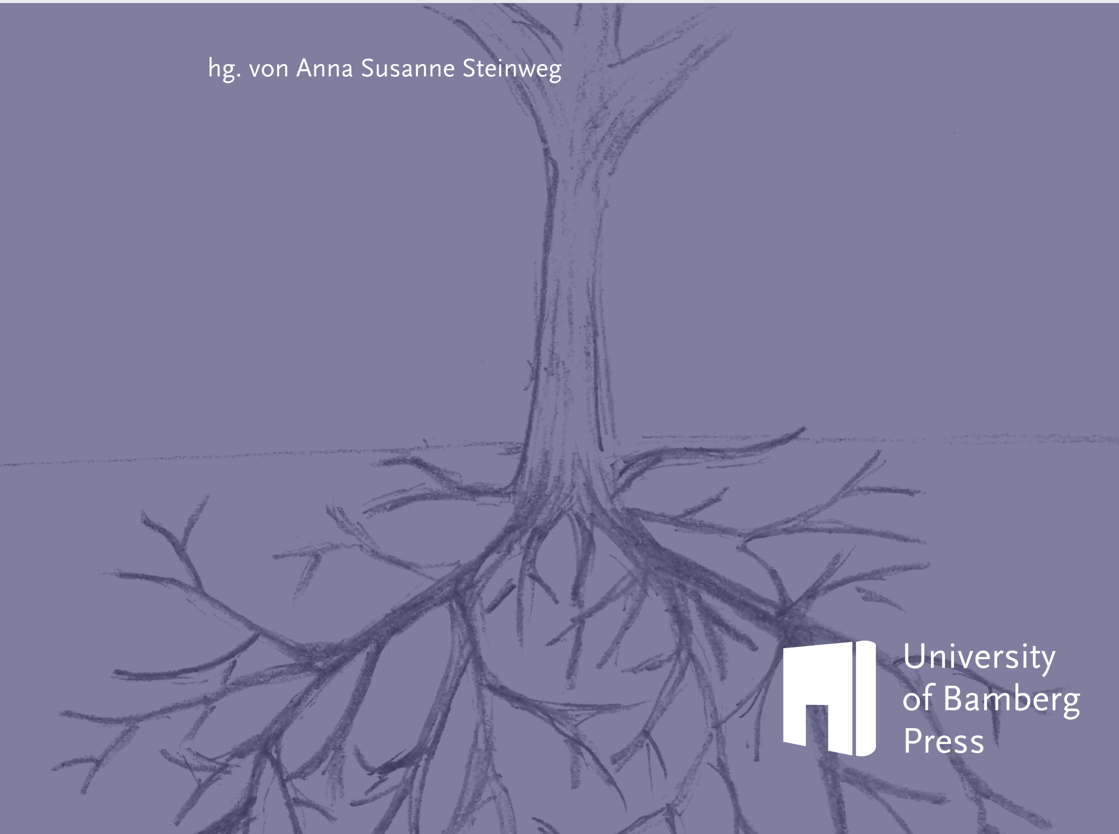
12 Mathematikdidaktik Grundschule

Grundlegende Kompetenzen sichern: Lernende und Lehrende im Blick

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2023

hg. von Anna Susanne Steinweg



University of Bamberg Press

12 Mathematikdidaktik Grundschule

Mathematikdidaktik Grundschule

hrsg. von Anna Susanne Steinweg
(Didaktik der Mathematik und Informatik)

Band 12

University
of Bamberg
Press
2023

Grundlegende Kompetenzen sichern: Lernende und Lehrende im Blick

Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2023

hg. von Anna Susanne Steinweg

University of Bamberg Press
2023

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de/ abrufbar.

Herstellung und Druck: docupoint, Magdeburg
Umschlaggestaltung: University of Bamberg Press
Umschlagfoto: © A. Steinweg

ORCID
Anna Susanne Steinweg https://orcid.org/0000-0002-9093-547X

ISSN: 2193-2905 (Print) eISSN: 2750-8439 (Online)
ISBN: 978-3-86309-961-9 (Print) eISBN: 978-3-86309-962-6 (Online)

URN: urn:nbn:de:bvb:473-irb-912317
https://doi.org/10.20378/irb-91231

Inhaltsverzeichnis

Vorwort der Sprecherinnen und Sprecher
des Arbeitskreises Grundschule in der GDM 7

Hauptvorträge

Kathleen Philipp

Diagnostische Kompetenz von Mathematiklehrkräften
- Einblick in verschiedene Forschungsperspektiven 9

Stephanie Schuler

Überlegungen zu einer lernförderlichen Lernbegleitung
– Basiskompetenzen vor und zu Schulbeginn
am Beispiel der Arithmetik sichern 25

Priska Sprenger

„Weil ich gezählt habe: weil da drei sind und da zwei“
– Kindliche Wahrnehmungsprozesse
als eine Herausforderung für Forschung und Praxis 41

... aus den Arbeitsgruppen

Arithmetik

Das Negative wegnehmen
– ein Plädoyer für die Stärkung der Subtraktion 57

Verdoppeln und Halbieren im Zahlenraum bis 100
– Erkenntnisse einer Interviewstudie in Klasse 2 61

Muster in Entdeckerpäckchen erkunden
– Erforschung der Deutungsprozesse von Lernenden
beim Systematisieren ihrer individuellen Erkenntnisse 65

Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Kombinatorik darstellen –
Blickbewegungen von Schülerinnen und Schülern
beim Lösen kombinatorischer Aufgaben mit Stift und Papier 69

Frühe mathematische Bildung

Wie sieht hilfreiches Feedback aus?
– Feedbackarten und ihr Einfluss auf frühes mathematisches Lernen 73

Geometrie

Begriffliches Verständnis von Grundschüler*innen
zur Achsensymmetrie 77

Kommunikation & Kooperation

Muster gemeinsam entdecken – Austauschprozesse
von Schüler:innen in Partner:innen- und Gruppenarbeitsphasen 81

Lehrkräftebildung

FÖDIMA – Förderorientierte Diagnostik
im (inklusiven) mathematischen Anfangsunterricht 85

Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien (PriMaMedien)

Problemlösen mit der App Kombi
Ergebnisse einer Integrativen Learning Design-Studie 89

Sachrechnen

Modellieren – vielfältige Übersetzungs- und
Strukturierungsprozesse statt kreisartiger Bearbeitungen 93

Vorwort

In dem hier vorliegenden zwölften Band der Reihe „Mathematikdidaktik Grundschule“ sind die Ergebnisse der Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) zusammengefasst. Die Tagung fand vom 17. bis zum 19. November 2023 an der Universität Bremen statt. Das diesjährige Tagungsthema ‚Grundlegende Kompetenzen sichern – Lernende und Lehrende im Blick‘ wurde mit großem Interesse unter verschiedenen Blickwinkeln betrachtet.

Priska Sprenger (Pädagogische Hochschule Freiburg) leitete die Tagung mit dem Vortrag zum Thema „‚Weil ich gezählt habe: Weil da drei sind und da zwei‘ – Kindliche Wahrnehmungsprozesse als eine Herausforderung für Forschung und Praxis“ ein. Sie zeigte auf, wie derartige Prozesse mittels Eye-Tracking erfasst werden können und welche Folgerungen sich aus den Ergebnissen für den Übergang vom Kindergarten zur Grundschule ergeben.

Kathleen Philipp (Pädagogische Hochschule Nordwestschweiz) betrachtete in ihrem Vortrag „Diagnostische Kompetenz von Mathematiklehrkräften - Einblick in verschiedene Forschungsperspektiven“ die Rolle der Lehrkräfte. Sie erläuterte aktuelle Konzeptualisierungen diagnostischer Kompetenz und berichtete, dass insbesondere Lehrkräfte zu Beginn ihrer beruflichen Tätigkeit oftmals große Schwierigkeiten bei diagnostischen Einschätzungen von Kindern und ihren Lernprozessen haben.

Unter dem Titel „Überlegungen zu einer lernförderlichen Lernbegleitung – Basiskompetenzen vor und zu Schulbeginn am Beispiel der Arithmetik sichern“ wies Stephanie Schuler (Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern-Landau) auf die Bedeutung der Begleitung von mathematischen Lernprozessen hin. Kinder benötigen eine solche Begleitung für ein erfolgreiches Lernen, und pädagogische Fachkräfte und Lehrkräfte müssen entsprechend aus- und fortgebildet werden, um eine solche Begleitung leisten zu können.

Auch in diesem Jahr haben Kolleginnen und Kollegen ihre Arbeiten aus der aktuellen mathematikdidaktischen Grundschulforschung im Rahmen der Arbeitsgruppen vorgestellt und somit neue Denkanstöße geboten. Wir bedanken uns dafür herzlich bei allen Vortragenden. Unser Dank gilt auch den Koordinatorinnen und Koordinatoren der Arbeitsgruppen. Durch ihr kontinuierliches Engagement war es auch in diesem Jahr und unter den veränderten Organisationsbedingungen möglich, dass u. a. auch Nachwuchsforscherinnen und -forscher Gelegenheit zur Präsentation und Diskussion ihrer Projekte bekamen. Nicht zuletzt gilt unser Dank all jenen Kolleginnen und Kollegen der Universität Bremen, die zur gelungenen Organisation der Tagung beitrugen.

Prof. Dr. Barbara Ott

Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Prof. Dr. Daniel Walter

Prof. Dr. Gerald Wittmann

Webpräsenz des Arbeitskreises https://grundschule.didaktik-der-mathematik.de/

Diagnostische Kompetenz von Mathematiklehrkräften - Einblick in verschiedene Forschungsperspektiven

von Kathleen Philipp

Diagnostische Kompetenz wird als eine zentrale Komponente der professionellen Kompetenzen von Lehrkräften angesehen, die die Qualität von Unterricht und das Lernen von Schülerinnen und Schülern beeinflusst. Die Forschung zu diagnostischer Kompetenz umfasst verschiedene Perspektiven. Während frühe Studien hauptsächlich die Akkuratheit der Urteile von Lehrkräften fokussieren, hat sich die Forschung zunehmend auf das diagnostische Denken von Lehrkräften und den Erwerb diagnostischer Kompetenz verlagert. Der Beitrag soll einen Einblick in die Breite des Forschungsbereichs ermöglichen.

Schlüsselwörter: Diagnostische Kompetenz, Urteilsakkuratheit, Kompetenzmodellierung, diagnostische Prozesse, Förderung diagnostischer Kompetenz

1 Einleitung

Vor dem Hintergrund einer zunehmenden Heterogenität von Schülerinnen und Schülern gewinnt diagnostische Kompetenz von Lehrkräften bei der Einschätzung von Merkmalen und Potenzialen von Lernenden immer mehr an Bedeutung (Ohle & McElvany, 2015). Ergebnisse von Vergleichsstudien zeigen, dass bei vielen Lernenden große Leistungsdefizite bestehen (Artelt et al., 2001). Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften ist daher notwendig, um einerseits Schwierigkeiten von Lernenden früh zu erkennen (Helmke, 2009), andererseits aber auch um Kompetenzen und potenzielle Lernchancen wahrzunehmen (Rösike & Schnell, 2017) und Lernende adäquat fördern zu können.

Betrachtet man verschiedene Phasen eines Lernprozesses, so sind diagnostische Tätigkeiten einer Lehrkraft im Unterricht an unterschiedlichen Orten möglich, verbunden mit unterschiedlichen Zielsetzungen (Ingenkamp & Lissmann, 2008). Diagnostische Informationen aus solchen Situationen können dazu genutzt werden, den Unterricht zu adaptieren, indem das (mathematische) Denken von Lernenden berücksichtigt oder die Auswahl und Einbettung von Aufgaben angepasst wird. Die Adaption des Unterrichts kann dabei als Voraussetzung für den Lernerfolg von Schülerinnen und Schülern betrachtet werden (Schrader, 2013).

2 Diagnostische Kompetenz

Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften kann aufgefasst werden als ein „Bündel von Fähigkeiten, um den Kenntnisstand, die Lernfortschritte und die Leistungsprobleme der einzelnen Schüler sowie die Schwierigkeiten verschiedener Lernaufgaben im Unterricht fortlaufend beurteilen zu können, sodass das didaktische Handeln auf diagnostischen Einsichten aufgebaut werden kann“ (Weinert, 2000, S. 14f). Das Ziel einer solchen Diagnose ist demnach die Lernförderung (assessment for learning) im Gegensatz zur summativen Bewertung einer Leistung (assessment of learning) (Black & Wiliam, 2009). Sie bezieht sich auf lern- und leistungsrelevante Merkmale von Lernenden (von Aufschnaiter et al., 2015) sowie auf Lern- und Aufgabenanforderungen (Brunner et al., 2011).

Über die Bedeutung diagnostischer Kompetenz herrscht weitgehend Konsens (z.B. Dröse & Prediger, 2023). Sie wird dabei als wesentliches Element der Professionalität von Lehrkräften gesehen (von Aufschnaiter et al., 2015; Helmke, 2009; Weinert, 2000). Sie gilt als Merkmal von Unterrichtsqualität unter der Annahme, dass diagnostische Kompetenz sich positiv auf Schülerleistungen auswirkt (Helmke, 2009). Damit bildet sie die Basis für adaptive Unterrichtsgestaltung (z.B. Anders et al., 2010).

Die hohe Relevanz diagnostischer Kompetenz zeigt sich auch an der intensiven Forschungstätigkeit in diesem Feld. Studien deuten darauf hin, dass diagnostische Kompetenz als mehrdimensionales Fähigkeitskonstrukt gesehen werden muss, es handelt sich um mehrere, meist voneinander unabhängige Fähigkeiten (z.B. Spinath, 2005). Außerdem gibt es Hinweise, dass diagnostische Fähigkeiten domänenspezifisch sind (Lorenz & Artelt, 2009). Fachspezifische Diagnose erfordert dabei „diagnostische Tiefenschärfe“, die unter anderem fundiertes Fachwissen voraussetzt (Prediger et al., 2012). Im Hinblick auf die Aktivitäten während des Prozesses des Diagnostizierens kann diagnostische Kompetenz hingegen als domänenübergreifend verstanden werden (Sommerhoff et al., 2022). Allgemein wird angenommen, dass Unterrichtserfahrung einen Einfluss auf die diagnostische Kompetenz von Lehrkräften hat (z.B. Ohle und McElvany, 2015).

Obwohl die Bedeutung diagnostischer Kompetenz weitgehend unbestritten ist, ist die Modellierung und die Frage, welche Facetten sie umfasst, uneinheitlich (Karst & Förster, 2017). Hinzu kommt, dass diagnostische Situationen sehr vielfältig sind. Hierbei muss man sich vergegenwärtigen, dass diagnostische Situationen den Rahmen des diagnostischen Prozesses und damit auch die Art der Informationen (z.B. verbale Schülerbeiträge, schriftliche Lösungen etc.) bestimmen (Kron et al., 2022; Philipp, 2018; Karst et al., 2017). Auch hinsichtlich der Operationalisierung diagnostischer Kompetenz bestehen verschiedene Ansätze, so können sich Qualitätsindikatoren etwa auf das Produkt (z.B. ein Urteil) oder auf den diagnostischen Prozess beziehen (Praetorius et al., 2017), jeweils abhängig von der gewählten diagnostischen Situation und der Modellierung diagnostischer Kompetenz.

3 Forschungsperspektiven

Die Forschung zu diagnostischer Kompetenz ist vielseitig und umfasst verschiedene Perspektiven. Während frühe Studien hauptsächlich die Akkuratheit der Urteile von Lehrkräften bei der Vorhersage von Schülerleistungen fokussieren, hat sich die Forschung zunehmend auf das diagnostische Denken von Lehrkräften als kognitiver Prozess während der Entstehung eines diagnostischen Urteils verlagert (Dröse & Prediger, 2023).

Zahlreiche Forschungsansätze lassen sich auf eine Adaption des von Blömeke et al. (2015) entwickelten allgemeinen Kompetenzmodells von Leuders et al. (2018) zurückführen:

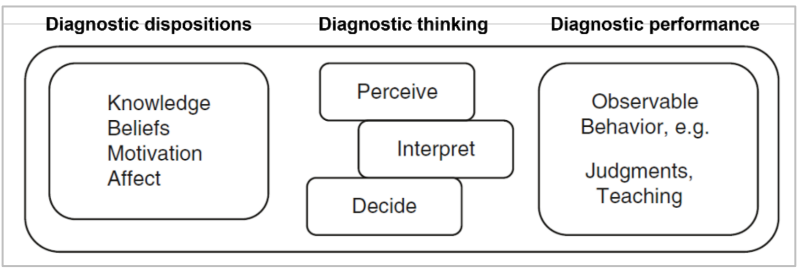


Abb. 1 Diagnostische Kompetenz als Kontinuum (vgl. Leuders et al. 2018, S. 9)

Diagnostische Kompetenz wird als Kontinuum beschrieben und umfasst die drei Bereiche diagnostische Dispositionen, diagnostisches

Denken und diagnostische Performanz (vgl. Abb. 1). Diagnostische Dispositionen (z.B. Fachwissen) bilden die personenbezogenen Voraussetzungen einer Lehrkraft. Diagnostisches Denken umfasst kognitive Prozesse des Wahrnehmens, Interpretierens und Entscheidens, welches auf den diagnostischen Dispositionen basiert und in diagnostischer Performanz (z.B. Urteil, Aufgabenauswahl etc.) sichtbar wird. Spezifische Forschungsfragen bestimmen die Fokussierung auf einen oder mehrere der drei Bereiche.

3.1 Urteilsakkuratheit

Die Betrachtung der Urteilsakkuratheit als Indikator für diagnostische Kompetenz hat eine lange Tradition und ist weit verbreitet. Dies spiegelt sich beispielsweise in Meta-Analysen wider, die zahlreiche Studien einbeziehen (Urhahne & Wijnia, 2021; Südkamp et al., 2012; Hoge & Coladarci, 1989). Dabei wird die möglichst genaue Übereinstimmung des Urteils einer Lehrkraft mit der tatsächlichen Merkmalsausprägung (z.B. Lösungshäufigkeit bei einer konkreten Aufgabe) betrachtet. Die Qualität des Urteils wird bestimmt durch die Rangordnungs-, Niveau- und die Differenzierungskomponente.

Bezüglich der Rangordnungskomponente geben Lehrkräfte relativ genau Urteile ab (Südkamp et al., 2012; Anders et al., 2010; Spinath, 2005), d.h. sie können etwa die Schülerinnen und Schüler ihrer Klasse in Bezug auf ein Merkmal in eine Reihenfolge bringen. Systematische Verschätzungen bilden sich jedoch beim Bilden einer Reihenfolge nicht ab (Brunner et al., 2011). Bezüglich der Niveaukomponente werden sowohl Überschätzungen (z.B. Feinberg & Shapiro, 2009) als auch Unterschätzungen (z.B. Clarke et al., 2002) von Schüler- oder Aufgabenmerkmalen berichtet. Im Hinblick auf die Differenzierungskomponente wird die Varianz, also beispielweise Leistungsunterschiede von Lernenden, eher unterschätzt (Lintorf et al., 2011).

In mehreren Teilstudien untersuchte Ostermann (Ostermann et al., 2015; Ostermann, 2018; Ostermann et al., 2019) Einflussfaktoren auf die Urteilsakkuratheit. Im Rahmen dieser Studien sollten Lehrkräfte mit unterschiedlicher Expertise (Lehrkräfte, Referendarinnen und Referendare sowie Studierende) die Schwierigkeit einer Aufgabe zum funktionalen Denken auf einer sechsstufigen Skala einschätzen sowie die Lösungshäufigkeit einer durchschnittlichen 8. Gymnasialklasse angeben. Es zeigte sich, dass sowohl bestimmte Aufgabenmerkmale (graphische vs. numerisch-tabellarische Darstellung) als auch der individuelle Bearbeitungsaufwand einer Aufgabe für die Einschätzung der Aufgabenschwierigkeit maßgeblich war. Beispielweise war der Bearbeitungsaufwand bei graphisch dargestellten Aufgaben geringer, die Überschätzungen der erwarteten Lösungshäufigkeiten in diesem Aufgabenbereich größer. Zudem zeigte sich, dass die Verschätzungstendenzen mit steigender Praxiserfahrung abnahmen. Im Vergleich zu einer Kontrollgruppe konnte außerdem gezeigt werden, dass eine Sensibilisierung für Verschätzungstendenzen (mittels Informationstext über Expert-Blind-Spot) sowie eine Instruktion (über typische Fehlkonzepte von Schülerinnen und Schülern) die Urteilsakkuratheit bezüglich der Niveaukomponente signifikant verbesserte (Ostermann, 2019)

Urteilsakkuratheit als Indikator für diagnostische Kompetenz bietet den Vorteil einer quantitativen Erfassung in dem Sinn, dass die genannten Urteilsmaße vergleichbar sind und damit umfassende Meta-Analysen ermöglichen. Urteilsakkuratheit als einziger Indikator für diagnostische Kompetenz greift aufgrund der Komplexität diagnostischer Urteile allerdings zu kurz (Karst & Förster, 2017; Ophuysen & Behrmann, 2015).

3.2 Kompetenzmodellierung

Um (fachspezifische) diagnostische Anforderungen zu bewältigen, werden verschiedene Arten von Wissen, Überzeugungen und Fähigkeiten benötigt (Leuders et al., 2018; Schrader, 2011). Beispielsweise erfordert diagnostische Kompetenz fachliches und fachdidaktisches Wissen (z.B. um Fehler und Fehlvorstellungen von Lernenden oder schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben zu analysieren) (Sommerhoff et al., 2022; Leuders & Loibl, 2021). Basierend auf Shulman (1986) entstanden verschiedene Rahmenwerke für das Professionswissen von Mathematiklehrkräften, die mehrere Wissensfacetten unterscheiden (z.B. Stahnke et al., 2016). Diagnostische Kompetenz wird dabei häufig als Teil von Lehrerprofessionalität, als Teil fachdidaktischen Wissens aufgefasst (Brunner et al., 2011; Ball et al., 2008).

Das Modell von Ball et al. (2008) ist auf der Basis einer umfassenden Tätigkeitsanalyse von Primarschullehrkräften entstanden. Im Modell wird Professionswissen fachspezifisch ausdifferenziert, es wird dabei zwischen fachlichem und fachdidaktischem Wissen unterschieden. Im Hinblick auf diagnostische Kompetenz kann die Facette „specialized content knowledge" (SCK) als fachwissenschaftliche Basis für diagnostische Aktivitäten (z.B. den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe verändern) gesehen werden, während die Facette „knowledge of content and students" (KCS) Wissen über mathematische Schülervorstellungen, -fehler, typische Lösungswege oder Strategien umfasst und daher als Kernbereich diagnostischer Kompetenz gedeutet werden kann.

Diese Perspektive auf diagnostische Kompetenz bietet eine Konkretisierung von Wissensarten, die Mathematiklehrkräfte in diagnostischen Situationen benötigen.

3.3 Diagnostische Prozesse

Diagnostische Kompetenz lässt sich auch vor dem Hintergrund der psychologischen Urteilsforschung betrachten (Hastie & Dawes, 2001). Diagnostik wird dabei grundsätzlich als Prozess verstanden, bei dem Informationen erfasst und verarbeitet werden, um zu einem Urteil zu gelangen (Philipp & Gobeli-Egloff, 2022; Loibl et al., 2020; Ophuysen & Behrmann, 2015). Häufig wird dabei mindestens einer der drei Prozesse fokussiert: Wahrnehmen, Interpretieren und Entscheiden (Stahnke et al., 2016). In Anlehnung an „scientific reasoning" kann der diagnostische Prozess als spezifische Modellierung dieser Prozesse beispielweise über epistemische Aktivitäten beschrieben werden (Chernikova et al., 2020) und sind Teil verschiedener diagnostischer Prozessmodelle (Wildgans-Lang et al., 2020). Ziel solcher Modelle ist es, zu beschreiben, wie Lehrkräfte zu ihren diagnostischen Urteilen gelangen.

Im Modell von Nickerson (1999) wird der Prozess der Einschätzung des Wissens eines Laien durch Expertinnen und Experten beschrieben (vgl. Abb. 2).

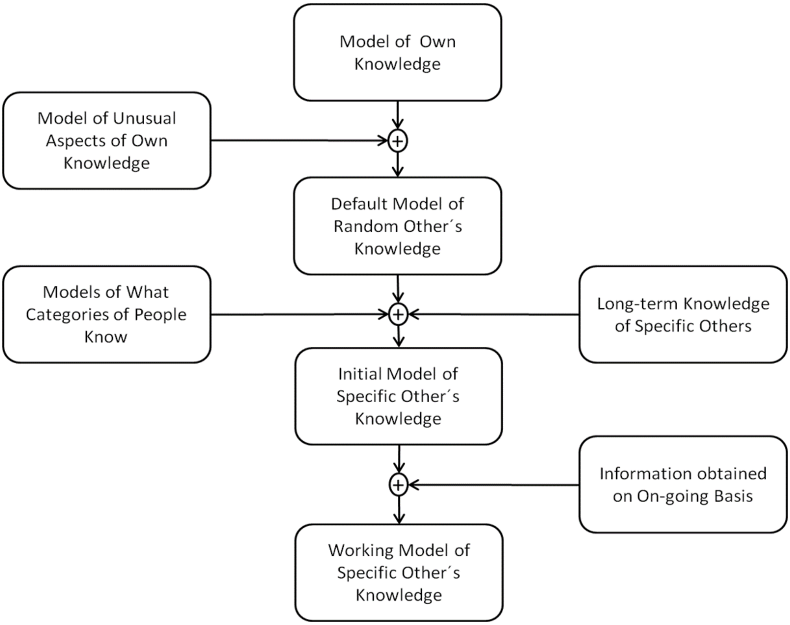


Abb. 2 Modell zur Einschätzung des Wissens anderer Personen (Nickerson, 1999, S. 740)

Auf der Basis des eigenen Wissens werden weitere Informationen berücksichtigt, die zu einer schrittweisen Verfeinerung des Modells über das Wissen einer anderen Person führen. So können im pädagogischen Kontext etwa bereits verfügbare Informationen wie „unübliche Aspekte" (Lehrkräfte verfügen über größeres Fachwissen im Vergleich zu Schülerinnen und Schülern) oder das Wissen über bestimmte Gruppen (z.B. die Zugehörigkeit zu einer Klassenstufe oder Wissen über Kompetenzen einzelner Schülerinnen oder Schüler) zu einer Adaption des Modells führen. Ebenso werden neu hinzukommende Informationen (z.B. durch die Analyse eines Schülerprodukts) verarbeitet (Philipp & Gobeli-Egloff, 2022). Verschätzungstendenzen von Lehrkräften lassen sich als unzureichende Anpassung mit dem Modell erklären. Die Bedeutung des eigenen Wissens als Grundlage in diagnostischen Situationen zeigt sich etwa, wenn eigene Lösungsansätze oder der individuelle eigene Bearbeitungsaufwand einer Aufgabe bei der Bildung eines diagnostischen Urteils herangezogen werden (Philipp, 2018; Ostermann, 2018).

