die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen steigen in allen drei Settings während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, an (Abb. 8.19). Der Anstieg ist in Setting A *Einzelförderung* sehr stark, nämlich von 41,7 % auf 76,0 % um 82,3 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.20). Von MZP 2 zu MZP 3 sinken die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen in allen drei Settings wieder leicht. Im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, kommt es in Setting A *Einzelförderung* zu einem starken Anstieg von 41,7 % zu 69,8 % um 67,4 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Tab. 8.21). In Setting B *Klassenverband* verändert sich der Anteil nicht, in der *Kontrollgruppe* (Setting C) kommt es zu einem leichten Anstieg.

Die Anteile an Bearbeitungen, in denen *beide* Grundvorstellungen enthalten sind, sind in allen drei Settings und zu allen drei MZP jeweils im Vergleich zu den übrigen Anteilen am geringsten zwischen 0,0 % und 9,4 %.

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 2, bezogen auf den Wert zu MZP 1	Kinder mit Förderbedarf in den Settings		
Ausprägung	**Einzelförderung**	**Klassenverband**	**Kontrollgruppe**
multiplikativ	Anstieg um 82,3 %	Anstieg um 12,1 %	Anstieg um 37,9 %
additiv	Senkung um 21,2 %	Senkung um 26,2 %	Senkung um 66,7 %
beide	Anstieg von 0,0 % auf 9,4 %	Senkung um 32,3 %	Veränderung um 0,0 %

Tabelle 8.20: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 2

Die Werte der *additiven* Bearbeitungen sind in allen drei Settings und zu allen drei MZP ebenfalls sehr gering; sie liegen zwischen 2,1 % und 14,6 %.

Veränderungen von MZP 1 zu MZP 3, bezogen auf den Wert zu MZP 1	Kinder mit Förderbedarf in den Settings		
Ausprägung	**Einzelförderung**	**Klassenverband**	**Kontrollgruppe**
multiplikativ	Anstieg um 67,4 %	Veränderung um 0,0 %	Anstieg um 13,8 %
additiv	Senkung um 21,2 %	Anstieg um 97,6 %	Anstieg um 15,9 %
beide	Anstieg von 0,0 % auf 3,1 %	Senkung um 67,7 %	Anstieg um 147,6 %

Tabelle 8.21: Prozentuale Veränderungen in den Settings von MZP 1 zu MZP 3

Statistische Überprüfung der Hypothesen

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf das Auftreten von Grundvorstellungen in den Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* haben, sollen Hypothesen getestet werden. Im Folgenden werden die Hypothesen sowie die jeweils entsprechenden Nullhypothesen formuliert:

H3: Die acht Kinder in Setting A Einzelförderung bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger multiplikativ als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

H0₃: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H4: Die Kinder mit Förderbedarf in Setting B Klassenverband bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention häufiger multiplikativ als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

H0₄: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* bearbeiten die Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *multiplikativ* als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

In Tabelle 8.22 wird die Verteilung der Testbearbeitungen zu *Grundvorstellungen* (bezogen nun auf den Summenindex, Werte zwischen 0 und 12 möglich) für die Kinder *mit Förderbedarf* der Interventionsgruppen (Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*) und der *Kontrollgruppe* (Setting C) zu den drei MZP dargestellt.

Die Mittelwerte bezüglich *Grundvorstellungen* steigen bei den Kindern *mit Förderbedarf* in allen drei Settings von MZP 1 zu MZP 2 an (Tab. 8.22). Von MZP 2 zu MZP 3 sinken sie in allen drei Settings. Von MZP 1 zu MZP 3 steigen sie in Setting A *Einzelförderung* und in der *Kontrollgruppe* (Setting C), in Setting B *Klassenverband* bleiben sie gleich.

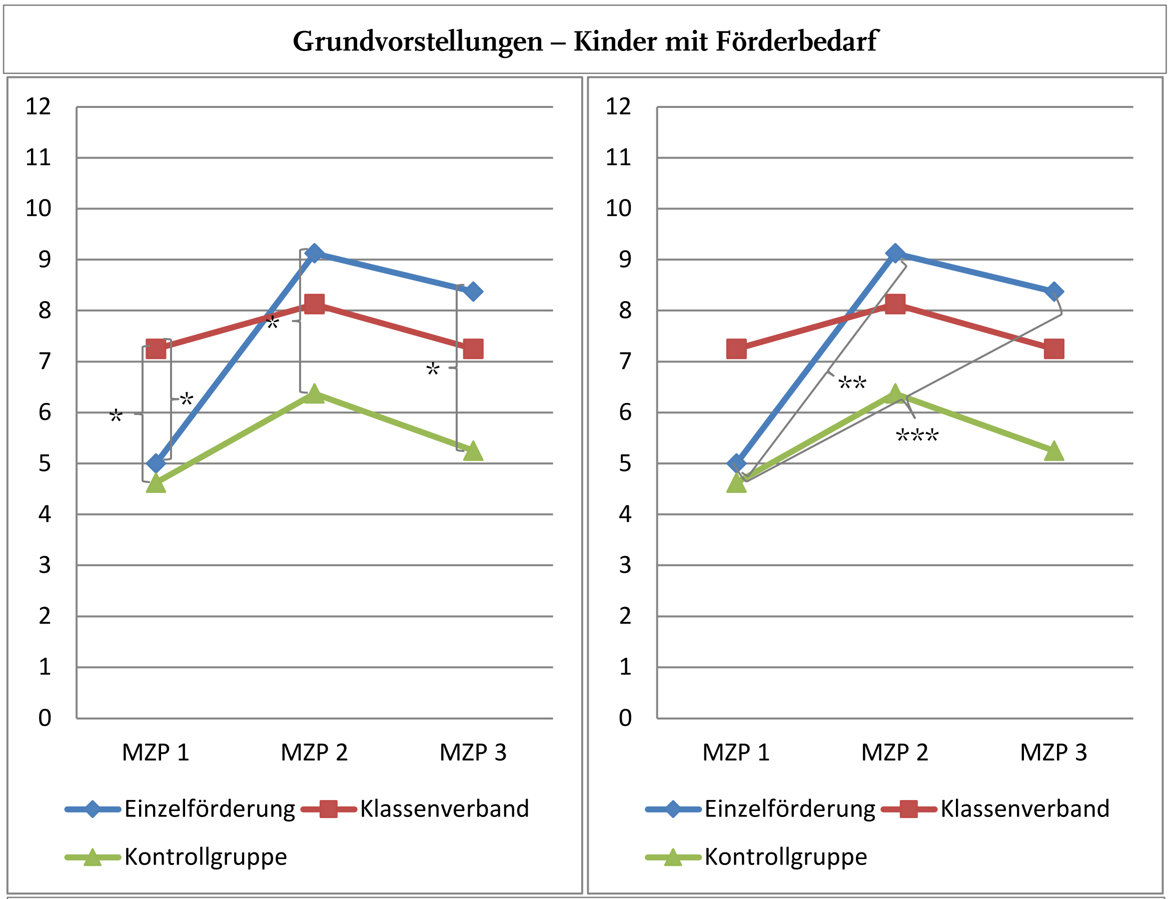
	Grundvorstellungen – Kinder mit Förderbedarf					
	Einzelförderung		**Klassenverband**		**Kontrollgruppe**	
MZP	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**
1	5.00	1.69	7.25	1.17	4.63	2.00
2	9.13	1.81	8.13	1.46	6.38	2.13
3	8.38	1.06	7.25	2.12	5.25	2.66
			n = 8			

Tabelle 8.22: Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) der Kinder mit Förderbedarf zu den MZP (Grundvorstellungen)

Abbildung 8.20 zeigt Veränderungen der Mittelwerte über die MZP in den drei Settings sowie signifikante Unterschiede. Zudem werden Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Haupteffekten (HE) sowie zum Interaktionseffekt angegeben (F-Wert, Standardfehler ≙ SE, Effektstärke part. η^2) und Voraussetzungen (Normalverteilung, Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen, Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix, Sphärizität), Post-hoc-Tests sowie ggf. Korrekturen zur Durchführung der Varianzanalyse genannt (Tab. 8.23).

Bei den Ergebnissen der Kinder *mit Förderbedarf* zu *Grundvorstellungen* sind die Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen nicht gegeben (Levene-Test: $p < .05$), sodass eine Quadratwurzeltransformation vorgenommen wurde und so eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung im gemischten Design gerechnet werden konnte (Tab. 8.23).

Der Interaktionseffekt zwischen Gruppenfaktor und Messwiederholungsfaktor lässt sich bestätigen ($F = 3.628$, $p = .013$, part. $\eta^2 = .257$) (Tab. 8.23). Dies bedeutet, dass sich die Veränderung in mindestens einem der Settings von den Veränderungen der übrigen Settings unterscheidet.



Interaktionseffekt bestätigt

n (Einzelförderung) = 8, n (Klassenverband) = 8; n (Kontrollgruppe) = 8

* $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

Abbildung 8.20: Veränderungen der Mittelwerte der Kinder mit Förderbedarf im Verlauf der MZP (Grundvorstellungen)

Im Weiteren werden wiederum die Haupteffekte des Gruppenfaktors sowie des Messwiederholungsfaktors analysiert (Tab. 8.23). Es zeigen sich signifikante Haupteffekte des Gruppenfaktors (HE-Gruppen: $F = 6.024$, $p = .009$, part. $\eta^2 = .365$) sowie des Messwiederholungsfaktors auf die Werte (HE-MZP: $F = 14.526$, $p = .000$, part. $\eta^2 = .409$). Die Effektstärke des Haupteffekts des Messwiederholungsfaktors ist etwas größer als der des Gruppenfaktors, was darauf hindeutet, dass die Zeit die Testbearbeitung bezüglich *Grundvorstellungen* etwas stärker beeinflusst als die Gruppenzugehörigkeit.

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP zeigen (Abb. 8.20, links; Tab. 8.23), dass die Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 1 die Testaufgaben signifikant seltener *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* (*Einzelförderung – Klassenverband*: mittl. Diff. = –2.25, $p = .033$). Zwischen den Werten der Kinder in Setting A *Einzelförderung* und der Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C) besteht kein signifikanter Unterschied, d.h. sie liegen auf ähnlichem Niveau. Zu MZP 2 und MZP 3 unterscheiden sich die Kinder in Setting A *Einzelförderung* nicht signifikant von *allen* Kindern in Setting B *Klassenverband,* d. h. die Werte der beiden Settings liegen auf ähnlichem Niveau. Die Kinder in Setting A *Einzelförderung* bearbeiten die Testaufgaben zu MZP 2 und MZP 3 allerdings signifikant häufiger *multiplikativ* als die *Kontrollgruppe (Einzelförderung – Kontrollgruppe*: MZP 2: mittl. Diff. = 2.75, p = .017; MZP 3: mittl. Diff. = 3.13, p = .031).

Grundvorstellungen – Kinder mit Förderbedarf

Setting		**MZP 1** *Mittlere Differenz*		*SE*	**MZP 2** *Mittlere Differenz*		*SE*	**MZP 3** *Mittlere Differenz*		*SE*
Klassenverband	*Einzelförderung*	2.25	*	0.826	–1.00		0.910	–1.13		0.839
	Kontrollgruppe	2.63	*	0.826	1.75		0.910	2.00		1.203
Einzelförderung	*Kontrollgruppe*	0.38		0.826	2.75	*	0.910	3.13	*	1.012

MZP		**Klassenverband** *Mittlere Differenz*		*SE*	**Einzelförderung** *Mittlere Differenz*		*SE*	**Kontrollgruppe** *Mittlere Differenz*		*SE*
1	*2*	–0.88		0.398	–4.13	**	0.854	–1.75		0.977
	3	0.00		0.802	–3.38	***	0.375	–0.63		1.017
2	*3*	0.88		0.693	0.75		0.701	1.13		0.693

n (Klassenverband) = 8, n (Förderkinder) = 8, n (Kontrollgruppe) = 8 — *p < .05, **p < .01, ***p < .001

Zweifaktorielle ANOVA gemischtes Design, HE-Gruppen: $F = 6.024$**, part. $\eta^2 = .365$,
HE-MZP: $F = 14.526$***, part. $\eta^2 = .409$, Interaktion: $F = 3.628$*, part. $\eta^2 = .257$

Normalverteilung: Shapiro-Wilk $p > .05$, Sphärizität: Mauchly $p > .05$,
Homogenität der Fehlervarianzen: Levene $p < .05$ (Korrektur: Quadratwurzeltransformation), Homogenität der Kovarianzmatrix: Box $p > .05$

Post-hoc-Tests Gruppeneffekte: Korrektur n. Games-Howell,
wenn Varianzhomogenitätsannahme verletzt ist (Levene: $p < .05$), andernfalls Tukey-HSD

Post-hoc-Tests Messwiederholungseffekte: Korrektur n. Greenhouse-Geisser, wenn Sphärizitätsannahme verletzt ist (Mauchly: $p < .05$), andernfalls ohne Korrektur

SE = Standardfehler, HE = Haupteffekt, Effektstärke angegeben in (part.) η^2 — Quelle: Eigene Berechnungen

Tabelle 8.23: Ergebnisse der Varianzanalyse (Grundvorstellungen – Kinder mit Förderbedarf)

Die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP (Abb. 8.20, rechts; Tab. 8.23) zeigen außerdem, dass die Kinder in Setting A *Einzelförderung* sowohl zu MZP 2 als auch zu MZP 3 die Testaufgaben signifikant häufig *multiplikativ* bearbeiten als zu MZP 1 (MZP 1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –4.13, p = .006; MZP 1 zu MZP 3: mittl. Diff. = –3.38, p = .000). Dies ist in den übrigen Settings nicht der Fall.

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP sowie die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP zeigen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind.

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.20, links; Tab. 8.23) zeigen darüber hinaus, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* zu MZP 1 die Testaufgaben signifikant häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C) (*Klassenverband – Kontrollgruppe*: mittl. Diff. = 2.63, p = .012). Zu MZP 2 und MZP 3 gibt es zwischen den beiden Settings keine signifikanten Unterschiede mehr.

In Setting *B Klassenverband* sind somit keine signifikant positiven Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar.

Aufgrund der Ergebnisse kann die Nullhypothese H0₃ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden.

Auf Basis der Ergebnisse kann die Nullhypothese H0₄ nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

Diskussion

Bei Betrachtung der prozentualen Anteile an *multiplikativen* sowie *additiven* Bearbeitungen und Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, ist Folgendes festzustellen: Ähnlich wie bei den Bearbeitungen *aller* Kinder sind auch bei den Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* zu allen drei MZP die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen jeweils mit Abstand am größten (zwischen 41,7 % und 76,7 %). Die Anteile, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, sowie die Anteile an *additiven* Bearbeitungen sind wesentlich geringer (*beide*: zwischen 0,0 % und 9,4 %; *additiv*: zwischen 2,1 % und 14,6 %).

Bezüglich der Veränderungen kann festgestellt werden, dass sich die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen in Setting A *Einzelförderung* sowohl während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, als auch im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3 sehr stark vergrößern. In den übrigen Settings sind die Veränderungen an *multiplikativen* Bearbeitungen eher gering.

Der Anteil an multiplikativen Bearbeitungen liegt in Setting B *Klassenverband* von MZP 1 an auf einem hohen Niveau, nämlich bei mindestens 60 %. Der jeweilige Anteil an *multiplikativen* Bearbeitungen in der *Kontrollgruppe* (Setting C) liegt zu MZP 1 bei knapp unter 40 %, steigt zu MZP 2 lediglich auf ein mittleres Niveau bei knapp über 50 % und liegt zu MZP 3 bei knapp über 40 %.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei den Kindern *mit Förderbedarf* kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

Um auf weiterführende mathematische Inhalte vorzubereiten, soll bei den Kindern zunehmend die *multiplikative* Grundvorstellung entwickelt werden. Hohe Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen sind insbesondere auch bei Kindern *mit Förderbedarf* wünschenswert.

Zwischenfazit

Bezüglich der Forschungsfragen zur Nutzung von Grundvorstellungen können bei Betrachtung der prozentualen Anteile der Ausprägungen folgende Ergebnisse zusammengefasst werden: Sowohl bei den Aufgaben zum *kartesischen Produkt*, als auch bei den Aufgaben zur *wiederholten Addition* wird überwiegend die *multiplikative* Grundvorstellung genutzt. Das heißt, bei den Aufgaben zum *kartesischen Produkt* spiegelt sich die zugrunde gelegte Grundvorstellung in den Bearbeitungen der Kinder wider, bei den Aufgaben zur *wiederholten Addition* jedoch erstaunlicherweise nicht (Forschungsfrage I). Diese Ergebnisse stehen im Wiederspruch zu Forschungsergebnissen, die die *wiederholte Addition* neben anderen als eine intuitive Vorstellung der Multiplikation und damit ihr durchaus häufiges Auftreten identifiziert haben (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Bönig, 1995a; Mulligan & Mitchelmore, 1997).

Betrachtet man die prozentualen Anteile der Ausprägungen *aller* Kinder und der Kinder *mit Förderbedarf*, kann festgestellt werden, dass in allen drei Settings die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen mit Abstand am größten sind. Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen und an Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, sind in allen drei Settings zu allen drei MZP gering. In Setting A *Einzelförderung* ist ein starker Anstieg an *multiplikativen* Bearbeitungen von MZP 1 zu MZP 2 und zu MZP 3 feststellbar. In den übrigen Settings sind die Veränderungen an *multiplikativen* Bearbeitungen bei *allen* Kindern und bei den Kindern *mit Förderbedarf* eher gering.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei *allen* Kindern kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind somit signifikant positive Effekte sowohl nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar. In Setting *B Klassenverband* sind bei *allen* Kindern dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage II).

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei den Kindern *mit Förderbedarf* kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar. In Setting *B Klassenverband* sind bei den Kindern *mit Förderbedarf* keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage III).

Um eine Basis für weiterführende mathematische Inhalte zu schaffen, soll bei den Kindern während der Behandlung der Multiplikation anknüpfend an die *additive* Grundvorstellung zunehmend die *multiplikative* Grundvorstellung entwickelt werden. Somit können hohe Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen als positiv und wünschenswert gewertet werden. Zusammenfassend lässt sich aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalysen sagen, dass in Setting A *Einzel-*

förderung signifikant positive Effekte sowohl nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind, in Setting *B Klassenverband* dagegen weder bei *allen* Kindern noch bei den Kindern m*it Förderbedarf* (Forschungsfragen II und III).

8.1.3 Ergebnisrichtigkeit

Bei der Kategorie *Ergebnisrichtigkeit* wird analysiert, ob die Bearbeitung ein *vollständig passendes*, ein *nicht passendes* Ergebnis enthält oder *ohne* Ergebnis notiert wurde. Es sollen Veränderungen der Anteile in den verschiedenen Settings bei *allen* Kindern und bei den Kindern *mit Förderbedarf* über die drei MZP hinweg analysiert werden. Zu beachten ist auch hier, dass die Gruppe der Kinder in Setting A *Einzelförderung* wesentlich kleiner ist ($n = 8$) als die übrigen beiden Gruppen in Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* mit jeweils ca. 130 bzw. 110 Kindern.

Die Testergebnisse werden bezogen auf die *Ergebnisrichtigkeit* hinsichtlich folgender Forschungsfragen analysiert:

I. *Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Richtigkeit des Ergebnisses bei allen beteiligten Kindern?*

II. *Welche Effekte haben differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die Richtigkeit des Ergebnisses bei den Kindern mit Förderbedarf?*

8.1.3.1 Aufgabenauswahl

Die Aufgaben Nr. 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16 (vgl. Anhang A) werden nicht in die Analyse von *Ergebnisrichtigkeit* einbezogen. Dies geschieht aus zwei Gründen:

- Bei Aufgabe Nr. 3 wird jeweils ein Term passend oder unpassend angekreuzt, die Kategorisierung nach *Ergebnisrichtigkeit* macht also keinen Sinn.
- Bei Aufgabe Nr. 9 zeigt die Auswertung der Daten, dass in ca. 45 % der Bearbeitungen die Aufgabenstellung $7 \cdot 8$ (mit oder ohne Ergebnis) lediglich abgeschrieben bzw. die Tauschaufgabe notiert wurde. Eine Analyse bzgl. *Angemessenheit* ist hier jeweils nicht möglich.
- Bei den Aufgaben Nr. 11 bis 16 soll jeweils von der Symbolform in eine Darstellungsform übersetzt werden, sodass es die Aufgabe gar nicht einfordert, zusätzlich noch das Ergebnis zu notieren.

Es fließen in die Auswertung somit acht von 16 Aufgabenbearbeitungen ein, die in der Aufgabenstellung *So rechne ich*, *Finde passende Malaufgaben* oder Ähnliches enthalten, da hier die Berechnung des jeweiligen Ergebnisses nahe liegt. Damit bezieht sich die Analyse auf vier Aufgabenbereiche (Tab. 8.24). Im Weiteren werden diese vollständig in die Analyse eingegangen Aufgaben der Lesbarkeit halber als ‚alle' Aufgaben gekennzeichnet.

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2"></th><th colspan="2">Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><th>kartesisches Produkt</th><th>wiederholte Addition</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Darstellungsformen</td><td rowspan="2">Kontextbezug</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">didaktisches Material</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 8.24: Bereiche aller analysierten Aufgaben

8.1.3.2 Vorgehensweise der Analyse

Die Analyse der Kategorie *Ergebnisrichtigkeit* bezieht sich auf die Korrektheit des Ergebnisses. Die Intension dieser Kategorie ist es, herauszufinden, ob die jeweils angebotene Gleichung mathematisch richtig oder falsch ist, egal, ob es sich um eine zur Aufgabenstellung passende Gleichung handelt oder nicht. Die im Folgenden dargestellte Analyse der *Richtigkeit des Ergebnisses* bezieht sich deswegen ausschließlich auf *angemessene* Bearbeitungen. *Teilweise* und *nicht angemessene* Bearbeitungen werden in den Diagrammen jeweils als ein Anteil zusammengefasst.

Bearbeitungen werden der Ausprägung *vollständig passend* zugeordnet, wenn die Ergebnisse aller angegebenen Aufgaben korrekt sind und auch die Gleichung stimmt. Der Ausprägung *nicht passend* werden Bearbeitungen zugeordnet, wenn die Ergebnisse zu Termen bzw. die Gleichung nicht korrekt sind. Bearbeitungen gehören zur Ausprägung *ohne* Ergebnis, wenn sie kein Ergebnis enthalten.

Auch hier werden für eine Übersicht über alle Aufgaben zunächst die prozentualen Anteile an Bearbeitungen in jeder einzelnen Aufgabe zu den drei MZP ermittelt und daraus der jeweilige Durchschnitt berechnet. So ergeben sich

Durchschnittswerte in Prozent der Anteile der unterschiedlichen Bearbeitungen für die drei MZP bzw. für die drei Settings.

Für die weitere statistische Überprüfung, welche Effekte der Einsatz des Konzepts zum Multiplikativen Verständnis in den verschiedenen Settings zu den verschiedenen MZP hat, wird die Kategorie *Ergebnisrichtigkeit* umcodiert:

- *vollständig passend (1)*
- *nicht vollständig passend* (0), bestehend aus *nicht passend* und *ohne*

In einem weiteren Schritt werden jeweils die Anzahl der Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis pro Schülerin bzw. Schüler und je MZP gezählt (Summenindex) (vgl. Kap. 6.3.2.2). Da für diese Kategorie acht Testaufgaben analysiert werden, entsteht bei Aufsummierung aller *angemessenen* Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis für jedes Kind zu jedem der MZP ein Wert zwischen 0 und 8. Mit diesen Werten werden die weiteren Berechnungen durchgeführt.

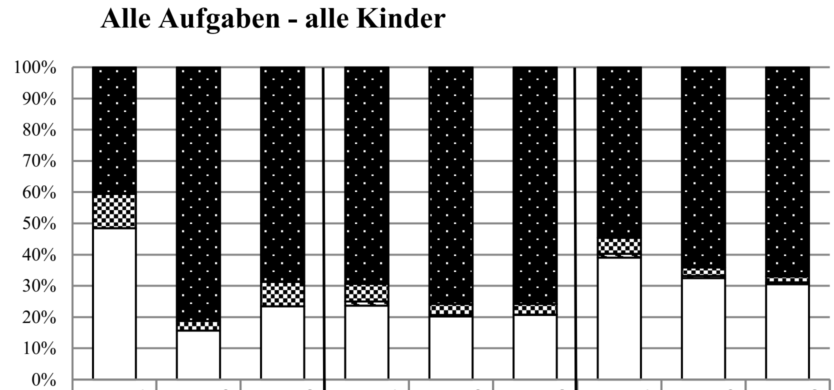
8.1.3.3 Veränderungen bei *allen* Kindern

Ergebnisse

Deskriptive Darstellung der Anteile

Um herauszufinden, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Richtigkeit des Ergebnisses* in der Bearbeitung *aller* teilnehmenden Kinder haben, werden wieder zunächst deskriptiv die prozentualen Anteile in den jeweiligen Settings zu den drei MZP (Abb. 8.21) dargestellt.

Betrachtet man die Anteile der Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis, so kann festgestellt werden, dass in Setting A *Einzelförderung* der Anteil während der Interventionsphase, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, von 40,6 % auf 81,3 % um 100,2 % ansteigt, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Abb. 8.21). Von MZP 2 zu MZP 3 sinkt der Anteil von 81,3 % auf 68,8 % um 15,4 %, bezogen auf den Wert zu MZP 2. Im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, steigt der Anteil um 69,5 % an, bezogen auf den Wert zu MZP 1.



	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
vollständig passend	40,6%	81,3%	68,8%	69,3%	75,8%	75,8%	54,7%	64,1%	67,0%
nicht passend	10,9%	3,1%	7,8%	5,7%	3,4%	3,4%	5,1%	2,7%	1,9%
ohne	0,0%	0,0%	0,0%	1,3%	0,5%	0,1%	1,2%	0,7%	0,6%
teilweise/nicht angemessen	48,4%	15,6%	23,4%	23,7%	20,2%	20,7%	39,1%	32,5%	30,6%

Abbildung 8.21: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Ergebnisrichtigkeit aller Kinder in den Settings (LU ≙ Lernumgebungen)

In Setting B *Klassenverband* steigt der Anteil an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP 2 von 69,3 % auf 75,8 % um 9,4 % an, bezogen auf den Wert zu MZP 1. Zu MZP 3 bleibt er gleich, sodass es von MZP 1 zu MZP 3 zu einem Anstieg von ebenfalls 9,4 % kommt, bezogen auf MZP 1.

In der *Kontrollgruppe* (Setting C) steigt der Anteil an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP 2 von 54,7 % auf 64,1 % um 17,2 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1. Von MZP 2 zu MZP 3 steigt der Anteil nochmals von 64,1 % auf 67,0 % um 4,5 % an, bezogen auf den Wert zu MZP 2. Von MZP 1 zu MZP 3 kommt es zu einem Anstieg von 22,5 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1.

Der jeweilige Anteil an Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis ist wesentlich geringer als der Anteil an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis und liegt zu allen drei MZP in allen drei Settings lediglich zwischen 1,9 % und 10,9 %. In Setting A *Einzelförderung* sinkt der Anteil an Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, von 10,9 % auf 3,1 %. Von MZP 2 zu MZP 3 steigt der Anteil von 3,1 % auf 7,8 %. Im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, sinkt der Anteil von 5,1 % auf 1,9 %.

In Setting B *Klassenverband* sinkt der Anteil an Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP 2 von 5,7 % auf 3,4 %. Der Wert bleibt zu MZP 3 bei 3,4 %.

In der *Kontrollgruppe* (Setting C) sinkt der Anteil an Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP 2 von 5,1 % auf 2,7 %. Von MZP 2 zu MZP 3 sinkt der Anteil von 2,7 % auf 1,9 %. Von MZP 1 zu MZP 3 sinkt der Wert von 5,1 % auf 1,9 %.

Die jeweiligen Anteile an Bearbeitungen *ohne* Ergebnis sind äußerst geringfügig und liegen zwischen 0,0 % und 1,3 %.

Statistische Überprüfung der Hypothesen

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Ergebnisrichtigkeit* in den Bearbeitungen *aller* beteiligten Kinder haben, sollen Hypothesen getestet werden. Im Folgenden werden die Hypothesen sowie die jeweils entsprechenden Nullhypothesen formuliert:

H1: Die acht Kinder in Setting A Einzelförderung finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger vollständig passende Ergebnisse als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_1$: Die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H2: Alle Kinder in Setting B Klassenverband finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger vollständig passende Ergebnisse als alle Kinder in der Kontrollgruppe (Setting C).

$H0_2$: *Alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

	Ergebnisrichtigkeit – alle Kinder					
	Einzelförderung		Klassenverband		Kontrollgruppe	
MZP	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**
1	3.25	1.04	5.55	1.56	4.38	1.99
2	6.50	1.51	6.07	1.26	5.09	1.77
3	5.50	1.41	5.61	1.95	5.17	1.84
	n = 8		n = 124		n = 108	

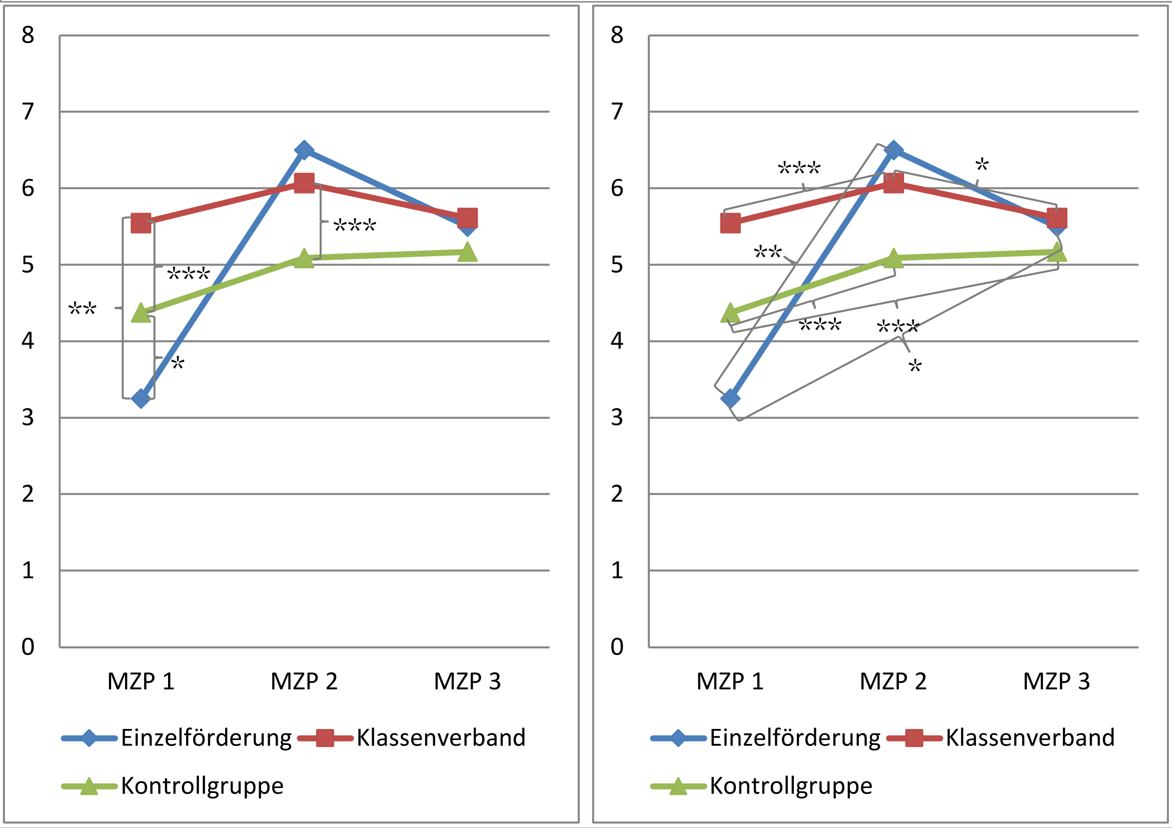
Tabelle 8.25: Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) aller Kinder zu den MZP (Ergebnisrichtigkeit)

In Tabelle 8.25 wird die Verteilung der Testbearbeitungen zu *Ergebnisrichtigkeit* (bezogen nun auf den Summenindex, Werte zwischen 0 und 8 möglich) für *alle* Kinder der Interventionsgruppen (Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*) und der *Kontrollgruppe* (Setting C) zu den drei MZP dargestellt.

Die Mittelwerte bezüglich *Ergebnisrichtigkeit* steigen bei *allen* Kindern in allen drei Settings von MZP 1 zu MZP 2 an (Tab. 8.25). Von MZP 2 zu MZP 3 sinken sie in Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*, in Setting C steigen sie geringfügig. Von MZP 1 zu MZP 3 steigen sie in allen drei Settings.

Abbildung 8.22 zeigt Veränderungen der Mittelwerte über die MZP in den drei Settings sowie signifikante Unterschiede. Zudem werden Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Haupteffekten (HE) angegeben (F-Wert, Standardfehler ≙ SE, Effektstärke (part.) η^2) und Voraussetzungen (Normalverteilung, Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen, Homogenität der Kovarianzmatrix, Sphärizität), Post-hoc-Tests sowie ggf. Korrekturen zur Durchführung der Varianzanalyse genannt (Tab. 8.26).

Ergebnisrichtigkeit – alle Kinder



n (Einzelförderung) = 8, n (Klassenverband) = 124; n (Kontrollgruppe) = 108
* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Abbildung 8.22: Veränderungen der Mittelwerte aller Kinder im Verlauf der MZP (Ergebnisrichtigkeit)

Bei den Ergebnissen *aller* Kinder zu *Ergebnisrichtigkeit* sind die Voraussetzungen für eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung im gemischten Design, nämlich Normalverteilung (Shapiro-Wilk-Test: p < .05), Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen (Levene-Test: p < .05) Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix (Box-Test: p < .05) sowie Sphärizität (Mauchly-Test: p < .05) nicht gegeben, sodass zur Überprüfung der Haupteffekte des Gruppen- sowie Messwiederholungsfaktors zwei einfaktorielle Varianzanalysen gerechnet wurden (Tab. 8.26). Bei den Post-hoc-Tests sind die Homogenitätsannahmen der Varianzen bezüglich des Haupteffekts des Gruppenfaktors zu MZP 1 und MZP 2 verletzt (Levene: p < .05), sodass Korrekturen nach Games-Howell durchgeführt wurden. Die Sphärizität ist bezüglich des Haupteffekts des Messwiederholungsfaktors in Setting *Klassenverband* nicht gegeben (Mauchly-Test: p < .05), sodass Korrekturen nach Greenhouse-Geisser vorgenommen wurden (Tab. 8.26).

Es werden im Weiteren die Haupteffekte des Gruppenfaktors sowie des Messwiederholungsfaktors analysiert. Es zeigt sich ein signifikanter Haupteffekt des Gruppenfaktors ($F = 17.551$, $p = .000$, $\eta^2 = .123$) sowie ein signifikanter Haupteffekt des Messwiederholungsfaktors auf die Werte ($F = 9.675$, $p = .000$, $\eta^2 = .128$).

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.22, links; Tab. 8.26) zeigen, dass zu MZP 1 die Kinder in Setting A *Einzelförderung* signifikant seltener *vollständig passende* Ergebnisse zu den Testaufgaben finden als *alle* Kinder in den übrigen Settings (*Einzelförderung – Klassenverband*: mittl. Diff. = –2.29, $p = .001$; *Einzelförderung – Kontrollgruppe*: mittl. Diff. = –1.13, $p = .047$). Dies ist auch hier nicht überraschend, da die Einzelförderkinder wiederum mit *allen* Kindern (mit und ohne Förderbedarf) in den übrigen Settings verglichen werden. Zu MZP 2 und MZP 3 gibt es keine signifikanten Unterschiede zwischen den Kindern in Setting A *Einzelförderung* und den Kindern in den übrigen Settings, d. h. die Kinder in Setting A *Einzelförderung* finden ähnlich häufig *vollständig passende* Ergebnisse zu den Testaufgaben wie die übrigen Settings.

Ergebnisrichtigkeit – alle Kinder

Setting		**MZP 1**			**MZP 2**			**MZP 3**		
		Mittlere Differenz		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*
Klassenverband	*Einzelförderung*	2.29	**	0.390	–0.43		0.546	0.11		0.687
	Kontrollgruppe	1.17	***	0.231	0.98	***	0.200	0.44		0.242
Einzelförderung	*Kontrollgruppe*	–1.13	*	0.411	1.41		0.560	0.33		0.691
MZP		**Klassenverband**			**Einzelförderung**			**Kontrollgruppe**		
		Mittlere Differenz		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*	*Mittlere Differenz*		*SE*
1	*2*	–0.52	***	0.127	–3.25	**	0.526	–0.71	***	0.165
	3	–0.07		0.182	–2.25	*	0.559	–0.80	***	0.188
2	*3*	0.46	*	0.170	1.00		0.327	–0.08		0.156

n (Klassenverband) = 124, n (Förderkinder) = 8, n (Kontrollgruppe) = 108 *p < .05, **p < .01, ***p < .001

Einfaktorielle ANOVA (Gruppenfaktor): F = 17,551***, part. $\eta^2 = 0{,}123$ & einfaktorielle ANOVA mit Messwiederholung: F = 9.675***, part. $\eta^2 = 0{,}128$

HE-Gruppen (MZP 1): F = 17.551***, part. $\eta^2 = .123$, HE-Gruppen (MZP 2): F = 14.025***, part. $\eta^2 = .101$, HE-Gruppen (MZP 3): F = 1.681, part. $\eta^2 = .013$

HE-MZP (Klassenverband): F = 6.200**, part. $\eta^2 = .045$, HE-MZP (Förderkinder): F = 23.872***, part. $\eta^2 = .773$,

HE-MZP (Kontrollgruppe): $F = 13.199^{***}$, part. $\eta^2 = .106$
Normalverteilung: Shapiro-Wilk $p < .05$, Sphärizität: Mauchly $p < .05$, Homogenität der Fehlervarianzen: Levene $p < .05$, Homogenität der Kovarianzmatrix: Box $p < .05$
Post-hoc-Tests Gruppeneffekte: Korrektur n. Games-Howell, wenn Varianzhomogenitätsannahme verletzt ist (Levene: $p < .05$), andernfalls Tukey-HSD
Post-hoc-Tests Messwiederholungseffekte: Korrektur n. Greenhouse-Geisser, wenn Sphärizitätsannahme verletzt ist (Mauchly: $p < .05$), andernfalls ohne Korrektur
SE = Standardfehler, HE = Haupteffekt, Effektstärke angegeben in (part.) η^2 — Quelle: Eigene Berechnungen

Tabelle 8.26: Ergebnisse der Varianzanalyse (Ergebnisrichtigkeit – alle Kinder)

Die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP (Abb. 8.22., rechts; Tab. 8.26) zeigen in Setting A *Einzelförderung* einen signifikanten Anstieg von MZP 1 zu MZP 2 sowie zu MZP 3 (MZP 1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –3.25, p = .001; MZP 1 zu MZP 3: mittl. Diff. = –2.25, p = .015). Auch in Setting B *Klassenverband* sowie in der *Kontrollgruppe* (Setting C) zeigen sich signifikante Anstiege von MZP 1 zu MZP 2 (*Klassenverband*: MZP 1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –0.52, p = .000; *Kontrollgruppe*: MZP1 zu MZP 2: mittl. Diff. = –0.71, p = .000). In der Kontrollgruppe (Setting C) ist zusätzlich der Anstieg von MZP 1 zu MZP 3 signifikant (mittl. Diff. = –0.80, p = .000). Die Beträge der mittleren Differenzen sind in Setting B *Klassenverband* und in der *Kontrollgruppe* (Setting C) jedoch wesentlich geringer als in Setting A *Einzelförderung*, was darauf hindeutet, dass der Anstieg in Setting A größer ist als in den übrigen Settings. Die in Tab. 8.26 angegebenen Effektstärken deuten darauf hin, dass sich die Werte zu *Ergebnisrichtigkeit* durch die Unterschiede der Kinder in Setting A *Einzelförderung* (part. $\eta^2 = .773$) stärker erklären lassen als durch die Unterschiede in den übrigen beiden Settings (*Klassenverband*: $\eta^2 = .045$; *Kontrollgruppe*: $\eta^2 = .106$).

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP sowie die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP zeigen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind.

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.22, links; Tab. 8.26) zeigen außerdem, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* zu MZP 1 und MZP 2 zu den Testaufgaben signifikant häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in Setting C *Kontrollgruppe* (*Klassenverband – Kontrollgruppe*: MZP 1: mittl. Diff. = 1.17, p = .000; MZP 2: mittl. Diff. = 0.98, p = .000). Zu MZP 3 gibt es keine signifikanten Unterschiede mehr, d. h. die Werte beider Settings sind auf ähnlichem Niveau.

In Setting *B Klassenverband* sind somit keine signifikant positiven Effekte direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar.

Aufgrund der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), *a*ngenommen werden.

Auf Basis der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

Diskussion

Bei Betrachtung der Veränderungen der prozentualen Anteile der Ausprägungen *vollständig passendes*, *nicht passendes* und *ohne* Ergebnis lässt sich Folgendes feststellen: Der Anstieg des Anteils an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis in Setting A *Einzelförderung* ist während der Intervention, also von MZP 1 zu MZP 2, sehr stark. Im Langzeiteffekt, also von MZP 1 zu MZP 3, ist der Anstieg etwas abgeschwächt, aber immer noch ausgeprägt. Die Veränderungen bei *allen* Kindern in den übrigen Settings der Anteile an *vollständig passendem* Ergebnis sind eher gering.

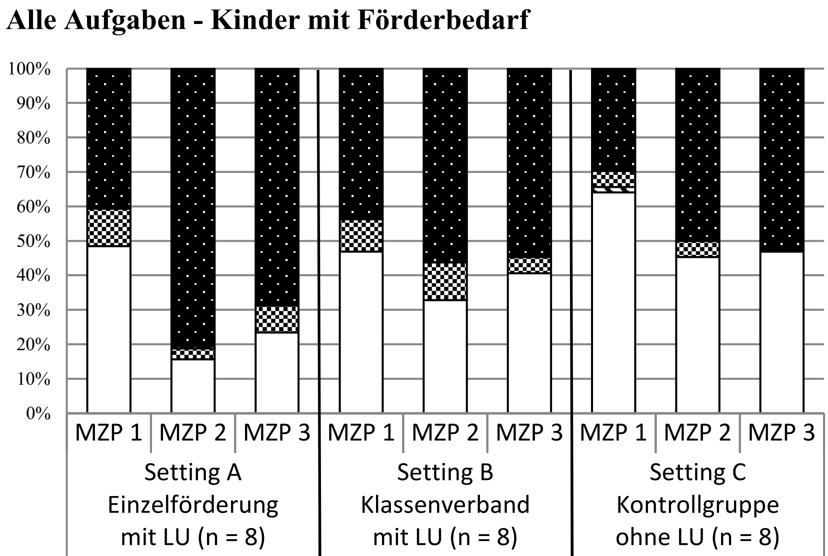
Insgesamt sind die Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis im Vergleich zu den Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis bzw. *ohne* Ergebnis zu allen drei MZP und bei *allen* Kindern in allen drei Settings jeweils am größten. Es lässt sich also für alle Settings und MZP feststellen, dass Kinder, die die hier analysierten Aufgaben *angemessen* bearbeiten, in der Mehrheit auch das *vollständig passende* Ergebnis zur Aufgabe finden. Denkbar ist, dass die Förderung von Verständnis und damit auch der Fähigkeiten, die Aufgaben *angemessen* zu bearbeiten, auch dazu führt, dass *passende* Ergebnisse zu den Aufgaben gefunden werden. Die Anteile an Bearbeitungen mit *nicht passenden* bzw. *ohne* Ergebnis liegen insgesamt jeweils unter 11,0 % und damit sehr gering.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei *allen* Kindern kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), *a*ngenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

8.1.3.4 Veränderungen bei den Kindern *mit Förderbedarf*

Ergebnisse

Deskriptive Darstellung der Anteile



	Setting A MZP 1	Setting A MZP 2	Setting A MZP 3	Setting B MZP 1	Setting B MZP 2	Setting B MZP 3	Setting C MZP 1	Setting C MZP 2	Setting C MZP 3
vollständig passend	40,6%	81,3%	68,8%	43,8%	56,3%	54,7%	29,7%	50,0%	53,1%
nicht passend	10,9%	3,1%	7,8%	9,4%	10,9%	4,7%	4,7%	4,7%	0,0%
ohne	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,6%	0,0%	0,0%
teilweise/nicht angemessen	48,4%	15,6%	23,4%	46,9%	32,8%	40,6%	64,1%	45,3%	46,9%

Abbildung 8.23: Anteile an Bearbeitungen bezüglich Ergebnisrichtigkeit der Kinder mit Förderbedarf in den Settings

Bei Betrachtung der Ergebnisse der Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* ist festzustellen, dass in Setting A *Einzelförderung* der Anteil an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, von 40,6 % auf 81,8 % um 100,2 % ansteigt, bezogen auf den Wert zu MZP 1 (Abb. 8.23). Von MZP 2 zu MZP 3 sinkt der Anteil wieder von 81,3 % auf 68,8 % um 15,4 %, bezogen auf MZP 2. Im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, kommt es damit zu einem Anstieg von 69,5 %, bezogen auf MZP 1.

In Setting B *Klassenverband* steigt der Anteil an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP2 von 43,8 % auf 56,3 % um 28,5 %, bezogen auf MZP 1. Von MZP 2 zu MZP 3 sinkt der Anteil wieder geringfügig von 56,3 % auf 54,7 % um 2,8 %, bezogen auf den Wert zu MZP 2. Von MZP 1 zu MZP 3 steigt der Anteil um 24,9 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1.

In der *Kontrollgruppe* (Setting C) steigt der Anteil an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP 2 von 29,7 % auf 50,0 % um 68,4 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1. Von MZP 2 zu MZP 3 steigt der Wert nochmals etwas von 50,0 % auf 53,1 % um 6,2 %, bezogen auf den Wert zu MZP 2. Von MZP 1 zu MZP 3 kommt es damit zu einem Anstieg von 78,8 %, bezogen auf den Wert zu MZP 1.

Die Anteile an Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis sind jeweils äußerst gering (zwischen 0,0 % und 10,9 %). In Setting A *Einzelförderung* sinkt der Anteil von MZP 1 zu MZP 2 von 10,9 % auf 3,1 %. Von MZP 2 zu MZP 3 steigt der Anteil wieder von 3,1 % auf 7,8 %. Damit sinkt der Anteil von MZP 1 zu MZP 3 von 10,9 % auf 7,8 %.

In Setting B *Klassenverband* steigt der Anteil an Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP 2 geringfügig von 9,4 % auf 10,9 %. Von MZP 2 zu MZP 3 sinkt der Anteil von 10,9 % auf 4,7 %. Von MZP 1 zu MZP 3 sinkt der Anteil damit von 9,4 % auf 4,7 %.

In der *Kontrollgruppe* bleibt der Anteil an Bearbeitungen mit *nicht passendem* Ergebnis von MZP 1 zu MZP 2 gleich und beträgt 4,7 %. Von MZP 2 zu MZP 3 sinkt der Anteil von 4,7 % auf 0,0 %.

Die Anteile an Bearbeitungen *ohne* Ergebnis liegen zu allen MZP und in allen Settings bei 0,0 %, mit Ausnahme des Anteils zu MZP 1 in der *Kontrollgruppe*, dort liegt er bei 1,6 %.

Statistische Überprüfung der Hypothesen

Um die Forschungsfrage beantworten zu können, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Ergebnisrichtigkeit* in den Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* haben, sollen Hypothesen getestet werden. Im Folgenden werden die Hypothesen sowie die jeweils entsprechenden Nullhypothesen formuliert:

H3: Die acht Kinder mit Förderbedarf in Setting A Einzelförderung finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger vollständig passende Ergebnisse als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

> H03: Die acht Kinder *mit Förderbedarf* in Setting A *Einzelförderung* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

H4: Die Kinder mit Förderbedarf in Setting B Klassenverband finden zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger vollständig passende Ergebnisse als die Kinder mit Förderbedarf in der Kontrollgruppe (Setting C).

H0₄: Die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* finden zu den Testaufgaben nach der Intervention nicht häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C).

In Tabelle 8.27 wird die Verteilung der Testbearbeitungen zu *Ergebnisrichtigkeit* (bezogen nun auf den Summenindex, Werte zwischen 0 und 8 möglich) für die Kinder *mit Förderbedarf* der Interventionsgruppen (Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*) und der *Kontrollgruppe* (Setting C) zu den drei MZP dargestellt.

Die Mittelwerte bezüglich *Ergebnisrichtigkeit* steigen bei den Kindern *mit Förderbedarf* in allen drei Settings von MZP 1 zu MZP 2 an (Tab. 8.27). Von MZP 2 zu MZP 3 sinken sie in Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*, in der *Kontrollgruppe* (Setting C) steigen sie geringfügig. Von MZP 1 zu MZP 3 steigen sie in allen drei Settings.

Abbildung 8.24 zeigt Veränderungen der Mittelwerte über die MZP in den drei Settings sowie signifikante Unterschiede. Zudem werden Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Haupteffekten (HE) sowie zum Interaktionseffekt angegeben (F-Wert, Standardfehler ≙ SE, Effektstärke (part) η^2) und Voraussetzungen (Normalverteilung, Homogenitätsannahmen der Fehlervarianzen, Homogenitätsannahme der Kovarianzmatrix, Sphärizität), Post-hoc-Tests sowie ggf. Korrekturen zur Durchführung der Varianzanalyse genannt (Tab. 8.28).

	Ergebnisrichtigkeit – Kinder mit Förderbedarf					
	Einzelförderung		**Klassenverband**		**Kontrollgruppe**	
MZP	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**	**MW**	**SD**
1	3.25	1.04	3.50	1.20	2.38	1.30
2	6.50	1.51	4.50	1.20	4.00	2.00
3	5.50	1.41	4.38	1.41	4.25	2.32
			n = 8			

Tabelle 8.27: Mittelwert (MW) und Standardabweichung (SD) der Kinder mit Förderbedarf zu den MZP (Ergebnisrichtigkeit)

Bei den Ergebnissen der Kinder *mit Förderbedarf* zu *Ergebnisrichtigkeit* wurde eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung im gemischten Design gerechnet, da die Voraussetzungen gegeben sind (Tab. 8.28).

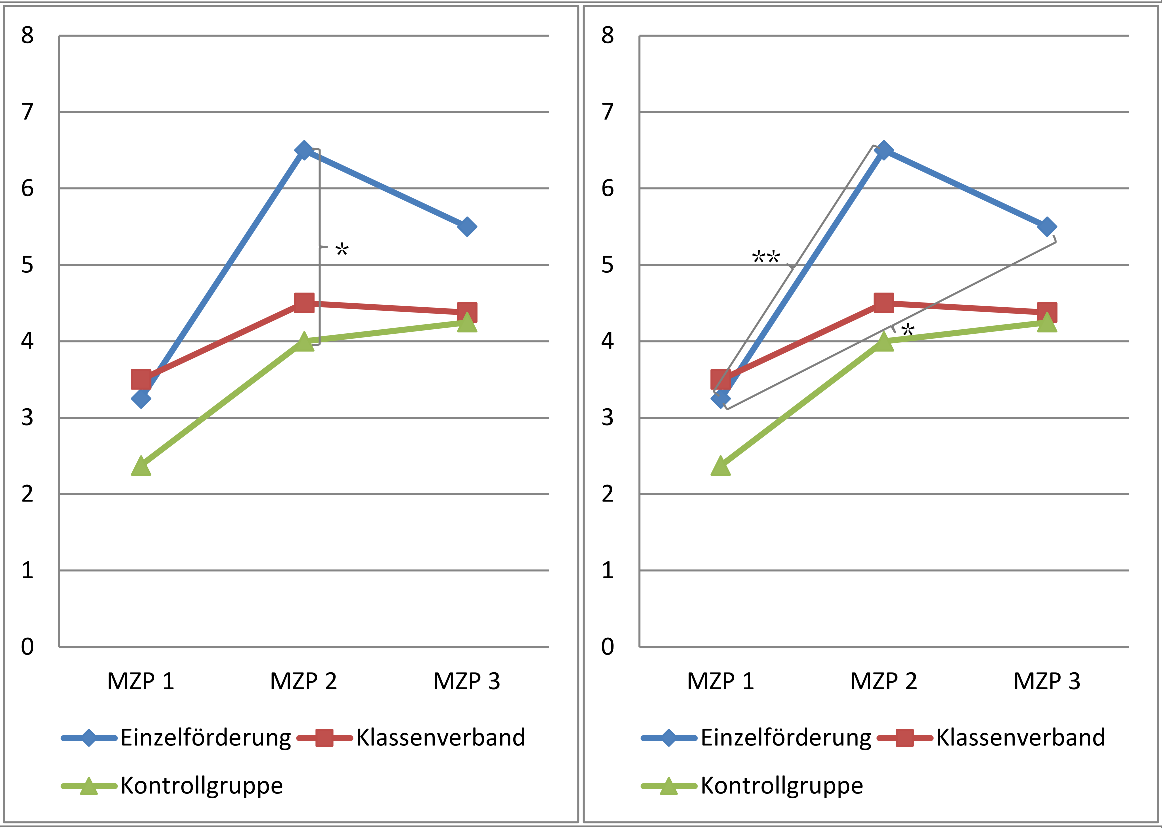
Der Interaktionseffekt kann nicht bestätigt werden, allerdings ist er nur ganz knapp nicht signifikant ($p = .053$), was auch als marginal signifikant bezeichnet wird.

Es werden im Weiteren die Haupteffekte des Gruppenfaktors sowie des Messwiederholungsfaktors analysiert. Der Haupteffekt des Gruppenfaktors auf die Werte ist nicht signifikant. Es zeigt sich ein signifikanter Haupteffekt des Messwiederholungsfaktors auf die Werte (HE-MZP: $F = 22.656$, $p = .000$, $\eta^2 = .519$).

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.24, links; Tab. 8.28) zeigen, dass sich die Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 1 nicht signifikant von den Kindern in den übrigen Settings unterscheiden, d. h. die Kinder in Setting A *Einzelförderung* finden ähnlich selten *vollständig passende* Ergebnisse wie die übrigen Settings. Zu MZP 2 sind die Werte der Kinder in Setting A *Einzelförderung* auf signifikant höherem Niveau als die Werte der Kinder in der *Kontrollgruppe* (*Einzelförderung – Kontrollgrupp*e: mittl. Diff. = 2.50, $p = .01$). Zwischen Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband* gibt es zu MZP 2 keinen signifikanten Unterschied. Zu MZP 3 unterscheiden sich die Werte aller drei Settings nicht signifikant voneinander; sie liegen also auf ähnlichem Niveau.

Zudem zeigen die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP (Abb. 8.24., rechts; Tab. 8.28), dass die Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 2 signifikant häufiger vollständig passende Ergebnisse finden als zu MZP 1 (mittl. Diff. = –3.25, $p = .001$). Auch zu MZP 3 finden die Kinder in Setting A *Einzelförderung* signifikant häufiger *vollständig passende* Ergebnisse als zu MZP 1 (mittl. Diff. = –2.25, $p = .015$). Dies ist in den übrigen Settings nicht der Fall.

Ergebnisrichtigkeit – Kinder mit Förderbedarf



n (Einzelförderung) = 8, n (Klassenverband) = 8; n (Kontrollgruppe) = 8
* p < .05, ** p < .01, *** p < .001

Abbildung 8.24: Veränderungen der Mittelwerte der Kinder mit Förderbedarf im Verlauf der MZP (Ergebnisrichtigkeit)

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP sowie die paarweisen Vergleiche innerhalb der Gruppen im Verlauf der MZP zeigen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind.

Die paarweisen Vergleiche der Gruppen zu den jeweiligen MZP (Abb. 8.24, links; Tab. 8.28) zeigen außerdem, dass zwischen den Werten der Kinder in Setting B *Klassenverband* und den Werten der Kinder in den übrigen Settings keine signifikanten Unterschiede bestehen, d. h. die Kinder in Setting B starten zu MZP 1 bereits auf ähnlichem Niveau wie die Kinder der *Kontrollgruppe* (Setting C) und auch wie die Kinder in Setting A *Einzelförderung* und dies bleibt auch im Verlauf der MZP so.

In Setting *B Klassenverband* sind somit keine signifikant positiven Effekte direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar.

Aufgrund der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), *a*ngenommen werden.

Auf Grundlage der Ergebnisse kann die Nullhypothese $H0_4$ nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

Ergebnisrichtigkeit – Kinder mit Förderbedarf

Setting		MZP 1 *Mittlere Differenz*	MZP 1 *SE*	MZP 2 *Mittlere Differenz*		MZP 2 *SE*	MZP 3 *Mittlere Differenz*	MZP 3 *SE*
Klassen-verband	*Einzel-förderung*	0.25	0.591	–2,00		0.802	–1.13	0.882
	Kontroll-gruppe	1.13	0.591	0.50		0.802	0.13	0.882
Einzel-förderung	*Kontroll-gruppe*	0.88	0.591	2.50	*	0.802	1.25	0.882

MZP		Klassenverband *Mittlere Differenz*	Klassenverband *SE*	Einzelförderung *Mittlere Differenz*		Einzelförderung *SE*	Kontrollgruppe *Mittlere Differenz*	Kontrollgruppe *SE*
1	*2*	–1.00	0.535	–3.25	**	0.526	–1.63	0.653
	3	–0.86	0.441	–2.25	*	0.559	–1.88	0.611
2	*3*	0.13	0.639	1.00		0.327	–0.25	0.526

n (Klassenverband) = 124, n (Förderkinder) = 8, n (Kontrollgruppe) = 108 *p < .05, **p < .01, ***p < .001

Zweifaktorielle ANOVA gemischtes Design, HE-Gruppen: $F = 3.082$; $\eta^2 = .227$,
HE-MZP: $F = 22.656^{***}$, $\eta^2 = .519$; Interaktion: $F = 2.555$, $\eta^2 = .196$

Normalverteilung: Shapiro-Wilk $p > .05$, Sphärizität: Mauchly $p > .05$,
Homogenität der Fehlervarianzen: Levene $p > .05$, Homogenität der Kovarianzmatrix: Box $p > .05$

Post-hoc-Tests Gruppeneffekte: Korrektur n. Games-Howell,
wenn Varianzhomogenitätsannahme verletzt ist (Levene: $p < .05$), andernfalls Tukey-HSD

Post-hoc-Tests Messwiederholungseffekte: Korrektur n. Greenhouse-Geisser,
wenn Sphärizitätsannahme verletzt ist (Mauchly: $p < .05$), andernfalls ohne Korrektur

SE = Standardfehler, HE = Haupteffekt, Effektstärke angegeben in (part.) η^2 Quelle: Eigene Berechnungen

Tabelle 8.28: Ergebnisse der Varianzanalyse (Ergebnisrichtigkeit – Kinder mit Förderbedarf)

Diskussion

Bei Betrachtung der Veränderungen der prozentualen Anteile der Ausprägungen *vollständig passendes, nicht passendes* und *ohne* Ergebnis lässt sich Folgendes feststellen: Der Anstieg des Anteils an *vollständig passendem* Ergebnis ist in Setting A *Einzelförderung* sowohl während der Intervention, von MZP 1 zu MZP 2, als auch in der Langzeitperspektive, von MZP 1 zu MZP 3, stark. In Setting B *Klassenverband* sind bei den Kindern *mit Förderbedarf* die Veränderungen sehr gering. In Setting C *Kontrollgruppe* liegt der Anstieg von MZP 1 zu MZP 2 bzw. zu MZP 3 in einem höheren Bereich.

Wie auch bei den Ergebnissen bei *allen* teilnehmenden Kindern ist bei den Ergebnissen der Kinder *mit Förderbedarf* feststellbar, dass in den *angemessenen* Bearbeitungen mehrheitlich *vollständig passende* Ergebnisse enthalten sind. Auch bei den Kindern *mit Förderbedarf* liegen die jeweiligen Anteile an Bearbeitungen mit *nicht passendem* und *ohne* Ergebnis jeweils zusammen unter 11,0 %. Auch die Kinder *mit Förderbedarf* scheinen meist das *vollständig passende* Ergebnis zu finden, wenn sie die jeweilige Aufgabe *angemessen* bearbeiten. Möglich ist auch hier, dass Förderung von Verständnis und damit der Fähigkeiten, die Aufgaben *angemessen* zu bearbeiten, auch dazu führt, dass *passende* Ergebnisse zu den Aufgaben gefunden werden.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei den Kindern *mit Förderbedarf* kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), *a*ngenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden.

8.1.3.5 Zwischenfazit

Aus der Analyse der prozentualen Anteile der Ausprägungen *vollständig passendes, nicht passendes* und *ohne* Ergebnis können sowohl für die Bearbeitungen *aller* Kinder als auch der Kinder *mit Förderbedarf* zu allen drei MZP folgende Tendenzen festgehalten werden: Im Setting A *Einzelförderung* ist sowohl während der Intervention als auch in der Langzeitperspektive ein starker Anstieg an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis feststellbar. Die Veränderungen der Anteile an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis bei *allen* Kindern in den übrigen Settings sind eher gering. Bei den Kindern *mit Förderbedarf* sind die Veränderungen der Anteile an Bearbeitungen mit *vollständig passendem*

Ergebnis in Setting B *Klassenverband* sehr gering. Bei den Kindern *mit Förderbedarf* in Setting C *Kontrollgruppe* liegt der Anstieg von MZP 1 zu MZP 2 bzw. zu MZP 3 in einem höheren Bereich. Die Anteile an Bearbeitungen mit *nicht passendem* und *ohne* Ergebnis sind sowohl bei *allen* Kindern als auch bei den Kindern *mit Förderbedarf* zu allen drei MZP gering (unter 11,0 %). Kinder, die die analysierten Aufgaben angemessen bearbeiten, finden in der Mehrheit auch *passende* Ergebnisse. Es ist also denkbar, dass die Förderung von Verständnis und damit der Fähigkeiten, die Aufgaben *angemessen* zu bearbeiten, auch dazu führt, dass *passende* Ergebnisse zu den Aufgaben gefunden werden.

Auf Basis der Ergebnisse der Varianzanalyse bei *allen* Kindern kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* lassen sich signifikant positive Effekte bezüglich *Ergebnisrichtigkeit* sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisen. In Setting B *Klassenverband* sind dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage I).

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei den Kindern *mit Förderbedarf* kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar. In Setting *B Klassenverband* sind dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage II).

Das Finden des *passenden* Ergebnisses zu einer *angemessenen* Bearbeitung ist selbstverständlich als positiv zu werten. Zusammenfassend lässt sich aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalysen sagen, dass sich in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte bezüglich *Ergebnisrichtigkeit* sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisen lassen, in Setting B

Klassenverband jedoch weder bei allen Kindern noch bei den Kindern *mit Förderbedarf* (Forschungsfrage I und II).

8.1.4 Verknüpfung

Bei der ersten Durchsicht der Bearbeitungen der Kinder wird festgestellt, dass nicht nur Operationen, sondern auch Umkehroperationen von den Kindern in den Bearbeitungen notiert wurden. Deswegen ist die Kategorie *Verknüpfung* induktiv entstanden. Sie bezieht sich darauf, welche *Verknüpfung* in der Bearbeitung gewählt wurde. Bearbeitungen werden danach unterschieden, ob sie eine *Operation*, eine *Umkehroperation* oder beides bzw. nichts von beidem (*keine Zuordnung*) enthalten.

Bei der Auswertung der Aufgaben wird deutlich, dass die Anteile an Bearbeitungen, die eine *Umkehroperation* nutzen, doch äußerst gering sind. Betrachtet man die Aufgaben und MZP, in denen in mindestens fünf Bearbeitungen eine *Umkehroperation* genutzt wird, so stellt man Folgendes fest:

Die überwiegende Zahl an Bearbeitungen, die eine *Umkehroperation* enthalten, sind *nicht angemessene* Bearbeitungen.

Bei Aufgabe Nr. 4 zu MZP 2 wird in acht von 334 Bearbeitungen (2,4 %) eine *Umkehroperation* genutzt. Davon sind zwei Bearbeitungen *angemessen* und zwei *teilweise angemessen*. Alle dieser vier Bearbeitungen enthalten jeweils eine Division. Die übrigen vier Bearbeitungen sind *nicht angemessene* Bearbeitungen.

Bei Aufgabe Nr. 8 zu MZP 3 wird in fünf von 316 Bearbeitungen (1,6 %) eine *Umkehroperation* genutzt. Davon ist eine Bearbeitung *teilweise angemessen* und eine *angemessen*. Die *angemessene* Bearbeitung enthält eine Subtraktion, die *teilweise angemessene* Bearbeitung eine Division. Die übrigen drei Bearbeitungen sind *nicht angemessen*.

Bei Aufgabe Nr. 13 zu MZP 1 wird in zehn von 335 Bearbeitungen (3,0 %) eine *Umkehroperation* genutzt. Davon sind zwei Bearbeitungen *angemessen* und eine Subtraktion. Die übrigen acht Bearbeitungen sind *nicht angemessen*. Bei Aufgabe Nr. 13 zu MZP 2 wird in zehn von 334 Bearbeitungen (3,0 %) eine *Umkehroperation* genutzt. Davon ist eine Bearbeitung *teilweise angemessen* und eine Subtraktion. Die übrigen neun Bearbeitungen sind *nicht angemessen*. Bei Aufgabe Nr. 13 zu MZP 3 wird in 11 von 316 Bearbeitungen (9,5 %) eine *Umkehroperation* genutzt. Davon sind zwei Bearbeitungen *angemessen* sowie eine Division und eine Bearbeitung *teilweise angemessen* sowie eine Subtraktion. Die übrigen Bearbeitungen sind *nicht angemessen*.

Zusammenfassend lässt sich also feststellen, dass *Umkehroperationen* sehr selten genutzt werden. In der Mehrzahl handelt es sich dann um *nicht angemessene* Bearbeitungen. *Angemessene* Bearbeitungen, die die *Umkehroperation* nutzen, enthalten jeweils eine Division oder eine Subtraktion.

8.2 Qualitative Analyse

Grundsätzliches Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, Effekte verschiedener Formen von Förderung im Bereich Multiplikation zu evaluieren. Mithilfe der entwickelten Auswertungskategorien konnten die Ergebnisse der Pre-, Post- und Follow-up-Tests in den verschiedenen Settings quantitativ ausgewertet werden und so Erkenntnisse über Häufigkeiten zu unterschiedlichen Merkmalsausprägungen im Zeitverlauf gewonnen werden.

Um weitere Hinweise zu möglichen Denkwegen bei einzelnen Bearbeitungen von Aufgaben zum Multiplikativen Verständnis zu erhalten, ist es sinnvoll, zusätzlich einen genaueren Blick auf die Phase zwischen Pre- und Post-Tests zu werfen. Videoaufnahmen ermöglichen dies im Setting A *Einzelförderung*.

8.2.1 Analyse ausgewählter Fördereinheiten

Es nahmen acht Kinder an der Einzelförderung teil. Je nach individuellem Bedarf fanden pro Kind durchschnittlich 6,6 Sitzungen von ca. 45 Minuten statt. Insgesamt liegen ca. 2385 Minuten Videoaufnahmen vor. Aufgrund des umfangreichen Datenmaterials in Form der Videoaufnahmen der Einzelförderung kann die Analyse im Rahmen dieser Arbeit nur exemplarisch stattfinden. Da sich die Analyse auf einzelne wenige ‚Fälle' bezieht, bietet sich die Methode der systematisch-extensionalen Interpretation (Beck & Maier, 1994) bzw. die Interaktionsanalyse der Interpretativen Unterrichtsforschung nach Krummheuer & Naujok (1999) an (vgl. Kap. 6.3.3).

Es wird ein Fokus auf einen spezifischen Inhalt der Fördereinheiten gelegt. Ausgewählt wurden das Erkennen und die Nutzung der Eigenschaft Distributivität. Dieser Fokus wird im Folgenden genauer begründet und beschrieben.

8.2.2 Fokus der Analyse

Für die Entscheidung der gezielten Auswahl werden sowohl inhaltliche als auch evidenzbasierte Argumente angeführt. Für die aktuell empfohlene ganzheitliche Behandlung des Einmaleins ist das Herstellen von Beziehungen zwischen den Einmaleinsreihen von Bedeutung (vgl. Kap. 4.2.8).

<table>
<tr><th colspan="3"></th><th colspan="2">Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><th colspan="3"></th><th>kartesisches Produkt</th><th>wiederholte Addition</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Darstellungsformen</td><td rowspan="2">Kontextbezug</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td colspan="2">x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">didaktisches Material</td><td>in die Symbolform</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td>x</td><td>x</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbolform</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Tabelle 8.29: Matrix für Test zum Multiplikativen Verständnis und Lernumgebungen

Dafür ist die geschickte Anwendung der Eigenschaften der Operation wichtig, weswegen die Förderung dieser Eigenschaften im Unterricht einen großen Stellenwert haben sollte. Dies liefert *inhaltliche* Gründe dafür, dass die weitere Analyse von Aufgaben lohnenswert erscheint, in denen das Verständnis der Eigenschaften gefördert werden soll. Derartige Aufgaben wurden in den Fördereinheiten in den Bereichen Übersetzung in die Symbolform von Aufgaben mit didaktischem Material (*kartesisches Produkt*) und Übersetzung von der Symbolform von Aufgaben mit didaktischem Material (*kartesisches Produkt*) (in Tab. 8.29 grau markiert) und im Bereich Symbolform thematisiert.

Multiplikatives Verständnis hat verschiedene Wesenselemente, die die Inhalte der Fördereinheiten bestimmen. Diese werden auch im Test zum Multiplikativen Verständnis abgebildet (vgl. Kap. 7.4). Deswegen können die quantitativen Ergebnisse des Tests zum Multiplikativen Verständnis *evidenzbasierte* Hinweise liefern, welche Bereiche für eine weitere Analyse der Einzelförderung interessant sein können. Dazu werden die Pre- und Post-Testergebnisse der Einzelförderkinder betrachtet und hinsichtlich der Identifizierung von Förderbedarf analysiert (vgl. Kap. 7.6). In den mit x gekennzeichneten Bereichen (Tab. 8.29) hat sich der Anteil der Bearbeitungen bei den Einzelförderkindern, die der Ausprägung *Förderbedarf* zugeordnet werden, von MZP 1 zu MZP 2 um mindestens 50 % verringert. Diese Bereiche können also für eine genauere Analyse besonders spannend sein, da Hinweise auf die Gründe für die Verbesserung erwartet werden.

Weitere evidenzbasierte Hinweise erhält man, wenn man die Testergebnisse der Aufgaben, in denen die Eigenschaft der Distributivität thematisiert wird (Aufgabe Nr. 7 und Nr. 14, Abb. 8.25), genauer betrachtet.

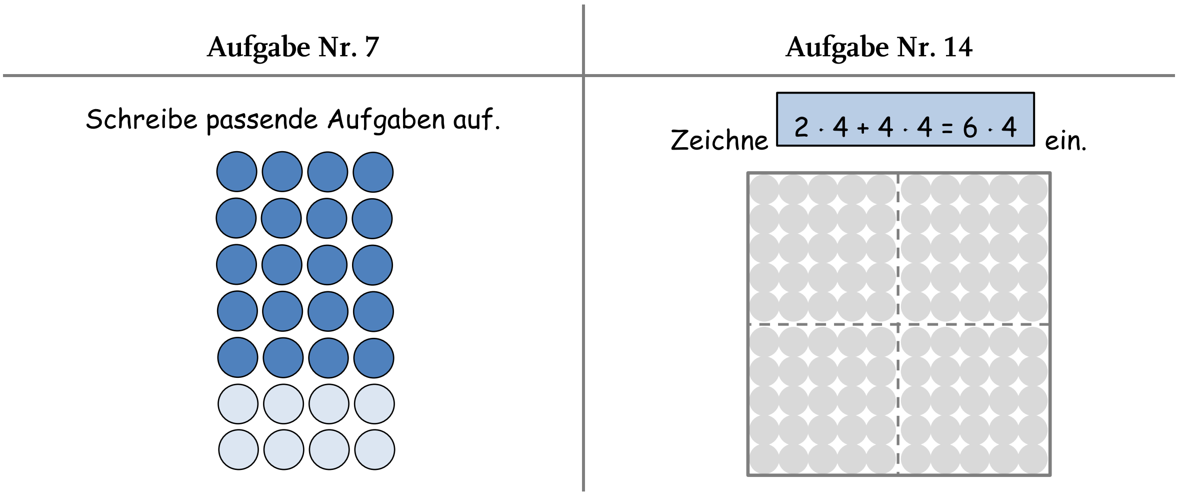
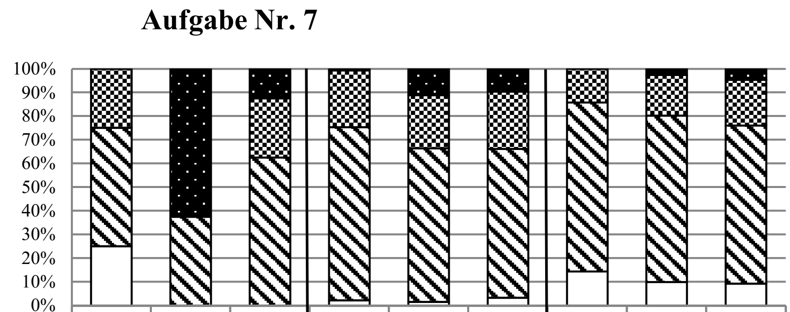


Abbildung 8.25: Aufgabe Nr. 7 (Übersetzung in die Symbolform) – Aufgabe Nr. 14 (Übersetzung von der Symbolform)

In den Grafiken der Auswertung der Kinder-Bearbeitungen zu den Aufgaben Nr. 7 und Nr. 14 (Abb. 8.26 und Abb. 8.27) kann abgelesen werden, dass sich in Setting A *Einzelförderung* die Anteile der Bearbeitungen, die der Ausprägung *Förderbedarf* zugeordnet werden, von MZP 1 zu MZP 2 bzw. zu MZP 3 verringern.



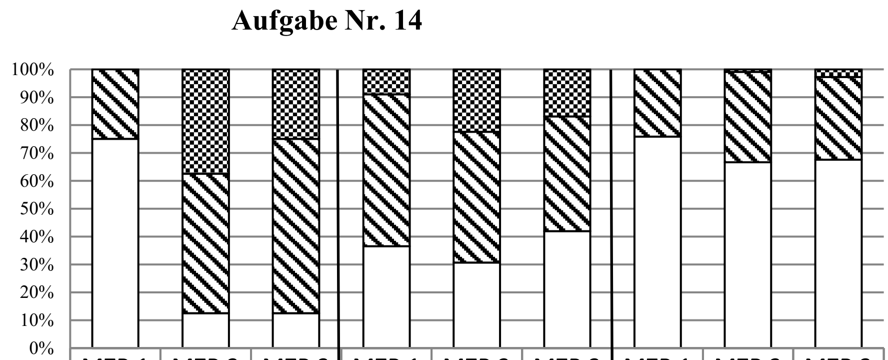
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
■ kein Föderbedarf/Distributivität	0,0%	62,5%	12,5%	0,7%	11,2%	9,7%	0,0%	2,7%	4,6%
⊠ kein Förderbedarf	25,0%	0,0%	25,0%	23,9%	22,4%	24,2%	14,3%	17,1%	19,4%
◪ teilweise Förderbedarf	50,0%	37,5%	62,5%	73,1%	64,9%	62,9%	71,4%	70,3%	66,7%
□ Förderbedarf	25,0%	0,0%	0,0%	2,2%	1,5%	3,2%	14,3%	9,9%	9,3%

Abbildung 8.26: Anteile in der Kategorie Förderbedarf bei Aufgabe Nr. 7 (Übersetzung in die Symbolform)

In Aufgabe Nr. 7 verkleinert sich der Anteil von MZP 1 zu MZP 2 von 25,0 % auf 0,0 % und bleibt zu MZP 3 bei 0 % (Abb. 8.26). In Aufgabe Nr. 14 verkleinert sich der Anteil von MZP 1 zu MZP 2 von 75,0 % auf 12,5 % und bleibt zu MZP 3 bei 12,5 % (Abb. 8.27). In Setting A *Einzelförderung* sind die Anteile der Ausprägung *teilweise Förderbedarf* und *Förderbedarf* zusammen genommen im Vergleich zu Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* geringer. Das heißt die Einzelförderkinder zeigen in dieser spezifischen Aufgabe positive Veränderungen im Post- und Follow-up-Test im Vergleich zum Pre-Test und auch im Vergleich zu den übrigen Settings.

Bei Aufgabe Nr. 7 (Übersetzung in die Symbolform) kann in den Bearbeitungen zudem abgelesen werden, ob die Eigenschaft der Distributivität angewandt wurde (vgl. Kap 7.4). In der Grafik (Abb. 8.26) wird ersichtlich, dass in der Gruppe der Einzelförderkinder in allen Bearbeitungen ohne Förderbedarf zu MPZ 2 auch die Distributivität genutzt wurde. Dies ist in den übrigen Gruppen seltener der Fall. Diese Aspekte begründen eine genauere Analyse des zugehörigen Bereichs der Einzelförderung, um möglicherweise Anhaltspunkte dafür zu finden, was zu den positiven Entwicklungen geführt hat.

In Setting A *Einzelförderung* liegen die jeweiligen Anteile an Bearbeitungen der Ausprägung *teilweise Förderbedarf* bei Aufgabe Nr. 7 zu MZP 1 bei 50 %, zu MZP 2 bei 27,5 % und zu MZP 3 bei 62,5 %. Bei Aufgabe Nr. 14 liegt der Anteil zu MZP 1 bei 25,0 %, zu MZP 2 bei 50,0 % und zu MZP 3 bei 62,5 % (Abb. 8.27). Der Anteil an Bearbeitungen mit *teilweise Förderbedarf* ist in Setting A *Einzelförderung* jeweils in beiden Aufgaben zu MZP 2 und MZP 3 also immer noch relativ hoch. Somit kann es auch aus dieser Perspektive spannend sein, zu untersuchen, welche Verstehensprozesse bei den Kindern möglicherweise noch nicht oder nur teilweise entwickelt werden konnten.



	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
kein Förderbedarf	0,0%	37,5%	25,0%	9,0%	22,4%	16,9%	0,0%	0,9%	2,8%
teilweise Förderbedarf	25,0%	50,0%	62,5%	54,5%	47,0%	41,1%	24,1%	32,4%	29,6%
Förderbedarf	75,0%	12,5%	12,5%	36,6%	30,6%	41,9%	75,9%	66,7%	67,6%

Abbildung 8.27: Anteile in der Kategorie Förderbedarf bei Aufgabe Nr. 14 (Übersetzung von der Symbolform)

Ausgehend von der übergeordneten Forschungsfrage, welche Effekte unterschiedliche Interventionssettings bezüglich der Förderung des Multiplikativen Verständnisses zeigen, wird in der qualitativen Analyse der Fördereinheiten folgender Forschungsfrage nachgegangen:

Wie wird das Förderangebot bezüglich des Erkennens und der Nutzung der Eigenschaft Distributivität von den Kindern angenommen?

Dabei können drei Elemente des Bearbeitungsprozesses identifiziert werden. Analysiert werden Handlungen und Sprechinhalte:

- beim Zeichnen der Teilprodukte
- beim Bestimmen des Summen- bzw. Differenzproduktes
- bei der Ergebnisermittlung

Die qualitative Analyse des Ausschnitts aus der Fördereinheit des jeweiligen Kindes wird gerahmt von den Ergebnissen des Kindes zu den drei MZP. Ergänzend wird die Auskunft der Lehrkraft des jeweiligen Kindes über den durchgeführten Unterricht beschrieben und in die Analyse einbezogen.

8.2.3 Beschreibung der Vorgehensweise zur ausgewählten Fördereinheit

Der Fokus der qualitativen Analyse gehört zum Förderbereich, der sich auf die *Übersetzung von Aufgaben mit didaktischem Material (kartesisches Produkt)* bezieht. Innerhalb dieses Förderbereichs sollte neben der Behandlung von einfachen Multiplikationsaufgaben auch das Erkennen und die Nutzung der Eigenschaft Distributivität entwickelt werden. Um Übersetzungsprozesse von der Symbolform in Darstellungen von didaktischem Material zu fördern, werden dem entsprechenden Kind Aufgaben vorgelegt, die Summen bzw. Differenzen zweier Produkte in symbolischer Schreibweise wie z. B. $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$..[3] enthalten, die es in die Darstellung des Punktefeldes übertragen soll. „Ein Punktefeld kann als […] Anschauung eines Produktes in zwei Teile (Teil-Produkte) zerlegt werden“ (Steinweg, 2013, S. 142). Es werden Aufgabenideen eingesetzt, bei denen Summen- bzw. Differenzprodukte in Punktefelder eingezeichnet werden sollen. Weitere Aufgaben beziehen sich darauf, Summen- bzw. Differenzprodukte aus Punktefeldern auszuschneiden. Im jeweils ausgewählten Ausschnitt der Förderung geht es um das Einzeichnen von Aufgaben im Punktefeld.

Während der drei Elemente des Bearbeitungsprozesses gibt es verschiedene Herausforderungen, die das Kind meistern muss.

Vor der eigentlichen Bearbeitung sind anspruchsvolle mentale Prozesse erforderlich, die sich der direkten Beobachtung entziehen. Es ist zunächst bedeutend, die beiden Teilprodukte zu identifizieren. Zum einen ist relevant, den gleichbleibenden Faktor zuerkennen. Zum anderen muss der zu addierende bzw. subtrahierende Faktor erkannt werden (Steinweg, Akinwunmi, & Lenz, 2018, S. 289). So können die Faktoren des Summen- bzw. Differenzproduktes gefunden werden. Man spricht hier von ‚interner Semantik‘ (Kieran, 2006, S. 32). Sie „bezieht sich darauf, die innermathematischen Strukturen und die Möglichkeiten der Veränderungen, Umformungen etc. zu erkennen“ (Steinweg, 2013, S. 81).

Beim *Zeichnen der Teilprodukte* ist eine Idee der Förderung, die zwei Teilprodukte mit zwei verschiedenen Farben zu kennzeichnen. Die Unterscheidung der Teilprodukte in der Zeichnung soll so eine Strukturierung des Terms und die Identifikation der Produkte unterstützen (Abb. 8.28).

In der Fördersitzung wird zunächst passend zum ersten Teilprodukt ein Punktefeld mit entsprechender Anzahl an Zeilen und Spalten oben links in das

[3]Für die Transkripte und Analyse gilt Folgendes: Um eine bessere Lesbarkeit zu ermöglichen, werden alle Zahlen, die sich auf die Aufgabenstellung beziehen, als Ziffern geschrieben. Dies bezieht sich auch auf die Anzahlen von Punkten, Zeilen sowie Spalten im Punktefeld (z. B. R zählt 5 Punkte ab) und Angaben zu Einmaleinsreihen (z. B. die Einmaleinsreihe zu 2). Ordnungszahlen und Zusammensetzungen (z. B. erste, Fünferreihe) werden ausgeschrieben. Zeitangaben werden im Transkript als Ziffern geschrieben (z. B. 4 sec), im übrigen Text werden sie wie üblich von eins bis zwölf ausgeschrieben, ab 13 werden sie als Ziffern geschrieben. Operationszeichen (z. B. I fragt, was 5 mal 9 sei) werden ausgeschrieben, wenn es sich auf die gesprochene Sprache bezieht. Wird ein direkter Bezug zur symbolischen Form der Aufgabe hergestellt, werden die Operationszeichen als Symbol aufgeschrieben (z. B. R deutet auf $5 \cdot 9$, das Produkt $5 \cdot 9$).

Hunderterpunktefeld eingezeichnet (in Abb. 8.28 schwarz gekennzeichnet). Mit einer weiteren Farbe wird das zweite Produkt als Punktefeld direkt unter bzw. neben das Punktefeld des ersten Produktes eingezeichnet (in Abb. 8.28 rot gekennzeichnet).

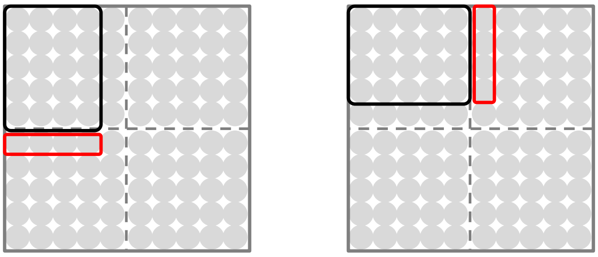


Abbildung 8.28: Intendierte Bearbeitungen im Punktefeld für $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$

Differenzen zweier Produkte werden auf ähnliche Weise jeweils im Punktefeld eingezeichnet (Abb. 8.28). Es wird das Minuendprodukt als Punktefeld mit entsprechender Anzahl an Zeilen und Spalten oben links in das Hunderterpunktefeld in einer Farbe eingezeichnet (in Abb. 8.29 schwarz gekennzeichnet). Das Subtrahendprodukt wird in das erste Punktefeld unten bzw. rechts hineingezeichnet (in Abb. 8.29 rot gekennzeichnet). Beim Einzeichnen der Teilprodukte ist bedeutend, welcher Faktor der Teilprodukte als Zeilen und welcher als Spalten eingezeichnet wird. So ist es möglich, die Distributivität deutlich zu machen und es damit zu ermöglichen, das Summen- bzw. Differenzprodukt in der Darstellung sofort ‚ablesen' zu können.

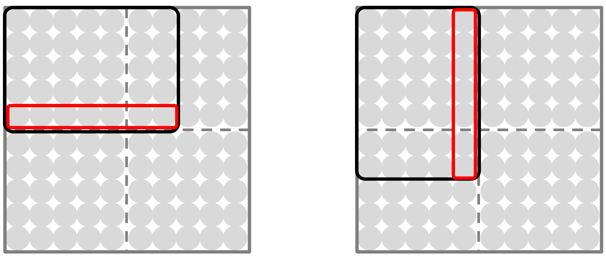


Abbildung 8.29: Intendierte Bearbeitung für $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 =$

Beim *Bestimmen des Summenproduktes* muss verstanden werden, dass dem Summenprodukt das markierte Punktefeld entspricht, das aus den Feldern der Teilprodukte besteht. Beim *Bestimmen des Differenzproduktes* muss klar werden, dass das Differenzprodukt dem Feld für das Minuendprodukt abzüglich des Feldes für das Subtrahendprodukt entspricht. Das Summen- bzw. Differenzprodukt kann somit in der Punktefelddarstellung ‚abgelesen' werden. Es soll deutlich gemacht werden, dass der linke Term (im Beispiel $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4$) dem rechten Term (im Beispiel $6 \cdot 4$) entspricht.

Bei der *Ergebnisermittlung* können die Ergebnisse der Teilprodukte zur Ergebnisfindung genutzt werden. Beim Summenprodukt können die Ergebnisse der Teilprodukte addiert werden, beim Differenzprodukt wird das Ergebnis des Subtrahendproduktes vom Ergebnis des Minuendproduktes subtrahiert. Eine weitere Möglichkeit ist es natürlich, das Summen- bzw. Differenzprodukt direkt zu berechnen.

