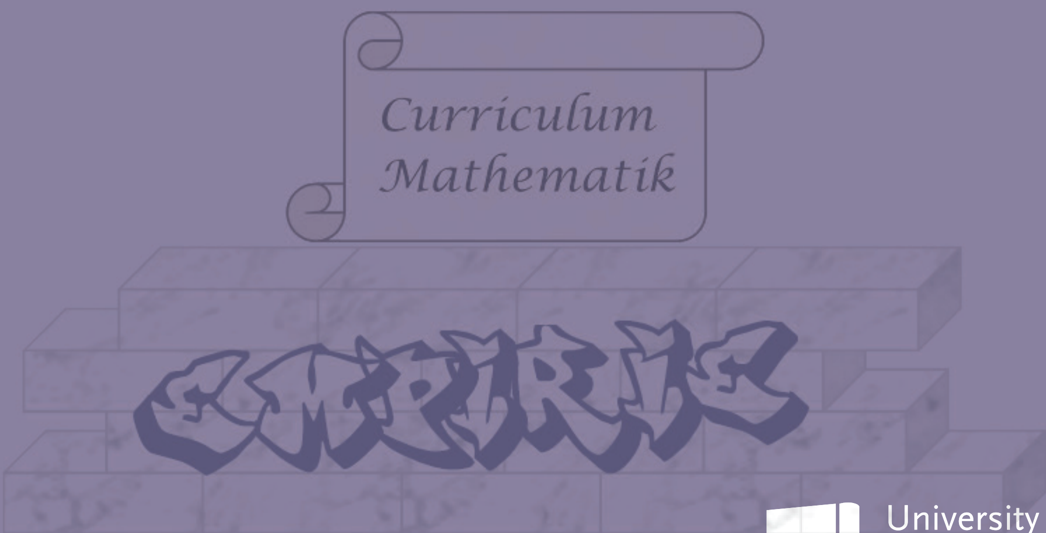
10 | Mathematikdidaktik Grundschule

Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung?

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2021

hrsg. von Anna Susanne Steinweg



University of Bamberg Press

10 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hrsg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 10

University
of Bamberg
Press
2021

Blick auf Schulcurricula Mathematik: Empirische Fundierung?

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2021

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press
2021

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Informationen sind im Internet über http://dnb.d-nb.de/ abrufbar.

Herstellung und Druck: docupoint Magdeburg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press
Umschlagfoto: © A. Steinweg

https://www.uni-bamberg.de/ubp/

ISSN: 2193-2905
ISBN: 978-3-86309-831-5 (Druckausgabe)
eISBN: 978-3-86309-832-2 (Online-Ausgabe)
URN: urn:nbn:de:bvb:473-irb-519368
https://doi.org/10.20378/irb-51936

Inhaltsverzeichnis

… aus den Arbeitsgruppen

Vorwort

In dem hier vorliegenden zehnten Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ sind die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM zusammengefasst. Die Tagung fand am 05. und 06. November 2021 digital statt. Das diesjährige Tagungsthema „Blick auf Schulcurricula Mathematik – Empirische Fundierung?“ wurde mit großem Interesse unter verschiedenen Blickwinkeln diskutiert.

Das Thema der Sicherung einer mathematischen Grundbildung in der Grundschule ist in der wissenschaftlichen, bildungspolitischen und praxisorientierten Diskussion allgegenwärtig. Im Rahmen von Qualitätsentwicklung und -sicherung des Unterrichts werden curriculare Festschreibungen von der Bildungsadministration in den Ländern als ein Steuerungsinstrument in diesem Prozess angesehen. Das nicht zufriedenstellende Abschneiden deutscher Schülerinnen und Schüler in den Vergleichsstudien hat in den letzten zwei Jahrzehnten dazu geführt, dass im curricularen Bereich eine grundlegende Wandlung einsetzte. So wurden u. a. für das Fach Mathematik Primarstufe 2004 bundeseinheitliche Bildungsstandards vereinbart. Diese führten dazu, dass auch ein Überarbeitungsprozess der länderspezifischen Curricula eingeleitet wurde.

Vor diesem Hintergrund ist es interessant, diese Veränderungsprozesse in Beziehung zu Erkenntnissen der Forschung zu setzen. In den Hauptvorträgen wurden verschiedene Aspekte dieses Entwicklungsprozesses in den Blick genommen. So stellte Bernd Wollring (Kassel) in seinem Vortrag ausgehend vom Leitbild "Intellektuelle Autonomie" seine persönliche Sicht auf curriculare Wandlungen im Mathematikunterricht der Grundschule vor und zur Diskussion.

Kathrin Akinwunmi (Dortmund) und Miriam Lüken (Bielefeld) beleuchteten den Inhaltsbereich Muster und Strukturen und diskutierten Ergebnisse empirischer Forschung dazu.

Erkenntnisse zum statistischen Denken in der Grundschule thematisierte Silke Ruwisch (Lüneburg) und betrachtete die Verankerung und Darstellungen in den Curricula der Länder.

Auch in diesem Jahr haben wieder eine Reihe von Kolleginnen und Kollegen ihre Arbeiten aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung im Rahmen der Arbeitsgruppen vorgestellt und somit neue Denkanstöße geboten. Wir bedanken uns dafür herzlich bei allen Vortragenden. Unser Dank gilt auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren der Arbeitsgruppen. Durch ihr kontinuierliches Engagement war es auch in diesem Jahr und unter den veränderten Organisationsbedingungen möglich, dass u. a. auch Nachwuchsforscherinnen und -forscher Gelegenheit zur Präsentation und Diskussion ihrer Projekte bekamen.

Dr. Elke Binner

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger

Prof. Dr. Barbara Ott

Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Webseite des Arbeitskreises http://didaktik-der-mathematik.de/ak/gs/

Muster und Strukturen: Empirische Forschung zu einem schillernden Inhaltsbereich?!

von Kathrin Akinwunmi und Miriam Lüken

Kein Inhaltsbereich wird in der Curriculumsentwicklung so kontrovers diskutiert wie der Bereich Muster *und* Strukturen *und kein Inhaltsbereich wirft für Forschung und Praxis so viele Fragen auf. Um ihn besser fassen zu können, konkretisieren wir zunächst die schillernden Begriffe Muster und Struktur, um darauf aufbauend grundlegende empirische Studien vorzustellen. Wir schließen mit einem Ausblick auf bestehende Forschungsdesiderate und notwendige Weiterarbeit bezüglich dieses Inhaltsbereichs.*

Schlüsselwörter: Muster, Struktur, Bildungsstandards, kindliche Kompetenzentwicklung

1 Einleitung & Problemaufriss

Es entbehrt nicht einer gewissen Ironie, die empirische Fundierung eines Inhaltsbereichs vorzustellen, der in den Lehrplänen von zwei Dritteln (11 von 16) aller Bundesländer als Inhaltsbereich fehlt. Muster und Strukturen befinden sich als Inhaltsbereich in einem Spannungsfeld, das Steinweg (2014) treffend als „zwischen überall und nirgends" beschreibt. Einerseits stellen Muster und Strukturen ein fachliches Grundkonzept des Mathematikunterrichts dar (Wittmann & Müller, 2007) und das Wesen der Mathematik selbst kann als Wissenschaft der Muster beschrieben werden (Devlin, 1998; Sawyer, 1964). Aus dieser Perspektive sind Muster und Strukturen ein integrativer Bestandteil aller Inhaltsbereiche und müssen nicht als eigenständiger Inhaltsbereich ausgewiesen werden. Eine zu starke Forcierung dieser Sicht birgt jedoch Gefahren der „Generalisierung", denn Muster und Strukturen wirken

> *so unerschöpflich, aber auch unüberschaubar, dass Aktivitäten gar nicht mehr genauer analysiert werden müssen, da Muster überall sind. Unterrichtsinhalte werden willkürlich und das Label Muster [...] verschwimmt* (Steinweg, 2014, S. 62).

Als Gegenpol beschreibt Steinweg andererseits die Gefahr einer „Exemplifizierung" von Mustern und Strukturen, wenn isoliert prototypische Musteraktivitäten zur vereinzelten Thematisierung genutzt werden. Dies wird wiederum nicht der fachlichen Bandbreite und der Bedeutung von Mustern und Strukturen gerecht. Dieses bislang nicht aufgelöste Spannungsfeld hat zur Folge, dass der Inhaltsbereich bezüglich der Ausformulierung von Schwerpunkten und Kompetenzen kontrovers diskutiert wird. Muster und Strukturen sind weiterhin schillernde Begriffe, die sich aufgrund ihrer breiten Nutzung klarer Definitionen entziehen. Dies wiederum erschwert sowohl empirische Erforschung als auch die Weiterentwicklung von Unterrichtsangeboten zu Mustern und Strukturen.

In diesem Beitrag möchten wir in Abschnitt 2 zunächst eine Begriffsschärfung vornehmen, auf deren Grundlage in den Abschnitten 3 und 4 dann empirische Forschungen vorgestellt werden. Abschließend greifen wir erneut die aktuelle Diskussion um das Thema Muster und Strukturen in den Curricula auf und schließen mit einem Ausblick auf notwendige Weiterarbeit.

2 Muster und Struktur – eine Begriffsschärfung

Ein definitorisches Unterscheiden auf Basis der verschiedenen nationalen und internationalen Perspektiven auf die Begriffe *Muster* und *Struktur* scheint uns ein erster notwendiger Schritt und gleichzeitig aber auch ein schwieriges Unterfangen zu sein. Die Beschreibung ist an dieser Stelle als Vorschlag zur Weiterarbeit zu verstehen und kann aufgrund der häufigen und vielfältigen Nutzung der Begriffe mit ihren unterschiedlich tradierten Konnotationen sicherlich nicht allen existierenden Vorschlägen in der Literatur gerecht werden. Wir differenzieren zwischen diesen beiden Begriffen in Einklang mit Lüken (2012) und Steinweg (2020).

Muster verstehen wir in einem weiten Sinne, als jegliche Art von wahrnehmbaren Regelmäßigkeiten (Devlin, 1998; Sawyer, 1964). Dabei entstehen Muster durch regelmäßige Wiederholungen (sich wiederholende Muster: symmetrische Figuren, dekadisch strukturierte Anschauungsmittel, periodische Dezimalbruchentwicklungen etc.) oder auch regelmäßige Veränderungen (wachsende Muster: regelmäßige Folgen ähnlicher Figuren, figurierte Zahlen, schöne Päckchen etc.) von (mathematischen) Objekten (Lüken, 2012).

Im Gegensatz dazu bilden *Strukturen* eine nicht direkt als Phänomen wahrnehmbare Basis für die Bildung von Mustern. Struktur verstehen wir als mathematisch festgelegte Eigenschaften und Relationen (Steinweg 2020), die so die Architektur des Musters darstellen (Venkat, Askew, Watson, & Mason, 2019).

Bildlich gesprochen lässt sich jedes Muster entlang seiner Regelmäßigkeiten „zusammenfalten“ und auf die es erzeugende Struktur zurückführen. Steinweg (2020) beschreibt Muster in einem Lernkontext allegorisch als Tür-Öffner zu mathematischen Strukturen. In dem das phänomenologisch zugängliche Muster beschrieben, fortgesetzt, gebildet und insbesondere begründet wird, kann die Tür zu der dahinterliegenden Struktur geöffnet und ein Blick auf die Grundlage für die Entstehung des Musters geworfen werden.

Muster und Strukturen stehen entsprechend in einer unauflöslichen, wechselseitigen Beziehung (vgl. Abb. 1).

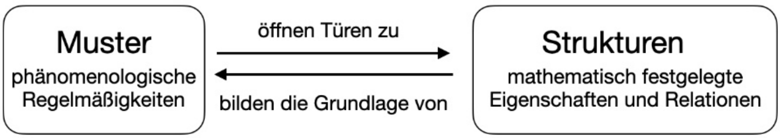


Abb. 1 Muster und Strukturen (nach Akinwunmi & Steinweg, 2022)

Mit Blick auf den Inhaltsbereich lässt sich nun natürlich nach den Strukturen fragen, die für den Mathematikunterricht der Grundschule wesentlich sind. Besonders gewinnbringend scheint hier die Ordnung von Steinweg (2020, S. 42) zu sein, die strukturelle Eigenschaften von „Objekten und Ordnungen“, „Operationen und Äquivalenzen“ sowie „Funktionen“ unterscheidet. Diese Klassifizierung schafft Bewusstheit darüber, welche oft ineinandergreifenden Strukturen als Basis eines Musters bedeutsam sind und sie wird exemplarisch in den Abschnitten 3 und 4 aufgegriffen, wenn die dortigen Strukturen eingeordnet werden.

3 Musterkompetenzen von Kitakindern und Erstklässler*innen

Beginnend bei jungen Kindern des Elementarbereichs erfolgt nun ein Blick auf die Studienlage zu kindlichen Muster- und Strukturkompetenzen. Wir nähern uns diesen von der Phänomenebene, also den Mustern aus und schauen, wenn möglich, inwiefern auch die jeweils zugrundeliegenden Strukturen berührt werden.

3.1 Kindergartenkinder bilden geometrische Muster

In den Bildungsgrundsätzen für Kinder von 0-10 Jahren in Kita und Schule in NRW wird auf ein „intuitives Gespür für Muster und Regelmäßigkeiten“ von Kindern verwiesen (Ministerien NRW, 2018, S. 114). Dass bereits junge Kinder von sich aus – also ohne gezielte Aufforderung von außen – Muster bilden, zeigt eine Studie mit Kitakindern (n=51; 2;2 Jahre – 6;9 Jahre; Lüken, 2021), die während Freispielphasen beobachtet und deren Bauwerke (unter Bauwerken werden in dieser Studie alle mit Gegenständen gebildeten Objekte, Bilder und Figuren verstanden) fotografiert wurden. Die Hälfte aller Bauwerke waren Muster. Diese Kategorie enthielt sowohl durch Kongruenzabbildungen entstandene sich wiederholende Musterfolgen und Parkette, als auch achsen- und drehsymmetrische Figuren und Körper sowie aus Ähnlichkeitsabbildungen entstandene wachsende Muster. Die jüngsten Kinder, die Muster bildeten, waren 2;5 Jahre alt. Drehsymmetrische und wachsende Muster wurden von den ältesten Kindern des Samples gebildet. 38 % der Bauwerke lag keine mathematische Regelmäßigkeit zugrunde. Darüber hinaus waren 12 % der gebildeten Objekte Klassifikationen, bei denen die Kinder zwar eine Regel wiederholt anwendeten, die Gegenstände jedoch nicht mathematisch regelmäßig anordneten (z. B. alle blauen Knöpfe auf einen Haufen).

Auch in der Studie von Wijns, De Smedt, Verschaffel und Torbeyns (2020) zum Konzept des „Spontaneous focus on pattern“, in der 4- bis 5-jährige Kindergartenkinder (n=378) gebeten wurden, einen Turm aus Lego-Duplo-Steinen in drei Farben zu bauen, entstanden neben zufälliger Anordnung der Farben im Turm auch Muster und eine Klassifikation nach Farben. Wijns et al. (2020) wiesen außerdem nach, dass Kinder, die spontan ein Muster bildeten, signifikant besser in einem Test zur Zahlbegriffsentwicklung abschnitten als die Kinder, die nach Farbe sortierten oder kein Muster bildeten.

Beide Studien zeigen: Viele, aber nicht alle jungen Kinder bilden Muster. Außerdem ist nicht ersichtlich, ob ein Muster zufällig entstanden ist oder bewusst gebildet wurde und inwiefern sich die Kinder der zugrundeliegenden *Struktur* bewusst sind.

3.2 Strategien bei sich wiederholenden Musterfolgeaufgaben

Inzwischen gibt es eine breite empirische Basis zu Kompetenzen von 3- bis 7-Jährigen bezüglich sich wiederholender Musterfolgen (Lüken & Sauzet, 2021; Rittle-Johnson, Fyfe, McLean, & McEldoon, 2013; Wijns, Torbeyns, Bakker, De Smedt, & Verschaffel, 2019). Diese Art Muster entsteht aus einer Grundfigur (z. B. drei Würfel in den Farben grün, lila und orange), die durch die geometrische Operation der Translation wiederholt aneinander gereiht wird. Die durchschnittlichen Lösungsraten beispielsweise beim Fortsetzen einer Musterfolge mit einer Grundfigur aus drei Elementen steigen von 7 % bei den Dreijährigen auf 93 % bei Kindern am Ende des ersten Schuljahres (Lüken, 2020; Lüken & Sauzet, 2021). Psychologische Studien zu dieser Thematik zeigen, dass Kompetenzen im Umgang mit Musterfolgeaufgaben mit einer Reihe von kognitiven Fähigkeiten, insbesondere mit dem räumlichen Vorstellungsvermögen (räumliche Beziehungen) und mit dem visuell-räumlichen Arbeitsgedächtnis korrelieren, Musterfolgekompetenzen insgesamt jedoch einen eigenständigen Faktor darstellen, der nicht in den anderen Fähigkeitsbereichen aufgeht (Rittle-Johnson, Zippert, & Boice, 2019; Wijns et al., 2019).

Auch wenn wir viel darüber wissen, wie gut junge Kinder mit Musterfolgen umgehen können, gibt es weniger empirische Forschung zu der Frage, inwiefern junge Kinder dabei einen Blick hinter die Tür werfen, d. h. inwiefern sie die *Struktur* von sich wiederholenden Musterfolgen bei Musterfolgeaktivitäten fokussieren und nutzen. Hierzu befragte Lüken (2020; Lüken & Sauzet, 2021) n=254 3- bis 7-Jährige nach ihren Strategien bei acht unterschiedlichen Musterfolgeaktivitäten (z.B. Nachbauen, Reparieren, Fortsetzen, Übersetzen). Vier grundlegend verschiedene Herangehensweisen lassen sich unterscheiden:

1) Strategien, die sich weder auf die Struktur der Musterfolge noch auf irgendeine Regelmäßigkeit innerhalb der Musterfolge beziehen (z. B. Raten, zufällige Auswahl, Auswahl aufgrund von Vorlieben).
2) Strategien, bei denen die Kinder Einzelelemente der Musterfolge bewusst unterscheiden und klassifizierend sowie vergleichend vorgehen (z. B. Elemente in Eins-zu-eins-Zuordnung anlegen).

3) Strategien, bei denen die Reihenfolge der Elemente fokussiert und eine stark rekursive Herangehensweise gezeigt wird (z. B. die Elemente rhythmisch nacheinander „aufsagen“).
4) Strategien, die sich auf die Grundfigur und ihre Wiederholung beziehen (z. B. „*Ich seh‘ einen Grünen, einen Lilanen und einen Orangen. Die sind immer drei und dann fängt es wieder so an.*“).

In den Kategorien 2 und 3 werden Kompetenzen sichtbar, die sich auf das Erkennen und Ausdrücken von Regelmäßigkeiten der Musterfolge beziehen, während sich in Kategorie 4 sogar schon eine erste Strukturfokussierung erkennen lässt. In einer sich wiederholenden Musterfolge entstehen die Regelmäßigkeiten durch eine Translation der Grundfigur. Es sind die Eigenschaften der Translation, welche den Charakter der Musterfolge prägen (bei einer wiederholten Spiegelung z. B. würde ein ganz anderes Muster entstehen). Lernende des untersuchten Alters können diese Struktur mit ihren sprachlichen Mitteln allenfalls andeuten „*Die sind immer drei und dann fängt es wieder so an*“.

Dreijährige zeigen hauptsächlich Strategien aus Kategorie 1 (92 %), Ende Klasse 1 sind rekursive Strategien die häufigsten (Kategorie 3, 48 %). Mit Blick auf eine Strukturnutzung (Kategorie 4) ist auch ohne gezielte Instruktion eine Entwicklung von 1 % aller Strategien aus Kategorie 4 bei den Dreijährigen, zu 8 % vor der Einschulung, bis auf 17 % Ende des ersten Schuljahres zu sehen. Angesichts der Tatsache, dass sich wiederholende Musterfolgen in den meisten Mathematikbüchern als Thema im ersten Schuljahr vorgesehen sind, scheint der Anteil der Erstklässler*innen, die die zugrundeliegenden Strukturen beschreiben und nutzen, jedoch eher gering zu sein.

3.3 Erstklässler*innen bilden arithmetische Muster

Im Rahmen ihres Dissertationsprojekts zur individuellen mathematischen Kreativität stellte Bruhn (2020) Erstklässler*innen (n=18) offene Aufgaben mit arithmetischem Inhalt (z. B. Finde Aufgaben mit der Zahl 4.) und befragte die Kinder nach ihren Ideen für den jeweils produzierten Zahlensatz. Neben „frei-assoziierten Ideen“, die unzusammenhängende, schöpferische Einfälle wiederspiegeln, konnte Bruhn drei weitere Ideentypen beobachten, bei denen die Kinder die produzierten Zahlensätze über Zahl-, Term- und Aufgabenbeziehungen miteinander in Verbindung brachten – die Kinder bildeten unterschiedliche Arten von Mustern. Bei den „klassifizierenden Ideen“ besteht eine Verbindung zwischen den Zahlensätzen in dem Sinn, dass sie aufgrund eines Merkmals sortiert wurden („*Immer die 4 vorne.*“ „*Ich mach immer Plusaufgaben.*“). Oft brachten die Erstklässler*innen Zahlensätze miteinander in Verbindung, indem sie wachsende Musterfolgen aufgrund einer im Zahlensatz enthaltenen Zahl bildeten („*3+**1**=4, **2**+2=4, **3**+4=7, 14-**4**=10*“). Bei diesen „muster-bildenden Ideen“ handelt es sich um Muster auf Zahlenebene. Im Gegensatz dazu entstehen aus „struktur-nutzenden Ideen“ arithmetische Muster, bei denen die Kinder strukturelle Eigenschaften der Addition und Subtraktion (wie Kommutativität, Reversibilität, Konstanz des Ergebnisses) nutzen, um von einem Zahlensatz auf den nächsten zu schließen. So erklären die Kinder die Verbindung von Zahlensätzen über z. B. Tauschaufgaben, Umkehraufgaben oder Nachbaraufgaben.

Bruhn konnte zeigen, dass Kinder mit hohen Werten in einem standardisierten Mathematiktest sowie einem Intelligenztest keine musterbildenden und häufiger struktur-nutzende Ideen generierten als das restliche Sample. Kinder mit niedrigen Werten im Mathematiktest zeigten hingegen fast keine struktur-nutzenden Ideen.

3.4 Zwischenfazit

Objekte der Lebenswelt zu ordnen und daraus Muster zu bilden, scheint ein menschliches Verhalten zu sein, das sich auch ohne Instruktion bei vielen jungen Kindern entwickelt. Aus der Zusammenschau der Studien zu kindlichen Musterkompetenzen lassen sich inhaltsunabhängige (Teil-)Kompetenzen für das Wahrnehmen und Bilden von Mustern ableiten. Als bedeutsam erscheinen die vergleichende Suche nach Ähnlichkeiten und Unterschieden, das Klassifizieren nach qualitativen und quantitativen Merkmalen, das räumliche (An-)Ordnen sowie die Bildung von Teilmengen (groupitizing) (siehe hierzu Sprenger & Benz, 2020) und Bündelungen (unitizing). Eine systematische Erforschung der Entwicklung und des Zusammenspiels dieser Kompetenzen steht noch aus. Die referierten Studien zeigen aber auch: Trotz teilweise hoher Musterkompetenzen scheinen verhältnismäßig wenige Kinder im Elementarbereich einen Blick hinter die Kulissen des Musters auf die zugrundeliegende Struktur zu werfen. Dies könnte auf eine natürliche Entwicklung in diesem Bereich oder auf noch fehlende Möglichkeiten der Versprachlichung hindeuten. Beides wäre in weiteren Studien zu belegen, wobei neuere Forschungsmethoden einbezogen werden sollten (siehe auch hier Sprenger & Benz, 2020).