Diagnostische Prozessmodelle erlauben die systematische Untersuchung diagnostischer Urteile und deren Zusammenhänge beispielweise in experimentellen Studien. Solche Untersuchungen können Hinweise auf Faktoren geben, die die Akkuratheit eines diagnostischen Urteils beeinflussen können (Schrader, 2013), sowie Unterschiede bei der Verarbeitung von Informationen aufzeigen, beispielweise zwischen Novizinnen und Novizen und Experten (Böhmer et al., 2012).

3.4 Förderung diagnostischer Kompetenz

Unter der Annahme, dass diagnostische Kompetenz einen wesentlichen Teil von Professionalisierung von Lehrkräften darstellt und sie für das Lernen von Schülerinnen und Schülern von Bedeutung ist, rückt die Entwicklung diagnostischer Kompetenz und Möglichkeiten ihrer Förderung zunehmend in den Fokus der Forschung (Chernikova et al., 2020; Ohle & McElvany, 2015). Ohne gezielte Förderung scheint diagnostische Kompetenz nicht ausreichend ausgeprägt zu sein (z.B. van Ophuysen & Behrmann, 2015). Empirische Befunde zeigen, dass Lehrkräfte Schwierigkeiten beim Diagnostizieren von Merkmalen Lernender haben (vor allem zu Beginn ihrer Laufbahn) (Sommerhoff et al., 2022). Unter der Annahme, dass Kompetenzen generell als „erlernbare kontextspezifische Leistungsdispositionen“ (Klieme & Hartig 2007, S. 17) gelten, geht es bei Forschungsansätzen in diesem Bereich vor allem um die Entwicklung und Evaluation von Förderkonzepten.

Als wesentliche Elemente einer wirksamen Förderung diagnostischer Kompetenz können „approximations of practice“ gesehen werden, also Lernumgebungen, die Annäherungen an spätere berufliche Praktiken darstellen (Grossman et al., 2008). Eine wichtige Rolle spielt in diesem Zusammenhang auch Problemorientierung, wozu fallbasierte diagnostische Aufgabenstellungen zählen (Belland et al., 2017). Chernikova et al. (2020) stellen auf der Basis einer Meta-Analyse die Bedeutung von Formen des Scaffolding heraus, die das Bereitstellen von Beispielen sowie Prompts, das Zuweisen einer Rolle (als diagnostizierende Lehrkraft) und die Einbindung von Reflexionsphasen umfassen.

Ebenso wird der gegebene Kontext und das Ziel der Diagnose, etwa das Identifizieren von Fehlvorstellungen, um konkrete Maßnahmen vorzuschlagen, als unterstützend für die Entwicklung diagnostischer Kompetenz gesehen (Chernikova et al., 2020).

Das Potenzial dieser Forschungsperspektive liegt darin, dass wirksame Elemente der Förderung diagnostischer Kompetenz in der Lehreraus- und -weiterbildung in experimentellen Designs identifiziert und für die Entwicklung von Förderkonzepten genutzt werden können. Darüber hinaus ermöglichen sie ein tieferes Verständnis von Lernprozessen (angehender) Lehrkräfte bezüglich der Entwicklung diagnostischer Kompetenz.

Die vier dargestellten Forschungsperspektiven zeigen auf, dass die Forschung zu diagnostischer Kompetenz sehr breit angelegt ist. Aufgrund der Verwendung unterschiedlicher Begrifflichkeiten und Konzeptualisierungen wird ein systematischer Überblick über die bisherige Forschung und der Wissensaustausch allerdings erschwert (Leuders et al., 2022).

4 Ansätze zur Systematisierung bisheriger Forschung

Um Forschungsansätze zusammenzufassen und zu systematisieren, wurden in den letzten Jahren im deutschsprachigen Raum mehrere Verbundprojekte initiiert, die jeweils bestimmte Aspekte diagnostischer Kompetenz fokussieren.

Ziel des wissenschaftlichen Netzwerks zur diagnostischen Kompetenz von Lehrkräften „NeDiKo“ war es, Forschungsaktivitäten zu bündeln und das Konstrukt weiterzuentwickeln. Thematische Schwerpunkte bildeten dabei die Modellierung, die Erfassung, die Analyse und die Förderung diagnostischer Kompetenz (Südkamp & Praetorius, 2017). Ein konzeptionelles Modell, das diagnostische Kompetenz als ein Bündel von Konstrukten, das Wissen, Fähigkeiten, Motivationen und Überzeugungen (im Sinne von Dispositionen) umfasst, bildet dabei den Kern. Das Modell umfasst neben einem Strukturmodell, das Beziehungen zwischen den Elementen des Modells beschreibt, auch ein Prozessmodell, das diagnostisches Denken und Handeln von Lehrkräften abbildet (Herppich et al., 2018).

Das Projekt „DiaKom" liefert eine theoretische Basis für Forschungsansätze, die diagnostische Urteile von Lehrkräften als Informationsverarbeitungsprozesse verstehen (Loibl et al., 2020). Dabei werden vier Komponenten spezifiziert: Personencharakteristika (Merkmale der Lehrkraft, z.B. Wissen), Situationscharakteristika (z.B. Analyse einer Schülerlösung), diagnostisches Denken (wahrnehmen, interpretieren und entscheiden) und (beobachtbares) diagnostisches Verhalten (Leuders et al., 2020). Ziel ist es, mithilfe des Rahmenmodells Forschungsprozesse zu strukturieren und Wissen über die Entstehung diagnostischer Urteile zu generieren.

Im Projekt „Cosima" wurde ein Rahmenmodell entwickelt, das diagnostische Fähigkeiten als Dispositionen auffasst, die es ermöglichen, Wissen in diagnostischen Tätigkeiten anzuwenden und Entscheidungen zu treffen. Wesentliche Elemente des Modells sind die professionelle Wissensbasis und Prozesse beim Diagnostizieren, definiert über epistemische Aktivitäten. Ziel ist die Unterstützung des Erwerbs diagnostischer Kompetenz durch instruktionale Unterstützung (Scaffolding) in Simulationen (Heitzmann et al., 2019).

Wenngleich jedes der Verbundprojekte einen konzeptionellen Rahmen und damit einen Überblick über den jeweiligen spezifischen Schwerpunkt bietet, fehlt bislang ein übergreifender Rahmen, der eine umfassende Systematisierung des Fachgebiets ermöglicht. Ein erster Ansatz zur Entwicklung eines solchen Rahmens bieten Leuders et al. (2022), indem sie dafür plädieren, den Forschungsfokus sowie Ziele, Methoden und theoretische Prämissen zu explizieren. Bestehende Forschungsarbeiten könnten dann auf der Basis eines geteilten Begriffsverständnisses besser eingeordnet werden, um Stärken und Limitationen sowie Forschungslücken aufzuzeigen (Leuders et al., 2022; Sommerhoff et al., 2022). Solche Einordnungen könnten eine breite Basis für Meta-Analysen und damit eine Orientierung für künftige Forschung bieten.

5 Fazit

Diagnostische Kompetenz ist unter verschiedenen Perspektiven sowohl hinsichtlich fachbezogener als auch fachübergreifender Aspekte untersucht worden. Neben der bereits angesprochenen Herausforderung der Systematisierung bisheriger Forschung in diesem Gebiet, könnte künftige Forschung auch wesentliche Aspekte stärker in den Fokus nehmen.

Dazu gehört etwa die *Fachspezifität* diagnostischer Kompetenz. Die Rolle verschiedener Wissenselemente wurde noch nicht systematisch untersucht, auch wenn es theoretisch plausibel ist, dass beispielsweise fachdidaktisches Wissen von Bedeutung ist (Kron et al., 2022). Dabei spielt auch die Frage nach dem Bezug zum konkreten mathematischen Inhalt eine Rolle und die Frage, welche Wissenselemente (angehende) Lehrkräfte in diagnostischen Situationen tatsächlich berücksichtigen (Dröse & Prediger, 2023).

Ebenso scheint der *Einfluss diagnostischer Kompetenz auf das Lernen der Schülerinnen und Schüler* ein Aspekt zu sein, der bislang noch zu wenig untersucht wurde (Sommerhoff et al., 2022) und insbesondere kaum Aufschluss über kausale Zusammenhänge erlaubt. Damit verbunden ist auch die Frage, wie sich diagnostische Kompetenz überhaupt auf das (Unterrichts-)Handeln von Lehrkräften auswirkt. In diesem Zusammenhang erscheint es von Bedeutung, diagnostische Kompetenz systematischer im Zusammenhang mit Kompetenzen der anschließenden Förderung zu sehen (Streit et al., 2019).

Die *Qualität diagnostischer Urteile* wird über die Breite der Studien hinweg sehr unterschiedlich konzeptualisiert, häufig nicht expliziert und vielfach erst in der Operationalisierung sichtbar. Hier stellt sich einerseits die Frage nach einem gemeinsamen Verständnis von Qualitätsindikatoren und ihrer empirischen Erfassung sowie die Frage nach möglichen Einflussfaktoren auf die Qualität eines diagnostischen Urteils.

Literatur

Anders, Y., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2010). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften und die Leistungen ihrer Schülerinnen und Schüler. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 3,* 175–193.

Artelt, C., Stanat, P., Schneider, W., & Schiefele, U. (2001). Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In J. Baumert, E. Klieme, M. Neubrand, M. Prenzel, U. Schiefele, W. Schneider, P. Stanat, K.-J. Tillmann & M. Weiß (Hrsg.), *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 69-137). Leske+ Budrich.

Aufschnaiter, C. v., Cappell, J., Dübbelde, G., Ennemoser, M., Mayer, J., Stiensmeier-Pelster, J., Sträßer, R., & Wolgast, A. (2015). Diagnostische Kompetenz. Theoretische Überlegungen zu einem zentralen Konstrukt der Lehrerbildung. *Zeitschrift für Pädagogik*, 61, 738–758.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelbs, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389–407.

Belland, B. R., Walker, A. E., Kim, N. J., & Lefler, M. (2017). Synthesizing results from empirical research on computer-based scaffolding in STEM education: A meta-analysis. *Review of Educational Research*, 87(2), 309–344.

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21, 5–31.

Blömeke, S., Gustafsson, J. E., & Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift für Psychologie*, 223 (1), 3-13.

Böhmer, I., Gräsel, C., Hörstermann, T. & Krolak-Schwerdt, S. (2012). Die Informationssuche bei der Erstellung der Übergangsempfehlung: die Rolle von Fallkonsistenz und Expertise. *Unterrichtswissenschaft*, 40(2), 140–155.

Brunner, M., Anders, Y., Hachfeld, A. & Krauss, S. (2011). Diagnostische Fähigkeiten von Mathematiklehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften* (S. 215-234). Waxmann.

Chernikova, O., Heitzmann, N., Fink, M.C., Timothy, V., Seidel, T., & Fischer, F. (2020). Facilitating Diagnostic Competences in Higher Education—a Meta-Analysis in Medical and Teacher Education. *Educational Psychology Review* 32, 157–196.

Clarke, D.M., Roche, A. & Clarke, B. (2018). Supporting Mathematics Teachers' Diagnostic Competence Through the Use of One-to-One, Task-Based Assessment Interviews. In T. Leuders, K. Philipp & J. Leuders (Hrsg.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (Vol. 11) (S. 173-192). Springer.

Dröse, J., & Prediger, S. (2023). Prospective Teachers' Diagnostic Thinking on Students' Understanding of Multi-Digit Multiplication: A Content-Related Analysis on Unpacking of Knowledge Elements. *Journal für Mathematik-Didaktik, 44*(1), 1-28.

Feinberg, A. B., & Shapiro, E. S. (2009). Teacher accuracy: An examination of teacher- based judgments of students reading with differing achievement levels. *The Journal of Educational Research, 102*(6), 453–462.

Grossman, P., & McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal,* Vol. 45, No. 1, 184 –205.

Hastie, R., & Dawes, R. M. (2001). *Rational choice in an uncertain world: The psychology of judgment and decision making.* Sage Publications.

Heitzmann, N., Seidel, T., Opitz, A., Hetmanek, A., Wecker, C., Fischer, M., Ufer, S., Schmidmaier, R., Neuhaus, B., Siebeck, M., Stürmer, K., Obersteiner, A., Reiss, K., Girwidz, R., & Fischer, F. (2019). Facilitating diagnostic competences in simulations: A conceptual framework and a research agenda for medical and teacher education. *Frontline Learning Research, 7*(4), 1–24.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts*, 2. Auflage. Klett-Kallmeyer.

Herppich, S., Praetorius, A.-K., Förster, N., Glogger-Frey, I., Karst, K., Leutner, D., Behrmann, L., Böhmer, M., Ufer, S., Klug, J., Hetmanek, A., Ohle, A., Böhmer, I., Karing, C., Kaiser, J., & Südkamp, A. (2018). Teachers' assessment competence: Integrating knowledge-, process-, and product-oriented approaches into a competence-oriented conceptual model. *Teaching and Teacher Education, 76,* 181–193.

Hoge, R. D., & Coladarci, T. (1989). Teacher-based judgments of academic achievement: A review of literature. *Review of Educational Research*, 59(3), 297–313.

Ingenkamp, K., & Lissmann, U. (2008). *Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik* (6th ed.). Beltz.

Karst, K., & Förster, N. (2017). Ansätze zur Modellierung diagnostischer Kompetenz–ein Überblick. In A. Südkamp & A. K. Praetorius (Hrsg.), *Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Theoretische und methodische Weiterentwicklungen* (S. 19-20). Waxmann.

Karst, K., Klug, J., & Ufer, S. (2017). Strukturierung diagnostischer Situationen im inner- und außerunterrichtlichen Handeln von Lehrkräften. In A. Südkamp & A. K. Praetorius (Hrsg.), *Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Theoretische und methodische Weiterentwicklungen* (S. 102-114). Waxmann.

Klieme, E., & Hartig, J. (2007). Kompetenzkonzepte in den Sozialwissenschaften und im erziehungswissenschaftlichen Diskurs. In M. Prenzel, I. Gogolin & H.-H. Krüger (Hrsg.), *Kompetenzdiagnostik: Zeitschrift für Erziehungswissenschaften (Sonderheft 8)* (S. 11–29).

Kron, S., Sommerhoff, D., Achtner, M., Stürmer, K.,Wecker, C., Siebeck, M., & Ufer, S. (2022). Cognitive and motivational person characteristics as predictors of diagnostic performance: Combined effects on pre-service teachers' diagnostic task selection and accuracy. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*(1), 135-172.

Leuders, T., Dörfler, T., Leuders, J., & Philipp, K. (2018). Diagnostic competence of mathematics teachers: Unpacking a complex construct. In T. Leuders, K. Philipp & J. Leuders (Hrsg.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (Vol. 11) (S. 3-31). Springer.

Leuders, T., Loibl, K., & Dörfler, T. (2020). Diagnostische Urteile von Lehrkräften erklären–Ein Rahmenmodell für kognitive Modellierungen und deren experimentelle Prüfung. *Unterrichtswissenschaft* 48 (4), 493-502.

Leuders, T., Loibl, K., Sommerhoff, D., Herppich, S., & Praetorius, A. K. (2022). Toward an overarching framework for systematizing research perspectives on diagnostic thinking and practice. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*(1), 13-38.

Leuders, T., & Loibl, K. (2021). Beyond subject specificity—Student and teacher thinking as sources of specificity in teacher diagnostic judgments. *RISTAL, 4*, 60–70.

Lintorf, K., McElvany, N., Rjosk, C., Schroeder, S., Baumert, J., Schnotz, W., Horz, H., & Ullrich, M. (2011). Zuverlässigkeit von diagnostischen Lehrerurteilen – Reliabilität verschiedener Urteilsmaße bei der Einschätzung von Aufgabenschwierigkeiten. *Unterrichtswissenschaft, 39*(2), 102–120.

Loibl, K., Leuders, T., & Dörfler, T. (2020). A framework for explaining teachers' diagnostic judgements by cognitive modeling (DiaCoM). *Teaching and Teacher Education, 91*, 103059.

Lorenz, C. & Artelt, C. (2009). Fachspezifität und Stabilität diagnostischer Kompetenz von Grundschullehrkräften in den Fächern Deutsch und Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 23(3), 211–222.

Nickerson, R. S. (1999). How We Know-and Sometimes Misjudge-What Others Know: Imputing One´s Own Knowledge to Others. *Psychological Bulletin*, 125(6), 737–759.

Ohle, A., & McElvany, N. (2015). Teachers' diagnostic competences and their practical relevance. Special Issue Editorial. *Journal for educational research online, 7*(2), 5-10.

van Ophuysen, S., & Behrmann, L. (2015). Die Qualität pädagogischer Diagnostik im Lehrerberuf-Anmerkungen zum Themenheft „Diagnostische Kompetenzen von Lehrkräften und ihre Handlungsrelevanz". *Journal for educational research online*, 7(2), 82-98.

Ostermann, A., Leuders, T., & Nückles, M. (2015). Wissen, was Schülerinnen und Schülern schwer fällt. Welche Faktoren beeinflussen die Schwierigkeitseinschätzung von Mathematikaufgaben? *Journal für Mathematik-Didaktik, 36*(1), 45–76.

Ostermann, A., Leuders, T., & Philipp, K. (2019). Fachbezogene diagnostische Kompetenzen von Lehrkräften – Von Verfahren der Erfassung zu kognitiven Modellen zur Erklärung. In T. Leuders, M. Nückles, S. Mikelskis-Seifert, & K. Philipp (Hrsg.), *Pädagogische Professionalität in Mathematik und Naturwissenschaften* (S. 93-116). Springer Spektrum.

Ostermann, A. (2018). Factors Influencing the Accuracy of Diagnostic Judgments. In T. Leuders, K. Philipp & J. Leuders (Hrsg.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (Vol. 11) (S. 95-108). Springer.

Philipp, K., & Gobeli-Egloff, I. (2022). Förderung diagnostischer Kompetenz im Rahmen der Ausbildung von Lehrkräften für die Primarschule – Eine Studie zum Erkennen von Stärken und Schwächen von Schülerinnen und Schülern am Beispiel von Größen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 43*(1), 173-203.

Philipp, K. (2018). Diagnostic competences of mathematics teachers with a view to processes and knowledge resources. In T. Leuders, K. Philipp & J. Leuders (Hrsg.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (Vol. 11) (S. 109-127). Springer.

Praetorius, A. K., Hetmanek, A., Herppich, S., & Ufer, S. (2017). Herausforderungen bei der empirischen Erforschung diagnostischer Kompetenz. In A. Südkamp & A. K. Praetorius (Hrsg.), *Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: Theoretische und methodische Weiterentwicklungen* (S. 95-149). Waxmann.

Prediger, S., Tschierschky, K., Wessel, L. & Seipp, B. (2012). Professionalisierung für fach- und sprachintegrierte Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. *Zeitschrift für Interkulturellen Fremdsprachenunterricht 17*(1), 40–58.

Rösike, K. A., & Schnell, S. (2017). Do math! – Lehrkräfte professionalisieren für das Erkennen und Fördern von Potenzialen. In J. Leuders, T. Leuders, S. Prediger & S. Ruwisch (Hrsg.), *Mit Heterogenität im Mathematikunterricht umgehen lernen* (S. 223-233). Springer Spektrum.

Schrader, F.-W. (2011). Lehrer als Diagnostiker. In E. Terhart, H. Bennewitz, & M. Rothland (Hrsg.), *Handbuch der Forschung zum Lehrerberuf* (S. 683-698). Waxmann.

Schrader, F.-W. (2013). Diagnostische Kompetenz von Lehrpersonen. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung*, 31(2), 154–165.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14.

Sommerhoff, D., Leuders, T., & Praetorius, A. K. (2022). Forschung zum diagnostischen Denken und Handeln von Lehrkräften–Was ist der Beitrag der Mathematikdidaktik?. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *43*(1), 1-12.

Spinath, B. (2005). Akkuratheit der Einschätzung von Schülermerkmalen durch Lehrer und das Konstrukt der diagnostischen Kompetenz. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 19(1/2), 85–95.

Stahnke, R., Schueler, S., & Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 48(1), 1-27.

Streit, C., Rüede, C., Weber, C., & Graf, B. (2019). Zur Verknüpfung von Lernstandeinschätzung und Weiterarbeit im Arithmetikunterricht: Ein kontrastiver Vergleich zur Charakterisierung diagnostischer Expertise. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 37-62.

Südkamp, A., & Praetorius, A. K. (Hrsg.). (2017). *Diagnostische Kompetenz von Lehrkräften: theoretische und methodische Weiterentwicklungen*. Waxmann Verlag.

Südkamp, A., Kaiser, J., & Möller, J. (2012). Accuracy of teachers' judgments of students' academic achievement: A meta-analysis. *Journal of Educational Psychology*, 104(3), 743–762.

Urhahne, D., & Wijnia, L. (2021). A review on the accuracy of teacher judgments. *Educational Research Review, 32*, 100374.

Weinert, F. E. (2000): Lehren und Lernen für die Zukunft - Ansprüche an das Lernen in der Schule. *Pädagogische Nachrichten Rheinland-Pfalz*, 2, 1–16.

Wildgans-Lang, A., Scheuerer, S., Obersteiner, A., Fischer, F., & Reiss, K. (2020). Analyzing prospective mathematics teachers' diagnostic processes in a simulated environment. *ZDM – Mathematics Education*, *52*(1), 241–254.

Prof. Dr. Kathleen Philipp
PH FHNW
Hofackerstr. 30
432 Muttenz
kathleen.philipp@fhnw.ch

Überlegungen zu einer lernförderlichen Lernbegleitung – Basiskompetenzen vor und zu Schulbeginn am Beispiel der Arithmetik sichern

von Stephanie Schuler

Arithmetische Basiskompetenzen zu Schulbeginn sind zentral für das weitere Mathematiklernen. Regelspiele mit mathematischem Potenzial sind ein wirksamer Ansatz für die Förderung dieser Basiskompetenzen. Lernprozesse bedürfen aber auch der Unterstützung und Begleitung durch die Fach- bzw. Lehrkraft. So deuten empirische Befunde darauf hin, dass die Entfaltung des mathematischen Potenzials nicht nur von anregendem Material, sondern auch von der Begleitung durch Lehrperson abhängig ist. Ziel der Lehrperson-Kind-Interaktion ist, die Kinder in der Regelspielsituation kognitiv zu aktivieren und durch eine adaptive Lernunterstützung das Erreichen der Zone der nächsten Entwicklung zu ermöglichen. Lehrpersonen stehen also vor verschiedenen Herausforderungen wie z.B. der Diagnose vorhandener Kompetenzen, der Auswahl geeigneter Spiele bzw. Materialien oder der Gestaltung einer lernförderlichen Lernbegleitung.

Schlüsselwörter: Lernbegleitung, arithmetische Basiskompetenzen, Zahlverständnis, Schulbeginn, mathematische Regelspiele

1 Arithmetische Basiskompetenzen zu Schulbeginn – Begriffsklärung

Unter arithmetischen Basiskompetenzen zu Schulbeginn wird im Allgemeinen der Zahlbegriff bzw. das Zahlverständnis (im kleinen Zahlenraum) verstanden. Es gilt zusammen mit dem Operationsverständnis als zentral für das Rechnenlernen (z.B. Peucker & Weißhaupt, 2017; Schultz et al., 2017).

Es wird davon ausgegangen, dass sich das Zahlverständnis aus verschiedenen (Zahl-)Aspekten bzw. Vorstellungen von Zahlen bildet, „welche in einem längeren Lernprozess erworben werden und in ihrer Gesamtheit zu einem umfassenden Zahlbegriffsverständnis führen" (Moser Opitz, 2016, S. 254). Für die Entwicklung des Zahlverständnisses im Sinne tragfähiger Vorstellungen von Zahlen, auch Grundvorstellungen genannt, sind nach Wember (1989, S. 435) ordinale und kardinale Vorstellungen von zentraler Bedeutung. Ordinale Vorstellungen umfassen ein Verständnis von Zahlen als Positionen (Gerster & Schultz, 2000). Sie zeigen sich in der Fähigkeit, verbal zu zählen, also die Zahlwortreihe aufzusagen oder auch Zahlworte bzw. Zahlsymbole zu ordnen. Kardinale Vorstellungen beziehen sich auf Anzahlen. Sie zeigen sich in der Fähigkeit, Anzahlen zu bestimmen (zählend oder nicht-zählend), Anzahlen darzustellen und (auch größere) Anzahlen durch Strukturieren auf einen Blick zu erfassen. Fritz et al. (2018) heben beim Verständnis der Kardinalität hervor, dass die Zahlwortreihe als „eine Sequenz größer werdender kardinaler Einheiten verstanden wird, in der sich aufeinanderfolgende Zahlen auf Mengen beziehen, die jeweils um ein Element größer“ werden (vgl. auch Peucker & Weißhaupt, 2017). Schultz et al. (2017) betonen neben der Bedeutung ordinaler und kardinaler Vorstellungen von Zahlen die Bedeutung von Beziehungen zwischen Zahlen, dem sogenannten Teile-Ganzes-Konzept (Resnick, 1983). Hierfür wird in der Literatur auch die Bezeichnung Relationalzahl oder Zahlbeziehungen verwendet (z.B. Lorenz, 2016, S. 154; Rechtsteiner-Merz, 2013). Beim Denken in Beziehungen geht es um die Zerlegbarkeit von Mengen in Teilmengen bzw. von Zahlen in andere Zahlen und die Differenz zwischen Mengen bzw. Abstände zwischen Zahlen. Dieses Konzept wird vor der Schule in der Regel auf der Ebene kleiner konkreter Mengen und im ersten Schuljahr auf der Ebene von Zahlen erworben.

Der Erwerb von tragfähigen Vorstellungen von Zahlen wird im Rahmen von Entwicklungsmodellen in mehreren Stufen beschrieben: ordinale, kardinale und relationale Vorstellungen von Zahlen werden nebeneinander, nacheinander oder auch überlappend erworben (z. B. Fritz et al., 2018, S. 13 ff.; Krajewski, 2013, S. 156). Dabei werden ordinale Vorstellungen in der Regel vor kardinalen, teilweise auch parallel dazu, und diese wiederum vor numerischen relationalen Vorstellungen erworben.

Für das Mathematiklernen vor der Schule wird zumeist der Erwerb eines ordinalen und eines kardinalen Zahlverständnisses gefordert. Der Erwerb des Teile-Ganzes-Konzepts wird in der Regel in der Schule verortet, wobei der Erwerb der jeweiligen Konzepte von verschiedenen Aspekten abhängig ist: Zahlenraum, Vorgabe als Zahlwort oder Zahlzeichen, Lösung mit Hilfe konkreter Objekte, bildlicher oder symbolischer Darstellungen (z. B. Clements & Sarama, 2014).

2 Zur Relevanz arithmetischer Basiskompetenzen zu Schulbeginn – Forschungsbefunde

Der Aufbau eines tragfähigen Zahlbegriffs bzw. Zahlverständnisses ist eines der wichtigsten Ziele des arithmetischen Anfangsunterrichts. Das Zahlverständnis ist, wie verschiedene Studien zeigen, zentral für das Rechnenlernen und für das weitere mathematische Lernen im Laufe der Grundschulzeit (z.B. Duncan et al. 2007; Jörns et al., 2013; Krajewski & Schneider, 2006; Manfra et al., 2017). So zeigen Kinder, die vor oder zu Schulbeginn über ein fundiertes Zahlverständnis verfügen, im Laufe der Grundschulzeit mit einer hohen Wahrscheinlichkeit bessere Leistungen im Fach Mathematik als Kinder, bei denen das Zahlverständnis nur rudimentär ausgeprägt ist. Hingegen laufen Kinder mit unzureichenden Lernvoraussetzungen und Vorkenntnissen Gefahr, (besondere) Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zu entwickeln.

