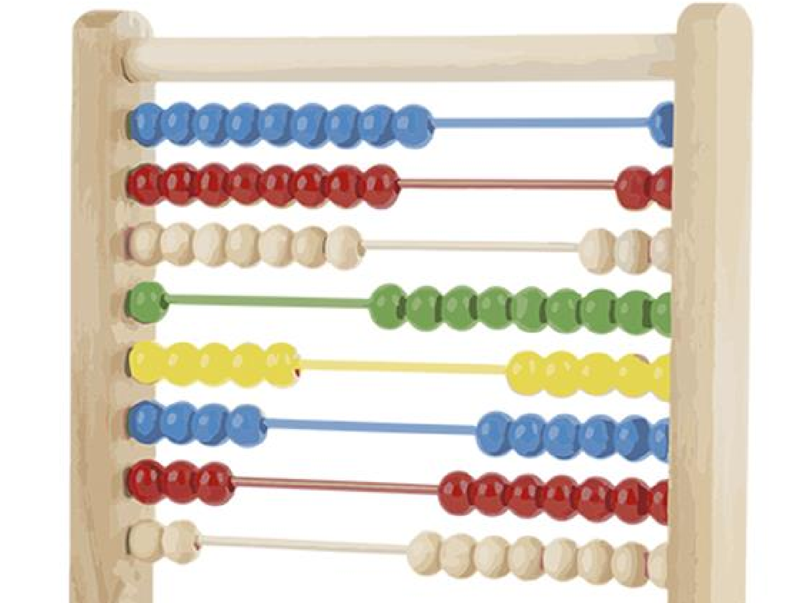
Daniele Buratta

Dialogare

compendio di matematica



FIRENZE UNIVERSITY PRESS

Titoli pubblicati
Bruni R., *Dialogare*: compendio di Logica
Buratta D., *Dialogare*: compendio di Matematica
Frizzi F., *Dialogare*: compendio di Biologia
Lima M., *Dialogare*: compendio di Fisica
Peruzzini R., *Dialogare*: compendio di Chimica

Daniele Buratta

Dialogare: compendio di matematica

Firenze University Press
2017

Dialogare: compendio di matematica / Daniele Buratta. – Firenze : Firenze University Press, 2017.
(Strumenti per la didattica e la ricerca ; 186)

http://digital.casalini.it/9788864534831

ISBN 978-88-6453-483-1 (online)

Progetto grafico di copertina: Alberto Pizarro Fernández, PaginaMaestra snc

Università degli Studi di Firenze
Firenze University Press
via Cittadella, 7, 50144 Firenze, Italy
www.fupress.com

Indice

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Introduzione

Sandra Furlanetto
Delegata all'Orientamento dell'Università di Firenze

I compendi di *Dialogare* nascono come parte del progetto di Orientamento alla scelta universitaria denominato *Scuola Università di Firenze in continuità*. Il progetto è stato sviluppato dall'Università di Firenze in collaborazione con l'Ufficio Scolastico Regionale per la Toscana allo scopo di facilitare la transizione Scuola-Università.

Questi compendi disciplinari traggono origine dal confronto tra docenti della scuola secondaria di secondo grado e docenti universitari e sono stati realizzati da assegnisti di ricerca dell'Università di Firenze che hanno svolto un progetto dal titolo: *DIALOGARE: promozione di forme di raccordo Scuola-Università per l'integrazione ed il potenziamento dello studio delle discipline scientifiche e della logica* finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca.

I compendi sono uno strumento ideato per integrare e potenziare le aree disciplinari di base, che sono presenti in numerosi test per la valutazione delle competenze in ingresso o nei test per l'accesso a corsi a numero programmato locale o nazionale: la logica, fondamentale per il ragionamento e l'argomentazione, e le discipline scientifiche di matematica, fisica, chimica e biologia.

Ogni compendio presenta una sua struttura specifica, legata al contenuto disciplinare. Tuttavia, in quanto parti di un progetto complessivo volto a favorire l'accesso all'Università, tutti condividono alcuni aspetti generali che gli assegnisti di ricerca, confrontandosi con gli studenti dei primi anni dell'Università, hanno desiderato segnalare ai futuri studenti affinché vivano al meglio il proprio periodo universitario.

Valutare le proprie competenze
In quasi tutti i corsi universitari argomenti noti possono essere trattati nuovamente per le loro diverse future applicazioni. È quindi importante saper applicare la teoria alla pratica: gli esercizi possono aiutare a raggiungere questo scopo. È importante inoltre saper valutare le proprie reali competenze e, se necessario, potenziarle.

Frequentare le lezioni
È importante partecipare attivamente alle lezioni, cercando di capire gli argomenti trattati, studiando con regolarità.

Curare il linguaggio
Ogni materia ha il proprio linguaggio specifico: conoscerlo e usarlo è essenziale.

Studiare confrontandosi
Il confronto con gli altri studenti e il colloquio con i professori nell'orario di ricevimento e con i tutor che sono presenti presso tutte le scuole di Ateneo è utile per studiare in modo proficuo.

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Organizzazione e sostenibilità
L'Università richiede organizzazione nello studio e quindi nella scelta degli esami da sostenere e nell'impegno quotidiano. Non devono essere sottovalutati anche gli aspetti burocratici (tasse, borse di studio, scadenze). Imparare a organizzarsi significa valutare in modo sereno le reali possibilità e progettare azioni sostenibili.

Passione e Determinazione
L'alleato più forte, oltre alla determinazione, dovrà sempre essere l'entusiasmo per il percorso di studi scelto.

Vivere l'Università
L'Università non è solo lezioni ed esami: è una comunità che offre anche eventi culturali, sportivi e di divulgazione. Queste esperienze, se vissute con entusiasmo, facilitano la maturazione di competenze trasversali utili per una serena progressione di carriera.

Un ringraziamento a tutte le Scuole secondarie di secondo grado toscane che dal 2012 collaborano con l'Università di Firenze.

Particolare riconoscenza va anche ai Delegati all'Orientamento dell'Università di Firenze per il loro straordinario impegno:

Marco Benvenuti, Giorgia Bulli, Mauro Campus, Carlo Carcasci, Daniela Catarzi, Alessandra De Luca, Annamaria Di Fabio, Chiara Fort, Emiliano Macinai, Daniela Manetti, Alessandro Merlo, Pietro Amedeo Modesti, Francesca Mugnai, Silvia Ranfagni, Stefano Rapaccini, Anna Rodolfi.

Guida all'uso del compendio

Il materiale del presente volume è stato suddiviso in 5 parti e viene presentato mediante delle unità didattiche che contengono lo svolgimento di un dato argomento. Al termine di ciascuna unità è possibile trovare degli esercizi di verifica dell'apprendimento. Al termine di tutte le parti è infine posta una sezione dedicata alle soluzioni degli esercizi, tutti commentati.

Le parti raggruppano le unità per argomenti e li suddividono in macroaree:

- Numeri, potenze e radicali
- Calcolo letterale
- Equazioni
- Disequazioni e valore assoluto
- Funzioni esponenziali e logaritmiche

Per ciascuna delle parti si è operata una selezione di temi, di ognuno dei quali si offre una presentazione teorica, riportando in maniera più sintetica possibile la teoria necessaria per la comprensione dell'argomento, e numerosi esempi commentati.

Il compendio, pur presentando il linguaggio formale della disciplina, è caratterizzato da un tono colloquiale in modo da alleggerire la lettura del testo. Quando possibile si è cercato inoltre di applicare l'argomento di studio a problemi di vita reale.

Il livello espositivo è ponderato sulle conoscenze che uno studente in uscita alla scuola secondaria di secondo grado dovrebbe avere per poter affrontare con serenità e successo i test d'ingresso alle facoltà della Scuola di Scienze.
Le parti e le unità sono organizzate in modo tale che, seguendo l'ordine nel quale sono proposte, si passi da un argomento al successivo acquisendo di volta in volta i prerequisiti necessari per la comprensione dei concetti.
Nulla vieta, tuttavia, di fare un uso diverso del materiale, adattandolo alle proprie esigenze personali e scegliendo solo quegli argomenti che si ritiene siano davvero utili a colmare le proprie carenze.

Gli esercizi posti al termine delle unità sono numerati in modo crescente e prevedono una consegna che è seguita dall'indicazione di 5 o 4 opzioni di risposta, elencate mediante le corrispondenti lettere dell'alfabeto, tra le quali occorre indicare una o più risposte corrette.
Le soluzioni degli esercizi sono raccolte in fondo al volume, nella sezione omonima, suddivise per parti e unità. Gli esercizi proposti rappresentano esempi di diverse tipologie di esercizi associati all'argomento.
La soluzione di ciascun esercizio è indicata mediante il numero di quest'ultimo, seguito dalla lettera corrispondente alla risposta corretta ed è sempre corredata da una nota esplicativa che ne spiega lo svolgimento.

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT,
2017 Firenze University Press

Inoltre le domande e le possibili risposte sono state pensate in modo da poterne trarre diverse osservazioni critiche e stimolanti in fase di spiegazione.

L'approccio scelto per la stesura di questo compendio è stato quello di privilegiare una consultazione degli esercizi. Gli utenti che intendono utilizzare questo compendio per ripassare o consolidare le proprie conoscenze sono pertanto invitati a partire dallo svolgimento dagli esercizi e a seguire le spiegazioni delle soluzioni per verificare se si è attuato il corretto ragionamento. In caso di errore, sarà quindi opportuno andare a ripassare la parte di teoria di riferimento per il relativo argomento.

Questo compendio tuttavia non presenta tutti gli argomenti di matematica necessari per affrontare la carriera universitaria (poiché ad esempio, mancano le parti riguardanti il piano cartesiano, la geometria euclidea, le funzioni, la goniometria e la trigonometria), né pretende di essere esaustivo sugli argomenti trattati.
Inoltre non ha la pretesa di sostituire un libro di matematica, ma piuttosto deve servire per un ripasso dei principali argomenti ritenuti di base e propedeutici per affrontare i primi corsi universitari.
Gli esercizi proposti infine non esauriscono la varietà di possibili domande che lo studente si troverà a dover rispondere, ma sicuramente rappresentano un allenamento utile per un ripasso.

Parte A – NUMERI, POTENZE E RADICALI

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT,
2017 Firenze University Press

Unità 1

Numeri razionali, frazioni e relative operazioni

I **numeri razionali**, nella cui definizione precisa non ci addentreremo, sono rappresentabili in forma decimale oppure come frazioni.
In particolare possiamo dire che **ogni numero razionale è rappresentabile come una frazione** in cui il numeratore è un numero intero, mentre il denominatore è un numero naturale diverso da zero.

$$x \in \mathbb{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{m}{n} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \end{cases}$$

Due frazioni $\frac{m_1}{n_1}$ e $\frac{m_2}{n_2}$ inoltre si dicono **equivalenti** se $m_1 n_2 = m_2 n_1$ e in tal caso rappresentano lo stesso numero razionale. Quindi ogni numero razionale ha infinite rappresentazioni come frazione.

Notazione:
Il segno, determinato dal numeratore, si scrive di solito davanti al segno di frazione.

Esempi:

- $-\frac{3}{4}, \frac{8}{12}, \frac{0}{2}, \frac{10}{5}$ sono tutti esempi di numeri razionali.
- $\frac{7}{0}, \frac{0}{0}$ NON sono frazioni ben definite, in quanto dividere per zero non ha significato.
- $\frac{1}{5}, \frac{2}{10}$ sono frazioni equivalenti, poiché $1 \cdot 10 = 10 = 2 \cdot 5$

Nota:
È utile osservare che i numeri interi possono sempre essere espressi sotto forma di frazioni con 1 al denominatore: $a = \frac{a}{1}$ con $a \in \mathbb{Z}$.

Di seguito ci concentreremo sulle frazioni e su alcune regole importanti a loro legate.

1. Semplificazione e riduzione ai minimi termini

Data una frazione, se dividiamo il numeratore e il denominatore per lo stesso numero, diciamo che **semplifichiamo la frazione**.
Se la semplifichiamo finché è possibile (ovvero dividiamo numeratore e denominatore per il loro MCD e quindi li rendiamo **primi tra loro**[1]), allora la frazione ottenuta si dice **ridotta ai minimi termini**.

Riduciamo ai minimi termini le frazioni dell'esempio precedente.

[1]Due numeri a e b si dicono **primi tra loro** quando $MCD(a, b) = 1$, ovvero non hanno divisori in comune.

- $-\frac{3}{4}$ La frazione risulta già ridotta poiché $MCD(3,4) = 1$.
- $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ Abbiamo diviso numeratore e denominatore per il loro $MCD(8,12) = 4$.
- $\frac{0}{2} = 0$ La frazione ridotta risulta essere un numero intero.
- $\frac{10}{5} = 2$ Anche qui, dato che il $MCD(10,5) = 5$ coincide con il denominatore, il risultato è un numero intero.

2. Confronto tra frazioni

Per confrontare due frazioni possiamo utilizzare due diversi procedimenti:

1. possiamo portare entrambe allo stesso minimo comune denominatore (ovvero il m.c.m. tra i denominatori) ed è **maggiore** la frazione che ha il numeratore maggiore.
2. possiamo svolgere il **prodotto in croce**: ovvero moltiplicare il numeratore di ogni frazione per il denominatore dell'altra e controllare quale prodotto è maggiore; è quindi **maggiore** la frazione nella posizione del prodotto maggiore.

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2} \iff m_1 n_2 < m_2 n_1$$

Nota: Ovviamente se le due frazioni sono discordi (ovvero hanno segni opposti) quella negativa sarà sempre minore di quella positiva.

Esempi:
Riprendiamo le coppie dell'esempio precedente.

- $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ Dato che il mcm tra i denominatori è $mcm(4,6) = 12$ porto entrambe le frazioni allo stesso minimo denominatore comune.

  $\frac{9}{12}, \frac{10}{12}$ Osservo che il numeratore della prima è minore di quello della seconda e quindi posso affermare che:

  $\boxed{\frac{3}{4} < \frac{5}{6}}$ la prima frazione è minore della seconda.

- $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$ In questo caso, dato che è presente una discordanza di segni tra le frazioni, possiamo immediatamente affermare che:

  $\boxed{\frac{1}{2} > -\frac{2}{3}}$ la prima frazione è maggiore della seconda.

- $-\frac{5}{8}, -\frac{7}{12}$ Utilizziamo ora il metodo del **prodotto in croce**: moltiplichiamo il denominatore della prima frazione per il numeratore della seconda e viceversa.

  $-5 \cdot 12\,,\ -7 \cdot 8$ Svolgiamo i prodotti e confrontiamo i numeri razionali ottenuti.

  $-60 < -56$ Il primo è minore del secondo e dunque la prima frazione è minore della seconda.

  $\boxed{-\frac{5}{8} < -\frac{7}{12}}$

3. Le operazioni con le frazioni

Vediamo ora un riepilogo delle operazioni con le frazioni.

3.1. Addizione e sottrazione

La **somma (o sottrazione) di due frazioni** con lo stesso denominatore, è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore di partenza e per numeratore la somma (o differenza) dei numeratori.

Esempio:
$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = \frac{2+5}{7} = \frac{7}{7} = 1$

Nel caso si abbia invece **una somma tra frazioni con denominatori diversi** portiamo prima entrambe le frazioni allo stesso denominatore (m.c.m.) e poi si sommano i numeratori mantenendo il denominatore comune.

Esempi:

- $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$ Ricordo che $mcm(4,6) = 12$ e porto quindi entrambe le frazioni allo stesso minimo denominatore comune.

  $= \frac{9}{12} + \frac{10}{12} =$ Scrivo ora un'unica frazione che ha come denominatore il denominatore comune come numeratore la somma dei numeratori.

  $= \frac{9+12}{12} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$ Nell'ultimo passaggio ho ridotto la frazione risultante ai minimi termini dividendo per $MCD(21,12) = 3$.

- $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} =$ Dato che $mcm(2,3) = 6$ scrivo un unica frazione con denominatore 6 e come numeratore la sottrazione dei numeratori.

  $= \frac{3}{6} - \frac{4}{6} =$ Scrivo ora un'unica frazione che ha come denominatore il denominatore comune e come numeratore la sottrazione dei numeratori.

  $= \frac{3-4}{6} = \frac{-1}{6} = -\frac{1}{6}$ Il segno '-' si può senza problemi spostare dal numeratore a segno della frazione (e viceversa).

- $\frac{5}{8} - (-\frac{7}{12}) =$ Dato il $mcm(8,12) = 24$ riportiamo entrambe le frazioni allo stesso denominatore comune.

  $= \frac{15}{24} - (-\frac{14}{24}) =$ Scrivo un'unica frazione che ha per denominatore il denominatore comune e per numeratore la differenza dei numeratori.

  $= \frac{15-(-14)}{24} = \frac{29}{24}$ Dato che 29 e 24 sono **coprimi** (ovvero $MCD(29,24) = 1$) la frazione risulta ridotta ai minimi termini.

3.2. Il prodotto

Il prodotto tra due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}}$$

Esempio:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 5}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Da notare che, invece che ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{4}{10}$, si può 'semplificare' direttamente il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda dividendo entrambi per 2.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot\frac{\cancel{4}^2}{5}=\frac{2}{5}$$

3.3. La divisione

Il quoziente di due frazioni, di cui la seconda diversa da zero[2], è uguale al prodotto della prima frazione per il reciproco della seconda.

$$\mathbf{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}$$

Esempio:

$$-\frac{3}{5}:\frac{13}{10}=-\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{13}=-\frac{3}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{10}^2}{13}=-3\cdot\frac{2}{13}=-\frac{6}{13}$$

Notiamo che se si fa il prodotto di un numero intero per una frazione (a meno di semplificazioni), il numero intero si moltiplica per il numeratore della frazione[3].

3.4. La potenza

Consideriamo una frazione $\boxed{\frac{m}{n}>0}$ e $x\in\mathbb{R}$, allora:

- Se $\mathbf{x\geq 0}$ si ha $\left(\mathbf{\frac{m}{n}}\right)^{\mathbf{x}}=\mathbf{\frac{m^x}{n^x}}$
- Se $\mathbf{x<0}$ allora $\left(\mathbf{\frac{m}{n}}\right)^{\mathbf{x}}=\mathbf{\frac{n^{|x|}}{m^{|x|}}}$

Nota: Nel secondo caso, con l'applicazione della potenza alla frazione, si sono invertiti numeratore e denominatore.

Infine osserviamo che se $\boxed{\frac{m}{n}<0}$ allora $\left(\frac{m}{n}\right)^x$ è definito solo per $x\in\mathbb{Z}$, oppure $x\in\mathbb{Q}$ con $x=\frac{p}{q}$ e q dispari.

Esempi:

- $\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{4^3}{3^3}=\frac{64}{27}$

[2] Questa richiesta è importante, poiché altrimenti la divisione non è ben definita.

[3] Ogni numero intero lo si può vedere come una frazione con 1 al denominatore: $a=\frac{a}{1}$ con $a\in\mathbb{Z}$.

- $\left(\frac{5}{2}\right)^{-\sqrt{2}} = \frac{2^{\sqrt{2}}}{5^{\sqrt{2}}}$ Ho eliminato il segno meno all'indice di potenza e 'invertito' numeratore e denominatore della frazione.
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 =$ Dato che l'esponente della potenza è pari, allora il segno negativo con l'applicazione della potenza si elimina.
  $= \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$
- $\left(-\frac{3}{15}\right)^{\frac{1}{4}}$ Dato che la base è negativa e l'esponente è una frazione con denominatore pari, allora la potenza non ha significato.
- Considero due numeri interi $c, d \neq 0$:
  $\left(-\frac{c}{d}\right)^{-7} =$ Dato che l'esponente della potenza è negativo scrivo il reciproco della frazione ed elimino il segno '–' dall'indice.
  $= \left(-\frac{d}{c}\right)^{7} =$ Dato che l'esponente della potenza è dispari, allora il segno negativo della frazione rimane dopo l'applicazione della potenza.
  $= -\frac{d^7}{c^7}$

4. Da numeri decimali a frazioni

Ricordiamo infine che ogni numero decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola oppure un numero decimale con infinite cifre ma periodico può essere trasformato in frazione.[4] Vediamo quindi come procedere.

- **Numeri decimali con un numero finito di cifre dopo la virgola**

  Un numero decimale di questo tipo si può scrivere come una frazione in cui a numeratore si ha il numero senza virgole e a denominatore si scrive una potenza del 10 con esponente pari al numero di cifre decimali.

  Esempio:
  Date le cifre $a, d \in \{1, \dots, 9\}$ e $b, c \in \{0, \dots, 9\}$, il numero decimale a, bcd si trasforma in frazione nel modo seguente:
  $$a, bcd = \frac{abcd}{10^3} = \frac{abcd}{1000}$$

- **Numeri decimali periodici**

  In questo caso il numero si può scrivere come una frazione in cui a numeratore si ha la sottrazione tra il numero senza virgole e senza il simbolo di periodo, e le cifre che precedono il periodo senza la virgola, mentre a denominatore si scrivono tanti 9 quante sono le cifre periodiche, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

[4] Mentre ricordo che non è possibile trasformare in frazione i numeri decimali con infinite cifre non periodiche, ovvero i **numeri irrazionali** (ad esempio π, $\sqrt{2}, \dots$).

Esempio:
Date le cifre $a, d \in \{1, \ldots, 9\}$ e $b, c \in \{0, \ldots, 9\}$ del numero decimale

$$a, bc\overline{d} \quad \text{dove} \begin{cases} bc & \text{è detto } \textbf{antiperiodo} \\ d & \text{è detto } \textbf{periodo} \end{cases}$$

esso si trasforma in frazione nel modo seguente:

$$a, bc\overline{d} = \frac{abcd - abc}{900}$$

Esempi:

- $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
- $12,50 = 12,5 =$
  $= \frac{125}{10} = \frac{25}{2}$

Ricordo che gli zeri come ultime cifre decimali non hanno nessun valore e che possono quindi essere eliminati.

- $12,34\overline{5} = \frac{12345 - 1234}{900} = \frac{11111}{900}$
- $-2,\overline{71} = -\frac{271 - 2}{99} = -\frac{269}{99}$

Esercizi Unità 1

1. Indica quali tra le seguenti frazioni risulta già ridotta ai minimi termini.

A. $\frac{-11}{6}$

B. $\frac{12}{6}$

C. $\frac{9}{-7}$

D. $-\frac{9}{12}$

E. $\frac{21}{4}$

2. Indica in quale risposta i seguenti numeri sono disposti in ordine crescente.

A. $-3\,;\ -2,\bar{6}\,;\ -\frac{11}{4}\,;\ \frac{5}{4}\,;\ 1,5$

B. $-3\,;\ 1,5\,;\ -2,\bar{6}\,;\ -\frac{11}{4}\,;\ \frac{5}{4}$

C. $-\frac{11}{4}\,;\ -3\,;\ -2,\bar{6}\,;\ 1,5\,;\ \frac{5}{4}$

D. $-3\,;\ -\frac{11}{4}\,;\ -2,\bar{6}\,;\ \frac{5}{4}\,;\ 1,5$

E. $-3\,;\ -2,\bar{6}\,;\ 1,5\,;\ -\frac{11}{4}\,;\ \frac{5}{4}$

3. Calcola la seguente somma algebrica e indica quali risposte sono corrette.

$$-\frac{1}{4}-\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{2}{3}$$

A. Il risultato della somma algebrica è $\frac{15}{12}$.

B. Il risultato della somma algebrica è $-\frac{7}{5}$.

C. Il risultato della somma algebrica è $\frac{5}{4}$.

D. Il risultato della somma algebrica è $-\frac{5}{12}$.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Indica quale delle seguenti risposte fornisce il risultato corretto della seguente espressione.

$$\left(\frac{35}{6}\cdot\frac{4}{15}\right):\left(-\frac{7}{12}\right)$$

A. $\frac{49}{54}$

B. $\frac{121}{20}$

C. $-\frac{8}{3}$

D. $-\frac{1}{6}$

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

5. Indica quale simbolo, se presente, tra quelli proposti può esser messo al posto dei puntini.

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3 \dots \left(+\frac{4}{5}\right)^3$$

A. $<$

B. $=$

C. $>$

D. $\geq$

E. Nessuno dei precedenti.

Unità 2

Percentuali

Hai ben chiaro come lavorare con le frazioni?
Se non ti senti sicuro o vuoi ripassare qualche esempio sulle operazioni con le frazioni riguarda l'Unità 1 della Parte A «Numeri razionali, frazioni e relative operazioni».

1. Cosa sono e a cosa servono le percentuali

Le **percentuali** sono uno strumento molto utile nella vita di tutti i giorni poiché permettono di esprimere porzioni di una determinata quantità in modo efficace.
Nonostante l'uso sia molto diffuso nella quotidianità (basti pensare agli sconti dei prodotti in vendita), le percentuali non sono di comprensione così immediata: addentriamoci quindi nella loro definizione matematica e vediamone alcuni esempi.

Definizione di PERCENTUALE:
Le **percentuali** sono un modo diverso per scrivere le frazioni con denominatore 100:

$$\mathbf{a}\% = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{100}} \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{N}$$

Inoltre se $x \in \mathbb{R}$, con l'espressione '**a% di x**' si intende $\dfrac{\mathbf{a \cdot x}}{\mathbf{100}}$.

Nota:
In questa Unità affronteremo solo frazioni con numeratori naturali, ma è importante sapere che la definizione si può estendere senza problemi anche ai numeri reali positivi.

Esempi:

1. $20\% = 20/100 = 1/5 = 0,2$ Si legge «venti per cento».
2. Supponiamo ora di voler portare la frazione $\frac{3}{5}$ in percentuale.
   Allora $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\% = 0,6$ ovvero il «sessanta per cento».
3. Se invece ho una frazione con il numeratore maggiore del denominatore, una volta trasformata in percentuale si supera il 100%.
   Infatti consideriamo la frazione $\frac{28}{25}$ e trasformiamola in percentuale:
   $\frac{28}{25} = \frac{112}{100} = 112\% = 1,12$ ovvero il «centododici per cento».

4. Calcoliamo il «venticinque percento del trenta percento» di 120, dunque:

$$\frac{25}{100} \cdot \left(\frac{\cancel{30}^{3}}{\cancel{100}_{\cancel{10}_{1}}} \cdot \cancel{120}^{12}\right) = \frac{\cancel{25}^{1}}{\cancel{100}_{\cancel{4}_{1}}} \cdot \cancel{36}^{9} = 9$$

Osservazioni:

- Per calcolare una percentuale è anche possibile utilizzare le **proporzioni**, in quanto le percentuali le possiamo vedere come proporzioni in cui uno dei termini è pari a 100.
  Rivediamo alcuni degli esempi precedenti:

  2. Impostiamo la richiesta dell'esempio utilizzando le proporzioni:

  $$3 : 5 = x : 100$$

  Quindi per la **proprietà fondamentale delle proporzioni**:

  $$x = \frac{3 \cdot \cancel{100}^{20}}{\cancel{5}_{1}} = 60$$

  3. Analogamente impostiamo $28 : 25 = x : 100$
  Quindi sempre per la **proprietà fondamentale delle proporzioni**:

  $$x = \frac{28 \cdot \cancel{100}^{4}}{\cancel{25}_{1}} = 112$$

  4. Dobbiamo ora impostare due differenti proporzioni:
  $30 : 100 = x : 120$ e subito dopo $25 : 100 = y : x$ con ormai x noto, dunque:

  $$30 : 100 = x : 120 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\cancel{30}^{3} \cdot \cancel{120}^{12}}{\cancel{100}_{\cancel{10}_{1}}} = 36$$

  E quindi, noto il valore di x:

  $$25 : 100 = y : 36 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\cancel{25}^{1} \cdot \cancel{36}^{9}}{\cancel{100}_{\cancel{4}_{1}}} = 9$$

  Dunque nuovamente, il venticinque percento del trenta percento di 120 è 9.

- Abbiamo visto, all'inizio, come calcolare l'**a% di x**.
  Spesso si presenta però il problema inverso: **dati due valori** x, y **vogliamo determinare che percentuale è l'uno dell'altro, ad esempio** x **di** y.
  In tal caso si deve risolvere la seguente proporzione:

  $$x : y = a : 100 \quad \text{dove } a \text{ è la quantità percentuale cercata,}$$

  che diventa

  $$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{x \cdot 100}}{\mathbf{y}}$$

e dunque **x è l' a**% **di y**.

Ad esempio vediamo che percentuale è 3 di 5:
calcolo $a = \dfrac{3 \cdot 100}{5} = 60$ e dunque 3 è il 60% di 5.

- Notiamo infine come l'**utilizzo delle proporzioni** ci permette di ricavare con facilità anche **percentuali non intere**.

  Ad esempio portiamo la frazione $\frac{3}{16}$ in percentuale utilizzando le proporzioni:

$$3 : 16 = x : 100 \,, \quad \text{quindi}$$

$$x = \frac{3 \cdot 100}{16} = \frac{300}{16} = 18,75 \,, \quad \text{ovvero} \quad \frac{3}{16} = \mathbf{18,75\%}$$

2. Percentuali in semplici problemi

ESEMPIO 1:
Ho letto 320 pagine di un romanzo, pari all'80% del libro. Che percentuale di libro di manca da leggere? Quante sono quindi le pagine mancano alla fine? E in percentuale rispetto al numero di pagine già lette? (Ti consiglio di provare a rispondere da solo prima di leggere la soluzione).

SOLUZIONE:
Per prima cosa ricordiamo che leggere tutto il libro equivale a leggere il 100% dello stesso. Dunque se ne abbiamo già letto l'80% ce ne mancherà solamente il (100% − 80%) = 20%.

Chiamiamo ora 'x' la variabile che esprime il numero di pagine totali del libro.
Possiamo quindi utilizzare le informazioni che abbiamo, scrivendo la seguente equazione:

$$80\%x = 320 \quad \text{ovvero} \quad \text{'l'80\% delle pagine totali sono 320'}$$

Riportiamo quindi la percentuale in frazione e ricaviamo la x:

$$\frac{\cancel{80}^{8}}{\cancel{100}_{10}} x = 320 \quad \Longrightarrow \quad x = \cancel{320}^{40} \cdot \frac{10}{\cancel{8}_{1}} = 40 \cdot 10 = 400$$

Il libro ha quindi in totale 400 pagine.
Di conseguenza **le pagine che rimangono la leggere sono** 400 − 320 = **80**.

Vediamo ora, in percentuale, quante sono rispetto a quelle già lette:

$$\frac{80}{320} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$$

Quindi **mi rimangono da leggere il** 25% **delle pagine rispetto a quelle che ho già letto**.

Nota bene che questa percentuale NON esprime il numero di pagine che mi rimangono da leggere rispetto al totale (100% − 80% = 20%), ma solo rispetto a quelle che ho già letto.

ESEMPIO 2:
Un commerciante ti propone di aumentare il prezzo di un prodotto che vuoi acquistare del 10% e poi di scontare il prezzo totale del 10%. Accetteresti l'offerta?
Ovvero è conveniente per te, per il commerciante oppure per nessuno dei due poiché il prezzo rimane lo stesso?
(Ti consiglio di provare a rispondere da solo prima di leggere la soluzione).

SOLUZIONE:
Se accetti ci guadagni. Vediamo il perché:
Consideriamo un prodotto dal costo 'x'. Dopo il primo aumento il prodotto costerà:

$$x + 10\%x = x + \frac{10}{100}x = \frac{100x + 10x}{100} = \frac{110}{100}x$$

A questo prodotto dobbiamo poi togliere lo sconto, sempre del 10%:

$$\frac{110}{100}x - 10\%\frac{110}{100}x = \frac{110}{100}x - \frac{10}{100}\frac{110}{100}x$$

Raccolgo dal I e dal II fattore il termine $\frac{110}{100}x$:

$$\frac{110}{100}x\left(1 - \frac{\cancel{10}^{1}}{\cancel{100}_{10}}\right) = \frac{\cancel{110}^{11}}{100}x\left(\frac{9}{\cancel{10}_{1}}\right) = \frac{99}{100}x$$

Quindi **il prezzo finale è il** 99% **del prezzo iniziale**.

Esercizio consigliato: Prova a sintetizzare tutto il problema precedente in un'unica espressione. Poi confrontala con la soluzione qua sotto:

SOLUZIONE:

$$(x + 10\%x) - 10\%(x + 10\%x)$$

ovvero in frazione:

$$\left(x + \frac{10}{100}x\right) - \frac{10}{100}\left(x + \frac{10}{100}x\right)$$

ESEMPIO 3:
Un sondaggista viene incaricato da un'agenzia turistica di intervistare un ampio campione di giovani tra i 20 e 30 anni riguardo le loro preferenze in fatto di vacanze. Non appena svolto l'incarico, il sondaggista consegna all'agenzia un report con i seguenti risultati: il 30% degli intervistati afferma di preferire una vacanza in luoghi costieri, il 45% in luoghi di montagna, il 25% preferisce visitare solo le grandi città ed infine il 15% non ha voluto esprimere preferenze.
Non appena letti i risultati l'agenzia richiama immediatamente il sondaggista per riferirgli che non pagheranno il lavoro fatto con tanta incompetenza.
Qual è il problema che l'agenzia ha riscontrato?

SOLUZIONE:

L'agenzia ha giustamente notato che i dati sono sicuramente mal raccolti poiché la somma delle percentuali risulta:

$$30\% + 45\% + 25\% + 15\% = 115\%$$

che supera il 100% della popolazione intervistata, il che è ovviamente **impossibile**.

Nota:
La percentuale del 100% può indubbiamente essere superata in certi contesti (ad es. se si parla del guadagno di un'azienda rispetto ad un periodo precedente), ma ci sono alcuni casi, come quello dei **sondaggi a risposta singola** trattato nell'esempio, in cui si **fraziona una *popolazione* in parti percentuali** ed in quel caso **non è possibile superare il 100%**, ovvero la totalità della popolazione.

Si noti infine che, 'anche in un sondaggio', è possibile che la somma delle percentuali superi il 100%. Questo può avvenire infatti se a ciascun intervistato viene data la possibilità di esprimere più preferenze (**sondaggi a risposta multipla**).

Esercizi Unità 2

1. Assegna un valore Vero/Falso alle seguenti affermazioni.

A. Il 36% di a è uguale a $3,6 \cdot a$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

B. Il 5% del 15% di 300 è 4. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

C. Il 100% di un numero è pari al suo doppio. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

D. Il 2% di 800 è 16. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

E. Se il 16% di x è 1 allora $x = 1$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

2. Se un bambino alla nascita pesa 3200g, dopo 6 settimane aumenta il suo peso del 33% e dopo altre 6 il suo peso aumenta di un ulteriore 25%, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A. Dopo 12 settimane il bambino pesa il 58% del peso iniziale.

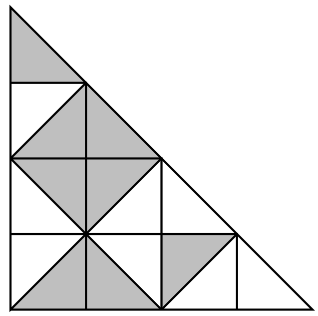
B. Dopo 12 settimane il bambino pesa $5320g$.

C. Dopo 12 settimane il bambino pesa $5056g$.

D. Dopo 12 settimane il bambino ha raddoppiato il suo peso iniziale.

E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

3. Quale percentuale della figura è colorata?



A. Il 50%.

B. L' 80%.

C. Il 40%.

D. Il 45%.

E. Nessuna delle precedenti percentuali è corretta.

4. In un sondaggio del 2015 risulta che il 64% della popolazione italiana possiede un pc e lo usa regolarmente, un 15% invece non lo possiede, ma usa saltuariamente una postazione gratuita nelle biblioteche pubbliche o una postazione privata in un *internet point*, mentre il rimanente 35% non possiede né usa un pc.
Da tale sondaggio si può dedurre che (indica l'unica risposta corretta):

A. Il 79% degli italiani possiede un computer;

B. Il 50% degli italiani non possiede un computer;

C. Il 79% degli italiani usa almeno saltuariamente un computer;

D. Il 50% degli italiani sa usare un computer;

E. Nessuna delle precedenti è corretta poiché il sondaggio è sbagliato.

5. Mauro è interessato all'acquisto di un televisore, il cui prezzo di listino è 700€. Il negoziante gli dice che può fargli uno sconto del 20%.
Che prezzo dovrà quindi pagare Mauro per acquistare il prodotto?

A. Il televisore scontato gli costerà 350€.

B. Il televisore scontato gli costerà 680€.

C. Il televisore scontato gli costerà 560€.

D. Il televisore scontato gli costerà 140€.

E. Il costo del televisore scontato non è tra le risposte precedenti.

6. Un rivenditore decide di mettere in vendita uno scooter, il cui prezzo di listino è di 1300€, al prezzo stracciato di 955, 5€.
Che percentuale di sconto sta facendo?

A. Il 25%.

B. Il 30%.

C. Il 26, 5%.

D. Il 32%.

E. Nessuna delle percentuali precedenti indica lo sconto effettuato.

Unità 3

Potenze e loro proprietà

Di seguito si terrà un veloce ripasso delle potenze di numeri reali e relative proprietà.
Si considerano potenze in vari casi a partire da potenze con esponente naturale.
Per un riepilogo veloce vedere lo **Schema riassuntivo** a fine Unità.
Infine, per casi più complessi, si rimanda a capitoli specifici: ad es. per potenze di numeri razionali vedere l'Unità 1 della Parte A «Numeri razionali, frazioni e relative operazioni».

1. Potenza con esponente naturale

Dati $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, l'elevazione di a alla n, che si scrive così:

$$\mathbf{a^n} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \mathbf{a} & \text{si dice } \textbf{base} \\ \mathbf{n} & \text{si dice } \textbf{esponente} \end{cases}$$

si chiama **potenza di a con esponente n** ed è il prodotto di a per se stesso, per n volte:

$$\mathbf{a^n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\mathbf{n}\text{ volte}}$$

Osservazione
Dalla definizione, per $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ e $a \in \mathbb{R}$, osserviamo che discendono direttamente le seguenti proprietà:

$$\mathbf{a^m} \cdot \mathbf{a^n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\text{ volte}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ volte}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n\text{ volte}} = \mathbf{a^{m+n}}$$

e

$$\mathbf{a^m} : \mathbf{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m\text{ volte}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ volte}}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n\text{ volte}} = \mathbf{a^{m-n}}$$

Più avanti vedremo che tali proprietà si possono generalizzare anche a potenze con esponente reale.

Casi particolari:

- L'elevazione di un numero naturale diverso da zero alla 0 si pone uguale a 1 per definizione[5]:

$$\mathbf{a^0 = 1} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

[5] Questa definizione è consistente con le proprietà appena viste, infatti:

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1 \quad \text{oppure} \quad a^n = a^{n+0} = a^n \cdot a^0 \;\Rightarrow\; a^0 = 1$$

- Elevando un numero naturale diverso da zero alla 1 si ottiene il numero stesso.

$$\mathbf{a^1 = a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- $\mathbf{a > 0} \;\Rightarrow\; \mathbf{a^n > 0} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\mathbf{1^n = 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(-\mathbf{1})^\mathbf{n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\mathbf{0^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$
- $\mathbf{0^0}$ non ha significato.

Osservazione
Se $a < 0$ vale che $a = -|a| = -1 \cdot |a|$ e quindi:

$$\begin{cases} \text{Se } n \text{ PARI} \Longrightarrow \mathbf{a^n} = (-|a|)^n = (-1 \cdot |a|)^n = (-1)^n \cdot |a|^n = 1 \cdot |a|^n = |\mathbf{a}|^\mathbf{n} \\ \text{Se } n \text{ DISPARI} \Longrightarrow \mathbf{a^n} = (-|a|)^n = (-1 \cdot |a|)^n = (-1)^n \cdot |a|^n = -1 \cdot |a|^n = -|\mathbf{a}|^\mathbf{n} \end{cases}$$

Esempi:

1. $(-6)^2 = 6^2 = 36$
2. $(-2)^3 = -2^3 = -8$

2. Potenza con esponente intero

Tenendo conto dei casi precedenti, se consideriamo:

$$\mathbf{a^z} \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{Z}$$

- Se $\mathbf{z \geq 0}$ siamo nel caso precedente (vedi paragrafo 1 «Potenze con esponente naturale»).
- Se $\mathbf{z < 0}$ (in questo caso dev'essere $\boxed{a \neq 0}$) si ha che $z = -|z|$, e quindi:

$$\mathbf{a^z} = \mathbf{a}^{-|\mathbf{z}|} = a^{0-|z|} = \left(\frac{a^0}{a^{|z|}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}^{|\mathbf{z}|}}$$

dove nuovamente $a^{|z|}$ si riconduce al caso del paragrafo precedente: «Potenze con esponente naturale».

Esempi:

1. $4^{-1} = \dfrac{1}{4^1} = \dfrac{1}{4}$
2. $(-3)^{-2} = \dfrac{1}{(-3)^2} = \dfrac{1}{9}$

3. $(-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} = \dfrac{1}{-125} = -\dfrac{1}{125}$

Nota:
Finora abbiamo fatto sempre esempi di potenze con base un numero intero, ma niente vietava di considerare, come base, un qualunque numero reale, ad esempio un numero irrazionale come π o $-\pi$.
Vale però la pena di soffermarsi sul caso di **Potenze con base razionale** e per questo si rimanda al paragrafo 3.4. «La Potenza» dell'Unità 1 «Numeri razionali, frazioni e relative operazioni».

3. Potenza con esponente razionale

Se la potenza ha esponente razionale **è necessario porre attenzione nel caso la base sia negativa**[6]. Consideriamo quindi per semplicità $a > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$:

- Poniamo $\mathbf{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$. Consistente con: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$
- Se l'esponente è positivo $\Longrightarrow \mathbf{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$
- Se l'esponente è negativo $\Longrightarrow \mathbf{a^{-\frac{m}{n}}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \mathbf{\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}}$

Nota:
Per approfondimenti sulle proprietà dei radicali vedi l'Unità 4 «Radicali e loro proprietà».

Esempi:

1. $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3}$
2. $(3)^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$
3. $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{-\frac{5}{3}} = \left(\dfrac{7}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{7}{2}\right)^5}$

4. Potenza con esponente irrazionale

È possibile definire anche l'elevamento a potenza con esponenti irrazionali; in tal caso però la **base deve essere necessariamente non negativa** (e **strettamente positiva se l'esponente è negativo**). Poste queste condizioni tutte le considerazioni che abbiamo fatto finora e le proprietà che vedremo sono sempre valide.