4 Dritt- und Viertklässler*innen verallgemeinern Muster und Strukturen

Nach dem Blick auf den Elementarbereich und die Schuleingangsphase betrachten wir in diesem Abschnitt ältere Kinder am Ende der Grundschulzeit und somit vermehrt auch die Ebene der Strukturen. Eine besondere Bedeutung kommt dabei dem Prozess des Verallgemeinerns von Mustern und Strukturen zu.

4.1 Ein erster Blick auf Verallgemeinerungsprozesse

In einer früheren Untersuchung zum algebraischen Denken rekonstruiert Akinwunmi (2012) kindliche Verallgemeinerungen von mathematischen Mustern. Sie stellt dabei unter anderem heraus, welche linguistischen Mittel die Lernenden beim Beschreiben und Begründen von Mustern nutzen. Die folgende Auflistung gibt eine Übersicht über verschiedene Verallgemeinerungsweisen, die nicht als Niveaustufen, sondern lediglich als Möglichkeiten zur Kommunikation über Muster verstanden werden dürfen. Sie werden von den Lernenden ebenso in Mischformen in der Interaktion aufgabenübergreifend genutzt.

- **Angabe eines Beispiels**: Lernende geben ein Beispiel an und kennzeichnen dieses dabei explizit als solches („*Das ist zum Beispiel drei mal drei*“).
- **Aufzählung mehrerer Beispiele**: Lernende zählen mehrere Beispiele auf und verweisen ggf. auf einen Fortlauf („*Das ist ein mal eins, zwei mal zwei, drei mal drei und so weiter*“).
- **Quasi-Variablen:** Lernende verwenden konkrete Zahlen und verbinden diese mit sprachlich verallgemeinernden Elementen („*Ich rechne immer drei mal drei*“).

- **Bedingungssätze:** Lernende verwenden Bedingungssätze. („*Wenn da drei steht, dann rechne ich drei mal drei*“).
- **Variablen:** Lernende verwenden Wörter oder Zeichen mit Variablencharakter („*Man muss die Zahl mal die gleiche Zahl rechnen.*“ oder „*? · ?*“).

Zwar weisen die ersten vier Verallgemeinerungsweisen Grenzen der Allgemeingültigkeit auf, dennoch verdeutlichen sie jeweils den allgemeinen Charakter des Musters und schaffen Bezüge zu den wahrnehmbaren Regelmäßigkeiten. Auch internationale Studien bestätigen, dass Lernende in der Primarstufe bereits vor der Einführung der algebraischen Formelsprache mit Hilfe ihrer eigenen sprachlichen Mittel in der Lage sind, Muster zu verallgemeinern (u. a. Radford, 2018).

Gleichzeitig zeigte sich in der Studie von Akinwunmi (2012) jedoch auch, dass die kindlichen Verallgemeinerungen kein hinreichender Indikator für das strukturelle Verständnis innerhalb von Argumentationen der Lernenden sind. In der qualitativen Analyse von Argumentationsprozessen konnte gezeigt werden, dass ein Verständnis von strukturellen Zusammenhängen nicht auf der Basis der verwendeten Verallgemeinerungen identifizierbar ist.

4.2 Verallgemeinern mit Fokus auf Muster oder auf Struktur

Die in Abschnitt 2 dargelegte Unterscheidung von *Muster* und *Struktur* gibt deshalb Anlass zu einer erneuten vertieften Analyse von Verallgemeinerungsprozessen. In einem Projekt zum algebraischen Denken untersuchen Akinwunmi und Steinweg (2022) Verallgemeinerungsprozesse von Grundschulkindern mit dem Ziel, ein strukturelles Verständnis in den Begründungsprozessen zu Operationseigenschaften zu rekonstruieren. Vorgestellt werden in diesem Beitrag Ergebnisse einer Teilstudie, in der 45 Lernende der dritten bis vierten Jahrgangsstufe zu Konstanzeigenschaften der Summe und der Differenz befragt werden, wobei in diesem Beitrag direkt auf die Konstanz der Differenz fokussiert wird.

Der Aufbau der Interviews beinhaltet zwei Teile: Zunächst werden die Lernenden mit einer symbolischen Darstellung in Form eines „schönen Päckchens“ mit einem Muster konfrontiert (u. a. Abb. 2, links).

Anschließend werden sie mit ikonischen Impulsen zu Darstellungswechseln angeregt (u. a. Abb. 2, rechte Seite).

Abb. 2 Zwei Aufgabenausschnitte aus dem Interview zur Konstanz der Differenz (rechts aus Zahlenbuch 1: Nührenbörger et al., 2017, S. 89 , ©Ernst Klett Verlag GmbH)

Als phänomenologische Regelmäßigkeiten sind in diesem Aufgabenbeispiel die simultane gleichsinnige Veränderung von Minuend und Subtrahend sowie die Konstanz der Differenz erfassbar. Die dem Muster zugrunde liegende Struktur basiert auf Eigenschaften von *Operationen* (siehe Abschnitt 2). Die Konstanz der Differenz ergibt sich mathematisch aufgrund der Reversibilität der Operation, also auf der Grundlage, dass zwischen Addition und Subtraktion eine Beziehung als Umkehroperationen besteht, welche folglich bei simultaner gleichsinniger Veränderung von Minuend und Subtrahend zum neutralen Element führt und so keine Veränderung in der Differenz herbeiführt.

Studien (z. B. Häsel-Weide, 2016; Link, 2012) zeigen, dass Lernende bei der Thematisierung solcher Aufgabenserien jedoch oftmals auf der phänomenologischen Muster-Ebene stehen bleiben, die Aufmerksamkeit bei solchen Aufgabenserien stark auf die Veränderungen zwischen Zahlen richten und dabei der zum Verständnis wichtige Fokus auf die Operationen und Aufgabenbeziehungen verloren geht.

Die in den videografierten Interviews entstandenen Transkripte werden mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks von Steinbring (2005) analysiert, wodurch an die epistemologisch orientierte Analyse von Verallgemeinerungsprozessen aus der Studie von Akinwunmi (2012) angeknüpft wird.

Es zeigt sich, dass sich der im Theorierahmen dargestellte Unterschied zwischen Mustern und Strukturen auch empirisch in den Verallgemeinerungsprozessen als unterschiedliche Fokussierungen wiederfinden lässt. Dies wird im Folgenden zunächst anhand einer Beispielszene erläutert, bevor weitere Ergebnisse zusammenfassend dargestellt werden.

Vorgestellt werden hier zwei kurze Ausschnitte aus dem Interview mit dem Viertklässler Nils. Bei diesem lassen sich zu Beginn des Interviews bei der Konfrontation mit den symbolisch vorgelegten schönen Päckchen ausschließlich Verallgemeinerungen finden, die sich auf oberflächliche Regelmäßigkeiten beziehen. Auf die veränderlichen Zahlen des Päckchens verweist er zunächst bei der Beschreibung mit Hilfe der Wortvariablen links und rechts und begründet dann auf Nachfrage das Gleichbleiben des Ergebnisses wie folgt:

Nils: Weil, wenn man beides minus eins nimmt, das ist ja nicht so wie bei Plus. Also bei beiden minus eins, kommt das gleiche Ergebnis raus, weil – ja, wie soll ich das jetzt erklären.

Nils bleibt nicht beim isolierten Beschreiben der einzelnen Zahlenfolgen stehen, sondern bringt die erkannten Regelmäßigkeiten auch in einen kausalen Zusammenhang. Das Gleichbleiben des Ergebnisses erläutert er als eine ihm bekannte Wirkung der gleichzeitigen Verringerung von Minuend und Subtrahend. Dennoch kann in seiner Erläuterung an dieser Stelle kein strukturelles Verständnis identifiziert (natürlich aber auch nicht abgesprochen) werden. Möglicherweise bezieht er sich in der Aussage und der darin enthaltenen Kontrastierung zu Additionsaufgaben auf empirische Erfahrungen oder herausgearbeitete Regeln aus dem Unterricht.

Als Nils im zweiten Teil des Interviews mit der Schulbuchabbildung (aus Abb. 2) konfrontiert wird, verändert sich seine Argumentation grundlegend. Nils stellt die Handlung des Kindes auf dem Bild enaktiv mit Plättchen nach und wird dann erneut von der Interviewerin zu einer Begründung aufgefordert.

I.: Können dir die Plättchen helfen zu erklären, warum das Ergebnis immer gleich bleibt?

Nils: Also wenn bei beiden was dazukommt, ist einer mehr (*legt ein weiteres zehntes Plättchen*), dafür muss man aber auch dafür einen mehr abziehen. Also kann man eigentlich diesen hier gleich

> wieder wegnehmen (*nimmt das zehnte Plättchen weg*) und die anderen 4 dazu auch noch (*nimmt die weiteren 4 Plättchen heraus*). Das wären dann 5 Plättchen.

Durch den Darstellungswechsel entsteht eine neue Deutungsanforderung, die Nils dazu veranlasst, die Auswirkungen der gleichsinnigen Erhöhung zu betrachten und zu verallgemeinern. Dabei bezieht er sich in seiner Argumentation auf die Reversibilität von Addition und Subtraktion („*dafür muss man aber auch dafür einen mehr abziehen. Also kann man eigentlich diesen hier gleich wieder wegnehmen*") und somit auf strukturelle Eigenschaften der Operationen, welche die Basis für die Entstehung der Konstanz bilden. Im Vergleich der beiden Szenen fällt auf, dass sich die Verallgemeinerungen von Nils in der ersten Szene auf sichtbare Regelmäßigkeiten und empirisches Wissen beziehen, während er in der zweiten Szene die strukturellen Eigenschaften der Operationen verallgemeinert.

Die hier beschriebenen Erkenntnisse passen sehr gut zu der von Schwarzkopf (2003) herausgestellten Unterscheidung zwischen „empirischen" und „strukturellen" Argumenten, die er in Begründungsprozessen in der Unterrichtsinteraktion rekonstruiert. Während erstere Wissen durch die Überprüfung von Fällen auf der Phänomenebene empirisch absichern, nutzen letztere die zugrunde liegenden Strukturen als Erklärung zur Erzeugung des Phänomens (Schwarzkopf 2003). Die hier beschriebene Studie macht solche strukturellen Argumentationen als Fokussierungen auf die inhaltsspezifischen Eigenschaften von mathematischen Objekten greifbar.

Die Unterscheidung zwischen *Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Muster* und *Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Strukturen* erweist sich in dem Algebra-Projekt (Akinwunmi & Steinweg, 2022) auch über die hier beschriebene Teilstudie hinaus als gewinnbringende Perspektive für die empirische Analyse von Begründungsprozessen. Darstellungswechsel auf die ikonische oder enaktive Ebene zeigen sich dabei als potentiell gewinnbringend, um Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Strukturen anzuregen, gleichwohl aber nicht als hinreichend, denn es lassen sich weiterhin Verallgemeinerungen rekonstruieren, die auf der Musterebene verharren. Ohne strukturellen Fokus nutzen die Lernenden zur Begründung der Entstehung von Regelmäßigkeiten (wie z. B. die Konstanz des Ergebnisses) dann weitere Regelmäßigkeiten an anderer Stelle (z. B. in den Zahlen der Aufgaben) und verbleiben so an der sichtbaren Oberfläche des Musters.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Unser Auftrag erschien zunächst paradox: empirische Forschung zu einem Inhaltsbereich vorzustellen, der selbst noch so kontrovers diskutiert wird und in dem zu Beginn beschriebenen Spannungsfeld steckt. Vielleicht ist unser Anliegen aber gerade deshalb umso wichtiger.

Wir starteten diesen Beitrag in Abschnitt 2 mit einer Charakterisierung der Begriffe *Muster* und *Struktur*. Diese Explizierung ist wichtig, weil sie einen ersten Weg aus der Diffusität zwischen Generalisierung und Exemplifizierung schafft. Sie dient dazu, den Blick auf die wesentlichen Strukturen zu lenken, um diese in den verschiedenen Inhaltsbereichen identifizieren und geeignete Mustertüren schaffen zu können.

Die Ergebnisse der empirischen Studien in Abschnitt 3 stützen die stoffdidaktisch seit langem betonte Bedeutsamkeit eines Verständnisses mathematischer Muster und Strukturen. Durchgängig zeigen bereits junge Kinder hohe Musterkompetenzen im Sinne des Erkennens und Bildens von Regelmäßigkeiten und es konnten hierzu übergeordnete (Teil-)Kompetenzen identifiziert werden (Abs. 3.4). Es wurde jedoch auch deutlich, dass nur wenige junge Kinder einen Fokus auf die Strukturen einnehmen. In Abschnitt 4 wurden Verallgemeinerungsprozesse von älteren Kindern des dritten und vierten Schuljahres betrachtet und bezüglich der Fokussierungen auf Muster oder Strukturen unterschieden. Die Studien zeigen Möglichkeiten auf, wie strukturelles Verständnis auch empirisch gefasst werden kann und liefern damit erste allgemeine Ansätze zur empirischen Untersuchung von Strategien und Prozessen rund um Muster und Strukturen – auch wenn sie sich notwendiger Weise auf ausgewählte Themenfelder beziehen. Sie geben daher Anlass für die weitere Erforschung von Muster- und Strukturkompetenzen innerhalb der verschiedenen Inhaltsbereiche.

Schließen möchten wir diesen Beitrag mit einem Rückbezug auf die Kontroverse bezüglich des Inhaltsbereichs in den Curricula. Dieser Beitrag zeigt die Dualität des Themas Muster und Strukturen auf, die wünschenswerter Weise nicht nur in weiterer Forschung, sondern ebenso in der Entwicklung von Curricula als auch von Lehrerfort- und Weiterbildungen zu berücksichtigen ist. Es erscheint sinnvoll, die charakteristischen Strategien und Prozesse rund um Muster und Strukturen eigenständig auszuweisen, um den Fokus nicht im Spannungsfeld zwischen Generalisierung und Exemplifizierung zu verlieren. Die ausgewiesenen Kompetenzerwartungen dürfen unter keinen Umständen nur auf Musterebene, also beim Erkennen, Beschreiben und Fortsetzen von Regelmäßigkeiten auf Phänomenebene stehen bleiben, sondern müssen den Fokus ebenso auf die Erforschung der dahinterliegenden Strukturen legen. Zusätzlich ist ebenso innerhalb der einzelnen Inhaltsbereiche herauszuarbeiten, was die zentralen strukturellen Eigenschaften der inhaltsspezifischen Gegenstände sind und dafür geeignete Mustertüren auszuwählen bzw. zu entwickeln. Insgesamt ist weitere empirische Forschung und inhaltliche Ausgestaltung des Inhaltsbereichs erforderlich, damit Mustern und Strukturen die Aufmerksamkeit zukommt, die ihrer Bedeutung gerecht wird.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Akinwunmi, K. & Steinweg, A. S. (2022 / eingereicht). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. *12th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)*. Bolzano: ERME.

Bruhn, S. (2020). Kreativität von Kindern im Umgang mit offenen Aufgaben – eine Analyse arithmetischer Ideen. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 185–188). Münster: WTM.

Devlin, K. (1998). *Muster der Mathematik*. Heidelberg: Spektrum.

Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Strukturfokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster. Entwurf, Erprobung und Überarbeitung von Unterrichtsaktivitäten als ein Beispiel für Entwicklungsforschung*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster: Waxmann.

Lüken, M. (2020, April 17–21). *Broadening the View on Patterning: First Graders' Patterning Skills and Strategies* [Symposium]. AERA Annual Meeting San Francisco, CA. http://tinyurl.com/v4lk86s

Lüken, M. (2021, August 23–27). *Patterning during free play – different materials prompt different mathematical structures* [Symposium]. EARLI 2021 Conference, Gothenburg, Sweden.

Lüken, M. & Sauzet, O. (2021). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning, 23*(1), 28–48.

Ministerien NRW (2018). *Bildungsgrundsätze für Kinder von 0 bis 10 Jahren in Kindertagesbetreuung und Schulen im Primarbereich in Nordrhein-Westfalen*. Freiburg: Herder.

Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D. & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 1*. Ausgabe 2017. Leipzig: Klett.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Hrsg.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (S. 3–25). New York: Springer.

Rittle-Johnson, B., Fyfe, E. R., McLean, L. E. & McEldoon, K. L. (2013). Emerging understanding of patterning in 4-year-olds. *Journal of Cognition and Development, 14*(3), 376–396.

Rittle-Johnson, B., Zippert, E. L. & Boice, K. L. (2019). The roles of patterning and spatial skills in early mathematics development. *Early Childhood Research Quarterly, 46*, 166–178.

Sawyer, W. W. (1964). *Vision in Elementary Mathematics*. Harmondsworth: Penguin Books.

Schwarzkopf, R. (2003). Begründungen und neues Wissen: Die Spanne zwischen empirischen und strukturellen Argumenten in mathematischen Lernprozessen der Grundschule. *Journal für Didaktik der Mathematik*, 3/4, 211–235.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. New York: Springer.

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends – Eine Spurensuche. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *10 Jahre Bildungsstandards: Tagungsband des AK Grundschule in der GDM. Bamberg* (S. 51–66). Bamberg: University Press.

Steinweg, A. S. (2020). Muster und Strukturen: Anschlussfähige Mathematik von Anfang an. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 39–46). Münster: WTM.

Sprenger, P. & Benz, C. (2020). Children's perception of structures when determining cardinality of sets – results of an eye-tracking study with 5-year-old children. *ZDM, 52,* 753–765.

Venkat, H., Askew, M., Watson, A. & Mason, J. (2019). Architecture of mathematical structure. *For the Learning of mathematics 39*(1), 13–17.

Wijns, N., De Smedt, B., Verschaffel, L. & Torbeyns, J. (2020). Are preschoolers who spontaneously create patterns better in mathematics? *British Journal of Educational Psychology, 90*(3), 753–769.

Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B. & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly, 49,* 152–163.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. v. d. Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Dr. Kathrin Akinwunmi
TU Dortmund
Vogelpothsweg 87
44221 Dortmund
kathrin.akinwunmi@tu-dortmund.de

Prof. Dr. Miriam Lüken
Universität Bielefeld
Universitätsstraße 25
33615 Bielefeld
miriam.lueken@uni-bielefeld.de

Statistisches Denken in der Grundschule: Alles nur Zufall?

von Silke Ruwisch

*Statistische Informationen zu verstehen, sie kritisch hinterfragen und beurteilen zu können, erscheint wichtiger denn je für eine mündige gesellschaftliche Teilhabe. Gelingt es, eine derartige Grundhaltung in der Grundschule anzubahnen, die langfristig zu einer dementsprechenden Datenkompetenz ausgebaut werden kann? Erkenntnisse zur Datenkompetenz von Grundschüler*innen werden ebenso zur Diskussion gestellt wie Fragen zur diesbezüglichen Lehrkräftebildung.*

Schlüsselwörter: statistical literacy, data literacy, Datenkompetenz

„*Data Literacy* ist eine grundlegende Kompetenz, um in der digitalen Welt in Wissenschaft, Arbeitswelt und Gesellschaft bestehen und teilhaben zu können. Data Literacy ist die Fähigkeit, planvoll mit Daten umzugehen und sie im jeweiligen Kontext bewusst einsetzen und hinterfragen zu können.“ (Stifterverband, 2018) Aus dem Projekt ProCivicStat heraus, z. B. Engel, Biehler, Frischemeier, Podworny, Schiller und Martignon (2019), werden sogar noch erweiterte zukünftige Anforderungen zur gesellschaftlichen Teilhabe postuliert. Die Autor*innen formulieren darin *Zivilstatistik* als wesentliche Weiterentwicklung des Konzeptes der *Statistical Literacy* und ziehen im Anschluss sechs bildungspolitische und curriculare Implikationen inhaltlicher, didaktisch-methodischer und systemischer Art zur Veränderung der statistischen Aus- und Weiterbildung an allgemeinbildenden Schulen, Hochschulen und Universitäten.

Data Literacy, Statistical Literacy, Zivilstatistik, Datenkompetenz – welche Konzepte werden jeweils bezeichnet und welche Erwartungen an derart mündige Bürgerinnen und Bürger damit verbunden? Und welchen Beitrag dazu soll und kann der Mathematikunterricht in der Grundschule leisten?

1 Statistik und Wahrscheinlichkeit in der Schule

Statistik als Teil der Schulmathematik ist auch international noch ein relativ junger Inhaltsbereich. 1989 wurde mit den NCTM-Standards *Statistik und Wahrscheinlichkeit* als eine durchgehende Leitidee für den

Mathematikunterricht vom Kindergarten bis zur Universität festgelegt. Für das Ende von Klasse 4 wurden die folgenden Standards (S. 54) formuliert:

- collect, organize, and describe data;
- construct, read, and interpret displays of data;
- formulate and solve problems that involve collecting and analyzing data
- explore concepts of chance

In den Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe der KMK (2004) finden sich in Anbindung an die NCTM-Standards ähnliche Ausführungen (vgl. Abb. 1).

Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Daten erfassen und darstellen:

- in Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen,
- aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen.

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen:

- Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich),
- Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen.

Abb. 1 Bildungsstandards in der Leitidee Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit (KMK, 2004, S. 14)

Bezogen auf das Grundschulniveau bis Ende Klasse 4 bezeichnet Watson (2005) die formulierten NCTM-Standards zur Statistik als „practice of statistics“ (S. 56) und verweist darauf, dass Moore bereits 1990 die Gefahr formulierte, die NCTM-Standards könnten derart ausgelegt werden, dass Statistik lediglich die Funktion eines Werkzeugkastens erhalte. Auf diese Art unterrichtet, werde sie eher unverstanden als Trickkiste wahrgenommen werden (Moore, 1990). Bereits in diesem Statement wird der schmale Grat zwischen unverstandenem Abarbeiten statistischer Methoden – Algorithmen als Tricks – und dem verständigen Einsatz eines mathematischen Begriffes als Werkzeug – Anwendungsfähigkeit mathematischer Konzepte – deutlich.

2 Statistisches Denken – die begriffliche Frage

Ben-Zvi und Garfield (2004) nehmen in ihrer Einleitung eine erste, in der Community weithin geteilte, Fassung zur Unterscheidung von statistical literacy, statistical reasoning und statistical thinking vor:

Statistical literacy: grundlegende basale und wichtige Fertigkeiten zum Verstehen von statistischen Informationen und Forschungsergebnissen.

Statistical reasoning: die Art und Weise der Argumentation mit statistischen Ideen, der Interpretation statistischer Informationen und der daran anknüpfenden Argumentation.

Statistical thinking: Verständnis für den Sinn und Zweck statistischer Untersuchungen sowie die ihnen zugrundeliegenden "big ideas".