Im ausgewählten Ausschnitt werden zunächst zwei Aufgaben bearbeitet, bei denen jeweils ein Summenprodukt in die Darstellung ‚Punktefeld' übertragen werden soll. Danach folgen zwei Aufgaben, bei denen jeweils ein Differenzprodukt in die Darstellungsform ‚Punktefeld' übersetzt werden soll. Vor dem im Folgenden analysierten Ausschnitt hat das jeweilige Kind bereits zwei Aufgaben bearbeitet, die jeweils ein Summenprodukt enthalten. Das heißt, die Art und Weise, wie Summenprodukte eingezeichnet werden sollen, ist bereits bekannt. Wie genau Differenzprodukte markiert werden sollen, ist hingegen noch nicht bekannt.

8.2.3.1 Fallbeispiel ‚Hakan'

Hakan ist während der Einzelförderung zu Beginn sieben, später acht Jahre alt und besucht eine Klasse mit 19 Schülerinnen und Schüler (13 weiblich, acht männlich) einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr der zweiten Jahrgangsstufe ca. neun Wochen lang statt. Durchgeführt werden acht individuell angepasste Sitzungen von je ca. 45 Minuten. Der im Folgenden analysierte Ausschnitt der Förderung findet in der vierten Sitzung statt und dauert ca. 14 Minuten. Insgesamt ist Hakan phasenweise intensiv bei der Sache, sehr häufig zeigt er sich jedoch unmotiviert und desinteressiert. Teilweise ist nicht klar, ob ihm die Inhalte viel zu leicht fallen oder viel zu schwer sind.

Hinweise zum Regelunterricht

Alle im Projekt teilnehmenden Lehrkräfte geben Auskunft über die Anzahl der Unterrichtsstunden und ihren Zeitpunkt, verwendete Schulbuchseiten bzw. Kopiervorlagen, Anschauungsmaterial und Unterrichtsthema bezüglich der Behandlung der Multiplikation (vgl. Kap. 6.2.3 und Kap. 6.3.3).

Laut der Auskunft der Lehrkraft hat die Behandlung der Multiplikation ca. neun Wochen lang (ca. 38 Unterrichtsstunden) stattgefunden (LD 8[4], S. 1).

---

[4] Lehrerdokumentation wird im Folgenden mit LD abgekürzt; allen teilnehmenden Klassen wurden Zahlen zugeordnet; die Lehrerdokumentationen wurden ebenfalls mit den entsprechenden Zahlen versehen.

Das verwendete Schulbuch ist ‚Fredo 2' (Balins et al., 2014a) und es wird das dazugehörige Arbeitsheft eingesetzt (Balins et al., 2014b) (LD 8, S. 1). Grundsätzlich verwendet das Schulbuch als Darstellung für Malaufgaben u. a. auch Kästchenpapier (Abb. 8.30) und unterstützt damit die Sichtweise, die Faktoren eines Produktes in Zeilen und Spalten zu sehen. Diese Deutung von Multiplikation ist auch für den ausgewählten Ausschnitt der Förderung relevant.

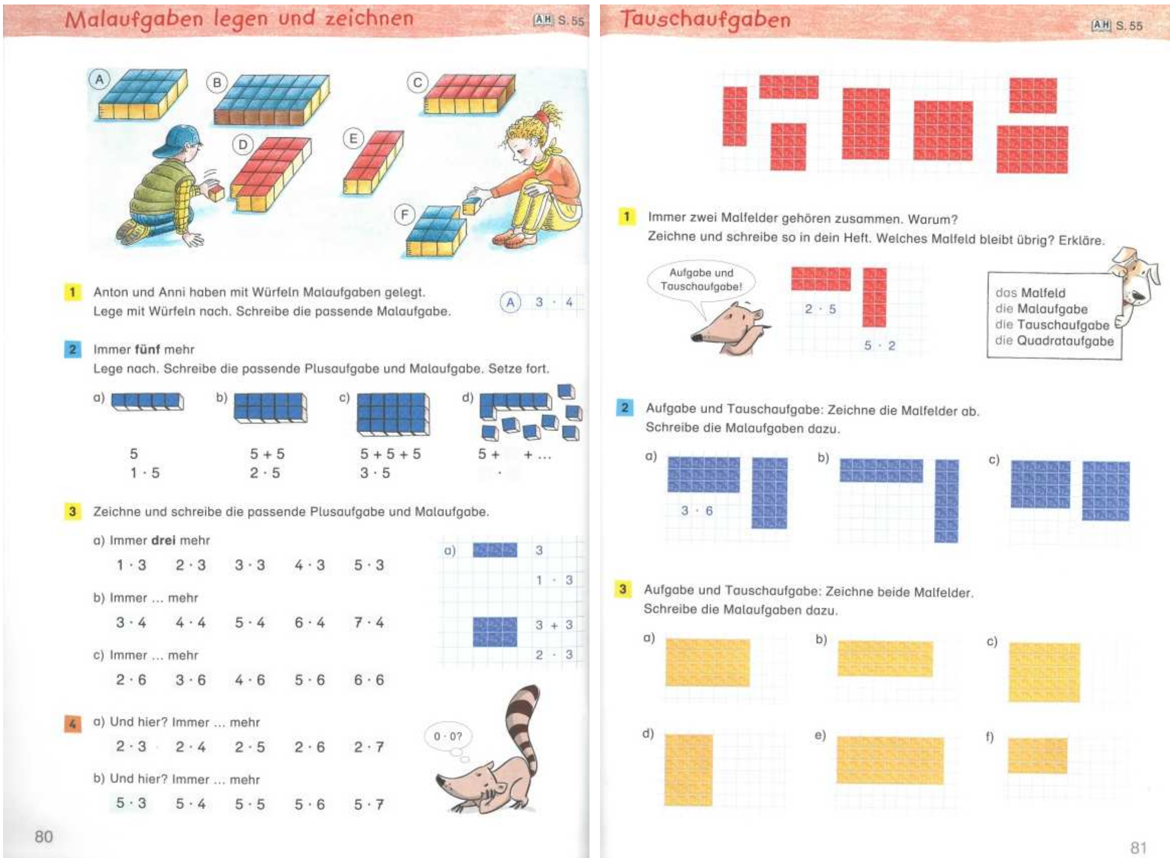


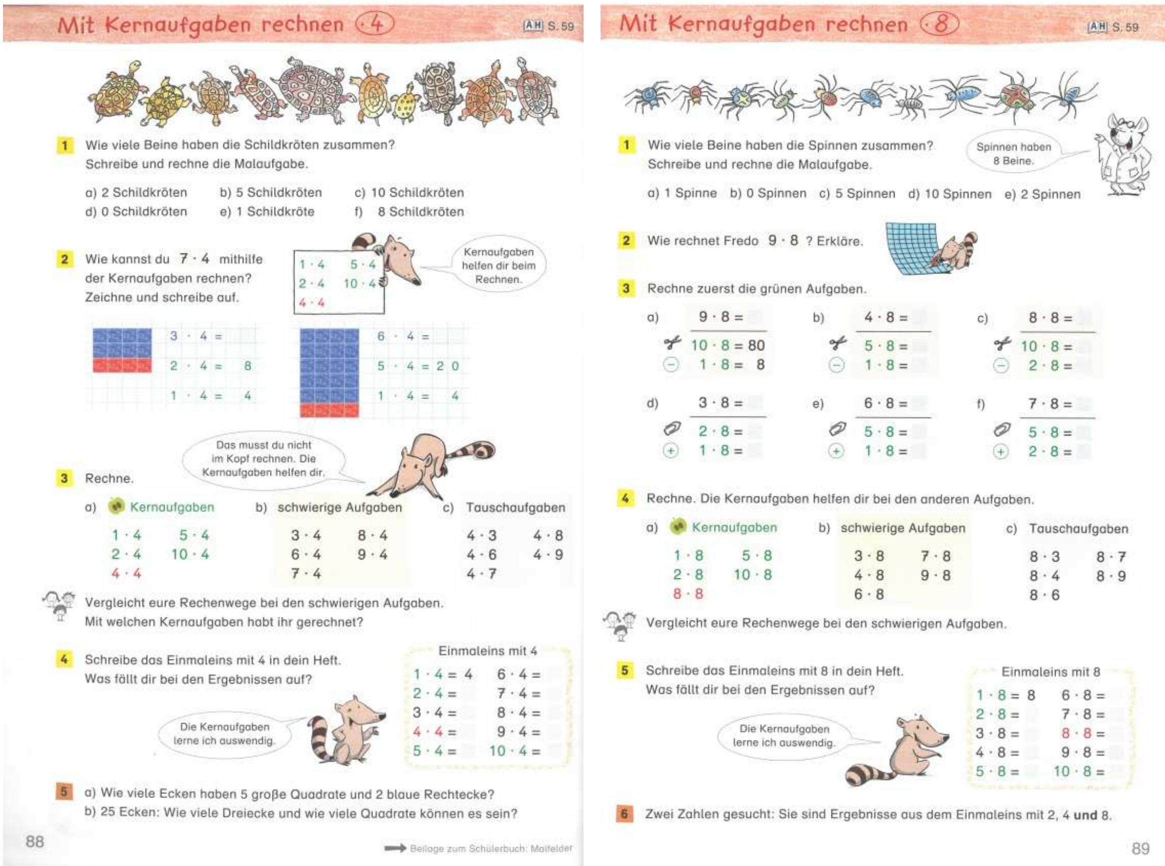
Abbildung 8.30: Schulbuchseiten aus Fredo 2 zu Multiplikationsaufgaben legen und Tauschaufgaben (Balins et al., 2014a, S. 80 f.)

Es werden von der Lehrkraft als zusätzliche Materialien im Regelunterricht Klötzchen, Plättchen, Hunderterfeld, Skala am Lineal, Dinge aus der Umwelt und Kästchen vom Rechenblock genannt (LD 8, S. 3). Mit Holzklötzchen sind vermutlich die zum Lehrwerk ‚Fredo' gehörigen Holzwürfel gemeint, deren eine Seite rot, eine Seite blau und vier Seiten naturfarben sind. Mit Plättchen meint die Lehrkraft möglicherweise die Wendeplättchen, deren eine Seite rot und die andere blau ist.

Die Lehrkraft nennt zu Beginn als Themen „Plus- und Malaufgaben" und „Malaufgaben legen und zeichnen" (ebd., S. 3). Es folgt das Thema „Tauschaufgaben" (ebd.); sie nennt dazu eine Schulbuchseite (Balins et al., 2014a, S. 80) und die Holzwürfel als Material.

Es werden Sachaufgaben und die entsprechenden Schulbuchseiten angegeben (Balins et al., 2014a, S. 82 f.), die Geschichten zu Malaufgaben enthalten. Es werden die Einmaleinsreihen zu 10, 5, 1, 2, 4, 8, 3, 6, 7, 9 und Quadrataufgaben in dieser Reihenfolge genannt (LD 8, S. 1 ff.). Bei den Reihen zu 4, 3 und 6 ist bei der ersten Erwähnung ‚Kernaufgaben' (ebd., S. 4 ff.) dazunotiert. Dies könnte darauf hindeuten, dass im Unterricht die entsprechenden Reihen zunächst mithilfe von Kernaufgaben abgeleitet wurden und dabei die Distributivität genutzt wurde. Bei 4 und 8 werden entsprechende Schulbuchseiten genannt (Balins et al., 2014a, S. 88, 89; Abb. 8.31), die die Ableitung der jeweiligen Einmaleinsreihe mithilfe der Kernaufgaben thematisieren.

Bei den Reihen zu 8 und 9 wird zunächst die Reihe als solche genannt und erst in einer späteren Unterrichtsstunde „Kernaufgaben · 8" und „· 9 Kernaufgaben" (LD 8, S. 4, 6). Die in der Übersicht genannten Seiten im Arbeitsheft (Balins et al., 2014b, S. 63, 64) zum Einmaleins mit 3, 7 und 9 thematisieren ebenfalls die Nutzung von Kernaufgaben zur Herleitung der jeweiligen Reihe. Es werden auch die Quadrataufgaben als Unterrichtsthema genannt (LD 8, S. 6). In der 9. Woche wird die Division eingeführt (ebd., S. 5).


Mit Kernaufgaben rechnen ·4 AH S. 59

1 Wie viele Beine haben die Schildkröten zusammen? Schreibe und rechne die Malaufgabe.
a) 2 Schildkröten b) 5 Schildkröten c) 10 Schildkröten
d) 0 Schildkröten e) 1 Schildkröte f) 8 Schildkröten

2 Wie kannst du 7 · 4 mithilfe der Kernaufgaben rechnen? Zeichne und schreibe auf.
1 · 4 5 · 4
2 · 4 10 · 4
4 · 4
Kernaufgaben helfen dir beim Rechnen.
3 · 4 =
2 · 4 = 8
1 · 4 = 4
6 · 4 =
5 · 4 = 20
1 · 4 = 4

3 Rechne.
Das musst du nicht im Kopf rechnen. Die Kernaufgaben helfen dir.
a) Kernaufgaben: 1 · 4, 5 · 4, 2 · 4, 10 · 4, 4 · 4
b) schwierige Aufgaben: 3 · 4, 8 · 4, 6 · 4, 9 · 4, 7 · 4
c) Tauschaufgaben: 4 · 3, 4 · 8, 4 · 6, 4 · 9, 4 · 7
Vergleicht eure Rechenwege bei den schwierigen Aufgaben. Mit welchen Kernaufgaben habt ihr gerechnet?

4 Schreibe das Einmaleins mit 4 in dein Heft. Was fällt dir bei den Ergebnissen auf?
Die Kernaufgaben lerne ich auswendig.
Einmaleins mit 4
1 · 4 = 4 6 · 4 =
2 · 4 = 7 · 4 =
3 · 4 = 8 · 4 =
4 · 4 = 9 · 4 =
5 · 4 = 10 · 4 =

5 a) Wie viele Ecken haben 5 große Quadrate und 2 blaue Rechtecke?
b) 25 Ecken: Wie viele Dreiecke und wie viele Quadrate können es sein?

88 Beilage zum Schülerbuch: Malfelder

Mit Kernaufgaben rechnen ·8 AH S. 59

1 Wie viele Beine haben die Spinnen zusammen? Schreibe und rechne die Malaufgabe.
Spinnen haben 8 Beine.
a) 1 Spinne b) 0 Spinnen c) 5 Spinnen d) 10 Spinnen e) 2 Spinnen

2 Wie rechnet Fredo 9 · 8 ? Erkläre.

3 Rechne zuerst die grünen Aufgaben.
a) 9 · 8 = ; 10 · 8 = 80 ; 1 · 8 = 8
b) 4 · 8 = ; 5 · 8 = ; 1 · 8 =
c) 8 · 8 = ; 10 · 8 = ; 2 · 8 =
d) 3 · 8 = ; 2 · 8 = ; 1 · 8 =
e) 6 · 8 = ; 5 · 8 = ; 1 · 8 =
f) 7 · 8 = ; 5 · 8 = ; 2 · 8 =

4 Rechne. Die Kernaufgaben helfen dir bei den anderen Aufgaben.
a) Kernaufgaben: 1 · 8, 5 · 8, 2 · 8, 10 · 8, 8 · 8
b) schwierige Aufgaben: 3 · 8, 7 · 8, 4 · 8, 9 · 8, 6 · 8
c) Tauschaufgaben: 8 · 3, 8 · 7, 8 · 4, 8 · 9, 8 · 6
Vergleicht eure Rechenwege bei den schwierigen Aufgaben.

5 Schreibe das Einmaleins mit 8 in dein Heft. Was fällt dir bei den Ergebnissen auf?
Die Kernaufgaben lerne ich auswendig.
Einmaleins mit 8
1 · 8 = 8 6 · 8 =
2 · 8 = 7 · 8 =
3 · 8 = 8 · 8 =
4 · 8 = 9 · 8 =
5 · 8 = 10 · 8 =

6 Zwei Zahlen gesucht: Sie sind Ergebnisse aus dem Einmaleins mit 2, 4 **und** 8.

89

Abbildung 8.31: Schulbuchseiten aus Fredo 2 zur Nutzung von Kernaufgaben (Balins et al., 2014a, S. 88 f.)

Der Lehrplan für die zweite Jahrgangsstufe sieht vor, dass zunächst lediglich die Kernaufgaben explizit als Reihen behandelt und die übrigen aufgrund der Distributivität abgeleitet werden sollen (BY, 2014, S. 276, S. 282). Da die Lehrkraft in der Auskunft über ihren Unterricht zu den Reihen zu 4, 3 und 6 in der ersten Nennung jeweils ‚Kernaufgaben' nennt, könnte es sein, dass sie zumindest zur Ableitung dieser Reihen gemäß dem Lehrplan Strategien thematisiert und Beziehungen zwischen den Reihen herstellt. Sie nennt jedoch an keiner Stelle explizit (Ableitungs-) Strategien als Thema. Zudem behandelt sie entgegen dem Lehrplan alle Reihen bereits in der zweiten Klasse.

Bearbeitung in BIRTE 2

In der Gesamtauswertung von BIRTE 2 wird ein Überblick über die Leistungen des jeweiligen Kindes gegeben. Dies geschieht im Vergleich zur Normierungsstichprobe (N = 2078) (Schipper, et al., 2011, S. 68, 94). Es wird die Anzahl der jeweils richtigen Lösungen in den verschiedenen Modulen mit der Normierungsstichprobe verglichen und diese entsprechend den Ausprägungen deutlich unterdurchschnittlich, unterdurchschnittlich, durchschnittlich, überdurchschnittlich, deutlich überdurchschnittlich zugeordnet (ebd., S. 69). Zusätzlich wird die Bearbeitungszeit bei der jeweiligen Aufgabe erfasst. Der daraus errechnete Mittelwert des Arbeitstempos eines Kindes wird mit der Normierungsstichprobe verglichen und folgenden Ausprägungen zugeordnet: besonders niedrig, niedrig, durchschnittlich, hoch und besonders hoch (ebd., S. 71).

In der jeweiligen Beschreibung der Bearbeitung in BIRTE 2 wird zunächst das Gesamtergebnis genannt. Es werden anschließend die Module gelistet und beschrieben, in denen das Kind

- keinen besonderen Förderbedarf sowie
- besonderen Förderbedarf

zeigt.

Dabei werden die Module jeweils zusätzlich in

- bezogen auf die Förderung von Multiplikativem Verständnis und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevante Inhalte und
- bezogen auf die Förderung von Multiplikativem Verständnis und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevante Inhalte

eingeteilt.

In seiner Bearbeitung in BIRTE 2 zeigt Hakan eine „deutlich unterdurchschnittliche Leistung“ (A-Gesamt Hakan[5], S. 1), seine „Arbeitsgeschwindigkeit ist durchschnittlich“ (ebd.).

Grundsätzlich werden Bearbeitungen in Modulen als nicht auffällig angesehen, wenn mindestens eine bestimmte Anzahl an Aufgaben richtig gelöst wurde. Dennoch können in mehreren Aufgaben Fehler auftreten, weswegen hier jeweils unter der Listung der nicht auffälligen Module zusätzlich noch eine detaillierte Analyse der Bearbeitungen angeführt wird. In folgenden Modulen zeigt Hakan *keinen besonderen Förderbedarf*:

- Zahlzerlegungen (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Hakan zerlegt die Zahlen 8, 9, 10 und 20 passend (A-Basis Hakan, S. 2) und von zwölf Subtraktionsaufgaben löst er drei richtig (A-Rechnen Hakan, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Größen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Er schätzt Preise und Längen von Gegenständen bei zwei von sechs Aufgaben richtig (A-Grundvorstellung Hakan, S. 1). Zu acht Textaufgaben wählt er dreimal die passende Operation und er löst von sieben Rechengeschichten drei korrekt (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

In folgenden Modulen zeigt er *besonderen Förderbedarf* (A-Gesamt Hakan, S. 1):

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Einordnen zweistelliger Zahlen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- schnelle Zahlenauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)

[5] Für die Auswertungsseiten von BIRTE 2 gelten im weiteren Text folgende Abkürzungen: A-Gesamt Name = Auswertung-Gesamttest; A-Orientierung Name = Auswertung-Orientierung im Zahlenraum Name; A-Basis Name = Auswertung-Basiskompetenzen Name; A-Rechnen Name = Auswertung-Rechnen Name; A-Grundvor-stellung Name = Auswertung-Grund- und Größenvorstellungen Name

Hakan findet zu einer Folge rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen meist nicht die passende Zahl und er ordnet Zahlen häufig nicht der Größe nach (A-Orientierung Hakan, S. 1). In strukturierten Arbeitsmitteln wie Würfelbildern, Zwanziger- und Hunderterfeld hat er Schwierigkeiten, Anzahlen quasi-simultan zu erfassen (A-Basis Hakan, S. 1). Er ordnet Zahlen auf dem Zwanziger- und Hunderterfeld nicht passend zu (ebd., S. 2). Verdoppelungsaufgaben bis 20 löst er passend, Verdoppelungsaufgaben bis 100 und Halbierungsaufgaben bis 20 und 100 kaum (ebd.). Alle Additionsaufgaben löst er nicht korrekt (A-Rechnen Hakan, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)

Zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich findet er kaum eine passende Zahl (A-Orientierung Hakan, S. 1). Tausch- und Umkehraufgaben bearbeitet er nicht passend, Analogieaufgaben häufig falsch (A-Rechnen Hakan, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Hakan in mehreren Modulen Förderbedarf zeigt, die für die ausgewählte Fördereinheit bedeutsam sind. Dadurch können in der Förderung zum Multiplikativen Verständnis zusätzliche Schwierigkeiten auftreten.

Bearbeitungen im Pre-, Post und Follow-up-Test

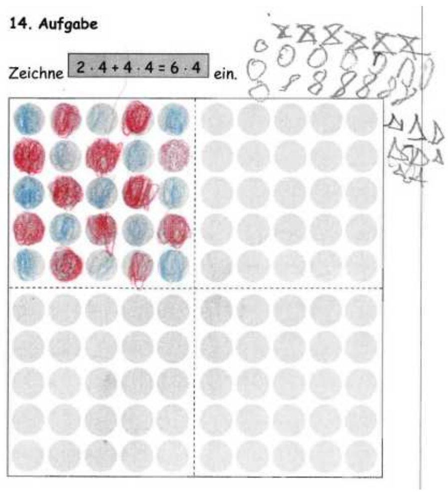


Abbildung 8.32: Hakans Bearbeitung im Pre-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

In Hakans Bearbeitung im Pre-Test ist kein Bezug zur Aufgabenstellung erkennbar (Abb. 8.32). Fasst man seine Markierung als Produkt auf, könnte sie als $5 \cdot 5$ interpretiert werden, was in der Aufgabenstellung nicht vorkommt. Die unterschiedliche Farbgebung innerhalb der Markierung scheint keine weitere Bedeutung bezüglich der Aufgabenstellung zu haben. Die zwei Farben blau und rot werden lediglich schachbrettmusterartig auf dem Feld eingesetzt.

In Hakans Bearbeitung im Post-Test sind sowohl die Teilprodukte als auch das Summenprodukt in der gleichen Farbe eingezeichnet (Abb. 8.33). Zudem wird die Gleichheit von linkem und rechtem Term deutlich, da die Felder für die Teilprodukte direkt untereinander eingezeichnet wurden und somit die Felder der Teilprodukte zusammen dem Summenprodukt entsprechen. Bis auf den Einsatz unterschiedlicher Farben hat er die Aufgabe so bearbeitet, wie es in der Fördersitzung intendiert wurde.

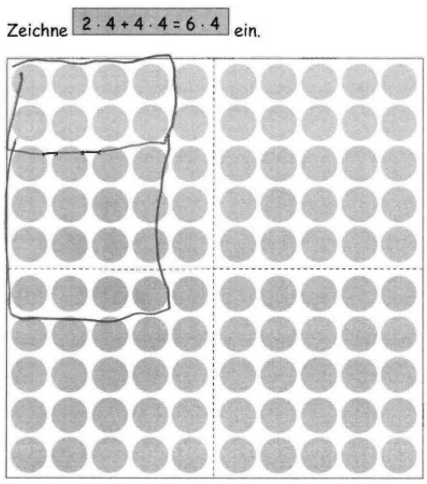


Abbildung 8.33: Hakans Bearbeitung im Post-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Im Follow-up-Test hat Hakan in den ersten 4 Zeilen je 6 Punkte markiert (Abb. 8.34). Dies kann als das Produkt $6 \cdot 4$ interpretiert werden. Bei dieser Bearbeitung hat er, im Unterschied zum Post-Test, den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen interpretiert. Diese Sichtweise zeigt er auch schon häufig in den Fördersitzungen. Die Teilprodukte sind in seiner Bearbeitung allerdings nicht erkennbar, sodass die Aufgabe in symbolischer Form nicht vollständig in die Punktefelddarstellung übertragen wurde.

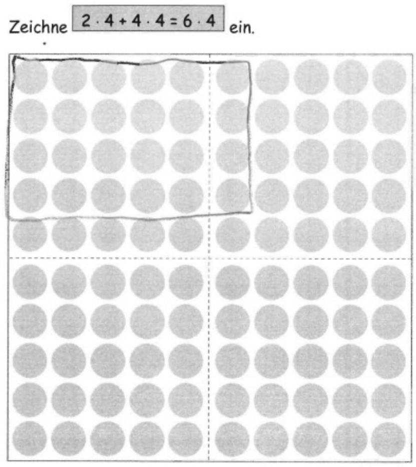


Abbildung 8.34: Hakans Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

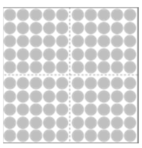
Im Vergleich zum Pre-Test, in dem kein Bezug zur Aufgabenstellung erkennbar ist, sind im Post- und Follow-up-Test erhebliche Lernfortschritte zu verzeichnen. Im Post-Test zeigt Hakan eine passende Bearbeitung. Im Follow-up-Test wird deutlich, dass er zumindest hier noch das Summenprodukt in die Punktefelddarstellung übertragen kann.

Fördersitzung – Teil I

In der Födereinheit bearbeitet Hakan zwei Aufgaben zu Summenprodukten, die hier zum Vergleich nebeneinander angegeben werden. Die Nummerierung der Sprechbeiträge (SB) gibt die Chronologie wieder.

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

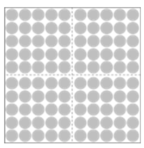
$5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$



1	I	Wenn du dich vielleicht erinnerst, wir haben das letzte Mal schon angefangen mit der Aufgabe. [*I legt das Arbeitsblatt, einen Blei- und einen roten Buntstift vor HA*]
2	HA	Mhm (bejahend).
3	I	Da machen wir jetzt noch einmal weiter. [*I zeigt mit dem Stift auf die Aufgabe $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4$*] Da sollte man immer dieses 5 mal 4 [*I zeigt mit dem Stift auf $5 \cdot 4$*] plus 1 mal 4 [*I zeigt mit*

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$



28	I	Darfst du hier jetzt auch noch einmal ausprobieren. [*I deutet mit dem Stift Richtung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9$*]
29	HA	Mhm (eher bejahend). [*HA legt den Bleistift beiseite*]
30	I	2 mal 9 plus 5 mal 9.
31	HA	[*HA nimmt den roten Buntstift zur Hand*]
32	I	Kannst auch wieder mit dem Grauen anfangen. [*I schüttelt den Kopf*]

		dem Stift auf 1 · 4] hier einzeichnen [*I zeigt mit dem Stift auf das Punktefeld*] und dann hier das Ergebnis [*I deutet mit dem Stift hinter die Aufgabe*] noch einmal eine Malaufgabe finden.
4	HA	[*HA nimmt den Buntstift zur Hand*]
5	I	Erinnerst du dich? Also hier 5 mal 7. [*I zeigt mit dem Stift bei der vorherigen, bereits bearbeiteten Aufgabe auf dem Arbeitsblatt erst auf 5, dann auf 7*] 5 mal 7 war das Graue hier oben. [*I fährt mit dem Stift die graue Umrahmung nach*] 1 mal 7 was das hier. [*I fährt mit dem Stift die Umrahmung nach*] Und das ist dann insgesamt 6 mal 7. [*I umkreist mit dem Stift 6 · 7*] Das probieren wir jetzt noch einmal aus. Also fangen wir erst einmal mit dem Grauen an. [*I legt den Bleistift vor HA*]
6	HA	[*HA legt den Buntstift weg und nimmt den Bleistift zur Hand*]
7	I	Erst einmal nur dieses 5 mal 4. [*I deutet mit dem Stift auf 5 · 4*]
8	HA	(9 sec) [*HA beginnt oberhalb der ersten Zeile von links beginnend bis zum fünften Punkt eine Linie zu zeichnen*]
9	I	Warte einmal. Mach einmal nach unten diese 5. [*I fährt mit dem Stift die ersten 5 Punkte der ersten Spalte ab*]
10	HA	[*HA zeichnet eine Linie vor der ersten Spalte bis zum fünften Punkt*]
11	I	Mhm (bejahend).
12	HA	[*HA umrahmt in 5 Zeilen je 4 Punkte vollständig*]
13	I	Mhm (bejahend).
14	HA	[*HA nimmt den roten Buntstift zur Hand*] (Und jetzt dann ...) (unv.) [*HA deutet mit dem Buntstift Richtung 1 · 4*]
15	I	Genau.
16	HA	[*HA umrahmt mit dem roten Buntstift*

33	HA	[*HA nimmt den Bleistift zur Hand*] (11 sec) [*HA umrahmt mit Bleistift in 5 Spalten je 7 Punkte*] (13 sec) (Scheiße?) (unv.) das ist falsch. (Ich habe es gewusst?). [*HA setzt hinter der fünften Spalte noch einmal an*]
34	I	Warte einmal, warte einmal, warte einmal. [*I steht auf und läuft aus dem Bild, im Hintergrund hört man es rascheln und ihre Schritte, I kommt zurück ins Bild und legt einen Radiergummi vor HA*]
35	HA	[*HA nimmt den Radiergummi zur Hand und entfernt damit die falsche Umrahmung, dann nimmt er wieder den Bleistift zur Hand*]
36	I	[*I setzt sich wieder hin*]
37	HA	[*HA beginnt, 8 Punkte in der ersten Zeile zu umrahmen*]
38	I	Warte einmal.
39	HA	[*HA hält inne und setzt den Bleistift ab*]
40	I	Schau noch einmal.
41	HA	Ah. [*HA erweitert seine Umrahmung um einen Punkt*]
42	I	Mhm (bejahend).
43	HA	[*HA vervollständigt seine Umrahmung zu 2 Zeilen mit je 9 Punkten*]
44	I	Super.
45	HA	[*HA nimmt den roten Buntstift zur Hand und umrahmt damit in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte*]

		in einer weiteren Zeile 4 Punkte und legt den Stift beiseite]
17	I	Super.

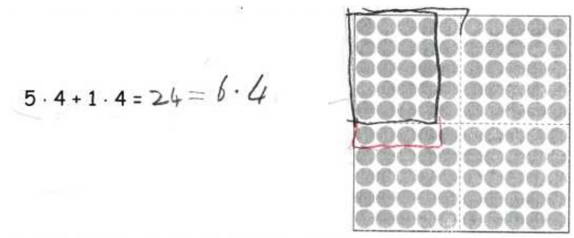
18	HA	(5 sec) Ist gleich/ (5 sec) [*HA nimmt den Bleistift zur Hand*] 24. [*HA schreibt 24 hinter =*]
19	I	Ehm, ja.

19	I	Und wie kann man da jetzt noch eine Malaufgabe finden, zu dem Ganzen? [*I zeigt mit dem Stift erst auf die Aufgabe, fährt dann entlang der ersten Spalte im Punktefeld bis zum einschließlich sechsten Punkt*] Du darfst hier/ Man kann hier einfach noch einmal ein Istgleich machen. [*I schreibt = hinter 24*] Wie viel ist das hier? [*I fährt im Punktefeld mit dem Stift entlang der ersten Spalte bis zum einschließlich sechsten Punkt und entlang der sechsten Zeile bis zum einschließlich vierten Punkt*]
20	HA	4?
21	I	Also was ist das für eine Malaufgabe? Nach unten sind es wie viele? [*I fährt mit dem Stift die 6 umrahmten Punkte der ersten Spalte entlang*]
22	HA	6.
23	I	Mhm (bejahend). Mal? [*I deutet mit dem Stift die 4 Punkte der sechsten Zeile entlang*]
24	HA	4?

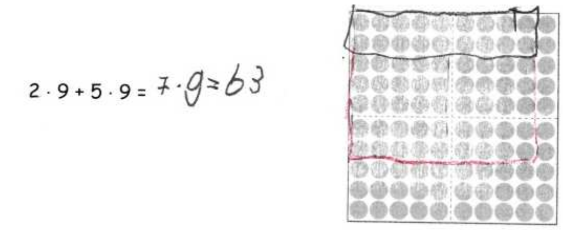
45	HA	Ist gleich? Ehm/
46	I	Jetzt überleg einmal, welche Malaufgabe da jetzt herauskommt. [*I sucht etwas in ihren Unterlagen, während HA überlegt*]
47	HA	(9 sec) 7 mal 9?
48	I	Mhm (bejahend). Super. Darfst du auch noch einmal mit dazuschreiben.
49	HA	[*HA nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 7 · 9 hinter =*]
50	I	Perfekt.

50	I	Und weißt du das Ergebnis auch?
51	HA	Nein.
52	I	Weißt du, was 2 mal 9 ist? [*I zeigt mit dem Stift auf 2 · 9*]
53	HA	Ehm, 27?
54	I	2 mal 9?
55	HA	18.
56	I	[*I nickt*] 5 mal 9, weißt du das auch? [*I deutet mit dem Stift auf 5 · 9*]
57	HA	Ehm, nein.
58	I	(5 sec) Mhm (nachdenklich). [*I legt ihren Stift auf das Punktefeld*] Was ist/
59	HA	#54. 45. [*HA schüttelt den Kopf*]
60	I	45. Genau. [*I nimmt den Stift wieder zur Hand*] Also 18 [*I zeigt mit dem Stift auf 2 · 9*] plus? [*I zeigt mit dem Stift auf 5 · 9*] 45.
61	HA	[*HA hält die Hände unter dem Tisch]* (30 sec) 63?
62	I	Mhm (bejahend). Super.

25	I	Ja. [*I nickt*] Super. Das darfst du dann auch noch einmal hinschreiben.
26	HA	[*HA schreibt 6 · 4 hinter =*]
27	I	Genau. Also das Ganze ist jetzt 6 mal 4. [*I deutet Richtung Punktefeld*] Also hier 5 mal 4 [*I umkreist mit dem Stift 5 · 4*] und 1 mal 4 [*I umkreist mit dem Stift 1 · 4*] ist 6 mal 4. [*I umkreist mit dem Stift 6 · 4*]



63	HA	[*HA nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt = 63 hinter 7 · 9*]
64	I	Mhm (bejahend). Gut. [*I nimmt das Arbeitsblatt weg*]



Analyse

Bei der Aufgabenstellung 5 · 4 + 1 · 4 = knüpft die Interviewerin an die vorausgegangene Sitzung an, in der die Vorgehensweise bei Summenprodukten besprochen wurde, um dies wieder in Hakans Gedächtnis zu rufen (SB 1). Sie sagt, dass 5 mal 4 plus 1 mal 4 eingezeichnet und dann eine Malaufgabe im Ergebnis gefunden werden müsse (SB 3). Hakan nimmt einen Buntstift zur Hand, beginnt jedoch noch nicht mit der Bearbeitung (SB 4). Deswegen nennt die Interviewerin nun die Aufgabenstellung 5 · 7 + 1 · 7 aus der vorangegangenen Sitzung und zeigt, dass das Produkt 5 · 7 grau und das Produkt 1 · 7 rot eingezeichnet wurde (SB 5). Sie bittet Hakan mit dem Bleistift zu beginnen und legt ihn ihm hin (SB 5). Hakan nimmt den Bleistift und die Interviewerin weist darauf hin, zunächst 5 mal 4 einzuzeichnen, wobei sie 4 betont (SB 7). Der Hinweis auf die Vorgehensweise bei der vorangegangenen Aufgabe scheint Hakan zu helfen. Nach neun Sekunden zeichnet er oberhalb der ersten Zeile eine Linie bis zum fünften Punkt (SB 8). Die Interviewerin sagt, dass Hakan 5 Zeilen einzeichnen soll und fährt mit dem Stift die ersten 5 Punkte der ersten Spalte entlang (SB 9). Es wäre natürlich ebenfalls möglich, 5 Spalten einzuzeichnen. Um weiteren Verwirrungen vorzubeugen, entscheidet sich die Interviewerin an dieser Stelle aber dafür, Hakans bisherige Sichtweise (wie in den ersten beiden bearbeiteten Summenprodukten) beizubehalten, den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten als Spalten zu sehen. Hakan zeichnet eine Linie vor der ersten Spalte bis zum fünften Punkt (SB 10) und die Interviewerin bestätigt ihn (SB 11). Hakan vervollständigt seine Markierung, sodass in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte markiert sind (SB 12) und die Interviewerin stimmt zu (SB 13). Hakan weiß offenbar, wie Produkte in Punktefelder übertragen werden können. Hakan spricht nun unverständlich, möglicherweise nennt er das zweite Teilprodukt $1 \cdot 4$ sowie zeigt darauf (SB 14), die Interviewerin bestätigt ihn (SB 15). Hakan markiert mit Buntstift eine weitere Zeile direkt unter der ersten Markierung mit 4 Punkten (SB 16) und die Interviewerin stimmt nochmals zu (SB 17). Mithilfe des Beispiels aus der vorangegangenen Sitzung markiert Hakan das Summenprodukt mit zwei verschiedenen Farben passend im Punktefeld.

Er überlegt insgesamt zehn Sekunden, wobei er währenddessen auf die Aufgabenstellung in symbolischer Form sieht (SB 18). Er nennt das passende Endergebnis 24 und schreibt es hinter das Gleichheitszeichen (SB 18). Die Interviewerin stimmt zu (SB 19). Es bleibt unklar, wie er das Ergebnis berechnet. Möglich ist, dass er die Ergebnisse der Teilprodukte ermittelt und diese addiert. Auch denkbar ist, dass er die Aufgabe $6 \cdot 4$ mithilfe einer anderen Strategie ermittelt. Sowohl das Einmaleins mit 4 als auch mit 6 wurde laut Auskunft Hakans Lehrkraft über ihren Unterricht zum Zeitpunkt der Fördersitzung bereits in Unterricht behandelt (LD 8, S. 5).

Die Interviewerin fragt nun nach dem Summenprodukt, schreibt ein weiteres Gleichheitszeichen hinter 24 und fährt mit dem Stift entlang der ersten Spalte bis zum sechsten Punkt und entlang der sechsten Zeile bis zum vierten Punkt (SB 19). Hakan nennt fragend 4 (SB 20). Er bezieht sich dabei auf die Anzahl der Spalten. Die Interviewerin will vermutlich die Einheitlichkeit auch in der symbolischen Schreibweise beibehalten, bei der in den Teilprodukten als erster Faktor jeweils der zu addierende Faktor genannt wird. Sie fragt nochmals nach dem Summenprodukt und der Anzahl der markierten Zeilen (SB 21). Hakan nennt 6 (SB 22) und die Interviewerin bestätigt ihn (SB 23). Sie fragt nach dem zweiten Faktor und deutet auf die 4 markierten Punkte entlang der sechsten Zeile (SB 23). Hakan nennt fragend 4 (SB 24), die Interviewerin stimmt zu und bittet ihn, es zu notieren (SB 25). Hakan notiert $6 \cdot 4$ hinter das Gleichheitszeichen (SB 26). Mit Hilfestellungen kann Hakan das Summenprodukt in der Darstellung ‚ablesen' und sieht, dass dem Summenprodukt die beiden markierten Punktefelder zusammen entsprechen. Ob er die Punkte für die Anzahl der Zeilen und Spalten zählt oder die Strukturierung nutzt, wird nicht deutlich. Um dies auch nochmals in der symbolischen Form deutlich zu machen, sagt die Interviewerin, dass 5 mal 4 und 1 mal 4 6 mal 4 sei und umkreist dabei jeweils die Teilprodukte und das Summenprodukt in der symbolischen Schreibweise (SB 27).

Bei der Aufgabenstellung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ zeigt die Interviewerin auf die Aufgabe (SB 28) und nennt diese (SB 30). Die Interviewerin sagt, dass Hakan wieder mit dem Bleistift beginnen kann (SB 32). Hakan nimmt den Bleistift und markiert nach elf Sekunden in den ersten 5 Spalten je 7 Punkte (SB 33). Vielleicht wollte er zuerst das zweite Teilprodukt $5 \cdot 9$ einzeichnen und hat sich beim zweiten Faktor verzählt. Er sagt, dass es falsch sei und setzt nach der fünften Spalte nochmals an (SB 33). Die Interviewerin bittet ihn zu warten und gibt ihm einen Radiergummi (SB 34). Hakan entfernt damit seine bisher gemachte Markierung (SB 35) und zeichnet eine Linie oberhalb der ersten Zeile und eine Linie nach dem achten Punkt (SB 37). Die Interviewerin unterbricht ihn und bittet ihn nochmals nachzusehen (SB 38, 39). Hakan setzt den Stift ab und zeichnet die Linie weiter bis zum neunten Punkt der ersten Zeile (SB 41). Er vervollständigt die Markierung so, dass in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte markiert sind (SB 43) und die Interviewerin bestätigt ihn (SB 42, 44). Hakan markiert selbstständig unter der ersten Markierung mit Buntstift in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte (SB 45). Abgesehen davon, dass er sich beim Faktor 9 des ersten Teilproduktes um einen Punkt verzählt, zeichnet er die Teilprodukte selbstständig passend untereinander unter Verwendung verschiedener Farben ein. Er zeigt damit, dass er Produkte im Punktefeld sehen und er Summenprodukte in die Darstellung des Punktefeldes übertragen kann. Er scheint Verständnis entwickelt zu haben.

Hakan nennt das Gleichheitszeichen (SB 45) und macht damit den Eindruck, dass er sofort das Endergebnis berechnen will. Deshalb fragt die Interviewerin nach dem Summenprodukt (SB 46). Nach neun Sekunden nennt Hakan fragend $7 \cdot 9$ (SB 47). Hakan sieht dabei auf das Arbeitsblatt, es wird jedoch nicht ersichtlich, ob er das Summenprodukt mithilfe der Punktefelddarstellung oder der symbolischen Form der Aufgaben ermittelt. Die Interviewerin bestätigt ihn sowie bittet ihn es aufzuschreiben (SB 48); Hakan notiert es (SB 49).

Die Interviewerin fragt, ob Hakan das Endergebnis wüsste (SB 50) und Hakan verneint (SB 51). Von sich aus weiß Hakan offenbar nicht, dass das Endergebnis durch Addition der Ergebnisse der Teilprodukte ermittelt werden kann. Die Interviewerin fragt ihn nach dem Ergebnis zu $2 \cdot 9$ und zeigt auf das Produkt (SB 52). Hakan nennt fragend 27 (SB 53) und die Interviewerin fragt nochmals nach dem Ergebnis zu $2 \cdot 9$ (SB 54). Hakan nennt nun 18 (SB 55), die Interviewerin nickt, fragt nach dem Ergebnis zu $5 \cdot 9$ und zeigt auf das Produkt (SB 56). Hakan verneint (SB 57). Nach fünf Sekunden beginnt die Interviewerin weiter nachzufragen und Hakan nennt zunächst 54 und dann 45 (SB 59). Die Interviewerin stimmt zu und fragt nach dem Ergebnis zu 18 plus 45 (SB 60). Hakan hält die Hände unter dem Tisch und sagt nach 30 Sekunden fragend 63 (SB 61). Die Interviewerin stimmt zu und Hakan notiert $= 63$ hinter $7 \cdot 9$ (SB 63). Die Interviewerin bestätigt ihn (SB 64). Die Ergebnisermittlung erfolgt sehr angeleitet, so dass nicht klar wird, ob Hakan die einzelnen Schritte auch versteht oder er diese lediglich entsprechend den Hinweisen ausführt.

Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

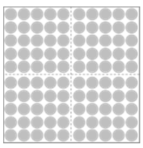
Beim Vergleich der Aufgabenstellungen ist festzustellen, dass Hakan bei der ersten Aufgabe die Ergebnisermittlung vor der Bestimmung des Summenproduktes durchführt. Zusammenfassend ist zu erkennen, dass Hakan das Einzeichnen eines Summenproduktes zunehmend selbstständig gelingt. Die Faktoren des Summenproduktes ermittelt er bei der zweiten Aufgabenstellung bereits ohne weitere Hilfestellung. Bei der ersten Aufgabenstellung erfolgt dies mithilfe der Punktefelddarstellung, bei der zweiten Aufgabenstellung wird nicht ersichtlich, ob er die Punktefelddarstellung oder die symbolische Form der Aufgabe nutzt. Die Ergebnisermittlung erfolgt bei der ersten Aufgabenstellung recht schnell, da er offenbar das Ergebnis des Summenproduktes auswendig kennt, bei der zweiten Aufgabenstellung wird das Ergebnis sehr angeleitet durch Nutzung der Ergebnisse der Teilprodukte gefunden. Die Übersetzung von der symbolischen Form in die Darstellung erfolgt immer selbstständiger, sodass davon ausgegangen werden kann, dass zunehmend Verständnis entwickelt wurde.

Fördersitzung – Teil II

Im folgenden Transkriptausschnitt der Fördereinheit bearbeitet Hakan zwei Aufgaben zu Differenzprodukten, die hier zum Vergleich nebeneinander angegeben werden. Die Nummerierung der Sprechbeiträge gibt wieder die Chronologie wieder.

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

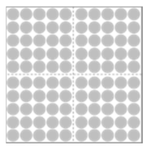
5 · 7 – 1 · 7 = __ · 7 = __



65	I	Und, jetzt haben wir noch eines, wo es mit minus noch ist. [*I legt das Arbeitsblatt vor HA*]
66	HA	[*HA gähnt*]
67	I	[*I schiebt das Blatt noch näher zu HA*] Also. 5 mal 7 minus 1 mal 7. [*I fährt mit dem Stift die Aufgabe entlang*] Wie kann man das einzeichnen? [*I deutet Richtung Punktefeld*] Als Erstes haben wir dieses 5 mal 7. [*I deutet von 5 · 7 auf das Punktefeld*]
68	HA	[*HA umrahmt mit Bleistift in den ers-*

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

10 · 8 – 1 · 8 = __ · __ = __



154	I	Guck einmal die nächste an. [*I tippt auf 10 · 8 – 1 · 8*] 10 mal 8 minus 1 mal 8.
155	HA	5?
156	I	Also erst einmal einzeichnen. [*I deutet auf das Punktefeld*] 10 mal 8?
157	HA	[*HA umrahmt mit Bleistift in den 10 Spalten je 8 Punkte*] Ich glaube, ich habe 10 mal 8. [*HA nickt*]
158	I	Genau. 10 mal 8. Und jetzt kommen 1 mal 8 weg.

		ten 5 Spalten je 7 Punkte] (So?) (unv.). [*HA nimmt den roten Buntstift zur Hand und setzt oberhalb der siebten Zeile an*]
69	I	Warte einmal. Was willst du jetzt machen?
70	HA	Minus 1 mal 7.
71	I	Und wie machst du das? Sag mir das einmal.
72	HA	Die da weg. [*HA fährt mit dem Buntstift über die 5 Punkte der siebten Zeile*]
73	I	Sind das 1 mal 7?
74	HA	Ehm, nein? Ja.
75	I	Wo ist da 1 mal 7?
76	HA	[*HA zählt mit dem Buntstift die umrahmten Punkte der siebten Zeile*] Nein, 5.
77	I	Es sind nur 5. Gibt es eine andere Möglichkeit?
78	HA	[*HA nimmt den Bleistift zur Hand*] Die 2 auch? [*HA umkreist in der Luft weitere 2 Punkte der siebten Zeile*]
79	I	Na, die sind doch gar nicht darin. [*I lacht*] Die gehören ja gar nicht zu den 5 mal 7 dazu. [*I deutet mit dem Stift auf die umrahmten Punkte*]
80	HA	(5 sec) [*HA nimmt wieder den Buntstift zur Hand*] Dann noch 1 mal 7 dahin tun? [*HA deutet mit dem Buntstift eine Umrahmung unter dem bereits Eingezeichneten an*]
81	I	Nein, das geht doch nicht, weil wir haben ja 5 mal 7. [*I tippt mit dem Stift auf $5 \cdot 7$*] (7 sec) Siehst du da irgendwo 1 mal 7 ganz schön? In einer Reihe?
82	HA	Ja.
83	I	Ja?

159	HA	[*HA nimmt den roten Buntstift zur Hand und beginnt hinter der neunten Spalte einen Strich zu zeichnen*]
160	I	Warte, warte, warte.
161	HA	[*HA unterbricht seine Handlung*]
162	I	Genau. Mhm (bejahend).
163	HA	[*HA vollendet die Linie nach der neunten Spalte mit Buntstift*]
164	I	Super.

84	HA	So. [*HA zeigt mit dem Stift auf die ersten 7 Punkte der ersten Spalte*]
85	I	Ah. Kannst es jetzt gerne auch so herum hinzeichnen. Würde ich die hinten da nehmen. [*I fährt mit dem Finger in der fünften Spalte 7 Punkte auf und ab*] Was du jetzt diese eine Reihe/ 1 mal 7 machst du jetzt rot.
86	HA	[*HA zeichnet mit dem roten Buntstift einen Strich, 7 Punkte lang, zwischen der vierten und fünften Spalte*]
87	I	Mhm (bejahend). Du willst das immer so herum machen, ne? [*I deutet mit dem Finger Richtung Punktefeld*] Du willst immer/ Ehm. Wenn man/ Wenn da 5 mal 7 steht [*I zeigt mit dem Finger auf 5 · 7*], dann willst du ja immer hier 5 [*I fährt mit dem Finger die ersten 5 Punkte der ersten Zeile entlang*] und da 7? [*I fährt mit dem Finger die ersten 7 Punkte der ersten Spalte entlang*]
88	HA	[*HA nickt*]
89	I	Ja?
90	HA	Ja.
91	I	Genau. Dann musst du es jetzt aber auch so herum machen, damit man dann das 1 mal 7 hat.
92	HA	[*HA berührt mit dem Buntstift den roten Strich*]
93	I	Genau.

93	I	Und welche Malaufgabe kommt jetzt heraus? [*I zeigt auf die Aufgabe*] Was bleibt übrig? Du hast jetzt diese eine Siebenerreihe hast du ja jetzt weg gemacht. [*I legt den Finger über die rot umrahmten Punkte*]
94	HA	#6 mal 5 mal 4. 4 mal 4?
95	I	4 mal 4? Nein.

164	I	Was bleibt jetzt übrig?
165	HA	9 mal 8?
166	I	Mhm (bejahend). Sehr gut.
167	HA	[*HA nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 9 · in die erste Lücke*]
168	I	Warte. Das Malzeichen ist doch schon da. Da ist das Malzeichen und

96	HA	1, 2, 3, 4. [*HA zählt mit dem Buntstift die übrigen grau umrahmten Punkte der ersten Zeile*]
97	I	4.
98	HA	1s, 2, 3/ (wird immer leiser) [*HA zählt mit dem Buntstift die grau umrahmten Punkte der ersten Spalte*]
99	I	#Mal?
100	HA	4 mal 7.
101	I	Ja. Das kann man hinschreiben. Das/ Die 7/ Die mal 7 steht ja schon da. 4.
102	HA	[*HA nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 4 · in die erste Lücke*]
103	I	Stopp, stopp, stopp, stopp. Stopp. Schau einmal, das steht schon da. [*I deutet auf · 7*] 4 mal 7 steht schon da. Du brauchst nur noch die 4 hinschreiben. Siehst du das?
104	HA	Ehm, ja.
105	I	Ja? Gut. Warte, machen wir das noch einmal weg. [*I radiert die Lücke bis auf die 4 aus*] Dass man nicht denkt, dass das ein Geteilt-durch-Zeichen ist.

		jetzt kommt noch eine 8 hin.
169	HA	[*HA schreibt 8 in die zweite Lücke*]
170	I	Mhm (bejahend).

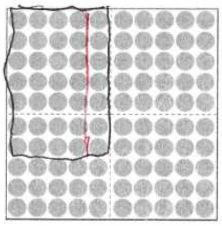
105	I	Und was kommt da heraus? Weißt du was 4 mal 7 ist?
106	HA	Ehm, nein.
107	I	Nicht?
108	HA	Nicht. [*HA spielt mit den Stiften*]
109	I	Weißt du, was 5 mal 7 ist?
110	HA	Ja.
111	I	Was ist das?
112	HA	Ehm, doch nicht.
113	I	[*I lacht*]
114	HA	Ich weiß, was 5 mal 8 ist.

170	I	Weißt du, was da heraus kommt?
171	HA	Ehm, nein.
172	I	Was ist denn 10 mal 8?
173	HA	Acht … zehn?
174	I	10 mal 8? [*I zeigt auf 10 · 8*]
175	HA	35.
176	I	[*I runzelt die Stirn*] Mhm (zweifelnd). 10 mal 8?
177	HA	18.
178	I	Ja/ 18?
179	HA	Ja?

115	I	Was ist das?
116	HA	40.
117	I	(8 sec) Was ist 5 mal 7?
118	HA	4?
119	I	[*I runzelt die Stirn*] (5 sec) 4?
120	HA	Ja.
121	I	Nein.
122	HA	10?
123	I	[*I runzelt die Stirn*]
124	HA	15?
125	I	Mhm (verneinend). Ehm/
126	HA	25?
127	I	Was ist denn 3 mal 7? Vielleicht weißt du das?
128	HA	Ehm, 24? [*HA streckt sich*]
129	I	Nein.
130	HA	28?
131	I	4 mal 7 ist 28, ja. [*I lacht*]
132	HA	[*HA nimmt den Bleistift zur Hand*]
133	I	Das kannst du einmal hinschreiben. Aber das war jetzt mehr geraten, oder?
134	HA	Ehm, nein.
135	I	Nicht? Ok.
136	HA	[*HA schreibt 24 in die Lücke für das Ergebnis*] Ich hab 2 plus 2 gerechnet.
137	I	2 plus 2?
138	HA	Wie das da steht.
139	I	Wo?
140	HA	2 [*HA zeigt auf die ersten 2 Spalten*] plus 2. [*HA zeigt auf weitere 2 Spalten*]
141	I	[*I runzelt die Stirn*]
142	HA	[*HA rutscht unruhig auf seinem Stuhl hin und her und schaut verlegen*]
143	I	Das verstehe ich nicht. 2 plus 2?
180	I	Nein.
181	HA	100? Ah (erkennend). 100 minus 20.
182	I	Mhm (bejahend). Also was ist 10 mal 8? [*I tippt auf 10 · 8*]
183	HA	80 dann?
184	I	80. [*I nickt und tippt auf 10 · 8*]
185	HA	[*HA setzt den Bleistift bei der Lücke für das Ergebnis an*]
186	I	Warte. Stopp, stopp, stopp.
187	HA	[*HA zieht den Stift zurück*]
188	I	Du bist noch nicht beim Ergebnis. Weil du sollst ja 9 mal 8 ausrechnen. [*I zeigt auf 9 · 8*] Also 80 minus 1 mal 8.
189	HA	5.
190	I	Was ist denn 1 mal 8?
191	HA	Zw/ 1? Nein, [*HA schüttelt energisch den Kopf*] 8. 8.
192	I	[*I nickt*] Okay. Und was ist 80 minus 8?
193	HA	72?
194	I	[*I nickt*] Sehr gut.
195	HA	[*HA schreibt eine andere Zahl in die Lücke für das Ergebnis*]
196	I	[*I runzelt die Stirn*] 72?
197	HA	Äh? Ich hab 5/?
198	I	[*I lacht*]
199	HA	Hä?
200	I	Bist du jetzt ein bisschen durcheinander?
201	HA	Nein.
202	I	Schreib noch einmal bitte 72 hin.
203	HA	[*HA nimmt den Radiergummi zur Hand, radiert die falsche Lösung wieder aus und schreibt 27 in die Lücke für das Ergebnis*]
204	I	Mhm (bejahend). Jetzt sind es 27.

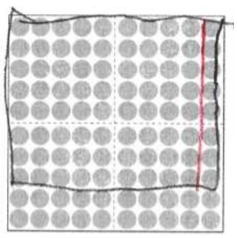
		Wo?
144	HA	Na, da sind 2 [*HA zeigt erneut auf die ersten 2 Spalten*] und da sind 2. [*HA zeigt erneut auf weitere 2 Spalten*]
145	I	Ja (zögerlich).
146	HA	Da hab ich 2 plus 2 gerechnet.
147	I	Und, dann?
148	HA	Ge/ Ausgerechnet. 4.
149	I	Aber 4 stimmt ja gar nicht.
150	HA	Ist 2 plus 2 6 (irritiert)?
151	I	Ja, das stimmt schon für 2 plus 2, aber, was hat das mit 24 zu tun?
152	HA	Ehm. Da hab ich (nicht?) (unv.) 20 gerechnet, oh.
153	I	Ah ja. Mhm (bejahend). Okay. [*I lacht*] Na gut. Wir machen einmal die nächste.

$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 24$



205	HA	Echt?
206	I	Ja.
207	HA	[*HA beugt sich vom Tisch weg, schaut seitlich auf das Blatt und verzieht dabei das Gesicht. Dann nimmt HA den Radiergummi zur Hand und radiert die falsche Lösung wieder aus*]
208	I	Jetzt machst du wohl Quatsch?
209	HA	Nein (gedehnt).
210	I	Nein. [*I lacht*]
211	HA	[*HA schreibt 24 in die Lücke für das Ergebnis*] 42.
212	I	72 sollst du hinschreiben.
213	HA	72?
214	I	Ja.
215	HA	Hä?
216	I	Immer noch.
217	HA	[*HA radiert die 4 von 24 wieder aus*] (Dann machen wir eben 72.?) [*HA schreibt 7 hinter 2*]
218	I	Das ist 27.
219	HA	[*HA radiert die falsche Lösung aus und schreibt 720 in die Lücke für das Ergebnis*]
220	I	Ah. [*I lacht*]
221	HA	[*HA deutet mit der Hand Richtung Lösung*] 27.
222	I	Aber ohne null am Schluss.
223	HA	[*HA nimmt den Radiergummi zur Hand und setzt ihn bei 720 an*]
224	I	Okay, ehm, ich glaube, wir lassen es jetzt soweit.
225	HA	[*HA legt den Radiergummi wieder weg*]

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = 9 \cdot 8 = 720$



Analyse

Bei der Aufgabenstellung $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 =$ nennt die Interviewerin die Aufgabenstellung $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7$ und fragt, wie man das einzeichnen könne. Sie nennt dann nochmals das erste Teilprodukt $5 \cdot 7$ und deutet erst auf das Produkt, dann auf das Punktefeld (SB 67). Dies scheint eine Hilfe für Hakan zu sein. Er markiert daraufhin mit Bleistift in den ersten 5 Spalten je 7 Punkte (SB 68). Bei den bisherigen Aufgabenstellungen interpretierte er im Gegensatz dazu den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten Faktor als Spalten. Er nimmt den Buntstift zur Hand und setzt oberhalb der siebten Zeile an (SB 68). Vermutlich will er wie bei der vorherigen Aufgabenstellung die letzte Zeile markieren. Damit würde er beim zweiten Teilprodukt die Sichtweise jedoch wechseln, und den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten Faktor als Spalten interpretieren. Um die Distributivität in der Darstellung deutlich zu machen, muss die Sichtweise bei den Teilprodukten jeweils gleich sein. Die Interviewerin unterbricht ihn und fragt, was er machen wolle (SB 69). Hakan antwortet, dass er minus 1 mal 7 einzeichnen wolle (SB 70). Die Interviewerin fragt nochmals nach, wie er das machen werde (SB 71). Hakan fährt über die 5 Punkte der siebten Zeile und gibt zu verstehen, dass diese abgezogen werden sollen (SB 72). Die Interviewerin fragt, ob dies 1 mal 7 sei (SB 73). Hakan verneint zuerst fragend und bejaht dann (SB 74). Die Interviewerin fragt, wo 1 mal 7 sei (SB 75). Hakan zählt die Punkte der siebten Zeile und nennt 5 (SB 76). Die Interviewerin sagt, dass das nur 5 seien und fragt nach einer anderen Möglichkeit, es einzuzeichnen (SB 77). Hakan sagt, dass 2 weitere Punkte in der siebten Zeile verwendet werden könnten (SB 78). Die Interviewerin widerspricht, da diese Punkte nicht innerhalb des Punktefeldes $5 \cdot 7$ liegen und deutet auf das markierte Punktefeld (SB 79). Nach fünf Sekunden schlägt Hakan vor, noch 1 mal 7 hinzuzufügen und zeigt dabei unter das markierte Punktefeld (SB 80). Die Interviewerin verneint (SB 81). Hakan will vermutlich eine Zeile für das Subtrahendprodukt am unteren Rand des Feldes für das Minuendprodukt einzeichnen, weil er es in der vorherigen Aufgabenstellung so kennengelernt hat. Da er bei dieser Aufgabenstellung jedoch beim Minuendprodukt den ersten Faktor 5 als Spalten und den zweiten Faktor 7 als Zeilen interpretiert, muss er diese Sichtweise auch beim Subtrahendprodukt beibehalten. Damit müsste er ein Feld mit 1 Spalte und 7 Zeilen identifizieren. Dies scheint ihm jedoch noch nicht klar zu sein, sodass vermutet werden kann, dass Hakan noch kein vollständiges Verständnis für die Übertragung der symbolischen Form der Aufgabe in die Punktefelddarstellung entwickelt hat. Die Interviewerin sagt, dass es 5 mal 7 sei und fragt, ob Hakan irgendwo 1 mal 7 in einer Reihe sehe (SB 81). Hakan bejaht (SB 82) und zeigt auf die ersten 7 Punkte der ersten Spalte (SB 84). Die Interviewerin sagt, dass er es nun auch so herum einzeichnen und er die fünfte Spalte rot einzeichnen könne (SB 85). Dabei zeigt sie auf die 7 Punkte der fünften Spalte (SB 85). Die erste Spalte wäre natürlich ebenso möglich gewesen. Hakan zeichnet mit Buntstift eine Linie nach der vierten Spalte bis zum einschließlich siebten Punkt (SB 86). Mit entsprechendem Hilfsimpuls gelingt es Hakan, ein Feld für das Subtrahendprodukt so zu identifizieren, dass die Distributivität deutlich wird. Die Interviewerin sagt, dass Hakan immer den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen einzeichnen will (SB 87) und Hakan nickt (SB 89) und bejaht dies (SB 90). Die Interviewerin fügt hinzu, dass er dann aber auch das Subtrahendprodukt in dieser Sichtweise einzeichnen müsse (SB 91). Hakan berührt mit dem Buntstift die rote Linie in der Markierung (SB 92).

Die Interviewerin erkundigt sich nach dem Differenzprodukt, indem sie fragt, was übrig bleiben würde, wenn die Siebenerreihe abgezogen werde, und legt den Finger über die 7 Punkte in der fünften Spalte (SB 93). Hakan nennt fragend zunächst 6, dann 5 mal 4 und danach 4 mal 4 (SB 94). Möglich ist, dass Hakan zunächst den zu subtrahierenden Faktor addiert, sodass er passend zu 6 käme. 4 ist als zu subtrahierender Faktor passend. Es kann vermutet werden, dass Hakan den gleichbleibenden Faktor noch nicht entsprechend identifiziert hat. Die Interviewerin verneint, da der zweite gleichbleibende Faktor im genannten Produkt noch nicht passend ist (SB 95). Hakan zählt die übrigen grau markierten Punkte der ersten Zeile und kommt auf 4 (SB 96). Die Interviewerin nennt 4 (SB 97) und Hakan zählt zunächst laut, dann leise die Punkte der ersten Spalte (SB 98). Während Hakan noch zählt, fragt die Interviewerin nach dem zweiten Faktor des Differenzproduktes (SB 99). Hakan nennt 4 mal 7 als Differenzprodukt (SB 100) und die Interviewerin bestätigt ihn (SB 101). Es wird deutlich, dass Hakan im Punktefeld sieht, dass das Differenzprodukt dem Feld für das Minuendprodukt abzüglich des Feldes für das Subtrahendprodukt entspricht. Er zählt jeweils die Punkte für den ersten und zweiten Faktor ab. Damit nutzt er die Strukturierung des Punktefeldes nicht. Die Interviewerin weist darauf hin, dass $\cdot 7$ schon dastehen würde (SB 101). Hakan schreibt $4 \cdot$ auf den ersten Platzhalter (SB 102). Die Interviewerin unterbricht ihn und weist nochmals darauf hin, dass $\cdot 7$ schon dastehen würde und man deswegen nur noch 4 aufschreiben müsse (SB 103). Hakan stimmt zu (SB 104) und die Interviewerin radiert das Malzeichen weg (SB 105).

Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zu 4 mal 7 (SB 105). Hakan gibt zu verstehen, dass er es nicht wüsste (SB 106, 108). Die Interviewerin fragt, ob er das Ergebnis zu 5 mal 7 kennen würde (SB 109). Hakan bejaht zuerst (SB 110) und verneint dann (SB 112). Er sagt, dass er wüsste, was 5 mal 8 sei (SB 109) und nennt auf Nachfrage 40 als Ergebnis (SB 116). Nach 8 Sekunden fragt die Interviewerin nochmals nach dem Ergebnis zu 5 mal 7 (SB 117). Hakan nennt 4 (SB 118), 10 (SB 122), 15 (SB 124) und 25 (SB 126) als Ergebnis. Es wirkt so, dass Hakan nun keine Motivation mehr hat und ohne zu überlegen verschiedene Zahlen rät. Die Interviewerin fragt nun nach dem Ergebnis zu 3 mal 7 (SB 127). Hakan nennt fragend zuerst 24 (SB 128) und dann 28 (SB 130). Die Interviewerin sagt, das 4 mal 7 28 sei (SB 131), bittet ihn es aufzuschreiben und fügt fragend hinzu, dass Hakan eher geraten habe (SB 133). Hakan verneint (SB 134). Hakan notiert fälschlicherweise 24 auf den Platzhalter und sagt, dass er 2 plus 2 gerechnet habe (SB 136). Die Interviewerin interessiert sich für Hakans Vorgehensweise, sodass sie ihn nicht darauf hinweist, statt 28 das unpassende Ergebnis 24 notiert zu haben. Als sie ihn nach einer Begründung für seine Rechnung fragt, erklärt er, dass er 2 plus 2 rechnen würde und zeigt dabei auf die ersten 2 Spalten und auf weitere 2 Spalten (SB 140). Die Interviewerin sagt, dass sie es nicht verstehen würde und fragt, wo 2 plus zu sehen wäre (SB 143). Hakan erklärt nochmals, dass hier und dort 2 wären und zeigt wieder auf die ersten 2 Spalten und weitere 2 Spalten (SB 144). Hakan erklärt, dass er 2 plus 2 gerechnet (SB 146) und 4 erhalten habe (SB148). Die Interviewerin sagt, dass 4 nicht stimmen würde (SB 149) und meint damit das Endergebnis. Hakan fragt irritiert, ob 2 plus 2 6 sei (SB 150). Die Interviewerin antwortet, dass 4 für 2 plus 2 schon stimmen würde und was dies mit dem Endergebnis zu tun haben würde (SB 151). Hakan erklärt möglicherweise, dass er nicht „20 gerechnet“ (SB 152) hätte. Da in diesem Moment unklar bleibt, was Hakan genau meint, bricht die Interviewerin die Aufgabenbearbeitung hier ab (SB 153). Möglich ist, dass Hakan meint, dass er die Elemente der ersten 2 markierten Spalten und der weiteren 2 markierten Spalten addieren müsse. Da Hakan das Ergebnis zum Minuendprodukt nicht weiß, gelingt es nicht, das Endergebnis durch Nutzung der Teilergebnisse zu ermitteln.

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ nennt die Interviewerin zunächst die Aufgabenstellung (SB 154). Hakan nennt fragend 5 (SB 155). Die Interviewerin geht nicht weiter darauf ein und sagt, dass zunächst 10 mal 8 eingezeichnet werden soll (SB 156). Hakan markiert in den 10 Spalten je 8 Punkte (SB 157). Die Interviewerin gibt den Hinweis, dass nun 1 mal 8 abgezogen werde (SB 158). Hakan zeichnet hinter der neunten Spalte eine Linie (SB 159, 163). Die Interviewerin unterbricht ihn kurz, um zu sehen, was er einzeichnet (SB 160) und bestätigt ihn dann (SB 162, 164). Hakan interpretiert hier die je ersten Faktoren als Spalten und die jeweils zweiten Faktoren als Zeilen. Es ist ersichtlich, dass Hakan die Teilprodukte selbstständig passend einzeichnen kann, sodass die Distributivität deutlich wird. Er übersetzt die symbolische Form der Aufgabe also ohne Hilfestellung in die Punktefelddarstellung.

Die Interviewerin fragt, was übrig bleiben würde (SB 164). Hakan nennt fragend 9 mal 8 (SB 165). Es wird hier nicht deutlich, ob er dies in der Punktefelddarstellung ‚abliest‘ oder die symbolische Form der Aufgabe nutzt, um das Differenzprodukt zu ermitteln. Es kann vermutet werden, dass er die Faktoren jeweils relativ schnell im Punktefeld ‚abliest', da bei 9 Spalten lediglich 1 Spalte abgezogen und bei 8 Zeilen lediglich 2 Zeilen abgezogen werden müssen. Denkbar ist auch, dass er bereits erkannt hat, dass 8 der gleichbleibende Faktor ist. Die Interviewerin bestätigt ihn (SB 166). Hakan notiert 9 · auf den Platzhalter (SB 167). Die Interviewerin weist darauf hin, dass das Malzeichen schon abgedruckt sei und nun nur noch eine 8 aufgeschrieben werden müsse (SB 168). Hakan notiert 8 als zweiten Faktor des Differenzproduktes und die Interviewerin bestätigt ihn (SB 170).

Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zum Differenzprodukt (SB 170) und Hakan verneint (SB 171). Sie fragt nun nach dem Ergebnis zu 10 mal 8 (SB 171). Hakan nennt 35 (SB 175), 18 (SB 177) und 100 (SB 181). Dann fügt er hinzu, dass das Ergebnis 100 minus 20 sei (SB 181). Die Interviewerin stimmt zu und fragt nochmals nach dem Ergebnis zum Produkt 10 ·8 (SB 182). Hakan nennt fragend 80 als Ergebnis (SB 183). Hakan setzt den Stift beim Platzhalter für das Endergebnis an (SB 185), woraufhin die Interviewerin ihn unterbricht (SB 186). Sie weist darauf hin, dass 80 noch nicht das Ergebnis für 9 mal 8 sei und er 80 minus 1 mal 8 rechnen müsse (SB 188). Hakan nennt 5 (SB 189). Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zu 1 mal 8 (SB 190). Hakan nennt zunächst 1 und dann 8 (SB 181). Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zu 80 minus 8 (SB 192). Hakan nennt fragend 72 (SB 193) und die Interviewerin bestätigt ihn (SB 194). Diese Phase der Ergebnisermittlung erfolgt sehr angeleitet. Die Interviewerin gibt die einzelnen Schritte stark vor. Von sich aus kommt Hakan offenbar noch nicht auf die Idee, zur Ergebnisermittlung die Ergebnisse der Teilprodukte zu nutzen. Es bleibt offen, ob Hakan die einzelnen Schritte wirklich versteht oder sie lediglich entsprechend den Hinweisen ausführt.

Im folgenden Abschnitt der Sitzung (SB 195-SB 225) scheint Hakan nicht mehr ernsthaft bei der Sache zu sein. Obwohl er das passende Ergebnis 72 bereits genannt hat, schreibt er mehrmals andere Zahlen auf (SB 195, B 203, SB 211, SB 219). Er schreibt 27 (SB 203) auf, notiert dann 24 und nennt dazu aber 42 (SB 211). Zum Schluss schreibt er 720 auf und sagt 27 (SB 219). An dieser Stelle unterbricht die Interviewerin die Bearbeitung, da der Eindruck entsteht, dass Hakan willkürlich Zahlen nennt und notiert.

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Die Ermittlung des Differenzproduktes erfolgt zunehmend ohne Hilfestellung. Bei der ersten Aufgabenstellung erfolgt dies zählend im Punktefeld, bei der zweiten Aufgabenstellung wird nicht ersichtlich, wie Hakan die Faktoren ermittelt. Die Ergebnisermittlung erfolgt stark angeleitet und es bleibt unklar, wie er die passenden Ergebnisse findet. Bei beiden Aufgaben wirkt Hakan in dieser Phase nicht mehr ernsthaft bei der Sache. Da er die Übertragung von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung bei der zweiten Aufgabe ohne Unterstützung vollzieht, kann aber davon ausgegangen werden, dass er zunehmend Verständnis entwickelt hat.

Gesamtfazit

Im Vergleich zum Pre-Test zum Multiplikativen Verständnis, in dem kein Bezug zur Aufgabenstellung in Hakans Bearbeitung erkennbar ist, sind im Post- und Follow-up-Test erhebliche Lernfortschritte zu verzeichnen. Im Post-Test zeigt Hakan eine passende Bearbeitung. Im Follow-up-Test wird deutlich, dass er zumindest hier noch das Summenprodukt in die Punktefelddarstellung übertragen kann.

In der Fördersitzung ist zu erkennen, dass Hakan das Einzeichnen eines Summenproduktes zunehmend ohne Unterstützung gelingt. Die Übersetzung von der symbolischen Form in die Darstellung erfolgt immer selbstständiger, sodass davon ausgegangen werden kann, dass zunehmend Verständnis entwickelt wurde. Die Ergebnisermittlung erfolgt bei der ersten Aufgabenstellung recht schnell, bei der zweiten Aufgabenstellung wird das Ergebnis sehr angeleitet durch Nutzung der Ergebnisse der Teilprodukte gefunden.

Auch bei den Aufgaben zu Differenzprodukten überträgt er nach und nach die symbolische Form in die Punktefelddarstellung ohne Unterstützung, sodass davon ausgegangen werden kann, dass er zunehmend Verständnis entwickelt hat. Die Ergebnisermittlung erfolgt jedoch stark angeleitet und es bleibt unklar, wie er die passenden Ergebnisse findet.

8.2.3.2 Fallbeispiel ‚Helena'

Helena ist während der Einzelförderung acht Jahre alt und besucht eine Klasse mit 19 Schülerinnen und Schüler (13 weiblich, acht männlich) einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr der zweiten Jahrgangsstufe sechs Wochen lang statt. Durchgeführt werden sechs individuell angepasste Sitzungen von je ca. 45 Minuten. Der im Folgenden analysierte Ausschnitt der Förderung findet in der dritten Sitzung ca. fünf Minuten lang statt. Insgesamt ist Helena sehr kommunikativ und zeigt sich durchgehend sehr motiviert und lernwillig.

Hinweise zum Regelunterricht

Helena erhält den gleichen Regelunterricht wie Hakan. Die ausführliche Beschreibung ist unter 8.2.3.1 aufgeführt.

Bearbeitung in BIRTE 2

In BIRTE 2 zeigt Helena „insgesamt eine unterdurchschnittliche Leistung“ (A-Gesamt Helena, S. 1). Ihre „Arbeitsgeschwindigkeit ist durchschnittlich“ (ebd.).

In folgenden Modulen zeigt sie *keinen besonderen Förderbedarf* (ebd.):

- schnelle Zahlauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Zahlzerlegung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)

In strukturierten Arbeitsmitteln, wie Würfelbildern oder Zwanzigerfeld erfasst Helena Anzahlen überwiegend quasi-simultan, im Hunderterfeld zeigt sie allerdings Schwierigkeiten (A-Basis Helena, S. 1). Auf dem Zwanzigerfeld ordnet sie vorgegebene Zahlen passend zu, auf dem Hunderterfeld kaum (ebd., S. 2). Sie zerlegt die Zahlen 8, 9, 10 und 20 in 22 von 24 Aufgaben richtig, ihre Arbeitsgeschwindigkeit ist jedoch niedrig (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)
- Größenvorstellungen (Modulgruppe: Grund- und Größenvorstellungen)
- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Tausch-, Umkehraufgaben löst sie fast immer korrekt, Analogieaufgaben bearbeitet sie jedoch häufig falsch (A-Rechnen Helena, S. 2). Sie schätzt Preise und Längen von Gegenständen in zwei von sechs Aufgaben passend (A-Grundvorstellung Helena, S. 1). Bei acht Textaufgaben wählt sie viermal die passende Operation (ebd.). Weitere Rechengeschichten löst sie häufig korrekt (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

In folgenden Modulen zeigt Helena *besonderen Förderbedarf*:

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Zahlen einordnen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Helena bestimmt jeweils zu einer Folge rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen die passende Zahl nie und sie ordnet Zahlen kaum passend der Größe nach (A-

Orientierung Helena, S. 1). Sie hat Schwierigkeiten, zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich eine passende Zahl zuzuordnen (ebd.). Sie löst Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben bis 20 und 100 nicht richtig (A-Basis Helena, S. 2). Die Additions- und Subtraktionsaufgaben löst sie nicht korrekt (A-Rechnen Helena, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)

Sie hat Schwierigkeiten zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich eine passende Zahl zuzuordnen (A-Orientierung Helena, S. 1). Diese Kompetenz ist für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Helena in mehreren Modulen, die für die ausgewählte Fördereinheit bedeutsam sind, Förderbedarf zeigt. Dadurch können in der Förderung zum Multiplikativen Verständnis zusätzliche Schwierigkeiten auftreten.

Bearbeitungen im Pre-, Post- und Follow-up-Test

In Helenas Bearbeitung im Pre-Test der zum Fokus der qualitativen Analyse passenden Aufgabe schreibt sie lediglich die Aufgabenangabe in symbolischer Schreibweise ab (Abb. 8.35). Ihre Bearbeitung zeigt keinen Bezug zur intendierten Bearbeitung, das Summenprodukt als entsprechendes Punktefeld zu markieren.

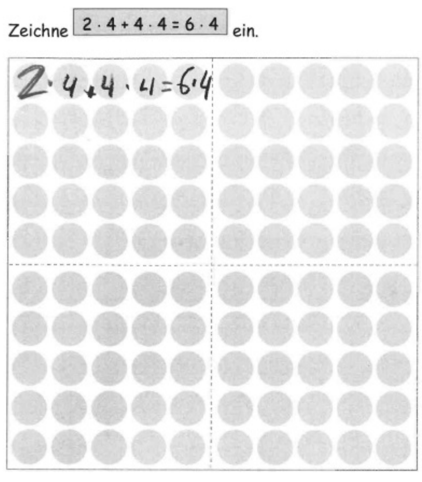


Abbildung 8.35: Helenas Bearbeitung im Pre-Test zu 2 · 4 + 4 · 4 = 6 · 4

Im Post-Test zeichnet Helena die Aufgabe passend im Punktefeld ein und verwendet dabei sogar, wie in der Fördersitzung, jeweils unterschiedliche Farben für die Teilprodukte (Abb. 8.36).

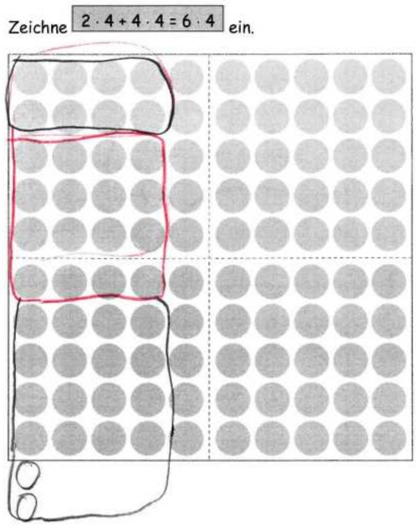


Abbildung 8.36: Helenas Bearbeitung im Post-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Zusätzlich zeichnet sie jedoch das Summenprodukt $6 \cdot 4$ darunter. Sie scheint teilweise Verständnis entwickelt zu haben, wie die Teilprodukte in die Darstellung übertragen werden können. Allerdings scheint es so zu sein, dass ihr die Gleichheit des linken und rechten Terms noch nicht vollständig bewusst ist.

Im Follow-up-Test zeichnet Helena die Teilprodukte direkt untereinander passend in das Punktefeld. Sie verwendet dafür, nicht wie in der Fördersitzung, nur eine Farbe, was aber dennoch als passende Bearbeitung angesehen werden kann (Abb. 8.37).

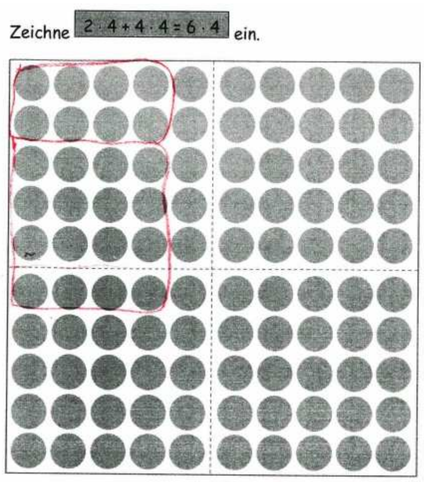
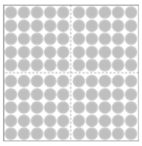
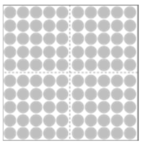


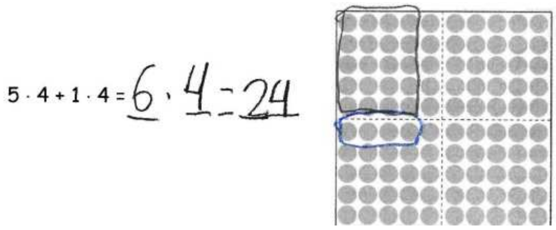
Abbildung 8.37: Helenas Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Im Vergleich zum Pre-Test, in dem Helena lediglich die symbolische Form der Aufgabe abgeschrieben hatte, sind im Post- und Follow-up-Test erhebliche Lernfortschritte zu verzeichnen. Hier überträgt sie die Symbolform schon fast vollständig passend in die Punktefelddarstellung.

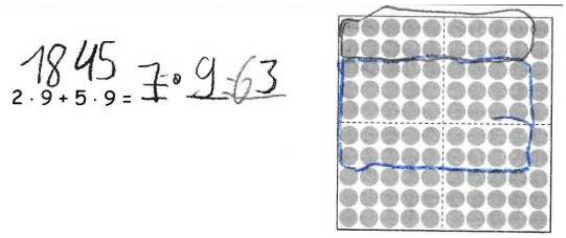
Fördersitzung – Teil I

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ 	Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ 
1 I Gut, dann gucken wir einmal, wie es da ist. [*I zeigt mit dem Stift auf 5 · 4 + 1 · 4*] 2 HE 5 mal 4 ist zwan/ äh 20. 5 mal eh 4.So. [*während sie spricht, umrahmt HE in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte; sie nimmt den blauen Buntstift zur Hand, umrahmt damit in einer weiteren Zeile 4 Punkte und nimmt wieder den Bleistift zur Hand*]	8 HE Dann noch/ Puh. 18 [*HE schreibt 18 über 2 · 9*] Oh, aber zeichne ich erst ein. Ja. [*HE umrahmt mit Bleistift in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte*] Ehm, oh. [*HE nimmt den blauen Buntstift zur Hand*] 5. [*HE beginnt mit dem blauen Buntstift in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte zu umrahmen*] 5 mal/ [*HE verzeichnet sich bei der Umrahmung*] (Oh, jetzt habe ich Fehler gemacht?) (unv.) [*HE korrigiert ihren Fehler, vollendet die Umrahmung*]
2 HE 1, 2, 3, 4, 5, 6. [*HE zählt die Anzahl der markierten Zeilen, indem sie beim Sprechen von oben angefangen auf jeden Punkt der ersten Spalte tippt*] Hä? Oh. 6 [*HE schreibt 6 hinter die Aufgabe und unterstreicht diese, dann zeichnet sie zwei weitere Platzhalter für den zweiten Faktor und das Ergebnis und schreibt die Rechenzeichen = und · dazwischen*] 6 mal. [*HE blickt kurz auf das Punktefeld*] 4. [*HE schreibt 4 hinter 6*]	8 HE *HE nimmt den Bleistift zur Hand und zählt mit dem Stift alle umrahmten Punkte der ersten Spalte entlang*] 7 mal/ [*HE schreibt 7 hinter das vorgedruckte = und blickt kurz auf das Punktefeld*] 9. [*HE schreibt 9 hinter 7*]
2 HE Ist gleich? [*HE verstärkt noch einmal den Platzhalter für das Ergebnis und malt dann bereits für die nächste Aufga-*	8 HE Ist? Und 5 mal 9 sind? 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45. [*HE zählt an den Fingern die Fünferschritte mit ab*] 45.

		be entsprechende Platzhalter und Rechenzeichen] Ist gleich. Mal.
3	I	Mhm (lächelnd).
4	HE	#Ehm/ 24.
5	I	Mhm (bejahend).
6	HE	[*HE schreibt 24 hinter 6 · 4 =*].
7	I	Perfekt.



		[*HE schreibt 45 über 5 · 9*] Ist? Mhm. (nachdenklich) 58 plus 5. 50. 63.
9	I	Spitze.
10	HE	[*HE schreibt 63 hinter 7 · 9 =*] Fertig.
11	I	[*I macht sich eine Notiz*] <u>Mensch</u>. Super. [*I nimmt das Arbeitsblatt weg, HE deutet mit dem Stift auf die Notiz*]



Analyse

Bei der Aufgabenstellung 5 · 4 + 1 · 4 = nennt und berechnet Helena zunächst das erste Teilprodukt 5 · 4 und nennt sofort das passende Ergebnis 20 (SB 2). Sie markiert ohne Hilfestellung für das Produkt 5 · 4 mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte (SB 2). Direkt darunter markiert sie selbstständig mit Buntstift in der fünften Zeile 4 Punkte (SB 2). Sie zeigt damit, dass sie gelernt hat, dass in der Förderung die verschiedenen Farben jeweils für das Einzeichnen der Punktefelder für die zwei Teilprodukte eingesetzt werden.

Sie ermittelt den ersten Faktor des Summenproduktes durch Zählen der Zeilen und nennt sowie notiert 6 (SB 2). Dies deutet darauf hin, dass sie verstanden hat, wie der erste Faktor des Summenproduktes im rechten Term in der Darstellung abgelesen werden kann. Allerdings zählt sie die Zeilen einzeln ab und nutzt damit die Struktur des Punktefeldes nicht. Sie blickt kurz auf das Punktefeld und nennt sowie notiert 4 für den zweiten gleichbleibenden Faktor des Summenproduktes (SB 2). Es wird nicht deutlich, ob sie zählt oder die Strukturierung nutzt, um die Anzahl der Spalten zu ermitteln. Vermutlich hat sie erkannt, dass die markierten Punktefelder zusammen dem Summenprodukt (rechter Term) entsprechen.

Sie berechnet das passende Ergebnis 24 und schreibt es auf (SB 4, 6). Möglicherweise weiß sie die Malaufgabe bereits auswendig. Dies wird durch die Auskunft ihrer Lehrkraft über den durchgeführten Unterricht gestützt. Dort wurde notiert, dass zum Zeitpunkt der Fördersitzung bereits das Einmaleins mit 4 behandelt und am Tag der Fördersitzung das Einmaleins mit 7 begonnen wurde (LD 8, S. 4 f.). Es ist aber auch möglich, dass Helena das Endergebnis durch

Addition der Ergebnisse der Teilprodukte im Kopf berechnet, auch da sie zu Beginn der Bearbeitung bereits das erste Teilprodukt berechnet hat.