[6] infatti rischiano di verificarsi **situazioni non ben definite** come la seguente:

$$(-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \text{ , ma } \sqrt{-3} \textbf{ non esiste}.$$

5. Proprietà delle potenze

Siano, per semplicità, $a > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Valgono quindi le seguenti proprietà (che nel caso $x, y \in \mathbb{N}$ con $x \geq y$ sono di immediata verifica):

5.1. Prodotto e divisione di potenze con la stessa base

Il **prodotto di potenze che hanno la stessa base** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$\boxed{\mathbf{a^x \cdot a^y = a^{x+y}}}$$

La **divisione di potenze che hanno la stessa base** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$\boxed{\mathbf{a^x : a^y = a^{x-y}}}$$

Esempi:

1. $2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9 = 512$
2. $2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1 = 2$
3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-5+4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

5.2. Prodotto e divisione di potenze con lo stesso esponente

Il **prodotto di potenze di uguale esponente** è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\boxed{\mathbf{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}}$$

La **divisione di potenze di uguale esponente** è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$\boxed{\mathbf{a^x : b^x = (a : b)^x}}$$

Esempi:

1. $(-4)^3 \cdot 2^3 = (-4 \cdot 2)^3 = (-8)^3 = -8^3 = -512$
2. $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 3^2 = \left(\frac{1}{5} \cdot 3\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(-\frac{10}{9}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{9}{10}\right)^4 = \left[\frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} \cdot \left(-\frac{\cancel{9}^3}{\cancel{10}_5}\right)\right]^4 = \left(-\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{27}{625}$

5.3. Potenza di potenza

La **potenza di una potenza** è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$\boxed{\mathbf{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}}$$

Esempi:

1. $\left(2^3\right)^{\frac{1}{6}} = 2^{3\cdot\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
2. $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^4\right]^0 = \left(\frac{5}{3}\right)^{4\cdot 0} = \left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$
3. $\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^1\right]^{-2} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{1\cdot(-2)} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

ATTENZIONE:

- È importante ricordare che le proprietà sopra elencate, per quanto visto nei paragrafi precedenti, valgono a patto che:
  - Se l'**esponente di una potenza è negativo** allora **la base non può assumere valore zero**, poiché la potenza non sarebbe definita.
  - Se l'**esponente di una potenza è un razionale con denominatore pari** allora **la base dev'essere non negativa**, altrimenti potrebbero verificarsi situazioni non ben definite.
  - Se l'**esponente di una potenza è irrazionale** allora **la base deve essere necessariamente non negativa.**
  - Ricordiamo infine il caso in cui **la base è nulla**: in quel caso **l'esponente può assumere qualunque valore reale positivo**.
- Le proprietà delle potenze sopra elencate non si applicano alle somme (o sottrazioni) tra potenze. Ponete attenzione, poiché **è infatti facile incappare nei seguenti ERRORI**:

$\boxed{\mathbf{a}^{\mathbf{x}} + \mathbf{b}^{\mathbf{x}} \neq (\mathbf{a}+\mathbf{b})^{\mathbf{x}}}$

La somma di potenze di ugual esponente **NON** è uguale alla potenza di ugual esponente e con base la somma delle basi.

Ad esempio: $13 = 9 + 4 = 3^2 + 2^2 \neq (3+2)^2 = 5^2 = 25$

$\boxed{\mathbf{a}^{\mathbf{x}} - \mathbf{b}^{\mathbf{x}} \neq (\mathbf{a}-\mathbf{b})^{\mathbf{x}}}$

La differenza di potenze di ugual esponente **NON** è uguale alla potenza di ugual esponente e con base la differenza delle basi.

Ad esempio: $5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2 \neq (3-2)^2 = 1^2 = 1$

6. Esempio di utilizzo delle proprietà delle potenze

Ti consiglio di provare a svolgere da solo l'espressione di seguito proposta e controllare solo successivamente lo svolgimento.

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

<u>SVOLGIMENTO</u>:

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}=$$

Per prima cosa sommiamo le frazioni all'interno delle parentesi.

$$=\left[\left(\frac{6+3-4}{6}\right)^{-2}:\left(\frac{3+2}{4}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}:\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}=$$

Osserviamo ora che le due potenze hanno lo stesso esponente. Applichiamo quindi la proprietà **divisione di potenze di uguale esponente**.

$$=\left[\left(\frac{5}{6}:\frac{5}{4}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}=$$

$$=\left[\left(\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{5}_{1}}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}=$$

Semplifichiamo le frazioni.

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{\frac{3}{2}}=$$

Dato che ora ho una **potenza di potenza** applico l'omonima proprietà.

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\cancel{2}^{1}\cdot\frac{3}{\cancel{2}_{1}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$$

Dato che l'**esponente è negativo** si scambiano numeratore e denominatore della base e si cambia il segno dell'esponente.

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{3^3}{2^3}=\frac{27}{8}$$

7. Schema riassuntivo sulle potenze e relative proprietà

- **Potenze con esponente intero**
  - Se l'esponente è positivo $\Longrightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$
  - Se l'esponente è negativo $\Longrightarrow a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$
  - Casi particolari: $a^0 = 1$, $a^1 = a$
- **Potenze con esponente razionale**
  - Se l'esponente è positivo $\Longrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
  - Se l'esponente è negativo $\Longrightarrow a^{-\frac{m}{n}} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
- **Proprietà delle potenze**
  - Prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
  - Divisione di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$
  - Prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
  - Divisione di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$
  - Potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

Esercizi Unità 3

1. Data la seguente espressione

$$[10 \cdot (10^3 : 10^2)^2]^2$$

indica quale delle risposte è corretta.

A. È equivalente ad un milione, ovvero 10^6.

B. È equivalente a cento, ovvero 10^2.

C. È equivalente a mille, ovvero 10^3.

D. Non ha significato.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

2. Data la seguente espressione

$$[(-3)^5 : (3)^5 + 1]^0$$

indica quale delle risposte è corretta.

A. È equivalente ad 1.

B. È equivalente a 0.

C. Non ha significato.

D. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

3. Data la seguente potenza di monomio

$$[-(-4xy^2)^n]^n \quad \textbf{con} \;\; x, y \in \mathbb{R} - \{0\} \;\; \textbf{e} \;\; n \in \mathbb{N}$$

indica quale delle risposte è corretta.

A. Se n è pari è equivalente a $4^{n^2} x^{n^2} y^{2n^2}$.

B. Se n è dispari è equivalente a $-4^{n^2} x^{n^2} y^{2n^2}$.

C. Non ha significato.

D. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Considerando la seguente espressione

$$\frac{2^{12} \cdot 3^{20}}{2^{13} \cdot 3^{19}} \cdot 2^0$$

indica quali affermazioni sono corrette.

A. L'espressione è equivalente a 1.

B. L'espressione è equivalente a $\frac{3}{2}$.

C. L'espressione non ha significato.

D. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

5. Indica quale quale valore deve avere l'indice di potenza x affinché la seguente uguaglianza sia verificata:

$$\left[-\left(-\frac{3}{5}\right)^x\right]^3 = -\left(\frac{5}{3}\right)^6$$

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

D. $-\frac{1}{2}$

6. Data la seguente potenza di potenza

$$\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}$$

indica quali delle risposte sono corrette.

A. L'espressione è equivalente a $\sqrt[3]{2}$.

B. L'espressione è equivalente a $\sqrt[12]{2^{19}}$.

C. L'espressione è equivalente a $\sqrt[12]{2^4}$.

D. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

7. Dato il seguente prodotto di potenze

$$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}$$

indica quale delle risposte è corretta.

A. L'espressione è equivalente a $\sqrt[3]{2}$.

B. L'espressione è equivalente a $\sqrt[12]{2^{19}}$.

C. L'espressione è equivalente a $\sqrt[12]{2^{4}}$.

D. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

8. Data la seguente espressione con potenze

$$(4^{0} - 4)^{\frac{1}{4}}$$

indica quale delle risposte è corretta.

A. È equivalente ad 1.

B. È equivalente a $\sqrt[4]{3}$.

C. Non ha significato.

D. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Unità 4

Radicali e loro proprietà

Di seguito si terrà un ripasso sui radicali, le loro proprietà e le relative operazioni.

1. Radice di un numero reale

Dati $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ la **radice n-esima (o radicale n-esimo) di a** si indica con il simbolo:

$$\sqrt[n]{a} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \textbf{a} & \text{viene detto } \textbf{radicando} \\ \textbf{n} & \text{viene detto } \textbf{indice} \end{cases}$$

e la sua **definizione** è la seguente:

- **Se a** $\geq$ **0** la radice n-esima di a è quel numero reale **b** $\geq$ **0** la cui potenza con esponente n è uguale ad a; ovvero:
$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \Longleftrightarrow \quad a = b^n} \quad \text{con} \quad \boxed{a, b \geq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N} - \{0\}}$$
- **Se a** $<$ **0** distinguiamo tra due ulteriori sottocasi:
  - Se **n è dispari** la radice n-esima di a è quel numero reale $b < 0$ la cui potenza con esponente n è uguale ad a:
  $$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \Longleftrightarrow \quad a = b^n} \quad \text{con} \quad \boxed{a, b < 0 \text{ e } n \textbf{ dispari}}$$
  Osservo che in questo caso vale: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-|a|} = \sqrt[n]{-1}\sqrt[n]{|a|} = -\sqrt[n]{|a|}$
  - Se **n è pari** la radice n-esima di a **non è definita** poiché non esiste nessun numero la cui potenza n-esima pari sia negativa.
  $$\boxed{\sqrt[n]{a} \ \textbf{non è definita}} \quad \text{con} \quad \boxed{a < 0 \text{ e } n \textbf{ pari}}$$

Notazione:
Useremo, da ora in avanti, la seguente notazione: $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Esempi:

1. $\sqrt[4]{16} = 2$ infatti $2^4 = 16$
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$ infatti $(-3)^3 = -27$
3. $\sqrt{-9}$ NON ESISTE, infatti non esiste nessun numero reale il cui quadrato sia negativo.

Casi particolari:

- $\boxed{\sqrt[n]{a^n}} = \begin{cases} |a| & \text{se } n \text{ è pari} \\ a & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ in particolare: $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$
- $\boxed{\sqrt[0]{a}}$ non ha significato.
- $\boxed{\sqrt[n]{0} = 0}$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ infatti $0^n = 0$
- $\boxed{\sqrt[n]{1} = 1}$ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ infatti $1^n = 1$

ATTENZIONE:

1. Attenzione quando abbiamo a che fare con un radicale di indice pari!
   Dobbiamo infatti assicurarci che siano rispettate le **condizioni di esistenza (C.E.)** ovvero che il radicando sia maggiore o uguale a 0:

   Esempio: Se consideriamo $\sqrt{x-1}$, devo imporre come **C.E.**: $x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \geq 1}$

2. È importante anche osservare che per la definizione di radicale, se considero **a positivo**, vale:

   $$\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{a}} > \mathbf{0}$$

   In particolare si deve porre attenzione al caso n pari, come nell'esempio che segue:
   Esempio: Vale $\sqrt{9} = +3$ e non $\sqrt{9} = \pm 3$.
   Non bisogna infatti fare confusione tra $x = \sqrt{9}$ e $x^2 = 9$, che è invece un'equazione le cui soluzioni sono effettivamente $+3$ e -3.

Notazione:
Ricordiamo che $\sqrt[n]{a^m}$ si scrive anche come $a^{\frac{m}{n}}$. Per approfondimenti vedi il paragrafo 3 «Potenza con esponente razionale» dell'Unità 3 della parte A «Potenze e loro proprietà».

2. Proprietà invariantiva dei radicali

Dato un radicale $\sqrt[n]{a^m}$, se $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ e se moltiplico per uno stesso naturale p (diverso da zero), sia l'indice del radicale che l'esponente del radicando, ottengo un radicale equivalente:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot \mathbf{p}]{a^{m \cdot \mathbf{p}}}$$

Se invece $\mathbf{a} < \mathbf{0}$ devo porre maggiore attenzione; vedi in seguito.

Note:

- Vista la proprietà simmetrica dell'uguaglianza, si può fare anche il percorso inverso rispetto al precedente, dividendo l'esponente del radicando e l'indice del radicale per un divisore comune **semplificando così il radicale**.

- Se l'indice del radicale e l'esponente del radicando sono primi tra loro, allora il radicale si dice **irriducibile**.

Esempi:

- $\sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt[2\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{25}$ dove $\sqrt{5}$ è un radicale irriducile.
- $\sqrt[15]{64} = \sqrt[15]{4^3} = \sqrt[5\cdot 3]{4^3} = \sqrt[5]{4^1} = \sqrt[5]{4}$ dove $\sqrt[5]{4}$ è un radicale irriducile.

ATTENZIONE:
Nell'utilizzo della proprietà invariantiva devo stare attento al segno del radicando:

1. $\boxed{\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[3\cdot 2]{(-27)^2} = \sqrt[6]{(-27)^2}}$ infatti $\begin{cases} \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \\ \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{27^2} = \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases}$

2. $\boxed{\sqrt[6]{(-3)^2} \neq \sqrt[3]{-3}}$ infatti $\begin{cases} \sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$

Per eliminare i problemi degli esempi precedenti osserviamo quanto segue:

1. Se **a < 0, n dispari e p pari** $\Longrightarrow \boxed{\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n\cdot p]{a^{n\cdot p}}}$

   Infatti il primo radicale è negativo, mentre il secondo positivo (poiché $n\cdot p$ è pari) e quindi va corretto con il segno meno.

   Nell'esempio 1 lo sviluppo corretto è quindi:

   $$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3\cdot 2]{(-27)^2} = -\sqrt[6]{(-27)^2} = -\sqrt[6]{27^2}$$

2. Se **a < 0 e m · p è pari** $\Longrightarrow \boxed{\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{|a|^m}}$

   Infatti il primo radicale è sicuramente positivo, mentre il secondo, se non pongo il valore assoluto, è possibile sia negativo (se m e n dispari) oppure impossibile (se m dispari e n pari).

   Nell'esempio 2 lo sviluppo corretto è quindi:

   $$\sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[3]{|-3|} = \sqrt[3]{3}$$

3. Operazioni con i radicali

NOTA BENE: Nei paragrafi che seguono si sottintendono verificate le condizioni di esistenza (C.E.) ove necessario.

3.1. Prodotto e divisione fra radicali con lo stesso indice

Il **prodotto di due radicali con lo stesso indice** è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}}$$

La **divisione di due radicali con lo stesso indice** è un radicale che ha lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.

$$\boxed{\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}}$$

Nota:
Le uguaglianze appena mostrate ovviamente valgono anche se lette da destra verso sinistra, ma con un po' più di attenzione ai segni quando n è pari.

Ad esempio:

$$\text{Si ha}\quad \sqrt{(-3)(-2)}=\sqrt{6}=\sqrt{3\cdot 2}=\sqrt{3}\sqrt{2}$$

$$\text{e non}\quad \sqrt{(-3)(-2)}=\sqrt{-3}\sqrt{-2}\quad \text{che } \textbf{non ha significato.}$$

Esempi:

1. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{4\cdot 5}=\sqrt[3]{20}$
2. $\sqrt[4]{12}:\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{12:3}=\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}=\sqrt{2}$
3. $\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{7}=$ In questo caso gli indici sono diversi, ma possiamo ricondurre i radicali allo stesso indice (m.c.m$(2,6)$) utilizzando la proprietà invariantiva dei radicali.
   $=\sqrt[2\cdot 3]{3^{1\cdot 3}}\cdot\sqrt[6]{7}=\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[6]{7}=\sqrt[6]{27\cdot 7}=\sqrt[6]{189}$
4. $\sqrt[5]{4}:\sqrt[10]{64}=$ Come per l'es. precedente riportiamo i due radicali allo stesso indice.
   $=\sqrt[5]{4}:\sqrt[5\cdot 2]{2^{3\cdot 2}}=$
   $=\sqrt[5]{4}:\sqrt[5]{8}=$ Applichiamo ora la regola per la divisione tra radicali.
   $=\sqrt[5]{\dfrac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}}}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$

3.2. Trasporto di un fattore dentro/fuori dal segno di radice

Trasporto fuori dal segno di radice:
Considerato il radicale $\sqrt[n]{a^m}$ con $\mathbf{a>0}$ e $\mathbf{m\ge n}$, e indicati con q il quoziente di $m:n$ e con r il resto (ovvero $m=n\cdot q+r$), si ha:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{n\cdot q+r}}=\sqrt[n]{a^{n\cdot q}\cdot a^r}=\sqrt[n]{a^{n\cdot q}}\cdot\sqrt[n]{a^r}=a^q\sqrt[n]{a^r}$$

Esempio:
Prendiamo in considerazione il seguente radicale: $\sqrt{8b^2}$
Applichiamo ora la proprietà del prodotto e poi la proprietà invariantiva :

$$\sqrt{8b^2}=\sqrt{2^3b^2}=\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{b^2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2^1}\cdot\sqrt{b^2}=2\cdot\sqrt{2}\cdot|b|=2\sqrt{2}|b|$$

In questo caso è stato necessario aggiungere il valore assoluto poiché il radicale iniziale era non-negativo e deve rimanerlo anche dopo le semplificazioni.

Trasporto dentro al segno di radice:
Distinguiamo i due seguenti casi:

- Se n dispari $\Rightarrow \quad a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
- Se n pari[7] invece $\begin{cases} \text{Se } a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \\ \text{Se } a \leq 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \sqrt[n]{b} = -|a| \cdot \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n \cdot b} \end{cases}$

Esempi:

- $-5\sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[3]{(-5)^3} \cdot \sqrt[3]{2x^2} = \sqrt[3]{-125 \cdot 2x^2} = \sqrt[3]{-250x^2}$
- $2\sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{15} = \sqrt[4]{16 \cdot 15} = \sqrt[4]{240}$
- $-3\sqrt{b} = -\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{9b}$ con $b \geq 0$

3.3. Potenza e radice di un radicale

La **potenza m-esima di un radicale** è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando la potenza m-esima del radicando.

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

Osservazione: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

La **radice m-esima di un radicale di indice n** è un radicale che ha per indice il prodotto degli indici, $m \cdot n$, e per radicando lo stesso radicando.

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$$

Osservazione: data la commutatività del prodotto $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

ovvero si possono scambiare gli indici.

Esempi:

1. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[3 \cdot 5]{7} = \sqrt[15]{7}$
2. $\sqrt[5]{\sqrt{3^{15}}} = \sqrt[\cancel{5}^{1} \cdot 2]{3^{\cancel{15}_{3}}} = \sqrt{3^3}$
3. $\left(\sqrt{a}\right)^8 = \sqrt[\cancel{2}^{1}]{a^{\cancel{8}_{4}}} = a^4$

[7] Ricordo che in questo caso per C.E. b dev'essere necessariamente maggiore o uguale a zero.

4. $\left(\sqrt[5]{-3}\right)^4 =$ Dato che il radicando è negativo non posso applicare direttamente la proprietà; trasporto quindi fuori dal radicale il segno negativo (visto che l'indice è dispari).

$= \left(-\sqrt[5]{3}\right)^4 =$ Svolgo ora la potenza ed applico la proprietà.

$= \sqrt[5]{3^4}$

3.4. Radicali simili e somma algebrica di radicali [8]

Vediamo innanzitutto l'importante definizione di radicali simili:

Due **radicali si dicono simili** se hanno lo stesso indice e lo stesso radicando. Possono invece differire per il fattore che li moltiplica, detto **coefficiente del radicale**.

$\boxed{c\sqrt[b]{a} \text{ e } d\sqrt[b]{a}}$ sono simili e c, d sono i coefficienti dei radicali.

Nota: A volte due radicali non simili si possono rendere tali trasportando fuori (o dentro) dalla radice alcuni fattori.

Esempi:

1. $\sqrt{5}$ e $3\sqrt{5}$ sono simili.
2. $\sqrt[4]{3}$ e $\sqrt{3}$ NON sono simili poiché gli indici sono diversi.
3. $2\sqrt{a^3}$ e $-3\sqrt{a^5}$ non sono simili, ma li possiamo render tali, infatti:
$$\begin{cases} 2\sqrt{a^3} = 2\sqrt{a^2}\sqrt{a} = 2a\sqrt{a} \\ -3\sqrt{a^5} = -3\sqrt{a^4}\sqrt{a} = -3a^2\sqrt{a} \end{cases}$$

Definiamo quindi ora la somma algebrica tra due radicali:

La **somma algebrica di due o più radicali simili** è il radicale, simile a quelli dati, che ha come coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

$$\boxed{c\sqrt[b]{a} + d\sqrt[b]{a} = (c+d)\sqrt[b]{a}}$$

ATTENZIONE:
È importante ricordarsi che non è sempre possibile semplificare espressioni che contengono somme algebriche di radicali. In particolare ponete attenzione al seguente errore:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a-b}}$$

Infatti ad esempio:

$$5 = 2 + 3 = \sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

[8] Si ricorda che il termine **somma algebrica** indica genericamente le operazioni di somma e sottrazione.

Riprendendo i valori degli esempi precedenti:

1. $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$
2. $\sqrt[4]{3} + \sqrt{3}$ non si può compiere nessuna semplificazione poiché non sono radicali simili.
3. $2x\sqrt{a} - 3x^2\sqrt{a} = (2x - 3x^2)\sqrt{a}$

4. Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Talvolta si incontrano frazioni algebriche con radicali al denominatore. In alcuni casi questa situazione è fastidiosa e vi si pone rimedio tramite la cosiddetta **razionalizzazione**, di seguito presentata:

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa trasformare la frazione in una equivalente che non ha radicali al denominatore.

Per razionalizzare il denominatore si applica la proprietà invariantiva delle frazioni, moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero.

Di seguito riporto i casi più comuni:

4.1. Il denominatore è un unico radicale

In questo caso basta moltiplicare numeratore e denominatore per il radicale dello stesso indice (di quello da razionalizzare) e con potenza del radicando tale da far rimanere un numero intero al denominatore.

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{\cancel{m}+n-\cancel{m}}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}}$$

Esempi:

1. $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\boxed{\frac{5x}{\sqrt[5]{9}}} = \frac{5x}{\sqrt[5]{9}} \cdot \frac{\sqrt[5]{9^4}}{\sqrt[5]{9^4}} = \frac{5\sqrt[5]{9^4}x}{\sqrt[5]{9^5}} = \frac{5}{9}\sqrt[5]{9^4}x$

   Osserviamo che $9 = 3^2$, quindi possiamo semplificare ulteriormente:

$$\frac{5\sqrt[5]{(3^2)^4}x}{3^2} = \frac{5\sqrt[5]{3^8}x}{3^2} = \frac{5\sqrt[5]{3^5}\sqrt[5]{3^3}x}{3^2} = \frac{5\cdot\cancel{3}^1\sqrt[5]{27x}}{3^{\cancel{2}^1}} = \frac{5}{3}\sqrt[5]{27x}$$

4.2. Il denominatore è la somma algebrica di due o più termini e i radicali che compaiono sono solo quadratici o cubici

In questi casi si utilizzano i prodotti notevoli «Somma per differenza (o differenza di quadrati)» e «Somma (o differenza) di cubi» - Per approfondimenti vedi l'unità 6 della parte B «Prodotti notevoli».

Con utilizzo del prodotto notevole '*Somma per differenza*':

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}}$$

Esempi:

1. $$\frac{6}{3+\sqrt{3}}=\frac{6}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{6(3-\sqrt{3})}{(3)^2-(\sqrt{3})^2}=$$
$$=\frac{6(3-\sqrt{3})}{9-3}=\frac{\cancel{6}(3-\sqrt{3})}{\cancel{6}}=3-\sqrt{3}$$

2. $$\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}=\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}=\frac{10(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}=$$
$$=\frac{\cancel{10}^{2}(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{\cancel{5}_{1}}=2(\sqrt{7}+\sqrt{2})$$

Con utilizzo del prodotto notevole '*Somma (o differenza) di cubi*':

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}&=\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}}{\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2}}=\frac{a(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2})}{(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3}=\\&=\frac{a(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{b\cdot c}+\sqrt[3]{c^2})}{b+c}\end{aligned}}$$

Esempi:

1. $$\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}=\frac{2(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt[3]{3})^3}=$$
$$=\frac{2(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{5+3}=\frac{\cancel{2}(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})}{\cancel{8}_4}=$$
$$=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}}{4}$$

2. $$\frac{-3}{2-\sqrt[3]{9}}=\frac{-3}{2-\sqrt[3]{9}}\cdot\frac{4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}}{4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}}=\frac{-3(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2})}{(2)^3-(\sqrt[3]{9})^3}=$$
$$=\frac{-3(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2})}{8-9}=\frac{-3(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2})}{-1}=$$
$$=3(4+2\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2})$$

5. Potenze con esponenti razionali

Per questo argomento vedi il paragrafo 3 «Potenza con esponente razionale» dell'Unità 3 della parte A «Potenze e loro proprietà».

6. Esempio di utilizzo delle proprietà dei radicali

Ti consiglio di provare da solo a trovare le condizioni di esistenza (e semplificare) l'espressione di seguito proposta e controllare solo successivamente lo svolgimento.

$$\sqrt{\frac{a-3}{2}} : \sqrt[3]{\frac{a^2}{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{a-3}}}$$

<u>SVOLGIMENTO</u>:

Cominciamo dalle condizioni di esistenza **(C.E.)**, che sono determinate dal seguente sistema (tutte le condizioni devono essere soddisfatte):

$$\begin{cases} \dfrac{a-3}{2} \geq 0 & \text{Poiché radicando del primo radicale di indice pari.} \\ \dfrac{2}{a-3} \geq 0 & \text{Poiché radicando del terzo radicale di indice pari.} \\ \dfrac{a^2}{6} \cdot \sqrt{\dfrac{2}{a-3}} \neq 0 & \text{Il secondo radicale divide il primo e non può quindi annullarsi.} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a-3 \geq 0 \\ a-3 > 0 \\ a^2 \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \geq 3 \\ a > 3 \\ a \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{a > 3}$$

Andiamo quindi ora a semplificare l'espressione:

$$\sqrt{\frac{a-3}{2}} : \sqrt[3]{\frac{a^2}{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{a-3}}} =$$

Per prima cosa portiamo il termine $\frac{a^2}{6}$ all'interno del terzo radicale (osserviamo che $\frac{a^2}{6} \geq 0$).

$$= \sqrt{\frac{a-3}{2}} : \sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^4}{\cancel{36}_{18}} \cdot \frac{\cancel{2}^1}{a-3}}} =$$

Semplifichiamo dove possibile e utilizziamo la proprietà **radice di un radicale**.

$$= \sqrt{\frac{a-3}{2}} : \sqrt[3\cdot 2]{\frac{a^4}{18(a-3)}} =$$

Osserviamo ora che per poter usare la proprietà **divisione di due radicali** è necessario **portarli allo stesso indice**.

$$= \sqrt[6]{\frac{(a-3)^3}{2^3}} : \sqrt[6]{\frac{a^4}{18(a-3)}} =$$

Applico quindi ora la proprietà **divisione di due radicali**.

$$= \sqrt[6]{\frac{(a-3)^3}{2^3} : \frac{a^4}{18(a-3)}} =$$

Scambio la divisione con il prodotto invertendo il secondo membro della divisione secondo le regole delle frazioni (Per approfondimenti vedi l'Unità 1 della parte A «Numeri razionali, frazioni e relative operazioni»).

$$= \sqrt[6]{\frac{(a-3)^3}{\cancel{8}_4} \cdot \frac{\cancel{18}^9(a-3)}{a^4}} =$$

Semplifico ove possibile.

$$= \sqrt[6]{\frac{9(a-3)^4}{4a^4}} =$$

Osservo che ogni elemento del radicando è possibile scriverlo come quadrato di un altro elemento.

$$= \sqrt[\cancel{6}^{3}]{\left(\frac{3(a-3)^2}{2a^2}\right)^{\cancel{2}^{1}}} =$$

Utilizzo infine la **proprietà invariantiva dei radicali**.

$$= \boxed{\sqrt[3]{\frac{3(a-3)^2}{2a^2}}}$$

Esercizi Unità 4

1. Assegna un valore Vero/Falso alle seguenti affermazioni.

A. $a = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; a^2 = 4$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

B. $\sqrt[3]{-8}$ non ha significato. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

C. $\sqrt{x+2}$ ha come C.E. $x \geq -2$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

D. $\sqrt[0]{3} = 1$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

E. $\sqrt[1]{5} = 5$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

2. Data la seguente espressione con radicali

$$\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{(-5)^2} + \sqrt[4]{1}}$$

indica quale delle risposte è corretta:

A. È equivalente a $\sqrt{11}$.

B. È equivalente a $2\sqrt{2}$.

C. È equivalente a $-\sqrt{2}$.

D. Non ha significato.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

3. Assegna un valore Vero/Falso alle seguenti affermazioni.

A. $\sqrt[5]{1024} = 4$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

B. $\sqrt[4]{81} = \pm 3$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

C. $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

D. $\sqrt[6]{(-5)^6} = -5$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

E. $-\sqrt[8]{1} = \sqrt[5]{-1}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

4. Dato il seguente prodotto tra radicali

$$\sqrt{2x-10} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x-5}}$$

indica quale delle risposte è corretta.

A. Le C.E. sono $x > 5$ ed il risultato del prodotto è $\sqrt[6]{8(x-5)}$.

B. Le C.E. sono $x \geq 5$ ed il risultato del prodotto è $2\sqrt[6]{x-5}$.

C. Non è possibile moltiplicare i due radicali.

D. Non ha significato.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

5. Data la seguente somma tra radicali e supposto $a \geq 0$

$$\sqrt{54} - a\sqrt{12} + \sqrt[4]{9a^4} - \sqrt{24}$$

indica quale delle risposte è corretta.

A. È equivalente a $\sqrt{30} - 3a$.

B. È equivalente a $\sqrt{6} - \sqrt{3}\,a$.

C. Non si può semplificare ulteriormente.

D. Non ha significato.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

6. Data la seguente frazione

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{14}-\sqrt{2}}$$

indica quale delle seguenti risposte esprime correttamente la razionalizzazione del suo denominatore.

A. La frazione è equivalente a $\sqrt{6}$.

B. La frazione è equivalente a $\frac{6(\sqrt{14}-1)}{13}$.

C. La frazione è equivalente a $\sqrt{7}+1$.

D. La frazione è equivalente a $\frac{3(2\sqrt{7}-1)}{4}$.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Parte B – CALCOLO LETTERALE

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT,
2017 Firenze University Press

Unità 1

Monomi e relative operazioni

1. Definizione di monomio e di forma normale

Un **monomio** è un'espressione in cui si ha un prodotto di fattori qualsiasi, sia numerici che letterali. I fattori letterali hanno per esponente un numero naturale.

Un monomio si dice in **forma normale** quando è espresso come prodotto di un solo fattore numerico (il **coefficiente**) e una o più potenze di lettere tutte diverse tra loro (la **parte letterale**).

Esempi:

1. $\boxed{-3x^2y}$ è un monomio in «forma normale» dove $\begin{cases} -3 & \text{è il } \textbf{coefficiente numerico.} \\ x^2y & \text{è la } \textbf{parte letterale.} \end{cases}$

2. $\boxed{\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)^2 =}$ è un monomio «non in forma normale» dove la parte letterale è assente.
   $= \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ Ora è in forma normale.

3. $\boxed{\frac{yz^3}{x^{-2}} =}$ è un monomio «non in forma normale» dove il coefficiente numerico è 1.
   $= x^2yz^3$ Ora è in forma normale.

4. $\boxed{2x - 4x^3}$ **non è un monomio** poiché è presente una sottrazione.

1.1. Definizione di grado di un monomio

Dato un monomio in forma normale, si dice **grado** (del monomio in questione) la somma degli esponenti dei fattori letterali. Da non confondere con il **grado di una lettera** che è l'esponente che una lettera ha nel monomio.

Negli esempi precedenti:

1. Il grado del monomio è 3, infatti x ha come esponente 2, mentre y ha esponente 1.
   Il grado rispetto alla lettera x è 2, mentre rispetto a y è 1.

2. Il grado del monomio è 0 poiché la parte letterale è assente.

3. Il grado del monomio è 6, infatti x ha come esponente 2, y ha esponente 1, mentre z ha esponente 3.
   I gradi rispetto alle singole lettere x, y e z sono infatti rispettivamente 2, 1 e 3.

4. Non ha senso parlare di grado del monomio[9], visto che l'espressione non è un monomio.

2. Operazioni tra monomi

2.1. Somma algebrica tra monomi [10]

Ricordo che **due monomi** si dicono **simili** quando hanno la stessa parte letterale.

Esempi:

1. $5x$ e $-2x$ sono monomi simili.
2. $3ay$ e $3by$ non sono monomi simili.

La **somma tra monomi simili** è quindi un monomio che ha:

- come **coefficiente numerico** la somma dei coefficienti numerici dei monomi di partenza;
- come **parte letterale** la stessa parte letterale dei monomi di partenza.

La **somma di due monomi *non* simili** dà invece origine ad un polinomio (vedi l'Unità 2 della Parte B «Polinomi e relative operazioni»).

Esempi:

1. $\boxed{4x^2y - 2x^2y + x^2y} =$ $= (4-2+1)x^2y = 3x^2y$

   I monomi di partenza hanno tutti la stessa parte letterale e quindi si possono sommare tra loro.

2. $\boxed{-\frac{1}{2}a^2b - 5x + 2x - a^2b} =$ $= (-\frac{1}{2} - 1)a^2b + (-5+2)x =$ $= -\frac{3}{2}a^2b - 3x$

   Posso sommare tra loro il primo con il quarto monomio e il secondo con il terzo perché sono simili tra loro. I monomi risultanti, non avendo le parti letterali uguali, non si possono sommare.

3. $\boxed{4a^3b - 5x + 5x^2}$

   Non si può sommare nessun monomio perché hanno tutti parti letterali diverse.

2.2. Prodotto tra monomi

Il **prodotto tra monomi** è un monomio che ha:

- come **coefficiente numerico** il prodotto dei coefficienti numerici dei monomi di partenza.
- come **parte letterale** il prodotto delle parti letterali dei due monomi.

[9] Da non confondere con il **grado del polinomio**, infatti come polinomio il grado è 3. Per approfondimenti vedi l'Unità 2 della Parte B «Polinomi e relative operazioni».

[10] Si ricorda che il termine **somma algebrica** indica genericamente le operazioni di somma e sottrazione.

Esempi:

1. $$\boxed{\frac{1}{2}ab^2 \cdot (-4ab^3c)} =$$
$$= \left[\tfrac{1}{2} \cdot (-4)\right]a^{1+1}\,b^{2+3}\,c =$$
$$= -2a^2b^5c$$
Si moltiplicano tra loro i coefficienti numerici e le parti letterali.

2. $$\boxed{-\frac{1}{4}axy \cdot 2xy^2 \cdot 6y^3z} =$$
$$= (-\tfrac{1}{4} \cdot 2 \cdot 6)ax^{1+1}\,y^{1+2+3}\,z =$$
$$= -3ax^2y^6z$$
Si moltiplicano tra loro i coefficienti numerici e le parti letterali di tutti e tre i monomi.

3. $$\boxed{-bxz \cdot (3ax - \frac{5}{2}bz)} =$$
$$= [-bxz \cdot 3ax] + [-bxz \cdot (-\tfrac{5}{2}bz)] =$$
$$= (-1 \cdot 3)abx^{1+1}\,z + (-1 \cdot -\tfrac{5}{2})b^{1+1}\,xz^{1+1} =$$
$$= -3abx^2\,z + \tfrac{5}{2}b^2\,xz^2$$
Nel caso si moltiplichi un monomio per una somma algebrica di monomi si applica la proprietà distribuitiva del prodotto e si svolgono i singoli prodotti tra monomi.

2.3. Divisione o quoziente tra monomi

È importante ricordare che, in una divisione, **il divisore non può mai essere nullo**.

Anche in una divisione tra monomi quindi, affinché sia ammissibile, il monomio divisore non si deve annullare, ovvero **dobbiamo assicurarci che nessuna lettera, che compone la parte letterale del monomio divisore, possa assumere il valore zero**.

Se considero quindi un monomio A e uno $B \neq 0$, A si dice **divisibile** per B se e solo se ha, nella sua parte letterale, tutte le lettere di B, ognuna con esponente maggiore o uguale a quello con cui compare in B.

Il **monomio quoziente** di A diviso B è quindi il monomio che ha:

- **come coefficiente numerico** il quoziente dei coefficienti numerici dei monomi di partenza;
- **come parte letterale** il quoziente delle parti letterali dei due monomi, ovvero ogni lettera ha per esponente la differenza tra gli esponenti con cui la lettera compare in A e B.

Esempi:

1. $$\boxed{5a^2xy^4 : (-10ay)} =$$
$$= [5 : (-10)]a^{2-1}xy^{4-1}c =$$
$$= -\tfrac{1}{2}axy^3$$
Supposti $a \neq 0$ e $y \neq 0$, si dividono tra loro i coefficienti numerici e le parti letterali.

2. $$\boxed{-7ab^2 : -2ab^2} =$$
$$= [-7 : (-2)]a^{1-1}b^{2-2} =$$
$$= \tfrac{7}{2}a^0b^0 = \tfrac{7}{2}$$
Supposti $a, b \neq 0$, **dato che i monomi sono simili** il quoziente risulta un monomio, di grado 0, formato dalla sola parte numerica.

3. $\boxed{\frac{1}{2}xbz : xb^2} =$
$= \frac{1}{2}x^{1-1}b^{1-2}z = \frac{1}{2}b^{-1}z = \frac{z}{2b}$

Supposti $x, b \neq 0$, osserviamo che **il quoziente non è un monomio** perché il dividendo non è divisibile per il divisore, infatti una lettera del monomio divisore ha esponente maggiore del monomio dividendo.

2.4. Potenza di un monomio

La **potenza** $n - esima$ **di un monomio** è un monomio che ha:

- **come coefficiente numerico** la potenza con esponente n del suo coefficiente;
- **come parte letterale** l'elevazione a potenza $n - esima$ della sua parte letterale, ovvero si moltiplica per n ognuno degli esponenti delle sue lettere.

Esempi:

1. $\boxed{(-5x^4)^2} = (-5)^2x^{4\cdot 2} = 25x^8$ Si eleva alla n sia il coefficiente numerico che la parte letterale.

2. $\boxed{(\frac{3}{4}ab^3)^0} = (\frac{3}{4})^0a^{1\cdot 0}b^{3\cdot 0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ Elevando alla 0 il risultato è sempre 1 (purché $a \neq 0$ e $b \neq 0$).

3. $\boxed{(-8x^4y)^1} = (-8)^1x^{4\cdot 1}y^{1\cdot 1} = -8x^4y$ Elevando alla 1 il risultato è il monomio stesso.

3. MCD e mcm di monomi

Il **massimo comune divisore (MCD)** di due o più monomi è un monomio, con il grado massimo possibile, divisore di tutti i monomi.
Il **MCD** tra due o più monomi è quindi il monomio che ha:

- **come coefficiente numerico**:
  - il numero 1 se qualche monomio non ha coefficiente intero;
  - il MCD dei valori assoluti dei coefficienti se sono tutti interi.
- **come parte letterale** il prodotto delle lettere comuni a tutti i monomi, ognuna presa con l'esponente minimo.

Il **minimo comune multiplo (mcm)** di due o più monomi è un monomio, con il grado minimo possibile, multiplo di tutti i monomi.
Il **mcm** tra due o più monomi è quindi il monomio che ha:

- **come coefficiente numerico**:
  - il numero 1 se qualche monomio non ha coefficiente intero;
  - il mcm dei valori assoluti dei coefficienti se sono tutti interi.

- **come parte letterale** il prodotto di ciascuna delle lettere presenti in almeno uno dei monomi, ognuna presa con l'esponente massimo.

Esempi:

1. Calcoliamo MCD e mcm dei seguenti monomi: $-6a^3b^2c$, $4a^2b^4c^2$, $3ab^2$
   - MCD=ab^2
   - mcm=$12a^3b^4c^2$
2. Calcoliamo MCD e mcm dei seguenti monomi: $\frac{1}{5}axy$, $3ax^2$, $-4yz$
   - MCD=y
   - mcm=ax^2yz
3. Calcoliamo MCD e mcm dei seguenti monomi: $-9ab$, $12xy^2$, 2^2c^3z
   - MCD=1
   - mcm=$36abc^3xy^2z$

Esercizi Unità 1

1. Individua i monomi tra le seguenti espressioni:

A. $-\frac{1}{5}a^0$

B. $\dfrac{4xz}{x^{-2}}$

C. $3\dfrac{a^2b}{c}$

D. $25x^3y + x$

E. Nessuno dei precedenti.

2. Indica quali tra i seguenti sono monomi in forma normale:

A. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}a^2b$

B. $\dfrac{1}{2}a - 4a$

C. $\dfrac{2}{3}(x^2 + y)$

D. $-7a$

3. Il seguente monomio in forma normale $\frac{2^4}{5}x^3y$ **ha grado**:

A. 0

B. 1

C. 3

D. 4

4. Considerando la seguente espressione

$$\frac{1}{4}a^2y + \frac{1}{2}(bx^2 - a^2y) - \frac{1}{2}bx^2$$

indica la risposta corretta:

A. L'espressione è equivalente alla seguente: $\frac{1}{4}a^2y + bx^2$

B. L'espressione è equivalente alla seguente: $-\frac{1}{4}a^2y$

C. L'espressione è equivalente alla seguente: $-\frac{3}{4}a^2y$

D. L'espressione non è equivalente a nessuna delle precedenti.

5. Considerando il seguente prodotto tra monomi

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} a^2b \cdot (-8)ab$$

indica la risposta corretta:

A. È equivalente a $-\frac{29}{4}ab$

B. È equivalente a $-6ab$

C. È equivalente a $-6a^3b^2$

D. È equivalente a $\frac{32}{3}a^3b$

E. Non è possibile svolgere il prodotto.

6. Considerando la seguente divisione tra monomi

$$\left(\frac{1}{8}\right)a^5b^2 : \left(-\frac{3}{4}a^3\right) = -\frac{1}{6}a^2b^2$$

indica quale affermazione è corretta:

A. Il risultato è corretto per ogni a e b reali.

B. Prima di svolgere la divisione si deve porre $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

C. Il risultato è sbagliato.

D. Prima di svolgere la divisione si deve porre $a \neq 0$.

7. Indica il risultato della seguente potenza di monomio:

$$\left[-\left(\frac{1}{2}m^2a\right)^2\right]^3$$

A. $\frac{1}{64}m^{12}a^6$

B. $-\frac{1}{64}m^{12}a^6$

C. $-\frac{1}{18}m^{12}a^3$

D. Nessuna delle precedenti.

8. Dati i tre seguenti monomi

$$-8xy^3; \quad 12yz^2; \quad 6x^2z$$

indica MCD e mcm corretti:

A. MCD: $2xyz$ mcm: $24x^2y^3z^2$

B. MCD: -2 mcm: $-24x^2y^3z^2$

C. MCD: -2 mcm: $24xyz$

D. MCD: 2 mcm: $24x^2y^3z^2$

E. Nessuno dei precedenti.

Unità 2

Polinomi e relative operazioni

Se vuoi ripassare le definizioni e le operazioni tra monomi consulta l'Unità 1 della Parte B «Monomi e relative operazioni».

1. Definizione di polinomio

Un **polinomio** è una somma algebrica[1] di monomi.
Ogni monomio che appare nel polinomio si dice **termine** del polinomio.

Osservazione: ogni monomio è anche un particolare polinomio

Esempi:

1. $\mathbf{0}$ è il monomio nullo, di conseguenza è anche il **polinomio nullo**.
2. $\mathbf{\frac{2}{3}x^2 - 5xy^3}$ è un polinomio composto da due monomi, ed è quindi detto **binomio**.
3. $\mathbf{xz^3 + 5y - 3xz^3}$ è invece composto da tre monomi, ed è quindi detto **trinomio**.
4. $\mathbf{2x - 4x^3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}yz - xz^2}}$ **non è un polinomio** poiché è presente un radicale.

