Competizione e complessità nel sistema internazionale tra equilibri e caos

Rodolfo Ragionieri

1. Introduzione: complessità e relazioni internazionali

Quando parliamo di complessità della politica internazionale intendiamo spesso genericamente riferirci alla grande quantità di attori (nonché alla loro diversità) e di problemi che interagiscono e si intersecano sull'arena internazionale e transnazionale (Rosenau 1997). Ci si riferisce però anche a risultati controintuitivi derivanti dall'interazione nel sistema (Jervis 1997, 3-12). Nonostante alcuni aspetti della teoria di Kaplan che sembrano andare in questa direzione (Kaplan 1958), i primi studi su questa prospettiva nello studio delle relazioni internazionali datano agli anni 80 (Gori 1987), per esempio con il tentativo di Saperstein di dare un significato alle soluzioni caotiche di modelli non lineari di corse agli armamenti (Saperstein 1984, 1986, 2007; Saperstein e Mayer-Kress 2008). Già allora si parlava di applicare l'idea di proprietà emergenti[1], cioè di proprietà che si registrano soltanto facendo interagire un gran numero di elementi. Ciò nonostante, il primo a tentare di usare i concetti della complessità in questo campo fu Rosenau (1989, 1997). Successivamente si sono sviluppate diverse idee in molte direzioni, come la simulazione di sistemi sociali (Epstein 2012; Cioffi-Revilla 2014), l'uso di sistemi dinamici, di cui si tratterà brevemente nei prossimi paragrafi, sviluppi della teoria dei giochi e delle decisioni (Axelrod

[1] In questo senso andava un seminario organizzato da Albrecht von Müller con la sede di Starnberg della Max Planck Gesellschaft, nell'estate del 1986, da titolo significativo *Modelling Processes of Structural Change in Social Systems.*

Rodolfo Ragionieri, University of Sassari, Italy, rodolforagionieri@gmail.com, 0000-0001-5785-5657

Referee List (DOI 10.36253/fup_referee_list)
FUP Best Practice in Scholarly Publishing (DOI 10.36253/fup_best_practice)

Rodolfo Ragionieri, *Competizione e complessità nel sistema internazionale tra equilibri e caos*, © Author(s), CC BY 4.0, DOI 10.36253/978-88-5518-595-0.09, in Fulvio Attinà, Luciano Bozzo, Marco Cesa, Sonia Lucarelli (edited by), *Eirene e Atena. Studi di politica internazionale in onore di Umberto Gori*, pp. 105-120, 2022, published by Firenze University Press, ISBN 978-88-5518-595-0, DOI 10.36253/978-88-5518-595-0

1997), teorie riflessive ispirate alla teoria dei sistemi di Luhmann (Luhmann 1998; Albert 2016), applicazioni alla nascita e al ciclo di vita di stati e imperi (Dark 1998; Turchin 2003b, 2005). Sono stati fatti anche tentativi di mutare complessivamente l'approccio nelle Relazioni Internazionali (Kavalsky 2015).

Se scendiamo nel dettaglio, possiamo individuare nella politica internazionale almeno tre tipi di complessità:

1. una complessità 'orizzontale', ossia l'esito anti-intuitivo e a volte paradossale dei comportamenti dei singoli elementi del sistema;
2. la «turbolenza» secondo Rosenau (1989), ossia l'interazione di attori di diverso tipo situati a livelli di analisi diversi;
3. le proprietà emergenti e di auto-organizzazione, cui si accennerà più avanti.

In questo contributo mi limiterò al primo tipo e tratterò infatti di modelli che descrivono l'evoluzione temporale di sistemi in cui si attuano delle dinamiche di competizione, con lo scopo di iniziare a dare una risposta alla domanda, se e come alcune questioni fondamentali della teoria delle Relazioni Internazionali possano ricevere nuova luce dalla teoria dei sistemi dinamici. Come prima cosa devo quindi dare qualche elemento che riguarda i sistemi dinamici, i punti di equilibrio e la loro caratterizzazione, il caos, la differenza tra processi lineari e non lineari, in modo da rendere comprensibili le parti seguenti.

Successivamente prenderò in considerazione dei modelli non lineari di competizione, come le equazioni di Richardson o altre da queste derivate, oppure modelli ispirati alle equazioni di Volterra-Lotka. Infine, partendo proprio dal tentativo di interpretare l'insorgere del caos in questi modelli, arriverò alla necessità di prendere in esame anche gli altri tipi di analisi della complessità, e quindi i fenomeni di auto-organizzazione e le proprietà emergenti.

2. Sistemi dinamici ed equilibri

Un sistema dinamico a dimensione n è un sistema di equazioni che descrive l'evoluzione delle n variabili di stato di un sistema, cioè quelle grandezze che descrivono lo stato (in termini non formali: la situazione) del sistema a un certo tempo determinato, in generale $x_1(t), ..., x_n(t)$. La descrizione del mutamento temporale può essere data, secondo le convenienze del sistema di cui costruire un modello, in tempo continuo o in tempo discreto. Nel primo caso consideriamo lo stato del sistema a ogni istante di un tempo che fluisce in modo continuo, e che quindi può essere identificato matematicamente, una volta identificato un istante di riferimento 'iniziale', con i numeri reali $\mathbb{R}$. In questo caso il sistema dinamico è dato da n equazioni differenziali del primo ordine con le relative condizioni iniziali, cioè da n equazioni che hanno a primo membro la derivata prima rispetto al tempo di una variabile di stato, e a secondo membro una espressione che dipende dalle variabili di stato, mentre le condizioni iniziali danno il valore di ciascuna variabile di stato a un certo istante t_0:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = f_n\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{1,0} \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_{\mathrm{n},0} \end{cases} \tag{2}$$