Bei der Aufgabenstellung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ berechnet Helena wieder zunächst das erste Teilprodukt $2 \cdot 9$ und schreibt 18 darüber (SB 8). Dann sagt sie, dass sie die Aufgabe erst einzeichnen wolle und markiert mit Bleistift in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte (SB 8). Sie beginnt ohne Hilfe mit Buntstift in den 5 Zeilen unter der ersten Markierung je 9 Punkte zu umrahmen, verzeichnet sich an einer Stelle und korrigiert sich aber selbstständig (SB 8). Auch hier wird ersichtlich, dass Helena ohne Hilfe die Teilprodukte im Punktefeld markieren kann.

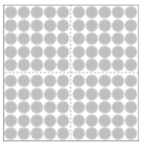
Helena ermittelt den ersten Faktor, indem sie die Zeilen zählt und nennt 7 (SB 8). Sie weiß also, wie der erste Faktor des Summenproduktes im rechten Term in der Darstellung abgelesen werden kann. Da sie zählt, nutzt sie aber die Struktur des Punktefeldes wiederum nicht. Sie blickt kurz auf das Punktefeld und nennt und schreibt 9 als zweiten gleichbleibenden Faktor des Summenproduktes auf (SB 8). Denkbar sind hier zwei Interpretationen. Einerseits könnte es sein, dass Helena den gleichbleibenden Faktor 9 in der Darstellung schnell erkennt, da ausgehend von 10 Spalten lediglich 1 Spalte abgezogen werden muss. Andererseits könnte es auch sein, dass sie den gleichbleibenden Faktor 9 noch präsenter im Kopf hat, da dieser jeweils in den Teilprodukten und im Summenprodukt gleich bleibt. Sie scheint zu wissen, dass die beiden Punktefelder zusammen dem Summenprodukt entsprechen.

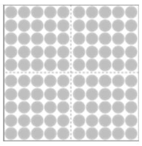
Sie nennt das zweite Teilprodukt $5 \cdot 9$ und berechnet es durch Aufzählen der Fünferreihe (SB 8). Sie nennt das passende Ergebnis 45 und schreibt es über das Teilprodukt (SB 8). Zum ersten Teilprodukt hat sie zu Beginn bereits das Ergebnis notiert (SB 8). Sie nennt 58 plus 5, daraufhin 50 und schließlich 63 als Endergebnis (SB 8). Sie schreibt es auf (SB 10). Sie weiß offensichtlich, dass sie die Ergebnisse der Teilprodukte summieren kann, um das Endergebnis zu ermitteln. Möglicherweise addiert sie zunächst die Zehner des Ergebnisses des ersten Teilproduktes und das Ergebnis des zweiten Teilproduktes ($40 + 18 = 58$), um dann die Einer des Ergebnisses des ersten Teilproduktes hinzuzufügen ($58 + 5$). Es wird nicht ganz klar, wie sie auf die danach genannte 50 kommt, daraufhin erst nennt sie das passende Endergebnis 63. Möglich ist, dass sie 58 in 50 und 8 zerlegt und dann $50 + 8 + 5$ rechnet. Es könnte auch sein, dass sie nochmals bei 45 beginnt und $45 + 5$ sowie danach $50 + 13$ rechnet.

Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

Zusammenfassend ist festzustellen, dass Helena in beiden Aufgabenstellungen selbstständig die passende Markierung der Punktefelder findet, d. h. sie weiß, wie sie die Teilprodukte in symbolischer Form in die Punktefelddarstellung übertragen kann. Außerdem hat sie gelernt, wie sie die Faktoren des Summenproduktes anhand des Punktefeldes ermitteln kann. Sie hat erkannt, dass sie das Endergebnis durch Addition der Ergebnisse der Teilprodukte berechnen kann. Sie vollzieht den Wechsel von der symbolischen Form in die Darstellungsform des didaktischen Materials, was darauf hindeutet, dass Verständnis entwickelt worden ist.

Fördersitzung – Teil II

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 = \_\_$ 		
12	I	Jetzt haben wir das Ganze noch mit minus. [I legt das neue Arbeitsblatt vor HE]
13	HE	Ehm. Oh.
14	I	Oh.
15	HE	Mhm.
16	I	Jetzt zeichnen wir einfach erst einmal [*I deutet mit dem Stift auf das Punktefeld*] diese 5 mal 7 [*I deutet mit dem Stift auf 5 · 7*] ein, mit Bleistift.
17	HE	[*HE gähnt; HE umrahmt mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte*] (unv. geflüstert)
18	I	Mhm (bejahend).
19	HE	So, und jetzt 1 mal.
20	I	[*I nickt*] Und die 1 mal 7 kommen ja weg.
21	HE	[*HE setzt den Stift an der sechsten Zeile an*]
22	I	Warte einmal. [*I zeigt mit dem Stift auf die sechste Zeile*] Die 1 mal 7 kommen ja weg. Das heißt, wir können die mit hier einzeichnen, in die 5 mal 7. [*I zeigt mit dem Stift auf das grau Umrahmte*]

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \_\_ \cdot \_\_ = \_\_$ 		
44	HE	[*HE zeichnet die Platzhalter für die Aufgaben 3 und 4 vor*] Mhm, mhm, mhm.
45	I	[*I schmunzelt*]
46	HE	Ist gleich und/ [*HE setzt noch die Rechenzeichen zwischen die Platzhalter*] Mal, ist gleich.
47	I	Mhm (bejahend).
48	HE	Sind 18, 80. [*HE setzt den Bleistift am ersten Punkt der ersten Zeile an*] Ehm. [*HE zählt mit dem Stift die Punkte der ersten Spalte*]
49	I	Musst du das zählen? Nein, oder?
50	HE	(unv., während I noch spricht)
51	I	Mhm (lächelnd).
52	HE	Nach unten. [*HE zeichnet einen Strich die erste Spalte entlang*] Und 8. [*HE dreht das Blatt und umrahmt in den 10 Zeilen je 8 Punkte fertig*]
53	I	[*nickt*] Super.
54	HE	(Da muss ich/ 1 mal 8?) (unv.) [*HE nimmt den blauen Buntstift zur Hand*] Nur 1. (1. Verdächtig?) (unv.) [*HE umrahmt mit dem blauen Buntstift in der zehnten Zeile 8 Punkte*] So.

23	HE	[*HE setzt mit dem blauen Buntstift bei der ersten Zeile an*]
24	I	Also hier unten. [*I zeigt mit dem Stift auf die fünfte Zeile*]
25	HE	[*HE umrahmt in der fünften Zeile 7 Punkte blau*]
26	I	Aha.
27	HE	Ja.

55	I	Mhm (bejahend). [*I nickt*]

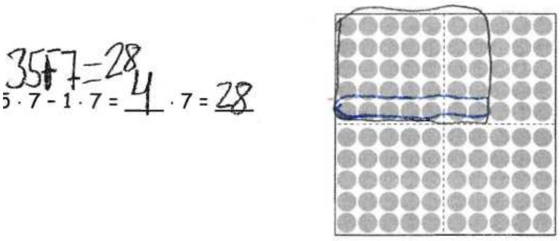
28	I	Jetzt sieht man nämlich auch, was übrig bleibt.
29	HE	[*HE legt den blauen Buntstift beiseite*] Das muss jetzt weg? [*HE fährt mit dem Finger das blau Umrahmte entlang*]
30	I	Das denkt man sich weg. [*I nickt*]
31	HE	[*HE deckt mit ihrer Hand die nicht markierten Zeilen und teilweise die markierte fünfte Zeile des Punktefeldes ab*]
32	I	Und was bleibt übrig?
33	HE	Ehm/ [*HE nickt mit dem Kopf mehrmals Richtung Arbeitsblatt*] 4 mal 7.
34	I	Perfekt. [*I nickt*]
35	HE	[*HE schreibt 4 in die erste Lücke*] 4. [*HE setzt mit dem Bleistift bei der dritten Aufgabe auf dem Arbeitsblatt an*]

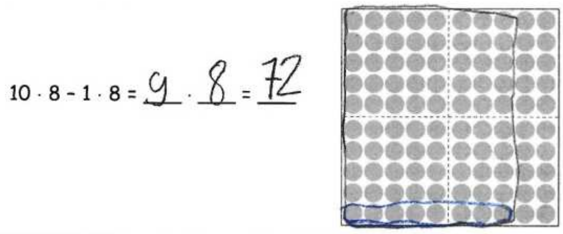
56	HE	[*HE atmet geräuschvoll aus; sie nimmt den Bleistift zur Hand, beginnt damit die Punkte der ersten Spalte zu zählen und unterbricht das Abzählen beim fünften Punkt*] Ehm, 9. [*HE schreibt 9 in die erste Lücke*] Mal/ [*blickt kurz auf das Punktefeld*] 8. 9 mal 8?
57	I	[*I nickt*] Mhm (bejahend).
58	HE	[*HE schreibt 8 in die zweite Lücke*]

36	I	Weißt du auch da das Ergebnis? [*I tippt mit dem Stift auf die Lücke für das Ergebnis der ersten Aufgabe*]
37	HE	Mhm (nachdenklich). Wüsste ich. 27 plus 7 sind?
38	I	27 plus 7? Wieso?
39	HE	Oder wa/ [*HE legt den Finger auf die zweite Aufgabe*] Ach ich rechne die aus. [*HE fährt mit der Rückseite des Stifts über $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7$*] Ehm? (5 sec) 35. [*HE schreibt 35 über $5 \cdot 7$, 7 über*

59	HE	80 minus 8.
60	I	[*I nickt*] Genau.
61	HE	80, ehm/ 79,78, ehm/ [*HE zählt mit den Fingern mit*] (9 sec) Ehm, 72. [*HE setzt den Stift an*] Oder?
62	I	Mhm (bejahend). [*I nickt*]
63	HE	[*HE schreibt 72 in die Lücke für das Ergebnis*]
64	I	Perfekt.

		1 · 7 und + zwischen 35 und 7] Plus 7.
40	I	<u>Minus</u>, ne? [*I deutet mit dem Stift auf -*]
41	HE	Minus. [*HE streicht das + durch und schreibt – darüber*] Minus. (geflüstert) 35/ (7 sec) Ehm 28.
42	I	[*I nickt*] Perfekt.
43	HE	[*HE schreibt = 28 hinter 35 – 7 und 28 in die Lücke für das Ergebnis*]





Analyse

Bei der Aufgabenstellung 5 · 7 – 1 · 7 = __ · 7 = gibt die Interviewerin den Hinweis, zunächst das Feld für das Produkt 5 · 7 mit Bleistift einzuzeichnen (SB 16). Helena markiert mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte (SB 17). Die Interviewerin sagt dann, dass 1 mal 7 abgezogen werden (SB 20). Helena setzt den Stift zunächst an der sechsten Zeile an (SB 21). Die Interviewerin unterbricht sie und sagt, dass das Punktefeld für 1 · 7 in das Feld für 5 · 7 eingezeichnet werde (SB 22). Helena setzt nun bei der ersten Zeile an (SB 23), was aus mathematischer Perspektive natürlich ebenso passend wäre. Die Interviewerin bittet, das Feld in der untersten Zeile des markierten Feldes einzuzeichnen und zeigt dabei auf die fünfte Zeile (SB 24). Helena markiert in der fünften Zeile 7 Punkte mit blauem Buntstift (SB 25). Da die Vorgehensweise, wie Differenzprodukte eingezeichnet werden sollen, zumindest in der Fördersitzung noch nicht thematisiert wurde, wird zu Beginn der Bearbeitung der Aufgabe stark angeleitet. Helena scheint relativ schnell nachzuvollziehen, wie die Teilprodukte in der Fördersitzung eingezeichnet werden sollen.

Die Interviewerin sagt, dass man jetzt auch sehe, was übrig bleibe (SB 28). Helena fragt, ob die blau markierte Zeile für 1 · 7 abgezogen werden müsse (SB 29). Die Interviewerin bestätigt sie und sagt, dass man sich das wegdenken würde (SB 30). Helena deckt von sich aus mit der Hand die nicht markierten Zeilen unter der Markierung und teilweise die fünfte Zeile ab (SB 31). Die Interviewerin fragt, was übrig bleibe (SB 32). Helena nennt 4 mal 7 als Differenzprodukt (SB 33). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 34) und Helena notiert 4 als ersten Faktor des Differenzproduktes vor · 7(SB 35). Helena scheint verstanden zu haben, wie das Differenzprodukt in der Darstellung ‚abgelesen' werden kann. Ein wechselseitiger Übersetzungsprozess zwischen didaktischer Darstellung und symbolischer Form der Aufgabe findet statt, was darauf hinweist, dass Helena Verständnis für den Inhalt entwickelt hat.

Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zum Produkt $4 \cdot 7$ (SB 36). Helena gibt an, 27 plus 7 rechnen zu wollen (SB 37). Möglich ist, dass sie $5 \cdot 7$ berechnet und zum nicht passenden Ergebnis 27 gelangt. Sie will 7 addieren statt subtrahieren, vermutlich sieht sie das Operationszeichen nicht nochmals an. 7 wäre das passende Ergebnis zum Subtrahendprodukt. Die Interviewerin fragt sie, wieso sie 27 plus 7 rechnen wolle (SB 38). Helena gibt zu verstehen, dass sie das Ergebnis berechnen wolle (SB 39). Nach fünf Sekunden gibt sie 35 als Ergebnis für das Produkt $5 \cdot 7$ an und notiert 35 über $5 \cdot 7$, 7 über $1 \cdot 7$ sowie ein Additionszeichen dazwischen (SB 39). Nun sagt sie, dass sie plus 7 rechnen wolle (SB 39). Sie scheint zu wissen, dass sie mithilfe der Ergebnisse der Teilprodukte zum Endergebnis gelangen kann, will allerdings addieren statt subtrahieren. Die Interviewerin weist auf das Minuszeichen hin (SB 40). Helena wiederholt zweimal „Minus" (SB 41) und ersetzt das Additionszeichen durch ein Subtraktionszeichen (SB 41). Sie nennt 35 und nach sieben Sekunden als Endergebnis 28 (SB 41). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 42) und Helena notiert 28 als Endergebnis für das Differenzprodukt (SB 43). Mit dem entsprechenden Hinweis auf das Operationszeichen gelangt Helena zum passenden Endergebnis. Von sich aus ermittelt sie zunächst die Ergebnisse der Teilprodukte, um zum passenden Endergebnis zu gelangen.

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ zeichnet Helena zunächst Platzhalter und Rechenzeichen für die Malaufgabe vor (SB 44, 46). Sie nennt 18 und danach sofort 80 und meint damit wohl die Lösung für das Produkt $10 \cdot 8$ (SB 48). Helena zählt die Zeilen, indem sie die Punkte der ersten Spalte von oben nach unten antippt (SB 48). Die Interviewerin fragt, ob sie das zählen müsse (SB 49). Helena unterbricht das Zählen, ihre Antwort darauf ist nicht verständlich (SB 50). Scheinbar nutzt sie die Strukturierung des Punktefeldes noch nicht von sich aus. Helena markiert in den 10 Zeilen jeweils 8 Punkte mit Bleistift. Dabei kommentiert sie die Linie entlang der ersten Spalte mit „Nach unten" (SB 52) und die Linie unterhalb der achten Zeile mit „Und 8" (SB 52). Sie wendet sich dem Produkt $1 \cdot 8$ zu und scheint wegen des Faktors 1 irritiert zu sein, da sie „Nur eins" (SB 54) sagt. Ohne Hilfestellung markiert sie dann aber in der zehnten Zeile 8 Punkte mit Buntstift (SB 54). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 55). Sie übersetzt somit die symbolische Form des Differenzproduktes selbstständig passend in die Punktefelddarstellung. Es kann davon ausgegangen werden, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Helena beginnt die Punkte der ersten Spalte zu zählen, unterbricht dies beim fünften Punkt und schreibt 9 als ersten Faktor des Differenzproduktes auf (SB 56). Sie ermittelt den ersten Faktor zum Teil zählend. Zum Teil kann jedoch angenommen werden, dass Helena beginnt, die Fünferstrukturierung des Punktefeldes zu nutzen, um den Faktor in der Darstellung ‚abzulesen'. Sie blickt nochmals kurz auf das Punktefeld, nennt 8 für den zweiten gleichbleibenden Faktor und fragt, ob das Differenzprodukt 9 mal 8 sei (SB 56). Die Interviewerin bestätigt das und Helena schreibt 8 als zweiten gleichbleibenden Faktor auf (SB 58). Es sind zwei Deutungen möglich. Einerseits ist es denkbar, dass sie den Faktor 8 im Punktefeld schnell ‚ablesen' kann, indem sie von 10 Spalten 2 Spalten abzieht. Andererseits könnte es sein, dass Helena den gleichbleibenden Faktor 8 präsenter im Kopf hat, da er in beiden Teilprodukten auftaucht.

Sie nennt 80 minus 8 zur Ergebnisermittlung (SB 59). Damit nutzt sie selbstständig die Ergebnisse der Teilprodukte. Sie nennt 80, 79 und 78 und zählt dabei mit den Fingern mit (SB 61). Sie findet das passende Ergebnis 72 (SB 61) und nach Bestätigung der Interviewerin schreibt sie 72 als Endergebnis auf (SB 63). Sie ermittelt das Ergebnis offenbar vollständig durch Rückwärtszählen.

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass Helena zunehmend lernt, wie in der Förderung Teilprodukte eines Differenzproduktes eingezeichnet werden sollen, da sie dies bei der zweiten Aufgabe schon überwiegend selbstständig durchführt. Auch die Ermittlung der Faktoren des Differenzproduktes erfolgt in der zweiten Aufgabe bereits selbstständig. Bei der zweiten Aufgabenstellung fällt außerdem auf, dass sie zusätzlich die Strukturierung des Punktefeldes zu nutzen beginnt, um die Faktoren in der Darstellung ‚abzulesen'. Bei beiden Aufgabenstellungen weiß sie, dass sie die Endergebnisse durch Subtraktion der Ergebnisse der Teilprodukte ermitteln kann. Sie scheint relativ selbstständig den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung des Punktefeldes vollziehen zu können, was darauf hindeutet, dass Verständnis zunehmend entwickelt wurde.

Gesamtfazit

Im Vergleich zum Pre-Test, in dem Helena lediglich die symbolische Form der Aufgabe abgeschrieben hatte, sind im Post- und Follow-up-Test erhebliche Lernfortschritte zu verzeichnen. Hier überträgt sie die Symbolform schon fast vollständig passend in die Punktefelddarstellung.

In der Fördereinheit vollzieht Helena bei den Aufgabenstellungen zu Summenprodukten den Wechsel von der symbolischen Form in die Darstellungsform des didaktischen Materials selbstständig, was darauf hindeutet, dass Verständnis entwickelt worden ist. Sie hat zudem erkannt, dass sie das Endergebnis durch Addition der Ergebnisse der Teilprodukte berechnen kann.

Bei den Aufgabenstellungen zu Differenzprodukten scheint Helena relativ selbstständig den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung des Punktefeldes vollziehen zu können, was darauf hindeutet, dass Verständnis zunehmend entwickelt wurde. Bei beiden Aufgabenstellungen ermittelt sie die Endergebnisse durch Subtraktion der Ergebnisse der Teilprodukte.

8.2.3.3 Fallbeispiel ‚Sarah'

Sarah ist zum Zeitpunkt der Einzelförderung sieben Jahre alt und besucht eine Klasse mit 16 Kindern (acht weiblich, acht männlich) einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr der zweiten Jahrgangsstufe ca. acht Wochen lang statt. Es werden acht individuell angepasste Sitzungen von ca. 45 Minuten durchgeführt. Der ausgewählte Transkriptausschnitt findet in der fünften Fördersitzung ca. sieben Minuten lang statt. Sarah zeigt sich während der Sitzungen lernwillig und motiviert. Manchmal benötigt sie sehr viel Zeit, um zur Lösung zu gelangen, bleibt aber dennoch sehr geduldig bei der Sache.

Hinweise zum Regelunterricht

Laut der Auskunft Sarahs Lehrkraft wird das Einmaleins im Unterricht ca. neun Wochen lang (ca. 28 Unterrichtsstunden) behandelt (LD 9, S. 1 ff.). Das verwendete Schulbuch ist ‚Mein Mathebuch 2' (Schmidt, 2008a). Zudem wird das zugehörige Arbeitsheft eingesetzt (Schmidt, 2008b) (LD 9, S. 1). Als zusätzliche Materialien nennt die Lehrkraft Plättchen, Magnete, Bilder, Kästchenpapier, Muggelsteine, konkretes Material, Steckwürfel, Fingerbilder und die Einmaleinstafel (LD 9, S. 1 ff.). Über die Sequenz verteilt werden die Reihen zu 2, 1, 10, 5, 4, 8, 3, 6, 9 und 7 in dieser Reihenfolge genannt. Mit Anschauungsmaterialien wie konkretem Material, Plättchen, Magneten und Bildern wird in das Thema eingeführt und es werden Geschichten zum Malnehmen thematisiert (ebd., S. 2). Es werden als Thema „Malnehmen und Zeichnen" (ebd.), dazu Kästchenpapier als Anschauungsmaterial und eine entsprechende Schulbuchseite (Schmidt, 2008a, S. 54) explizit angegeben, auf welcher die Sichtweise, die Faktoren des Produktes als Zeilen und Spalten zu sehen, unterstützt wird. „Tauschaufgaben" werden als Einmaleinstrick thematisiert (LD 9, S. 3) und es wird eine entsprechende Schulbuchseite (Schmidt, 2008a, S. 55) genannt (Abb. 8.38).

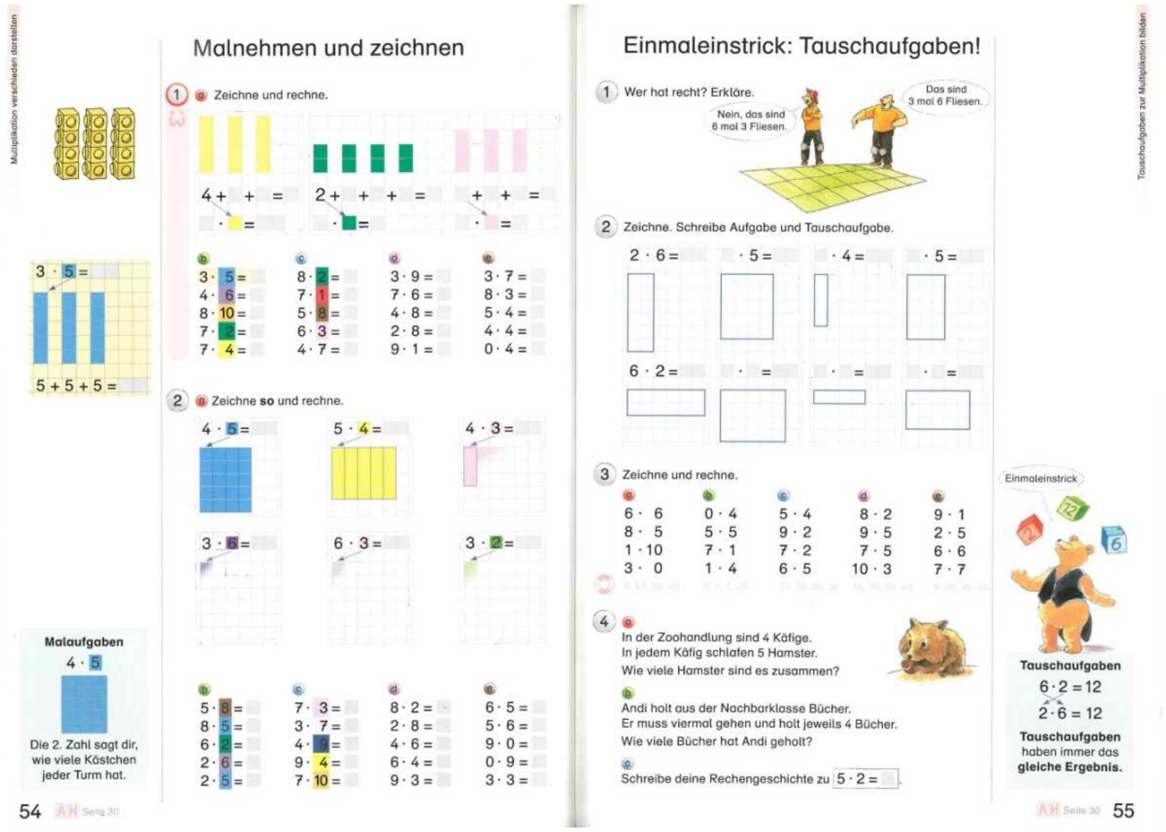


Abbildung 8.38: Schulbuchseiten aus Mein Mathebuch 2 zu Kästchendarstellungen zu Tauschaufgaben (Schmidt, 2008a, S. 54 f.)

In der dritten und vierten Woche wird die Division eingeführt (LD 9, S. 3). Die „Umkehraufgabe“ (ebd.) wird als Einmaleinstrick angeführt (ebd.). Es werden das Thema „Verdoppeln – Halbieren“ (ebd.), dazu Wendeplättchen und eine entsprechende Seite im Arbeitsheft (Schmidt, 2008b, S. 34) genannt (Abb. 8.39, links). Als nächstes Unterrichtsthema wird „Finger-1 · 1 mit 2“ (LD 9, S. 3) thematisiert, dazu sind eine weitere Arbeitsheftseite (Schmidt, 2008b, S. 35, Abb. 8.39, rechts) und als Anschauungsmaterial „Finger-Bilder“ notiert (LD 9, S. 3). Auf dieser werden u. a. auch Fingerbilder genutzt, um hier die Zweierreihe deutlich zu machen.

Das Fingereinmaleins ist eine Methode, mit der das Einmaleins im verwendeten Schulbuch den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden soll (Schmidt, 2008c, S. 9). Es werden dazu die Finger und Erbsen verwendet (ebd.). Die Anzahl der ausgestreckten Finger bezieht sich auf den ersten Faktor der Malaufgabe (ebd.). Der zweite Faktor gibt die Anzahl der Erbsen an, die pro Finger hingelegt werden bzw. abgebildet sind (ebd.). Für 3 · 2 werden z. B. 3 Finger ausgestreckt, und es werden jeweils 2 Erbsen pro ausgestreckten Finger gelegt (ebd.). Das Fingereinmaleins wird sonst in der Übersicht der Dokumentation der Lehrkraft nicht nochmals genannt, sodass zu vermuten ist, dass diese Methode keinen Schwerpunkt des Unterrichts darstellt.

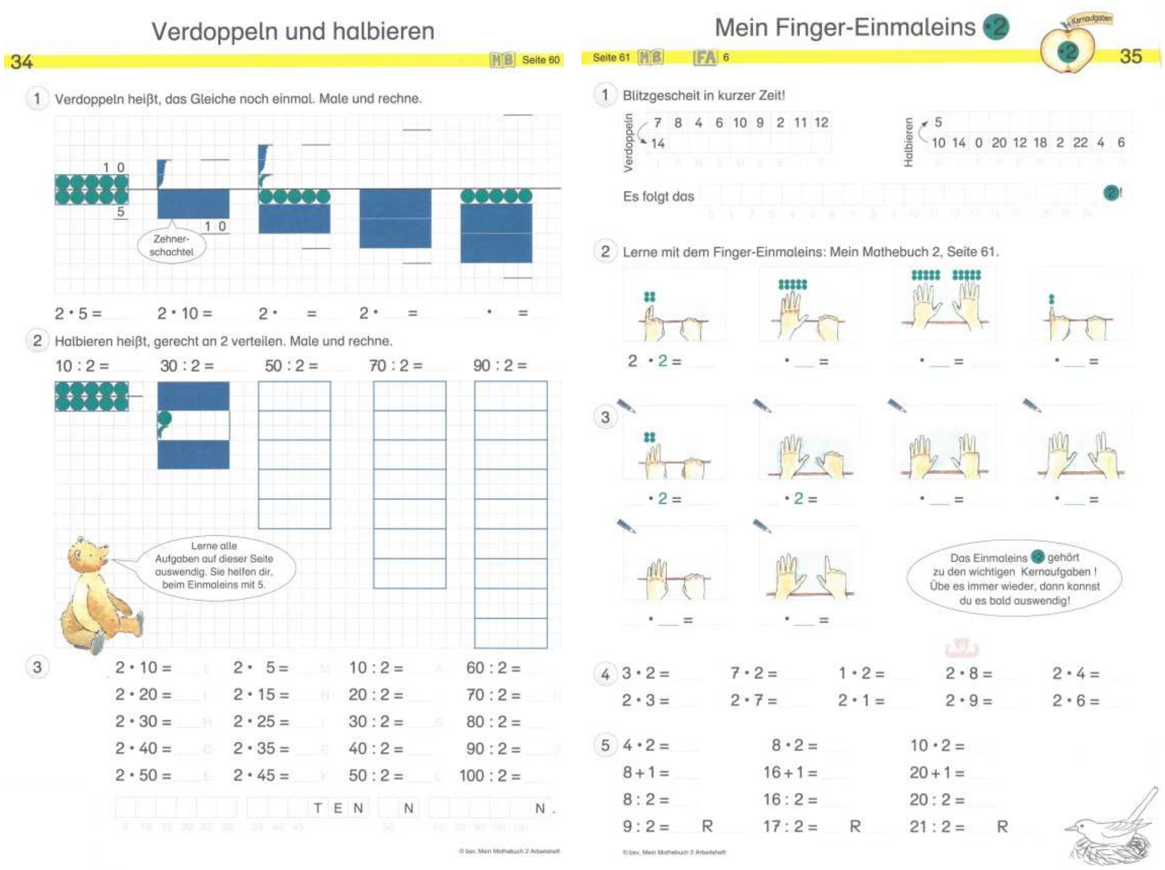


Abbildung 8.39: Arbeitsheftseiten aus Mein Mathebuch 2 zum Verdoppeln und Halbieren und dem Einmaleins mit 2 (Schmidt, 2008b, S. 34 f.)

Es wird ein 1 · 1 – Büchlein angelegt, in das vermutlich die Reihen notiert werden (LD 9, S. 3). Zum Thema „Quadrataufgaben" (ebd., S. 4) wird als Anschauungsmaterial Kästchenbilder und eine dazu passende Schulbuchseite genannt (ebd.; Schmidt, 2008b, S. 65; Abb. 8.40). Kurz vor Ende der Sequenz wird das Thema „Nachbaraufgaben" (LD 9, S. 5) angeführt, was darauf hindeuten könnte, dass Strategien zumindest in dieser Stunde thematisiert wurden.

Laut Lehrplan für die zweite Jahrgangsstufe sollen zunächst lediglich die Kernaufgaben explizit als Reihen behandelt werden, die übrigen sollen aufgrund der Distributivität durch Strategien abgeleitet und dann erst in der dritten Jahrgangsstufe auch automatisiert werden (BY, 2014, S. 276, S. 282). Die Lehrkraft nennt jedoch neben den Kernaufgaben auch die übrigen Einmaleinsaufgaben als Unterrichtsthemen. Als Strategien werden lediglich Tauschaufgaben und Umkehraufgaben genannt. Es kann also vermutet werden, dass die Lehrkraft die Reihen eher isoliert in den Blick nimmt und weitere Strategien auf Grundlage der Distributivität kaum thematisiert.

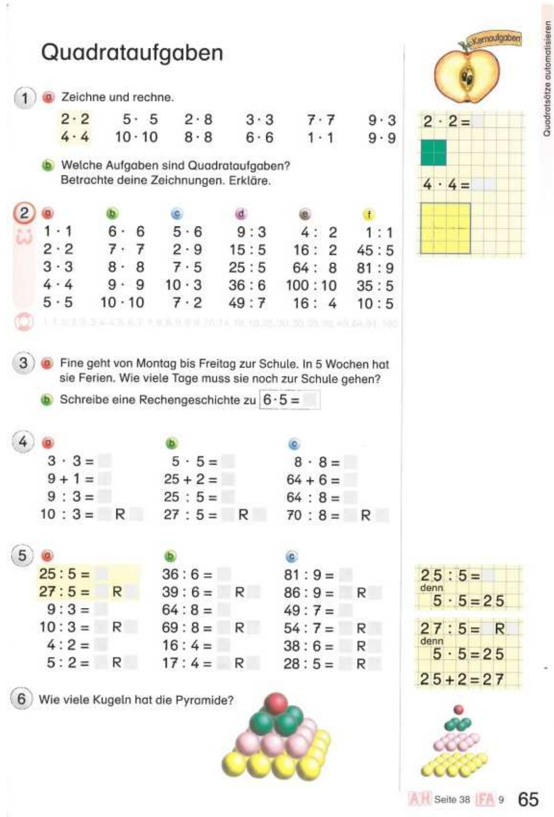


Abbildung 8.40: Schulbuchseite aus Mein Mathebuch 2 zu Quadrataufgaben (Schmidt, 2008a, S. 65)

Bearbeitung in BIRTE 2

Sarah zeigt in BIRTE 2 „insgesamt eine durchschnittliche Leistung“ (A-Gesamt Sarah, S. 1) und ihre „Arbeitsgeschwindigkeit ist durchschnittlich“ (ebd.).

In folgenden Modulen zeigt Sarah überwiegend *keinen besonderen Förderbedarf* (ebd.):

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Zahlen einordnen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- schnelle Zahlauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Zahlzerlegung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Sarah kann zu einer Folge rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen die passende Zahl bestimmen und Zahlen nach der Größe ordnen (A-Orientierung Sarah, S. 1). In strukturierten Arbeitsmitteln, wie Würfelbilder und Zwanzigerfeld, kann sie Anzahlen überwiegend quasi-simultan erfassen. Im Hunderterfeld zeigt sie allerdings Schwierigkeiten (A-Basis Sarah, S. 1). Auf dem Zwanziger- oder Hunderterfeld ordnet sie vorgegebene Zahlen meist passend zu und sie zerlegt die Zahlen 8. 9, 10 und 20 richtig (ebd., S. 1 f.). Sie löst von zwölf Subtraktionsaufgaben sechs richtig (A-Rechnen Sarah, S. 1 f.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)
- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Sie wählt bei acht Textaufgaben viermal die passende Operation und löst weitere Rechengeschichten weitgehend korrekt (A-Grundvorstellung Sarah, S. 1). Tausch-, Umkehr-und Analogieaufgaben bearbeitet sie passend (A-Rechnen Sarah, S. 1 f.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Sarah zeigt in folgenden Modulen *besonderen Förderbedarf* (A-Gesamt Sarah, S. 1):

- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)

Sie löst Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben bis 20 und 100 (A-Basis Sarah, S. 2) sowie Additionsaufgaben überwiegend nicht korrekt (A-Rechnen Sarah, S. 1 f). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Größenvorstellungen (Modulgruppe: Grund- und Größenvorstellungen)

Sarah hat Schwierigkeiten, zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich eine passende Zahl zuzuordnen (A-Orientierung Sarah, S. 1). Sie schätzt Preise und Längen von Gegenständen unpassend (A-Grundvorstellung Sarah, S. 1). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Sarah nur in wenigen Modulen Förderbedarf zeigt, die für die ausgewählte Fördereinheit bedeutsam sind. Sie verfügt also über viele Basiskompetenzen, die für die Förderung relevant sind. Förderbedarf zeigt sie jedoch in den Bereichen Verdoppeln und Halbieren sowie Addition, sodass möglicherweise dennoch zusätzliche Schwierigkeiten bei der Förderung zum Multiplikativen Verständnis auftreten können.

Bearbeitungen im Pre-, Post- und Follow-up-Test

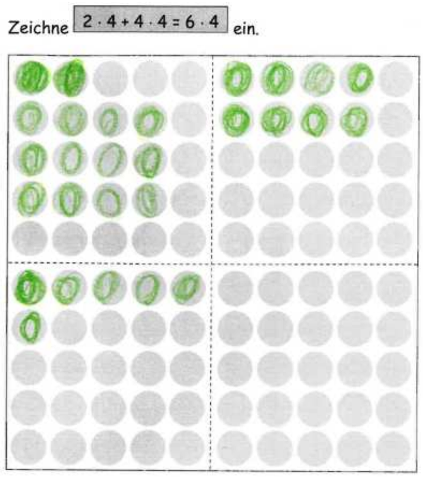


Abbildung 8.41: Sarahs Bearbeitung im Pre-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

In Sarahs Bearbeitung im Pre-Test sind oben links in den ersten 2 Spalten je 4 Punkte markiert, was als $4 \cdot 2$ – Punktefeld interpretiert werden kann (Abb. 8.41). Direkt daneben ab der dritten Spalte sind in je 2 weiteren Spalten 3 Punkte markiert, was als $3 \cdot 2$ – Punktefeld gedeutet werden kann. Nach einer weiteren Spalte sind in den ersten 2 Zeilen je 4 Punkte markiert, was als Produkt $2 \cdot 4$ interpretiert werden kann. In der sechsten Zeile sind nochmals 6 Punkte sowie in der siebten Zeile der erste Punkt markiert. Das Produkt $2 \cdot 4$ bzw. $4 \cdot 2$ ist also zweimal in der Punktefelddarstellung erkennbar, was zumindest einen kleinen Bezug zur Aufgabenstellung deutlich macht. Eine Bearbeitung, wie es wünschenswert wäre, bei der beide Teilprodukte und das Summenprodukt deutlich werden, ist nicht erkennbar.

In Sarahs Bearbeitung im Post-Test werden die Teilprodukte in unterschiedlichen Farben sowie das Summenprodukt deutlich (Abb. 8.42). Die Gleichheit von linkem und rechtem Term ist in ihrer Markierung erkennbar. Sie hat die Aufgabe entsprechend der Förderidee der Sitzung bearbeitet.

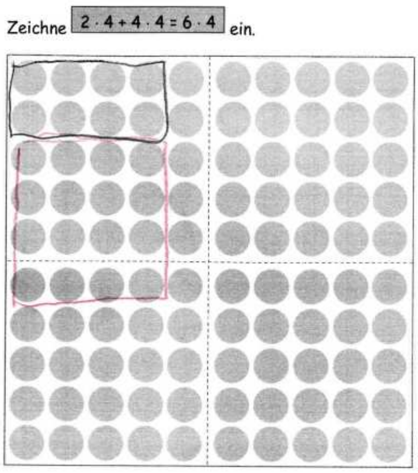


Abbildung 8.42: Sarahs Bearbeitung im Post-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

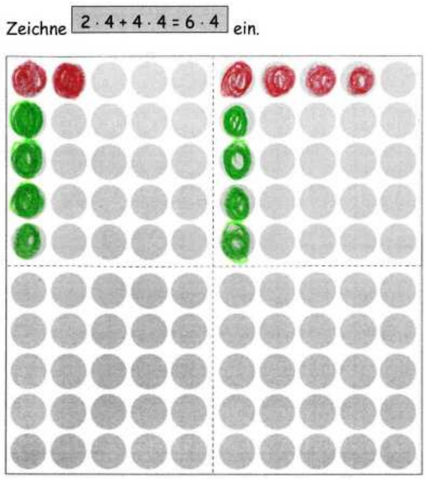
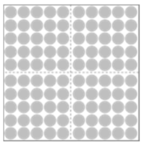
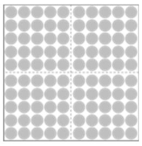


Abbildung 8.43: Sarahs Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

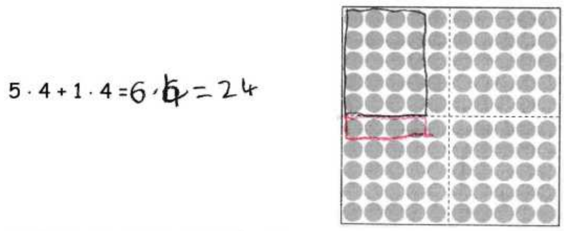
Im Follow-up-Test hat Sarah in der ersten Zeile die ersten 2 Punkte rot markiert, in der ersten Spalte direkt darunter mit grünem Stift 4 Punkte (Abb. 8.43). Begonnen mit dem sechsten Punkt der ersten Zeile hat sie weitere 4 Punkte rot markiert, darunter in der sechsten Spalte 4 weitere Punkte mit grünem Stift. Sie hat möglicherweise die Faktoren der Teilprodukte im linken Term aufgegriffen und die jeweilige Anzahl an Punkten markiert. Produkte in der Felddarstellung sind allerdings nicht erkennbar. Somit ist der Bezug zur Aufgabenstellung in ihrer Bearbeitung nicht sichtbar.

Im Vergleich zu Sarahs Bearbeitung im Pre-Test, in der lediglich das Teilprodukt $2 \cdot 4$ erkennbar ist, kann in Sarahs Post-Test ein beachtlicher Lernfortschritt festgestellt werden. In ihrer Bearbeitung im Follow-up-Test ist jedoch kein Bezug zur Aufgabenstellung mehr erkennbar. In der nachfolgenden Analyse der Fördersitzung wird allerdings deutlich, dass sie dort sehr selbstständig arbeitet, sodass vermutet werden kann, dass eine kurze Wiederholung der Inhalte möglicherweise ausreichen könnte, um sie wieder in Sarahs Gedächtnis zu rufen.

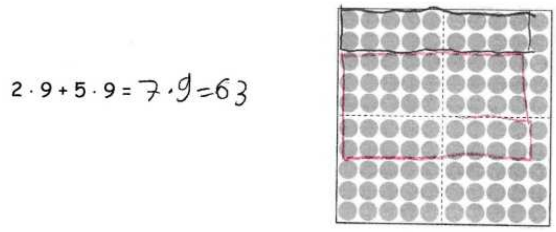
Fördersitzung – Teil I

		Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ 			Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ 
1	S	(7 sec) [*S umrahmt mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte, nimmt den roten Buntstift zur Hand und umrahmt damit in einer weiteren Zeile 4 Punkte*]	12	I	Und die letzte?
			13	S	[*S umrahmt mit Bleistift in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte, nimmt den roten Buntstift zur Hand und beginnt in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte einzurahmen, zeichnet eine Linie zunächst auf der gestrichelten Linie*]
			14	I	Ehm, warte einmal, warte einmal, warte einmal. Geht es da weiter? [*I deutet mit dem Stift auf die falsch gezogene Linie*] 5 mal 9. [*I deutet mit dem Stift auf 5 · 9*]
			15	S	[*S korrigiert die rote Umrahmung*]
			16	I	Aha. Genau.
1	S	(16 sec) 24.			
2	I	[*rückt sich den Stuhl zurecht*] Erst einmal eine Malaufgabe. [*I zeigt mit dem Stift auf 5 · 4 + 1 · 4*] Die Gesamte. [*I zeigt mit dem Stift auf das von S Umrahmte*]	16	I	Und was kommt da jetzt für eine Malaufgabe heraus?
3	S	[*S blickt auf das Arbeitsblatt*] 6 mal 4?	17	S	[*S blickt auf das Arbeitsblatt*] 7 mal 9.
4	I	Super. [*nickt*] Darfst du hinschreiben.	18	I	Mhm (bejahend). [*I nickt*]
5	S	[*S nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 6 · 6 hinter die Aufgabe*]	19	S	[*S nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 7 · 9 = hinter die Aufgabe*]
6	I	6 mal 4.			
7	S	[*S überschreibt die zweite 6 mit 4*]			

8	I	Und das ist? Hast du gerade schon gesagt. [*I macht sich Notizen auf ihrem Blatt*]
9	S	24?
10	I	#Ja. Super.
11	S	[*S schreibt = 24 hinter die Aufgabe*]



19	S	(12 sec) 63.
20	I	Mhm (bejahend). [*I gähnt*]
21	S	[*S schreibt 63 hinter =*]
22	I	Super. [*I nimmt das Blatt weg*]



Analyse

Bei der Aufgabenstellung 5 · 4 + 1 · 4 = markiert Sarah ohne Hilfestellung nach sieben Sekunden mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte und direkt darunter in einer weiteren Zeile 4 Punkte mit Buntstift ohne Kommentar (SB 1). Sarah kann also selbstständig die symbolische Form der Aufgabe in eine Punktefelddarstellung übertragen. Dies deutet darauf hin, dass sie Verständnis entwickelt hat, wie eine Multiplikationsaufgabe anschaulich gemacht werden kann.

Sie überlegt 16 Sekunden lang und nennt dann 24 als Ergebnis (SB 1). Es wird nicht ersichtlich, wie sie das Ergebnis berechnet. Es ist möglich, dass sie die Ergebnisse der Teilprodukte addiert. Auch denkbar ist, dass sie das Summenprodukt 6 · 4 auf irgendeine andere Weise berechnet. Automatisiert hat sie das Ergebnis dieser Malaufgabe aber offenbar noch nicht, da sie relativ lange überlegt.

Die Interviewerin fragt nach dem Summenprodukt und zeigt dabei auf die Aufgabenstellung sowie auf die markierten Punktefelder (SB 2). Sarah blickt auf das Arbeitsblatt und nennt fragend 6 mal 4 (SB 3). Es ist nicht ersichtlich, ob sie das Summenprodukt in der Darstellung ‚abliest' oder die symbolische Form der Aufgabe nutzt, um das Summenprodukt zu ermitteln. Die Interviewerin bestätigt sie und bittet sie, es aufzuschreiben (SB 4). Sarah notiert 6 · 6 (SB 5). Die Interviewerin weist Sarah darauf hin, dass es 6 mal 4 heißen würde (SB 6) und Sarah verbessert den zweiten Faktor entsprechend (SB 7).

Die Interviewerin sagt, dass Sarah das Ergebnis gerade schon genannt hätte (SB 8) und Sarah wiederholt fragend 24 für das Ergebnis des Summenproduktes (SB 9). Die Berechnung des Endergebnisses erfolgt bereits einige Sekunden früher (SB 1). Die Interviewerin stimmt zu (SB 10) und Sarah notiert = 24 (SB 11).

Bei der Aufgabenstellung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ markiert Sarah ohne Hilfe in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte mit Bleistift und beginnt in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte mit Buntstift zu markieren (SB 13). Dabei verzeichnet sie sich an einer Stelle und markiert zunächst unter der fünften Zeile entlang der gestrichelten Linie (SB 13). Die Interviewerin unterbricht sie, deutet auf die unpassende Linie, nennt 5 mal 9 sowie deutet mit dem Stift auf $5 \cdot 9$ (SB 14). Sarah korrigiert ihre Markierung und vervollständigt sie entsprechend, sodass in 5 Zeilen je 9 Punkte markiert sind (SB 15). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 16). Mit einer kleinen Hilfestellung zeichnet Sarah ohne Kommentar fast selbstständig die Teilprodukte passend im Punktefeld ein. Sie überträgt die symbolische Form in die Punktefelddarstellung, sodass davon ausgegangen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Die Interviewerin fragt nach dem Summenprodukt (SB 16). Sarah blickt auf das Arbeitsblatt und nennt 7 mal 9 als Summenprodukt (SB 17). Die Interviewerin bestätigt sie und Sarah schreibt das Summenprodukt entsprechend auf (SB 19). Es ist nicht ersichtlich, ob Sarah das Summenprodukt anhand der Punktefelddarstellung oder der symbolischen Form der Aufgabe ermittelt.

Nach zwölf Sekunden nennt Sarah 63 als Ergebnis und die Interviewerin stimmt zu (SB 20). Sarah schreibt es auf (SB 21) und die Interviewerin bestätigt sie (SB 22). Es wird nicht deutlich, wie Sarah zum Ergebnis gelangt. Möglich ist, dass sie die Ergebnisse der Teilprodukte nutzt. Denkbar ist aber auch, dass sie das Produkt $7 \cdot 9$ auf andere Art und Weise berechnet. Auch hier kann davon ausgegangen werden, dass sie es noch nicht automatisiert hat, da sie relativ lange nachdenkt.

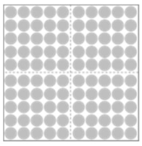
Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

Beim Vergleich der Bearbeitungen der beiden Aufgabenstellungen, fällt auf, dass sich die Chronologie der Vorgehensweise unterscheidet: Bei der ersten Aufgabenstellung zeichnet Sarah zunächst die Teilprodukte ein, ermittelt das Ergebnis, bestimmt dann das Summenprodukt und nennt daraufhin nochmals das Ergebnis. Bei der zweiten Aufgabenstellung zeichnet sie die Teilprodukte, bestimmt das Summenprodukt und ermittelt zum Schluss das Ergebnis. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Sarah bei beiden Aufgabenstellungen die Teilprodukte nahezu selbstständig und ohne Kommentar einzeichnet und somit die symbolische Form in die Punktefelddarstellung übertragen kann. Sie vollzieht den Wechsel von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung ohne Hilfestellung, was darauf hindeutet, dass sie Verständnis entwickelt hat. Die Summenprodukte ermittelt sie ebenfalls bei beiden Aufgabenstellungen ohne Hilfestellung. Die Ergebnisse zu den Summenprodukten findet sie selbständig nach einiger Überlegung. Es wird nicht klar, ob Sarah weiß, dass die Ergebnisse der Teilprodukte zur Ergebnisermittlung genutzt werden können.

Fördersitzung – Teil II

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

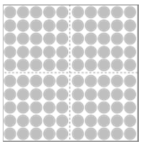
$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 = \_\_$



23	I	Und das Ganze [*I schreibt den Namen von S auf das neue Arbeitsblatt*] geht natürlich auch noch mit minus. [*I legt das Blatt vor S*]
24	S	[*S nimmt den Bleistift zur Hand, umrahmt damit in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte und legt den Bleistift wieder beiseite*] (6 sec) [*S nimmt den roten Buntstift zur Hand*]
25	I	Wo zeichnet man jetzt das 1 mal 7 hin?
26	S	(20 sec) Dahin? [*S deutet mit dem Stift auf die unterste Zeile des umrahmten Feldes*]
27	I	Mhm (bejahend). [*I nickt*] Super.
28	S	[*S umrahmt mit dem roten Buntstift in der fünften Zeile 7 Punkte*]
29	I	Und was kommt jetzt für eine Malaufgabe heraus?
30	S	[*S blickt auf das Arbeitsblatt*] 5 mal 7.
31	I	[*I nimmt einen Bleistift zur Hand*] Das ist ja schon das Ganze. [*I deutet mit dem Stift die 5 Punkte der ersten Spalte entlang*] Was kommt\ Was bleibt übrig, [*I deutet auf die erste Lücke*] wenn man das Rote weg macht? [*I deutet auf die rote Umrahmung*]
32	S	4 mal 7?
33	I	#Mhm (bejahend). Super. [*I nickt*]

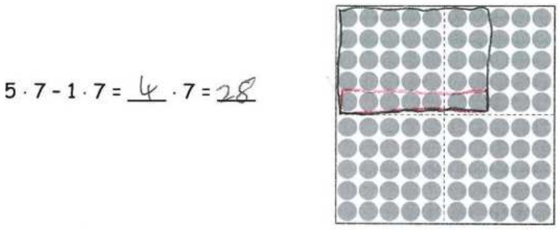
Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \_\_ \cdot \_\_ = \_\_$

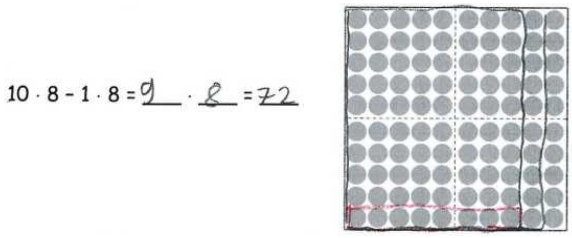


37	S	[*S beginnt in den 10 Zeilen je 9 Punkte zu umrahmen*]
38	I	Warte einmal, 10 mal 8. [*I zeigt mit dem Stift erst auf 10 dann auf 8*]
39	S	(8 sec) [*S korrigiert die Umrahmung, indem sie in 10 Zeilen je 8 Punkte umrahmt*]
40	I	Mhm (bejahend).
41	S	[*S nimmt den roten Buntstift zur Hand und umrahmt damit in der zehnten Zeile 8 Punkte*]
42	I	Super.
43	S	[*S blickt auf das Arbeitsblatt*] 9 mal 8?
44	I	Mhm (bejahend). [*I nickt*] Spitze.
45	S	[*S nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 9 in die erste und 8 in die zweite Lücke*] (6 sec)

34	S	[*S nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 4 in die erste Lücke*]
34	S	(22 sec) [*während S überlegt nimmt I ein weißes Blatt zur Hand und schreibt den Namen von S darauf*] 28?
35	I	Mhm (bejahend). Spitze.
36	S	[*S nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 28 in die zweite Lücke*]



46	I	Was ist 10 mal 8? [*I zeigt mit dem Stift auf 10 · 8*]
47	S	80?
48	I	Minus 8? [*I zeigt mit dem Stift auf 1 · 8*]
49	S	(8 sec) 72?
50	I	Super. Darfst du hinten hin schreiben.
51	S	[*S schreibt 72 in die Lücke für das Ergebnis*]



Analyse

Bei der Aufgabenstellung $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 =$ gibt die Interviewerin zu Beginn den Hinweis, dass nun subtrahiert wird (SB 23). Sarah markiert mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte und legt den Stift bei Seite (SB 24). Nach sechs Sekunden nimmt sie den Buntstift zur Hand (SB 24). Die Interviewerin fragt, wo das Feld für das Produkt $1 \cdot 7$ eingezeichnet werden soll (SB 25). Nach 20 Sekunden deutet Sarah mit dem Stift in das markierte Feld (SB 26). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 27). Sarah markiert ohne weiteren Hinweis in der fünften Zeile 7 Punkte (SB 28). Sarah ist damit das einzige Förderkind, das ohne Hinweis von sich aus eine Idee hat, wie ein Differenzprodukt eingezeichnet werden kann. Sie überträgt nahezu selbstständig das Differenzprodukt passend in die Punktefelddarstellung, sodass angenommen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Die Interviewerin fragt nach dem Differenzprodukt, indem sie fragt, welche Malaufgabe heraus kommen würde (SB 29). Sarah blickt auf das Arbeitsblatt und nennt 5 mal 7 (SB 30). Die Interviewerin weist darauf hin, dass dies das Minuendprodukt sei, indem sie sagt, dass dies das Ganze sei und mit dem Stift die 5 Punkte der ersten Spalte entlang fährt (SB 31). Die Interviewerin fragt, was übrig bleibe, wenn die fünfte markierte Zeile abgezogen werde (SB 31). Dieser Hinweis scheint Sarah zu helfen, da sie nun 4 mal 7 als Differenzprodukt nennt

(SB 32) und die Interviewerin stimmt zu (SB 33). Sarah schreibt 4 auf den ersten Platzhalter, sodass $4 \cdot 7$ notiert ist (SB 34). Sarah kann somit mit einer kleinen Unterstützung, die sich auf die Punktefelddarstellung bezieht, das passende Differenzprodukt in der Darstellung ‚ablesen'.

Nach 22 Sekunden nennt Sarah 28 als Ergebnis (SB 34) und die Interviewerin bestätigt sie (SB 35). Sarah schreibt 28 auf (SB 36). Es bleibt unklar, ob Sarah die Ergebnisse der Teilprodukte subtrahiert oder auf andere Art und Weise das Produkt $4 \cdot 7$ berechnet. Automatisiert hat sie das Produkt offenbar noch nicht, da sie dafür zu lange überlegt.

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ beginnt Sarah in den 10 Zeilen je 9 Punkte zu markieren (SB 37). Möglicherweise hat sie sich beim zweiten Faktor verzählt. Die Interviewerin gibt ihr den Hinweis, dass es 10 mal 8 heißen würde und zeigt mit dem Stift auf 10 und 8 (SB 38). Dieser Hinweis auf die Aufgabenstellung scheint auszureichen, sodass Sarah nach 8 Sekunden ihre Markierung so korrigiert, dass nun in den 10 Zeilen je 8 Punkte markiert sind (SB 39). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 40). Sarah markiert mit Buntstift in der zehnten Zeile 8 Punkte (SB 42) und die Interviewerin stimmt zu (SB 42). Sarah erhält lediglich einen kleinen Hinweis bezüglich des zweiten Faktors 8 im ersten Teilprodukt. Abgesehen davon überträgt sie die symbolische Form der Aufgabe selbstständig in die Punktefelddarstellung. Dies deutet darauf hin, dass sie Verständnis entwickelt hat, wie Teilprodukte eines Differenzproduktes im Punktefeld anschaulich gemacht werden können.

Sarah blickt auf das Arbeitsblatt und nennt 9 mal 8 als Differenzprodukt (SB 43). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 44). Sarah notiert 9 als ersten Faktor und 8 als zweiten Faktor des Differenzproduktes (SB 45). Es wird nicht deutlich, wie sie die Faktoren ermittelt. Möglich ist, dass sie sie im Punktefeld ‚abliest'. Auch denkbar ist, dass sie sie anhand der symbolischen Form der Aufgabe ermittelt.

Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zu 10 mal 8 und zeigt auf das Teilprodukt (SB 46). Sarah nennt fragend 80 (SB 47). Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zu 80 minus 8 und zeigt dabei auf $1 \cdot 8$ (SB 48). Damit gibt die Interviewerin die Ermittlung des Endergebnisses durch Subtraktion der Ergebnisse der Teilprodukte vor. Es wird nicht ersichtlich, ob Sarah möglicherweise auch von sich aus diese Schritte gewählt hätte. Nach 8 Sekunden nennt Sarah fragend 72 (SB 49). Die Interviewerin stimmt zu und bittet sie, es aufzuschreiben (SB 50). Sarah schreibt 72 als Ergebnis auf (SB 51).

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Sarah bei der Bearbeitung von Differenzprodukten von Anfang an sehr selbstständig arbeitet. Sie hat von sich aus als einzige der Förderkinder eine Idee, wie die Differenzprodukte in Punktefelder übertragen werden können. Beim Einzeichnen der Differenzprodukte arbeitet sie bei beiden Aufgabenstellungen nahezu ohne Hilfestellung. Die Faktoren des Differenzproduktes ermittelt sie bei der ersten Aufgabenstellung durch einen Hinweis auf das Punktefeld, bei der zweiten Aufgabenstellung bereits ohne Hilfe. Das Endergebnis findet sie bei der ersten Aufgabenstellung ohne weiteren Hinweis. Bei der zweiten Aufgabenstellung gibt die Interviewerin entsprechende Hinweise, das Endergebnis mithilfe der Subtraktion der Ergebnisse der Teilprodukte zu ermitteln. Sie vollzieht den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung des Punktefeldes recht selbstständig, was darauf hindeutet, dass Verständnis entwickelt wurde.

Gesamtfazit

Im Vergleich zur Sarahs Bearbeitung im Pre-Test, in der lediglich das Teilprodukt $2 \cdot 4$ erkennbar ist, kann in Sarahs Post-Test ein beachtlicher Lernfortschritt festgestellt werden. In ihrer Bearbeitung im Follow-up-Test ist jedoch kein Bezug zur Aufgabenstellung mehr erkennbar. Die Analyse der Fördersitzung macht allerdings deutlich, dass sie sehr selbstständig gearbeitet hat, sodass angenommen werden kann, dass eine kurze Wiederholung der Inhalte möglicherweise ausreichen könnte, um sie wieder in Sarahs Gedächtnis zu rufen.

In der Fördereinheit zu den Summenprodukten vollzieht sie den Wechsel von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung ohne Hilfestellung, was darauf hindeutet, dass sie Verständnis entwickelt hat. Die Ergebnisse zu den Summenprodukten findet sie selbständig nach einiger Überlegung. Es wird allerdings nicht klar, ob Sarah weiß, dass die Ergebnisse der Teilprodukte zur Ergebnisermittlung genutzt werden können.

Bei der Bearbeitung der Differenzprodukte lässt sich feststellen, dass Sarah als einzige der Förderkinder bereits zu Beginn der Fördersitzung eine Idee hat, wie die Differenzprodukte in Punktefelder übertragen werden können. Sie vollzieht den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung des Punktefeldes recht selbstständig, was darauf hindeutet, dass Verständnis entwickelt wurde. Bei der ersten Aufgabenstellung findet sie das Endergebnis eigenständig, bei der zweiten Aufgabenstellung gibt die Interviewerin entsprechende Hinweise, das Endergebnis mithilfe der Subtraktion der Ergebnisse der Teilprodukte zu ermitteln.

8.2.3.4 Fallbeispiel ‚Romina'

Romina ist zum Zeitpunkt der Einzelförderung neun Jahre alt und besucht eine Klasse mit 18 Kindern (zehn weiblich, acht männlich) einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr der zweiten Jahrgangsstufe ca. neun Wochen lang statt. Es werden acht individuell angepasste Sitzungen von ca. 45 Minuten durchgeführt. Der ausgewählte Transkriptausschnitt findet in der sechsten Fördersitzung ca. 20 Minuten lang statt. Romina zeigt sich während der Sitzungen grundsätzlich lernwillig, häufig wirkt sie jedoch auch angestrengt und müde.

Hinweise zum Regelunterricht

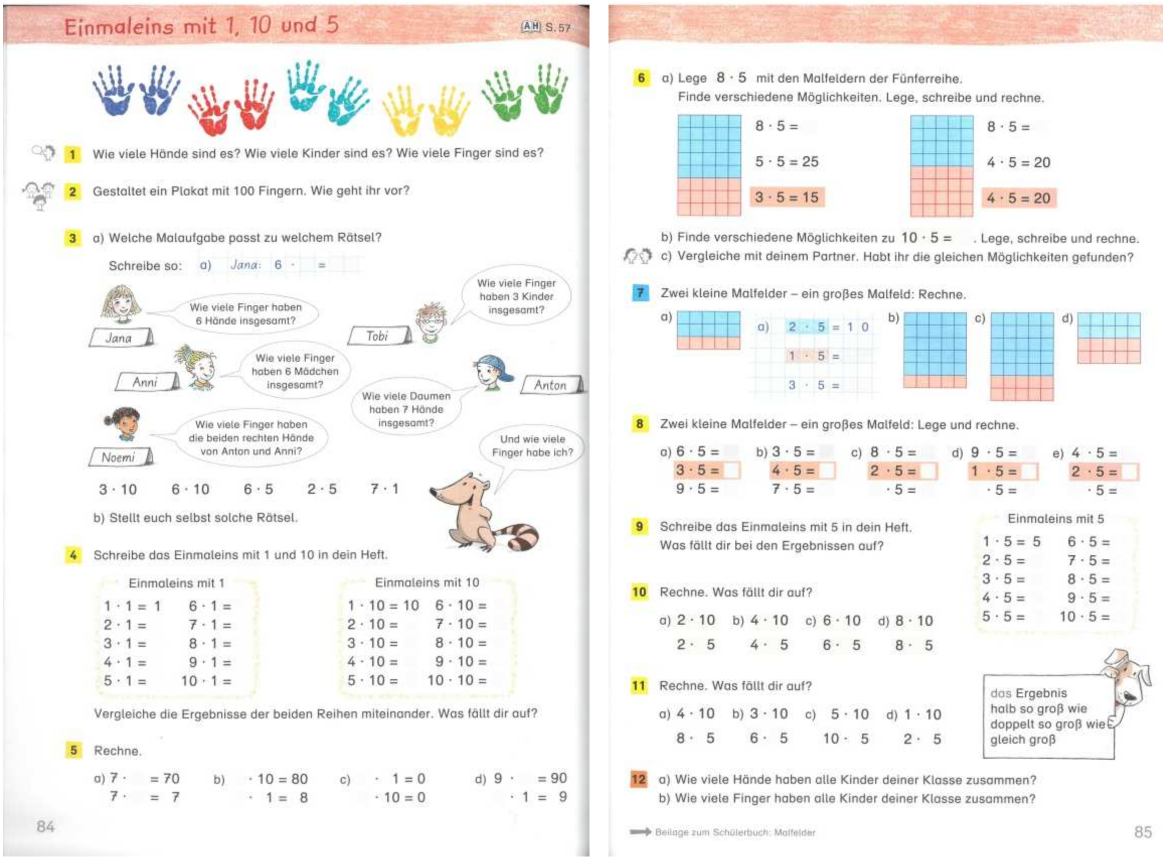
Laut Auskunft Rominas Lehrkraft wird das Einmaleins im Unterricht ca. neun Wochen lang über 14 Wochen verteilt thematisiert (LD 10, S. 1 f.). Es werden mindestens 18 Unterrichtsstunden durchgeführt (ebd., S. 1 ff.), möglicherweise waren es etwas mehr Stunden, dies kann aufgrund der Aufzeichnungen nicht genau rekonstruiert werden.

Das verwendete Schulbuch ist ‚Fredo 2' (Balins et al., 2014a), zudem wird das zugehörige Arbeitsheft (Balins et al., 2014b) eingesetzt (LD 10, S. 1). Grundsätzlich verwendet das Schulbuch als Darstellung für Malaufgaben u. a. auch Kästchenpapier und unterstützt damit die Sichtweise, die Faktoren eines Produktes in Zeilen und Spalten zu sehen (z. B. Balins et al., 2014a, S. 81). Diese Deutung von Multiplikation ist auch für den ausgewählten Ausschnitt der Förderung relevant.

Als weitere Unterrichtsmaterialien werden von der Lehrkraft Rechenplättchen (gemeint sind vermutlich Wendeplättchen) genannt (LD 10, S. 1). Auf verwendeten Arbeitsblättern finden sich u. a. auch Punktefelder. Nach einer Einführung werden einfache Malaufgaben und deren Tauschaufgaben thematisiert (ebd., S. 2).

Das Thema „So rechne ich – wie rechnest du?" deutet darauf hin, dass individuelle Strategien zur Berechnung von Einmaleinsaufgaben behandelt werden. Über die Sequenz verteilt werden die Reihen zu 2, 1, 10, vermutlich 5 (da eine entsprechende Schulbuchseite genannt ist, Balins et al., 2014a, S. 84; Abb. 8.44), Quadrataufgaben, 4 und 8 in dieser Reihenfolge erwähnt (LD 10, S. 1 ff.). Bevor die Reihen zu 4 und 8 genannt werden, thematisiert die Lehrkraft das Rechnen mit Kernaufgaben (ebd., S. 4).

Der Lehrplan für die zweite Jahrgangsstufe sieht vor, dass zunächst lediglich die Kernaufgaben explizit als Reihen behandelt und die übrigen aufgrund der Distributivität abgeleitet werden sollen (BY, 2014, S. 276, S. 282). Im Gegensatz zu anderen am Projekt teilnehmenden Lehrkräften scheint die Lehrkraft gemäß dem Lehrplan zusätzlich zu den Reihen der Kernaufgaben auch Strategien zur Ableitung der übrigen Multiplikationsaufgaben zu thematisieren. Die Reihen zu 4 und 8 werden aber offenbar dennoch auch isoliert in den Blick genommen. Die Lehrkraft nennt außerdem Entdeckungen an Quadrataufgaben als Unterrichtsthema (LD 10, S. 4). Die kopierten Seiten der Hefteinträge weisen darauf hin, dass bei diesem Thema die Quadratzahlen explizit als quadratische Darstellung aus Punkten behandelt werden. In diesem Zusammenhang werden die Quadratzahlen als Summe der Folge der ungeraden Zahlen thematisiert.



Einmaleins mit 1, 10 und 5 AH S. 57

1 Wie viele Hände sind es? Wie viele Kinder sind es? Wie viele Finger sind es?

2 Gestaltet ein Plakat mit 100 Fingern. Wie geht ihr vor?

3 a) Welche Malaufgabe passt zu welchem Rätsel?
Schreibe so: a) Jana: 6 · =

Jana: Wie viele Finger haben 6 Hände insgesamt?
Tobi: Wie viele Finger haben 3 Kinder insgesamt?
Anni: Wie viele Finger haben 6 Mädchen insgesamt?
Anton: Wie viele Daumen haben 7 Hände insgesamt?
Noemi: Wie viele Finger haben die beiden rechten Hände von Anton und Anni?
Und wie viele Finger habe ich?

3 · 10 6 · 10 6 · 5 2 · 5 7 · 1

b) Stellt euch selbst solche Rätsel.

4 Schreibe das Einmaleins mit 1 und 10 in dein Heft.

Einmaleins mit 1
1 · 1 = 1 6 · 1 =
2 · 1 = 7 · 1 =
3 · 1 = 8 · 1 =
4 · 1 = 9 · 1 =
5 · 1 = 10 · 1 =

Einmaleins mit 10
1 · 10 = 10 6 · 10 =
2 · 10 = 7 · 10 =
3 · 10 = 8 · 10 =
4 · 10 = 9 · 10 =
5 · 10 = 10 · 10 =

Vergleiche die Ergebnisse der beiden Reihen miteinander. Was fällt dir auf?

5 Rechne.
a) 7 · = 70 7 · = 7
b) · 10 = 80 · 1 = 8
c) · 1 = 0 · 10 = 0
d) 9 · = 90 · 1 = 9

84

6 a) Lege 8 · 5 mit den Malfeldern der Fünferreihe.
Finde verschiedene Möglichkeiten. Lege, schreibe und rechne.
8 · 5 = 5 · 5 = 25 3 · 5 = 15
8 · 5 = 4 · 5 = 20 4 · 5 = 20
b) Finde verschiedene Möglichkeiten zu 10 · 5 = . Lege, schreibe und rechne.
c) Vergleiche mit deinem Partner. Habt ihr die gleichen Möglichkeiten gefunden?

7 Zwei kleine Malfelder – ein großes Malfeld: Rechne.
a) 2 · 5 = 10 1 · 5 = 3 · 5 =
b) c) d)

8 Zwei kleine Malfelder – ein großes Malfeld: Lege und rechne.
a) 6 · 5 = 3 · 5 = 9 · 5 =
b) 3 · 5 = 4 · 5 = 7 · 5 =
c) 8 · 5 = 2 · 5 = · 5 =
d) 9 · 5 = 1 · 5 = · 5 =
e) 4 · 5 = 2 · 5 = · 5 =

9 Schreibe das Einmaleins mit 5 in dein Heft.
Was fällt dir bei den Ergebnissen auf?

Einmaleins mit 5
1 · 5 = 5 6 · 5 =
2 · 5 = 7 · 5 =
3 · 5 = 8 · 5 =
4 · 5 = 9 · 5 =
5 · 5 = 10 · 5 =

10 Rechne. Was fällt dir auf?
a) 2 · 10 2 · 5 b) 4 · 10 4 · 5 c) 6 · 10 6 · 5 d) 8 · 10 8 · 5

11 Rechne. Was fällt dir auf?
a) 4 · 10 8 · 5 b) 3 · 10 6 · 5 c) 5 · 10 10 · 5 d) 1 · 10 2 · 5

das Ergebnis
halb so groß wie
doppelt so groß wie
gleich groß

12 a) Wie viele Hände haben alle Kinder deiner Klasse zusammen?
b) Wie viele Finger haben alle Kinder deiner Klasse zusammen?

Beilage zum Schülerbuch: Malfelder

85

Abbildung 8.44 Schulbuchseiten aus Fredo 2 zu den Reihen zu 1, 10 und 5 (Balins et al., 2014a, S. 84 f.)

Bearbeitung in BIRTE 2

In BIRTE 2 zeigt Romina „insgesamt eine deutlich unterdurchschnittliche Leistung“ (A-Gesamt-Romina, S. 1), ihre „Arbeitsgeschwindigkeit ist hoch“ (ebd.).

In folgenden Bereichen zeigt sie überwiegend *keinen besonderen Förderbedarf* (ebd.):

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- schnelle Zahlauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)

Romina findet überwiegend die jeweils passende Zahl zu einer Folge rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen (A-Orientierung Romina, S. 1). In strukturierten Arbeitsmitteln wie Würfelbildern und Zwanzigerfeldern erfasst sie Anzahlen quasi-simultan, in Hunderterfeldern jedoch häufig nicht (A-Basis Romina, S. 1). Sie ordnet eine vorgegebene Zahl auf dem Zwanzigerfeld passend zu, auf dem Hunderterfeld hat sie Schwierigkeiten (ebd., S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Zu acht Textaufgaben wählt sie dreimal die passende Operation (A-Grundvorstellung Romina, S. 1). Rechengeschichten löst sie weitgehend richtig (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

In folgenden Modulen zeigt sie *besonderen Förderbedarf* (A-Gesamt-Romina, S. 1):

- Zahlen einordnen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Zahlzerlegungen (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Romina hat Schwierigkeiten, Zahlen der Größe nach zu ordnen (A-Orientierung Romina, S. 1). Sie hat Probleme, die Zahlen 8, 9, 10 und 20 zu zerlegen sowie Zahlen bis 20 und 100 zu verdoppeln und zu halbieren (A-Basis Romina, S. 2). Additions- und Subtraktionsaufgaben löst sie häufig unpassend (A-Rechnen

Romina, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)
- Größenvorstellungen (Modulgruppe: Grund- und Größenvorstellungen)

Sie hat Probleme, zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich die passende Zahl zu finden (A-Orientierung Romina, S. 1). Tauschaufgaben löst sie richtig, Umkehraufgaben löst sie falsch (A-Rechnen Romina, S. 2). Analogieaufgaben löst sie meist nicht korrekt (ebd.). Das Schätzen von Preisen und Längen von Gegenständen gelingt ihr kaum passend (A-Grundvorstellung Romina, S. 1). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Romina in mehreren Modulen Förderbedarf zeigt, die für die ausgewählte Fördereinheit bedeutsam sind. Dadurch können in der Förderung zum Multiplikativen Verständnis zusätzliche Schwierigkeiten auftreten.

Bearbeitungen im Pre-, Post- und Follow-up-Test

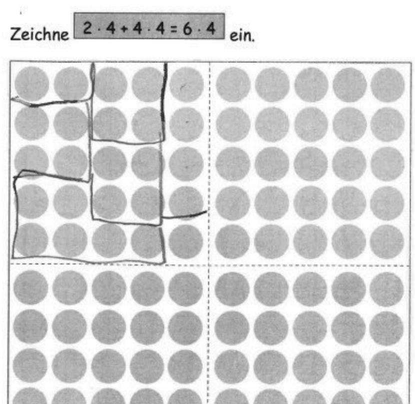


Abbildung 8.45: Rominas Bearbeitung im Pre-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

In Rominas Bearbeitung im Pre-Test (Abb. 8.45) sind jeweils die einzelnen Faktoren in der Aufgabenstellung gekennzeichnet: Links oben sind 2 Punkte markiert, darunter 4 Punkte, rechts daneben zweimal 4 Punkte und darunter 6 Punkte. Es sind somit u. a. auch zum Produkt $2 \cdot 4$ entsprechende Punkte markiert, so dass das eine Teilprodukt erkennbar ist. Denkbar ist auch, dass die Faktoren 2, 4 und 6 der jeweiligen Teilprodukte und des Summenproduktes in die Darstellung übersetzt werden sollten. Ein Bezug zur Aufgabenstellung insgesamt ist jedoch nicht erkennbar.

In Rominas Bearbeitung im Post-Test sind oben links im Punktefeld in den ersten 2 Zeilen je 4 Punkte und darunter nochmals in zwei Zeilen je 4 Punkte markiert (Abb. 8.46). Dies kann als zwei $2 \cdot 4$-Punktefelder oder als ein $4 \cdot 4$-Punktefeld interpretiert werden. Unter diese Markierung ist eine etwas schwächere Linie eingezeichnet, so dass ein $6 \cdot 4$-Punktefeld deutlich wird. Daneben hat Romina in der ersten Zeile 4 Punkte umrahmt, was als $1 \cdot 4$ gedeutet werden kann. Darunter sind in 3 Zeilen je 4 Punkte markiert, was als $3 \cdot 4$ interpretiert werden kann. Die Punktefelder für $1 \cdot 4$ und $3 \cdot 4$ können zusammen als ein Feld für $4 \cdot 4$ interpretiert werden. Romina verwendet für alle Markierungen einen roten Buntstift. Es kann vermutet werden, dass Romina weiß, wie die symbolische Form eines Produktes in ein Punktefeld übertragen werden kann, da die einzelnen Teilprodukte und das Summenprodukt in der Darstellung erkennbar sind. Zusätzlich sind aber auch Punktefelder eingezeichnet, die in der Aufgabenstellung nicht auftauchen. Die Gleichheit des linken und rechten Terms wird in ihrer Zeichnung ebenfalls nicht deutlich.

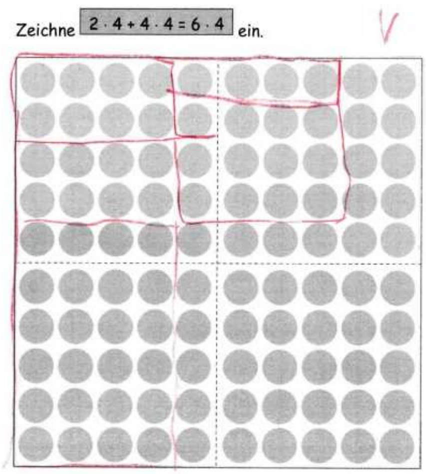


Abbildung 8.46: Rominas Bearbeitung im Post-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Rominas Bearbeitung im Follow-up-Test zeigt links oben im Punktefeld eine passende Markierung mit grünem Buntstift, bei der sowohl die Teilprodukte $2 \cdot 4$ und $4 \cdot 4$ als auch das Summenprodukt $6 \cdot 4$ erkennbar sind (Abb. 8.47). Die Felder sind so untereinander eingezeichnet, dass die Gleichheit des linken und rechten Terms deutlich wird. Sie übersetzt die symbolische Form also passend in die Punktefelddarstellung. Zusätzlich hat sie allerdings mit rotem Buntstift ein Feld markiert, was für das Produkt $6 \cdot 4$ im rechten Term stehen kann. Es kann vermutet werden, dass sie durchaus bereits ein gewisses Verständnis entwickelt hat. Die grüne Markierung links oben hätte für eine passende Bearbeitung allerdings ausgereicht. Die rote Markierung ist also überflüssig, was darauf hindeutet, dass Rominas Verständnis noch nicht vollständig entwickelt wurde.

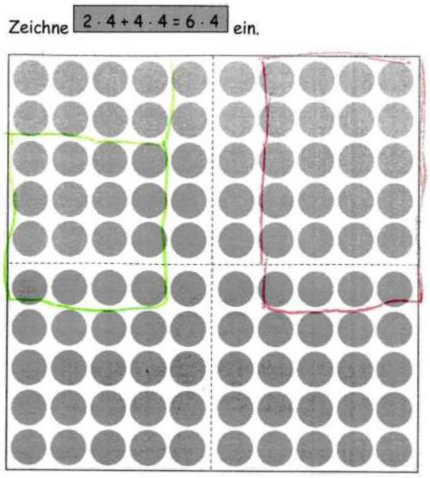
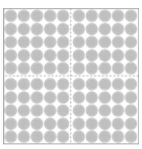
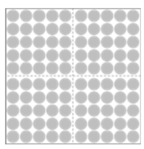


Abbildung 8.47: Rominas Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Im Vergleich zu Rominas Bearbeitung im Pre-Test, in der kein direkter Bezug zur Aufgabenstellung erkennbar ist, zeigen ihre Bearbeitungen im Post- und Follow-up-Test erhebliche Lernfortschritte. Sie zeigt in diesen, dass sie Produkte sehen kann. Es sind sowohl in Post- und Follow-up-Test alle Teilprodukte und das Summenprodukt erkennbar. In ihrer Bearbeitung im Follow-up-Test zeigt sie einen noch weiteren Lernfortschritt in Vergleich zum Post-Test. Die Gleichheit von linkem und rechtem Term wird jedoch noch nicht klar erkennbar.

Fördersitzung – Teil I

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ 	Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ 
1 I Wir machen damit weiter, wo wir letztes Mal aufgehört haben. [*I sucht in den Unterlagen ein Arbeitsblatt heraus, auf dem schon zwei Aufgaben bearbeitet wurden und legt es vor R hin*] Du erinnerst dich vielleicht noch. Mhm (bejahend). [*I legt einen Bleistift auf den Tisch*] Da sind wir so weit gekommen.	69 I Dann machen wir das Ganze noch einmal bei dem hier. [*I deutet auf $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9$; R gähnt*] Probier einmal. [*I notiert etwas auf dem nächsten Aufgabenblatt*] Auf geht‘s, einzeichnen. [*I deutet mit dem Stift auf das Punktefeld*] 2 mal 9. [*I deutet von $2 \cdot 9$ auf das Punktefeld*]

2	R	[*R nimmt den Bleistift in die Hand*]
3	I	Und da machen wir jetzt einfach weiter, ne? [*I legt den roten Buntstift auf den Tisch*] Genau. Da ging es ja darum, dass man diese Malaufgaben da eingezeichnet hat. [*I nimmt einen abgebrochenen roten Stift in die Hand und schaut ihn an*] Ou.
4	R	[*R lacht*]
5		[*I steht auf, man hört es rascheln*] Damit wird es nicht gehen. [*I kommt mit gespitztem rotem Buntstift wieder zurück und legt ihn auf den Tisch*] So, hier habe ich noch mal einen anderen Stift.
6	R	[*R nimmt den roten Buntstift in die Hand und schaut ihn an*]
7	I	Weißt du noch, wie das ging?
8	R	Mhm (bejahend). (da herauskommt 40?) (unv.) [*R legt die Hand mit dem Bleistift in der Hand auf das Arbeitsblatt*]
9	I	Genau. [*I zeigt mit Bleistift auf das Punktefeld der Aufgabe*] Wir probieren erst mal das einzuzeichnen. Erst mal das 5 mal 4. [*I kreist 5 · 4 auf dem Arbeitsblatt ein*] Das [*I zeigt mit dem Bleistift auf das Punktefeld der Aufgabe*] wird hier mit Bleistift eingezeichnet. Weißt du noch, wie das ging?
10	R	Mhm (eher verneinend). (unv.)
11	I	#5 mal 4.
12	R	Also jetzt soll ich hier [*R zeigt mit Bleistift auf das Punktefeld der Aufgabe*] 5 ein/
13	I	5 mal 4 [*I zeigt auf 5 · 4 auf dem Arbeitsblatt*] einzeichnen.
14	R	Also 4 mal die 5.
15	I	Ehm. Du hast ja hier [*I zeigt auf die Aufgabe darüber*] zum Beispiel/hast du ja 5 mal 7/ hast du ja hier 5 [*I zeigt mit dem Bleistift die ersten 5 Punkte der ersten Spalte entlang*] mal 7. [*I fährt mit dem Bleistift die ersten 7 Punkte der ersten Zeile entlang*
70	R	[*R zählt die ersten 2 Punkte der ersten Spalte; R umrahmt mit Bleistift die ersten 2 Zeilen mit jeweils 9 Punkten*]
71	I	Super. Und 5 mal 9.
72	R	[*R nimmt den roten Buntstift und zählt damit unter der ersten Markierung weitere 5 Punkte in der ersten Spalte ab, dann umrahmt sie mit dem roten Buntstift in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte*]
73	I	Mhm (bejahend). Gut.

		und von dort 5 Punkte nach unten] Ne? Und so machen wir das da auch.
16	R	[*R zählt die ersten 5 Punkte der ersten Spalte nach unten und zeichnet dort einen kleinen Strich ein*] 5. Und/ [*R zählt die ersten 4 Punkte der ersten Zeile*] 4. Ehm/
17	I	Genau. Bis dahin.
18	R	Also.
19	I	Mhm (bejahend).
20	R	[*R zeichnet einen Strich hinter die ersten 4 Punkte der ersten Zeile und von dort aus eine Linie hinter die ersten 5 Punkte der vierten Spalte*]
21	I	Genau.
22	R	[*R zeichnet von dort eine Linie unter der fünften Zeile nach links bis zum Rand des Punktefeldes*]
23	I	Kannst du mal das noch ganz einkreisen, [*I fährt mit dem Stift am linken und oberen Rand des Punktefeldes entlang, so dass die von R begonnene Markierung vervollständigt werden würde*] dass man das genau erkennt, dass das so gedacht ist?
24	R	[*R vervollständigt die Markierung am Rand des Punktefeldes entlang*]
25	I	Genau. Super. Und jetzt darunter kommt hier [*I legt die Spitze des roten Stifts an den ersten Punkt der sechsten Zeile*] die 1 mal 4 noch dazu.
26	R	[*R zeichnet direkt unter das schon markierte Punktefeld mit dem roten Buntstift ein 2 · 2-Punktefeld ein*]
27	I	Warte einmal, warte einmal. Eh, ich würde es gerne so machen, dass man das auch sieht, dass das 1 mal 4 ist. Das ist 1 [*I zeichnet einen senkrechten Strich vor den ersten Punkt der sechsten Zeile*] und 4. [*I fährt mit dem Stift 4 Punkte in der sechsten Zeile entlang*] Ja? Weißt du, wie ich meine?
28	R	Also, so? [*R deutet auf die 4 Punkte der*

		sechsten Zeile]
29	I	Mhm (bejahend). Bis da/ [*I deutet mit dem Stift auf den vierten Punkt der sechsten Zeile*] Bis da hinüber, genau.
30	R	[*R umrahmt die ersten 4 Punkte der sechsten Zeile mit rotem Buntstift*]
31	I	Genau. Genau, das ist ja 1 mal 4, ne? [*I deutet mit dem Stift auf das rot Markierte*] Das Rote jetzt. Siehst du das?
32	R	Mhm (bejahend). [*R zählt mit dem Stift die rot markierten Punkte nach*]
33	I	Genau.

33	I	Und jetzt kann man nämlich auch ganz gut ablesen, [*I deutet mit dem Stift auf das grau Markierte, dann auf das rot Markierte*] was dann das Ergebnis ist [*I deutet hinter das Gleichheitszeichen der Malaufgabe*] für eine Malaufgabe. [*I deutet mit dem Stift nochmals auf das grau Markierte, dann auf das rot Markierte*] Wenn man das nämlich hier anschaut/ [*I deutet mit dem Stift auf die ersten 6 Punkte der ersten Spalte und dann auf die ersten 4 Punkte der ersten Zeile*]
34	R	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7/ (flüstert) [*R zählt mit dem Stift die ersten 7 Punkte der ersten Spalte nach unten*]
35	I	Das da gehört ja nicht dazu, ne? [*I streicht die unpassend rot markierten 2 Punkte in der siebten Zeile weg*] So.
36	R	Achso. 2, 3, 4, (flüstert) [*R zählt mit dem Stift die ersten 5 Punkte der ersten Spalte nach unten*]
37	I	#Mhm (bejahend).
38	R	5.
39	I	5? Das gehört dazu. [*I deutet mit dem Stift auf das rot Markierte, legt den Stift weg, nimmt R den roten Stift aus der Hand und fährt die rote Umrahmung der*

73	I	Und jetzt schaust du einmal, was das Ergebnis ist, als Malaufgabe. Kannst du das ablesen bei den Punkten? [*I deutet auf das Punktefeld*]
74	R	Mhm. (7 sec) [*R nimmt den Bleistift und tippt mehrfach mit dessen Rückseite auf das Punktefeld*]
75	I	Eh, die Malaufgabe erst einmal. [*I deutet mit dem Stift hinter $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9$*] Du brauchst jetzt noch nicht alles zählen, sondern nur die Malaufgabe hinschreiben als Ergebnis.
76	R	Mhm (bejahend).
77	I	Was ist das für eine Malaufgabe? [*I deutet mit dem Stift die erste Spalte entlang*]
78	R	[*R deutet mit dem Stift auf das grau Markierte und gähnt*] 2 mal/ [*R will etwas hinter die Aufgabe schreiben*]
79	I	Nein. Was ist das Ganze für eine Malaufgabe? [*I deutet mit dem Stift die erste Spalte entlang*] Wir haben ja 2 mal 9, [*I deutet auf $2 \cdot 9$*] das ist das Graue [*I deutet auf das grau Markierte*] und 5 mal 9 [*I deutet auf $5 \cdot 9$*] ist das Rote. [*I deutet auf das rot Markierte*] Und das alles zusammen? [*I deutet die erste*

		ersten 4 Punkte der sechsten Zeile noch einmal nach] Also das ist jetzt das 1 mal 4, ne? [*I legt den roten Stift vor R, schiebt R das Blatt wieder zu und nimmt den eigenen Stift wieder in die Hand*] Zähl noch einmal.
40	R	1, 2, 3, 4, 5. [*R nimmt den roten Stift und zählt damit die ersten 5 Punkte der ersten Spalte*]
41	I	Und 6. [*I deutet mit dem Bleistift auf den sechsten Punkt der ersten Spalte*]
42	R	Ah.
43	I	Ne?
44	R	Mhm (bejahend). [*R legt den roten Buntstift weg, nimmt den Bleistift zur Hand und schreibt 6 hinter die Aufgabe*]
45	I	6 mal?
46	R	Mal [*R zählt mit Bleistift die ersten 4 Punkte der ersten Zeile*] 4. [*R schreibt 4 auf*]
47	I	Super.