1.1. Definizione di forma normale e grado di un polinomio

Un polinomio si dice **ridotto a forma normale** (o semplicemente **ridotto**) se è composto solo da monomi in forma normale e non ha monomi simili.
Dato quindi un polinomio ridotto, si dice **grado del polinomio** il maggiore tra i gradi dei suoi termini.
Si dice infine **grado di una lettera**, il massimo esponente di tale lettera nel polinomio.

Negli esempi precedenti:

1. Il polinomio è ridotto e il suo grado è 0 non essendo presenti lettere.
2. Il polinomio è ridotto, poiché non ci sono monomi simili e il suo grado è 4 poiché il grado del suo secondo termine (4) è più alto del grado del primo (1). Infine il grado della lettera x è 2, mentre il grado di y è 3.
3. Il polinomio non è ridotto, infatti il primo ed il terzo termine sono simili. Il grado del polinomio ridotto è 4.
4. Non ha senso parlare di grado del polinomio, visto che l'espressione non è un polinomio.

2. Operazioni tra polinomi

2.1. Somma algebrica tra polinomi[11]

Dati due polinomi:

- La loro **somma** è la somma algebrica dei termini di entrambi i polinomi.
- La loro **differenza** è la differenza tra i termini del primo e quelli del secondo polinomio.

Esempi: Consideriamo due polinomi ridotti: $a(x) = \frac{1}{2}x + 2ay$ e $b(x) = \frac{3}{2}x - 3ay + 5c$

1. $$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= \left(\tfrac{1}{2}x + 2ay\right) + \left(\tfrac{3}{2}x - 3ay + 5c\right) = \tfrac{1}{2}x + 2ay + \tfrac{3}{2}x - 3ay + 5c = \\ &= \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)x + (2-3)ay + 5c = 2x - ay + 5c \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} a(x) - b(x) &= \left(\tfrac{1}{2}x + 2ay\right) - \left(\tfrac{3}{2}x - 3ay + 5c\right) = \tfrac{1}{2}x + 2ay - \tfrac{3}{2}x + 3ay - 5c = \\ &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}\right)x + (2+3)ay - 5c = -x + 5ay - 5c \end{aligned}$$

2.2. Prodotto di un polinomio per un monomio

Il **prodotto di un monomio per un polinomio** è la somma dei prodotti del monomio per i termini del polinomio.

Esempio:

$$\begin{aligned} (-2xy)(ax + 3by - 5xy) &= (-2xy \cdot ax) + (-2xy \cdot 3by) + (-2xy \cdot -5xy) = \\ &= -2ax^2y - 2bxy^2 + 10x^2y^2 \end{aligned}$$

2.3. Prodotto di polinomi

Il **prodotto tra due polinomi** è la somma dei prodotti di ognuno dei termini del primo polinomio per ognuno dei termini del secondo.

Esempio:

$$\begin{aligned} (-2ax + by)(5az - 3bx) &= (-2ax \cdot 5az) + (-2ax \cdot -3bx) + (by \cdot 5az) + (by \cdot -3bx) = \\ &= -10a^2xz + 6abx^2 + 5abyz - 3b^2xy \end{aligned}$$

2.4. Divisione di un polinomio per un monomio

È importante ricordare che **un polinomio è divisibile per un monomio non nullo se e solo se lo è ognuno dei suoi termini.**[2]
La **divisione di un polinomio per un monomio** è quindi la somma delle divisioni dei termini del polinomio per il monomio divisore.

Esempio:

$$\begin{aligned} (5a^4x^5y^2 - 6bx^3y) : (3xy) &= (5a^4x^5y^2 : 3xy) + (-6bx^3y : 3xy) = \\ &= \tfrac{5}{3}a^4x^4y - 2bx^2 \end{aligned}$$

[11] Si ricorda che il termine **somma algebrica** indica genericamente le operazioni di somma e sottrazione.
[2] per approfondimenti sulla divisione tra monomi vedere l'Unità 1 della parte B «Monomi e relative operazioni».

2.5. Divisione tra polinomi

Prima di mostrare operativamente come si attua la divisione, ricordiamo il **concetto di divisibilità** per i polinomi.
Dati un polinomio A e un polinomio $B \neq 0$, si dice che **A è divisibile per B** se esiste un polinomio Q tale che, moltiplicato per B, dà A, cioè:

$$\mathbf{A : B = Q} \quad \textbf{se e solo se} \quad \mathbf{B \cdot Q = A}$$

2.5.1. Teorema della divisione tra polinomi nella variabile x

Se consideriamo l'insieme dei polinomi in una sola variabile (per noi la variabile x), vale il seguente teorema:

Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, con $B(x) \neq 0$ e con *grado di* $B \leq$ *grado di* A,
esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

con *grado di* $R(x) <$ *grado di* $B(x)$ e *grado di* $Q(x) =$ *grado di* $A(x) -$ *grado di* $B(x)$

Osservazione:
In particolare se $R = 0$, si ha:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x)$$

Quindi se $R = 0$, A è divisibile per B e si dice che A **è scomposto**[3] **nei fattori** B **e** Q.

2.5.2. Esempio di divisione tra due polinomi

Consideriamo i seguenti polinomi: $A(x) = 5x^2 + 2x - 1$ e $B(x) = x - 1$

$$\begin{array}{ccc|c} \mathbf{+5x^2} & \mathbf{+2x} & \mathbf{-1} & \mathbf{x-1} \\ \cline{4-4} & & & \\ \end{array}$$

Questa è l'impostazione base. A sinistra c'è il polinomio dividendo $A(x)$ e a destra il polinomio divisore $B(x)$

$$\begin{array}{ccc|c} +5x^2 & +2x & -1 & x-1 \\ \cline{4-4} & & & \mathbf{5x} \\ \end{array}$$

Si scrive ora nello spazio subito sotto il polinomio divisore, il quoziente tra i primi termini dei polinomi dividendo e divisore, infatti $5x^2 : x = 5x$.

$$\begin{array}{ccc|c} +5x^2 & +2x & -1 & x-1 \\ \cline{4-4} \mathbf{-5x^2} & \mathbf{+5x} & & 5x \\ \hline & & & \\ \end{array}$$

Si moltiplica ora il monomio appena trovato per tutti i termini del polinomio divisore e si scrive l'opposto del polinomio risultante subito sotto il polinomio dividendo, allineando i termini dello stesso grado.

$$\begin{array}{ccc|c} +5x^2 & +2x & -1 & x-1 \\ \cline{4-4} -5x^2 & +5x & & 5x \\ \hline & \mathbf{+7x} & \mathbf{-1} & \\ \end{array}$$

Si somma algebricamente il polinomio dividendo al polinomio ricavato al passo precedente e si scrive subito sotto il polinomio risultante. Se il grado di questo polinomio è maggiore o uguale al polinomio divisore, allora il polinomio in oggetto diventa il nuovo polinomio dividendo e si itera il procedimento.

[3] Per approfondimenti riguardo la scomposizione vedi l'Unità 6 della parte B «Scomposizione di polinomi».

$$
\begin{array}{rrr|l}
+5x^2 & +2x & -1 & x-1 \\ \cline{4-4}
-5x^2 & +5x & & 5x+\mathbf{7} \\ \cline{1-3}
 & +7x & -1 & \\
 & & & \\
 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|l}
+5x^2 & +2x & -1 & x-1 \\ \cline{4-4}
-5x^2 & +5x & & 5x+7 \\ \cline{1-3}
 & +7x & -1 & \\
 & \mathbf{-7x} & \mathbf{+7} & \\
 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|l}
+5x^2 & +2x & -1 & x-1 \\ \cline{4-4}
-5x^2 & +5x & & 5x+7 \\ \cline{1-3}
 & +7x & -1 & \\
 & -7x & +7 & \\ \cline{2-3}
 & & +\mathbf{6} &
\end{array}
$$

Si sono ottenuti quindi il quoziente $Q(x) = 5x + 7$ e il resto $R(x) = 6$, dunque possiamo scrivere:

$$5x^2 + 2x - 1 = (x-1)(5x+7) + 6$$

Nota:
Se nel polinomio dividendo mancano uno o più termini di grado intermedio, essi si inseriscono lo stesso nello schema della divisione, ponendo come loro coefficiente numerico 0.
Mentre non è necessario porre la stessa attenzione per il polinomio divisore.

Ad esempio, se consideriamo i polinomi: $A(x) = -3x^4 - x + 1$ e $B(x) = x^2 + 5$,
impostiamo così la divisione:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\mathbf{-3x^4} & \mathbf{+0x^3} & \mathbf{+0x^2} & \mathbf{-x} & \mathbf{+1} & \mathbf{x^2+5} \\ \cline{6-6}
 & & & & & \\
 & & & & &
\end{array}
$$

(Lo svolgimento completo della divisione è riportato a fine Unità)

3. MCD e mcm di polinomi

Il **massimo comune divisore (MCD)** di due o più polinomi è un polinomio che divide tutti i polinomi e ha il grado massimo possibile.

Il **minimo comune multiplo (mcm)** di due o più polinomi è un polinomio che è divisibile per tutti i polinomi e ha il grado minimo possibile.

Nota:
Dunque il procedimento per il calcolo di MCD e mcm di polinomi è molto simile a quello visto per i monomi. Da notare però che con i polinomi si deve prima scomporli in fattori irriducibili[4].

Esempio:
Calcoliamo MCD e mcm dei seguenti polinomi:

$$2x^4 + 2x^3\,, \quad 12x^3 + 24x^2 + 12x \quad \text{e} \quad 6x^2 - x$$

Scomponiamoli dunque in fattori irriducibili:

$$
\begin{array}{ll}
2x^4 + 2x^3 = & = 2 \cdot x^3 \cdot (x+1) \\
12x^3 + 24x^2 + 12x = 12 \cdot x \cdot (x^2 + 2x + 1) = & = 2^2 \cdot 3 \cdot x \cdot (x+1)^2 \\
6x^2 - 6 = 6 \cdot (x^2 - 1) = & = 2 \cdot 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1)
\end{array}
$$

[4] Per approfondimenti riguardo la scomposizione vedi l'Unità 6 della Parte B «Scomposizione di polinomi».

Dunque:

MCD $= 2 \cdot (x+1) = 2(x+1)$
Dato dai fattori comuni con l'esponente minore.

mcm $= 2^2 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1) = 12x^3(x+1)^2(x-1)$
Dato da tutti i fattori (comuni e non) con l'esponente maggiore.

Vediamo infine lo svolgimento completo della divisione impostata alla pagina precedente:

$$\begin{array}{rrrrr|l} -3x^4 & +0x^3 & +0x^2 & -x & +1 & x^2+5 \\ \cline{6-6} &&&&& \mathbf{-3x^2} \end{array}$$

Scrivo nello spazio subito sotto il polinomio divisore $-3x^2$, ovvero il quoziente tra il primo termine del polinomio dividendo $(-3x^4)$ e il primo termine del divisore (x^2).

$$\begin{array}{rrrrr|l} -3x^4 & +0x^3 & +0x^2 & -x & +1 & x^2+5 \\ \cline{6-6} \mathbf{+3x^4} & & \mathbf{+15x^2} & & & -3x^2 \end{array}$$

Svolgo il prodotto tra il monomio $-3x^2$ e il polinomio divisore. Scrivo quindi i termini risultanti, cambiati di segno, sotto i termini dello stesso grado del polinomio dividendo.

$$\begin{array}{rrrrr|l} -3x^4 & +0x^3 & +0x^2 & -x & +1 & x^2+5 \\ \cline{6-6} +3x^4 & & +15x^2 & & & -3x^2 \\ \cline{1-5} & & \mathbf{+15x^2} & \mathbf{-x} & \mathbf{+1} & \end{array}$$

Sommo algebricamente le prime due righe scrivendo i risultati subito sotto. Considero il polinomio così ottenuto come il nuovo polinomio dividendo.

$$\begin{array}{rrrrr|l} -3x^4 & +0x^3 & +0x^2 & -x & +1 & x^2+5 \\ \cline{6-6} +3x^4 & & +15x^2 & & & -3x^2\mathbf{+15} \\ \cline{1-5} & & +15x^2 & -x & +1 & \\ & & \mathbf{-15x^2} & & \mathbf{-75} & \end{array}$$

Ripeto quindi il procedimento sopra esposto.

$$\begin{array}{rrrrr|l} -3x^4 & +0x^3 & +0x^2 & -x & +1 & x^2+5 \\ \cline{6-6} +3x^4 & & +15x^2 & & & -3x^2+15 \\ \cline{1-5} & & +15x^2 & -x & +1 & \\ & & -15x^2 & & -75 & \\ \cline{3-5} & & & \mathbf{-x} & \mathbf{-74} & \\ \cline{4-5} \end{array}$$

Dato che il polinomio ottenuto con quest'ultimo passaggio ha grado minore del polinomio divisore, la divisione è conclusa.

Si sono ottenuti quindi il quoziente $Q(x) = -3x^2 + 15$ e il resto $R(x) = -x - 74$, dunque possiamo scrivere:

$$-3x^4 - x + 1 = (x^2+5)(-3x^2+15) - x - 74$$

Esercizi Unità 2

1.Tra i seguenti individua e seleziona i polinomi:

A. $-\frac{3}{2}xy^2$

B. $7x+5$

C. $\frac{2}{x}+bx^2$

D. $5a\sqrt{1+2xy}$

E. Nessuno dei precedenti.

2. Indica quali tra i seguenti sono polinomi in forma normale:

A. $5a^0+2x-7$

B. $\left(\frac{2}{3}a\right)^{-1}+5^2y$

C. -3^2+6aby

D. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{x+y}$

3. Il seguente polinomio in forma normale $3xy-5^2ab^2c+\frac{6}{7}x^3$ **ha grado**:

A. 4

B. 2

C. 6

D. 3

4. Dati i seguenti polinomi: $A(x)=ax+b$**,** $B(x)=b-3a$ **e** $C(x)=\frac{2}{3}ax-2b$**,**
indica (se è possibile) il risultato di:

$$A(x)+B(x)-C(x)$$

A. $\frac{1}{3}ax-3a$

B. $\frac{1}{3}ax+4b-3a$

C. $\frac{5}{3}ax-3a$

D. Non è possibile semplificare l'espressione.

5. Dati i seguenti polinomi: $A(x) = y + 3$ **e** $B(x) = 5x - xy$,
indica il risultato in forma normale di

$$A(x) \cdot B(x)$$

A. $5xy - xy^2 + 15x - 3xy$

B. $x(2y - y^2 + 15)$

C. $2xy - xy^2 + 15x$

D. Nessuna delle precedenti.

6. Indica, considerando la seguente uguaglianza, quale affermazione è corretta.

$$5x^2 - 2x = (x - 1)(5x + 3) + 3$$

A. L'uguaglianza è vera, a patto che si ponga $x - 1 \neq 0$.

B. L'uguaglianza è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.

C. L'uguaglianza è sbagliata.

D. Si può affermare che il polinomio $x - 1$ divide il polinomio $5x^2 - 2x$.

E. Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

7. Dati i seguenti polinomi

$$3x^2 - 3x; \quad -2x^2 + 2; \quad x^3 + x^2$$

indica i loro MCD e mcm:

A. MCD: 1 mcm: $x^2(x^2 - 1)$

B. MCD: -1 mcm: $x(x - 1)(x + 1)$

C. MCD: $x^2 - 1$ mcm: $6x^2(x^2 - 1)$

D. MCD: -1 mcm: $6x^2(x - 1)(x + 1)$

E. Nessuna delle affermazioni precedenti è corretta.

8. Dato il polinomio

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$$

il suo valore per $x = 2$ **è:**

A. 2

B. 9

C. $\frac{1}{3}$

D. 1

E. Nessuno dei valori precedenti.

Unità 3

Prodotti notevoli

Di seguito saranno esposti i principali prodotti notevoli con relativi esempi.

1. Quadrato di binomio

Il **quadrato di un binomio** è uguale alla somma dei quadrati dei due monomi e del loro doppio prodotto.

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e viceversa.

Nota:
Secondo la definizione di potenza il quadrato di un binomio è:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Svolgendo il prodotto, si ottiene l'espressione vista sopra:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Quindi il prodotto notevole mostra una via *più rapida* per esprimere tale potenza.

Esempi:

1. $\boxed{(1+2x)^2} = (1)^2 + 2(1)(2x) + (2x)^2 = 1 + 4x + 4x^2$
2. $\boxed{(-a+2ab)^2} = (-a)^2 + 2(-a)(2ab) + (2ab)^2 = a^2 - 4a^2b + 4a^2b^2$
3. $\boxed{(2y-3x)^2} = (2y)^2 + 2(2y)(-3x) + (-3x)^2 = 4y^2 - 12xy + 9x^2$

Osservazione:
Attraverso l'utilizzo di questo prodotto notevole si possono ricavare anche i **quadrati di trinomio, quadrinomio ecc...**

1.1. Quadrato di trinomio

Consideriamo il quadrato di un trinomio $(a+b+c)^2$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e vediamo come semplificarlo utilizzando il prodotto notevole appena definito:

$\boxed{(a+b+c)^2} =$ Si aggiunge una nuova parentesi che raccoglie i primi due monomi.

$= [(a+b)+c]^2 =$ Si ottiene così un nuovo quadrato di binomio che sappiamo elaborare.

$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 =$ A questo punto riutilizziamo il prodotto notevole sul binomio $(a+b)$ e riordiniamo i termini.

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = \boxed{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$

Ricordo quindi infine il seguente **risultato generale**:

1.2. Quadrato di un generico polinomio

Il quadrato di un generico polinomio, ovvero della somma di n monomi, è pari alla somma dei quadrati dei singoli monomi con i doppi prodotti di tutti i monomi presi a due a due.

2. Differenza di quadrati

La **differenza tra i quadrati di due termini** è uguale alla somma dei due termini per la loro differenza.

$$\mathbf{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e viceversa. Infatti:

$$(a+b)(a-b) = a^2 \cancel{-ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Esempi:

1. $\boxed{(25 - x^2)} = (5-x)(5+x)$
2. $\boxed{(-x+9y)(-x-9y)} = (-x)^2 - (9y)^2 = x^2 - 81y^2$
3. $\boxed{(a^4b^4 - 16)} = (a^2b^2 - 4)(a^2b^2 + 4) = (ab-2)(ab+2)(a^2b^2+4)$
4. $\boxed{(x^3 - 3b^2)(x^3 + 3b^2)} = (x^3)^2 - (3b^2)^2 = x^6 - 9b^4$

3. Cubo di binomio

Il **cubo di un binomio** è uguale alla somma dei cubi dei due termini e dei tripli prodotti del quadrato di un termine per l'altro.

$$\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e viceversa.

Nota:
Analogamente a quanto visto per il quadrato, secondo la definizione di potenza, il cubo di un binomio è:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Mostriamo quindi che, svolgendo il prodotto, si ottiene la somma espressa nella definizione:

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) =$ Esprimiamo i primi due termini della moltiplicazione attraverso il prodotto notevole **quadrato di binomio**.

$= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$ Moltiplichiamo ora i due polinomi.

$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 =$ Semplifichiamo infine i termini simili.

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Esempi:

1. $\boxed{(2+x)^3} = (2)^3 + (x)^3 + 3(2)^2(x) + 3(2)(x)^2 = 8 + x^3 + 12x + 6x^2$

2. $\boxed{(x-3y)^3} = (x)^3 + (-3y)^3 + 3(x)^2(-3y) + 3(x)(-3y)^2 = x^3 - 27y^3 - 9x^2y + 27xy^2$

3. $\boxed{(-5a-1)^3} = (-5a)^3 + (-1)^3 + 3(-5a)^2(-1) + 3(-5a)(-1)^2 =$
   $= -125a^3 - 1 - 75a^2 - 15a$

4. $\boxed{27x^3 + 27x^2 + 9x + 1} = (3x+1)^3$

4. Somma e differenza di cubi

La **somma di due cubi** è uguale al prodotto di un binomio per un trinomio: il binomio è formato dalla somma delle radici cubiche dei due termini, mentre il trinomio ha per termini la somma dei quadrati delle radici cubiche dei due termini e l'opposto del prodotto delle radici cubiche.
La **differenza di due cubi** è uguale anch'essa al prodotto di un binomio per un trinomio: il binomio è formato dalla differenza delle radici cubiche dei due termini, mentre il trinomio ha per termini la somma dei quadrati delle radici cubiche dei due termini e il prodotto delle radici cubiche.

$$\mathbf{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$
$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Osservazione:
I due trinomi della formula sono detti «falsi quadrati» per la loro somiglianza con lo sviluppo del quadrato di binomio. Falsi perché, a differenza di quest'ultimo, non è presente il doppio nel prodotto dei due termini.
È importante inoltre ricordare che in entrambi i casi, i trinomi sono strettamente positivi e irriducibili.

Esempi:

1. $\boxed{27 + x^3 = (3)^3 + x^3} = (3+x)((3)^2 - (3)(x) + (x)^2) = (3+x)(9 - 3x + x^2)$

2. $\boxed{8a^3 - b^6 = (2a)^3 - (b^2)^3} = (2a-b^2)((2a)^2 + (2a)(b^2) + (b^2)^2) =$
   $= (2a-b^2)(4a^2 + 2ab^2 + b^4)$

3. $\boxed{-b^9 - a^{12} = (-b^3)^3 - (a^4)^3} = (-b^3 - a^4)((-b^3)^2 + (-b^3)(a^4) + (a^4)^2) =$
$= (-b^3 - a^4)(b^6 - a^4b^3 + a^8)$

4. $\boxed{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = x^3 + 8$

Esercizi Unità 3

1. Lo sviluppo del prodotto notevole $(-5a + 2b)^2$ è:

A. $-25a^2 + 4b^2$

B. $25a^2 + 4b^2 - 10ab$

C. $25a^2 - 20ab + 4b^2$

D. $25a^2 + 20ab + 4b^2$

E. $25a^2 + 4b^2$

2. Dato il seguente quadrato di trinomio

$$(2a + b - c)^2$$

indica quali delle seguenti affermazioni NON corrisponde al suo sviluppo.

A. $4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab - 4ac - 2bc$

B. $4a^2 + (b - c)^2 + 4a(b - c)$

C. $(2a + b)^2 - 2(2a + b)c + c^2$

D. $4a^2 + b^2 - c^2 + 2ab - 2ac - bc$

E. $4a^2 + b^2 + c^2$

3. Data la seguente differenza di quadrati

$$x^4 - 81$$

indica la sua corretta scomposizione in fattori irriducibili (ovvero non più scomponibili).

A. $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$

B. $(x^2 - 9)(x^2 + 9)$

C. $(x^2 - 9)(x^2 - 9x + 81)$

D. $(x - 3)^2(x + 3)^2$

E. Nessuna delle precedenti.

4. Lo sviluppo del seguente prodotto notevole

$$(3x - y)^3$$

è:

A. $(3x - y)(9x^2 - y^2)$

B. $27x^3 - y^3 - 27x^2y + 9xy^2$

C. $(3x - y)(9x^2 - 3xy + y^2)$

D. $27x^3 - 9xy - y^3$

E. Nessuna delle precedenti.

5. Data la seguente espressione:

$$(2xa^2 - y)(4x^2a^4 + 2xya^2 + y^2)$$

indica quale affermazione è corretta.

A. È equivalente a $(2xa^2 - y)^3$.

B. È equivalente a $(2xa^2 - y)(2xa^2 + y)^2$.

C. È equivalente a $8x^3a^6 - y^3$.

D. È equivalente a $y^3 - 8x^3a^6$.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

6. Data la seguente espressione

$$(x + 2)^3 - 8$$

indica quali delle seguenti affermazioni corrispondono ad un suo possibile sviluppo.

A. $x(x^2 + 6x + 12)$

B. $((x + 2) - 2)((x + 2)^2 + 2(x + 2) + 4)$

C. $(x + 2)^3 + (-2)^3 + 3(x + 2)^2(-2) + 3(x + 2)(-2)^2$

D. $x^3 + 8 + 6x^2 + 12x - 8$

E. Sono tutti sviluppi possibili.

7. Dato il seguente polinomio

$$4a^2 - 12a + 9$$

indica quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

A. Il polinomio equivale a $(2a + 3)^2$.

B. Il polinomio equivale a $(2a - 3)^2$.

C. Il polinomio equivale a $(-2a - 3)^2$.

D. Il polinomio equivale a $(-2a + 3)^2$.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

8. Dato il seguente polinomio

$$27b^3 - 8$$

indica quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A. Il polinomio equivale a $(3b - 2)(9b^2 + 12b + 4)$.

B. Il polinomio equivale a $(3b - 2)(9b^2 - 6b + 4)$.

C. Il polinomio equivale a $(3b + 2)(9b^2 + 6b + 4)$.

D. Il polinomio equivale a $(3b + 2)(9b^2 - 6b + 4)$.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

9. Data la seguente espressione

$$(x^5 + a^4)(x^5 - a^4)$$

indica quale affermazione è corretta.

A. È equivalente a x^{10}

B. È equivalente a $2x^5$

C. È equivalente a $x^{25} - a^{16}$

D. È equivalente a $x^{10} - a^8$

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

Unità 4

Scomposizione dei trinomi di II grado

In questa Unità vedremo il metodo generale per scomporre (quando possibile) un qualunque trinomio di II grado e successivamente un metodo più rapido per scomporre un particolare tipo di trinomi di secondo grado.

1. Scomposizione di un generico trinomio di II grado

Dato un generico trinomio di II grado,

$$ax^2 + bx + c \quad \text{dove} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

per prima cosa calcolo il Δ dell'equazione associata:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ cioé } \Delta = b^2 - 4ac$$

Se $\Delta < 0$ il trinomio è **irriducibile in** $\mathbb{R}$ (ovvero non si può scomporre come prodotto di due polinomi di I grado a coefficienti in $\mathbb{R}$).
Se invece $\Delta \geq 0$, si calcolano x_1 e x_2 (eventualmente coincidenti se $\Delta = 0$).
Dunque si scompone il trinomio nel modo seguente:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Nota:
Se $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$

Esempi:

1. Consideriamo il trinomio $4x^2 - 4x + 1$. Calcoliamo il Δ e, se possibile, x_1 e x_2:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (4)} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

Dunque:

$$4x^2 - 4x + 1 = 4(x - (\tfrac{1}{2}))(x - (\tfrac{1}{2})) = 4(x - \tfrac{1}{2})^2 = \text{(volendo semplificare ancora)} = (2x - 1)^2$$

2. Consideriamo il trinomio $x^2 + 3x - 2$. Calcoliamo il Δ e, se possibile, x_1 e x_2:

$$\Delta = (3)^2 - 4(1)(-2) = 9 + 8 = 17 > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Dunque:

$$x^2 + 3x - 2 = 1 \cdot \left(x - \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right)\right) =$$
$$= \left(x + \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

3. Consideriamo il trinomio $-3x^2 + 4x - 5$. Calcoliamo il Δ e, se possibile, x_1 e x_2:

$$\Delta = (4)^2 - 4(-3)(-5) = 16 - 60 = -44 < 0$$

Dunque il trinomio è **irriducibile**.

2. Particolare trinomio di II grado

Dato un trinomio di II grado nella seguente forma,

$$x^2 + sx + p \quad \text{dove} \quad s, p \in \mathbb{R},$$

se trovo 2 numeri $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 \cdot z_2 = p \end{cases}$, allora posso scomporre il mio trinomio così:

$$\boxed{x^2 + sx + p = (x + z_1)(x + z_2)}$$

Note:

- Mentre il **metodo generale si può usare anche per i particolari trinomi di secondo grado**, **non è vero il contrario**; ovvero non si può sempre usare la formula del particolare trinomio di II grado per un trinomio generico di II grado. Infatti, il procedimento appena descritto è **valido solo per trinomi di II grado in cui il coefficiente direttivo** (ovvero il coefficiente del termine di secondo grado) **è 1**!
- Nella ricerca dei due numeri **è** spesso **conveniente cercare tra gli interi e partire dal prodotto**.

Esempio:

Consideriamo il trinomio $x^2 - 6x + 5$. Cerchiamo $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} z_1 + z_2 = -6 \\ z_1 \cdot z_2 = 5 \end{cases}$.

Se cerchiamo z_1, z_2 in $\mathbb{Z}$, le uniche coppie che come prodotto danno 5 sono $(1, 5)$ e $(-1, -5)$ e dato che la somma dei numeri della seconda coppia è proprio -6, allora -1 e -5 sono proprio gli z_1, z_2 cercati. Dunque:

$$x^2 - 6x + 5 = (x + (-5))(x + (-1)) = (x - 5)(x - 1)$$

ATTENZIONE

È importante porre **attenzione a non confondersi tra i due tipi di scomposizione visti.** Ovvero in particolare:

- a non confondere i valori cercati nell'ultimo metodo (z_1, z_2) con le soluzioni dell'equazione associata del caso precedente (x_1, x_2): in realtà infatti si ha $x_1 = -z_1,\ x_2 = -z_2$;
- ai segni che precedono tali numeri nelle formule: nel caso generale x_1 e x_2 sono sottratti dalla variabile x, mentre nel caso particolare z_1 e z_2 sono sommati alla variabile;
- nel caso generale i fattori della scomposizione sono moltiplicati dal coefficiente del termine di secondo grado a, che nel caso particolare è 1.

Esercizi Unità 4

1. La scomposizione di $y^2 - y - 6$ è:

A) $(y-2)(y+3)$

B) $(y-2)(y-3)$

C) $(y+2)(y-3)$

D) Nessuna delle precedenti.

2. Il seguente trinomio $3x^2 - 7x + 4$ si scompone così:

A) $(3x-4)(x+1)$

B) $3(x-\frac{4}{3})(x-1)$

C) $(x-4)(3x-3)$

D) Nessuna delle precedenti

3. Il polinomio $x^2 - 6x - 16$ si scompone nella forma $(x+z_1)(x+z_2)$, dove la coppia (z_1, z_2) è:

A) $(-2, 8)$

B) $(-2, -8)$

C) $(4, -4)$

D) Nessuna delle precedenti

Unità 5

Teorema del resto, teorema e regola di Ruffini

Di seguito analizzeremo brevemente teoremi e corollari necessari per comprendere la scomposizione di polinomi tramite il metodo di Ruffini.

1. Premesse al metodo di Ruffini

TEOREMA DEL RESTO

Se considero i seguenti polinomi:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{con} \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$
$$h(x) = x - \alpha \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Allora il resto R della divisione di $p(x)$ per $h(x)$ corrisponde a $p(\alpha)$, ovvero:

Il resto R della divisione di $p(x)$ per $(x - \alpha)$ è dato dal valore che assume $p(x)$ quando alla variabile x si sostituisce il valore α.

In formule:

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + R = (x - \alpha)q(x) + p(\alpha) \quad \text{dove } q(x) \text{ è il polinomio quoziente.}$$

Osservazioni:

1. Il teorema non ci dà **nessuna informazione sul polinomio quoziente** $q(x)$, ma solo sul resto.
2. È importante osservare che **il teorema vale solo per polinomi divisori della forma** $x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, ovvero per polinomi divisori lineari (di primo grado) e con 1 come coefficiente della variabile.

Esempio:
Consideriamo i polinomi $p(x) = 2x^3 - 3x + 2$ e $h(x) = x - 1$
Allora il resto della divisione di $p(x)$ per $h(x)$ è $p(1) = 2(1)^3 - 3(1) + 2 = 1$ e quindi, in formule:

$$p(x) = (x - 1)q(x) + 1 \quad \text{dove } q(x) \text{ è il polinomio quoziente.}$$

COROLLARIO (TEOREMA DI RUFFINI)

Se consideriamo un polinomio generico $p(x)$ e il polinomio $h(x) = x - \alpha$ si ha che:

$$x - \alpha \text{ divide il polinomio } p(x) \text{ se e solo se } p(\alpha) = 0$$

In tal caso:

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

TEOREMA 2

Dato un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$,
allora le sue eventuali **radici razionali** sono della forma:

$$\frac{m}{n} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \ \text{ ed è un divisore di } \ a_0 \\ n \in \mathbb{N} - \{0\} \ \text{ ed è un divisore di } \ a_n \end{cases}$$

Osservazioni:

1. a_0 e a_n si chiamano rispettivamente **termine noto** e **coefficiente direttivo**.
2. **Se il coefficiente direttivo è** 1, allora **le possibili radici si restringono** ad m dove $m \in \mathbb{Z}$ e divide a_0, ovvero **ai soli divisori interi del termine noto**.
3. **Il teorema non esclude che il polinomio di partenza possa avere radici reali non razionali (o complesse)**. Ci dice invece che se ammette radici razionali, allora queste hanno la forma sopra descritta.
4. Il teorema **vale solamente per polinomi a coefficienti interi**.

   È utile osservare però che **ogni polinomio a coefficienti razionali può essere riportato a coefficienti interi** (a meno di un fattore numerico razionale a moltiplicare).

   Esempio:
   Consideriamo il polinomio $p(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{3}{4}x - 3$

   Calcoliamo il mcm tra i denominatori: $mcm(3,4) = 12$.

   Moltiplichiamo quindi l'espressione per $1 = \frac{12}{12}$:

$$p(x) = \frac{12}{12}\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{3}{4}x - 3\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(\cancel{12}^4 \cdot \frac{2}{\cancel{3}_1}x^3 + \cancel{12}^4 \cdot \frac{8}{\cancel{3}_1}x^2 - \cancel{12}^3 \cdot \frac{3}{\cancel{4}_1}x - 12 \cdot 3\right) =$$

$$= \frac{1}{12}\left(8x^3 + 32x^2 - 9x - 36\right)$$

   Possiamo quindi applicare il metodo di Ruffini al polinomio tra parentesi (e moltiplicare la scomposizione risultante per il fattore $\frac{1}{12}$).

2. Metodo di Ruffini

Dati un polinomio a coefficienti interi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ e α una sua radice, allora il polinomio si può scomporre nel modo seguente:

$$p(x) = (x - \alpha)q(x)$$

dove il polinomio quoziente $q(x)$ si trova eseguendo la seguente **regola di Ruffini**:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \mathbf{a_n} & \mathbf{a_{n-1}} & \cdots & \mathbf{a_1} & \mathbf{a_0} \\ \alpha & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Scriviamo su una riga, in ordine, i coefficienti del polinomio, isolando il termine noto, come da figura. In basso a sinistra della linea verticale e sopra la riga scriviamo la radice trovata.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & \mathbf{a_n} \cdot \alpha & & & \\ \hline & \mathbf{a_n} & & & & \end{array}$$

Riscriviamo il coefficiente direttivo sotto la linea verticale e dopo averlo moltiplicato per la radice lo scriviamo sotto al secondo termine.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & a_n \cdot \alpha & & & \\ \hline & a_n & (\mathbf{a_{n-1}} + \mathbf{a_n} \cdot \alpha) & & & \end{array}$$

Sommiamo il secondo termine con il termine precedentemente trovato e scriviamo il risultato sotto la riga.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & a_n \cdot \alpha & \cdots & \cdots & -\mathbf{a_0} \\ \hline & \overline{\mathbf{a_{n-1}}} & \overline{\mathbf{a_{n-2}}} & \cdots & \overline{\mathbf{a_0}} & \mathbf{0} \end{array}$$

Iterando il procedimento si trovano tutti i termini sotto la riga orizzontale (che per semplicità di scrittura ho rinominato) e l'ultimo termine in basso a destra (il resto) risulterà 0 come conseguenza del teorema di Ruffini.

I valori sotto la riga orizzontale sono i coefficienti numerici del polinomio $q(x)$, che ha grado esattamente $n-1$ e quindi la scomposizione del polinomio $p(x)$ risulta:

$$p(x) = (x-\alpha)(\overline{a_{n-1}}x^{n-1} + \overline{a_{n-2}}x^{n-2} + \ldots + \overline{a_1}x + \overline{a_0})$$

Osservazioni:

1. Il polinomio $q(x)$, se ha grado maggiore di 1, è ancora potenzialmente scomponibile. Possiamo quindi riapplicare il **metodo di Ruffini** a quest'ultimo e scomporre così ulteriormente il polinomio $p(x)$.

2. Nel caso nel polinomio $p(x)$ non sia presente una potenza della variabile tra 0 e $n-1$, nello schema della regola di Ruffini va comunque aggiunto uno 0 nella posizione del coefficiente della potenza mancante.
   Ad esempio consideriamo il polinomio $p(x) = 3x^5 - 2x^3 + 1$. Qui sono assenti le potenze di grado 4, 2 e 1, quindi lo schema della regola di Ruffini si imposta così:

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

3. osservo infine che la **regola di Ruffini** è un'alternativa alla classica divisione tra polinomi (a patto che il divisore sia di grado 1). Esiste infatti un'operazione di divisione tra polinomi, ed è trattata nell'Unità 2 della parte B «Polinomi e relative operazioni».

Il metodo sopra illustrato funziona per ogni radice del polinomio, in particolare con radici razionali; dunque **in combinazione con il metodo del teorema precedente**, per trovare tutte le possibili radici razionali di un polinomio a coefficienti interi, **abbiamo un metodo per trovare una possibile scomposizione di un polinomio a coefficienti interi**.

3. Esempi di applicazione del metodo di Ruffini

ESEMPIO 1:
Consideriamo il polinomio $p(a) = 2a^4 - 3a^2 + 2a - 1$.
Cerchiamo le sue possibili radici razionali e, nel caso, scomponiamolo come prodotto di polinomi di grado minore.

Innanzitutto osserviamo che è un polinomio a coefficienti interi e quindi per il **teorema 2** cerchiamo tutte le sue possibili radici razionali della forma **m/n**, dove:

$m \in \mathbb{Z}$ ed è un divisore del termine noto -1, dunque $m \in \{\pm 1\}$ e
$n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ed è un divisore del coefficiente direttivo 2, quindi $n \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

Dunque le possibili radici razionali del polinomio sono della forma $\frac{m}{n} \in \{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$.

Passiamo quindi a verificare se almeno uno degli elementi dell'insieme è radice del polinomio:
$p(-1) = 2(-1)^4 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 1 = 2 - 3 - 2 - 1 = -4 \neq 0$, quindi -1 non è radice.
$p(1) = 2(1)^4 - 3(1)^2 + 2(1) - 1 = 2 - 3 + 2 - 1 = 0$, 1 è invece radice di $p(a)$.

Allora per il **teorema di Ruffini**:

$$p(a) = (a-1)q(a) \quad \text{dove } q(a) \text{ è il polinomio quoziente.}$$

Andiamo quindi ora a ricavarci q(a) utilizzando la **regola di Ruffini**:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & & \mathbf{2 \cdot 1} & & & \\ \hline & \mathbf{2} & & & & \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & & 2 & & & \\ \hline & 2 & \mathbf{0+2} & & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & & 2 & \mathbf{2 \cdot 1} & & \\ \hline & 2 & 2 & \mathbf{-3+2} & & \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & & 2 & 2 & \mathbf{-1 \cdot 1} & \\ \hline & 2 & 2 & -1 & \mathbf{2-1} & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|cccc|c} & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & & 2 & 2 & -1 & \mathbf{1 \cdot 1} \\ \hline & 2 & 2 & -1 & 1 & \mathbf{1-1=0} \end{array}$$

Quindi $q(a) = 2a^3 + 2a^2 - a + 1$ ed infine:

$$2a^4 - 3a^2 + 2a - 1 = (a-1)(2a^3 + 2a^2 - a + 1)$$

A questo punto si può provare a riapplicare il metodo di Ruffini a q(a) e scomporre così ulteriormente p(a).

ESEMPIO 2:
Consideriamo il seguente polinomio **monico**[12]: $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
Dato che è un polinomio a coefficienti interi cerchiamo le sue possibili radici razionali come nell'esempio precedente.
Osserviamo però che il coefficiente direttivo è 1 e quindi la ricerca delle radici razionali si riduce ai divisori del termine noto 6, ovvero $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$.
Passiamo quindi a verificare se almeno uno degli elementi dell'insieme è radice del polinomio:
$p(1) = (1)^3 + 6(1)^2 + 11(1) + 6 = 1 + 6 + 11 + 6 = 22 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 1$ non è radice di $f(x)$.
$p(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = -1 + 6 - 11 + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad -1$ è invece radice di $f(x)$.

Dunque:

$$f(x) = (x+1)q(x) \qquad \text{dove } \ q(x) \ \text{ è il polinomio quoziente.}$$

Andiamo quindi a ricavarci q(x) utilizzando la **regola di Ruffini**:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{11} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-1} & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -1 & & \mathbf{-1 \cdot 1} & & \\ \hline & \mathbf{1} & & & \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -1 & & -1 & & \\ \hline & 1 & \mathbf{6-1} & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -1 & & -1 & \mathbf{-1 \cdot 5} & \\ \hline & 1 & 5 & \mathbf{11-5} & \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -1 & & -1 & -5 & \mathbf{-1 \cdot 6} \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \mathbf{6-6=0} \end{array}$$

Quindi $q(x) = x^2 + 5x + 6$ e di conseguenza:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = f(x) = (x+1)(x^2 + 5x + 6)$$

Osserviamo infine che q(x) è un trinomio particolare rispetto ai numeri $z_1 = 2$ e $z_2 = 3$; lo si può quindi così scomporre: $q(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.
Di conseguenza il polinomio $f(x)$ risulta così completamente scomposto:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$$

[12] un polinomio dice **monico** se il coefficiente del termine di grado massimo è pari ad 1.

Esercizi Unità 5

1. Data la seguente divisione tra polinomi

$$(8x^3 - 4x + 1) : (x - \frac{1}{2})$$

indica il resto corretto.

A. 0

B. 1

C. -1

D. $\frac{1}{2}$

E. Nessuno dei precedenti resti è corretto.

2. Indica quali delle seguenti divisioni tra polinomi ha resto -6.

A. $(a^2 - a - 12) : (a - 4)$

B. $(a^2 - a - 12) : (a + 2)$

C. $(a^2 - a - 12) : (a - 2)$

D. $(a^2 - a - 12) : (a + 4)$

E. Nessuna delle precedenti.

3. Indica per quale valore di k il polinomio $P(x) = (k - 1)x^2 + 2x - 3k$ è divisibile per il binomio $x - 3$ (ovvero il resto della divisione è 0):

A. $k = -\frac{1}{2}$

B. $k = \frac{1}{2}$

C. $k = \frac{5}{2}$

D. $k = -\frac{5}{2}$

E. Per nessuno dei valori precedenti.

4. Il polinomio $y^4 + y^3 - 7y^2 - y + 6$ è divisibile per ognuno dei seguenti binomi (ovvero il resto della divisione è 0), tranne uno. Quale?

A. $x - 2$

B. $x + 1$

C. $x + 3$

D. $x - 1$

E. $x + 2$

5. Indica, per la seguente divisione

$$(b^3 - 3b^2 + 2) : (b - 2)$$

i corrispondenti quozienti e resto.