Trotz einer derartigen Trennung von Begrifflichkeiten ist ebenso Konsens, dass damit weder eine Stufung, z. B. der Begriffsentwicklung, formuliert werde, noch dass damit überhaupt eine didaktische Trennung einhergehe oder einhergehen sollte. Insofern sollte sich auch der Statistikunterricht in der Grundschule nicht auf grundlegende basale Fertigkeiten beschränken oder gar diese Fertigkeiten lediglich trainieren. Grundsätzlich wurde ein „need to develop students‘ statistical literacy, reasoning, and thinking at all levels“ (Ben-Zvi & Garfield, 2004, S. 8) festgestellt.

Burrill und Biehler (2011) unterscheiden deshalb nicht mehr zwischen diesen drei Ausrichtungen, sondern vergleichen in ihrem Überblicksartikel verschiedene zwischenzeitlich entwickelte und diskutierte Zugangsweisen und Lehrkonzepte zur Statistik. Insbesondere betonen sie den engen Zusammenhang zwischen Statistik und Wahrscheinlichkeit (s. auch Eichler & Vogel, 2013) und extrahieren auf diese Weise „fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers“ (S. 1).

3 Statistisches Denken – fundamentale Ideen

Bereits Moore (1990) betonte in seinem Grundsatzpapier zur „Unsicherheit“ zwei wesentliche Konzepte beim Umgang mit Daten: Zum einen sei besonders darauf zu achten, dass Daten keine nackten Zahlen sind, sondern immer kontextgebunden analysiert und bewertet werden müssten. Zum anderen betonte er die Einsicht in die Variabilität von Daten: Der Umgang mit Daten dürfe nicht mit einem deterministischen Weltverständnis einhergehen, sondern sei die Basis für das Entscheiden unter Unsicherheit.

Wild und Pfannkuch (1999) untersuchten das Problemlöseverhalten von Statistiker*innen und Statistik lernenden Studierenden und erkannten fünf wesentliche Aspekte statistischen Denkens, von denen auch sie die Einsicht in die Variabilität als grundlegend ansehen (s. auch Burrill & Biehler, 2011, S. 58, Eichler & Vogel 2013, S. XII f.):

(1) *Erkennen der Notwendigkeit von Daten („recognition for the need of data“)*: Nicht die eigene Erfahrung oder Überzeugung, auch nicht der einzelne Fall ist eine gute Entscheidungsgrundlage, sondern es sind Daten zur Objektivierung von Aussagen notwendig.

(2) *Flexible Repräsentation und Interpretation von Daten („transnumeration“)*: Daten sind nicht per se richtig oder falsch, sondern müssen mit Hilfe statistischer Methoden analysiert und interpretiert werden. Die Frage der Repräsentation ist insofern von Interesse, weil entsprechende Aufbereitungen bestimmte Aspekte hervortreten lassen und andere vernachlässigen.

(3) *Einsicht in die Variabilität von Daten („consideration of variability“)*: Die Daten aus statistischen Erhebungen unterscheiden sich immer, so dass diese Variabilität wahrgenommen, eingeschätzt und mitbedacht werden muss.

(4) *Erkennen, Beschreiben und Nutzen von Mustern („reasoning with statistical models“)*: Trotz der Variabilität von Daten sind Muster zu erkennen und lassen sich mit stochastischen Modellen beschreiben. Das Chaos im Kleinen führt zu Mustern im Großen. Gleichzeitig ist der Modellcharakter der jeweiligen Beschreibung wesentlich.

(5) *Bezug von Kontext und Daten zueinander („integrating the statistical and contextual“)*: Statistische Daten und der jeweilige Kontext müssen kontinuierlich aufeinander bezogen werden.

Burrill und Biehler (2011, 62f.) ergänzen diese Denkweisen aufgrund ihrer Analysen zum Unterrichten von Statistik zu sieben fundamentalen statistischen Ideen, die sie zumindest als Hintergrundwissen für Lehrkräfte für notwendig erachten:

- *Daten*: Notwendigkeit von Daten, verschiedene Datentypen, Wege der Datensammlung, Messverfahren und die grundlegende Einsicht der Kontextualisierung von Daten,
- *Variation*: Variabilität erkennen und messen und für das Vorhersagen, Erklären oder Überprüfen von Aussagen nutzen,
- *Verteilungen*: einschließlich der Begriffe "Tendenz" und "Streuung" als Grundlage für Überlegungen zu statistischen Variablen,
- *Repräsentationen*: graphische oder andere Repräsentationen zur Aufbereitung von Mustern und Aussagen, einschließlich des flexiblen Wechselns zwischen ihnen („transnumeration“),
- *Zusammenhänge zwischen zwei Variablen*: Art der Beziehungen zwischen den statistischen Variablen für kategoriale und numerische Daten erkennen und modellieren, einschließlich der Regression,
- *Wahrscheinlichkeitsmodelle für datengenerierende Prozesse:* Modellierung hypothetischer struktureller Beziehungen, die sich aus der Theorie, aus Simulationen oder aus Annäherungen an große Datensätze ergeben, Quantifizierung der Variabilität der Daten einschließlich der langfristigen Stabilität,
- *Schlussfolgerungen zu/aus Stichproben*: die Beziehung zwischen Stichproben und der Grundgesamtheit, einschließlich der jeweiligen Glaubwürdigkeit, von der Datensammlung bis zu den Schlussfolgerungen mit einem gewissen Grad an Sicherheit.

Makar (2018) fokussiert insbesondere den Elementar- und Grundschulbereich und formuliert dafür noch detailliertere Aspekte: Neben der Einsicht in die Notwendigkeit von Daten und das Wissen um verschiedene Datentypen und Skalenniveaus der Lehrkräfte hält sie zudem die Frage des Zusammenfassens, der Aggregation von Daten, für einen wesentlichen abstrahierenden Denkschritt insbesondere für jüngere Lernende (vgl. auch Hasemann, Mirwald, & Hoffmann 2008, S. 149f.), mit dem erst absolute und relative Häufigkeiten mit Sinn versehen werden können. Dieses Merkmal wird von anderen ebenfalls für wesentlich erachtet, aber in einen der genannten Aspekte inkludiert: Wild und Pfannkuch (1999) z. B. sehen die Aggregation als den wesentlichen Schritt der Datenanalyse und -aufbereitung (transnumeration), der allerdings nicht eigens betont, sondern für selbstverständlich gehalten wird.

Zudem entwickelte Makar (2014, 2018) mit dem Konzept „statistical context-structures" ein Instrumentarium (vgl. Abb. 2), welches nicht nur die jeweilige fundamentale Idee (statistical structure) der situativen Erfahrung (context entity) gegenüberstellt, sondern systematisch zu verbinden sucht. Dieses könnte leitend für die Analyse, Strukturierung und Planung frühkindlicher statistischer Lernsituationen genutzt werden und so die fundamentalen Ideen in informellen Lernsettings für Lehrkräfte und Studierende verdeutlichen.

Context entity	**Statistical structures**	**Statistical context–structure and reasoning**
Height	Data	The measure of how tall a person is can be collected and recorded as height (cm) data
Height of a child	Single data point	A child is associated with their height data
Heights of students in the class	Aggregate	Collectively, the heights of the children in the class can be considered as an entity to investigate
Heights of children in the class differed	Variability	Because all heights in the class were not the same, the children had to grapple with how to manage the variability of the height data
Organised heights clumped in the middle	Distribution shape	When children invented ways to record and organise the data, they noticed that most heights were in the middle and fewer heights were high or low in value; this feature was stable across both classes

Typical height	Average	To find the typical height, children invented a point estimate to capture the most common height (mode) and an interval estimate to capture where "most" heights clumped. They used these estimates to predict (with uncertainty) the typical heights of children in other classrooms
Height of very tall child	Outlier	One child was substantially taller than the others and they considered this student to have atypical height. They reasoned that it was unlikely to see this height in other classes
The heights of children in another class were collected and compared to their class	Sampling variability	Their surprise that the data in the class next door were similar to but different than their own class data prompted discussions about what aspects of their data were likely or unlikely to be encountered in other classes (e.g. similar values but different frequencies of each height; similar but possibly not exactly the same typical height)
The typical height of the children in one class was used to predict the typical height of children in another class and across Australia	Sample-population inference	One Vietnamese child argued that her mother was considered short in Australia, but was of typical height in Vietnam. This prompted students to clarify that their classroom was not representative of other countries and that data would need to be collected from a country to find the typical heights there

Tab. 1 Statistische Kontextstrukturen als Verbindung von statistischen Konzepten und kontextueller Einbindung (Makar 2018, S. 5f.)

4 Die Entwicklung des statistischen Denkens

Es liegen inzwischen viele Forschungsergebnisse zu stochastischen Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern (verschiedenen Alters) vor, ohne dass von einem Gesamtbild gesprochen werden kann.

Erschwerend ist zudem die häufig anzutreffende Trennung von statistischem und probabilistischem Denken, fokussieren doch beide Bereiche das Schlussfolgern und Entscheiden unter Unsicherheit und die entsprechende Vorstellungs- und Begriffsentwicklung (Moore, 1990).

4.1 Probabilistische Vorstellungen

Ein sicherlich hilfreicher Perspektivwechsel lag in den letzten Jahrzehnten in der Sicht auf diese Vorstellungen der Lernenden: So wird heute selten von Fehlvorstellungen oder Misskonzepten gesprochen, sondern versucht, die jeweilige Sicht der Lernenden einzunehmen und den Vorstellungskern kompetenzbasiert herauszukristallisieren (vgl. z. B. Barkley 2019, Schnell 2014).

Wollring (1994 a, b) hat in seinen Einzelfallstudien verschiedene Varianten des *Wahrscheinlichkeitsverständnisses* von Grundschulkindern herausgearbeitet:

- die *animistische Wahrscheinlichkeitsvorstellung* zeigt sich in der Annahme von Kindern, stochastische Situationen würden von einem Wesen mit Willen und Macht beeinflusst werden, welches das Ergebnis bestimmt;
- das A-*priori-Verständnis* kennzeichnet die Vorannahmen zum Ausgang eines Zufallsexperiments vor einer Experimentierphase, z. B. die durchgehende Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse;
- bei *frequentistischem Wahrscheinlichkeitsverständnis* versucht das Kind, aus den bisher aufgetretenen relativen Häufigkeiten auf die Wahrscheinlichkeit bzw. das Auftreten in der Zukunft zu schließen;
- das *subjektive Wahrscheinlichkeitsverständnis* ist Ausdruck persönlichen Überzeugungen, aber auch der jeweiligen Risikobereitschaft;
- das *formale Wahrscheinlichkeitsverständnis* beruht auf mathematischen Gesetzen, so dass sich die jeweilige Wahrscheinlichkeit berechnen lässt.

Barkley (2019) schließt an Wollring (1994 a, b) an und ordnet vorliegende empirische Studien und deren Ergebnisse hinsichtlich der von ihr unterschiedenen Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs:

Unter Studien zu *subjektiv geprägten Einschätzungen* fasst sie neben idiosynkratischen Vorstellungen vielfach beobachtbare Repräsentativitätsvorstellungen, Verfügbarkeitsvorstellungen, die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit sowie die Vernachlässigung bzw. Überbetonung der Variabilität zufälliger Vorgänge (Barkley, 2019, S. 19 ff.).

Den *frequentistisch geprägten Einschätzungen* ordnet Barkley (2019, S. 25 ff.) Studien zu, die sich der Einsicht in das Gesetz der großen Zahlen widmen. So zeigten einige Kinder in Wollrings Spielinterviews (1994 a) eine kontinuierliche Anpassung ihrer Befunde und Entscheidungen durch veränderte Daten, die Wollring als „Intuition für das Gesetz der großen Zahlen" (S. 212) bezeichnet. Zudem subsummiert Barkley unter diesem Aspekt Studien, die das Wechselspiel aus Häufigkeit und theoretisch möglichen Ergebnissen in den Blick nehmen.

Die dritte Gruppe in Barkleys (2019, S. 31 ff.) Übersicht umfasst Studien zu *theoretisch geprägten Einschätzungen* der Wahrscheinlichkeit. Da Grundschulkinder nicht auf Bruchzahlen als das Verhältnis beschreibende Zahlen zurückgreifen können, werden i.d.R. Entscheidungen zwischen zwei verschiedenen Verhältnissen erfragt, die durch grobe Vergleiche (doppelt so viele – mehr als doppelt so viele) oder ggf. visuell abgeschätzt werden können.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass bereits junge Kinder verschiede probabilistische Vorstellungen erkennen lassen, dass verschiedene Vorstellungen nebeneinander bestehen, aber auch, dass diese gezielt angesprochen und weiterentwickelt werden können (Barkley, 2019; Schnell, 2014).

4.2 Statistische Kompetenzen im Grundschulalter

Die empirischen Erkenntnisse zum *statistischen Denken* im Grundschulalter sind weniger systematisch, sondern jeweils auf einzelne Aspekte gerichtet. Im Folgenden wird somit versucht, diese anhand der fundamentalen Ideen zu präsentieren.

Notwendigkeit von Daten und Fragen der Datenerhebung. Diesem Aspekt wurde nicht nur in der Sekundarstufe wenig Aufmerksamkeit geschenkt. Zwar finden sich viele Unterrichtsvorschläge zum Sammeln, Erheben und Messen von Daten, doch empirische Erkenntnisse, z. B. zur Kategorienbildung oder zur Berücksichtigung verschiedener Datentypen in der Planungsphase, liegen nicht vor.

Repräsentation und Interpretation von Daten. Dieser Bereich wird in der Grundschuldidaktik vorrangig fokussiert, beziehen sich doch die Bildungsstandards und auch Aufgaben in Schulleistungsstudien auf diese wechselseitigen Übersetzungsprozesse. Aus internationalen Studien ist bereits seit längerem bekannt, dass diagrammbezogenes Vorwissen ein wesentlicher Prädiktor für Kompetenzen im Konstruieren wie Interpretieren grafisch aufbereiteten Daten darstellt (zusammenfassend Shaughnessy, 2007). Noviz*innen unterscheiden sich also unabhängig vom Alter von Expert*innen. In Anschluss an Curcio (1989) und Friel, Curcio und Bright (2001) werden drei Ebenen der Verständnisentwicklung unterschieden (vgl. für grundschulrelevante Beispiele auch Frischemeier & Biehler, 2020b):

(1) *Reading the data*: Das Ablesen und Eintragen einfacher einzelner Informationen; Fragen zu punktuellen Einzeldaten

(2) *Reading between the data*: Das Ablesen von Informationen aus der Relation zwischen den Daten; Fragen von Zusammenhängen, zur Verteilung insgesamt und einfache Vergleiche

(3) *Reading beyond the data*: Die Daten aus der Grafik für weiterführende Prognosen als Grundlage in der Argumentation heranziehen; verschiedene Verteilungen, Darstellungen vergleichen und bewerten

Insgesamt handelt es sich beim „Graphikenverständnis“ (graph comprehension – Friel et al., 2001) um ein in sich bereits komplexes Konstrukt, welches zudem von verschiedenen anderen Faktoren beeinflusst wird. Friel et al. (2001) führen insbesondere das Ziel, für das Graphiken erstellt und eingesetzt werden, verschiedene Aufgabenmerkmale, die Charakteristika der jeweiligen Disziplin, in der die Graphiken genutzt werden, sowie Personenmerkmale der die Graphiken lesenden oder konstruierenden Person an. Auch wenn mit Lachmayer (2008) und Stecken (2013) umfangreiche Erkenntnisse zu verschiedenen Diagrammkompetenzen und den Schwierigkeiten von Schüler*innen vorliegen (s. auch Lübke & Selter, 2017), kann nicht von einem systematischen Gesamtbild gesprochen werden.

Bezogen auf Grundschulkinder ist zudem zu berücksichtigen, dass jede statistische Darstellung eine auf Konventionen beruhende hochgradige Verdichtung von Informationen ist. So sind z. B. das Zifferblatt der Uhr oder die Skale auf dem Lineal oder Messbecher für viele Kinder schwierig in ihrem Aufbau zu verstehen. Bei statistischen Diagrammarten liegt zumeist eine Kombination aus mehreren dieser Aspekte vor, die vor allem bei der selbstständigen Konstruktion zu berücksichtigen sind.

Variabilität und Mustererkennung: Trotz der hohen Bedeutsamkeit finden sich kaum Untersuchungen zur Einsicht in die Variabilität. Watson (2005) vermutet, dass sich das intuitive Verständnis für die Variabilität eher als das für den Erwartungswert entwickle. In einer Studie jüngeren Datums konnte Watson (2018) diese Vermutung mit 6-jährigen Kindern nachweisen. Gleichzeitig zeigt sie vier Lernumgebungen auf, in denen dieses Verständnis erfasst, aber eben auch spielerisch und situiert angeregt werden kann und knüpft somit direkt an Makars (2018) statistische Kontextstrukturen an.

Kontextgebundenheit von Daten: Zu diesem Aspekt scheinen keine Untersuchungen notwendig, da im Grundschulunterricht Daten durchgehend kontextgebunden adressiert werden. Nichtsdestotrotz stellt sich die Frage nach der Bedeutsamkeit des jeweiligen Kontextes, der Vertrautheit der Kinder mit ihm und den Auswirkungen verschiedener Einflussfaktoren, hat sich doch auch die inhaltliche Vertrautheit als ein Prädiktor für die Diagrammkompetenz erwiesen (Friel et al, 2001; vgl. zusammenfassend auch Stecken, 2013).

5 Lerngelegenheiten zum statistischen Denken im Mathematikunterricht der deutschen Grundschulen

Stochastische Fragen im Mathematikunterricht der Grundschule erhielten mehr Aufmerksamkeit und ein höheres Gewicht, seit mit den Bildungsstandards 2004 eine eigene Leitidee „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ formuliert wurde und die Inhalte somit nicht länger im Sachrechnen (Winter, 2003) auf- bzw. untergingen. Obwohl Winter (1976) für eine Integration stochastischer Problemstellungen in Arithmetik, Geometrie und Sachrechnen plädierte, da er in einer Separierung die Gefahr einer inhaltsleeren Formalisierung sah, wurde erst durch diese Trennung der Fokus auch auf stochastische Fragen im Mathematikunterricht für alle gelegt.

Auch Hasemann, Mirwald und Hoffmann (2008) halten einleitend bzgl. der Konkretisierung der Bildungsstandards fest, dass über die Planung, Sammlung und Aufbereitung von Zählungen hinausführende Kompetenzen in diesem Inhaltsbereich grundgelegt werden sollen: „Es gibt auch weiterführende Fragen, z. B.: Was können wir mit diesen Daten anfangen, wie sie mit anderen vergleichen, welche Folgerungen sind möglich? Oder: Kann man den Verkehrsfluss simulieren oder modellieren? Und wie können wir prüfen, ob das Modell wirklich passt?“ (S. 141)

Zwar wird in der didaktischen Literatur, auch in Unterrichtseinheiten und Schulbuchlehrgängen, der Datenanalysezyklus (vgl. für die Grundschule Frischemeier & Biehler, 2020a) weitgehend berücksichtigt, so dass die Kinder alle Phasen von der Fragestellung über die Erhebung, Auswertung und Aufbereitung von Daten, sowie den Erkenntnisgewinn daraus erfahren, doch wird noch viel zu selten die Unsicherheit gerade auch dieser Ergebnisse, die mögliche Variabilität oder aber Fragen des Einflusses der Stichprobe thematisiert.

Da zudem in den Bildungsstandards für die Grundschule zwei Kompetenzbereiche – ‚Daten erfassen und darstellen‘ und ‚Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen‘ – ausgewiesen werden, scheinen diese eher getrennt voneinander betrachtet und thematisiert zu werden, als dass ihr gemeinsamer Kern herausgestellt würde. Überspitzt formuliert scheint mit dem ersten die Realität objektiv erfasst und abgebildet zu werden, während letzteres die Erfahrungen zum Zufall ermöglicht. Da darüber hinaus Sill und Kurtzmann (2019) zuzustimmen ist, dass diese Erfahrungen fast ausschließlich im Kontext von Glücksspielen adressiert werden, wird noch weniger deutlich, wie viele stochastische Situationen unseren Alltag bestimmen.

Didaktische Literatur (z. B. Neubert, 2012; Sill & Kurtzmann, 2019) aber auch Schulbuchwerke befördern ein derartig getrenntes Denken der (angehenden) Lehrkräfte, wenn auch sie zwei Bereiche ausweisen und danach ihre Angebote strukturieren. So erscheint es fraglich, wie viele Leser*innen das verbindende Zitat von Hasemann, Mirwald und Hoffmann (2008, s. oben) wahrnehmen oder z. B. die Umfrage zu „Wie kommst du in die Schule?“ mehrfach durchführen lassen oder zumindest die Wetterabhängigkeit der Datenerhebung mit diskutieren und so immer wieder auch Erfahrungen zur Variabilität, zur Situativität und zum Verhältnis von Stichproben zur Grundgesamtheit ermöglichen (s. auch das Beispiel zu den Gummibärchentüten in Eichler 2015).

6 Fazit

Statistische Kontextstrukturen im Sinne Makars (2018) könnten sich insbesondere für diejenigen Lehrkräfte als konzeptuelles Werkzeug und Hilfe in der Planung statistisch gehaltvoller Lernumgebungen für Grundschulkinder erweisen, welche einerseits die noch geringen mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten der Kinder sehen, auf der anderen hochgradig anspruchsvolle stochastische Konzepte „vermuten“. Gleichzeitig wird der Forderung nach situierten Zahlen in Kontexten so durchgehend Rechnung getragen und der Blick auf die fundamentalen statistischen Ideen bereits in mathematisch einfachen Zusammenhängen gelegt.

Inwieweit die Lehrkräfte selbst bereits kompetent in der Datenanalyse sind oder sich selbst eher noch auf dem Einstiegsniveau von Noviz*innen befinden, mögen diese selbst für sich beantworten. Eine systematische Aus- und Weiterbildung, wie sie Martignon (2011) skizzierte, scheint auf Ebene der Grundschullehrkräfte in statistischem Denken jedoch noch nicht flächendeckend gegeben zu sein.

Literatur

Barkley, A. L. (2019). *Lehr-und Lernprozesse zum Verständnis der theoretischen Wahrscheinlichkeit im Mathematikunterricht der Grundschule: Theoretische Grundlagen und Fallstudien*. Franzbecker.

Ben-Zvi, D. & Garfield, J. B. (Hrsg.) (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Kluwer.

Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Hrsg.), *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (S. 57–68). Springer.

Curcio, F. R. (1989). *Developing Graph Comprehension. Elementary and Middle School Activities*. NCTM.

Eichler, A. (2015). Daten und Zufall. In J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.), *Fachdidaktik für die Grundschule. Mathematik* (S. 88–101). Cornelsen.

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall*. Vieweg + Teubner.

Engel, J., Biehler, R., Frischemeier, D., Podworny, S., Schiller, A. & Martignon, L. (2019). Zivilstatistik: Konzept einer neuen Perspektive auf Data Literacy und Statistical Literacy. *AStA Wirtschafts-und Sozialstatistisches Archiv, 13*(3), 213–244.

Friel, S. N., Curcio, F. R. & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124–158.

Frischemeier, D. & Biehler, R. (2020a). Big Data in der Grundschule? *Grundschule Mathematik,* (65), 2–3.

Frischemeier, D. & Biehler, R. (2020b). Statistisches Denken. *Grundschule Mathematik,* (65), 32–35.

Hasemann, K. & Mirwald, E (2008). Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 141–161). Cornelsen.

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Bonn: KMK.

Lachmayer, S. (2008). *Entwicklung und Überprüfung eines Strukturmodells der Diagrammkompetenz für den Biologieunterricht*. Dissertation Universität Kiel. Online unter: https://macau.uni-kiel.de/receive/diss_mods_00003041.