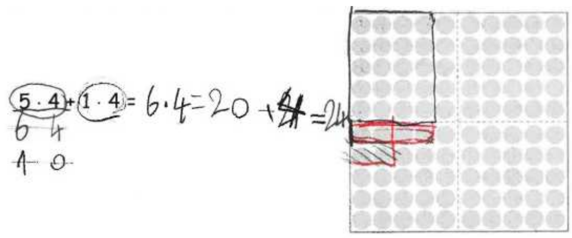
		Spalte entlang]
80	R	1, 2, 3, 4, 5, 6/ [*R zählt mit dem Stift die 7 markierten Punkte der ersten Spalte von unten nach oben*] 7 mal/ [*R schreibt 7 · hinter die Aufgabe; beginnt mit dem Stift die markierten Punkte der ersten Zeile zu zählen*]
81	I	Musst du das zählen?
82	R	Mhm (verneinend). Nein.
83	I	Nicht. Weißt du schon, ne?
84	R	[*R bricht das Zählen der Punkte ab und schreibt 9 hinter die Aufgabe*]
85	I	Genau. Super.

47	I	Weißt du das Ergebnis auch?
48	R	Eh.
49	I	Wenn nicht, kannst du es auch hier nacheinander ausrechnen. [*I deutet mit dem Stift unter die Aufgabe*] Was ist 5 [*I deutet auf 5*] mal 4? [*I deutet auf 4*] Weißt du das?
50	R	Ich habe schon irgendetwas von meiner/(zum Beispiel hier ist ...?) (unv.) [*R schreibt 6 · 4 unter 5 · 4, zeichnet einen Strich unter 5 · 4 und schreibt 1 unter 6 und 0 unter 4*]
51	I	Eh, was ist jetzt das?
52	R	Das ist nicht gut, oder? [*R legt den Stift weg und fasst sich an den Kopf*]
53	I	Eh, ich weiß jetzt nicht, was das bedeuten soll.

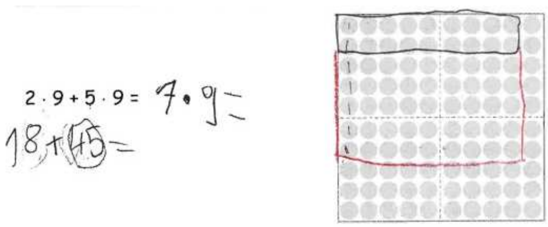
86	R	Ist gleich, oder? [*R deutet mit dem Stift hinter 7 · 9*]
87	I	Ja.
88	R	[*R atmet aus und beginnt in der ersten Spalte von unten nach oben die markierten Punkte zu zählen*]
89	I	Mhm, weißt du, was 2 mal 9 ist? [*I deutet mit dem Stift auf 2 · 9*]
90	R	18?
91	I	Mhm (bejahend). Schreibe doch hier einmal 18 hin. [*I tippt mit dem Stift unter 2 · 9*]
92	R	[*R schreibt 18 darunter*]
93	I	Plus.
94	R	[*R schreibt + hinter 18*]
95	I	Weißt du, was 5 mal 9 ist?

54	R	Ehm. (6 sec) Das mache ich immer bei Mathe. Weil, zum Beispiel hier ist 5. [*R deutet auf 5*] Zum Beispiel minus, minus und dann, nehme ich einen weg [*R deutet von 5 über 6 bis 1*], einen mehr [*R deutet von 1 zur unteren 4*], hier ist 4 [*R umkreist mit dem Finger die obere 4*] (da ist es noch) (unv.) [*R deutet auf 1 0)*]
55	I	Aber wir rechnen ja jetzt nicht minus oder plus, sondern wir/ also wir rechnen ja hier jetzt erst einmal 5 mal 4. [*I kreist mit dem Bleistift 5 · 4 ein*]
56	R	Ou.
57	I	Was ist denn 5 mal 4? Machen wir das einmal weg. [*I streicht 6 4 und 1 0 durch*] Weißt du, was 5 mal 4 ist?
58	R	Mhm (verneinend).[*R schüttelt den Kopf*]
59	I	5 mal 4 [*I deckt mit dem Stift die rot markierten Punkte ab*] war ja das Graue, ne? [*I deutet mit dem Stift auf das grau markierte Punktefeld*]
60	R	Mhm (bejahend). [*R zählt mit dem Stift die Punkte des grau markierten Punktefeldes einzeln ab und schreibt = 20 neben die Aufgabe*]
61	I	20. [*I deutet auf 20*] Aber das ist ja noch nicht das Ergebnis. [*I deutet erst auf 5 · 4, dann auf 1 · 4 und dann auf 6 · 4*] Da kommt ja noch plus [*I schreibt + hinter 20*] 1 mal 4 [*I kreist 1 · 4 ein*] dazu. Was ist 1 mal 4?
62	R	[*R schreibt 2 hinter das + und setzt zur nächsten Ziffer an*]
63	I	Ehm, stopp, stopp, stopp. Plus 4 [*I überschreibt die 2 mit 4*] musst du jetzt erst einmal hinschreiben, ne. 1 mal 4 ist 4, oder? [*I umkreist 1 · 4*]
64	R	Ehm, ja.
65	I	Genau. Also plus 4 [*I verstärkt noch 1 mal 4*] und jetzt noch einmal ist gleich. [*I schreibt = hinter 4*] Und jetzt darfst du
96	R	(10 sec) [*R deutet mit dem Stift auf verschiedene Stellen des 5 · 9-Punktefeldes*] 47, oder?
97	I	Mhm (verneinend). [*I schüttelt den Kopf*] 5 mal 9 [*I deutet mit dem Stift auf 5 · 9*] kann man ja auch relativ schnell so zählen. 5, 10, 15, 20, 25, 30. [*I fährt beim Zählen mit dem Stift jeweils 5 Punkte des rot markierten Bereichs spaltenweise entlang*] Immer Fünferschritte. Die kannst du glaube ich schnell, oder?
98	R	35, 40, 45 [*I und R zählen gemeinsam und fahren jeweils mit ihren Stiften die Fünferspalten entlang*]
99	I	Also 45.
100	R	[*R schreibt 45 hinter 18 +*]
101	I	Mhm (bejahend). Ist gleich?
102	R	[*R schreibt = hinter 18 + 45, gähnt und beginnt an den Fingern etwas abzuzählen*]
103	I	Weißt du was 45 plus 10 ist? [*I deutet mit dem Stift von 45 auf 18*]
104	R	(8 sec) Nein. 50?
105	I	Nein. 55 plus 10. Ein Zehner dazu. Zu den 45.
106	R	Mhm. [*R gähnt*] 51? Oder?
107	I	Nein. Zu den 45 kommt einfach ein Zehner dazu. 10 dazu.
108	R	Also dazu? [*R deutet mit dem Stift auf 45*]
109	I	Ja.
110	R	[*R kreist 45 ein*] Ehm.
111	I	Da tut sich ja bei den Einern [*I deutet mit dem Stift auf die Ziffer 5 der Zahl 45*] überhaupt nichts, wenn man da 10 dazu tut. Da tut sich nur etwas bei den Zehnern. [*I umkreist die Ziffer 4 der Zahl 45*] Da verändert sich etwas.

		noch das Endergebnis hinschreiben. [*I schiebt R das Blatt zu*] Kannst du auch darunter. [*I deutet unter 20 + 4*]
66	R	[*R schreibt 24 hinter 20 + 4 =*]
67	I	Ah ja, 24, perfekt. Also 6 mal 4 [*I deutet unter 6 · 4*] ist 24, ja?
68	R	Mhm (bejahend).



112	R	Also 55? [*R deutet mit dem Stift hinter die Aufgabe*]
113	I	55. So und jetzt müssen wir noch plus 8 rechnen. [*I umkreist die Ziffer 8 der Zahl 18*] 55 plus 8.
114	R	(24 sec) [*R zählt etwas an den Fingern ab, schüttelt den Kopf, beginnt von Neuem etwas an den Fingern abzuzählen*] 53?
115	I	Nein. 55 plus 8. Die 3, die stimmt schon.
116	R	[*R versucht erneut etwas an den Fingern abzuzählen*] 43?
117	I	Na weniger, wenn man plus rechnet, kann es nicht sein, oder? 63 kommt heraus. 10 mehr noch.
118	R	63 (geflüstert).
119	I	Also 7 mal 9 wäre 63. [*I deutet auf 7 · 9 und dann hinter die Aufgabe*] Okay. Machen wir direkt weiter. [*I nimmt das bearbeitete Arbeitsblatt weg*]



Analyse

Romina bearbeitete die beiden ersten Aufgabenstellungen zu Summenprodukten nicht in derselben, sondern in der vorausgegangen Fördersitzung. Um die Vorgehensweise der Bearbeitung bei Romina wieder ins Gedächtnis zu rufen, knüpft die Interviewerin zu Beginn der Aufgabenstellung $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ an die Inhalte dieser vorausgegangenen Sitzung an (SB 1, 3). Sie weist darauf hin, dass bei dieser Aufgabe Malaufgaben eingezeichnet werden müssen (SB 3). Die Interviewerin fragt Romina, ob sie noch wüsste, wie die Aufgabe gehe (SB 7). Romina bejaht dies, beginnt von sich aus jedoch nicht mit der Bearbeitung (SB 8). Die Interviewerin weist darauf hin, dass man zunächst 5 mal 4 mit Bleistift einzeichnen müsse, kreist dabei auf dem Arbeitsblatt das Teilprodukt $5 \cdot 4$ ein und fragt Romina nochmals, ob sie noch wüsste, wie das gehe (SB 9). Romina verneint dies (SB 10) und die Interviewerin nennt nochmals das Teilprodukt $5 \cdot 4$ (SB 11). Romina beginnt nachzufragen (SB 12) und die Interviewerin wiederholt, dass sie 5 mal 4 einzeichnen müsse (SB 13). Romina sagt „Also 4 mal die 5“ (SB 14). Romina scheint sich nicht daran zu erinnern, wie ein Summenprodukt und vermutlich auch nicht wie ein einfaches Produkt in die Darstellung des Punktefeldes eingezeichnet werden kann. Die Interviewerin verweist nun auf die Aufgabe $5 \cdot 7 + 1 \cdot 7$, die in der vorangegangenen Sitzung bearbeitet wurde, und zeigt anhand des Produktes $5 \cdot 7$, dass dafür im Punktefeld in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte eingezeichnet wurden (SB 15). Das Beispiel aus der vorherigen Aufgabe scheint Romina zu helfen, sich wieder zu erinnern, wie Produkte in Punktefelder übertragen werden können. Romina zählt nun die ersten 5 Punkte in der ersten Spalte, macht unter dem fünften Punkt eine kleine Markierung und zählt die ersten 4 Punkte in der ersten Zeile (SB 16). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 17). Romina zeichnet eine Linie hinter die vierte Spalte und unter die fünfte Zeile, sodass in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte markiert sind (SB 20, 22). Sie zeigt nun, dass sie wieder weiß, wie ein Produkt in die Felddarstellung übersetzt werden kann. Die Interviewerin bittet sie, die Markierung noch zu vervollständigen, und fährt dabei mit dem Stift am linken und oberen Rand des Punktefeldes entlang (SB 23). Romina zeichnet weitere Linien am Rand des Punktefeldes ein, so dass das $5 \cdot 4$-Punktefeld vollständig eingerahmt ist (SB 24). Die Interviewerin weist nun darauf hin, dass das Produkt $1 \cdot 4$ noch dazu komme und darunter eingezeichnet werde (SB 25). Romina zeichnet unter das $5 \cdot 4$-Punktefeld mit rotem Buntstift ein $2 \cdot 2$-Punktefeld ein (SB 26). Romina scheint verinnerlicht zu haben, zwei verschiedene Farben zu verwenden, markiert die 4 Punkte allerdings in einer unpassenden Struktur. Um die Distributivität deutlich zu machen, ist eine einheitliche Sichtweise erforderlich, welcher Faktor der Teilprodukte jeweils als Spalten und welcher als Zeilen eingezeichnet wird. Deswegen sagt die Interviewerin, dass sie gerne hätte, dass man das Produkt $1 \cdot 4$ direkt sehe und zeigt dabei auf die ersten 4 Punkte in der sechsten Zeile direkt unter dem $5 \cdot 4$-Punktefeld (SB 27). Romina deutet ebenfalls auf die ersten 4 Punkte in der sechsten Zeile und fragt, ob es so richtig sei (SB 28). Die Interviewerin zeigt auf den vierten Punkt der sechsten Zeile und weist darauf hin, dass bis dahin markiert werden müsse (SB 29). Romina markiert die ersten 4 Punkte der sechsten Zeile mit rotem Buntstift (SB 30). Die Interviewerin stimmt zu und weist nochmals darauf hin, dass das rot Markierte 1 mal 4 sei und fragt, ob Romina das sehe (SB 31). Romina bejaht dies und zählt nochmals die 4 rot markierten Punkte nach (SB 32). Das Einzeichnen der beiden Teilprodukte erfolgt ziemlich angeleitet und Romina benötigt sehr viele Hilfsimpulse.

Die Interviewerin weist nun darauf hin, dass man jetzt ganz gut ablesen könne, welche Malaufgabe im Ergebnis stehen müsse und deutet auf die ersten 6

Punkte der ersten Spalte und auf die ersten 4 Punkte der ersten Zeile (SB 33). Romina zählt die ersten 7 Punkte der ersten Spalte (SB 34) und die Interviewerin macht deutlich, dass die zuvor fälschlicherweise markierten Punkte in der siebten Zeile nicht dazugehören würden, indem sie die Linie mit Bleistift durchstreicht (SB 35). Romina zählt nun die ersten 5 Punkte der ersten Spalte (SB 36) und nennt 5 als ersten Faktor (SB 38). Nun sagt die Interviewerin, dass das rot markierte Punktefeld dazugehören würde, markiert dies nochmals mit dem roten Buntstift und weist darauf hin, dass dies 1 mal 4 sei (SB 39). Sie fordert Romina auf, nochmals nachzuzählen (SB 40). Romina zählt die ersten 5 Punkte der ersten Spalte (SB 40). Die Interviewerin nennt nun 6 und zeigt auf den sechsten Punkt der ersten Spalte (SB 41). Romina stimmt zu und schreibt $6 \cdot$ hinter die Aufgabe (SB 44). Es kann vermutet werden, dass Romina eigentlich immer noch nicht richtig verstanden hat, dass der erste Faktor des Summenproduktes in dem grau und rot markierten Feld ‚abgelesen' werden kann. Sie zählt ab und nutzt damit die Struktur des Punktefeldes nicht. Die Interviewerin fragt, mit welcher Zahl 6 malgenommen werden müsse (SB 45). Romina zählt die ersten 4 Punkte der ersten Zeile und nennt 4 als zweiten Faktor des Summenproduktes (SB 46). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 47). Beim zweiten gleichbleibenden Faktor des Summenproduktes scheint sie zu wissen, wie er in der Darstellung abgelesen werden kann. Auch hier nutzt sie jedoch die Struktur des Punktefeldes nicht, sondern zählt die Punkte einzeln ab.

Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis (SB 47) und Romina scheint zu überlegen (SB 48). Die Interviewerin möchte ihr die Möglichkeit aufzeigen, das Endergebnis mithilfe der Ergebnisse der Teilprodukte zu ermitteln. Deswegen fragt sie, was 5 mal 4 sei und deutet jeweils auf die entsprechenden Zahlen in der Aufgabenstellung (SB 49). Romina schreibt nun das Produkt $6 \cdot 4$ unter das Teilprodukt $5 \cdot 4$ und daraufhin 1 unter 6 und 0 unter 4 (SB 50). Die Interviewerin will wissen, was das sein soll (SB 51). Romina fragt, ob das wohl nicht gut sei (SB 52). Die Interviewerin antwortet, dass sie nicht wüsste, was das bedeuten solle (SB 53). Romina erklärt, dass sie das in Mathe immer so machen würde, zum Beispiel beim Minusrechnen, und versucht ihr Vorgehen zu erklären (SB 54). Aus den notierten Ziffern ist zu entnehmen, dass sie jeweils die Faktoren des Produktes $5 \cdot 4$ von den Faktoren des Produktes $6 \cdot 4$ subtrahiert hat ($6 - 5$ und $4 - 4$) und so zu den Zahlen 1 und 0 kommt. Sie scheint das Ziffernrechnen des schriftlichen Subtraktionsverfahrens für die Berechnung des Produktes anwenden zu wollen. In der symbolischen Form der Aufgabe sieht sie die Faktoren der Teilprodukte lediglich als Ziffern. Obwohl sie die Produkte in der Punktefelddarstellung entsprechend eingezeichnet hat, scheint ihr die Bedeutung des Produktes als Felddarstellung mit einer spezifischen Anzahl an Zeilen und Spalten noch nicht bewusst zu sein. Die Interviewerin sagt, dass sie jetzt nicht minus oder plus rechnen würden, sondern zunächst 5 mal 4 (SB 55).

Romina reagiert mit einem Ausruf des Erstaunens (SB 56) und die Interviewerin fragt nochmals nach dem Ergebnis zum Teilprodukt $5 \cdot 4$ (SB 57). Sie streicht außerdem das vorher notierte Produkt $6 \cdot 4$ und die Zahlen 1 und 0 unter der Aufgabenstellung weg (SB 57). Romina verneint (SB 58). Die Interviewerin gibt den Hinweis, dass 5 mal 4 das grau markierte Feld sei und zeigt darauf (SB 59). Romina hat zum Produkt $5 \cdot 4$ zwar das passende Punktefeld selbst markiert, denkt bei der Ergebnisermittlung des Produktes von sich aus aber nicht daran, dass in diesem die Anzahl der Elemente enthalten sein müssen. Romina stimmt zu und erkennt das grau markierte Punktefeld nun offenbar als $5 \cdot 4$-Punktefeld, da sie jetzt mit dem Stift die Punkte dieses Feldes einzeln abzählt (SB 60). Sie schreibt 20 hinter das Gleichheitszeichen (SB 60). Sie denkt an dieser Stelle scheinbar nicht daran, dass zusätzlich das Produkt $1 \cdot 4$ addiert werden muss. Die Interviewerin weist darauf hin, dass dies noch nicht das Ergebnis sei und nun noch 1 mal 4 dazukommen würde (SB 61). Dabei notiert sie ein Additionszeichen hinter 20 sowie kreist das Teilprodukt $1 \cdot 4$ ein (SB 61). Sie fragt nach dem Ergebnis für das Produkt $1 \cdot 4$ (SB 61). Romina notiert 2 hinter das Additionszeichen und will noch weiterschreiben (SB 62). Vermutlich will sie bereits das Endergebnis aufschreiben. Die Interviewerin unterbricht sie und sagt, dass es plus 4 heißen müsse und verbessert die 2 zu einer 4 (SB 63). Romina stimmt zu (SB 64). Die Interviewerin weist darauf hin, dass Romina nun noch das Endergebnis aufschreiben dürfe und die Interviewerin notiert ein Gleichheitszeichen hinter 4 (SB 65). Romina notiert 24 als Endergebnis. Die Interviewerin stimmt zu und sagt, dass 6 mal 4 24 sei (SB 66). Romina stimmt wieder zu (SB 68). Romina benötigt sehr viele Hilfsimpulse, sodass die Interviewerin sehr angeleitet vorgeht. Es bleibt unklar, ob Romina lediglich den Hinweisen folgt oder ob sie zumindest Teile der Vorgehensweise verstanden hat. Insgesamt deutet Rominas Verhalten jedoch darauf hin, dass sie momentan noch sehr viel Unterstützung benötigt, ein Summenprodukt in eine Punktefelddarstellung zu übertragen. Verständnis scheint also noch zu wenig entwickelt worden zu sein.

Bei der Aufgabenstellung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ gibt die Interviewerin den Hinweis, zunächst das Produkt $2 \cdot 9$ einzuzeichnen und deutet auf das Produkt und auf das Punktefeld (SB 69). Romina zählt in der ersten Spalte die ersten 2 Punkte und markiert in den ersten 2 Zeilen jeweils 9 Punkte (SB 70). Die Interviewerin stimmt zu und nennt das zweite Teilprodukt $5 \cdot 9$ (SB 71). Romina nimmt selbstständig den Buntstift, zählt weitere 5 Punkte in der ersten Spalte und markiert unter der ersten Markierung in weiteren 5 Zeilen jeweils 9 Punkte (SB 72). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 73). Es wird deutlich, dass Romina gelernt hat, dass die Teilprodukte mit unterschiedlichen Farben direkt untereinander im Punktefeld eingezeichnet werden. Um den Fokus auf die Teilprodukte zu richten, nennt die Interviewerin diese jeweils. Romina zählt den jeweiligen ersten Faktor (2 und 5) ab, den zweiten gleichbleibenden Faktor 9 findet sie sehr schnell. Möglich ist, dass sie bereits festgestellt hat, dass dieser in den Teilprodukten und im Summenprodukt gleich bleibt. Vielleicht hat sie außerdem erkannt, dass von 10 Spalten lediglich 1 Spalte abgezogen werden muss, um 9 Spalten zu erhalten. Damit würde sie die Strukturierung des Hunderterpunktefeldes nutzen.

Die Interviewerin fragt nun, ob Romina das Ergebnis als Malaufgabe im Punktefeld ‚ablesen' könne (SB 73). Romina tippt mehrfach mit dem Bleistift auf das markierte Punktefeld (SB 74), sodass der Eindruck entsteht, dass sie die Punkte einzeln abzählen will. Die Interviewerin sagt, dass sie nun noch nicht alles zählen müsse, sondern zunächst die passende Malaufgabe aufschreiben soll (SB 75). Romina stimmt zu (SB 76). Die Interviewerin fragt nochmals nach dem Summenprodukt und fährt mit dem Stift die erste Spalte entlang (SB 77). Romina zeigt auf das grau markierte $2 \cdot 9$-Punktefeld, sagt „2 mal" (SB 78) und setzt an, etwas aufzuschreiben (SB 78). Die Interviewerin unterbricht sie und fragt, welche Malaufgabe das Ganze sei und fährt mit dem Stift die erste Spalte entlang (SB 79). Vermutet werden kann, dass Romina noch nicht verstanden hat, dass die beiden markierten Punktefelder zusammen dem Summenprodukt entsprechen. Die Interviewerin sagt, dass das grau Markierte 2 mal 9 und das rot Markierte 5 mal 9 sei, wobei sie jeweils auf die grau und rot markierten Punktefelder deutet (SB 79). Sie fragt, was das zusammen sei (SB 79). Romina zählt nun die 7 markierten Punkte der ersten Spalte von unten nach oben ab und nennt und notiert 7 als ersten Faktor des Summenproduktes (SB 80). Mit Hilfestellung kann Romina nun den ersten Faktor in der Darstellung ‚ablesen', indem sie zählt. Sie nutzt die Strukturierung des Punktefeldes aber nicht. Sie beginnt die Punkte der ersten Zeile zu zählen (SB 80). Die Interviewerin fragt, ob Romina das zählen müsse (SB 81), Romina verneint (SB 82), unterbricht das Zählen und notiert 9 als zweiten gleichbleibenden Faktor des Summenproduktes (SB 84). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 85). Den zweiten Faktor muss sie offenbar nach entsprechendem Hinweis nicht zählen. Möglich sind zwei Interpretationen. Zum einen ist es denkbar, dass sie den zweiten gleichbleibenden Faktor bereits stärker präsent hat, da er in den Teilprodukten und im Summenprodukt gleich bleibt. Zum anderen könnte es auch sein, dass sie den Faktor 9 schnell in der Darstellung erkennt, da von 10 Spalten lediglich 1 Spalte abgezogen werden muss.

Romina fragt, ob sie das Summenprodukt nun wohl berechnen müsse (SB 86) und die Interviewerin stimmt zu (SB 87). Romina beginnt in der ersten markierten Spalte die Punkte einzeln zu zählen (SB 88). Dies deutet darauf hin, dass sie vorhat, alle Punkte des markierten Punktefeldes zu zählen. Sie weiß somit vermutlich noch nicht, dass zur Ergebnisermittlung die Ergebnisse der

Teilprodukte addiert werden können. Die Interviewerin fragt deshalb, ob Romina wüsste, was 2 mal 9 sei und deutet dabei auf das Produkt (SB 89). Romina nennt fragend 18 als Ergebnis für das Teilprodukt (SB 90). Die Interviewerin stimmt zu, und bittet sie, 18 unter das Produkt $2 \cdot 9$ zu notieren (SB 91). Romina schreibt 18 unter das Produkt (SB 92), die Interviewerin diktiert ihr das Additionszeichen (SB 93) und Romina schreibt es hinter 18 (SB 94). Es wird nicht ersichtlich, ob Romina die einzelnen Schritte jeweils lediglich ausführt oder zusätzlich auch versteht, warum sie sie ausführt. Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zum Produkt $5 \cdot 9$ (SB 95). Romina deutet auf verschiedene Stellen des $5 \cdot 9$-Punktefeldes und nennt fragend als Ergebnis 47 (SB 96). Sie scheint die Punkte im markierten Punktefeld zu zählen, um das Ergebnis zu ermitteln. Die Interviewerin verneint und erklärt, dass man 5 mal 9 auch relativ schnell durch Zählen in Fünferschritten finden kann (SB 97). Sie nennt dazu die Ergebnisse der Fünferreihe 5, 10, 15, 20, 25 und 30 und fährt zur Verdeutlichung dabei jeweils mit dem Stift die rot markierten Fünferspalten im Punktefeld entlang (SB 97). Romina setzt bei 35 mit ein und sie zählen und zeigen gemeinsam auf die entsprechende Spalte im markierten Punktefeld (SB 98). Die Interviewerin nennt 45 als Ergebnis (SB 99) und Romina schreibt es auf (SB 100). Da Romina nun in Fünferschritten mitzählt, kann vermutet werden, dass ihr anhand der Darstellung klar wird, wie das Ergebnis zum Teilprodukt $5 \cdot 9$ ermittelt wird. Die Interviewerin stimmt zu und weist darauf hin, ein Gleichzeichen zu notieren (SB 101). Romina erledigt dies und beginnt etwas an den Fingern abzuzählen (SB 102). Das deutet darauf hin, dass Romina klar ist, dass sie nun $18 + 45$ berechnen muss. Die Interviewerin fragt, ob Romina wüsste, was 45 plus 10 sei und deutet mit dem Stift erst auf 45, dann auf 18 (SB 103). Damit gibt sie die halbschriftliche Strategie des schrittweisen Rechnens vor (z. B. Padberg & Benz, 2011, S. 105 ff.). Nach einer Pause von 8 Sekunden verneint Romina zunächst und nennt dann 50 als Ergebnis (SB 104). Die Interviewerin verneint und fragt, was 55 plus 10 sei und fügt hinzu, dass zu den 45 ein Zehner hinzukommen würde (SB 105). Dabei verspricht sie sich zu Beginn und nennt als ersten Summenanden 55 statt 45 (SB 105). Romina nennt fragend 51 als Ergebnis (SB 106). Die Interviewerin verneint und sagt nochmals, dass zu 45 ein Zehner hinzugezählt wird (SB 107). Romina fragt, ob etwas hinzugefügt wird und deutet auf 45 (SB 108), die Interviewerin stimmt zu (SB 10) und Romina markiert 45 (SB 110). Die Interviewerin erklärt, dass sich bei den Einern nichts verändern würde, wenn 10 hinzukommt, und deutet dabei auf die Einerziffer 5 der Zahl 45 (SB 111). Weiter führt sie aus, dass sich nur bei den Zehnern etwas verändert und markiert die Zehnerziffer der Zahl 45 (SB 111). Romina nennt fragend 55 als Ergebnis (SB 112). Die Interviewerin stimmt zu und sagt, dass sie jetzt noch 55 plus 8 rechnen müssten (SB 113). Nach 24 Sekunden zählt Ramona etwas an den Fingern ab und nennt fragend 53 als Ergebnis (SB 114). Die Interviewerin verneint, fragt nochmals, was 55 plus 8 ist und fügt hinzu, dass die 3 schon stimmen würde (SB 115). Ramona zählt wieder etwas mit den Fingern ab und nennt fragend 43 als Ergebnis (SB 116). Die Interviewerin gibt den Hinweis, dass es nicht weniger sein könne, wenn addiert wird, nennt das Ergebnis 63 und fügt hinzu, dass es 10 mehr seien (SB 117). Ramona flüstert 63 (SB 118) und die Interviewerin sagt, dass 7 mal 9 63 seien und deutet dabei auf $7 \cdot 9$ und hinter das Gleichzeichen (SB 119). Die ganze Phase der Berechnung der Aufgabe $18 + 45$ deutet darauf hin, dass Romina noch keine passende Vorstellung von Zahlen und deren Stellenwerte sowie der Addition von Zahlen entwickelt hat. Dies wird auch in ihrer Bearbeitung in BIRTE 2 deutlich. Sie zeigt dort u. a. im Bereich der Orientierung im Zahlenraum und beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben besonderen Förderbereich.

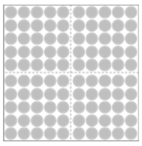
Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Romina bei der ersten Aufgabenstellung sehr viele Hilfsimpulse benötigt, um die Aufgabe passend einzuzeichnen, bei der zweiten Aufgabenstellung gelingt ihr dies schon etwas selbstständiger. Bei der Ermittlung des ersten Faktors des Summenproduktes benötigt sie bei beiden Aufgabenstellungen Hilfe, den zweiten Faktor findet sie jeweils recht zügig, bei der zweiten Aufgabe mit entsprechendem Hinweis ohne zu zählen. Sie nutzt also nach und nach mit entsprechender Unterstützung die Strukturierung des Punktefeldes. Bei der Ergebnisermittlung zeigt sie bei beiden Aufgabenstellungen große Schwierigkeiten. Ihr scheint noch nicht klar zu sein, dass die Ergebnisse der Teilprodukte zur Ergebnisermittlung genutzt werden können. Zudem hat sie Probleme bei der Addition der zweistelligen Zahlen. Dies wird auch in ihrer Bearbeitung von BIRTE 2 bestätigt, in der sie ebenfalls u. a. beim Lösen von Plusaufgaben mit zweistelligen Zahlen Schwierigkeiten zeigt (s. o.). Den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form der Aufgaben in die Punktefelddarstellung vollzieht Romina mit Hilfestellungen, was darauf hindeutet, dass sie vermutlich nur teilweise Verständnis entwickelt hat.

Fördersitzung – Teil II

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

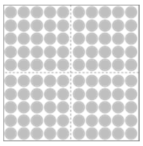
$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 = \_\_$



120	I	[*I legt ein neues Arbeitsblatt vor R*] Eh, das Ganze geht auch noch in minus. Man kann jetzt mit Bleistift erst einmal die 5 mal 7 [*I kreist zweimal 5 · 7 ein*] da [*I deutet auf das Punktefeld*] da einzeichnen, bitte. [*I macht sich Notizen auf einem gesonderten Blatt*]
121	R	[*R stöhnt leise und schüttelt den Kopf; R tippt mit dem Stift auf 3 Punkte der ersten Zeile von rechts nach links; nach dem dritten Punkt von rechts zeichnet sie eine Linie hinter der fünften Spalte und unter der siebten Zeile, sodass ein 5 · 7-Punktefeld erkennbar ist*]
122	I	Genau, stopp. [*I greift nach dem roten Stift*]
123		[*R umrahmt das Punktefeld fertig*]
124		Ah ja. Mhm (bejahend). [*I zieht das Blatt zu sich heran*] Und jetzt die 1 mal 7 [*I unterstreicht – rot*] kommt weg. [*I deutet ans untere Ende des grau Eingezeichneten*] Das heißt, die wird hier [*I deutet mit dem Stift die unterste Zeile des grau Markierten entlang*] noch miteingezeichnet. [*I legt den roten Stift vor R; R gähnt*] Mit in diese grauen, genau.
125	R	[*R zeichnet einen roten Strich zwischen die fünfte und sechste Zeile bis zur einschließlich siebten Spalte*]
126	I	Super, spitze.
127	R	Mhm (seufzend).
128	I	1 mal 7, genau. [*I greift nach dem roten Buntstift*] Also machst du noch einmal

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \_\_ \cdot \_\_ = \_\_$



151	I	Machen wir einmal hier weiter. [*I tippt mit dem roten Buntstift auf das Punktefeld der Aufgabe 10 · 8 – 1 · 8 und legt den roten Buntstift vor R*] 10 mal 8 [*I deutet auf 10 · 8*] erst einmal [*I fährt mit dem Finger die erste Spalte des Punktefeldes entlang*] mit Bleistift einzeichnen, bitte. [*I notiert sich etwas auf einem separaten Blatt*]
152	R	10 mal? [*R zählt mit dem Bleistift die einzelnen Punkte der ersten Spalte nach*] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 (flüstert). Mal die 8. [*R zeichnet einen Strich nach der achten Spalte ein und erweitert diesen zu einer Umrahmung, der die 10 Zeilen mit jeweils 8 Punkten umfasst*]
153	I	Mhm (bejahend). Super. Minus 1 mal 8. [*I deutet mit dem Stift auf 1 · 8*] Wieder so, wie da oben. [*I deutet mit dem Stift auf das Punktefeld der Aufgabe 5 · 7 – 1 · 7*]
154	R	(7 sec) [*R gähnt, nimmt den roten Buntstift und zeichnet unter die neunte Zeile einen Strich in das grau markierte Punktefeld*]
155	I	Mhm (bejahend). Ka/ Mal/ Rahmst du es noch komplett ein, bitte. [*I deutet mit dem Stift unter die zehnte Zeile des Punktefeldes*]
156	R	[*R ergänzt mit dem roten Buntstift die Umrahmung*]
157	I	Mhm (bejahend). Super.

		dann auch so. [*I umrahmt in der sechsten Zeile 7 Punkte vollständig*] Genau. [*I legt den roten Buntstift vor R*]

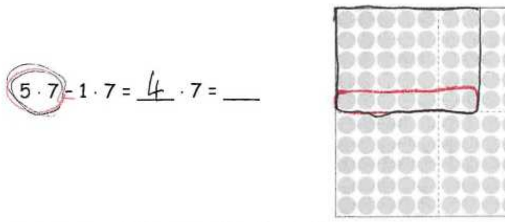
128	I	Und jetzt bleibt etwas übrig. Auch wieder eine Malaufgabe. [*I deutet auf den Platzhalter vor* $\cdot 7$] Hmhmhm mal 7.
129	R	Also das ist die hmhmhm? [*R deutet mit dem Stift auf die 4 Punkte der ersten Spalte*]
130	I	Ja. [*I nickt*] (lacht) Genau.
131	R	[*R zählt mit dem Stift die rein grau markierten ersten 4 Punkte der ersten Spalte*] Also/
132	I	Ja? [*I nickt*]
133	R	Ah. Hier soll 4/ [*R deutet auf den Platzhalter*]
134	I	# Super. [*I nickt*]
135	R	Weil hier 7. [*R deutet auf die grau markierten Punkte der ersten Zeile*]
136	I	# Genau, perfekt.
137	R	[*R schreibt 4 in den Platzhalter*]
138	I	Super. [*R seufzt*]

157	I	Und was kommt heraus?
158	R	Ehm. Also, hier ist 1, 2, 3, 4, 5/ [*R zählt mit dem Bleistift die Punkte der ersten Spalte nach unten*] 10 mal/ [*R schreibt 10 in den ersten Platzhalter*]
159	I	Eh, schau noch einmal, bitte.
160	R	Ouh. 9 mal. (geflüstert)
161	I	Mhm (bejahend). Genau.
162	R	[*R streicht 10 durch und schreibt 9 darüber*] Mal/ 1, 2/ [*R zählt die ersten 3 Punkte der ersten Zeile mit dem Stift nach*] Und da 8.
163	I	Genau. Super.
164	R	[*R schreibt 8 in den zweiten Platzhalter*]

138	I	Weißt du das Ergebnis auch?
139	R	Also, von/ [*R dreht das Blatt I zu und deutet mit dem Stift auf* $5 \cdot 7$*; R gähnt*]
140	I	Weißt du von 4 mal 7 das Ergebnis?
141	R	(7 sec) (unv., flüstert)
142	I	Oder weißt du von 5 mal 7 das Ergebnis? [*I dreht das Blatt wieder R zu*]
143	R	(7 sec) [*R bewegt lautlos die Lippen*] (8 sec)
144	I	Da kannst du auch wieder hochrechnen. [*I deutet auf* $5 \cdot 7$] 5 [*I deutet auf die erste markierte Spalte*], 10 [*I deutet auf*

164	R	Also ist/ (Ah, das ist leicht?) (unv.) [*R deutet Richtung Blatt*]
165	I	#Weißt du was 10 mal 8 ist? [*I deutet auf* $10 \cdot 8$]
166	R	Ehm. [*R schreibt 80 unter* $10 \cdot 8$]
167	I	Super. Minus. [*I deutet auf* $1 \cdot 8$]
168	R	Ah. Ehm, 79 dann, oder?
169	I	Schreib jetzt erst einmal noch hin, was man minus rechnen muss. [*I tippt mehrmals auf* $1 \cdot 8$]
170	R	Achso.
171	I	Minus?

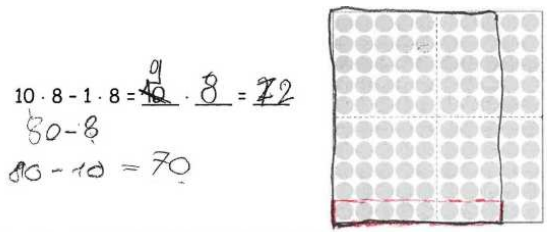
		die zweite markierte Spalte], 15 [*I deutet auf die dritte markierte Spalte*], 20. [*I legt den Stift vor R*] Bis 7 mal.
145	R	Oder, könnte ich jetzt, weil das ist doch minus. [*R deutet auf die Aufgabe*]
146	I	Mhm (bejahend).
147	R	Was ich gemacht habe. Zum Beispiel hier einen Strich [*R deutet in der Luft einen Strich unter 5 · 7 – 1 · 7 an*] und/
148	I	[*I nimmt den roten Stift in die Hand*] Das kann man prinzipiell schon machen, aber da brauchen wir das Ergebnis von 5 mal 7. [*I kreist 5 · 7 rot ein*]
149	R	Mhm. [*gähnt*]
150	I	Dann lassen wir das erst einmal.



172	R	Muss ich/? [*R will etwas unter 80 schreiben*]
173	I	Das passt schon. Minus? [*I deutet auf -*] Schreib einmal minus hin.
174	R	[*R schreibt – hinter 80*]
175	I	Minus, was ist 1 mal 8? [*I deutet auf 1 · 8*]
176	R	Na 8?
177	I	8. Schreib es hin.
178	R	[*R schreibt 8 unter 1 · 8*]
179	I	Genau. Okay. Was kommt jetzt da heraus?
180	R	(6 sec) Oh, wir hatten das auch schon. (seufzt) (Bei der Hausaufgabe. Das ist mir schwer gefallen?) (unv., flüstert) [*R massiert sich die Schläfen*] Weil dann kommt minus? Das bleibt dann null. [*R deutet auf 10 · 8*] Weil/
181	I	Weißt du was 80 minus 10 ist?
182	R	[*R holt tief Luft*] Oh! Also, das, was ich hier gesagt habe? [*R deutet mit dem Stift auf 9 · 8*] Also ehm, 79 oder?
183	I	Nein.
184	R	Dann?
185	I	79, da hätte man ja nur 1 abgezogen.
186	R	Ah. (6 sec) Autsch. [*R stößt sich, als sie das Bein auf den Stuhl zieht*] Warte dann/
187	I	Weißt du, was 80 minus 10 ist?
188	R	Mhm (verneinend). [*R schüttelt den Kopf*]
189	I	Nicht? Doch, oder?
190	R	[*R schüttelt den Kopf*]
191	I	[*I legt den Stift beiseite und sucht in einem Karton nach einem Blatt*] Finde ich jetzt hier nicht. [*I stellt den Karton weg, zieht das Aufgabenblatt vor R zu sich*] Also 80, wir schauen es uns einmal hier an. [*I legt den Finger und den Bleistift auf das*

		noch freie dritte Punktefeld auf dem Blatt] Ist ja bis dahin, ne? [*I fährt mit der flachen Seite des Stiftes von der ersten bis zur achten Zeile und verdeckt beim Stoppen die neunte und zehnte Zeile*]
192	R	Mhm (bejahend).
193	I	[*I nickt*] Das sind 80. [*I tippt mit einem zweiten Stift auf den ersten Punkt der ersten Spalte, dann auf den achten Punkt der ersten Spalte und dann auf den zehnten Punkt der achten Zeile*] Und wenn da 10 wegkommen/ [*I nimmt den Bleistift, der auf dem Punktefeld liegt, und verschiebt ihn um eine Zeile nach oben; R gähnt*] 10 kommen weg. Wie viele bleiben denn da übrig jetzt? [*I deutet mit dem Finger an den Rand des Punktefeldes*] Von der 80 [*I legt den Bleistift noch einmal eine Zeile weiter unten hin*] 10 weg. [*I schiebt den Bleistift wieder um eine Zeile nach oben*] Eine ganze Reihe.
194	R	Also so viel weg? [*R zeigt mit dem roten Stift auf die achte Zeile, auf der der Bleistift noch liegt*]
195	I	Mhm (bejahend). Also [*I nimmt den Bleistift von dem Punktefeld weg*] 80 geht ja bis dahin. [*I malt mit dem Stift einen kleinen Strich unter die achte Zeile*] Und wir tun eine ganze Reihe weg. [*I fährt mit dem Stift über die Punkte der achten Zeile*] Also quasi die Reihe weg. [*I legt den Bleistift wieder auf die achte Zeile*] Und es geht jetzt nur noch bis dahin. [*I fährt mit dem Finger die erste Spalte bis zu der mit dem Stift verdeckten Linie entlang*] Wie viele sind denn das?
196	R	[*R gähnt*] 10, 20, 30, 40, 50, 60/ [*R zählt mit dem Stift die Zeilen nach unten bis zum Bleistift und tippt dabei jeweils mit dem Stift auf eine Zeile*]
197	I	[*I hält den Bleistift fest*]
198	R	70.
199	I	70. Also 80 minus 10 [*I weist mit dem*

		Stift in Richtung 80 – 10] sind 70, ja?
200	R	Mhm (bejahend). [*nickt*]
201	I	80 minus 10. [*I schreibt 80 – 10 unter 80 – 8*] Wir wollen aber nur minus 8 rechnen. [*I deutet mit dem Stift auf 80 – 8 und schreibt = 70 hinter 80 – 10*] Dann haben wir ja 2 zu viel abgezogen. [*I tippt mit dem Stift auf 80 – 8*]
202	R	Ah. [*R nickt leicht mit dem Kopf*]
203	I	Jetzt müssen wir hier wieder 2 dazutun. [*I zeigt mit dem Stift auf 70; R gähnt geräuschvoll*] Was kommt denn da dann heraus? (11 sec) Wenn wir zur 70 noch 2 wieder dazutun?
204	R	Na 72.
205	I	[*I nickt*] Also dann schreib einmal da oben [*I tippt mit dem Stift auf den Platzhalter für die Lösung*] 72 hin.
206	R	[*R setzt mit dem roten Stift an, legt ihn weg, nimmt sich den Bleistift und schreibt 2*] Ouh was mache ich denn? [*R schüttelt den Kopf, verbessert die geschriebene 2 zu einer 7 und schreibt 2 dahinter*]
207	I	Mhm (bejahend). Super.



Analyse

Bei der Aufgabenstellung 5 · 7 – 1 · 7 = __ · 7 = weist die Interviewerin darauf hin, zunächst 5 mal 7 einzuzeichnen (SB 120). Zur Verdeutlichung markiert sie 5 · 7 und deutet dabei auf das Punktefeld (SB 120). Da die Vorgehensweise bei Differenzprodukten in der Fördersitzung noch nicht behandelt wurde, werden viele anleitende Hinweise gegeben. Romina tippt auf die von rechts gesehen ersten 3 Punkte der ersten Zeile (SB 121). Sie erkennt offenbar sofort, dass sie von 10 Spalten 3 Spalten abziehen kann, um 7 Spalten zu erhalten. Damit nutzt sie die Strukturierung des Punktefeldes. Sie markiert in den ersten 5 Zeilen je 7

Punkte, indem sie eine Linie nach der siebten Spalte (nun von links gesehen) und eine Linie unter der fünften Zeile zeichnet (SB 121). Die Interviewerin unterbricht sie etwas verfrüht und nimmt den roten Stift zur Hand (SB 122). Romina vervollständigt die Markierung am rechten und oberen Rand des Punktefeldes (SB 123). Sie hat offenbar gelernt, wie ein Produkt in symbolischer Schreibweise in die Darstellung des Punktefeldes übertragen werden kann. Die Interviewerin stimmt zu und weist darauf hin, dass 1 mal 7 abgezogen werden müssen (SB 124). Sie unterstreicht das Minuszeichen rot und sagt, dass das $1 \cdot 7$-Punktefeld in das grau markierte $5 \cdot 7$-Punktefeld hinein gezeichnet werde (SB 124). Dabei deutet sie auf die unterste Zeile des $5 \cdot 7$-Punktefeldes (SB 124). Romina zeichnet eine rote Linie unter die fünfte Zeile bis zum einschließlich siebten Punkt ein (SB 125). Die Interviewerin stimmt zu und vervollständigt die rote Linie zu einer Umrahmung um die 7 Punkte in der sechsten Zeile (SB 128). So soll stärker verdeutlicht werden, dass sich die rote Markierung auf ein $1 \cdot 7$-Punktefeld bezieht.

Die Interviewerin sagt, dass etwas übrig bleiben würde und fragt nach einer Malaufgabe (SB 128). Sie deutet auf den Platzhalter und weist darauf hin, dass eine Malaufgabe mit unbekanntem ersten Faktor und 7 als zweitem Faktor gesucht sei (SB 128). Romina greift den Hinweis der Interviewerin auf und fragt, ob dies der gesuchte erste Faktor sei, indem sie auf die 4 Punkte der ersten Spalte deutet (SB 129). Die Interviewerin stimmt zu (SB 130). Romina weiß also offenbar, wie der erste Faktor des Differenzproduktes in der Punktefelddarstellung ‚abgelesen‘ werden kann. Romina zählt die ersten 4 Punkte der ersten Spalte (SB 131) und nennt 4 als ersten Faktor (SB 133). Sie nutzt die Strukturierung des Punktefeldes dabei also nicht. Die Interviewerin bestätigt sie (SB 134). Romina begründet dies, indem sie auf die 7 Punkte der ersten Zeile im markierten Punktefeld deutet und erklärt, dass dies der zweite gleichbleibende Faktor 7 sei (SB 135). Auch den Faktor 7 hat sie also offenbar in der Punktefelddarstellung identifiziert. Die Interviewerin stimmt zu (SB 136) und Romina schreibt 4 als ersten Faktor des Summenproduktes auf (SB 137).

Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zu 4 mal 7 (SB 138, 140). Romina sagt sieben Sekunden nichts und flüstert dann Unverständliches (SB 141). Um die Ergebnisermittlung durch Nutzung der Ergebnisse der Teilprodukte anzubahnen, fragt die Interviewerin nun, ob Romina das Ergebnis zum Produkt $5 \cdot 7$ wüsste (SB 142). Romina sagt weitere sieben Sekunden nichts, bewegt lautlos die Lippen und sagt weitere acht Sekunden nichts (SB 143). Sie scheint das Ergebnis nicht zu wissen und auch keine Strategie zu kennen, um das Ergebnis zu ermitteln. Die Interviewerin gibt den Hinweis, dass sie hier wieder die Ergebnisse der Fünferreihe aufzählen könne, nennt 5, 10, 15 und 20 und deutet jeweils auf die erste, zweite und dritte Spalte (SB 144). Romina geht hier nicht auf diesen Hinweis ein. Sie fragt, ob sie einen Strich machen könne, weil es minus sei und deutet mit dem Finger einen Strich unter $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7$ an (SB 145, 147). Sie will möglicherweise wieder das Ziffernrechnen des schriftlichen Rechenverfahrens anwenden. Das deutet darauf hin, dass sie die Zahlen nicht als Faktoren der Teilprodukte auffasst und zu den Produkten kein Bild von Punktefeldern mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten präsent vor Augen hat. Die Interviewerin sagt, dass man das prinzipiell schon machen könne, man aber dafür das Ergebnis zu 5 mal 7 brauchen würde (SB 148). Romina gähnt (SB 149). Da Romina zu diesem Zeitpunkt der Fördersitzung bereits recht müde wirkt, bricht die Interviewerin das Berechnen des Endergebnisses an dieser Stelle ab (SB 150).

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ gibt die Interviewerin den Hinweis, zunächst das Produkt $10 \cdot 8$ mit Bleistift einzuzeichnen (SB 151). Dabei deutet sie auf das Produkt in symbolischer Form und fährt dann mit dem Finger an der ersten Spalte des Punktefeldes entlang (SB 151). Romina nennt 10 als ersten Faktor des Teilproduktes und zählt die Punkte der ersten Spalte bis 10 (SB 152). Sie nutzt dabei weder die Fünferstruktur des Punktefeldes noch ist ihr offenbar klar, dass es sich um ein $10 \cdot 10$-Punktefeld handelt. Sie nennt 8 als zweiten Faktor des Teilproduktes und zeichnet sofort eine Linie hinter der achten Spalte (SB 152). Sie zählt vermutlich nicht. Hier nutzt sie offenbar die Strukturierung des Punktefeldes, indem sie von 10 Punkten 2 Punkte abzieht. Sie vervollständigt ihre Markierung, sodass in den 10 Zeilen jeweils 8 Punkte markiert sind (SB 152). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 153). Sie gibt den Hinweis, das Feld für das zweite Teilprodukt $1 \cdot 8$ wieder so wie bei der vorherigen Aufgabenstellung einzuzeichnen und zeigt dabei auf das dort eingezeichnete Punktefeld (SB 153). Nach sieben Sekunden zeichnet Romina mit dem roten Buntstift eine Linie unter die neunte Zeile in das grau markierte Punktefeld (SB 154). Die Interviewerin stimmt zu (SB 155). Sie bittet Romina, die Umrahmung noch fertigzustellen und deutet unter die zehnte Zeile des Punktefeldes (SB 155). Romina ergänzt ihre Zeichnung, sodass in der neunten Zeile 8 Punkte markiert sind (SB 156) und die Interviewerin bestätigt sie (SB 157). Mit wenigen Hilfsimpulsen gelingt es Romina, das Differenzprodukt passend im Punktefeld einzuzeichnen.

Die Interviewerin fragt nach dem Differenzprodukt (SB 157). Romina ermittelt die Zeilenanzahl, indem sie die Punkte der ersten Spalte bis zum fünften Punkt zählt, dann abbricht und 10 als ersten Faktor des Produktes nennt und notiert (SB 158). Die Interviewerin bittet sie, nochmals nachzusehen (SB 159) und Romina nennt flüsternd 9 als passenden ersten, zu subtrahierenden Faktor des Differenzproduktes (SB 160). Sie streicht 10 auf dem Blatt durch und schreibt 9 darüber (SB 162). Da sie relativ schnell zum passenden Faktor gelangt, könnte es sein, dass sie hier die Strukturierung des Punktefeldes nutzt und nicht zählt. Zur Ermittlung des zweiten Faktors zählt sie die ersten 3 Punkte der ersten Zeile, bricht ab und nennt dann 8 (SB 162). Beim Zählen stellt sie möglicherweise fest, dass sie durch Nutzung der Strukturierung den zweiten Faktor im Punktefeld ‚ablesen' kann. Die Interviewerin stimmt zu (SB 163) und Romina notiert 8 auf den zweiten Platzhalter (SB 164). Romina weiß offenbar, wie die Faktoren des Differenzproduktes in der Darstellung ‚abgelesen' werden können. Sie übersetzt also die Darstellung in die symbolische Form der Aufgabe, was darauf hindeutet, dass sie ein gewisses Verständnis entwickelt hat.

Romina sagt teilweise Unverständliches (SB 164). Die Interviewerin fragt Romina nach dem Ergebnis für das Produkt $10 \cdot 8$ und deutet auf die symbolische Form des Teilproduktes (SB 165). Sie will die Ermittlung des Ergebnisses durch Nutzung der Ergebnisse der Teilprodukte anbahnen. Romina notiert 80 unter das Produkt $10 \cdot 8$ (SB 166). Die Interviewerin stimmt zu und deutet auf das Produkt $1 \cdot 8$ (SB 168). Romina nennt 79 und meint damit vermutlich das Endergebnis (SB 168). Die Interviewerin bittet Romina nun zunächst das Ergebnis des Subtrahendproduktes zu notieren und deutet auf das Produkt $1 \cdot 8$ (SB 169). Die Interviewerin diktiert das Subtraktionszeichen (SB 171). Ramona setzt an, unter 80 weiterzuschreiben (SB 175). Möglicherweise will sie die Zahlen wiederum untereinander notieren, um schriftlich zu rechnen. Die Interviewerin weist darauf hin, dass sie das Subtraktionszeichen notieren soll und deutet auf das Zeichen in der Aufgabenstellung (SB 173). Romina schreibt es hinter 80 auf und die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zum Produkt $1 \cdot 8$ (SB 175). Romina nennt fragend 8 als Ergebnis (SB 176), die Interviewerin bestätigt sie (SB 177) und Romina notiert 8 unter das Produkt $1 \cdot 8$ (SB 178). Die Interviewerin stimmt zu und fragt nach dem Endergebnis (SB 179). Romina sagt vermutlich, dass das schon in der Schule vorgekommen und es ihr schwergefallen sei (SB 180). Sie äußert sich unklar, indem sie sagt, dass minus kommen und null bleiben würde (SB 180). Romina scheint alleine nicht zur Lösung der Aufgabe zu gelangen. Die Interviewerin fragt nach dem Ergebnis zu $80 - 10$ (SB 181), um Romina über diesen Zwischenschritt zum Ergebnis zu $80 - 8$ hinzuführen. Romina deutet auf $9 \cdot 8$ und nennt nochmal 79 (SB 182). Die Interviewerin verneint (SB 183) und erklärt, dass beim Ergebnis 79 von 80 nur 1 abgezogen worden wäre (SB 185). Die Interviewerin fragt nochmals nach dem Ergebnis zu $80 - 10$ (SB 187). Romina verneint (SB 188). Die Interviewerin fragt nochmals nach (SB 189) und Romina schüttelt den Kopf (SB 190). Anhand eines noch nicht markierten Punktefeldes einer weiteren Aufgabenstellung auf dem Blatt zeigt die Interviewerin, wie viele Punkte 80 sind, indem sie auf die ersten Zeilen deutet und die neunte und zehnte Zeile abdeckt (SB 191). Romina stimmt zu (SB 192). Die Interviewerin weist darauf hin, dass dies 80 seien und fährt mit dem Stift die ersten 8 Zeilen des Punktefeldes entlang (SB 193). Dann verdeckt sie die achte Zeile und fragt, was übrig bleibe, wenn 10 Punkte, also eine ganze Reihe, abgezogen würden (SB 193). Romina fragt, ob so viel abgezogen werde und zeigt dabei auf die achte Zeile (SB 194). Die Interviewerin verdeutlicht nochmals, wie viel 80 Punkte seien, indem sie eine kleine Linie unter die achte Zeile zeichnet (SB 195). Sie wiederholt, dass nun eine ganze Reihe abgezogen werde und legt dabei den Stift nochmals auf die achte Zeile (SB 195). Sie fügt hinzu, dass das Feld nun nur noch bis dahin reichen würde und fährt dabei die erste Spalte bis zur siebten Zeile entlang (SB 195). Romina zählt in Zehnerschritten von 10 bis 70 (SB 196, 198). Die Interviewerin wiederholt, dass 80 minus 10 70 seien (SB 199) und Romina stimmt zu (SB 200). Die Interviewerin notiert = 70 hinter 80 – 10 und sagt, dass nun 2 zu viel abgezogen wurden (SB 201). Romina nickt leicht mit dem Kopf (SB 202). Die Interviewerin weist darauf hin, dass nun zu 70 wieder 2 hinzugefügt werden müsse (SB 204). Romina nennt 72 als Ergebnis (SB 204). Es bleibt allerdings unklar, ob Romina der Zusammenhang klar wird. Die Interviewerin bittet sie, als Ergebnis 72 zu notieren (SB 205). Romina schreibt nun zunächst 2 auf, verbessert 2 zu einer 7 und notiert dann 2 dahinter, so dass 72 als Ergebnis notiert ist (SB 206). Die Interviewerin stimmt zu (SB 207). Die Ermittlung des Ergebnisses des Differenzproduktes erfolgt sehr angeleitet und es bleibt unklar, ob Romina die einzelnen Schritte wirklich versteht oder sie lediglich entsprechend den Hinweisen der Interviewerin ausführt. Auch hier wird deutlich, dass Romina ein Verständnis für Zahlen und die Operation Subtraktion fehlt. Dies wird auch durch ihre Bearbeitung in BIRTE 2 bestätigt, in der sie u. a. Schwierigkeiten im Bereich Orientierung im Zahlenraum und beim Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben zeigt.

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass Romina die Teilprodukte des Differenzproduktes der ersten Aufgabenstellung mit einigen Hilfestellungen und sehr angeleitet einzeichnet, bei der zweiten Aufgabenstellung gelingt ihr dies mit wenigen Hilfsimpulsen. Die Faktoren ermittelt sie bei beiden Aufgabenstellungen mit wenig Unterstützung. Bei der Ermittlung des jeweiligen Ergebnisses hat sie große Schwierigkeiten, die vermutlich auf allgemeine Probleme im additiven Bereich zurückzuführen sind. Sie vollzieht den Übersetzungsprozess von symbolischer Form in die Darstellung des Punktefeldes mit Hilfestellungen, was darauf hindeutet, dass sie nur teilweise Verständnis entwickelt hat.

Gesamtfazit

Im Vergleich zu Rominas Bearbeitung im Pre-Test, in der kein direkter Bezug zur Aufgabenstellung erkennbar ist, zeigen ihre Bearbeitungen im Post- und

Follow-up-Test erhebliche Lernfortschritte. Es sind sowohl in Post- und Follow-up-Test alle Teilprodukte und das Summenprodukt erkennbar. In ihrer Bearbeitung im Follow-up-Test zeigt sie einen weiteren Lernfortschritt in Vergleich zum Post-Test. Die Gleichheit von linkem und rechtem Term wird jedoch noch nicht klar erkennbar.

In den Fördereinheiten zu den Summen- und Differenzprodukten vollzieht Romina den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form der Aufgaben in die Punktefelddarstellung mit einigen Hilfestellungen, was darauf hindeutet, dass sie vermutlich nur teilweise Verständnis entwickelt hat. Bei der Ergebnisermittlung zeigt sie bei allen vier Aufgabenstellungen große Schwierigkeiten, was sich möglicherweise auf allgemeine Probleme im additiven Bereich zurückzuführen lässt.

8.2.3.5 Fallbeispiel ‚Alexander'

Zu Beginn der Einzelförderung ist Alexander sieben Jahre, zum Ende acht Jahre alt. Er besucht eine Grundschulklasse einer mittelgroßen Stadt mit 19 Kindern (zehn weiblich, neun männlich). Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr ca. sechs Wochen lang einmal wöchentlich statt. Es werden fünf individuell angepasste Sitzungen von ca. 45 Minuten durchgeführt. Der ausgewählte Ausschnitt findet in der zweiten Sitzung statt und dauert ca. sechs Minuten. Insgesamt ist Alexander lebhaft. Beim Bearbeiten einzelner Aufgaben ist er durchaus bei der Sache, phasenweise zeigt er sich jedoch wenig motiviert.

Hinweise zum Regelunterricht

Laut der Auskunft der Lehrkraft findet die Behandlung des Einmaleins in Alexanders Klasse über ca. zehn Wochen hinweg (ca. 44 Unterrichtsstunden) statt (LD 11, S. 1 ff.).

Die Lehrkraft setzt das Schulbuch ‚Fredo 2' (Balins et al., 2014a) mit dem zugehörigen Arbeitsheft ein (Balins et al., 2014b; LD 11, S. 1). Grundsätzlich verwendet das Schulbuch als Darstellung für Malaufgaben u. a. auch Kästchenpapier und unterstützt damit die Sichtweise, die Faktoren eines Produktes in Zeilen und Spalten zu sehen. Diese Deutung von Multiplikation ist auch für den ausgewählten Ausschnitt der Förderung relevant.

Die Lehrkraft gibt an, dass zusätzlich Materialien aus ‚1x1 in Wochenplänen' verwendet werden (ebd.). Als eingesetzte Materialien werden Plättchen, Würfel, Quadrate mit Malfeldern, Murmeln, Bonbons und Stifte genannt (ebd., S. 1 ff.). Über die Sequenz verteilt werden die Reihen zu 5, 10, 2, 1, 4, 8, 3, 6, 7, 9 in dieser Reihenfolge erwähnt (ebd.). Dies ist vor dem Hintergrund interessant, dass laut Lehrplan in der zweiten Jahrgangsstufe zunächst lediglich die Kernaufgaben explizit als Reihen behandelt werden sollen, die übrigen sollen aufgrund der Distributivität abgeleitet und dann erst in der dritten Jahrgangsstufe auch automatisiert werden (BY, 2014, S. 276, S. 282). Nach ca. vier Wochen wird die Behandlung der Division explizit genannt (LD 11, S. 5). Es ist eine Buchseite zum Thema ‚Tauschaufgaben' notiert (Balins et al., 2014a, S. 87; Abb. 8.48), das Thema wird jedoch nicht explizit angeführt (LD 11, S. 4).

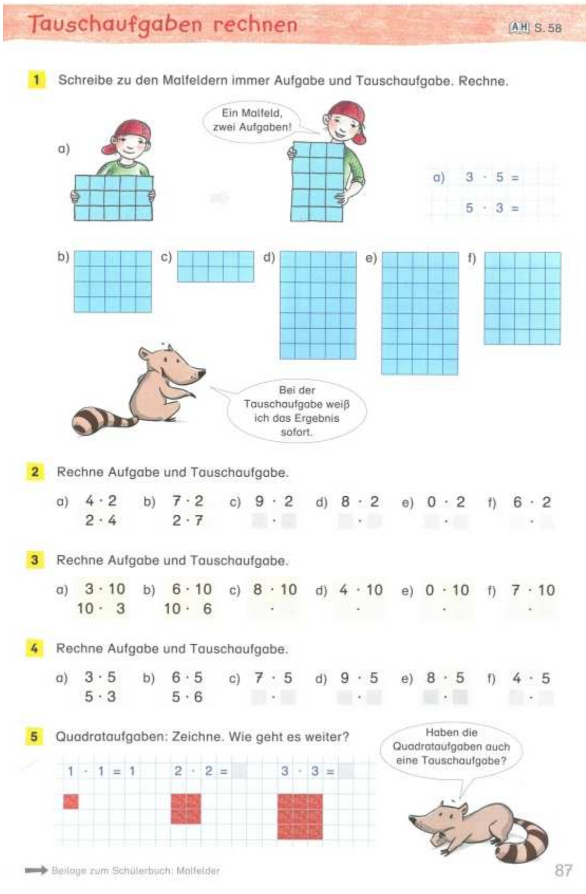


Abbildung 8.48: Schulbuchseite aus Fredo 2 zur Behandlung von Tauschaufgaben (Balins et al., 2014a, S. 87)

Es werden Buchseiten genannt, auf denen mithilfe von Kernaufgaben die Aufgaben der Vierer- und Achterreihe abgeleitet werden sollen (ebd.; Balins et al., 2014a, S. 88 f.; Abb. 8.49).

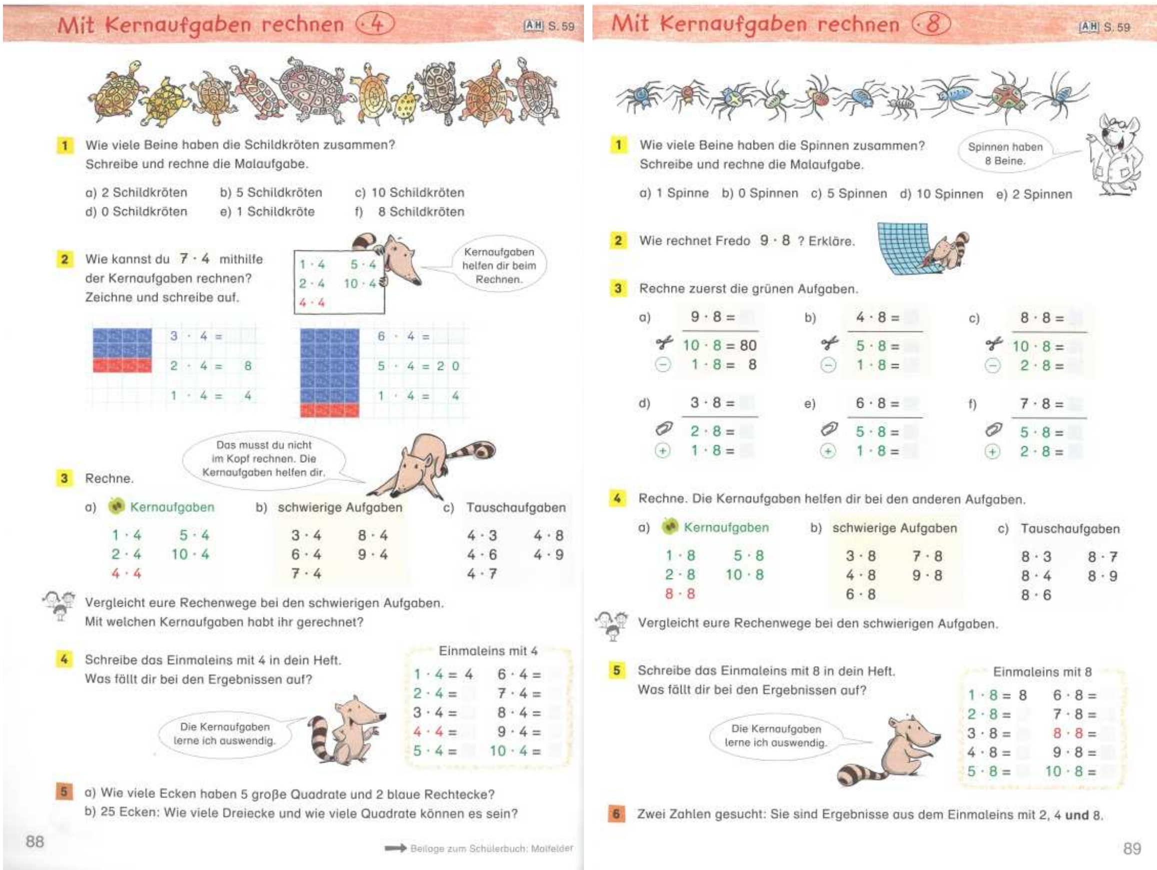
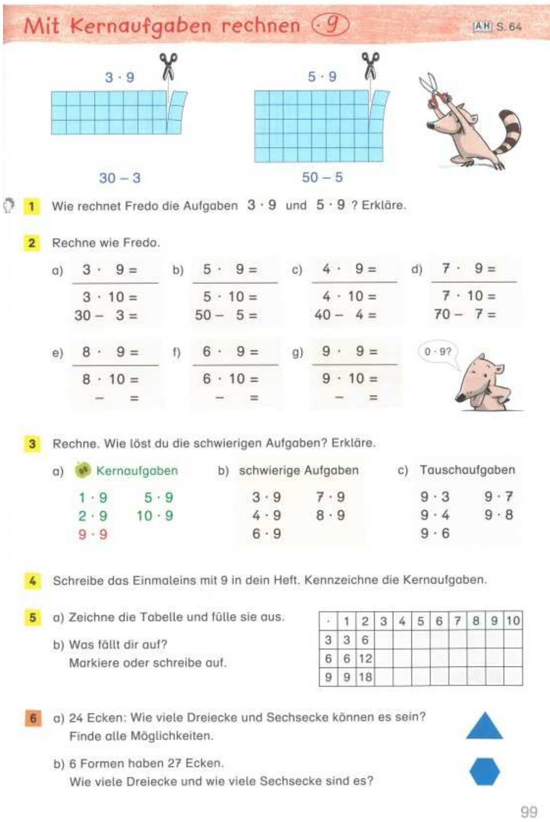


Abbildung 8.49: Schulbuchseite aus Fredo 2 zur Nutzung von Kernaufgaben (Balins et al., 2014a, S. 88 f.)

Wenn man die Aufgabenstellungen so behandelt, wie es das Schulbuch vorsieht, würde die Nutzung der Distributivität thematisiert werden, um die Lösung zu ‚schwereren' Malaufgaben durch schon bekannte Malaufgaben zu finden.


Mit Kernaufgaben rechnen 9 AH S. 64

3 · 9
5 · 9
30 – 3
50 – 5

1 Wie rechnet Fredo die Aufgaben 3 · 9 und 5 · 9 ? Erkläre.

2 Rechne wie Fredo.

a) 3 · 9 =	b) 5 · 9 =	c) 4 · 9 =	d) 7 · 9 =
3 · 10 =	5 · 10 =	4 · 10 =	7 · 10 =
30 – 3 =	50 – 5 =	40 – 4 =	70 – 7 =
e) 8 · 9 =	f) 6 · 9 =	g) 9 · 9 =	0 · 9?
8 · 10 =	6 · 10 =	9 · 10 =	
– =	– =	– =	

3 Rechne. Wie löst du die schwierigen Aufgaben? Erkläre.

a) Kernaufgaben: 1 · 9, 5 · 9, 2 · 9, 10 · 9, 9 · 9
b) schwierige Aufgaben: 3 · 9, 7 · 9, 4 · 9, 8 · 9, 6 · 9
c) Tauschaufgaben: 9 · 3, 9 · 7, 9 · 4, 9 · 8, 9 · 6

4 Schreibe das Einmaleins mit 9 in dein Heft. Kennzeichne die Kernaufgaben.

5 a) Zeichne die Tabelle und fülle sie aus.
b) Was fällt dir auf? Markiere oder schreibe auf.

·	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3	6								
6	6	12								
9	9	18								

6 a) 24 Ecken: Wie viele Dreiecke und Sechsecke können es sein? Finde alle Möglichkeiten.
b) 6 Formen haben 27 Ecken. Wie viele Dreiecke und wie viele Sechsecke sind es?

99

Abbildung 8.50: Schulbuchseite aus Fredo 2 zur Nutzung der Distributivität (Balins et al., 2014a, S. 99 f.)

In den Aufzeichnungen der Lehrkraft ist als Thema zu diesen Buchseiten nichts notiert, allerdings jeweils einen Tag vorher „Einf. 4er“ und „Einf. 8er“ (ebd.). Es wird das Thema „Besonderheiten des 9er“ (ebd., S. 6) aufgeführt und dazu eine Schulbuchseite notiert, bei der es ebenfalls um die Ableitung der Neunerreihe von Kernaufgaben geht (Balins et al., 2014a, S. 99; Abb. 8.50). Es kann somit davon ausgegangen werden, dass die Lehrkraft entgegen dem Lehrplan und den Vorschlägen im Schulbuch die Reihen eher isoliert fokussiert und Ableitungsstrategien kaum thematisiert.

Bearbeitung in BIRTE 2

Alexanders Bearbeitung in BIRTE 2 kann zusammenfassend als „überdurchschnittliche Leistung“ (A-Gesamt Alexander, S. 1) bewertet werden. Seine „Arbeitsgeschwindigkeit ist durchschnittlich“ (ebd.).

In folgenden Modulen zeigt er *keinen besonderen Förderbedarf* (ebd.):

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Zahlen einordnen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Schnelle Zahlauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)

- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Zahlzerlegung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Alexander kann zu einer Folge rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen die passende Zahl bestimmen und Zahlen der Größe nach ordnen (A-Orientierung Alexander, S. 1). In strukturierten Arbeitsmitteln wie Würfelbildern, Zwanziger- und Hunderterfeldern kann er Anzahlen quasi-simultan erfassen (A-Basis, S. 1). Er ordnet auf dem Zwanziger- oder Hunderterfeld vorgegebene Zahlen passend zu (ebd., S. 1). Er zerlegt die Zahlen 8, 9, 10 und 20 richtig (ebd., S. 2). Er löst Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben bis 20 und 100 korrekt (ebd.). Alle Additionsaufgaben löst er passend, von zwölf Subtraktionsaufgaben löst er acht richtig (A-Rechnen Alexander, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)
- Größenvorstellungen (Modulgruppe: Grund- und Größenvorstellungen)
- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Er bearbeitet alle Tausch-, Umkehr- und Analogieaufgaben passend (ebd.). Preise schätzt Alexander passend, Längen von Gegenständen jedoch unpassend (A-Grundvorstellung Alexander, S. 1). Zu acht Textaufgaben wählt er bei fünf die passende Operation (ebd.). Weitere Rechengeschichten bearbeitet er nahezu korrekt (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

In folgendem Modul zeigt Alexander *besonderen Förderbedarf* (A-Gesamt Alexander, S. 1):

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)

Alexander findet zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich im Zahlenraum bis 20 nur eine passende Zahl, im Zahlenraum bis 100 hat er dabei große Schwierigkeiten (A-Orientierung Alexander, S. 1). Diese Kompetenz ist für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Alexander in keinem der für die ausgewählte Fördereinheit relevanten Module Förderbedarf zeigt, sodass davon auszugehen ist, dass bei der Förderung zum Multiplikativen Verständnis kaum zusätzliche Schwierigkeiten auftreten.

Bearbeitungen im Pre-, Post- und Follow-up-Test

In Alexanders Bearbeitung der zum Fokus der Fördersitzung passenden Aufgabe im Pre-Test sind 1 Zweier-Menge, 4 Vierer-Mengen und 1 Sechser-Menge an Punkten durch Umrahmung kenntlich gemacht (Abb. 8.51). Die 4 Vierer-Mengen könnten als *wiederholte Addition* gleichmächtiger Mengen und damit als Teilprodukt $4 \cdot 4$ interpretiert werden. 2 Vierer-Mengen könnten auch als Teilprodukt $2 \cdot 4$ gesehen werden. Die Sichtweise, ein Produkt als Feld mit einer spezifischen Anzahl an Zeilen und Spalten zu interpretieren, ist in der Bearbeitung nicht erkennbar. Insgesamt wird kein Bezug zur intendierten Bearbeitung ersichtlich.

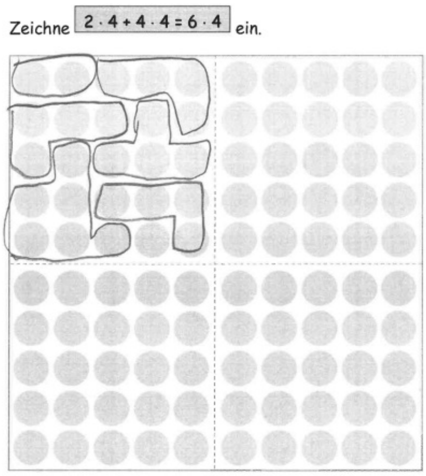


Abbildung 8.51: Alexanders Bearbeitung im Pre-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Alexander zeigt in seiner Bearbeitung der zum analysierten Abschnitt passenden Aufgabe im Post-Test, dass er durchaus Verständnis dafür entwickelt hat, wie ein Summenprodukt in symbolischer Form in eine Punktefelddarstellung übertragen werden kann (Abb. 8.52). In seiner Bearbeitung ist links oben die intendierte Bearbeitung zu sehen, in der die Teilprodukte als Punktefelder direkt untereinander in zwei verschiedenen Farben eingezeichnet sind, so dass die Gleichheit zwischen linkem und rechtem Term deutlich wird.

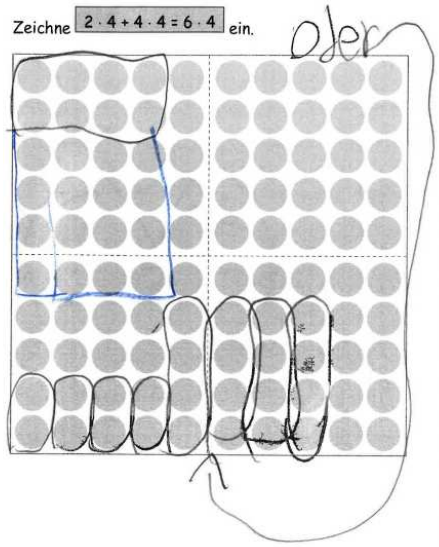


Abbildung 8.52: Alexanders Bearbeitung im Post-Test zu 2 · 4 + 4 · 4 = 6 · 4

Unten links zeichnet er eine aus seiner Sicht weitere Möglichkeit der Darstellung ein, was er durch das Wort „oder“ kennzeichnet. Die Teilprodukte 2 · 4 und 4 · 4 sind in dieser weiteren Darstellung jeweils passend eingezeichnet, es wird sowohl die Grundvorstellung, das Produkt in Zeilen und Spalten zu denken, als auch diejenige einer *wiederholten Addition* deutlich. Das 2 · 4-Feld und das 4 · 4-Feld sind allerdings so nebeneinander gezeichnet, dass das Summenprodukt 6 · 4 nicht direkt in einem Punktefeld mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten ‚abgelesen‘ werden kann. Hier wird die Gleichheit von linkem und rechtem Term nicht direkt deutlich.

Im Follow-up-Test bearbeitet Alexander die Aufgabe so, wie es in der Fördersitzung vorgesehen war (Abb. 8.53). Er verwendet sogar jeweils unterschiedliche Farben für die Teilprodukte. Er hat offenbar Verständnis entwickelt, wie ein Summenprodukt in symbolischer Schreibweise passend in eine Punktefelddarstellung übertragen werden kann, sodass die Distributivität deutlich gemacht werden kann.

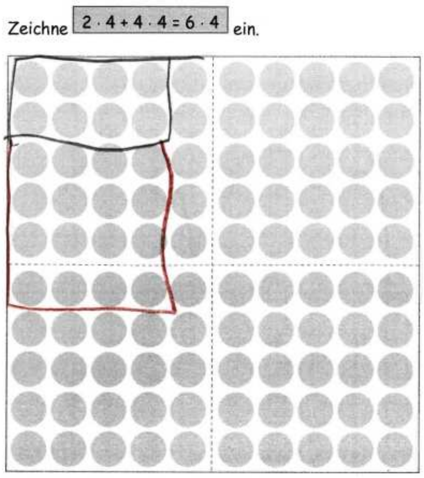
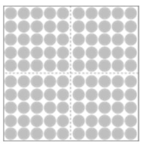
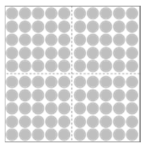


Abbildung 8.53: Alexanders Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

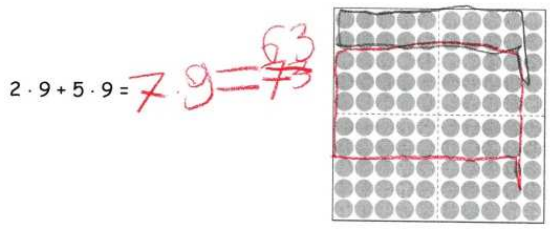
Alexanders Ergebnisse der Pre-, Post- und Follow-up-Tests in der spezifischen Aufgabe zeigen einen positiven Entwicklungsverlauf. Im Vergleich zum Pre-Test zeigen seine Bearbeitungen in den Post-Tests entscheidende Veränderungen, was auf zunehmendes Verständnis hindeutet. Die Bearbeitung im Follow-up-Test lässt vermuten, dass er Verständnis nachhaltig entwickelt hat.

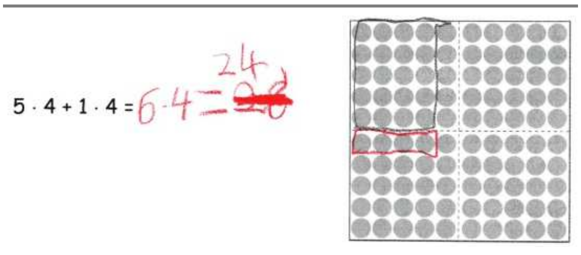
Fördersitzung – Teil I

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ 	Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ 
1 AL Okay. [*AL nimmt den Bleistift zur Hand*] 5 mal 4. [*AL umrahmt mit dem Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte, nimmt den roten Buntstift zur Hand, umrahmt in einer weiteren Zeile 4 Punkte*]	23 AL [*AL umrahmt mit Bleistift in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte*] Das ist meine Handschrift. [*AL deutet mit dem Stift mehrmals in Richtung seiner Umrahmung; I nickt; AL nimmt den roten Buntstift zur Hand und umrahmt damit in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte*]
	24 I Mhm (bejahend).
1 AL [AL *nimmt den Bleistift zur Hand, nimmt den roten Stift zur Hand, schreibt* $6 \cdot 4 =$ *auf*] (6 sec)	25 AL So. [*AL legt den roten Buntstift weg*] Ist (insgesamt?)/ (unv.) [*AL tippt mit dem Finger auf die einzelnen Punkte der ersten Spalte, beginnt dann auf die Punkte der ersten Zeile zu tippen, nimmt den*

2	I	Was ist 5 mal 4?
3	AL	[*AL schreibt 28 hinter =*] 28 [*AL deutet mit dem Stift mehrmals Richtung 28*] soll das sein.
4	I	[*I schüttelt den Kopf*] Nein.
5	AL	Doch.
6	I	Schau, 5 mal 4. [*I deutet mit dem Finger auf 5 · 4*] Was ist das? Das weißt du doch ganz auswendig schon, oder?
7	AL	Nein.
8	I	Nicht? Doch. Hattest/
9	AL	#Nein.
10	I	#vorhin auch schon gewusst.
11	AL	Nein.
12	I	4 mal 5?
13	AL	Mhm.
14	I	5 mal 4?
15	AL	Nein. Okay 20. [*AL lacht*]
16	I	20 [*I tippt auf 5 · 4*] plus 1 mal 4? [*I deutet auf 1 · 4*]
17	AL	24.
18	I	Na also. [*I tippt hinter 6 · 4 =*] Kann man ganz gut damit ausrechnen.
19	AL	[*AL streicht 28 durch und schreibt 24 darüber*]
20	I	Wenn man einmal eine Aufgabe nicht weiß, dann kann man sich so helfen. [*I deutet auf 5 · 4*]
21	AL	Ja, ja, ja. [*AL legt den roten Stift weg und nimmt den Bleistift zur Hand*]
22	I	Ist doch super oder nicht?
23	AL	Nein.

		Bleistift zur Hand, nimmt den roten Buntstift zur Hand] 7. Mal. 9. [*AL schreibt 7 · 9 = hinter die Aufgabe*]
25	AL	Ist gleich? (8 sec) 18? [*AL tippt mit dem Stift auf 2 · 9*]
26	I	[*I nickt*]
27	AL	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45. [*AL tippt bei jeder Zahl mit dem Stift auf das Blatt*] 65. [*AL tippt zweimal mit dem Stift auf das Blatt, schreibt 73 hinter die Aufgabe*]
28	I	Nicht ganz.
29	AL	Doch.
30	I	[*I schüttelt den Kopf*]
31	AL	[*AL überlegt kurz, streicht 73 durch und schreibt 63 darüber*]
32	I	Super.
33	AL	Mhm (bejahend). [AL *führt mit den Armen einen Freudentanz auf und deutet mit dem Stift Richtung Blatt*] Ah.





34	I	Schau einmal die 9 mal 7 [*I deutet mit dem Finger auf 7 · 9*] Oder 7 mal 9.
35	AL	Mhm.
36	I	Da kann man auch 7 mal <u>10</u> rechnen/
37	AL	Ja?
38	I	Und dann wieder 7 abziehen. Das geht noch schneller, glaube ich, oder?
39	AL	Ja (zögerlich).
40	I	#Weil 7 mal 10, das weiß man ja ganz schnell, oder?
41	AL	Ja.
42	I	Was ist das?
43	AL	70?
44	I	70. [*nickt*] Und minus 7? Da kommt dann auch 63 heraus. [*I deutet Richtung 63*]
45	AL	[*AL nickt*]
46	I	Gut oder?
47	AL	Ja. [*I nimmt das Blatt weg*] Jetzt darf ich aber gehen.

Analyse

Bei der Aufgabenstellung $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ markiert Alexander in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte mit Bleistift und in der sechsten Zeile 4 Punkte mit Buntstift ohne weitere Hilfestellung (SB 1). Er hat gelernt, wie in der Fördersitzung die Teilprodukte (linker Term) in symbolischer Form in eine Punktefelddarstellung übertragen werden sollen.

Es könnte sein, dass Alexander kurz auf die Punktefelddarstellung blickt. Dann schreibt er $6 \cdot 4$ auf (SB 1). Es wird hier nicht eindeutig klar, ob er das passende

Summenprodukt anhand der Punktefelddarstellung oder mithilfe der symbolischen Form findet.

Alexander sagt sechs Sekunden lang nichts, vermutlich denkt er über das Endergebnis nach (SB 1). Die Interviewerin fragt daraufhin, was 5 mal 4 sei (SB 2). Alexander notiert und nennt 28 (SB 3) und meint damit vermutlich das Endergebnis des Summenproduktes. Die Interviewerin verneint (SB 4). Alexander beharrt zunächst auf seinem Ergebnis (SB 5). Die Interviewerin fragt ihn, was 5 mal 4 sei und sagt, dass er das doch schon auswendig wüsste (SB 6). Die Interviewerin fragt sowohl nach 4 mal 5 als auch nach 5 mal 4 (SB 12, 14). Alexander verneint mehrmals (SB 7, 9, 11). Alexander nennt daraufhin doch das passende Ergebnis 20 und lacht (SB 15). Die Interviewerin fragt, was 20 plus 1 mal 4 sei (SB 16). Alexander nennt das passende Ergebnis 24 (SB 17). Die Interviewerin sagt, dass die Teilprodukte helfen können, die Aufgabe zu lösen, und deutet dabei auf das Teilprodukt $5 \cdot 4$ (SB 20). Die Interviewerin gibt in dieser Phase entsprechende Hilfsimpulse, das Endergebnis durch das Addieren der Ergebnisse der Teilprodukte zu ermitteln. Es bleibt unklar, ob Alexander diese Vorgehensweise auch selbstständig durchführen könnte.