A. $q(b) = b^2 - 5b + 10, R = -18$

B. $q(b) = b - 1, R = 0$

C. $q(b) = b^2 - b - 2, R = -2$

D. $q(b) = b - 5, R = 12$

E. $q(b) = b^2 - 5b + 10, R = -2$

F. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

6. Tra le seguenti, indica quale risposta corrisponde alla scomposizione in fattori irriducibili del seguente polinomio.

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

A. $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$

B. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$

C. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

D. $(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

E. Nessuna delle precedenti è la scomposizione corretta.

Unità 6

Scomposizione di polinomi

In questa unità sono richiamati, in maniera il più possibile chiara e schematica, i metodi per scomporre un polinomio generico in fattori irriducibili.
Alcuni sono spiegati in questa unità ex-novo, altri sono qui solo richiamati e spiegati in dettaglio in unità completamente dedicate.
Vedi lo **Schema riassuntivo per le scomposizioni di polinomi** in fondo all'Unità.

1. Premesse alle scomposizioni di polinomi

Iniziamo ricordando i concetti centrali di **scomposizione** e **fattore irriducibile**:

- Un polinomio si dice **scomposto in fattori** se lo scriviamo come prodotto di altri polinomi (di grado inferiore), detti appunto **fattori**.
- Un polinomio si dice **irriducibile** quando non è ulteriormente scomponibile.

Nota: Il concetto di irriducibilità qui definito non è matematicamente rigoroso, ma sufficiente per osservare che sono irriducibili tutti i polinomi di primo grado.

Esempi:

- $p(x) = 2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3)$ — Il polinomio $p(x)$ è **scomposto in due fattori irriducibili**.
- $q(x) = x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4)$ — Il polinomio $q(x)$ è **scomposto in due fattori**, entrambi di II grado e quindi potenzialmente ancora scomponibili.
- $h(x) = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x+1)(x+2)$ — Il polinomio $h(x)$ è **scomposto in tre fattori irriducibili**.

Vediamo ora alcuni importanti metodi di scomposizione, subito prima di introdurre la tabella riassuntiva:

2. Raccoglimento totale

Questo metodo si basa sulla proprietà distributiva della moltiplicazione. Applicando questa proprietà in senso inverso, si può raccogliere gli elementi in comune ad ogni monomio (esattamente il MCD tra i monomi che compongono il polinomio[13]) e scomporre quindi il polinomio.

[13] per ripassare vedere le Unità 1 e 2 della parte B: «Monomi e relative operazioni» e «Polinomi e relative operazioni».

Esempi:

- $12ab + 3a^2b^3 + 9ab^2 =$ Il fattore da raccogliere (MCD) è $3ab$.

  $= 3ab(4 + ab^2 + 3b)$

- $6y^4 + 4y^3 =$ Il fattore da raccogliere (MCD) è $2y^3$.

  $= 2y^3(3y + 2)$

- $-2xy^2 + 3z^3 - 5ab$ Non possiamo raccogliere nessun fattore poiché il MCD dei termini è 1.

3. Raccoglimento parziale

Similmente al metodo precedente si utilizza la proprietà distribuitiva della moltiplicazione, ma non si raccoglie un fattore comune a tutti i termini, bensì solo ad alcuni. Successivamente, se possibile, si procede ad un raccoglimento totale di un fattore comune.

Esempi:

- $5ax + 5bx + ay + by =$ Tra i primi due termini raccogliamo $5x$, mentre tra i secondi due y.

  $= 5x(a + b) + y(a + b) =$ Possiamo ora raccogliere il fattore $(a + b)$ tra il primo e il secondo termine.

  $= (a + b)(5x + y)$

- $(x - y)a - x + y =$ Se raccogliamo -1 tra gli ultimi due termini otteniamo dei fattori comuni da poter raccogliere.

  $= (x - y)a - 1(x - y) =$ Possiamo quindi ora raccogliere il fattore $(x - y)$ dal primo e secondo termine.

  $= (x - y)(a - 1)$

4. Schema riassuntivo per le scomposizioni di polinomi

La seguente tabella può essere un utile riferimento per scomporre un polinomio:
Considerando un determinato polinomio da scomporre, parti dal primo metodo in alto e se non ti serve, passa al successivo subito sotto.

1. **Raccoglimento totale** ⇒ Vedi sopra
2. **Raccoglimento parziale** ⇒ Vedi sopra
3. Metodi di scomposizione per polinomi di II grado:
   Trinomio speciale e Trinomio generico di II grado
   ⇒ Vedi l'Unità 4 della parte B «Scomposizione dei trinomi di II grado».
4. Scomposizione con **prodotti notevoli**.
   ⇒ Vedi l'Unità 3 della parte B «Prodotti notevoli».
5. Scomposizione con il **metodo di Ruffini**.
   ⇒ Vedi l'Unità 5 della parte B «Teorema del resto, teorema e regola di Ruffini».

Esercizi Unità 1

1. La scomposizione in fattori (irriducibili) del polinomio

$$6a - 2b - 3ax + bx$$

è:

A. $2(3a - b) - x(3a - b)$

B. $2(3a - b) + x(3a - b)$

C. $(3a + b)(2 + x)$

D. $(3a - b)(2 - x)$

E. $(3a - b)(2 + x)$

2. In quale dei seguenti polinomi si può fare un raccoglimento totale del fattore $2bx$ (con coefficienti interi)?

A. $4b^2 - 2bx$

B. $b^2x^2 + 5bx$

C. $3bx^3 - 6x$

D. $4bx + 2b^2x^3$

E. In nessuno dei precedenti.

3. Tra i seguenti polinomi *solo uno* è irriducibile, quale?

A. $ax - ay$

B. $x^2 + y$

C. $x^2 - y^2$

D. $xy - yz + 3y^2z$

E. $-10x + 25 + x^2$

4. Considerando il seguente polinomio

$$4x^2 + \frac{9}{16}y^4$$

indica l'*unica* risposta corretta:

A. Il polinomio si scompone in: $(2x + \frac{3}{4}y^2)^2$

B. Il polinomio si scompone in: $(2x + \frac{3}{4}y^2)(2x - \frac{3}{4}y^2)^2$

C. Il polinomio si scompone in: $(2x - \frac{3}{4}y^2)^2$

D. Il polinomio si scompone in: $4(x + \frac{3}{2}y^2)^3$

E. Il polinomio è irriducibile.

5. Indica quale, tra i seguenti polinomi, NON è scomposto in fattori irriducibili.

A. $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

B. $4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2$

C. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

D. $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$

E. $3abx + 3aby = 3ab(x + y)$

6. Considerando il seguente polinomio

$$9a^5 - 81a^3 - 27a^2 + 3a^4$$

indica la risposta corretta:

A. Il polinomio si scompone in: $3a^2(a-3)^3$

B. Il polinomio si scompone in: $3a^2(a^2+9)(3a+1)$

C. Il polinomio si scompone in: $3a^2(a-3)(a+3)(3a+1)$

D. Il polinomio si scompone in: $3(a-3)(a+3)(a^3+3)$

E. Il polinomio è irriducibile.

7. Considerando il seguente polinomio

$$4x^3 - 7x - 3$$

indica la risposta corretta:

A. Il polinomio si scompone in: $(2x-1)^3$

B. Il polinomio si scompone in: $(x+1)(2x-3)(2x+1)$

C. Il polinomio si scompone in: $(x-1)(2x-1)^2$

D. Il polinomio si scompone in: $(x-1)(2x+3)(2x+1)$

E. Il polinomio è irriducibile.

Parte C – EQUAZIONI

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT, 2017 Firenze University Press

Unità 1

Identità ed equazioni

In questa unità vedremo quali sono le differenze tra **identità** ed **equazione** e tutte le proprietà principali di quest'ultime.
Se sei interessato a come si risolve un particolare tipo di equazione passa all'unità relativa alle equazioni da te cercate.

1. Definizione di identità e di equazione

Un'**identità** è un'uguaglianza fra due espressioni letterali vera per ogni valore attribuito alle lettere.

Un'**equazione** è invece un'uguaglianza tra due espressioni letterali, per la quale ci chiediamo se esistono valori che sostituiti ad una o più lettere, la rendono vera.

Notazione:
Chiamiamo **primo membro** l'espressione a sinistra del segno '=', **secondo membro** quella a destra.

Esempi:

1. $\underbrace{(a+b)^2}_{\text{primo membro}} = \underbrace{a^2+2ab+b^2}_{\text{secondo membro}}$ è un'**identità** poiché qualunque valore assumano a e b risulta vera.
2. $\underbrace{2x+3}_{\text{primo membro}} = \underbrace{5x-6}_{\text{secondo membro}}$ È un'**equazione** poiché non risulta vera per ogni valore attribuito ad x.
3. $5x-2x^2+3$ **Non è** invece **né un'identità né un'equazione** poiché non c'è nessuna uguaglianza, ma solo un'espressione.

Da ora in poi ci concentreremo sulle equazioni e vedremo le **identità come particolari equazioni.**

2. Le soluzioni di un'equazione

Si dice **risolvere un'equazione** cercare tutti quei valori che attribuiti alle lettere che sono presenti rendono vera l'uguaglianza.

Le lettere per cui si cercano le soluzioni sono dette **incognite** e i valori che rendono vera l'uguaglianza **soluzioni** (o **radici) dell'equazione**.

Negli esempi precedenti:

1. Le **incognite** dell'equazione sono a e b. L'**equazione** (che in particolare è un'identità) **è risolta** $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ e quindi ogni coppia di elementi (a, b) reali **è soluzione** dell'equazione.
2. L'equazione ha un'**unica incognita** x. Osserviamo che $x = 3$ è **soluzione** dell'equazione, infatti: $2(3) + 3 = 9 = 5(3) - 6$.
3. NON si può risolvere poiché NON è un'equazione.

Nota:
Nell'esempio 2 per ora non sappiamo *se le soluzioni trovate sono tutte quelle possibili*, ma solo che $x = 3$ appartiene all'**insieme delle soluzioni** dell'equazione.

Tratteremo da ora in avanti, in questa Unità ed in quelle collegate, solo **equazioni in una incognita** e cercheremo le soluzioni nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Identificheremo inoltre **tale incognita**, per semplicità, **sempre con la lettera x**, ma ricordo che niente vieta di utilizzare anche altre lettere o espressioni per indicare l'incognita.

3. Classificazione delle equazioni per tipo e per tipologia di soluzioni

3.1. Classificazione per tipo di equazione

- Un'equazione si dice **intera** se le incognite non compaiono nei denominatori, altrimenti è **fratta** (o **frazionaria**)
- Un'equazione si dice **numerica** se non contiene altre lettere oltre alle incognite, altrimenti è detta **letterale**. Le lettere che non sono incognite sono dette **parametri** e possono assumere qualsiasi valore nell'insieme numerico considerato, esclusi eventuali valori per i quali l'espressione perde significato.

Nota:
Ricordo che **se si presentano delle lettere a denominatore** (che siano incognite o parametri) **devo assicurarmi che tale denominatore sia diverso da zero** affinché l'equazione non perda di significato[14].

Esempi:

1. $\frac{1}{4}x^3 - 2x = 3x^2 - \frac{4}{5}$ È **intera** poiché l'incognita non compare al denominatore. È inoltre **numerica** perché non contiene altre lettere oltre all'incognita.
2. $3x^2 - \frac{7}{5x} = \frac{1}{3}x$ È invece **fratta** poiché l'incognita appare al denominatore nel primo membro (pongo quindi $5x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq 0$). È anche questa **numerica**.
3. $5a - 2x = \frac{3}{7}x$ Questa equazione è invece **intera**, ma **letterale** nell'incognita x, se a è un parametro.

[14] Ricordo infatti che $\frac{0}{0}$ e $\frac{k}{0}$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ non sono frazioni ben definite, in quanto **dividere per zero non ha significato**.

3.2. Classificazione per tipo di soluzione

Un'equazione può essere:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni;
- **indeterminata** se le soluzioni sono infinite;
- **impossibile** se non ha soluzioni.

Nota:
Le identità sono equazioni indeterminate.

Esempi:

1. $2x = 4$ è **determinata** poiché ha un'unica soluzione $x = 2$.
2. $2x - 2 = 2(x - 1)$ è **indeterminata** poiché l'uguaglianza è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. $5x = 5x + 1$ questa equazione è invece **impossibile** poiché non ha soluzioni.

4. Concetto di equivalenza e principi di equivalenza

Due equazioni nelle stesse incognite sono **equivalenti** se hanno esattamente le stesse soluzioni.

Nota: affinché siano equivalenti due equazioni non basta che abbiano in comune alcune soluzioni; devono condividerle tutte.

Esempi:

1. $3x - 3 = 0$ e $2x = 2$ sono **equivalenti** poiché hanno entrambe come unica soluzione $x = 1$.
2. $3x - 4 = 0$ e $3 - x = 4$ **NON sono equivalenti** poiché la soluzione della prima equazione è $x = \frac{4}{3}$, mentre della seconda $x = -1$.
3. $x^2 - 9 = 0$ e $x + 3 = 0$ **NON sono equivalenti** poiché hanno in comune la soluzione $x = -3$, ma non $x = 3$ che è soluzione **solo** della prima.

4.1. PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di un'equazione uno stesso numero, o espressione letterale, otteniamo un'equazione equivalente.
Ovvero, date $A(x)$,$B(x)$ e $C(x)$ tre espressioni letterali nell'incognita x allora vale:

$$\text{Se } A(x) = B(x) \implies A(x) \pm \mathbf{C}(\mathbf{x}) = B(x) \pm \mathbf{C}(\mathbf{x}) \quad \text{è un'equazione equivalente.}$$

Nota:
È importante che $C(x)$ **sia definita per ogni valore dell'insieme di definizione dell'equazione iniziale**,

altrimenti è possibile che le due equazioni non siano più equivalenti.

Infatti, consideriamo la seguente equazione:

$$2x + 1 = 1 \quad \text{definita} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

di cui $x = 0$ è evidentemente soluzione.

Consideriamo ora $C(x) = \dfrac{1}{x}$ definita in $\mathbb{R} - \{0\}$ e sommiamola al I e II membro dell'equazione precedente:

$$2x + 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

L'equazione così ottenuta **NON è però equivalente a quella iniziale** poiché in $x = 0$ non è più definita e quindi 0 non può più essere considerato una soluzione.

Esempio:

Se all'equazione

$$x^2 - 3x + 2 = 5x - 3 + x^2$$

sottraggo $\mathbf{x^2}$ ad entrambi i membri,

$$\cancel{x^2} - 3x + 2 - \cancel{\mathbf{x^2}} = 5x - 3 + \cancel{x^2} - \cancel{\mathbf{x^2}}$$

ottengo la seguente equazione equivalente.

$$-3x + 2 = 5x - 3$$

4.1.1. Regola del trasporto e regola della cancellazione

Dal primo principio di equivalenza derivano le due seguenti regole:

- **Regola del trasporto**:
  Data un'equazione, ne otteniamo una equivalente se trasportiamo un termine da un membro all'altro cambiandogli di segno.
  Esempio:
  $$x^2 - 4x = -7 \ \text{ è equivalente a } \ x^2 - 4x + 7 = 0$$
  infatti, per il **primo principio di equivalenza**, se sommo ad entrambi i membri $+7$ ottengo:
  $$x^2 - 4x + 7 = -\cancel{7} + \cancel{7} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 7 = 0$$

- **Regola di cancellazione**:
  Data un'equazione, ne otteniamo una equivalente se in entrambi i membri cancelliamo termini uguali.
  Esempio:
  $$3 - x = 8x^2 - x \ \text{ è equivalente a } \ 3 = 8x^2$$
  infatti, per il **primo principio di equivalenza**, se sommo ad entrambi i membri $+x$ ottengo:
  $$3 - \cancel{x} + \cancel{\mathbf{x}} = 8x^2 - \cancel{x} + \cancel{\mathbf{x}} \quad \Rightarrow \quad 3 = 8x^2$$

4.2. SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero, o espressione letterale non nulla, otteniamo un'equazione equivalente.

Ovvero, date $A(x)$,$B(x)$ e $C(x) \neq 0$ tre espressioni letterali nell'incognita x allora se

$$A(x) = B(x)$$

si ha che:

$$A(x) \cdot \mathbf{C(x)} = B(x) \cdot \mathbf{C(x)} \quad \text{o} \quad A(x) : \mathbf{C(x)} = B(x) : \mathbf{C(x)}$$

sono equazioni equivalenti a quella iniziale.

Esempio: Se nell'equazione

$$\frac{1}{6}x - \frac{1}{3} = 1 - x$$

moltiplico per **6** entrambi i membri,

$$\mathbf{6} \cdot \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{3}\right) = (1 - x) \cdot \mathbf{6} \quad \Rightarrow \quad \cancel{6}^1 \cdot \frac{1}{\cancel{6}_1}x - \cancel{6}^2 \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = 6 \cdot 1 - 6 \cdot x$$

ottengo la seguente equazione equivalente:

$$x - 2 = 6 - 6x$$

Nota: Quando si moltiplica o si divide i membri di un'equazione bisogna porre attenzione al fatto che l'**insieme di definizione dell'equazione rimanga uguale**, ovvero che non si perdano o aggiungano possibili soluzioni.

Ad esempio, consideriamo la seguente equazione:

$$(x - 1)(x + 1) = (x - 1)$$

Potrebbe venire in mente di dividere I e II membro per $(x - 1)$. Così facendo però otterremmo l'equazione

$$x + 1 = 1$$

che **non è equivalente** a quella di partenza. Infatti quest'ultima equazione ha come unica soluzione $x = 0$ (lo si ottiene applicando la regola di cancellazione), mentre la prima equazione aveva come soluzione anche $x = 1$; infatti tale valore annulla sia il primo che il secondo membro.

Dunque **prima di dividere** dovevamo controllare se il valore da escludere prima di dividere per $x - 1$, ovvero $x = 1$, risultasse essere soluzione dell'equazione iniziale.

4.2.1. Regola del cambiamento di segno

Dal secondo principio di equivalenza deriva la seguente regola:

Data un'equazione, ne otteniamo una equivalente se cambiamo segno a tutti i suoi termini.

Esempio:

$$-(x+5) = 3x - 4 \quad \text{è equivalente a} \quad x + 5 = -3x + 4$$

Infatti, per il **secondo principio di equivalenza**, se moltiplico entrambi i membri per -1 ottengo:

$$-1 \cdot (-(x+5)) = -1 \cdot (3x - 4) \quad \Rightarrow \quad x + 5 = -3x + 4$$

5. Forma normale e grado di un'equazione

Se consideriamo un polinomio nell'incognita x, utilizzando i principi di equivalenza e le regole da loro derivate possiamo riportarlo alla forma:

$$P(x) = 0$$

dove, in $P(x)$ sono stati sommati tutti i monomi simili[15] e ordinati i rimanenti in ordine decrescente rispetto alla potenza di x.
Chiamiamo questa equazione ottenuta, **forma normale** dell'equazione.

Chiamiamo inoltre **grado** dell'equazione il massimo esponente della variabile presente.

Esempio:
Riportiamo l'equazione $x(x-3) - x = (2x-1)^2$ in forma normale e indichiamone il grado:

$x(x-3) - x = (2x-1)^2$	Per prima cosa svolgiamo il prodotto al I membro e il quadrato al II membro.
$x^2 - 3x - x = 4x^2 - 4x + 1$	Semplifichiamo i monomi simili.
$x^2 - \cancel{4x} = 4x^2 - \cancel{4x} + 1$	Cancelliamo ora i termini $-4x$ dal I e II membro grazie alla **regola di cancellazione**.
$x^2 = 4x^2 + 1$	Trasportiamo i termini del secondo membro al I grazie alla **regola del trasporto**.
$x^2 - 4x^2 - 1 = 0$	Semplifichiamo i monomi simili.
$-3x^2 - 1 = 0$	Ci siamo quindi ricondotti alla **forma normale**. Osserviamo infine che il massimo esponente della variabile x è 2 e quindi il **grado** dell'equazione è 2.

Possiamo inoltre osservare che l'equazione risulta **impossibile** dal momento che essendo $-3x^2 \leq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ si ha: $-3x^2 - 1 \leq -1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

[15] Per approfondimenti sui monomi simili vedi il paragrafo 2.1. «Somma algebrica tra monomi» dell'Unità 1 della parte B «Monomi e relative operazioni».

Esercizi Unità 1

1. Data la seguente uguaglianza

$$(x-2)^2+(2x-1)(2x+1)=4x^2+(x-3)(x-1)$$

indica le risposte corrette.

A. È un'identità.

B. È falsa per ogni valore dell'incognita.

C. È un'equazione di cui -3 è una soluzione.

D. Ammette un'unica soluzione.

E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

2. Data la seguente equazione

$$x(6-x^2)-3x=4x(x-2)^2-2$$

indica quali dei valori seguenti ne sono soluzioni:

A. $x=0$

B. $x=1$

C. $x=3$

D. $x=2$

E. Nessuno dei precedenti.

3. Indica per quali delle seguenti equazioni $x=0$ è soluzione:

A. $5x-7=0$

B. $\dfrac{x^2-2x}{x}=0$

C. $-x=3-x$

D. $\dfrac{4}{x}=x$

E. Nessuna delle precedenti.

4. Assegna un valore Vero/Falso alle seguenti affermazioni:

A. $\dfrac{1-x}{3} = 3 + \dfrac{x}{2}$ è un'equazione numerica fratta. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

B. Un'equazione letterale può contenere, oltre all'incognita, al più un parametro. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

C. Un'equazione letterale intera non può avere il parametro al denominatore. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

D. L'equazione $\dfrac{a}{x} - 2(x-1) = \dfrac{3(a^2-1)}{2x-3}$ nell'incognita x è letterale fratta. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

E. Un'equazione intera non può avere denominatori. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

5. Le seguenti equazioni sono tutte equivalenti all'equazione

$$x + \frac{2}{3} = 0$$

tranne una. Quale?

A. $2 + 5\left(x + \dfrac{2}{3}\right) = 2$

B. $6x = -4$

C. $4x = 4 - \dfrac{2}{3}$

D. $3x + 2 = 0$

6. Indica quale tra le seguenti è la forma normale della seguente equazione.

$$2x + \frac{1}{3} = 2$$

A. $2x = \dfrac{5}{3}$

B. $2x + \dfrac{5}{3} = 0$

C. $2x + \dfrac{1}{3} - 2 = 0$

D. $2x - \dfrac{5}{3} = 0$

E. Nessuna delle percentuali precedenti indica la forma normale dell'equazione.

7. Indica qual è il grado della seguente equazione.

$$2^0 + 27x^3 - 5x = \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2$$

A. 0

B. 2

C. 1

D. 3

E. Nessuno dei precedenti rappresenta il grado dell'equazione.

Unità 2

Equazioni di I grado

Hai ben chiaro i concetti di identità ed equazione? Grado di un'equazione?
Nel caso tu non abbia le idee chiare su questi concetti (o vuoi ripassare), prima di proseguire vai a rivedere l'Unità 1 della parte C «Identità ed Equazioni», altrimenti prosegui.

Analizziamo in questa Unità le più semplici tra le equazioni: le **equazioni numeriche di primo grado** (anche dette **equazioni lineari**) e vediamo tutti i possibili casi di fronte ai quali ci possiamo trovare e **come si risolvono**.
Vedremo infine come **modellizzare un problema reale**[16] attraverso l'uso di un'equazione di primo grado.

1. Risoluzione di un'equazione di I grado

Consideriamo un'equazione numerica di primo grado e, svolgendo i calcoli con l'ausilio delle **regole** derivate dai **due principi di equivalenza**, riportiamoci alla seguente forma:

$$\boxed{\mathbf{ax = b}} \quad \text{dove} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Distinguiamo quindi i seguenti tre casi per tipologia di soluzioni:

- **Equazione determinata**
  Se $\mathbf{a \neq 0}$ $\Longrightarrow$ dividiamo entrambi i membri per a:

$$\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{b}{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x = \frac{b}{a}}$$

- **Equazione impossibile**
  Se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, l'equazione è nella forma:

$$0x = b \quad \text{con} \quad b \neq 0$$

  Quindi l'equazione risulta **impossibile** poiché non ha soluzioni, ovvero nessun numero moltiplicato per 0 dà come risultato un numero diverso da 0.

- **Equazione indeterminata**
  Se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, l'equazione è nella forma:

$$0x = 0$$

  L'equazione è di fatto un'identità e quindi risulta **indeterminata** poiché ha per soluzione tutti i numeri reali.

[16] un **modello matematico di un problema reale** è una rappresentazione di un fenomeno attraverso l'utilizzo del linguaggio e degli strumenti della matematica.

Esempi:

1) $5x - 4 = 7x + 3$

Innanzitutto portiamo i termini in x a I membro e quelli senza al II membro.

$5x - 7x = 4 + 3$

Svolgiamo ora i calcoli.

$-2x = 7$

Dato che ora siamo nella forma $ax = b$ e $a \neq 0$, dividiamo per -2 entrambi i membri.

$\mathbf{x = -\frac{7}{2}}$

L'equazione è quindi **determinata** e $-\frac{7}{2}$ è la sua **soluzione** .

2) $(\frac{1}{2} - x)^2 + 2x = \frac{1}{4} + x(x+1)$

Svolgiamo i calcoli.

$\cancel{\frac{1}{4}} - x + \cancel{x^2} + 2x = \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{x^2} + x$

Per la **regola di cancellazione** cancelliamo i termini x^2 e $\frac{1}{4}$ dal I e II membro.

$-x + 2x = +x$

Per la **regola del trasporto** spostiamo ora x da II a I membro e semplifichiamo.

$\mathbf{0x = 0}$

L'equazione è **indeterminata** poiché è verificata per ogni valore reale attribuito alla x.

3) $\frac{x+5}{2} - \frac{3x-4}{3} = -\frac{x}{2} + \frac{21}{6}$

Portiamo I e II membro allo stesso denominatore.

$\frac{3(x+5) - 2(3x-4)}{6} = \frac{-3(x) + 21}{6}$

Svolgiamo i calcoli.

$\frac{3x + 15 - 6x + 8}{\cancel{6}} = \frac{-3x + 21}{\cancel{6}}$

Applicando il **secondo principio di equivalenza** eliminiamo 6 dal denominatore di entrambi i membri e semplifichiamo il numeratore del I membro.

$-3x + 23 = -3x + 21$

Per la **regola del trasporto** spostiamo i termini con la x a I membro e quelli senza a II e semplifichiamo.

$\mathbf{0x = -2}$

L'equazione è quindi **impossibile** poiché non è mai verificata, qualunque valore si attribuisca alla x.

Nota:
Quando si semplifica un'equazione bisogna porre attenzione al fatto che l'**insieme di definizione dell'equazione rimanga uguale**, ovvero che non si perdano o aggiungano possibili soluzioni.
Per approfondimenti vedi la nota al paragrafo 4.2. «Secondo principio di equivalenza» dell'Unità 1 della parte C «Identità ed Equazioni».

2. Esempio di utilizzo delle equazioni lineari nella risoluzione di un problema reale

In un salvadanaio ci sono 20 monete, alcune da un euro ed alcune da due euro; se ci fossero quattro monete da un euro in più, il valore delle monete da un euro sarebbe lo stesso di quello delle monete da due euro. Quante sono le monete da un euro e da due euro?

(Ti consiglio di provare a rispondere da solo prima di leggere la soluzione.)

SOLUZIONE:
(In questo esercizio utilizzerò il simbolo # per indicare una quantità:
ad es. 'numero di partecipanti' diventa '#partecipanti'.)

Per prima cosa abbiamo bisogno di scegliere la nostra incognita.
Se chiamiamo quindi **x** il '#**monete da un euro**' abbiamo che il '#**monete da due euro**' diventa **20 − x**.

Andiamo quindi ora a trasformare la frase in un'equazione.

- **se ci fossero quattro monete da un euro in più** — corrisponde a $\mathbf{x + 4}$
- **il valore delle monete da un euro** — corrisponde a $\mathbf{1(x + 4)}$
- **sarebbe lo stesso** — corrisponde al simbolo =
- **di quello delle monete da due euro** — corrisponde a $\mathbf{2(20 - x)}$

Dunque impostiamo e risolviamo l'equazione.

$1(x + 4) = 2(20 - x)$	Svolgiamo i calcoli.
$x + 4 = 40 - 2x$	Per la **regola del trasporto** spostiamo i termini con la x a I membro e quelli senza a II e semplifichiamo.
$3x = 36$	Dividiamo infine per 3 I e II membro.
$x = \frac{36}{3} = 12$	

Dunque **il numero di monete da un euro è 12**,
mentre **quello delle monete da due euro** è $20 - x = 20 - 12 = \mathbf{8}$.

Esercizi Unità 2

1. Data la seguente equazione

$$5(x + 2) = 5x - 6$$

indica l'unica risposta corretta.

A. L'equazione è indeterminata.

B. La soluzione è: $x = 0$

C. L'equazione è impossibile.

D. La soluzione è: $x = -8$

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

2. Indica per quali valori di a la seguente equazione letterale

$$(7-a)(a-2)x = 4a-28$$

risulta indeterminata.

A. $a = 0$

B. $a = 1$

C. $a = 2$

D. $a = 7$

E. $a = 3$

3. Indica il risultato della seguente equazione.

$$0,\overline{2}\,x - 3,5 = 7\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) + 7,6$$

A. È impossibile.

B. È determinata e la soluzione è: $x = -\frac{18}{5}$

C. È indeterminata.

D. È determinata e la soluzione è: $x = \frac{9}{2}$

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Indica il risultato della seguente equazione.

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + 3x = \frac{1}{4} + (x+2)(x-2)$$

A. È impossibile.

B. È determinata e la soluzione è: $x = 1$

C. È indeterminata.

D. È determinata e la soluzione è: $x = -2$

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

5. Se alla metà di un numero ci aggiungo la sua terza parte, il risultato è uguale ad un quarto del numero aumentato di ventuno. Di che numero si tratta?

A. 12

B. 24

C. 36

D. 6

E. Nessuno dei precedenti.

6. Dato un numero dispari, il prodotto tra il numero ed il suo consecutivo corrisponde al quadrato del numero, aumentato di quarantuno. Indica la risposta corretta.

A. Il numero è 11.

B. Il numero è 51.

C. Il numero è 15.

D. Il numero è 21.

E) Nessuno delle precedenti risposte è corretta.

Unità 3

Sitemi lineari

In questa Unità vedremo un particolare tipo di sistemi tra equazioni, i sistemi lineari, e un loro metodo di risoluzione.

Prima di procedere con la lettura, se non hai ben chiaro i concetti di Identità o Equazione (o vuoi ripassare), ti consiglio di andare a rivedere le Unità 1 e 2 della parte C: «Identità ed Equazioni» ed «Equazioni di I grado».

1. Sistema di equazioni e sistema lineare

Un **sistema di equazioni** è un insieme di due o più equazioni per le quali cerchiamo le soluzioni comuni, ossia i valori da attribuire alle incognite che verificano contemporaneamente tutte le equazioni.

I **sistemi lineari** sono sistemi di sole equazioni di I grado (ricordo infatti che le equazioni di I grado sono anche dette **lineari**).

Nota: In questa Unità considereremo solo sistemi lineari in due incognite.

1.1. Forma normale di un sistema lineare

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite x e y si dice in **forma normale** (o **canonica**) se è del seguente tipo:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \text{dove} \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$$

Esempi:

1. $\begin{cases} x^3 + 3x = 2 - y \\ x + 7 = y \end{cases}$

Questo è un **sistema tra equazioni in due variabili** ma **NON è lineare** poiché le equazioni non hanno entrambe grado 1. Infatti mentre la seconda ha grado 1, la prima ha grado 3.

2. $\begin{cases} 5x = 8 + 2y \\ -y - 4 = -x \end{cases}$

Questo è invece un **sistema lineare di due equazioni in due incognite**, ma **NON è in forma normale**.
Riportiamolo quindi in tale forma spostando i termini delle equazioni.

$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Questa è la **forma normale** del sistema precedente.

1.2. Soluzione di un sistema di equazioni e sistemi equivalenti

Le **soluzioni** di un sistema di equazioni sono le soluzioni comuni a tutte le equazioni che lo compongono.
Due sistemi si dicono **equivalenti** se hanno esattamente le stesse soluzioni.
Se applichiamo i principi di equivalenza[17] delle equazioni alle equazioni di un sistema, otteniamo un sistema equivalente.

Esempio:
Riprendendo l'esempio 2, il secondo sistema, ottenuto dal primo tramite l'applicazione dei principi di equivalenza, è equivalente al primo. Osserviamo che la coppia $(0;-4)$ è una sua soluzione, infatti:

$$\begin{cases} 5(0)-2(-4)=8 \\ (0)-(-4)=4 \end{cases}$$

Quindi $(0;-4)$ è anche soluzione del sistema iniziale.

Nota:
Nell'esempio precedente abbiamo verificato che la coppia di valori trovati è una soluzione, ma ad ora non sappiamo se è l'unica. Più avanti vedremo come trovare tutte le soluzioni di un sistema lineare e in particolare in un esempio proveremo che quella coppia è esattamente l'unica soluzione del sistema dell'esempio.

2. Classificazione dei sistemi lineari per tipo di soluzioni

Un sistema lineare può essere:

- **determinato**, se ha un numero finito di soluzioni.
- **indeterminato**, se le soluzioni sono infinite.
- **impossibile**, se non ha soluzioni.

Esempi:

3. $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ È un sistema **determinato** poiché ha banalmente come unica soluzione la coppia $(2;3)$.

4. $\begin{cases} 6x-2y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$ È un sistema **indeterminato** poiché la seconda equazione si ottiene dalla prima dividendo entrambi i membri per 2, quindi le due equazioni sono equivalenti ed hanno infinite soluzioni.
(Vedi più avanti lo svolgimento con il **metodo di sostituzione**.)

5. $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x-2y=-1 \end{cases}$ È un sistema **impossibile** poiché $3x-2y$ non può essere contemporaneamente uguale a 1 e a -1.

[17] Per ripassare i principi di equivalenza, vedi l'Unità 1 della parte C: «Identità ed Equazioni».

3. Metodi di risoluzione dei sistemi lineari

Esistono diversi metodi, di seguito elencati, per risolvere i sistemi lineari. Noi affronteremo solamente il primo di essi.

- **METODO DI SOSTITUZIONE**
- METODO DEL CONFRONTO
- METODO DI RIDUZIONE
- METODO DI CRAMER

Note:

- Questi metodi si possono utilizzare anche per sistemi lineari con più di due equazioni e due incognite.
- Non è sempre necessario riportare i sistemi in forma normale prima di utilizzare questi metodi, ma in generale è conveniente farlo.

3.1. METODO DI SOSTITUZIONE

Questo metodo è basato sul **principio di sostituzione**: Se in un sistema ricaviamo una delle incognite, in una delle equazioni, e sostituiamo l'espressione ottenuta in un'altra equazione, otteniamo un sistema equivalente.
Ovvero, date le incognite x e y, ricaviamo ad esempio x in funzione di y nella prima equazione;

$$\text{Il sistema } \begin{cases} x = cy + d \\ ex + fy = g \end{cases} \text{ è equivalente a } \begin{cases} x = cy + d \\ e(cy + d) + fy = g \end{cases} \quad \text{dove} \quad c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$$

Osserviamo che la seconda equazione del sistema equivalente è nella sola incognita y. È dunque facile ora risolverla, sostituire il valore trovato nella prima e trovare quindi anche il valore della prima incognita (la x in questo caso).

Esempi:

- Risolviamo con questo metodo il sistema dell'esempio due (riportato in forma normale).

$$\begin{cases} 5x - 2y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di y e sostituiamolo nella prima.

$$\begin{cases} 5(4 + y) - 2y = 8 \\ x = 4 + y \end{cases}$$

Svolgiamo i calcoli nella prima equazione e sommiamo i termini simili.

$$\begin{cases} 20 + 3y = 8 \\ x = 4 + y \end{cases}$$

Risolviamo quindi la prima equazione rispetto ad y e sostituiamo il valore trovato nella seconda.

$$\begin{cases} y = \frac{8-20}{3} = -\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{3}_{1}} = -4 \\ x = 4 + y = 4 + (-4) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi ritrovato come soluzione del sistema la coppia $(0;-4)$, verificando però stavolta che è anche **l'unica soluzione del sistema**.

- Vediamo ora, sempre utilizzando il metodo di sostituzione, la soluzione completa dell'esempio quattro.

$$\begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo y in funzione di x portando $3x$ a II membro e dividendo entrambi i membri per -1. Sostituiamolo poi nella prima.

$$\begin{cases} 6x - 2(-2 + 3x) = 4 \\ y = -1 \cdot (2 - 3x) = -2 + 3x \end{cases}$$

Svolgiamo ora i calcoli nella prima equazione e sommiamo i termini simili.

$$\begin{cases} 0x + 4 = 4 \\ y = -2 + 3x \end{cases}$$

Osserviamo che la prima equazione è verificata $\forall x, y \in \mathbb{R}$, mentre la seconda è verificata da tutte le coppie (x, y) t.c. $y = 3x - 2$. Trattandosi dunque di infiniti valori l'equazione è **indeterminata**.

4. Esempio di utilizzo dei sistemi lineari nella risoluzione di un problema reale

Due vasi hanno una capienza complessiva di 14 litri. Tolgo ora la metà dell'acqua dal primo. Togliendo la stessa quantità di acqua dal secondo osservo che questo si è svuotato di $\frac{2}{3}$. Quanto è capiente ciascuno dei vasi?
(Ti consiglio di provare a rispondere da solo prima di leggere la soluzione.)

SOLUZIONE:
Partendo dalla domanda identifichiamo le variabili che con cui schematizzeremo il problema; chiamiamo quindi **x la capacità (in litri) del primo vaso** e **y quella del secondo**.

Analizziamo ora le due frasi:

La prima '**Due vasi hanno una capienza complessiva di** 14 **litri**' si schematizza facilmente con $\boxed{\mathbf{x + y = 14}}$ litri.
Analizziamo ora la seconda: '**Togliere metà dell'acqua dal primo**' significa togliere $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}$ litri, mentre che '**il secondo si sia svuotato per** $\frac{2}{3}$' significa che abbiamo tolto $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{y}$ litri. Dato infine che **queste quantità devono essere uguali** otteniamo $\boxed{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\mathbf{y}}$

Andiamo dunque ad impostare e risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y = 14 \\ \frac{x}{2} = \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di y moltiplicando I e II membro per 2 e sostituiamolo nella prima.

$$\begin{cases} \frac{4}{3}y + y = 14 \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

Svolgiamo la somma nella prima equazione.

$$\begin{cases} \frac{7}{3}y = 14 \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

Ricaviamo infine y e sostituiamolo nella seconda equazione.

$$\begin{cases} y = \cancel{14}^{2} \cdot \frac{3}{\cancel{7}_{1}} = 6 \\ x = \frac{4}{3}y = \frac{4}{\cancel{3}_{1}} \cdot \cancel{6}^{2} = 8 \end{cases}$$

Abbiamo quindi trovato come soluzione del sistema la coppia $(8;6)$, ovvero abbiamo scoperto che **il primo vaso ha una capacità di 8 litri, mentre il secondo di 6**.

Esercizi Unità 3

1. Indica quali tra i seguenti sistemi nelle incognite x e y, sono lineari.

A. $\begin{cases} b^2x - y = 1 \\ \frac{x}{2} - ay = 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - xy = 14 \\ 7x - y = 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 8x - b^2 = y \\ 5bx - 2y = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2b - a = y \\ b + 2a = 3x^2 \end{cases}$

E. Nessuno dei precedenti sistemi è lineare.

2. Indica quali tra i seguenti sistemi nelle incognite x e y, sono in forma normale.

A. $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} -x - y = 12 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} 2x = 4 + y \\ x + y = 0 \end{cases}$

E. Nessuno dei precedenti sistemi è in forma normale.

3. Il seguente sistema lineare è determinato.

$$\begin{cases} x - \frac{2}{5}(x+1) - \frac{1}{2}y = \frac{1}{5} \\ 2x - 5 = x + \frac{2}{3}y - 4(y+1) \end{cases}$$

Indica quale tra le seguenti coppie ne è soluzione.

A. $(1;0)$

B. $(1;1)$

C. $(-1;1)$

D. $(0;1)$

4. Dato il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - 3 = 5 \\ 4x - 4y = 4(x-y) \end{cases}$$

indica quale tra le seguenti risposte è corretta:

A. Il sistema è determinato e la soluzione è la coppia $(1;3)$.

B. Il sistema è determinato e la soluzione è la coppia $(-1;-5)$.

C. Tutte le coppie della forma $(x;y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$ sono soluzione poiché il sistema è indeterminato.

D. Il sistema è impossibile.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

5. Indica la soluzione corretta del seguente sistema lineare.

$$\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ x - y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

A. Il sistema è determinato e la soluzione è la coppia $\left(11; \frac{5}{6}\right)$.

B. Il sistema è determinato e la soluzione è la coppia $\left(\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right)$.

C. Il sistema è determinato e la soluzione è la coppia $\left(\frac{7}{3}; \frac{11}{6}\right)$.

D. Il sistema è indeterminato.

E. Il sistema è impossibile.

6. ***In una frazione il numeratore supera di* 5 *il denominatore, mentre la differenza tra il triplo del numeratore e il doppio del denominatore è* 17.**

Di quale frazione si tratta?

A. $\frac{11}{6}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{7}{2}$

D. $\frac{6}{1}$

E. Nessuna delle frazioni precedenti.

Unità 4

Equazioni di II grado

Hai ben chiaro il concetto di Equazione? Grado di un'equazione?
E cosa vuol dire risolverla?
Nel caso tu non abbia le idee chiare su questi concetti (o vuoi ripassare), prima di proseguire vai a rivedere le Unità 1 e 2 della parte C: «Identità ed Equazioni» ed «Equazioni di I grado».

1. Forma normale e casi particolari

Ricordiamo che un'equazione è di II grado, *ad es.* $x^2 - 2x = 3x - 6$, si dice in **forma normale** se è della forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{dove} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a \neq 0$$

Nota:

- Se $b = 0$ e $c \neq 0 \implies ax^2 + c = 0$ si dice **Equazione PURA**.
- Se $c = 0$ e $b \neq 0 \implies ax^2 + bx = 0$ si dice **Equazione SPURIA**.
- Se $b = 0$ e $c = 0 \implies ax^2 = 0$ si dice **Equazione MONOMIA**.