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M. & Paparistodemou, E. (Hrsg.) (2018). *Statistics in Early Childhood and Primary Education*. Springer.

Lübke, S. & Selter, C. (2017). Umgang mit Säulendiagrammen. In S. Prediger, C. Selter, S. Hußmann & M. Nührenbörger (Hrsg.), *Mathe sicher können*. (Förderbaustein Sachrechnen, S. 86–110). Cornelsen.

Makar, K. (2014). Young children's explorations of average through informal inferential reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 61–78.

Makar, K. (2018). Theorizing links between context and structure to introduce powerful statistical ideas in the early years. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris & E. Paparistodemou (Hrsg.), *Statistics in Early Childhood and Primary Education* (S. 3–20). Springer.

Martignon, L. (2011). Future teachers’ training in statistics: the situation in Germany. In C. Batanero, G. Burill & C.Reading (Hrsg.), *Teaching statistics in school mathematics – Challenges for teaching and teacher education* (S. 33–36). Springer.

Moore, D.S. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Hrsg.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (S. 95–137). NAP.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. NCTM.

Neubert, B. (2012). *Leitidee: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Aufgabenbeispiele und Impulse für die Grundschule*. Mildenberger.

Ruwisch, S. (2020). Das Diagramm ist viel zu perfekt. *Grundschule Mathematik,* (65), 4–7.

Schnell, S. (2014). *Muster und Variabilität erkunden: Konstruktionsprozesse kontextspezifischer Vorstellungen zum Phänomen Zufall*. Springer.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics' reasoning and learning. In F. K. Lester, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 957–1009). IAP: NCTM.

Sill, H. D. & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer.

Stecken, T. (2013). *Diagrammkompetenz von Grundschülern*. WTM.

Stifterverband (2018). *Data Literacy für alle Studierenden.* https://www.stifterverband.org/data-literacy-education [28-06-21]

Watson, J. (2018). Variation and expectation for six-year-olds. In A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou, *Statistics in Early Childhood and Primary Education* (S. 55–73). Springer.

Watson, J. M. (2005). Variation and expectation as foundations for the chance and data curriculum. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. Mc Donough, R. Pierce, & A. Roche (Hrsg.), *Building connections: Theory, research and practice* (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, S. 35–42). Sydney: MERGA.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review, 67*(3), 223–248.

Winter, H. (1976). Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6). *Didaktik der Mathematik, 1,* 22–37.

Winter, H. (2003). *Sachrechnen in der Grundschule*. Cornelsen Scriptor.

Wollring, B. (1994a). Animistische Vorstellungen von Vor- und Grundschulkindern in stochastischen Situationen. *Journal für Mathematikdidaktik, 15*(1/2), 3–34.

Wollring, B. (1994b). *Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern*. Münster: Habilitationsschrift im Fachbereich Mathematik.

Prof. Dr. Silke Ruwisch
Institut für Mathematik und ihre Didaktik
Leuphana Universität Lüneburg
Universitätsallee 1
21335 Lüneburg
ruwisch@uni.leuphana.de

Leitbild „Intellektuelle Autonomie“: Eine persönliche Sicht auf vier Analysen zum autonomen Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule

von Bernd Wollring

Abstract. Die intellektuelle Autonomie von Grundschulkindern beim Lernen von Mathematik wird an vier Beispielen zu empirischen Analysen von Eigenproduktionen beschrieben. Berichtet wird wie Studierende des Grundschullehramtes sich mit diesen Befunden so auseinandersetzen können, dass sie zum einen die Elemente autonomen Lernens in den dokumentierten Eigenproduktionen erschließen und zum anderen selbst Erfahrungen zum autonomen Lernen von Mathematik erwerben.

Schlüsselwörter: Autonomes Lernen, Eigenproduktionen

1 Zum Start

Nichterst seit den 1990er Jahren, jedoch seitdem verstärkt, liegt das Forschungsinteresse in der Mathematikdidaktik auf genuinen Kompetenzen von Lernenden, auch und insbesondere vor formaler Unterweisung. Gegenüber der eher instruktionsorientierten Sicht auf das Mathematiklernen gewinnt die Idee des adaptiven Rückmeldens Raum. Basis dazu ist ein diagnostisches Aufschließen der Kompetenzen und damit das Identifizieren anerkennenswerter Teilleistungen. Eine adaptive Rückmeldung startet dann mit einer Anerkennung der ausbaufähigen Teilleistung, erst dann folgen Entfaltungsimpulse dazu. Leitidee dabei ist das Anerkennen der intellektuellen Autonomie des Lernenden, die es zu identifizieren und zu stärken gilt.

Das ist im Kern ein reformpädagogischer Ansatz. Zum Lernen von Mathematik findet man Grundlegendes dazu bereits bei Friedrich Fröbel, Johannes Kühnel und Wilhelm Oehl. Lehrkräfte sollten dazu selbst entsprechende Autonomieerfahrungen erwerben, um eben diese später weitegeben zu können. In diesem Sinne ist das Befassen mit Eigenproduktionen von Lernenden, ein Begriff der m.E. von Ch. Selter in den Diskurs eingebracht wurde, nicht nur ein analytisches, sondern auch ein positionsbildendes Programm.

In diesem Sinne wird folgend an vier Beispielen entfaltet, wie in der Bildung von Grundschullehrkräften ein Fokus auf das Identifizieren autonomen Lernens angestrebt wird. Die Auswahl ist subjektiv, ich sehe die Texte als Meilensteine in der Diskussion um autonomes Mathematiklernen und dessen Anerkennung.

2 Nunez et al. (1993): Ronaldo subtrahiert

Nunez, Carraher und Schliemann analysierten die Rechenstrategien brasilianischer Grundschulkinder: *Written and Oral Arithmetic* (Nunez et al., 1993, S. 28– 48). Das folgende Interview mit Ronaldo (Tab. 1) daraus entstammt einem umfassenden empirischen Projekt zu arithmetischen Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern des dritten Schuljahres im Nordosten Brasiliens. Verwendet wurden sowohl qualitative als auch quantitative Techniken, „mixed methods“ zu einer Zeit, als dieser slang noch gar nicht bestand. Der befragte Ronaldo erhält sich zum Teil durch den Straßenverkauf von Kokosnüssen („informal economy“) und besucht lückenhaft den Unterricht im dritten Schuljahr. Befragt wird er in der Schule von einer ihm vertrauten Interviewerin in einer simulierten Ladenszene, bei der er gebeten wird zu sprechen und zu schreiben.

Um eine sich in Abhängigkeit von der verfügbaren Information entfaltende autonome Einschätzung seiner Performanz seitens der Studierenden zu erzielen, wird das Interview in vier Durchgängen anhand eines sich entfaltenden Transkriptes vorgestellt. Die jeweils betrachteten Teile sind in der Tabelle links bezeichnet. Die rahmende Theorie von Nunez et al. wird zunächst zurückgestellt. Teilnehmende Studierende werde so in die Rolle unvoreingenommener Beobachter gestellt, die sich „entlang der zunehmenden Eröffnung“ ihre Deutung autonom bilden müssen. Als Deutungshilfe werden vorab knapp zwei Begriffe aus der Sprachwissenschaft vorgestellt: „Syntax“ bezeichnet die Lehre von der Grammatik, „Semantik“ bezeichnet die Lehre von der Bedeutung.

D1	D2	D3	D4			**200 – 35 = 200**
	D2	D3	D4	1	R	*schreibt 200 - 35 in senkrechter Anordnung,*
	D2	D3	D4			*notiert dann sein Ergebnis von den Einern über die Zehner zu den Hundertern,*
	D2	D3	D4			*rechnet dabei laut und erhält 200 wie folgt:*
	D2	D3	D4	2	R	Fünf, um auf Null zu kommen, nichts.
	D2	D3	D4			Drei, um auf Null zu kommen, nichts.
	D2	D3	D4			Zwei, nimm nichts weg, zwei.
		D3	D4	3	I	Ist das richtig?
		D3	D4	4	R	Nein. Nämlich, wenn Du was von mir kaufst, und das kostet fünfunddreißig,
		D3	D4			und Du zahlst mit einem 200-Cruzeiro-Schein,
		D3	D4			und ich geb' Dir den zurück?
D1	D2	D3	D4			**200 – 35 = 235**
	D2	D3	D4	5	I	Dann mach's noch einmal.

D2	D3	D4	6	R	*schreibt 200 - 35 auf dieselbe Art auf,*
D2	D3	D4			*Schreibt sein Ergebnis von den Einern über die Zehner zu den Hundertern,*
D2	D3	D4			*rechnet laut und erhält 235 wie folgt:*
D2	D3	D4	7	R	Fünf, nimm nichts weg, fünf. Drei, nimm nichts weg, drei.
D2	D3	D4			Zwei, nimm nichts weg, zwei.

	D3	D4	8	R	Wieder falsch!
	D3	D4	9	I	Warum ist es wieder falsch?
	D3	D4	10	R	Nun, Du kaufst etwas, und es kostet fünfunddreißig.
	D3	D4			Du gibst mir zweihundert,
	D3	D4			Und ich gebe Dir zweihundert und noch fünfunddreißig drauf?

		D4	11	I	Weißt Du das Ergebnis?
		D4	12	R	Wenn es dreißig wäre, würde ich Dir eins siebzig geben.
		D4	13	I	Aber es ist fünfunddreißig. Gibst Du mir einen Rabatt?
		D4	14	R	Einhundert und fünfundsechzig.

Tab. 1 Das Interview: R: Ronaldo I: Interviewerin, Interview in der Schule, simulierte Ladenszene, Aufgabe 200-35.

Deutung D1, Was Ronaldo ausrechnet. 200 – 35 = 200 und 200 - 35 = 235 werden als „Rechenrichtungsfehler unter Missachtung der Stellenwertstruktur“ gekennzeichnet. Möglicherweise subtrahiert Ronaldo stellenweise stets die kleinere Zahl von der größeren. Ursachen und begleitende Vorstellungen Ronaldos bleiben offen.

Deutung D2, Was Ronaldo sagt und schreibt. Der Sprechtext wechselt in Phrase 2 vom Ergänzen zum Abziehen und bleibt in Phrase 7 beim Abziehen. Im Unterricht wurde vermutlich ergänzend gesprochen, Ronaldo denkt jedoch abziehend und ändert sein Sprechen dahin. Notiert wird die Form des Normalverfahrens. Das stellenweise Subtrahieren des Kleineren vom Größeren ist bei Aufgaben korrekt, die keinen Übergang erfordern, bei den vorgelegten Aufgaben passt es nicht. Ronaldo hat möglicherweise das Bearbeiten der Aufgaben ohne Überträge mitgemacht und Aufgaben mit Überträgen verpasst. Sein Vorgehen wirkt syntaktisch, er erinnert Verfahrensbestandteile. Ronaldo zeigt, so die Studierenden, ein mögliches Modell von Kompetenzen, das „syntaktische Ruinen“ eines Verfahrens aufweist.

Deutung D3, Wie Ronaldo seine Ergebnisse bewertet. Ronaldo erkennt die fehlerhaften Ergebnisse als solche. Sein Kontrollverfahren ist ein autonomes Modellbilden: Er überträgt die Ergebnisse in seine Erfahrungswelt des Straßenverkaufs, erkennt sie dort als nicht zutreffend und beurteilt sie als absurd. Konsequenzen zur Korrektur seines schriftlichen Verfahrens zieht er nicht.

Deutung D4, Was Ronaldo tatsächlich weiß. Auf die Frage, ob er das Ergebnis weiß, gibt er eine Antwort, die nicht auf das gelernte schriftliche Verfahren rekurriert, sondern auf seine Lebenswelt. Auf die Frage, die Phrase 12 vorherzusagen, äußern Studierende zumeist, dass er das Ergebnis wohl doch korrekt bestimmen kann: „Ja, 165"; „Ja, ich gebe einfach den einen 100er-Schein zurück und dann noch 65 drauf." Sehr nahe am tatsächlich Gesagten ist diese Vorhersage: Er rechnet es nicht nach einem schriftlichen Verfahren, sondern er rechnet wie er es von den Straßenverkäufen kennt, im Kopf 200 – 30 = 170, 170 – 5 = 165.

Ronaldos Strategie entspricht im Kontext des „halbschriftlichen Rechnens" der „Hilfsaufgabe". Das ist eine autonome verständnisvolle Konstruktion. Zum Bilden der Hilfsaufgabe nutzt er eine korrekte Zerlegung des Subtrahenden.

Ronaldo betrachtet die Aufgabe in zwei Welten, die zwar aufeinander in Beziehung setzen kann, deren Verfahren aber unverbunden bleiben. Die schriftlich dargestellte Aufgabe bearbeitet er syntaktisch, die mündlich dargestellte semantisch. Auf der Straße rechnet er im Kopf ohne Schreiben, in der Schule mit Schreiben. Ob er in der Schule halbschriftliches Rechnen gelernt hat, ist nicht dokumentiert.

Nunez et al. schließen in einer Staffel aufwändiger quantitativer Untersuchungen aus, dass der Ort, Straße oder Schule, das Ergebnis beeinflusst, ebenso dass vorhandenes oder nicht vorhandenes Material von Bedeutung ist und schließlich, dass die fragende Person, Lehrkraft oder externe Interviewerin Einfluss auf das Ergebnis hat. Diese Studie ist somit auch ein Leitbeispiel zur Kontrolle von beeinflussenden Variablen.

Der schließlich bleibende Befund von Nunez et al. besagt, dass die wesentliche Einflussgröße die Darstellung ist: Entscheidend ist, ob geschrieben oder gesprochen wurde. Gesprochenes unterstützt offensichtlich semantisches Rechnen, Geschriebenes kann genau dieses supprimieren und syntaktisches Rechnen evozieren. Hart gesagt: Schriftliches kann die Autonomie beim Rechnen reduzieren.

Rechnungen wie die von Ronaldo geben Studierenden Anlass zum Stellen eigener Fragen und führen auf die Erkenntnis, dass diese Episode, wenngleich sie ein Einzelfall aus einer anderen Welt ist, doch auch in unseren Schulen Typisches beschreibt. Nachdenklich werden die Studierenden bei der Frage, ob die Schülerinnen und Schüler unseres Kulturkreises Erfahrungen wie die von Ronaldo haben, die ihnen helfen, die Ergebnisse zu bewerten.

Zum Finden eigener Positionen. Dieser Fall verweist auf die grundsätzliche Forderung, dass Schülerinnen ihre Rechnungen verständnisvoll semantisch erlernen, organisieren und durchführen und nicht nur syntaktisch vollziehen sollen.

3 Hengartner (1999): Divisionen

Betrachtet werden Eigenproduktionen zu individuellen Divisionsstrategien (Gindrat, Güttinger, Wyss & Hengartner in Hengartner, 1999). Der Text zeigt zwei Intentionen:

Zum einen liegt eine gemeinsame Arbeit des Autors mit drei Studierenden vor mit der Intention, Studienelemente angehender Lehrkräfte als „forschenden Lernen“ zu konzipieren und Studierende am Forschungsprozess zu beteiligen. Diese Anerkennung legt eine gute Basis zur autonomen Urteilsbildung in späteren Arbeitssituationen.

Des Weiteren verweist der Titel explizit auf „Erkundungen“, damit wird die Studie in die qualitative empirische Unterrichtsforschung eingeordnet. Es erfolgt keinerlei Aussage oder Behauptung, welche der vorgefundenen Strategien wie häufig verbreitet ist, dargestellt wird vielmehr, um eine Formulierung von H. Maier aufzunehmen, „was wirklich möglich ist“. Eigenproduktionen ermöglichen die Auseinandersetzung mit der originalen Äußerung von Lernenden.

Referiert wird ein weites Spektrum von Divisionsstrategien im vierten Schuljahr exemplarisch anhand von 12 in der Originaldarstellung vorgelegten Eigenproduktionen zu der Aufgabe:

> *Unsere Klasse macht einen Ausflug. Die Lehrerin muss für den Zug, das Schiff, ein Museum, das Essen und eine Übernachtung 1296 Franken bezahlen. Die 1296 Franken wollen wir so aufteilen, dass jedes von uns gleich viel bezahlt. Wir sind 18 Kinder.*

Die Kinder konnten eine Alternative mit „1660 Franken“ und „25 Kindern“ wählen.

Das Analysieren zielt zunächst auf die Hauptkategorien Aufteil-Lösungen versus Verteil-Lösungen. Besser jedoch unterscheidet man „verteilnahe und aufteilnahe Lösungen", denn obwohl ein Verteil-Kontext vorliegt (sinnigerweise mit der Vokabel „aufteilen" im Text), finden sich auch aufteilnahe Strategien und solche, die sich diesen Kategorien nicht eindeutig zuweisen lassen, etwa Zerlegungsstrategien zum Dividenden und zum Divisor (!).
Die vorgelegten Kommentare und Deutungen der Autoren beschränken sich streng auf mögliche Interpretationen der Eigenproduktionen, also auf einen Aufschluss, der die Strategie über die jeweilige individuelle Darstellung hinaus transparent macht. Genau dies gibt den Eigenproduktionen m.E. ihre bleibende Aktualität. Insbesondere werden keine Vorschläge dazu gemacht, wie man in fördernder Absicht zu diesen Strategien Rückmeldungen konzipieren sollte. Genau dies macht den Text für Studierende nutzbar zum Trainieren der eigenen Deutungsfähigkeit und zum Finden eigener didaktischer Positionen.
In Veranstaltungen zu „Diagnostik und Fördern" versuche ich ebenso wie die Autoren normative Konzepte zu Förderimpulsen zu vermeiden und das Entwickeln solcher Ideen im Team anzuregen. Drei Organisationelemente bestimmen die Arbeit mit diesen Eigenproduktionen:
Mind Maps. Teams von drei bis vier Studierenden arrangieren die vorgelegten Eigenproduktionen in einer Mind Map, bilden gegebenenfalls Cluster und adressieren diese. Das geht nur mit Originalen, nicht mit daraus abgeleiteten Bewertungen. Das Entwickeln eigener Deutungen begleitet dieses Tun einher, dabei haben Mind Maps, lose gelegt aus kopierten Zetteln, den kennzeichnenden Vorteil, dass sie Diskussionsverläufen folgend laufend angepasst werden können (Abb. 1). In einer „Besichtigungsrunde" vergleichen die Teams ihre Mind Maps.

Abb. 1 Mind Map zum Ordnen, Adressieren und Erschließen von Eigenproduktionen

„Muster-Lösungen". Gefragt ist, welche Lösungen von allen Schülerinnen einer Klasse erkundet und reflektiert werden sollten. Auf einem

internationalen Workshop wurden dazu mehrheitlich die Lösung von Tessa und Marisa (Abb. 2) und die beiden Lösungen von Ruth (Abb. 3) vorgeschlagen.

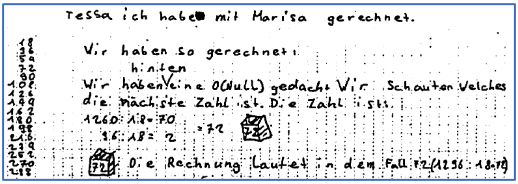


Abb. 2 Die Lösung von Tessa und Marisa, „hinten eine Null gedacht“

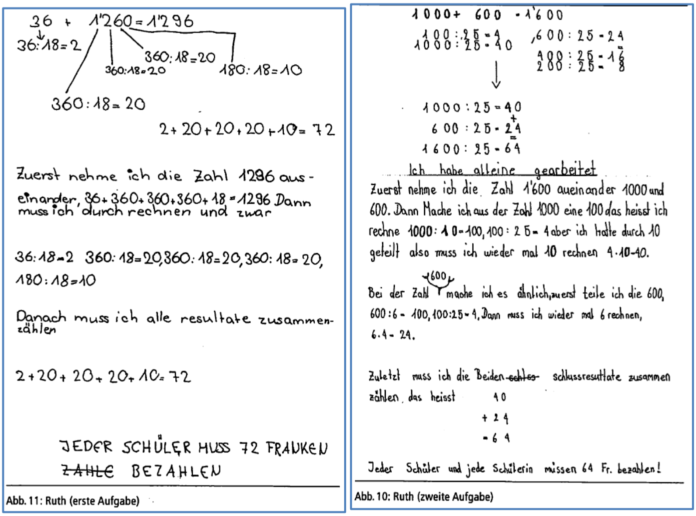


Abb. 3 Die zwei Lösungen von Ruth, Dividend „auseinandernehmen“

Ruths Lösungen sind nicht nur richtig und sehr transparent dargestellt, sie bearbeitet auch die zusätzliche Aufgabe, ihr Verfahren für andere Schülerinnen verständlich darzustellen. Dass diese Teilaufgabe von den meisten Kindern ganz ignoriert wird, gibt, so erwarte ich, in Lehrveranstaltungen den Studierenden einen Hinweis, wie bedeutsam das Reflektieren der Darstellung neben dem Reflektieren der Strategie ist. Es verweist auf die Notwendigkeit, das Verfassen adressierter mathematischer Texte zu erlernen.

„Dialog-Vorschläge“. Im Unterricht gelingt es meist nicht, alle Kinder zugleich individuell zu fördern, selbst dann nicht, wenn man ihre Strategien gut aufklären kann. Meist genügt die verfügbare Zuwendung

nicht, zumindest dann nicht, wenn man sie fair verteilen will. Eine Option kann darin bestehen, Austausch und Dialoge unter den Kindern gezielt zu initiieren. Bei Vorhandensein einer entsprechenden Dialogkultur in der Lerngruppe kann man solche Dialoge oder kleine Gruppenkonferenzen anhand der Eigenproduktionen anregen. Das kann etwa dadurch gestartet werden – so eine Aufgabe im Seminar – dass man die Mind Map von einer „Strategie-Karte“ zu einer „Dialog-Karte“ neu arrangiert und die Partner oder Kleingruppen als Cluster der Mind Map wählt: „Wer sollte sich mit wem austauschen? Und warum?“ Studierende neigen dabei zum Bilden strategiehomogener Cluster, bisweilen kommen aber auch mutige und originelle Paarbildungen vor, etwa die, Filipe und Tobias in einen gemeinsamen Austausch zu bringen (Abb. 4).

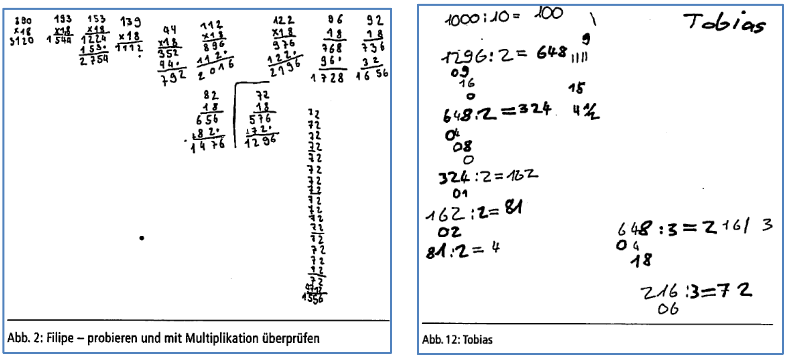


Abb. 2: Filipe – probieren und mit Multiplikation überprüfen

Abb. 12: Tobias

Abb. 4 Filipes Lösung: Probieren und mit Multiplikation überprüfen („Zielschießen“), Tobias´ Lösung: Divisor multiplikativ zerlegen („Backtracking“)

Filipe und Tobias zeigen substanzielle autonome Strategien, beide probieren, beide dokumentieren ihren Weg verstehbar, wenngleich beide keinen Text verwenden. Beide importieren das sichere Beherrschen von Techniken, mit denen Teile des Problems zu lösen sind:

- Filipe kann sicher multiplizieren und verwendet ein systematisches Variieren eines Faktors bei Festhalten des anderen. Das Variieren erfolgt in Abhängigkeit von den gefundenen Produkten. Er nutzt dem operativen Prinzip entsprechend eine Art „Zielschießen“. Bemerkenswert erscheint, dass das operative Prinzip hier nicht didaktisch initiiert auftritt, sondern als autonome Strategie.