Bei der Aufgabenstellung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ markiert Alexander ebenfalls selbstständig in den ersten 2 Zeilen 9 Punkte mit Bleistift und in den 5 Zeilen unter der ersten Markierung je 9 Punkte mit Buntstift (SB 23). Die Interviewerin bejaht dies (SB 24). Alexander zeigt, dass er gelernt hat, wie in der Fördersitzung die Teilprodukte eingezeichnet werden sollen. Er kann also die Teilprodukte in symbolischer Form in eine passende Darstellung im Punktefeld übertragen.

Alexander ermittelt durch Zählen der Zeilen und Spalten des markierten Punktefeldes das passende Summenprodukt $7 \cdot 9$ und nennt und notiert dies (SB 25). Er weiß also, dass die markierten Punktefelder zusammen dem Summenprodukt im rechten Term entsprechen. Allerdings nutzt er die Strukturierung des Punktefeldes offenbar nicht.

Er berechnet selbstständig zum ersten Teilprodukt $2 \cdot 9$ das passende Ergebnis 18 (SB 25). Die Interviewerin bestätigt dies (SB 26). Das zweite Teilprodukt $5 \cdot 9$ ermittelt er ohne Hilfestellung, indem er die Ergebnisse des Fünfer-Einmaleins bis 45 aufzählt (SB 27). Er nennt als Zwischenergebnis 65 und als Endergebnis 73 (SB 27). Die Interviewerin sagt, dass dies nicht ganz stimme (SB 28). Alexander beharrt zuerst auf seinem Ergebnis, überlegt nochmals und notiert dann das passende Ergebnis 63 (SB 31). Er weiß von sich aus, dass er die Ergebnisse der Teilprodukte summieren kann, um zum Endergebnis zu gelangen. Vermutlich addiert er nun die Ergebnisse der Teilprodukte und verrechnet sich zunächst zweimal, bevor er dann nach entsprechenden Hinweisen zum passenden Ergebnis gelangt. Grundsätzlich scheint er die Vorgehensweise verstanden zu haben.

Die Interviewerin zeigt Alexander nun noch eine weitere Möglichkeit, das Produkt $7 \cdot 9$ zu berechnen, indem 7 mal 10 minus 7 gerechnet werde (SB 36, 38). Sie fragt, ob 7 mal 10 nicht ganz schnell zu berechnen sei (SB 40). Alexander bestätigt dies (SB 41) und nennt 70 als Ergebnis (SB 43). Die Interviewerin sagt nun, dass man 70 minus 7 rechnen könne und dann ebenfalls auf 63 komme (SB 44). Alexander nickt (SB 45). Es wird in dieser Phase eine weitere Alternative vorgestellt, durch Nutzung der Distributivität das Produkt $7 \cdot 9$ zu berechnen ($7 \cdot 10 - 7 \cdot 1$). Alexan-der nennt ein passendes Zwischenergebnis, es wird aber nicht ganz klar, ob ihm das alternative Vorgehen wirklich klar wird.

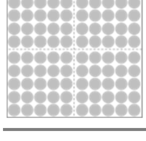
Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass Alexander bei beiden Aufgabenstellungen selbstständig das Summenprodukt in das Punktefeld einzeichnet. Er ermittelt die Faktoren des Summenproduktes bei beiden Aufgaben ohne Unterstützung. Bei der ersten Aufgabenstellung bleibt unklar, wie er die Faktoren findet, bei der zweiten Aufgabenstellung ermittelt er sie zählend. Bei der zweiten Aufgabenstellung berechnet er von sich aus die Teilprodukte zur Ergebnisermittlung. Bei beiden Aufgabenstellungen verrechnet er sich zunächst bei der Ermittlung der Endergebnisse, was darauf hindeuten könnte, dass er im additiven Bereich möglicherweise noch Schwierigkeiten hat. Dies wird jedoch in seiner Bearbeitung von BIRTE 2 nicht bestätigt (s. o.). Er vollzieht den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung selbstständig, was darauf hindeutet, dass er Verständnis entwickelt hat.

Fördersitzung – Teil II

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

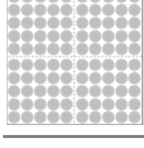
$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 = \_\_$



48	I	Eines noch.
49	AL	Nein (entnervt).
50	I	*[I legt die Stirn in Falten und legt ein neues Arbeitsblatt vor AL]*
51	AL	He, nein (weinerlich).
52	I	#Darfst ja bloß nicht zugeben, dass es

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \_\_ \cdot \_\_ = \_\_$



94	I	Jetzt probieren wir noch die nächste.
95	AL	*[AL knurrt verärgert, umrahmt mit Bleistift in den 10 Zeilen je 8 Punkte]*
96	I	*[I nickt]*
97	AL	(unv. nuschelt) *[AL setzt den Bleistift auf dem Blatt an]*

		dir auch noch ein bisschen Spaß macht.
53	AL	Es macht mir keinen Spaß. [*AL schüttelt den Kopf*] Es macht/
54	I	#Also, machen wir noch die. [*I tippt mit dem Finger auf 5 · 7 – 1 · 7 =*]
55	AL	[*AL nimmt den Bleistift zur Hand*] Es macht mir keinen/ Nur noch die obere. [*AL zeigt mit dem Stift auf 5 · 7 – 1 · 7 =*]
56	I	Die 4. [*I zeigt mit dem Finger das Blatt entlang*]
57	AL	<u>Nein</u>.
58	I	Ach, das bekommen wir noch hin.
59	AL	<u>Nein</u>.
60	I	Da bin ich <u>ganz</u> sicher.
61	AL	Nein. [*lacht*]
62	I	Oder schaffst du es nicht?
63	AL	Nein, mir ist langweilig. [*AL umrahmt mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte, nimmt den roten Buntstift zur Hand, umrahmt in einer weiteren Zeile 7 Punkte, nimmt den Bleistift zur Hand*] Ehm.
64	I	Guck einmal. [*I deutet mit dem Finger auf das Minuszeichen*]
65	AL	[*AL schreibt 6 in die erste Lücke*]
66	I	Guck einmal.
67	AL	Mhm?
68	I	#Da ist ein <u>Minus</u>.
69	AL	Weiß ich.
70	I	Mhm (bejahend).
71	AL	Ach, muss ich das machen? Das ist mir zu kompliziert. [*AL wirft den Kopf in den Nacken*]
72	I	Ah, na das glaub ich nicht, dass dir das zu kompliziert ist.
98	I	[*I legt den roten Stift vor AL*] Mach es einmal mit dem roten.
99	AL	[*AL nimmt den roten Buntstift zur Hand und zeichnet damit eine Linie, 8 Punkte lang, zwischen die neunte und zehnte Zeile*]
100	I	Mhm (bejahend).

73	AL	Doch.
74	I	Mhm (verneinend).
75	AL	[*AL streicht 6 durch*]
76	II	Da müsstest du es jetzt auch anders anmalen. [*I zeigt mit dem Finger auf die rote Umrahmung, nimmt den roten Stift zur Hand*] Weil wir haben ja jetzt
77	AL	[*AL stöhnt auf, vergräbt das Gesicht in den Händen*]
78	I	Die 5 mal 7 insgesamt. Und schau/ [*I deutet mit dem Stift auf die rote Umrahmung*] Von den 5 mal 7 gehen hier [*I umrahmt mit dem roten Buntstift in der fünften Zeile 7 Punkte*] 1 mal 7 weg. Also das da kommt weg, ne? [*I streicht mit dem Stift leicht die sechste Zeile mit der roten Umrahmung durch*]
79	AL	[*AL streicht mit Bleistift die sechste Zeile mit seiner roten Umrahmung durch*]
80	I	Also. Von den 5 mal 7 [*I deutet mit dem Finger auf die ersten 5 Zeilen*] kommen 1 mal 7 weg. [*I verdeckt mit dem Zeigefinger die fünfte Zeile*] Was bleibt dann übrig? (5 sec)
81	AL	Achtund/
82	I	Die Malaufgabe.
83	AL	#zwanzig.
84	I	[*nickt*] Die Malaufgabe?
85	AL	2 mal 7.
86	I	2 mal 7? [*I verdeckt erneut die fünfte Zeile mit dem Zeigefinger*]
87	AL	4 mal 7.
88	I	4 mal 7. Mhm (bejahend).
89	AL	[*AL schreibt 4 über 6*]
101	AL	[*AL nimmt wieder den Bleistift zur Hand*] (Gleich?) (unv.) 5, [*AL tippt mit dem Stift auf den ersten Punkt in der ersten Spalte*] 10. [*AL tippt mit dem Stift auf den zweiten Punkt der ersten Spalte*] (15) (unv.)
102	I	#Schau einmal her. Schau einmal her. [*I deutet mit dem Finger auf die Aufgabe*] Kann man das auch schneller, ohne Zählen? [*I nimmt AL den*

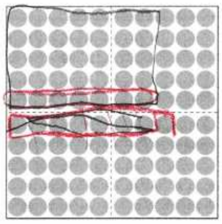
		Bleistift aus der Hand] Schau einmal [*I deutet mit dem Stift auf 10 · 8*] 10 mal 8. [*I deutet auf* das Minuszeichen] Minus/
103	AL	80.
104	I	[*I unterstreicht 10 und 1*] 1 mal 8. Was haben wir dann für eine Malaufgabe dazu? [*I deutet auf die Lücken*] Das mal 8 [*I deutet auf · 8*] das bleibt ja. Und 10 minus 1 ist? [*I deutet auf 10, – und 1*]
105	AL	Äh/
106	I	10 minus 1?
107	AL	80?
108	I	10 minus 1?
109	AL	70?
110	I	[*I schaut irritiert*]
111	AL	[*AL lacht*]
112	I	10 minus 1?
113	AL	10. [*lacht*]
114	I	[*I schüttelt den Kopf*] 10 minus 1?
115	AL	Ist doch 10? 10 minus/
116	I	1. [*nickt*]
117	AL	9.
118	I	[*nickt*] Also kommt hier eine 9 hin [*I zeigt mit dem Stift auf die erste Lücke*] und da eine 8 hin. [*I zeigt mit dem Stift auf die zweite Lücke, legt den Bleistift vor AL*]
119	AL	[*AL nimmt den Bleistift zur Hand*] Habe ich doch gesagt.
120	I	9 mal 8.
121	AL	[*AL schreibt 9 und 8 in die Lücken*] Ja.

90	I	Und 28 darfst du noch hinschreiben. Das hast du ja gerade schon gesagt.
91	AL	Ja. [*AL schreibt 28 in die zweite Lücke*]

122	I	#Ist gleich?
123	AL	Weiß ich nicht.

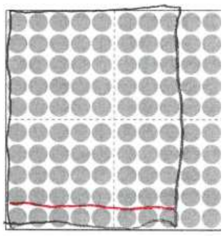
92	I	Super.
93	AL	Gut, jetzt darf ich gehen.

$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \cancel{6}\ 4 \cdot 7 = 28$



124	I	Das kann man jetzt hier [*I tippt mit dem Finger auf 10 · 8*] ganz gut darüber rechnen.
125	AL	[*AL lacht*]
126	I	Das habe ich ja vorhin schon einmal gesagt. 10 mal/ [*I tippt mit dem Finger auf 10 · 8*]
127	AL	#80.
128	I	#8.
129	AL	[*AL beginnt 2 in die Lücke für die Lösung zu schreiben*]
130	I	80. Minus 8. [*I tippt auf – 1 · 8*]
131	AL	[*AL kreist mit dem Stift in der Luft über der Lücke*]
132	I	[*I nickt*] Ist doch super, wie schnell das dann geht.
133	AL	[*AL ergänzt die 2 mit einer 7 zu 72*]
134	I	Gut. [*I nickt*]

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = 9 \cdot 8 = 72$



Analyse

Bei der Aufgabenstellung 5 · 7 – 1 · 7 = __ · 7 = zeigt sich Alexander zu Beginn sehr unmotiviert und gelangweilt (SB 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63). Dennoch markiert er schließlich mit Bleistift im Punktefeld in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte und mit Buntstift in der sechsten Zeile 7 Punkte (SB 63). Vermutlich liest er statt eines Subtraktionszeichens ein Additionszeichen. Die Interviewerin zeigt auf das Minuszeichen in der Aufgabe (SB 64). Alexander schreibt 6 für den ersten Faktor des Differenzproduktes auf (SB 65), was passen würde, wenn die Teilprodukte durch Addition verknüpft wären. Die Interviewerin fordert ihn auf, nochmals zu schauen (SB 66) und weist ihn auf das Minuszeichen hin (SB 68). Alexander streicht 6 wieder durch (SB 75). Die Interviewerin sagt, dass nun auch anders gezeichnet werden müsse (SB 76). Sie erklärt, dass von 5 mal 7 1 mal 7 abgezogen werden würden und markiert dabei mit rotem Buntstift in der fünften Zeile 7 Punkte (SB 78). Sie streicht außerdem leicht die von Alexander markierte sechste Zeile durch und sagt, dass das nicht dazugehören würde (SB 78). Er streicht ebenfalls die sechste Zeile durch (SB 79). Da die Vorgehensweise, wie Differenzprodukte im Punktefeld markiert werden sollen, bisher noch nicht angesprochen wurde, leitet die Interviewerin in diesem Abschnitt stark. Es kann nicht festgestellt werden, ob Alexander die Vorgehensweise klar wird.

Die Interviewerin wiederholt nochmals, dass von 5 mal 7 1 mal 7 abgezogen werden und fragt, was übrig bleibt (SB 80). Alexander ermittelt an dieser Stelle bereits das passende Endergebnis 28 (SB 81, 83). Es wird nicht ersichtlich, wie er zum Ergebnis kommt. Sehr wahrscheinlich ist, dass er das Ergebnis des zweiten Teilproduktes vom ersten Teilprodukt subtrahiert hat.

Die Interviewerin nickt und fragt nach der Malaufgabe (SB 82, 84). Alexander nennt zunächst 2 mal 7 (SB 85). Dem Produkt $2 \cdot 7$ würde das Punktefeld aus der rot markierten fünften Zeile und der rot markierten, durchgestrichenen sechsten Zeile mit jeweils 7 Punkten entsprechen. Es ist möglich, dass Alexander sich darauf bezieht. Die Interviewerin fragt, ob es 2 mal 7 sei und verdeckt nochmals die fünfte Zeile mit dem Finger (SB 86). Alexander nennt nun 4 mal 7 (SB 87) und schreibt es auf (SB 89), nachdem die Interviewerin ihn bestätigt hat (SB 88). Die Hilfestellung der Interviewerin, die fünfte Zeile abzudecken, hilft Alexander offenbar, in der Darstellung das passende Differenzprodukt ‚abzulesen'. Er überträgt damit die Punktefelddarstellung mit Unterstützung in die symbolische Form des Differenzproduktes. Dies kann darauf hindeuten, dass er teilweise Verständnis entwickelt hat.

Die Interviewerin bittet Alexander, 28 als Endergebnis noch aufzuschreiben, welches er vorher schon genannt hatte (SB 90). Er schreibt es auf (SB 91) und die Interviewerin bestätigt ihn (SB 92).

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ markiert Alexander mit Bleistift in 10 Zeilen je 8 Punkte im Hunderterpunktefeld (SB 95). Als er mit Bleistift weiterzeichnen will, gibt ihm die Interviewerin den Hinweis, den roten Stift zu verwenden (SB 98). Alexander zeichnet mit dem roten Stift eine Linie zwischen die neunte und zehnte Zeile (SB 99). Alexander scheint zu wissen, wie die Teilprodukte eines Differenzproduktes eingezeichnet werden müssen, er erhält lediglich den Hinweis eine zweite Farbe für das Subtrahendprodukt zu verwenden.

Alexander beginnt in Fünferschritten zu zählen (5, 10) und tippt dabei erst auf den ersten Punkt der ersten Spalte, dann auf den zweiten Punkt der zweiten Spalte (SB 101). Er zählt die Punkte spaltenweise, aber jeweils nur bis zur gestrichelten Linie. Denkbar ist, dass er vorhat, die Punkte des gesamten markierten Punktefeldes zu zählen. Die Interviewerin unterbricht ihn und fragt, ob man auch schneller ohne zu zählen zum Ergebnis kommen könne (SB 102). Sie richtet im Folgenden den Fokus sehr stark auf die symbolische Form der Aufgabe. Möglicherweise wäre ein Bezug zur Darstellung zur Ermittlung des Differenzproduktes an dieser Stelle hilfreicher gewesen. Sie beginnt die Aufgabe zur Berechnung zu nennen (10 · 8 –) (SB 102), wobei sie ‚10 mal 8' betont. Alexander unterbricht sie sowie nennt das Ergebnis 80 (SB 103). Die Interviewerin unterstreicht ‚10' und ‚1' in der Aufgabe und nennt 1 mal 8 (SB 104). Sie fragt nach dem Differenzprodukt und zeigt auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens (SB 104). Sie gibt den Hinweis, dass der zweite Faktor 8 gleich bleibe und fragt, wie viel 10 minus 1 sei (SB 105). Alexander reagiert zunächst fragend. (SB 105). Die Interviewerin fragt nun vier weitere Male nach dem Ergebnis von 10 minus 1 (SB 106, 108, 112, 114). Alexander nennt als Ergebnis erst 80 (SB 107), 70 (SB 109), 10 (SB 113) und schließlich den passenden Faktor 9 (SB 117). Es wird vermutlich zu wenig deutlich, welches der jeweils zu subtrahierende sowie der jeweils gleichbleibende Faktor der Teilprodukte in der symbolischen Form ist. Die Interviewerin gibt an, dass auf den ersten Platzhalter 9 und auf den zweiten Platzhalter 8 komme und deutet dabei jeweils auf den ersten und zweiten Platzhalter (SB 118). Alexander entgegnet, dass er das doch gesagt habe (SB 119). Die Interviewerin nennt nochmals 9 mal 8, wobei sie 9 betont (SB 120). Alexander schreibt 9 als ersten und 8 als zweiten Faktor des Differenzproduktes auf (SB 121). Die Interviewerin leitet hier stark. Es wird nicht deutlich, ob Alexander die Ermittlung des Differenzproduktes anhand der symbolischen Darstellung der Aufgabe nachvollziehen kann.

Die Interviewerin gibt den Hinweis, dass es möglich sei, das Endergebnis mithilfe der Ergebnisse der Teilprodukte zu berechnen, zeigt auf das Produkt 10 · 8 (SB 124) und nennt es (SB 126). Alexander gibt als Ergebnis 80 an (SB 127). Er schreibt zunächst 2 als Lösung auf. Die Interviewerin nennt 80 minus 8 und tippt dabei auf – 1 · 8 (SB 130). Alexander notiert 7 vor 2, sodass er das passende Endergebnis 72 erhält (SB 133). Es kann vermutet werden, dass er es ermittelt, indem er die Teilprodukte subtrahiert.

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Beim Vergleich der Bearbeitungen der beiden Aufgabenstellungen fällt auf, dass sich die Chronologie der Vorgehensweise unterscheidet: Bei der ersten Aufgabenstellung zeichnet Alexander zunächst die Teilprodukte ein, nennt das Ergebnis, bestimmt dann das Differenzprodukt und notiert daraufhin das Ergebnis. Bei der zweiten Aufgabenstellung zeichnet er die Teilprodukte, bestimmt das Summenprodukt und ermittelt zum Schluss das Ergebnis. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass bei der ersten Aufgabenstellung erstmals die Vorgehensweise erklärt wird, wie ein Differenzprodukt eingezeichnet werden soll. Bei der zweiten Aufgabenstellung zeichnet Alexander die Teilprodukte bereits selbstständig ein und erhält lediglich den Hinweis, eine weitere Farbe zu verwenden. Bei der ersten Aufgabenstellung ermittelt Alexander die Faktoren des Differenzproduktes mit Unterstützung. Bei der zweiten Aufgabenstellung fokussiert die Interviewerin stark auf die symbolische Form der Aufgabe. So wird nicht deutlich, ob Alexander das Differenzprodukt (rechter Term) möglicherweise auch in der Darstellung hätte ablesen können. Die Zusammenhänge der Faktoren der Teilprodukte und des Differenzproduktes, die anhand der symbolischen Form der Aufgabe dargestellt werden, scheinen Alexander nicht ganz deutlich zu werden. Bei der ersten Aufgabenstellung nennt Alexander das Endergebnis bereits vor der Ermittlung der Faktoren des Summenproduktes. Möglicherweise subtrahiert er dafür die Ergebnisse der Teilprodukte voneinander. Bei der zweiten Aufgabenstellung leitet die Interviewerin an, die Ergebnisse der Teilprodukte zu nutzen. Da er den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung immer selbstständiger vollzieht, kann davon ausgegangen werden, dass Verständnis zunehmend entwickelt wurde.

Gesamtfazit

Alexanders Ergebnisse der Pre-, Post- und Follow-up-Tests in der spezifischen Aufgabe zeigen einen positiven Entwicklungsverlauf. Im Vergleich zum Pre-Test zeigt seine Bearbeitung im Post-Test entscheidende Veränderungen, was auf zunehmendes Verständnis hindeutet. Die Bearbeitung im Follow-up-Test lässt vermuten, dass er Verständnis nachhaltig entwickelt hat.

In der Fördereinheit zum Summenprodukt vollzieht Alexander den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung selbstständig, was darauf hindeutet, dass er Verständnis entwickelt hat. Bei beiden Aufgabenstellungen verrechnet er sich zunächst bei der Ermittlung der Endergebnisse, gelangt dann aber zum passenden Ergebnis.

In der Fördereinheit zum Differenzprodukt zeigt Alexander, dass er den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung immer selbstständiger vollzieht, sodass davon ausgegangen werden kann, dass Verständnis zunehmend entwickelt wurde. Bei der ersten Aufgabenstellung nennt Alexander das Endergebnis bereits vor der Ermittlung der Faktoren des Summenproduktes, bei der zweiten Aufgabenstellung leitet die Interviewerin an, die Ergebnisse der Teilprodukte zu nutzen.

8.2.3.6 Fallbeispiel ‚Lara'

Lara ist zum Zeitpunkt der Einzelförderung acht Jahre alt und besucht eine Klasse mit 19 Kindern (zehn weiblich, neun männlich) einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr der zweiten Jahrgangsstufe zwei Wochen lang statt. Es werden vier individuell angepasste Sitzungen von ca. 45 Minuten durchgeführt. Der ausgewählte Transkriptausschnitt findet in der zweiten Fördersitzung statt und dauert ca. vier Minuten. Lara ist während der Sitzungen sehr aufgeweckt, kommunikativ und motiviert.

Hinweise zum Regelunterricht

Lara erhält den gleichen Regelunterricht wie Alexander. Die ausführliche Beschreibung ist unter 8.2.3.5 aufgeführt.

Bearbeitung in BIRTE 2

Lara zeigt in BIRTE 2 „insgesamt eine durchschnittliche Leistung“ (A-Gesamt Lara, S. 1). Ihre „Arbeitsgeschwindigkeit ist hoch“ (ebd.).

In folgenden Modulen zeigt Lara überwiegend *keinen besonderen Förderbedarf* (ebd.):

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Zahlen einordnen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Schnelle Zahlauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Zahlzerlegung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Lara bestimmt zu Folgen rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen jeweils passende Zahlen und sie ordnet Zahlen der Größe nach (A-Orientierung Lara, S. 1). In strukturierten Arbeitsmitteln wie Würfelbildern oder Zwanzigerfeldern erfasst sie Anzahlen quasi-simultan, im Hunderterfeld zeigt sie allerdings Schwierigkeiten (A-Basis Lara, S. 1). Auf dem Zwanzigerfeld ordnet sie vorgegebene Zahlen passend zu, auf dem Hunderterfeld gelingt ihr dies häufig nicht (ebd., S. 1). Sie zerlegt die Zahlen 8, 9, 10 und 20 richtig (ebd., S. 2). Verdoppelungsaufgaben bis 20 und 100 und Halbierungsaufgaben bis 20 löst sie korrekt, Halbierungsaufgaben bis 100 löst sie nicht passend (ebd.). Additionsaufgaben löst sie überwiegend korrekt, von zwölf Subtraktionsaufgaben bearbeitet sie fünf richtig (A-Rechnen Lara, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)
- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Tausch-, Umkehr- und Analogieaufgaben löst sie passend (ebd.). Bei acht Textaufgaben wählt sie sechsmal die passende Operation (A-Grundvorstellung Lara, S. 1). Weitere Rechengeschichten löst sie weitgehend korrekt (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

In folgenden Modulen zeigt Lara *besonderen Förderbedarf* (A-Gesamt Lara, S. 1):

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Größenvorstellungen (Modulgruppe: Grund- und Größenvorstellungen)

Zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich ordnet sie im Zahlenraum bis 20 die jeweils passende Zahl zu, im Zahlenraum bis 100 gelingt ihr dies nicht (A-Orientierung Lara, S. 1). Preise und Längen von Gegenständen schätzt sie überwiegend unpassend (A-Grundvorstellung Lara, S. 1). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Lara in keinem der für die ausgewählte Fördereinheit relevanten Module Förderbedarf zeigt, sodass davon auszugehen ist, dass bei der Förderung zum Multiplikativen Verständnis kaum zusätzliche Schwierigkeiten auftreten.

Bearbeitungen im Pre-, Post-und Follow-up-Test

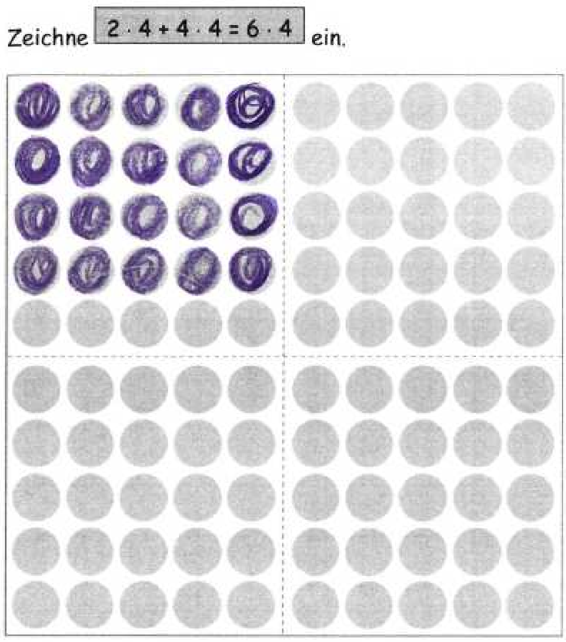


Abbildung 8.54: Laras Bearbeitung im Pre-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Lara hat im Pre-Test in der zur Analyse passenden Aufgabe ein $4 \cdot 5$-Punktefeld farbig markiert (Abb. 8.54). Es kann interpretiert werden, dass Lara bereits eine rechteckige Punktefelddarstellung für Produkte kennt. Das eingezeichnete Punktefeld passt jedoch nicht zur gestellten Aufgabe $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$. Lediglich der Faktor 4 kommt sowohl in Laras Zeichnung als auch in der Aufgabenstellung vor. Dies könnte darauf hindeuten, dass Lara das Summenprodukt $6 \cdot 4$ einzeichnen wollte und sich dabei beim Faktor 6 verzählt hat. Die intendierte Bearbeitung, bei der die Teilprodukte $2 \cdot 4$ und $4 \cdot 4$ deutlich werden, ist nicht erkennbar.

In Laras Bearbeitung im Post-Test wird ersichtlich, dass die Teilprodukte passend direkt untereinander eingezeichnet wurden, sodass das Summenprodukt sofort ‚ablesbar' ist (Abb. 8.55). Lara verwendet sogar, wie in der Einzelförderung intendiert, zwei verschiedene Farben für die Teilprodukte in der Punktefelddarstellung.

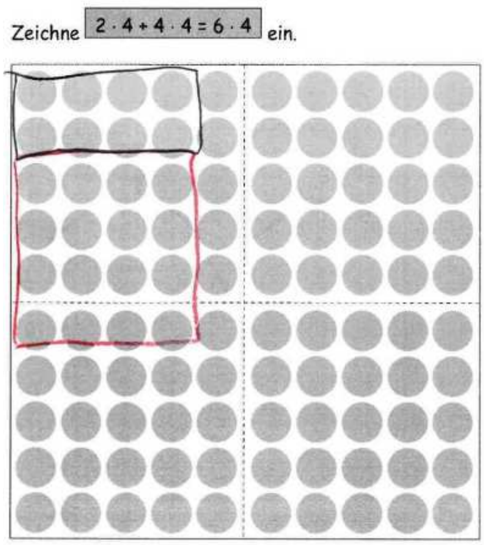


Abbildung 8.55: Laras Bearbeitung im Post-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

In Laras Bearbeitung im Follow-up-Test sind die Teilprodukte nebeneinander mit jeweils derselben Farbe eingezeichnet, wobei dazwischen eine Spalte Platz gelassen wurde (Abb. 8.56). Der erste Faktor 2 des ersten Teilproduktes wird als Spalten interpretiert, der zweite Faktor 4 als Zeilen. Beim zweiten Teilprodukt kann man dies nicht zuordnen, da beide Faktoren gleich sind. Das Summenprodukt hat Lara in einer anderen Farbe darunter eingezeichnet, wobei sie dort (im Unterschied zum ersten Teilprodukt) den ersten Faktor 6 als Zeilen und den zweiten Faktor 4 als Spalten interpretiert. Das heißt, Lara zeichnet jeweils die Teilprodukte und das Summenprodukt passend im Punktefeld ein, die Gleichheit des linken und rechten Terms wird durch diese Darstellung jedoch nicht direkt deutlich.

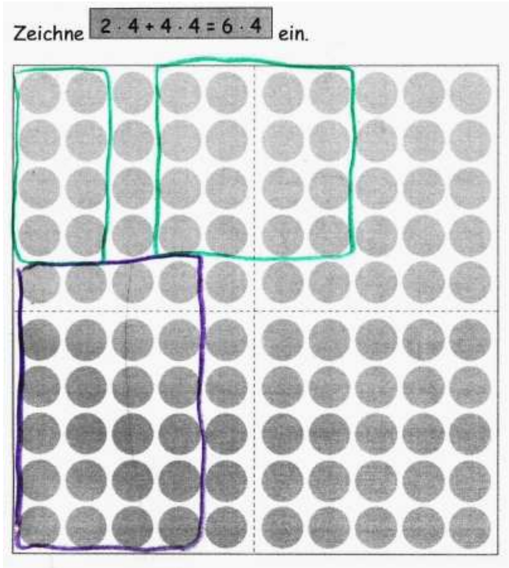


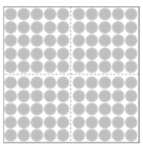
Abbildung 8.56: Laras Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Im Vergleich zu ihrer Bearbeitung im Pre-Test, in der nicht direkt ein Bezug zur Aufgabenstellung erkennbar war, sind in den Post-Tests beachtliche Lernfortschritte festzustellen. Die Bearbeitung im Follow-up-Test zeigt jedoch, dass eine vollständig passende Übertragung der symbolischen Schreibweise der Aufgabe in die Punktefelddarstellung nicht erfolgt ist. Es kann angenommen werden, dass vollständiges Verständnis für die Nutzung der Distributivität möglicherweise noch nicht nachhaltig entwickelt wurde. Laras Verhalten in der Fördersitzung deutet jedoch darauf hin, dass eine kurze Wiederholung der Vorgehensweise möglicherweise ausreichen würde, um bei Lara vollständiges Verständnis auch nachhaltig zu entwickeln.

Fördersitzung – Teil I

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

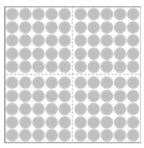
$5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$



1	L	Hier muss ich/ Ja. 5 mal 4/ [*L zeigt mit dem Finger auf* $5 \cdot 4$]
2	I	Perfekt.
3	L	[*L nimmt den Bleistift zur Hand*] Zeichne ich erst einmal ein (unv.).
4	I	Mhm (bejahend).

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

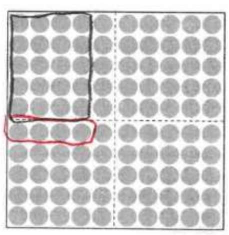
$2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$



19	L	7 mal (9.) (unv.) Und 7/ (2 mal/) (unv.) [*L umrahmt mit Bleistift in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte*] Plus. 5 mal 9.
20	I	Mhm (bejahend).
21	L	[*L nimmt den roten Buntstift zur Hand und umrahmt damit in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte*]

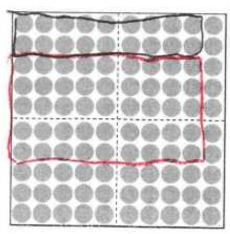
5	L	[*I umrahmt in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte*]
6	I	Super.
7	L	Und/ [*L legt den Bleistift weg und nimmt den Buntstift zur Hand*] Dann zeichne ich 1 mal 4 ein. [*L umrahmt mit rotem Buntstift in einer weitere Zeile 4 Punkte*]
8	I	Mhm (bejahend).
9	L	Ist gleich? [*L legt den Buntstift bei Seite und nimmt den Bleistift zur Hand*] Erst einmal 20. [*L zeigt mit Finger und Bleistift auf 5 · 4*] 20 plus 4 ist [*L deutet mit dem Finger und dem Bleistift die Aufgabe beim Sprechen entlang*] 24.
10	I	Das ist das ganze Ergebnis. [*I nickt*] Gibt es auch eine Malaufgabe, so wie da? [*I zeigt mit dem Stift auf die darüberliegende Aufgabe*] Die da [*I deutet mit dem Stift hinter die momentane Aufgabe*] als Ergebnis passt?
11	L	Mh, ja/
12	I	#5 mal 4 plus 1 mal 4 ist?
13	L	#6? [*L schreibt 6 hinter =*]
14	I	6 mal?
15	L	[*L schreibt · hinter 6*] Mal. [*L blickt kurz auf das Punktefeld*] 4. [*L schreibt 4 hinter ·*]
16	I	Mhm (bejahend). Super.
17	L	Ist gleich 24. [*L schreibt = 24 hinter die Aufgabe*]
18	I	Mhm (bejahend). Super.

$5\cdot 4+1\cdot 4=6\cdot 4=24$



21	L	[*legt den Buntstift beiseite, nimmt den Bleistift zur Hand und zählt damit die umrahmten Punkte der ersten Spalte*] 7. [*L schreibt 7 hinter die Aufgabe und blickt kurz auf das Punktefeld*] Mal 9 ist gleich? [*L schreibt · 9 = hinter 7*]
21	L	63.
22	I	Perfekt. [*I greift in Richtung Buntstift*]
23	L	[*L schreibt 63 hinter =*] So. [*L legt den Bleistift beiseite*] Fertig.

$2\cdot 9+5\cdot 9=7\cdot 9=63$



Analyse

Bei der Aufgabenstellung $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ weiß Lara von sich aus, dass sie zunächst das Punktefeld für das Produkt $5 \cdot 4$ einzeichnen muss. Sie verbalisiert dies und die Interviewerin bestätigt sie darin (SB 1, 3). Lara markiert in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte mit Bleistift (SB 5). Sie nimmt selbstständig einen Buntstift und sagt, dass sie nun 1 mal 4 einzeichne und markiert in der sechsten Zeile 4 Punkte ohne weitere Hilfestellung (SB 7). Daraus wird ersichtlich, dass Lara die Vorgehensweise in der Fördersitzung, die Punktefelder für die Teilprodukte untereinander und mit unterschiedlichen Farben zu markieren, ohne Hilfe umsetzen kann. Dies deutet darauf hin, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Sie berechnet nun ohne Unterstützung die Einzelergebnisse der Produkte $5 \cdot 4$ und $1 \cdot 4$, berechnet selbstständig $20 + 4$ und kommt auf das Ergebnis 24 (SB 9). Sie ermittelt die Ergebnisse der Teilprodukte und deren Summe offenbar auf symbolischer Ebene, ohne die Darstellung zu benötigen.

Die Interviewerin fragt nun nach, ob es auch eine passende Malaufgabe gebe und zeigt dabei auf die vorherige bereits bearbeitete Aufgabe. Lara nennt und notiert zunächst 6 (SB 13). Die Interviewerin gibt den Hilfsimpuls „6 mal?“ (SB 14). Lara blickt kurz auf das Punktefeld, sagt „Mal. 4.“ (SB 14) und notiert dies. Den ersten Faktor ermittelt sie vermutlich wieder anhand der symbolischen Darstellung, ohne die Punktefelddarstellung zu benötigen. Sie hat offenbar bereits jeweils die zu addierenden Faktoren und die gleichbleibenden Faktoren in den Teilprodukten identifiziert. Denkbar sind verschiedene Interpretationen. Möglich ist, dass sie den zweiten Faktor simultan in der Darstellung erfasst, was bei dem relativ kleinen Faktor 4 durchaus denkbar wäre. Es könnte auch sein, dass sie dabei die Strukturierung des Punktefeldes nutzt. Möglich ist natürlich auch, dass sie sehr schnell zählt.

Zum Schluss wiederholt Lara nochmals das Ergebnis 24 (SB 17), was sie schon einige Sekunden vorher berechnet hat.

Bei der Aufgabenstellung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ nennt Lara zu Beginn vermutlich bereits das Summenprodukt (SB 19). Dies könnte darauf hindeuten, dass sie auf die symbolische Darstellung fokussiert und möglicherweise in der symbolischen Darstellungsform schon verstanden hat, wie das Summenprodukt ermittelt werden kann. Sie murmelt vermutlich ‚2 mal 9‘ (SB 19) und markiert im Hunderterpunktefeld selbstständig in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte mit Bleistift (SB 19). Sie sagt „Plus. 5 mal 9“ (SB 19) und markiert mit Buntstift unter der ersten Markierung in 5 Zeilen je 9 Punkte ohne Hilfestellung (SB 21). Sie zeigt damit, dass sie gelernt hat, dass in der Fördersitzung die verschiedenen Farben jeweils für das Einzeichnen der Punktefelder für die zwei Teilprodukte eingesetzt werden sollen. Es kann vermutet werden, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Lara ermittelt den ersten Faktor des Summenproduktes durch Zählen der Zeilen und nennt sowie notiert 7 (SB 21). Dies deutet darauf hin, dass sie verstanden hat, wie der erste Faktor des Summenproduktes (rechter Term) in der Darstellung abgelesen werden kann. Allerdings nutzt sie die Struktur des Punktefeldes nicht. Sie blickt kurz auf die Darstellung und sagt „Mal 9 ist gleich?“ (SB 21) und notiert dies. Denkbar sind hier zwei Interpretationen. Einerseits könnte es sein, dass Lara den Faktor 9 in der Darstellung schnell erkennt, da ausgehend von 10 Spalten lediglich 1 Spalte abgezogen werden muss. Anderseits könnte es auch sein, dass sie den zweiten gleichbleibenden Faktor 9 noch präsenter im Kopf hat, da dieser in den Teilprodukten und im Summenprodukt gleich bleibt.

Lara nennt das Ergebnis 63 sofort und schreibt es auf (SB 21, 23). Dies weist darauf hin, dass sie die Lösung der Aufgabe $7 \cdot 9$ bereits auswendig weiß. Diese Vermutung wird gestützt durch die Auskunft der Lehrkraft, in der das Siebener- und Neuner-Einmaleins als Unterrichtsthemen zu Unterrichtsstunden aufgeführt werden, die vor der hier analysierten Fördersitzung stattgefunden haben. Es ist auch möglich, dass Lara während des Einzeichnens die Teilprodukte im Kopf berechnet und diese addiert hat.

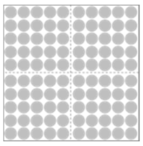
Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

Beim Vergleich der Bearbeitungen der beiden Aufgabenstellungen fällt auf, dass sich die Chronologie der Vorgehensweise unterscheidet: Bei der ersten Aufgabenstellung zeichnet Lara zunächst die Teilprodukte ein, ermittelt das Ergebnis, bestimmt dann das Summenprodukt und nennt daraufhin nochmals das Ergebnis. Bei der zweiten Aufgabenstellung zeichnet sie die Teilprodukte, bestimmt das Summenprodukt und ermittelt zum Schluss das Ergebnis. Die Interviewerin fragt Lara bei der ersten Aufgabenstellung nach der Ergebnisermittlung nochmals explizit nach dem passenden Summenprodukt, sodass Lara möglicherweise deswegen bei der zweiten Aufgabenstellung die Bestimmung des Summenproduktes vorzieht. Bei beiden Aufgabenstellungen zeichnet sie selbstständig die Teilprodukte in zwei verschiedenen Farben ein. Die Faktoren des Summenproduktes ermittelt sie entweder anhand der symbolischen Form oder der Punktefelddarstellung ohne Hilfe. Das Endergebnis findet sie von sich aus durch die Addition der Ergebnisse der Teilprodukte. Den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung vollzieht sie selbstständig, sodass davon ausgegangen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Fördersitzung – Teil II

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 = \_\_$



24 I [*I schreibt den Namen von L auf das neue Arbeitsblatt*] Und das Ganze geht natürlich auch noch mit minus. [*I nimmt das fertig bearbeitete Blatt weg und legt das neue Arbeitsblatt vor L*]

25 L (zischt) Mhm (nachdenklich). Da bin ich nicht (so gut?). (Das kann ich nicht so?) (unv. flüstert) [*L nimmt den Bleistift zur Hand*]

26 I Ah. Das bekommst du hin. Also, als Erstes wird mit Bleistift 5 mal 7 [*I zeigt mit dem Stift auf 5 · 7*] eingezeichnet. [*I tippt mit dem Stift auf das Punktefeld*]

27 L [*L zieht das Arbeitsblatt zu sich heran und umrahmt mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte*]

28 I Genau. 1 mal 7. [*I zeigt mit dem Stift auf 1 · 7*] In der anderen Farbe. Und zwar kommt das ja weg.

29 L [*L legt den Bleistift beiseite und nimmt den roten Buntstift zur Hand*]

30 I [*I deutet mit dem Stift auf die fünfte Zeile des Punktefeldes*] Also kommt das hier mit hinein.

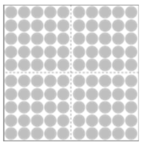
31 L [*L zeichnet mit dem Buntstift eine Linie, 7 Punkte lang, zwischen die vierte und fünfte Zeile des Punktefeldes und bessert diese an einer Stelle nochmals aus, sodass sie an der Stelle etwas dicker ist*]

32 I Mhm (bejahend).

33 L [*L legt den Buntstift beiseite*] Ehm, ist/ [*L nimmt den Bleistift zur Hand und deu-*

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \_\_ \cdot \_\_ = \_\_$



37 I [*I tippt mit dem Stift auf die Aufgabe 10 · 8 – 1 · 8*]

38 L 10 mal (unv. Jalousien fahren herunter)

39 I [*I legt das vorherige Arbeitsblatt zu den Unterlagen*]

40 L [*L nimmt den Bleistift zur Hand*] Was ist das? [*L nickt Richtung Fenster*]

41 I Ach (genervt), das geht manchmal herunter, wenn es [*I notiert sich etwas in ihren Unterlagen*] heller wird.

42 L Ah. 10/ [*L beginnt mit Bleistift, in den 10 Zeilen je 8 Punkte zu umrahmen*] (10) (unv.) [*L vollendet die Umrahmung*] (im Hintergrund hört man die Jalousien herunterfahren) (Lustig?) [*L legt den Bleistift beiseite und nimmt den Buntstift zur Hand*] Minus 8. [*L zeichnet einen Strich zwischen die neunte und zehnte Zeile*] (Jalousie bewegt sich noch einmal) [*L schaut erschrocken auf, legt den Buntstift beiseite und nimmt den Bleistift zur Hand*] Ehm/

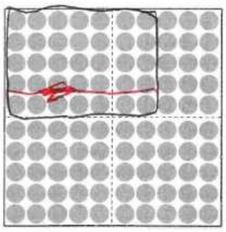
43 I Mach das einmal noch so, [*I nimmt den Buntstift zur Hand und zieht das Blatt zu sich heran*] dass man das auch erkennt, dass das sozusagen [*I umrahmt mit dem Buntstift in der zehnten Zeile 8 Punkte vollständig*] das meinst, ja? [*I legt den Buntstift vor L*]

44 L Ja, ehm/

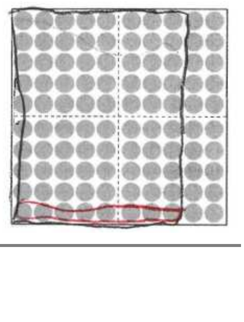
45 I Was kommt das jetzt für eine Malaufgabe heraus?

		tet damit auf die erste Spalte des markierten Punktefeldes] (unv.) Ja, 4.
34	I	Mhm (bejahend).
35	L	[*L schreibt 4 in die erste Lücke*]
35	L	28. [*L schreibt 28 in die Lücke für das Ergebnis*]
36	I	Super.

$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \underline{4} \cdot 7 = \underline{28}$



46	L	[*L blickt auf das Arbeitsblatt*] 8. Kommt hierhin. [*L schreibt 8 in die zweite Lücke*]
47	I	Mhm (bejahend).
48	L	Und/ [*L deutet mit dem Bleistift auf die erste Spalte des markierten Punktefeldes*] 9 kommt hier hin. [*L schreibt 9 in die erste Lücke*]
49	I	[*I macht sich Notizen in ihren Unterlagen*] (man hört es rascheln) Mhm (bejahend).
50	L	Und hier kommt 72. [*L schreibt 72 in die Lücke für das Ergebnis*]
51	I	Mhm (bejahend). Wo hast du das jetzt so schnell gesehen? [*I zeigt mit dem Stift auf 9 im rechten Term*]
52	L	Ich/ Weil hier die 9 ist [*L fährt mit dem Bleistift die erste Spalte entlang*]
53	I	#Mhm (bejahend).
54	L	Und da die 8. [*L fährt mit dem Bleistift die erste Zeile entlang*]
55	I	Mhm (bejahend). Kann man das auch hier sehen? [*I tippt mit dem Stift auf $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8$*]
56	L	Ehm, ja? [*L neigt den Kopf und schüttelt ihn leicht*]
57	I	[*I nickt*] Wie denn?
58	L	Wie meinst du das?
59	I	Kann man hier [*I deutet mit dem Stift $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8$ entlang*] auch sehen, welche Malaufgabe da [*I tippt mit dem Stift auf*

		9 · 8] dann herauskommt?
60	L	(Um die?) (unv.) 10 mal 8? [*L tippt mit dem Bleistift auf 10 · 8*]
61	I	[*I nickt*] Nein, ich meine 9 mal 8. [*I tippt mit dem Stift auf 9 · 8*] Woher weißt denn du das, wenn man jetzt das [*I deutet mit dem Stift 10 · 8 – 1 · 8 entlang*] so sieht?
62	L	Ehm, weil/
63	I	#Kann man das auch sehen?
64	L	#Weil man das wegmacht/ [*L legt den Buntstift auf die unterste Zeile des Punktefeldes*]
65	I	[*I nickt*]
66	L	[*L legt den Buntstift bei Seite*] Da sind minus/ Halt/ Kann man/ Ehm. 10. Minus. 1. Ist 9. [*L gestikuliert beim Sprechen wild in der Luft herum*]
67	I	Mhm (bejahend). [*I nickt*]
68	L	Und die 8 [*L deutet mit dem Finger 8 Punkte der ersten Zeile entlang*] bleiben immer noch/
69	I	#immer 8. [*I nickt*]
70	L	#normal. Normal [*L macht in der Luft eine abschließende Geste*]
71	I	#Gut. Super. [*I nickt*] Genau. Mhm (bejahend).
		$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \underline{9} \cdot \underline{8} = \underline{72}$ 

Analyse

Bei der Aufgabenstellung $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 =$ kündigt die Interviewerin zu Beginn an, dass nun Minusaufgaben gerechnet werden (SB 24). Akustisch nicht ganz verständlich äußert sich Lara vermutlich dahingehend, dass sie das nicht so gut könne (SB 25). Die Interviewerin bestärkt sie positiv, indem sie sagt, dass

Lara das schon hinbekommen werde (SB 26). Die Interviewerin gibt den Hinweis, zuerst das Produkt $5 \cdot 7$ mit Bleistift auf dem Punktefeld einzuzeichnen (SB 26). Lara erledigt dies wortlos ohne weitere Hilfestellung. Die Interviewerin erklärt, dass nun das Produkt für $1 \cdot 7$ in das Punktefeld zu $5 \cdot 7$ hineingezeichnet werden soll, da es davon abgezogen werde (SB 28). Sie weist nochmals darauf hin, wo genau in der Darstellung das Punktefeld für $1 \cdot 7$ eingezeichnet werden soll und zeigt auf die fünfte Zeile (SB 30). Lara zeichnet mit Buntstift einen Strich zwischen die vierte und fünfte Zeile (SB 31). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 32). Die Vorgehensweise, wie in der Fördersitzung Differenzprodukte eingezeichnet werden sollen, wird an dieser Stelle neu erarbeitet und erfolgt somit recht angeleitet. Lara erledigt die einzelnen Schritte schnell und ohne Probleme. Es ist jedoch nicht eindeutig zu erkennen, ob sie lediglich den Hinweisen folgt oder ob sie auch Verständnis dafür entwickelt.

Lara deutet mit dem Buntstift kurz auf die erste Spalte des markierten Punktefeldes, nennt den fehlenden ersten Faktor 4 des Differenzproduktes und schreibt diesen auf (SB 33, 35). Dies deutet darauf hin, dass sie den ersten Faktor im rechten Term in der Darstellung ‚abliest'. Bei einer so geringen Anzahl ist es möglich, die Punkte auf einen Blick simultan zu erfassen. Auch denkbar ist, dass sie dafür zusätzlich die Strukturierung des Punktefeldes nutzt und im Kopf schnell von 5 Zeilen 1 Zeile abzieht. Möglich ist natürlich ebenfalls, dass sie die Zeilen sehr schnell zählt.

Sie nennt ohne länger zu überlegen das passende Ergebnis 28 und notiert es (SB 35). Dies lässt vermuten, dass sie die Multiplikationsaufgaben $4 \cdot 7$ bereits automatisiert hat. Diese Vermutung wird wieder gestützt durch die Auskunft Laras Lehrkraft über ihren Unterricht. Sowohl das Vierer- als auch das Siebener-Einmaleins wurden bereits vor der hier analysierten Sitzung als Unterrichtsthemen explizit benannt. Es ist natürlich auch möglich, dass Lara während des Einzeichnens die Teilprodukte bereits ausgerechnet hat und das passende Ergebnis findet.

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ nennt Lara zunächst den Faktor 10 und markiert selbstständig mit Bleistift in den 10 Zeilen je 8 Punkte (SB 42). Sie sagt „Minus 8" (SB 42) und zeichnet ohne weitere Hilfe mit einem Buntstift eine Linie zwischen die neunte und zehnte Zeile. Die Interviewerin gibt hier den Hinweis, dass die $1 \cdot 8$-Reihe noch fertig eingerahmt werden soll und vervollständigt selbst die Linie zu einer Umrahmung (SB 43). Es wird deutlich, dass Lara die Vorgehensweise, wie Differenzprodukte im Punktefeld eingezeichnet werden sollen, selbstständig umsetzen kann. Dies deutet darauf hin, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Die Interviewerin fragt nun nach dem Differenzprodukt (SB 45). Lara blickt auf das Arbeitsblatt, nennt 8 als zweiten gleichbleibenden Faktor des Differenzproduktes und schreibt 8 auf den zweiten Platzhalter (SB 46). Es sind hier verschiedene Interpretationen denkbar. Eine Möglichkeit ist, dass sie den Faktor im Punktefeld durch Ermittlung der Anzahl der markierten Spalten ‚abliest'. Da sie den passenden Faktor relativ schnell nennt, kann vermutet werden, dass sie dafür die Strukturierung des Punktefeldes nutzt und von den 10 Spalten schnell 2 Spalten abzieht. Eine weitere Möglichkeit ist, dass sie den gleichbleibenden Faktor 8 in den Teilprodukten bereits identifiziert hat und sie nun weiß, dass dieser im Differenzprodukt gleichbleibt. Sie deutet dann mit dem Bleistift auf die erste Spalte des markierten Punktefeldes, nennt 9 als ersten Faktor und schreibt 9 auf den ersten Platzhalter (SB 48). Es kann vermutet werden, dass sie hier die Punktefelddarstellung nutzt und nachsieht, wie viele Zeilen übrig bleiben. Da sie diesen Faktor relativ schnell findet, ist zu vermuten, dass sie eher nicht zählt, sondern von den 10 Zeilen 1 Zeile abzieht.

Als Ergebnis nennt und notiert sie sofort 72 (SB 50). Es könnte sein, dass sie die Malaufgabe $9 \cdot 8$ ebenfalls bereits auswendig weiß, was wiederum durch die Auskunft Laras Lehrkraft bekräftigt wird. Möglich ist natürlich auch, dass sie während des Einzeichnens über Ermittlung der Ergebnisse der Teilprodukte das passende Endergebnis berechnet.

Nachdem die Aufgabenbearbeitung abgeschlossen ist, fragt die Interviewerin nach: „Wo hast du das jetzt so schnell gesehen?" (SB 51). Dabei zeigt sie auf 9 im Differenzprodukt. Lara begründet dies mithilfe der Punktefelddarstellung. Dabei erklärt sie ihre Sichtweise, den ersten Faktor 9 als Zeilen und den zweiten Faktor 8 als Spalten zu deuten (SB 52, 54). Es wird hier deutlich, dass Lara verstanden hat, wie das Differenzprodukt im rechten Term im markierten Punktefeld abgelesen werden kann. Die Interviewerin fragt nochmals nach, ob man das auch in der symbolischen Form der Aufgabe erkennen könne (SB 55). Lara fragt nach, was genau gemeint ist (SB 58). Die Interviewerin fragt, woher sie wüsste, dass es $9 \cdot 8$ heißen muss, wenn sie die Aufgabe $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ sieht (SB 61). Lara setzt bei ihrer Erklärung die Darstellung des Punktefeldes wieder sinnvoll ein. Sie erläutert dies mit „Weil man das wegmacht" (SB 64) und legt dabei den Stift auf die unterste Zeile des markierten Punktefeldes, die das Subtrahendprodukt $1 \cdot 8$ darstellt. Es kann angenommen werden, dass sie den Übersetzungsprozess zwischen Punktefelddarstellung und symbolischer Darstellung vollziehen kann. Lara geht des Weiteren auf die symbolische Darstellung ein. Sie weist darauf hin, dass 10 minus 1 gerechnet werden müsse und 8 immer gleich bleiben würde (SB 66, 68). Damit wird deutlich, dass sie jeweils den zu subtrahierenden und den gleichbleibenden Faktor in den Teilprodukten identifiziert hat. Die Interviewerin bestätigt dies (SB 69, 71). Die Erklärungen anhand der Punktefelddarstellungen in Verbindung mit den Hinweisen auf die symbolische Darstellung der Aufgabe weisen darauf hin, dass Lara Verständnis für die Nutzung der Distributivität entwickelt hat.

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Lara sehr schnell gelernt hat, wie die Teilprodukte des Differenzproduktes in die Punktefelddarstellung eingezeichnet werden. Sie ermittelt teilweise mithilfe der Punktefelddarstellung, teilweise vermutlich anhand der symbolischen Form der Aufgabe selbstständig die Faktoren der Differenzprodukte. Beide Endergebnisse ermittelt sie sehr schnell, sodass die Vermutung naheliegt, dass sie die entsprechenden Multiplikationsaufgaben bereits automatisiert hat. Sie scheint selbstständig von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung übersetzen zu können, sodass davon ausgegangen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat. In ihrer Erklärung und Begründung nach der zweiten Bearbeitung wird dies auch nochmals verstärkt deutlich.

Gesamtfazit

Im Vergleich zu Laras Bearbeitung im Pre-Test, in der nicht direkt ein Bezug zur Aufgabenstellung erkennbar war, sind in den Post-Tests beachtliche Lernfortschritte festzustellen. Die Bearbeitung im Follow-up-Test zeigt jedoch, dass ein vollständiges Verständnis für die Nutzung der Distributivität möglicherweise noch nicht nachhaltig entwickelt wurde. Laras Verhalten in der Fördersitzung lässt jedoch vermuten, dass eine kurze Wiederholung der Vorgehensweise möglicherweise ausreichen würde, um bei Lara vollständiges Verständnis auch nachhaltig zu entwickeln.

In der Fördereinheit zum Summenprodukt vollzieht Lara den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung selbstständig, sodass davon ausgegangen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat. Das Endergebnis findet sie bei beiden Aufgabenstellungen von sich aus durch die Addition der Ergebnisse der Teilprodukte.

In der Fördereinheit zum Differenzprodukt zeigt Lara, dass sie selbstständig von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung übersetzen kann, sodass davon ausgegangen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat. Ihre Erklärung und Begründung nach der zweiten Bearbeitung unterstützen diese Annahme.

8.2.3.7 Fallbeispiel ‚Natalie'

Natalie ist zum Zeitpunkt der Einzelförderung acht Jahre alt und besucht eine Klasse mit 19 Kindern (zehn weiblich, neun männlich) einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Die Einzelförderung findet im zweiten Schulhalbjahr der zweiten Jahrgangsstufe drei Wochen lang statt. Es werden fünf individuell angepasste Sitzungen von ca. 45 Minuten durchgeführt. Der ausgewählte Transkriptausschnitt findet in der dritten Fördersitzung statt und dauert ca. drei Minuten. Natalie ist während der Sitzungen sehr aufgeweckt, kommunikativ und motiviert.

Hinweise zum Regelunterricht

Natalie erhält den gleichen Regelunterricht wie Alexander. Die ausführliche Beschreibung ist unter 8.2.3.5 aufgeführt.

Bearbeitung in BIRTE 2

Natalie zeigt in ihrer Bearbeitung in BIRTE 2 „eine durchschnittliche Leistung" (A-Gesamt Natalie, S. 1) und ihre „Arbeitsgeschwindigkeit ist durchschnittlich" (ebd.).

In folgenden Modulen zeigt Natalie überwiegend *keinen besonderen Förderbedarf* (ebd.):

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Zahlen einordnen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Schnelle Zahlauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Zahlzerlegung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Natalie bestimmt zu Folgen rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen überwiegend jeweils passende Zahlen und sie ordnet Zahlen der Größe nach (A-Orientierung Natalie, S. 1). In strukturierten Arbeitsmitteln wie Würfelbildern, Zwanziger- und Hunderterfeldern erfasst sie Anzahlen quasi-simultan (A-Basis Nicole, S. 1). Auf dem Zwanziger- und Hunderterfeld ordnet sie vorgegebene Zahlen überwiegend passend zu (ebd.). Sie zerlegt die Zahlen 8, 9, 10 und 20 fast immer richtig (ebd., S. 2). Von 14 Verdoppelungs- und Halbierungsaufgaben bis 20 und 100 löst sie zehn korrekt (ebd.). Von zwölf Additionsaufgaben löst sie elf korrekt, von zwölf Subtraktionsaufgaben bearbeitet sie fünf richtig

(A-Rechnen Natalie, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)
- Größenvorstellungen (Modulgruppe: Grund- und Größenvorstellungen)
- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Tausch- und Umkehraufgaben löst sie nicht richtig, Analogieaufgaben löst sie fast immer passend (ebd.). Preise und Längen von Gegenständen schätzt sie in zwei von sechs Aufgaben unpassend (A-Grundvorstellung Natalie, S. 1). Bei acht Textaufgaben wählt sie dreimal die passende Operation (ebd.). Weitere Rechengeschichten löst sie weitgehend korrekt (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

In folgendem Modul zeigt Natalie einen *besonderen Förderbedarf* (A-Gesamt Natalie, S. 1).

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)

Zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich ordnet sie im Zahlenraum bis 20 und bis 100 jeweils überwiegend unpassende Zahlen zu (A-Orientierung Natalie, S. 1). Diese Kompetenz ist für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Natalie in keinem der für die ausgewählte Fördereinheit relevanten Module Förderbedarf zeigt, sodass davon auszugehen ist, dass bei der Förderung zum Multiplikativen Verständnis kaum zusätzliche Schwierigkeiten auftreten.

Bearbeitungen im Pre-, Post- und Follow-up-Test

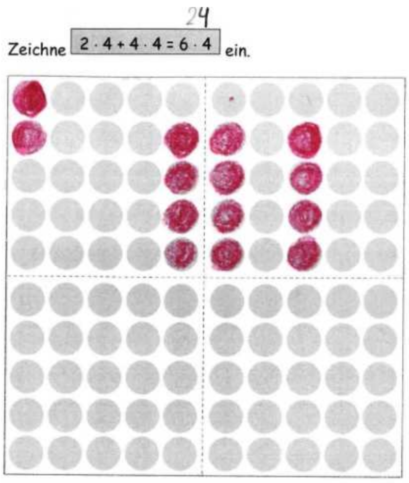


Abbildung 8.57: Natalies Bearbeitung im Pre-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

In Natalies Bearbeitung im Pre-Test sind die ersten zwei Punkte der ersten Spalte eingezeichnet (Abb. 8.57). Es kann vermutet werden, dass der Faktor 2 im ersten Teilprodukt in die Darstellung übersetzt werden sollte. In der fünften und sechsten Spalte wurden jeweils ab der zweiten Zeile 4 Punkte markiert, was als $2 \cdot 4$-Punktefeld gedeutet werden kann. In der achten Spalte sind ab der zweiten Zeile nochmals 4 Punkte markiert. Insgesamt ist in der Darstellung der Bezug zur Aufgabenstellung nicht erkennbar.

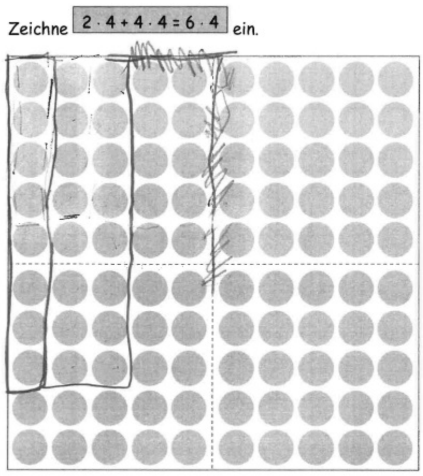


Abbildung 8.58: Natalies Bearbeitung im Post-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

In Natalies Bearbeitung in der entsprechenden Aufgabe im Post-Test (Abb. 8.58) sind 8 Punkte in der ersten Spalte markiert, was vermutlich das Produkt $2 \cdot 4$ deutlich machen soll. Allerdings wird hier nicht die Sichtweise erkennbar, ein Produkt mit einer spezifischen Anzahl an Zeilen und Spalten deutlich zu machen. Rechts direkt daneben sind in zwei weiteren Spalten je 8 Punkte markiert, was möglicherweise das Produkt $4 \cdot 4$ darstellen soll. In der üblichen Rechtecksdarstellung wäre dies ein Punktefeld für $2 \cdot 8$. In der Bearbeitung wurde begonnen, ein weiteres Feld einzuzeichnen; dies wurde aber wieder weggestrichen. Es kann vermutet werden, dass das markierte Punktefeld, bestehend aus den Feldern für die Teilprodukte, insgesamt als Summenprodukt erkannt wird. In der gängigen Rechtecksdarstellung würde das markierte Feld das Produkt $3 \cdot 8$ darstellen, was mathematisch natürlich dem Produkt $4 \cdot 6$ entspricht. Es sind also durchaus Bezüge zur Aufgabenstellung erkennbar. Die Darstellung entspricht so jedoch nicht der intendierten Bearbeitung.

In Natalies Bearbeitung im Follow-up-Test sind die Teilprodukte jeweils nebeneinander als Felder markiert (Abb. 8.59). Dem Produkt $2 \cdot 4$ entspricht das Feld links oben, bestehend aus 2 Spalten mit jeweils 4 Punkten. Der erste Faktor wird als Spalten, der zweite als Zeilen angesehen. Für das Produkt $4 \cdot 4$ wurde ein Feld mit je 4 Spalten und Zeilen eingezeichnet. Dazwischen wurde eine Spalte frei gelassen. Darunter ist ein Feld mit 4 Zeilen mit je 6 Punkten markiert, was für das Summenprodukt $6 \cdot 4$ stehen kann. Hier wird, im Gegensatz zum ersten Teilprodukt, der erste Faktor als Zeilen und der zweite Faktor als Spalten angesehen. Die Gleichheit der beiden Terme der Gleichung wird in der Darstellung so nicht deutlich. Dennoch kann festgestellt werden, dass Natalie Produkte mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten entsprechend den Faktoren einzeichnen kann und die drei in der Aufgabe notierten Produkte deutlich werden.

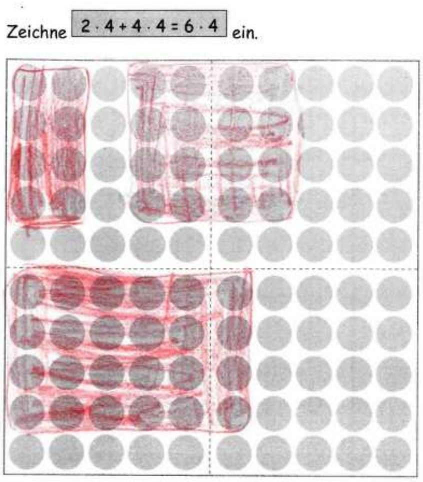
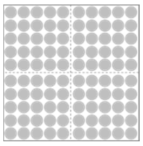
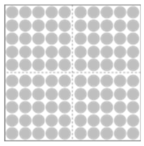


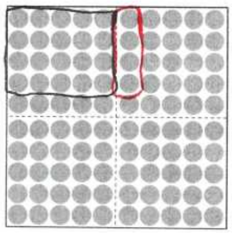
Abbildung 8.59: Natalies Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Im Vergleich zum Pre-Test sind in Natalies Bearbeitung im Post- und Follow-up-Test durchaus Fortschritte zu verzeichnen. Es lassen sich bei beiden Bearbeitungen die Teilprodukte identifizieren. Im Post-Test wird in der Darstellung die Gleichheit der beiden Terme deutlich, jedoch sind die Produkte nicht in der herkömmlichen Darstellung mit angegebener Anzahl an Zeilen und Spalten eingezeichnet. Im Follow-up-Test ist ersichtlich, dass Natalie Produkte entsprechend den Faktoren als Felder mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten darstellen kann. Hier wird jedoch wiederum die Gleichheit der beiden Terme auf der linken und rechten Seite in der Darstellung nicht deutlich. Dies deutet darauf hin, dass Verständnis für die Nutzung der Distributivität möglicherweise nur teilweise, aber nicht vollständig entwickelt werden konnte.

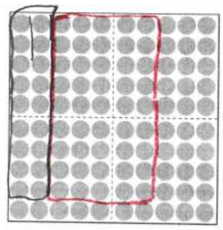
Fördersitzung – Teil I

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ 	Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus. $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ 
1 N [*N legt den Stift so hin, dass er auf die Aufgabe zeigt*] 5 mal 4. [*N nimmt den Bleistift zur Hand und umrahmt damit in den ersten 5 Spalten je 4 Punkte, nimmt dann den roten Buntstift zur Hand und umrahmt in einer weiteren Spalte 4 Punkte*]	11 N [*N beginnt mit dem Bleistift hinter der ersten Spalte einzuzeichnen*] Ups. [*N umrahmt mit Bleistift in den ersten 2 Spalten je 9 Punkte und nimmt dann den roten Buntstift zur Hand*] Und 5. [*N umrahmt in weiteren 5 Spalten je 9 Punkte*]
2 I Mhm (bejahend).	12 I Mhm (bejahend).
3 N [*N nimmt wieder den Bleistift zur Hand*] Ist gleich/ 6/ [*N schreibt 6 hinter die Aufgabe*]	13 N [*N nimmt den Bleistift zur Hand*] 7. [*N schreibt 7 · hinter die Aufgabe*] Mal. 9. [*N schreibt 9 hinter 7 ·*]
4 I Mhm (bejahend).	
5 N Mal/ [*N schreibt · hinter 6*] 4. [*N schreibt 4 hinter ·*]	
6 I Mhm (bejahend).	
7 N Ist gleich. [*N schreibt = hinter 6 · 4*] 24.	13 N Ist gleich. [*N schreibt = hinter 7 · 9*] 63. [*N schreibt 63 hinter =*]
8 I Mhm (bejahend).	14 I Super. Perfekt. Mensch.
9 N [*N schreibt 24 hinter =*]	15 N [*N reicht I das Arbeitsblatt*]
10 I Super.	16 I [*I nimmt das Arbeitsblatt und legt es beiseite*]

$5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$



$2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 7 \cdot 9 = 63$



Analyse

In der Aufgabenstellung $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$ nennt Natalie zunächst das erste Teilprodukt $5 \cdot 4$ und markiert dann selbstständig mit Bleistift in den ersten 5 Spalten je 4 Punkte und mit Buntstift in der sechsten Spalte 4 Punkte (SB 1). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 2). Natalie zeigt damit, dass sie gelernt hat, dass in der Fördersitzung die Teilprodukte mit unterschiedlichen Farben gekennzeichnet werden. Natalie interpretiert damit, anders als die meisten übrigen Kinder in der Einzelförderung, den ersten zu addierenden Faktor jeweils als Spalten und den zweiten gleichbleibenden Faktor jeweils als Zeilen. Da sie die symbolische Form der Aufgabe ohne Hilfe in die Punktefelddarstellung übersetzen kann, scheint sie Verständnis entwickelt zu haben.

Natalie nennt 6 als ersten, zu summierenden Faktor des Summenproduktes und notiert 6 (SB 3). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 4). Natalie nennt 4 als zweiten gleichbleibenden Faktor und notiert $\cdot\ 4$ (SB 5). Auch hier stimmt die Interviewerin zu (SB 6). Es ist nicht ersichtlich, ob Natalie mithilfe der Punktefelddarstellung oder der symbolischen Form der Teilprodukte das Summenprodukt ermittelt.

Natalie nennt 24 als Ergebnis und notiert dies (SB 7, 9). Die Interviewerin stimmt zu (SB 8, 10). Da Natalie das Ergebnis sofort nennt, ist davon auszugehen, dass sie die Lösung der Aufgabe $6 \cdot 4$ bereits auswendig weiß. Diese Vermutung wird gestützt durch die Auskunft der Lehrkraft, in der das Vierer- und Siebener-Einmaleins als Unterrichtsthemen zu Unterrichtsstunden aufgeführt werden, die bereits vor der hier analysierten Fördersitzung stattgefunden haben. Es ist auch möglich, dass Natalie während des Einzeichnens die Teilprodukte im Kopf berechnet und diese addiert hat.

In der Aufgabenstellung $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ zeichnet Natalie zunächst eine Linie hinter die ersten Punkte der ersten Spalte, stellt selbst ihren Irrtum fest und markiert dann ohne Hilfestellung mit Bleistift in den ersten 2 Spalten je 9 Punkte (SB 11). Sie nennt den ersten Faktor 5 des zweiten Teilproduktes (SB 11) und markiert direkt neben der ersten Markierung in 5 Spalten je 9 Punkte (SB 11). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 12). Natalie zeigt wieder, dass sie gelernt hat, wie in der Fördersitzung die Teilprodukte mit zwei verschiedenen Farben gekennzeichnet werden. Sie interpretiert nochmals den ersten zu addierenden Faktor in den Teilprodukten als Spalten, den zweiten gleichbleibenden Faktor als Zeilen. Sie übersetzt die symbolische Form der Aufgabe eigenständig in die Punktefelddarstellung, sodass davon ausgegangen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Natalie nennt 7 als ersten, zu summierenden Faktor des Summenproduktes und schreibt dies auf. Sie nennt 9 als zweiten gleichbleibenden Faktor und notiert dies (SB 13). Auch hier wird nicht eindeutig erkennbar, ob sie das Summenprodukt mithilfe der Punktefelddarstellung oder anhand der symbolischen Form der Aufgabe ermittelt.

Natalie nennt 63 als Ergebnis und notiert dies (SB 13). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 14). Dies weist darauf hin, dass Natalie die Lösung der Aufgabe $7 \cdot 9$ bereits auswendig weiß. Diese Vermutung wird wiederum gestützt durch die Auskunft der Lehrkraft, in der das Siebener- und Neuner-Einmaleins als Unterrichtsthemen zu Unterrichtsstunden aufgeführt werden, die vor der hier analysierten Fördersitzung stattgefunden haben. Es ist auch denkbar, dass Lara während des Einzeichnens die Teilprodukte im Kopf berechnet und diese addiert hat.

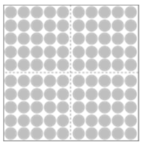
Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Natalie bei beiden Aufgabenstellungen weiß, wie die Teilprodukte im Punktefeld eingezeichnet werden sollen. Anders als die meisten übrigen Kinder interpretiert sie durchgängig den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen. Die Ermittlung des Summenproduktes erfolgt ebenfalls ohne weitere Hilfestellung. Möglich ist, dass sie es lediglich anhand der symbolischen Form der Aufgabe ermittelt. Die Endergebnisse findet Natalie sofort, so dass davon ausgegangen werden kann, dass sie die Ergebnisse der jeweiligen Produkte bereits auswendig kennt. Sie vollzieht den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung selbstständig, so dass davon auszugehen ist, dass sie bereits Verständnis entwickelt hat.

Fördersitzung – Teil II

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

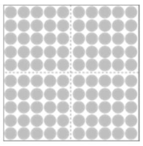
$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 = \_\_$



17	N	Und jetzt das alles nur noch mit minus.
18	I	Und das Ganze geht noch mit minus, genau. [*I legt das neue Arbeitsblatt vor L*]
19	N	(5 sec) Also so quer [*N fährt mit dem Finger mehrmals das Punktefeld senkrecht ab*] oder so, auch wieder so gerade? [*N fährt mit dem Finger das Punktefeld mehrmals in horizontaler Richtung ab*]
20	I	So, wie du das jetzt am besten machen möchtest.
21	N	[*N nimmt den Buntstift zur Hand*] (Mal 7?) (unv.) einzeichnen.
22	I	Also mit Bleistift darfst du anfangen/
23	N	#Ups. [*N nimmt den Bleistift zur Hand*]
24	I	#am besten. 5 mal 7 einzuzeichnen, genau.
25	N	[*N umrahmt in den ersten 5 Spalten je 7 Punkte*]
26	I	Mhm (bejahend).
27	N	[*N nimmt den roten Buntstift zur Hand*]
28	I	Und jetzt kommen die 1 mal 7 da/
29	N	[*N setzt mit dem Buntstift bei der sechsten Spalte an*]
30	I	Hinein. [*I zeigt mit dem Stift auf die fünfte Spalte*] Weil die kommen ja weg, also/
31	N	#Oh. Ja. [*N setzt den Buntstift an der fünften Spalte an*]
32	I	Die kommen da mit hinein, genau. [*I fährt mit dem Stift die fünfte Spalte entlang*]
33	N	[*N umrahmt mit dem Buntstift in der fünf-*

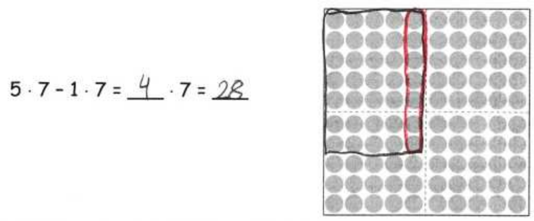
Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \_\_ \cdot \_\_ = \_\_$

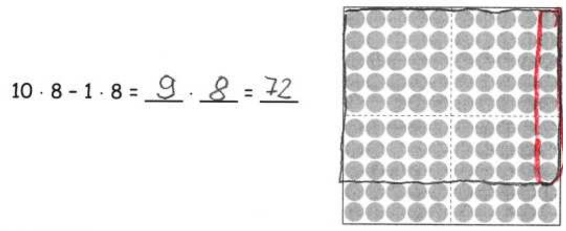


40	N	[*N umrahmt mit Bleistift in den 10 Spalten je 8 Punkte, nimmt den Buntstift zur Hand und umrahmt damit in der zehnten Spalte 8 Punkte*]
41	I	[*I nickt*] Perfekt.

		ten Spalte 9 Punkte]
34	I	Genau so.
34	I	Und jetzt bleiben übrig?
35	N	[*N blickt kurz auf das Punktefeld*] 4, mal 7.
36	I	Super. [*I nickt*]
37	N	[*N schreibt 4 in die erste Lücke*]
37	N	28.
38	I	Super.
39	N	[*N schreibt 28 in die Lücke für das Ergebnis*]



42	N	[*N nimmt den Bleistift zur Hand und fährt die Punkte der ersten Zeile bis zum neunten Punkt entlang*] Ehm, dann ist es nur noch 9?
43	I	Mhm (bejahend).
44	N	[*N blickt immer noch auf das Punktefeld*] Mal 8.
45	I	Mhm (bejahend).
46	N	[*N schreibt 9 in die erste und 8 in die zweite Lücke*]
46	N	Ist gleich? 72. [*N schreibt 72 in die Lücke für das Ergebnis*]
47	I	Ja super. Perfekt.



Analyse

Bei der Aufgabenstellung $5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 =$ bemerkt Natalie, dass bei den folgenden Aufgaben nun minus gerechnet werden müsse (SB 17) und die Interviewerin stimmt zu (SB 18). Sie fragt, ob sie es „quer“ (SB 19) einzeichnen soll und fährt dabei mit dem Finger senkrecht über das Punktefeld, oder ob sie es „gerade“ (SB 19) markieren soll und fährt dabei mit dem Finger horizontal über das Punktefeld (SB 19). Natalie fragt damit vermutlich danach, welchen Faktor sie als Zeilen und welchen sie als Spalten einzeichnen soll. Die Interviewerin sagt, dass sie es so machen könne, wie sie möchte (SB 20) und gibt den Hinweis, den Bleistift zu verwenden, um 5 mal 7 einzuzeichnen (SB 22, 24). Natalie nimmt den Bleistift zur Hand (SB 23) und markiert in den ersten 5 Spalten je 7 Punkte (SB 25). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 26). Natalie nimmt den Buntstift zur Hand (SB 27) und setzt zunächst in der sechsten Spalte an (SB 29). Die Interviewerin sagt, dass das Punktefeld für $1 \cdot 7$ in das Punktefeld für $5 \cdot 7$ eingezeichnet werde und zeigt dabei auf die fünfte Spalte (SB 28, 30). Sie fügt hinzu, dass $1 \cdot 7$ abgezogen werde (SB 30). Natalie stimmt zu und setzt den Stift bei der fünften Spalte an (SB 30). Die Interviewerin weist nochmals darauf hin, das Punktefeld für $1 \cdot 7$ in das Punktefeld für $5 \cdot 7$ einzuzeichnen (SB 32). Natalie markiert mit Buntstift in der fünften Spalte 7 Punkte (SB 33). Die Interviewerin stimmt zu (SB 34). Die Bearbeitung dieser Aufgabenstellung wird relativ stark angeleitet, um die Vorgehensweise bei Differenzprodukten klarzumachen, da diese vorher in der Fördersitzung noch nicht besprochen wurden. Natalie führt die Hinweise entsprechend aus und zeigt dabei keine Schwierigkeiten. Sie wendet einheitlich die Sichtweise an, den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen einzuzeichnen.

Die Interviewerin fragt, was nun übrig bleibe (SB 34). Natalie blickt kurz auf das Punktefeld und nennt 4 mal 7 als Differenzprodukt (SB 35). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 36) und Natalie notiert 4 als ersten zu subtrahierenden Faktor (SB 37). Es kann vermutet werden, dass Natalie sofort verstanden hat, wie das Differenzprodukt in der Punktefelddarstellung ‚abgelesen' werden kann.

Natalie nennt 28 als Ergebnis (SB 37), die Interviewerin stimmt zu (SB 38) und Natalie schreibt es als Ergebnis auf (SB 39). Dies lässt vermuten, dass sie die Multiplikationsaufgaben $4 \cdot 7$ bereits automatisiert hat. Diese Vermutung wird wiederum gestützt durch die Auskunft Laras Lehrkraft über den gehaltenen Unterricht. Sowohl das Vierer- als auch das Siebener-Einmaleins wurden bereits vor der hier analysierten Sitzung als Unterrichtsthemen explizit benannt. Es ist auch möglich, dass Natalie während des Einzeichnens die Teilprodukte bereits ausgerechnet hat und so zum passenden Ergebnis kommt.

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ markiert Natalie mit Bleistift in den 10 Spalten je 8 Punkte und mit Buntstift in der zehnten Spalte 8 Punkte (SB 40). Die Interviewerin stimmt zu (SB 41). Natalie zeigt damit, dass sie verstanden hat, wie in der Fördersitzung die Teilprodukte eines Differenzproduktes eingezeichnet werden sollen. Auch hier bleibt sie bei der Sichtweise, den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen zu sehen.

Natalie fährt mit dem Stift die Punkte der ersten Zeile bis zum neunten Punkt entlang und stellt fragend fest, dass es nur noch 9 seien (SB 42). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 43). Vermutlich zählt sie die Punkte der ersten Zeile und ermittelt so den zu subtrahierenden Faktor des Differenzproduktes. Möglicherweise nutzt sie hier die Strukturierung des Punktefeldes nicht. Dies deutet darauf hin, dass sie weiß, dass das Punktefeld für das Minuendprodukt abzüglich des Punktefeldes für das Subtrahendprodukt dem Differenzprodukt entspricht. Natalie blickt immer noch auf das Punktefeld und gibt zügig 8 als zweiten gleichbleibenden Faktor an (SB 44). Sie zählt hier also wahrscheinlich nicht. Denkbar sind zwei Interpretationen. Einerseits könnte es sein, dass Natalie den gleichbleibenden Faktor 8 in der Darstellung schnell erkennt, da ausgehend von 10 Spalten lediglich 2 Spalten abgezogen werden müssen. Andererseits könnte es auch sein, dass sie den gleichbleibenden Faktor 8 noch präsenter im Kopf hat, da dieser jeweils in den Teilprodukten und im Differenzprodukt gleich bleibt. Die Interviewerin stimmt zu (SB 45) und Natalie schreibt 9 als ersten und 8 als zweiten Faktor des Differenzproduktes auf (SB 46).

Natalie nennt 72 als Ergebnis und schreibt es auf (SB 46). Die Interviewerin bestätigt sie (SB 47). Es könnte sein, dass sie die Malaufgabe $9 \cdot 8$ bereits auswendig weiß, was wiederum durch die Auskunft Laras Lehrkraft bekräftigt wird, in der die Achter- und Neunerreihe als Unterrichtsthemen bereits vor der Fördersitzung genannt werden. Denkbar ist auch, dass sie während des Einzeichnens die Ergebnisse der Teilprodukte ermittelt und diese nutzt, um zum passenden Endergebnis zu gelangen.

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass Natalie bei beiden Aufgabenstellungen die Teilprodukte des Differenzproduktes zügig einzeichnet, in der zweiten Aufgabenstellung bereits selbstständig. Auch hier interpretiert sie, anders als die meisten übrigen Kinder, durchgängig den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen. Die Ermittlung des Differenzproduktes erfolgt bei beiden Aufgaben mithilfe des Punktefeldes ohne weitere Unterstützung. Dies deutet darauf hin, dass sie weiß, wie das Differenzprodukt in der Darstellung ‚abgelesen' werden kann. Die Endergebnisse nennt Natalie jeweils sofort. Vermutlich hat sie die Ergebnisse der jeweiligen Produkte bereits automatisiert. Sie übersetzt selbstständig von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung, sodass davon ausgegangen werden kann, dass sie Verständnis entwickelt hat.

Gesamtfazit

Im Vergleich zum Pre-Test sind in Natalies Bearbeitung im Post- und Follow-up-Test durchaus Fortschritte zu verzeichnen. Es lassen sich bei beiden Bearbeitungen die Teilprodukte identifizieren. Im Post-Test wird in der Darstellung die Gleichheit der beiden Terme deutlich, jedoch sind die Produkte nicht in der herkömmlichen Darstellung mit angegebener Anzahl an Zeilen und Spalten eingezeichnet. Im Follow-up-Test ist ersichtlich, dass Natalie Produkte entsprechend den Faktoren als Felder mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten darstellen kann. Hier wird jedoch die Gleichheit der beiden Terme auf der linken und rechten Seite in der Darstellung nicht deutlich. Dies deutet darauf hin, dass Verständnis für die Nutzung der Distributivität möglicherweise nur teilweise, aber noch nicht vollständig entwickelt werden konnte.

In der Fördersitzung zum Summen- und Differenzprodukt vollzieht Natalie den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Darstellung selbstständig. Im Gegensatz zu den Testergebnissen deutet ihre Bearbeitung in der Fördersitzung darauf hin, dass sie bereits Verständnis entwickelt hat. Die Endergebnisse nennt sie sofort, woraus geschlossen werden kann, dass sie die Ergebnisse der jeweiligen Produkte bereits auswendig kennt.

Da Natalie die Aufgaben in der Fördersitzung ziemlich problemlos bearbeitet hat, ist es durchaus möglich, dass nur geringfügige, weitere Förderung ausreichen würde, um bei Natalie die intendierten Bearbeitungen auch im Test hervorzurufen.

8.2.3.8 Fallbeispiel ‚Andreas'

Andreas ist zum Zeitpunkt der Einzelförderung acht Jahre alt und besucht eine Klasse mit 14 Schülerinnen und Schülern (fünf weiblich, neun männlich) einer Grundschule einer mittelgroßen Stadt. Die Einzelförderung mit Andreas findet im zweiten Schulhalbjahr über zwei Monate lang in der Regel einmal in der Woche statt. Es werden neun individuell angepasste Sitzungen von ca. 45 Minuten mit ihm durchgeführt. Der ausgewählte Transkriptausschnitt findet in der sechsten Sitzung statt und dauerte ca. elf Minuten. Insgesamt verhält sich Andreas in den Sitzungen sehr ruhig, wirkt durchgehend motiviert und lernwillig.

Hinweise zum Regelunterricht

Die Auskunft der Lehrkraft über den in Andreas' Klasse durchgeführten Unterricht zeigt, dass der Themenbereich Multiplikation ca. sieben Wochen lang über neun Wochen verteilt behandelt wird (ca. 27 Unterrichtsstunden) (LD 12, S. 1 ff.). Nach der fünften Woche gibt es einen Einschub von zwei Wochen mit einem anderen Thema (ebd., S. 5).

Die Lehrkraft verwendet das Schulbuch ‚Fredo 2' (Balins et al., 2014a) mit dem dazugehörigen Arbeitsheft (Balins et al., 2014b) (LD 12, S. 1). Grundsätzlich setzt das Schulbuch als Darstellung für Malaufgaben u. a. auch Kästchendarstellungen ein (z. B. Balins et al., 2014a, S. 81) und unterstützt damit die Sichtweise, die Faktoren eines Produktes in Zeilen und Spalten zu sehen. Diese Deutung von Multiplikation ist auch für den ausgewählten Ausschnitt der Förderung relevant. Zusätzlich nennt die Lehrkraft ‚Rudi Rechenmeister – Heft 1 · 1' sowie verschiedene Materialien aus dem Internet, wie ‚Zaubereinmaleins',

‚Lehrmittelboutique‘ und ‚Wegerer‘ (LD 12, S. 6). Sie nennt als verwendete Materialien Bildkarten, Fotos, Bausteine, Fotos, Montessori-Bretter und das Montessori-Punktebrett (LD 12, S. 3 ff.).