Se invece studiamo l'evoluzione del sistema in tempo discreto, studiamo l'evoluzione osservando nel tempo delle variabili di stato x_h, per $h = 1, ..., n$ a intervalli di tempo regolari che denotiamo con $k \in \mathbb{N}$, ossia k è un numero naturale. Se poniamo $\Delta x_{h,k} = x_{h,k+1} - x_{h,k}$, allora il sistema dinamico in tempo discreto si scrive

$$\begin{cases} \Delta x_{1,k} = f_1\big(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}\big) \\ \ldots \\ \Delta x_{n,k} = f_n\big(x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}\big) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{1,0} \\ \ldots \\ x_n(t_0) = x_{\mathrm{n},0} \end{cases} \tag{4}$$

Un esempio semplice unidimensionale è dato dalla rappresentazione come sistema dinamico di una qualsiasi quantità che cresce con un tasso annuo costante. Per esempio, se diciamo che il PIL di un certo paese cresce del 5% annuo, scriviamo

$$\Delta Y_k = 0.5 Y_k \tag{5}$$

aggiungendo come condizione iniziale il PIL dell'anno che assumiamo come iniziale, $Y(0) = Y_0$. Anche se potrebbe sembrare che i sistemi in tempo discreto siano matematicamente più facili, in realtà poi si constata che il loro comportamento è molto più complicato e difficile da studiare rispetto ai sistemi in tempo continuo.

Come si studia un sistema dinamico? In generale non se ne conosce una soluzione esatta, nella forma esplicita di n funzioni $x_1(t), ..., x_n(t)$ (nel caso del sistema continuo) o di una regola generale per calcolare l'evoluzione (nel caso discreto). In generale questo avviene invece sempre per i sistemi lineari, in cui cioè le variabili di stato compaiono soltanto con potenza uno e mai moltiplicate tra di loro. In tal caso (scriviamo soltanto le equazioni nel caso continuo) le equazioni hanno la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + \ldots + a_{1\mathrm{n}}x_n(t) \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{\mathrm{n}1}x_1(t) + \ldots + a_{\mathrm{nn}}x_n(t), \end{cases} \tag{6}$$

dove le costanti a_{ij} sono delle costanti reali. La soluzione generale esiste e può essere espressa esplicitamente anche se in forma non elementare (Arnold 1979, 141).

In generale però, si studieranno i punti di equilibrio, cioè quei valori $(x_1^*, ..., x_n^*)$ tali che il sistema per quei punti è in equilibrio, dunque il cui stato rimane costante. Nel caso continuo questo implica che

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \ldots \\ \dot{x}_n(t) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Quindi studiamo gli stati di equilibrio studiando le soluzioni delle equazioni

$$\begin{cases} f_1\big(x_1, \ldots, x_n\big) = 0 \\ \ldots \\ f_n\big(x_1, \ldots, x_n\big) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

e le analoghe per i sistemi in tempo discreto. Troveremo quindi i valori $x_1^*, ..., x_n^*$ che soddisfano la (8). Una volta calcolati gli equilibri vogliamo sapere quale sia il comportamento del sistema dinamico 'vicino' (in un intorno per dirla in linguaggio matematico) all'equilibrio. Prendiamo in considerazione tre possibilità, date delle condizioni iniziali un punto 'vicino' all'equilibrio:
- equilibrio stabile: il sistema non si allontanerà dall'equilibrio e resterà sufficientemente vicino all'equilibrio stesso;
- equilibrio asintoticamente stabile: il sistema tenderà ad avvicinarsi indefinitamente al punto di equilibrio, ossia a raggiungerlo per $t \to \infty$;
- equilibrio instabile: comunque la condizione iniziale sia vicina all'equilibrio, il sistema se ne allontanerà indefinitamente.

Quindi dobbiamo analizzare se i punti di equilibrio sono stabili o instabili, cioè se variando leggermente le condizioni generali rispetto al punto di equilibrio il sistema resterà vicino ancora al punto di equilibro (stabilità), se ne allontanerà (instabilità), oppure si avvicinerà indefinitamente al punto di equilibrio (stabilità asintotica)[2]. Questo studio viene compiuto prima per i sistemi lineari.

[2] Per tutte queste proprietà sono ovviamente possibili definizioni rigorose che possono essere trovate in ogni libro sui sistemi dinamici, vedi (Arnold 1979, Alligood, Sauer, Yorke 1997).

Per studiare le proprietà di un sistema non lineare vicino al punto di equilibrio il sistema viene approssimato con un sistema lineare che però, vicino al punto, ne mantiene le proprietà qualitativamente essenziali.

È inoltre importante analizzare se e come mutino esistenza e carattere dei punti di equilibrio al variare delle varie costanti reali presenti nel secondo membro dell'equazione. Questo si chiama studio delle biforcazioni. Infatti, al variare delle costanti presenti nelle equazioni in certi punti in luogo di un solo punto di equilibrio ne compaiono due, e quindi in un grafico tracciato scegliendo come variabile indipendente il parametro in causa, il grafico dei punti di equilibrio presenta un'effettiva biforcazione.