- Tobias kann sicher durch kleine Zahlen schriftlich teilen. Er teilt zunächst fortlaufend durch 2, erkennt, dass dies nicht zielführend ist. „Backtracking“ ist seine Konsequenz: Ausgehend von der letzten in seiner Strategie noch nutzbaren (!) Rechnung (richtig sind sie alle) setzt er den Weg korrekt fort. Tobias nutzt als autonome Strategie die Primfaktor-Zerlegung des Divisors!

Einen Dialog zwischen diesen beiden erachten die Studierenden als sinnvoll, weil beide autonom und bewusst ihren Weg verfolgen und ihre Verfahren mit Verständnis durchführen. Was dazukommen sollte, ist die für andere verstehbare Versprachlichung.

Hier scheint ein Problem auf: Wie weit sind Rechenwege zu fördern, die offensichtlich weit von dem gewohnten Standard abweichen? Diese Frage ist bleibend aktuell und erfordert situative Entscheidungen. Deutlich wird jedoch auch das Erfordernis, Lösungen wie die von Filipe und Tobias anzuerkennen und nicht nur solche, wie die von Ruth, die „das Normale nachvollziehen“. Es ist stets unterrichtsbegleitende Dichotomie zwischen dem Erfordernis, Fertigkeiten zu entwickeln, und das Erfordernis, Strategien zu entwickeln.

Offene Fragen zur Diskussion und als Impuls zum Durchführen eigener Erkundungen

Zum Finden eigener Positionen. Welchen Bearbeitungen verdiene wieviel Anerkennung? In welcher Lage wechsle ich von adaptiver Förderung zu substitutiver Förderung?

4 Selter und Spiegel (1997): Marcels Multiplikationen

Betrachtet werden „Fehlermuster bei der schriftlichen Multiplikation“ (Selter & Spiegel, 1997, S. 73 und 94–95). Das Bespiel in Abschnitt 3 diskutiert 12 verschiedene Rechnungen zu derselben Aufgabe, alle weitgehend richtig. Dieses Beispiel nun diskutiert 7 Aufgaben zur schriftlichen Multiplikation, durchgeführt von einem einzigen Kind, alle falsch.

Dargestellt ist nicht nur ein Bericht wie bei Hengartner, sondern zudem eine an Studierende oder Lehrkräfte gerichtete Aufgabe zur Deutung der Bearbeitung. Selter und Spiegel selbst geben eine hoch auflösende Deutung, verzichten jedoch auf jedwedes Beschreiben des Kontextes und stellen keine Aufträge, die über das reine Deuten hinaus zu Bewertungen und Lehrkonzepten führen.

Dieses Beispiel ist für mich „outstanding" unter den Beispielen dieses Buches, es eröffnet die Möglichkeit zum Beurteilen und Fördern, Positionen zu prüfen und zu beziehen und dabei durchaus Konflikte zu durchleben.
Das Besondere des Beispiels besteht darin, dass zu den Bearbeitungen von Marcel drei Dokumente (Abb. 5, 6 und 7) vorliegen, deren aufeinanderfolgendes Eröffnen jeweils unterschiedliche Impulse zur Deutung und Bewertung bewirken. Dieses Herangehern soll verdeutlichen, dass und wie unterschiedliche Struktur und Reichhaltigkeit der Dokumente die Einschätzung einer Eigenproduktion jeweils in verschiedene Richtungen lenkt und die damit verbundenen Positionen beeinflussen kann.

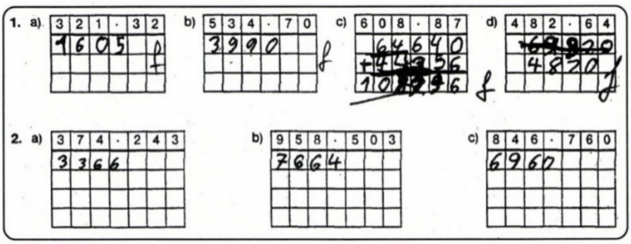


Abb. 5 Marcels Klassenarbeit, erstes Dokument

Die von Selter und Spiegel gestellten Deutungen und Deutungsaufgaben werden zunächst zurückgestellt. Stattdessen erhalten die Studierenden als erste Aufgabe: „Geben Sie Marcel eine Zensur, die Sie im Lehrerzimmer verteidigen können." Hier ein typisches Ergebnis aus einem Dortmunder Seminar zur Arithmetik (Tab. 2).

Mögliche erste „Zensur E"	Anzahl aus 26 Voten
6	5
5	16
4	5

Tab.2 Ergebnis aus einem Dortmunder Seminar zur Arithmetik

Zuvor wurde die juristische Kennzeichnung der Zensuren recherchiert. Die Studierenden basierten die Zensur primär auf dem Ergebnis, daher die Bezeichnung ***„Zensur E"***. Nach Diskussion des Unterschieds von „Fehler" und „Fehlermuster" entstanden erste Zweifel an der Einschätzung, da vier der sieben Aufgaben mit demselben Muster zu erklären sind. Wichtig ist hier das Charakterisieren der Deutung als

Hypothese, die zwar die Ergebnisse erklären kann, aber nicht den tatsächlichen Denkvorgang beschreiben muss.

Das zweite Dokument, eine Art „Schmierzettel“, zeigt die eigenadressierten Rechnungen von Marcel, die er für sich selbst erstellt hat (Abb. 6).

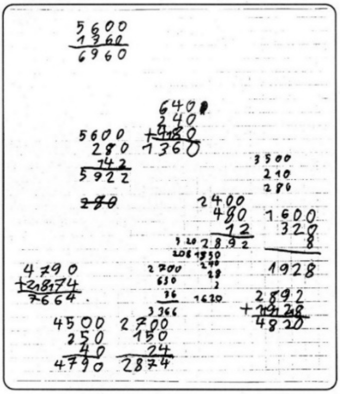


Abb. 6 Marcels die eigenadressierten Rechnungen, die er für sich selbst in der Klassenarbeit erstellt, zweites Dokument

Nun fällt auf, dass die offizielle Arbeit eine Antwort in „offizieller Struktur“ verlangt und keinen Raum für eigene Wege öffnet. Die von Selter und Spiegel gestellte Aufgabe zu diesem zweiten Dokument fordert von den Studierenden, die Teile den Aufgaben zuzuordnen und die Rechenwege zu erkunden.

Danach erhalten sie folgende Aufgabe: „Bitte bewerten Sie nun Marcels Arbeit erneut unter Berücksichtigung seiner Strategie-Kenntnisse. Geben Sie Marcel dazu zwei Zensuren, eine ***„Zensur E“*** zum Ergebnis und eine ***„Zensur S“*** zu seiner strategischen Kompetenz.“ Dasselbe Seminar kam nun zu folgendem Befund (Tab. 3).

Mögliche zweite Zensur	***„Zensur E“*** Anzahl aus 26 Voten	***„Zensur S“*** Anzahl aus 26 Voten
6	5	1
5	16	0
4	5	9
3	0	13
2	0	3

Tab.3 Zweites Ergebnis aus einem Dortmunder Seminar zur Arithmetik

Die Bewertung S zeigt die zunehmende Anerkennung der Teilleistungen, sie fällt höher aus als die Bewertung E. Es erscheint möglich, mit Marcel die korrekte Rechnung zu erarbeiten, seine „Nebenrechnung“ gibt Hinweise dazu.
Dies eröffnet die Frage nach möglicher Unterstützung für Marcel. Die Fragestellung an die Studierenden wird erneut erweitert: „Nehmen Sie an, es besteht für Marcel die Option einer kompetenten Einzelförderung. Geben Sie nun über die Zensuren E und S hinaus die ***„Zensur F“***: Wie viele Förderstunden für Marcel halten Sie für erfolgversprechend, 2 oder 5 oder 10?“ Die Antwort war allerdings erst nach Eröffnen des folgenden dritten Dokuments (Abb. 7) zu geben. Auch wurde vorerst nicht thematisiert, worin die Förderung bestehen könnte.

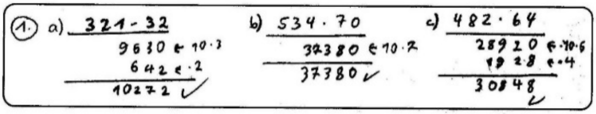


Abb. 7 Marcels Klassenarbeit drei Monate vorher, drittes Dokument

Nach der Diskussion zu Ronaldos Subtraktion 200 – 35 vermuten die Studierenden nun, dass diese korrekt erscheinenden Aufgaben möglicherweise eher syntaktisch als semantisch basiert gerechnet wurden, ohne tieferes Verstehen. Es sind keine autonomen Lösungen. Und dass man in der Förderung möglicherweise „weiter zurück“ muss als ursprünglich angenommen. Nun steht der gesamte bisherige Befund in Frage (Tab. 4).

Mögliche Zensur F nach Eröffnen des dritten Dokuments	Anzahl aus 26 Voten
10 Förderstunden	3
5 Förderstunden	13
4 Förderstunden	2
3 Förderstunden	1
2 Förderstunden	7

Tab.4 Vorschläge zum Umfang der Förderung

Anschließend entwickelten die Studierenden Förderideen für Marcel, bei denen zum Teil „weit zurückgegriffen“ wird: 1. Schätzen, Runden, überschlägiges Rechnen, 2. Schreibhilfen 3. Gestaffelte Aufgabenserie, 4. „Malkreuz“ – symbolische Darstellung, Multiplikationstabelle mit Randsummen, falls notwendig in ikonischer Darstellung mit Punktefeld und Abdeckwinkel

Zum Finden eigener Positionen. Ist Marcel eine Ausnahmeerscheinung oder vielleicht typisch? Was hat er warum langfristig behalten? Wieso gelingt Marcel keine Ergebniskontrolle? Sollte man die grundsätzlich anfordern? Worauf kann eine adaptive Rückmeldung zurückgreifen? Inwieweit belegen die Dokumente Autonomie von Marcel?

5 Lithner et al. (2013): Aufgaben-Design

Die bisherigen Betrachtungen lassen vermuten, dass bestimmte Aufgabenstellungen bzw. deren Darstellung semantisches Denken supprimieren und syntaktisches Rechnen evozieren. Wie kann man semantische Strategien müssen durch die Aufgabenstellung kognitiv aktivieren? Möglich erscheint dies durch die Aufgabenform, durch das „Task Design“ (Lithner, Jonsson, Granberg, Liljekvist, Norqvist & Olsson, 2013).

Dieser Text referiert ein empirisches Ergebnis zum Design von Aufgaben, stellt jedoch keine Eigenproduktionen vor. Berichtet werden unterschiedliche Erfolgsanteile zu zwei Varianten einer Aufgabe, zusätzlich differenziert nach zwei Schülergruppen als Versuchspersonen. Der Text intendiert den Nachweis, die beobachteten Unterschiede auf Unterschiede im Aufgabendesign zurückzuführen. Das kann für angehende Lehrkräfte eine Unterstützung bei eigenen Designs sein.

Im Kern geht es darum, welches Design von Aufgaben kognitive Aktivierungen dahingehend bewirkt, dass es im Gegensatz zu einer syntaktischen eine semantisch bestimmte Bearbeitung auslöst.

Lithner et al. (2013) nehmen die von Niss gegebene Charakterisierung des Problemlösens auf:

> *Problem solving is defined as “engaging in a task for which the solution method is not known in advance” (NCTM, 2000, p. 51) and includes identifying, posing, and specifying different kinds of problems and solving them, if appropriate, in different ways (Niss 2003)*. (S. 221)

Statt syntaktisches und semantisches Lernen zu unterscheiden unterscheiden sie ähnlich dazu zwischen „Auswendiglernen“ (rote learning) und „kreativem mathematisch basiertem Argumentieren“ (creative mathematically founded reasoning):

Auswendiglernen (rote learning) bezeichnet den Prozess, etwas durch Wiederholen zu lernen, bis man es behält, [möglicherweise] ohne dessen Bedeutung zu verstehen (Oxford Advanced Learner´s Dictionary, Übersetzung: B.W.). Auswendiglernen induziert ein „imitierendes algorithmisches Denken“.

Kreatives mathematisch basiertes Argumentieren dagegen erfüllt drei Kriterien: i) Kreativität. Eine für den Argumentierenden neue Argumentationsfolge wird erstellt oder eine vergessene in einer Weise wieder vergegenwärtigt, die hinreichend flüssig und flexibel ist, um hinderliche Fixierungen zu vermeiden. ii) Plausibilität. Es gibt Argumente, welche die Wahl der Strategie unterstützen und strategische Implikationen, die erklären, weshalb die Schlussfolgerungen zutreffend oder plausibel sind. iii) Verankern. Die Argumente sind in den intrinsischen mathematischen Eigenschaften der Komponenten verankert, die in das Argumentieren eingebunden sind. (Lithner et al., Übersetzung: B.W.)

Lithner et al. führen ein Experiment durch, bei dem zwei verschieden trainierte Schülergruppen Aufgaben lösen, die je nach Designvariante Problemlösen erfordern oder nicht (Abb. 8). Gruppe 1 wird trainiert mit Schwerpunkt auf „imitierendem algorithmischen Denken“, Gruppe 2 mit Schwerpunkt auf „kreativem mathematisch basiertem Argumentieren“. Wie das Training konzipiert ist, wird nicht berichtet.

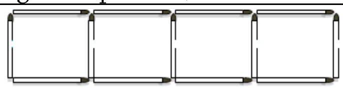
Legt man Quadrate aus Hölzchen in einer Reihe, so sieht das aus wie im Bild rechts. 13 Hölzchen braucht man für vier Quadrate	
Ist x die Zahl der Quadrate, so kann man die Zahl y der Hölzchen mit der Funktion $y = 3x+1$ berechnen. *Beispiel: Legt man 4 Quadrate in einer Reihe, so benötigt man $y=3x+1=3.4+1=13$ Hölzchen.*	
Wie viele Hölzer sind nötig, um eine Reihe mit 6 Quadraten zu erhalten?	

Abb. 8 Aufgabe in zwei Formen nach Lithner et al. (2013)

Die Aufgabe enthält zwei Darstellungen, eine mit einer Material-Illustration und eine mit einem formalen Text, hier kursiv gesetzt. Die Aufgabenstellungen werden für den Test differenziert: „Formula“ fragt erneut nach der Formel, „short numerical“ nach Wiederholen des Lösungswegs und Nennen der Lösung und „long numerical“ nach Rekonstruieren des Lösungswegs.

Die Besonderheit der Studie besteht nun darin, dass die 99 Versuchspersonen randomisiert in zwei Gruppen aufgeteilt werden: Eine bekommt die Aufgabe in der angegebenen ausführlichen Form, die andere in reduzierter Form, bei welcher der kursiv notierte mittlere Teil komplett entfällt.

Die Diagramme zeigen die Ergebnisse insgesamt und die Ergebnisse einer Teilgruppe mit „niedrigerem kognitiven Index“ (Abb. 9).
Man ist zunächst versucht, das Ergebnis im Sinne eines „weniger ist mehr“ zu deuten. Eine nähere Betrachtung führt jedoch sowohl zu Erklärungen der Ergebnisse als auch zu Kritik an ihnen als Ausgangspunkt für eigene Entwürfe und Versuche.
Eine Deutung besteht darin, mögliche kognitive Aktivierungen zu betrachten. Die materielle Darstellung aktiviert möglicherweise nicht nur Vorstellungen zu den Gegenständen, sondern insbesondere zu den Handlungen damit. Die anschließende Textdarstellung ruft ganz andere symbolische Vorstellungen auf und supprimiert die zuerst aktivierten. In diesem Fall wäre der Nutzen der vorbereitenden materiellen Darstellung dahin.
Kritik: Die im ersten Textteil aufgerufene Handlungsvorstellung führt auf ein induktiv fortschreitendes Generieren der Lösung, die im zweiten Textteil aufgerufene Vorstellung verlangt das Handhaben eines „geschlossenen Ausdrucks“. Möglicherweise sehen die Probanden nicht, dass diese beiden zueinander passen und betrachten im Sinne des „didaktischen Vertrags“ den zweiten Teil unabhängig vom ersten als die eigentliche Aufgabe.
Man ist versucht, die zweite Aufgabe an Grundschulkinder zu richten.

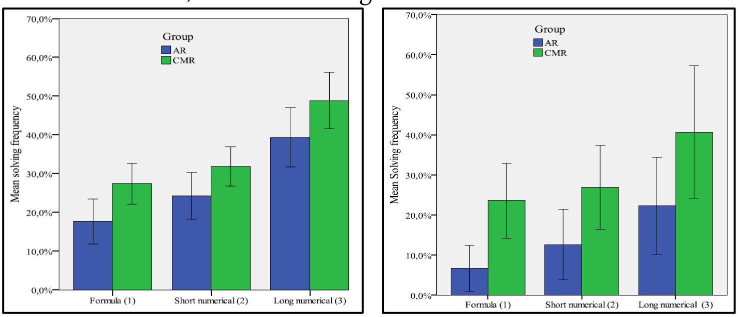


Abb. 9 Anteil richtiger Lösungen, niedrige Säulen: Aufgabe mit Rechenbeispiel, höhere Säulen: Aufgaben ohne Rechenbeispiel. Links: alle Versuchspersonen, rechts: Versuchspersonen „mit niedrigem kognitivem Index“.

Die empirischen Befunde (Abb. 9) erscheinen glaubwürdig, hängen aber wohl stark ab von der Lernbiografie und dem Treatment der Probanden, beides nicht dokumentiert. Insofern sollte man für ein eigenes autonomes Urteil ähnliche Versuche selbst durchführen.

Zum Finden eigener Positionen. Man kann die These aufstellen, dass die Erfolgsrate der Bearbeitungen stark (?) von der Zahl der Quadrate in der Aufgabe abhängt und vielleicht davon, ob die Formel $y = 3x + 1$ heißt oder $y = 1 + 3x$ Die zweite bildet die schrittweise Handlung besser ab. Ein Problem für Studierende bei der Auseinandersetzung mit dieser Studie besteht darin, dass keine Eigenproduktionen dokumentiert sind.

Für das Bilden autonomer Urteile angehender Lehrkräfte sind solche Studien vielleicht gerade auf Grund der darin wahrgenommenen Probleme geeignet. Sie werfen grundsätzlich die Frage nach der Validität auf. Man ist darauf verwiesen, den unbekannten zusammenfassenden Deutungen der Autoren zu folgen.

6 Schlussbemerkung

Logistische Bedingungen begrenzen oft das Raumgeben zu intellektuell autonomem Lernen im real existierenden Unterricht, Zielvorgaben und Ressourcengrenzen fordern bisweilen unfreiwilliges, aber entschiedenes Distanzieren davon. Langfristig aber ist es m.E. erfolgversprechender. Sich dann dennoch dazu zu entscheiden fordert von Lehrkräften intellektuelle und entscheidungsbewusste Autonomie.

Literatur

Gindrat, R., Güttinger, F., Wyss, C. & Hengartner, E. (1999). Dividieren: Individuelle Strategien erkunden (4. Klasse), In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen* (S. 116–123). Zug: Klett und Bahner Verlag.

Lithner, J. Jonsson, B., Granberg, C., Liljekvist, Y., Norqvist, M. & Olsson, J. (2013). Designing tasks that enhance mathematics learning through creative reasoning. In C. Margolinas, (Hrsg.), *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (S. 221–230). Oxford. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054/file/ICMI_STudy_22_proceedings_2013-10.pdf

Nunez, T., Carraher, D.W. & Schliemann, A., (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett Grundschulverlag.

Senior-Prof. Dr. Bernd Wollring
Wegmannstraße 57
34128 Kassel
wollring@mathematik.uni-kassel.de

Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Charlotte Rechtsteiner
rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de

Beitrag I: Solveig Jensen und Hedwig Gasteiger
solveig.jensen@uos.de hgasteiger@uni-osnabrueck.de

Warum geht das so? Verständnis der Subtraktionsverfahren „Entbündeln“ und „Erweitern“ erfassen

Verständnisorientierter Unterricht bei der Thematisierung schriftlicher Rechenverfahren wird von mathematikdidaktischer (Padberg & Benz, 2021) wie auch curricularer Seite (KMK, 2005) gefordert. Dabei ist allerdings nicht ausreichend geklärt, was Kinder konkret leisten sollen, um ihnen Verständnis attestieren zu können. Im Rahmen einer explorativen Studie (Jensen & Gasteiger, 2019a) sowie in Vorstudien zur Eignung verschiedener Erhebungsmethoden befassten wir uns mit dem Verständnis der beiden Subtraktionsverfahren *Entbündeln* und *Erweitern* (z. B. Jensen & Gasteiger, 2020). Die Überlegungen fließen in die vergleichende Studie im Schuljahr 2021/22 unter Kontrolle des Unterrichts ein, in der auch das Verständnis der Verfahren für ihren Vergleich herangezogen werden soll. Im Rahmen der Arbeitsgruppe Arithmetik soll anhand konkreter Schülerbearbeitungen diskutiert werden, wie das Verständnis der zwei Verfahren gefördert und erfasst werden kann.

1 Mathematische Gründe für das Funktionieren der Verfahren

Beim schriftlichen Subtrahieren werden Minuend und Subtrahend stellengerecht untereinandergeschrieben und stellenweise wird von den Einern ausgehend die Differenz bestimmt. Dabei gibt es verschiedene Verfahren für die Differenzbildung und für den Umgang mit der Situation, dass an einer Stelle der Ziffernwert im Minuenden kleiner ist als der im Subtrahenden. Beim *Entbündeln* wird in diesem Fall das Bündelungsprinzip angewendet: Eine der Bündelungseinheiten in der nächst größeren Stelle wird entbündelt. Ist z. B. in der Zehnerspalte der Ziffernwert im Minuenden kleiner als der im Subtrahenden, wird im Minuenden ein Hunderter zu zehn Zehnern entbündelt. Die Differenz der zwei Zahlen wird dadurch nicht verändert, weil ein Hunderter genauso viel wert ist wie zehn Zehner und somit der Wert des Minuenden gleichbleibt. Beim *Erweitern* wird auf Basis des Gesetzes der Konstanz der Differenz gearbeitet, indem im beschriebenen Fall im Minuenden zehn Zehner und im Subtrahenden gleichzeitig ein Hunderter ergänzt werden. Beide Zahlen werden also um die gleiche Anzahl erhöht und somit ändert sich ihre Differenz nicht.