Laut der Auskunft der Lehrkraft über ihren Unterricht werden mithilfe verschiedener Veranschaulichungen wie Fotos und Abbildungen Multiplikationsaufgaben dargestellt. Sie erwähnt den Begriff „Bausteine“ (ebd., S. 3), führt dies aber nicht näher aus. Es kann vermutet werden, dass sie die Holzwürfel meint, die als Anschauungsmittel passend zum Schulbuch ‚Fredo‘ vorgesehen sind. Diese haben eine rote, eine blaue und vier naturfarbene Seiten. Zusätzlich wird mit dem Montessori-Brett gearbeitet (vermutlich ist das Multiplikationsbrett gemeint) (ebd., S. 4).

Die Behandlung von Tauschaufgaben wird aufgeführt (ebd.); die verwendete Schulbuchseite enthält zur Veranschaulichung Kästchendarstellungen mit entsprechenden Zeilen und Spalten (Balins et al., 2014a, S. 81; Abb. 8.60). Es werden die Einmaleinsreihen über die Sequenz verteilt zu folgenden Zahlen in dieser Reihenfolge explizit genannt: 2, 4, 8, Quadrataufgaben, 6, 7, 3 und 9 (LD 12, S. 4 ff.).

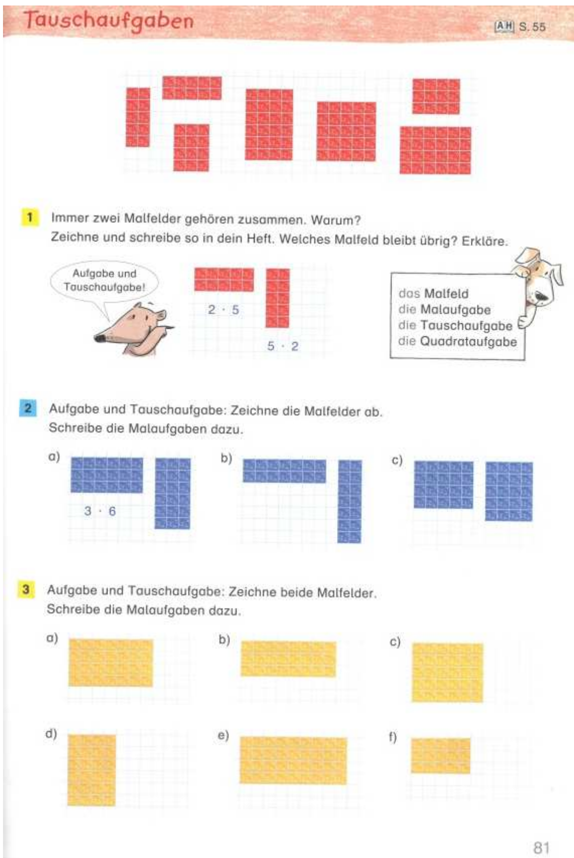


Abbildung 8.60: Schulbuchseite aus Fredo 2 zu Tauschaufgaben (Balins et al., 2014a, S. 81)

Die Lehrkraft nennt Buchseiten, auf denen mithilfe von Kernaufgaben die Aufgaben der Vierer- und Achterreihe abgeleitet werden sollen (Balins et al., 2014a, S. 88, 89; LD 12, S. 4; Abb. 8.61).

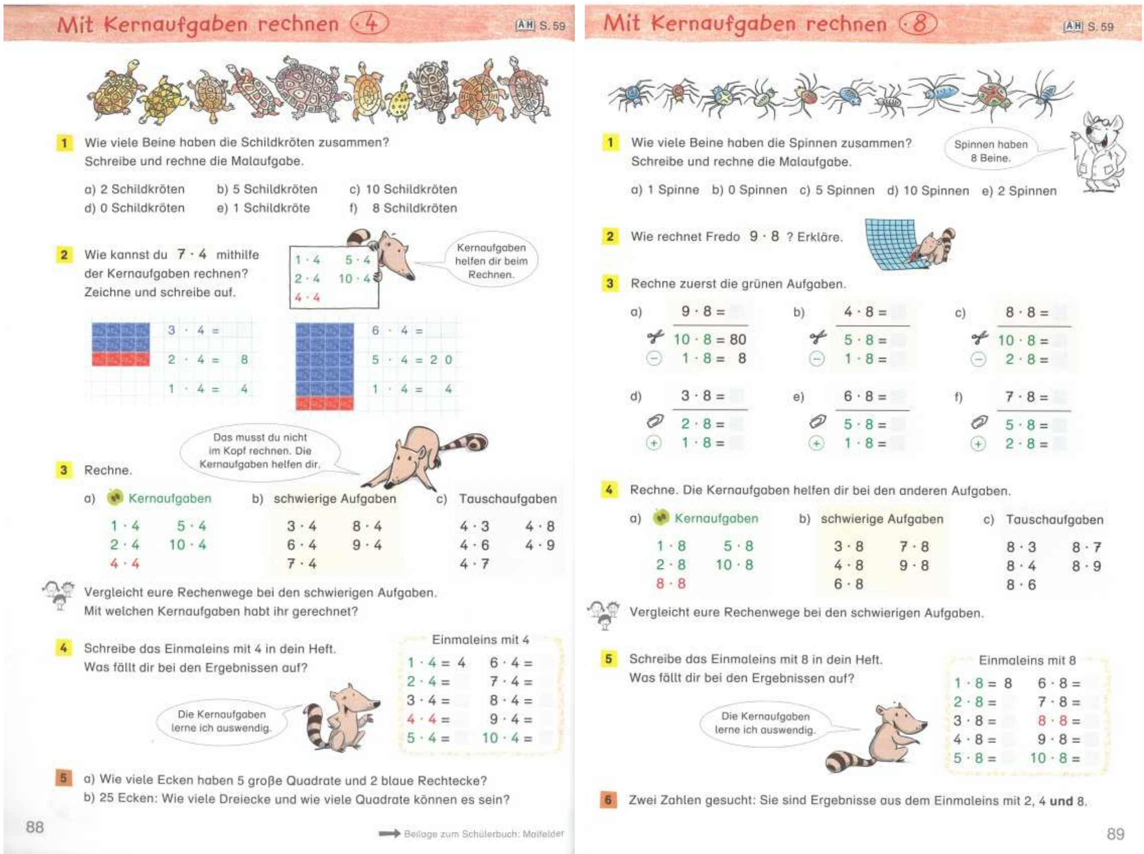


Abbildung 8.61: Schulbuchseiten aus Fredo 2 zur Nutzung der Distributivität (Balins et al., 2014a, S. 88 f.)

Wenn man die Aufgabenstellungen so behandelt, wie es das Schulbuch vorsieht, würde die Nutzung der Distributivität thematisiert werden, um die Lösung zu ‚schwereren' Malaufgaben durch schon bekannte Malaufgaben zu finden. Die Lehrkraft nennt als Stundenthemen „Einmaleins mit 4" und „Einmaleins mit 8. Kernaufgaben" (LD 12, S. 4). Lediglich beim Einmaleins mit 8 gibt es also den Hinweis, dass auch Kernaufgaben genutzt werden, um die Reihe abzuleiten.

Der Lehrplan für die zweite Jahrgangsstufe sieht vor, dass zunächst lediglich die Kernaufgaben explizit als Reihen behandelt werden sollen, die übrigen sollen aufgrund der Distributivität abgeleitet und dann erst in der dritten Jahrgangsstufe auch automatisiert werden (BY, 2014, S. 276, S. 282). Strategien werden als Unterrichtsthema in der hier analysierten Unterrichtsdokumentation nicht genannt, sodass vermutet werden kann, dass die Lehrkraft die Reihen isoliert in den Blick nimmt und Beziehungen zwischen den Reihen eher weniger thematisiert.

Bearbeitung in BIRTE 2

Andreas zeigt in BIRTE 2 „insgesamt eine unterdurchschnittliche Leistung“ (A-Gesamt Andreas, S. 1). Seine „Arbeitsgeschwindigkeit ist durchschnittlich“ (ebd.).

Er zeigt in folgenden Modulen überwiegend *keinen besonderen Förderbedarf* (ebd.):

- Vorgänger bestimmen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Zahlen einordnen (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Schnelle Zahlauffassung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Zahldarstellung (Modulgruppe: Basiskompetenz)
- Zahlzerlegung (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Subtraktion (Modulgruppe: Rechnen)

Andreas bestimmt zu einer Folge rückwärts aufeinanderfolgender Zahlen überwiegend die passende Zahl und ordnet Zahlen meist passend der Größe nach (A-Orientierung Andreas, S. 1). In strukturierten Arbeitsmitteln wie Würfelbildern und Zwanzigerfeld kann er Anzahlen überwiegend quasi-simultan erfassen, im Hunderterfeld zeigt er allerdings Schwierigkeiten (A-Basis Andreas, S. 1). Auf dem Zwanzigerfeld ordnet er vorgegebene Zahlen meist passend zu, auf dem Hunderterfeld hat er Probleme (ebd., S. 2). Er zerlegt die Zahlen 8, 9, 10 und 20 in 13 von 24 Aufgaben richtig, allerdings mit einer sehr geringen Arbeitsgeschwindigkeit (ebd.). Er löst von zwölf Subtraktionsaufgaben vier richtig, die Arbeitsgeschwindigkeit ist hoch (A-Rechnen Andreas, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Operation wählen (Modulgruppe: Grundvorstellungen)
- Rechengeschichten (Modulgruppe: Grundvorstellungen)

Andreas wählt bei acht Textaufgaben dreimal die passende Operation (A-Grundvorstellung Andreas, S. 1). Von sieben Rechengeschichten löst er vier korrekt (ebd.). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Er zeigt in folgenden Modulen *besonderen Förderbedarf* (A-Gesamt Andreas, S. 1):

- Verdoppeln und Halbieren (Modulgruppe: Basiskompetenzen)
- Addition (Modulgruppe: Rechnen)

Er löst Verdoppelungsaufgaben bis 20 korrekt, Verdoppelungsaufgaben bis 100 und Halbierungsaufgaben bis 20 und 100 jedoch nicht passend (A-Basis Andreas, S. 2). Additionsaufgaben löst Andreas nicht korrekt (A-Rechnen Andreas, S. 2). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit relevant.

- Zahlenstrich (Modulgruppe: Orientierung im Zahlenraum)
- Aufgabenbeziehungen (Modulgruppe: Rechnen)
- Größenvorstellungen (Modulgruppe: Grund- und Größenvorstellungen)

Andreas hat Schwierigkeiten, zu einer Kennzeichnung auf dem Zahlenstrich eine passende Zahl zuzuordnen (A-Orientierung Andreas, S. 2). Tausch-, und Umkehraufgaben werden richtig gelöst, Analogieaufgaben bearbeitet er häufig nicht passend (A-Rechnen Andreas, S. 2). Er schätzt alle Preise und Längen von Gegenständen unpassend (A-Grundvorstellung Andreas, S. 1). Diese Kompetenzen sind für die Förderung des Multiplikativen Verständnisses und insbesondere für die ausgewählte Fördereinheit weniger bzw. nicht relevant.

Insgesamt kann festgestellt werden, dass Andreas nur in wenigen Modulen Förderbedarf zeigt, die für die ausgewählte Fördereinheit bedeutsam sind. Er verfügt also über viele dafür relevante Basiskompetenzen. Förderbedarf zeigt er jedoch in den Bereichen Verdoppeln und Halbieren sowie Addition, sodass möglicherweise dennoch zusätzliche Schwierigkeiten bei der Förderung zum Multiplikativen Verständnis auftreten können.

Bearbeitungen im Pre-, Post-und Follow-up-Test

Die entsprechende Aufgabe im Pre-Test hat Andreas nicht passend bearbeitet (Abb. 8.62). Er hat auf den achten Punkt im Punktefeld 8 und auf den 20. Punkt 20 notiert. Es könnte sein, dass er $2 \cdot 4$ berechnet hat und auf 8 kommt. In seiner Bearbeitung wird kein Bezug zur Aufgabenstellung ersichtlich.

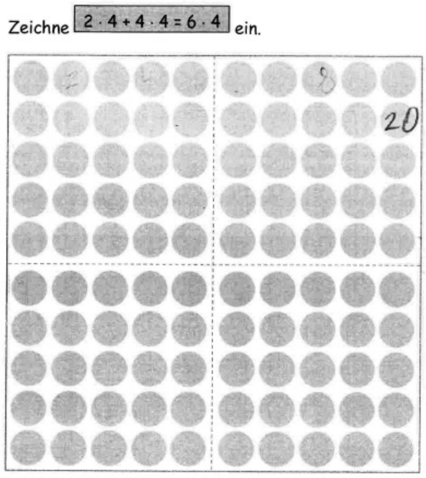


Abbildung 8.62: Andreas' Bearbeitung im Pre-Test zu 2 · 4 + 4 · 4 = 6 · 4

In der Bearbeitung im Post-Test hat Andreas links oben die angemessene Lösung eingezeichnet (Abb. 8.63). In dieser Markierung eines 6 · 4-Punktefeldes wird die Unterteilung in 2 · 4 und 4 · 4 deutlich. Zusätzlich wurde, in der sechsten Spalte beginnend, ein weiteres 4 · 6-Punktefeld eingezeichnet. Die Bearbeitung zeigt, dass Andreas Verständnis dafür entwickelt hat, wie Malaufgaben in Symbolform in Punktefelder übertragen werden können. Er verwendet eine Farbe für alle Markierungen. Durch die zusätzliche Markierung eines 4 · 6-Punktefeldes rechts oben wird die Gleichheit von linkem und rechtem Term in Andreas' Bearbeitung jedoch nicht direkt deutlich.

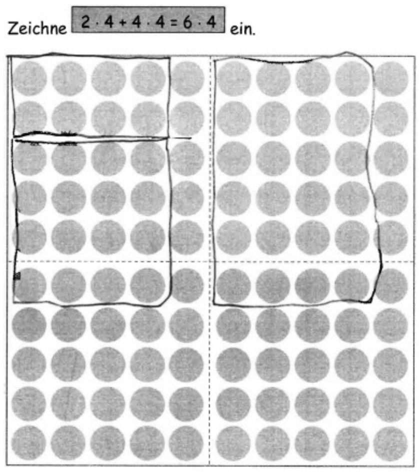


Abbildung 8.63: Andreas' Bearbeitung im Post-Test zu 2 · 4 + 4 · 4 = 6 · 4

Die Bearbeitung im Follow-up-Test enthält kaum Anhaltspunkte, dass Andreas noch weiß, wie Malaufgaben als Punktefelder mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten deutlich gemacht werden können (Abb. 8.64). Da insgesamt 4 2 · 2-Puntefelder eingezeichnet wurden, kann die Teilaufgabe 4 · 4 als *wiederholte Ad-*

dition hineingedeutet werden. Allerdings ist zu vermuten, dass lediglich die einzelnen Ziffern nacheinander im Punktefeld umrahmt wurden, angefangen mit 2 und 4 links oben in blauer Farbe, rechts oben 4 und 4 mit Bleistift und weiter unten in der Mitte 6 und 4 in blauer Farbe. Verständnis für die Veranschaulichung einer Malaufgabe im Punktefeld als Rechtecksfeld ist hier eher nicht mehr erkennbar.

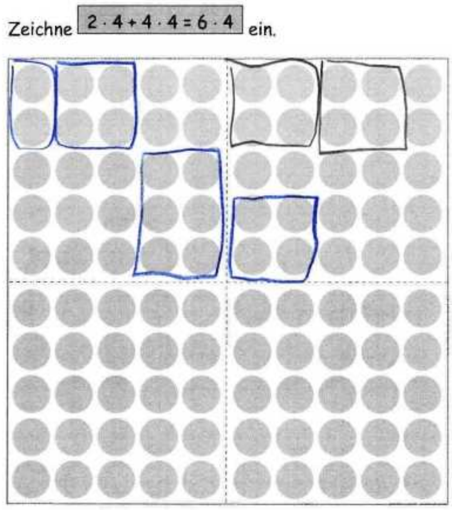


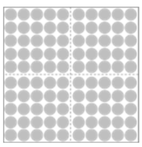
Abbildung 8.64: Andreas‘ Bearbeitung im Follow-up-Test zu $2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4$

Insgesamt zeigen Andreas‘ Testergebnisse in der ausgewählten Aufgabe zum Teil einen positiven Entwicklungsverlauf. In der Bearbeitung im Pre-Test wird Verständnis für die Aufgabenstellung nicht ersichtlich, im Post-Test weisen Teile der Bearbeitung darauf hin, dass Verständnis aufgebaut wurde. Die Bearbeitung im Follow-up-Test deutet allerdings wieder darauf hin, dass Multiplikatives Verständnis nicht nachhaltig entwickelt werden konnte.

Fördersitzung – Teil I

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

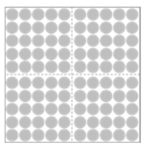
$5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 =$



1	I	Okay. Jetzt beim Nächsten? [*I deutet auf $5 \cdot 4 + 1 \cdot 4$*] 5 mal 4 plus 1 mal 4. [*I legt den blauen Buntstift vom Blatt herunter und legt ihn daneben*]
2	AN	[*AN umrahmt mit Bleistift in den ersten*

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$

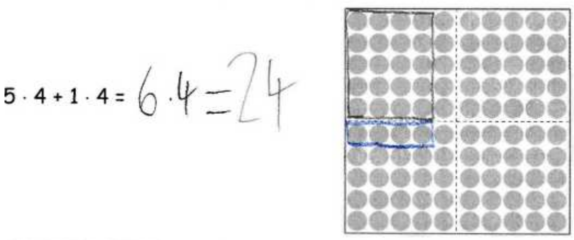


12	AN	[*AN umrahmt mit Bleistift in den ersten 2 Zeilen je 9 Punkte*] (10 sec) [*AN beginnt weitere 5 Zeilen zu umrahmen*]
13	I	Nimm einmal eine andere Farbe dafür.

		5 Zeilen je 4 Punkte und setzt erneut an]
3	I	Andere Farbe.
4	AN	[*AN legt den Bleistift weg, nimmt den blauen Buntstift zur Hand und umrahmt damit in einer weiteren Zeile 4 Punkte*]

5	I	Mhm (bejahend). Super.
6	AN	[*AN nimmt wieder den Bleistift zur Hand, deutet kurz auf die erste Spalte des markierten Punktefeldes und schreibt 6 · = hinter die Aufgabe*]
7	I	6 mal was?
8	AN	[*AN deutet mit dem Stift auf zwei Stellen der sechsten Zeile des markierten Punktefeldes und schreibt 4 zwischen · und =*]
9	I	Super. [*I notiert sich etwas auf ihrem Blatt, deckt das nächste auf und streicht eine Seite durch*]

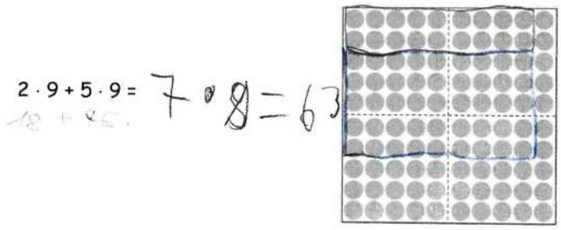
10	AN	[*AN schreibt 24 hinter 6 · 4 =*]
11	I	Mhm (bejahend).



14	AN	Ah. [*legt den Bleistift weg, nimmt den blauen Buntstift zur Hand, umrahmt damit in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte und nimmt wieder den Bleistift zur Hand*]

14	AN	(11 sec) [*AN zählt mit dem Stift die umrahmten Punkte der ersten Spalte nach unten, dann die umrahmten Punkte der ersten Zeile*] (7 sec) [*AN schreibt 7 · 8 hinter die Aufgabe*]
15	I	Ehm, schau noch einmal.
16	AN	[*AN zählt mit dem Stift erneut die umrahmten Punkte der ersten Spalte*]
17	I	Die 7 stimmt schon.
18	AN	[*AN tippt mit dem Stift auf den ersten Punkt der ersten Zeile*] Ah, 7 mal 9. [*AN überschreibt die 8 mit einer 9*]
19	I	Mhm (bejahend).

20	AN	(7 sec) Ist 65?
21	I	Nein. (13 sec) [*I zeigt mit dem Stift auf 2 · 9*] 2 mal 9 ist?
22	AN	2/ 2 mal 9 ist 18.
23	I	[*I zeigt mit dem Stift auf 5 · 9*] Und was ist 5 mal 9?
24	AN	5/ Äh/ Fff/ 45?
25	I	Mhm (bejahend).
26	AN	Ehm. (1 min 3 sec)
27	I	Weißt du, was du jetzt rechnen musst? [*I zieht das Blatt etwas zu sich heran*] Also <u>18</u> [*schreibt 18 unter 2 · 9*] <u>plus</u> [*schreibt + 45*] 45, ne? [*schiebt das Blatt wieder AN hin*]
28	AN	Mhm (eher bejahend). (16 sec) [*AN*

		tippt mit dem Stift auf 45, schreibt dann = 3 hinter 7 · 9, wobei er zwischen = und 3 eine Lücke lässt; dann fährt er mit dem Stift über 18 + 45 und ergänzt die Lösung der Aufgabe zu 63, indem er 6 in die Lücke schreibt]
29	I	Mhm (bejahend). Super. [*I nimmt das Blatt und notiert sich den Namen des Kindes darauf, bevor sie es weglegt*]
		

Analyse

Bei der Aufgabenstellung 5 · 4 + 1 · 4 = markiert Andreas wortlos mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 4 Punkte (SB 2). Er braucht dazu keine weitere Hilfestellung. Er setzt zunächst erneut mit derselben Farbe an, woraufhin ihm die Interviewerin den Hinweis gibt, eine andere Farbe zu verwenden (SB 3). Andreas markiert wortlos passend in der sechsten Zeile 4 Punkte (SB 4). Andreas führt die einzelnen Schritte ohne Kommentar durch. Die Teilprodukte zeichnet er jeweils selbstständig ein, was darauf hindeutet, dass Andreas Verständnis dafür entwickelt hat, wie die Teilprodukte eines Summenproduktes in die Punktefelddarstellung übertragen werden können. Obwohl er die Vorgehensweise bereits von zwei Aufgabenstellungen her kennt, verwendet er nicht von sich aus zwei verschiedene Farben für die jeweiligen Teilprodukte.

Andreas deutet kurz auf die erste Spalte des markierten Punktefeldes und notiert ohne Kommentar und ohne Hilfestellung 6 · (SB 6). Auf die Frage nach dem zweiten Faktor (SB 7), deutet Andreas auf zwei Stellen der sechsten Zeile des markierten Punktefeldes und notiert 4 (SB 8). Dies könnte darauf hindeuten, dass er den zweiten Faktor des Summenproduktes im Punktefeld möglicherweise in Zweier-Schritten zählend ermittelt. Es kann vermutet werden, dass Andreas weiß, wie im Punktefeld die Faktoren des Summenproduktes ‚abgelesen' werden können.

Andreas findet wortlos das Ergebnis 24 und braucht auch hier keine Hilfe (SB 10). Dies deutet darauf hin, dass er die Malaufgabe 6 · 4 bereits auswendig kennt. Gestützt wird diese Vermutung durch die Auskunft Andreas' Lehrkraft, die die Einmaleinsreihen zu 4 und zu 7 in Unterrichtsstunden aufführt, die bereits vor der hier analysierten Sitzung stattgefunden haben. Möglich ist natürlich auch, dass Andreas die Aufgabe während des Zeichnens und Schreibens im Kopf berechnet hat.

Bei der Aufgabe $2 \cdot 9 + 5 \cdot 9 =$ markiert Andreas ebenfalls wortlos und ohne Hilfestellung in den ersten 2 Zeilen jeweils 9 Punkte mit Bleistift (SB 12). Andreas beginnt mit derselben Farbe direkt unter der ersten Markierung 5 Zeilen zu markieren (SB 12). Die Interviewerin gibt den Hinweis, eine weitere Farbe zu nutzen (SB 13). Andreas umrahmt wortlos in weiteren 5 Zeilen je 9 Punkte (SB 14). Auch hier kann Andreas die symbolische Form der Aufgabe in die Punktefelddarstellung übersetzen, sodass davon auszugehen ist, dass er Verständnis entwickelt hat.

Andreas zählt die Punkte der ersten Spalte nach unten und die Punkte der ersten Zeile von links nach rechts. Für den summierten Faktor nennt er passend 7 und für den gleichbleibenden Faktor fälschlicherweise 8 (SB 14). Die Interviewerin gibt den Hinweis, nochmals zu schauen (SB 15). Andreas zählt erneut die Punkte der markierten ersten Spalte (SB 16). Die Interviewerin sagt, dass 7 schon richtig sei (SB 17). Zur Überprüfung der Richtigkeit des zweiten gleichbleibenden Faktors tippt Andreas auf den ersten Punkt der ersten Zeile und sagt dann sofort 7 mal 9 (SB 18). Den Faktor 9 erkennt er nun offenbar schnell. Dies könnte darauf hindeuten, dass er nun die Strukturierung der Punktefelddarstellung nutzt. Überraschend ist, dass er den summierten Faktor durch Abzählen sofort findet, er hingegen den gleichbleibenden Faktor zuerst nicht passend ermittelt. Dies lässt vermuten, dass er noch nicht wahrgenommen hat, dass ein Faktor in den Produkten jeweils gleich bleibt.

Andreas nennt zunächst 65 (SB 20). Die Interviewerin verneint (SB 21). Nach einer Pause von 13 Sekunden fragt sie ihn, was 2 mal 9 sei (SB 21). Er findet das Ergebnis 18 (SB 22). Nun fragt die Interviewerin nach der Lösung für 5 mal 9 (SB 23). Andreas kommt auf das Ergebnis 45 (SB 24). Nach einer Minute und sechs Sekunden fragt die Interviewerin, ob Andreas wüsste, was er jetzt rechnen müsse (SB 27). Damit lässt die Interviewerin Andreas relativ viel Zeit, um von sich aus zunächst zu den Zwischenergebnissen der Teilprodukte und dann zum Endergebnis zu gelangen. Sie gibt ihm dann einen Hinweis, wie er zum Ergebnis gelangen kann, indem sie $18 + 45$ unter die Aufgabe schreibt (SB 27). Es kann vermutet werden, dass Andreas möglicherweise nicht von sich aus erkennt, dass die Teilprodukte für die Ergebnisermittlung summiert werden können. Nach einer Pause von 16 Sekunden schreibt Andreas erst 3 und danach 6 vor 3 (SB 28). Dies könnte darauf hindeuten, dass er im Kopf schriftlich addiert. Es kann vermutet werden, dass er Schwierigkeiten hat, diese Additionsaufgabe im Kopf zu berechnen. Diese Vermutung wird durch seine Ergebnisse im Test BIRTE 2 gestützt, in dem er insgesamt eine unterdurchschnittliche Leistung gezeigt hat und u. a. im Modul ‚Addition' Schwierigkeiten zeigt. Die Ergebnisermittlung erfolgt sehr angeleitet, sodass unklar bleibt, ob Andreas die Vorgehensweise verstanden hat.

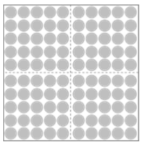
Fazit zur Bearbeitung von Summenprodukten

Zusammenfassend ist festzustellen, dass Andreas bei beiden Aufgabenstellungen selbstständig die Teilprodukte passend einzeichnet. Die Interviewerin gibt ihm lediglich den Hinweis, für das zweite Teilprodukt eine weitere Farbe zu verwenden. Bei beiden Aufgabenstellungen weiß er, wie er das Summenprodukt im Punktefeld ablesen kann. Er findet bei der ersten Aufgabenstellung schnell das Ergebnis zum Summenprodukt; vermutlich kennt er bereits das Ergebnis. Offenbar hat er noch nicht erkannt, dass zur Ergebnisermittlung die Ergebnisse der Teilprodukte summiert werden können, da diese Schritte bei der zweiten Aufgabenstellung stark angeleitet werden. Den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung vollzieht er jedoch selbstständig, sodass davon ausgegangen werden kann, dass er dafür Verständnis entwickelt hat.

Fördersitzung – Teil II

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

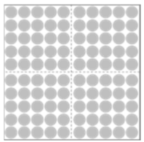
$5 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = \_\_ \cdot 7 = \_\_$



30	I	Das Ganze geht natürlich auch mit minus. [*I legt ein neues Blatt vor AN*] 5 mal 7 minus 1 mal 7. [*I deutet mit dem Stift auf 5 · 7 – 1 · 7*] Zeichne ein. [*I deutet auf die Aufgabenstellung*] Also erst einmal das 5 mal 7. [*I tippt auf 5 · 7*]
31	AN	[*AN umrahmt mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte*]
32	I	So. 1 mal 7 kommt weg.
33	AN	[*AN nimmt den blauen Buntstift zur Hand*]
34	I	Wir zeichnen einfach 1 mal 7 in diese 5 mal 7 [*I deutet mit dem Stift auf das grau Umrahmte*] hier unten [*I deutet*

Zeichne die Aufgaben ein und rechne aus.

$10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 = \_\_ \cdot \_\_ = \_\_$



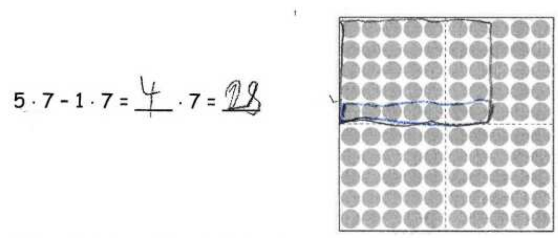
53	I	10 mal 8 minus 1 mal 8.
54	AN	[*AN beginnt die ersten 8 Zeilen mit Bleistift zu umrahmen*]
55	I	10 mal 8.
56	AN	[*AN zählt mit Bleistift die Punkte der ersten Spalte*] Das sind 8.
57	I	Mhm (bejahend).
58	AN	[*AN setzt die Umrahmung fort*]
59	I	Und wie willst du es jetzt machen?
60	AN	So. [*AN umrahmt in den ersten 8 Zeilen 10 Spalten*]
61	I	Ach so. Du machst es andersherum. Das geht natürlich auch.

		mit dem Stift auf die fünfte Zeile] hinein.
35	AN	[*AN setzt den Stift auf den ersten Punkt der fünften Zeile*] Hier?
36	I	Ja.
37	AN	Hier so? [*AN deutet mit dem Stift einen Strich über die fünfte Zeile mit 7 Punkten an*]
38	I	Genau. Genau, mach da einfach so einen Strich.
39	AN	[*AN umrahmt mit dem Buntstift in der fünften Zeile 7 Punkte*]
40	I	Mhm (bejahend). Genau. Die kommen weg.

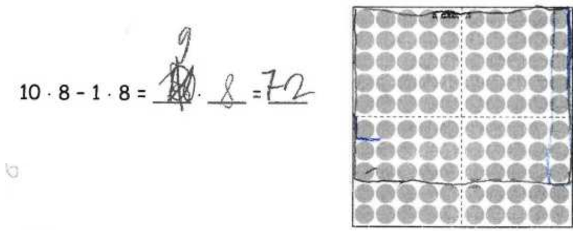
62	AN	[*AN vervollständigt die Umrahmung*]
63	I	Mhm (bejahend). 1 mal 8 kommt weg.
64	AN	[*AN nimmt den blauen Buntstift zur Hand und zeichnet damit einen Strich unterhalb der sechsten Zeile*]
65	I	Ehm, stopp. Ganz unten hätte ich das ganz/
66	AN	[*AN setzt den Buntstift bei der achten Zeile an*]
67	I	Beziehungsweise unten geht es jetzt nicht mehr. Wie kann man jetzt eine Reihe, finden? Eine 1 · 8-Reihe.
68	AN	Bis zu hier. [*AN tippt mit dem Stift auf den achten Punkt der sechsten Zeile*]
69	I	Ehm, nein, aber das gefällt mir so nicht. Da kann man es gar nicht so schön sehen, was übrig bleibt. Ich möchte, dass man es so einzeichnet, dass man ganz schön sieht. So wie hier [*I deutet auf das Punktefeld der vorhergehenden Aufgabe*] auf einen Blick, dass hier 4 [*I deutet auf die erste Spalte des vorherigen Punktefeldes*] mal 7 [*I deutet auf die erste Zeile des vorherigen Punktefeldes*] übrig bleibt.
70	AN	Mhm. Dann muss ich hier hin/ [*AN deutet auf die achte Zeile*]
71	I	#Aber das sind dann ja 10. [*I fährt mit dem Stift die achte Zeile entlang*] Weil du hast es ja jetzt so herum gemalt, ne?
72	AN	Ah dann muss ich halt/ [*AN zeigt mit dem Stift die erste Spalte mit 8 Punkten entlang*]
73	I	Aha. Dann mach doch die hinterste, nimm doch die hinterste. [*I deutet auf die zehnte Spalte*]
74	AN	[*AN umrahmt mit dem blauen Buntstift in der zehnten Spalte 8 Punkte*] (9 sec)

41	AN	Jetzt muss ich/ [*AN zählt mit dem Stift die Punkte der ersten Spalte, dann die Punkte der ersten Zeile*]
42	I	Musst du das jetzt noch einmal zählen? [*I deutet mit dem Stift auf die erste Zeile*] Oder weißt du es nicht eigentlich schon?
43	AN	Ehm. 7 mal 4.
44	I	Genau. Oder 4 mal 7. Die 7 steht ja eh schon da. [*I deutet mit dem Stift auf 7 hinter dem Platzhalter*]
45	AN	[*AN schreibt 4 in die Lücke*]
46	I	Also 4 mal 7? (7 sec)
47	AN	(24?) (unv. Hintergrundgeräusche) (21 sec) Ist 36?
48	I	Nein.
49	AN	Äh. 28.
50	I	Ja.
74	AN	[*AN nimmt den Bleistift und zählt damit die umrahmten Punkte der ersten Spalte*]
75	I	Musst du da jetzt noch einmal zählen? Ne, oder?
76	AN	Mhm, ich/ 8. [*AN schreibt 8 in die erste Lücke hinter der Aufgabe*]
77	I	Jetzt schreib einmal das [*I deutet mit dem Stift auf die Platzhalter*] andersherum hin, weil hier steht jetzt 10 mal 8 minus 1 mal 8 [*I tippt mit dem Stift die jeweiligen Zahlen der Aufgabe entlang*] und dann wollen wir ja jetzt hier/
78	AN	[*AN überschreibt die 8 mit einer 10 und schreibt in die zweite Lücke 8*]
79	I	Mhm (nachdenklich), nein. [*I deutet mit dem Stift auf die 10*] Das bleibt nicht übrig. Was bleibt denn übrig? [*I deutet mit dem Stift auf das Punktefeld*] Wie viel mal 8, wenn das da hinten/ [*I verdeckt mit dem Stift die zehnte Spalte*]
80	AN	#Ach so.
81	I	#weggeht.
82	AN	Noch 9 mal 8.
83	I	Ah. Okay, dann schreibst du hier [*I deutet mit dem Stift auf den ersten Platzhalter*]
84	AN	[*AN versucht die 10 mit 9 zu überschreiben*] Eah. [*AN streicht die mehrmals verbesserte Lücke durch und schreibt 9 darüber*]
85	I	9 mal 8. Und was kommt heraus? (9 sec)
86	AN	72?
87	I	[*nickt*] Super.
88	AN	[*AN schreibt 72 in die Lücke für die Lösung*]

51	AN	[*AN schreibt 28 hinter 4 · 7 =*]
52	I	Gut.



89	I	Gut.
90	AN	Zum Glück habe ich das Neuner gelernt. [*I lacht*]



Analyse

Bei der Aufgabe 5 · 7 – 1 · 7 = gibt die Interviewerin den orientierenden Hinweis, zunächst einmal 5 mal 7 einzuzeichnen (SB 30). Andreas markiert wortlos mit Bleistift in den ersten 5 Zeilen je 7 Punkte (SB 31). Die Interviewerin sagt nun, dass 1 mal 7 abgezogen werden müssten (SB 32). Wortlos nimmt Andreas den blauen Stift zu Hand (SB 33). Außerdem gibt die Interviewerin den Hinweis, die Punkte für 1 · 7 unten in das bereits markierte Punktefeld für 5 · 7 hineinzuzeichnen (SB 34). Andreas fragt zweimal nach, ob er die passende Stelle gefunden habe (SB 35, 37). Die Interviewerin bestätigt ihn (SB 36). Andreas markiert mit blauem Stift wortlos in der fünften Zeile 7 Punkte (SB 39). Die Interviewerin stimmt zu und wiederholt, dass das Feld für 1 · 7 abgezogen werde (SB 40). Die Erklärung, wie Minuend- und Subtrahendprodukt eingezeichnet werden, erfolgt stark angeleitet, da die Vorgehensweise bisher auch bei diesem Kind noch nicht behandelt wurde. Andreas führt die einzelnen Schritte passend aus. Beim Einzeichnen des Produktes im Subtrahenden fragt Andreas zweimal nach, ob er die passende Stelle gefunden habe, wo er einzeichnen soll. Dies deutet darauf hin, dass er an dieser Stelle noch unsicher ist.

Zur Ermittlung des Differenzproduktes beginnt Andreas die Punkte der ersten Zeile und der ersten Spalte zu zählen (SB 41). Es kann vermutet werden, dass Andreas verstanden hat, wie er die Faktoren des Differenzproduktes im rechten Term in der Darstellung ‚ablesen‘ kann. Er nutzt aber offenbar nicht von sich aus die Strukturierung des Punktefeldes. Die Interviewerin fragt nach, ob er das nochmals zählen müsse oder er es nicht vielleicht schon wüsste und zeigt dabei auf die erste Zeile (SB 42). Andreas antwortet daraufhin sofort mit 7 mal 4 (SB 43). Hier deutet er die Spalten als ersten Faktor und die Zeilen als zweiten Faktor des Produktes. Beim Einzeichnen der Teilprodukte fasste er dies umgekehrt auf (s. o.). Die Interviewerin bestätigt die Antwort (SB 44). Sie weist darauf hin, dass auch 4 mal 7 als Ergebnis stimmen würde und 7 als zweiter Faktor schon da stehe (SB 44). Dabei deutet sie auf die schon abgedruckte 7 als zweiten gleichbleibenden Faktor des Differenzproduktes. Andreas schreibt 4 als ersten Faktor auf (SB 45).

Die Interviewerin fragt, was 4 mal 7 sei (SB 46). Andreas antwortet zunächst mit 36 (SB 47), woraufhin die Interviewerin verneint (SB 48). Er nennt dann das passende Ergebnis 28 (SB 49). Es wird nicht ersichtlich, wie er zum passenden Ergebnis gelangt. Es ist möglich, dass er die Ergebnisse der Einmaleinsaufgaben mit 4 und 7 bereits ungefähr kennt. Diese Vermutung wird wieder gestützt durch die Auskunft Andreas‘ Lehrkraft. Sowohl das Vierer- als auch das Siebener-Einmaleins wurden in Unterrichtsstunden benannt, die bereits vor der hier analysierten Sitzung stattgefunden haben.

Bei der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8 =$ nennt die Interviewerin die neue Aufgabe und Andreas beginnt mit Bleistift die ersten Zeilen zu markieren (SB 54). Die Interviewerin wiederholt 10 mal 8, wobei sie 10 betont (SB 55). Andreas zählt die Punkte der ersten Spalte und sagt, dass dies 8 seien. Die Interviewerin stimmt zu und Andreas setzt seine Umrahmung fort (SB 58). Die Interviewerin fragt, wie er es jetzt machen wolle (SB 59), da sie wahrnimmt, dass er diesmal, anders als in den Aufgabenstellungen vorher, den ersten Faktor 10 als Spalten und den zweiten Faktor 8 als Zeilen auffasst. Andreas markiert in den ersten 8 Zeilen jeweils 10 Punkte (SB 60). Die Interviewerin weist ihn auf die nun andere Sichtweise der Faktoren hin und fügt hinzu, dass dies so auch möglich sei (SB 61). Andreas vervollständigt die Markierung (SB 62). Der erste Faktor der Malaufgabe bezieht sich nun auf die Spalten, der zweite gleichbleibende Faktor auf die Zeilen. In der vorausgegangenen Aufgabe interpretierte Andreas bei den Teilprodukten den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten gleichbleibenden Faktor als Spalten. Dies könnte daran liegen, dass der größere Faktor 10 nun an erster Stelle steht. Bei den Aufgaben vorher hatte der erste Faktor jeweils den kleineren Wert. Die Interviewerin gibt den Hinweis, dass das Subtrahendprodukt $1 \cdot 8$ abgezogen werden müsse (SB 63). Andreas nimmt daraufhin von sich aus den Buntstift und beginnt mit einem Strich unterhalb der sechsten Zeile (SB 64). Die Interviewerin gibt zunächst den Hinweis, die letzte Zeile zu markieren (SB 65), verbessert sich dann aber und fügt hinzu, dass das in der Form nicht ginge und fragt, wie man eine $1 \cdot 8$-Reihe finden könne (SB 67). Um die Distributivität deutlich zu machen, muss die Sichtweise, welcher Faktor jeweils als Zeilen und welcher als Spalten eingezeichnet wird, bei den Teilprodukten gleich sein. Andreas nennt dafür die ersten 8 Punkte der sechsten Zeile, indem er auf den achten Punkt der sechsten Zeile zeigt und „Bis zu hier“ (SB 68) sagt. Die Interviewerin weist ihn darauf hin, dass man so nicht direkt sehen könne, was übrig bleibt (SB 69). Sie zeigt außerdem auf die Aufgabe vorher als Beispiel, bei der das Differenzprodukt $4 \cdot 7$ direkt ‚abgelesen‘ werden könne (SB 69). Andreas nennt nun die achte Zeile, in der ein passendes Punktefeld eingezeichnet werden könne und deutet auf die achte Zeile (SB 70). Die Interviewerin unterbricht ihn und sagt, dass das 10 seien und fährt mit dem Stift die achte Zeile entlang (SB 71). Indem sie sagt, dass er es „ja jetzt so herum gemalt“ (SB 71) habe, möchte sie Andreas darauf hinweisen, dass er bei dieser Aufgabe die Sichtweise verändert hat, welcher Faktor als Zeilen und welcher als Spalten angesehen wird. Andreas zeigt auf die erste Spalte mit 8 Punkten (SB 72), was auch als passend angesehen werden kann. Die Interviewerin bittet ihn, die letzte Spalte zu kennzeichnen, sodass Andreas mit Buntstift in der zehnten Spalte 8 Punkte markiert (SB 74). Wenn das Differenzprodukt am Ende im Punktefeld sofort ‚ablesbar‘ sein und damit die Distributivität deutlich gemacht werden soll, muss die Sichtweise, welcher Faktor als Spalten und welcher als Zeilen interpretiert wird, bei Minuend- und Subtrahendprodukt einheitlich sein. Die Interviewerin leitet in dieser Phase der Sitzung stark. Andreas erhält einige Hilfsimpulse, um bei der einheitlichen Sichtweise zu bleiben.

Nach einer Pause von 9 Sekunden zählt Andreas die Punkte der ersten Spalte (SB 74). Die Interviewerin fragt, ob er das nun noch zählen müsse (SB 75). Er nutzt offenbar die Strukturierung des Punktefeldes nicht von sich aus. Andreas schreibt 8 als ersten gleichbleibenden Faktor auf und interpretiert nun, anders als in der bisherigen Bearbeitung der Aufgabenstellung, die Zeilen als ersten Faktor (SB 76). Um den zu subtrahierenden und den gleichbleibenden Faktor stärker deutlich zu machen, kann es hilfreich sein, auch in der symbolischen Form der Aufgabe den gleichbleibenden Faktor 8 im Minuend-, Subtrahend- und Differenzprodukt jeweils gleichbleibend als ersten oder zweiten Faktor zu notieren. Dies möchte die Interviewerin deutlich machen, indem sie den Hinweis gibt, die Aufgabe „andersherum“ (SB 77) zu notieren und begründet dies durch Nennung der Aufgabenstellung $10 \cdot 8 - 1 \cdot 8$ (SB 77). Andreas überschreibt 8 mit 10 und schreibt als zweiten Faktor 8 auf, sodass $10 \cdot 8$ notiert ist (SB 78). Die Interviewerin gibt den Hinweis, dass dies nicht richtig sei (SB 79). Sie fragt nach dem ersten Faktor des Differenzproduktes, indem sie sich erkundigt, welches Produkt mit 8 als zweiten Faktor übrig bleibe, wenn die zehnte Spalte wegfalle (SB 79). Sie verdeckt die zehnte Spalte mit dem Stift (SB 79). Andreas sagt, dass noch 9 mal 8 übrig bleiben würde und verbessert dies auf dem Blatt (SB 82, 84). Mit entsprechendem Hilfsimpuls kann Andreas das passende Differenzprodukt im rechten Term nun in der Darstellung ‚ablesen‘.

Die Interviewerin fragt nach dem Endergebnis (SB 85) und Andreas antwortet nach 9 Sekunden fragend mit 72 (SB 86). Die Interviewerin bestätigt das und Andreas schreibt das passende Ergebnis in die Lücke (SB 88). Er sagt, dass er zum Glück die Neunerreihe gelernt habe (SB 90). Diese Bemerkung weist darauf hin, dass ihm an dieser Stelle vermutlich noch nicht klar geworden ist, dass zur Ergebnisermittlung die Teilprodukte helfen können und somit die Neunerreihe noch nicht unbedingt gewusst werden muss. Die Auskunft der Lehrkraft bestätigt, dass das Einmaleins mit 9 zum Zeitpunkt der Fördersitzung bereits im Unterricht behandelt wurde.

Fazit zur Bearbeitung von Differenzprodukten

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass bei der ersten Aufgabenstellung das Einzeichnen des Differenzproduktes sehr angeleitet durchgeführt wird. Dabei interpretiert Andreas den jeweils ersten Faktor als Zeilen und den jeweils zweiten Faktor als Spalten. Bei der zweiten Aufgabenstellung betrachtet Andreas beim Einzeichnen des ersten Teilproduktes von sich aus den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen. Beim Einzeichnen des zweiten Teilproduktes wechselt er anfangs die Sichtweise, wodurch es zunächst zu Verwirrungen kommt. Somit leitet die Interviewerin hier stark an, sodass beim Einzeichnen die Sichtweise, den jeweils ersten Faktor als Spalten und den jeweils zweiten Faktor als Zeilen anzusehen, bei beiden Teilprodukten einheitlich bleibt. Die Faktoren des Differenzproduktes ermittelt Andreas bei der ersten Aufgabenstellung zählend in der Punktefelddarstellung und nutzt damit die Strukturierung des Punktefeldes nicht. Bei der zweiten Aufgabenstellung findet er die Faktoren mit Hilfestellungen anhand des Punktefeldes. Bei beiden Aufgaben erhält er das Ergebnis vermutlich über Berechnung des Summenproduktes. Es ist denkbar, dass ihm möglicherweise noch nicht bewusst ist, dass er das Endergebnis auch mithilfe der Ergebnisse zu den Teilprodukten ermitteln kann. Den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung vollzieht er mit Hilfestellung, sodass vermutet werden kann, dass nur teilweise Verständnis entwickelt wurde.

Gesamtfazit

Insgesamt zeigen Andreas‘ Testergebnisse in der ausgewählten Aufgabe zum Teil einen positiven Entwicklungsverlauf. In der Bearbeitung im Pre-Test wird Verständnis für die Aufgabenstellung nicht ersichtlich, im Post-Test weisen Teile der Bearbeitung darauf hin, dass Verständnis aufgebaut wurde. Die Bearbeitung im Follow-up-Test deutet allerdings wieder darauf hin, dass multiplikatives Verständnis nicht nachhaltig entwickelt werden konnte.

In der Fördereinheit zum Summenprodukt vollzieht Andreas den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung selbstständig, sodass davon ausgegangen werden kann, dass er dafür Verständnis entwickelt hat. Er findet bei der ersten Aufgabenstellung schnell das Ergebnis zum Summenprodukt; vermutlich kennt er bereits das Ergebnis. Da bei der zweiten Aufgabenstellung die Schritte zur Ergebnisermittlung durch Nutzung der Ergebnisse der Teilprodukte stark angeleitet werden, hat er diesen Zusammenhang offenbar noch nicht erkannt.

In der Fördereinheit zum Differenzprodukt vollzieht er den Übersetzungsprozess von der symbolischen Form in die Punktefelddarstellung mit Hilfestellung, sodass vermutet werden kann, dass nur teilweise Verständnis entwickelt wurde. Bei beiden Aufgaben findet er das Ergebnis vermutlich über Berechnung des Summenproduktes.

8.2.4 Zusammenfassung der Analyse

Ausgangspunkt der Analyse ist folgende Forschungsfrage:

Wie wird das Förderangebot bezüglich des Erkennens und der Nutzung der Eigenschaft Distributivität von den Kindern angenommen?

Analysiert werden folgende Elemente des Bearbeitungsprozesses mit jeweiligen Herausforderungen:

- Zeichnen der Teilprodukte
- Bestimmen des Summen-/Differenzproduktes
- Ergebnisermittlung

Während der drei Elemente des Bearbeitungsprozesses gibt es verschiedene Herausforderungen, die dem Kind begegnen. Wie das jeweilige Kind damit umgeht, wird in den Einzelfallanalysen (vgl. Kap. 8.2.3.1 bis 8.2.3.8) deutlich. Spannend ist es darüber hinaus, einen Überblick über alle acht Kinder und ggf. auch über die je 16 Einzelbearbeitungen zum Summen- und Differenzprodukt zu erhalten. Dies wird im Folgenden jeweils bei den Aufgaben zum Summen- und Differenzprodukt und innerhalb davon jeweils auf die einzelnen Elemente des Bearbeitungsprozesses bezogen nochmals zusammenfassend dargestellt.

8.2.4.1 Einzeichnen der Teilprodukte

Einzeichnen der Teilprodukte bei Summenprodukten

Vor dem ausgewählten Ausschnitt der Förderung haben die Kinder bereits Summenprodukte in symbolischer Schreibweise in Punktefelddarstellungen übertragen.

Vier Förderkinder zeichnen die Teilprodukte bei beiden Aufgabenstellungen von Beginn der ausgewählten Fördereinheit an selbstständig ein, drei Kinder benötigen zum Teil Unterstützung, ein Kind braucht mehrere Hilfestellungen.

Immerhin die Hälfte der Kinder erledigt alle Einzelschritte beim Einzeichnen der Teilprodukte selbstständig.

Der jeweils erste Faktor des Produktes wird von sieben Kindern als Zeilen, der jeweils zweite Faktor als Spalten eingezeichnet. Möglicherweise ist dies die Sichtweise, die häufiger im Unterricht angewandt wird.

Von den acht Aufgabenstellungen, die jedes Kind jeweils zuerst bearbeitet, erfolgt das Einzeichnen der Teilprodukte bei vier Bearbeitungen selbstständig, in vier Fällen benötigen die Kinder teilweise Unterstützung. Ebenso verhält es sich bei der Aufgabenstellung, die als Zweites bearbeitet wird. Bei der ersten und zweiten Aufgabenstellung sind dies jeweils dieselben vier Kinder, die selbstständig einzeichnen. Bezogen auf das Einzeichnen der Teilprodukte scheint es von erster zu zweiter Aufgabenstellung also keinen direkten Lernfortschritt bei den Kindern zu geben.

Produkte in Zeilen und Spalten einzeichnen

Fünf Kinder zeichnen die Produkte selbstständig in Zeilen und Spalten ein, ein Kind von diesen sieht im Gegensatz zu den anderen den ersten Faktor als Spalten, den zweiten Faktor als Zeilen. Drei Kinder benötigen teilweise Hilfestellungen, von diesen wird ein Kind bei der ersten Aufgabe beim ersten Teilprodukt angeleitet, den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten Faktor als Spalten zu sehen. Es können also immerhin fünf Kinder von sich aus Produkte in Form eines Punktefeldes mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten sehen. Ein direkter Lernfortschritt ist hier nicht zu verzeichnen.

Verwendung unterschiedlicher Farben

Sieben Kinder verwenden selbstständig für das erste Produkt eine Farbe und für das zweite Produkt eine zweite Farbe. Ein Kind erhält zur Verwendung einer zweiten Farbe jeweils einen Hilfsimpuls. Die Förderidee scheint von den meisten Kindern angenommen zu werden, zur Unterscheidung der Teilprodukte zwei verschiedene Farben zu verwenden.

Teilprodukte direkt untereinander/nebeneinander einzeichnen

Sieben Kinder zeichnen selbstständig die Produkte bei beiden Aufgabenstellungen direkt untereinander/nebeneinander ein, ein Kind benötigt teilweise Hilfestellungen. Dies deutet darauf hin, dass es für die meisten Kinder verständlich ist, die zwei Felder für zwei Teilprodukte, die addiert werden, untereinander/nebeneinander in das Punktefeld zu zeichnen.

Einheitliche Sichtweise, welcher Faktor als Zeilen und Spalten angesehen wird

Sieben Kinder wenden von sich aus eine einheitliche Sichtweise an, welcher Faktor jeweils als Zeilen und welcher als Spalten gesehen wird. Ein Kind zeichnet bei der ersten Aufgabe das zweite Teilprodukt zunächst in einer unpassenden Struktur ein, bei der zweiten Aufgabe verwendet es schließlich ebenfalls selbstständig eine einheitliche Sichtweise. Die meisten Kinder wählen offenbar von sich aus möglicherweise intuitiv eine einheitliche Sichtweise bezüglich der Zeilen und Spalten bezogen auf die Faktoren.

Einzeichnen der Teilprodukte bei Differenzprodukten

Vor dem ausgewählten Ausschnitt haben die Kinder das Übertragen von Differenzprodukten in symbolischer Schreibweise in Punktefelddarstellungen in der Förderung noch nicht kennengelernt.

Vier von acht Kindern zeichnen bereits bei der zweiten Aufgabenstellung zum Differenzprodukt die Teilprodukte selbstständig ein, drei benötigen noch etwas Unterstützung, ein Kind braucht noch mehrere Hilfestellungen.

Fünf von acht Kindern zeichnen den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten Faktor des Produktes als Spalten ins Punktefeld ein. Von den drei übrigen Kindern interpretieren zwei bei beiden Aufgabenstellungen den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen. Ein Kind von den dreien zeichnet bei der ersten Aufgabenstellung den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten als Spalten, in der zweiten Aufgabenstellung umgekehrt. Dies könnte wiederum darauf hindeuten, dass die Sichtweise, den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten Faktor als Spalten zu interpretieren, im Unterricht verbreiteter ist.

Von den acht Aufgabenstellungen, die jedes Kind jeweils als erstes bearbeitet, erfolgt das Einzeichnen der Teilprodukte bei einer Bearbeitung selbstständig, in sieben Fällen benötigen die Kinder teilweise Unterstützung. Von den acht Aufgabenstellungen, die als zweites bearbeitet werden, werden die Teilprodukte in vier Fällen selbstständig eingezeichnet, in den übrigen Fällen benötigen die Kinder zum Teil Unterstützung. Hier kann von der ersten zur zweiten Aufgabenstellung ein Lernfortschritt festgestellt werden.

Produkte in Zeilen und Spalten einzeichnen

Sechs Kinder zeichnen die Produkte bei beiden Aufgabenstellungen selbstständig in Zeilen und Spalten ein, davon sehen zwei Kinder im Gegensatz zu den anderen den ersten Faktor als Spalten, den zweiten Faktor als Zeilen. Zwei von acht Kindern benötigen teilweise Hilfestellungen. Von diesen zwei Kindern verzählt sich ein Kind lediglich bei einem Faktor des ersten Teilproduktes, das andere Kind zeichnet das erste Teilprodukt selbstständig ein und benötigt beim zweiten etwas Unterstützung. Die meisten Kinder können also von sich aus Produkte in Form von Punktefeldern sehen.

Verwendung unterschiedlicher Farben

Sieben Kinder verwenden selbstständig für das erste Produkt eine Farbe und für das zweite Produkt eine zweite Farbe. Ein Kind erhält zur Verwendung einer zweiten Farbe jeweils einen Hilfsimpuls. Auch hier scheint die Förderidee von den meisten Kindern aufgegriffen zu werden, zur Identifizierung der Teilprodukte zwei verschiedene Farben zu verwenden.

Subtrahendprodukt in Minuendprodukt einzeichnen

Differenzprodukte werden an dieser Stelle der Fördersitzung zum ersten Mal in Punktefelder gezeichnet. Sieben Kinder zeichnen die Teilprodukte bei der ersten Aufgabenstellung mithilfe von entsprechenden Hinweisen passend ein, ein Kind markiert die Teilprodukte sogar schon nahezu selbstständig. Bei der zweiten Aufgabenstellung zeichnen sechs Kinder die Teilprodukte selbstständig ein, ein Kind mit wenig Unterstützung, ein Kind mit etwas mehr Hilfestellungen. Es ist überraschend, dass immerhin ein Kind von sich aus eine passende Idee hat, wie Differenzprodukte eingezeichnet werden können. Vergleicht man die Bearbeitungen in der ersten und zweiten Aufgabe, so können erhebliche Lernfortschritte bezogen auf das Einzeichnen des Minuend- und Subtrahendproduktes verzeichnet werden.

Einheitliche Sichtweise, welcher Faktor als Zeilen und Spalten angesehen wird

Vier von den acht Kindern wenden von sich aus bei beiden Aufgabenstellungen eine einheitliche Sichtweise an, welcher Faktor jeweils als Zeilen und welcher als Spalten gesehen wird. Von diesen vier Kindern sieht nur ein Kind den ersten Faktor als Spalten, den zweiten Faktor als Zeilen. Drei weitere von den acht Kindern wenden bei der ersten Aufgabenstellung eine einheitliche Sichtweise mit Hilfestellung an, bei der zweiten Aufgabenstellung wenden sie sie selbstständig an. Ein weiteres Kind von den acht Kindern wendet bei der ersten Aufgabenstellung selbstständig eine einheitliche Sichtweise an, bei der zweiten Aufgabenstellung wird dies angeleitet. Von den insgesamt vier von acht Kindern, die jeweils bei einer Aufgabenstellung Unterstützung benötigen, die Faktoren einheitlich einzuzeichnen, sehen zwei Kinder den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen. Beide beginnen sie beim ersten Teilprodukt mit dieser Sichtweise und wechseln beim zweiten Teilprodukt die Sichtweise, sodass es zu Verwirrungen kommt. Die Anwendung einer einheitlichen

Sichtweise für die Teilprodukte scheint beim Einzeichnen der Differenzprodukte für mehrere Kinder eine Hürde darzustellen.

Fazit zum Einzeichnen der Teilprodukte

Summenprodukte werden von Beginn des ausgewählten Förderausschnitts an von den meisten Kindern selbstständig eingezeichnet, was möglicherweise auch darauf zurückgeführt werden kann, dass die Kinder zuvor bereits zwei derartige Aufgabenstellungen zum Summenprodukt bearbeitet haben. Ein Lernfortschritt von erster zu zweiter Aufgabenstellung ist nicht direkt feststellbar. Beim Einzeichnen von Differenzprodukten ist ein Lernfortschritt zu verzeichnen; in der ersten Aufgabenstellung hat ein Kind das Differenzprodukt selbstständig eingezeichnet, in der zweiten Aufgabenstellung vier Kinder.

Die meisten Kinder in der ausgewählten Fördereinheit können von sich aus Produkte in Form eines Punktefeldes mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten sehen.

Die Förderidee scheint von den meisten Kindern angenommen zu werden, zur Unterscheidung der Teilprodukte zwei verschiedene Farben zu verwenden.

Beim Einzeichnen des Summenproduktes zeigt sich, dass es im ausgewählten Ausschnitt für die meisten Kinder verständlich zu sein scheint, die zwei Felder für die zwei Teilprodukte, die addiert werden, untereinander/nebeneinander in das Punktefeld zu zeichnen. Beim Einzeichnen des Minuend- und Subtrahendproduktes brauchen bei der ersten Aufgabenstellung die meisten Kinder Unterstützung. Bei der zweiten Aufgabenstellung zeichnen sechs Kinder die Teilprodukte selbstständig ein, d. h. es ist ein erheblicher Lernfortschritt feststellbar.

Bei den Aufgabenstellungen zum Summenprodukt wählen die meisten Kinder von sich aus möglicherweise intuitiv eine einheitliche Sichtweise bezüglich der Zeilen und Spalten bezogen auf die Faktoren. Die Anwendung einer einheitlichen Sichtweise für die Teilprodukte bezüglich der Faktoren bei Differenzprodukten scheint für mehrere Kinder dagegen eine Hürde darzustellen.

8.2.4.2 Bestimmen der Faktoren

Bestimmen der Faktoren bei Summenprodukten

Insgesamt bestimmen vier von acht Kindern die Faktoren des Summenproduktes beider Aufgaben selbstständig auf unterschiedliche Weisen, drei Kindern gelingt dies nur bei einer der Aufgabenstellungen. Von den vier Kindern, die bei beiden Aufgaben die Faktoren ohne Hilfe ermitteln, nutzen zwei Kinder das Punktefeld, bei zwei Kindern bleibt unklar, wie sie die Faktoren ermitteln. Immerhin die Hälfte kann die Faktoren des Summenproduktes von sich aus bestimmen. Von allen acht nutzen sechs Kinder bei mindestens einer Aufgabenstellung das Punktefeld zur Ermittlung der Faktoren, fünf Kinder nutzen es bei beiden Aufgabenstellungen. Bei zwei Kindern bleibt unklar, wie sie die Faktoren ermitteln. Ein Kind von den acht Kindern nutzt bei einer Aufgabe das Punktefeld, bei der anderen Aufgabenstellung wird es nicht deutlich, wie es die Faktoren ermittelt. Das Punktefeld scheint also zur Ermittlung der Faktoren eine Unterstützung darzustellen. Von den sechs Kindern, die bei mindestens einer Aufgabenstellung das Punktefeld nutzen, zählen fünf Kinder offensichtlich bei mindestens einem der Faktoren die Punkte im Punktefeld ab, um den Faktor zu ermitteln. Die Kinder zählen also häufig, um die Faktoren zu ermitteln, die Strukturierung des Punktefeldes wird somit seltener genutzt.

Von den insgesamt 16 Bearbeitungen wird in elf Fällen das Punktefeld mit oder ohne Unterstützung zum Bestimmen der Faktoren genutzt. Dies zeigt nochmals, dass das Punktefeld häufig als Hilfsmittel zur Bestimmung der Faktoren dient. Betrachtet man diese elf Bearbeitungen, so stellt man fest, dass der erste zu summierende Faktor in sieben Fällen eindeutig gezählt wird. Jeweils einmal ermittelt das Kind den Faktor durch einen kurzen Blick auf das Punktefeld, durch Deuten auf die erste Spalte, nach Hinweis auf das Punktefeld bzw. in einem weiteren Fall nennt es den Faktor sofort. Bezogen auf die oben genannten elf Fälle wird der zweite gleichbleibende Faktor in zwei Fällen gezählt und in sechs Fällen durch einen kurzen Blick auf das Punktefeld ermittelt. In einem weiteren Fall von den elf Fällen geschieht die Nennung des zweiten gleichbleibenden Faktors durch Deuten auf zwei Stellen der ersten Zeile nach Hinweis auf das Punktefeld und in einem Fall durch Hinweis auf die Strukturierung des Punktefeldes. In einem weiteren Fall verzählt sich das Kind zunächst sowie nennt dann sofort den passenden Faktor. Auffällig ist, dass der erste zu summierende Faktor wesentlich häufiger gezählt wird (in sieben von elf Fällen) und der zweite gleichbleibende Faktor häufiger durch einen kurzen Blick auf das Punktefeld identifiziert wird (in sechs von elf Fällen). Es könnte einerseits sein, dass der zweite gleichbleibende Faktor noch präsenter im Kopf geblieben ist. Andererseits ist es auch denkbar, dass in diesen Fällen die Strukturierung genutzt wird.

Von den acht Aufgabenstellungen, die jedes Kind jeweils zuerst bearbeitet, werden bei fünf Bearbeitungen die Faktoren selbstständig bestimmt, in den übrigen drei Fällen benötigen die Kinder Unterstützung. Von den acht Aufgabenstellungen, die jeweils als Zweites bearbeitet werden, werden bei sechs Bearbeitungen die Faktoren selbstständig bestimmt, in den übrigen zwei Fällen benötigen die Kinder Unterstützung. Vier Kinder bearbeiten beide Aufgabenstellungen selbstständig. Ein Kind bearbeitet die erste Aufgabenstellung selbstständig und die zweite mit Unterstützung. Ein Kind bearbeitet die erste Aufgabenstellung mit Unterstützung und die zweite selbstständig. Insgesamt können somit in der zweiten Aufgabenstellung bereits sechs Kinder (in der ersten nur fünf) die Faktoren von sich aus bestimmen. Es ist also ein kleiner Lernfortschritt feststellbar.

Bestimmen der Faktoren bei Differenzprodukten

Insgesamt bestimmen zwei von acht Kindern die Faktoren des Differenzproduktes beider Aufgaben selbstständig. Beide nutzen dafür das Punktefeldes. Vier Kindern gelingt eine selbständige Bestimmung der Faktoren bei einer der Aufgabenstellungen. Von diesen vier Kindern nutzen zwei bei ihrer selbstständigen Bestimmung der Faktoren das Punktefeld, bei den übrigen zwei bleibt unklar, wie sie die Faktoren bestimmen. Von den acht Kindern nutzen alle bei mindestens einer Aufgabenstellung das Punktefeld zur Ermittlung der Faktoren, fünf Kinder nutzen es bei beiden Aufgabenstellungen. Die Nutzung des Punktefeldes zur Bestimmung der Faktoren scheint also hilfreich zu sein, allerdings nutzen beim Differenzprodukt wenige Kinder das Punktefeld von sich aus.

Von den insgesamt 16 Bearbeitungen mit und ohne Hilfestellungen werden bei 13 Bearbeitungen die Faktoren des Differenzproduktes mithilfe des Punktefeldes ermittelt, bei einer Bearbeitung erfolgt die Ermittlung angeleitet mithilfe der symbolischen Form, bei zwei Bearbeitungen bleibt unklar, ob das Punktefeld oder die symbolische Form genutzt wird. Von den 13 Bearbeitungen, bei denen die Faktoren mithilfe des Punktefeldes ermittelt werden, werden sechs Bearbeitungen selbstständig durchgeführt, bei sieben Bearbeitungen benötigt das jeweilige Kind Unterstützung. Von diesen sieben Bearbeitungen wird bei vier Bearbeitungen von der Interviewerin als Hilfestellung das Feld für das Subtrahendprodukt mit der Hand oder dem Stift abgedeckt, was dann zur Ermittlung der Faktoren des Differenzproduktes führt. Bei einer weiteren Bearbeitung (von den sieben) deckt das Kind von sich aus das Feld für das Subtrahendprodukt ab. Das Abdecken des Feldes für das Subtrahendprodukt scheint eine geeignete Hilfe zur Ermittlung des Differenzproduktes zu sein. Von den 13 Bearbeitungen, bei denen die Faktoren mithilfe des Punktefeldes ermittelt werden, wird bei vier Bearbeitungen vom Kind bei mindestens einem Faktor zumindest teilweise offensichtlich gezählt, bei den übrigen scheint die Strukturierung des Punktefeldes genutzt zu werden. Die Kinder nutzen beim Bearbeiten des Differenzproduktes offenbar schon zum Teil die Strukturierung des Punktefeldes.

Von den acht Aufgabenstellungen, die jedes Kind jeweils zuerst bearbeitet, werden bei drei Bearbeitungen die Faktoren selbstständig bestimmt, in den übrigen fünf Fällen benötigen die Kinder Unterstützung. Von den acht Aufgabenstellungen, die jeweils als Zweites bearbeitet werden, werden bei fünf Bearbeitungen die Faktoren selbstständig bestimmt, bei den übrigen drei Bearbeitungen benötigen die Kinder Unterstützung. Zwei Kinder bearbeiten beide Aufgabenstellungen selbstständig. Ein Kind bearbeitet die erste Aufgabenstellung selbstständig und die zweite mit Unterstützung. Drei Kinder bearbeiten die erste Aufgabenstellung mit Unterstützung und die zweite selbstständig. Insgesamt können somit in der zweiten Aufgabenstellung bereits fünf Kinder (in der ersten nur drei) die Faktoren von sich aus bestimmen. Es ist also durchaus ein Lernfortschritt feststellbar.

Fazit zum Bestimmen der Faktoren

Das Punktefeld scheint sowohl bei der Bearbeitung des Summen- als auch des Differenzproduktes hilfreich zu sein, allerdings nutzen beim Differenzprodukt wenige Kinder das Punktefeld von sich aus.

Bei Differenzprodukten scheint das Abdecken des Feldes für das Subtrahendprodukt eine geeignete Hilfe zur Ermittlung der Faktoren zu sein.

Bei Summenprodukten zählen die Kinder häufig, um die Faktoren zu ermitteln, die Strukturierung des Punktefeldes wird somit seltener genutzt. Beim Bearbeiten des Differenzproduktes nutzen die Kinder offenbar schon zum Teil die Strukturierung des Punktefeldes.

Bei der Bearbeitung von Summenprodukten ist auffällig, dass der erste zu summierende Faktor wesentlich häufiger gezählt wird und der zweite gleichbleibende Faktor öfter durch einen kurzen Blick auf das Punktefeld identifiziert wird. Es könnte einerseits sein, dass der zweite gleichbleibende Faktor noch präsenter im Kopf geblieben ist. Andererseits ist auch denkbar, dass in diesen Fällen die Strukturierung genutzt wird.

Insgesamt ist bei der Bearbeitung der beiden Aufgabenstellungen von erster zu zweiter Aufgabenstellung bei den Summenprodukten ein kleiner, bei der Bearbeitung der Differenzprodukte durchaus ein Lernfortschritt feststellbar.

8.2.4.3 Ermittlung des Ergebnisses

Ermittlung des Ergebnisses bei Summenprodukten

Von den acht Kindern ermitteln vier Kinder bei beiden Aufgabenstellungen selbstständig jeweils das Ergebnis auf unterschiedliche Weise. Zwei Kindern (von acht) gelingt dies bei einer Aufgabenstellung, zwei Kinder (von acht) benötigen bei beiden Aufgabenstellungen Unterstützung. Immerhin die Hälfte der Kinder kann von sich aus bei beiden Aufgaben das Ergebnis ermitteln.

Unter den insgesamt zehn selbstständig durchgeführten Bearbeitungen (von 16) erfolgt in zwei Fällen die Ergebnisermittlung durch Addieren der Ergebnisse der Teilprodukte, in fünf Fällen wird das Ergebnis sofort genannt, in drei Fällen wird es nach einigen Sekunden (10-16 Sekunden) genannt. Alle sechs Bearbeitungen (von 16), die mit Hilfestellung durchgeführt werden, werden angeleitet über die Ermittlung der Ergebnisse der Teilprodukte vollzogen. Von sich aus scheinen die Kinder eher selten die Ergebnisse der Teilprodukte zu nutzen, um das Endergebnis zu ermitteln.

Von den acht Aufgabenstellungen, die jedes Kind jeweils zuerst bearbeitet, wird bei sechs Bearbeitungen das Ergebnis selbstständig ermittelt, in den übrigen zwei Fällen benötigen die Kinder Unterstützung. Von den acht Aufgabenstellungen, die jeweils als Zweites bearbeitet werden, wird bei vier Bearbeitungen das Ergebnis selbstständig ermittelt, in den übrigen vier Fällen benötigen die Kinder Unterstützung. Die Ergebnisermittlung erfolgt in der ersten Aufgabe in sechs Fällen selbstständig, in der zweiten Aufgabe in vier Fällen, die Kinder brauchen wider Erwarten bei der zweiten Aufgabe also häufiger Unterstützung als bei der ersten Aufgabe.

Ermittlung des Ergebnisses bei Differenzprodukten

Von den acht Kindern ermitteln drei Kinder bei beiden Aufgabenstellungen das Ergebnis selbstständig. Es wird nicht ersichtlich, wie sie es ermitteln. Zwei weitere Kinder finden bei einer Aufgabenstellung selbstständig das Ergebnis, die übrigen drei Kinder benötigen bei beiden Aufgabenstellungen Überstützung.

Von den 16 Aufgabenbearbeitungen wird bei sieben Bearbeitungen das Ergebnis jeweils durch Subtraktion der Ergebnisse der Teilprodukte ermittelt, bei den übrigen neun Bearbeitungen wird das Ergebnis einfach genannt, sodass nicht ersichtlich wird, wie das Ergebnis ermittelt wird. Von den sieben Bearbeitungen, bei denen die Ergebnisse mithilfe der Teilprodukte ermittelt werden, werden von den Kindern bei sechs Bearbeitungen Hilfestellungen benötigt, bei einer Bearbeitung erfolgt sie selbstständig. Von diesen sechs Bearbeitungen werden bei fünf Bearbeitungen die Einzelschritte über die Subtraktion der Ergebnisse der Teilprodukte angeleitet, in einer Bearbeitung findet das Kind die Schritte selbst und verrechnet sich dann jedoch. Insgesamt lässt sich also feststellen, dass die Ergebnisse der Teilprodukte auch hier von den Kindern häufiger nicht selbstständig genutzt werden.

Von den acht Aufgabenstellungen, die jedes Kind jeweils zuerst bearbeitet, wird bei vier Bearbeitungen das Ergebnis selbstständig ermittelt, in den übrigen vier Fällen benötigen die Kinder Unterstützung. Dies zeigt sich ebenso bei den acht Aufgabenstellungen, die jeweils als Zweites bearbeitet werden. Die Ergebnisermittlung erfolgt bei drei Kindern (von acht) bei beiden Aufgabenstellungen selbstständig, bei einem Kind nur in der ersten Aufgabenstellung und bei einem Kind nur in der zweiten Aufgabenstellung. Hier scheint also nur ein geringer Lernfortschritt von der ersten Aufgabe zur zweiten Aufgabe feststellbar zu sein.

Fazit zur Ermittlung des Ergebnisses

Bei Summenprodukten ermittelt immerhin die Hälfte der Kinder von sich aus bei beiden Aufgaben das Ergebnis. Bei Differenzprodukten ermitteln drei Kinder (von acht) bei beiden Aufgabenstellungen das Ergebnis selbstständig. Zwei weitere Kinder finden bei einer Aufgabenstellung selbstständig das Ergebnis.

Bei Summen- und Differenzprodukten scheinen von sich aus die Kinder eher selten die Ergebnisse der Teilprodukte zu nutzen, um das Endergebnis zu ermitteln.

Bei Summenprodukten erfolgt die Ergebnisermittlung in der ersten Aufgabe in sechs Fällen selbstständig, in der zweiten Aufgabe in vier Fällen, die Kinder brauchen wider Erwarten bei der zweiten Aufgabe also häufiger Unterstützung als bei der ersten Aufgabe. Bei Differenzprodukten geschieht die Ergebnisermittlung bei drei Kindern (von acht) bei beiden Aufgabenstellungen selbstständig, bei einem Kind nur in der ersten Aufgabenstellung und bei einem Kind nur in der zweiten Aufgabenstellung.

8.2.5 Implikationen für den Unterricht

Aufgrund der Analyse des Ausschnitts der Fördersitzung zu diesem Thema können folgende Empfehlungen für den Unterricht festgestellt werden.

Einzeichnen der Teilprodukte bei Summen- bzw. Differenzprodukten

Im Unterricht scheint eine Sichtweise, welcher Faktor als Zeilen und welcher als Spalten gesehen wird, häufiger zur Anwendung zu kommen (erster Faktor als Zeilen, zweiter Faktor als Spalten). Aufgrund der Kommutativität sind jedoch natürlich beide Sichtweisen möglich. Empfehlenswert ist es somit, auch beim Einzeichnen von Teilprodukten bei Summen- bzw. Differenzprodukten bewusst beide Möglichkeiten zu thematisieren.

Die meisten Kinder in der Einzelförderung zeigen, dass sie *Produkte in Punktefelder mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten* übertragen können. Die Auskünfte der Lehrkräfte machen deutlich, dass zumindest unter den teilnehmenden Lehrkräften (einschließlich der Lehrkräfte in Setting B und C) eine derartige Veranschaulichung von Produkten im Unterricht eingesetzt wird.

Die *Verwendung unterschiedlicher Farben* zur Unterscheidung der Teilprodukte in der Zeichnung wurde von fast allen Kindern in der Einzelförderung angenommen. Es scheint ein geeignetes Mittel zur Verdeutlichung zu sein. Entscheidend ist dies jedoch nicht, sodass auch dieselbe Farbe oder eine komplett andere Vorgehensweise eingesetzt werden könnte (Zerschneiden von Punktefeldern usw.).

Die meisten Kinder können im Ausschnitt der Förderung die Felder für die *Teilprodukte eines Summenproduktes direkt untereinander/nebeneinander einzeichnen.* Auch die Bearbeitung von Differenzprodukten zeigt, dass Kinder sehr schnell verstehen, das Feld für das *Subtrahendprodukt in* das Feld für das *Minuendprodukt* einzuzeichnen. Dies wurde in der erstmaligen Behandlung sehr explizit gemacht. Die Vorgehensweise, auf welche Art und Weise die Teilprodukte jeweils im Feld eingezeichnet werden, sollte im Unterricht ganz genau besprochen und bewusst gemacht werden.

Bei Summenprodukten wählen die meisten Kinder von sich aus eine *einheitliche Sichtweise, welcher Faktor als Zeilen und welcher als Spalten* gesehen wird. Bei Differenzprodukten scheint dies für die Kinder häufiger eine besondere Hürde darzustellen. Da dies entscheidend für die Verdeutlichung der Distributivität ist, sollte es in jedem Fall ganz explizit im Unterricht thematisiert werden. Dieser Schritt ist natürlich eng verknüpft mit dem zuvor beschriebenen Schritt, die Teilprodukte entsprechend einzuzeichnen.

Bestimmen der Faktoren des Summen- bzw. Differenzproduktes

Zum Bestimmen der Faktoren von Summen- und Differenzprodukten ist es offenbar für viele Kinder hilfreich, das Punktefeld zu nutzen. Es sollte deswegen bewusst gemacht werden, wo der erste und wo der zweite Faktor im Punktefeld ‚ablesbar' sind. Des Weiteren zählen Kinder häufig die Punkte einzeln ab, um die Faktoren zu ermitteln. Somit erscheint es sinnvoll, die Strukturierung im Punktefeld im Vorfeld explizit zu thematisieren. Der zu summierende bzw. zu subtrahierende und der gleichbleibende Faktor sollte sowohl im Punktefeld als auch in der symbolischen Form der Darstellung aufgezeigt werden. Bei Differenzprodukten scheint es eine Hilfe zu sein, das Feld für das Subtrahendprodukt abzudecken, um die Subtraktion deutlich zu machen.

Ermittlung des Ergebnisses

Da die Kinder von sich aus eher selten die Ergebnisse der Teilprodukte nutzen, deutet dies darauf hin, dass diese Möglichkeit im Unterricht verstärkt thematisiert werden muss.

9 Fazit und Ausblick

Durch die Forderungen der Einbeziehung von Kindern mit Behinderung in die Regelschule, kommt es zu einer Zunahme an Heterogenität im Unterricht. In dieser Arbeit wird auf die Heterogenitätsdimension mathematische Fähigkeit und dabei insbesondere auf Rechenschwäche fokussiert (vgl. Kap. 2).

Forschungsbefunde zeigen, dass die Umsetzung natürlicher Differenzierung auch in Förderklassen gelingen kann. Sie beziehen sich jedoch eher auf Förderung im additiven Bereich. Es besteht ein Forschungsdesiderat in Bezug auf Förderung im multiplikativen Bereich, an das in der vorliegenden Arbeit angeknüpft wird (vgl. Kap. 3).

Aus mathematischer und mathematikdidaktischer Perspektive spielen bei der Entwicklung von Multiplikativem Verständnis die Entwicklung der Grundvorstellungen *wiederholte Addition* und *kartesisches Produkt* sowie der Eigenschaften von Multiplikation eine wesentliche Rolle (vgl. Kap. 4).

Auf Basis der aufgearbeiteten theoretischen Überlegungen ergibt sich als erste Hauptforschungsfrage, welche Antworten der Mathematikunterricht der Grundschule auf die Inklusionsforderung im Inhaltsbereich Multiplikation anbieten kann (vgl. Kap. 5).

Grundsätzlich sind unterschiedliche Förderszenarien denkbar. In dieser Arbeit wurden als differente Interventionssettings *Einzelförderung* und *Förderung im Klassenverband* eingesetzt. Eine *Kontrollgruppe* wurde ergänzt, in der der Regelunterricht wie gewohnt stattfand (vgl. Kap. 6 und 7). Als zweite Hauptforschungsfrage ergibt sich, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses zeigen (vgl. Kap. 5).

Die durchgeführten Pre-, Post und Follow-up-Tests wurden in allen drei Settings quantitativ ausgewertet. Ausgewählte Ausschnitte der *Einzelförderung* wurden qualitativ analysiert (vgl. Kap. 6 und 7).

9.1 Zusammenfassende Ergebnisse der quantitativen Untersuchung

Um Veränderungen und Unterschiede zwischen den Settings feststellen zu können, erfolgte die Auswertung der eingesetzten Pre-, Post- und Follow-up-Tests *quantitativ*. Dabei wurden zum einen die Ergebnisse der acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* mit jeweils *allen* Kindern in Setting B *Klassenverband* sowie in der *Kontrollgruppe* (Setting C) verglichen. Zum anderen wurden die Ergebnisse der Kinder in Setting A *Einzelförderung* (n = 8) mit jeweils acht Kindern *mit Förderbedarf* (Matching-Kinder) in Setting B *Klassenverband* (n = 124) sowie in der *Kontrollgruppe* (Setting C) (n = 108) verglichen (vgl. Kap. 7.6.2). Die Ergebnisse wurden bezüglich der Kategorien *Angemessenheit*, *Grundvorstellungen* und *Ergebnisrichtigkeit* analysiert.

9.1.1 Angemessenheit

Bearbeitungen werden als *angemessen* kategorisiert, wenn sie entsprechend der Aufgabenstellung als adäquat anzusehen sind und passende Grundvorstellungen identifiziert werden können. *Teilweise angemessen* ist eine Bearbeitung, wenn sinnvolle Ansätze erkennbar sind, diese aber entweder nicht zu Ende geführt oder zusätzlich unangemessene Angaben gemacht werden. *Nicht angemessen* sind Bearbeitungen, die keine sinnvollen Ansätze enthalten.

In der deskriptiven Darstellung wurden die prozentualen Anteile der jeweiligen Ausprägungen sowie die Veränderungen im Verlauf der MZP betrachtet. In einem weiteren Schritt wurden Unterschiedshypothesen mithilfe statistischer Methoden überprüft. Hierfür werden die Bearbeitungen als *angemessen* und *nicht angemessen* (bestehend aus *teilweise* und *nicht angemessen*) kategorisiert und alle *angemessenen* Bearbeitungen für jedes Kind zu jedem der MZP aufsummiert (Summenindex).

Es wurde untersucht, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Angemessenheit* der Bearbeitung bei *allen* beteiligten Kindern und bei den Kindern *mit Förderbedarf* haben.

In Setting A *Einzelförderung* kommt es zu einem starken Anstieg des Anteils an *angemessenen* Bearbeitungen während der Intervention, d. h. von MZP 1 zu MZP 2, sowie im Langzeiteffekt, d. h. von MZP 1 zu MZP 3, jeweils bezogen auf den Wert zu MZP 1. Außerdem sinkt der Anteil an *nicht angemessenen* Bearbeitungen von MZP 1 zu MZP 2 sowie von MZP 1 zu MZP 3 stark, jeweils bezogen auf den Wert zu MZP 1. Die Veränderungen *aller* Kinder in Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* sind insgesamt eher gering. Bei Betrachtung der absoluten Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen *aller* Kinder stellt man fest, dass sie in Setting A *Einzelförderung* zu MZP 2 und MZP 3 jeweils auf einem hohen Niveau bei 83,0 % sowie 65,2 % und in Setting B *Klassenverband* bei jeweils knapp über 70 % liegen. In Setting C *Kontrollgruppe* ist zu MZP 2 und MZP 3 ein mittleres Niveau feststellbar bei jeweils knapp unter 60 %. Die Veränderungen an *angemessenen* Bearbeitungen sind bei den Kindern *mit Förderbedarf* auch in der *Kontrollgruppe* (Setting C) sehr stark. Die übrigen Veränderungen liegen bei den Kindern *mit Förderbedarf* im mittleren bzw. niedrigen Bereich. Die absoluten Anteile an *angemessenen* Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* liegen in Setting B *Klassenverband* jeweils auf einem mittleren

Niveau bei 55,4 % und 49,1 %. In Setting C *Kontrollgruppe* ist zu MZP 2 und MZP 3 ein eher niedriges Niveau bei 37,5 % und 39,3 % feststellbar.

Es gibt Aufgaben, die Besonderheiten in den Ergebnissen aufweisen. Eine Aufgabe, bei der eine Übersetzung von der Darstellungsform des Punktefeldes in die Symbolform erforderlich ist, wird in allen Settings zu allen MZP von *allen* teilnehmenden Kindern überwiegend *angemessen* bearbeitet. Den Kindern ist die Darstellungsform offenbar bereits zum Zeitpunkt des Pre-Tests vertraut, sodass angenommen werden kann, dass die teilnehmenden Lehrkräfte sie im Unterricht häufig einsetzen.

Zwei Aufgaben, die beide die Distributivität thematisieren, werden in allen drei Settings zu fast allen MZP überwiegend *nicht* bzw. *teilweise angemessen* bearbeitet. In Setting A *Einzelförderung* sind die Anteile an *teilweise angemessenen* und *angemessenen* Bearbeitungen sehr groß. Dies deutet darauf hin, dass es möglich ist, sogar bei Kindern *mit Förderbedarf* in der zweiten Klasse ein Verständnis für Distributivität zu vermitteln. Allerdings zeigen die großen Anteile an *teilweise angemessenen* Bearbeitungen in Setting A *Einzelförderung* und Setting B *Klassenverband*, dass die Vorgehensweise im Konzept durchaus noch weiterentwickelt werden kann. Diese Ergebnisse der Aufgaben zur Distributivität sind u. a. auch ein Grund für den Fokus der qualitativen Analyse.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse zu *allen* Kindern zu allen Aufgaben kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* lassen sich also signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisen. In Setting *B Klassenverband* sind dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage I).

Auf Basis der Ergebnisse der Varianzanalyse zu den Kindern *mit Förderbedarf* zu allen Aufgaben kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *angemessen* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe*

(Setting C), angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind somit signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar. Auch in Setting B *Klassenverband* lassen sich signifikant positive Effekte immerhin direkt nach der Intervention nachweisen (Forschungsfrage II).

Zusammenfassend lässt sich aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalysen sagen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte bezüglich *Angemessenheit* sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind; in Setting B *Klassenverband* ist dies bei den Kindern *mit Förderbedarf* immerhin direkt nach der Intervention der Fall. In Setting *B Klassenverband* sind bei *allen* Kindern dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage I und II).

9.1.2 Grundvorstellungen

Um eine Basis für weiterführende mathematische Inhalte zu schaffen, soll bei den Kindern während der Behandlung der Multiplikation, anknüpfend an die *additive* Grundvorstellung zunehmend die *multiplikative* Grundvorstellung entwickelt werden. Somit können hohe Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen als positiv und wünschenswert gewertet werden.

Bezüglich der Kategorie *Grundvorstellungen* sollte herausgefunden werden, wie sich die in einer Aufgabenstellung zugrunde gelegte Grundvorstellung in der von den Kindern genutzten Grundvorstellung widerspiegelt. Des Weiteren wurde der Frage nachgegangen, ob sich die Grundvorstellungen unterscheiden, die in den Bearbeitungen *aller* Kinder sowie der Kinder *mit Förderbedarf* in den verschiedenen Settings der Erprobung auftreten.