Dass grundlegende Kompetenzen nicht immer erworben werden, darauf verweisen Befunde nationaler und internationaler Vergleichsstudien. Die Ergebnisse des IQB-Bildungstrends 2021 (Stanat et al., 2022) zeigen im Vergleich zu 2016 und 2011, dass bei den befragten Viertklässler*innen der Anteil derjenigen steigt, die den Mindeststandard nicht erreichen (22%) und sich die Streuung nochmals vergrößert hat. Für die Leitidee Zahlen und Operationen liegt der Anteil der Kinder, die den Mindeststandard nicht erreichen im Jahr 2021 bei 19,5% und somit höher als 2016 (15,3%) und 2011 (11,7%) (Stanat et al., 2022).

Auch TIMSS 2019 zeigt (Schwippert et al., 2022), dass der Anteil der Kinder, die lediglich rudimentäre oder niedrige mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten aufweisen, bei etwa einem Viertel liegt. Für den Bereich Arithmetik zeigt sich hierbei eine relative Schwäche im Vergleich zu den Erhebungen in den vorherigen Zyklen. Viele an TIMSS 2019 teilnehmenden Staaten weisen auf diesen Stufen anteilig weniger Schülerinnen und Schüler auf. Welche Ursachen diese Befunde haben, ist im Detail unklar. Es ist davon auszugehen, dass pandemiebedingte Schulschließungen (z. B. Depping et al., 2021; Tomasik et al., 2021), sowie zusätzliche Anforderungen wie Inklusion und Zuwanderung, mangelnde Versorgung mit (qualifiziertem) Lehrpersonal oder auch geringere Lern-voraussetzungen eine Rolle spielen (Stanat et al., 2022, S. 275 ff.).

3 Förderung arithmetischer Basiskompetenzen mit Regelspielen

Regelspiele stellen eine Möglichkeit dar, das Zahlverständnis vor und zu Schulbeginn zu fördern. Verschiedene Studien im letzten Kindergartenjahr zeigen, dass Regelspiele mit entsprechendem mathematischem Potenzial das Zahlverständnis fördern können (z.B. Gasteiger & Möller, 2021; Hauser et al., 2014; Ramani & Siegler, 2008; Young-Loveridge, 2004). Gasteiger und Möller (2021) konnten beispielsweise zeigen, dass Spiele mit einem Augenwürfel im Unterschied zu Spielen mit einem Farb- bzw. Symbolwürfel signifikante Unterschiede im Hinblick auf den Zuwachs numerischer Kompetenzen bei 4- bis 5-jährigen Kindern nach sich ziehen. Im Projekt SpiF (Spielintegrierte Frühförderung, Rechsteiner et al., 2012) verzeichneten Kinder aller Leistungsniveaus Leistungszuwächse bei einer Förderung mit mathematischen Regelspielen im letzten Kindergartenjahr. Die Studien von Young-Loveridge (2004), Ramani und Siegler (2008) sowie Seeger et al. (2018) weisen nach, dass auch Kinder mit Entwicklungsrisiko durch den Einsatz von mathematischen Regelspielen Leistungszuwächse erzielen können. Als wichtig für den Lernzuwachs stellte sich neben dem Förderumfang das Regelverständnis der Kinder heraus (Seeger et al., 2018). Mathematische Regelspiele können damit als wirksamer Förderansatz vor Schulbeginn bezeichnet werden.

Regelspiele können auch zu Schulbeginn eingesetzt werden. (Streit & Schuler, 2022; Nührenbörger & Tubach, 2014). Für eine kontinuierliche (mathematische) Lernbiographie „ohne Brüche" ist es wichtig, dass es im Übergang vom Kindergarten zur Schule Anknüpfungspunkte gibt (z.B. Heinze & Grüßing, 2009). (Regel-)Spiele stellen solche Anknüpfungspunkte dar und können (individuell) anschlussfähiges Lernen ermöglichen. Dass ihr Einsatz aber insbesondere im Schulkontext andere ggf. auch höhere Anforderungen an die Lehrkräfte stellt, beschreibt Tubach (2019). Dies gilt insbesondere für die Initiierung der Arbeits- und Austauschphasen, die Materialorganisation und die Gruppenbildung.

4 Lernbegleitung – Begriffsklärung

Was unter Lernbegleitung im Allgemeinen zu verstehen ist, darüber herrscht ein breiter Konsens. Der gemeinsame Kern wird von Perkhofer-Czapek und Potzmann (2016, S. 73) wie folgt zusammengefasst:

> Lern(-prozess-)begleitung bzw. prozessorientierte Lernbegleitung [ist] ein Oberbegriff für verschiedene Aktivitäten, Maßnahmen, sprachliche Äußerungen im Unterricht und Verhaltensweisen von Lehrerinnen und Lehrern [...], die den individuellen Lernprozess der Schüler/innen unter Berücksichtigung ihrer unterschiedlichen Lernvoraussetzungen und Lernzugänge systematisch aktivieren, unterstützen und diese zu selbstreguliertem und in weiterer Folge lebenslangem Lernen befähigen. Die verschiedenen unterrichtlichen Handlungen im Rahmen von Lernbegleitung zielen darauf ab, das auf Verstehen ausgerichtete, elaborierende Lernen der Schüler/innen anzuregen und zu unterstützen.

Es geht also um Adhoc-Unterstützungsmaßnahmen im Unterricht im Unterschied zu curricularen Anpassungen oder auch zur vorbereitenden Planung von Unterricht. Ziel der Begleitung ist es, die Schüler*innen entsprechend ihrer Lernausgangslage in der Zone der jeweiligen nächsten Entwicklung herauszufordern, beim Erreichen dieser Zone individuell zu unterstützen und sie damit in ihrem Lernprozess voranzubringen.

Die Bezeichnung für diese Adhoc-Unterstützungsmaßnahmen ist nicht einheitlich. Es finden sich zahlreiche unterschiedliche Bezeichnungen, so sind Begriffsbestimmungen von mikroadaptiven Unterstützungsmaßnahmen (Corno, 2008; Hardy et al., 2019) der obigen Begriffsbestimmung von Lernbegleitung im Wesentlichen vergleichbar. Manche Bezeichnungen sind jedoch auch enger gefasst wie *verbale* Unterstützungsmaßnahmen (Leuchter & Saalbach, 2014), Sustained Shared Thinking (Siraj-Blatchford et al., 2002), oder auch Tutoring (1:1-Situation, Wood et al., 1976); manche aber auch weiter wie individuell-adaptive Lernunterstützung (Wullschleger, 2017), wo bspw. Planungsschritte im Vorfeld explizit ein Bestandteil des Modells sind. Die Bezeichnung Scaffolding (Wood et al., 1976) betont die Bereitstellung eines (kognitiven) Gerüsts durch eine kompetentere Person zur Unterstützung des Lernprozesses, das sukzessive abgebaut wird, bis die

Schüler*innen allein in der Lage sind, die Probleme oder Aufgaben zu bewältigen (zu begrifflichen Klärungen vgl. auch Krammer, 2009).

In manchen Modellen zur Lernbegleitung werden außerdem verschiedene Schritte wie Beobachten / Diagnostizieren, Unterstützen, Anknüpfen / Anpassen unterschieden (z. B. Streit & Schuler, 2022; Wullschleger, 2017). Auch zentrale Merkmale bzw. Kriterien werden angeführt. So beschreibt Krammer (2017) eine lernförderliche Lernbegleitung mit folgenden sechs Merkmalen: Wertschätzung, adaptives Handeln, intersubjektives Situationsverständnis, kognitive Aktivierung und Strukturierung, Rückmeldung und Reflexion, Fading; von denen sie jedoch feststellt, dass die „Wirkung auf die frühen mathematischen Lernprozesse bislang nicht erhärtet" sei. Bezüge zu den Basisdimensionen von Unterrichtsqualität (Klieme, 2022)[1] sind in dieser Zusammenstellung deutlich zu erkennen. So umfasst die Basisdimension *Konstruktive Unterstützung* Feedback sowie Wertschätzung und die Basisdimension *Kognitive Aktivierung* die Anregung zur Erweiterung und Veränderung bestehender Wissensstrukturen durch anspruchsvolle Aufgaben. Insbesondere für die Dimension Kognitive Aktivierung konnten Wirkungen auf die Leistungsentwicklung der Schüler*innen nachgewiesen werden. Es wird außerdem diskutiert, ob Adaptivität eine weitere Basisdimension darstellt oder ob sie aus dem optimalen Zusammenspiel der anderen Dimensionen entsteht (Klieme, 2022).

Anknüpfend an diese Befunde finden sich Zusammenstellungen an Techniken bzw. Strategien zur Unterstützung kognitiver Lernprozesse mit dem Ziel der kognitiven Aktivierung und Strukturierung (Tournier, 2017; vgl. auch van de Pol et al., 2010; Wullschleger, 2017; Schuler & Sturm, 2019):

- Herausfordernde, offene Aufgaben stellen bzw. Förderung in der Zone der nächsten Entwicklung
- Diskursiver Umgang mit Fehlern
- Modellieren von Handlungen und eigenen Denkprozessen durch die Fach- bzw. Lehrkraft

[1] Basisdimensionen der Unterrichtsqualität (Klieme, 2022, S. 418): (1) Klassenführung, (2) Konstruktive Unterstützung, (2) Kognitive Aktivierung.

- Aktivierung von Vorwissen und Anknüpfen an das Vorwissen
- Einfordern von Beschreibungen und Begründungen / Discussing / Anregung zum lauten Denken
- Mitspielen (bei Regelspielen insbesondere vor Schulbeginn)

5 Lernbegleitung – Forschungsbefunde

Studien, die sich mit der alltäglichen Interaktion in Kindertagesstätten und in der Schuleingangsstufe befassen, zeigen, dass eine kognitiv aktivierende Interaktion nur selten beobachtet werden kann (z. B. König, 2009, Sylva et al., 2007) und, dass die Form und Qualität der verbalen Interaktion ein zentrales Unterscheidungsmerkmal zwischen qualitativ hochwertigen Kindergärten und weniger hochwertigen darstellt (vgl. z.B. Tietze et al., 2005, Sylva et al., 2011, Siraj-Blatchford, et al. 2002).

Auch Studien zur fachlichen Lernbegleitung für das naturwissenschaftliche Lernen in Kindergarten und Anfangsunterricht zeigen, dass anspruchsvollere Unterstützungsmaßnahmen wie das Einfordern von Begründungen, das Anregen von Vergleichen oder kognitiven Konflikten nur selten beobachtet werden können (Leuchter & Saalbach 2014). Die Qualität der eingesetzten Unterstützungsmaßnahmen konnte außerdem auf das fachliche und fachdidaktische Wissen (Indikator: fachliche Fehler) der pädagogischen Fachkräfte bzw. Lehrkräfte zurückgeführt werden. Auswirkungen der verbalen Unterstützungsmaßnahmen auf den Lernerfolg der Kinder konnten nicht nachgewiesen werden, was nach Leuchter und Saalbach (2014) möglicherweise auch auf die hohe Qualität des eingesetzten Materials zurückgeführt werden kann. Bürgermeister et al. (2019, S. 19) konnten „einen positiven Zusammenhang zwischen aktiver Beteiligung der Kinder in den Kleingruppengesprächen und dem naturwissenschaftlichen Lernen" belegen. Die Lernerfolge sind dabei größer, wenn es der Fachkraft gelingt, das Vorwissen der Kinder zu aktivieren. Im Unterschied zu Leuchter und Saalbach (2014) konnte in der Studie von Hopf (2011) ein relativ hoher Anteil (33%) an anspruchsvollen Unterstützungsmaßnahmen beobachtet werden. Allerdings wurden die naturwissenschaftlichen Angebote von Projektmitarbeiter*innen durchgeführt.

Für das mathematische Lernen vor Schulbeginn zeigte die PRIMEL-Studie („Professionelles Handeln im Elementarbereich"), dass die Kinder nur selten kognitiv-aktivierend unterstützt werden (Hüttel & Rathgeb-Schnierer, 2014; vgl. auch Streit, 2017). Dass die Unterstützung auch wenig adaptiv ist, darauf verweist die Studie von Bruns (2014). So orientiert sich der Anforderungsgrad der Aktivitäten zumeist an einem mittleren Leistungsniveau und ermöglicht folglich nur einem Teil der Kinder herausfordernde Aktivitäten (Bruns & Eichen, 2017). Wullschleger (2017) konnte im Rahmen des SpiMaF-Projekts (Spielintegrierte mathematische Frühförderung) herausarbeiten, dass insbesondere die Anpassung der Unterstützungsmaßnahmen an die Lernausgangslage für pädagogische Fachkräfte herausfordernd ist. So gelang das Bestimmen der Lernvoraussetzungen in den Regelspielsituationen besser als eine darauf abgestimmte Unterstützung. Dass Diagnose nicht zwingend entsprechendes Handeln nach sich zieht, zeigen auch Befunde aus dem schulischen Kontext (z. B. Ruiz-Primo & Furtak, 2007; Karst, Schoreut & Lipowsky, 2014).

Fortbildungsstudien mit pädagogischen Fachkräften zeigen, dass die Qualität der Unterstützungsmaßnahmen bei pädagogischen Fachkräften verbessert werden kann (z. B. Bruns et al., 2017; Wullschleger et al., 2022). Die Wirkung auf die arithmetischen Kompetenzen der Kinder steht aber auch hier nach wie vor aus.

Bisher konnte Schuler (2013) aufzeigen, dass sich in begleiteten Regelspielsituationen das Spektrum der zu beobachtenden mathematischen Aktivitäten erweitert. So können nicht nur Aktivitäten in Bezug auf den mathematischen Schwerpunkt des Spiels auftreten, sondern weitere, insbesondere auch anspruchsvollere inhaltsbezogene mathematische Aktivitäten sowie prozessbezogene Kompetenzen. Böhringer (2021) zeigt hingegen, dass Kinder in Regelspielsituationen auch beim unbegleiteten Spielen mathematisch interagieren und argumentieren. Dabei stellen insbesondere Fehler einen möglichen Ausgangspunkt für mathematische Argumentationen der Kinder dar. Herausfordernde Spiele könnten somit möglicherweise auch ohne Begleitung zu Verbalisierungen anregen.

Schuler und Sturm (2019) können zeigen, dass beim begleiteten Spielen durch Expert*innen mit kognitiv aktivierenden Impulsen und

Techniken der Anteil verbal mathematischer Aktivitäten der Kinder signifikant höher ist als beim unbegleiteten Spielen. Auch zeigte sich bei verschiedenen Spielen zur Förderung arithmetischer Basiskompetenzen, dass der zeitliche Anteil prozessbezogener mathematischer Aktivitäten und anspruchsvoller Teilfähigkeiten des Zahlverständnisses (z. B. relationales Zahlverständnis) höher ist.

Seeger et al. (2018) arbeiten heraus, dass Begleitung zu einem besseren Regelverständnis führt, was wiederum Einfluss auf den Lernzuwachs hat.

6 Fazit und Ausblick

Für ein erfolgreiches Mathematiklernen gilt es, arithmetische Basiskompetenzen (Zahlverständnis) bereits vor Schulbeginn zu fördern. Mathematische Regelspiele haben sich dabei als ein wirksamer Förderansatz gezeigt. Vorteilhaft bei diesem Ansatz ist, dass Regelspiele durch Anpassungen und Variation sowohl im Kindergarten als auch zu Schulbeginn eingesetzt werden können (z. B. Streit & Schuler, 2022; Tubach, 2019). Vor Schulbeginn können sie zur Förderung aller Kinder eingesetzt werden. Sie eignen sich aber auch insbesondere zur Förderung leistungsschwacher Kinder, was für einen Einsatz im ersten Schulhalbjahr in dieser Zielgruppe spricht. Für einen erfolgreichen Einsatz entscheidend ist das mathematische Potenzial der eingesetzten Spiele (z.B. Gasteiger & Möller, 2021) sowie ein Regelverständnis auf Seiten der Kinder (Seeger et al., 2018). So sollten bei der Spielauswahl verschiedene Vorstellungen von Zahlen (ordinal, kardinal, relational) Berücksichtigung finden. Bei leistungsschwachen Kinder sollte vor einem selbständigen Peerspiel sicher gestellt werden, dass ein Regelverständnis vorhanden ist.

Weniger eindeutig sind die Befunde im Hinblick auf die Lernbegleitung. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Lernbegleitung von Fach- und Lehrkräften auch im Kontext von mathematischen Regelspielen zu wenig herausfordernd (kognitiv-aktivierend) und zu wenig adaptiv ist. Studien, in denen die Lernbegleitung durch Expert*innen durchgeführt wurde zeigen, dass durch den gezielten Einsatz kognitiv aktivierender Impulse und Techniken, sich das Spektrum, die Qualität und die Artikulationsform der zu beobachtenden mathematischen Aktivitäten verändert (Schuler & Sturm, 2019) bzw. hohe Anteile an anspruchsvollen Unterstützungsmaßnahmen beobachtet werden können (Hopf, 2011). Fortbildungsstudien zeigen außerdem, dass die Qualität der Unterstützungsmaßnahmen bei Fach- und Lehrkräften verbessert werden kann (z. B. Wullschleger et al., 2022; Bruns et al., 2017). Der Einsatz von Impulssammlungen in Form von Skripten kombiniert mit entsprechenden Fortbildungsmaßnahmen könnte möglicherweise eine Unterstützung auch für Fach- und Lehrkräfte darstellen.

Eine Wirksamkeit dieser Art der Lernbegleitung auf die Leistungen der Kinder konnte aber bisher noch nicht nachgewiesen werden. Dies hat vermutlich verschiedene Ursachen: Der Einsatz der Spiele erfolgt ggf. noch nicht in ausreichendem Maß adaptiv, so dass nicht alle Kinder in ausreichendem Maß in ihrer Zone der nächsten Entwicklung herausgefordert werden. Möglicherweise können aber die Lernzuwächse durch vorhandene Messinstrumente nicht erfasst werden (keine oder eine nicht ausreichende Berücksichtigung einer Anzahlerfassung ohne Zählen, relationaler Vorstellungen von Zahlen sowie prozessbezogener Kompetenzen), was den Forschungs- bzw. Entwicklungsbedarf in diesem Bereich offen legt.

Literatur

Böhringer, J. (2021). *Argumentieren in mathematischen Spielsituationen im Kindergarten: Eine Videostudie zu Interaktions- und Argumentationsprozessen bei arithmetischen Regelspielen*. Springer Spektrum.

Bruns, J. (2014). *Adaptive Förderung in der elementarpädagogischen Praxis. Eine empirische Studie zum didaktischen Handeln von Erzieherinnen und Erziehern im Bereich Mathematik*. Waxmann.

Bruns, J. & Eichen, L. (2017). Individuelle Förderung im Kontext früher mathematischer Bildung. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann, (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 125-138). Springer Spektrum.

Bruns, J., Eichen, L. & Gasteiger, H. (2017). Mathematics-related Competence of Early Childhood Teachers Visiting a Continuous Professional Development

Course: An Intervention Study. *Mathematics Teacher Education and Development, 19*(3), 76–93. https://eric.ed.gov/?id=EJ1163878

Bürgermeister, A., Große, G., Leuchter, M., Studhalter, U. & Saalbach, H. (2019). Interaktion von pädagogischen Fachkräften und Kindern in naturwissenschaftlichen Lerngelegenheiten im Kindergarten. *Frühe Bildung, 8*(1), 13–21. https://doi.org/10.1026/2191-9186/a000406

Clements, D. H. & Sarama, J. (2014). *Learning and teaching early math. The learning trajectories approach (Studies in Mathematical Thinking and Learning).* Routledge.

Corno, L. (2008): On Teaching Adaptively. *Educational Psychologist, 43*(3), 161–173. https://doi.org/10.1080/00461520802178466

Depping, D.; Lücken, M.; Musekamp, F.; Thonke, F. (2021): Kompetenzstände Hamburger Schüler*innen vor und während der Corona-Pandemie. *Schule während der Corona-Pandemie. Neue Ergebnisse und Überblick über ein dynamisches Forschungsfeld (17)*, 51–79. https://doi.org/10.31244/9783830993315 .

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P. et al. (2007). „School readiness and later achievement": Correction to Duncan et al. (2007). *Developmental Psychology 43*(6), 1428–1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.44.1.217

Fritz, A., Ehlert, A. & Leutner, D. (2018). Arithmetische Konzepte aus kognitiv-entwicklungspsychologischer Sicht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 39*(1), 7–41. https://doi.org/10.1007/s13138-018-0131-6

Gasteiger, H. & Moeller, K. (2021). Fostering early numerical competencies by playing conventional board games. *Journal of Experimental Child Psychology, 204*, 105060. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2020.105060

Gerster, H.-D. & Schultz, R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen.* Pädagogische Hochschule Freiburg. https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf

Hauser, B., Vogt, F., Stebler, R. & Rechsteiner, K. (2014). Förderung früher mathematischer Kompetenzen. *Frühe Bildung, 3*(3), 139–145. https://doi.org/10.1026/2191-9186/a000144

Jörns, C., Schuchardt, K., Mähler, C. & Grube, D. (2013). Alltagsintegrierte Förderung numerischer Kompetenzen im Kindergarten. *Frühe Bildung, 2*(2), 84–91. https://doi.org/10.1026/2191-9186/a000088

Hardy, I., Decristan, J. & Klieme, E. (2019). Adaptive teaching in research on learning and instruction. *Journal for Educational Research Online, 11*(2), 69–191. https://doi.org/10.25656/01:18004

Heinze, A. & Grüßing, M. (Hrsg.) (2009). Mathematiklemen vom Kindergarten bis zum Studium. Waxmann.

Hopf, M. (2011). Sustained Shared Thinking in der frühpädagogischen Praxis des naturwissenschaftlich-technischen Lernens. *Zeitschrift für Grundschulforschung 1*(4), 73–85.

Hüttel, C. & Rathgeb-Schnierer, E. (2014). Lernprozessgestaltung im mathematischen Bildungsangeboten. In D. Kucharz, K. Mackowiak, S. Ziroli, A. Kauertz & E. Rathgeb-Schnierer (Hrsg.), *Professionelles Handeln im Elementarbereich (PRIMEL). Eine deutsch-schweizerische Videostudie* (S. 141–162) Waxmann.

Karst, K., Schoreit, E. & Lipowsky, F. (2014). Diagnostische Kompetenzen von Mathematiklehrern und ihr Vorhersagewert für die Lernentwicklung von Grundschulkindern. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 28*(4), 237–248. https://doi.org/10.1024/1010-0652/a000133

Klieme, E. (2022). Unterrichtsqualität. In M. Harring, C. Rohlfs & M. Gläser-Zikuda (Hrsg.), *Handbuch Schulpädagogik* (S. 411–426). Waxmann.

König, A. (2009). *Interaktionsprozesse zwischen ErzieherInnen und Kinder. Eine Videostudie aus dem Kindergartenalltag.* VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53*, 246–262.

Krajewski, K. (2013). Wie bekommen die Zahlen einen Sinn? Ein entwicklungspsychologisches Modell der zunehmenden Verknüpfung von Zahlen und Größen. In M. Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (2. Aufl., S. 155–180). Vandenhoeck & Ruprecht. https://doi.org/10.13109/9783666462580.155

Krammer, K. (2009). *Individuelle Lernunterstützung in Schülerarbeitsphasen.* Waxmann.

Krammer, K. (2017). Die Bedeutung der Lernbegleitung im Kindergarten und am Anfang der Grundschule. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 107-123). Springer Spektrum.

Leuchter, M. & Saalbach, H. (2014). Verbale Unterstützungsmaßnahmen im Rahmen eines naturwissenschaftlichen Lernangebots in Kindergarten und Grundschule. *Unterrichtswissenschaft, 42*, 117–131.

Lorenz, J. H. (2016). *Kinder begreifen Mathematik. Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Verlag W. Kohlhammer.

Manfra, L., Squires, C., Dinehart, L. H. B., Bleiker, C., Hartman, S. C., & Winsler, A. (2017). Preschool writing and premathematics predict Grade 3 achievement for low-income, ethnically diverse children. *The Journal of Educational Research, 110*(5), 528–537. https://doi.org/10.1080/00220671.2016.1145095

Moser Opitz, E. (2016). Erstrechnen. In U. Heimlich & F. B. Wember (Hrsg.), *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen. Ein Handbuch für Studium und Praxis* (3. Aufl., S. 253–265). Kohlhammer.

Nührenbörger, M. & Tubach, D. (2014). Verständnis mathematischer Zusammenhänge bei Kindern am Ende der Kita und zu Beginn der Grundschule. *Zeitschrift für Grundschulforschung, 7*(1), 48–61.

Perkhofer-Czapek, M. & Potzmann, R. (2016). Lernbegleiter/in und Lernbegleitung. In M. Perkhofer-Czapek & R. Potzmann (Hrsg.), *Begleiten, Beraten und Coachen* (S. 61–97). Springer.

Peucker, S. & Weißhaupt, S. (2017). Entwicklung frühen numerischen Wissens. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (3. Auflage, S. 47–65). Beltz.

Ramani, G. B. & Siegler, R. S. (2008). Promoting Broad and Stable Improvements in Low-Income Children's Numerical Knowledge through Playing Number Board Games. *Child development, 79*(2), 375–394. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2007.01131.x

Rechsteiner, K., Hauser, B. & Vogt, F. (2012). Förderung der mathematischen Vorläuferfertigkeiten im Kindergarten. Spiel oder Training? In M. Ludwig, M. Kleine, J. Schuster, X. Reit & J. Jesberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 677–680). WTM.

Rechtsteiner-Merz, C. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 19). Waxmann.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. Ginsburg (Hrsg.), *The Development of mathematical thinking* (S. 109–151). Academic Press.

Ruiz-Primo, M. A. & Furtak, E. M. (2007). Exploring Teachers' Informal Formative Assessment Practices and Students' Understanding in the Context of Scientific Inquiry. *Journal of Research in Science Teaching 44*(1), 57–84. https://doi.org/10.1002/tea.20163

Schuler, S. (2013): *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen. Eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs* (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 15). Waxmann.

Schuler, S. & Sturm, N. (2019). Mathematische Aktivitäten von fünf- bis sechsjährigen Kindern beim Spielen mathematischer Spiele – Lerngelegenheiten bei direkten und indirekten Formen der Unterstützung. In D. Weltzien, H. Wadepohl, C. Schmude, H. Wedekind & A. Jegodtka (Hrsg.), *Forschung in der Frühpädagogik XII. Interaktionen und Settings in der frühen MINT-Bildung* (S. 59–86). Verlag FEL.