2 Erklärungen-WARUM als Zugang zum Verständnis der Subtraktionsverfahren

Versteht man Erklärungen von Kindern als Möglichkeit, Einblicke in ihr Verständnis mathematischer Inhalte zu erhalten (Wittmann, 2009), muss jeweils passend herausgearbeitet werden, welche Erklärung für ein Attestieren von Verständnis erwartet wird. Klein (2009) unterscheidet verschiedene Erklärtypen: Beim Erklären-WIE gehe es um die Modalität von Prozessen, während ein Erklären-WARUM die Frage nach Ursachen/Gründen beantworte. Verständnis von Verfahren zeichnet sich laut Vollrath & Roth (2012) u. a. aus durch „wissen, warum es funktioniert" (S. 49). Von den Kindern wird also im Zusammenhang mit dem Erfassen des Verständnisses der Subtraktionsverfahren ein Erklären-WARUM erwartet, das die in Abschnitt 1 beschriebenen mathematischen Gründe für das Funktionieren der Verfahren darlegt. Wie diese Erklärungen konkret aussehen können, ist aus didaktischer Perspektive zu klären (Klein, 2009) und im Unterricht zu beachten, der die fachlichen Grundlagen für die Erklärungen anbieten muss.

3 Konsequenzen für den Unterricht

Soll Verständnis der Verfahren erreicht werden, muss Hiebert & Carpenter (1992) folgend die Möglichkeit für den Aufbau und die Vernetzung mentaler Repräsentationen geschaffen werden. Anknüpfungspunkte an vorhandenes Wissen, z. B. über das Bündelungsprinzip, können durch Handeln mit passendem Material wie den Zehnerblöcken explizit gemacht werden (ebd.). Weil Erklären ein Sprachhandeln darstellt, ist der Unterricht zudem sprachsensibel zu gestalten (Tiedemann, 2015). Sprachliche und fachliche Lehrziele hängen hier eng zusammen und die Beurteilung von Aussagen muss „sowohl auf sprachlicher als auch auf mathematischer Ebene getroffen werden" (S. 12).

Zur Unterstützung auf sprachlicher Ebene müssen u. a. die notwendigen Fachbegriffe für ein Erklären-WARUM des jeweiligen Verfahrens angeboten werden. Zu beachten ist überdies, dass beim Erklären-WARUM je nach Kontext unterschiedliche Arten von Gründen herangezogen werden können (Klein, 2009). In unserer explorativen Studie zeigten einige Kinder in Übertragung der Erkenntnisse von Klein (2009) eher ein Alltagsverständnis von Erklären-WARUM (Jensen & Gasteiger, 2019b). In einer der Aufgaben wurde eine Bearbeitung einer schriftlichen Subtraktion abgebildet. Durch eine WARUM-Frage war ein Erklären-WARUM intendiert (Frage beim Entbündeln: „Warum wurde die Sieben durchgestrichen und darüber eine Sechs geschrieben?“; beim Erweitern analog: „Warum wurde die kleine Eins hingeschrieben?“). Einige Kinder bezogen sich in ihren Begründungen auf die Ausgangssituation, dass der Ziffernwert im Minuenden kleiner ist als im Subtrahenden, und gaben sie als Grund für das *Anwenden* der Technik an („Weil 4-8 ja nicht geht“). Im Kontext der schriftlichen Subtraktion erscheint es aber vielmehr sinnvoll, von den Kindern zu fordern, dass sie als Begründung die mathematischen Gesetze heranziehen können, die die jeweilige *Vorgehensweise* erlauben (vgl. Abschnitt 1, Jensen & Gasteiger, 2020). Aufgabe der Lehrkraft ist es also auch, in Unterrichtsgesprächen Impulse in Richtung mathematischer Gründe für das Funktionieren der Verfahren zu geben.

Insgesamt braucht es somit eine Klärung aus normativer Perspektive, welche mathematischen Grundlagen von den Kindern in welcher Form formuliert werden sollen, aber auch, welche Formulierungen erwartet werden können. Im Workshop werden konkrete Schülerbearbeitungen dahingehend diskutiert.

Literatur

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992): Learning and Teaching with Understanding. In: D. A. Grouws (Hrsg), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 65–97). New York: Macmillan Publishing Co.

Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019a). „Ergänzen mit Erweitern“ und „Abziehen mit Entbündeln“ – Eine explorative Studie zu spezifischen Fehlern und zum Verständnis des Algorithmus. *Journal für Mathematik-Didaktik, 40*(2), 135–167.

Jensen, S. & Gasteiger, H. (2019b). Bewertung von Begründungen zu schriftlichen Subtraktionsverfahren. In A. Frank, S. Krauss, & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019* (S. 1143–1146). Münster: WTM-Verlag.

Jensen, S. & Gasteiger, H. (2020). Das Verständnis von schriftlichen Subtraktionsverfahren durch Erklärungen erfassen. In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 465–468). Münster: WTM-Verlag.

Klein, J. (2009). ERKLÄREN-WAS, ERKLÄREN-WIE, ERKLÄREN-WARUM. Typologie und Komplexität zentraler Akte der Welterschließung. In R. Vogt (Hrsg.), *Erklären. Gesprächsanalytische und fachdidaktische Perspektiven* (S. 25–36). Tübingen: Stauffenberg.

KMK: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2005) (Hrsg.). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich* (Jahrgangsstufe 4). München & Neuwied: Luchterhand.

Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik*. 5. Auflage. Berlin: Springer Spektrum.

Tiedemann, K. (2015). Erklären braucht Sprache. *Praxis der Mathematik in der Schule, 64*(57), 10–12.

Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Wittmann, G. (2009). Erklärsituationen als Schlüssel zu individuellen Konzepten mathematischer Begriffe und Verfahren. Ein Überblick über mathematikdidaktische Forschungsansätze. In J. Spreckels (Hrsg.), *Erklären im Kontext. Neue Perspektiven aus der Gesprächs- und Unterrichtsforschung* (S. 94–118). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Beitrag II: Laura Gabler und Stefan Ufer
gabler@math.lmu.de ufer@math.lmu.de

Flexibilität im Umgang mit Situationsstrukturen – Ein Förderkonzept zum Lösen additiver Textaufgaben

Für viele Lernende stellt das Lösen additiver Textaufgaben eine Hürde dar. Insbesondere die Konstruktion eines tragfähigen Situationsmodells zeigt sich als entscheidender Teilprozess (Thevenot, Devidal, Barrouillet & Fayol, 2007). Basierend auf Vorschlägen in der Literatur wird in diesem Beitrag ein Förderkonzept vorgestellt (Gabler & Ufer, 2021), mit dessen Hilfe Kinder der zweiten Jahrgangsstufe beim Aufbau eines solchen Situationsmodells unterstützt werden sollen.

1 Forschungsstand

Gängige Modelle zum Lösen additiver Textaufgaben gehen davon aus, dass Lernende ein Situationsmodell auf Basis des Textes konstruieren und dieses zu einem mathematischen Modell weiterentwickeln, indem sie ihr individuelles Situationsmodell mit mathematischen Konzepten beschreiben (Kintsch & Greeno, 1985). Vergangene Studien zeigten, dass die Aufgabenschwierigkeit vor allem von der Realisierung unterschiedlicher Komponenten der Situationsstruktur einer Textaufgabe abhängt (Carpenter, Hiebert & Moser, 1981). So beeinflussen die *semantische Struktur* (Vereinigung, Veränderung, Vergleich oder Ausgleich von Mengen), die *Formulierungsrichtung* (z. B. aufsteigende oder absteigende Formulierung eines Vergleichs mit „mehr" oder „weniger") und die *gesuchte Menge* (bei Aufgaben mit einem Rechenschritt ist eine der drei involvierten Mengen gesucht) die Schwierigkeit einer additiven Textaufgabe (Gabler & Ufer, 2021; Stern, 1993). Insbesondere Vergleichsaufgaben mit gesuchter Referenzmenge (z. B. „Susi hat drei Murmeln. Sie hat zwei Murmeln weniger als Max. Wie viele Murmeln hat Max?") standen aufgrund ihrer besonderen Schwierigkeit im Fokus bisheriger Forschung (z. B. Stern, 1993).

2 Flexibilität im Umgang mit Situationsstrukturen

Zur Unterstützung beim Umgang mit schwierigen additiven Textaufgaben existieren bereits Vorschläge, dass Lernende ihr individuelles Situationsmodell mit weiteren Perspektiven auf die Situation anreichern und damit schwierige Textaufgaben in leichtere umdeuten könnten. Greeno (1980) schlug bereits die Umdeutung der semantischen Struktur vor. Bei Vergleichsaufgaben bietet sich insbesondere die Umdeutung in einen Ausgleich an (*Dynamisierung*, z.B. „Wenn Susi noch zwei Murmeln dazubekommt, dann hat sie genauso viele wie Max.“) (Gabler & Ufer, 2021). Zudem könnten Lernende nach Stern (1993) die Formulierungsrichtung umdeuten (*Inversion*, z.B. „Max hat zwei Murmeln mehr als Susi.“) und damit inkonsistente Textaufgaben in konsistente Textaufgaben, in welchen die Formulierungsrichtung (aufsteigend) mit der direkt anwendbaren Rechenoperation (Addition) übereinstimmt, umwandeln (Lewis & Mayer, 1987). Diese beiden Strategien werden in diesem Beitrag unter dem Fähigkeitskonstrukt *Flexibilität im Umgang mit Situationsstrukturen* zusammengefasst. Es wird angenommen, dass eine solche Flexibilität dabei hilft, das individuelle Situationsmodell mit weiteren Perspektiven (z.B. eine weitere Ausprägung der semantischen Struktur oder der Formulierungsrichtung) anzureichern und damit auch schwierigere Textaufgaben zu lösen.

3 Förderkonzept

Im Rahmen einer Interventionsstudie wurden die Ansätze von Greeno (1980) und Stern (1993) aufgegriffen und zu einem Förderkonzept weiterentwickelt. Das explizite Lösen von Textaufgaben ist dabei nicht Teil des Konzepts. Vielmehr sieht das Förderkonzept vor, Lernende durch Anwendung der Dynamisierungs- und Inversionsstrategie zur umfassenden Beschreibung von Vergleichssituationen anzuregen und damit Flexibilität im Umgang mit Situationsstrukturen aufzubauen (Abb. 1).

Abb. 1 Anwendung der Dynamisierungs- und Inversionsstrategie

Das Förderkonzept ist in fünf Phasen untergliedert. Anknüpfend an eine Phase, in welcher *Grundlagen* (z. B. zu Differenzmengen oder zum Mengenausgleich) gesichert werden sollen, werden die Strategien implizit während der Phasen *Prüfen*, *Zuordnen* und *Beschreiben* eingeführt. Beim Prüfen und Zuordnen arbeiten Lernende mit bereits formulierten Situationsbeschreibungen. Zum Beispiel prüfen sie, ob Situationsbeschreibungen zu einer dargestellten Situation passen und begründen ihre Antwort. Zudem werden Lernende angeregt, systematisch formulierte Situationsbeschreibungen, die sich auf die beiden Strategien beziehen (siehe Abb. 1), durch Zuordnung zu verschiedenen Vergleichssituationen zu kontrastieren. In diesen beiden Phasen begegnen Lernende relevanten Sprachmitteln (Niederhaus, Pöhler & Prediger, 2015), welche später, in der Phase des Beschreibens, zur eigenständigen Formulierung solcher Situationsbeschreibungen angewendet werden können. In einer weiteren Phase wird die laut Literatur besonders anspruchsvolle *Inversionsstrategie* (Stern, 1993) zusätzlich explizit eingeführt und geübt.

Zur Unterstützung der Lernenden bei der Übernahme von Sprachmitteln ist Makro-Scaffolding (Hammond & Gibbons, 2005) ein zentraler Bestandteil des Förderkonzepts. Wortkarten, Lückentexte und Satzanfänge (z. B. „mehr“, „Wenn..., dann...“) werden gezielt eingesetzt, um Lernende zur eigenständigen, umfassenden Beschreibung von Situationen anzuregen. Zudem werden Rechenschiffchen zur Veranschaulichung von Vergleich und Ausgleich eingebunden. Beide Unterstützungsmaßnahmen werden im Laufe der Förderung schrittweise zurückgenommen, bis Lernende diese nicht mehr benötigen.

Erste quantitative Analysen der Interventionsstudie zeigten eine Leistungssteigerung der Lernenden beim Lösen von Textaufgaben und bestätigten damit die Wirksamkeit des Förderkonzepts. Qualitative Analysen der Lernprozesse von Lernenden während der Intervention unterstützen diese Beobachtung (Gabler & Ufer, 2021). Damit liefert das Forschungsprojekt ein wirksames Förderkonzept zum Lösen von Textaufgaben, das sich alleinig auf den flexiblen Umgang mit Situationsstrukturen – ohne die Übersetzung in mathematische Operationen – stützt.

Literatur

Carpenter, T. P., Hiebert, J. & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(1), 27–39.

Gabler, L. & Ufer, S. (2021). Gaining flexibility in dealing with arithmetic situations: A qualitative analysis of second graders' development during an intervention. *ZDM Mathematics Education, 53*(2), 375–392.

Greeno, J. G. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. In E. Snow, P.-A. Frederico, & W. E. Montague (Hrsg.), *Aptitude, learning, and instruction. Volume 2: Cognitive process analysis of learning and problem solving* (S. 1-21). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hammond, J. & Gibbons, P. (2005). Putting scaffolding to work: The contribution of scaffolding in articulating ESL education. *Prospect, 20*(1), 6–30.

Kintsch, W. & Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review, 92*(1), 109–129.

Lewis, A. B. & Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*(4), 363–371.

Niederhaus, C., Pöhler, B. & Prediger, S. (2015). Relevante Sprachmittel für mathematische Textaufgaben: Korpuslinguistische Annäherung am Beispiel Prozentrechnung. In E. Tschirner, O. Bärenfänger & J. Möhring (Hrsg.), *Deutsch als fremde Bildungssprache: Das Spannungsfeld von Fachwissen, sprachlicher Kompetenz, Diagnostik und Didaktik* (S. 135–162). Tübingen: Stauffenburg.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology, 85*(1), 7–23.

Thevenot, C., Devidal, M., Barrouillet, P. & Fayol, M. (2007). Why does placing the question before an arithmetic word problem improve performance? *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 60*(1), 43–56.

Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Grit Kurtzmann
kurtzmann@schule-franzburg.de

Beitrag: Anke Geißler
anke.geissler@uni-leipzig.de

Erkundungen zur Entwicklung stochastischen Denkens

Im Rahmen eines Promotionsprojektes an der Universität Leipzig wird die Entwicklung des stochastischen Denkens von der Grundschule bis zur weiterführenden Schule in den Blick genommen. Neben der Beurteilung von Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten werden dabei zusätzlich auch kombinatorische Fähigkeiten anhand eines Online-Fragebogens erhoben und quantitativ ausgewertet. Erste Ergebnisse einer Pilotstudie werden vorgestellt und diskutiert.

1 Stochastik im Unterricht

Bereits seit den 1960er Jahren gibt es Forderungen und konkrete Vorschläge für eine frühe propädeutische Behandlung des Themas Stochastik in der Grundschule im Sinne des Spiralprinzips (Sill & Kurtzmann, 2019, S. 4ff.). Winter begründete dies damit, dass das „Lernen von Stochastik [...] wesentlich zum besseren Verständnis unserer natürlichen und gesellschaftlichen Welt beitragen" kann sowie zu einer „höheren Kritikfähigkeit gegenüber vorgelegten Behauptungen" führt (Winter, 1976, S. 22ff.). Gerade in den Bereichen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung existieren grundlegende Fehlvorstellungen, denen mit einer frühzeitigen Behandlung im Schulunterricht entgegengewirkt werden kann.

Mit den im Jahr 2004 beschlossenen KMK Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich wurde die inhaltsbezogene Kompetenz „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit" verbindlich in den Mathematikunterricht der Grundschule integriert (KMK, 2005, S. 11). Hier heißt es unter „Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen", dass die Kinder die „Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich)" und „Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen". Weiterhin sollen sie „einfache kombinatorische Aufgaben (z. B.

Knobelaufgaben) durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen“. Die letztgenannte Anforderung ist allerdings nicht dem Bereich „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ zugeordnet, sondern dem Bereich „Zahlen und Operationen“ (KMK, 2005, S. 9). Der Arbeitskreis Stochastik äußert sich dazu folgendermaßen:

Die Kombinatorik wird nicht zur Stochastik im engeren Sinne gezählt. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat die Kombinatorik die Funktion einer Hilfsdisziplin, indem sie geeignete Abzählverfahren zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bereitstellt. [...] Aufgrund der Bedeutung der Kombinatorik für das Erlernen grundlegender Zähltechniken und die Entwicklung allgemeiner geistiger Fähigkeiten halten wir in diesem Sinne elementare kombinatorische Inhalte in allen Zweigen der Schulmathematik für bedeutsam. Sie sollten in angemessener Weise auch in den Stochastikunterricht integriert werden. (Arbeitskreis Stochastik der GDM, 2003, S. 21)

Seitdem haben alle Bundesländer die Themen in ihre Bildungspläne der Grundschulen - bis auf wenige Ausnahmen beginnend ab Klasse 1 – implementiert.

2 Ausgewählte Ergebnisse einschlägiger Studien

Während zunächst die Einführung der unterrichtlichen Behandlung in der Sekundarstufe mittels des klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriffes nach Laplace – über die Betrachtung der günstigen und der möglichen Fälle unter Rückgriff auf kombinatorische Betrachtungen – erfolgte, wird heutzutage größtenteils der frequentistische Ansatz über die relative Häufigkeit befürwortet (Rolfes et al., 2020). Rolfes et al. stellten in ihren quantitativen Untersuchungen allerdings fest, dass Aufgaben mit dem klassischen Ansatz für Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 8 bis 10 leichter zu lösen waren als Aufgaben mit dem frequentistischen Ansatz.

Piaget führte bereits 1951 qualitative Studien mit Kindern ab 4 Jahren durch und stellte dabei die These auf, dass die Kombinatorik eine entscheidende Rolle für das Verständnis von Wahrscheinlichkeit spielt (Petter, 1976, S. 320 ff.). Piagets Untersuchungen wurden allerdings unter anderem aufgrund der Verwendung einer reinen Interviewtechnik, die auf ein hohes sprachliches Verständnis der Probanden zielt, sowie der geringen Anzahl an Probanden kritisch betrachtet (Heitele, 1976, S. 136–137). Neuere Untersuchungen belegen, dass eine Ausbildung des Zufalls- und Wahrscheinlichkeitsbegriffes bereits früher als von Piaget angenommen, stattfindet. So belegen Untersuchungen von Yost, Siegel und Andrews (1962), dass bereits Kinder im Alter von 4 Jahren ein Verständnis von Wahrscheinlichkeit besitzen. Goldberg kam 1966 bei seinen Untersuchungen an Kindern im Alter von 4 bis 5 Jahren zu ähnlichen Ergebnissen. Davies schlussfolgerte 1965, dass der Erwerb des Wahrscheinlichkeitsbegriffes ein entwicklungsbedingtes Phänomen ist, wobei das nonverbale Verhalten früher zu beobachten ist als eine Verbalisierung. Umgekehrt konnte gezeigt werden, dass alle Kinder, die den verbalen Test richtig beantworteten, auch den nonverbalen Test korrekt absolvierten (Davies, 1965).

3 Forschungsdesign und Einblicke in eine Pilotstudie

Der Ausschnitt aus der Forschung dokumentiert exemplarisch, dass es in den letzten Jahrzehnten eine Vielzahl an Studien zur Entwicklung stochastischen Denkens gab.

Ziel des Projektes ist es, mögliche Zusammenhänge zu zeigen zwischen der Fähigkeit, kombinatorische Fragestellungen zu lösen und der Fähigkeit, Wahrscheinlichkeiten von Zufallsexperimenten zu bewerten sowie zu begründen. Dazu werden in einem Quasilängsschnittdesign zu drei verschiedenen Testzeitpunkten mittels eines Online-Fragebogens über die Software SoSciSurvey im Quasilängsschnitt (nach der Hälfte der Grundschulzeit, zu Beginn der Sekundarstufe 1 sowie zu Beginn der 7. Klassenstufe) Daten erhoben und quantitativ ausgewertet. In der Hauptstudie werden etwa 200 Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 3, 5 und 7 (Erhebung jeweils zu Schuljahresbeginn) in die Untersuchung einbezogen. Der Fragebogen beinhaltet spezifische Items zu kombinatorischen Aufgabenstellungen sowie zum Beurteilen von Wahrscheinlichkeiten einschließlich der Begründung von zuvor vorgenommenen Entscheidungen.

Die Pilotierung des Fragebogens mit insgesamt 46 Schülerinnen und Schülern am Ende der Klassenstufen 2, 4 und 6 fand im Juni 2019 statt. Eine erste Auswertung der erhaltenen Daten lässt auf einen schwachen Zusammenhang zwischen den kombinatorischen Fähigkeiten sowie den Fähigkeiten zur Beurteilung von Zufallsexperimenten schließen. Es konnte bestätigt werden, dass Kinder Aufgaben zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen korrekt lösen, ohne dass sie ihre Antwort richtig begründen können.

Literatur

Arbeitskreis Stochastik der GDM (2003). Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts. *Stochastik in der Schule, 23*(3), 21–26.

Davies, C. M. (1965). Development of the probability concept in children. *Child Development, 36,* 779–788.

Goldberg, S. (1966). Probability Judgements by Preschool Children: Task Conditions and Performance. *Child Development, 37*(1), 157–167.

Heitele, D. (1975). *Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe*. Dortmund: Pädagogische Hochschule, Dissertation.

KMK (Hrsg.) (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) [Beschluss vom 15.10.2004*]. München: Luchterhand.

Petter, G. (1976). *Die geistige Entwicklung des Kindes im Werk von Jean Piaget* (2., unveränd. Aufl.). Huber.

Rolfes, T., Girnat, B., Fahse, C., Hupfer, A. M. & Robitzsch, A. (2020). Quantitative Ergebnisse zur Kompetenzstruktur des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. In A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2019: 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 1199–1202). WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. S. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe* (1. Aufl.). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer Spektrum.

Winter, H. (1976). Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6). *Didaktik der Mathematik,* (1), 22–37.

Yost, P. A., Siegel, A. E. & Andrews, J. M. (1962). Nonverbal probability judgments by young children. *Child Development, 33*(4), 769–780.

Arbeitsgruppe Frühe mathematische Bildung

Koordination: Julia Bruns

julia.bruns@uni-paderborn.de

Meike Grüßing

meike.gruessing@uni-vechta.de

Beitrag: Christiane Benz

benz@ph-karlsruhe.de

Hedwig Gasteiger

hedwig.gasteiger@uni-osnabrueck.de

Rose Vogel

vogel@math.uni-frankfurt.de

Frühe mathematische Bildung – was haben wir erreicht?

Das Themenfeld ‚Frühe mathematische Bildung' beschäftigt uns spätestens seit dem PISA- Schock, also nunmehr fast 20 Jahre lang. Im Rahmen der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule 2004 traf sich erstmals die Arbeitsgruppe ‚Vorschulische mathematische Bildung' (Koordination: Andrea Peter-Koop und Meike Grüßing). Den diesjährigen Arbeitskreis Grundschule haben wir (nunmehr als AG ‚Frühe mathematische Bildung') genutzt, um die Arbeiten und Fortschritte der letzten Jahre in diesem Themenbereich genauer in den Blick zu nehmen. Im Rahmen einer Expertinnen-Diskussion fragten wir uns, was in den letzten Jahren erreicht wurde, wie unser heutiges Verständnis von früher mathematischer Bildung ist und welche Fragen aus der Perspektive von Forschung und Praxis weiterhin offen sind. Zu diesen Fragen haben Christiane Benz, Hedwig Gasteiger und Rose Vogel mit uns diskutiert. Ihre Perspektive auf unsere erste Frage (Was haben wir erreicht?) wird hier dokumentiert, um so einen Einblick in unsere Diskussion zu geben.