Non sempre però le cose sono così semplici. All'inizio degli anni Sessanta un matematico e meteorologo americano, Edward Norton Lorentz (1917-2008), si accorse, calcolando con i computer del tempo le traiettorie di un sistema dinamico apparentemente semplice, ma non lineare, che variando di poco le condizioni inziali si ottenevano dei comportamenti che dopo un certo lasso di tempo divergevano di molto. Il sistema era

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = -y + rx - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \tag{9}$$

dove σ ed *r* sono costanti legate alle caratteristiche fisiche del sistema studiato. Un risultato analogo fu raggiunto dal matematico sovietico Sinai per un biliardo a sponde rigide, in cui si muove un certo numero *N* di palle rigide (Sinai 1963, 1970). Tutto questo ha dato origine alla teoria del caos, sulla quale si sono accumulate migliaia di pubblicazioni matematiche, libri di testo, tentativi più o meno riusciti di divulgazione. Un sistema dinamico caotico è caratterizzato da tre proprietà:

1. dipendenza sensibile dalle condizioni inziali: se le condizioni iniziali differiscono anche di una piccola quantità, dopo un certo tempo gli stati del sistema che hanno quelle condizioni iniziali di poco diverse, differiranno di una quantità arbitraria;
2. un'orbita 'densa': non abbiamo un comportamento periodico, ma gli stati del sistema corrono indefinitamente infinitamente vicino ad altri stati del sistema all'interno di un insieme (l'attrattore)[3];
3. transitività topologica: nell'attrattore, tutte le parti sono prima o poi attraversate infinite volte dalle traiettorie del sistema.

Sono anche ben note e si studiano nei corsi universitari i metodi per l'analisi dei punti di equilibrio dei sistemi dinamici.

[3] Dal punto di vista matematico, l'attrattore è un insieme chiuso, e non ha una dimensione intera, ed è dunque un frattale. I sistemi caotici hanno attrattori frattali (Barnsley 1988).

Nel caso dei sistemi lineari, dato che ne conosciamo le soluzioni esatte, non possono prodursi le condizioni del caos, che invece possono, ma non necessariamente, prodursi nei sistemi non lineari.

Prima di illustrare delle applicazioni dobbiamo necessariamente attirare l'attenzione di chi legge su alcuni aspetti fondamentali, sia matematici che applicativi:

- dal punto di vista matematico, è importante la differenza tra sistemi a tempo discreto e sistemi a tempo continuo;
- dal punto di vista delle applicazioni, la differenza tra pensiero lineare e non lineare.

Per quanto riguarda i sistemi in tempo discreto, consideriamo il semplice sistema lineare (5) costituisca il modello dell'evoluzione della variabile di stato Y_k di un sistema che ha però risorse tali da poterne sostenere una quantità massima Y^* (qui può trattarsi di una popolazione, di un tipo di spesa, di un tipo di produzione). L'equazione di evoluzione diviene allora, ponendo $\alpha = 1 + a$,

$$Y_{k+1} = \alpha Y_k \left(1 - \frac{Y_k}{Y^*}\right); \tag{10}$$

dividendo per Y^* e ponendo $x_k = \frac{Y_k}{Y^*}$ si ottiene l'equazione

$$x_{k+1} = a x_k (1 - x_k) \tag{11}$$

Lo studio dei punti fissi della funzione $f(x) = ax(1 - x)$, la famosa mappa quadratica, dà evidentemente i punti di equilibrio dell'equazione di evoluzione (11), la cui analisi rigorosa (Devaney 1986) richiede buona parte di un corso semestrale. Tale analisi mette in evidenza come al crescere del parametro a si producano, oltre ai punti fissi, punti periodici di ordine k, cioè quegli $x_k{}^*$ tali che $f^k(x_k{}^*)$, dove f^k indica l'iterazione k volte di f. Infine, avvicinandosi ad $a = 4$, il sistema prima alterna comportamenti caotici con equilibri e punti periodici multipli, per poi arrivare a un generalizzato comportamento caotico. Questo comportamento è stato verificato sperimentalmente in certe popolazioni di insetti (Costantino et al. 1995). Quindi anche un sistema dinamico unidimensionale in tempo discreto relativamente semplice può esibire comportamenti complessi.

Al contrario, non solo l'analogo sistema dinamico in tempo continuo che ha come equazione di evoluzione $\dot{x}(t) = ax\left(1 - \frac{x}{x^*}\right)$ ha una soluzione esatta (la funzione logistica), ma esiste un importante teorema, il teorema di Poincaré-Bendixson, che riguarda il tipo di punti fissi e cicli (comportamenti periodici) dei sistemi dinamici, e garantisce l'impossibilità del caos a dimensione due. Quindi in tempo continuo il caos è possibile soltanto dalla dimensione 3 in poi.

Dunque, le condizioni del caos possono prodursi nei sistemi non lineari a tempo discreto in qualsiasi dimensione, e in tempo continuo dalla dimensione 3 in poi. Che cosa significa questo dal punto di vista delle applicazioni e dei modelli?