Schultz, R., Jakob, E. & Gerster, H.-D. (2017). Teile-Ganzes-Denken über Zahlen und Operationen: Herausforderung und Leitidee des Anfangsunterrichts. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (3. Auflage, S. 206–224). Beltz.

Schwippert, K., Kasper, D., Köller, O., McElvany, N., Selter, C., Steffensky, M. & Wendt, H. (Hrsg.). (2020). *TIMSS 2019: Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich*. Waxmann.

Seeger, D., Holodynski, M. & Roth, M. (2018). BIKO-Mathekiste. *Frühe Bildung, 7*(3), 135–143. https://doi.org/10.1026/2191-9186/a000380

Siraj-Blatchford, I., Sylva, K., Muttock, S., Gilden, R. & Bell, D. (2002). Researching Effective Pedagogy in the Early Years (REPEY). *Department for education and skills [dera]: Research Report No. 356*. Norwich. https://dera.ioe.ac.uk/4650/1/RR356.pdf

Stanat, P., Schipolowski, S., Schneider, R., Sachse, K. A., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg.). (2022). *IQB-Bildungstrend 2021: Kompetenzen in den Fächern Deutsch und Mathematik am Ende der 4. Jahrgangsstufe im dritten Ländervergleich*. Waxmann. https://doi.org/10.31244/9783830996064

Streit, C. (2017). Wie Lehrpersonen Kinder in materialbasierten Settings begleiten und mathematische Lernprozesse anregen. In S. Schuler, C. Streit & G. Wittmann, (Hrsg.), *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule* (S. 157-170). Springer Spektrum.

Streit, C. & Schuler, S. (2022). *Mathelernen in Kita und Schule. Spielerisch und materialbasiert*. Kohlhammer.

Sylva, K., Taggart, B., Siraj-Blatchford, I., Totsika, V., Ereky-Stevens, K., Gilden, R. & Bell, D. (2007). Curricular quality and day-to-day learning activities in preschool. *International Journal of Early Years Education, 15*(1), 49–65. https://doi.org/10.1080/09669760601106968

Sylva, K., Melhuish, E., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I. & Taggart, B. (2011): Pre-school quality and educational outcomes at age 11: Low quality has little benefit. *Journal of Early Childhood Research,* 9(2), 109–124. https://doi.org/10.1177/1476718X10387900

Tietze, W., Roßbach, H.-G. & Grenner, K. (2005). *Kinder von 4 bis 8 Jahren. Zur Qualität der Erziehung und Bildung in Kindergarten, Grundschule und Familie* (1. Auflage). Beltz.

Tomasik, M. J., Helbling, L. A. & Moser, U. (2020): Educational gains of in-person vs. distance learning in primary and secondary schools: A natural experiment during the COVID-19 pandemic school closures in Switzerland. *International Journal of Psychology,* 56(4), 566–576. https://doi.org/10.1002/ijop.12728

Tournier, M. (2017). *Kognitiv anregende Fachkraft-Kind-Interaktionen im Elementarbereich*. Waxmann.

Tubach, D. (2019). *Relationales Zahlverständnis im Übergang von der Kita zur Grundschule*. Springer Spektrum.

van de Pol, J., Volman, M. & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in Teacher-Student Interaction: A Decade of Research. *Educational Psychology Review 22,* 271–296. https://doi.org/10.1007/s10648-010-9127-6

Wember, F. B. (1989). Die sonderpädagogische Förderung elementarer mathematischer Begriffsbildung auf entwicklungspsychologischer Grundlage. Das Beispiel des Zahlbegriffs. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 40*(7), 433–443.

Wood, D., Bruner, J. S. & Ross, G. (1976). The Role of Tutoring in Problem Solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17*(2), 89–100.

Wullschleger, A. (2017). *Individuell-adaptive Lernunterstützung im Kindergarten. Eine Videoanalyse zur spielintegrierten Förderung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen.* Waxmann.

Wullschleger, A., Lindmeier, A., Heinze, A., Meier-Wyder, A., Leuchter, M., Vogt, F. & Moser Opitz, E. (2022). Improving the quality of adaptive learning support provided by kindergarten teachers in play-based mathematical learning situations. *European Early Childhood Education Research Journal, 31*(2), 225–242. https://doi.org/10.1080/1350293X.2022.2081348

Young-Loveridge, Jennifer M. (2004). Effects on early numeracy of a program using number books and games. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 82–98. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.001

Prof. Dr. Stephanie Schuler
Rheinland-Pfälzische Technische Universität
Fortstr. 7
76829 Landau
stephanie.schuler@rptu.de

„Weil ich gezählt habe: weil da drei sind und da zwei“ – Kindliche Wahrnehmungsprozesse als eine Herausforderung für Forschung und Praxis

von Priska Sprenger

Eine strukturierende Mengenwahrnehmung wird als eine Basiskompetenz für das Mathematiklernen betrachtet. Ein interdisziplinärer Blick auf die Wahrnehmung ermöglicht es, mehrperspektivisch die Bedeutung für den mathematischen Lernprozess zu analysieren. Um Wahrnehmungsprozesse von Kindern zu erforschen, wird in den letzten Jahren immer häufiger das Erhebungsinstrument Eye-Tracking verwendet, mithilfe dessen Blickbewegungen aufgezeichnet werden. Solche Blickbewegungsdaten sind hoch interpretativ, was viele Herausforderungen mit sich bringt. An einer Studie zur strukturierenden Mengenwahrnehmung und strukturnutzenden Anzahlbestimmung mit Kindern im letzten Kindergartenjahr wird exemplarisch aufgezeigt, wie diesen Herausforderungen sowohl in der Forschung als auch in der Praxis begegnet werden kann.

Schlüsselwörter: Strukturierende Mengenwahrnehmung, Eye-Tracking, Datentriangulation, visuelle Wahrnehmung, Teile-Ganzes Verständnis

1 Einleitung

„Weil ich gezählt habe: weil da drei sind und da zwei.“ Dieses Zitat stammt von dem 5 Jahre und 9 Monate alten Simon. Ihm wurde eine Zehner-Eierschachtel mit fünf Eiern in der oberen Reihe gezeigt und er sollte die Anzahl nennen. Er antwortet „fünf“ und die eingangs zitierte Erklärung ist seine Antwort auf die Nachfrage, wie er darauf gekommen ist. Im ersten Moment wirkt seine Aussage widersprüchlich. Zum einen erklärt er, er habe gezählt, zum anderen beschreibt er eine wahrgenommene Struktur, indem er auf die drei Eier rechts in der Reihe zeigt („weil da drei sind“) und anschließend auf die übrigen beiden Eier links („und da zwei“).

Simons Erklärung könnte folgendermaßen interpretiert werden:

a) Er hat eine Struktur wahrgenommen, konnte sie eventuell sogar zur Bestimmung der Anzahl nutzen, greift aber als Erklärung auf das Zählen zurück. Ein Grund dafür könnte sein, dass ihm die Worte fehlen, um die hineingedeutete Strukturierung als seine Herangehensweise zu beschreiben. Oder zu sagen, er habe gezählt, könnte eine ihm sehr vertraute Backup-Strategie (vgl. Siegler, 1987; Hess, 2012) für die Anzahlbestimmung sein, bei der er sich sicher ist.

b) Er hat gezählt und während des Zählprozesses erkannt, dass es „drei und zwei Eier“ sind. Damit würde an dieser Stelle ein Erkenntnis- bzw. Lernprozess sichtbar werden.

Beide Deutungen beinhalten die Idee von zwei Prozessen, die bei einer Anzahlerfassung auftreten: der Prozess der Mengenwahrnehmung (MW) und der Prozess der Anzahlbestimmung (AB) (vgl. Benz, 2014, 2018; Sprenger, 2021). Bezogen auf Simon wäre eine mögliche Interpretation seiner Aussage, dass er eine Struktur in die Menge an Eiern hineingedeutet, also über eine strukturierende MW (vgl. Benz, 2018) verfügt, und die Anzahl der Eier anhand eines Zählprozesses bestimmt hat. Auf den Wahrnehmungsprozess kann in diesem Fall nur anhand der Aussagen des Jungen geschlossen werden. Die Erforschung des Wahrnehmungsprozesses als eine Herausforderung für Forschung und Praxis soll im Folgenden mehrperspektivisch beleuchtet werden.

2 Strukturierende Mengenwahrnehmung

2.1 Strukturierende Mengenwahrnehmung als Basiskompetenz zum Rechnenlernen

Es ist mittlerweile gut beforscht, dass sowohl das Teile-Ganzes-Verständnis eine wichtige Grundlage für die Zahlbegriffsentwicklung und das Rechnenlernen darstellt (z. B. Benz et al., 2015; Fritz et al., 2013; Krajewski & Ennemoser, 2013; Resnick, 1983), als auch eine strukturierende MW (z. B. Benz et. al., 2015; Dornheim, 2008; Lüken, 2012; Mulligan et al., 2004; Söbbeke, 2005). Außerdem gibt es zahlreiche Studien, die belegen, dass die strukturierende MW mit arithmetischen sowie allgemein mathematischen Leistungen korreliert (z. B. Baroody et al., 2006; Dornheim, 2008; Lüken, 2012; Mulligan & Mitchelmore, 2018; Obersteiner, 2012).

Die strukturierende MW ist zudem eine Voraussetzung dafür, dass eine strukturnutzende AB stattfinden kann: Nur wenn eine Struktur in eine Menge hineingedeutet werden kann, ist es möglich, diese Struktur auch zur AB zu nutzen. Welche Möglichkeiten der AB vorhanden sind, wenn eine strukturierende MW vorhanden ist, wird in dem theoretischen Modell von Benz (2014) deutlich (vgl. Abb. 1).

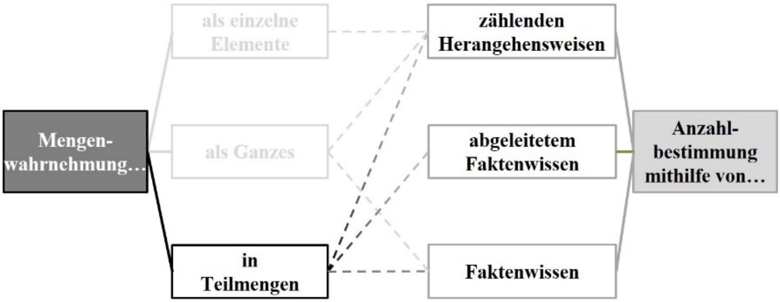


Abb. 1 Mögliche Verknüpfungen der strukturierenden MW und strukturnutzenden AB (vgl. Benz, 2014, 2018; Schöner & Benz, 2018; Sprenger, 2021)

Bei einer MW in Teilmengen ist eine AB mithilfe einer zählenden Herangehensweise (z. B. Weiterzählen) möglich, mithilfe von abgeleitetem Faktenwissen (z. B. Fast-Verdoppeln) oder reinem Faktenwissen. In letzterem Fall fallen die beiden Prozesse zusammen und es findet eine Quasi-Simultan-Erfassung[1] statt.

2.2 Strukturierende Mengenwahrnehmung erforschen

Um den nicht sichtbaren Prozess der Wahrnehmung zu erforschen, wurden in der Mathematikdidaktik bislang verschiedene Methoden verfolgt. Benz (2018) fasst diese zusammen und hebt hervor, dass sowohl die verbalen Ausdrucksfähigkeiten der Kinder als auch Gedächtnisleistungen dabei eine große Rolle spielen. Eine dieser Methoden ist die Analyse von Blickbewegungen. Dazu wurde in verschiedenen mathematikdidaktischen Studien ein Eye-Tracking-Gerät eingesetzt, um im wahrsten Sinne des Wortes „Einblicke" in den nicht sichtbaren Wahrnehmungsprozess zu gewinnen. Bei einigen dieser Untersuchungen stand die Anzahlerfassung im Fokus (z. B. Rottmann & Schipper, 2002; Moeller et al., 2009; Lindmeier & Heinze, 2016; Schindler et al., 2019; Sprenger, 2021; Schindler & Schindler, 2022).

Bei der Erforschung von Wahrnehmungsprozessen kann es hilfreich sein, sich mit Erkenntnissen aus der Kognitionspsychologie auseinanderzusetzen.

[1] Für eine differenziertere Ausführung zu den unterschiedlichen Auffassungen der Quasi-Simultan-Erfassung sowie insbesondere zur strukturellen Simultanerfassung (structural subitizing) vgl. z. B. Schöner (2017) oder Sprenger (2021).

3 Visuelle Wahrnehmung

3.1 Visuelle Wahrnehmung aus kognitionspsychologischer Perspektive

Bei der Wahrnehmung geht es in erster Linie um die Aufnahme und kognitive Verarbeitung sensorischer Daten (Kiesel & Koch, 2018). Im Folgenden liegt der Fokus auf der *visuellen Wahrnehmung* und der damit eng zusammenhängenden *visuellen Aufmerksamkeit*, die eine zentrale Rolle bei der Wahrnehmung einer Menge spielen. Die visuelle Wahrnehmung ist nicht angeboren, sondern wird gelernt (z. B. Myers, 2014). Es geht hierbei also nicht um das Sehen im engeren Sinne, sondern um das Verarbeiten, Speichern oder Einordnen des Gesehenen. Im Gehirn werden demnach die visuellen Impulse verarbeitet und gedeutet. Ein solcher Deutungsprozess spielt bei der strukturierenden MW eine zentrale Rolle – insbesondere im Kontext von Blickbewegungsanalysen. In Verbindung mit diesen Deutungsprozessen steht die *wissensorientierte Blickkontrolle* (Henderson, 2003). Hierbei geht es darum, dass nicht nur das aktuell Gesehene gedeutet wird, sondern dass eine Verknüpfung mit bereits gespeichertem Wissen möglich ist. Dies wäre beispielsweise dann der Fall, wenn abgeleitetes Faktenwissen zur AB genutzt würde (vgl. Abb. 1). Die Pläne und Ziele des Betrachtenden könnten ebenfalls einen Einfluss auf die Deutung der visuellen Information im Gehirn haben. Neben der wissensorientierten, gibt es auch eine *stimulusbasierte Blickkontrolle* (Bottom-up). In diesem Fall werden markante Bereiche eines Bildes intensiver betrachtet und als potenziell informativer bewertet, als einheitliche Bereiche (Henderson, 2003). Die wissensorientierte und die stimulusbasierte Blickkontrolle sind zwei unterschiedliche Systeme der Informationsgewinnung, die miteinander interagieren können. Das bedeutet, dass die wissensorientierte innerhalb einer betrachteten Situation nach und nach die stimulusbasierte Blicksteuerung ablösen kann, da immer mehr Wissen über die zuvor fixierten Objekte und deren Beziehung zueinander erworben wird (Henderson, 2003).

3.2 Visuelle Aufmerksamkeit

Eng mit der visuellen Wahrnehmung verknüpft ist die visuelle Aufmerksamkeit. Die *endogene Aufmerksamkeit* (Posner, 1980) spielt dabei eine zentrale Rolle. Sie beschreibt eine willentlich gesteuerte und zielgerichtete Aufmerksamkeit. Durch eine bestimmte Aufgabenstellung wird die Aufmerksamkeit gezielt auf die zu bestimmenden Menge gelenkt. Die interviewte Person sucht also in ihrem Blickfeld ein bestimmtes Ziel. Das geht einher mit der wissensorientierten Blickkontrolle (vgl. Abschnitt 3.1). Im Vergleich dazu, würde eine *exogene Aufmerksamkeit* reflexiv auf einen Reiz von außen reagieren wie zum Beispiel auf ein lautes, unerwartetes Geräusch (Posner, 1980). Die endogene Aufmerksamkeit ist ein entscheidendes Argument dafür, dass die Eye-Mind Hypothese, die immer wieder kontrovers diskutiert wird, angenommen werden kann.

3.3 Eye-Mind Hypothese

Die Eye-Mind Hypothese (EMH) besagt, dass Blickpfade (Fixationen) Einblicke in die aktuell kognitiven Prozesse im Gehirn gewähren (Just & Carpenter, 1980). Das bedeutet, dass angenommen wird, dass da wo ein Kind hinblickt auch dessen visuelle Aufmerksamkeit liegt. Auch hier wird die Verknüpfung mit der visuellen Wahrnehmung noch einmal deutlich: Durch die Blickbewegungen werden Einblicke in Verarbeitungsprozesse des Gehirns gewährt, die beispielsweise während einer strukturierenden MW ablaufen. So können Blickmuster beobachtet und Deutungen über eine Strukturwahrnehmung möglich werden.

Ein Kritikpunkt an der EMH ist, dass auch nicht direkt fixierte Informationen aus dem peripheren Blickfeld wahrgenommen werden können (z. B. Posner, 1980). Die EMH trifft auch dann nicht zu, wenn eine Person unter emotionaler Anspannung (z. B. unter Stress oder Panik) steht (Schindler & Lilienthal 2019). Phänomene wie der *Blick ins Leere* (Joos et al., 2003), die beim Nachdenken beobachtbar sind, haben zur Folge, dass die Aufmerksamkeit nach innen gerichtet, also keinem bestimmten Objekt zugewandt ist. Würde in diesem Fall die EMH angenommen, führte das zu fehlerhaften Interpretationen. Studien belegen außerdem, dass die Aufgabenstellung das Fixationsverhalten beeinflussen kann (Blake, 2013; Rayner, 2009). Ist diese richtungsweisend formuliert, entsteht eine Übereinstimmung zwischen Kognition und Fixation und die EMH kann angenommen werden (Blake, 2013). Der Aufgabenstellung kommt also, neben dem Wissen um eine wissensorientierte Blickkontrolle und der endogenen visuellen Aufmerksamkeit, eine wichtige Bedeutung zu, damit die EMH angenommen werden kann. Die Annahme der EMH ist wiederum die Grundlage dafür, dass es überhaupt gewinnbringend ist, Blickbewegungsdaten zu erheben, und aus diesen Daten Deutungen über den Wahrnehmungsprozess zu treffen.

Das Erheben von Blickbewegungsdaten mithilfe eines Eye-Trackers scheint ein vielversprechendes Instrument zu sein, um Einblicke in die Wahrnehmungsprozesse von Kindern zu bekommen. Es gibt jedoch neben den Stärken einige Limitationen und Herausforderungen im Umgang mit diesem Erhebungsinstrument (vgl. Sprenger, 2021).

4 Stärken, Grenzen und Herausforderungen bei der Verwendung von Eye-Tracking

Mit einem Eye-Tracker erhobene Daten können beispielsweise durch eine GazePlot-Darstellung (jeder Blickpunkt wird nacheinander mithilfe durchnummerierter Kreise unterschiedlicher Durchmesser angezeigt) oder einer HeatMap-Grafik (anhand eines Farbverlaufes wird ersichtlich, welche Bereiche kürzer oder länger fixiert wurden) angezeigt werden. Diese Visualisierungen der Blickbewegungsdaten verleiten zu der Illusion „augenscheinlich“ auswert- und interpretierbar zu sein. Diese *vermeintliche „Augenscheinvalidität“* (Schroiff, 1987) kann dazu verleiten, die erhobenen Daten auf einer rein deskriptiv-visuellen Ebene zu beschreiben, was wiederum zu einer fehlerhaften Interpretation führen kann.

Eine weitere Herausforderung im Umgang mit dem Erhebungsinstrument Eye-Tracking ist das *Fehlen standardisierter Analyse- und Interpretationsverfahren* (Geise, 2011). Holmqvist et al. (2012) nennen in diesem Zusammenhang zur Sicherung der Qualität der Daten sechs Faktoren: die teilnehmenden Personen, die anwendende Person, die Aufgabenstellung, das Setting, die räumliche Anordnung sowie das Design des Eye-Tracking Gerätes inklusive dessen technische Spezifika. Sie schlagen vor, diese sechs Faktoren als Grundlage zu nehmen, um verschiedenen Studien zumindest in diesen Aspekten, vergleichbar zu machen[2].

Dieses Fehlen standardisierter Analyse- und Interpretationsverfahren führt wiederum zu einer *eingeschränkten Vergleichbarkeit* der Ergebnisse verschiedener Studien, die Eye-Tracking zur Datenerhebung genutzt haben (Blake, 2013; Geise, 2011). Zusätzlich besteht sowohl eine Abhängigkeit vom jeweiligen Forschungsgegenstand sowie unter Umständen auch von der jeweiligen Fachdisziplin oder sogar dem Studientyp.

Isoliert betrachtet sind Blickbewegungen oft „inhaltlich unspezifisch und damit interpretationsoffen" (Geise, 2011, S. 200). Diese *Interpretationsoffenheit von Blickbewegungsdaten* (Blake, 2013) wird sehr deutlich am Beispiel der Fixationsdauer. Sie kann beispielsweise als ein Maß für das Interesse einer Person an einem fixierten Bereich dienen oder als ein Maß für die Komplexität des von einer Person betrachteten Stimulusbereichs.

Die angeführten Aspekte machen deutlich, dass Blickbewegungsdaten keine Auskunft darüber geben können *wie* die fixierten Informationen vom jeweiligen Rezipienten aufgenommen, verstanden und gedeutet werden. Um in diesen Bereich der Wahrnehmung Einblicke zu bekommen, sind Eye-Tracking-Daten alleine nicht ausreichend, sondern *Eye-Tracking ergänzende Methoden* nötig, um Schwierigkeiten bei der Interpretation von Blickbewegungsdaten zu reduzieren (Sprenger, 2021). Bei einer *post-rezeptiven, mündlichen Befragung* besteht das Ziel beispielsweise darin, möglichst unmittelbar an die jeweilige Stimulusrezeption anzuknüpfen, um eine spontane, intuitive Auskunft der interviewten Person zu erhalten (Geise, 2011).

Eine weitere, sich in diesem Zusammenhang ergebende grundsätzliche Frage ist, ob der Blickverlauf als abhängige oder unabhängige Variable interpretiert werden soll. Wird er als *abhängige Variable* gesehen, würden die Ergebnisse beispielsweise einer Nachher-Befragung Inhalt und Struktur des Blickverlaufs klären. Betrachtet man ihn als *unabhängige Variable*, würde umgekehrt der Blickverlauf Inhalt und Struktur

[2] Differenziertere Ausführungen dazu bei Holmqvist at al. (2012, S. 47) sowie bei Sprenger (2021, S. 98 f.)

der Nachher-Befragung klären (Geise, 2011). In der Auswertungspraxis werden diese beiden Perspektiven der Dateninterpretation oft vermischt (Geise, 2011). Hinzu kommt, dass auch der Stimulus den Blickverlauf beeinflussen und somit Auswirkungen auf die abhängige oder unabhängige Variable haben kann.

Ein letzter Aspekt, auf den an dieser Stelle noch eingegangen werden soll, ist der *Umgang mit Sprache* in Zusammenhang mit der Erhebungsmethode Eye-Tracking, mit dem Fokus auf der strukturierenden MW. Immer wieder weisen Autorinnen und Autoren darauf hin, dass ein Vorteil von Eye-Tracking sei, dass ein Verbalisierungsschritt umgangen wird, der für Kinder eine Hürde darstellen kann (z. B. Merschmeyer-Brüwer, 2002; Schindler et al., 2019). Für die Interpretation der Daten ist jedoch entscheidend, ob der Blickverlauf als abhängige oder unabhängige Variable betrachtet wird. Werden die Eye-Tracking Daten als unabhängige Variable genutzt, hieße das, dass aufgrund der erhobenen Blickbewegungsdaten Deutungen über den Wahrnehmungsprozess der Kinder getroffen werden. Hier stellt sich die Frage, wie der Forschende sein Wissen darüber gewonnen hat, wie bestimmte Vorgehensweise „aussehen". Es sollte darüber diskutiert werden, ob es nicht nur wichtig, sondern sogar voraussetzend sein sollte, dass die Eye-Tracking Daten in einem neu zu erforschenden inhaltlichen Kontext zunächst als abhängige Variable betrachtet werden sollten, wenn Deutungen über Wahrnehmungsprozesse getroffen werden.

Im Folgenden wird am Beispiel einer Studie exemplarisch aufgezeigt, wie mithilfe einer Datentriangulation vielen dieser in diesem Abschnitt beschriebenen Herausforderungen begegnet werden kann.

5 Studiendesign, Setting, präsentierte Stimuli sowie Ablauf des Interviews

Bei einer Interventionsstudie im Pre-, Post-, Follow up-Design mit 95 Kindern im letzten Kindergartenjahr, wurden Prozesse bei der strukturierenden MW und strukturnutzenden AB untersucht (Sprenger, 2021). Die Kinder wurden mithilfe eines qualitativen, leitfadengestützten Einzelinterviews befragt. In diesem kurzen Ausschnitt liegt der Fokus auf dem Teil des Interviews, in dem den Kindern Fotos von Zehner-Eierschachteln auf einem Monitor präsentiert wurden, bei denen sie die Anzahl der Eier bestimmen sollten.

Mit einer monitorbasierten Eye-Tracking Kamera (60 Hz) wurden die Augenbewegungen der Kinder aufgezeichnet. Zusätzlich gab es noch zwei weitere Kameras (eine Webcam am Monitor sowie eine externe Kamera), um die Gesten der Kinder aufzunehmen. Die Gesten wurden bei der Auswertung der Wahrnehmungs- und Bestimmungsprozesse berücksichtigt. Für die Datenanalyse wurden sechs Items mit den Mächtigkeiten fünf, sieben und neun verwendet.

Nach der Durchführung der Kalibrierung wurde den Kindern zu Beginn des Interviews gesagt, dass ihnen Fotos mit Eierschachteln gezeigt werden und sie die Anzahl nennen sollen, sobald sie diese wissen. Es wurden keine zeitlichen Beschränkungen vorgegeben. Der Ablauf des Interviews war bei jedem Stimulus derselbe: Nach der Nennung der Anzahl fragte die Interviewerin nach, wie das Kind auf das Ergebnis gekommen sei. Im Anschluss folgte eine Erklärung des Kindes. Durch die zielgerichtete und richtungsweisende Aufgabenstellung „Wie viele sind es?“ kann davon ausgegangen werden, dass eine endogene visuelle Aufmerksamkeit aktiviert und die EMH angenommen werden kann.

5.1 Dreigliedriges Auswertungsschema

Die Datenanalyse basiert auf einem qualitativen Auswertungsverfahren. Das in Abschnitt 2.1 beschriebene theoretische Modell zur MW und AB bildet die Grundlage für die Auswertungen.

Das Interview ist in zwei Phasen gegliedert (vgl. Abb. 2). Die erste Phase beginnt ab dem Zeitpunkt, ab dem das Kind den geöffneten Eierkarton auf dem Monitor betrachtet und endet, sobald es die Anzahl genannt hat. Nach der Nennung der Anzahl schließt die zweite Phase an, innerhalb derer das Kind erklärt, wie es auf das Ergebnis gekommen ist. Das Foto der geöffneten Eierschachtel ist während der Phasen durchgehend sichtbar. In Phase 1 werden Daten anhand der Videoaufzeichnung 1 (Datenquelle 1: Videoaufzeichnungen bis zur Nennung der Anzahl) und Eye-Tracking (Datenquelle 3: Blickbewegungen bis zur Anzahlnennung) gewonnen. Während Phase 2 werden Daten anhand der Videoaufzeichnung 2 (Datenquelle 2: Videoaufzeichnung der

Erklärungen, nach der Anzahlnennung) erhoben (vgl. Abb. 2). Diese Datentriangulation ist eine Besonderheit des Auswertungssystems und begründet dessen Dreigliedrigkeit. „Aus jeder dieser drei erhobenen Datenarten werden jeweils Deutungen zum Wahrnehmungsprozess und zum Bestimmungsprozess generiert, welche wiederum zu einer Deutungshypothese über diese beiden Prozesse zusammengeführt werden“ (Sprenger, 2021, S. 132) (vgl. Abb. 2).