Prof. Dr. Christiane Benz, Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Frühe mathematische Kompetenzen von Kindern im Elementarbereich waren spätestens in den 1990er Jahren auch in Deutschland Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung. Als gemeinsames Ergebnis der zahlreichen Studien zu „Vor"-kenntnissen der Kinder am Schulanfang konnte festgehalten werden, dass Kinder nicht als „Tabula Rasa" in die Schule kommen (vgl. Schmidt & Weiser, 1982, Schmidt, 2003, van den Heuvel-Panhuizen, 1995). Die empirischen Studien waren initial aus der Perspektive der schulischen Bildung gestaltet. Sie machten in Deutschland bekannt, dass Kinder bereits zahlreiche mathematische Kompetenzen im Elementarbereich erwerben. Der Anschlussfähigkeit zu bereits vorliegenden internationalen Forschungsergebnissen (Fuson, 1988, Gelman & Gallistel, 1978, Resnick, 1982) war der Boden bereitet.

In den letzten 15 Jahren rückte die frühe mathematische Bildung in den nationalen bildungspolitischen Fokus. Dies ermöglichte, dass frühe Bildung zunehmend auch unter institutioneller Perspektive der Kindergärten und -tagesstätten als Forschungs- und Praxisfeld für verschiedene Disziplinen und somit auch für die Mathematikdidaktik zugänglich wurde und die Hürden der diversen ministeriellen Zuständigkeiten zunehmend überwunden wurden.

Unter Berücksichtigung der institutionellen oder familiären Bedingungen (frühpädagogische Perspektive) und der Besonderheit des Entwicklungsalters (entwicklungspsychologische Perspektive) sowie im interdisziplinären Austausch konnten in den letzten Jahren Studienergebnisse aus Forschungs- und Entwicklungsprojekten vor allem zur Professionalisierung, zum Nutzen und Gestalten mathematischer Lerngelegenheiten sowie auch zur mathematischen Kompetenzentwicklung zu verschiedenen mathematischen Inhalten und Prozessen publiziert werden.

Prof. Dr. Hedwig Gasteiger, Universität Osnabrück

Vor 13 Jahren fand in Berlin – organisiert vom IPN und finanziert vom BMBF eine Expertentagung zum Thema „Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium – Kohärenz und Kontinuität als Herausforderung für den Mathematikunterricht" statt. Den Kindergarten im Kontext „Mathematiklernen" überhaupt aufzugreifen, war vergleichsweise bahnbrechend (Heinze & Grüßing, 2009).

Mittlerweile ist die frühe mathematische Bildung ein etabliertes Feld in der Mathematikdidaktik: Es gibt Symposien auf den GDM-Tagungen, seit rund 10 Jahren zahlreiche Dissertationen in diesem Bereich und sogar ein didaktisches Fachbuch zur frühen mathematischen Bildung in der Springer-Reihe (Benz et al., 2015) – um nur einige Indizien dafür zu nennen. Die Fachdidaktik Mathematik wird bei diesem Themenbereich von anderen Forschungsdisziplinen wahrgenommen, weil Interdisziplinarität aus der frühen Bildung nicht wegzudenken ist. In Teilen eröffnen auch bereits internationale vergleichende Studien neue Erkenntnisse und Perspektiven.

Zu einigen offenen Fragen und Themen im Kontext früher mathematischer Bildung gibt es vielversprechende erste Schritte – aber auch noch einiges zu tun: Zu nennen sind hier die Professionalisierung in Aus- und Weiterbildung, die Umsetzung und Wirksamkeit alltagsintegrierter früher mathematischer Bildung, das frühe mathematische Lernen in der Familie, die Rolle der Diagnose uvm.

Wir können mit Freude zurückblicken aber auch zielorientiert nach vorn!

Prof. Dr. Rose Vogel, Goethe-Universität Frankfurt

Frühe Bildungsprozesse rückten in den vergangenen 15 Jahren mehr und mehr in das Interesse von Bildungswissenschaften und Fachdidaktiken. Ausgangspunkt war die Entwicklung von Bildungs- und Entwicklungsplänen für frühe Bildung in den einzelnen Bundesländern, die Ausarbeitung eines gemeinsamen Rahmens der Länder für frühe Bildung in Kindertagesstätten (JKM/KMK, 2004) und die von den einzelnen Ländern initiierte und begleitete Umsetzung der Bildungspläne (Völkerling, 2014). In der Folge wurden und werden viele Forschungs- und Praxisprojekte im Bereich der frühen Bildung für Kinder, in der Aus- und Weiterbildung von frühpädagogischen Fachkräften und im Bereich der Kooperation und im Übergang zwischen Elementar- und Primarbereich durchgeführt (teilweise von Stiftungen oder z. B. durch BMBF-Schwerpunktprogramme finanziert).

Im Bereich der frühen mathematischen Bildung waren und sind viele Kolleg*innen in Forschungs- und Praxis-Projekten[1] engagiert. Neben der Untersuchung von frühen mathematischen Lernprozessen z.B. im erStMal-Projekt des IDeA-Zentrums (Brandt & Vogel, 2017) und im Übergang zwischen Elementar- und Primarbereich (Grüßing, 2009) werden Konzepte für die Gestaltung von frühen mathematischen Bildungsprozessen entwickelt und untersucht (z. B. Gasteiger, 2010; Stiftung „Haus der kleinen Forscher", 2017). Diese Studien geben einerseits Einblicke in das mathematische Lernen von jungen Kindern im Kindergarten und Kindertagesstätten und zeigen andererseits die Unterschiede und die Besonderheiten dieser frühen mathematischen Lernprozesse (Vogler, 2020; Beck, 2016; Henschen, 2020). Sie machen aber auch den Bedarf an Fort- und Weiterbildungen für frühpädagogische Fachkräfte deutlich und deren Erforschung sowie konzeptionelle Weiterentwicklung (Bruns, 2014). Gleichzeitig bieten mathematikdidaktische Beschreibungen früher mathematischer Bildungsprozesse (Benz u. a., 2015) eine gute Orientierung für die Gestaltung von mathematischen Lern- und Erkundungsprozessen in Kindergarten und Kindertagesstätten und können in der Ausbildung genutzt werden. Auch der internationale wissenschaftliche Austausch beschäftigt sich mehr und mehr mit der frühen mathematischen Bildung. Dies zeigt z. B. die Working Group „Early Years Mathematics" im Rahmen der CERME (Congress of European Research in Mathematics Education) und die POEM-Konferenzen (seit 2012), die in regelmäßigen Abständen stattfinden.

Literatur

Eine vollständige Literaturliste ist bei den Koordinatorinnen der Arbeitsgruppe erhältlich.

[1] Es werden hier nur exemplarisch einige Projekte genannt, die ohne Anspruch auf Vollständigkeit die Bandbreite mathematikdidaktischer Forschungs- und Praxisprojekte zeigen.

Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer und Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beitrag: Bernd Wollring und Simone Reinhold
wollring@mathematik.uni-kassel.de simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beiträge zur empirischen Fundierung des Geometrieunterrichts in der Grundschule: Freudenthals Fundament, Blitzlichter aus den Jahren 2006 bis 2021 und (notwendige) Perspektiven

1 Fundamentales aus der Feder Freudenthals: Auftakt

Die *Mathematik als pädagogische Aufgabe* zu verstehen, bezieht aus der Perspektive Freudenthals (1973) sowohl fachliche als auch fachdidaktische Aspekte ein, die von Überlegungen um das Wesen der Geometrie als Fachdisziplin ausgehen. Fachliches wird dabei von Freudenthal um eine besondere pädagogisch-psychologische Perspektive ergänzt, so dass sich markante Positionen mit prägnanten Dichotomien ergeben. Für den vorliegenden Beitrag wählen wir dazu exemplarisch Betrachtungen zum Raum bzw. zum Verhältnis von Lebenswelt zur Mathematik aus.

1.1 Raum – Lebenswelt versus Mathematik

Wir erinnern uns zunächst an eine Grundthese des Empirismus: Mit der These „Alle Erkenntnis beruht auf Erfahrung“ ist angesprochen, dass die Ausgangsannahmen einer angewandten Theorie durch experimentelle Erfahrungen gerechtfertigt werden. Treffen dann in der Folge daraus gezogene Schlüsse in der Realität nicht zu, so ist man entweder mit unkorrekten Beobachtungen als Annahmen gestartet oder man hat die Bildungsgesetze der Sachlage unzutreffend mathematisch modelliert. Kennzeichnend für aus Erfahrung gewonnene Erkenntnis ist, dass ihr Fortschreiten nicht nur Neues bringt, sondern auch Altes einordnend revidiert. „Konservative Revolutionen“ kennzeichnen die Naturwissenschaften: Neue Erkenntnisse grenzen Alte ein und integrieren sie in neue Konzepte. Der entscheidende Unterschied von Mathematik und Naturwissenschaft besteht darin, dass man in den letzteren stets bereit sein muss Erkenntnisse aufgrund neuer Erfahrungen zu revidieren oder zu erweitern, in der ersteren dagegen Revisionen nicht benötigt, wohl aber Erweiterungen.

1.2 Positionierung Freudenthals und Einordung

Was kann dies für die Begegnung von Kindern mit ihrem Lebensraum und einer darauf ausgerichteten geometrischen Auseinandersetzung bedeuten? Freudenthal (1973, S. 376–377) merkt dazu an:

> *Und da wir von Erziehung des Kindes sprechen, ist es die Erfassung des Raumes, in dem das Kind lebt, atmet, sich bewegt, den es kennen lernen muss, den es erforschen und erobern muss, um besser in ihm leben, atmen und sich bewegen zu können. (...)*
>
> *Ach ja, er [der Raum] möge ja wichtig sein – wird man [Mathematiker] mir entgegnen –, aber nicht für die Geometrie; Geometrie ist ja Mathematik, und die verlangt solidere Grundlagen als einen Lebensraum, der – als Interessenobjekt der Physiker – dem wahren Mathematiker schon überhaupt verdächtig ist.*

Freudenthal formuliert eine Position von Mathematikern hier sehr überspitzt, wohl mit der Intention, die zu kritisieren, die im Sinne eines Hilbert'schen Formalismus denken und für eine von ihnen akzeptierte Geometrie „solidere Grundlagen" verlangen. Dahinter steht die Position, das logische Gefüge einer solchen Mathematik müsse konsistent sein, ganz unabhängig davon, ob den Begriffen und Aussagen eine materiale Bedeutung zu kommt.

Im Unterricht zur Geometrie in der Schule kann man sich von Erfahrungen zu geometrischen Phänomenen zunächst nicht freimachen. Und von der Prüfung geometrischer Konstruktionen daraufhin, ob sie für die Lebensraum Erklärungskraft besitzen auch nicht: Grundschul-Geometrie ist zum großen Teil „Erfahrungs-Geometrie". Mathematikdidaktisches Ziel ist ein zunehmendes Anreichern und Durchdringen mit Argumenten.

Die Bedeutung der Geometrie für Grundschulkinder beruht darauf, dass sie eine Sprache zum Erschließen ihres Lebensraumes bietet und einen Vorrat von Strukturen, die man zum Modellieren dieses Lebensraumes und seiner Phänomene nutzen kann. Ähnlich wie „subjektive Erfahrungsbereiche" bilden sich zur Geometrie „subjektive Argumentationsbereiche", Wissensfelder, die zunehmend durch Argumentieren an geometrischen Objekten strukturiert sind. Dabei gibt es durchaus Bereiche, die nur „teilexakt sind", noch nicht ganz, sondern nur teilweise von Argumenten durchstrukturiert.

2 Forschung zur Geometriedidaktik (2006 bis 2021)

Inwiefern bieten diese Positionen Freudenthals auch heute noch Anhaltspunkte für die (Reflexion) geometriedidaktische(r) Forschung?

2.1 Auswahl von Blitzlichtern

Eine vollständige Übersicht zur geometriedidaktischen Forschung zu räumlich-visuellen Fähigkeiten bzw. zur Begriffsbildung von Vor- und Grundschulkindern im deutschsprachigen Raum maßen wir uns nicht an. Dennoch lassen sich Tendenzen in den Jahren 2006 bis 2021 identifizieren, die sich durch unsere bewusst stark begrenzten Recherchen auf folgende Publikationswege erstrecken:

- *Tagungsbände des AK Grundschule* (2011 bis 2019)
- *Journal für Mathematik-Didaktik* (2006 bis 2021)
- *Beiträge zum Mathematikunterricht* (2006 bis 2020)

2.2 Tendenzen

In der Forschung zu räumlich-visuellen Fähigkeiten bzw. zur Begriffsbildung von Vor- und Grundschulkindern berühren einschlägige Studien einerseits *individuelle Bearbeitungsprozesse in der Begegnung mit geometrischen, zumeist non-verbalen räumlichen Settings,* die andererseits ohne Einbettung in den sozialen Kontext, das verbale Kommunizieren mit einem Partner, das adressatenbezogene Darstellen usw. im Unterricht undenkbar sind. Hier rücken folglich *Prozesse* der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten in den Mittelpunkt. Die „Gelegenheit, Entdeckungen zu machen (...) Entdeckungen, die man mit Augen und Händen macht" (Freudenthal, 1973, S. 380) wird aufgegriffen, indem Kinder mit herausfordernden räumlichen Anforderungen aus ihrer Lebenswelt konfrontiert werden und untersucht wird, welche Strategien Kinder entwickeln, um diesen Anforderungen zu begegnen.

Neben dem (handelnden) Umgang mit räumlichen Repräsentanten bzw. zweidimensionalen Darstellungen werden körperlich-motorische bzw. sprachliche Artikulationen oder digitale Darstellungen im Ausdruck von Raumvorstellung berücksichtigt. „Denkendes Handeln“ (Freudenthal, 1973, S. 381) steht dabei im Fokus, womit sich gleichzeitig auch eine bedeutsame Grundlage für Studien zur Entwicklung geometrischer Begriffe ableiten lässt: Definitionen, die „angeben, wie man das zu Definierende verfertigt“ (ebenda), sind nicht erst zu einem späteren Zeitpunkt im Begriffserwerb der Sekundarstufe bedeutsam. Vielmehr ermöglichen Einblicke in Verfertigungsprozesse bzw. die Analyse von Eigenproduktionen wertvolle Interpretationsgrundlagen für Studien zum kindlichen Begriffsverständnis.

Prägend für den Forschungshabitus, der in derlei Studien eingenommen wird und die geometriedidaktische Forschung in den vergangenen 15 Jahren u. E. maßgeblich vorangetragen hat, ist u. a. eine von Freudenthal eingeforderte, von Neugier, Entdeckungs- und Dokumentationsfreude geprägte „Strategie der Beobachtung“ („a strategy of observing“ (Freudenthal, 1978, S. 2).

3 Perspektiven für den Geometrieunterricht in der GS

Auf der Basis dieser Einblicke liegt es nahe, kritisch zu hinterfragen, welchen Impact diese Forschung hat. Bedeutsam ist es daher u. E., curriculare Rahmungen und konkrete unterrichtspraktische Aspekte zu diskutieren, die den Geometrieunterricht der Grundschule künftig (stärker) prägen. Gleichzeitig werden dabei neue Desiderata resp. Forschungsfelder sichtbar:

- Wohin entwickeln sich die curricularen Vorgaben aktuell?
- In welcher Hinsicht sind Diskrepanzen zur aktuellen Forschungslage erkennbar?
- Wo sehen wir besondere Entwicklungsbedarfe/Forderungen?

Literatur

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 2, Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1978). Address to the First Conference of I.G.P.M.E. (International Group for the Psychology of Mathematical Education), at Utrecht 29 August 1977. *Educational Studies in Mathematics*, *9*(1), 1–5. http://www.jstor.org/stable/3482138 .

Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt und Uta Häsel-Weide
birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de
uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de

Beitrag: Kristina Hähn
kristina.haehn@fhnw.ch

Ko-Konstruktionsprozesse im inklusiven Mathematikunterricht – Ein interaktionistischer Zugang zur Beschreibung gemeinsamer Lernsituationen am gemeinsamen Gegenstand

An einem inklusiven Unterricht sollen alle Lernenden partizipieren. Aber welches Spektrum der Partizipation ist dabei in kooperativ angelegten Lernsituationen identifizierbar? Das Forschungsprojekt (Hähn, 2021) untersucht individuelle Partizipationsprozesse von Schülerinnen und Schülern mit dem sonderpädagogischen Unterstützungsbedarf im Lernen (n=10), die im inklusiven Grundschulmathematikunterricht an einem gemeinsamen Lerngegenstand zum „Kreis“ arbeiten. Der Lerngegenstand ist natürlich differenzierend (Krauthausen & Scherer, 2014), somit vorab nicht zieldifferent konzipiert. Unter Berücksichtigung mathematischer Grundideen (Wittmann & Müller, 2009, 15ff.) sowie fachdidaktischer Prinzipien, die mit Qualitätskriterien für einen gemeinsamen Unterricht mit lernbeeinträchtigten Schülerinnen und Schülern (Heimlich, 2016) vereinbar sind, wurden vier Lernumgebungen für Kleingruppensituationen in Klasse 4 konzipiert. Individuelles und gemeinsames fachliches Lernen soll so verknüpft realisiert werden. Die Lernumgebungen wurden mit fünf Klassen durchgeführt. Anschließend bearbeiteten die Kinder mit Unterstützungsbedarf Reproduktions- und Transferaufgaben in einem Einzelinterview.

1 Interaktions- und Partizipationsanalyse

Die Interaktion der Lernenden in der Kleingruppe wurde zunächst im Hinblick auf mathematische Aktivitäten in Analyseeinheiten segmentiert. Die Rekonstruktion der Themenentwicklung der Interaktion bezog dabei multimodale Ausdrucksweisen von Lernenden ein. In einer der Lernumgebungen sollten die Lernenden in Partnerarbeit aus vorgegebenen Materialien ein Zeichengerät zur Kreiskonstruktion entwickeln. Allgemeine und inhaltsbezogene Aktivitäten wurden identifiziert: Die Fokussierung auf einen (fixen) Mittelpunkt, (konstanten) Radius, Durchmesser, die (geschlossene) Kreislinie oder (symmetrische) Kreisfläche sowie das Vorschlagen/Vermuten, Begründen, Beschreiben oder Aufforderungen zur Aktivierung des Partnerkindes (Hähn 2021, S. 219ff.). In jeder Analyseeinheit wurde das Partizipationsdesign rekonstruiert (Tab. 1), das inhaltliche und sozial-interaktive Elemente ko-konstruktiver Prozesse und die Höhe inhaltlicher Verantwortlichkeiten einzelner Lernender für die Themenentwicklung erfasste.

Partizipations-status	Verantwortlichkeit für den mathematischen Inhalt	Verantwortlichkeit für die Formulierung (F) bzw. Handlung (H)	**produktive inhaltliche Verantwortlichkeit**
Kreator Weiterentwickler	+ +	+ +	**höher (hV)**
Instruierender	+	-	
Umsetzender	-	+ (H)	**geringer (gV)**
Paraphrasierer	-	+ (F)	
Imitierer	-	-	
Akzeptierender Ablehnender	- -	- -	
Zuschauender	keine	keine	**keine (kV)**

Tab. 1 Verantwortlichkeit für die mathematische Themenentwicklung (Hähn 2021, S. 241; i. A. a. Brandt 2009, S. 349; Krummheuer 2007, S. 76)

Die Höhe der produktiven Verantwortlichkeit wurde auf Makroebene in eine Zeitleiste überführt (Abb. 1 bis 3). Die verschiedenen Klassen arbeiteten in unterschiedlich zeitlichem Umfang an der o. g. Aufgabe. Dabei zeigten einzelne Kinder folgende Partizipationsprozesse:

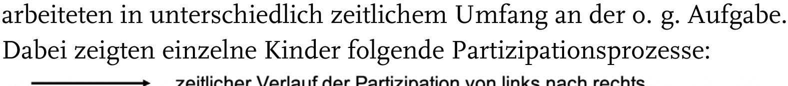


Abb. 1 Partizipationsprozess von Carolin

Abb. 2 Partizipationsprozess von Julian

Abb. 3 Partizipationsprozess von Tahia

Carolin partizipierte hauptsächlich als Zuschauende und nur selten mit produktiver Verantwortlichkeit. Julian nahm sowohl rezeptiv als auch produktiv, oft mit geringerer Verantwortlichkeit an der Themenentwicklung teil. Tahia beeinflusste sie zum Großteil mit hoher Verantwortlichkeit. Die drei Einzelfalldarstellungen zeigen bereits ein Partizipationsspektrum, in dem Kinder mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf potenziell alle Höhen inhaltlicher Verantwortlichkeit einnehmen. Entstehungsbedingungen können mit Rückgriff auf die Mikroanalyse zusätzlich betrachtet werden (Hähn 2021, S. 267ff.). Differenziertere Aussagen zur Lernendenpartizipation sind zudem durch den Einbezug des Typs der gemeinsamen Lernsituation möglich.

2 Operationalisierung gemeinsamer Lernsituationen

Zur Beschreibung gemeinsamer Lernsituationen wurde die Theorie nach Wocken (1998) genutzt. Mit Hilfe der mathematischen Themenentwicklung der Interaktion (als Inhaltsaspekt der Interaktion) sowie dem Partizipationsdesign der Lernenden (als Beziehungsaspekt der Interaktion) wurde die Theorie für das Analysewerkzeug der Studie adaptiert und mit Hilfe der Auswertung der empirischen Daten weiterentwickelt (Hähn, 2021). Folgende Typen gemeinsamer Lernsituationen (LS) konnten identifiziert werden:

<table>
<tr><th></th><th>Inhaltsaspekt</th><th>Beziehungsaspekt</th></tr>
<tr><td>Dominanz eines Aspekts</td><td>koexistente LS</td><td>kommunikative LS</td></tr>
<tr><td>Asymmetrie beider Aspekte</td><td colspan="2">subsidiär-imitierende LS
subsidiär-unterstützende LS
subsidiär-prosoziale LS</td></tr>
<tr><td>Symmetrie beider Aspekte</td><td colspan="2">kooperativ-solidarische LS
latent-kooperative LS</td></tr>
</table>

Tab. 2 Typen gemeinsamer Lernsituationen (Hähn 2021, S. 313; i. A. a. Wocken 1998)

In Verknüpfung mit dem Fallbeispiel Julian lässt sich sagen, dass er nur in koexistenten Phasen eine höhere Verantwortlichkeit für die Themenentwicklung zeigt. Carolin dagegen wird hauptsächlich in kooperativ-solidarischen Phasen produktiv tätig, meist mit geringer Verantwortlichkeit. Keine Verantwortlichkeit zeigt sie in koexistenten, aber auch in latent-kooperativen Lernsituationen (Hähn 2021, S. 328f.), in denen sie ihre Lernpartnerin oder andere Partnergruppen bei der Arbeit beobachtet. Dadurch erfasst sie allerdings ein breites Spektrum inhaltlicher Aspekte des Lerngegenstandes, was sich auch im anschließenden Einzelinterview zeigt. Die Ergebnisse der Studie sprechen u. a. dafür, dass rezeptive Partizipationsprozesse inklusiver Settings, bzw. latent-kooperative Lernsituationen in der fachdidaktischen Forschung noch deutlicher in den Fokus gerückt werden und deren Chancen und Barrieren für individuelles Lernen beforscht werden sollten. Design Research Studien könnte zudem prüfen, inwiefern die Veränderung der Designs von Lernumgebungen inklusiver Settings eine Erhöhung der produktiven Partizipation aller Lernenden zur Folge hat.