Che cosa vuol dire modello lineare o non lineare? Dal punto di vista matematico, come abbiamo visto, i sistemi lineari sono quelli in cui, a secondo membro delle equazioni di evoluzione, le variabili di stato appaiono con esponente uno e non vengono moltiplicate di loro, ma soltanto mediante la moltiplicazione per numeri e la somma, come è evidente dalla (6). I sistemi lineari, per quanto di alta dimensione, hanno sempre una soluzione analitica esplicita. Questa forma matematica significa che nelle catene causali non si ha interazione tra diversi fattori: essi provocano separatamente i loro effetti. Questa proprietà formale rappresenta un modo di pensare abbastanza comune nella vita di ogni giorno. Se noi pensiamo 'linearmente', combiniamo le cause per generare gli effetti in modo semplice. più precisamente, se noi pensiamo a catene di cause-effetti indipendenti, e poi combiniamo gli effetti, questo dà la stesso esito che combinare prima le cause e poi guardare l'effetto. Questa è stata a lungo la visione del mondo tra gli scienziati: «Come la scienza del Settecento credeva in un mondo deterministico, regolato come un orologio, così la scienza dell'Ottocento e della prima metà del Novecento credeva in un mondo lineare» (Bertugli, Vaio 2003, 57). Questa visione del mondo semplificata è confermata da quando apprendiamo a scuola le prime basi della fisica, come la regola della somma delle forze mediante la regola del parallelogramma. Questa situazione è in via di principio soltanto un'utile approssimazione che risulta assai utile (e, bisogna dire, in moltissimi casi anche appropriata a meno di variazioni non rilevabili sperimentalmente) per risolvere i problemi. Prendiamo come esempio i tre principi della dinamica di Newton In ciascuno di essi troviamo un elemento di approssimazione che rende possibile l'espressione del principio stesso. Per esempio il primo principio, il principio di inerzia, è il risultato di una sorta di esperimento concettuale. come risulta dal famoso ragionamento proposto da Galileo nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* (Galilei 1970). Nel secondo principio, la legge fondamentale della dinamica, si assume implicitamente che il corpo il cui moto è causato da una certa forza non sia origine di un altro campo di forza che possa interagire con la forza stessa, assunto che cade in relatività generale e teoria dei campi. Nel terzo principio l'assunto implicito è la trasmissione istantanea delle interazioni.

In generale, a lungo si è pensato che la combinazione di soluzioni lineari ci avrebbe dato. o approssimato in grado sufficiente, la soluzione di problemi non lineari. Questo presupposto è caduto prima di tutto nella meccanica dei fluidi e nei tentativi di spiegare il fenomeno della turbolenza, per poi essere del tutto abbandonato nella relatività generale. Nei processi sociali questo carattere non lineare è ancor più evidente. È infatti difficile, se non quasi impossibile, pensare ai processi sociali come processi in cui i vari fattori combinano il loro effetto in modo lineare (Mainzer 2007), a causa della molteplicità dei fattori in gioco e delle loro interazioni.

3. Opposizione diretta ed equazioni di evoluzione

Nella sua ampia trattazione dell'equilibrio di potenza, Hans Joachim Morgenthau identifica due schemi principali dell'equilibrio: l'opposizione diretta e la competizione (Morgenthau 1985, 192-4). La corsa agli armamenti tra due stati A e B «è il tipico strumento di un equilibrio di potenza dinamico, instabile» (Morgenthau 1985, 200). Possiamo però domandarci se una corsa agli armamenti sia sempre destinata a una spirale di continui aumenti. Questo il problema che per primo fu trattato da Lewis Fry Richardson (1881-1953), un fisico inglese, specializzato in meteorologia e fisica dell'atmosfera (Richardson 1960). Durante la Prima Guerra Mondiale fu obiettore di coscienza e servì sul fronte francese come autista del servizio sanitario. Inorridito dai massacri della Grande Guerra, pensò che l'umanità potesse evitare un nuovo disastro qualora si fossero scoperte le cause delle guerre. Negli anni precedenti il 1914, la corsa agli armamenti navali tra Germania e Gran Bretagna aveva costituito uno dei segni principali della crescente ostilità tra i due stati. Richardson pensò così che la dinamica della corsa agli armamenti fosse una delle più importanti cause delle guerre, e propose un sistema di equazioni il cui scopo era la spiegazione delle corse agli armamenti.

Le equazioni di Richardson costituiscono uno dei primi tentativi di costruire un modello matematico nell'area delle Relazioni Internazionali. Vediamo di che cosa si tratta. Siano ora x e y i livelli di armamento (misurati in qualche modo) di due paesi rivali. Scriveremo due equazioni nelle variabili di stato x e y. L'incremento del livello di armamento di un paese è proporzionale alla differenza in livello di armamento tra i due paesi, ed è influenzato negativamente dall'incremento di spesa militare. Si aggiunge poi un fattore di inimicizia. Otteniamo così un sistema di due equazioni differenziali lineari di evoluzione: in generale $x_1(t), \ldots, x_n(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = hy(t) - ax(t) + p \\ \dot{y}(t) = kx(t) - by(t) + q \end{cases} \tag{12}$$

Queste equazioni costituiscono un sistema dinamico in tempo continuo: descrivono l'evoluzione di un sistema che muta in un tempo che fluisce senza interruzione. Queste equazioni possono essere anche considerate come sistemi di equazioni differenziali che tendono a massimizzare (localmente) delle funzioni utilità opportunamente definite. Gli attori massimizzano 'senza pensare' la loro utilità a breve termine[4].