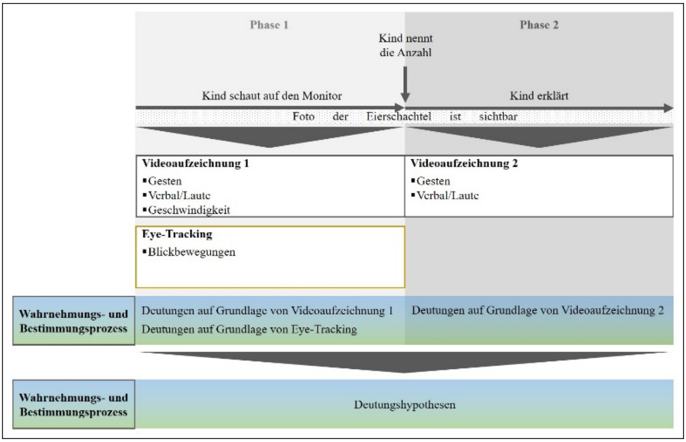


Abb. 2 Dreigliedriges Auswertungsschema (Sprenger, 2021, S. 133)

Die drei Datenquellen ergänzen und bedingen sich gegenseitig (Sprenger & Benz, 2019; Sprenger, 2021). Aus diesem Grund erwies sich die Datentriangulation im Zusammenhang mit dem dreigliedrigen Auswertungsschema bei den Auswertungen der Daten als besonders tragfähig.

5.2 Induktive Kategorienbildung

Die induktive Kategorienbildung ist ein weiterer wichtiger Beitrag und gleichzeitig die Grundlage der Auswertungsmethode. Die induktive Kategorienbildung zeichnet sich durch ein mehrfaches Durchlaufen zirkulärer Prozesse aus (vgl. Sprenger, 2021). Diese zirkulären Prozesse fanden zum einen unter Berücksichtigung *aller* Items statt (also bei einem ganzen Interviewverlauf eines Kindes) oder unter Berücksichtigung *eines* Items (bei allen Kindern). Solche Analysen innerhalb eines Items führten beispielsweise dazu, dass ein *induktives Maß* für eine Blick-Pendelbewegung im Kontext eines Items identifiziert und anhand eines Hypothesentests bestätigt werden konnte (Sprenger & Benz, 2020). Dies wurde erst durch die Verknüpfung der Datenquellen Videoaufzeichnung 2 und Eye-Tracking möglich.

Eine Herausforderung für die induktive Kategorienbildung bildeten die hochinterpretativen Eye-Tracking Daten. Zunächst wurden diese als *abhängige Variable* (Geise, 2011) betrachtet. Sie konnten in großen Teilen in einem ersten Auswertungsschritt nur aufgrund der zusätzlichen Informationen interpretiert werden, die aus den beiden anderen Datenquellen (Videoaufzeichnung 1 und 2) gewonnen wurden. Erst in einem nächsten Schritt war es möglich, die Eye-Tracking Daten auch als *unabhängige Variable* (Geise, 2011) und somit spezifische Blickmuster als induktives Maß für die Datenauswertung einzusetzen. An dieser Stelle wird deutlich, dass alle drei Datenquellen sowohl für die Interpretation der Eye-Tracking Daten als auch für die Generierung von Deutungshypothesen zum Wahrnehmungs- und Bestimmungsprozess grundlegend sind. Erst in diesem Kontext wird es möglich, Aussagen darüber zu treffen *wie* die fixierten Informationen vom jeweiligen Rezipienten aufgenommen, verstanden und gedeutet werden.

5.3 Ausgewählte Ergebnisse der Studie und weiterführende Interpretation

Das dreigliedrige Auswertungsschema samt den Erkenntnissen zur induktiven Kategorienbildung wird im Kontext der Erforschung kindlicher Wahrnehmungsprozesse (im Hinblick auf die strukturierende MW) als ein zentrales Ergebnis betrachtet. Insbesondere aufgrund der Datenanalyse anhand des beschriebenen dreigliedrigen Auswertungsschemas, hat sich eine weitere interessante Beobachtung ergeben: Es gibt Kinder, die Strukturen in Mengen hineindeuten und wahrnehmen, diese jedoch (noch) nicht zur AB nutzen. Oder anders ausgedrückt: Nur weil ein Kind sagt, dass es gezählt habe, um die Mächtigkeit einer Menge zu bestimmen, bedeutet das nicht, dass es keine Struktur wahrgenommen hat (Sprenger, 2021). Der sensible Einsatz von Eye-Tracking kann an dieser Stelle immer wieder Einblicke in den Wahrnehmungsprozess gewähren.

6 Bedeutung für die Praxis

Für die Praxis scheint der Einsatz von Eye-Tracking bisher eher ungeeignet. Die Anwendung und Auswertungen sind sehr umfangreich, es wird eine Expertise im Umgang mit der Technik benötigt, um verwertbare Daten zu gewinnen und die Analysen der Blickbewegungsdaten sind sehr interpretativ. Durch die individuellen Wahrnehmungen sind Verallgemeinerungen von beispielsweise Blickmustern, die auf alle Kinder einer Altersgruppe passen, sehr herausfordernd. Das Setting und die Items müssen also sowohl jeweils dem zu untersuchenden mathematischen Inhalt gerecht, als auch beispielsweise an das Alter der Kinder angepasst werden.

Erkenntnisse aus Studien, bei denen Eye-Tracking zum Einsatz kam, können jedoch als Anhaltspunkte für die Umsetzung dieses thematischen Bereichs in der Praxis dienen. Möglicherweise haben Kinder schon eine strukturierende MW, obwohl sie sagen, sie hätten gezählt (Sprenger, 2021). Dies erfordert einen achtsamen Umgang mit Kindern hinsichtlich ihrer Erklärungen und ihres Handelns. Bereits im Kindergarten kann eine solche bereits vorhandene Wahrnehmung von Strukturen bewusst gemacht und nach und nach für die AB nutzbar gemacht werden. Mögliche Ansatzpunkte sind das Sprechen, Diskutieren oder Argumentieren mit den Kindern über ihre individuelle Wahrnehmung (Sprenger & Benz, 2020) oder das Nutzen nonverbaler Kommunikationswege. Weitere Forschung ist notwendig, um Formen der Kommunikation zu untersuchen, um das Wahrnehmen und Nutzen von Strukturen zu fördern (vgl. Benz & Tiedemann, 2021).

7 Abschließende Bemerkungen

Eye-Tracking zeigt lediglich an, *wo* eine Person hinsieht. Diese Erkenntnis ist ein entscheidender Aspekt im Umgang mit diesem Erhebungsinstrument. Die Blickbewegungen werden „sichtbar“, müssen jedoch sehr vorsichtig interpretiert werden, um Deutungen über kognitive Prozesse zu ermöglichen. Deshalb ist es unerlässlich, die Eye-Tracking Daten zunächst als abhängige Variable zu betrachten und ergänzende Methoden, wie beispielsweise retrospektive Befragungen, einzubeziehen.

Beim Auswerten von Eye-Tracking Daten deutet der Forschende Blickverläufe der interviewten Person, bei der das Gehirn wiederum Deutungen visueller Reize vorgenommen hat, um das Gesehene zu interpretieren. Letzteres geschieht in Zusammenhang mit dem bereits vorhandenen Wissen. Bei der Auswertung von Blickbewegungsdaten finden also genaugenommen Deutungen von Deutungen statt und es stellt sich die Frage, wie vergleichbar Blickverläufe sind oder überhaupt sein können. Es bleibt festzuhalten, dass Eye-Tracking ein wertvolles Erhebungsinstrument sein kann, um Einblicke in Wahrnehmungsprozesse von Kindern zu erhalten. Dies bedarf jedoch einer sensiblen und differenzierten Planung und Umsetzung, um sich den hier diskutierten Herausforderungen zu stellen und somit den Lernenden in möglichst vielen Facetten gerecht zu werden.

Literatur

Baroody, A. J., Lai, M.-l. & Mix, K. S. (2006). The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In B. Spodek & O. N. Saracho (Hrsg.), *Handbook of research on the education of young children* (S. 187–221). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Benz, C. (2014). Identifying quantities - children's constructions to compose collections from parts or decompose collections into parts. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Eds.), *Early mathematics learning. Selected papers of the POEM 2012 conference* (pp. 189–203). Springer New York.

Benz, C. (2018). Den Blick schärfen: Grundlage für arithmetische Kompetenzen. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Inhalte im Fokus – Mathematische Strategien entwickeln. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2018* (Mathematikdidaktik Grundschule, Bd. 8, S. 9–24). University of Bamberg Press (UBP). https://opus4.kobv.de/opus4-bamberg/solrsearch/index/search/searchtype/series/id/17/start/0/rows/10

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen*. Springer Spektrum.

Benz, C. & Tiedemann, K. (2021). Mit Kindern über Strukturen sprechen. In A.-K. Harr & B. Geist (Hrsg.), *Sprachförderung in Kindertagesstätten*. DTP-Band 12., (pp. 409-425.) Hohengehren.

Blake, C. (2013). Eye-Tracking. Grundlagen und Anwendungsfelder. In W. Möhring & D. Schlütz (Hrsg.), *Handbuch standardisierte Erhebungsverfahren in der Kommunikationswissenschaft* (S. 367–387). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-531-18776-1_20

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein kognitiven Fähigkeiten*. Logos.

Fritz, A., Ehlert, A. & Balzer, L. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education, 3* (1), 38–67.

Henderson, J. (2003). Human gaze control during real-world scene perception. *Trends in cognitive sciences, 7* (11), 498–504. https://doi.org/10.1016/j.tics.2003.09.006

Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien: Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen*. Klett, Kallmeyer.

Holmqvist, K., Nyström, M. & Mulvey, F. (2012). Eye tracker data quality: what it is and how to measure it. In C. H. Morimoto, H. Istance, J. B. Mulligan, P. Qvarfordt & S. N. Spencer (Hrsg.), *Proceedings of the symposium on eye tracking research and applications – ETRA '12* (S. 45–52). ACM Press.

Joos, M., Rötting, M. & Velichkovsky, B. M. (2003). Bewegungen des menschlichen Auges: Fakten, Methoden, innovative Anwendungen. In G. Rickheit, T. Herrmann & W. Deutsch (Hrsg.), *Psycholinguistik/ Psycholinguistics. Ein internationales Handbuch/An International Handbook* (S. 142–168). de Gruyter.

Just, M. A. & Carpenter, P. A. (1980). A theory of reading. From eye fixations to comprehension. *Psychological Review, 87* (4), 329–354. https://doi.org/10.1037/0033-295X.87.4.329

Kiesel, A. & Koch, I. (2018). Wahrnehmung und Aufmerksamkeit. In A. Kiesel & H. Spada (Hrsg.), *Lehrbuch Allgemeine Psychologie* (4., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, S. 36–122). Hogrefe.

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2013). Entwicklung und Diagnostik der Zahl-Größen-Verknüpfung zwischen 3 und 8 Jahren. In M. Hasselhorn, A. Heinze, W. Schneider & U. Trautwein (Hrsg.), *Diagnostik mathematischer Kompetenzen* (Bd. 11, S. 41–66). Hogrefe.

Lindmeier, A. & Heinze, A. (2016). Strategien bei der Anzahlerfassung in strukturierten Zahldarstellungen – eine vergleichende Eye-Tracking Studie. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1381–1384). WTM Verlag.

Lüken, M. M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Waxmann.

Merschmeyer-Brüwer, C. (2002). Räumliche Strukturierungsweisen bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen—Augenbewegungen als Indikatoren für mentale Prozesse. *Journal für Mathematik-Didaktik, 23* (1), 28–50. https://doi.org/10.1007/BF03338945

Moeller, K., Neuburger, S., Kaufmann, L., Landerl, K. & Nuerk, H.-C. (2009). Basic number processing deficits in developmental dyscalculia. Evidence from eye tracking. *Cognitive Development, 24* (4), 371–386. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.007

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (2018). Promoting early mathematical structural development through an integrated assessment and pedagogical program. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglini-Frank & C. Benz (Hrsg.), *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education* (ICME-13 Monographs, S. 17–33). Springer International Publishing.

Mulligan, J. T., Prescott, A. & Mitchelmore, M. (2004). Children's development of structure in early mathematics. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proc. 28th conf. of the int. group for the psychology of mathematics education* (Bd. 2, S. 393–400). Bergen: PME.

Myers, D. G. (2014). *Psychologie.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-40782-6

Obersteiner, A. (2012). *Mentale Repräsentationen von Zahlen und der Erwerb arithmetischer Fähigkeiten. Konzeptionierung einer Förderung mit psychologisch-didaktischer Grundlegung und Evaluation im ersten Schuljahr.* Waxmann.

Posner, M. I. (1980). Orienting of attention. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 32* (1), 3–25. https://doi.org/10.1080/00335558008248231

Rayner, K. (2009). Eye movements and attention in reading, scene perception, and visual search. *Quarterly journal of experimental psychology (2006), 62* (8), 1457–1506. https://doi.org/10.1080/17470210902816461

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The development of mathematical thinking* (S. 109–151). Academic Press.

Rottmann, T. & Schipper, W. (2002). Das Hunderter-Feld — Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? *Journal für Mathematik-Didaktik, 23* (1), 51–74. https://doi.org/10.1007/BF03338946

Schindler, M., Bader, E., Schindler, F., Lilienthal, A. J. & Schabmann, A. (2019). Quantity recognition in structured whole number representations of students with mathematical difficulties: An eye-tracking study. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal, 17* (1), 5–28.

Schindler, M. & Lilienthal, A. J. (2019). Domain-specific interpretation of eye tracking data. Towards a refined use of the eye-mind hypothesis for the field of geometry. *Educational Studies in Mathematics, 101* (1), 123–139. https://doi.org/10.1007/s10649-019-9878-z

Schindler, M. & Schindler, F. (2022). Förderung der strukturierten Anzahlerfassung bei Kindern mit Rechenschwierigkeiten: Eine Eye-Tracking Studie zur Evaluation einer schulischen Intervention in Klasse 5. In P. Klein, N. Graulich, M. Schindler, & J. Kuhn (Hrsg.), *Eye Tracking als Methode in der Mathematik- und Naturwissenschaftsdidaktik: Forschung und Praxis.* Springer.

Schöner, P. (2017). Prozesse bei der (strukturierten) Mengenwahrnehmung und Anzahlbestimmung. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematik und Sprache. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM 2017* (S. 105–108). University of Bamberg Press (UBP). https://opus4.kobv.de/opus4-bamberg/solrsearch/index/search/searchtype/series/id/17

Schöner, P. & Benz, C. (2018). Visual Structuring Processes of Children When Determining the Cardinality of Sets – The Contribution of Eye-Tracking. In C. Benz, H. Gasteiger, A. S. Steinweg, P. Schöner, H. Vollmuth, & J. Zöllner (Eds.), *Early Mathematics Learning – Selected Papers of the POEM Conference 2016*. Springer.

Schroiff, H. W. (1987). Zum Stellenwert von Blickbewegungsdaten bei der Mikroanalyse kognitiver Prozesse. *Zeitschrift für Psychologie, 195* (2), 189–208.

Siegler, R. S. (1987). The perils of averaging data over strategies. An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology: General, 116* (3), 250–264. https://doi.org/10.1037/0096-3445.116.3.250

Sprenger, P. & Benz, C. (2019). Perceiving and using structures in sets - the contribution of eye-tracking in a three-level evaluation process. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME11, February 6 – 10, 2019) (S. 2355–2362). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Sprenger, P. & Benz, C. (2020). Children's perception of structures when determining cardinality of sets—results of an eye-tracking study with 5-year-old children. *ZDM, 51* (1), 753–765. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01137-x

Sprenger, P. (2021). *Prozesse bei der strukturierenden Mengenwahrnehmung und strukturnutzenden Anzahlbestimmung von Kindern im Elementarbereich – Eine Eye-Tracking-Studie*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-33102-3

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Franzbecker.

Strohmaier, A. R., Mac Kay, K. J., Obersteiner, A., & Reiss, K. M. (2020). Eye-tracking methodology in mathematics education research: A systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics, 104*, 147–200.

Jun.-Prof. Dr. Priska Sprenger
Pädagogische Hochschule Freiburg
Kunzenweg 21
76117 Freiburg
priska.sprenger@ph-freiburg.de

Arbeitsgruppe Arithmetik

Koordination: Charlotte Rechtsteiner und Solveig Jensen
rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de solveig.jensen@uni-osnabrueck.de

Beitrag I: Axel Schulz, Sebastian Wartha und Christiane Benz
axel.schulz@uni-bielefeld.de wartha@ph-karslruhe.de
benz@ph-karlsruhe.de

Das Negative wegnehmen – ein Plädoyer für die Stärkung der Subtraktion

1 Ausgangslage

Empirische Befunde zeigen auf, dass Subtraktionsaufgaben deutlich weniger häufig richtig gelöst werden als strukturgleiche Additionsaufgaben (Benz, 2005; Selter, 2000). Auch in Bezug auf Bearbeitungswege konnte z. B. Gaidoschik (2010) feststellen, dass bei Subtraktionsaufgaben häufiger problematischere Zählprozesse als bei entsprechenden Additionsaufgaben eingesetzt werden.

Im Folgenden sind diese beiden Indikatoren (niedrigere Lösungshäufigkeit und problematischere Lösungswege) gemeint, wenn pragmatisch davon gesprochen wird, dass Subtraktionsaufgaben schwieriger als „baugleiche“ Additionsaufgaben sind.

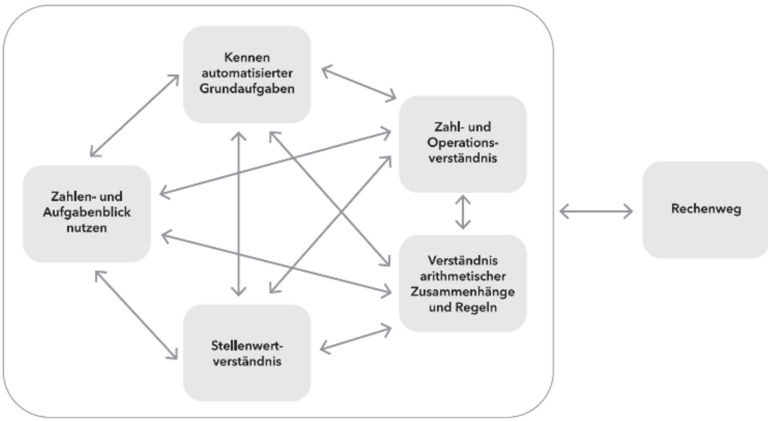


Abb. 1 Einflussfaktoren auf den Rechenweg (nach Schulz, 2014)

Wenn Gründe für diese größeren Schwierigkeiten identifiziert werden sollen, können Modelle herangezogen werden, die auf stoffdidaktischer Ebene die Einflussfaktoren auf Rechenwege identifizieren. Abbildung 1 skizziert das Zusammenspiel von Zahlverständnis, Operationsverständnis, Stellenwertverständnis, Aufgaben- bzw. Zahlenblick und der Verfügbarkeit automatisierter Grundaufgaben, das zu flexibler und adaptier Strategienutzung führen kann. Jeder einzelne dieser Bereiche verdient eine intensive stoffdidaktische und empirische Betrachtung. Im Folgenden wird auf die Rolle automatisierter Grundaufgaben näher eingegangen.

Stoffdidaktische Überlegungen beschreiben, dass der automatisierte Abruf von Grundaufgaben eine notwendige Voraussetzung ist, um Aufgaben über die Nutzung nicht-zählender Bearbeitungswege lösen zu können (Schulz, 2014). Hierbei werden Zahlzerlegungen bei *allen* Rechenwegen benötigt.

Empirisch wurde der Zusammenhang zwischen der Verfügbarkeit automatisierter Grundaufgaben und erfolgreicher Strategienutzung nachgewiesen. Gerve und Gasteiger (2021) konnten für die Mitte des zweiten Schuljahres zeigen, dass es einen signifikanten Zusammenhang zwischen dem korrekten Lösen von Additionsaufgaben mit Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20 und der Bearbeitungsgeschwindigkeit sowie der Lösungsrichtigkeit der Zahlzerlegungen im Zahlenraum bis 10 gibt: Je seltener und je langsamer die Zerlegungsaufgaben gelöst werden, desto weniger erfolgreich können Rechenstrategien angewandt werden. Eine weitere Studie bestätigt, dass Kinder mit hohem Faktenwissen über ein größeres Repertoire an nutzbaren Strategien verfügen (Reindl, 2016).

2 Automatisierte Grundaufgaben

Unter den für das Rechnen im Zahlenraum über 10 relevanten automatisierten Grundaufgaben werden hier alle Zahlzerlegungen, alle Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 verstanden.

Für Grundaufgaben eines Zahlentripels (z. B. 9/3/6) könnte nun angenommen werden, dass sie (nach verständnisbasierter Automatisierung) gleich häufig erfolgreich gelöst werden, dass also die Lösungshäufigkeiten von 3 + 6 und 9 – 6 gleich hoch sind. Doch bereits in diesem Zahlenraum und bei diesem Zahlenmaterial zeigt sich, dass Subtraktionsaufgaben signifikant schwieriger als die Additionsaufgaben sind. In der Untersuchung von Wartha, Schulz und Benz (2023) zeigt die Analyse der Lösungsquoten bei der Bearbeitung von Grundaufgaben, denen das gleiche Zahlentripel zu Grunde liegt, dass Subtraktionsaufgaben signifikant seltener korrekt gelöst werden als Additionsaufgaben. Grundlage dieser Untersuchung sind Lösungen von jeweils über 3000 Kindern des zweiten und dritten Schuljahrs im Rahmen der Normierung von ILeA plus. Zu einem Zeitpunkt, an dem die abgefragten Aufgabensätze eigentlich in Form automatisierter Aufgaben als eine Grundlage für erfolgreiche Strategienutzung zur Verfügung stehen sollten, ist die Subtraktion schwieriger als die Addition. Empirisch ist ungeklärt, woran die höhere Schwierigkeit der Subtraktionsaufgaben liegt, obschon didaktische Überlegungen als Hypothesen dazu formuliert werden können.

3 Impulse für weitere Überlegungen

Auf Grundlage dieser Überlegungen und Daten können Fragen gestellt werden, die für die Analyse und die Entwicklung von Lernarrangements, Schulbüchern und Curricula herangezogen werden können:

- Zu welchem Zeitpunkt werden die Grundvorstellungen und Rechenstrategien zur Subtraktion (im Vergleich zu Addition) erarbeitet und thematisiert? Ist diese Reihenfolge zwingend?
- (Wie) Werden die Subtraktionsaufgaben im ZR 10 mit den Zahlzerlegungen verknüpft? Wann werden sie jeweils thematisiert?
- An welchen Modellen wird der Zusammenhang zwischen Zahlzerlegung und den entsprechenden Plus- *und Minusaufgaben* erarbeitet? Ist gegeben, dass Tausch- und Umkehraufgaben an *einem* Modell „gesehen“ und erklärt werden können? Auf welchen Grundvorstellungen können diese Modelle fußen?
- Wird – auch nur in Bezug auf die Automatisierung – genauso viel Übungsmaterial für Subtraktionsaufgaben angeboten wie für die entsprechenden Additionsaufgaben?

Literatur

Benz, C. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100*. Franzbecker.

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder rechnen lernen – oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Lang.

Gerve, M. & Gasteiger, H. (2021). Einflussfaktoren für die Verwendung von Strategien beim Lösen von Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 20. In K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch, S. Prediger & Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021* (S. 339–342). WTM, Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Reindl, S. (2016). *Lösungsstrategien Addition und Subtraktion: eine Studie zur Nutzung und Wirkung im Grundschulalter*. Waxmann.

Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften: Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Springer.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(innen) bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. *Journal für Mathematikdidaktik, 21*(2), 227–258.

Wartha, S.; Schulz, A.; Benz, C. (2023). Zusammenhänge zwischen Zahlzerlegungen, Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 10 Empirische Untersuchung der Kompetenzen von Lernenden im zweiten und dritten Schuljahr. *Lernen und Lernstörungen, 12*(3), 155-167

Beitrag II: Imke Schwerin

imke.schwerin@math.upb.de

Verdoppeln und Halbieren im Zahlenraum bis 100 – Erkenntnisse einer Interviewstudie in Klasse 2

Die Operationen des Verdoppelns und Halbierens können als eine Art Schnittstellenoperation betrachtet werden, weil das Doppelte sowohl durch Addition als auch Multiplikation erzeugt werden kann und die Hälfte durch Subtraktion oder Division, wodurch eine enge Verbindung zwischen den Grundrechenarten besteht. Zudem können die jeweiligen Umkehroperationen eingesetzt werden, wodurch die inverse Beziehung der beiden Operationen zueinander deutlich wird.

1 Theoretischer und empirischer Rahmen

Verdopplungsaufgaben zählen im Zahlenraum bis 20 zu den sogenannten einfachen Aufgaben. Stellt man Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben als Doppelreihe im Zwanzigerfeld dar, erscheinen sie anschaulich und einprägsam. Im Zahlenraum bis 20 werden Verdopplungs- und Halbierungsaufgaben von Erstklässler:innen vergleichsweise häufiger und früher automatisiert abgerufen als andere Aufgaben (Gaidoschik, 2010). Dies zeigt sich auch beim sogenannten „tie-effect", mit dem die auffällig kurze Reaktions- und Lösungszeit von Kindern beim Bearbeiten von Verdopplungsaufgaben und ihren Umkehrungen beschrieben wird (Groen & Parkman, 1972), was auf die besondere Charakteristik dieser Aufgabengruppe zurückgeführt wird. Während die Operationen des Verdoppelns und Halbierens am Ende des ersten Schuljahres überwiegend fehlerfrei durchgeführt werden können, haben einige Kinder u. a. noch Schwierigkeiten in der Bezeichnung dessen, was „das Doppelte" ist: die entstandene Gesamtmenge oder nur der hinzugefügte Teil (Rottmann, 2006). Rottmann fokussierte hauptsächlich materialbasierte Vorgehensweisen, sodass formale, zahlenbasierte Vorgehensweisen in seiner Untersuchung nicht tiefergehend betrachtet wurden.

Folglich besteht Erkenntnisbedarf darin, (1) wie Kinder das Doppelte bzw. die Hälfte von Zahlen erzeugen, wenn sie das Ergebnis nicht auswendig abrufen (können), (2) welches Verständnis diesen Vorgehensweisen und den Operationen allgemein zugrunde liegt und (3) welchen Einfluss die Behandlung der Multiplikation und Division hat.