In der deskriptiven Darstellung wurden die prozentualen Anteile der jeweiligen Ausprägungen sowie die Veränderungen im Verlauf der MZP betrachtet. *Multiplikative* Bearbeitungen enthalten die Grundvorstellung des *kartesischen Produkts*, *additive* Bearbeitungen enthalten die Grundvorstellung der *wiederholten Addition*. Die Ausprägung *beide* bezieht sich auf Bearbeitungen, die beide Grundvorstellungen enthalten. *Nicht angemessene* Bearbeitungen bilden den restlichen Anteil. Bei diesen Bearbeitungen ergibt die Zuordnung zu einer Grundvorstellung keinen Sinn (*nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos*). In einem weiteren Schritt wurden Unterschiedshypothesen mithilfe statistischer Methoden überprüft. Hierfür werden die Bearbeitungen als *multiplikativ* und *nicht multiplikativ* (bestehend aus *additiv*, *beide* und *nicht angemessen – Grundvorstellung sinnlos*) kategorisiert und alle *multiplikativen* Bearbeitungen für jedes Kind zu jedem der MZP aufsummiert (Summenindex).

Die Ergebnisse zeigen, dass sowohl in den Aufgaben zum *kartesischen Produkt*, als auch in den Aufgaben zur *wiederholten Addition* überwiegend die *multiplikative* Grundvorstellung genutzt wird. Das heißt, bei den Aufgaben zum *kartesischen Produkt* spiegelt sich die zugrunde gelegte Grundvorstellung in den Bearbeitungen *aller* Kinder wider, bei den Aufgaben zur *wiederholten Addition* jedoch erstaunlicherweise nicht. Diese Ergebnisse stehen eher im Wiederspruch zu Forschungsergebnissen, die die *wiederholte Addition* neben anderen als eine intuitive Vorstellung der Multiplikation und damit ihr durchaus häufiges Auftreten identifiziert haben (Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Bönig, 1995a; Mulligan & Mitchelmore, 1997).

Betrachtet man die Ergebnisse *aller* Kinder und der Kinder *mit Förderbedarf*, kann festgestellt werden, dass in allen drei Settings die Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen mit Abstand am größten sind. Die Anteile an *additiven* Bearbeitungen und an Bearbeitungen, die *beide* Grundvorstellungen enthalten, sind in allen drei Settings zu allen drei MZP gering. In Setting A *Einzelförderung* ist ein starker Anstieg an *multiplikativen* Bearbeitungen von MZP 1 zu MZP 2 und zu MZP 3 feststellbar. In den übrigen Settings sind die Veränderungen an *multiplikativen* Bearbeitungen bei *allen* Kindern und bei den Kindern *mit Förderbedarf* eher gering.

Auf Grundlage der Ergebnisse der Varianzanalyse bei *allen* Kindern kann die Nullhypothese $H0_1$ verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_2$ nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind somit signifikant positive Effekte sowohl nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar. In Setting *B Klassenverband* dagegen lassen sich keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisen (Forschungsfrage II).

Den Ergebnissen der Varianzanalyse bei den Kindern *mit Förderbedarf* zufolge kann die Nullhypothese $H0_3$ verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), angenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese $H0_4$ nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* die Testaufgaben nach der Intervention häufiger *multiplikativ* bearbeiten als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* lassen sich signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisen, in Setting *B Klassenverband* jedoch nicht (Forschungsfrage III).

Um eine Basis für weiterführende mathematische Inhalte zu schaffen, soll bei den Kindern während der Behandlung der Multiplikation anknüpfend an die *additive* Grundvorstellung zunehmend die *multiplikative* Grundvorstellung entwickelt werden. Somit können hohe Anteile an *multiplikativen* Bearbeitungen als positiv und wünschenswert gewertet werden. Zusammenfassend lässt sich aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalysen sagen, dass in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte bezüglich *Grundvorstellungen* sowohl nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind, in Setting *B Klassenverband* dagegen weder bei *allen* Kindern noch bei den Kindern m*it Förderbedarf* (Forschungsfragen II und III).

9.1.3 Ergebnisrichtigkeit

Die Testergebnisse der *angemessenen* Bearbeitungen werden zudem *quantitativ* hinsichtlich der *Ergebnisrichtigkeit* untersucht. Es wird der Frage nachgegangen, welche Effekte differente Interventionssettings bezüglich des Multiplikativen Verständnisses auf die *Richtigkeit des Ergebnisses* bei *allen* beteiligten Kindern sowie bei den Kindern *mit Förderbedarf* haben.

In der deskriptiven Darstellung wurden die prozentualen Anteile der jeweiligen Ausprägungen sowie die Veränderungen im Verlauf der MZP betrachtet. In einem weiteren Schritt wurden Unterschiedshypothesen mithilfe statistischer Methoden überprüft. Hierfür werden die Bearbeitungen als Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis und als Bearbeitungen mit *nicht vollständig passendem* Ergebnis (bestehend aus *nicht passend* und *ohne*) kategorisiert und alle Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis für jedes Kind zu jedem der MZP aufsummiert (Summenindex).

Aus der Analyse der Ergebnisse können sowohl für die Bearbeitungen *aller* Kinder als auch der Kinder *mit Förderbedarf* zu allen drei MZP folgende Tendenzen festgehalten werden: Im Setting A *Einzelförderung* ist sowohl während der Intervention als auch im Langzeiteffekt ein starker Anstieg an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis feststellbar. Die Veränderungen der Anteile an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis bei *allen* Kindern in den übrigen Settings sind eher gering. Bei den Kindern *mit Förderbedarf* sind die Veränderungen der Anteile an Bearbeitungen mit *vollständig passendem* Ergebnis in Setting B *Klassenverband* sehr gering. In Setting C *Kontrollgruppe* liegt der Anstieg von MZP 1 zu MZP 2 bzw. zu MZP 3 in einem höheren Bereich. Die Anteile an Bearbeitungen mit *nicht passendem* und *ohne* Ergebnis sind sowohl bei *allen* Kindern als auch bei den Kindern *mit Förderbedarf* zu allen drei MZP gering (unter 11,0 %). Zudem finden Kinder, die die analysierten Aufgaben *angemessen* bearbeiten, in der Mehrheit auch *passende* Ergebnisse. Es ist also denkbar, dass die Förderung von Verständnis und damit die Förderung der Fähigkeiten, die Aufgaben *angemessen* zu bearbeiten, auch dazu führt, dass *passende* Ergebnisse zu den Aufgaben gefunden werden.

Aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalyse bei *allen* Kindern kann die Nullhypothese H01 verworfen und die Hypothese H1, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), *a*ngenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese H02 nicht verworfen und die Hypothese H2, dass *alle* Kinder in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als *alle* Kinder in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* lassen sich also signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisen. In Setting *B Klassenverband* sind dagegen keine signifikant positiven Effekte nach der Intervention nachweisbar (Forschungsfrage I).

Auf Basis der Ergebnisse der Varianzanalyse bei den Kindern *mit Förderbedarf* kann die Nullhypothese H03 verworfen und die Hypothese H3, dass die acht Kinder in Setting A *Einzelförderung* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), *a*ngenommen werden. Des Weiteren kann die Nullhypothese H04 nicht verworfen und die Hypothese H4, dass die Kinder *mit Förderbedarf* in Setting B *Klassenverband* zu den Testaufgaben nach der Intervention häufiger *vollständig passende* Ergebnisse finden als die Kinder *mit Förderbedarf* in der *Kontrollgruppe* (Setting C), nicht angenommen werden. In Setting A *Einzelförderung* sind signifikant positive Effekte sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar, in Setting *B Klassenverband* jedoch nicht (Forschungsfrage II).

Das Finden des *passenden* Ergebnisses zu einer *angemessenen* Bearbeitung ist selbstverständlich als positiv zu werten. Zusammenfassend lässt sich aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalysen sagen, dass sich in Setting A *Einzelförderung* signifikant positive Effekte bezüglich *Ergebnisrichtigkeit* sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisen lassen, in Setting B *Klassenverband* jedoch weder bei allen Kindern noch bei den Kinder *mit Förderbedarf* (Forschungsfrage I und II).

9.2 Zusammenfassende Ergebnisse der qualitativen Untersuchung

In der *qualitativen* Analyse wurde der Frage nachgegangen, wie das Förderangebot bezüglich des Erkennens und der Nutzung der Eigenschaft Distributivität von den acht Kindern angenommen wird. Dafür wurden die Elemente des Bearbeitungsprozesses *Einzeichnen der Teilprodukte, Bestimmen des Summen- bzw. Differenzproduktes* und *Ergebnisermittlung* bei jedem der acht teilnehmenden Förderkinder analysiert.

9.2.1 Einzeichnen der Teilprodukte bei Summen- bzw. Differenzprodukten

Die Kinder nutzen von sich aus häufiger die Sichtweise, den ersten Faktor als Zeilen und den zweiten Faktor des Produktes als Spalten einzuzeichnen, was darauf hindeutet, dass sie in ihrem Regelunterricht diese Sichtweise erlernt haben. Aufgrund der Kommutativität ist es natürlich ebenso möglich, den ersten Faktor als Spalten und den zweiten Faktor als Zeilen zu interpretieren. Die meisten der acht Kinder in der *Einzelförderung* können Produkte in Punktefelder mit spezifischer Anzahl an Zeilen und Spalten übertragen. Die Analyse der Auskünfte der teilnehmenden Lehrkräfte zeigt, dass derartige Veranschaulichungen von Produkten im Unterricht eingesetzt werden. Auch die quantitativen Ergebnisse zu einer Aufgabe, bei der eine Übersetzung von der Darstellungsform des Punktefeldes in die Symbolform erforderlich ist, deuten darauf hin. Von fast allen teilnehmenden Kindern in der *Einzelförderung* wurde die Verwendung unterschiedlicher Farben zur Unterscheidung der Teilprodukte in der Zeichnung angenommen.

Es zeigt sich, dass Kinder auch *mit Förderbedarf* lernen können, in welcher Weise Felder für Teilprodukte von Summen- bzw. Differenzprodukten in Punktefelder eingezeichnet werden können. Allerdings erfolgt dieser Übersetzungsprozess von der Symbolform in die didaktische Darstellung i. d. R. nicht von selbst, sondern muss genau thematisiert werden. Bei Summenprodukten wird von den Kindern häufig eigenständig eine einheitliche Sichtweise gewählt, welcher Faktor als Zeilen und welcher als Spalten gesehen wird. Bei Differenzprodukten scheint dies zumindest für die teilnehmenden Kinder oft eine besondere Hürde darzustellen. Für die Verdeutlichung der Distributivität ist dies entscheidend.

9.2.2 Bestimmen der Faktoren des Summenproduktes

Für viele der acht Kinder ist es offenbar hilfreich, zum Bestimmen der Faktoren von Summen- und Differenzprodukten das Punktefeld zu nutzen. Nicht alle der acht Kinder nutzen dies aber selbstständig. Häufig zählen die Kinder die Punkte einzeln ab, um die Faktoren zu ermitteln. Es scheint nützlich zu sein, sowohl im Punktefeld als auch in der symbolischen Form der Darstellung den zu summierenden bzw. zu subtrahierenden und den gleichbleibenden Faktor aufzuzeigen.

9.2.3 Ermittlung des Ergebnisses

Die meisten der acht Kinder nutzen ohne Hilfestellung eher selten die Ergebnisse der Teilprodukte, um das Ergebnis zu ermitteln.

9.3 Grenzen der Studie und Forschungsperspektiven

Die quantitative Auswertung bezieht sich bei den Bearbeitungen der Kinder *mit Förderbedarf* auf sehr kleine Stichproben (n = 8). Zudem werden Vergleiche zwischen den Kindern in Setting A *Einzelförderung* (n = 8) und *allen* Kindern in Setting B (n = 124) und Setting C (n = 108) gezogen. Methodisch wäre es wünschenswert, in einer Folgeuntersuchung auch bei den Kindern *mit Förderbedarf* größere Stichproben einzusetzen.

Des Weiteren ist der Einblick in den Regelunterricht aller teilnehmenden Kinder begrenzt. Ein gewisser Eindruck ist durch die Lehrerdokumentationen gegeben. Um das unterrichtliche Vorgehen aller teilnehmenden Lehrkräfte noch genauer in den Blick zu nehmen, könnten in entsprechenden Folgeuntersuchungen Videodokumentationen auch vom Regelunterricht in Setting B *Klassenverband* und Setting C *Kontrollgruppe* erstellt und analysiert werden.

In der vorliegenden Arbeit wurden Unterschiede in den Bearbeitungen der Kinder in den drei Settings betrachtet. Weiterführende Fragestellungen könnten in diesem Zusammenhang sein, inwieweit sich die Ergebnisse der einzelnen Klassen innerhalb eines Settings unterscheiden und inwieweit ein noch *bewussterer* Einsatz von Lernumgebungen Einfluss auf die Ergebnisse in den Bearbeitungen hat.

Bei der Auswertungskategorie *Ergebnis* interessierte die Richtigkeit der angebotenen Gleichungen in den Bearbeitungen, d. h. die mathematische Richtigkeit. Die Intension war also, herauszufinden, ob die jeweils angebotene Gleichung richtig oder falsch ist, egal, ob eine zur Aufgabenstellung passende Gleichung notiert wurde oder nicht. Denkbar wäre es darüber hinaus zu analysieren, ob das gefundene Ergebnis passend zur eigentlich intendierten Aufgabe ist oder nicht. Würde man dann in einem weiteren Schritt die *teilweise* sowie *nicht angemessenen* Bearbeitungen analysieren, könnte man herausfinden, ob Kinder, die eine unpassende Bearbeitung gefunden haben, trotzdem das *vollständig passende* Ergebnis zur eigentlich intendierten Aufgabe finden.

Des Weiteren wurde eine bestimmte Vorgehensweise der Förderung des Erkennens und der Nutzung von Distributivität in der *Einzelförderung* qualitativ analysiert. Die Distributivität wurde durch Einzeichnen von Feldern in Hunderterpunktefelder anschaulich gemacht. Daran könnte in weiteren Untersuchungen angeknüpft werden, um entweder diese Vorgehensweise weiterzuentwickeln oder auch andere Möglichkeiten zu evaluieren sowie diese miteinander zu vergleichen.

Zusätzlich wurde ein Ausschnitt der *Einzelförderung* zum Erkennen und zur Nutzung von Distributivität für die Analyse genauer in den Blick genommen. Das umfangreiche Datenmaterial, welches im Rahmen des Projektes entstanden ist, bietet natürlich die Möglichkeit zu weiteren qualitativen Analysen wie z. B. zum Einsatz von didaktischem Material, zum Material mit Sachkontext oder zu verschiedenen Richtungen der Übersetzung.

9.4 Gesamtfazit und didaktische Implikationen

Zusammenfassend lässt sich aufgrund der Ergebnisse der Varianzanalysen sagen, dass in Setting A Einzelförderung signifikant positive Effekte bezüglich Angemessenheit, Grundvorstellungen und Ergebnisrichtigkeit sowohl direkt nach der Intervention als auch drei Monate später nachweisbar sind. In Setting B Klassenverband lassen sich immerhin bei den Kindern mit Förderbedarf bezüglich Angemessenheit direkt nach der Intervention signifikant positive Effekte nachweisen. Die übrigen Ergebnisse zeigen keine weiteren signifikanten Effekte in Setting B Klassenverband.

Die Ergebnisse der quantitativen sowie qualitativen Studie deuten insgesamt darauf hin, dass auch mit Kindern *mit Förderbedarf* die Entwicklung von Verständnis für Distributivität gelingen kann. Damit ist der Einsatz der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Lernumgebungen bezogen auf den Inhaltsbereich Multiplikation in jedem Fall eine mögliche Umsetzung in der *Einzelförderung* im Mathematikunterricht der Grundschule. Der Einsatz der konzipierten Lernumgebungen im *Klassenverband* bewirkt jedoch nur bezüglich *Angemessenheit* bei den Kindern *mit Förderbedarf* signifikante Effekte. Eine gezielte Weiterentwicklung der Konzeption der Lernumgebungen sowie noch genauere Hinweise in den Handreichungen für Lehrkräfte könnten möglicherweise größere Lernzuwächse auch beim Einsatz im *Klassenverband* bei *allen* Kindern sowie den Kindern *mit Förderbedarf* bewirken. Für die Umsetzung inklusiven Unterrichts kann man vermuten, dass nur durch den *bewussten* Einsatz geeignet entwickelter und evaluierter Konzepte Lernerfolge bei Kindern, insbesondere bei denjenigen *mit Förderbedarf,* erzielt werden können (Hauptforschungsfrage I und II).

Die Aufgabenstellungen sind im Bearbeitungsverhalten offenbar weniger wirksam bezüglich evozierter Grundvorstellungen, als bisher empirisch angenommen wurde. Die Ausbildung der zwei wesentlichen Grundvorstellungen (additiv und multiplikativ) muss deswegen unterrichtlich bewusst thematisiert werden und gelingt nicht durch Aufgabenstellungen allein.

Additive Bearbeitungen von Multiplikationsaufgaben treten bei den teilnehmenden Kindern weniger häufig auf, als man ursprünglich hätte vermuten können. Die Aufgabenstellungen rufen in den Bearbeitungen offenbar weniger häufig die entsprechende Grundvorstellung hervor, als bisher empirisch angenommen wurde. Darstellungsformen, die eher die *wiederholte Addition* verdeutlichen, sind wegen der Nähe zu in Studien (Bönig, 1995a, 1995b; Fischbein, Deri, Nello & Marino, 1985; Mulligan & Mitchelmore, 1997) erkannten intuitiven Vorstellungen von Multiplikation von Bedeutung. Jedoch sollten sie möglicherweise im Verlauf der Behandlung der Multiplikation zunehmend in den Hintergrund treten. Die Ausbildung der zwei wesentlichen Grundvorstellungen (*additiv* und *multiplikativ*) muss zudem unterrichtlich bewusst thematisiert werden, da sie offenbar nicht durch Aufgabenstellungen allein erreicht werden kann. Die Darstellungsform, die die Faktoren des Produktes in Zeilen und Spalten verdeutlicht, wurde offensichtlich zumindest von den teilnehmenden Lehrkräften im Projekt vermehrt eingesetzt und ist bei den Kindern gut verständlich. Wegen ihrer Möglichkeiten des Einsatzes für weiterführende Themen, wie das Verständnis der Eigenschaften der Multiplikation oder der Multiplikation von Brüchen, sollte diese Darstellung der Multiplikation (z. B. im Punktefeld oder in Kästchenpapier) im Unterricht zentral sein (vgl. z. B. auch Schulz, 2017; Selter, 2002; Steinweg, 2013; Wittmann & Müller, 2017).

Kinder, die die Aufgaben angemessen bearbeiten, finden mehrheitlich auch vollständig passende Ergebnisse.

Bezüglich der Ergebnisrichtigkeit zeigen die Ergebnisse, dass Kinder, die die Aufgaben angemessen bearbeiten, mehrheitlich auch vollständig passende Ergebnisse finden. Dies deutet darauf hin, auf angemessene Bearbeitungen Wert zu legen, da damit möglicherweise auch die Richtigkeit des Ergebnisses positiv beeinflusst werden kann.

Die drei Elemente im Übersetzungsprozess von Summen- bzw. Differenzprodukten in die didaktische Darstellungsform des Punktefeldes beinhalten verschiedene Herausforderungen. Diese sollten bewusst und im Einzelnen thematisiert werden, was auch mit Kindern mit Förderbedarf gelingen kann.

Die Ergebnisse der qualitativen Analyse deuten darauf hin, dass es beim *Einzeichnen von Teilprodukten bei Summen- bzw. Differenzprodukten* sinnvoll sein kann, bewusst beide Möglichkeiten im Unterricht zu thematisieren, welcher der Faktoren als Zeilen und welcher als Spalten interpretiert wird. Die Verwendung unterschiedlicher Farben für das Einzeichnen der Teilprodukte ist scheinbar ein geeignetes Mittel zur Verdeutlichung. Auch Kinder mit *Förderbedarf* können lernen, in welcher Weise Felder für Teilprodukte von Summen- bzw. Differenzprodukten in Punktefelder eingezeichnet werden können. Allerdings muss dieser Übersetzungsprozess von der Symbolform in die didaktische Darstellung genau thematisiert werden. Bei Summenprodukten wählen Kindern häufig eigenständig eine einheitliche Sichtweise, welcher Faktor als Zeilen und welcher als Spalten gesehen wird. Bei Differenzprodukten scheint dies oft eine besondere Hürde darzustellen. Somit ist es empfehlenswert, dies in jedem Fall ganz explizit im Unterricht zu thematisieren. Beim *Bestimmen der Faktoren des Summen- bzw. Differenzproduktes* ist es für viele der Kinder offenbar hilfreich, das Punktefeld zu nutzen. Nicht alle Kinder nutzen dies aber zwingend von allein. *Somit* wäre es sinnvoll, im Unterricht zu thematisieren, wo der erste und wo der zweite Faktor im Punktefeld ‚ablesbar' ist. Zählende Strategien zur Ermittlung von Faktoren treten trotz Felddarstellung der (Teil-)Produkte auf. Deswegen ist es empfehlenswert, die Strukturierung im Punktefeld bei seiner Einführung in jedem Fall explizit bewusst zu machen. Es scheint nützlich zu sein, sowohl im Punktefeld als auch in der symbolischen Form der Darstellung den zu summierenden bzw. zu subtrahierenden und den gleichbleibenden Faktor aufzuzeigen. Um die Subtraktion deutlich zu machen, ist es bei Differenzprodukten möglicherweise sinnvoll, das Feld für das Subtrahendprodukt z. B. abzudecken. So kann anschaulich gemacht werden, welches Produkt übrig bleibt. Da die meisten der teilnehmenden Kinder ohne Hilfestellung eher selten die Ergebnisse der Teilprodukte zur *Ermittlung des Ergebnisses* nutzen, sollte diese Möglichkeit im Unterricht bewusst thematisiert werden.

Die Eigenschaft der Kommutativität wird im Unterricht zum Einmaleins in der Grundschule vermutlich bereits thematisiert, die Eigenschaft der Distributivität offenbar weniger.

Die Testergebnisse sowie Selbstauskünfte der Lehrkräfte deuten darauf hin, dass die Eigenschaft der Kommutativität häufig im Unterricht thematisiert wird. Es kann vermutet werden, dass die Eigenschaft der Distributivität von den teilnehmenden Lehrkräften jedoch weniger häufig explizit im Unterricht behandelt wird. Somit ist es empfehlenswert, dem bayerischen Lehrplan sowie didaktischen Empfehlungen entsprechend die Nutzung der Distributivität und das verständnisvolle Herstellen von Beziehungen zwischen Produkten als Ableitung von Kernaufgaben bewusst unterrichtlich zu verankern (vgl. z. B. auch Scherer, 2007; Schipper, 2009; Schulz, 2017).

Die Entwicklung des Verständnisses für Distributivität stellt eine Herausforderung dar. Dennoch kann dies auch mit Kindern mit Förderbedarf gelingen.

Sowohl die quantitativen als auch die qualitativen Ergebnisse in dieser Arbeit deuten darauf hin, dass die Entwicklung des Verständnisses für Distributivität durchaus anspruchsvoll ist. Das Erkennen und die Nutzung dieser Eigenschaft in Form von Transformation von Symbolform in didaktisches Material ist ein komplexer Prozess mit vielen verschiedenen Herausforderungen. Ähnliche Ergebnisse zu Übersetzungsprozessen von Multiplikationsaufgaben sind in weiteren Untersuchungen zu finden (vgl. z. B. Bönig, 1995a; Kuhnke, 2013). Dieser komplexe Übersetzungsprozess zwischen verschiedenen Darstellungsformen sollte bei der Behandlung im Unterricht nicht unterschätzt werden. Dennoch zeigt die *Einzelförderung*, dass die Entwicklung von Verständnis für Distributivität durchaus auch für Kinder *mit Förderbedarf* möglich ist. Somit sollte auch und insbesondere diesen Kindern Zugang zu diesem Themenbereich ermöglicht werden.

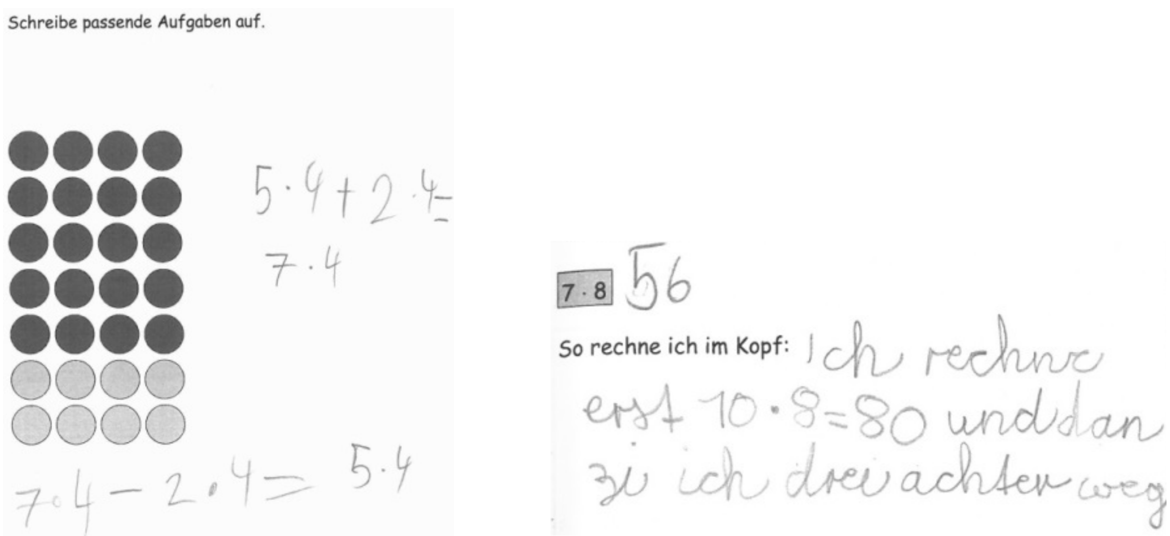


Abbildung 9.1: Bearbeitungen der Kinder von Testaufgaben zur Distributivität (links: Andreas, Post-Test, Einzelförderung; rechts: Felicia, Pre-Test, Klassenverband)

Literatur

Amelang, M. & Schmidt-Atzert, L. (2006). *Psychologische Diagnostik und Intervention* (4., vollst. überarb. und erw. Aufl.). Heidelberg: Springer Medizin.

Anthony, G. & Knight, G. (1999). Basic Facts: the Role Of Memory And Understanding. *The New Zealand Mathematics Magazine, 36* (3), 28–40.

Arbeitsgruppe Internationale Vergleichsstudie. (2003). *Vertiefender Vergleich der Schulsysteme ausgewählter PISA-Teilnehmerstaaten. Kanada. England. Finnland. Frankreich. Niederlande. Schweden* (3. Aufl.). Berlin.

Bächthold, A. (1999). Die Bedeutung lokalspezifischer Ausprägungen des Schulsystems für das Gelingen oder Mißlingen integrativer Prozesse in Integrationsklassen. In H. Eberwein (Hrsg.), *Integrationspädagogik. Kinder mit und ohne Behinderung lernen gemeinsam. Ein Handbuch* (5. ergänzte u. neu ausgestattete Aufl., S. 307–314). Weinheim: Beltz Verlag.

Balins, M., Dürr, R., Franzen-Stephan, N., Gerstner, P., Plötzer, U., Strothmann, A. ... Verboom, L. (2014a). *Fredo 2. Mathematik. Ausgabe Bayern.* München: Oldenbourg Schulbuchverlag.

Balins, M., Dürr, R., Franzen-Stephan, N., Gerstner, P., Plötzer, U., Strothmann, A. ... Verboom, L. (2014b). *Fredo 2. Mathematik. Arbeitsheft. Ausgabe Bayern.* Mit CD-ROM. München: Oldenbourg Schulbuchverlag.

Bauersfeld, H. (1972). Einige Bemerkungen zum „Frankfurter Projekt“ und zum „alef“-Programm. In E. Schwartz (Hrsg.), *Materialien zum Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 237–246). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Bayerisches Staatsministerium für Arbeit und Sozialordnung, Familie und Frauen (2007). *Vollzug des SGB VIII; Anpassung der Hinweise zu § 35 a SGB VIII.* AMS VI 5/7225/3/07.

Beck, C. & Maier, H. (1994). Zu Methoden der Textinterpretation in der empirischen mathedidaktischen Forschung. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung.* Köln: Aulis Verlag Deubner.

Becker, J. P. & Selter, C. (1996). Chapter 14: Elementary School Practices. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education.* Part 1 (S. 511–564). Dordrecht: Springer Science and Business Media.

Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In H. Postel, A. Kirsch & W. Blum (Hrsg.), *Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48–60). Hannover: Schroedel.

Blum, W. & Kirsch, A. (1979). Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht, 25* (3), 6–24.

Bönig, D. (1995a). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschülern*. Münster: Waxmann.

Bönig, D. (1995b). Empirische Untersuchungen zum Verständnis multiplikativer Operationen bei Grundschülern. In H. G. Steiner & H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze* (S. 17–23). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Bönig, D. & Ruwisch, S. (2004). Daten gewinnen, darstellen, verarbeiten und interpretieren. *Grundschulzeitschrift, 172,* 6–14.

Bönsch, M. (2009). *Erfolgreicheres Lernen durch Differenzierung im Unterricht*. Braunschweig: Westermann Schroedel Diesterweg Schöningh Winklers.

Bos, W. & Pietsch, M. (Hrsg.). (2006). *KESS 4 – Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern am Ende der Jahrgangsstufe 4 in Hamburger Grundschulen*. Münster: Waxmann.

Bortz, J. & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler. Mit 70 Abbildungen und 163 Tabellen* (7., vollst. überarb. und erw. Aufl.). Berlin: Springer.

Brandt, B. (2004). *Kinder als Lernende. Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer. Eine mikrosoziologische Studie zur Partizipation im Klassenzimmer*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Bremer, U. & Dahlke, E. (1980). Schwierigkeiten im Prozeß des Lösens von Sachaufgaben. In H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Sachrechnen. Didaktische Materialien für die Hauptschu*le. Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. S. (1970). *Der Prozeß der Erziehung*. Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.

Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichttheorie*. Berlin: Berlin Verlag; Pädagogischer Verlag Schwann.

Bühner, M. & Ziegler, M. (2017). *Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (2., aktualis. und erweit. Aufl.). Hallbergmoos: Pearson Deutschland.

Buholzer, A. & Kummer Wyss, A. (Hrsg.). (2012). *Alle gleich – alle unterschiedlich! Zum Umgang mit Heterogenität in Schule und Unterricht* (2. Aufl.). Seelze-Velber: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

Bürli, A. (1997). *Sonderpädagogik. Internationale Tendenzen in der Sonderpädagogik – Vergleichende Betrachtung mit Schwerpunkt auf den europäischen Raum*. Hagen: Fernuniversität.

BY – Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst (2010). *Lehrplan 2000 für die bayerische Grundschule* (10. Aufl.). München: J. Maiss.

BY – Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst (2014). *LehrplanPLUS Grundschule. Lehrplan für die Bayerische Grundschule*. München.

Comenius, J. A. (1982). *Große Didaktik. Die vollständige Kunst, alle Menschen alles zu lehren* (5. Aufl.) (Flitner, A., Hrsg.). Stuttgart: Klett-Cotta.

CRPD (2015). *Abschließende Bemerkungen über den ersten Staatenbericht* (von der Monitoring-Stelle zur UN-Behindertenrechtskonvention beauftragte und geprüfte Übersetzung (keine amtliche Übersetzung)). Verfügbar unter https://www.institut-fuer-menschenrechte.de/fileadmin/user_upload/PDF-Dateien/UN-Dokumente/CRPD_Abschliessende_Bemerkungen_ueber_den_ersten_Staatenbericht_

Deutschlands_ENTWURF.pdf (Zuletzt geprüft am 25.03.2019).

Deutsche Gesellschaft für Kinder -und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V. (2018). *S3-Leitlinie: Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung*. Langfassung, AWMF online. Verfügbar unter https://www.awmf.org/uploads/tx_szleitlinien/028-046l_S3_Rechenst%C3%B6rung-2018-03_1.pdf (Zuletzt geprüft am 25.03.2019).

Deutsches Institut für Medizinische Dokumentation und Information – DIMDI (2018). *ICD-10-GM. Internationale statistische Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme. Systematisches Verzeichnis*. Verfügbar unter https://www.dimdi.de/dynamic/de/klassi/downloadcenter/icd-10-gm/version2018/systematik/ (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Deutsche UNESCO-Kommission e.V. (Hrsg.). (2010). *Inklusion: Leitlinien für die Bildungspolitik* (2. Aufl.). Verfügbar unter https://www.unesco.de/sites/default/files/2018-05/2014_Leitlinien_inklusive_Bildung_0.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften* (5. vollst. überarb., aktualis. und erweit. Aufl.). Berlin: Springer.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (S. 109–122). Hallsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Dumke, D. & Schäfer, G. (1993). *Entwicklung behinderter und nichtbehinderter Schüler in Integrationsklassen. Einstellungen, soziale Beziehungen, Persönlichkeitsmerkmale und Schulleistungen.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analyses of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103–131.

Federolf, C. (2011). Empirische Untersuchungen zur Effizienz der Schule für Lernbehinderte – ein Überblick. In I. Schnell, A. Sander & C. Federolf (Hrsg.), *Zur Effizienz von Schulen für Lernbehinderte. Forschungsergebnisse aus vier Jahrzehnten* (S. 241–291). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Feger, B. & Prado, T. M. (1998). *Hochbegabung. Die normalste Sache der Welt.* Darmstadt: Primus Verlag.

Fettweis, E. & Schlechtweg, H. (1972). *Strukturen der Mathematik im Rechenunterricht. Eine moderne Didaktik und Methodik* (5. vollständig neubearb. Aufl.). Paderborn: Ferdinand Schöningh.

Fetzer, M. (2007). *Interaktion am Werk. Eine Interaktionstheorie fachlichen Lernens, entwickelt am Beispiel von Schreibanlässen im Mathematikunterricht der Grundschule.* Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Feuser, G. (1982). Integration = die gemeinsame Tätigkeit (Spielen/Lernen/Arbeit) am gemeinsamen Gegenstand/Produkt in Kooperation von behinderten und nicht behinderten Menschen. *Behindertenpädagogik, 21* (2), 86–105.

Feuser, G. (1998). Gemeinsames Lernen am gemeinsamen Gegenstand. Didaktisches Fundamentum einer Allgemeinen (integrativen) Pädagogik. In A. Hilfeschmidt & I. Schnell (Hrsg.), *Integrationspädagogik* (S. 19–35). Weinheim: Juventa.

Feuser, G. (2012). *Thesen zu: Gemeinsame Erziehung, Bildung und Unterrichtung behinderter und nichtbehinderter Kinder und Jugendlicher in Kindergarten und Schule*. Verfügbar unter http://www.georg-feuser.com/conpresso/_data/Feuser_-_Thesen_Integration_04_2012.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Feyerer, E. (1998). *Behindern Behinderte? Integrativer Unterricht auf der Sekundarstufe I*. Innsbruck: Studien-Verlag.

Finesilver, C. (2017). Emerging and developing multiplicative structure in low-attaining students' representational strategies: Four key representation types. In T. Dolley & G. Gueudet (Hrsg.), *Proceedings of the tenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (CERME10, February 1-5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Fischbein, E., Deri, M., Sainati Nello, M. & Marino, M. S. (1985). The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (1), 3–17.

Fischer, R. (1990). Längerfristige Perspektiven des Mathematikunterrichts. *mathematica didactica, 13* (2), 38–62.

Fisseni, H.-J. (2004). *Lehrbuch der psychologischen Diagnostik. Mit Hinweisen zur Intervention* (3., überarb. u. erw. Aufl.). Göttingen: Hogrefe.

Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Freudenthal, H. (1974). Die Stufen im Lernprozeß und die heterogene Lerngruppe im Hinblick auf die Middenschool. *Neue Sammlung. Göttinger Zeitschrift für Erziehung und Gesellschaft, 14*, 161–172.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gaidoschik, M. (2010a). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Gaidoschik, M. (2010b). Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 08.03.2010 bis 12.03.2010 in München* (S. 321–324). Münster: WTM.

Gaidoschik, M. (2012). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern* (7. Aufl.). Buxtehude: Persen.

Gaidoschik, M. (2014). *Einmaleins verstehen, vernetzen, merken. Strategien gegen Lernschwierigkeiten.* Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett; Friedrich Verlag.

Gaidoschik, M., Deweis, K. M. & Guggenbichler, S. (2017). Do lower-achieving children profit from derived facts-based teaching of basic multiplication? Findings from a design research study. In T. Dolley & G. Gueudet (Hrsg.), *Proceedings of the tenth congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* (CERME10, February 1-5, 2017) (S. 346–353). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen* (überarb. u. erweit. Aufl.), Pädagogische Hochschule Freiburg. Verfügbar unter https://www.bildungsserver.de/ onlineressource.html?onlineressourcen_id=26387 (Zuletzt geprüft am 09.07. 2018).

Ginsburg, H. (1981). The clinical Interview in Psychological research on Mathematica Thinking: Aims, Rationales, Techniques. *For the Learning of Mathematics, 1* (3), 4–11.

Ginsburg, H. P. (1997). Mathematics Learning Disabilities: A View From Developmental Psychology. *Journal of Learning Disabilities, 30* (1), 20–33.

Ginsburg, H. & Opper, S. (1991). *Piagets Theorie der geistigen Entwicklung* (6. Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A Joint Perspective on the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. In L. Steffe & P. Nesher (Hrsg.), *Theories of Mathematical Learning* (S. 397–430). New York: Routledge.

Goldin, G. & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In Cuoco, Albert, A & F. R. Curcio (Hrsg.), *The Roles of Representation in school Mathematics* (S. 1–23). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Graeber, O. A. & Campbell, P. F. (1993). Misconceptions about Multiplication and Division. *The Arithmetic Teacher, 40* (7), 408–411. Verfügbar unter https://www.jstor.org/stable/pdf/41195817.pdf?refreqid=excelsior%3Aa9f4745ae2cda1caef3a0c7ba446a505.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Griesel, H. (1971). *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Mengen, Zahlen, Relationen, Topologie*. Hannover: Schroedel.

Haeberlin, U., Bless, G., Moser, U. & Klaghofer, R. (1991). *Die Integration von Lernbehinderten. Versuche, Theorien, Forschungen, Enttäuschungen, Hoffnungen. Ergänzt mit einem neuen Kapitel zum Schicksal von begabten Kindern in Integrationsklassen und mit einem Bericht über eine Vergleichsuntersuchung in Deutschland* (2. erw. Aufl.). Bern: Haupt.

Häsel, U. (2001). *Sachaufgaben im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Analyse und empirische Studien*. Hildesheim: Franzbecker.

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen. Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von Visible Learning*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Heller, K. A. & Hany, E. A. (1996). Psychologische Modelle der Hochbegabtenförderung. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Psychologie des Lernens und der Instruktion* (S. 477–513). Göttingen: Hogrefe.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1995). Leistungsmessung im aktiv-entdeckenden Mathematikunterricht. In H. Brügelmannn, H. Balhorn & I. Füssenich (Hrsg.), *Am Rande der Schrift. Zwischen Sprachenvielfalt und Analphabetismus* (S. 87–107). Lengwil am Bodensee: Libelle.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press.

Heuvel-Panhuizen, M. van den & Gravemaijer, K.P.E. (1991). Tests are not all bad. An attempt to change the appearance of written tests in mathematics instruction at primary school level. In L. Streefland (Hrsg.), *Realistic Mathematics Education in Primary School. On the occasion of the opening of the Freudenthal Institute* (S. 139–155). Utrecht: Freudenthal Institute; Research group on Mathematics Education.

Hetzner, R. (1988). Schulleistungen der Schüler in Integrationsklassen. In Projektgruppe Integrationsversuch (Hrsg.), *Das Fläming-Modell. Gemeinsamer Unterricht für behinderte und nicht behinderte Kinder an der Grundschule*. Weinheim: Beltz.

Hiebert, J. (1990). The Role of Routine Procedures in the Development of Mathematical Competence. In T. J. Cooney & C. R. Hirsch (Hrsg.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s. 1990 Yearbook* (S. 31–40). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A Project of teachers of Mathematics* (S. 65–97). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hinz, A. (2002). Von der Integration zur Inklusion – terminologisches Spiel oder konzeptionelle Weiterentwicklung? *Zeitschrift für Heilpädagogik, 53* (9), 354–361.

Hinz, A. (2004). Vom sonderpädagogischen Verständnis der Integration zum integrationspädagogischen Verständnis der Inklusion?! In I. Schnell & A. Sander (Hrsg.), *Inklusive Pädagogik*. Bad Heilbrunn/Obb.: Julius Klinkhardt.

Hinz, A. (2008). Gemeinsamer Unterricht. In H. Eberwein & J. Mand (Hrsg.), *Integration konkret. Begründung, didaktische Konzepte, inklusive Praxis* (S. 197–211). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Hofe, R. vom (1992). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. *Journal für Mathematik-Didaktik, 13* (4), 345–365.

Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hofe, R. vom & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37* (Suppl. 1), 225–254.

Holling, H. & Kanning, U. P. (1999). *Hochbegabung. Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten*. Göttingen: Hogrefe.

Huinker, D. M. (1993). Interviews: A Window to Students' Conceptual Knowledge of the Operations. In N. L. Webb & A. F. Coxford (Hrsg.), *Assessment in the mathematics classroom. 1993 Yearbook*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics.

Hussy, W., Schreier, M. & Echterhoff, G. (2013). *Forschungsmethoden in Psychologie und Sozialwissenschaften für Bachelor* (2., überarb. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer.

Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The Notion of Funktion as an Example. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (S. 67–71). Hallsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Jäger, R. S. & Petermann, F. (1999). *Psychologische Diagnostik. Ein Lehrbuch* (4. Aufl.). Weinheim: Beltz – Psychologie Verlags Union.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Kaufmann, S. (2003). *Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2011). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine* (3. Aufl.). Seelze-Velber: Kallmeyer in Verbindung mit Klett; Friedrich.

Kelle, U. & Kluge, S. (2010). *Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung* (2., überarb. Aufl.). Wiesbaden: VS Verlag.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Hrsg.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (S. 11–49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kirsch, A. (1997). *Mathematik wirklich verstehen. Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen* (3. Aufl.). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Klemm, K. (2015). *Inklusion in Deutschland. Daten und Fakten*. Verfügbar unter https://www.bertelsmann-stiftung.de/fileadmin/files/BSt/Publikationen/GrauePublikationen/Studie_IB_Klemm-Studie_Inklusion_2015.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

KMK. (2005). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004*. Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

KMK. (2011). *Inklusive Bildung von Kindern und Jugendlichen mit Behinderungen in Schulen (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 20.10.2011)*. Verfügbar unter http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2011/2011_10_20-Inklusive-Bildung.pdf (Zuletzt geprüft am 12.03.2019).

KMK. (2016). *Sonderpädagogische Förderung in Schulen 2005 bis 2014.* Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/Statistik/Dokumentationen/Dok_210_SoPae_2014.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Köhler, K. (2015). Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Entwicklung mathematischer Fähigkeiten. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2015* (S. 71–74). Bamberg: University of Bamberg Press.

Köhler, K. & Gasteiger, H. (2016). Strategieverwendung bei Aufgaben zum kleinen Einmaleins – Ergebnisse einer Interviewstudie. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016. Vorträge auf der 50. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 07.03.2016 bis 11.03.2016 in Heidelberg* (S. 545–548). Münster: WTM.

Krauthausen, G. (1994). *Arithmetische Fähigkeiten von Schulanfängern. Eine Computersimulation als Forschungsinstrument und als Baustein eines Softwarekonzeptes für die Grundschule.* Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Krauthausen, G. (1998). *Lernen – lehren – Lehren lernen. Zur mathematikdidaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe.* Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2008). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (Nachdr. 3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2010). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule,* IPN. Verfügbar unter http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Krummheuer, G. & Naujok, N. (1999). *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung.* Opladen: Leske + Budrich.

Küchemann, D. & Hodgen, J. (2018). Using the array model to develop multiplicative reasoning. *Mathematics teaching, 261,* 11–14.

Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel. Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kuntze, S. (2013). Vielfaltige Darstellungen nutzen im Mathematikunterricht. In J. Sprenger, A. Wagner & M. Zimmermann (Hrsg.), *Mathematik lernen, darstellen, deuten, verstehen. Didaktische Sichtweisen vom Kindergarten bis zur Hochschule* (S. 17–33). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Lambert, K. (2015). *Rechenschwäche. Grundlagen, Diagnostik und Förderung*. Göttingen: Hogrefe.

Lamprecht, X. (2014). *Unterrichtsmaterialien zur Förderung des Einmaleins* (unveröffentlicht). Bamberg.

Lamprecht, X. (2015). Das Projekt ‚Förderung und Diagnose in differenten Rahmenbedingungen' (FeDeR). In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel* (S. 548–551). Münster: WTM.

Lamprecht, X. (2016). Multiplikatives Verständnis fördern – Einblicke in das Projekt FeDeR. In Institut für Mathematik und Informatik Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (S. 617–620). Münster: WTM.

Lamprecht, X. & Steinweg, A. S. (2017). Multiplikatives Verständnis fördern. Vorstellungen nutzen und aufbauen helfen. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen* (S. 185–194). Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Langer, A. (2013). Transkribieren – Grundlagen und Regeln. In B. Friebertshäuser, A. Langer & A. Prengel (Hrsg.), *Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft*. (4. Aufl., S. 515–526). Weinheim: Juventa-Verlag.

Lehmann, R. H. (Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung, Hrsg.). (1997). *Aspekte der Lernausgangslage und der Lernentwicklung von Schülerinnen und Schülern, die im Schuljahr 1996/97 eine fünfte Klasse an Hamburger Schulen besuchten. Bericht über die Erhebung im September 1996 (LAU 5)*. Verfügbar unter http://bildungsserver.hamburg.de/contentblob/2815702/3b66049d4257501a0d44dce9b7ca449c/data/pdf-schulleistungstest-lau-5.pdf;jsessionid=CC0CE0DEF906939C415AE9417DBC2938.liveWorker2 (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (S. 33–40). Hallsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Lorenz, J. H. (Hrsg.). (1991). *Störungen beim Mathematiklernen. Schüler, Stoff und Unterricht*. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Lorenz, J.-H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J. H. (Hrsg.). (1993). *Mathematik und Anschauung*. Köln: Aulis Verlag Deubner.

Lorenz, J. H. (1997). *Kinder entdecken die Mathematik*. Braunschweig: Westermann Schulbuchverlag.

Lorenz, J. H. (2005a). *Lernschwache Rechner fördern. Ursachen der Rechenschwäche. Frühhinweise auf Rechenschwäche. Diagnostisches Vorgehen* (2. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Lorenz, J. H. (2005b). *Test zur Früherfassung von Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht. Hamburger Rechentest für die Klassen 1–4*. Hamburg: Behörde für Bildung und Sport (Form A und B sowie Anleitungsheft).

Lorenz, J. H. (2011). Die Macht der Materialien (?). Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentation. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2011*. Bamberg: University of Bamberg Press.

Lorenz, J. H. (2013). Grundlagen der Förderung und Therapie. In M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (2. Aufl., S. 181–193). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Lorenz, J. H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Maier, H. (1990). *Didaktik des Zahlbegriffs. Ein Arbeitsbuch zur Planung des mathematischen Erstunterrichts*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (12., überarb. Aufl.). Weinheim: Beltz.

Mayring, P. & Brunner, E. (2013). Qualitative Inhaltsanalyse. In B. Friebertshäuser, A. Langer & A. Prengel (Hrsg.), *Handbuch qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft* (4. Aufl.). Weinheim: Juventa-Verlag (Juventa-Handbuch).

Merschmeyer-Brüwer, C. (2014). Vorstellungen für Zahlen und Operationen entwickeln. *Mathematik differenziert, 5* (4), 4–5.

Mittler, P. (2000). *Working Towards Inclusive Education. Social contexts*. London: David Fulton Publishers.

Moser Opitz, E. (2001). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen*. Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2004). Dyskalkulie: Krankheit, Erfindung, Mythos, Etikett ...? Auseinandersetzung mit einem geläufigen, aber ungeklärten Begriff. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete, 73* (2), 179–190.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2009). Erwerb grundlegender Konzepte der Grundschulmathematik als Voraussetzung für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 29–43). Weinheim: Beltz.

Müller, G. & Wittmann, E. C. (1984). *Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Ziele, Inhalte, Prinzipien, Beispiele* (3., neubearb. Aufl.). Braunschweig: Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft.

Müller, G. N., Steinbring, H. & Wittmann, E. C. (2004). *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer.

Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M. C. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (3), 309–330.

Oehl, W. (1962). *Der Rechenunterricht in der Grundschule* (7. Aufl.). Hannover: Hermann Schroedel.

Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen. Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Münster: Waxmann.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung* (4. erw., stark überarb. Aufl). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Padberg, F. & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe – Arithmetik* (2. Aufl.). Berlin: Springer Spektrum.

Padberg, F., Danckwerts, R. & Stein, M. (1995). *Zahlbereiche. Eine elementare Einführung*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Peter-Koop, A., Fischer, C. & Begić, A. (2002). Finden und Fördern mathematisch besonders begabter Grundschulkinder. In A. Peter-Koop & P. Sorger (Hrsg.), *Mathematisch besonders begabte Grundschulkinder als schulische Herausforderung* (S. 7–30). Offenburg: Mildenberger Verlag.

Peter-Koop, A. & Sorger, P. (Hrsg.). (2002). *Mathematisch besonders begabte Grundschulkinder als schulische Herausforderung*. Offenburg: Mildenberger Verlag.

Picker, B. (1989). Aspekte der Multiplikation. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 17* (6) 268–274.

Postel, H. (1977). Mengen und ihre Verknüpfungen. In H. Eckhardt (Hrsg.), *Neue Mathematik in den Klassen 5 bis 7* (4. Aufl.). Frankfurt am Main: Diesterweg.

Praetor Intermedia UG (Hrsg.). (o. J.). *UN-Behindertenrechtskonvention. Übereinkommen über die Rechte von Menschen mit Behinderung*. Verfügbar unter https://www.behindertenrechtskonvention.info/ (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Prengel, A. (2006). *Pädagogik der Vielfalt. Verschiedenheit und Gleichberechtigung in Interkultureller, Feministischer und Integrativer Pädagogik* (3. Aufl.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Prengel, A. (2013). I*nklusive Bildung in der Primarstufe. Eine wissenschaftliche Expertise des Grundschulverbandes*. Frankfurt am Main: Grundschulverband.

Preuss-Lausitz, U. (2002). Integrationsforschung. Ansätze, Ergebnisse und Perspektiven. In H. Eberwein & S. Knauer (Hrsg.), *Integrationspädagogik. Kinder mit und ohne Beeinträchtigung lernen gemeinsam* (6. vollst. überarb. u. aktual. Aufl., S. 458–459). Weinheim: Beltz Verlag.

Radatz, H. (1983). Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3*, 205–217.

Radatz, H. (1990). Was können sich Schüler unter Rechenoperationen vorstellen? Mathematische Unterrichtspraxis. *Zeitschrift für den Mathematikunterricht, 11* (1), 3–8.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Röthlisberger, H. (1999). Heterogenität als Herausforderung: Standortbestimmung am Schulanfang. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S. 22–28). Zug: Klett und Balmer.

Rottmann, T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte" und „das Doppelte". Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Hildesheim: Franzbecker KG.

Ruwisch, S. (1999). *Angewandte Multiplikation. Klassenfest, Puppenhaus, und Kinderbowle: Eine qualitative empirische Studie zum Lösungsverhalten von Grundschulkindern beim Bearbeiten multiplikativer Sachsituationen*. Frankfurt am Main: Peter Lang.

Ruwisch, S. & Lorenz, J. H. (2018). Entstehung der Leitlinie zur „Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung" und Beteiligung der GDM. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 105*, 41–44.

Sander, A. (2002a). Internationaler Stand und Konsequenzen für die sonderpädagogische Förderung in Deutschland. In A. Hausotter, W. Boppel & H. Meschenmoser (Hrsg.), *Perspektiven Sonderpädagogischer Förderung in Deutschland. Dokumentation der Nationalen Fachtagung vom 14.–16. November 2001 in Schwerin* (S. 143–164). Middelfart: European Agency.

Sander, A. (2002b). Über die Dialogfähigkeit der Sonderpädagogik: Neue Anstöße durch Inklusive Pädagogik. In B. Warzecha (Hrsg.), *Zur Relevanz des Dialogs in Erziehungswissenschaft, Behindertenpädagogik, Beratung und Therapie* (S. 59–68). Hamburg: Lit.

Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen. Eine empirische Studie*. Hamburg: Kovač.

Scheid, H. (2002). *Elemente der Arithmetik und Algebra* (4. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Heidelberg: Winter, Programm Ed. Schindele.

Scherer, P. (2007). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Multiplikation und Division im Hunderterraum. Mit Kopiervorlagen* (2. Aufl.). Horneburg: Persen.

Scherer, P. (2017). Gemeinsames Lernen oder Einzelförderung? – Grenzen und Möglichkeiten eines inklusiven Mathematikunterrichts. In F. Hellmich & E. Blumberg (Hrsg.), *Inklusiver Unterricht in der Grundschule* (S. 194–212). Stuttgart: Kohlhammer.

Schermer, F. J. (2006). *Lernen und Gedächtnis* (4., überarb. und erw. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

Schipper, W. (1982). Stoffauswahl und Stoffanordnung im mathematischen Anfangsunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 3* (2), 91–120.

Schipper, W. (2005). *SINUS-Transfer Grundschule. Mathematik. Modul G: Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern,* Leibniz-Institut f. d. Pädagogik d. Naturwissenschaften (IPN) an d. Universität Kiel. Verfügbar unter http://sinus-transfer-grundschule.de/fileadmin/Materialien/Modul4.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Braunschweig: Schroedel.

Schipper, W. & Hülshoff, A. (1984). Wie anschaulich sind Veranschaulichungshilfen? *Grundschule, 16* (4), 55–56.

Schipper, W., Wartha, S. & Schroeders, N. von (2011). *BIRTE 2 – Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr. Handbuch mit CD-ROM.* Braunschweig: Schroedel.

Schmassmann, M. & Diener, M. (2014). Wie viele Punkte hat das Hunderterfeld? *Grundschulmagazin, 82* (1), 7–11.

Schmidt, J. (Hrsg.). (2008a). *Mein Mathebuch 2. Ausgabe Bayern.* Herrsching: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Schmidt, J. (Hrsg.). (2008b). *Mein Mathebuch 2. Arbeitsheft. Ausgabe Bayern.* München: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Schmidt, J. (Hrsg.). (2008c). *Mein Mathebuch 2. Lehrermaterialien. Ausgabe Bayern.* München: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Schulz, A. (2017). Multiplikation verstehen. Durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. *Mathematik lehren, 201,* 17–22.

Schütte, M. (2009). *Sprache und Interaktion im Mathematikunterricht der Grundschule. Zur Problematik einer Impliziten Pädagogik für schulisches Lernen im Kontext sprachlich-kultureller Pluralität*. Münster: Waxmann.

Schütte, S. (1991). Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 1991. Vorträge auf der 25. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 4. bis 8.3.1991 in Osnabrück* (S. 251–254). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Schwartze, H. (1980). *Elementarmathematik aus didaktischer Sicht. Arithmetik und Algebra*. Bochum: Franz Ferdinand Kamp.

Schwenck, C. & Schneider, W. (2003). Einflussfaktoren für den Zusammenhang von Rechen- und Schriftsprachleistungen im frühen Grundschulalter. *Kindheit und Entwicklung, 12* (4), 212–221.

Seeger, F. (1993). Veranschaulichungen und Veranschaulichungsmittel aus kulturhistorischer Perspektive: Einige Randbemerkungen. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 3–13). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Seeger, F. (1998). Representations in the mathematics classroom: Reflections and constructions. In F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Hrsg.), *The culture of the mathematics classroom* (S. 309–343). Cambridge: Cambridge University Press.

Seitz, S. (2004). Forschungslücke Inklusive Fachdidaktik – ein Problemaufriss. In I. Schnell & A. Sander (Hrsg.), *Inklusive Pädagogik* (S. 215–231). Bad Heilbrunn/Obb.: Julius Klinkhardt.

Selter, C. (1995a). Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 138–150). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Selter, C. (1995b). Eigene Wege zum Einmaleins. *Grundschule, 27* (5), 10–13.

Selter, C. (1995c). Zur Fiktivität der ‚Stunde Null' im arithmetischen Anfangsunterricht. *Zeitschrift für den Mathematikunterricht, 16* (1), 11–19.

Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr*. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.

Selter, C. (2002). ‚Einführung' des Einmaleins durch Umweltbezüge. *Die Grundschulzeitschrift, 16* (152), 12–20.

Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication Strategies and the Appropriation of Computational Resources. *Journal for Research in Mathematics Education, 36* (4), 347–395.

Spiegel, H. & Selter, C. (2003). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten* (1. Aufl.). Seelze-Velber: Kallmeyer.

Steinbring, H. (1993). Die Konstruktion mathematischen Wissens im Unterricht – eine epistemologische Methode der Interaktionsanalyse. *Journal für Mathematik-Didaktik, 14* (2), 113–145.

Steinbring, H. (2000a). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion - Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21* (1), 28–49.

Steinbring, H. (2000b). *Epistemologische und sozial-interaktive Bedingungen der Konstruktion mathematischer Wissensstrukturen (im Unterricht der Grundschule). Anhang zum Abschlussbericht des DFG-Projekts.* Dortmund: Universität Dortmund; Institut für Didaktik der Mathematik.

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung.* Münster: Lit.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen.* Berlin: Springer.

Steinweg, A. S., Akinwunmi & Lenz, D. (2018). Making Implicit Algebraic thinking Explicit: Exploiting National Characteristics of German Approaches. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (S. 283–307). Cham, Switzerland: Springer.

Stoellger, N. (1988). Annährung an eine integrative Schule – ein Leseleitfaden. In Projektgruppe Integrationsversuch (Hrsg.), *Das Fläming-Modell. Gemeinsamer Unterricht für behinderte und nicht behinderte Kinder an der Grundschule* (S. 11–16). Weinheim: Beltz.

Sundermann, B. & Selter, C. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Gute Aufgaben. Differenzierte Arbeiten. Ermutigende Rückmeldungen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Tent, L., Witt, M., Bürger, W. & Zschoche-Lieberum, C. (1991). Ist die Schule für Lernbehinderte überholt? *Heilpädagogische Forschung, 1,* 3–13.

Ter Heege, H. (1985). The Acquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational Studies in Mathematics, 16* (4), 375–388.

Tiedemann, K. (2012). *Mathematik in der Familie. Zur familialen Unterstützung früher mathematischer Lernprozesse in Vorlese- und Spielsituationen*. Münster: Waxmann.

Treaty Section. Office of Legal Affairs. United Nations. (2018). *United Nations Treaty Collection*. Verfügbar unter https://treaties.un.org/Pages/ViewDetails.aspx?src=TREATY&mtdsg_no=IV-15&chapter=4&clang=_en (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

UNESCO. (1994). *Die Salamanca Erklärung und der Aktionsrahmen zur Pädagogik für besondere Bedürfnisse. Angenommen von der Weltkonferenz „Pädagogik für besondere Bedürfnisse: Zugang und Qualität" Salamanca, Spanien, 7.–10. Juni 1994*. Verfügbar unter https://www.unesco.de/fileadmin/medien/Dokumente/Bibliothek/salamanca-erklaerung.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 147–166). Köln: Aulis Verlag Deubner.

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2009). *Algebra in der Sekundarstufe* (3. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Voßmeier, J. (2012). *Schriftliche Standortbestimmungen im Arithmetikunterricht. Eine Untersuchung am Beispiel inhaltsbezogener Kompetenzen*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner; Springer Spektrum.

Wartha, S. & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen*. Verfügbar unter http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~herrmann/schule/grund.pdf. (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Wartha, S. & Schulz, A. (2012). *Rechenprobleme vorbeugen. Grundvorstellungen aufbauen: Zahlen und Rechnen bis 100*. Berlin: Cornelsen.

Wember, F. B. (1996). Mathematik lehren und Mathematik lernen – Methodische Überlegungen zum Unterricht bei lern- und geistigbehinderten Kindern. In W. Baudisch & D. Schmetz (Hrsg.), *Mathematik und Sachunterricht im Primar- und Sekundarbereich. Beispiele sonderpädagogischer Förderung* (1. Aufl., S. 11–44). Frankfurt am Main: Diesterweg.

Wember, F. B. (2013). Herausforderungen Inklusion: Ein präventiv orientiertes Modell schulischen Lernens und vier zentrale Bedingungen inklusiver Unterrichtsentwicklung. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 64* (10), 380–388.

Wember, F. B. (2015). Unterricht professionell: Orientierungspunkte für einen inklusiven Unterricht mit heterogenen Lerngruppen. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 66* (10), 456–473.

Wilhelm, M. & Bintinger, G. (2001). Schulentwicklung unter dem Aspekt der Inklusion oder: weg von „Integrationsklassen" hin zur „Schule für alle Kinder"! *Behinderte in Familie, Schule und Gesellschaft, 2,* 1-8. Verfügbar unter http://bidok.uibk.ac.at/library/beh2-01-wilhelm-inklusion.html.

Winter, H. (1987). *Mathematik entdecken. Neue Ansätze für den Unterricht in der Grundschule*. Frankfurt am Main: Scriptor.

Wittmann, E. C. (1982). *Mathematisches Denken bei Vor- und Grundschulkindern. Eine Einführung in psychologisch-didaktische Experimente*. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Wittmann, E. C. (1992). Mathematikdidaktik als „design science". *Journal für Mathematik-Didaktik, 13* (1), 55–70.

Wittmann, E. C. (1995a). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Arithmetikunterricht - vom Kind und vom Fach aus. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10–41). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Wittmann, E. C. (1995b). Unterrichtsdesign und empirische Forschung. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 29. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6. bis 10. März 1995 in Kassel* (S. 528–531). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. C. (1996). Offener Mathematikunterricht in der Grundschule – vom FACH aus. *Grundschulunterricht, 43* (6), 3–7.

Wittmann, E. C. (1998a). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung, 16* (3), 329–342.

Wittmann, E. C. (1998b). Standard Number Representations in the Teaching of Arithmetic. Heinrich Winter zum 70. Geburtstag gewidmet. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19* (2/3), 149–178.

Wittmann, E. C. (2010a). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der grauen Päckchen": Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins* (2. Aufl., S. 157–171). Leipzig: Ernst Klett Grundschulbuchverlag.

Wittmann, E. C. (2010b). Die weitere Entwicklung des Mathematikunterrichts in der Grundschule – was muß sich bewegen? In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (S. 183–186). Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2010). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2017). H*andbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Stuttgart: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.

Wocken, H. (o.J.). *Basics. Inklusion*. Verfügbar unter http://www.hanswocken.de/PDF/Wocken-Basics.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Wocken, H. (1987). Schulleistungen in Integrationsklassen. In H. Wocken & G. Antor (Hrsg.), *Integrationsklassen in Hamburg. Erfahrungen – Untersuchungen – Anregungen* (S. 276–306). Solms-Oberbiel: Jarick.

Wocken, H. (2000). Leistung, Intelligenz und Soziallage von Schülern mit Lernbehinderungen. Vergleichende Untersuchungen an Förderschulen in Hamburg. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 51* (12), 492–503.

Wocken, H. (2005). *Andere Länder, andere Schüler? Vergleichende Untersuchungen von Förderschülern in den Bundesländern Brandenburg, Hamburg und Niedersachen (Forschungsbericht)*. Verfügbar unter http://bidok.uibk.ac.at/download/wocken-forschungsbericht.pdf (Zuletzt geprüft am 09.07.2018).

Wocken, H. (2007). Fördert Förderschule? Eine empirische Rundreise durch Schulen für „optimale Förderung“. In Demmer-Dieckmann & A. Textor (Hrsg.), *Integrationsforschung und Bildungspolitik im Dialog* (S. 35–59). Bad Heilbrunn/Obb.: Julius Klinkhardt.

Wocken, H. (2015). *Das Haus der inklusiven Schule. Baustellen – Baupläne – Bausteine* (6. Aufl.). Hamburg: Feldhaus, Ed. Hamburger Buchwerkstatt.

Wocken, H. & Antor, G. (Hrsg.). (1987). *Integrationsklassen in Hamburg. Erfahrungen – Untersuchungen – Anregungen*. Solms-Oberbiel: Jarick.

Woodward, J. (2006). Developing Automaticity in Multiplication Facts: Integrating Strategy Instruction with timed Practice Drills. *Learning Disabilities Quarterly, 29*, 267–289.

Zwack-Stier, C. & Börner, A. (1998). Kritik am Konzept der so genannten Teilleistungsstörungen – dargestellt an den Lernprozessen in den Bereichen Schriftsprache und Mathematik. In H. Eberwein & S. Knauer (Hrsg.), *Handbuch Lernprozesse verstehen. Wege einer neuen (sonder-)pädagogischen Diagnostik* (S. 219–234). Weinheim: Beltz.

Gesetze

Gesetz zu dem Übereinkommen der Vereinten Nationen vom 13. Dezember 2006 über die Rechte von Menschen mit Behinderungen sowie zu dem Fakultativprotokoll vom 13. Dezember 2006 zum Übereinkommen der Vereinten Nationen über die Rechte von Menschen mit Behinderungen. Bundesgesetzblatt Jahrgang 2008 Teil II Nr. 35, ausgegeben zu Bonn am 31. Dezember 2008. Verfügbar unter http://www.un.org/Depts/german/uebereinkommen/ar61106-dbgbl.pdf (Zuletzt geprüft am 26.07.2018).

Sozialgesetzbuch (SGB) – Achtes Buch (VIII) – Kinder- und Jugendhilfe (SGB VIII). Neugefasst durch Bek. v. 11.9.2012 I 2022; zuletzt geändert durch Art. 10 Abs. 10 G v. 30.10.2017 I 3618. https://www.sozialgesetzbuch-sgb.de/sgbviii/1.html (zuletzt geprüft am 26.07.2018)

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Anhang

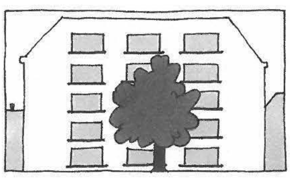
Anhang A: Testitems

Übersicht über die Testitems

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2"></th><th colspan="2">Grundvorstellungen</th></tr>
<tr><th>Kartesisches Produkt</th><th>Wiederholte Addition</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Darstellungsformen</td><td rowspan="2">Kontextbezug</td><td>in die Symbolform</td><td>Nr. 1 (K)
Nr. 5 (NK)</td><td>Nr. 8 (K)
Nr. 4 (NK)</td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td colspan="2">Nr. 16 (K)
Nr. 13 (nK)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">didaktisches Material</td><td>in die Symbolform</td><td>Nr. 7 (K) $\boxed{\text{E}}$
Nr. 2 (NK) $\boxed{\text{E}}$</td><td>Nr. 6 (K)
Nr. 10 (NK)</td></tr>
<tr><td>von der Symbolform</td><td>Nr. 14 (K) $\boxed{\text{E}}$
Nr. 11 (NK)</td><td>Nr. 15 (K)
Nr. 12 (NK)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbolform</td><td colspan="2">Nr. 3 (K) $\boxed{\text{E}}$
Nr. 9 (NK) $\boxed{\text{E}}$</td></tr>
</table>

Nutzung der Eigenschaften der Operation wird nahegelegt
K Kernaufgabe
NK Nicht-Kernaufgabe

Aufgabe Nr. 1



So rechne ich:

(Bild aus Selter, 2002, S. 19)

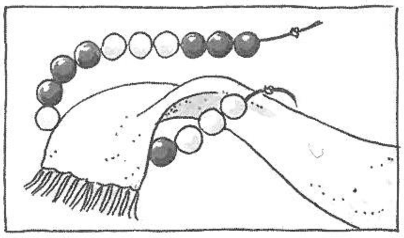
- Übersetzung in die Symbolform
- Kontextbezug
- kartesisches Produkt
- Kernaufgabe
- Intendierte multiplikative Bearbeitung: $5 \cdot 3 = 15$ oder $3 \cdot 5 = 15$

Aufgabe Nr. 5

In einer Kiste liegen 4 Reihen Äpfel.
In jeder Reihe sind 7 Äpfel.
Wie viele Äpfel sind in der Kiste.
So rechne ich:

- Übersetzung in die Symbolform
- Kontextbezug
- kartesisches Produkt
- Nicht-Kernaufgabe
- intendierte multiplikative Bearbeitung: $4 \cdot 7 = 28$ oder $7 \cdot 4 = 28$

Aufgabe Nr. 4



So rechne ich:

(Bild aus Selter, 2002, S. 19)

- Übersetzung in die Symbolform
- Kontextbezug
- wiederholte Addition
- Nicht-Kernaufgabe
- intendierte multiplikative Bearbeitung: $6 \cdot 3 = 16$, $3 \cdot 6 = 18$

Aufgabe Nr. 8

Tina hat 2-mal so viele Stifte wie Anna.

Anna hat 6 Stifte. Wie viele Stifte hat Tina?

So rechne ich:

- Übersetzung in die Symbolform
- Kontextbezug
- wiederholte Addition
- Kernaufgabe
- additive Bearbeitung: $6 + 6 = 12$
- intendierte multiplikative Bearbeitung: $2 \cdot 6 = 12$ oder $6 \cdot 2 = 12$

Aufgabe Nr. 13

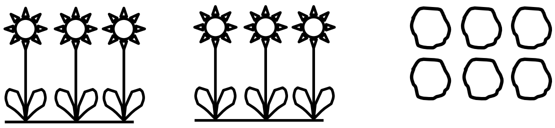
Schreibe eine Rechengeschichte zu $\boxed{3 \cdot 7}$.

- Übersetzung von der Symbolform
- Kontextbezug
- wiederholte Addition oder kartesisches Produkt
- Nicht-Kernaufgabe
- mögliche additive Bearbeitung: z.B. Im Schrank stehen 3 Stapel Teller. In jedem Stapel sind 7 Teller.
- mögliche multiplikative Bearbeitung: z.B. In einem Karton sind 3 Reihen Äpfel. In jeder Reihe sind 7 Äpfel.

Aufgabe Nr. 16

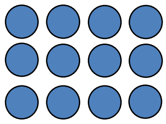
Zeichne ein Bild zu $\boxed{2 \cdot 3}$.

- Übersetzung von der Symbolform
- Kontextbezug
- wiederholte Addition oder kartesisches Produkt
- Kernaufgabe
- mögliche additive Bearbeitung s.u. links
- mögliche multiplikative Bearbeitung s.u. rechts



Aufgabe Nr. 2

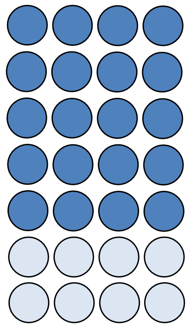
Schreibe **zwei passende** Malaufgaben auf.



- Übersetzung in die Symbolform
- didaktisches Material
- kartesisches Produkt
- Nicht-Kernaufgabe
- Nutzung der Eigenschaft Kommutativität wird nahegelegt
- intendierte multiplikative Bearbeitung: $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 3 = 12$

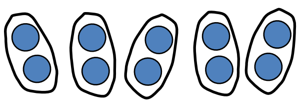
Aufgabe Nr. 7

Schreibe passende Aufgaben auf.



- Übersetzung in die Symbolform
- didaktisches Material
- kartesisches Produkt
- Kernaufgabe
- Nutzung der Eigenschaft Kommutativität wird nahegelegt
- intendierte multiplikative Bearbeitung: $5 \cdot 4 = 20$, $2 \cdot 4 = 8$, $5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$, $2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$

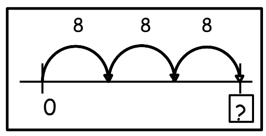
Aufgabe Nr. 6



So rechne ich:

– Übersetzung in die Symbolform
– didaktisches Material
– wiederholte Addition
– Kernaufgabe
– Intendierte multiplikative Bearbeitung: $5 \cdot 2 = 10$, $2 \cdot 5 = 10$

Aufgabe Nr. 10

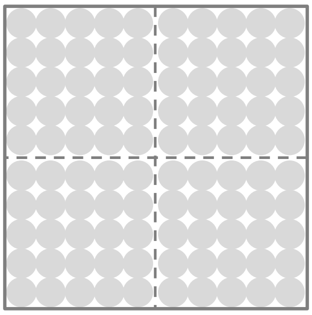


So rechne ich:

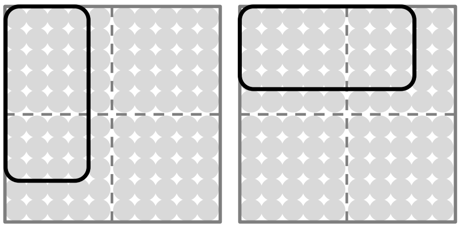
– Übersetzung in die Symbolform
– didaktisches Material
– wiederholte Addition
– Nicht-Kernaufgabe
– intendierte multiplikative Bearbeitung: $3 \cdot 8 = 24$, $8 \cdot 3 = 24$

Aufgabe Nr. 11

Zeichne $\boxed{4 \cdot 8}$ ein.

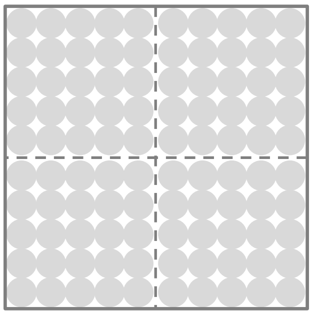


- Übersetzung von der Symbolform
- didaktisches Material
- kartesisches Produkt
- Nicht-Kernaufgabe
- intendierte multiplikative Bearbeitung s.u.

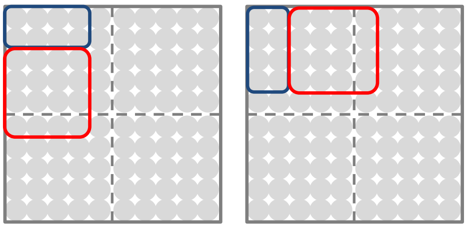


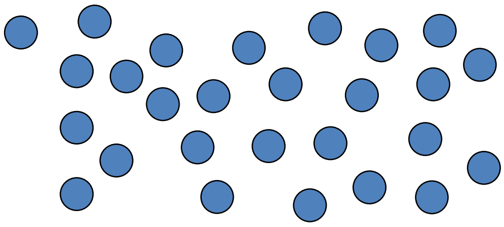
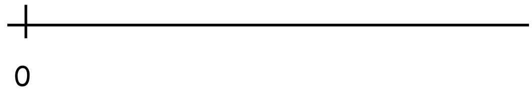
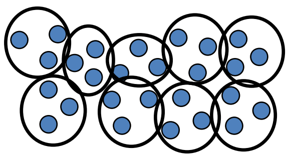
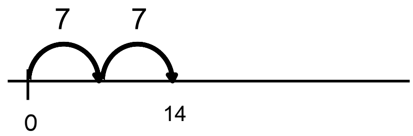
Aufgabe Nr. 14

Zeichne $\boxed{2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 6 \cdot 4}$ ein.



- Übersetzung von der Symbolform
- Didaktisches Material
- kartesisches Produkt
- Kernaufgabe
- intendierte multiplikative Bearbeitung s.u.



Aufgabe Nr. 12	**Aufgabe Nr. 15**
Zeichne $\boxed{9 \cdot 3}$ ein.	Zeichne $\boxed{2 \cdot 7}$ auf dem Zahlenstrahl ein.
	
▪ Übersetzung von der Symbolform	▪ Übersetzung von der Symbolform
▪ didaktisches Material	▪ didaktischem Material
▪ wiederholte Addition	▪ wiederholte Addition
▪ nicht Kernaufgabe	▪ Kernaufgabe
▪ intendierte additive Bearbeitung s.u.	▪ intendierte additive Bearbeitung s.u.
	