Le soluzioni e le caratteristiche di queste equazioni sono ben note (Nicholson 1989, 147-66). Infatti si calcola facilmente il punto di equilibrio del sistema, dato da

$$\begin{cases} hy - ax + p = 0 \\ kx - by + q = 0 \end{cases} \tag{13}$$

la cui soluzione è

[4] Affinché i due attori massimizzino localmente la loro utilità i due secondi membri devono essere le derivate parziali delle rispettiva utilità, $\frac{\partial u_x(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_y(x,y)}{\partial y}$.

$$\begin{cases} x^* = \frac{bp+qh}{ab-hk} \\ y^* = \frac{aq+kp}{kh-ba} \end{cases} \tag{14}$$

Calcolato il punto di equilibrio, nel caso di un sistema dinamico lineare si seguono le regole di determinazione della stabilità o instabilità dell'equilibrio, che dipendono soltanto dalle costanti *a*, *b*, *h*, *k*. Avremo quindi zone del piano (particolari condizioni inziali) che danno una situazione stabile o instabile, in funzione delle costanti *a*, *b*, *h*, *k* presenti nelle equzioni di evoluzione.

Nel modello di Richardson, infatti, le variazioni di armamenti di un attore dipendono linearmente dai livelli di armamenti di tutti gli attori, spesso valutati come spesa militare. Questa assunzione è evidentemente una forte semplificazione di una valutazione realistica dei rapporti di forze. La variabile critica infatti è un rapporto e non una differenza di forze, e si può anche ritenere che l'incremento degli armamenti non dipenda linearmente da questo rapporto, e inoltre una crescita infinita degli armamenti è impensabile data la finitezza delle risorse. Questo è vero sia per sistemi in tempo discreto, sia per sistemi in tempo continuo. Che cosa accade se sostituiamo ad equazioni lineari equazioni non lineari? Come sappiamo, a causa del teorema di Poincaré-Bendixson, in tempo continuo, a due dimensioni il comportamento del sistema continua ad essere sufficientemente regolare da rendere impossibile il caos. Le cose vanno invece in modo diverso sia nel caso di un modello non lineare in tempo discreto (con qualsiasi dimensione), sia in modelli tridimensionali e (o a maggiori dimensioni, ovviamente) in tempo continuo. Un modello non lineare è stato proposto da A. Saperstein per una corsa agli armamenti in tempo discreto (Saperstein 1984, 1986, 2007; Saperstein, Mayer-Kress 1988). Il modello di Saperstein è un modello di Richardson in cui le relazioni tra variabili non sono lineari. Per esempio, viene introdotto un livello massimo di armamenti sostenibile per le risorse di ciascun attore. Saperstein ha dimostrato che, per certi modelli di due attori in tempo discreto esistono soluzioni caotiche. Analogamente, si possono cercare soluzioni caotiche per modelli a tre attori in tempo continuo. Un esempio in tempo discreto è costituito da queste equazioni:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 4ay_k(1-y_k) \\ x_{k+1} = 4bx_k(1-x_k) \end{cases} \tag{15}$$

Queste sono equazioni logistiche accoppiate che possono ben avere comportamento caotico. Sono state proposte infinite variazioni sul tema delle equazioni di Richardson (per renderle non lineari e quindi interessanti) e delle proposte di Saperstein. Come abbiamo visto, non è difficile costruire modelli non lineari che mostrano un comportamento caotico. Il problema invece è costituito proprio dall'interpretazione del caos. In una corsa agli armamenti, una dinamica caotica costituisce l'incubo di coloro che prendono le decisioni. Supponiamo che i decisori suppongano di essere in una situazione che possa essere qualitativamente considerata come un sistema alla Richardson, con un chiaro punto di equilibrio e regioni di stabilità e instabilità. Improvvisamente, si rendono conto che la dinamica internazionale più che alla classica metafora dell'equilibrio corrisponde alla dinamica in un frattale. Non è difficile immaginare una reazione di panico, o, nel migliore dei casi, una nuova valutazione della situazione.

Saperstein, in tutti i suoi scritti, identifica la transizione al caos con l'instabilità nelle crisi e la tendenza verso la guerra (Saperstein 1984). L'idea dietro questa interpretazione è chiara: la transizione al caos implica un comportamento – entro certi limiti – imprevedibile, associabile con l'instabilità nelle crisi, e quindi la guerra. Tale idea dovrebbe avere un base teorica più forte e/o una maggiore evidenza empirica. Per esempio, potrebbe essere verificato empiricamente che in un modello i cui risultati si accordano con certe serie temporali, la transizione al caos nel modello corrisponde all'inizio della guerra nel caso empirico considerato. Oltre a questo, permangono dei problemi teorici. Primo, non è accettata in modo generale una relazione qualitativa tra corse agli armamenti e guerre (Wiberg 1990). Se invece accettiamo l'opinione che le corse agli armamenti instabili possano portare alla guerra, sembra difficile collegare questo a qualche soluzione caotica di qualche sistema non lineare derivato dalle equazioni di Richardson. Infatti, ancora accettando la relazione tra corse agli armamenti e guerra, la caratteristica principale della via che porta al conflitto armato dovrebbe essere l'incremento del livello di armamenti di ambedue gli attori. D'altra parte, dalla definizione di caos questo comportamento sembra avere poco in comune con il caos. Primo, si riscontra una certa regolarità: i livelli di armamento aumentano, senza una necessaria dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Inoltre non vi è alcun comportamento ricorrente, seppur irregolare, in una regione data e limitata (ossia non esiste un attrattore). Il fatto che la guerra abbia, nel suo sviluppo, aspetti che possono essere ritenuti intrattabili non implica che la transizione alla guerra debba essere modellizzata come transizione al caos. Tra l'altro questa transizione implicherebbe un evoluzione di eventi che obbediscono alle stesse 'leggi' in pace e in guerra. Saperstein pensa infatti a un'analogia con la transizione al moto turbolento dei fluidi.