2 Forschungsdesign

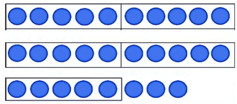
Um diese Fragen beantworten zu können, wurden halbstandardisierte Interviews mit insgesamt 34 Schüler:innen des zweiten Schuljahrs zweier Schulen in Nordrhein-Westfalen geführt. Die Interviews wurden nach der Zahlraumerweiterung bis 100 (Okt./Nov. 2021) und nach Behandlung der Addition und Subtraktion im Hunderterraum sowie der Multiplikation und Division (Mai/Juni 2022) geführt.

Eingesetzt wurden Aufgaben in verschiedenen Darstellungen, wie Zehner-/Fünferstreifen und Plättchen, Geldwerten und symbolisch dargestellten Zahlen. Die Schüler:innen wurden aufgefordert, von den Zahlen zwischen vier und 51 das Doppelte bzw. die Hälfte zu erzeugen und anschließend ihr Vorgehen zu ausgewählten Zahlenwerten zu beschreiben. Einige Zahlenwerte kamen durch die unterschiedlichen Repräsentationen mehrfach vor, zudem sollte teilweise die Hälfte von ungeraden Zahlen erzeugt werden.

Anhand der transkribierten Äußerungen werden mithilfe der Theorie der konzeptuellen Felder nach Vergnaud (u. a. 1996) das Vorgehen und Verständnis der Kinder rekonstruiert. Grundlegend dabei ist die Annahme, dass sich das Denken bzw. Verständnis eines Individuums in seinem Sprechen und Tun zeigt und dass sich Wissen in Schemata organisiert, die in bestimmten Situationen (teils unbewusst) angewendet werden. Als zentralen Bestandteil eines Schemas beschreibt Vergnaud die operationalen Invarianten, die die Wahrnehmung, Verarbeitung und den Umgang mit einer bestimmten Situation steuern. Operationale Invarianten werden in Theorems- und Concepts-in-action unterschieden, mittels derer das rekonstruierte Verständnis eines Individuums beschrieben wird.

3 Einblick in Ergebnisse

Um einen Einblick in die Auswertung zu geben, folgt Finns Bearbeitung vom Juni 2022 zur Erzeugung des Doppelten der mit Plättchen dargestellten Zahl 28:



5	I	Was ist denn das Doppelte davon?
6	F	Ähm. (*19 sec. Pause*) Sechsundfünfzig?
7	I	Wie hast du das gemacht?
8	F	Ich hab erstmal die beiden Zehner zusammengerechnet (*zeigt mit je einem Finger auf die beiden Zehnerstreifen auf dem Tisch*). Dann, das ist ja m zwanzig. (.) Dann (.) noch acht dazu (*zeigt auf den Fünferstreifen und die Wendeplättchen auf dem Tisch*). Das wären achtundzwanzig. Und dann nochmal p plus das Ganze.
9	I	(.) Okay und ähm hast du da noch irgendwelche Zwischenschritte gemacht? (.) Oder hast du auf einmal achtundzwanzig plus achtundzwanzig gerechnet?
10	F	(*nickt*). (..) Ja, erstmal hab ich die Zehner gerechnet und dann hab ich die beiden Achter gerechnet.
11	I	Okay, wie hast du denn die beiden Achter gerechnet?
12	F	(.) Ähm acht plus acht, wie zwei mal acht. (.) Ist sechzehn. Also sechs und dann noch einen Zehner dazu.

Finn nennt nach 19 Sekunden das Ergebnis 56 (T6) und scheint in Turn 8 zunächst sein Vorgehen zur Ermittlung der Ausgangszahl 28 zu beschreiben, woraufhin er „Und dann nochmal plus das Ganze“ äußert. Auf weitere Nachfrage erläutert er, erst die Zehner und dann „die beiden Achter“ gerechnet zu haben, indem er acht plus acht wie zwei mal acht gerechnet habe. Finn scheint die Ausgangszahl dekadisch zerlegt (Concept-in-action: Teile-Ganzes-Konzept) und zunächst das Doppelte der Zehner erzeugt zu haben. Inwieweit er hier additiv oder multiplikativ vorgegangen ist, lässt sich ausgehend vom Transkriptausschnitt nicht rekonstruieren. Dass sein Verständnis vom Verdoppeln dennoch eher additiv geprägt zu sein scheint, lässt seine Äußerung „nochmal plus das Ganze“ (T8) vermuten. Bei der Beschreibung, wie er das Doppelte der Einer erzeugt hat, stellt Finn eine Verknüpfung zwischen der Addition zweier gleicher Summanden (8+8) und der

Multiplikation mit 2 ($2 \cdot 8$) her. Er scheint zu wissen, dass beide Operationen gleichbedeutend sind und zum selben Ergebnis führen. An dieser Stelle können als Concepts-in-action die Addition zweier gleicher Summanden sowie die Multiplikation mit 2 gedeutet werden. Seine abschließende Äußerung „Also sechs und dann noch einen Zehner dazu“ (T12) deutet darauf hin, dass er die erzeugte 16 zu zerlegen scheint, um sie sukzessive zum zuvor erzeugten Doppelten der Zehner (T10) hinzuzufügen. Finns Vorgehen zum Erzeugen des Doppelten kann mit dem Theorem-in-action „Wenn man das Doppelte einer mit Plättchen dargestellten zweistelligen Zahl erzeugt, dann erzeuge ich das Doppelte der Zehner und der Einer entweder additiv oder multiplikativ und füge beide Teilverdopplungen zusammen.“ beschrieben werden.

4 Ausblick

Diesem Vorgehen folgend werden Transkripte beider Interviewzeitpunkte ausgewertet, um das Erzeugen des Doppelten und der Hälfte von Zahlen in unterschiedlichen Darstellungen anhand der Theorems- und Concepts-in-action zu charakterisieren und zu vergleichen. Für ausgewählte Kinder schließt sich eine vertiefte Analyse der Entwicklung des Verständnisses an, um mögliche Veränderungen durch die Thematisierung der Multiplikation und Division herauszuarbeiten.

Literatur

Gaidoschik, M. (2010). *Wie Kinder Rechnen lernen – Oder auch nicht: Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr*. Peter Lang.

Groen, G. J. & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*(4), 329–343.

Rottmann, T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe „die Hälfte“ und „das Doppelte“: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchung*. Franzbecker.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin & B. Greer (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 219–239). Lawrence Erlbaum.

Beitrag III: Franziska Tilke

f.tilke@uni-muenster.de

Muster in Entdeckerpäckchen erkunden
– Erforschung der Deutungsprozesse von Lernenden beim Systematisieren ihrer individuellen Erkenntnisse

Mathematische Muster wie in Entdeckerpäckchen sind im Arithmetikunterricht wesentlich. Sie können mathematische Strukturen zugänglich machen (Akinwunmi & Steinweg, 2022).

1 Theoretischer Hintergrund

Zu den zentralen mathematischen Strukturen in der Grundschule zählen u. a. die Konstanzeigenschaften der Operationen (für die Subtraktion bspw.: Werden der Minuend und der Subtrahend um den gleichen Wert verkleinert bzw. vergrößert, bleibt die Differenz konstant), die den Lernenden nicht vorgegeben, sondern durch Muster erfahrbar gemacht werden sollen (Steinweg, 2013). Verschiedene Studien zeigen jedoch, dass die Lernenden vielfach bei der Beschreibung von (Zahlen-)Mustern verbleiben (u. a. Link, 2012) und anhand symbolischer Entdeckerpäckchen nur Verallgemeinerungen mit dem Fokus auf Muster vornehmen (Akinwunmi & Steinweg, 2022). Ein Verständnis für die Eigenschaften der Operationen fehlt damit noch.

Bei dem Verständnisaufbau als aktivem, konstruktivem Prozess des Individuums müssen die Lernenden gewisse *Verstehenselemente* (VE; Teilelemente eines Konzepts, die zum Verständnis des gesamten Konzepts nötig sind) und *deren Verknüpfungen* aufbauen, um „fachlich auch … ein tiefes und sozial geteiltes Verständnis des Sachverhalts“ (Drollinger-Vetter, 2011, S. 198) zu entwickeln. Daher betont Winter (1983), dass dem Entdecken *Aktivitäten zur Systematisierung* folgen müssen, in denen sich die Lernenden u. a. der Eigenschaften des mathematischen Sachverhalts bewusst werden und diese versprachlichen. Beim Systematisieren werden die individuellen Erkenntnisse reflektiert, in reguläres mathematisches Wissen überführt und vernetzt (Prediger et al., 2011). Da das Systematisieren bislang nicht hinreichend untersucht wurde (ebd.), stellen sich u. a. die Fragen, *wie Aktivitäten zum Systematisieren im Mathematikunterricht gestaltet werden können* *und welche Verstehenselemente die Lernenden darin explizit machen und verknüpfen.*

2 Studiendesign

Das Projekt LiiMu-ForScheR folgt dem Forschungsprogramm der fachdidaktischen Entwicklungsforschung (Prediger et al., 2012) und fokussiert u. a. darauf, wie Lernende die Konstanzeigenschaften beim Systematisieren deuten und welchen Beitrag ausgewählte Systematisierungsaktivitäten auf dem Weg zum Verständnis mathematischer Strukturen leisten. Dafür wurde ein Lehr-Lern-Arrangement zum Erkunden, Systematisieren und Vertiefen der Konstanzeigenschaften anhand von Entdeckerpäckchen in drei iterativen Zyklen (weiter-)entwickelt und mit Drittklässler*innen im Mathematikunterricht erprobt.

Der vorliegende Beitrag betrachtet die erste Aktivität zum Systematisieren, in der die Lernenden die Eigenschaften der Konstanz der Differenz (VE: gleichsinniges Verändern von Minuend und Subtrahend; Verändern um den gleichen, beliebigen Wert; gleiche Differenz) formulieren sollen, und geht der Frage nach, *welche Verstehenselemente die Lernenden bezüglich der Konstanzeigenschaften in der Aktivität ‚Gemeinsamkeiten formulieren' explizit machen*. Die mittels des videografierten Lehr-Lern-Arrangements entstandenen Transkripte wurden dazu mit einer epistemologisch orientierten Analyse nach Steinbring (2005) ausgewertet.

3 Analysebeispiel Felix

Im Folgenden wird der Deutungsprozess von Felix rekonstruiert, der exemplarisch vorstellt, wie Lernende beim Systematisieren ausgewählte Verstehenselemente explizit machen.

In der Erkundungsphase hat Felix die Muster des Minuenden, Subtrahenden und der Differenz beschrieben (Abb. 1).

In der Aktivität ‚Gemeinsamkeiten formulieren' (‚Wann haben Entdeckerpäckchen immer das gleiche Ergebnis? Schreibt gemeinsam eine Regel für Minusaufgaben auf.') erklärt er: „Die Minusaufgabe bleibt ja immer gleich, wenn eine Zahl- wenn entweder beide kleiner oder beide größer werden." Beim Systematisieren werden die Entdeckerpäckchen und deren Beschreibungen aus der Erkundung für Felix zum zu deutenden Zeichen. Er beschreibt, dass die Zahlen beide kleiner oder größer werden müssen, und bezieht sich so auf die Richtung der Veränderung. Felix deutet, dass die Differenz gleichbleibt, wenn der Minuend und der Subtrahend in die gleiche Richtung verändert werden.

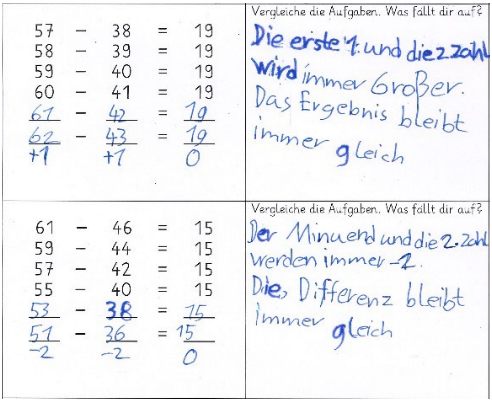


Abb. 1 Ausschnitt von Felix‘ Arbeitsblatt aus der Erkundung

Beim Formulieren der Gemeinsamkeiten sind die Lernenden gefordert, über die Beispiele hinweg die zentralen Verstehenselemente zu erkennen und zu verallgemeinern. Felix macht die VE *‚gleichsinniges Verändern‘* und *‚gleiche Differenz‘* als Konstanzeigenschaften explizit und verknüpft diese. Den gleichen Wert der Veränderung beschreibt Felix in der Erkundung an den Beispielen (Abb. 1), verallgemeinert diesen aber nicht über die Beispiele hinweg.

4 Diskussion und Fazit

Das Analysebeispiel von Felix steht exemplarisch für viele Lernende aus der Untersuchung, die beim Erkunden vielfältige Muster in den Entdeckerpäckchen beschreiben und davon ausgehend beim Systematisieren ausgewählte Verstehenselemente für die Konstanzeigenschaften (z. B. Richtung und/oder Wert der Veränderung) explizit machen können. Dies zeigt, dass die Lernenden durch die Aktivität ‚Gemeinsamkeiten formulieren‘ (erste) zentrale Elemente der mathematischen Strukturen verstehen können. Forschende sowie Lehrkräfte sollten daher sensibilisiert werden, darauf zu achten, welche Verstehenselemente die Lernenden für die mathematischen Strukturen bereits erkannt haben. Das Systematisieren trägt dazu bei, die bewussten Erkenntnisse sichtbar zu machen, wie das Beispiel Felix exemplarisch zeigt. Gleichzeitig macht das Beispiel deutlich, dass viele Lernende beim Formulieren von Gemeinsamkeiten noch nicht alle Verstehenselemente der Konstanzeigenschaften erfasst haben. Sie sollten im nächsten Schritt angeleitet werden, weitere Verstehenselemente zu erkennen und diese zu vernetzen, um ein tiefes fachliches Verständnis zu entwickeln. Denkbar ist, dass das Nutzen weiterer Repräsentationen, wie Akinwunmi und Steinweg (2022) bei einzelnen Kindern gezeigt haben, auch im Unterricht einen Beitrag dazu leisten könnte.

Literatur

Akinwunmi, K., & Steinweg, A. (2022). Analysis of children's generalisations with a focus on patterns and with a focus on structures. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Hrsg.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (S. 465–472). Free University of Bozen-Bolzano and ERME. https://hal.science/hal-03744472

Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: Fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Waxmann.

Link, M. (2012). *Grundschulkinder beschreiben operative Zahlenmuster*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2417-2

Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T., & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. *Mathematik lehren, 164*, 2–9.

Prediger, S., Link, M., Hinz, R., Hußmann, S., Ralle, B., & Thiele, J. (2012). Lehr-Lernprozesse initiieren und erforschen. Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. *MNU, 65*(8), 452–457.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. A Epistemological Perspektive*. Springer. https://doi.org/10.1007/b104944

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2738-0

Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik, 4*(3), 175–204. https://doi.org/10.1007/BF03339230.

Arbeitsgruppe Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Koordination: Grit Kurtzmann

grit.kurtzmann@uni-greifwald.de

Beitrag: Maria Wendt

maria.wendt@tu-dresden.de

Kombinatorik darstellen – Blickbewegungen von Schülerinnen und Schülern beim Lösen kombinatorischer Aufgaben mit Stift und Papier

Das Lösen kombinatorischer Aufgaben ist spätestens seit der Einführung der Bildungsstandards durch die Kultusministerkonferenz Teil des Grundschulcurriculums aller Bundesländer. Heute wird noch oft die Ansicht vertreten, dass kombinatorische Aufgaben durch die Identifikation des Aufgabentypens gelöst werden sollen. Jedoch ist dieses Vorgehen nach Sill und Kurtzmann (2019) besonders in der Grundschule ungeeignet, denn die Schülerinnen und Schüler entwickeln dadurch keine inhaltlichen Vorstellungen und Lösungsstrategien zu kombinatorischen Problemen (ebd., 8). Erfahrungen und Studien zeigen, dass viele Lernende sowohl in der Grundschule als auch in späteren Schulstufen nicht in der Lage sind, kombinatorische Aufgaben zu lösen (Hefendehl-Hebeker & Törner 1984, Nunes & Bryant 1996, Finesilver 2009, Herzog et al. 2017). Allerdings hat sich auch gezeigt, dass Grundschulkinder prinzipiell kombinatorische Probleme darstellen können (Neubert 2013). Die prozessbezogene Kompetenz des mathematischen Darstellens steht in einer Wechselbeziehung zum Lösen kombinatorischer Aufgaben. Zum einen sollen Grundschulkinder kombinatorische Probleme mathematisch darstellen, um eine inhaltliche Vorstellung zu entwickeln und die Aufgaben lösen zu können. Zum anderen trägt die Bearbeitung kombinatorischer Aufgaben dazu bei, die Kompetenz des mathematischen Darstellens zu fördern.

1 Forschungsfragen

Im Dissertationsprojekt soll deswegen der Frage nachgegangen werden, inwiefern Schülerinnen und Schüler eigene Darstellungen zum Lösen kombinatorischer Aufgaben nutzen.

Daraus ergeben sich drei Teilfragen:

F1 Lässt sich der Darstellungsprozess von Kindern – vom Lesen der Aufgabe bis zum Lösen dieser – als Schrittfolge beschreiben?

F2 Wie stellen leistungsstarke Kinder die mathematischen Elemente und Beziehungen zueinander aus kombinatorischen Aufgaben dar?

Im Rahmen einer qualitativ explorativen Studie werden im Enrichmentangebot „Mathe für Cracks“ mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler während ihres Lösungsprozesses in Partnerarbeit beobachtet und deren Interaktion und die dabei entstehende Darstellung bei kombinatorischen Aufgaben videografiert, da diese Lernenden häufiger Repräsentationswechsel zeigen (Käpnick 2014, 221).

Eine Pilotierung erfolgte im Winter und im Sommer 2023. Im Folgenden liegt auf dieser Pilotierung und der Forschungsfrage 1 der Fokus.

2 Pilotierung

Im Januar 2023 wurde an drei Samstagen je eine Aufgabe des Grundtyps *Kombination ohne Wiederholung* durch die Paare bearbeitet. Die Kinder erhielten die Aufgabe in Schriftform, sowie ein weißes A4-Blatt und verschiedene Stifte. Insgesamt wurden 33 Paare videografiert. Dabei gab es eine Kamera, die die Kinder von vorn filmte, eine seitliche Kamera und eine Kamera auf dem Tisch, die auf das A4-Blatt ausgerichtet war.

Im Sommer 2023 erhielten die Kinder an zwei Samstagen je eine Aufgabe des Typs *Permutation mit Wiederholung* und am dritten Tag eine Aufgabe zum *kartesischen Produkt*. Zusätzlich wurden Eye-Tracking-Daten der Kinder erhoben. Mit Hilfe zweier mobiler Tobii Pro-Brillen war es möglich die Blickbewegungen der Kinder über die ganze Zeit der Aufgabenbearbeitung zu verfolgen. Insgesamt wurden an den drei Tagen 23 Paare videografiert.

Die Kinder des ersten und zweiten Zeitpunkts der Pilotierung waren größtenteils neue Probanden (25 von 31). Die Zusammensetzung der Paare erfolgte zufällig und flexibel.

3 Erste Ergebnisse

Im ersten Durchgang der Pilotierung konnte bei vielen Paaren beobachtet werden, dass sie zunächst mögliche Ergebnisse raten und versuchen, mit den gegebenen Zahlen in der Aufgabenstellung willkürlich zu rechnen. Erst die zusätzliche verbale Aufforderung, etwas zu notieren, regte den Darstellungsprozess an. Bei der zweidimensionalen Kombinationsaufgabe wählten zwei Paare die Darstellung möglicher Kombinationen als Liste, um die Anzahl aller möglichen Kombinationen zu erhalten. Acht Kinder nutzten eine Tabelle und drei Paare eine Netzdarstellung. Mit steigender Dimensionalität der Aufgaben verwendeten die Kinder häufiger die Liste (sechs von acht/ fünf von neun). Die anderen Paare strukturierten ihre Kombinationen in Tabellen. Auch wenn eine strukturierende Darstellung verwendet wurde, führte diese nicht zwangsläufig zur richtigen Lösung.

Bei den Permutationsaufgaben trat das Auflisten der Ergebnisse in den Hintergrund. Die Kinder begannen zunächst Ergebnisse zu raten und mögliche Kombinationen aufzulisten, wechselten aber häufiger zu strukturierenden Darstellungen und nutzten die Multiplikation zum Lösen der Aufgaben. Bei der Aufgabe zum kartesischen Produkt nannte der Großteil der Kinder sofort die dazugehörige Multiplikationsaufgabe mit dem korrekten Ergebnis. Auf die Bitte hin aber trotzdem zu notieren, wie sie auf diese Lösung gekommen sind, fiel es vielen Paaren schwer eine geeignete Repräsentation der Aufgabe zu finden.

Um einen stärkeren Einblick in das Verständnis der Kinder über die kombinatorischen Aufgaben zu bekommen und eventuelle Verstehenshürden und mögliche Auslöser für die Entscheidung zu einer bestimmten Darstellung zu identifizieren, wurden im zweiten Durchgang der Pilotierung zusätzlich Eye-Tracking-Brillen eingesetzt. Die möglichen Fixationen der Kinder können dabei ein Indikator für erhöhte kognitive Aufmerksamkeit sein. Zusammen mit den Videoaufnahmen, den verbalen Äußerungen und den Darstelllungen kann ein Einblick in die Deutungsweisen der Kinder gewonnen werden (Götze & Seidel 2022, 214).

4 Ausblick und Diskussion

Ein erster Einblick in die Daten zeigt, dass alle Kinder prinzipiell eine Darstellung finden, die der Aufgabe entspricht. Die wenigsten schaffen es allerdings mit dieser Darstellung die mathematische Struktur abzubilden und diese zur Lösungsermittlung zu nutzen. Besondere Probleme bereiteten dabei Aufgaben des Grundtyps der Kombination.

Interessanterweise konnten bei der Aufgabe zum kartesischen Produkt fast alle Kinder unmittelbar die Lösung nennen, dann fiel es ihnen aber schwer eine passende Darstellung zu finden. Eine mögliche Ursache dafür könnte sein, dass solche Aufgabentypen im Grundschulunterricht schon behandelt wurden. Sie konnten den Grundtyp identifizieren und haben daraufhin das bekannte Vorgehen angewandt. Ob sie aber auch eine inhaltliche Vorstellung dazu besitzen, bleibt fraglich.

Literatur

Finesilver, C. (2009). Drawing, modelling and gesture in students' solutios to a Cartesian product problem. *Educate, 9(*3 Kaleidoscope Special Issue), 21–36.

Götze, D. & Seidel, N. (2022). Informelle Diagnostik mittels digitalem Eye Tracking – Fallanalyse am Beispiel der Division. In F. Dilling et al. (Hrsg.), *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien, MINTUS – Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung* (S. 209–224). Springer.

Hefendehl-Hebeker, L. & Törner, G. (1984). Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. *Didaktik der Mathematik, 12*(4), 245–262.

Herzog, M., Ehlert, A. & Fritz, A. (2017). Kombinatorikaufgaben in der dritten Grundschulklasse. Darstellung, Abstraktionsgrad und Strategieeinsatz als Einflussfaktoren auf die Lösungsgüte. *Journal für Mathematik-Didaktik, 38*(2), 263–289.

Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Springer Spektrum.

Neubert, B. (2013). Kombinatorische Aufgaben in der Grundschule. Beiträge zum Mathematikunterricht. In G. Greefrath & F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 688–691). WTM.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996). *Children doing mathematics*. Blackwell.

Sill, H.-D. & Kurtzmann, G. (2019). *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Springer.

Arbeitsgruppe Frühe mathematische Bildung

Koordination: Julia Bruns und Meike Grüßing

julia.bruns@uni-paderborn.de meike.gruessing@uni-vechta.de

Beitrag: Lena Aumann

lena.aumann@uni-osnabrueck.de

Wie sieht hilfreiches Feedback aus? – Feedbackarten und ihr Einfluss auf frühes mathematisches Lernen

Die Bedeutung des frühen mathematischen Lernens ist unbestritten. Mehrere Studien bestätigen starke prädiktive Effekte früher mathematischer Fähigkeiten auf spätere schulische Leistungen (z. B. Duncan et al., 2007). Kinder zeigen bereits in der Kindertagesstätte sehr heterogene mathematische Fähigkeiten. Um ein Weiterlernen eines jeden Kindes auf seinem Niveau zu gewährleisten, sollte sich die frühe Förderung an „Alter und Entwicklungsstand, den sprachlichen und sonstigen Fähigkeiten, der Lebenssituation sowie den Interessen und Bedürfnissen des einzelnen Kindes orientieren“ (§ 22(3) SGB VIII), also adaptiv sein. Adaptivität bedeutet dabei, dass Fachkräfte in ihrer Gestaltung von Lernsituationen darauf eingehen, was Lernende brauchen (Vaughn & Parsons, 2013). Adaptive Förderung fokussiert zwei Ebenen (Wullschleger et al., 2022): Die makroadaptive Lernunterstützung bezieht sich auf die Planung, Vorbereitung und Evaluation von Lernsituationen. Die mikroadaptive Lernunterstützung nimmt die direkte Fachkraft-Kind-Interaktion in den Blick, die auch als „zentrales Werkzeug der adaptiven Förderung“ (Bruns, 2014, S. 15) bezeichnet wird.

Als Teil qualitativ hochwertiger Interaktionen fokussieren Pianta et al. (2008) die Qualität des Feedbacks, das Fachkräfte Kindern geben. Dieses Feedback kann zum einen Informationen zum Fortschritt, zu Aktivitäten oder zur Arbeit des Kindes enthalten. Andererseits kann Feedback konstruktive Hinweise darauf geben, was das Kind als nächstes tun sollte, wenn es Schwierigkeiten hat, erfolgreich voranzukommen (Aumann et al., 2023). Herausfordernde Situationen, in denen Kinder diese Hinweise benötigen, scheinen nach Vygotskij (1987, S. 300) für eine adaptive Förderung von besonderem Interesse zu sein: „Das, was das Kind mit Hilfe eines Erwachsenen zu schaffen vermag, zeigt uns die Zone seiner nächsten Entwicklung [...] Was das Kind heute mit Hilfe des Erwachsenen vollbringt, wird es morgen selbständig tun können“ (zit. n. Brandes, 2019, S. 44). Es sind jedoch nicht alle Arten von Feedback gleichermaßen lernförderlich.

1 Hintergrund und Fragestellungen

Auswirkungen verschiedener Feedbackarten auf kindliches Lernen in unterschiedlichen Altersstufen werden insb. in Experimentalstudien untersucht. Hier erhalten Kinder unterschiedliche Feedbackarten nach Erfolg und/oder Misserfolg, um anschließend Auswirkungen dieser Feedbackarten auf potentiell lernwirksame Faktoren zu untersuchen. Mueller und Dweck (1998) und Kamins und Dweck (1999) zeigten, dass Kinder, die personenbezogenes Feedback („Du bist gut“) erhielten, weniger motiviert waren, ein geringeres Durchhaltevermögen und eine niedrigere Selbsteinschätzung zeigten und weniger Interesse an herausfordernden Aufgaben hatten als Kinder, die prozessbezogenes Feedback („Du hast das gut gemacht“) bekamen.