Esempio:
Riportiamo quindi l'equazione del nostro esempio in forma normale:

$$x^2 - 2x = 3x - 6 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 5x + 6 = 0$$

2. Formula risolutiva delle equazioni di II grado

Una volta in forma normale, le possibili soluzioni reali dell'equazione sono date dalla formula

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \tag{1}$$

dove il simbolo Δ (si legge **delta, o discriminante, dell'equazione di II grado**) è così definito:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

2.1. Classificazione delle soluzioni al variare del Δ

Si hanno quindi, al variare del segno del Δ, le seguenti possibilità:

1. Se $\boxed{\Delta > 0}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

   Ovvero si hanno $\boxed{\text{DUE SOLUZIONI REALI DISTINTE}}$

2. Se $\boxed{\Delta = 0}$ $\Longrightarrow$ $x_1 = x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\dfrac{b}{2a}$

   Ovvero si hanno $\boxed{\text{DUE SOLUZIONI REALI COINCIDENTI}}$

3. Se $\boxed{\Delta < 0}$ $\Longrightarrow$ $\sqrt{\Delta}$ non ha significato in $\mathbb{R}$

   Ovvero $\boxed{\text{NON ESISTONO SOLUZIONI REALI}}$

Esempio:
Risolviamo quindi la nostra equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Si hanno due soluzioni reali distinte.}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Calcoliamo} \quad x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{+5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{+5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Altri due esempi nei seguenti casi particolari:

- $\boxed{\Delta = 0}$ Consideriamo la seguente equazione (in forma normale):

  $$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

  Calcoliamo il Δ:

  $$\Delta = (4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Si hanno due soluzioni reali distinte.}$$

  Dunque calcoliamo la soluzione: $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{8} = -\dfrac{1}{2}$

- $\boxed{\Delta < 0}$ Consideriamo l'equazione (in forma normale):

  $$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

  Calcoliamo il Δ:

  $$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8 < 0$$

  Non si hanno quindi soluzioni reali.

Note:

- Le soluzioni delle equazioni di II grado prima trovate ci possono essere utili, quando possibile, anche per scomporre il trinomio di secondo grado; vale infatti la seguente formula:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

  Per approfondire vedi l'Unità 4 della parte B «Scomposizione dei trinomi di II grado».

- Nei casi speciali di equazioni **pure**, **spurie** o **monomie** si hanno le seguenti soluzioni:

  – **Pura** $\boxed{ax^2 + c = 0}$ $\quad a, c \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a}$

  $$\Rightarrow \begin{cases} \text{Se } -\frac{c}{a} > 0 & x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ \text{Se } -\frac{c}{a} < 0 & \text{nessuna soluzione} \end{cases}$$

  – **Spuria** $\boxed{ax^2 + bx = 0}$ $\quad a, b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x(ax + b) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$

  – **Monomia** $\boxed{ax^2 = 0}$ $\quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0$

2.2. Dimostrazione della formula risolutiva

Vediamo infine, per completezza, come si giunge alla formula risolutiva (1).
Il metodo che ora presentiamo è detto **metodo del completamento del quadrato**.

Consideriamo un'equazione di secondo grado già in forma normale, con $a \neq 0$ e seguiamo i seguenti passi.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Portiamo il termine noto a II membro.

$$ax^2 + bx = -c$$

Dividiamo tutti i termini per il **coefficiente direttivo** a (che ricordiamo essere diverso da 0 per ipotesi).

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Scriviamo $\frac{b}{a}x$ in modo che rappresenti un **doppio prodotto**.

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x = -\frac{c}{a}$$

Completiamo il quadrato di binomio aggiungendo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ad entrambi i membri.

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Osserviamo che **a I membro si ha ora un quadrato di binomio**.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Sommiamo ora i due termini a II membro ed applichiamo la radice quadrata a I e II membro.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Trasportiamo infine il termine $\frac{b}{2a}$ a II membro e, ricordando che $\Delta = b^2 - 4ac$, otteniamo:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Esercizi Unità 4

1. La forma normale di $3(x-2)+x^2=5$ **è:**

A. $x^2+3x-6=5$;

B. $x^2+3x-11=0$;

C. $3x-11+x^2=0$;

D. Nessuna delle precedenti.

2. La seguente equazione di secondo grado $6x-2+8x^2=0$ **ha** Δ **(delta):**

A. positivo;

B. negativo;

C. nullo;

D. non calcolabile.

3. La seguente equazione di secondo grado $4x^2-12x+9=0$**:**

A. ha due soluzioni reali distinte;

B. ha due soluzioni reali coincidenti;

C. non ha nessuna soluzione reale;

D. risulta impossibile da risolvere.

4. L'insieme delle soluzioni della seguente eq. di II grado $x^2-2x-3=0$ **è:**

A. $S=\{-1,3\}$, ovvero le soluzioni sono $x_1=-1$ e $x_2=3$;

B. $S=\{1,-3\}$, ovvero le soluzioni sono $x_1=1$ e $x_2=-3$;

C. $S=\varnothing$, ovvero non esistono soluzioni reali.

D. Non è possibile determinarlo.

5. L'insieme delle soluzioni della seguente eq. di II grado $x^2-3x+2=-5$ **è:**

A. $S=\{-1,3\}$;

B. $S=\{1,-3\}$;

C. $S=\varnothing$ (ovvero non esistono soluzioni reali).

D. Non è possibile determinarlo.

Unità 5

Equazioni numeriche fratte

In questa Unità affronteremo le **equazioni numeriche fratte** e vedremo esempi di svolgimento in base al tipo di soluzioni.
È importante quindi che tu abbia ben presenti i **principi di equivalenza delle equazioni** e le **regole derivate**. Se li vuoi ripassare vai a rivedere l'Unità 1 della parte C «Identità ed Equazioni».

1. Definizione di equazione numerica fratta

Un'equazione **numerica** è **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore dei suoi termini.

Esempi:

1. $\frac{2}{7} + \frac{x^2+1}{5} = 3x$ — Questa **NON è un'equazione fratta** poiché l'incognita x non compare al denominatore.
2. $\frac{x+2}{3x} + \frac{1}{6} = \frac{x+3}{2x} - \frac{5}{6x}$ — Questa invece è un'**equazione fratta** nell'incognita x.

2. Procedura di risoluzione per un'equazione numerica fratta

1. **Determinare le condizioni di esistenza (C.E.)** delle frazioni algebriche presenti nell'equazione che hanno l'incognita a denominatore.
   In particolare se i denominatori sono polinomi di grado superiore al I, scomporli in fattori irriducibili e porre le C.E. .

   Consideriamo l'**esempio 2**: i polinomi a denominatore sono già scomposti in fattori irriducibili e quindi basta porre come C.E. $\boxed{x \neq 0}$.

2. **Applicare i principi di equivalenza** fino a trovare le soluzioni.

   Consideriamo sempre l'**esempio 2**:

   $$\frac{x+2}{3x} + \frac{1}{6} = \frac{x+3}{2x} - \frac{5}{6x}$$

   Porto i denominatori dei fattori a I e II membro allo **stesso mcm**.

   $$\frac{4x+8+2x}{\cancel{12x}} = \frac{6x+18-10}{\cancel{12x}}$$

   Applico ora il **secondo principio di equivalenza** ed elimino i denominatori. Semplifico poi i termini simili a numeratore. (Ricordo che C.E. è $x \neq 0$)

   $$6x+8 = 6x+8$$

   Applico infine la **regola del trasporto** per spostare i termini con la x a I membro e quelli senza a II, semplifico ed ottengo.

   $$0x = 0$$

   L'equazione è dunque **indeterminata**.

3. **Controllo infine se le soluzioni trovate sono accettabili**, ovvero se soddisfano le C.E. e considero quindi **soluzioni dell'equazione** solo quelle accettabili.

   Nell'**esempio** le soluzioni accettabili sono tutti i numeri reali tranne lo zero (infatti lo zero non rispetta le C.E.), quindi **l'insieme delle soluzioni è** $\mathbb{R} - \{0\}$.

Andiamo ora a risolvere equazioni numeriche fratte che hanno rispettivamente un numero finito di soluzioni accettabili o nessuna soluzione (accettabile).

2.1. Esempio di equazione fratta determinata

$$\frac{4}{x^2+3x+2} - \frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)} = 0$$

Per prima cosa **scomponiamo il polinomio a denominatore** del primo termine osservando che è un particolare trinomio di II grado. (Per ripassare i metodi di scomposizione vedi l'Unità 4 della parte B «Scomposizione dei trinomi di II grado».)

$$\frac{4}{(x+1)(x+2)} - \frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)} = 0$$

Diamo ora le C.E.: $x+1 \neq 0, x+2 \neq 0, x-2 \neq 0$ ovvero $\boxed{x \neq -1, x \neq \pm 2}$. Notiamo inoltre che il numeratore del secondo termine è una differenza di quadrati, quindi scomponiamolo.

$$\frac{4}{(x+1)(x+2)} - \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x+1)\cancel{(x-2)}} = 0$$

Dato che al secondo termine ci sono, a numeratore e a denominatore, due fattori uguali e dato che abbiamo già dato le C.E., li possiamo semplificare. **Portiamo** quindi entrambi **i denominatori allo stesso m.c.m.**.

$$\frac{4-(x+2)^2}{(x+1)(x+2)} = 0$$

Svolgiamo il quadrato a numeratore e semplifichiamo.

$$\frac{-x^2-2x}{(x+1)(x+2)} = 0$$

Applichiamo il **secondo principio di equivalenza** e la **regola del cambiamento di segno** e risolviamo quindi l'equazione di II grado rimasta.

$$x^2+2x=0$$

Dato che è un **equazione di II grado spuria**, per risolverla si può raccogliere una x da entrambi i termini.

$$x(x+2)=0$$

Dunque le soluzione dell'equazione sono $x = 0$ e $x = -2$, ma dato che $x = -2$ **non è accettabile** (vedi le C.E.), l'equazione fratta iniziale ha come $\boxed{\textbf{unica soluzione} \quad \mathbf{x = 0}}$.

2.2. Esempio di equazione fratta impossibile

$$\frac{3(x+5)}{x^2-9} - \frac{2x+5}{x+3} = \frac{2x-4}{3-x}$$

Per prima cosa **scomponiamo il denominatore** del primo termine a I membro osservando che è una **differenza di quadrati**. (Per ripassare i metodi di scomposizione vedi l'Unità 4 della parte B «Scomposizione dei trinomi di II grado».)

$$\frac{3(x+5)}{(x-3)(x+3)} - \frac{2x+5}{x+3} = \frac{-1\cdot(2x-4)}{-1\cdot(3-x)}$$

Diamo ora le C.E.: $x-3 \neq 0, x+3 \neq 0, 3-x \neq 0$ ovvero $\boxed{x \neq \pm 3}$.
Moltiplichiamo poi per -1 numeratore e denominatore del II membro affinché il polinomio a denominatore diventi $x-3$ come quello a I membro.

$$\frac{3x+15}{(x-3)(x+3)} - \frac{2x+5}{x+3} = \frac{4-2x}{x-3}$$

Portiamo quindi ora I e II membro allo stesso denominatore (m.c.m. tra i denominatori).

$$\frac{3x+15-(2x+5)(x-3)}{\cancel{(x-3)(x+3)}} = \frac{(4-2x)(x+3)}{\cancel{(x-3)(x+3)}}$$

Applichiamo il **II principio di equivalenza** per eliminare i denominatori e svolgiamo i calcoli.

$$3x+15-2x^2+6x-5x+15 = 4x+12-2x^2-6x$$

Semplifichiamo a I e II membro **i termini simili**.

$$\cancel{-2x^2}+4x+30 = \cancel{-2x^2}-2x+12$$

Per la **regola di cancellazione** cancelliamo i termini $-2x^2$ a I e II membro. Per la **regola del trasporto** spostiamo inifine i termini con la x a I membro e quelli senza a II e semplifichiamo.

$$6x = -18$$

Per il **II principio di equivalenza** dividiamo infine I e II membro per 6.

$$x = -3$$

Dato che -3 **non è accettabile** per le C.E. l'equazione risulta dunque **impossibile**.

Esercizi Unità 5

1. Indica quali tra le seguenti risposte corrisponde ad un'equazione fratta.

A. $\frac{1}{2} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x} = 2$

B. $-\frac{4x}{5} = 6x^2 - \frac{3}{5}$

C. $(x-2)^2 - \frac{1}{2x}$

D. $\frac{x^3}{x} = 1$

E. Nessuna delle precedenti.

2. Le condizioni di esistenza della seguente equazione fratta

$$\frac{3}{x^2+4} - \frac{3x}{x+2} = \frac{6x-x^2}{9-x^2} + \frac{4}{7x}$$

sono:

A. $x \neq \pm 2$, $x \neq \pm 3$, $x \neq 0$

B. $x \neq 7$, $x \neq -2$, $x \neq \pm 3$

C. $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 4$

D. $x \neq -2$, $x \neq \pm 3$, $x \neq 0$

3. La seguente equazione fratta $\dfrac{x^2-2x+1}{3x-3} = 0$ **è:**

A. determinata;

B. indeterminata;

C. impossibile.

D. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Quante sono le soluzioni della seguente equazione fratta?

$$\frac{-5}{x^2-5} = 0$$

A. 2

B. 1

C. L'equazione è indeterminata.

D. L'equazione è impossibile.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

5. Data la seguente equazione fratta

$$\frac{x^2-4x}{x+9} = x+2$$

indica la risposta corretta.

A. L'insieme delle sue soluzioni è $S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$.

B. L'insieme delle sue soluzioni è $S = \left\{-\frac{6}{5}, -9\right\}$.

C. L'equazione è indeterminata.

D. L'equazione è impossibile.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Parte D – DISEQUAZIONI E VALORE ASSOLUTO

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT,
2017 Firenze University Press

Unità 1

Introduzione alle disequazioni e loro principali proprietà

In questa Unità verranno introdotte le **disequazioni** e le loro principali proprietà.
Se sei interessato a come si risolve un particolare tipo di disequazione passa all'Unità relativa.

1. Definizione di disequazione

Una **disequazione** è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale cerchiamo i valori che, sostituiti ad una o più lettere, rendono vera la disuguaglianza stessa.

Chiamiamo quindi **soluzioni della disequazione** i valori che rendono vera la disuguaglianza e **incognite** le lettere per cui cerchiamo le soluzioni.

Come per le equazioni, **risolvere una disequazione** significa trovare tutte le sue soluzioni.

Notazioni:

- Dati $x, y \in \mathbb{R}$, ricordo la differenza tra le seguenti notazioni:
  - $\boxed{x > y}$ si legge 'x è maggiore stretto di y' ed indica che **x è maggiore e NON uguale ad y**.
  - $\boxed{x \geq y}$ si legge 'x maggiore-uguale ad y' ed indica $x > y$ oppure $x = y$, ovvero che **x è maggiore stretto di y o uguale ad esso**.

  Nel caso dei segni $<$ e $\leq$ vale quanto detto sopra, sostituendo la parola maggiore con minore.

- Similmente a quanto visto per le equazioni, chiamiamo **primo membro** l'espressione a sinistra del segno, **secondo membro** quella a destra.

> Tratteremo da ora in avanti, in questa Unità ed in quelle collegate, solo **disequazioni in una incognita** e cercheremo le soluzioni nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
> **Identificheremo** inoltre **tale incognita**, per semplicità, **sempre con la lettera x**, ma ricordo che niente vieta di utilizzare anche altre lettere o espressioni per indicare l'incognita.

Esempi:

1. $\underbrace{5x-3}_{\textbf{primo membro}} > \underbrace{7}_{\textbf{secondo membro}}$

   È una **disequazione lineare** di cui $x = 4$ è **un esempio di soluzione**. Infatti $17 = 5(4) - 3 > 7$ è un'affermazione vera.

2. $\underbrace{-x^2-2x+3}_{\textbf{primo membro}} \geq \underbrace{0}_{\textbf{secondo membro}}$

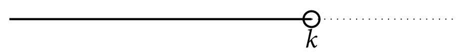
   È una **disequazione di secondo grado** di cui $x = 0$ è **un esempio di soluzione**. Infatti $3 = -(0)^2 - 2(0) + 3 \geq 0$ è un'affermazione vera.

Negli esempi precedenti abbiamo trovato solo **alcune soluzioni**, ma come è facile osservare ne esistono altre, negli esempi in particolare sono **infinite**.

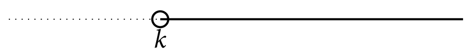
Vedremo nelle Unità collegate come determinare **tutte le possibili soluzioni** di una disequazione, ovvero l'**insieme delle soluzioni** (l'insieme di tutti i valori dell'incognita per i quali la disuguaglianza è vera). Tale insieme è generalmente costituito da un intervallo o dall'unione di più intervalli.

2. Le soluzioni di una disequazione

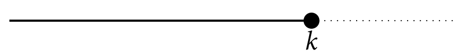
- $\boxed{\mathbf{x} < \mathbf{k}}$ indica un **intervallo superiormente limitato**[18] **con estremo escluso**. È equivalente a $\mathbf{x} \in (-\infty, \mathbf{k})$ e si rappresenta con una semiretta aperta come segue.

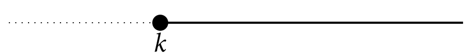
  Analogamente $\mathbf{x} > \mathbf{k}$ indica un **intervallo inferiormente limitato con estremo escluso**. È equivalente a $\mathbf{x} \in (\mathbf{k}, +\infty)$ e si rappresenta con una semiretta aperta come segue.

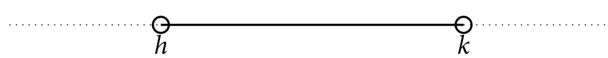
- $\boxed{\mathbf{x} \leq \mathbf{k}}$ indica un **intervallo superiormente limitato con estremo incluso**. È equivalente a $\mathbf{x} \in (-\infty, \mathbf{k}]$ e si rappresenta con una semiretta chiusa come segue.

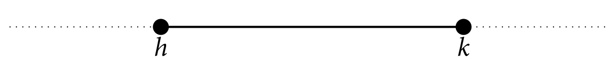
  Analogamente $\mathbf{x} \geq \mathbf{k}$ indica un **intervallo inferiormente limitato con estremo incluso**. È equivalente a $\mathbf{x} \in [\mathbf{k}, +\infty)$ e si rappresenta con una semiretta chiusa come segue.

- $\boxed{\mathbf{h} < \mathbf{x} < \mathbf{k}}$ indica infine un **intervallo aperto limitato**[19] (h, k) e si rappresenta come un segmento del tipo seguente.

  Analogamente $\mathbf{h} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{k}$ indica un **intervallo chiuso limitato**[20] $[h, k]$ e si rappresenta come un segmento del tipo seguente.

  Nota: le diseguaglianze nell'intervallo limitato possono presentarsi anche **aperte** su un estremo e **chiuse** sull'altro o viceversa: $(h, k]$ opure $[h, k)$.

[18] Un **intervallo superiormente limitato** è formato da tutti quei valori che precedono il numero in questione.
[19] Un **intervallo limitato** è formato da tutti i valori compresi tra due numeri. **Aperto** invece indica che gli estremi non sono inclusi.
[20] Un **intervallo chiuso** indica che gli estremi sono inclusi.

Le soluzioni di una disequazione si possono quindi presentare **attraverso una delle tipologie di intervallo sopra espresse o come unione di esse**.

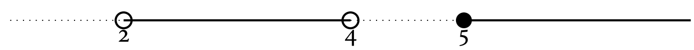
Ad **esempio**:

$$x \in (2, 4) \cup [5, \infty)$$

potrebbe essere la soluzione di una disequazione, ed indica tutti i valori compresi tra 2 e 4 (estremi esclusi) e superiori o uguali a 5, ovvero può essere equivalentemente espressa da:

$$2 < x < 4 \vee x \geq 5$$

O ancora da:



3. Classificazione delle disequazioni per tipo

- Una disequazione si dice **intera** se l'incognita non compare nei denominatori, altrimenti è detta **fratta**.
- Una disequazione si dice **numerica** se non contiene altre lettere oltre alle incognite, altrimenti è detta **letterale**. Le lettere che non sono incognite sono dette **parametri** e possono assumere qualsiasi valore nell'insieme numerico considerato (esclusi eventuali valori per i quali l'espressione perde significato).

Esempi:

1. $\frac{2}{3}x^3 \geq 3x^2 + 2$ — È una **disequazione intera** poiché l'incognita non compare al denominatore. È inoltre **numerica** perché non contiene altre lettere oltre alle incognite.

2. $5x^2 - \frac{2}{x} < \frac{3x}{4x^3}$ — È invece una **disequazione fratta** poiché l'incognita appare al denominatore nel primo membro. È anche questa **numerica**.

3. $-3bx + 5x > \frac{1}{5b}x$ — Questa disequazione è **intera** ma **letterale** nell'incognita x, se b è un parametro.
E sarebbe invece **fratta** e **letterale** se viceversa l'incognita fosse b ed x un parametro.

4. Concetto di equivalenza e principi di equivalenza

Due equazioni nelle stesse incognite sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Nota: affinché siano equivalenti due disequazioni non basta che abbiano in comune alcune soluzioni; devono condividerle tutte.

Esempi:

1. $x - 2 \geq 0$ e $2x \geq 4$ — Sono **equivalenti** poiché hanno entrambe come **soluzioni** $x \geq 2$ (oppure $x \in [2, +\infty)$).

2. $x - 2 \geq 0$ e $2x > 4$ — A differenza dell'esempio precedente la seconda disequazione presenta il segno **maggiore stretto** e dunque le due disequazioni **NON sono equivalenti** poiché il valore 2 è soluzione solamente della prima.

3. $x - \frac{1}{2} < 0$ e $2x < 0$ — **NON sono equivalenti** poiché la soluzione della prima disequazione è $x < \frac{1}{2}$, mentre della seconda $x < 0$. Condividono infatti infinite soluzioni (ovvero $x < 0$), MA non quelle comprese in $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ che appartengono solo alla seconda disequazione.

4. $x^2 + 4 > 0$ e $x + 4 > 0$ — **NON sono equivalenti** poiché la prima è vera $\forall x \in \mathbb{R}$ (infatti il I membro è sempre maggiore di zero), mentre la soluzione della seconda è $x \in (-4, +\infty)$.

4.1. PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Aggiungendo o sottraendo ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero, o più in generale una stessa espressione letterale, otteniamo una disequazione equivalente.

Nota:
È importante che l'espressione letterale aggiunta sia definita per ogni valore dell'insieme di definizione della disequazione iniziale, altrimenti è possibile che le due disequazioni non siano più equivalenti.

Ad **esempio**, consideriamo la seguente disequazione.

$$2x + 1 < 3x^2 \quad \text{definita} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

di cui $x = -1$ è soluzione; infatti: $-1 = 2(-1) + 1 < 3(-1)^2 = 3$

Consideriamo ora $\frac{1}{x+1}$ definito in $\mathbb{R} - \{-1\}$ e sommiamolo al I e II membro della disequazione precedente.

$$2x + 1 + \frac{1}{x+1} < 3x^2 + \frac{1}{x+1}$$

La disequazione così ottenuta **NON è però equivalente a quella iniziale** poiché in $x = -1$ non è più definita.

4.2. SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero non nullo, o più in generale una stessa espressione letterale non nulla, otteniamo una disequazione equivalente; a condizione di:

- **mantenere lo stesso verso**, se l'espressione algebrica per cui moltiplichiamo (o dividiamo) è positiva.
- **cambiare verso** se l'espressione algebrica è invece negativa.

Nota:
Quando si moltiplica o si divide i membri di una disequazione per un'espressione letterale bisogna porre attenzione, oltre alle C.E., al fatto che **l'espressione non si annulli e distinguere i casi in cui assume segno positivo o negativo**.

Esempio:

$$\frac{x}{b} \geq 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{se } \ b > 0 \ \Rightarrow \ \cancel{b} \cdot \dfrac{x}{\cancel{b}} \geq 5b \ \Rightarrow \ x \geq 5b \\ \text{se } \ b < 0 \ \Rightarrow \ \cancel{b} \cdot \dfrac{x}{\cancel{b}} \leq 5b \ \Rightarrow \ x \leq 5b \end{cases} \qquad \text{C.E.} : b \neq 0$$

Esempi:
Applichiamo i principi di equivalenza alle seguenti disequazioni.

- $6x - 3 > -4$

Applichiamo il **primo principio di equivalenza** sommando 3 a I e II membro e semplifichiamo.

$$\frac{1}{\cancel{6}_1} \cdot \cancel{6}x > -1 \cdot \frac{1}{6}$$

Applichiamo ora il **secondo principio di equivalenza** moltiplicando primo e secondo membro per $\frac{1}{6}$. (Dato che la quantità in oggetto è positiva si mantiene lo stesso verso).

$$x > -\frac{1}{6}$$

Quindi la **soluzione** della disequazione è $\mathbf{x} \in \left(-\mathbf{\frac{1}{6}}, +\infty\right)$.

- $3 - 5x \geq 7$

Applichiamo il **primo principio di equivalenza** sottraendo 3 a I e II membro e semplifichiamo.

$$-\frac{1}{\cancel{5}} \cdot -\cancel{5}x \leq 4 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

Applichiamo ora il **secondo principio di equivalenza** moltiplicando primo e secondo membro per $-\frac{1}{5}$. (Osserviamo che la quantità in oggetto stavolta è negativa ed è quindi stato necessario cambiare verso.)

$$x \leq -\frac{4}{5}$$

Quindi la **soluzione** della disequazione è $\mathbf{x} \in \left(-\infty, -\mathbf{\frac{4}{5}}\right]$.

Osservazioni:
Similmente a quanto visto per le equazioni anche qui valgono considerazioni analoghe in riferimento alle applicazioni dei due principi di equivalenza.

- Dal primo principio di equivalenza si deduce che:
  - un termine può essere **trasportato** da un membro all'altro cambiandogli il segno.
  - un termine può essere **cancellato** se presente in entrambi i membri.
- Dal secondo principio di equivalenza si deduce che:
  - si può cambiare il segno di tutti i termini cambiando il verso della disequazione.

Esercizi Unità 1

1. Data la seguente disequazione

$$5x - 3 \leq 7$$

indica quali delle risposte sono corrette.

A. Esistono infinite soluzioni in $\mathbb{R}$.

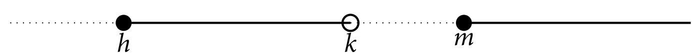
B. $x = 2$ è soluzione della disequazione.

C. $x = 3$ è soluzione della disequazione.

D. Non esistono soluzioni in $\mathbb{R}$.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

2. Indica, se possibile, quale unione di intervalli proposta descrive il segmento e la semiretta in figura.



A. $(h, k) \cup (m, \infty)$

B. $(h, k] \cup [m, \infty)$

C. $[h, k) \cup (m, \infty)$

D. $[h, k) \cup [m, \infty)$

E. Nessuna delle precedenti.

3. Indica, considerando la seguente disequazione, quali affermazioni sono corrette.

$$\frac{5bx - 3}{3x} \geq \frac{2b^2}{b} + x^2$$

A. Considerando x come variabile e b come parametro è una disequazione numerica fratta.

B. Considerando b come variabile e x come parametro è una disequazione letterale fratta.

C. Le condizioni di esistenza sono: $C.E. = \{x \neq 0 \wedge b \neq 0\}$.

D. Le condizioni di esistenza sono: $C.E. = \{x \neq 0\}$.

E. Nessuna delle precedenti.

4. SOLO UNA delle seguenti disequazioni *NON* ha come soluzione $x = -\frac{1}{3}$. Quale?

A. $-\frac{3}{4}x > 0$

B. $6x \leq -\frac{5}{3} + x$

C. $\frac{8x+5}{2} \geq 1$

D. $-\left(\frac{1}{5} + 3x\right)^2 > \frac{1}{3}$

5. Indica quali delle seguenti disequazioni sono equivalenti alla disequazione data.

$$-6x + 1 \geq 0$$

A. $-6x \geq 1$

B. $-6x \geq -1$

C. $x \leq \frac{1}{6}$

D. $x \geq \frac{1}{6}$

Unità 2

Disequazioni numeriche intere di I e II grado

Hai ben chiaro i concetti di **disequazione** e dei principi collegati? E come si rappresentano le soluzioni di una disequazione?
Nel caso tu non abbia le idee chiare su questi concetti (o vuoi ripassare), prima di proseguire vai a rivedere l'Unità 1 della parte D «Introduzione alle disequazioni e loro principali proprietà», altrimenti prosegui.

Analizziamo in questa Unità i tipi più semplici di disequazioni (tasselli fondamentali per la comprensione di argomenti che affronteremo in seguito): le **disequazioni numeriche intere di primo e secondo grado**.

Vedremo quindi come **modellizzare alcuni problemi reali** attraverso l'uso delle disequazioni di primo e secondo grado.

1. Disequazioni numeriche intere di primo grado

Ricordo che una **disequazione** si dice **numerica intera** se non presenta parametri (ovvero lettere diverse dall'incognita) e l'incognita non è presente in nessun denominatore. Si dice inoltre **di primo grado** (o lineare) quando l'incognita appare solo elevata a potenza 1.

Consideriamo quindi una disequazione numerica intera di primo grado che, con l'ausilio dei **principi di equivalenza**, può essere sempre riportata ad una delle seguenti forme:

$$ax < b\,, \quad ax \le b\,, \quad ax > b\,, \quad ax \ge b \qquad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Una disequazione di primo grado si **risolve**, in base al valore di a, come segue:

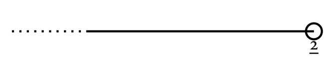
- Se $a = 0$, l'insieme delle soluzioni può essere tutto $\mathbb{R}$ o l'insieme vuoto a seconda del valore di b.
- Se invece $a \ne 0$, si risolve la disequazione dividendo per a e cambiando eventualmente verso alla disuguaglianza se $a < 0$.

Vediamo degli esempi raggruppati per tipologia di soluzione:

- **L'insieme delle soluzione è descritto da un intervallo illimitato.**
  Esempi:

1. $\boxed{-3x > -2} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{2}{3}$

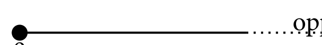
   L'insieme delle soluzioni è un intervallo illimitato e si rappresenta:

   oppure $S = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$

2. $\boxed{x - 2 \ge 7} \quad \Rightarrow \quad x \ge 9$

   L'insieme delle soluzioni è ancora un intervallo illimitato e si rappresenta:

   oppure $S = [9, +\infty)$

- **L'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto.**

  Esempio:

  $\boxed{2x \geq 2x + 1} \quad \Rightarrow \quad 0 \geq 1$

  Poiché l'ultima disuguaglianza è equivalente alla prima ed è falsa, la disequazione risulta impossibile. L'insieme delle soluzioni si indica con il simbolo dell'insieme vuoto $\varnothing$.

- **L'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$.**

  Esempio:

  $\boxed{3 - 5x > -5x} \quad \Rightarrow \quad 3 > 0$

  Poiché l'ultima disuguaglianza è equivalente alla prima ed è vera, l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$.

1.1. Esempio di utilizzo delle disequazioni lineari nella risoluzione di un problema reale

In un parcheggio la sosta costa €1, 60 l'ora. Quanto tempo si può lasciar parcheggiata la macchina se ho ha disposizione solamente €4, 00?
(Ti consiglio di provare a rispondere da solo prima di leggere la soluzione.)

SOLUZIONE:
Prima di tutto definiamo l'incognita: Chiamiamo con la lettera **x** ' **il tempo di sosta**'.
Osserviamo quindi che se svolgo il prodotto tra il tempo di sosta e il costo orario di parcheggio $(1,60\,\frac{e}{h})$ ottengo la spesa.
Ricordo poi che questa quantità dovrà essere minore od uguale a €4, 00.
Impostiamo e risolviamo quindi la seguente disequazione:

$1,60\,\frac{e}{h} \cdot x \leq 4,00e$

Applicando il **secondo principio di equivalenza delle disequazioni** divido I e II membro per il termine $1,60\,\frac{e}{h}$.

$x \leq \overset{2,5}{\cancel{4,00}}\,\cancel{€} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{1,60}}}\,\frac{h}{\cancel{€}}.$

Semplifico ora le quantità numeriche e le unità di misura.

$x \leq 2,5h$

Dunque **il tempo a disposizione per la sosta** dovrà essere inferiore, o al più uguale, a **2 ore e 30 minuti**.

2. Disequazioni numeriche intere di secondo grado

Ricordo che una **disequazione numerica intera** si dice **di secondo grado** quando l'incognita appare elevata al quadrato e non compare elevata a potenza maggiore.

Consideriamo quindi una disequazione numerica intera di secondo grado che, con l'ausilio dei **principi di equivalenza**, può essere sempre riportata alla seguente forma[21]:

$$ax^2 + bx + c \geq 0; \quad \text{con} \quad b, c \in \mathbb{R} \ \text{e} \ a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

[21]Ci riferiamo a questo caso caso specifico solamente per una questione di semplicità: al posto del verso 'maggiore o uguale' potrebbe esserci uno degli altri tre versi ($\geq$, $<$ o $\leq$).

2.1. Metodi per la risoluzione delle disequazioni di secondo grado

Per risolvere una generica disequazione di secondo grado esistono due possibili modi: il **metodo delle parabole** e il **metodo della scomposizione**. In questa Unità affronteremo solo il secondo metodo.

2.1.1. METODO DELLA SCOMPOSIZIONE

Data una generica disequazione di secondo grado in una delle seguenti forme

- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$

con $b, c \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,

consideriamone il polinomio associato $ax^2 + bx + c = 0$.
Calcoliamo il **delta** e facendo riferimento alle scomposizioni descritte nell'Unità 4della parte B «Scomposizione dei trinomi di II grado» osserviamo che si possono ottenere i seguenti tre casi:

- $\boxed{\Delta < 0}$ Il polinomio **non è scomponibile**. Considero dunque il coefficiente del termine di grado 2.
  - Se $a > 0 \implies ax^2 + bx + c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
  - Se $a < 0 \implies ax^2 + bx + c < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

  Esempi:

  1. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\mathbf{-x^2 + x - 1 \leq 0}$.

     Calcolo il delta: $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$.
     Dato poi che $a = -1 < 0$, si ha che $-x^2 + x - 1 < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

     Dunque la disequazione è **vera** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ poiché sempre strettamente negativa e il suo **insieme delle soluzioni** è quindi $\mathbf{S} = \mathbb{R}$.
  2. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\mathbf{3x^2 + 1 < 0}$.

     Calcolo il delta: $\Delta = (0)^2 - 4(3)(1) = 0 - 12 = -12 < 0$.
     Dato poi che $a = 3 > 0$, si ha che $3x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

     Nota: Anche senza svolgere i conti ci potevamo accorgere subito che il polinomio in questione era **strettamente positivo** poiché somma di un valore maggiore o uguale a zero ($3x^2$) e uno strettamente positivo (1).

     Dunque la disequazione è **falsa** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ e il suo **insieme delle soluzioni** è quindi $\mathbf{S} = \varnothing$.

- $\boxed{\Delta = 0}$ In questo caso il polinomio si può scomporre nel prodotto tra il coefficiente del termine di grado 2 e un **quadrato di binomio**:

  $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

  (dove x_1 è il valore che si ricava risolvendo l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$).

  Osserviamo che il secondo fattore a I membro è un quadrato, quindi una quantità maggiore o uguale a zero per ogni valore della x.
  Il segno della disequazione è dunque dato dal valore di a:

- Se $a > 0 \implies ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Se $a < 0 \implies ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Esempi:

1. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\mathbf{2x^2 - 12x + 18 \leq 0}$.

   Considero l'equazione associata $2x^2 - 12x + 18 = 0$ e ne calcolo il delta:

   $$\Delta = (-12)^2 - 4(2)(18) = 144 - 144 = 0$$

   Trovo quindi le due soluzioni coincidenti:

   $$x_{1,2} = \frac{12 \pm 0}{4} = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{4}_{1}} = 3$$

   Dunque si ha:

   $$2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$$

   Dato poi che $a = 2 > 0$, si ha che $2x^2 - 12x + 18 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

   Dunque la disequazione è **vera solamente per** $x = 3$, valore per la quale si annulla. Il suo **insieme delle soluzioni** è quindi $\mathbf{S} = \{\mathbf{3}\}$.

2. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\mathbf{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} > 0}$.

   Considero l'equazione associata $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$ e ne calcolo il delta:

   $$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \cancel{4}^{1}(1)\left(\frac{1}{\cancel{16}_{4}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

   Trovo quindi le due soluzioni coincidenti:

   $$x_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm 0}{2} = \frac{1}{4}$$

   E quindi si ha:

   $$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2$$

   Dato poi che $a = 1 > 0$, si ha che $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

   Dunque la disequazione è **vera per ogni valore reale tranne** $x = \frac{1}{4}$, valore per la quale si annulla. Il suo **insieme delle soluzioni** è quindi $\mathbf{S} = \mathbb{R} - \left\{\mathbf{\frac{1}{4}}\right\}$.

3. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\mathbf{4x^2 - 4x + 1 \geq 0}$.

   Osservo che l'espressione a I membro è un **quadrato di binomio**, quindi si scompone in:

   $$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

   Dato che l'espressione è sempre maggiore od uguale a 0, la disequazione è dunque **vera per ogni valore reale**.
   Il suo **insieme delle soluzioni** è quindi $\mathbf{S} = \mathbb{R}$.

- $\boxed{\Delta > 0}$ In questo caso infine il polinomio a I membro si scompone nel modo seguente:

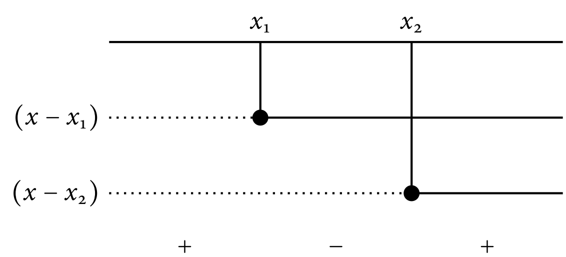
$$ax^2 + bx + c = a\overbrace{(x - x_1)}^{A}\overbrace{(x - x_2)}^{B}$$

(dove x_1, x_2 sono le soluzioni dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$).
Si studiano ora i segni dei polinomi A e B ponendo:

A) $(x - x_1) \geq 0 \implies x \geq x_1$

B) $(x - x_2) \geq 0 \implies x \geq x_2$

ed effettuo quindi lo STUDIO DEL SEGNO impostando il seguente disegno:
(supponiamo per semplicità $x_1 < x_2$)



Schema di lettura del grafico:

- La **linea in alto** rappresenta i numeri reali ($\mathbb{R}$) e vi sono riportati i valori che annullano il polinomio (x_1 e x_2).
- Le **due linee più in basso** indicano il segno dei polinomi $x - x_1$ e $x - x_2$ al variare dei valori assegnati alla variabile x. Le parti di linea tratteggiata indicano che per tutti quei valori il polinomio in oggetto è negativo, mentre le parti continue di linea indicano che per quei valori il polinomio in oggetto è positivo. Il pallino pieno indica che il valore limite può essere assegnato. Nel caso si avesse invece un pallino vuoto il valore non potrebbe essere assegnato.
- I **segni** riportati in fondo infine indicano se il prodotto (in quel determinato intervallo) dei polinomi precedenti, risulta positivo o negativo.

Dunque, tornando alla disequazione iniziale, il **risultato** dipenderà dal valore di a:

- Se $a > 0 \implies ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

  sarà **maggiore od uguale a zero** per ogni valore della x corrispondente a dove ci sono i segni '+' nel grafico (ovvero per i valori esterni ai due punti);
- Se $a < 0 \implies ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

  sarà **maggiore od uguale a zero** per ogni valore della x corrispondente a dove si trova il segno '–' nel grafico (ovvero per i valori interni ai due punti).

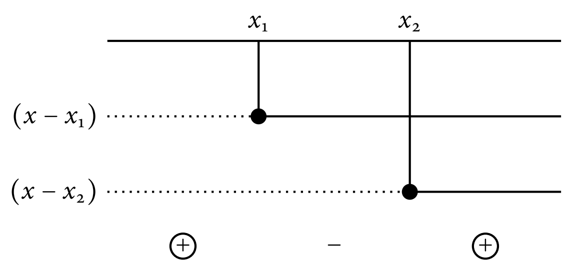
Nota bene:
Osserviamo che **possiamo sempre ricondurci al caso a > 0**: infatti, nel caso in cui a sia negativo basta moltiplicare I e II membro per -1 ed invertire il verso della disequazione.

Ad esempio se consideriamo la disequazione $-2(x-2)(x+1) \geq 0$ e moltiplichiamo I e II membro per -1 otteniamo:

$$2(x-2)(x+1) \leq 0$$

Dunque, dato il grafico del segno, **per trovare la soluzione della disequazione** basta osservare, dopo esserci ricondotti al caso **a > 0**, che:

- Se il verso della disequazione è maggiore stretto o maggiore uguale (> o ≥) allora **si prendono i valori esterni**.



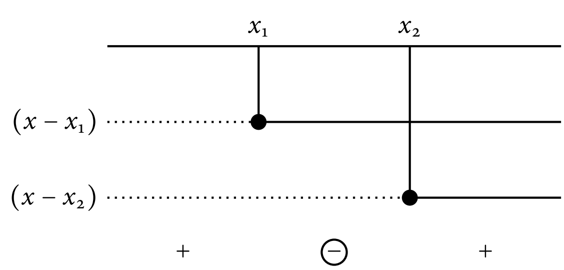
Dunque l'insieme delle soluzioni sarà:

$$\mathbf{S} = (-\infty, \mathbf{x_1}) \cup (\mathbf{x_2}, +\infty) \qquad \text{se la disequazione era} \quad ax^2 + bx + c > 0$$

oppure

$$\mathbf{S} = (-\infty, \mathbf{x_1}] \cup [\mathbf{x_2}, +\infty) \qquad \text{se la disequazione era} \quad ax^2 + bx + c \geq 0$$

- Altrimenti (per i versi < o ≤) **si prendono i valori interni**.



Dunque l'insieme delle soluzioni sarà:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) \qquad \text{se la disequazione era} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

oppure

$$\mathbf{S} = [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}] \qquad \text{se la disequazione era} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

Esempi:

1. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\mathbf{x^2 + 3x + 2 \geq 0}$.

   Considero l'equazione associata $x^2 + 3x + 2 = 0$ e ne calcolo il delta:

   $$\Delta = (3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1 > 0$$

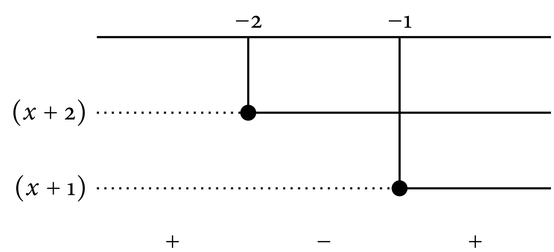
   Dato che è positivo, calcolo le due soluzioni distinte:

   $$x_{1,2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{1}}{2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{1}}{2} = -2 \end{cases}$$

   E quindi si ha la scomposizione:

   $$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

   Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno** dei due fattori:

   Dunque $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ è **positivo od uguale a zero** per ogni valore della x corrispondente a dove ci sono i segni '+' e l'insieme delle soluzioni risulta:

   $$S = (-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$$

2. Cerchiamo le soluzioni della disequazione $\mathbf{-x^2 + x > 0}$.

   Considero l'equazione associata $-x^2 + x = 0$: osservo che è un'equazione **spuria**[22] e quindi per trovarne la scomposizione mi basta raccogliere $-x$:

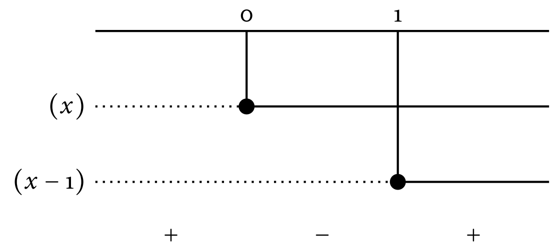
   $$-x^2 + x = -x(x-1)$$

   Inoltre per semplificare lo studio della disequazione eliminiamo anche il segno negativo dall'espressione moltiplicando per -1 a I e II membro ottenendo la disequazione equivalente: (Ricordo che bisogna anche cambiare il verso della disequazione ogni volta che si moltiplica o divide per un valore negativo I e II membro.)

   $$x(x-1) < 0$$

[22] vedi l'Unità 4 della parte C «Equazioni di II grado».

Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno** dei due fattori x e $x-1$:



Dunque $x(x-1)$ è **negativo** per ogni valore della x corrispondente a dove si trova il segno '−' e quindi l'insieme delle soluzioni risulta:

$$S = (0,1)$$

NOTA: Gli estremi in questo caso sono **esclusi** poiché la la disequazione iniziale escludeva i valori che rendessero il polinomio nullo.

2.2. Esempio di utilizzo delle disequazioni numeriche di secondo grado nella risoluzione di un problema reale

Il regolamento di una gara di barche a vela prevede le seguenti regole: tutte le vele devono essere rigorosamente triangolari con altezza che superi di 2 m la metà della base. Inoltre l'area della vela deve essere al massimo $24m^2$. Trova quindi quali valori può assumere la base affinché si riesca a costruire vele adeguate al regolamento.
(Ti consiglio di provare a rispondere da solo prima di leggere la soluzione.)

SOLUZIONE:
Prima di tutto definiamo l'incognita: chiamiamo con la lettera **x**, la '**lunghezza della base in metri**'.
Dunque l'altezza h la possiamo scrivere in funzione della base: $h = 2 + \frac{x}{2}$. E dato che l'area della vela-triangolo dovrà essere minore od uguale a 24 m impostiamo e risolviamo la seguente disequazione:

$$\left[x \cdot \left(\frac{x}{2} + 2\right)\right] \cdot \frac{1}{2} \leq 24$$

Per prima cosa applichiamo i principi di equivalenza delle disequazioni fino a giungere alla seguente forma:

$$\frac{x^2}{4} + x - 24 \leq 0$$

Consideriamo ora l'equazione associata $\frac{x^2}{4} + x - 24 = 0$ e ne calcolo il delta:

$$\Delta = (1)^2 - \cancel{4}^1\left(\frac{1}{\cancel{4}_1}\right)(-24) = 1 + 24 = 25 > 0$$

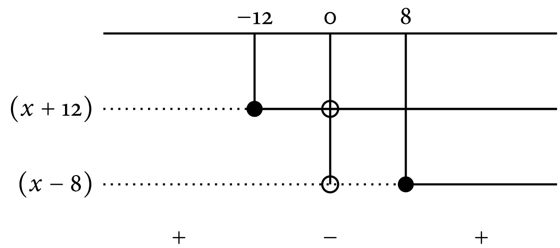
Dato che è positivo, calcolo le due soluzioni distinte:

$$x_{1,2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{\frac{1}{2}} = 8 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{\frac{1}{2}} = -12 \end{cases}$$

E quindi si ha la scomposizione:

$$\frac{x^2}{4} + x - 24 = \frac{1}{4}(x-8)(x+12)$$

Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno** dei due fattori:



(**Osservazione**: Ho aggiunto la linea verticale dello zero (ed i pallini vuoti) per ricordare che, al di là del conto algebrico, nella realtà la misura della base della vela non potrà essere né nulla né negativa!)

Dunque $\frac{x^2}{4} + x - 24 = \frac{1}{4}(x-8)(x+12)$ è **negativo od uguale a zero**, come richiesto dalla disequazione, per ogni valore della x corrispondente a dove si trova il segno '−', ovvero per i valori $x \in [-12, 8]$.

Ma tenendo conto della natura del problema (e dunque dell'osservazione di poco fa) l'insieme delle soluzioni accettabili risulta:

$$S = (0, 8]$$

Ovvero **si possono costruire vele accettabili dal regolamento con basi lunghe fino ad** 8 **metri**.

Esercizi Unità 2

1. Data la seguente disequazione

$$\sqrt{3}(x+\sqrt{3}) - x > (x+\sqrt{3})^2 - x^2$$

indica la risposta corretta.

A. L'insieme delle soluzioni è $S = (0, +\infty)$.

B. L'insieme delle soluzioni è $S = \varnothing$.

C. L'insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, 0)$.

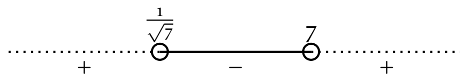
D. L'insieme delle soluzioni è $S = 0$.

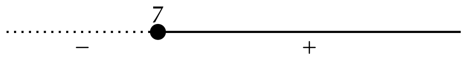
E. Nessuna delle precedenti è corretta.

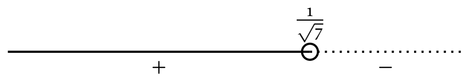
2. Dato il seguente prodotto

$$(x-7)(\sqrt{7}x - 1)$$

indica la rappresentazione che esprime il corretto studio del segno.

A. 

B. 

C. 

D. 

E. Nessuna delle rappresentazioni precedenti è corretta.

3. Data la seguente disequazione

$$\left(\frac{x+1}{8}\right)(3-x) < 0$$

indica il risultato corretto.

A. L'insieme delle soluzioni è $S = (-1, 3)$.

B. L'insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

C. L'insieme delle soluzioni è $S = [1, +\infty)$.

D. L'insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, 3)$.

E. Nessuno dei precedenti.

4. Data la seguente disequazione

$$-(x+3)(3-x) \leq x(x+4)$$

indica il corretto insieme delle soluzioni.

A. $S = \left(-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

B. $S = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$.

C. $S = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

D. $S = \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$.

E. Nessuno dei precedenti.

5. Un numero intero x sommato al prodotto tra il suo precedente e il suo successivo dà un risultato minore o uguale a 5.
Che valori può assumere x?

A. Tutti i valori reali compresi nell'intervallo $[-3, 2]$.

B. Tutti i valori reali compresi nell'intervallo $(-3, 2)$.

C. Tutti i valori dell'insieme $S = \{-3, 2\}$.

D. Nessun valore reale corrisponde alle caratteristiche cercate.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Unità 3

Disequazioni numeriche intere di grado superiore al II

In questa Unità vedremo come risolvere **disequazioni numeriche intere di grado superiore al secondo**.

Se hai dei dubbi riguardo i metodi di risoluzione delle disequazioni di I o II grado vai a rivedere l'Unità 2 della parte D «Disequazioni numeriche intere di I e II grado», se invece vuoi ripassare le basi della teoria sulle disequazioni (ad esempio definizioni o principi di equivalenza) va a rivedere l'Unità 1 della parte D «Introduzione alle disequazioni e loro principali proprietà».

Nel dettaglio, in questa Unità, affronteremo studi di polinomi di grado superiore al secondo che risultano scomponibili in fattori di primo e di secondo grado.

1. Risoluzione di una disequazione di grado superiore al secondo

Consideriamo una disequazione numerica intera di grado superiore al secondo.
Attraverso i **principi di equivalenza** riconduciamola ad una delle seguenti forme:

- $P(x) \geq 0$
- $P(x) \leq 0$
- $P(x) > 0$
- $P(x) < 0$

con $P(x)$ polinomio di grado ≥ 3

Scomponiamo quindi il polinomio $P(x)$ in fattori di I e II grado[23]:

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot C(x) \dots$$

dove $A(x), B(x), C(x) \dots$ sono polinomi di I o II grado.

Otteniamo quindi la **risoluzione della disequazione** studiando **il segno dei fattori del polinomio**.

1.1. Esempi di svolgimento di disequazioni di grado superiore al secondo

1. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\mathbf{x^3 - 7x + 6 > 0}$$

Osserviamo che in questo caso si trova già in una delle forme sopra indicate.
Andiamo quindi a scomporre il polinomio in fattori di I e II grado.
Utilizzando il **metodo di Ruffini**[24] osserviamo che 1 è una radice del polinomio, infatti:

$$(1)^3 - 7(1) + 6 = 1 - 7 + 6 = 0$$

[23] Per la **scomposizione di un polinomio generico** fai riferimento alla tabella riassuntiva dell'Unità 6 della parte B «Scomposizione di polinomi».
[24] Vedi l'Unità 5 della parte B «Teorema del resto, teorema e regola di Ruffini».

Eseguiamo quindi la divisione $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & & & \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Dunque $Q(x) = x^2 + x - 6$ e
$x^3 - 7x + 6 = (x^2 + x - 6)(x - 1)$

Scomponiamo infine il polinomio $x^2 + x - 6$ come **particolare trinomio di II grado**[25]:

$$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$

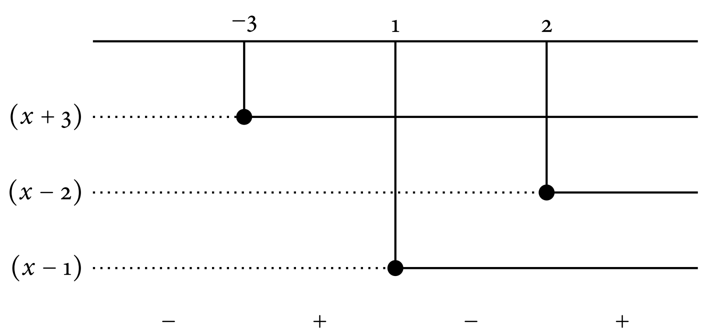
Dunque:

$$x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x - 2)(x - 1)$$

Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno** dei tre fattori:

- $x + 3 \geq 0 \implies x \geq -3$
- $x - 2 \geq 0 \implies x \geq 2$
- $x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$

Dunque:



Si ha quindi che $x^3 - 7x + 6$ è strettamente positivo (come richiesto dal verso della disequazione) tra -3 e 1 e dopo 2, dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{-3}, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{2}, +\infty)$$

2. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\mathbf{-x^4 \leq -81}$$

Per prima cosa trasportiamo, utilizzando il **primo principio di equivalenza** -81 a I membro e moltiplichiamo I e II membro per -1. Otteniamo quindi la disequazione equivalente

$$\mathbf{x^4 - 81 \geq 0}$$

[25] Vedi l'Unità 4 della parte B «Scomposizione dei trinomi di II grado».

nella forma richiesta ad inizio Unità.

Andiamo quindi a scomporre il polinomio in fattori di I e II grado.
Osserviamo che possiamo applicare due volte il prodotto notevole **differenza di quadrati**[26] ed ottenere quindi

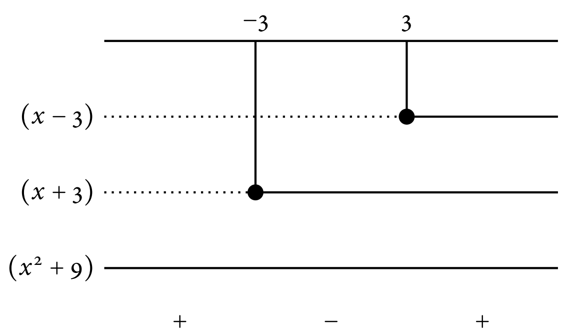
$$x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

dove il fattore di II grado $x^2 + 9$ non è più scomponibile poiché somma di due numeri positivi (non esiste nessun valore reale che possa annullare tale polinomio).

Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno** dei tre fattori:

- $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$
- $x + 3 \geq 0 \implies x \geq -3$
- $x^2 + 9 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dunque:



(**Osservazione**: La linea orizzontale corrispondente allo studio del segno del polinomio x^2+9 risulta una linea tutta continua poiché tale polinomio è sempre strettamente positivo!)

Si ha quindi che $x^4 - 81$ è maggiore od uguale a zero (come richiesto dal verso della disequazione) negli intervalli esterni ai valori -3 e 3, dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\mathbf{S} = (-\infty, -\mathbf{3}] \cup [\mathbf{3}, +\infty)$$

3. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\mathbf{-1 - x^3 \geq 0}$$

Anche se la disequazione si trova già in una delle forme sopra indicate, moltiplichiamo I e II membro per -1 ottenendo la disequazione equivalente

$$\mathbf{x^3 + 1 \leq 0}$$

[26] Vedi l'Unità 3 della parte B «Prodotti notevoli».

Osserviamo che il polinomio a I termine è una **somma di cubi**[27]. La sua scomposizione risulta quindi

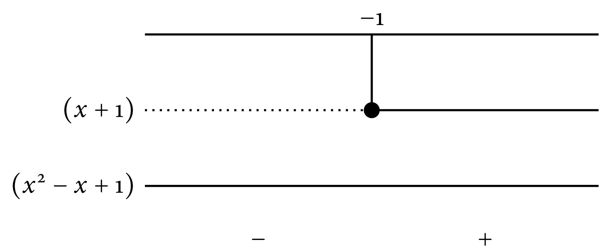
$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

dove, ricordo, il fattore di II grado $x^2 - x + 1$ (detto falso quadrato) non è ulteriormente scomponibile ed in questo caso sempre positivo[28].

Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno**:

- $x + 1 \geq 0 \implies x \geq -1$
- $x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dunque:



(**Osservazione**: come nell'esercizio precedente la linea orizzontale corrispondente allo studio del segno del polinomio $x^2 - x + 1$ risulta una linea tutta continua poiché tale polinomio è sempre strettamente positivo!)

Si ha quindi che $x^3 + 1$ è minore od uguale a zero (come richiesto dal verso della disequazione) per valori minori di -1, dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\mathbf{S} = (-\infty, -\mathbf{1}]$$

Esercizi Unità 3

1. La seguente disequazione

$$(x-3)^6(x+7) > 0$$

è verificata per:

A. $x \in (-7, +\infty)$.

B. $x \in (-7, 3) \cup (3, +\infty)$.

C. $x \in (-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$.

D. $x \in (3, +\infty)$.

E. Nessun valore reale.

[27] Vedi l'Unità 3 della parte B «Prodotti notevoli».

[28] Per provarlo basta calcolare il Δ e osservare che il coefficiente di grado massimo è positivo. Per ripassare vedi l'Unità 3 della parte B «Prodotti notevoli».

2. Data la seguente disequazione

$$-(x^2-1)(3x^4+5)>0$$

indica il suo corretto insieme delle soluzioni:

A. $S=\mathbb{R}-\left\{\pm 1,-\frac{5}{3}\right\}$.

B. $S=\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$.

C. $S=(-1,1)$.

D. $S=\varnothing$.

E. Nessuna delle risposte precedenti è corretta.

3. Data la seguente disequazione

$$(3x^2+4x+1)(2x-x^2-6)\geq 0$$

indica il risultato corretto:

A. L'insieme delle soluzioni è $S=\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$.

B. L'insieme delle soluzioni è $S=(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

C. L'insieme delle soluzioni è $S=\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[-1,-\frac{1}{3}\right]\cup[2,+\infty)$.

D. L'insieme delle soluzioni è $S=\varnothing$.

E. Nessuno dei precedenti.

4. Data la seguente disequazione

$$4x^4-3\geq 4\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

indica il risultato corretto:

A. L'insieme delle soluzioni è $S=(0,1)$.

B. L'insieme delle soluzioni è $S=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

C. L'insieme delle soluzioni è $S=\varnothing$.

D. L'insieme delle soluzioni è $S=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

E. Nessuno dei precedenti.

Unità 4

Disequazioni numeriche fratte

In questa Unità vedremo come risolvere le **disequazioni numeriche fratte** ed alcuni esempi di risoluzione.

È importante che tu ricordi come scomporre i polinomi (per ripassare vedi l'Unità 6 della parte B «Scomposizione di polinomi») e conosca bene i metodi di risoluzione delle delle disequazioni numeriche intere (per ripassare vedi le Unità 1 e 2 della parte D: «Introduzione alle disequazioni e loro principali proprietà» e «Disequazioni numeriche intere di I e II grado»).

1. Risoluzione di una disequazione numerica fratta

Consideriamo una disequazione numerica fratta e vediamo di seguito un procedimento per risolvere tali disequazioni.

- Per prima cosa **riconduciamo** la disequazione, attraverso i **principi di equivalenza**, ad una delle seguenti forme:

  - $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ ◦ $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$
  - $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ ◦ $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$

  con $B(x)$ polinomio **non nullo**.

- **Scomponiamo** quindi i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ e diamo le **C.E.** sui fattori del denominatore.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_1(x)a_2(x)\ldots a_m(x)}{b_1(x)b_2(x)\ldots b_n(x)} \qquad \text{e} \qquad \textbf{C.E.: } b_i(x) \neq 0 \ \ \forall i = 1\ldots n$$

dove $a_i(x)$ $\forall i = 1\ldots m$ sono polinomi di grado $\leq$ grado di $A(x)$.
e $b_j(x)$ $\forall j = 1\ldots n$ sono polinomi di grado $\leq$ grado di $B(x)$.

- **Semplifichiamo** ora eventuali fattori uguali tra numeratore e denominatore.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_1(x)a_2(x)\ldots \cancel{a_i(x)}\ldots a_m(x)}{b_1(x)b_2(x)\ldots \cancel{b_j(x)}\ldots b_n(x)} \qquad \text{se } a_i(x) = b_j(x).$$

- Otteniamo infine la **risoluzione** della disequazione **studiando il segno del numeratore e del denominatore**: Questo si fa studiando il segno dei singoli fattori (tenendo sempre presenti quali valori sono esclusi dalle **C.E.**) e poi utilizzando la regola dei segni.

  - $a_i(x) \geq 0 \ \ \forall i = 1\ldots m$ $\longleftarrow$ Studio del segno dei fattori a numeratore.

- $b_j(x) > 0 \quad \forall j = 1 \dots n \quad \longleftarrow$ Studio del segno dei fattori a denominatore.

Solitamente si riporta lo studio dei segni dei singoli fattori in uno schema grafico, come mostrato negli esempi che seguono.

1.1. Esempi di svolgimento di disequazioni fratte

1. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{2x-3}{4-x} \geq 0$$

Osserviamo che la disequazione si trova già in una delle forme sopra indicate ed inoltre che numeratore e denominatore sono irriducibili.

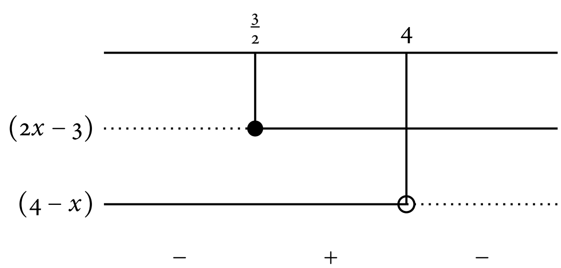
Diamo quindi le **C.E.**:

- $4 - x \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x \neq 4}$

Andiamo ora a svolgere lo **studio del segno** dei fattori:

- $2x - 3 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq \frac{3}{2}$
- $4 - x > 0 \quad \Longrightarrow \quad -x > -4 \quad \Longrightarrow \quad x < 4$

Riportiamo questi risultati in uno schema grafico come segue.



Si ha quindi che la frazione algebrica è maggiore od uguale a zero (come richiesto dal verso della disequazione) per valori compresi tra $\frac{3}{2}$ compreso e 4 escluso, dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\mathbf{S} = \left[\frac{3}{2}, 4\right)$$

2. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} \leq 0$$

Osserviamo che, anche in questo caso, la disequazione si trova già in una delle forme sopra indicate.

Andiamo quindi a scomporre numeratore e denominatore:

- **Numeratore**: Raccogliamo una x:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

  Scomponiamo il polinomio di II grado e otteniamo:

$$x\left(x^2 - 5x + 6\right) = x(x-2)(x-3)$$

- **Denominatore**: Osserviamo che è una differenza di quadrati, quindi:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Dunque la scomposizione risulta:

$$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} = \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}$$

Diamo ora le **C.E.**:

- $x - 2 \neq 0 \implies \boxed{x \neq 2}$
- $x + 2 \neq 0 \implies \boxed{x \neq -2}$

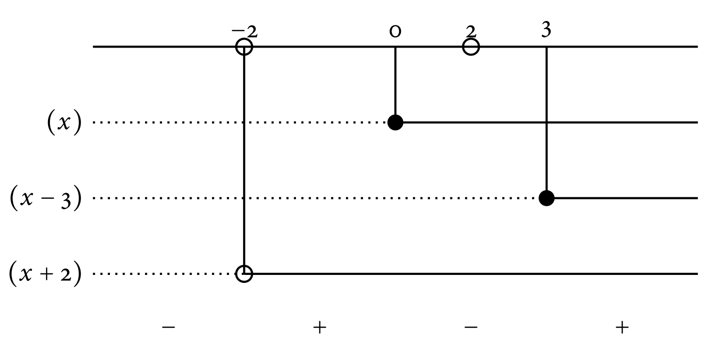
Possiamo ora semplificare i termini uguali tra numeratore e denominatore.

$$\frac{x\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{x(x-3)}{x+2}$$

Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno** dei fattori rimasti.

- $x \geq 0$
- $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$
- $x + 2 > 0 \implies x > -2$

Riportiamo questi risultati in uno schema grafico come segue.



(**Osservazione**: I due pallini vuoti riportati sull'asse dei numeri reali sono stati aggiunti per ricordare le **C.E.**.)

Si ha quindi che la frazione algebrica è minore od uguale a zero (come richiesto dal verso della disequazione) per valori inferiori a -2 e tra 0 e 3 con l'esclusione del valore $x = 2$, dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\mathbf{S} = (-\infty, -2) \cup [0, 2) \cup (2, 3]$$

3. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{8 - x^2}{x^2 - 2x + 1} > \frac{x^2}{x - 1}$$

Prima di tutto riportiamo la disequazione alla forma normale.

$$\frac{8 - x^2}{x^2 - 2x + 1} > \frac{x^2}{x - 1}$$

Per prima cosa notiamo che il polinomio a denominatore nel I membro è un **quadrato di binomio**.

$$\frac{8 - x^2}{(x - 1)^2} > \frac{x^2}{x - 1}$$

Osservando che l'**m.c.m.** tra i denominatori dei due membri è $(x-1)^2$, riporto le frazioni algebriche allo stesso denominatore.

$$\frac{8 - x^2}{(x - 1)^2} > \frac{x^2(x - 1)}{(x - 1)^2}$$

Svolgo il prodotto a numeratore del II membro e trasporto tutto a I membro.

$$\frac{8 \cancel{- x^2} - x^3 + \cancel{x^2}}{(x - 1)^2} > 0$$

Semplifico i termini simili a numeratore.

$$\frac{8 - x^3}{(x - 1)^2} > 0$$

Abbiamo ottenuto quindi la forma richiesta ad inizio Unità.

Scomponiamo ora numeratore e denominatore:

- **Numeratore**: Osserviamo che il binomio è una **differenza di cubi**, si scompone quindi come:

  $$(2 - x)(4 + 2x + x^2)$$

  Ricordiamo inoltre che il secondo termine (detto falso quadrato) non è scomponibile ulteriormente e in questo caso risulta sempre positivo[29].
- **Denominatore**: È già scomposto in un **quadrato di binomio**.

Dunque la scomposizione risulta:

$$\frac{8 - x^3}{(x - 1)^2} = \frac{(2 - x)(4 + 2x + x^2)}{(x - 1)^2}$$

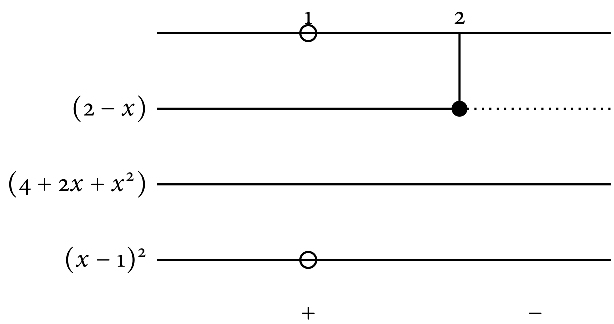
Diamo ora le **C.E.**: $x - 1 \neq 0 \implies \boxed{x \neq 1}$

Notiamo che non ci sono termini uguali tra numeratore e denominatore da semplificare e andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno** dei fattori.

[29] Per provarlo basta calcolare il Δ e osservare che il coefficiente del termine di grado massimo è positivo. Per ripassare vedere l'Unità 3 della parte B «Prodotti notevoli».

- $2 - x \geq 0 \implies -x \geq -2 \implies x \leq 2$
- $4 + 2x + x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (in particolare, come abbiamo già osservato, è sempre strettamente positivo.)
- $(x-1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

Dunque:



Si ha quindi che la frazione algebrica è strettamente positiva (come richiesto dal verso della disequazione) per tutti i valori minori di 2, con l'esclusione di $x = 1$ (valore per il quale perde di significato). Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\mathbf{S} = (-\infty, \mathbf{1}) \cup (\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

Esercizi Unità 4

1. Data la seguente disequazione fratta

$$\frac{(2x-4)^2}{x-7} \geq 0$$

indica la risposta corretta.

A. L'insieme delle soluzioni è $S = (7, +\infty)$.

B. L'insieme delle soluzioni è $S = [2, +\infty)$.

C. L'insieme delle soluzioni è $S = \{2\} \cup (7, +\infty)$.

D. L'insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, 2] \cup (7, +\infty)$.

E. Nessuna delle precedenti è corretta.

2. Data la seguente disequazione fratta

$$\frac{-9x + 2x^2 - 5}{x - 5} > 0$$

indica la risposta corretta.

A. È equivalente a $2x + 1 > 0$.

B. L'insieme delle soluzioni è $S = \left[-\frac{1}{2}, 5\right)$.

C. L'insieme delle soluzioni è $S = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

D. Le **C.E.** sono $x \neq 5, -\frac{1}{2}$.

E. Nessuna delle precedenti è corretta.

3. Data la seguente disequazione fratta

$$\frac{20x}{5x - 10} < \frac{5}{x + 2} + 4$$

indica il risultato corretto.

A. L'insieme delle soluzioni è $S = \left(-\frac{26}{3}, -2\right) \cup (2, +\infty)$.

B. L'insieme delle soluzioni è $S = \left(-\infty, -\frac{26}{3}\right) \cup (-2, 2)$.

C. L'insieme delle soluzioni è $S = \mathbb{R}$.

D. L'insieme delle soluzioni è $S = \varnothing$.

E. Nessuno dei precedenti.

Unità 5

Sistemi di disequazioni

In questa Unità affronteremo i **sistemi di disequazioni**, vedremo come risolverli ed alcuni esempi di risoluzione.

Prima di proseguire nella lettura dell'unità è importante che tu sappia scomporre i polinomi (per ripassare vedi l'Unità 6 della parte B «Scomposizione di polinomi») e conosca bene i metodi di risoluzione delle disequazioni numeriche (per ripassare vedi le Unità 1, 2 e 4 della parte D: «Introduzione alle disequazioni e loro principali proprietà», «Disequazioni numeriche intere di I e II grado» e «Disequazioni numeriche fratte»).

1. Definizione di sistema di disequazioni

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di più disequazioni nelle stesse incognite, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.

Le **soluzioni** del sistema sono quei valori, delle incognite, che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni.

NOTA: Noi ci occuperemo di sistemi di disequazioni in una sola incognita (di solito indicata dalla lettera x).

2. Risoluzione di un sistema di disequazioni

Per **risolvere** un sistema di disequazioni dobbiamo seguire i seguenti passi:

1. Risolviamo **ciascuna** disequazione.
2. Determiniamo l'**intersezione** di tutti gli insiemi delle soluzioni.

Del PASSO 1 (ovvero risolvere ogni singola disequazione) ci siamo già occupati nelle Unità precedenti (Unità 2,3 e 4 della parte D).

Per eseguire il PASSO 2 invece, possiamo costruire uno **schema grafico** in cui si riportano le soluzioni delle disequazioni precedentemente trovate; tale schema, come vedremo, si realizza in maniera simile a quello per lo studio del segno delle disequazioni, ma senza i tratteggi.

Attenzione:
Per quanto lo schema grafico che costruiremo sarà simile a quello dello **studio del segno**, in questo si avrà una differenza sostanziale nella scelta degli intervalli: si considereranno infatti come **soluzioni accettabili solo gli intervalli comuni alle soluzioni di *tutte* le disequazioni**.

2.1. Esempi di svolgimento di sistemi di disequazioni

1. Risolviamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x^2 - 9 \leq 0 \\ x^2 + 3x + 2 > 0 \\ -5x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Per semplicità identificheremo le tre disequazioni, a partire dall'alto, con le lettere **A**, **B** e **C**.

PASSO 1
Risolviamo ciascuna disequazione separatamente.

(A) Risolviamo $\boxed{x^2 - 9 \leq 0}$

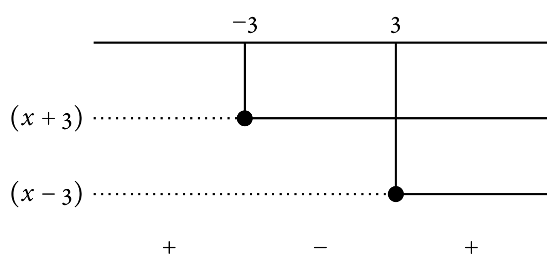
Per prima cosa scomponiamo il polinomio a I membro utilizzando il prodotto notevole **differenza di quadrati**.

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$$

Andiamo quindi ora a svolgere lo **studio del segno**.

- $x + 3 \geq 0 \implies x \geq -3$
- $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$

Dunque:



Si ha quindi che $x^2 - 9$ è **minore od uguale a zero** (come richiesto dal verso della disequazione) per ogni valore compreso tra -3 e 3 (estremi inclusi), dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_A = [-3, 3]}$$

(B) Risolviamo $\boxed{x^2 + 3x + 2 > 0}$

Per prima cosa calcoliamo il delta dell'equazione associata $x^2 + 3x + 2 = 0$.

$$\Delta = (3)^2 - 4(1)(2) = 9 - 8 = 1$$

Calcoliamo quindi le soluzioni dell'equazione.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1 \end{cases}$$

Considerati infine il verso della disequazione e il fatto che il coefficiente numerico del termine di II grado è positivo, possiamo affermare[30] che **le soluzioni sono date dai valori esterni ai due trovati** e che quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_B = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)}$$

(C) Risolviamo $\boxed{-5x + 1 \geq 0}$

Dato che è una **disequazione di I grado** si risolve immediatamente osservando che:

$$-5x + 1 \geq 0 \implies -5x \geq -1 \implies x \leq \frac{1}{5}$$

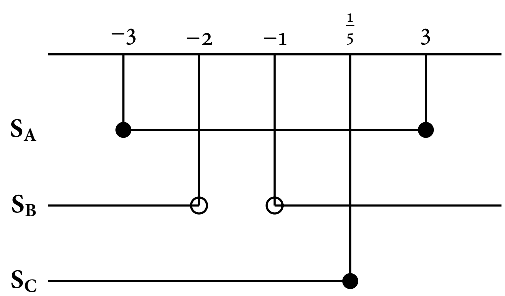
Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_C = \left(-\infty, +\frac{1}{5}\right]}$$

PASSO 2

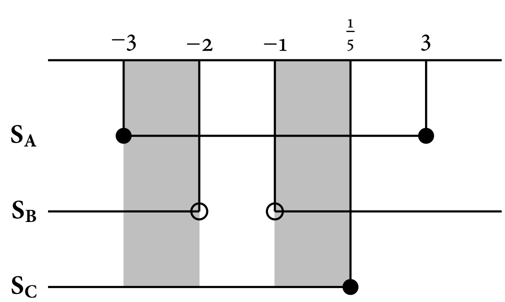
Determiniamo ora l'**intersezione di tutti gli insiemi delle soluzioni** $\boxed{S_A \cap S_B \cap S_C}$

Costruiamo quindi lo **schema grafico** con le soluzioni delle tre disequazioni.



(Ricordo che i cerchietti vuoti indicano punti che non appartengono alle soluzioni della relativa disequazione; viceversa i cerchietti pieni, punti che appartengono all'insieme delle soluzioni della relativa disequazione.)

Osserviamo che **le linee** che indicano i valori risultanti di ogni soluzione **si sovrappongono solamente nelle zona evidenziate nel seguente disegno**.



[30] Vedi l'Unità 2 della parte D «Disequazioni numeriche intere di I e II grado».

Ovvero negli intervalli $\left(-1, \frac{1}{5}\right]$ e $[-3, -2)$.

(Ricordo che i valori -1 e 2 non fanno parte degli intervalli perché non appartengono alle soluzioni di tutte le disequazioni, in quanto esclusi dalle soluzioni della disequazione **(B)**.)

Dunque **l'insieme delle soluzioni del sistema** risulta essere:

$$\boxed{\mathbf{S = [-3, -2) \cup \left(-1, \frac{1}{5}\right]}}$$

2. Risolviamo il seguente sistema.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3-x} \geq 0 \\ (2x+1)^2 < 4\left(x^2 - \dfrac{3}{4}\right) \end{cases}$$

Per semplicità identificheremo le due disequazioni, a partire dall'alto, con le lettere **A** e **B**.

PASSO 1

Risolviamo ciascuna disequazione separatamente.

(A) Risolviamo $\boxed{\dfrac{x}{3-x} \geq 0}$

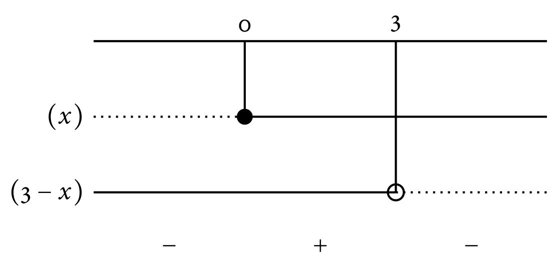
Per prima cosa diamo le **C.E.**.

$$3 - x \neq 0 \implies -x \neq -3 \implies \boxed{x \neq 3}$$

Andiamo quindi a svolgere lo **studio del segno**.

- $x \geq 0$
- $3 - x > 0 \implies -x > -3 \implies x < 3$

Dunque:



Si ha quindi che la frazione algebrica $\dfrac{x}{3-x}$ è **maggiore od uguale a zero** (come richiesto dal verso della disequazione) per valori compresi tra 0 e 3 (con 0 incluso e 3 escluso), dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_A = [0, 3)}$$

(B) Risolviamo $\boxed{(2x+1)^2 < 4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)}$

Per prima cosa riportiamo la disequazione alla forma normale.

$$(2x+1)^2 < 4\left(x^2 - \frac{3}{4}\right) \iff \cancel{4x^2} + 4x + 1 < \cancel{4x^2} - 3 \iff 4x + 4 < 0$$

Dato che **la disequazione equivalente ottenuta è di I grado** troviamo velocemente la soluzione.

$$4x + 4 < 0 \implies 4x < -4 \implies x < -1$$

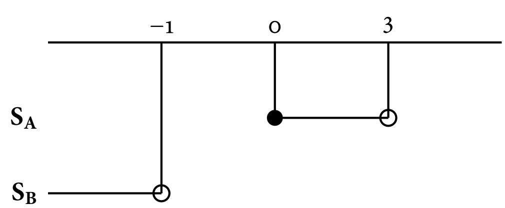
Dunque **l'insieme delle soluzioni** della disequazione risulta:

$$\boxed{S_B = (-\infty, -1)}$$

PASSO 2

Determiniamo ora l'**intersezione di tutti gli insiemi delle soluzioni** $\boxed{S_A \cap S_B}$

Costruiamo quindi lo **schema grafico** con le soluzioni delle due disequazioni.



Osserviamo che le soluzioni **NON si sovrappongono** in nessun intervallo.

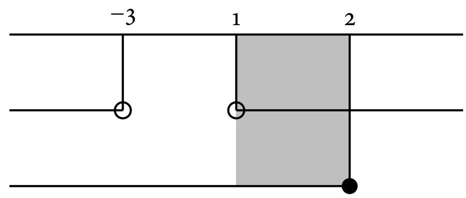
Dunque **l'insieme delle soluzioni del sistema** risulta vuoto.

$$\boxed{\mathbf{S} = \varnothing}$$

In altri termini, il sistema si dice **impossibile**.

Esercizi Unità 5

1. Dato il seguente grafico



indica la risposta corretta.

A. Rappresenta lo studio di: $(x^2 + 2x - 3)(-x + 2) \geq 0$

B. Rappresenta lo studio di: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{-x + 2} \geq 0$

C. Rappresenta lo studio di: $\begin{cases} x + 3 < 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$

D. Rappresenta lo studio di: $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases}$

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

2. Dato il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x - 3 \leq 0 \\ 2 - x > 0 \\ 2 \leq x + 1 \end{cases}$$

indica la risposta corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, 1)$.

B. Il suo insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, 1]$.

C. Il suo insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, 1] \cup (2, 3]$.

D. Il suo insieme delle soluzioni è $S = (1, 2) \cup (3, +\infty)$.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

3. Dato il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{3} < 0 \\ x^2 - 2x + 6 > 0 \end{cases}$$

indica la risposta corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, -2)$.

B. Il suo insieme delle soluzioni è $S = (-2, 1)$.

C. Il suo insieme delle soluzioni è $S = \mathbb{R}$.

D. Il suo insieme delle soluzioni è $S = \varnothing$.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

4. Dato il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 3x^2 - 1 \leq \dfrac{3x}{x^2 + 2} \\ \dfrac{5x - 1}{2x} > 2x + 1 \\ x^2 + 4 < 0 \end{cases}$$

indica la risposta corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è $S = \left[-\dfrac{7}{3}, \dfrac{1}{5}\right)$.

B. Il suo insieme delle soluzioni è $S = \left(\dfrac{1}{5}, 1\right] \cup (2, +\infty)$.

C. Il suo insieme delle soluzioni è $S = \mathbb{R}$.

D. Il suo insieme delle soluzioni è $S = \varnothing$.

E. Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Unità 6

Equazioni e disequazioni con valore assoluto

In questa Unità affronteremo le **equazioni e disequazioni con i valori assoluti**, vedremo come risolverli ed alcuni esempi di risoluzione.

Prima di proseguire nella lettura dell'unità è importante che tu sappia risolvere equazioni e disequazioni numeriche intere e sistemi con esse (per ripassare vedi la Unità relative).

1. Definizione di valore assoluto

Dato un valore $x \in \mathbb{R}$ il suo **valore assoluto** è:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Analogamente, se abbiamo espressioni che dipendono dall'incognita x il loro valore assoluto è:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Ciò che si trova all'interno dei simboli '| |', indicanti il valore assoluto, si dice **argomento** del valore assoluto.

Esempio:

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } \ x^2 - 4 \geq 0 \iff x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 4 & \text{se } \ x^2 - 4 < 0 \iff -2 < x < 2 \end{cases}$$

1.1. Relazioni con il valore assoluto

Ricordo inoltre che dalla definizione di valore assoluto seguono anche le **seguenti relazioni**.

1. $|f(x)| = k \iff f(x) = \pm k \quad \text{con } \ k \geq 0$
2. $|f(x)| < k \iff -k < f(x) < k \quad \text{con } \ k > 0$
3. $|f(x)| > k \iff f(x) < -k \vee f(x) > k \quad \text{con } \ k > 0$
4. $|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5. $||x| - |y|| \leq |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Note:

- Osserviamo che se fosse $k < 0$ nei primi due casi l'equazione e la disequazione sarebbero sempre false, mentre nel terzo caso sempre vera $\forall x \in \mathbb{R}$.
- La quarta relazione è detta **disuguaglianza triangolare**. Tale nome deriva dal fatto che in un triangolo, la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo. Mentre la quinta, che deriva direttamente dalla quarta, è detta **disuguaglianza triangolare inversa**. Anche in questo caso il nome deriva dal fatto che in un triangolo, la differenza tra le lunghezze dei due lati è minore della lunghezza del rimanente.

Esempi:

1. $|2x| = 4 \iff 2x = \pm 4 \iff x = -2 \lor x = 2$
2. $|x-7| < 5 \iff -5 < x-7 < 5 \iff -5+7 < x < 5+7 \iff$
   $\iff 2 < x < 13$
3. $\left|\frac{1}{3}x\right| \geq \frac{1}{4} \iff \frac{1}{3}x \leq -\frac{1}{4} \lor \frac{1}{3}x \geq \frac{1}{4} \iff x \leq -\frac{3}{4} \lor x \geq \frac{3}{4}$
4. $6 = |-6| = |4-10| < |4| + |-10| = 4 + 10 = 14$
5. $7 = ||-9| - |2|| < |-9-2| = |11| = 11$

2. Risoluzione di equazioni e disequazioni con valore assoluto

Data un'equazione o una disequazione in cui si presentano uno o più valori assoluti, per risolverla si devono, in ordine, seguire i seguenti passi:

- **Studiare** il segno degli argomenti dei valori assoluti presenti.
- **Trasformare l'equazione (o disequazione)** iniziale in unioni di sistemi per ogni intervallo in cui gli argomenti dei valori assoluti hanno segno costante.
- **Studiare** singolarmente ogni sistema.
- **Unire le soluzioni** dei vari sistemi.

2.1. Esempi di svolgimento di equazioni e disequazioni con valore assoluto

1. Consideriamo la seguente equazione: $\boxed{\mathbf{3 - |x^2 - 1| = 2}}$

Notiamo che l'equazione può essere riportata alla forma $|\mathbf{f(x)}| = \mathbf{k}$ e velocemente risolta, infatti:

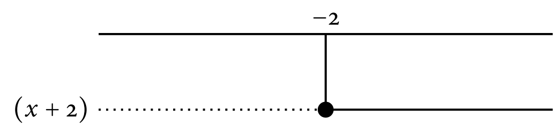
$$3 - |x^2 - 1| = 2 \iff |x^2 - 1| = 1 \iff x^2 - 1 = \pm 1 \iff$$
$$\iff x^2 = 2 \lor x^2 = 0 \iff \boxed{x = \pm\sqrt{2} \lor x = 0}$$

2. Consideriamo la seguente equazione: $\boxed{|\mathbf{x+2}| = \mathbf{2x-4}}$

Per prima cosa studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto.

$$x+2 \geq 0 \iff x \geq -2$$

Ovvero:



Quindi: $\begin{cases} |x+2| = -x-2 & \text{per } x \in (-\infty, -2] \\ |x+2| = x+2 & \text{per } x \in (-2, +\infty) \end{cases}$

Dunque l'equazione si trasforma nello studio dell'unione tra i seguenti due sistemi.

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -2] \\ -x-2 = 2x-4 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \in (-2, +\infty) \\ x+2 = 2x-4 \end{cases}$$

Per semplicità identificheremo i due sistemi, a partire da sinistra, con le lettere **A** e **B**.
Risolviamo quindi ciascun sistema separatamente.