Comunque, si può argomentare da altri punti di vista che l'asserzione il caos implica la guerra non è valida in generale. Per esempio, Diana Richards (1993), che analizza le serie temporali fornite da Modelski nei suoi studi sul potere marittimo, argomenta in modo convincente che i cicli di potere nella politica mondiale non sono realmente periodici, ma piuttosto caotici. Per quanto riguarda l'interpretazione del caos, Richards correttamente sottolinea che il carattere caotico dei cicli non implica ovviamente niente dal punto di vista del verificarsi di una guerra tra le grandi potenze, che sono considerate nella maggior parte delle teorie dei cicli soltanto una particolare transizione tra differenti fasi dei cicli stessi: «La dinamica caotica non implica il 'caos sociale', ma implica un'evoluzione complessa di non equilibrio che è strutturata dai vincoli sulle possibili percorsi ed esiti complessi sottostanti» (Richards 1993, 62). Inoltre, in modo del tutto generale, come ha scritto David Ruelle (1991, 98) sono le evoluzioni temporali con "eterno ritorno" a costituire l'ambito naturale di applicazione delle idee del caos. In queste evoluzioni il sistema ritorna incessantemente alle stesse situazioni. In altri termini, se a un certo momento il sistema si trova in un certo stato, ritornerà arbitrariamente in vicinanza di un tale stato in un momento successivi.

I modelli richiamati in questo paragrafo possono rappresentare ciò che Jervis chiama «system effects», e nella maggior parte dei casi retro-azioni. Questi fenomeni non lineari influenzano il comportamento di un sistema, anche quando il modello riguarda soltanto un livello di analisi.

4. Competizione, risorse, violenza

Un altro caso di equazioni che portano verso un comportamento complesso è costituito dai noti modelli di evoluzione delle popolazioni (Turchin 2003a). Partirò dai modelli in tempo continuo che danno risultati più semplici. Il modello di evoluzione della popolazioni più semplice è costituito dall'equazione la cui soluzione è una funzione esponenziale. Si parte dal presupposto che l'incremento della popolazione $n(t)$ nell'unità di tempo sia proporzionale alla popolazione stessa. Passando al limite si ha:

$$\dot{n}(t) = kn(t) \tag{16}$$

la soluzione di questa equazione, con la condizione iniziale $n(t_0) = n_0$ è l'esponenziale

$$n(t) = n_0 e^{kt} \tag{17}$$

Questa soluzione, che rappresenta un tipo particolare di crescita infinita di una popolazione, è possibile soltanto per risorse che crescono in modo analogo, secondo quanto già aveva intuito Malthus. Si introduce quindi una popolazione limite sostenibile dalle risorse, N. Al termine già presente nella equazione (17) a secondo membro se ne sottrae uno nullo per $n(t) = 0$, minore di zero per $n(t) > N$ e maggiore di zero per $n(t) < N$. Quindi, se la popolazione eccede N l'incremento sarà negativo e la dinamica del sistema tenderà a riportarne la popolazione sul valore di equilibrio, cioè quello per cui $\dot{n}(t) = 0$. si ottiene così il modello logistico

$$\dot{n}(t) = kn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{N}\right) \tag{18}$$

L'integrazione di questa equazione differenziale dà proprio la cosiddetta funzione logistica

$$n(t) = \frac{N}{1 + ce^{-kt}} \tag{19}$$

dove c è una costante che si calcola imponendo la condizione iniziale. Quindi secondo il modello logistico in tempo continuo si ha un'evoluzione prevedibile, che nel lungo periodo (in linguaggio matematico al limite per $t \to \infty$) stabilizza la popolazione sul suo massimo livello compatibile con le riserve disponibili. Se invece prendiamo in considerazione il modello analogo in tempo discreto otteniamo, come abbiamo visto sopra, che per certi valori della costante k si ha una transizione a un'evoluzione per certe aspetti imprevedibile, si ha cioè una transizione a un comportamento caotico.

Compiamo ora il passo successivo, e cioè introduciamo nel modello risorse variabili. Prendiamo inconsiderazione due popolazioni in competizione: risorse e consumatori di risorse, o se preferiamo, prede e predatori. Facciamo due ipotesi:

- per una bassa densità di risorse, l'ammontare di risorse usato da ogni consumatore è proporzionale alla densità delle risorse;
- la quantità di energia che un singolo consumatore può usare è proporzionale alla densità delle risorse.

Otteniamo così le famose equazioni di Volterra-Lotka:

$$\begin{cases} \dot{n}(t) = kn(t) - \beta n(t)p(t) \\ \dot{p}(t) = an(t)p(t) - \lambda p(t) \end{cases} \tag{20}$$

dove $n(t)$ è la densità delle prede e $p(t)$ è la densità dei predatori, e si è fatta la supposizione che i predatori tengano la densità delle prede lontano dal limite logistico. Queste equazioni approssimano in modo soddisfacente il carattere oscillante delle popolazioni in competizione, ma spesso non descrivono la dinamica in modo preciso. Si può per esempio supporre che la popolazione delle prede si trovi vicino (come numero) al limite logistico. In questo caso si introdurrà nella prima equazione un termine logistico a secondo membro. Un altra opzione è costituita dal tasso a cui i predatori uccidono, che è dato dal secondo termine nel secondo membro della prima equazione. La risposta lineare che troviamo nell'equazione di Volterra-Lotka può essere considerata un'approssimazione, che sostituiamo con un termine che implica che la crescita dei predatori a un certo punto tende a stabilizzarsi. Sostituiamo quindi il termine lineare $\beta n(t)$ con un termine del tipo $\frac{\beta n(t)}{\gamma + n(t)}$. Le equazioni divengono così

$$\begin{cases} \dot{n}(t) = kn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{N}\right) - \frac{\beta n(t)p(t)}{\gamma + n} \\ \dot{p}(t) = an(t)p(t) - \lambda p(t) \end{cases} \tag{21}$$

Questo è il cosiddetto modello di Rosenzweig-McArthur (Turchin 2003a). La dinamica delle popolazioni è una delle aree di maggior successo nell'uso di modelli matematici per descrivere la competizione.