Experimentalstudien können erste Hinweise darauf geben, wie Feedback frühes Lernen beeinflusst. In natürlichen Situationen zeigt sich jedoch, dass verschiedene Feedbackarten selten voneinander getrennt gegeben werden, sondern dass Kinder im Alltag mehrere Arten von Feedback erhalten (z. B. „Das hast du toll gemacht, du bist ein richtiger Profi“). Es stellt sich daher die Frage, wie Feedback, das von frühpädagogischen Fachkräften in natürlichen Lernsituationen gegeben wird, auf frühes mathematisches Lernen wirkt.

2 Untersuchungsdesign, Ergebnisse und Diskussion

In einer Beobachtungsstudie wurde das Feedback von 48 frühpädagogischen Fachkräften in zwei Spielsituationen erfasst und dessen Wirkung auf die Entwicklung früher mathematischer Leistungen von N=140 Kindern (3-6 Jahre) untersucht. Die Auswertung mithilfe Linear Mixed Models zeigte, dass im Gegensatz zu unspezifischem („Super“), personenbezogenem („Du bist ein Profi“) und ergebnisbezogenem („Das sieht gut aus“) Feedback das prozessbezogene Feedback eine positive Wirkung auf die frühe mathematische Leistungsentwicklung der Kinder hatte.

Die Kategorie „prozessbezogenes Feedback“ beinhaltet verschiedene prozessbezogene Aussagen. Während circa 25% der Äußerungen Lob sind (z. B. „Das hast du schnell gezählt“), besteht der Großteil der Äußerungen in dieser positiv auf die mathematische Entwicklung wirkenden Feedbackart aus konstruktiven Hinweisen der Fachkraft dazu, was das Kind als nächstes tun sollte, wenn es Schwierigkeiten hat, erfolgreich voranzukommen. Nach Vygotskij (1987) weisen Situationen, in denen ein Kind diese konstruktiven Hinweise benötigt, auf seine Zone der nächsten Entwicklung hin. In diesen Situationen scheint es also besonders wichtig, dem Kind Hinweise zu geben, die an die jeweiligen Bedürfnisse angepasst sind und das Kind in seiner individuellen Entwicklung unterstützen. Die konstruktiven Hinweise der Fachkräfte, die wir in den videografierten Spielsituationen beobachten konnten, unterscheiden sich jedoch stark in ihrer Präzision und ihrer Fülle an Informationen (z. B. „Guck mal, nochmal“ oder „Du könntest auch mal gucken, ob du hier weitermachen kannst, ob du vielleicht 2 Blätter findest oder 2 Sterne“). Hier stellt sich die Frage, wie konstruktive Hinweise, die adaptiv sind und Kinder in ihrer individuellen mathematischen Entwicklung unterstützen, aussehen sollten.

Im Rahmen der Sitzung in der Arbeitsgruppe Frühe mathematische Bildung wurden exemplarisch einige Fachkraft-Kind-Situationen betrachtet, in denen Kinder nicht alleine zum Erfolg gekommen sind und in denen die Fachkraft konstruktive Hinweise gegeben hat. Dabei wurden Unterschiede zwischen den Fachkräften sowie mögliche Motive der Fachkräfte in der Nutzung von konstruktiven Hinweisen (bspw. Vermeidung von unnötigen Hinweisen oder Frustrationsvermeidung) diskutiert.

Literatur

Aumann, L., Gasteiger, H. & Puca, R. M. (2023). Early childhood teachers’ feedback in natural mathematical learning situations: Development of a detailed category system. *Manuskript eingereicht zur Publikation.*

Brandes, H. (2019). Vygotskijs Konzept der ‚Zone der nächsten Entwicklung‘ und dessen Bedeutung für aktuelle Diskurse in der Elementarpädagogik. In I. Schenker (Hrsg.), *Didaktik in Kindertageseinrichtungen: Eine systemisch-konstruktivistische Perspektive* (2. Aufl., S. 34–55). Beltz.

Bruns, J. (2014). *Adaptive Förderung in der elementarpädagogischen Praxis: Eine empirische Studie zum didaktischen Handeln von Erzieherinnen und Erziehern im Bereich Mathematik*. Waxmann.

Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P., Pagani, L. S., Feinstein, L., Engel, M., Brooks-Gunn, J., Sexton, H., Duckworth, K. & Japel, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology, 43*(6), 1428–1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428

Kamins, M. L. & Dweck, C. S. (1999). Person versus process praise and criticism: Implications for contingent self-worth and coping. *Developmental Psychology, 35*(3), 835–847. https://doi.org/10.1037/0012-1649.35.3.835

Mueller, C. M. & Dweck, C. S. (1998). Praise for intelligence can undermine children‘s motivation and performance. *Journal of Personality and Social Psychology, 75*(1), 33–52. https://doi.org/10.1037/0022-3514.75.1.33

Pianta, R. C., La Paro, K. M. & Hamre, B. K. (2008). *Classroom Assessment Scoring System (CLASS) manual PRE-K* (11. Aufl). Paul H. Brookes Publishing Co.

Vaughn, M. & Parsons, S. A. (2013). Adaptive Teachers as Innovators: Instructional Adaptations Opening Spaces for Enhanced Literacy Learning. *Language Arts, 91*(2), 81–93.

Vygotskij, L. S. (1987). *Arbeiten zur psychischen Entwicklung der Persönlichkeit. Ausgewählte Schriften: Bd. 2.* Pahl-Rugenstein.

Wullschleger, A., Lindmeier, A., Heinze, A., Meier-Wyder, A., Leuchter, M., Vogt, F. & Moser Opitz, E. (2022). Improving the quality of adaptive learning support provided by kindergarten teachers in play-based mathematical learning situations. *European Early Childhood Education Research Journal*, 1–18. https://doi.org/10.1080/1350293X.2022.2081348

Arbeitsgruppe Geometrie

Koordination: Carla Merschmeyer-Brüwer und Simone Reinhold
c.merschmeyer-bruewer@tu-bs.de simone.reinhold@uni-leipzig.de

Beitrag: Melina Wallner
melina.wallner@math.upb.de

Begriffliches Verständnis von Grundschüler*innen zur Achsensymmetrie

1 Einführung und Forschungsstand

Symmetrie weist insgesamt einen hohen Aspektreichtum auf (Winter, 1976). Sie ist in vielen Bereichen der Mathematik, Technik und Ästhetik zu finden und hat Bedeutung für unser räumliches Auffassungs- und Gliederungsvermögen (Franke & Reinhold, 2016). Symmetrie gilt als fundamentale Idee, die im Sinne des Spiralprinzips über die Schulzeit immer wieder aufgegriffen und vertieft wird. Der Blick in die Bildungsstandards zeigt, dass Achsensymmetrie die zentrale Symmetrieart in der Grundschule ist: Kinder sollen Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen und beschreiben und mit der Achsenspiegelung in Verbindung bringen (KMK, 2022).

Ergebnisse empirischer Studien zum Durchführen von Achsenspiegelungen und zum Erkennen von Achsensymmetrie als Eigenschaft liefern Kenntnisse über die Einflussnahme verschiedener Aufgaben- und Figurenmerkmale beim Bearbeiten von Symmetrieaufgaben sowie typische Fehler von Grundschulkindern (u.a. Götz et al. 2020).

Es ist also bekannt, welche Merkmale Einfluss auf das Erkennen von Achsensymmetrie haben, aber es ist wenig darüber bekannt, was Schüler*innen als charakteristisch für achsensymmetrische Figuren ansehen. Typische Bearbeitungsfehler bei spezifischen Aufgaben und Figuren können zwar erste Einblicke in die Vorstellungen der Kinder geben, fokussieren aber nicht auf ihr begriffliches Verständnis beim Erwerb im Unterricht. Wissen über das begriffliche Verständnis, das u.a. die Fehler bei Kindern hervorruft, ermöglicht eine gezielte Anpassung des Unterrichts, um diesen Herausforderungen effektiv zu begegnen.

2 Forschungsdesign

Im Forschungsprojekt wird im Rahmen der fachdidaktischen Entwicklungsforschung folgenden Forschungsfragen nachgegangen:

- Wie sollten Lernumgebungen gestaltet sein, die ein begriffliches Verständnis von Achsensymmetrie bei Grundschüler*innen anregen?
- Welches begriffliche Verständnis von Achsensymmetrie zeigen Schüler*innen beim Herstellen achsensymmetrischer Figuren und beim Überprüfen von Figuren auf Achsensymmetrie?

Die konzipierten Lernumgebungen wurden als Design-Experimente mit Schulklassen des zweiten und dritten Schuljahres im Lehr-Lern-Labor ‚ZahlenRaum' der Universität Paderborn durchgeführt. Die Arbeitsphasen der Schüler*innen wurden videografiert und im Anschluss am Transkript mit Mitteln der interpretativen Unterrichtsforschung und einer epistemologisch orientierten Analyse ausgewertet (Steinbring, 2005).

3 Einblick in eine Lernumgebung

Ziel der Lernumgebung „Achsensymmetrische und nicht achsensymmetrische Figuren" ist es, Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren erkennen, beschreiben und anwenden zu können. Die Lernumgebung unterteilt sich in zwei Etappen – das Klassifizieren und das Verändern. Die Etappe 1 dient dazu, dass die Kinder aufbauend auf ihren Vorerfahrungen, durch das *Klassifizieren* von Figuren nach den Kategorien achsensymmetrisch und nicht achsensymmetrisch, Kriterien für die Achsensymmetrie quadratischer Muster erkennen und zunächst miteinander diskutieren, ehe nach der Etappe 1 in der Zwischenreflexion die Eigenschaften geklärt werden. Durch das Betrachten von Beispielen und Gegenbeispielen können charakterisierende Eigenschaften, wie die Invarianz bei Achsenspiegelung oder die Zerlegbarkeit in zwei kongruente Teilfiguren unterschiedlicher Orientierung, von nicht charakterisierenden Eigenschaften, wie beispielsweise die Zerlegbarkeit in zwei kongruente Teilfiguren gleicher Orientierung (Verschiebungssymmetrie) oder Drehsymmetrie abstrahiert werden. Auf dieser Basis *verändern* die Schüler*innen in Etappe 2 nicht achsensymmetrische Figuren zu achsensymmetrischen Figuren.

Die betrachteten Figuren sind quadratisch und bestehen aus acht gleichschenkligen rechtwinkligen grünen und blauen Dreiecken, die in einem 4x4 Raster angeordnet sind. Die Figuren sind so konstruiert, dass eine differenzierte Zusammenstellung gegeben ist. Obwohl das Quadrat eigentlich vier Symmetrieachsen hat, weisen diese quadratischen achsensymmetrischen Figuren, aufgrund der Relevanz von Farbe und Anordnung der Dreiecke, eine unterschiedliche Anzahl und Ausrichtungen von Symmetrieachsen auf. Darüber hinaus enthält der Satz an Figuren neben der Achsensymmetrie und Asymmetrie auch Figuren mit anderen Symmetrie.

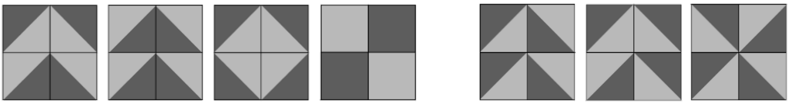
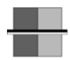


Abb. 1 Beispiele für achsensymmetrische und nicht achsensymmetrische Figuren

4 Einblick in Ergebnisse am Fallbeispiel

In einem kurzen Dialog aus der Etappe 1 entscheiden die zwei Schüler Julian und Henri, dass die abgebildete Figur als „nicht achsensymmetrisch" klassifiziert werden soll. Julian und Henri haben zuvor als Referenz für Achsensymmetrie ausgehandelt, dass die gespiegelte Figur, d.h. die Vereinigung von Teilfigur vor dem Spiegel und Spiegelbild, dasselbe Muster (gleiche Form und Farbe) aufweisen muss wie die ursprüngliche Figur.

47 H Weil, wenn man hier so (*hält den Spiegel horizontal über die Figur*) dann kommt zwar dasselbe Muster raus.



Aber hier (*hebt den Spiegel an, dreht die Figur und hält den Spiegel vertikal über die Figur*) kommt nur blau.

48 J (*schaut auf die Figur und die Spiegelfläche*) Ja.

49 H Und wenn man so macht (*dreht die Figur um 180° und hält den Spiegel weiterhin vertikal über die Figur)* auch nur

50 J Dann kommt nur grün. Also ist es nicht achsensymmetrisch.

Henri erläutert, dass der Spiegel in horizontaler Position dasselbe Muster erzeuge, aber in vertikaler Position die gespiegelte Figur entweder nur blau oder grün sei. Julian bestätigt dies und schlussfolgert, dass die Figur nicht achsensymmetrisch sei.

Aus dem Diskurs der beiden Schüler lässt sich rekonstruieren, dass sie den Begriff „Achsensymmetrie" in Bezug auf die quadratischen Figuren so interpretieren, dass einer Figur die Eigenschaft *nicht achsensymmetrisch* zugesprochen wird, wenn zusätzlich zu einer als Symmetrieachse erkannten Mittellinie oder Diagonale der quadratischen Figur eine weitere Mittellinie oder Diagonale identifiziert wird, die keine Symmetrieachse ist.

Auch darüberhinausgehende Analysen zeigen, dass Lernende hinterfragen, ob für die Achsensymmetrie von quadratischen Mustern eine Symmetrieachse ausreicht oder es weiterer Symmetrieachsen (aller Symmetrieachsen des Quadrats) bedarf. Die Schwierigkeit liegt weniger auf dem bloßen Identifizieren der Symmetrieachse, sondern mehr auf der Entscheidung, ob Achsensymmetrie vorliegt oder nicht. Die Frage nach der benötigten Anzahl an Symmetrieachsen zur Verifizierung von Achsensymmetrie differenziert die inhaltliche Aushandlung über die Charakteristika von Achsensymmetrie damit aus und wird im Fall der quadratischen Figuren zum ausschlaggebenden Aspekt beim Identifizieren von achsensymmetrischen Figuren. Diesem Vorgehen folgend werden weitere Referenzen herausgearbeitet, die von Schüler*innen zur Charakterisierung von Figuren herangezogen werden und zu lokalen Theorien des begrifflichen Verständnisses entwickelt.

Literatur

Götz, D., Gasteiger, H. & Kühnhenrich, M. (2020). Einfluss von Merkmalen ebener Figuren auf das Erkennen von Achsensymmetrie – Eine Analyse von Aufgabenlösungen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 41*(2), 523–544.

Franke, M. & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule.* Springer.

KMK (Hrsg.) (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004,* i.d.F. vom 23.06.2022.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction* (Bd. 38). Kluwer Academic Publishers.

Winter, H. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 8*(1/2), 14–18.

Arbeitsgruppe Kommunikation & Kooperation

Koordination: Birgit Brandt und Uta Häsel-Weide
birgit.brandt@zlb.tu-chemnitz.de
uta.haesel.weide@math.uni-paderborn.de
Beitrag: Elisa Wagner
elisa.wagner@tu-dresden.de elisa.wagner@zsb.uni-halle.de

Muster gemeinsam entdecken – Austauschprozesse von Schüler:innen in Partner:innen- und Gruppenarbeitsphasen

Im Dissertationsprojekt „Muster und Strukturen im Mathematikunterricht - Eine qualitative Studie zur Verbalisierung mathematischer Gedanken von Schüler:innen der Grundschule und Sekundarstufe“ werden Interaktionen von Schüler:innen untersucht, die über die Muster und Strukturen in Strukturierten Päckchen sprechen. Dabei wurden die Schüler:innen in Partner:innen- und Gruppenarbeitsphasen videographiert und im Rahmen einer turn-by-turn Analyse (Schütte & Jung 2016) ausgewertet.

1 Muster und Strukturen im Grundschulunterricht

Im fachdidaktischen Diskurs wird seit Jahrzehnten die Frage diskutiert, mit welchen Lernumgebungen und Aufgabenformaten Muster und Strukturen im Grundschulunterricht bestmöglich integriert werden können (Wittmann 1998; Hirt & Wälti 2008). Besonders die substantielle Lernumgebung der Strukturierten Päckchen (Wittmann & Müller 1994) steht für das Entdecken von Muster und Strukturen im Grundschulunterricht, über die sich Schüler:innen weiterführend austauschen sollen. Im Rahmen peer-interaktiver Austauschprozesse entstehen unterschiedliche Hilfe- und Kooperationsformen, auch wenn Aufgabenstellungen eigentlich anderes intendieren (Brandt 2005).

Ausgehend davon wird im Folgenden ein Transkriptausschnitt analysiert, in dem zwei Schüler an einem Strukturierten Päckchen arbeiten und sowohl die mathematische Entdeckung wie auch soziale Interaktion näher betrachtet wird. Es wird vorgeschlagen, dass dabei die Rollenkonstellation des „kritisch-überlegenen Helfenden“ konstituiert wird.

2 Der kritisch-überlegene Helfende

Ben und Luis (5.Klasse) bearbeiten in dieser Arbeitsphase verschiedene Strukturierte Päckchen. Diese beinhalten zumeist sechs vorgegebene Aufgaben und regen anschließend zum Finden der zehnten und zwanzigsten Rechnung an. Das Ausrechnen und Finden der Aufgaben bereitet Ben und Luis keine Probleme und sie interagieren wenig miteinander mit eher beiläufigen Gesprächen über die Noten der letzten Arbeit. Beide füllen das Arbeitsblatt aus und haben die folgenden Aufgaben notiert.

0.	400 – 365=	35
1.	390 – 350=	40
2.	380 – 335=	45
	…	
10.	300 – 215=	85
20.	200 – 65=	135
___.	___ – ___ =	

Abb. 1 Strukturiertes Päckchen Grundrechenoperation Subtraktion

Schließlich wenden sich die beiden Jungen der folgenden auf dem Arbeitsblatt notierten Aufgabe zu: „Finde die Rechnung, bei der der Subtrahend zum ersten Mal kleiner als null wird. Wie hast du sie gefunden?“ Nachdem sie eine Weile über diese Aufgabe nachdenken, meldet sich Luis und fragt die Lehrerin, wie eine „negative zehn“ geschrieben wird, diese antwortet, „äh du machst da ne Klammer und schreibst einfach ein Minus vor die 10“.

Für Luis scheint die Aufgabe nach dieser kurzen Frage kein Problem mehr zu sein und er löst die Aufgabe in dem er korrekterweise die 25. Rechnung: 150 – (-10) = 160 notiert. Ben sieht das und an dieser Stelle beginnt das Transkript:

Ben	Hä/ Frau [redacted]/
Luis	Hä ist doch ganz einfach (*legt dabei die Hände auf das Arbeitsblatt und verdeckt seine Lösung*)
	rechne doch mal (*verdeckt weiterhin die Lösung mit der linken Hand und zeigt mit der rechten Hand auf den Subtrahenden der zehnten Rechnung*)
	ähm sechs (kurze Pause)

	fünfundsechzig minus fünfzehn bis du unter der null bist
Ben	was/

Ben scheint Probleme mit der Aufgabenstellung zu haben und äußert dies mit einem fragenden „Hä“. Er versucht die Lehrkraft zu rufen, die jedoch nicht kommt. Das Rufen der Lehrperson könnte von Luis als Infrage-Stellung der Korrektheit seines Vorgehens interpretiert werden. Luis kontert daraufhin, dass es doch ganz einfach wäre, ohne das Problem genauer zu bestimmen. Dies stellt eine potenzielle Provokation dar, da Bens Verständnisproblem trivialisiert wird. Das Hilfegesuch von Ben an die Lehrperson wird von ihm damit als unnötig dargestellt und er schließt eine Aufforderung und Erklärungssequenz an, die als unaufgeforderte Hilfestellung verstanden werden kann. Er fordert Ben auf zu rechnen und gibt ihm mit „Fünfundsechzig minus fünfzehn bis du unter der null bist“ die konkreten Rechenschritte vor. Da Luis bereits schnell gemerkt hat, dass Ben mit der Aufgabe Schwierigkeiten hat, sind seine Ausführungen jedoch wenig weiterführend. Es scheint Luis vordergründig nicht darum zu gehen, den Rechenweg zu erklären. Vielmehr scheint es ihm wichtig zu sein, zu zeigen, dass ihm die Aufgabe selbst sehr leicht fällt und dass lediglich eine recht einfache Rechnung gerechnet werden müsse. Eine wirkliche Hilfestellung (nach der Ben ihn bisher gar nicht gefragt hat) wird erst später und auch nur in Form eines Hinweises und nicht als Lösung oder weiterreichende Erklärung formuliert.

In der weiteren Sequenz fragt Ben wieder nach, schafft es jedoch nicht eindeutig zu formulieren, was genau ihm Schwierigkeiten bereitet, daraufhin lehnt sich Luis von Ben weg. Nach einem Schritt, den Ben auf Luis zu geht, versuchen die beiden es nochmal mit der Lösung der Aufgabe.

Ben	Was ist das Ergebnis/ (*schaut Luis wieder an*)
Luis	Pech (*kurze Pause*) rechne es doch mal (…)
Luis	Du kannst doch einfach das zur null machen (*Luis zeigt auf Bens Blatt*) aber das plus 10 rechnen
Ben	hm versteh ich nich
Luis	was machst du, wenn du das plus zehn rechnest (*zeigt wieder auf Bens Blatt, auf den Minuenden der 25. Rechnung*) und das

	ne null ist (*zeigt dabei auf den Subtrahenden*) was ist das dann/ (*kurze Pause*)
Ben	Hundertsechzig (...)

Auf die explizite Frage, was das Ergebnis ist, geht Luis nicht sofort ein, er äußert, dass Ben „Pech“ gehabt hat und rechnen sollte. Auch an dieser Stelle positioniert sich Luis nicht als vollumfänglich helfende Instanz vielmehr als kritischer Helfer/Unterstützer, der seine Überlegenheit inszeniert und gleichzeitig kleinere Anhaltspunkte mit einfließen lässt. Mathematisch geht Luis bei seiner Erklärung oberflächlich auf das gleichsinnige Verändern der Subtraktion ein, indem er Ben auffordert bei der 25. Rechnung auf den Minuenden 150 plus 10 und aus dem Subtrahenden minus 10 eine null zu machen.

3 Fazit

Der kurze Transkriptausschnitt zeigt, dass in der Partner:innenarbeit soziale Hierarchien entstehen (Hackbarth 2017). In der Interaktion finden sich – wie auch in zahlreichen anderen Fällen dieser Studie – unterschwellige Konkurrenzsituationen, in denen die eigene Leistungsfähigkeit gegenüber dem Anderen inszeniert wird.

Literatur

Brandt, B. (2005). Interaktionsprozesse in jahrgangsübergreifenden Arbeitsgruppen. In: M. Götz, & K. Müller (Hrsg.), *Grundschule zwischen den Ansprüchen der Individualisierung und Standardisierung.* (S. 95-100.) VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Hackbarth, A. (2017). *Inklusionen und Exklusionen in Schülerinteraktion. Empirische Rekonstruktionen in jahrgangsübergreifenden Lerngruppen an einer Förderschule und an einer inklusiven Grundschule.* Klinkhardt.

Hirt, U., & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht.* Klett Kallmeyer.

Schütte, M., & Jung, J. (2016). Methodologie und methodisches Vorgehen Interpretativer Unterrichtsforschung am Beispiel inklusiven Lernens von Mathematik. *Zeitschrift für Inklusion*, 4.

Wittmann, E. Ch., & Müller G. N. (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Halbschriftliches und schriftliches Rechnen.* Klett.

Wittmann, E. Ch. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung, 16*(3), 329-342.

Arbeitsgruppe Lehrkräftebildung

Koordination: Stephanie Schuler und Gerald Wittmann
stephanie_schuler@uni-landau.de gerald.wittmann@ph-freiburg.de

Beitrag: Jeanne-Celine Linker und Luise Eichholz
jeanne-celine.linker@math.tu-dortmund.de

FÖDIMA – Förderorientierte Diagnostik im (inklusiven) mathematischen Anfangsunterricht

1 Das Projekt FÖDIMA

Im Projekt FÖDIMA[1] wurden im Schuljahr 2021/22 zwei Ansätze formativen Assessments im Rahmen zweier Fortbildungsmaßnahmen mit insgesamt ca. 120 teilnehmenden Lehrkräften zum förderorientierten und diagnostisch fundierten mathematischen Anfangsunterricht erprobt und evaluiert (vgl. Abschn. 2 und 3).

Gegenwärtig wird eine kombinierte Variante formativen Assessments mit dazugehörigen Materialien entwickelt (vgl. Abschn. 4), die zu einem Qualifizierungsprogramm für Multiplizierende ausgearbeitet, beforscht und gezielt in die Praxis disseminiert wird (vgl. Abschn. 5).

2 Theoretischer Hintergrund

Formatives Assessment zielt darauf ab, dass Lehrkräfte Informationen über die Lernenden prozessorientiert erfassen und die diagnostizierten Lernstände als Ausgangspunkt für weiteres Lernen nutzen (z. B. William & Thompson, 2008; Black & William, 2009; Schütze et al., 2018). Bezüglich der konkreten Umsetzung formativen Assessments kann zwischen verschiedenen Ansätzen unterschieden werden. Ein Merkmal zur Klassifizierung kann der Planungs- und Formalisierungsgrad des Assessments darstellen (vgl. Abb. 1).

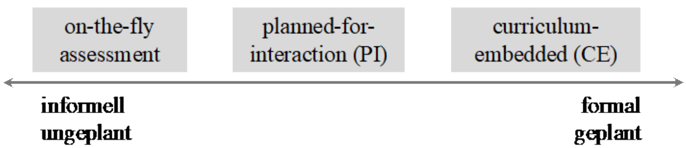


Abb. 1 Ausmaß der Formalisierung und Strukturierung des Assessments (Shavelson et al., 2008)

[1] Weitere Informationen können dem Projektfilm auf https://forschung-inklusive-bildung.de/schulische-bildung/foedima entnommen werden.

Shavelson et al. (2008) und Heritage (2007) unterscheiden demnach zwischen *on-the-fly*, *planned-for-interaction* (PI) und *curriculum-embedded assessment* (CE), wobei PI und CE in dem Projekt Berücksichtigung fanden. Bei PI planen und entscheiden Lehrkräfte vor dem Unterricht bewusst, wie sie Lernstände z. B. mit zentralen Fragen im Gespräch mit Lernenden während des Unterrichts erfassen wollen. CE wird ebenfalls geplant, ist jedoch im Vergleich stärker formalisiert und curricular eingebettet. Bei diesem Ansatz werden an bestimmten Schlüsselstellen Diagnoseaufgaben im Unterricht eingesetzt (Heritage, 2007; Shavelson et al., 2008). Eine Möglichkeit im Mathematikunterricht bietet der Einsatz systematisch aufeinander abgestimmter Aufgaben zur Diagnose in Standortbestimmungen (SOB) (Voßmeier, 2012).

Trotz erwiesener Wirksamkeit (z. B. Klute et al., 2017) scheint formatives Assessment noch immer kein integraler Bestandteil des Lehrens und Lernens im Schulalltag zu sein (Heritage, 2007). Lehrkräfte sollten daher in diesem Prozess unterstützt werden (z. B. Schütze et al., 2018).