(A) Risolviamo $-x-2 = 2x-4$:

$$-x-2 = 2x-4 \;\Rightarrow\; -3x = -2 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}$$

Considerando poi che $\frac{2}{3} \notin (-\infty, -2]$, ovvero la soluzione trovata non è accettabile, l'insieme delle soluzioni dell'equazione risulta:

$$\boxed{S_A = \varnothing}$$

(B) Risolviamo $x+2 = 2x-4$:

$$x+2 = 2x-4 \;\Rightarrow\; -x = -6 \;\Rightarrow\; x = 6$$

Considerando quindi che $6 \in (-2, +\infty)$, ovvero la soluzione trovata è accettabile, l'insieme delle soluzioni dell'equazione risulta:

$$\boxed{S_B = \{6\}}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione iniziale è:

$$\boxed{S = S_A \cup S_B = \varnothing \cup \{6\} = \{6\}}$$

3. Consideriamo la seguente equazione: $\boxed{|\mathbf{x+1}| + |-\mathbf{2x+4}| = -\mathbf{3}}$

Notiamo immediatamente che la **somma di due valori assoluti** (che per definizione sono positivi od uguali a zero) **non può essere**, per nessun valore della variabile x, **uguale ad un numero negativo** e dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione risulta:

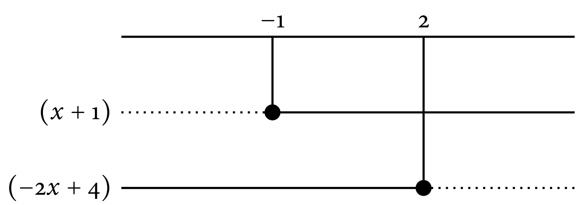
$$\boxed{S = \varnothing}$$

Vediamo però, a scopo didattico, come si poteva risolvere in maniera generale.

Per prima cosa studiamo il segno degli argomenti dei valori assoluti.

- $x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$
- $-2x + 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2$

Ovvero:



$$\text{Quindi: } \begin{cases} |x+1| = -x-1 \ \text{ e } \ |-2x+4| = -2x+4 & \text{per } \ x \in (-\infty, -1] \\ |x+1| = x+1 \ \text{ e } \ |-2x+4| = -2x+4 & \text{per } \ x \in (-1, 2] \\ |x+1| = x+1 \ \text{ e } \ |-2x+4| = 2x-4 & \text{per } \ x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Dunque l'equazione si trasforma nello studio dell'unione tra i seguenti tre sistemi.

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1] \\ -(x+1) + (-2x+4) = -3 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x \in (-1, 2] \\ (x+1) + (-2x+4) = -3 \end{cases}$$

$$\bigcup \quad \begin{cases} x \in (2, +\infty) \\ (x+1) - (-2x+4) = -3 \end{cases}$$

Per semplicità identificheremo i tre sistemi, rispettivamente con le lettere **A**, **B** e **C**.
Risolviamo quindi ciascun sistema separatamente.

(A) Risolviamo $-(x+1) + (-2x+4) = -3$:

$$-(x+1) + (-2x+4) = -3 \quad \Rightarrow \quad -3x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Considerando però che $2 \notin (-\infty, -1]$, ovvero la soluzione non è accettabile, l'insieme delle soluzioni dell'equazione risulta:

$$\boxed{S_A = \varnothing}$$

(B) Risolviamo $(x+1)+(-2x+4)=-3$:

$$(x+1)+(-2x+4)=-3 \quad\Rightarrow\quad -x+8=0 \quad\Rightarrow\quad x=-8$$

Considerando però che $-8 \notin (-1,2]$, ovvero la soluzione non è accettabile, l'insieme delle soluzioni dell'equazione risulta:

$$\boxed{S_B=\varnothing}$$

(C) Risolviamo $(x+1)-(-2x+4)=-3$:

$$(x+1)-(-2x+4)=-3 \quad\Rightarrow\quad 3x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

Considerando però che $0 \notin (2,+\infty)$, ovvero la soluzione non è accettabile, l'insieme delle soluzioni dell'equazione risulta:

$$\boxed{S_C=\varnothing}$$

Dunque l'insieme delle soluzioni dell'equazione iniziale risulta:

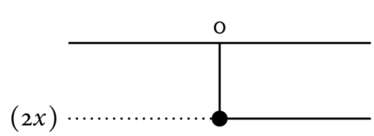
$$\boxed{S=S_A\cup S_B\cup S_C=\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing=\varnothing}$$

4. Consideriamo la seguente disequazione: $\boxed{\mathbf{|2x|\geq 4x^2-2}}$

Per prima cosa studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto.

$$2x\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq 0$$

Ovvero:



Dunque l'equazione si trasforma nello studio dell'unione tra i seguenti due sistemi.

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 2x\geq 4x^2-2 \end{cases} \quad\bigcup\quad \begin{cases} x<0 \\ -2x\geq 4x^2-2 \end{cases}$$

Per semplicità identificheremo i due sistemi, a partire da sinistra, con le lettere **A** e **B**.
Risolviamo quindi ciascun sistema separatamente.

(A) Risolviamo $2x\geq 4x^2-2$:

$$2x\geq 4x^2-2 \quad\Longleftrightarrow\quad 4x^2-2x-2\leq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x^2-x-1\leq 0$$

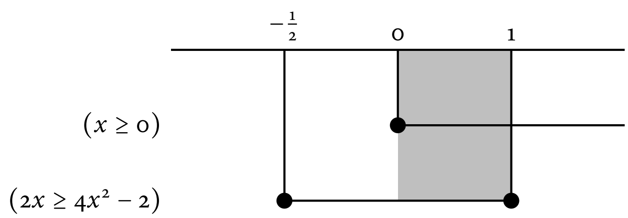
Dato che le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{4}{4}=1 \end{cases}$$

E considerato il verso della disequazione, le sue soluzioni sono:

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Calcoliamo infine le intersezioni tra i risultati delle due disequazioni.



Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione **A** è:

$$\boxed{S_A = [0, 1]}$$

(B) Risolviamo $-2x \geq 4x^2 - 2$:

$$-2x \geq 4x^2 - 2 \iff 4x^2 + 2x - 2 \leq 0 \iff 2x^2 + x - 1 \leq 0$$

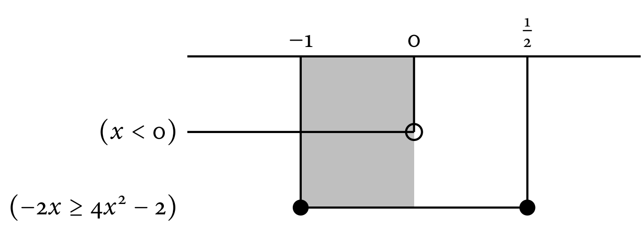
Dato che le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4}{4} = -1 \\ x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E considerato il verso della disequazione, le sue soluzioni sono:

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

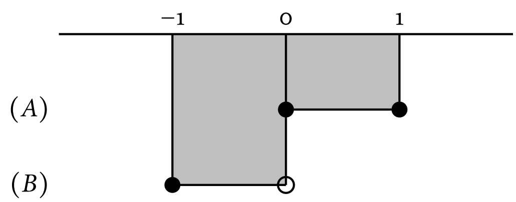
Calcoliamo infine le intersezioni tra i risultati delle due disequazioni.



Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione **B** è:

$$\boxed{S_B = [-1, 0)}$$

Dunque **l'insieme delle soluzioni della disequazione**, dato dall'**unione delle soluzioni dei due sistemi**, come si vede dal seguente grafico



risulta:

$$\boxed{S = S_A \cup S_B = [0,1] \cup [-1,0) = [-1,1]}$$

5. Consideriamo la seguente disequazione: $\boxed{\mathbf{2x + 5 - |x - 1| > 2(1 + x)}}$

Osserviamo che si può risolvere utilizzando la regola:

$$|\mathbf{f(x)}| < \mathbf{k} \quad \Longleftrightarrow \quad -\mathbf{k} < \mathbf{f(x)} < \mathbf{k} \qquad \text{con } \mathbf{k > 0}$$

Infatti semplificandola otteniamo:

$$2x + 5 - |x - 1| > 2(1 + x) \iff \cancel{2x} + 5 - |x - 1| > 2 + \cancel{2x}) \iff |x - 1| < 3$$

Dunque:

$$|x - 1| < 3 \iff -3 < x - 1 < 3 \iff -2 < x < 4$$

Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è:

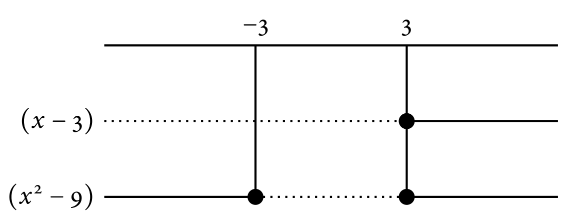
$$\boxed{S = (-2, 4)}$$

6. Consideriamo la seguente disequazione: $\boxed{\mathbf{|x - 3| \geq |x^2 - 9|}}$

Per prima cosa studiamo il segno degli argomenti dei valori assoluti.

- $x - 3 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 3$
- $x^2 - 9 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq -3 \vee x \geq 3$

Ovvero:



Dunque l'equazione si trasforma nello studio dell'unione tra i seguenti tre sistemi:

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ -x + 3 \geq x^2 - 9 \end{cases} \;\bigcup\; \begin{cases} -3 < x \leq 3 \\ -x + 3 \geq -x^2 + 9 \end{cases} \;\bigcup\; \begin{cases} x > 3 \\ x - 3 \geq x^2 - 9 \end{cases}$$

Per semplicità identificheremo i tre sistemi, a partire da sinistra, con le lettere **A**, **B** e **C**. Risolviamo quindi ciascun sistema separatamente.

(A) Risolviamo $-x+3 \geq x^2 - 9$:

$$-x+3 \geq x^2 - 9 \iff x^2 + x - 12 \leq 0$$

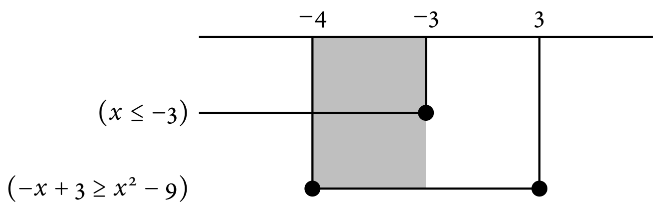
Dato che le soluzioni dell'equazione associata sono

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-8}{2} = -4 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

e considerato il verso della disequazione, le sue soluzioni sono:

$$-4 \leq x \leq 3$$

Calcoliamo infine le intersezioni tra i risultati delle due disequazioni:



Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione **A** è:

$$\boxed{S_A = [-4, -3]}$$

(B) Risolviamo $-x+3 \geq -x^2 + 9$:

$$-x+3 \geq -x^2 + 9 \iff x^2 - x - 6 \geq 0$$

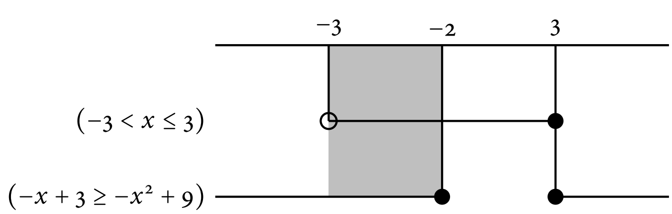
Dato che le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

E considerato il verso della disequazione, le sue soluzioni sono:

$$x \leq -2 \vee x \geq 3$$

Calcoliamo infine le intersezioni tra i risultati delle due disequazioni.



Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione **B** è:

$$\boxed{S_B = (-3, -2] \cup \{3\}}$$

(C) Risolviamo $x - 3 \geq x^2 - 9$:

$$x - 3 \geq x^2 - 9 \iff x^2 - x - 6 \leq 0$$

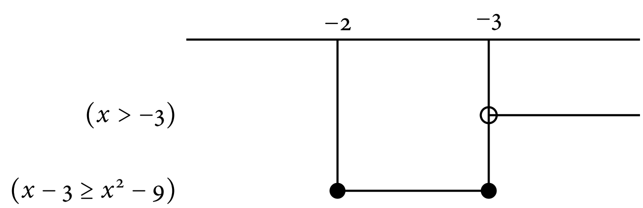
Dato che le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

E considerato il verso della disequazione, le sue soluzioni sono:

$$-2 \leq x \leq 3$$

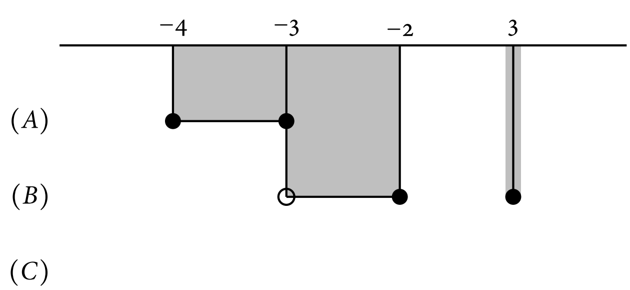
Calcoliamo infine le intersezioni tra i risultati delle due disequazioni.



Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione **C** è:

$$\boxed{S_C = \varnothing}$$

Dunque **l'insieme delle soluzioni della disequazione**, dato dall'**unione delle soluzioni dei tre sistemi**, come si vede dal seguente grafico



risulta:

$$\boxed{S = S_A \cup S_B \cup S_C = [-4, -3] \cup (-3, -2] \cup \{3\} \cup \varnothing = [-4, -2] \cup \{3\}}$$

Esercizi Unità 6

1. Assegna un valore Vero/Falso alle seguenti affermazioni:

A. $|-x-2| = x+2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

B. $|b| = -b$ per tutti i $b < 0$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

C. $|x^3 - 1| > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

D. $|x| = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

E. $|a+b| = |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

2. Considerando la seguente disequazione con valore assoluto

$$|x-2| < 1$$

indica quale affermazione è corretta.

A. La disequazione ha una sola soluzione.

B. La disequazione ha un infinite soluzioni.

C. La disequazione ha due soluzioni.

D. La disequazione non ha nessuna soluzione.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

3. Considerando la seguente espressione con un simbolo mancante

$$-|2x| \ldots |-x-1|$$

indica quali delle seguenti affermazioni sono corrette.

A. È possibile sostituire il simbolo $<$ al posto dei puntini.

B. È possibile sostituire il simbolo $\geq$ al posto dei puntini.

C. È possibile sostituire il simbolo $=$ al posto dei puntini.

D. È possibile sostituire ai puntini più simboli, dipendentemente dal valore della x.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

4. Data la seguente disequazione con valore assoluto

$$|3x| + 5x < 3\left(4 + \frac{5}{3}x\right)$$

indica quale dei seguenti insiemi ne è il corretto insieme delle soluzioni.

A. $S = (-\infty, 4)$

B. $S = (-4, 4)$

C. $S = [-4, +\infty)$

D. $S = [-4, 4]$

E. $S = \emptyset$

5. Data la seguente disequazione con valore assoluto

$$3x > |x + 2| - x + 1$$

indica quale dei seguenti insiemi ne è il corretto insieme delle soluzioni.

A. $S = (-\infty, -2]$

B. $S = [-2, 1)$

C. $S = [-2, +\infty)$

D. $S = (1, +\infty)$

E. $S = \emptyset$

6. La disequazione con valore assoluto

$$|3x - 6| > 0$$

ha per soluzione:

A. $x > 2$

B. $x \geq 2$

C. $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}$

D. $\forall x \in \mathbb{R}$

E. tutti gli x reali.

7. Considerando la seguente disequazione con valore assoluto

$$|x^2 - 5x| + |x| \leq 0$$

indica quale affermazione è corretta:

A. La disequazione ha una sola soluzione.

B. La disequazione ha un infinite soluzioni.

C. La disequazione ha due soluzioni.

D. La disequazione non ha nessuna soluzione.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

Parte E – FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Daniele Buratta, Dialogare: *compendio di matematica*, ISBN 978-88-6453-483-1 (online), CC BY-NC-ND 4.0 IT,
2017 Firenze University Press

Unità 1

Funzione esponenziale. Equazioni e disequazioni esponenziali

In questa Unità introdurremo la **funzione esponenziale** e vedremo come risolvere alcune tipologie di **equazioni e disequazioni esponenziali**.

È essenziale che tu ricordi bene le proprietà delle potenze (per ripassare vedi l'Unità 3 della parte A «Potenze e loro proprietà»), ed è inoltre importante che tu sappia risolvere equazioni e disequazioni numeriche intere e sistemi con esse (per ripassare vedi le Unità 1-5 della parte D) prima di addentrarti nella lettura di questa Unità.

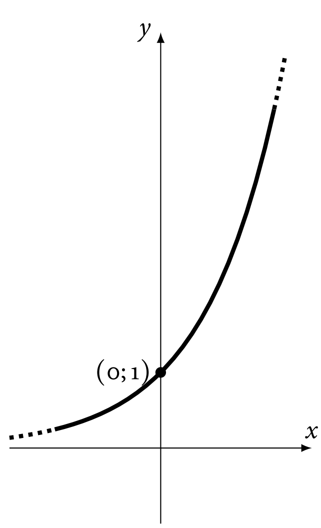
1. Definizione di funzione esponenziale

Si chiama funzione esponenziale ogni funzione del tipo:

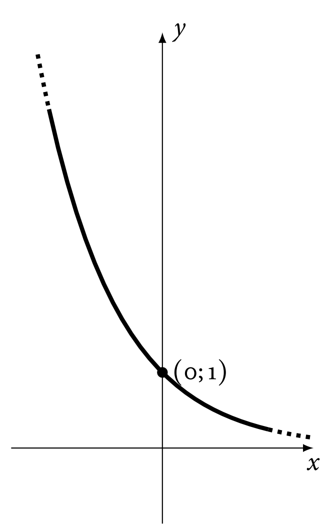
$$\mathbf{y = a^x} \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Osserviamo ora il grafico della funzione nei seguenti tre casi.

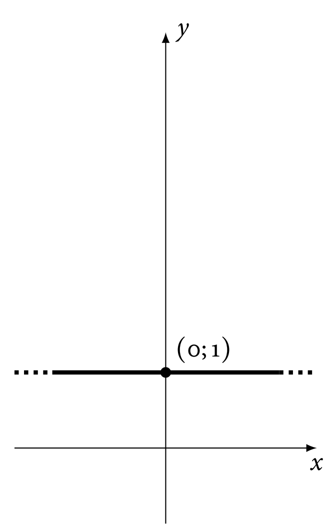
$\boxed{\mathbf{a > 1}}$



$\boxed{\mathbf{0 < a < 1}}$



$\boxed{\mathbf{a = 1}}$



Osservazioni:

- La funzione esponenziale è **sempre positiva** e in particolare **non si annulla mai**.
  Ovvero $\boxed{a^x > 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e in particolare $\boxed{a^x \neq 0}$ $\forall x$. Dunque il suo **codominio** è $\mathbb{R}^+$, mentre il suo **dominio** è $\mathbb{R}$.
- La funzione esponenziale è: $\begin{cases} \text{crescente} & \text{se } a>1 \\ \text{decrescente} & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$
- La funzione esponenziale è **biettiva**.
- La funzione esponenziale ha come **unico punto di intersezione con l'asse y** il punto $(0;1)$.
  Equivalentemente si può dire che il punto $(0;1)$ appartiene sempre al grafico della funzione esponenziale, ovvero $\boxed{f(0) = a^0 = 1}$ $\forall a \in \mathbb{R}^+$.

2. Equazioni e disequazioni esponenziali

2.1. Definizione di equazione esponenziale

Un'equazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Consideriamo per il momento solo l'equazione esponenziale più semplice:

$$\mathbf{a^x = b} \quad \text{con} \quad a > 0$$

Si possono avere i seguenti tre casi:

- **Equazione esponenziale impossibile**
  Come abbiamo già visto a^x non può mai essere negativo o nullo, dunque l'equazione risulta impossibile nei seguenti casi:
  - Se $b \leq 0$ ad **esempio** $3^x = -5$ è impossibile.
  - Se $a = 1$ e $b \neq 1$ ad **esempio** $1^x = \frac{3}{4}$ è impossibile.
- **Equazione esponenziale indeterminata**
  Se $a = 1$ e $b = 1$, l'equazione ha infinite soluzioni; ovvero
  $$1^x = 1$$
  è indeterminata, perché è verificata per ogni valore reale di x.
- **Equazione esponenziale determinata**
  Se infine a e b sono valori reali positivi e $a \neq 1$, l'equazione $a^x = b$ ammette sempre una e una sola soluzione.

  Ciononostante non è sempre immediato trovare tale soluzione. Vedremo un metodo generale nell'Unità 2 della parte D «Funzione logaritmica. Equazioni e disequazioni logaritmiche».

  È comunque possibile risolvere l'equazione in modo immediato se si riescono a scrivere a e b come potenze aventi la stessa base.

Esempio: Risolviamo $\boxed{9^x = \frac{1}{3}}$

$9^x = \frac{1}{3}$ Per prima cosa scriviamo 9 come potenza quadrata di 3 e $\frac{1}{3}$ come l'inverso di 3.

$(3^2)^x = 3^{-1}$ Svolgiamo la potenza di potenza a I membro ed otteniamo:

$3^{2x} = 3^{-1}$ Osservando infine che se due potenze con la stessa base sono uguali allora devono avere anche lo stesso esponente. Si ottiene quindi:

$2x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

Anche nel caso di equazioni esponenziali più complesse è spesso possibile ricondursi a quanto visto nell'ultimo esempio, ovvero ad un'**uguaglianza tra potenze con la stessa base**.

Un'altra tipologia di equazioni facilmente risolvibili è quella dell'**utilizzo di un'incognita ausiliaria**.

2.1.1. Esempi di svolgimento di equazioni esponenziali

- **Risoluzione attraverso uguaglianza tra potenze con la stessa base**

Risolviamo $\boxed{3^{x+1} - 2^x = 2^{x+2} - 3^{x-1}}$

$3^{x+1} - 2^x = 2^{x+2} - 3^{x-1}$ Per prima cosa portiamo le potenze con la stessa base allo stesso membro.

$3^{x+1} + 3^{x-1} = 2^{x+2} + 2^x$ Scomponiamo ora le potenze.

$3^x \cdot 3^1 + 3^x \cdot 3^{-1} = 2^x \cdot 2^2 + 2^x$ Raccogliamo i fattori comuni.

$3^x\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 2^x(4 + 1)$ Spostiamo a primo membro i termini con la x e a secondo quelli senza.

$3^x : 2^x = 5 : \frac{10}{3}$ A primo membro applichiamo la proprietà di divisione tra potenze con lo stesso esponente e a secondo svolgiamo la divisione.

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ Osservando infine che ho due potenze con la stessa base (ricordo che la frazione a II membro equivale ad una potenza con la stessa base ed esponente 1), uguagliamo gli esponenti per ottenere la soluzione.

$x = 1$

- **Risoluzione mediante l'utilizzo di una variabile ausiliaria**

  Risolviamo $\boxed{5 \cdot 4^x = 14 - 4^{2x}}$

  $5 \cdot 4^x = 14 - 4^{2x}$ Osserviamo che l'incognita appare solo ad esponente di potenze di base 4 e che una è il quadrato dell'altra. Quindi poniamo $\mathbf{t} = \mathbf{4^x}$, da cui segue che $t^2 = 4^{2x}$, e applichiamo la sostituzione.

  $5t = 14 - t^2$ Riportiamo quindi l'equazione di secondo grado in forma normale e calcoliamo Δ ed eventuali soluzioni.

  $$t^2 + 5t - 14 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 25 + 56 = 81 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \begin{cases} t_1 = \frac{-5+9}{2} = 2 \\ t_2 = \frac{-5-9}{2} = -7 \end{cases}$$

  Dunque si ha che:

  - $t = 2 \iff 4^x = 2 \iff 2^{2x} = 2 \iff 2x = 1 \iff x = \dfrac{1}{2}$
  - $t = -7 \iff 4^x = -7$ **equazione impossibile** poiché una funzione esponenziale non è mai negativa.

  Quindi l'equazione ha come unica soluzione $x = \dfrac{1}{2}$.

2.2. Definizione di disequazione esponenziale

Una disequazione si dice esponenziale quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Nelle disequazioni esponenziali, a differenza delle equazioni, c'è da ricordarsi quanto segue:

- Se $\boxed{a > 1}$ vale $x_1 > x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$
- Se $\boxed{0 < a < 1}$ vale $x_1 > x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$

Esempi:

1. Risolviamo $\boxed{4^x \geq \dfrac{1}{2}}$

   $4^x \geq \dfrac{1}{2}$ Per prima cosa scriviamo 4 come potenza quadrata di 2 e $\dfrac{1}{2}$ come l'inverso di 2.

   $(2^2)^x \geq 2^{-1}$ Svolgiamo la potenza di potenza a I membro ed otteniamo:

   $2^{2x} \geq 2^{-1}$ Osservando infine che le due potenze hanno la base maggiore di 1 allora possiamo scrivere:

   $2x \geq -1 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\dfrac{1}{2}$

2. Risolviamo $\boxed{\left(\frac{1}{25}\right)^x < 1}$

$\left(\frac{1}{25}\right)^x < 1$ Osserviamo che possiamo trasformare 1 in una potenza con la stessa base del termine a I membro elevata alla zero.

$\left(\frac{1}{25}\right)^x < \left(\frac{1}{25}\right)^0$ Dato quindi che le due potenze hanno la base uguale e compresa tra 0 e 1 otteniamo:

$x > 0$

Similmente a quanto visto per le equazioni, le tecniche di risoluzione, per risolvere disequazioni esponenziali, che si utilizzano più spesso sono: **ricondursi ad una diseguaglianza tra potenze con la stessa base** e **l'utilizzo di un'incognita ausiliaria**.

2.2.1. Esempi di svolgimento di disequazioni esponenziali

- **Risoluzione attraverso una disuguaglianza tra potenze con la stessa base**

Risolviamo $\boxed{3^x > \frac{8^{x+1}}{3}}$

$3^x > \frac{8^{x+1}}{3}$ Per prima cosa moltiplichiamo I e II membro per 3.

$3^{x+1} > 8^{x+1}$ Osserviamo ora che le potenze a I e II membro hanno entrambe lo stesso indice di potenza; possiamo dunque ridurre le due potenze ad una sola dividendo I e II membro per 8^{x+1} (che ricordo essere una potenza sempre diversa da zero e positiva, per cui non ci sono problemi di esistenza, né di cambio del verso).

$\left(\frac{3}{8}\right)^{x+1} > 1$ Considerando infine $1 = \left(\frac{3}{8}\right)^0$ e osservando ora che le potenze a I membro e II membro hanno stessa base minore di 1 allora possiamo scrivere:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{x+1} > \left(\frac{3}{8}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad x+1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -1$$

- **Risoluzione attraverso l'utilizzo di un'incognita ausiliaria**

Risolviamo $\boxed{\frac{2(2+16^x)}{4^x} \leq 9}$

NOTA: Nonostante sia presente una frazione non c'è bisogno di dare **C.E.** poiché la funzione esponenziale a denominatore ricordo essere strettamente positiva $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\frac{2(2+16^x)}{4^x} \leq 9$ Per prima cosa svolgiamo il prodotto a I membro e moltiplichiamo I e II membro per 4^x.

$4 + 2 \cdot 16^x \leq 9 \cdot 4^x$

Trasportiamo ora il termine a II membro al I e consideriamo $16^x = 4^{2x}$.

$4 + 2 \cdot 4^{2x} - 9 \cdot 4^x \leq 0$

Dato che l'incognita appare solo ad esponente di potenze di base 4 e che una è il quadrato dell'altra, poniamo $t = 4^x$, da cui segue che $t^2 = 4^{2x}$, e applichiamo la sostituzione.

$4 + 2t^2 - 9t \leq 0$

Riportiamo quindi la disequazione di secondo grado in forma normale, consideriamone l'equazione associata e calcoliamo Δ ed eventuali soluzioni.

$2t^2 - 9t + 4 \leq 0$

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 81 - 32 = 49 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \begin{cases} t_1 = \frac{9+7}{4} = 4 \\ t_2 = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dunque si ha che:

$$\frac{1}{2} \leq t \leq 4 \iff \frac{1}{2} \leq 4^x \leq 4 \iff 2^{2x} \geq 2^{-1} \quad \wedge \quad 4^x \leq 4^1 \iff$$
$$\iff 2x \geq -1 \quad \wedge \quad x \leq 1 \iff x \geq -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \leq 1$$

Quindi la soluzione della disequazione è: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

Esercizi Unità 1

1. Considerando la seguente funzione esponenziale

$$y = \left(\frac{b-4}{7-2b}\right)^x$$

indica per quali valori del parametro $b \in \mathbb{R}$ tale funzione assume significato.

A. $b < \frac{7}{2} \wedge b > 4$

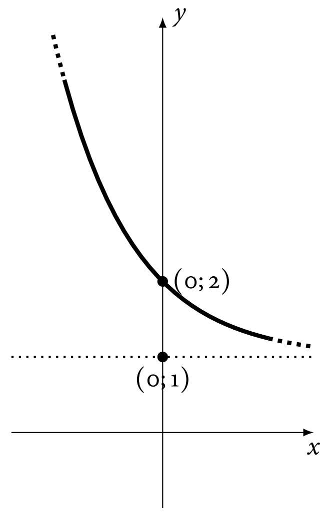
B. $\frac{7}{2} < b < 4$

C. $b > \frac{7}{2}$

D. Per ogni valore del parametro b.

E. Nessuno dei precedenti.

2. Indica a quali delle funzioni esponenziali proposte può corrispondere il grafico di seguito illustrato.



A. $y = 3^x + 2$

B. $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x + 1$

C. $y = 5^x - 1$

D. $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x + 2$

E. Nessuna delle precedenti.

3. Assegna un valore Vero/Falso alle seguenti affermazioni.

A. $2^x + 32 = 0$ ha come soluzione $x = 5$ $\boxed{V}\ \boxed{F}$

B. $3^x = \frac{1}{3}$ ha come soluzione $x = -1$ $\boxed{V}\ \boxed{F}$

C. $(-2)^x = 2$ ha come soluzione $x = -1$ $\boxed{V}\ \boxed{F}$

D. $y = x^{\frac{3}{2}}$ non è una funzione esponenziale $\boxed{V}\ \boxed{F}$

E. $5^x = (-5)^2$ non ha soluzioni reali $\boxed{V}\ \boxed{F}$

4. Data la seguente equazione esponenziale

$$4^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}}$$

indica, tra le seguenti, l'unica risposta corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{2\}$

B. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \left\{-\frac{1}{3}, 4\right\}$

C. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \left\{\frac{3}{5}\right\}$

D. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{1\}$

D. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \varnothing$

5. Data la seguente equazione esponenziale

$$5^x \cdot 9 - 5^{x+1} = 5^{2x+1} \cdot 4$$

indica, tra le seguenti, l'unica risposta corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{-1, 0\}$

B. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{0\}$

C. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{-1\}$

D. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{1\}$

D. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \varnothing$

6. Considerando la seguente disequazione esponenziale

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{9}{4}$$

indica quale affermazione è corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = [-2, +\infty)$

B. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = (-\infty, -2]$

C. La disequazione ha una sola soluzione.

D. La disequazione non ha nessuna soluzione.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

7. Considerando la seguente disequazione esponenziale

$$\frac{1}{4} \cdot 3^{x} + 3^{x+1} \leq -3^{x-1} + \frac{43}{4}$$

indica quale affermazione è corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = (-\infty, 1]$

B. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = (-\infty, 3]$

C. La disequazione ha una sola soluzione.

D. La disequazione non ha nessuna soluzione.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

Unità 2

Funzione logaritmica. Equazioni e disequazioni logaritmiche

In questa Unità ricorderemo la **definizione di logaritmo e le sue proprietà**. Introdurremo inoltre la **funzione logaritmica** e vedremo come risolvere alcune tipologie di **equazioni e disequazioni logaritmiche**.

È essenziale avere già una buona conoscenza della **funzione esponenziale** e saper risolvere semplici **equazioni e disequazioni esponenziali** (per ripassare vedi l'Unità 1 della parte E «Equazioni e disequazioni esponenziali»), prima di addentrarti nella lettura di questa Unità.

1. Definizione di logaritmo

Consideriamo la seguente equazione esponenziale.

$$a^x = b \quad \text{con} \quad a > 0, a \neq 1 \quad \text{e} \quad b > 0$$

Ricordiamo che tale equazione ammette una ed una sola equazione reale. Chiamiamo quindi il **logaritmo in base a di b** tale soluzione. Esso si scrive:

$$x = \log_a b$$

dove a e b sono detti rispettivamente «base» e «argomento» del logaritmo.

Riassumendo si ha che:

$$\boxed{x = \log_a b \iff a^x = b \quad \text{con} \quad a > 0, a \neq 1 \quad \text{e} \quad b > 0}$$

Ovvero dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$ si chiama **logaritmo in base a di b l'esponente** x **da assegnare alla base** a **per ottenere il numero** b.

Osservazioni:

- $\log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0\,, a \neq 1$ infatti $a^0 = 1 \quad \forall a > 0$
- $\log_a a = 1 \quad \forall a > 0\,, a \neq 1$ infatti $a^1 = a \quad \forall a > 0$
- $a^{\log_a b} = b \quad \forall a, b > 0\,, a \neq 1$ infatti, per definizione di logaritmo: $\log_a b = \log_a b$
- $x = y \iff \log_a x = \log_a y \quad \forall a, x, y > 0\,, a \neq 1$

1.1. Teorema

Dato il logaritmo $\log_a b$, all'aumentare dell'argomento b, il logaritmo:

- aumenta, se $a > 1$
- diminuisce, se $0 < a < 1$.

Nota:
Tramite l'utilizzo della definizione di logaritmo **si possono risolvere equazioni (e disequazioni) esponenziali in cui non è possibile ricondurci ad equazioni (o disequazioni) tra potenze con le stesse basi**.

Esempi:

1. Risolviamo $\boxed{3^x = 5}$. Data la definizione di logaritmo ottengo $x = \log_3 5$.
2. Risolviamo $\boxed{\left(\frac{7}{8}\right)^x < 9}$. Data la definizione di logaritmo e il teorema osservato precedentemente, ottengo $x > \log_{\frac{7}{8}} 9$.

1.2. Proprietà dei logaritmi e formula del cambiamento di base

1.2.1. Logaritmo di un prodotto

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla somma dei logaritmi, nella stessa base del logaritmo di partenza, dei singoli fattori.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad \text{con} \quad a, b, c > 0 \ \text{ e } \ a \neq 1$$

Esempio:
$\log_3 40 = \log_3 (5 \cdot 8) = \log_3 5 + \log_3 8$.

1.2.2. Logaritmo di un quoziente

Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla differenza fra i logaritmo, nella stessa base del logaritmo di partenza, del dividendo e del divisore.

$$\log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c \quad \text{con} \quad a, b, c > 0 \ \text{ e } \ a \neq 1$$

Esempio:
$\log_7 \frac{4}{9} = \log_7 (4 : 9) = \log_7 4 - \log_7 9$.

1.2.3. Logaritmo di una potenza

Il logaritmo di un numero positivo elevato a un esponente reale è uguale al prodotto di tale esponente per il logaritmo, nella stessa base del logaritmo di partenza, di quel numero positivo.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \quad \text{con} \quad a, b > 0, a \neq 1 \text{ e } n \in \mathbb{R}$$

Esempi:

- $\log_{\frac{1}{3}} 25 = \log_{\frac{1}{3}} 5^2 = 2 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 5$
- $\log_4 \sqrt[5]{2} = \log_4 2^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \log_4 2.$

Nota:
Nel caso in cui n sia un intero pari allora possiamo anche considerare valori di b negativi e si ha:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a |b| \quad \text{con} \quad a > 0\ a \neq 1\,,\ b \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } n \in \mathbb{Z} \text{ pari}$$

ovvero:

$$\begin{cases} \log_a b^n = n \cdot \log_a b & \text{se} \quad a > 0\ a \neq 1\,,\ b > 0 \text{ e } n \in \mathbb{Z} \text{ pari} \\ \log_a b^n = n \cdot \log_a (-b) & \text{se} \quad a > 0\ a \neq 1\,,\ b < 0 \text{ e } n \in \mathbb{Z} \text{ pari} \end{cases}$$

Esempi:

- $\log_5 (-3)^2 = 2 \cdot \log_5 [-(-3)] = 2 \cdot \log_5 3$
- $\log_2 x^4 = 4 \cdot \log_2 |x| \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{R}$

ATTENZIONE: $\boxed{log_a b^n \neq (\log_a b)^n}$

Infatti ad esempio: $\log_3 3^2 = 2 \neq 1 = 1^2 = (\log_3 3)^2$

1.2.4. Formula del cambiamento di base

Questa formula permette di sostituire la base di un logaritmo con una base a scelta (maggiore di 0 e diversa da 1), esprimendolo come rapporto di logaritmi nella nuova base.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{con} \quad a, b, c > 0 \ \text{ e } \ a, c \neq 1$$

Esempio:
$\log_4 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \dfrac{3}{2}.$

Notazioni:
Da ora in avanti si considereranno le seguenti notazioni:
Dati $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^+$ ed **e** numero di Nepero si considerano:

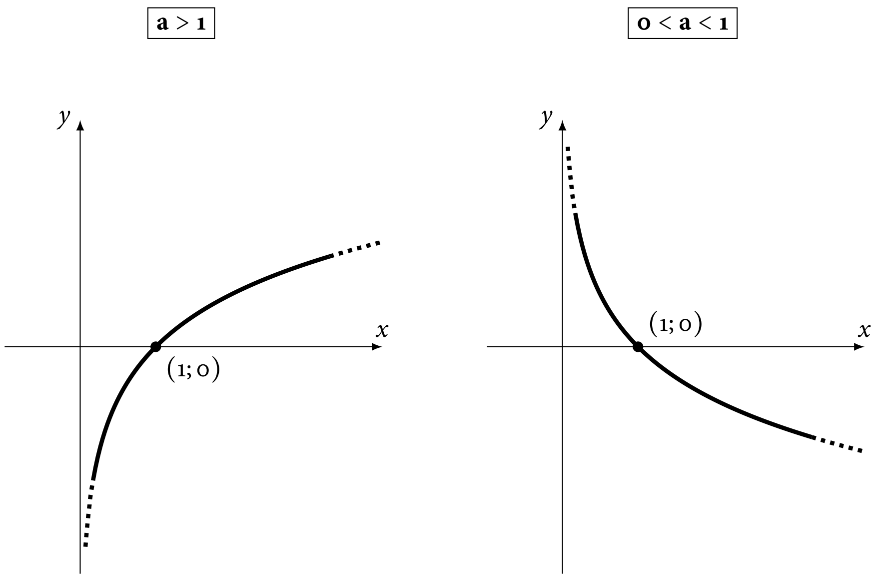
- $\boxed{\log a = \log_{10} a}$ Ovvero si userà $\log a$ al posto di $\log_{10} a$.
- $\boxed{\ln a = \log_e a}$ Ovvero si userà $\ln a$ al posti di $\log_e a$.

2. Definizione di funzione logaritmica

Si chiama **funzione logaritmica** ogni funzione del tipo:

$$\mathbf{y} = \log_{\mathbf{a}} \mathbf{x} \quad \text{con} \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Osserviamo ora il grafico della funzione nei seguenti due casi.



Osservazioni:

- La funzione logaritmica ha come **dominio** $\mathbb{R}^+$, come **codominio** $\mathbb{R}$.
- La funzione logaritmica è: $\begin{cases} \text{crescente} & \text{se } a>1 \\ \text{decrescente} & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$
- La funzione logaritmica è **biettiva**.
- La funzione logaritmica ha come **unico punto di intersezione con l'asse x** il punto $(1; 0)$. Equivalentemente si può dire che il punto $(1; 0)$ appartiene sempre al grafico della funzione logaritmica, ovvero: $\boxed{f(1) = \log_a 1 = 0}$ $\forall a \in \mathbb{R}^+$.

3. Equazioni e disequazioni logaritmiche

3.1. Definizione di equazione logaritmica

Un'equazione si dice logaritmica quando l'incognita compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

Consideriamo, in questa Unità, solo equazioni logaritmiche che si possono ricondurre ad uno dei seguenti casi:

- **Equazioni che possono essere ricondotte ad un'uguaglianza tra logaritmi con la stessa base**
  Ovvero equazioni che si ri possono ricondurre alla forma:

  $$\log_a A(x) = \log_a B(x)$$

  dove $a \in \mathbb{R}^+$ e con $A(x)$ e $B(x)$ indichiamo due funzioni nell'incognita x. (Ricordo che per la definizione di logaritmo si deve avere $A(x), B(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.)

Osservando dunque che **due logaritmi con la stessa base, sono uguali quando hanno gli argomenti uguali**, possiamo porre e risolvere la seguente equazione.

$$A(x) = B(x)$$

E controllare infine se le soluzioni soddisfano le condizioni di esistenza.

Esempio: Risolviamo $\boxed{\log_2 (x-2) - \log_2 (3-x) = 3}$

Per prima cosa diamo le **C.E.**:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2<x<3}$$

Risolviamo ora l'equazione.

$$\log_2 (x-2) - \log_2 (3-x) = 3$$

Riscriviamo la differenza tra logaritmi come logaritmo della divisione tra gli argomenti e 3 come $\log_2 2^3$.

$$\log_2 \frac{x-2}{3-x} = \log_2 8$$

Passando agli argomenti poniamo:

$$\frac{x-2}{3-x} = 8$$

Moltiplichiamo I e II membro per $3-x$.

$$x-2 = 24-8x$$

Portiamo a I membro i termini con la x e a II quelli senza e semplifichiamo.

$$9x = 26 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{26}{9}$$

E dato che $\frac{26}{9} \in (2, 3)$, la soluzione è accettabile.

- **Equazioni che si risolvono con l'ausilio di un'incognita ausiliaria**

Esempio: Risolviamo $\boxed{(\log x^2)^2 - 2\log x^3 + 2 = 0}$

Per prima cosa diamo le **C.E.**.

$$\begin{cases} x^2>0 \quad \forall x \neq 0 \\ x^3>0 \Rightarrow x>0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x>0}$$

Osserviamo che in questo caso non è possibile risolvere l'equazione riconducendosi ad un uguaglianza tra logaritmi con la stessa base poiché, a differenza del secondo logaritmo, il primo logaritmo è elevato al quadrato.

Osserviamo inoltre che gli argomenti dei logaritmi sono diversi. Possiamo però, applicando le proprietà dei logaritmi e semplici passaggi algebrici, ricondurre i due logaritmi allo stesso argomento.

$$2\log x^3 = 2 \cdot 1 \cdot \log x^3 = \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \log x^3 = 3\log x^{\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}} = 3\log x^2$$

Dunque risolviamo ora l'equazione così ottenuta.

$(\log x^2)^2 - 3\log x^2 + 2 = 0$

Dato che ora i logaritmi presenti hanno stessa base e stesso argomento, poniamo $t = \log x^2$, da cui segue che $t^2 = (\log x^2)^2$, e applichiamo la sostituzione.

$t^2 - 3t + 2 = 0$

Risolviamo quindi l'equazione di II grado ottenuta.

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \begin{cases} t_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \\ t_2 = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Dunque si ha che:

- $t = 2 \iff \log x^2 = 2 \iff x^2 = 10^2 \iff x = \pm 10$
- $t = 1 \iff \log x^2 = 1 \iff x^2 = 10^1 \iff x = \pm\sqrt{10}$

Per le C.E. le uniche due soluzioni accettabili sono dunque 10 e $\sqrt{10}$.

3.2. Definizione di disequazione logaritmica

Una disequazione si dice logaritmica quando contiene almeno una potenza con l'incognita nell'argomento.

Nelle disequazioni logaritmiche, a differenza delle equazioni, c'è da ricordarsi quanto segue.

- Se $\boxed{a > 1}$ vale $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 < x_2$
- Se $\boxed{0 < a < 1}$ vale $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1 > x_2$

dove $x_1, x_2 > 0$.