Literatur

Brandt, B. (2009). Kollektives Problemlösen – eine partizipationstheoretische Perspektive. In M. Neubrand (Hg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 347–350). Münster: WTM.

Hähn, K. (2021). *Partizipation im inklusiven Mathematikunterricht. Analyse gemeinsamer Lernsituationen in geometrischen Lernumgebungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heimlich, U. (2014). Schulische Organisationsformen sonderpädagogischer Förderung auf dem Weg zur Inklusion. In U. Heimlich & J. Kahlert (Hg.), *Inklusion in Schule und Unterricht. Wege zur Bildung für alle* (2. Aufl., S. 80–116). Stuttgart: Kohlhammer.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule.* Seelze: Klett Kallmeyer.

Krummheuer, G. (2007). Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule In K. Rabenstein & S. Reh (Hg.), *Kooperatives und selbstständiges Arbeiten von Schülern. Zur Qualitätsentwicklung von Unterricht* (S. 61–84). Wiesbaden: VS Verlag.

Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2009). *Das Zahlenbuch. Handbuch zum Frühförderprogramm.* Stuttgart: Klett.

Wocken, H. (1998). Gemeinsame Lernsituationen. Eine Skizze zur Theorie des gemeinsamen Unterrichts. In A. Hildeschmidt & I. Schnell (Hg.), *Integrationspädagogik. Auf dem Weg zu einer Schule für alle* (S. 37–52). Weinheim, München: Beltz Juventa.

Arbeitsgruppe Lehrer:innenbildung

Koordination: Stephanie Schuler und Gerald Wittmann
stephanie_schuler@uni-landau.de gerald.wittmann@ph-freiburg.de

Beitrag: Susannah Unteregge und Marcus Nührenbörger
susannah.unteregge@tu-dortmund.de
marcus.nuehrenboerger@tu-dortmund.de

Fachdidaktische Reflexionsprozesse von Lehramtsstudierenden in Mathematik – Lernchancen einer digitalen videobasierten Lernplattform

1 Reflexive videobasierte Lehrer:innenbildung

In den letzten Jahren wird dem Aspekt der Reflexivität in der Aus- und Weiterbildung von Lehrkräften ein großer Stellenwert zugeschrieben (u. a. Häcker, 2017, S. 21). Reflexion als „soziale Praxis" (Abendroth-Timmer, 2017, S. 107) schafft dabei einen Referenzrahmen zur Durchdringung von Lerngegenständen. In diesem Kontext können Unterrichtsvideos „zum Motor der Reflexion" (Krammer & Reusser, 2005, S. 35) werden, indem Lehr-Lern-Situationen praxisbezogen und unter fachlich relevanten Gesichtspunkten wahrgenommen und analysiert sowie unter Bezugnahme auf eigene praktische Erfahrungen und theoretisches Wissen in der Diskussion mit anderen argumentativ näher erörtert werden (Krammer & Reusser, 2005, S. 47). Digitale Lernplattformen können einen Rahmen für videobasierte Aufgabenformate schaffen, Unterrichtssituationen raum- und zeitunabhängig zur Verfügung stellen. Petko et al. (2014, S. 249) weisen zudem auf die Bedeutung der multimedialen Aufbereitung digitaler Lernplattformen für die interaktive und kollektive Bearbeitung hin. Denn gerade die diskursive Arbeit mit Videos kann Perspektiven auf alltägliche Lehr- und Lernpraktiken öffnen und „die Wahrnehmungs- und Analyse- bzw. Diagnosekompetenz von Lehrpersonen stärken" (Petko et al., 2014, S. 259).

2 Projekt „DEGREE 4.0"

Im disziplinübergreifenden Projekt DEGREE 4.0 wird eine digitale videobasierte Lernplattform für die Lehrer:innenausbildung entwickelt, erprobt und qualitativ beforscht. Der zentrale Fokus liegt neben der Barrierefreiheit und Personalisierung auf fachdidaktisch spezifizierten Aufgabenformaten. Im Teilprojekt Mathematik werden videobasierte

Aufgabenstellungen zu realen Diagnose- und Fördersituationen zwischen Lehramtsstudierenden und Kindern, die Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigen, aufbereitet und bereitgestellt. Dadurch sollen bei den Studierenden fachlich geprägte Diskurs- und Reflexionsprozesse in Bezug auf ihre professionelle Unterrichtswahrnehmung (Seidel et al., 2010) initiiert werden.

Das Forschungsinteresse besteht in erster Linie in der empirischen Rekonstruktion der von den Studierenden im sozialen Diskurs gezeigten Reflexionsprozesse. Diese werden in Anlehnung an das Konstrukt sozialer Praktiken (u. a. Herrle & Dinkelaker, 2016; Reckwitz, 2003) als reflexive Praktiken rekonstruiert. Um die Entwicklung von Reflexionsprozessen zu sichern, fußen alle videobasierten Aufgabenformate auf vier Design-Prinzipien: (1) Fallbezug, (2) Mehrdeutigkeit, (3) Reflexionsanregung und (4) Kollaboration. Im Folgenden wird eines der zentralen, im Rahmen des Teilprojekts entwickelten Aufgabenformate vorgestellt.

3 Aufgabenformat „Analytical Shortfilm"

Prantl und Wallbaum (2017, S. 295) setzen in der Musikpädagogik die Methode ‚Analytical Shortfilm' zur „Initiierung und Förderung der Reflexion über Unterricht" ein. Ein ‚Analytical Shortfilm' (ASF) „dient als Medium zum Zeigen einer spezifischen Sichtweise auf die Unterrichtspraxis" (Prantl & Wallbaum, 2017, S. 290) und setzt sich zusammen aus einem ‚Shortfilm' (kurze Videosequenz aus Ausschnitten einer Unterrichtsstunde) und einer zugehörigen ‚Complementary Information' (schriftliche Begründung für die ausgewählten Szenen und Gestaltungsmittel).

Im vorliegenden Projekt wird das Aufgabenformat für einen mathematikdidaktischen, seminarintegrierten Einsatz auf der Lernplattform weiterentwickelt: Zunächst setzen sich die Studierenden individuell mit der vollständigen Videosequenz einer fachdidaktisch bedeutsamen Fördersituation auseinander. Ihnen wird dabei ein spezifischer Blickwinkel zugewiesen, aus dem sie das Video auf der Lernplattform betrachten und codieren (s. Abb. 1, Phase 1). Anschließend kommen Studierende, die das Video aus demselben Blickwinkel codiert haben, in Gruppen zusammen, um einen ASF zu erstellen (s. Abb. 1, Phase 2).

Schließlich werden in einer weiteren Seminarsitzung die unterschiedlichen ASF verglichen und diskutiert.

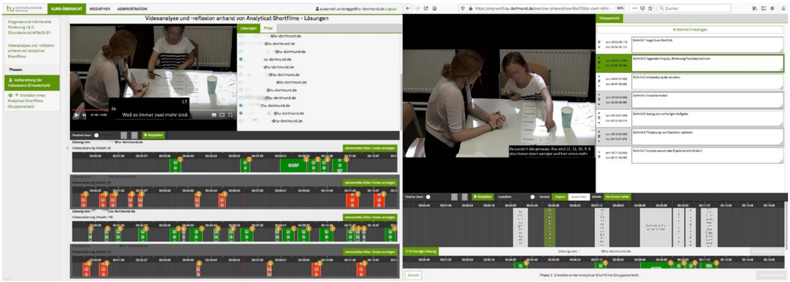


Abb. 1 Phase 1 – Codierung unter einem zugewiesenen Blickwinkel (links) und Phase 2 – gemeinsames Erstellen eines ASF (rechts)

4 Ausgewählte Ergebnisse

Die bisherige Auswertung zeigt ein vielschichtiges Bild reflexiver Praktiken von Studierenden beim Austausch von mathematikdidaktisch geprägten Blickwinkeln im Kontext des Erstellens und Vergleichens der ASF. Die Studierenden (S) fokussieren auf diverse Facetten der Diagnose- und Förderprozesse (z. B. auf das Verhalten der Lernbegleitung, das Verhalten des Kindes, die Aufgabenstellungen oder das Material).

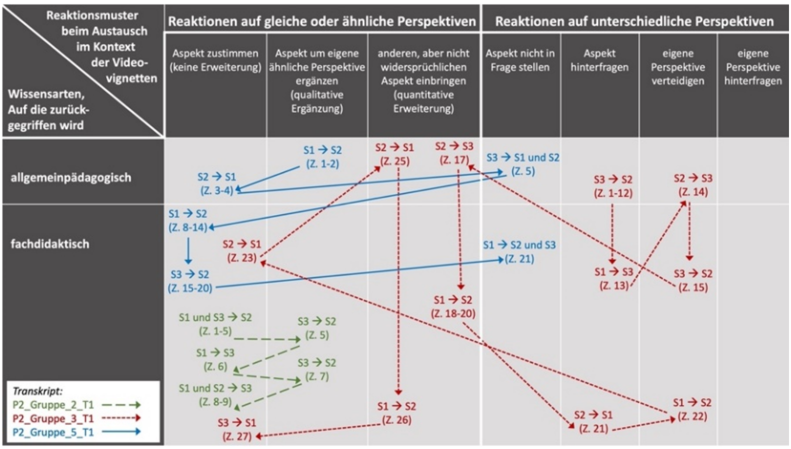


Abb. 2 Reflexive Praktiken beim Erstellen eines ASF

Im Diskurs greifen sie auf unterschiedliche Weise auf fachdidaktisches und allgemeinpädagogisches Wissen zurück und zeigen dabei unterschiedliche Reaktionen auf die von den Gruppenmitgliedern angeführten Aspekte. Diese können dahingehend unterschieden werden, ob die Studierenden in der jeweiligen Situation eine gleiche bzw. ähnliche oder eine andere Perspektive haben (s. Abb. 2).

Etablieren sich bestimmte Reaktionsmuster innerhalb einer Gruppe, so werden diese zu Praktiken, die sich z. B. als Abgleichen isolierter Perspektiven (Bsp. Gruppe 5), als gegenseitiges Ergänzen (Bsp. Gruppe 2) oder als gemeinsames Weiterentwickeln von Perspektiven (Bsp. Gruppe 3) charakterisieren lassen.

Literatur

Abendroth-Timmer, D. (2017). Reflexive Lehrerbildung und Lehrerforschung in der Fremdsprachendidaktik. Ein Modell zur Definition und Rahmung von Reflexion. *Zeitschrift für Fremdsprachenforschung 28*(1), 101–126.

Häcker, T. (2017). Grundlagen und Implikationen der Forderung nach Förderung von Reflexivität in der Lehrerinnen- und Lehrerbildung. In C. Berndt, T. Häcker & T. Leonhard (Hrsg.), *Reflexive Lehrerbildung revisited. Traditionen, Zugänge, Perspektiven* (S. 21–45). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Herrle, M. & Dinkelaker, J. (2016). Qualitative Analyseverfahren in der videobasierten Unterrichtsforschung. In U. Rauin, M. Herrle & T. Engartner (Hrsg.), *Videoanalysen in der Unterrichtsforschung. Methodische Vorgehensweisen und Anwendungsbeispiele* (S. 76–129). Weinheim: Beltz Juventa.

Krammer, K. & Reusser, K. (2005). Unterrichtsvideos als Medium der Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 23*(1), 35–50.

Petko, D., Prasse, D., Reusser, K. (2014). Online-Plattformen für die Arbeit mit Unterrichtsvideos: Eine Übersicht. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung, 32*(2), 247–261.

Prantl, D., Wallbaum, Ch. (2017). Der Analytical Short Film in der Lehrerbildung. Darstellung einer Seminarmethode und Kurzbericht einer wissenschaftlichen Begleitforschung an der Hochschule für Musik und Theater Leipzig. In A. J. Cvetko & Ch. Rolle (Hrsg.), *Musikpädagogik und Kulturwissenschaft* (S. 289–308). 1. Aufl. Münster; New York: Waxmann.

Reckwitz, A. (2003). Grundelemente einer Theorie sozialer Praktiken. Eine sozialtheoretische Perspektive. *Zeitschrift für Soziologie, 32*(4), 282–301.

Seidel, T., Blomberg, G. & Stürmer, K. (2010). „Observer“ – Validierung eines videobasierten Instruments zur Erfassung der professionellen Wahrnehmung von Unterricht. *Zeitschrift für Pädagogik*, 56. Beiheft, 296–306.

Arbeitsgruppe Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien

Koordination: Roland Rink und Daniel Walter

rrink@uni-bremen.de d.walter@uni-muenster.de

Beitrag: Franziska Peters

franziska.peters@math.uni.giessen.de

Auditiven Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe

Radio als Medium wird seit jeher als Lernort gesehen, der „Qualifikationsmöglichkeiten und Kompetenzerwerb unter anderem auf sprachlicher, sozialer und kognitiver Ebene ermöglicht“ (van Bebber, 2012, S. 3). Durch die Hörspielforschung wurden in der Medienpsychologie bereits interessante Erkenntnisse zur Wirkung auditiver Medien auf den Spracherwerb erbracht – insbesondere zur Evidenz medienvermittelter Sprachlernprozesse (z. B. Ritterfeld et al., 2006). Auch für den mathematischen Bereich gibt es Audioangebote, deren Potentiale bisher jedoch kaum erforscht ist. Anhand von Sendungen des Kinderfunkkollegs Mathematik (https://www.kinderfunkkolleg-mathematik.de) untersucht die im Folgenden vorgestellte Studie, wie auditive Medien im Mathematikunterricht eingesetzt werden können und inwiefern ihre Potentiale als medial-phonische Ressource mathematisches und bildungssprachliches Lernen unterstützen können.

1 Potentiale und Gelingensbedingungen

Auditive Medien sind ‘sprachlastige Medien’, die Informationen allein sprachlich – ohne visuellen Input – vermitteln (Ritterfeld & Langenhorst, 2011). Im Sinne der Cognitive Load Theory (Sweller, 1994) werden die begrenzten Kapazitäten des Arbeitsgedächtnisses also nicht durch weitere extrinsische Belastungen (Lesen, zu viele Animationen etc.) ausgereizt. Auditive Unterstützung kann als kognitive Entlastung z.B. Kindern mit Schwierigkeiten beim Lesen helfen, Inhalte und Aufgaben zu verstehen (Rink, 2014). Der sprachlastige Charakter macht auditive Medien vor allem im sprachsensiblen Mathematikunterricht bedeutsam: Hier können sie Sprachkompetenz und Verständnisaufbau bzw. aktive Informationsverarbeitung fördern sowie als sprachliches Vorbild dienen. Dabei werden die Sprachstrukturen des Mediums sowohl rezeptiv als auch produktiv besser beherrscht (Ritterfeld et al., 2006) – ein Effekt, der in der vorliegenden Studie auch für den Mathematikunterricht untersucht wird. Im Modell von Mündlichkeit und Schriftlichkeit (Koch & Oesterreicher, 1985) sind schülergerechte Audiobeiträge konzeptionell eher mündlich einzuordnen, gleichzeitig aber auch von Schriftlichkeit geprägt und können so ihre Rezipienten von der Mündlichkeit in die Schriftlichkeit führen. Es sind allerdings verschiedene Gelingensbedingungen notwendig, um das aktive Verarbeiten und in der Folge inhaltlich und sprachlich korrekten Output zu erreichen. Dazu müssen Kriterien für schülergerechte Audioangebote aufgestellt (Peters & Schreiber, 2020) sowie methodische Hinweise für die Unterrichtspraxis beachtet werden. Beispielsweise sollte das Hören der Beiträge mit Aufträgen versehen und Möglichkeiten zur Dokumentation von Ergebnissen gegeben (Peters, 2020) sowie im Sinne des ‚Segmenting Principle' (Mayer, 2009) kurze Sequenzen dargeboten und wiederholt werden.

2 Untersuchungsdesign und Methodik

Aufbauend auf dieser Erkenntnisbasis wurden zwei Unterrichtseinheiten zu den Themen „Das Haus der Vierecke" und „Wahrscheinlichkeit und Zufallsexperimente" untersucht, die den jeweiligen Radiobeitrag als zentrales wissensvermittelndes Medium verwenden und in zwei vierten Klassen durchgeführt wurden (siehe auch Peters & Schreiber, 2020). Der Unterricht wurden videographiert, transkribiert und mithilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse kategorisiert. Anschließend wurden aus den für das Forschungsinteresse relevanten Kategorien eine Auswahl an Szenen für die Detailanalyse getroffen und diese im Sinne der Interaktionsanalyse ausführlich interpretiert.

3 Erste Ergebnisse

In beiden Unterrichtssettings zeigte sich, dass die Lernenden den auditiven Medien konzentriert zuhörten und das Gehörte erstaunlich wortgetreu wiedergeben konnten. Auch wenn hier 'Fast Mapping' vermutet werden kann, zeigt die Detailanalyse, dass die mathematischen Erklärungen oder Begriffe an vielen Stellen nicht nur nachgesprochen, sondern auch verstanden wurden. Nachhaltiges Lernen scheint von der

Redundanz wichtiger Begriffe und der mehrfachen Rezeption der Medien abhängig zu sein sowie von der aktiven Informationsverarbeitung durch die Arbeit mit Höraufträgen.

Die induktive Kategorienbildung führte zum Identifizieren von 12 Kategorien, die zu drei Hauptkategorien subsumiert werden konnten:

- Mathematisch-konzeptuelle Aspekte
- Aspekte der Sprachbildung
- Mediendidaktische Aspekte

Die relativen Häufigkeiten dieser Kategorien zeigten, dass die Aspekte der Sprachbildung einen beachtlichen Anteil in den Einheiten ausmachen und eine vertiefte Untersuchung dieses Bereiches nahelegen. Ausgehend von den quantifizierten Daten und mit Blick auf das Forschungsinteresse fand für die Detailanalyse eine begründete Auswahl an Transkriptausschnitten dieser Hauptkategorie statt, um den Einfluss der Audiobeiträge genauer zu untersuchen. Die Interaktionsanalyse ermöglichte dann vertiefte Einblick in die individuellen Prozesse der Entwicklung fachspezifischer Bildungssprache. Es folgen Erkenntnisse aus der Detailanalyse wie in Peters (2020) dargestellt:

- Durch die Kombination von Zuhören und Sprechen über das Gehörte können Radiobeiträge erfolgreich für die Einführung neuer Begriffe und Wortspeicher-Arbeit genutzt werden.
- Sie dienen im Sinne des Scaffolding als sprachliche Vorbilder, an die sich die Lernenden orientieren können und können so im Verlauf der Einheiten zu einer hörbaren Verbesserung der mathematischen Ausdrucksweise führen
- Als besonders aus mathematikdidaktischer Sicht interessantes Potential lässt sich anführen, dass die visuelle Ebene des Gehörten von den Lernenden selbst eingefordert und aufgebaut wird. Sie können bspw. räumliche Vorstellungen und geometrische Repräsentationen entwickeln, die nicht von vornherein durch visuelle Unterstützungen präsentiert wurden. Die Audiobeiträge stellen somit eine positive mentale Herausforderung dar.

Zusammenfassend kann geschlussfolgert werden, dass auditive Medien mathematisches Wissen nicht nur als Informationsträger vermitteln, sondern auch im Sinne des Scaffolding als sprachliche Vorbilder genutzt werden können, die Sprach-, und Begriffsbildungsprozesse anregen können.

Literatur

Koch, P. & Oesterreicher, W. (1985). Sprache der Nähe – Sprache der Distanz: Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorie und Sprachgeschichte In: *Romanistisches Jahrbuch* (S. 15–43). Walter de Gruyter.

Mayer, R. E. (2009). *Multimedia Learning*. Cambridge University Press.

Peters, F. & Schreiber, C. (2020) Radio und Mathematik - Einsatz von auditiven Medien im Mathematikunterricht. In B. Brandt, L. Bröll & H. Dausend (Hrsg.), *Tagungsband zum Symposium „Lernen digital“* (S. 242–258). Waxmann.

Peters, F. (2020). Fachspezifische Sprachbildung durch auditive Medien. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 709–712). WTM-Verlag.

Rink, R. (2014). „Lass´ dir die Aufgabe doch vorlesen!“ - mit digitalen Medien Schwierigkeiten beim Sachrechnen begegnen. In S. Ladel & C. Schreiber, (Hrsg.), *Von Audiopodcast bis Zahlensinn* (S. 61–76). WTM-Verlag.

Ritterfeld, U. & Langenhorst, M. (2011). Zeigen sprachauffällige 6- bis 12-Jährige spezifische Vorlieben in der Mediennutzung?. *L.O.G.O.S. Interdisziplinär, 19*(3), 188–194.

Ritterfeld, U., Niebuhr, S., Klimmt, C. & Vorderer, P. (2006) Unterhaltsamer Mediengebrauch und Spracherwerb: Evidenz für Sprachlernprozesse durch die Rezeption eines Hörspiels bei Vorschulkindern. *Zeitschrift für Medienpsychologie, 18*(2), 60–69.

Sweller, J. (1994). Cognitive load theory, learning difficulty and instructional design. *Learning and Instruction*, (4), 295–312.

van Bebber, K. (2012). Radio. Ein vielfältiges medienpädagogisches Handlungsfeld. In D. Meister, F. von Gross & U. Sander (Hrsg.), *Enzyklopädie Erziehungswissenschaft Online* (S. 1–18). Beltz Juventa.

University of Bamberg Press

Dieser Tagungsband dokumentiert die Ergebnisse der Jahrestagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die in diesem Jahr digital stattfand. Am 05. und 06. November 2021 widmete sich der Arbeitskreis dem Thema „Blick auf Schulcurricula Mathematik – Empirische Fundierung?“.

Mathematische Bildung in der Grundschule ist eine herausfordernde und langfristige Aufgabe und unterliegt curricularen Wandlungen. Mit Fokus auf Erkenntnisse aus empirischen Forschungen werden im Rahmen von drei Hauptvorträgen aus verschiedenen Inhaltsperspektiven curriculare Wandlungen im Mathematikunterricht der Grundschule betrachtet und diskutiert.

Zusätzlich setzten sich sieben Arbeitsgruppen mit den Themenfeldern ‚Arithmetik‘, ‚Geometrie‘, ‚Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit‘, ‚Kommunikation & Kooperation‘, ‚PriMaMedien: Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien‘, ‚Frühe mathematische Bildung‘ sowie ‚Lehrerbildung‘ intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander. Die zentralen Inhalte der Arbeitsgruppen sind in diesem Band ebenfalls dokumentiert.

Die jährlich stattfindende Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule in der GDM richtet sich seit ihrem Bestehen an Personen, die den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sowie den schulverwaltenden Institutionen suchen. Die Tagung ist von Beginn an in besonderer Weise durch eine offene und kollegiale Kooperation von Vertreterinnen und Vertretern aus Praxis und Theorie geprägt.

ISBN 978-3-86309-832-2

9 783863 098322

www.uni-bamberg.de/ubp