3 Lehrkräftequalifizierung, Forschungsinteresse und Methoden

In der ersten Projektphase stand die Entwicklung und Durchführung einer Qualifikationsmaßnahme mit dem Schwerpunkt förderorientierte Diagnose im arithmetischen Anfangsunterricht für Lehrkräfte der Primarstufe im Mittelpunkt. Dabei wurden zwei verschiedene Varianten der Veranstaltung (CE und PI) in jeweils zwei Gruppen durchgeführt. In Bezug auf fachliche und mathematikdidaktische Inhalte waren beide Varianten identisch. Die Veranstaltungen unterschieden sich jedoch in dem Diagnoseinstrument, das die Lehrkräfte kennenlernten und bei Praxisaufgaben einsetzten. In der Gruppe PI nutzten die Lehrkräfte geplante diagnostische Gespräche, um die Lernstände (einzelner) Lernender zu erfassen. Die Lehrkräfte der Gruppe CE hingegen nutzten SOB vor und im Anschluss an eine Lerneinheit mit der gesamten Lerngruppe.

Das Forschungsinteresse liegt in der vergleichenden Evaluation der beiden Qualifikationsmaßnahmen PI und CE. Dabei wird aus mathematikdidaktischer Perspektive in Bezug auf das fachdidaktische Wissen und Handeln untersucht, über welche Diagnose- und Förderfähigkeiten die Lehrkräfte vor und nach der Teilnahme an den sechs Veranstaltungen verfügen und mögliche Effekte betrachtet. Zur Beantwortung des Forschungsinteresses wurden zwei schriftliche Vignetten in Form von Lernendendokumenten eingesetzt. Die Lehrkräfte beantworteten vor der ersten und im Anschluss an die letzte Veranstaltung im Rahmen dieser Vignetten jeweils vier offene Fragen, wobei sie die Vorgehensweise der Kinder beschreiben, Stärken und Schwächen erläutern, mögliche Ursachen analysieren und eine mögliche Weiterarbeit konkretisieren sollten (Brandt, 2022).

Außerdem werden die Unterrichtspraktiken in Bezug auf formatives Assessment der Lehrkräfte beider Gruppen untersucht. Dazu wurde die Beurteilungspraxis der Teilnehmenden vor und nach der Qualifikationsmaßnahme mit Hilfe eines Fragebogens sowie in halbstandardisierten Einzelinterviews (*n*=21) erhoben. Die endgültige Stichprobengröße der Lehrkräfte, die sowohl vor als auch nach den Veranstaltungen an den Erhebungen teilnahmen, betrug *n*=74.

Darüber hinaus wurden weitere Erhebungen in Bezug auf Akzeptanz, Machbarkeit, Verständnis, Implementationstreue, Selbstwirksamkeit und Identifikation der Lehrkräfte sowie die mathematischen Fähigkeiten, das Selbstkonzept und die kognitive Motivation der Schüler:innen durchgeführt. Erste Einblicke in Ergebnisse können u. a. Eichholz et al. (im Druck) entnommen werden.

4 Weiterentwicklung des Qualifizierungskonzepts

Aus den beiden Varianten der Fortbildung wird nun ein integriertes Qualifizierungskonzept entwickelt, dass beide Arten des formativen Assessments miteinander verbindet. Dazu werden SOB und eine Diagnose- und Förderkartei mit diagnostischen Basisaufgaben, Beobachtungshinweisen und dazu passenden Förderimpulsen erstellt. Dabei besteht eine enge Passung zwischen Aufgaben der SOB und den diagnostischen Basisaufgaben der Kartei.

Außerdem entsteht eine App, die dazu dient, die Lehrkräfte bei der gezielten Diagnose und Auswertung inhaltlich zu begleiten sowie bei der Organisation von Diagnose und Förderung zu unterstützen.

5 Ausblick: Qualifizierung von Multiplizierenden

Ab Juni 2024 werden die ca. 80 Fachberatenden in Nordrhein-Westfalen nach dem FÖDIMA-Konzept qualifiziert. Eine Teilgruppe von 12

Fachberatenden wird die Veranstaltungsreihe jeweils als Tandem durchführen. In diesem Rahmen wird u. a. untersucht, wie Multiplikator:innen fortbildungsfachdidaktisches Wissen mit Blick auf förderbezogene Diagnostik in inklusiven Settings des mathematischen Anfangsunterrichts konstruieren.

Dieses Projekt wird aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter den Förderkennzeichen 01NV2102A und 01NV2102B gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autorinnen.

Literatur

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Brandt, J. (2022). Diagnose und Förderung erlernen: Untersuchung zu Akzeptanz und Kompetenzen in einer universitären Großveranstaltung. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-36839-5

Eichholz, L., Linker, J.-C. & Schiffer, J. (im Druck). Födima – Förderorientierte Diagnostik im (inklusiven) mathematischen Anfangsunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022.*

Heritage, M. (2007). Formative Assessment: What Do Teachers Need to Know and Do? *Phi Delta Kappan, 89*(2), 140–145. https://doi.org/10.1177/003172170708900210

Klute, M., Apthorp, H., Harlacher, J., & Reale, M. (2017). Formative assessment and elementary school student academic achievement: A review of the evidence. REL 2017-259. *Regional Educational Laboratory Central.*

Schütze, B., Souvignier, E., & Hasselhorn, M. (2018). Stichwort – Formatives Assessment. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 21*, 697–715. https://doi.org/10.25656/01:16754

Shavelson, R. J., Young, D. B., Ayala, C. C., Brandon, P. R., Furtak, E. M., Ruiz-Primo, M. A., et al. (2008). On the Impact of Curriculum-Embedded Formative Assessment on Learning: A Collaboration between Curriculum and Assessment Developers. *Applied Measurement in Education, 21*(4), 295–314. https://doi.org/10.1080/08957340802347647

Voßmeier, J. (2012). *Schriftliche Standortbestimmungen im Arithmetikunterricht: Bd. 5.* Vieweg Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2405-9

Wiliam, D., & Thompson, M. (2008). Integrating assessment with learning: What will it take to make it work? In C. A. Dwyer (Hrsg.), *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning* (S. 53–82). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315086545

Arbeitsgruppe Lehren, Lernen und Forschen mit digitalen Medien

Koordination: Melanie Platz und Aileen Steffen
melanie.platz@uni-saarland.de aileen.steffen@uni-osnabrueck.de

Beitrag: Sophie Mense und Karina Höveler
sophie.mense@uni-muenster.de hoeveler@uni-muenster.de

Problemlösen mit der App Kombi - Ergebnisse einer Integrativen Learning Design-Studie

Problemlösen ist ein zentraler Inhalt des Mathematikunterrichts und erfordert von Lernenden, sich aktiv mit mathematischen Situationen auseinanderzusetzen, Lösungswege zu erarbeiten, Lösungen darzustellen und sie zu kommunizieren (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2016). Ein Aufgabenformat, das von den Lernenden Problemlösekompetenzen erfordert, sind ‚Finde-alle-Probleme', beispielsweise in kombinatorischen Kontexten, bei denen Lernende *alle* möglichen Lösungen einer Aufgabe finden und die Vollständigkeit der Lösungsmenge anschließend begründen sollen. Hier sollte ein besonderer Schwerpunkt darauf liegen, dass Lernende Aufgaben- und Strategiebeziehungen zwischen analogen und isomorphen Aufgaben entdecken und nutzen (Weskamp, 2019). Für den Fokus auf die Strategieentwicklung in Lösungsprozessen und anschließende Reflexionen bieten digitale Tools besondere Potentiale, denn sie ermöglichen dynamisierte und interaktive Handlungen, die das Strukturieren von Objekten und Untersuchen von Zusammenhängen vereinfachen (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2016). Für die Nutzung dieser Potentiale werden allerdings digitale Aufgaben benötigt, die ein Entdecken und Nutzen von Strukturen und Beziehungen erlauben. Hier setzt die App Kombi[1] an, die sowohl den kombinatorikspezifischen Vorstellungsaufbau als auch die Entwicklung von Problemlösestrategien unterstützen soll.

1 Integrative Learning Design Framework

Kombi wurde basierend auf dem Integrative Learning Design Framework (ILDF) von Bannan (2013) entwickelt. Der ILDF ist ein "meta-

[1] Kostenlos verfügbar: https://apps.apple.com/de/app/kombi/id1626071081

methodologisches" (S. 115) Prozessmodell für technologiebasierte didaktische Entwicklungsforschungsprojekte. Ziel des ILDF ist es, ein digitales Tool – hier Kombi – durch iterative Mikrozyklen zu verbessern und dabei forschungsbasiertes Wissen zu generieren. Er besteht aus vier Phasen: *Informierte Erkundung, Umsetzung, Evaluation der lokalen Auswirkungen* und *Evaluation der allgemeinen Auswirkungen*, die jeweils mehrere Mikrozyklen enthalten.

Ein zentrales Element von Kombi ist das Tool ‚Aufgabe erstellen'[2], mit dem digitale Aufgabenserien erstellt werden können, die das Entdecken von Aufgaben- und Strategiebeziehungen ermöglichen, und der damit verknüpfte Modus, in dem Lernende die Aufgaben empfangen und lösen können. Die mikrozyklische Entwicklung aus den ersten Phasen des ILDF und eine Evaluation durch Lehrkräfte, Mathematikdidaktiker*innen und Studierende werden in Mense et al. (i. Dr.) dargestellt. In der Phase *Evaluation der lokalen Auswirkungen* sind zudem die Nutzungsweisen von Lernenden im Problemlöseprozess mit dem Tool zu evaluieren. Hierauf liegt der Fokus dieser Studie.

2 Studiendesign

Bei der Evaluation der lokalen Auswirkungen des Tools stand folgende Frage im Mittelpunkt: *Wie lösen Lernende mit dem ‚Aufgabe-erstellen-Modus' erstellte kombinatorische Finde-alle-Probleme in der App Kombi?* Zu diesem Zweck wurden die Problemlöseprozesse von 23 Dritt- und Viertklässler*innen bei kombinatorischen Finde-alle-Problemen mit der App durch leitfadengestützte klinische Interviews erhoben. Alle Lernenden haben in den videografierten Interviews eine Aufgabenserie aus vier digital erstellten Aufgaben gelöst: zunächst zwei zueinander analoge Aufgaben und anschließend zwei hierzu isomorphe Aufgaben, die sich lediglich bezüglich des Kontextes unterscheiden. Die Kontexte und die Größe der jeweiligen Grundmengen unterscheiden sich bei den vier Interviewer*innen. Die Interviews und die Handlungen der Lernenden wurden transkribiert und mit einer qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010) ausgewertet.

[2] Übersicht über alle Funktionen der App unter https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/GIMB/kombi_handbuch.pdf [Stand 25.08.23]

3 Zentrale Ergebnisse

Zentrale Erkenntnisse zu den Vorgehensweisen der Lernenden werden am Beispiel des Problemlöseprozesses von Rafael exemplarisch verdeutlicht. Durch einen Impuls der Interviewerin, die Vollständigkeit seiner Lösungsmenge zu begründen, kommt ihm die Idee, seine gefundenen ‚Türme aus Bauklötzen' zu sortieren. Der digitale Lösungsprozess ermöglicht es Rafael, die bereits erstellte Lösung unkompliziert umzustrukturieren. Hierbei macht er die Entdeckung, dass es bei jeder fixierten Farbe einen Turm weniger gibt (s. Abb. 1, links).

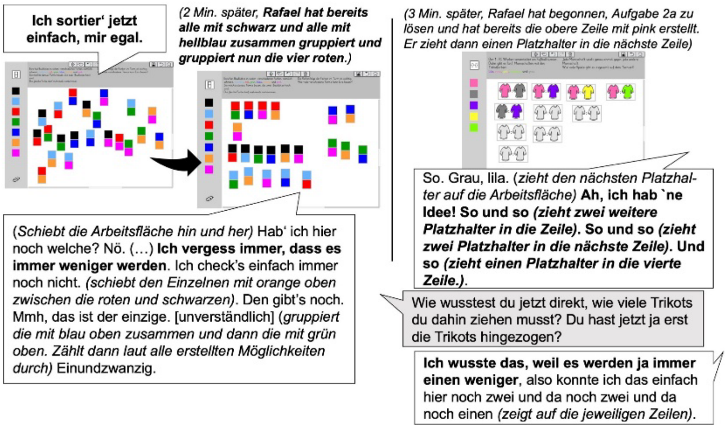


Abb. 1 Rafaels Problemlöseprozess

Diese Erkenntnis überträgt er anschließend auf die isomorphe Aufgabe zum Kontext ‚Fußballturnier' (s. Abb. 1, rechts): er zieht bereits vor dem Erstellen der Objekte die richtige Anzahl an Platzhaltern auf die Arbeitsfläche und begründet dies mit „Ich wusste das, weil es werden ja immer einen weniger". Der digitale Lösungsprozess ermöglicht es also, dass die Platzhalter Rafaels gedankliche Strukturierungen bereits vor dem tatsächlichen Erstellen der Objekte abbilden, so dass er seine entdeckte Strategiebeziehung direkt darstellen kann.

Das *Vorstrukturieren durch Platzhalter* nutzen 65% der Lernenden mindestens einmal, es stellt somit die meistgenutzte Besonderheit des digitalen Lösungsprozesses dar. Das *vereinfachte Umstrukturieren der Lösung* nutzen 43% der Lernenden, um nach dem Erstellen einer Lösungsmenge entdeckte Strukturen darzustellen, die sie im weiteren Lösungsprozess anwenden konnten.

4 Fazit und Ausblick

Das Fallbeispiel Rafael zeigt exemplarisch in der Evaluation der lokalen Auswirkungen des Tools, dass mit Kombi Aufgabenserien aus digitalen Finde-alle-Problemen erstellt werden können, mit denen Lernende beim digitalen Bearbeiten Aufgabenbeziehungen entdecken und tragfähige Problemlösestrategien entwickeln können. Die Interviews zeigten, dass die Lernenden in ihren Lösungsprozessen digitale Elemente wie das *Vorstrukturieren durch Platzhalter* und das *vereinfachte Umstrukturieren der Lösung* nutzen. Ausblickend zeigt sich in weiterführenden Analysen, dass die digitalen Aufgabenserien an sich für die Entwicklung von tragfähigen Strategien nicht ausreichen, sondern diese in den Interviews häufig durch Impulse der Interviewer*innen angeregt wurden. Dies verdeutlicht die Bedeutung der Lehrkraft für einen zielführenden Einsatz der App und legt eine entsprechende Professionalisierung nahe. Um zu überprüfen, ob die Strategien der Lernenden auch in anderen digitalen Problemlöseprozessen genutzt werden, wäre es langfristig wünschenswert, ein vergleichbares digitales Tool auch für Finde-alle-Probleme mit anderen mathematischen Inhalten (z.B. Rechenhäuser, etc.) zu entwickeln und zu untersuchen.

Literatur

Bannan, B. (2013). The Integrative Learning Design Framework: An Illustrated Example from the Domain of Instructional Technology. In N. M. Nieveen & T. Plomp (Hrsg.), *Educational design research Part A: an introduction*. (S. 114–133). SLO.

Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. (11., aktual. u. überarb. Auflage). Beltz.

Mense, S., Höveler, K., Blohm, P. A., & Willemsen, L. C. (i. Dr). Designing a tool for authoring digital problem-solving tasks in an app – an integrative learning design study. In *Proceedings of the 13th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2016). Digital Technologies and Mathematical Problem Solving: Redesigning Resources, Materials, and Extending Learning Environments. In K. Newton (Hrsg.), *Problem-solving: Strategies, challenges and outcomes* (S. 31–49). Nova Science Publishers.

Weskamp, S. (2019). *Heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht der Grundschule. Design Research im Rahmen substanzieller Lernumgebungen*. Springer Fachmedien.

Arbeitsgruppe Sachrechnen

Koordination: Dagmar Bönig

dboenig@uni-bremen.de

Beitrag: Silke Ruwisch und Charlotte Rechtsteiner

silke.ruwisch@leuphana.de rechtsteiner@ph-ludwigsburg.de

Modellieren – vielfältige Übersetzungs- und Strukturierungsprozesse statt kreisartiger Bearbeitungen

Rechtsteiner und Baireuther diskutierten in den Nuller Jahren im Rahmen ihrer Lehrveranstaltung „Kinder erkunden die Welt mit Hilfe von Mathematik", wie das Modellieren vor allem für Lernprozesse in der Grundschule sinnvoll zu fassen sei. Insbesondere interessierte sie das Modellieren-Lernen, das in seinen Facetten das mathematische Modellieren möglichst gut modellieren und sich nicht in der Bearbeitung einzelner Sachaufgaben erschöpfen sollte. In einem hochschulinternen Papier, das leider nicht allgemein verfügbar ist, fasste Baireuther 2013 anlässlich einer Zukunftswerkstatt zu seiner Verabschiedung diese Diskussionen zusammen und setzte den fachdidaktisch üblichen Modellierungskreisläufen (vgl. Ruwisch 2022) ein Zwei-Welten-Schema (Abb. 1) entgegen, welches hier präsentiert und im Rahmen des AG-Treffens zur Diskussion gestellt wird/wurde.

1 Das Zwei-Welten-Schema

Gemeinsam ist dem Zwei-Welten-Schema und den Modellierungskreisläufen der Versuch, diejenigen Prozesse genauer zu fassen, welche Ausschnitte der Alltags- und Berufswelt mit mathematischen Mitteln zu beschreiben und dadurch neue Erkenntnisse über diesen Realitätsausschnitt zu generieren suchen. Sie unterscheiden sich jedoch bzgl. des Stellenwertes der Mathematik in dieser Tätigkeit sowie der Frage nach dem Erlernen der notwendigen Teilkompetenzen: So werden im Zwei-Welten-Schema beide Welten gleichermaßen erhellt, das Wissen in ihnen erweitert. Sachprobleme werden tiefer durchdrungen, indem in ihnen mathematische Strukturen gesehen und untersucht werden, aber auch das mathematische Wissen wird – insbesondere in der Grundschule – erweitert, zumindest aber vertieft und gefestigt.

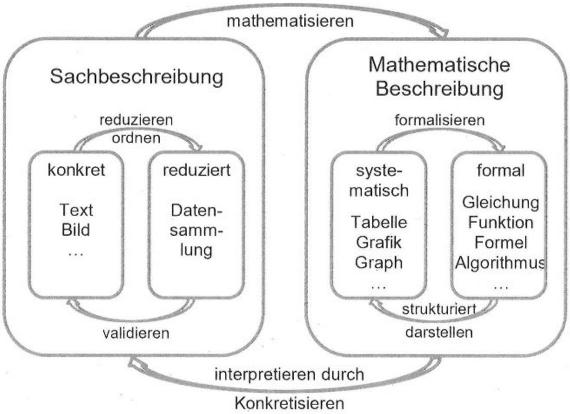


Abb. 1 Das Zwei-Welten-Schema des Modellierens nach Baireuther (2013, S. 1)

2 Ausgangspunkte für Lernprozesse im Zwei-Welten-Schema

Jeder der vier kleinen Kästen in Abb. 1 kann Lernprozesse im mathematischen Modellieren initiieren, da es sich um unterschiedliche Arten der Beschreibung einer Situation handelt:

Konkrete Sachbeschreibungen können als Erfahrungs- oder Beobachtungsberichte vorliegen oder in verschiedenen anderen Darstellungsarten einen Sachkontext rahmen.

Reduzierte Sachbeschreibungen können ebenfalls in verschiedenen Darstellungsarten vorliegen. Ausschmückende Elemente werden außen vor gelassen und es wird auf mathematisierbare Aspekte fokussiert. Vorliegende Daten werden geordnet, ergänzt, weitere Daten eingeholt oder erhoben, etc.

Tabellarische oder graphische Aufbereitungen entsprechender Einzeldaten aus dem Alltag können als **systematische mathematische Beschreibungen** Lernprozesse im Modellieren anregen, indem die Kinder diese ggf. mathematisch formalisieren oder aber sie situativ konkretisieren und erweitern.

Formale mathematische Beschreibungen finden sich lediglich in Ansätzen, da das mathematische Repertoire von Grundschulkindern noch gering ausgeprägt ist. Doch lassen sich erste Erfahrungen zu Gleichungen, aber auch zu verschiedenen Algorithmen, mit den anderen Formen der Situationsbeschreibungen verbinden.

3 Übersetzungs- und Strukturierungsprozesse zwischen und in den zwei Welten

Baireuther (2013) unterscheidet „zwischen **zwei unterschiedlich strukturierten Erfahrungswelten** [...] (eine Sachwelt mit real wahrnehmbaren Phänomenen und eine Ideenwelt mit mental konstruierten Objekten), die durch **Übersetzung** zwischen entsprechend **verschieden strukturierten Sprachen** (einer Alltagssprache mit auf verschiedene Sachbereiche bezogenen Ausprägungen und einer formalen Sprache) miteinander verbunden werden müssen." (S. 3, Herv. i. O.)

Durch eine Orientierung am Zwei-Welten-Schema werden die verschiedenen Teilkompetenzen gezielt fokussiert, indem die wichtigen Hauptprozesse der gegenseitigen Bezugnahme – das Mathematisieren einerseits und das Interpretieren durch Konkretisieren andererseits – von den weiteren notwendigen Prozessen in den beiden Welten separiert, letztere jedoch für ebenso wichtig gehalten werden.

In der Sachwelt werden konkrete Erfahrungen, Beobachtungen, Erzählungen geordnet, zusammengefasst und auf mathematisierbare Aspekte reduziert. So bereitet die reduzierte Sachbeschreibung mögliche Mathematisierungen vor. Diese Reduktion geht gleichzeitig mit einer Erweiterung einher, indem nicht nur einer Einzelfrage nachgegangen wird, sondern verschiedene mathematisierbare Aspekte der Situation thematisiert werden. So werden aus situativen konkreten Beschreibungen mathematisierbare Daten. Ähnlich fokussiert das Validieren einerseits auf konkrete Fragen und erweitert andererseits das Situationswissen um zusätzliche Aspekte, indem die entsprechenden Daten situativ gedeutet und auch bewertet werden.

In der Ideenwelt der Mathematik stehen systematisierende wie formale Beschreibungen zur Verfügung. Auch Schüler:innen der Grundschule sollen im Sinne einer Prä-Algebra bereits zum Formalisieren der systematisch aufbereiteten Daten angeregt werden: Insbesondere Gleichungen mit Hilfe der Grundrechenarten sowie Algorithmen stellen das zu erlernende formale Repertoire von Grundschulkindern dar. Doch auch erste funktionale Beschreibungen liegen über die tabellarische Zuordnung hinaus im Bereich des Möglichen. Umgekehrt gilt es formale Beschreibungen inhaltlich zu erden. Dies müssen nicht immer situative Konkretisierungen sein, sondern zunächst könnte ein

Funktionsterm zu einer entsprechenden tabellarisch systematisierten Aufstellung von Wertepaaren oder einem Graph führen, auch um ein Gefühl für die Veränderung einer Funktion zu erlangen.

In der konkreten Unterrichtstätigkeit kann an allen Stellen in das Modellieren – in die verschiedenen notwendigen Teilprozesse – eingestiegen werden. So kann eine Alltagssituation verbal in ihrer Problemhaftigkeit geschildert werden, es kann aber auch eine detaillierte Datensammlung als Einstieg vorliegen. Tabellarische oder graphische Systematisierungen entsprechender Einzeldaten oder aber auch gesamter Situationen in ihrer Breite finden sich ebenfalls vielfach im Alltag. Werden diese zum Ausgangspunkt der Betrachtungen, werden nicht nur die Fähigkeiten der Kinder im Lesen derartiger Darstellungen vertieft, sondern es schließen sich bewertende Fragen an, die über das reine Validieren hinausgehen und so für die Kinder sinnvoll erfahrbar werden.

Teilprozesse erfahren so ebenso wie die jeweiligen Produkte in den Kästen eine gezielte Fokussierung. Selbstverständlich stehen sie dennoch nicht für sich und lassen sich nicht ausschließlich isoliert betrachten, sondern sind eingebunden in die jeweiligen Übersetzungen und deren Interpretationen.

4 Fazit

Wesentlich erscheint bei einem derart verstandenen Lernen des mathematischen Modellierens im Unterricht, dass es gerade nicht um die isolierte Lösung von Einzelfragen geht, sondern dass eine Gesamtsituation möglichst weitreichend erhellt werden soll. Damit wird aber auch deutlich, dass nicht eine Sachrechenaufgabe zu berechnen ist, sondern vielfältige Daten erhoben, recherchiert und gesammelt, sowie zusammen- und gegenübergestellt werden müssen. Es findet somit nicht nur eine Reduktion von Informationen statt, sondern in beiden Welten werden diese angereichert und führen so zu einem erweiterten Sach- wie mathematischem Wissen.

Literatur

Baireuther, P. (2013). *Eine Vision von einem zukunftsfähigen Mathematikunterricht*. PH Weingarten.

Ruwisch, S. (2022). Modellieren als Kreislauf? *Grundschule Mathematik, (73)*, 32–35.

University of Bamberg Press

Dieser Tagungsband dokumentiert die Ergebnisse der 30. Jahrestagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), die dieses Mal vom 17. bis zum 19. November 2023 an der Universität Bremen stattfand.

Die Tagung stand unter dem Thema ‚Grundlegende Kompetenzen sichern – Lernende und Lehrende im Blick'.
Die Tagung greift damit die immer wieder aktuelle Frage auf, wie der Mathematikunterricht der Grundschule gestaltet werden kann, so dass alle Kinder grundlegende Kompetenzen erwerben und über diese auch sicher und langfristig verfügen. Empirische Studien wie etwa der IQB-Bildungstrend zeigen, dass der Anteil an Kindern, die diese Kompetenzen am Ende ihrer Grundschulzeit (noch) nicht besitzen, größer wird. Dabei ist ihre Bedeutung sowohl für die Bewältigung des Alltags als auch für das Weiterlernen in den darauffolgenden Schuljahren und im Beruf unbestritten.

Weiter setzten sich acht Arbeitsgruppen mit den Themenfeldern ‚Arithmetik', ‚Geometrie', ‚Sachrechnen', ‚Daten, Zufall und Wahrscheinlichkeit', ‚Kommunikation & Kooperation', ‚PriMaMedien: Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien', ‚Frühe mathematische Bildung' sowie ‚Lehrkräftebildung' intensiv mit aktuellen Forschungs- und Praxisfragen auseinander. Die zentralen Inhalte der Arbeitsgruppen sind in diesem Band ebenfalls dokumentiert.

Die jährlich stattfindende Herbsttagung des Arbeitskreises Grundschule der GDM richtet sich seit ihrem Bestehen an Personen, die den Dialog und die Zusammenarbeit zwischen Hochschule und allen Bereichen schulischer Praxis sowie den schulverwaltenden Institutionen suchen. Die Tagung ist in besonderer Weise durch eine offene und kollegiale Kooperation von Vertreterinnen und Vertretern aus Praxis und Theorie geprägt.

ISBN 978-3-86309-962-6

9 783863 099626

www.uni-bamberg.de/ubp