Peter Turchin ha applicato questo tipo di modelli a tipi diversi di dinamiche socio-storiche. In particolare si è interessato dello sviluppo degli imperi, che collega alle frontiere meta-etniche e che, seguendo la famosa teoria di Ibn Khaldun, fa dipendere dalla coesione di gruppo, o *'asabiyya* (Turchin 2003b, 2005).

Turchin formalizza l'idea di *'asabiyya* ed è interessato da questo concetto come capacità di azione collettiva diretta all'espansione territoriale. Pone dei limiti logistici alla capacità di espansione e così scrive due equazioni di tipo logistico per l'estensione territoriale e la *'asabiyya*. La sua analisi e quella di altri studiosi (White 2008) porta, in consonanza con l'idea di Ibn Khaldun, ad un unica fase di espansione cui segue un declino.

Un'altra interessante applicazione delle equazioni delle popolazioni alle interazioni sociali è stata proposta da Mario Primicerio, Juan Nuno e Miguel Herreri (2008), che hanno usato un modello a tre popolazioni per descrivere la competizione tra stati e criminalità, e che potrebbe anche essere usato per la competizione tra stati e gruppi terroristi. Gli autori prendono in considerazione tre popolazioni: la prima, X, è detta quella dei proprietari, la seconda, Y, quella dei criminali, la terza, Z, quella delle guardie di sicurezza. La popolazione Y può essere considerata costituita da predatori della prima, X, la popolazione Z invece predatrice delle altre due, in quanto deve identificare e neutralizzare la seconda, e in quanto X deve sostenere i costi della sua sicurezza. Si costruisce un modello tridimensionale in cui avviene un crimine quando un elemento della popolazione X incontra un membro della popolazione Y in assenza di un membro della popolazione Z. La popolazione $X(t)$ tenderà a seguire un andamento logistico in assenza di 'predazione' da parte di Y e di Z, tenendo in consideraziozioner una popolazione massima di entità N e una ottimale di entità K. vengono inoltre introdotti termini simili a quelli aggiunti da Rosenzweig per correggere le equazioni di Volterra-Lotka.

La prima popolazione è diminuita di un fattore proporzionale a un termine di tipo Rosenzweig e di un altro termine dovuto ai costi ripartiti tra tutta la popolazione per pagare le guardie di sicurezza. La popolazione criminale aumenta proporzionalmente alle interazioni con la popolazione di proprietari, e quindi si incrementa con la sua crescita, e diminuisce sia per la predazione da parte di Z, sia per la competizione interspecifica, che viene in questo modello descritta mediante due termini, uno lineare e uno quadratico. Infine Z cresce proporzionalmente ai crimini commessi e soffre, oltre che di un decremento naturale, delle perdite causate dal conflitto con Y, sia sotto la forma di morti e feriti, sia di defezioni. Variando le costanti si ottiene una notevole varietà di equilibri e di oscillazioni nel rapporto tra criminalità e forze di sicurezza. Dunque anche in questo caso emerge l'incertezza del concetto di equilibrio.

5. Riflessioni su equilibrio, autoorganizzazione e complessità

Queste semplici considerazioni ci portano a constatare che il verificarsi di un equilibrio in una situazione di competizione è tutt'altro che cosa semplice. Nel caso del tempo continuo e a dimensione due l'equilibrio può essere stabile o instabile, ma, come abbiamo visto, il teorema di Poincaré-Bendixson implica nei casi di interesse applicativo l'impossibilità della transizione al caos. Abbiamo visto che, al contrario, nel caso del tempo discreto si hanno orbite caotiche anche a dimensione uno (ovviamente per modelli non lineari). A dimensione tre però le cose si complicano. Infatti è possibile la transizione al caos anche nel caso del tempo continuo. Questo potrebbe costituire una conferma qualitativa all'idea di Kenneth Waltz secondo la quale i sistemi bipolari sono più stabili, ossia meno inclini alla guerra, proprio perché il calcolo è semplificato dalla presenza di due soli attori (Waltz 1979).

Se andiamo però ad analizzare sistemi multipolari le cose si complicano. Questo d'altra parte corrisponde a quanto pensano molti studiosi provenienti da varie scuole, e cioè che la mera competizione di potere non può da sola portare all'equilibrio: da Morgenthau (1985) alla scuola inglese (Bull 1977), da Schmitt (1951) a Wendt (1999). Inoltre l'equilibrio, come notano studiosi di tutte le tendenze teoriche nelle Relazioni Internazionali, è un fenomeno ricorrente, anche se, possiamo dire, non necessitato né dominante (Kaufman, Little, Wohlforth 2007). Anche Robert Jervis si chiede se «la teoria dell'equilibrio di potenza, la dissuasione, o il modello a spirale siano sempre corrette; piuttosto ciascuna generalizzazione è valida in certe condizioni» (Jervis 1997, 176).