Aufgabe Nr. 3	Aufgabe Nr. 9
Stimmt das? a) $\boxed{4 \cdot 10 = 10 \cdot 4}$ ☐ja ☐nein b) $\boxed{4 \cdot 6 = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6}$ ☐ja ☐nein c) $\boxed{5 \cdot 10 = 10 \cdot 6}$ ☐ja ☐nein d) $\boxed{5 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 6 \cdot 7}$ ☐ja ☐nein e) $\boxed{3 \cdot 4 = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 4}$ ☐ja ☐nein f) $\boxed{5 \cdot 9 - 2 \cdot 9 = 4 \cdot 9}$ ☐ja ☐nein	$\boxed{7 \cdot 8}$ So rechne ich im Kopf:
▪ Symbolform ▪ Kernaufgabe ▪ Nutzung der Eigenschaft Kommutativität und Distributivität wird nahe gelegt ▪ Intendierte Bearbeitung: a) ja, b) nein, c) nein, d) ja, e) ja, f) nein	▪ Symbolform ▪ Nicht-Kernaufgabe ▪ intendierte multiplikative Bearbeitung: z.B. $5 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 7 \cdot 8$

Anhang B: Übersichten über die Förderkinder

Einzelförderung		Test zum Multiplikativen Verständnis Anzahl der Aufgaben mit (teilweise) Förderbedarf			
		(teilweise) Förderbedarf: 5	(teilweise) Förderbedarf: 6	(teilweise) Förderbedarf: 7	(teilweise) Förderbedarf: 8
BIRTE 2	Leistung: überdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich			Alexander	
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: hoch	Lara			
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich	Sarah	Natalie		
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: niedrig				
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: besonders niedrig				
	Leistung: unterdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich		Andreas	Helena	
	Leistung: deutlich unterdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: hoch				Romina
	Leistung: deutlich unterdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich		Hakan		

BIRTE 2		Arbeitsgeschwindigkeit				
		besonders hoch	hoch	durchschnittlich	niedrig	besonders niedrig
Leistung	deutlich überdurch-schnittlich					
	überdurchschnittlich			Alexander		
	durchschnittlich		Lara	Sarah, Natalie		
	unterdurchschnittlich			Helena, Andreas		
	deutlich unterdurch-schnittlich		Romina	Hakan		

Klassenverband		Test zum Multiplikativen Verständnis Anzahl der Aufgaben mit (teilweise) Förderbedarf (teilweise) Förderbedarf: 5	(teilweise) Förderbedarf: 6	(teilweise) Förderbedarf: 7	(teilweise) Förderbedarf: 8
BIRTE 2	Leistung: überdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich				
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: hoch				
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich	Fabian			
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: niedrig		Antonia		
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: besonders niedrig		Andrea		
	Leistung: unterdurch-schnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich	Kathrin	Iris		
	Leistung: deutlich unter-durchschnittlich; Arbeits-geschwindigkeit: hoch	Michael			
	Leistung: deutlich unter-durchschnittlich; Arbeits-geschwindigkeit: durch-schnittlich		Simone, Markus		

Abbildung 9.2: Übersicht der Ergebnisse der Förderkinder in Setting B in BIRTE 2 und im Test zum Multiplikativen Verständnis

Kontrollgruppe		Test zum Multiplikativen Verständnis Anzahl der Aufgaben mit (teilweise) Förderbedarf			
		(teilweise) Förderbedarf: 5	(teilweise) Förderbedarf: 6	(teilweise) Förderbedarf: 7	(teilweise) Förderbedarf: 8
BIRTE 2	Leistung: überdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich				
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: hoch			Tim	
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich				Daniel
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: niedrig		Luana		Diana
	Leistung: durchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: besonders niedrig		Lea	Maria, Tobias	
	Leistung: unterdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich			Laura	
	Leistung: deutlich unterdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: hoch				
	Leistung: deutlich unterdurchschnittlich; Arbeitsgeschwindigkeit: durchschnittlich				

Abbildung 9.3: Übersicht der Ergebnisse der Förderkinder in Setting C in BIRTE 2 und im Test zum Multiplikativen Verständnis

Hakan – Setting A *Einzelförderung*- Pre-Test			Grundvorstellungen: kartesisches Produkt	Grundvorstellungen: wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Michael – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			Grundvorstellungen: kartesisches Produkt	Grundvorstellungen: wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Tim – Setting C *Kontrollgruppe* – Pre-Test			Grundvorstellungen: kartesisches Produkt	Grundvorstellungen: wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Nr. x teilweise Förderbedarf | Nr. y Förderbedarf

Helena – Setting A *Einzelförderung* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Simone – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Maria – Setting C *Kontrollgruppe*– Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Sarah – Setting A *Einzelförderung* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Iris – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Diana – Setting C *Kontrollgruppe* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Romina – Setting A *Einzelförderung* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Antonia – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Laura – Setting C *Kontrollgruppe* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Alexander – Setting A *Einzelförderung* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	**Kontextbezug**	**in die Symbolform**	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	**in die Symbolform**	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Fabian – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	**Kontextbezug**	**in die Symbolform**	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	**in die Symbolform**	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Tobias – Setting C *Kontrollgruppe* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	**Kontextbezug**	**in die Symbolform**	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	**in die Symbolform**	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Lara – Setting A *Einzelförderung* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Kathrin – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Luana – Setting C *Kontrollgruppe* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Natalie – Setting A *Einzelförderung* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Andrea – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Lea – Setting C *Kontrollgruppe* – Pre-Test			Grundvorstellungen	
			kartesisches Produkt	wiederholte Addition
Darstellungsformen	Kontextbezug	in die Symbolform	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	in die Symbolform	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Andreas – Setting A *Einzelförderung* – Pre-Test			**Grundvorstellungen**	
			kartesisches Produkt	**wiederholte Addition**
Darstellungsformen	**Kontextbezug**	**in die Symbolform**	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	**in die Symbolform**	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

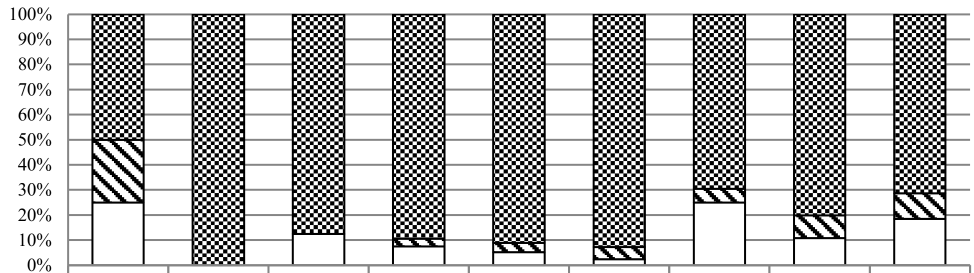
Markus – Setting B *Klassenverband* – Pre-Test			**Grundvorstellungen**	
			kartesisches Produkt	**wiederholte Addition**
Darstellungsformen	**Kontextbezug**	**in die Symbolform**	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	**in die Symbolform**	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Daniel – Setting C *Kontrollgruppe* – Pre-Test			**Grundvorstellungen**	
			kartesisches Produkt	**wiederholte Addition**
Darstellungsformen	**Kontextbezug**	**in die Symbolform**	Nr. 1	Nr. 4
		von der Symbolform		
	didaktischem Material	**in die Symbolform**	Nr. 2	Nr. 6 Nr. 10
		von der Symbolform	Nr. 11	Nr. 15 Nr. 12
	Symbolform			

Anhang C: Ergebnisse in den Testaufgaben

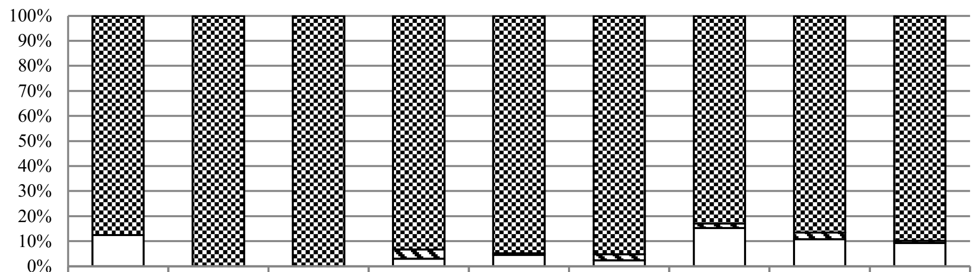
Einzelergebnisse zur Angemessenheit – alle Kinder

Aufgabe Nr. 1



	Setting A Einzelförderung mit LU MZP 1 n=8	Setting A MZP 2 n=8	Setting A MZP 3 n=8	Setting B Klassenverband mit LU MZP 1 n=134	Setting B MZP 2 n=134	Setting B MZP 3 n=124	Setting C Kontrollgruppe ohne LU MZP 1 n=112	Setting C MZP 2 n=111	Setting C MZP 3 n=108
angemessen	50,0%	100,0%	87,5%	89,6%	91,0%	92,7%	69,6%	80,2%	71,4%
teilweise angemessen	25,0%	0,0%	0,0%	3,0%	3,7%	4,8%	5,4%	9,0%	10,2%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	7,5%	5,2%	2,4%	25,0%	10,8%	18,5%

Aufgabe Nr. 5

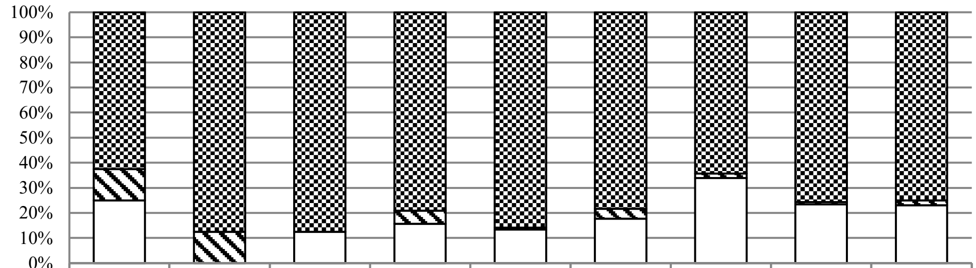


	Setting A Einzelförderung mit LU MZP 1 n=8	Setting A MZP 2 n=8	Setting A MZP 3 n=8	Setting B Klassenverband mit LU MZP 1 n=134	Setting B MZP 2 n=134	Setting B MZP 3 n=124	Setting C Kontrollgruppe ohne LU MZP 1 n=112	Setting C MZP 2 n=111	Setting C MZP 3 n=108
angemessen	87,5%	100,0%	100,0%	93,3%	94,8%	95,2%	83,0%	86,5%	89,8%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	0,7%	2,4%	1,8%	2,7%	0,9%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	3,0%	4,5%	2,4%	15,2%	10,8%	9,3%

Aufgabe Nr. 4

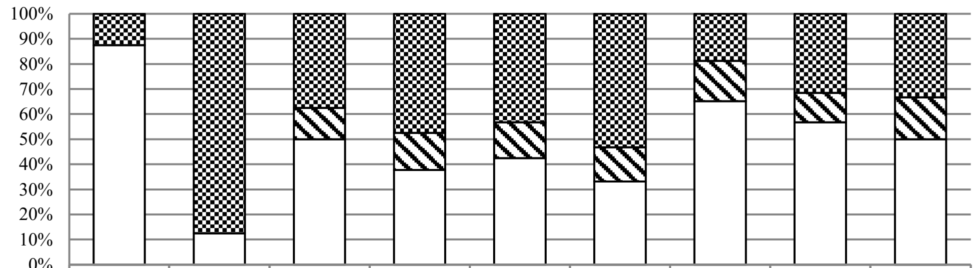
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	12,5%	62,5%	50,0%	61,2%	59,7%	51,6%	23,2%	30,6%	38,0%
teilweise angemessen	25,0%	25,0%	25,0%	18,7%	20,1%	28,2%	28,6%	34,2%	25,9%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	25,0%	20,1%	20,1%	20,2%	48,2%	35,1%	36,1%

Aufgabe Nr. 8



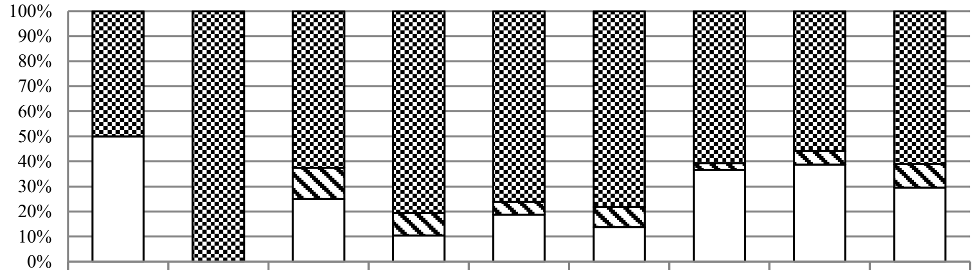
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	62,5%	87,5%	87,5%	79,1%	85,8%	78,2%	64,3%	75,7%	75,0%
teilweise angemessen	12,5%	12,5%	0,0%	5,2%	0,7%	4,0%	1,8%	0,9%	1,9%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	15,7%	13,4%	17,7%	33,9%	23,4%	23,1%

Aufgabe Nr. 13



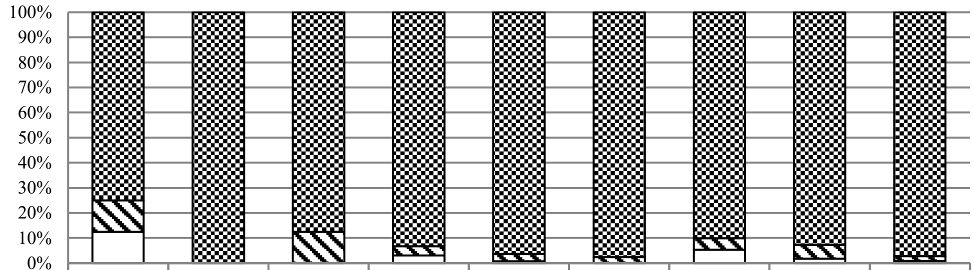
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	12,5%	87,5%	37,5%	47,8%	43,3%	53,2%	18,8%	31,5%	33,3%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	12,5%	14,9%	14,2%	13,7%	16,1%	11,7%	16,7%
nicht angemessen	87,5%	12,5%	50,0%	38,1%	42,5%	33,1%	65,2%	56,8%	50,0%

Aufgabe Nr. 16



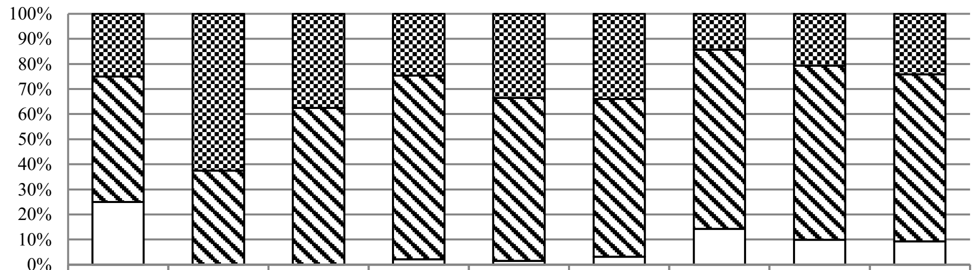
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	50,0%	100,0%	62,5%	80,6%	76,1%	78,2%	60,7%	55,9%	61,1%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	12,5%	9,0%	5,2%	8,1%	2,7%	5,4%	9,3%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	25,0%	10,4%	18,7%	13,7%	36,6%	38,7%	29,6%

Aufgabe Nr. 2



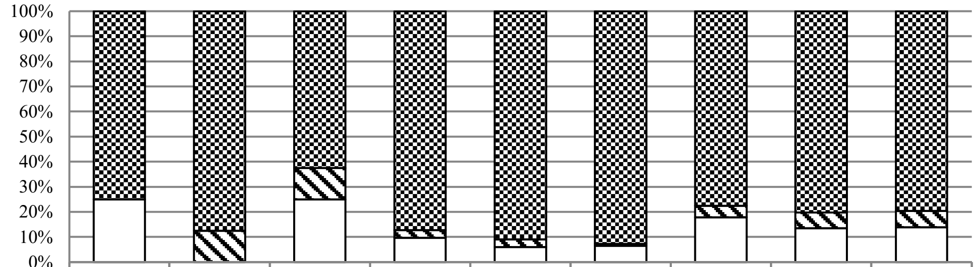
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	75,0%	100,0%	87,5%	93,3%	96,3%	97,6%	90,2%	92,8%	97,2%
teilweise angemessen	12,5%	0,0%	12,5%	3,7%	3,0%	2,4%	4,5%	5,4%	1,9%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	3,0%	0,7%	0,0%	5,4%	1,8%	0,9%

Aufgabe Nr. 7



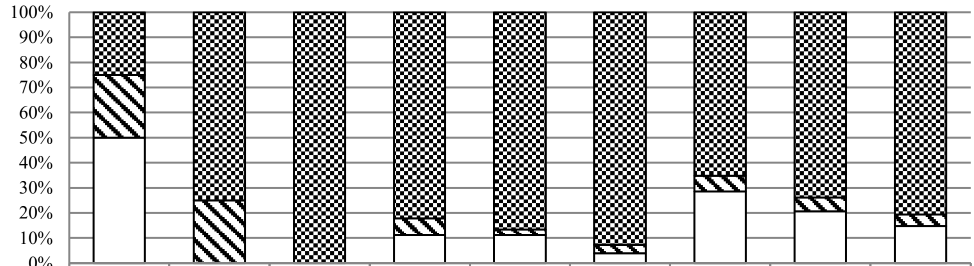
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	25,0%	62,5%	37,5%	24,6%	33,6%	33,9%	14,3%	20,7%	24,1%
teilweise angemessen	50,0%	37,5%	62,5%	73,1%	64,9%	62,9%	71,4%	69,4%	66,7%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	0,0%	2,2%	1,5%	3,2%	14,3%	9,9%	9,3%

Aufgabe Nr. 6



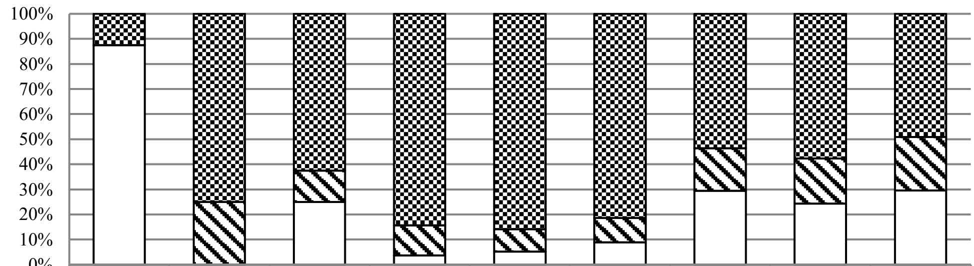
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	75,0%	87,5%	62,5%	87,3%	91,0%	92,7%	77,7%	80,2%	79,6%
teilweise angemessen	0,0%	12,5%	12,5%	3,0%	3,0%	0,8%	4,5%	6,3%	6,5%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	25,0%	9,7%	6,0%	6,5%	17,9%	13,5%	13,9%

Aufgabe Nr. 10



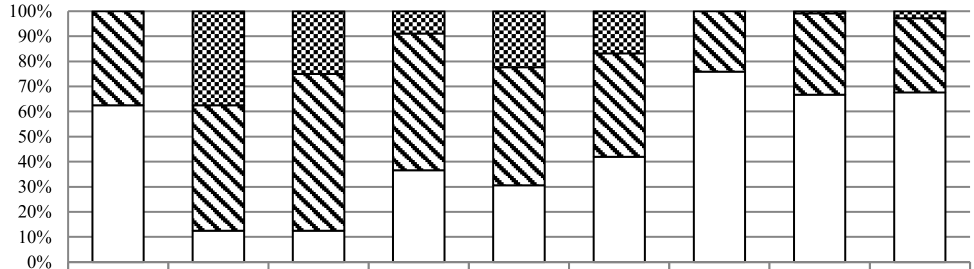
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	25,0%	75,0%	100,0%	82,1%	86,6%	92,7%	65,2%	73,9%	80,6%
teilweise angemessen	25,0%	25,0%	0,0%	6,7%	2,2%	3,2%	6,3%	5,4%	4,6%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	0,0%	11,2%	11,2%	4,0%	28,6%	20,7%	14,8%

Aufgabe Nr. 11



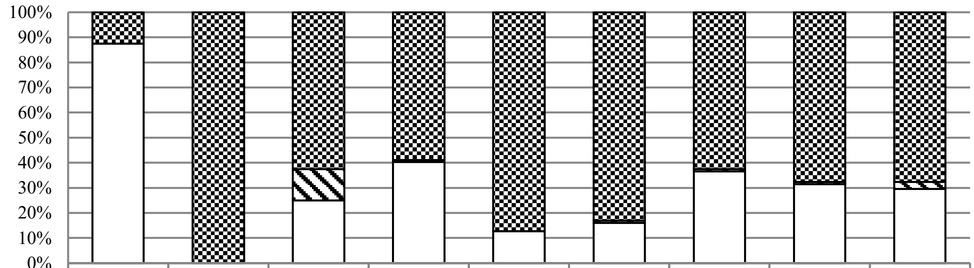
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	12,5%	75,0%	62,5%	84,3%	85,8%	81,5%	53,6%	57,7%	49,1%
teilweise angemessen	0,0%	25,0%	12,5%	11,9%	9,0%	9,7%	17,0%	18,0%	21,3%
nicht angemessen	87,5%	0,0%	25,0%	3,7%	5,2%	8,9%	29,5%	24,3%	29,6%

Aufgabe Nr. 14



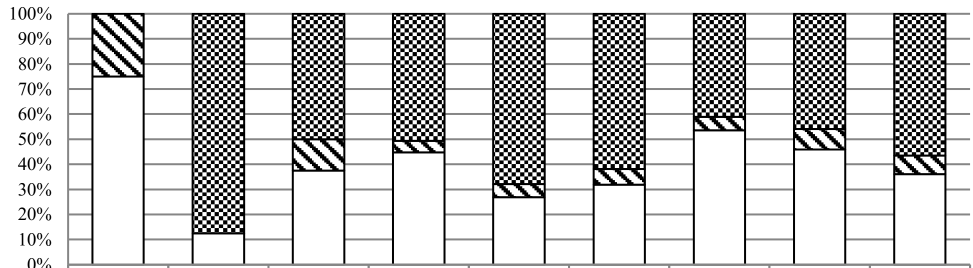
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	0,0%	37,5%	25,0%	9,0%	22,4%	16,9%	0,0%	0,9%	2,8%
teilweise angemessen	37,5%	50,0%	62,5%	54,5%	47,0%	41,1%	24,1%	32,4%	29,6%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	12,5%	36,6%	30,6%	41,9%	75,9%	66,7%	67,6%

Aufgabe Nr. 12



	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	12,5%	100,0%	62,5%	59,0%	87,3%	83,1%	62,5%	67,6%	67,6%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	12,5%	0,7%	0,0%	0,8%	0,9%	0,9%	2,8%
nicht angemessen	87,5%	0,0%	25,0%	40,3%	12,7%	16,1%	36,6%	31,5%	29,6%

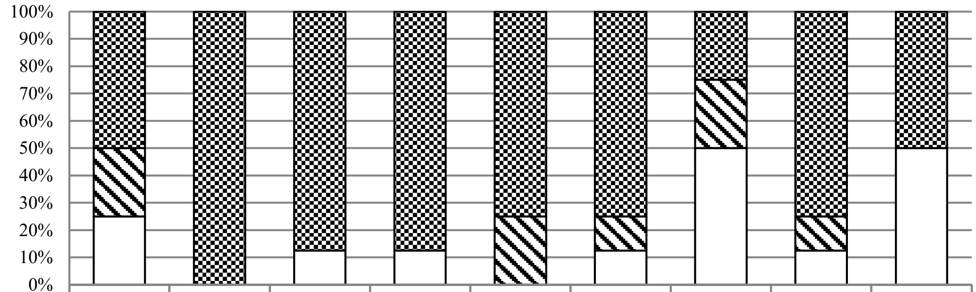
Aufgabe Nr. 15



	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
angemessen	0,0%	87,5%	50,0%	50,7%	67,9%	56,3%	41,1%	45,9%	56,5%
teilweise angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	4,5%	5,2%	5,6%	5,4%	8,1%	7,4%
nicht angemessen	75,0%	12,5%	37,5%	44,8%	26,9%	29,0%	53,6%	45,9%	36,1%

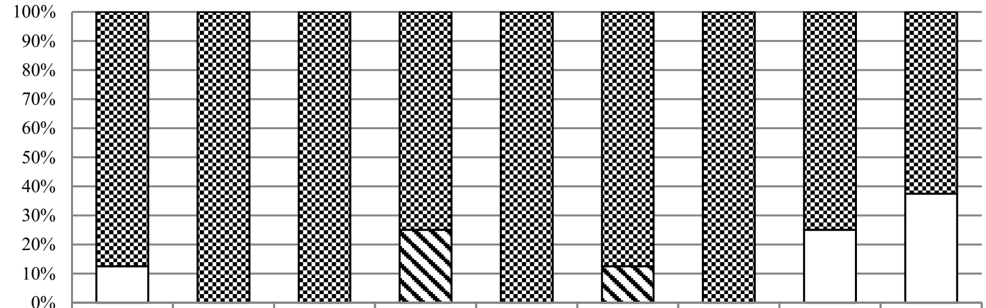
Einzelergebnisse zur Angemessenheit – Kinder mit Förderbedarf

Aufgabe Nr. 1



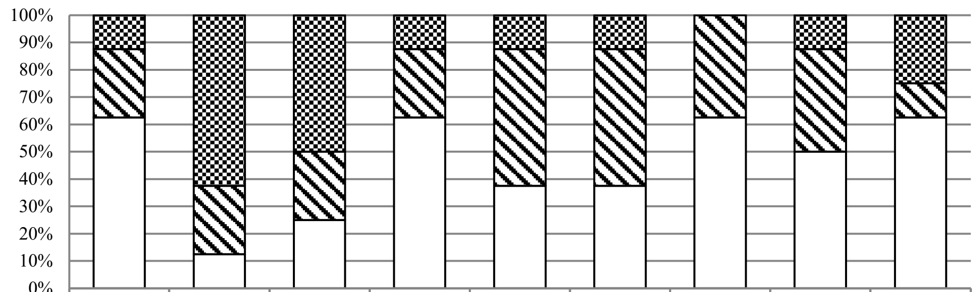
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
angemessen	50,0%	100,0%	87,5%	87,5%	75,0%	75,0%	25,0%	75,0%	50,0%
teilweise angemessen	25,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	12,5%	25,0%	12,5%	0,0%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	50,0%	12,5%	50,0%

Aufgabe Nr. 5



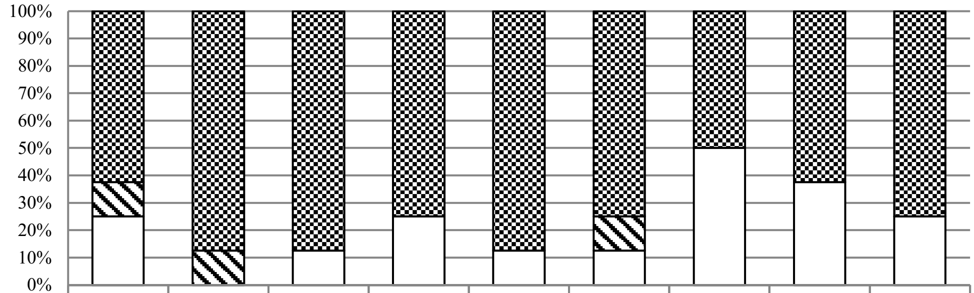
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
angemessen	87,5%	100,0%	100,0%	75,0%	100,0%	87,5%	100,0%	75,0%	62,5%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	37,5%

Aufgabe Nr. 4



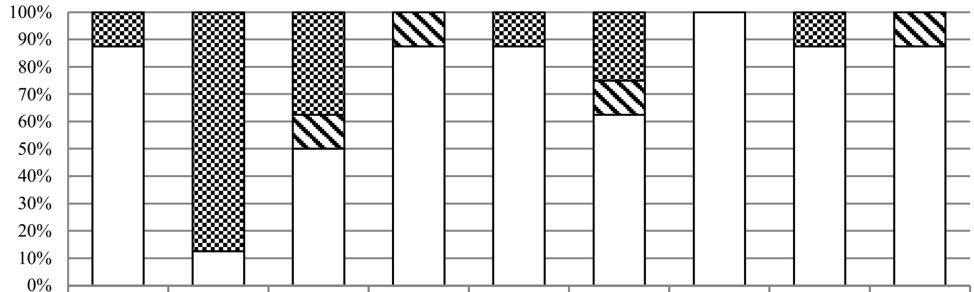
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
angemessen	12,5%	62,5%	50,0%	12,5%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	25,0%
teilweise angemessen	25,0%	25,0%	25,0%	25,0%	50,0%	50,0%	37,5%	37,5%	12,5%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	25,0%	62,5%	37,5%	37,5%	62,5%	50,0%	62,5%

Aufgabe Nr. 8



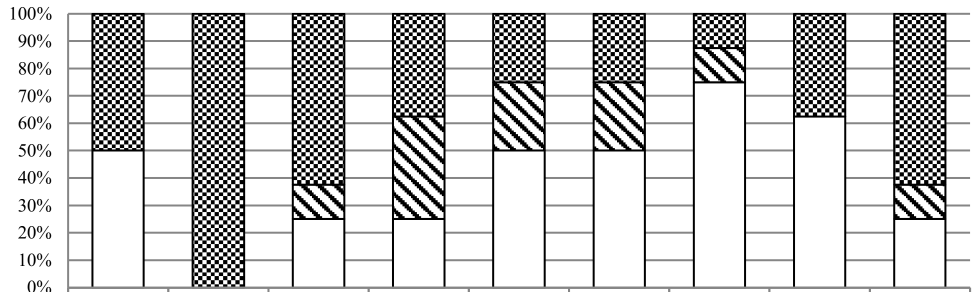
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	62,5%	87,5%	87,5%	75,0%	87,5%	75,0%	50,0%	62,5%	75,0%
teilweise angemessen	12,5%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	25,0%	12,5%	12,5%	50,0%	37,5%	25,0%

Aufgabe Nr. 13



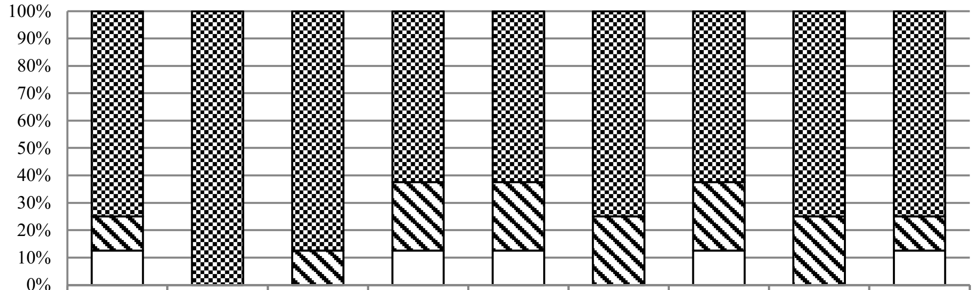
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	12,5%	87,5%	37,5%	0,0%	12,5%	25,0%	0,0%	12,5%	0,0%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	12,5%
nicht angemessen	87,5%	12,5%	50,0%	87,5%	87,5%	62,5%	100,0%	87,5%	87,5%

Aufgabe Nr. 16



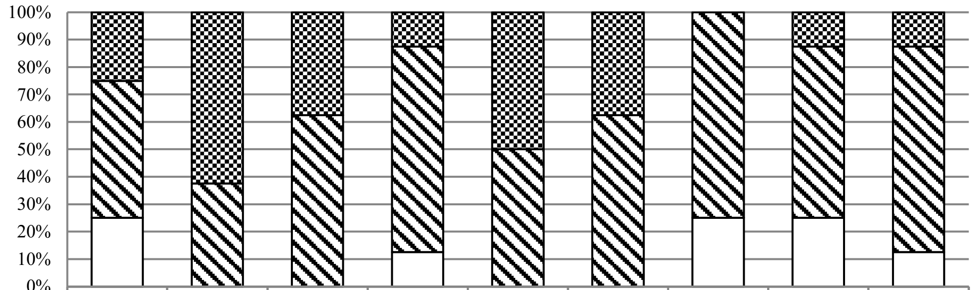
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	50,0%	100,0%	62,5%	37,5%	25,0%	25,0%	12,5%	37,5%	62,5%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	12,5%	37,5%	25,0%	25,0%	12,5%	0,0%	12,5%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	25,0%	25,0%	50,0%	50,0%	75,0%	62,5%	25,0%

Aufgabe Nr. 2



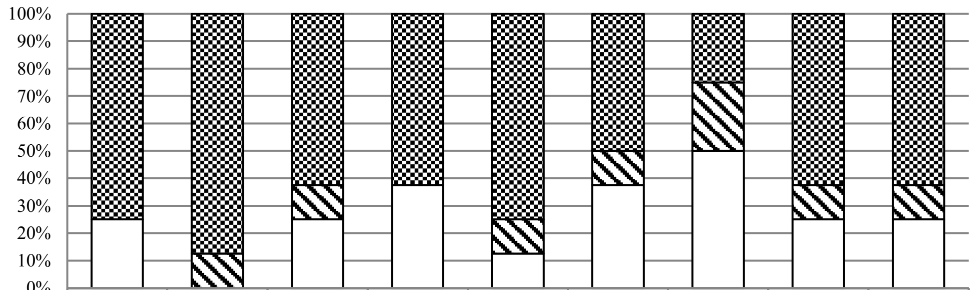
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	75,0%	100,0%	87,5%	62,5%	62,5%	75,0%	62,5%	75,0%	75,0%
teilweise angemessen	12,5%	0,0%	12,5%	25,0%	25,0%	25,0%	25,0%	25,0%	12,5%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	0,0%	12,5%

Aufgabe Nr. 7



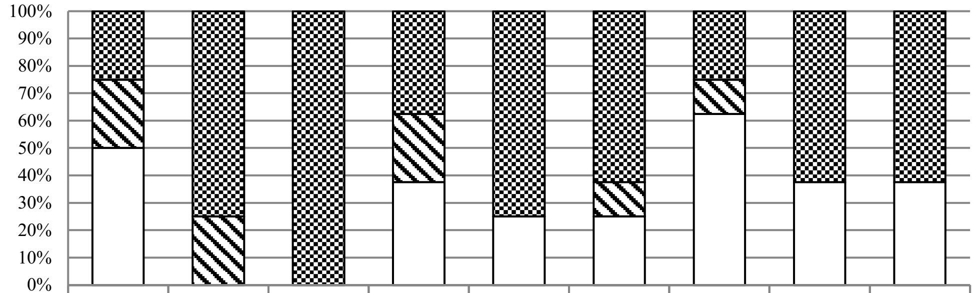
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	25,0%	62,5%	37,5%	12,5%	50,0%	37,5%	0,0%	12,5%	12,5%
teilweise angemessen	50,0%	37,5%	62,5%	75,0%	50,0%	62,5%	75,0%	62,5%	75,0%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	25,0%	25,0%	12,5%

Aufgabe Nr. 6



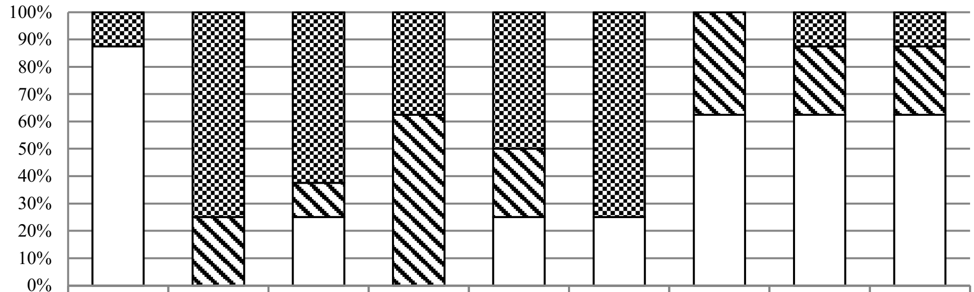
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	75,0%	87,5%	62,5%	62,5%	75,0%	50,0%	25,0%	62,5%	62,5%
teilweise angemessen	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	12,5%	25,0%	12,5%	12,5%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	25,0%	37,5%	12,5%	37,5%	50,0%	25,0%	25,0%

Aufgabe Nr. 10



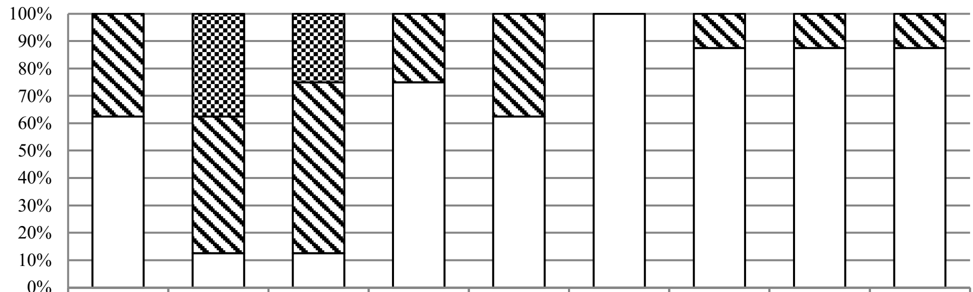
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	25,0%	75,0%	100,0%	37,5%	75,0%	62,5%	25,0%	62,5%	62,5%
teilweise angemessen	25,0%	25,0%	0,0%	25,0%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	0,0%	37,5%	25,0%	25,0%	62,5%	37,5%	37,5%

Aufgabe Nr. 11



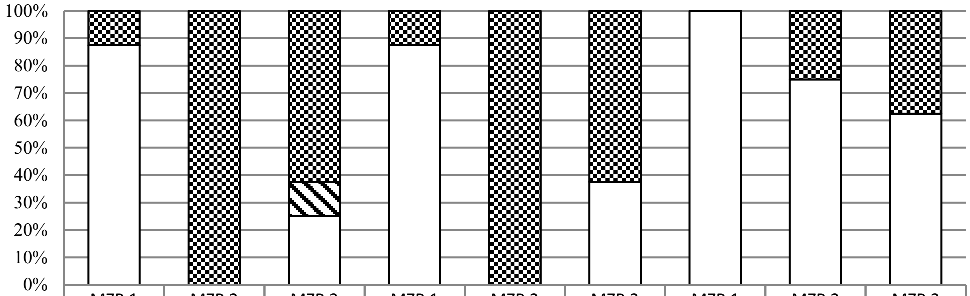
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	12,5%	75,0%	62,5%	37,5%	50,0%	75,0%	0,0%	12,5%	12,5%
teilweise angemessen	0,0%	25,0%	12,5%	62,5%	25,0%	0,0%	37,5%	25,0%	25,0%
nicht angemessen	87,5%	0,0%	25,0%	0,0%	25,0%	25,0%	62,5%	62,5%	62,5%

Aufgabe Nr. 14



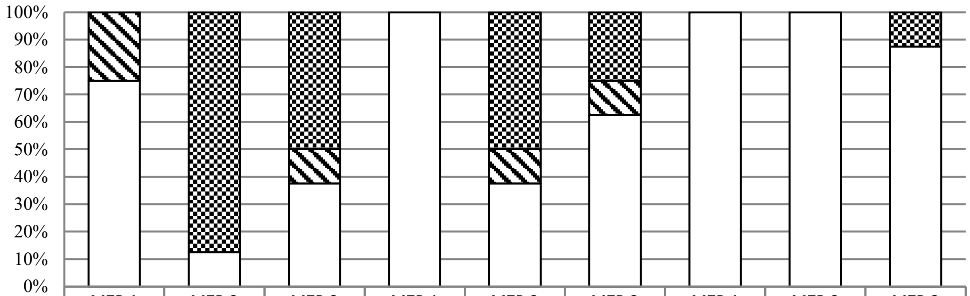
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
angemessen	0,0%	37,5%	25,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
teilweise angemessen	37,5%	50,0%	62,5%	25,0%	37,5%	0,0%	12,5%	12,5%	12,5%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	12,5%	75,0%	62,5%	100,0%	87,5%	87,5%	87,5%

Aufgabe Nr. 12



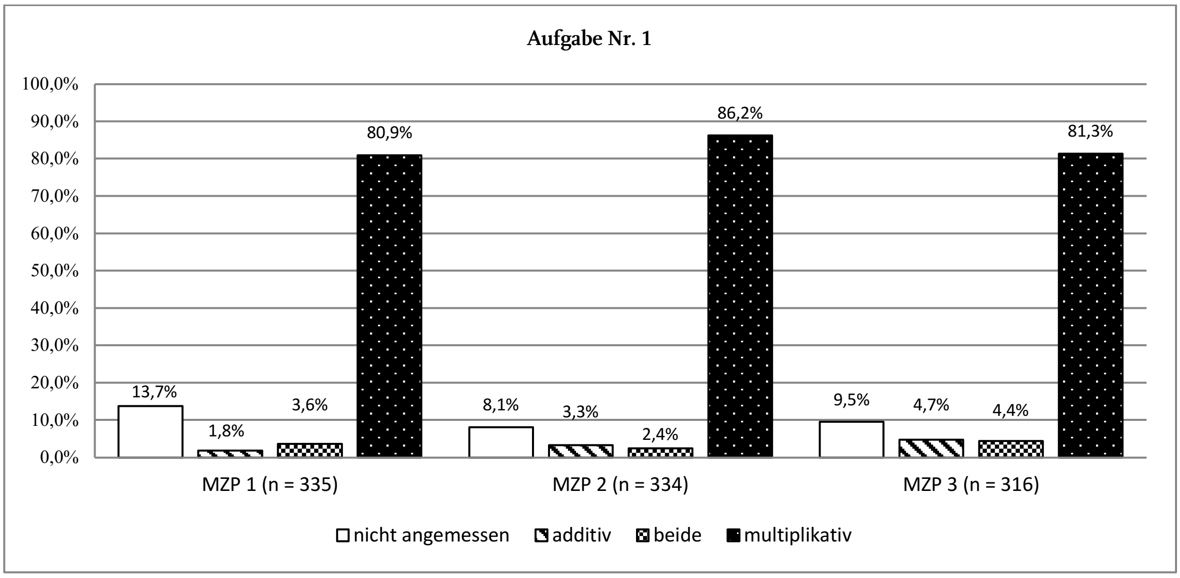
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
angemessen	12,5%	100,0%	62,5%	12,5%	100,0%	62,5%	0,0%	25,0%	37,5%
teilweise angemessen	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	87,5%	0,0%	25,0%	87,5%	0,0%	37,5%	100,0%	75,0%	62,5%

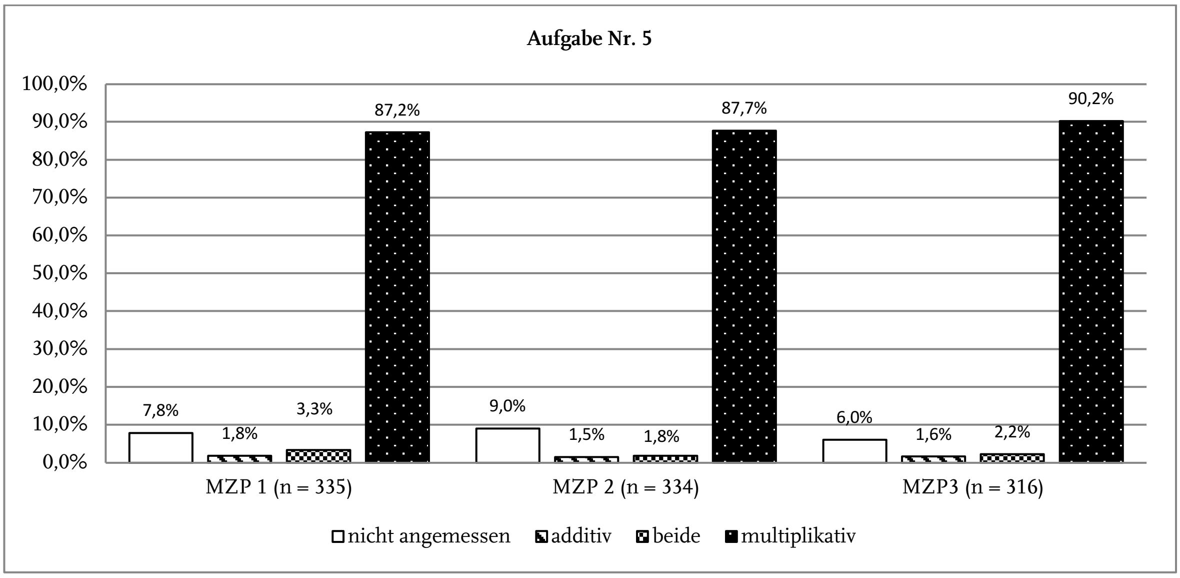
Aufgabe Nr. 15

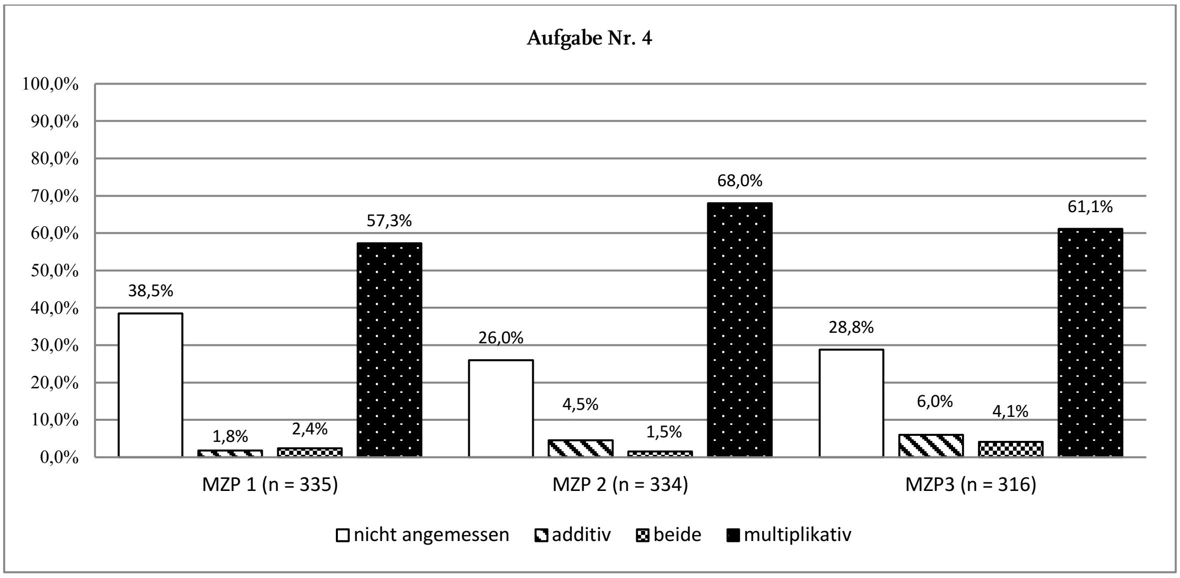


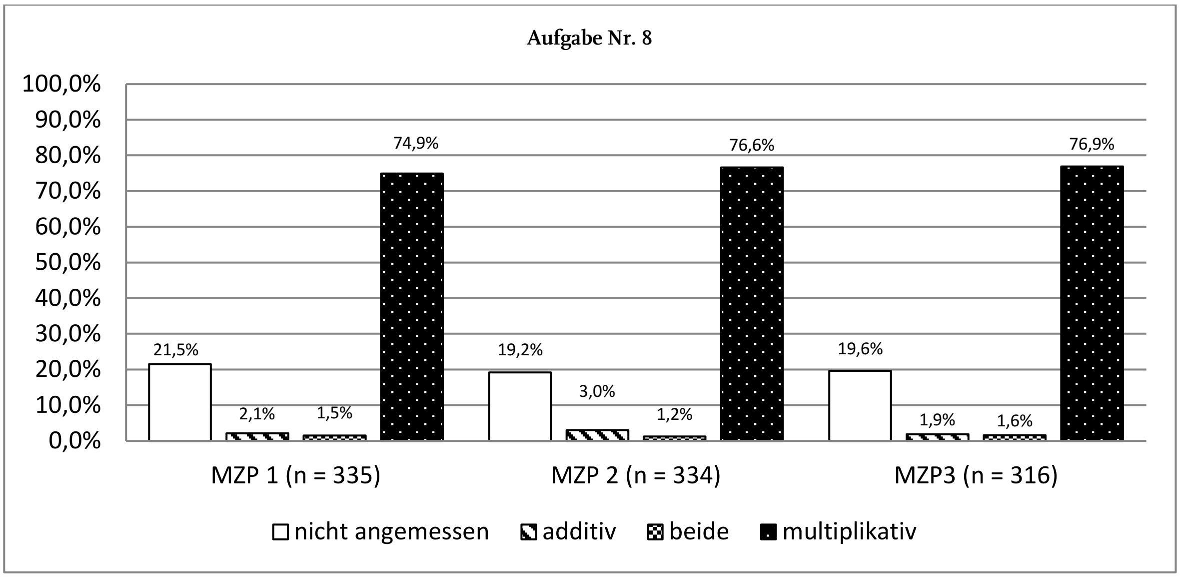
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
angemessen	0,0%	87,5%	50,0%	0,0%	50,0%	25,0%	0,0%	0,0%	12,5%
teilweise angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	75,0%	12,5%	37,5%	100,0%	37,5%	62,5%	100,0%	100,0%	87,5%

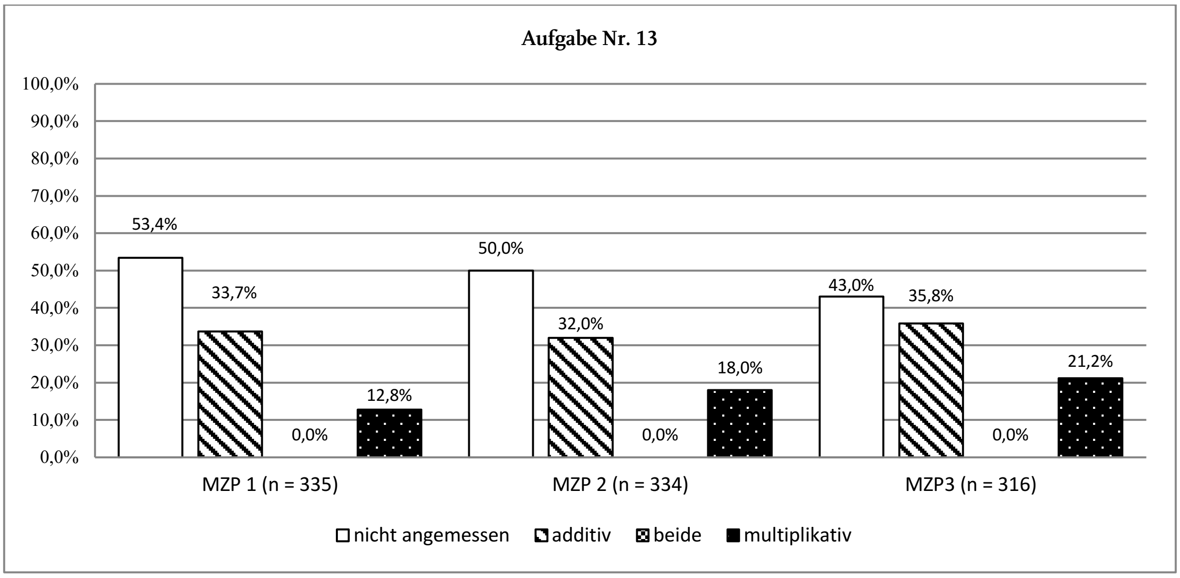
Einzelergebnisse zur Nutzung von Grundvorstellungen – über alle Settings hinweg

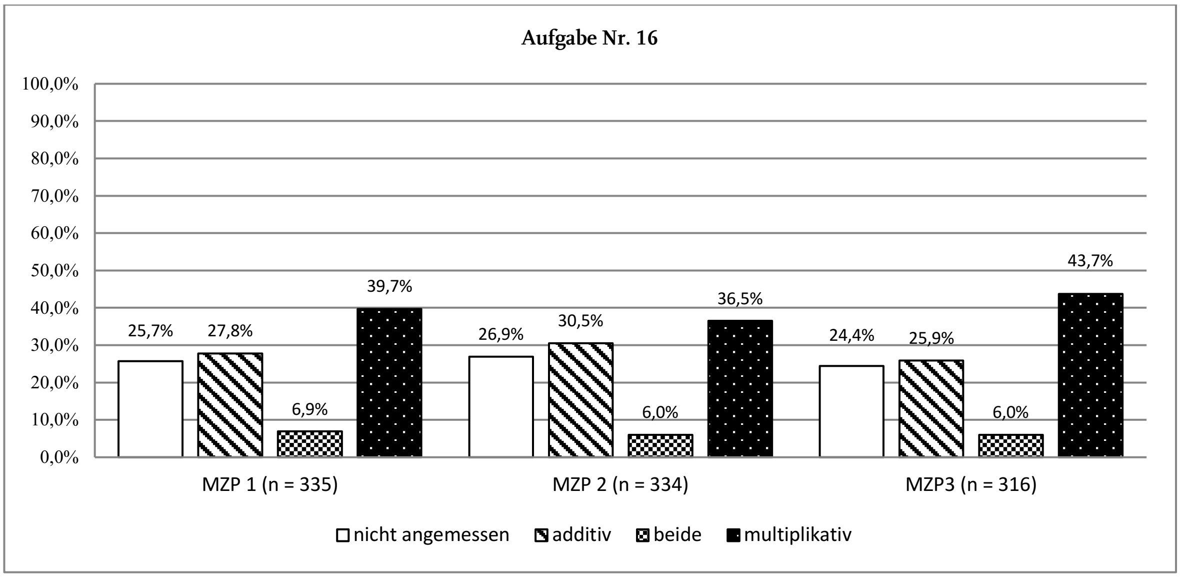


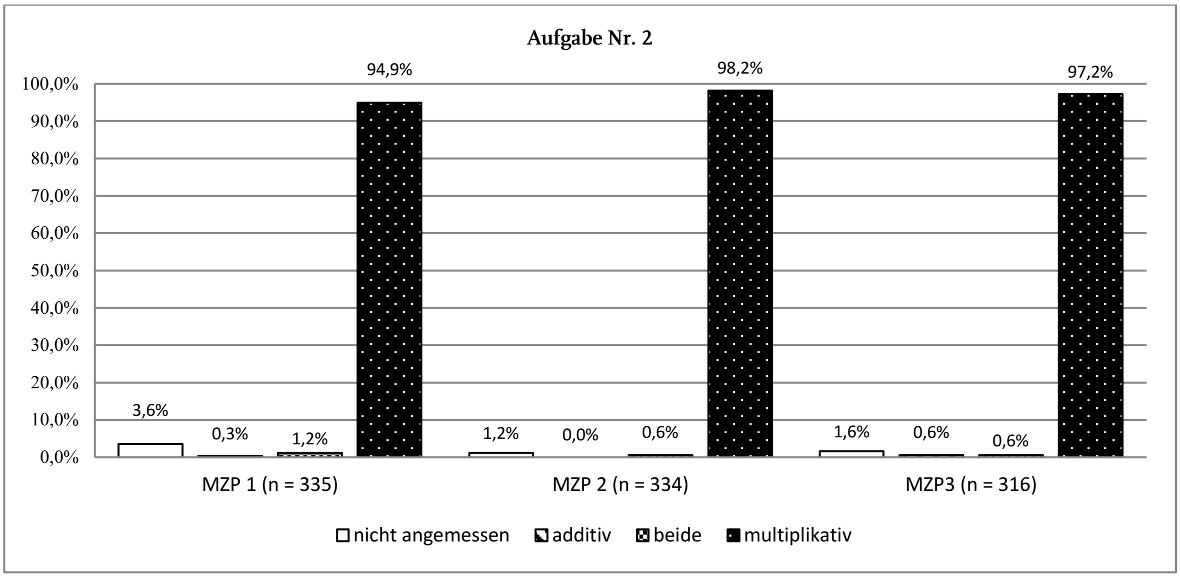


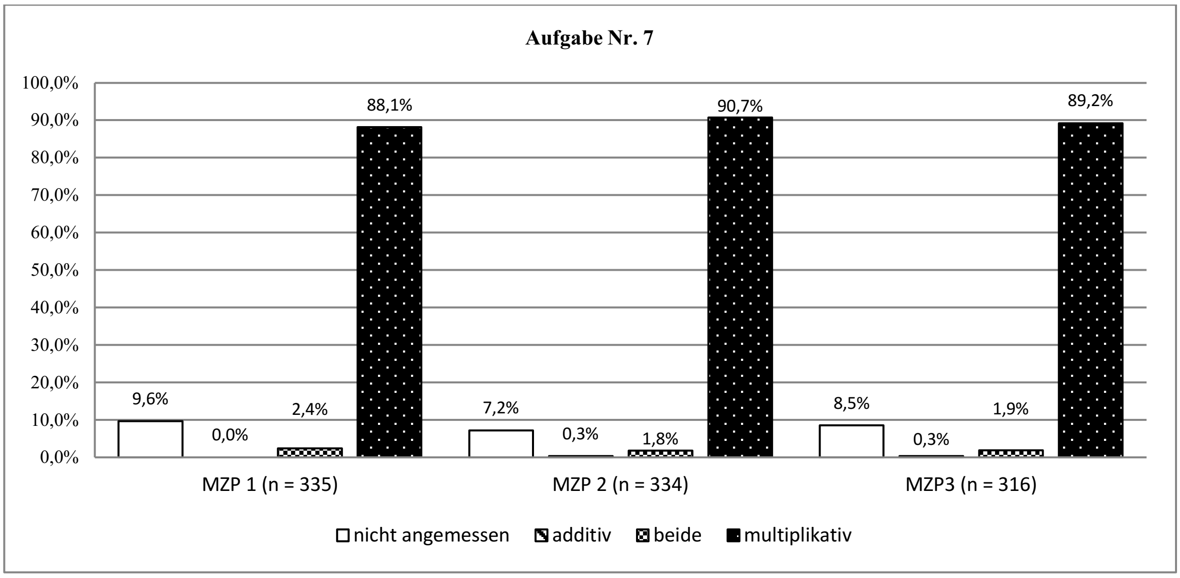

Aufgabe Nr. 4
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
38,5%
1,8%
2,4%
57,3%
26,0%
4,5%
1,5%
68,0%
28,8%
6,0%
4,1%
61,1%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ

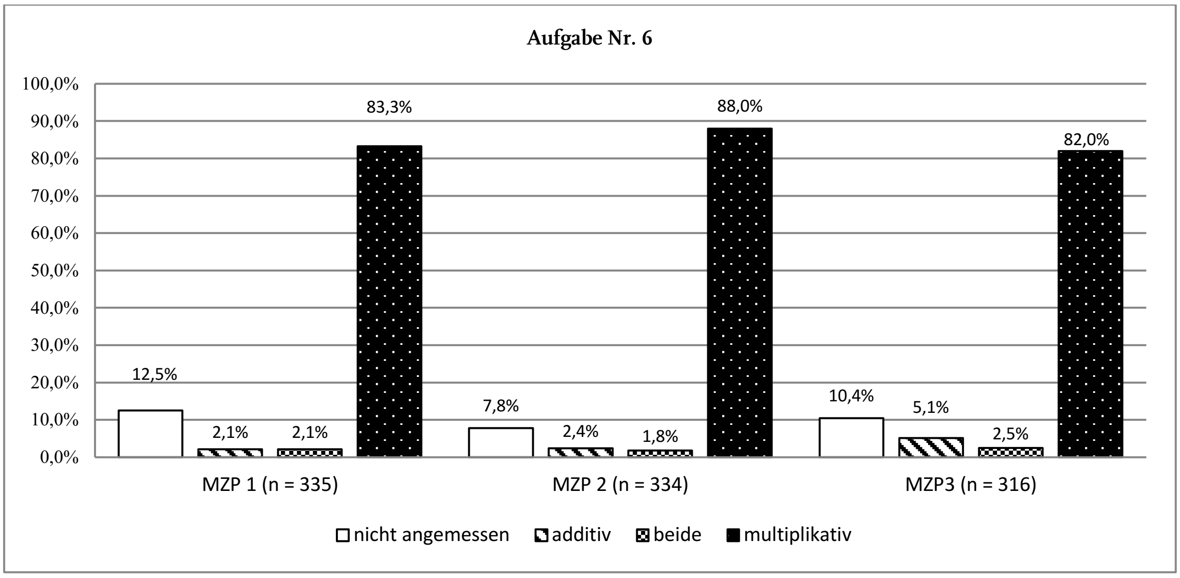

Aufgabe Nr. 8
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
21,5%
2,1%
1,5%
74,9%
19,2%
3,0%
1,2%
76,6%
19,6%
1,9%
1,6%
76,9%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ

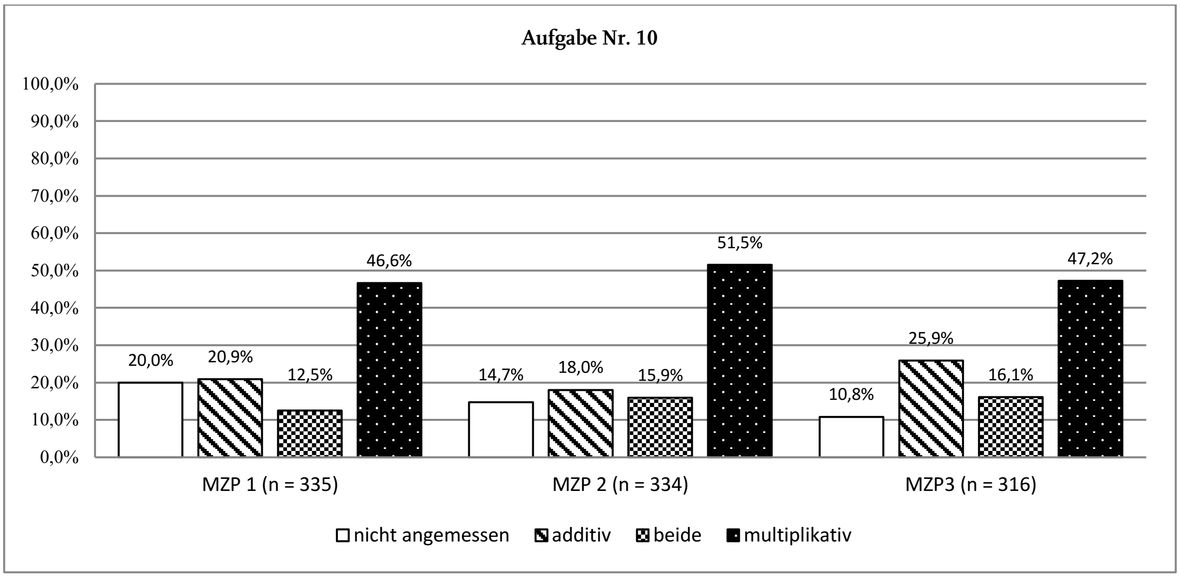

Aufgabe Nr. 13
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
53,4%
33,7%
0,0%
12,8%
50,0%
32,0%
0,0%
18,0%
43,0%
35,8%
0,0%
21,2%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ

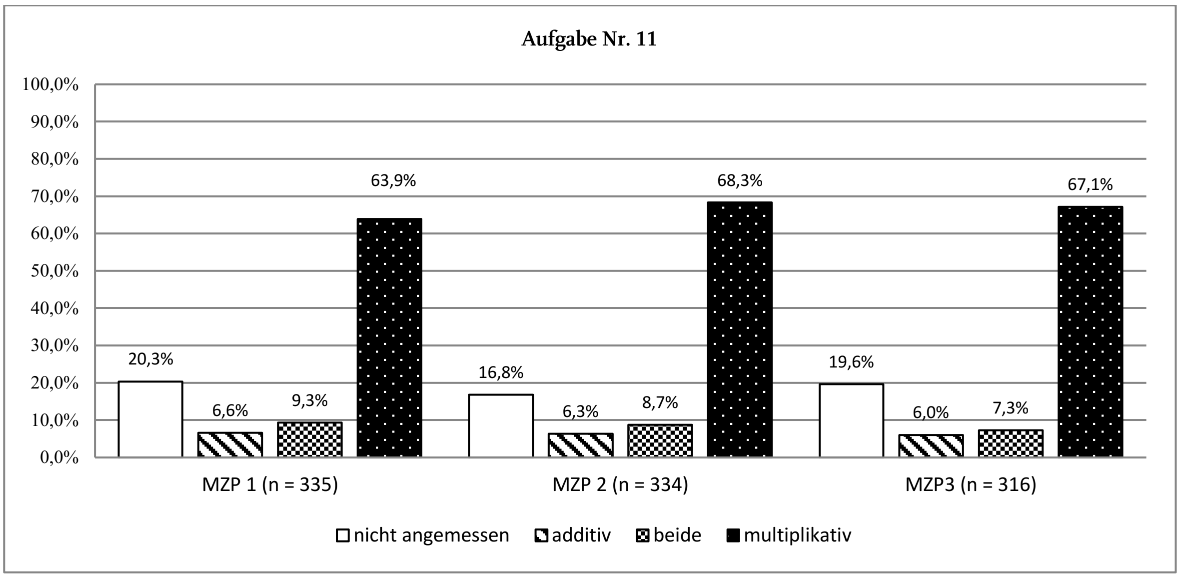

Aufgabe Nr. 16
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
25,7%
27,8%
6,9%
39,7%
26,9%
30,5%
6,0%
36,5%
24,4%
25,9%
6,0%
43,7%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ


Aufgabe Nr. 2
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
3,6%
0,3%
1,2%
94,9%
1,2%
0,0%
0,6%
98,2%
1,6%
0,6%
0,6%
97,2%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ

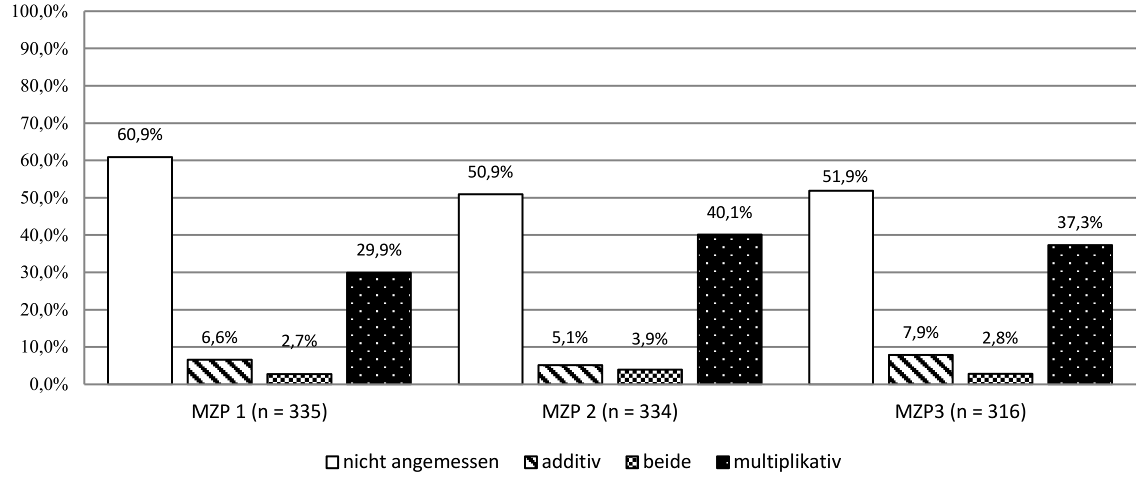

Aufgabe Nr. 7
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
9,6%
0,0%
2,4%
88,1%
7,2%
0,3%
1,8%
90,7%
8,5%
0,3%
1,9%
89,2%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ


Aufgabe Nr. 6
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
12,5%
2,1%
2,1%
83,3%
7,8%
2,4%
1,8%
88,0%
10,4%
5,1%
2,5%
82,0%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ


Aufgabe Nr. 10
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
20,0%
20,9%
12,5%
46,6%
14,7%
18,0%
15,9%
51,5%
10,8%
25,9%
16,1%
47,2%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ

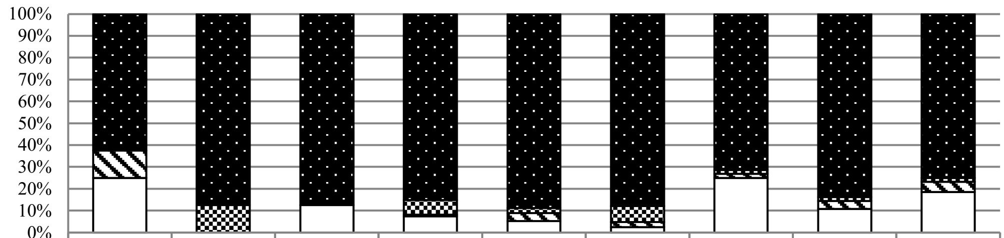

Aufgabe Nr. 11
100,0%
90,0%
80,0%
70,0%
60,0%
50,0%
40,0%
30,0%
20,0%
10,0%
0,0%
20,3%
6,6%
9,3%
63,9%
16,8%
6,3%
8,7%
68,3%
19,6%
6,0%
7,3%
67,1%
MZP 1 (n = 335)
MZP 2 (n = 334)
MZP3 (n = 316)
nicht angemessen
additiv
beide
multiplikativ

Aufgabe Nr. 14



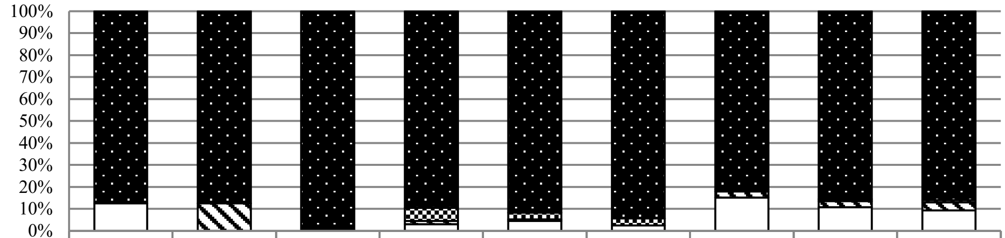
Einzelergebnisse zur Nutzung von Grundvorstellungen – alle Kinder

Aufgabe Nr. 1



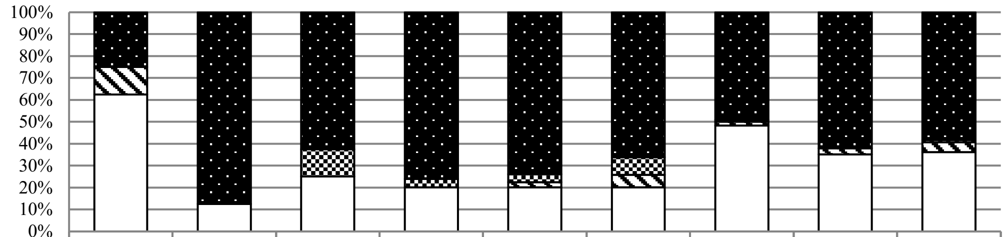
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
multiplikativ	62,5%	87,5%	87,5%	85,1%	88,8%	87,9%	71,4%	83,8%	75,0%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	6,7%	2,2%	7,3%	1,8%	1,8%	1,9%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,7%	3,7%	2,4%	1,8%	3,6%	4,6%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	7,5%	5,2%	2,4%	25,0%	10,8%	18,5%

Aufgabe Nr. 5



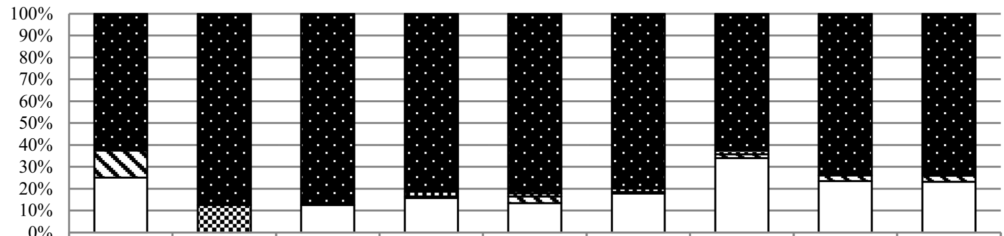
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	87,5%	87,5%	100,0%	89,6%	91,8%	94,4%	81,3%	85,6%	86,1%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	6,0%	3,0%	3,2%	0,9%	0,9%	0,9%
additiv	0,0%	12,5%	0,0%	1,5%	0,7%	0,0%	2,7%	2,7%	3,7%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	3,0%	4,5%	2,4%	15,2%	10,8%	9,3%

Aufgabe Nr. 4



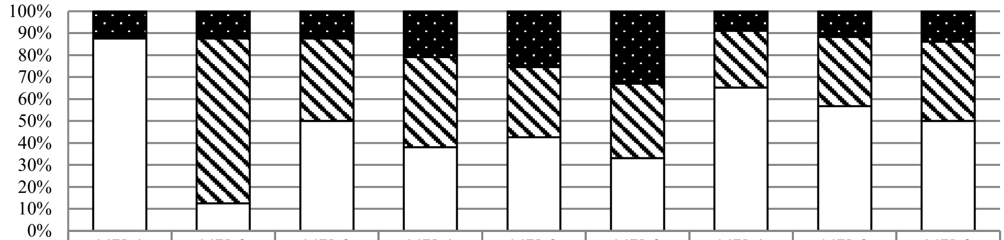
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	25,0%	87,5%	62,5%	76,1%	73,9%	66,1%	49,1%	62,2%	58,3%
beide	0,0%	0,0%	12,5%	3,7%	3,7%	8,1%	0,9%	0,0%	0,9%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	2,2%	5,6%	1,8%	2,7%	4,6%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	25,0%	20,1%	20,1%	20,2%	48,2%	35,1%	36,1%

Aufgabe Nr. 8



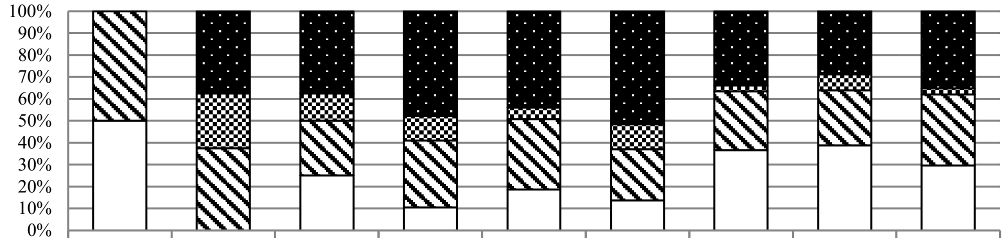
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	62,5%	87,5%	87,5%	81,3%	82,1%	79,8%	62,5%	73,9%	73,1%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	2,2%	1,5%	1,6%	1,8%	0,0%	0,9%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,7%	3,0%	0,8%	1,8%	2,7%	2,8%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	15,7%	13,4%	17,7%	33,9%	23,4%	23,1%

Aufgabe Nr. 13



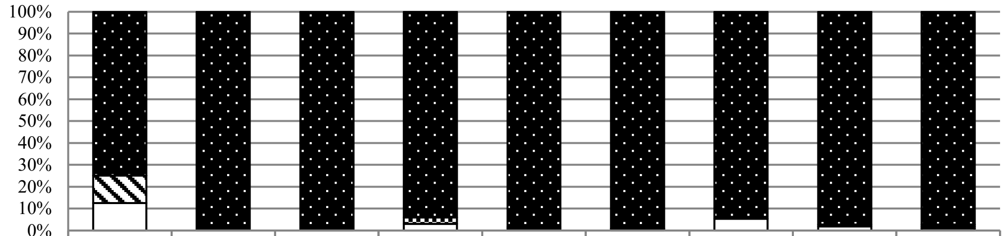
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	12,5%	12,5%	12,5%	20,9%	25,4%	33,1%	8,9%	11,7%	13,9%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
additiv	0,0%	75,0%	37,5%	41,0%	32,1%	33,9%	25,9%	31,5%	36,1%
nicht angemessen	87,5%	12,5%	50,0%	38,1%	42,5%	33,1%	65,2%	56,8%	50,0%

Aufgabe Nr. 16



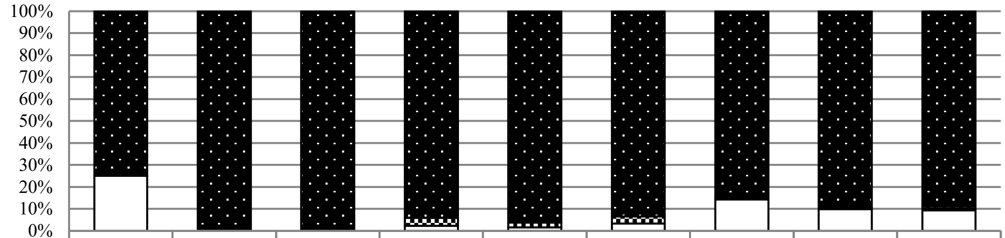
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	0,0%	37,5%	37,5%	47,8%	44,0%	51,6%	33,9%	28,8%	35,2%
beide	0,0%	25,0%	12,5%	11,2%	5,2%	11,3%	2,7%	7,2%	2,8%
additiv	50,0%	37,5%	25,0%	30,6%	32,1%	23,4%	26,8%	25,2%	32,4%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	25,0%	10,4%	18,7%	13,7%	36,6%	38,7%	29,6%

Aufgabe Nr. 2



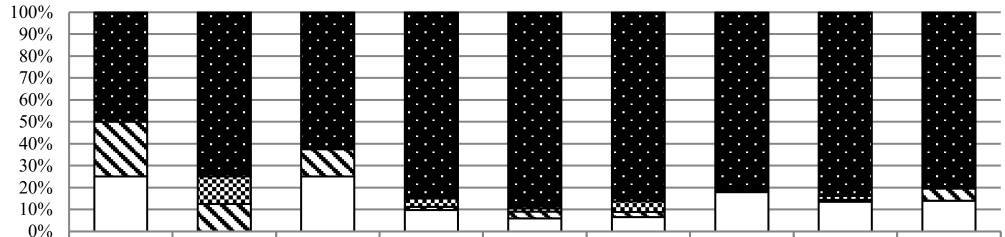
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	75,0%	100,0%	100,0%	94,0%	98,5%	99,2%	94,6%	97,3%	97,2%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	3,0%	0,0%	0,8%	0,0%	0,0%	0,9%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	0,0%	0,0%	0,9%	0,9%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	3,0%	0,7%	0,0%	5,4%	1,8%	0,9%

Aufgabe Nr. 7



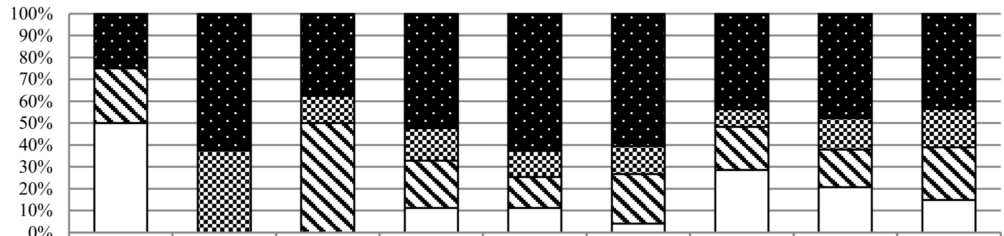
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	75,0%	100,0%	100,0%	94,0%	96,3%	93,5%	84,8%	89,2%	88,9%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	3,7%	2,2%	3,2%	0,9%	0,0%	0,9%
additiv	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,9%	0,9%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	0,0%	2,2%	1,5%	3,2%	14,3%	9,9%	9,3%

Aufgabe Nr. 6



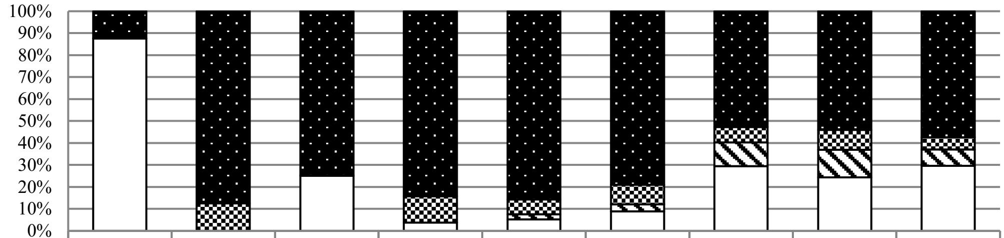
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	50,0%	75,0%	62,5%	85,1%	89,6%	86,3%	81,3%	83,8%	79,6%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	3,7%	1,5%	4,8%	0,0%	1,8%	0,9%
additiv	25,0%	12,5%	12,5%	1,5%	3,0%	2,4%	0,9%	0,9%	5,6%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	25,0%	9,7%	6,0%	6,5%	17,9%	13,5%	13,9%

Aufgabe Nr. 10



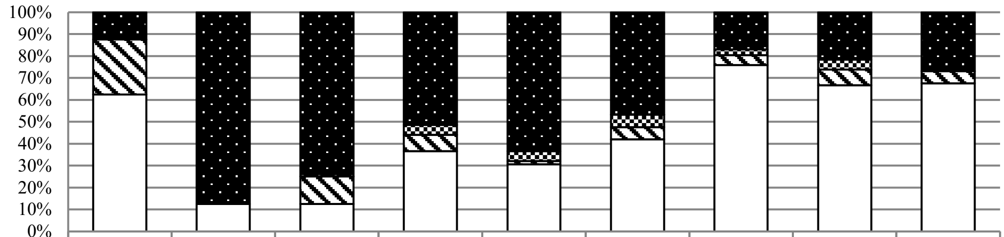
	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	25,0%	62,5%	37,5%	52,2%	62,7%	60,5%	43,8%	47,7%	43,5%
beide	0,0%	37,5%	12,5%	14,9%	11,9%	12,9%	8,0%	14,4%	17,6%
additiv	25,0%	0,0%	50,0%	21,6%	14,2%	22,6%	19,6%	17,1%	24,1%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	0,0%	11,2%	11,2%	4,0%	28,6%	20,7%	14,8%

Aufgabe Nr. 11



	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	12,5%	87,5%	75,0%	84,3%	85,8%	79,0%	52,7%	54,1%	57,4%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	11,9%	6,7%	8,9%	7,1%	9,0%	5,6%
additiv	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	2,2%	3,2%	10,7%	12,6%	7,4%
nicht angemessen	87,5%	0,0%	25,0%	3,7%	5,2%	8,9%	29,5%	24,3%	29,6%

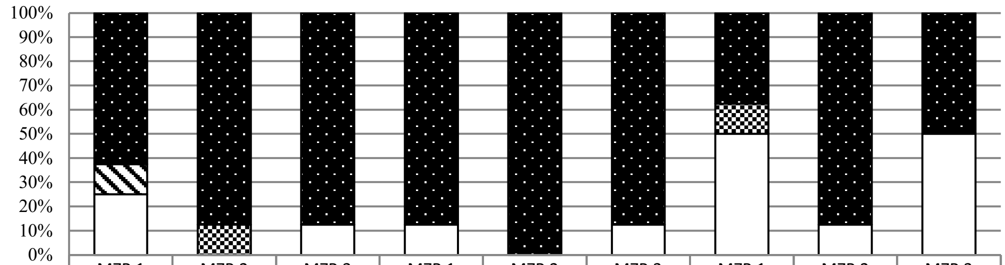
Aufgabe Nr. 14



	MZP 1 n=8	MZP 2 n=8	MZP 3 n=8	MZP 1 n=134	MZP 2 n=134	MZP 3 n=124	MZP 1 n=112	MZP 2 n=111	MZP 3 n=108
	Setting A Einzelförderung mit LU			Setting B Klassenverband mit LU			Setting C Kontrollgruppe ohne LU		
multiplikativ	12,5%	87,5%	75,0%	51,5%	63,4%	46,8%	17,0%	21,6%	26,9%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	4,5%	4,5%	5,6%	2,7%	4,5%	0,0%
additiv	25,0%	0,0%	12,5%	7,5%	1,5%	5,6%	4,5%	7,2%	5,6%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	12,5%	36,6%	30,6%	41,9%	75,9%	66,7%	67,6%

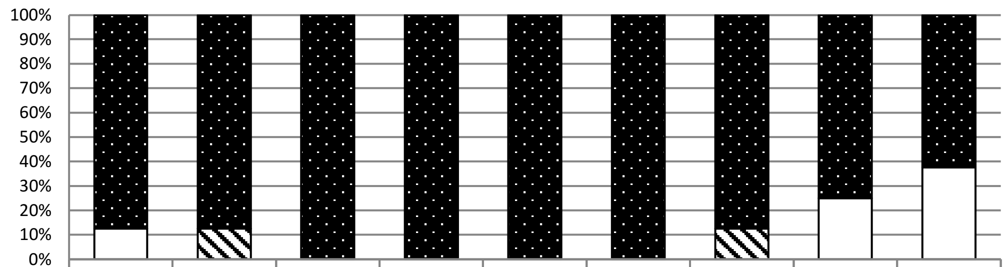
Einzelergebnisse zur Nutzung von Grundvorstellungen – Kinder mit Förderbedarf

Aufgabe Nr. 1



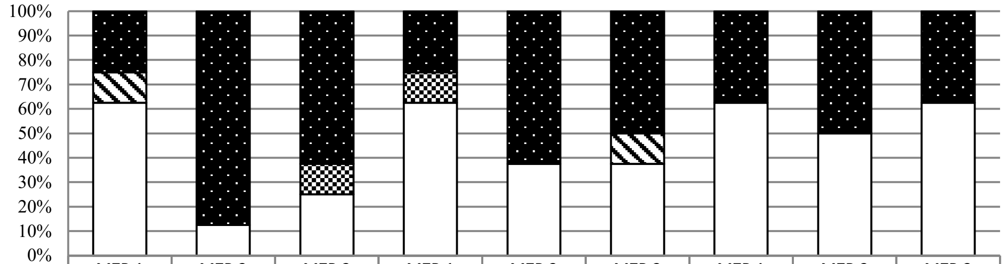
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	62,5%	87,5%	87,5%	87,5%	100,0%	87,5%	37,5%	87,5%	50,0%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	50,0%	12,5%	50,0%

Aufgabe Nr. 5



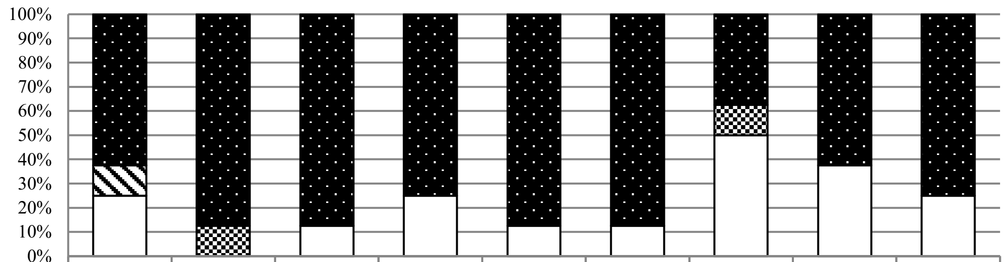
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	87,5%	87,5%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	87,5%	75,0%	62,5%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
additiv	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	25,0%	37,5%

Aufgabe Nr. 4



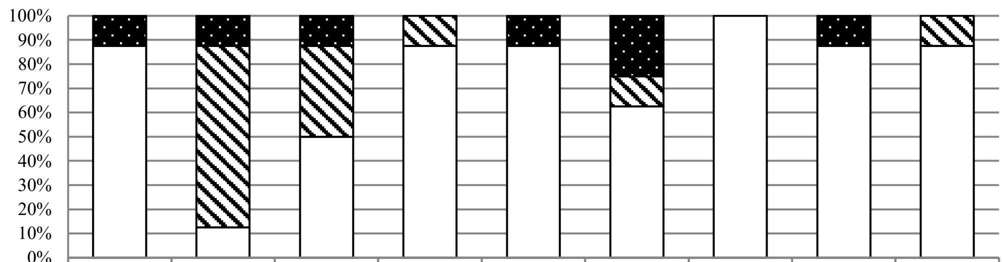
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	25,0%	87,5%	62,5%	25,0%	62,5%	50,0%	37,5%	50,0%	37,5%
beide	0,0%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	25,0%	62,5%	37,5%	37,5%	62,5%	50,0%	62,5%

Aufgabe Nr. 8



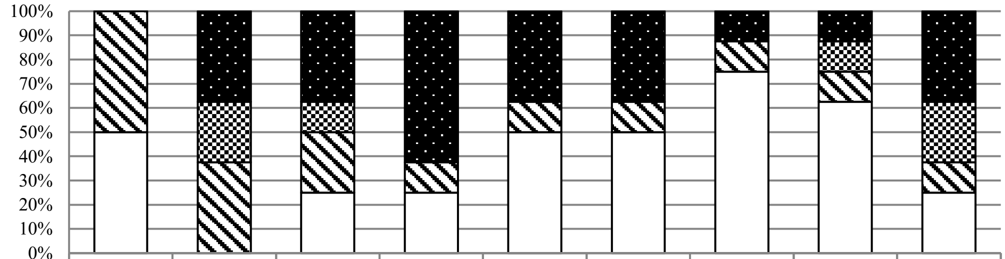
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	62,5%	87,5%	87,5%	75,0%	87,5%	87,5%	37,5%	62,5%	75,0%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	12,5%	25,0%	12,5%	12,5%	50,0%	37,5%	25,0%

Aufgabe Nr. 13



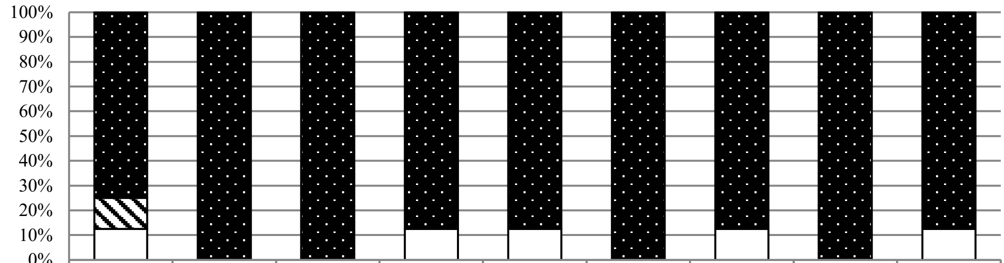
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	12,5%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	25,0%	0,0%	12,5%	0,0%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
additiv	0,0%	75,0%	37,5%	12,5%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	12,5%
nicht angemessen	87,5%	12,5%	50,0%	87,5%	87,5%	62,5%	100,0%	87,5%	87,5%

Aufgabe Nr. 16



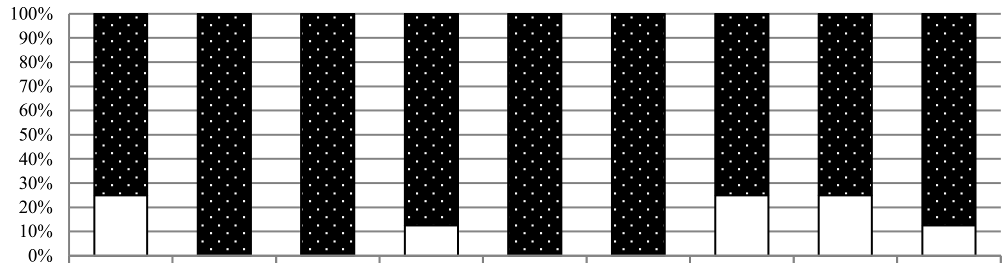
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	0,0%	37,5%	37,5%	62,5%	37,5%	37,5%	12,5%	12,5%	37,5%
beide	0,0%	25,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	25,0%
additiv	50,0%	37,5%	25,0%	12,5%	12,5%	12,5%	12,5%	12,5%	12,5%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	25,0%	25,0%	50,0%	50,0%	75,0%	62,5%	25,0%

Aufgabe Nr. 2



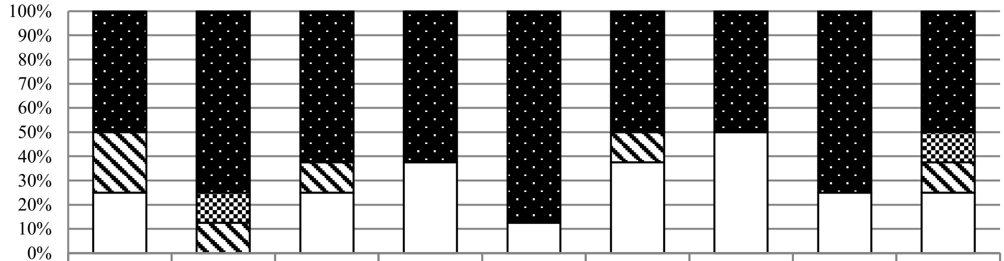
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	75,0%	100,0%	100,0%	87,5%	87,5%	100,0%	87,5%	100,0%	87,5%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
additiv	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	12,5%	0,0%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	12,5%	0,0%	12,5%

Aufgabe Nr. 7



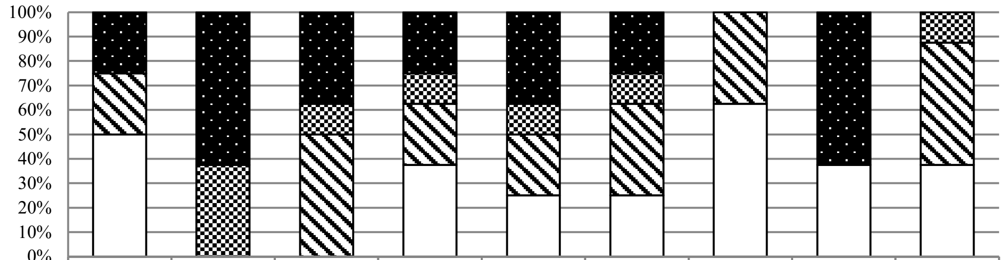
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	75,0%	100,0%	100,0%	87,5%	100,0%	100,0%	75,0%	75,0%	87,5%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
additiv	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	25,0%	25,0%	12,5%

Aufgabe Nr. 6



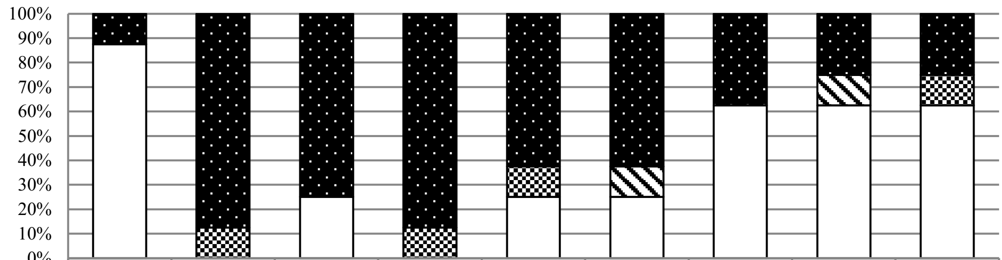
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
multiplikativ	50,0%	75,0%	62,5%	62,5%	87,5%	50,0%	50,0%	75,0%	50,0%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%
additiv	25,0%	12,5%	12,5%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	12,5%
nicht angemessen	25,0%	0,0%	25,0%	37,5%	12,5%	37,5%	50,0%	25,0%	25,0%

Aufgabe Nr. 10



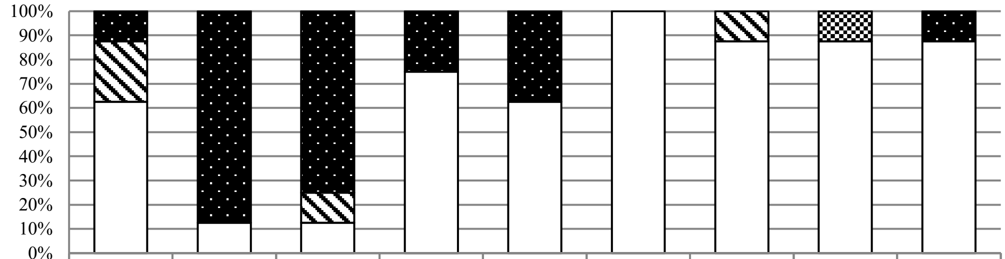
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
multiplikativ	25,0%	62,5%	37,5%	25,0%	37,5%	25,0%	0,0%	62,5%	0,0%
beide	0,0%	37,5%	12,5%	12,5%	12,5%	12,5%	0,0%	0,0%	12,5%
additiv	25,0%	0,0%	50,0%	25,0%	25,0%	37,5%	37,5%	0,0%	50,0%
nicht angemessen	50,0%	0,0%	0,0%	37,5%	25,0%	25,0%	62,5%	37,5%	37,5%

Aufgabe Nr. 11



	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
multiplikativ	12,5%	87,5%	75,0%	87,5%	62,5%	62,5%	37,5%	25,0%	25,0%
beide	0,0%	12,5%	0,0%	12,5%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%
additiv	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	12,5%	0,0%
nicht angemessen	87,5%	0,0%	25,0%	0,0%	25,0%	25,0%	62,5%	62,5%	62,5%

Aufgabe Nr. 14



	Setting A Einzelförderung mit LU (n=8)			Setting B Klassenverband mit LU (n=8)			Setting C Kontrollgruppe ohne LU (n=8)		
	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3	MZP 1	MZP 2	MZP 3
multiplikativ	12,5%	87,5%	75,0%	25,0%	37,5%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%
beide	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%
additiv	25,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%	0,0%	12,5%	0,0%	0,0%
nicht angemessen	62,5%	12,5%	12,5%	75,0%	62,5%	100,0%	87,5%	87,5%	87,5%

University of Bamberg Press

Guter gemeinsamer Mathematikunterricht für Kinder mit unterschiedlichen Voraussetzungen stellt in der Praxis für Lehrkräfte eine große Herausforderung dar. Vor dem Hintergrund der Inklusionsforderung wird in dieser Arbeit ein Konzept zum Multiplikativen Verständnis in der zweiten Jahrgangsstufe entworfen, das in der Einzelförderung sowie im Klassenverband eingesetzt und evaluiert wird. Das Design der Test- und Aufgabenformate basiert auf Forschungsergebnissen und bereits vorliegender Konzeptionen zur Förderung im Inhaltsbereich Multiplikation. Bei der Aufgabenentwicklung spielen Grundvorstellungen wesentlicher Aspekte der Multiplikation und der Wechsel von Darstellungsformen sowie das Verständnis der Eigenschaften der Operation eine besondere Rolle.

eISBN 978-3-86309-753-0

9 783863 097530

www.uni-bamberg.de/ubp/