Se da una parte la via delle equazioni ci mostra tutte le insidie connesse all'uso del concetto di equilibrio (instabilità e caos), forse ci stimola a cercare altre metafore per spiegare l'insorgere dell'equilibrio stesso , anche a partire dalle precedenti osservazioni. Questa via è quella delle strutture emergenti. Qui si apre però un ampio terreno che non è quello di questo contributo.

Riferimenti bibliografici

Albert, Mathias. 2016. *A Theory of World Politics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Alligood, Kathleen T., Tim D. Sauer e James A. Yorke. 1996. *Chaos. An Introduction to Dynamical Systems*. New York: Springer.

Arnold, Vladimir I. 1979. *Equazioni differenziali ordinarie*. Mosca: Mir.

Axelrod, Robert. 1997. *The Complexity of Cooperation*. Princeton: Princeton University Press.

Bertuglia, Cristoforo Sergio, e Franco Vaio. 2003. *Non Linearità, caos, complessità. Le dinamiche dei sistemi naturali e sociali*. Torino: Boringhieri.

Bull, Hedley. 1977. *The anarchical society: a study of order in world politics*. London: MacMillan.

Cioffi-Revilla, Claudio. 2014. *Introduction to computational social science*. London-Heidelberg: Springer.

Costantino, R. F., J. M. Cushing, B. Dennis and R. A. Desharnais. 1995. "Experimentally induced transitions in the dynamic behaviour of insect populations." *Nature* 375 (6528): 227-30.

Dark, K. R. 1998. *The waves of time: long-term change and international relations*. London: Pinter.

Devaney, Robert L. 1986. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Menlo Park: Benjamin Cummings.

Galilei, Galileo. 1970. *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*. Torino: Einaudi.

Gori, Umberto. 1987. "Caos, ordine, complessità nelle relazioni internazionali." In *Disordine, ordine, gerarchia*, 377-81. Bologna: DSE.

Jervis, Robert. 1997. *System Effects. Complexity in Political and Social Life*. Princeton: Princeton University Press.

Kaplan, Morton A. 1957. *System and Process in International Politics*. New York: John Wiley.

Kaufman, Stuart J., Richard Little, and William C. Wohlforth. 2007. *The balance of power in world history*. New York: Springer.

Kavalski, Emilian, edited by. 2005. *World Politics at the Edge of Chaos: Reflections on Complexity and Global Life*. Albany: State University of New York Press.

Luhmann, Niklas. 1998. *Die Gesellschft der Gesellschaft*. Franfurt am Main: Suhrkamp.

Mainzer, Klaus. 2007. *Thinking in complexity: The computational dynamics of matter, mind and mankind*. Berlin: Springer.

Morgenthau, Hans J. 1985. *Politics among nations: The struggle for power and peace*. New York: Knopf.

Nicholson, Michael. 1989. *Formal Theory of International Relations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nuño, Juan C., Miguel A. Herrero, and Mario Primicerio. 2008. "A triangle model of criminality." *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, Elsevier* 387, 12: 2926-36.

Richards, Diana. 1993. "A chaotic model of power concentration in the international system." *International Studies Quarterly* 37 (1): 55-72.

Richardson, Lewis Fry. 1960. *Arms and Insecurity: A Mathematical Study of the Causes and Origins of War*. Pittsburgh: Boxwood Press.

Rosenau, James N. 1989. *Turbulence in World Politics: A Theory of Change and Continuity*. Princeton: Princeton University Press.

Rosenau, James N. 1997. "Many damn things simultaneously: Complexity theory and world affairs." *Complexity, global politics, and national security,* edited by David S. Alberts, and Thomas J. Czerwinski, 32-43. Washington: National Defense University..

Saperstein, Alvin M. 1984. "Chaos-a model for the outbreak of war." *Nature* 309 (5966): 303-5.

Saperstein, Alvin M. 1986. "Predictability, chaos, and the transition to war." *Bulletin of Peace Proposals* 17 (1): 87-93.

Saperstein, Alvin M. 2007. "Chaos in models of arms races and the initiation of war: Crisis stability and instability in an international system." *Complexity* 12 (3): 22-6.

Saperstein, Alvin M., and Gottfried Mayer-Kress. 1988. "A nonlinear dynamical model of the impact of SDI on the arms race." *Journal of Conflict Resolution* 32 (4): 636-70.

Schmitt, Carl. 1950. *Der Nomos der Erde*. Köln: Greven.

Sinai, Yakov Grigor'evich. 1963. "On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics." *Doklady Akademii Nauk* 153 (6): 1261-64.

Sinai, Yakov Grigor'evich. 1970. "Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards." *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* 25 (2): 141-92.

Turchin, Peter. 2003a. *Complex Population Dynamics*. Princeton: Princeton University Press.

Turchin, Peter. 2003b. *Historical Dynamics*. Princeton: Princeton University Press.

Turchin, Peter. 2005. *War and peace and war: The life cycles of imperial nations*. New York: Pi New York.

Waltz; Kenneth N. 1979. *Theory of international politics*. Reading, Mass.: Addison Wesley.

Wendt, Alexander. 1999. *Social theory of international politics*. Cambridge: Cambridge University Press.

White, Douglas R. 2008. "Dynamics of Human Behavior." *SFI Working paper* 2008-09-042.

Wiberg, Håkan. 1990. "Arms races, formal models, and quantitative tests." In *Arms races. Technological and political dynamics*, edited by Nils Petter Gleditch, and Olav Njolstad, 31-57. London: Sage.