Esempi:

1. Risolviamo $\boxed{\log_3 x \geq \log_3 5}$

   Per prima cosa diamo le C.E.: $x > 0$
   Dato poi che i logaritmi hanno la stessa base maggiore di 1, si ha come soluzione:

   $$\log_3 x \geq \log_3 5 \iff x \geq 5$$

   E tale intervallo è accettabile per le C.E. .

2. Risolviamo $\boxed{\log_{\frac{1}{4}} x^2 > \log_{\frac{1}{4}} 4}$

   Notiamo che qui le C.E. corrispondono all'intero insieme dei numeri reali tranne lo 0. In questo caso, inoltre, i logaritmi hanno la stessa base compresa tra 0 e 1, dunque si ha:

   $$\log_{\frac{1}{4}} x^2 > \log_{\frac{1}{4}} 4 \iff x^2 < 4 \iff x^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < x < 2$$

   Pertanto la soluzione è: $x \in [-2, 0) \cup (0, 2]$.

Consideriamo, in questa Unità, similmente a quanto visto per le equazioni, solo disequazioni logaritmiche che si possono ricondurre ad uno dei seguenti casi:

- **Risoluzione attraverso una disuguaglianza tra logaritmi con la stessa base**

Risolviamo $\boxed{\log_{\sqrt{5}} x - 5\log_5 x \leq 3}$

Per prima cosa diamo le C.E.: $x > 0$

Riportiamo quindi tutti i termini presenti allo stesso logaritmo in base 5. Per il primo termine utilizziamo la formula del cambiamento di base, mentre per il termine a II membro la terza osservazione, derivata direttamente dalla definizione di logaritmo.

- $\log_{\sqrt{5}} x = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} = \dfrac{\log_5 x}{\log_5 5^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\log_5 x}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \log_5 x = \log_5 x^2$
- $3 = \log_5 5^3 = \log_5 125$

Dunque si ha:

$\log_5 x^2 - 5\log_5 x \leq \log_5 125$

Per la proprietà 3 dei logaritmi portiamo il 5 che moltiplica il logaritmo al II termine ad esponente dell'argomento.

$\log_5 x^2 - \log_5 x^5 \leq \log_5 125$

Per la proprietà 2 trasformiamo la differenza di logaritmi a I membro nel logaritmo del quoziente tra gli argomenti.

$\log_5 \dfrac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{5}3}} \leq \log_5 125$

Considerando che la base dei logaritmi è maggiore di 1 passiamo agli argomenti.

$\dfrac{1}{x^3} \leq 125 \iff x^3 \geq \dfrac{1}{125} \Rightarrow \boxed{x \geq \dfrac{1}{5}}$

Soluzione che risulta, date le C.E., accettabile.

- **Risoluzione attraverso l'utilizzo di un'incognita ausiliaria**

Risolviamo $\boxed{2\ln x - 3 \leq \dfrac{2\ln x + 3}{\ln x}}$

Per prima cosa diamo le **C.E.**:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{x > 0 \wedge x \neq 1}$$

Sviluppiamo ora la disequazione.

$2\ln x - 3 \leq \dfrac{2\ln x + 3}{\ln x}$

Trasportiamo i termini dal II membro a I membro portando entrambi allo stesso denominatore comune.

$\dfrac{2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2\ln x - 3}{\ln x} \leq 0$

Semplifichiamo i termini simili.

$\dfrac{2(\ln x)^2 - 5\ln x - 3}{\ln x} \leq 0$

Poniamo $t = \ln x$, da cui segue che $t^2 = (\ln x)^2$, e applichiamo la sostituzione.

$\dfrac{2t^2 - 5t - 3}{t} \leq 0$

Risolviamo quindi la disequazione fratta ottenuta, studiando separatamente numeratore e denominatore.

N) $2t^2 - 5t - 3 \geq 0$

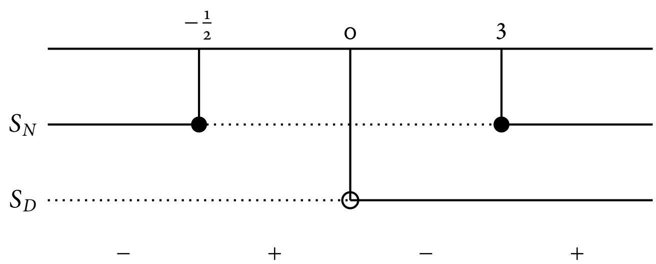
Risolvendo l'equazione di II grado associata $2t^2 - 5t - 3 = 0$ le soluzioni risultano $t_1 = 3$ e $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Dunque l'insieme delle soluzioni è: $S_N = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty)$

D) $t > 0$

Dunque l'insieme delle soluzioni è: $S_D = (0, +\infty)$

Quindi il segno della disequazione risulta:



Allora la soluzione della disequazione è:

$$t \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ 0 < t \leq 3$$

Tornando al logaritmo si ha:

$$\ln x \leq -\frac{1}{2} \ \vee \ 0 < \ln x \leq 3$$

Ovvero:

$$\ln x \leq \ln e^{-\frac{1}{2}} \ \vee \ \ln 1 < \ln x \leq \ln e^3$$

E **passando agli argomenti**:

$$x \leq \frac{1}{e^2} \ \vee \ 1 < x \leq e^3$$

Ponendo a sistema il risultato con le **C.E.** si ottiene infine la soluzione:

$$\boxed{0 < x \leq \frac{1}{e^2} \ \vee \ 1 < x \leq e^3}$$

Esercizi Unità 2

1. Il dominio della funzione logaritmica

$$y = \log \frac{x+1}{2x - x^2}$$

è:

A. $D = (-\infty, -1) \cup (0, 2)$

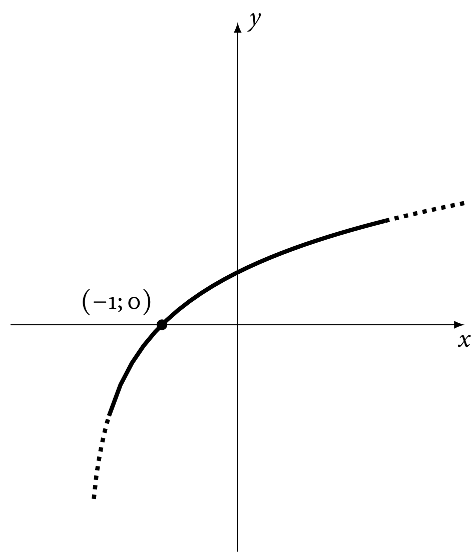
B. $D = [-1, 0] \cup [2, +\infty)$

C. $D = (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

D. $D = (-\infty, -1] \cup (0, 2)$

E. Nessuno dei precedenti.

2. Indica a quali delle funzioni logaritmiche proposte può corrispondere il grafico di seguito illustrato.



A. $y = \log_2 x + 2$

B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

C. $y = \log_2 (x + 2)$

D. $y = \log_{\frac{1}{2}} (x) - 2$

E. Nessuna delle precedenti.

3. Assegna un valore Vero/Falso alle seguenti affermazioni:

A. $y = \ln \dfrac{x}{x+1}$ e $y = \ln x + \ln(x+1)$ hanno lo stesso dominio. $\boxed{V}\,\boxed{F}$

B. $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

C. $\log_{27} 3 = -3$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

D. $\log_3(x+1) < 0$ è verificata per $x < 0$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

E. L'insieme delle soluzioni di $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) + 2 = 0$ è $S = \{-1\}$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

F. $2^x = 10 \;\rightarrow\; x = 5.$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

G. $\log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} 4 \leq 0 \;\rightarrow\; x \leq \dfrac{1}{4}.$ $\boxed{V}\,\boxed{F}$

4. Data la seguente equazione logaritmica

$$\log_2(x^2-1) = 2\log_2 3 + \log_2(1-x)$$

indica, tra le seguenti, l'unica risposta corretta.

A. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{-10, 1\}$

B. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{1\}$

C. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{-10\}$

D. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \{-1\}$

E. Il suo insieme delle soluzioni è: $S = \emptyset$

5. L'insieme delle soluzioni dell'equazione logaritmica

$$\log_{\frac{1}{3}} x - 3 = \frac{4}{\log_{\frac{1}{3}} x}$$

è:

A. $S = \{-1, 4\}$

B. $S = \{9, \sqrt[3]{3}\}$

C. $S = \left\{3, \dfrac{1}{81}\right\}$

D. $S = \emptyset$

E. Nessuno dei precedenti.

6. La seguente disequazione logaritmica

$$\log_3 x + 2\log_9 x - 2 < 0$$

ammette come soluzione:

A. $x < 3$

B. $0 < x < 3$

C. $x \geq 3$

D. La disequazione non ammette soluzione.

E. Nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

Soluzioni degli esercizi

Parte A

Unità 1

1A,C,E. Ricordo che una frazione si dice **ridotta ai minimi termini** quando numeratore e denominatore sono **primi tra loro**.
Le frazioni delle risposte **A** e **C** risultano già ridotte ai minimi termini, infatti entrambe presentano un numero primo a numeratore o denominatore, ma non un loro multiplo nell'altra posizione.
Si vede poi facilmente che le frazioni delle risposte **B** e **D** sono invece da ridurre infatti:

$$\frac{\cancel{12}^{2}}{\cancel{6}_{1}} = 2 \quad \text{e} \quad -\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{12}_{4}} = -\frac{3}{4}$$

.
Osserviamo infine la risposta **E**: qui né numeratore né denominatore sono numeri primi, ma non avendo fattori in comune (infatti $21 = 3 \cdot 7$ e $4 = 2^2$) sono primi tra loro, quindi la frazione risulta già ridotta ai minimi termini.
Dunque le risposte corrette sono **A**, **C** ed **E**.

2D. Per prima cosa riportiamo i numeri decimali in frazioni:

$$-2,\overline{6} = -\frac{26-2}{9} = -\frac{8}{3} \quad \text{e} \quad 1,5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Portiamo poi tutte le frazioni allo stesso **minimo denominatore comune** (in questo caso $m.c.m.(1,3,4) = 12$):

- $-3 = -\frac{36}{12}$
- $-2,\overline{6} = -\frac{8}{3} = -\frac{32}{12}$
- $-\frac{11}{4} = -\frac{33}{12}$
- $\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$
- $1,5 = \frac{3}{2} = \frac{18}{12}$

Confrontando i numeratori, le frazioni ottenute risultano così disposte in ordine crescente:

$$-\frac{36}{12}\,; \quad -\frac{33}{12}\,; \quad -\frac{32}{12}\,; \quad \frac{15}{12}\,; \quad \frac{18}{12}$$

Ovvero, riportandoci ai numeri iniziali:

$$-3\ ;\quad -\frac{11}{4}\ ;\quad -2,\overline{6}\ ;\quad \frac{5}{4}\ ;\quad 1,5$$

Dunque la risposta corretta risulta essere la **D**.

3A,C. Calcoliamo la **somma algebrica**:

$-\frac{1}{4}-\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{2}{3}=$ Per prima cosa togliamo la parentesi al secondo termine cambiando di segno alla frazione.

$=-\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=$ Portiamo ora tutte le frazioni allo stesso denominatore e sommiamo i numeratori.

$=\frac{-3+10+8}{12}=\frac{15}{12}$ E' quindi corretta la risposta **A**.

Osserviamo infine che se riduciamo la frazione ai **minimi termini** otteniamo: $\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$.
E' quindi corretta anche la risposta **C**.
Sono invece sbagliate le risposte **B** e **D** ed ovviamente la **E**.

4C. Calcoliamo l'espressione:

$\left(\frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{15}_{3}}\right):\left(-\frac{7}{12}\right)=$ Semplifichiamo le frazioni nella prima parentesi e trasformiamo la divisione in prodotto invertendo la frazione divisore.

$=\frac{\cancel{14}^{2}}{\cancel{9}_{3}}\cdot-\frac{\cancel{12}^{4}}{\cancel{7}_{1}}=$ Semplifichiamo.

$=-\frac{8}{3}$ Risulta quindi corretta la risposta **C**.

5A. E' immediato osservare che la risposta corretta è la **A**: infatti dato che l'indice di potenza è dispari le frazioni mantengono i loro segni e quindi la prima frazione risulta minore della seconda.

Unità 2

1A falsa. Infatti $36\% = \frac{36}{100} = 0,36$.

1B falsa. Infatti il 5% del 15% di 300 equivale a: $\frac{5}{100}\cdot\frac{15}{100}\cdot 300 = \frac{9}{4} \neq 4$.

1C falsa. La percentuale 100% equivale alla frazione $\frac{100}{100} = 1$, ovvero *il* 100% *di un numero è il numero stesso*!

1D vera. Infatti il 2% di 800 equivale a: $\frac{2}{100} \cdot 800 = 2 \cdot 8 = 16$.

1E falsa. Ricorriamo alle percentuali: l'affermazione equivale alla proporzione
$16 : 100 = 1 : 1$ che è ovviamente **falsa**.

2B. Analizziamo il problema per passi:
Chiamiamo $P(0)$, $P(6)$ e $P(12)$ rispettivamente il peso del bambino alla nascita, a 6 e a 12 settimane.
Dato che il peso iniziale del bambino è $3200g$ si ha che $P(0) = 3200$.
Dopo 6 settimane il suo peso è aumentato del 33%, ovvero:

$$P(6) = P(0) + 33\%P(0) = 3200 + \frac{33}{100} \cdot 3200 = 3200 + 1056 = 4256$$

Dopo altre 6 settimane il peso cresce ancora del 25%, ovvero:

$$P(12) = P(6) + 25\%P(6) = 4256 + \frac{25}{100} \cdot 4256 = 4256 + 1064 = 5320$$

Ovvero dopo 12 settimane il bambino pesa $5320g$. Dunque la risposta corretta è la **A**.

ATTENZIONE a non cadere nel **frequente errore** di sommare le percentuali prima di applicarle una ad una come abbiamo fatto. Ovvero:

il 33% del 25% di un numero NON EQUIVALE al $(25 + 33)\%$ di quel numero.

3A. Osserviamo che il numero di triangolini colorati è 8, mentre il numero di triangolini totali è 16. Dato che quelli colorati sono esattamente la metà del totale, la risposta esatta è il 50%, ovvero la risposta **A**.
Ma volendo ottenere il risultato con un **metodo generale**, avremmo dovuto impostare la seguente proporzione:

$$8 : 16 = x : 100$$

dove x corrisponde al valore percentuale cercato.
Per la **proprietà fondamentale delle proporzioni** si ottiene come previsto:

$$x = \frac{8 \cdot 100}{16} = 50$$

4E. L'unica risposta corretta è ovviamente la **E**, infatti se consideriamo la somma delle percentuali indicate otteniamo:

$$64\% + 15\% + 35\% = 114\%$$

La somma supera dunque supera il 100%, ma dato che stiamo parlando di una 'popolazione divisa in parti percentuali' **non è possibile superare il 100%**, ovvero la totalità della popolazione.

5C. Per prima cosa calcoliamo il 20% di 700€: $\frac{20 \cdot 700€}{100} = 140€$.
Sottraiamo quindi questa cifra ai 700 euro iniziali e otteniamo: 700€ − 140€ = 560€.
Dunque Mauro dovrà pagare, dopo l'applicazione dello sconto 560€.
La risposta corretta era dunque la **C**.

Osserviamo infine che il risultato si poteva ottenere anche impostando un'**unica espressione**:

$$700€ - 20\%700€ = 700€ - \frac{20 \cdot 700€}{100} = 700€ - 140€ = 560€$$

6C. Per prima cosa ricaviamoci lo sconto in euro: $1300€ - 955,5€ = 344,5€$.

Ricordo poi che, dati due numeri x e y, per calcolare che percentuale è l'uno rispetto all'altro, ad esempio x di y, bisogna impostare la seguente proporzione:

$$x : y = a : 100 \quad \text{dove } a \text{ è la quantità percentuale cercata.}$$

Dunque nel nostro caso:

$$344,5€ : 1300€ = a : 100 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{344,5€ \cdot 100}{1300€} = 26,5$$

La percentuale di sconto effettuata è quindi il $26,5\%$ e la risposta corretta è la **C**.

Unità 3

1A. Semplifichiamo l'espressione:

$[10 \cdot (10^3 : 10^2)^2]^2 =$ Per prima svolgiamo la **divisione tra potenze con lo stesso esponente** all'interno delle parentesi tonde.

$= [10 \cdot (10^{3-2})^2]^2 =$ Svolgiamo ora la **potenza di potenza** relativa alla potenza con base all'interno delle parentesi tonde.

$= [10 \cdot 10^2]^2 =$ Svolgiamo quindi il **prodotto tra potenze con la stessa base** all'interno delle parentesi e nuovamente la **potenza di potenza**:

$= [10^{1+2}]^2 = 10^{3 \cdot 2} = 10^6$

Dunque l'unica risposta corretta è la **A**, un «milione».

2C. Semplifichiamo l'espressione:

$[(-3)^5 : (3)^5 + 1]^0 =$ Per prima cosa osserviamo che si ha una **divisione tra potenze con lo stesso esponente**, dunque applichiamo la regola.

$= [(-3 : 3)^5 + 1]^0 =$

$= [(-1)^5 + 1]^0 =$ Dato che -1 è elevato a potenza dispari il segno rimane invariato.

$= [-1 + 1]^0 = 0^0$ Che **è un valore non definito**.

Dunque l'unica risposta corretta è la **C**.

ATTENZIONE: Un facile errore nel quale imbattersi è considerare che tutta l'espressione è elevata alla 0 e che quindi, 'indipendentemente' dalla base, il risultato sia 1.

3A. Osserviamo che, sia nel caso n sia pari, sia nel caso sia dispari, **il segno davanti al monomio risultante**

sarà positivo: infatti, nel caso n sia pari basta osservare che n è l'esponente della potenza più esterna, se invece n è dispari, entrambi i segni meno non sono influenzati dagli esponenti delle potenze e quindi si annullano quando si moltiplicano. Dunque la risposta **B** è sicuramente sbagliata.
Andiamo ora a svolgere i calcoli (supponiamo n pari):

$[-(-4xy^2)^n]^n =$ Sviluppiamo prima la potenza più interna. Ricordo che in una **potenza di potenza** gli esponenti si moltiplicano

$= [-4^n x^n y^{2n}]^n =$ Sviluppiamo ora la potenza esterna

$= 4^{n^2} x^{n^2} y^{2n^2}$

Il risultato della risposta **A** è dunque corretto e risulta essere l'unica risposta vera.

4B. Applichiamo la proprietà delle potenze '**prodotto e divisione di potenze con la stessa base**' alle potenze con base 2 e 3:

$$\frac{2^{12} \cdot 3^{20}}{2^{13} \cdot 3^{19}} \cdot 2^0 = 2^{12-13+0} \cdot 3^{20-19} = 2^{-1} \cdot 3^1$$

Osserviamo infine che l'esponente della potenza di base 2 è negativo; invertiamo quindi la base, ottenendo:

$$2^{-1} \cdot 3^1 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

L'unica risposta corretta è quindi la **B**.

5C. Innanzitutto possiamo escludere le soluzioni delle risposte **B** e **D**: infatti se l'esponente fosse uno dei due in questione l'espressione perderebbe significato poiché la base è negativa.
Osserviamo inoltre che la potenza a II membro presenta la frazione 'invertita' e quindi la risposta corretta è la **C** poiché l'indice di potenza dev'essere negativo.

Vediamo quindi, per completezza, i passaggi:

$\left[-\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}\right]^3 =$ Per prima cosa eliminiamo il segno '-' all'indice di potenza più esterno, 'invertendo' la base.

$= \left[-\left(-\frac{5}{3}\right)^2\right]^3 =$ Dato che l'indice della potenza interna è pari possiamo eliminare il segno '-' della base, mentre poiché l'indice di potenza più esterno è dispari possiamo trasportare il segno '-' più esterno al di fuori della parentesi.

$= -\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^3 =$ Moltiplichiamo infine i due indici di potenza per la proprietà **potenza di una potenza**.

$= -\left(\frac{5}{3}\right)^6$

6A,C. Svolgiamo i passaggi:

$\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} =$ Dato che si ha una **potenza di potenza**, moltiplichiamo gli esponenti.

$= 2^{\frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3}} =$ Semplifichiamo.

$= 2^{\frac{1}{3}} =$ Dato che si ha una **potenza di indice razionale**, il denominatore dell'indice di potenza corrisponde all'indice della radice della base, quindi possiamo scrivere:

$= \sqrt[3]{2}$

Dunque **A** è una risposta corretta, mentre la **B** e la **D** sono sbagliate.
Osserviamo però che anche la **C** è corretta, poiché equivalente alla risposta **A**, infatti:

$$\sqrt[12]{2^4} = 2^{\frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{12}_{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

7B. Svolgiamo i passaggi:

$2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{4}{3}} =$	Dato che si ha un **prodotto di potenze** con la stessa base, sommiamo gli esponenti.
$= 2^{\frac{1}{4}+\frac{4}{3}} =$	Sommiamo le frazioni ad esponente.
$= 2^{\frac{19}{12}} =$	Dato che si ha una **potenza di indice razionale**, il denominatore dell'indice di potenza corrisponde all'indice della radice della base mentre il numeratore all'esponente della potenza, quindi possiamo scrivere:
$= \sqrt[12]{2^{19}}$	

Dunque la **B** risulta essere l'unica risposta corretta.

8C. Semplifichiamo l'espressione:

$(4^0 - 4)^{\frac{1}{4}} =$	Per prima cosa osserviamo che **la potenza con esponente** 0 **è equivalente ad** 1 (ovviamente a meno che la base sia diversa da zero, poiché ricordo che, nel caso, la scrittura 0^0 **perde di significato**). Semplifichiamo quindi all'interno delle parentesi.
$= (-3)^{\frac{1}{4}} =$	Siamo ora nel caso di una **potenza con esponente razionale** e possiamo quindi riscrivere la potenza come una radice .
$= \sqrt[4]{-3}$	

Dato che abbiamo ottenuto una radice di indice pari, ma con base negativa, la radice (e quindi l'espressione) **non ha significato**.
Quindi l'unica risposta corretta è la **C**.

Unità 4

1A falsa. Infatti l'implicazione corretta è: $a = \sqrt{2} \;\Rightarrow\; a^2 = (\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; a^2 = 2$

1B falsa. Infatti: $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{2^3} = -2$

ATTENZIONE a non confondersi con le **radici di indice pari e argomento negativo**, le quali **non hanno significato**.

1C vera. Infatti dato che l'indice di radice è pari (è 2 per esattezza) allora c'è da porre come C.E. l'argomento maggiore od uguale a 0.

1D falsa. Poiché ricordo che $\sqrt[0]{a}$ **non ha significato** $\forall a \in \mathbb{R}$.

1E vera. Infatti per definizione di radice $\sqrt[1]{5} = 5 \iff 5 = 5^1$ che è vera.

2B. Per prima cosa osserviamo che **ogni radicale è ben definito**. Dunque la risposta **D** è sbagliata. Andiamo quindi a svolgere i calcoli:

$$\sqrt{\sqrt{16} + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{(-5)^2} + \sqrt[4]{1}} = \sqrt{4 - 2 + |-5| + 1} = \sqrt{8} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Dunque la risposta corretta è la **B**.

3A vera. Infatti: $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = \sqrt[5]{2^{5\cdot 2}} = 2^2 = 4$

3B falsa. Ricordo infatti che le **radici di indice pari sono sempre maggiori od uguali a zero**. Si ha quindi che: $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = +3$ (e non ± 3).

3C vera. Infatti: $\sqrt[3]{(-5)^3} = -\sqrt[3]{5^3} = -5$

3D falsa. Infatti: $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$

3E vera. Infatti: $-\sqrt[8]{1} = -1 = -\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{-1}$

4A. Per prima cosa diamo le **C.E.**:

- dal primo radicale si chiede: $2x - 10 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$
- dal secondo radicale invece: $x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

Dunque le **C.E.** sono: $\boxed{x > 5}$

Utilizziamo quindi la **proprietà invariantiva** riportando i radicali allo stesso indice (per poter poi svolgere il prodotto):

$$\sqrt{2x - 10} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x-5}} = \sqrt[2\cdot 3]{2^3(x-5)^3} \cdot \sqrt[3\cdot 2]{\frac{1^2}{(x-5)^2}} = \sqrt[6]{2^3(x-5)^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{(x-5)^2}}$$

Moltiplichiamo quindi i radicali e semplifichiamo:

$$\sqrt[6]{2^3(x-5)^3} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{(x-5)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3(x-5)^{\cancel{3}}}{\cancel{(x-5)^2}}} = \sqrt[6]{8(x-5)}$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **A**.

5B. Sviluppiamo la somma:

$$\begin{aligned}\sqrt{54} - a\sqrt{12} + \sqrt[4]{9a^4} - \sqrt{24} &= \sqrt{9}\sqrt{6} - a\sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt[4]{3^2}\sqrt[4]{a^4} - \sqrt{4}\sqrt{6} = \\ &= 3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}a + \sqrt{3}a - 2\sqrt{6} = \\ &= \sqrt{6} - \sqrt{3}a\end{aligned}$$

Dunque la risposta corretta è la **B**.

ATTENZIONE a non cascare nel facile errore di pensare che la somma dell'esercizio non sia possibile dato che i radicali presenti sono tutti diversi!
Bisogna sempre porre attenzione alla possibilità di ricondurrei radicali presenti, attraverso il **trasporto di un fattore dentro/fuori dal segno di radice** e la **proprietà invariantiva**, a **radicali simili**, come mostrato nello svolgimento dell'esercizio.

6C. Razionalizziamo la frazione utilizzando il prodotto notevole **somma per differenza**:

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{14}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{\sqrt{14}+\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}(\sqrt{14}+\sqrt{2})}{(\sqrt{14})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{6(\sqrt{28}+(\sqrt{2})^2)}{14-2} =$$

$$= \frac{\cancel{6}^1(\sqrt{4}\sqrt{7}+2)}{\cancel{12}_2} = \frac{2\sqrt{7}+2}{2} =$$

$$= \frac{\cancel{2}(\sqrt{7}+1)}{\cancel{2}} = \sqrt{7}+1$$

La risposta corretta è dunque la **C**.

Parte B

Unità 1

1A,B. La risposta **A** è un **monomio di grado 0**. La **B** è un monomio poiché riportata l'espressione in forma normale si ottiene:

$$\frac{4xz}{x^{-2}} = 4x^3z$$

La **C** non è un monomio perché ha una lettera al denominatore. La **D** infine non è un monomio poiché è una somma di due monomi.

2A,D. Sono in forma normale i monomi delle risposte **A** e **D**. Infatti non è un problema l'esponente negativo, né il segno meno alla parte numeri.
Non sono invece in forma normale i monomi delle risposte **B**, perché è una differenza tra due monomi, e della **C** perché, dopo dopo aver svolto il prodotto, è una somma sempre tra due monomi.

3D. Il grado del monomio è 4, infatti la somma degli esponenti delle lettere è: $3 + 1 = 4$.
E' importante porre attenzione sul fatto che **l'esponente della parte numerica non influenza il grado del monomio**.

4B. Semplifichiamo l'espressione:

$$\frac{1}{4}a^2y + \frac{1}{2}(bx^2 - a^2y) - \frac{1}{2}bx^2 = \frac{1}{4}a^2y + \cancel{\frac{1}{2}bx^2} - \frac{1}{2}a^2y - \cancel{\frac{1}{2}bx^2} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})a^2y = -\frac{1}{4}a^2y$$

dunque la risposta esatta è la **B**.

5C. Svolgiamo in primis il prodotto tra le parti numeriche:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \cdot (-8) = \left(\frac{3}{\cancel{4}_1}\right) \cdot (-\cancel{8}^2) = -6$$

Quindi si possono scartare le risposte **A**, **D** ed **E**.
Infine svolgendo il prodotto tra le parti letterali

$$a^2b \cdot ab = a^3b^2$$

osserviamo che la risposta esatta è quindi la **C**.

6D. Ricordo, in primis, che **in una divisione tra polinomi mi devo sempre assicurare che la parte letterale del divisore non sia nulla**. E dato che l'unica lettera che compare nel divisore è la lettera a, devo porre $a \neq 0$; dunque possiamo già affermare che le risposte **A** e **B** sono sbagliate, mentre è corretta la **D**.
Svolgiamo ora la divisione:

$$\left(\frac{1}{8}\right)a^5b^2 : \left(-\frac{3}{4}a^3\right) = \left(\frac{1}{8} : -\frac{3}{4}\right)a^{5-3}b^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\cancel{8}_2} \cdot -\frac{\cancel{4}^1}{3} \right) a^2 b^2 = -\frac{1}{6} a^2 b^2$$

L'equazione è corretta dunque la risposta **C** è falsa.

7B. Dato che l'indice della potenza più esterna è dispari si mantiene il segno della base, dunque la risposta **A** è sbagliata.
Inoltre considerando la potenza della potenza della sola lettera a si ha $(a^2)^3 = a^6$. Dunque possiamo affermare che anche la risposta **C** è sbagliata.
Vediamo infine il calcolo completo:

$$\left[-\left(\frac{1}{2} m^2 a \right)^2 \right]^3 = \left[-\frac{1}{2^2} m^{2\cdot 2} a^{1\cdot 2} \right]^3 = -\frac{1}{4^3} m^{4\cdot 3} a^{2\cdot 3} = -\frac{1}{64} m^{12} a^6$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **B**.

8D. Vediamo intanto MCD e mcm delle parte numeriche (ricordando che entrambi sono **sempre positivi**, indipendentemente dai segni dei valori):

$$MCD(-8, 12, 6) = 2 \quad \text{e} \quad mcm(-8, 12, 6) = 24$$

Dunque possiamo già scartare le risposte **B** e **C**. Vediamo ora MCD e mcm delle parti letterali:

$$MCD(xy^3, yz^2, x^2 z) = 1 \quad \text{e} \quad mcm(xy^3, yz^2, x^2 z) = x^2 y^3 z^2$$

Dunque la risposta corretta è la **D**.

Unità 2

1A,B. Alla risposta **A** si ha un monomio, dunque un particolare polinomio.
Alla **B** si ha un binomio (ovvero un polinomio formato dalla somma di due monomi).
Quindi le prime due risposte sono corrette, mentre non lo sono la **C** e la **D**, infatti: nella **C** si presenta una lettera a denominatore, mentre nella **D** non si ha un polinomio, bensì un prodotto tra un monomio ed un radicale.
La **E** è ovviamente sbagliata.

2C. L'unica risposta esatta è la **C**, infatti l'espressione è un polinomio in forma normale (o ridotta) poiché non ci sono monomi simili.
Alla risposta **B** non si ha un polinomio poiché al primo termine l'esponente è negativo. Nella risposta **A** il primo e il terzo termine sono simili (entrambi di grado 0). Infine alla risposta **D** non si ha proprio un polinomio, bensì un prodotto tra un monomio di grado 0 (un numero) e un radicale.

3A. La risposta esatta è la **A**. Infatti Il grado del polinomio è 4, che corrisponde al grado del termine di mezzo (ricordo che gli eventuali esponenti della parte numerica non hanno rilevanza nel grado del polinomio). Gli altri due termini hanno rispettivamente (a partire da sinistra) grado 2 e 3.

4B. Svolgiamo di seguito il calcolo sommando i monomi simili:

$$A(x) + B(x) - C(x) = ax + b + b - 3a - (\frac{2}{3}ax - 2b) = ax + 2b - 3a - \frac{2}{3}ax + 2b = \frac{1}{3}ax + 4b - 3a$$

Dunque la risposta esatta è la **B**.

5C. Svolgiamo il prodotto richiesto:

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= (y+3) \cdot (5x - xy) = y \cdot 5x + y \cdot (-xy) + 3 \cdot 5x + 3 \cdot (-xy) = \\ &= 5xy - xy^2 + 15x - 3xy = 2xy - xy^2 + 15x \end{aligned}$$

Dunque che la risposta esatta è la **C**.
Osserviamo infine che la risposta **A** non è in forma normale poiché ci sono monomi simili, mentre la **B** non lo è perché si è raccolta x da tutti i monomi riportando il polinomio ad un prodotto tra un polinomio ed un monomio.

6B. Semplifichiamo il secondo membro dell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} (x-1)(5x+3)+3 &= x \cdot 5x + x \cdot 3 + (-1) \cdot 5x + (-1) \cdot 3 + 3 = \\ &= 5x^2 + 3x - 5x - \cancel{3} + \cancel{3} = 5x^2 - 2x \end{aligned}$$

Dato che corrisponde al I membro **l'uguaglianza è in particolare un'identità** e quindi è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$.
Dunque la risposta **B** è corretta, mentre la **A**, la **C** e la **E** sono sbagliate.
L'affermazione **D** sarebbe corretta se il termine +3, che rappresenta il resto della divisione di $5x^2 - 2x$ per $x - 1$, fosse nullo, ma dato che non lo è, la risposta è sbagliata.

7A. Per prima cosa scomponiamo i polinomi:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x = \quad &= 3 \cdot x \cdot (x-1) \\ -2x^2 + 2 = -2 \cdot (x^2 - 1) = \quad &= -2 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \\ x^3 + x^2 = \quad &= x^2 \cdot (x+1) \end{aligned}$$

Osserviamo che MCD e mcm tra le parti numeriche sono 1 poiché è presente un numero negativo, dunque possiamo escludere le risposte **B**, **C** e **D**.

Ma vediamo ora MCD e mcm completi:

MCD $= 1$ Le parti letterali non hanno infatti nessun fattore in comune

mcm $= 1 \cdot x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1) = x^2\,(x^2 - 1)$

Dunque la risposta corretta è la **A**.

8E. Sostituiamo 2 alla variabile x:

$$p(2) = 3(2)^3 - 2(2)^2 + (2) - 1 = 24 - 8 + 2 - 1 = 17$$

Dunque la risposta corretta è la **E**.

Unità 3

1C. La risposta esatta è la **C**. Infatti il prodotto notevole in questione è un **quadrato di binomio** e il suo sviluppo è:

$$(-5a + 2b)^2 = (-5a)^2 + 2(-5a)(2b) + (2b)^2 = 25a^2 - 20a + 4b^2$$

2D,E. Per prima cosa sviluppiamo il **quadrato di trinomio**:

$$\begin{aligned}(2a + b - c)^2 &= (2a)^2 + (b)^2 + (-c)^2 + 2(2a)(b) + 2(2a)(-c) + 2(b)(-c) = \\ &= 4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab - 4ac - 2bc\end{aligned}$$

Osserviamo che corrisponde esattamente all'espressione della risposta **A**, mentre la risposta **D** differisce dallo sviluppo corretto per il segno del monomio $-c^2$ e per i doppi prodotti.
Anche la risposta **E** ovviamente differisce per la mancanza di tutti i prodotti misti.

Consideriamo ora il trinomio iniziale come binomio considerando prima i primi due monomi insieme e poi gli ultimi due e sviluppiamolo quindi come un **quadrato di binomio**:

$$((2a + b) - c)^2 = (2a + b)^2 + (-c)^2 + 2(2a + b)(-c) = (2a + b)^2 + -2(2a + b)c + c^2$$

$$(2a + (b - c))^2 = (2a)^2 + (b - c)^2 + 2(2a)(b - c) = 4a^2 + (b - c)^2 + 4a(b - c)$$

Osserviamo che i precedenti sviluppi corrispondono esattamente alle espressioni delle risposte **C** e **B**. Quindi le risposte corrette alla domanda sono la **D** e la **E**.

3A. Per prima cosa sviluppiamo il binomio come differenza di quadrati:

$$x^4 - 81 = (x^2 - 9)(x^2 + 9)$$

Osserviamo ora che il primo fattore è ancora scomponibile come differenza di quadrati

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

mentre il secondo è un fattore irriducibile (per provarlo basta considerarlo come quadrato di binomio, calcolare il Δ e osservare che è minore di zero). Dunque la scomposizione completa è la seguente:

$$x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

che corrisponde alla risposta **A**.

4B. Sviluppiamo il cubo di binomio:

$$(3x - y)^3 = (3x)^3 + (-y)^3 + 3(3x)^2(-y) + 3(3x)(-y)^2 = 27x^3 - y^3 - 27x^2y + 9xy^2$$

Notiamo che corrisponde alla risposta **B** che è dunque corretta. Dunque la risposta **D** e la **E** sono sbagliate. Notiamo infine che anche le risposte **A** e **C** sono sbagliate, poiché rimandano erroneamente a sviluppi

simili a quello della **differenza di cubi**.
Osserviamo comunque come i lori sviluppi differiscano dallo sviluppo prima calcolato:
$(3x-y)(9x^2-y^2) = 27x^3 - 3xy^2 - 9x^2y + y^3$
$(3x-y)(9x^2-3xy+y^2) = 27x^3 - 9x^2y + 3xy^2 - 9x^2y + 3xy^2 - y^3 = 27x^3 - y^3 - 18x^2y + 6xy^2$

5C. Osserviamo che l'espressione in questione è lo sviluppo di una **differenza di due cubi**, precisamente $8x^3a^6$ e y^3, che corrisponde a quella della risposta **C**, infatti:

$$8x^3a^6 - y^3 = (2xa^2-y)((2xa^2)^2 + (y)^2 + (2xa^2)(y)) = (2xa^2-y)(4x^2a^4 + y^2 + 2xa^2y)$$

Osserviamo che anche lo sviluppo della differenza di cubi della risposta **D** dà come secondo fattore lo stesso polinomio, ma al primo fattore i segni sono scambiati, infatti:

$$y^3 - 8x^3a^6 = (y-2xa^2)(4x^2a^4 + y^2 + 2xa^2y)$$

Quindi l'unica risposta corretta è la **C**.
É infine importante ricordarsi di non cadere nell'errore di considerare corretta la risposta **B**, ovvero nel confondere il falso quadrato presente come secondo fattore nella scomposizione della somma (e differenza) di cubi, con un vero e proprio quadrato di binomio.

6A,B,D. Per prima cosa scomponiamo l'espressione sviluppando il **cubo di binomio** e poi sottraiamo 8:

$$(x+2)^3 - 8 = x^3 + \cancel{8} + 3(x^2)(2) + 3(x)(4) - \cancel{8} = x^3 + 6x^2 + 12x = x(x^2+6x+12)$$

Osserviamo quindi che l'espressione iniziale corrisponde sia alla risposta **A** che alla risposta **D**, che sono quindi entrambe corrette.

Scomponiamo invece ora l'espressione utilizzando il prodotto notevole **differenza di cubi**:

$$(x+2)^3 - 8 = ((x+2)-2)((x+2)^2 + 2^2 + (x+2)(2))$$

che corrisponde alla risposta **B**, anch'essa corretta.

Osserviamo infine che la risposta **C** non corrisponde allo sviluppo dell'espressione in oggetto, ma al cubo di binomio $((x+2)-2)^3$, ed è dunque sbagliata.

Possiamo infine concludere che anche la risposta **E** è sbagliata.

7B,D. Osserviamo che il polinomio in questione è un trinomio e che il primo e l'ultimo termine sono rispettivamente i quadrati di $\pm 2a^2$ e ± 3, che quindi sono i candidati termini per il binomio del prodotto notevole **quadrato di binomio**:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$$

Notiamo inoltre che il secondo termine del trinomio è negativo, quindi affinché il doppio prodotto tra i termini del binomio lo sia, devono essere discordi. Sono dunque false le risposte **A** e **C**, mentre sono corrette sia la **B** che la **D**.

ATTENZIONE: Un errore molto comune è escludere la risposta D poiché il segno meno si presenta al primo termine e non al secondo. Infatti non importa quale dei due termini sia negativo, basta che siano di segno discorde.

8E. Osserviamo che il binomio in oggetto è dato dalla differenza di due cubi, il primo di $3b$, mentre il secondo di 2. Ricordiamo dunque il prodotto notevole **differenza di cubi**:

$$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Per la disposizione dei segni notiamo subito che le risposte **B**,**C** e **D** sono sbagliate.

É importante ricordare poi che il secondo fattore a II membro è detto «falso quadrato» poiché assomiglia al quadrato di binomio, con la differenza che presenta il termine *ab* invece del doppio prodotto.
Considerando quindi la risposta **A**, osserviamo che $9b^2 + 12b + 4$ è invece un vero e proprio quadrato, precisamente di $3b + 2$. Dunque anche questa risposta è sbagliata e la risposta corretta è infine la **E**, dato che la corretta scomposizione del polinomio è:

$$27b^3 - 8 = (3b - 2)(9b^2 + 6b + 4)$$

non presente tra le opzioni proposte.

9D. Osserviamo che l'espressione in questione è lo sviluppo della **differenza di due quadrati**, precisamente di x^{10} e a^8, infatti:

$$(x^5 + a^4)(x^5 - a^4) = (x^5)^2 - (a^4)^2 = x^{10} - a^8$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **D**.

Unità 4

1C. Scomponiamo il **particolare trinomio di II grado** $y^2 - y - 6$:

Cerchiamo due numeri $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} y_1 + y_2 = -1 \\ y_1 \cdot y_2 = -6 \end{cases}$

Le uniche coppie che danno come prodotto -6 sono $(-1, 6), (1, -6), (-2, 3)$ e $(2, -3)$.
Tra queste l'unica la cui somma sia -1 è $(2, -3)$ allora $y_1 = 2$ e $y_2 = -3$.
Dunque:

$$y^2 - y - 6 = (y + 2)(y - 3)$$

2B. Scomponiamo il **generico trinomio di II grado** $3x^2 - 7x + 4$:

Calcolo il delta: $\Delta = (-7)^2 - 4(3)(4) = 49 - 48 = 1 \geq 0$

e le soluzioni dell'equazione associata: $x_{1,2} = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (3)} = \dfrac{7 \pm 1}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{\cancel{8}^4}{\cancel{6}_3} = \dfrac{4}{3} \\ x_2 = \dfrac{\cancel{6}^1}{\cancel{6}_1} = 1 \end{cases}$

Quindi il polinomio si scompone così:

$$3x^2 - 7x + 4 = 3(x - \frac{4}{3})(x - 1)$$

La risposta esatta è dunque la **B**.

ATTENZIONE: Era possibile confondersi con la risposta **A**, poiché moltiplicando il fattore 3, per il primo dei due fattori rimanenti, si ottiene:

$$3(x - \frac{4}{3})(x - 1) = (3x - 4)(x - 1)$$

che differisce per un solo segno dall'espressione di quella risposta.

3D. Nessuna tra le coppie proposte è corretta, ovvero la risposta esatta è la **D**.
Scomponiamo infatti il **particolare trinomio di II grado** $x^2 - 6x - 16$:

Cerchiamo due numeri $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ t.c. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ x_1 \cdot x_2 = -16 \end{cases}$

Le uniche coppie che danno come prodotto -16 sono:
$(-1, 16), (1, -16), (-2, 8), (2, -8), (-4, 4)$ e $(4, -4)$.
Tra queste l'unica la cui somma sia -6 è $(2, -8)$, che dunque è la coppia cercata.
Ovvero il polinomio si scompone così:

$$x^2 - 6x - 16 = (x + 2)(x - 8)$$

Tale coppia NON è tuttavia presente come possibile soluzione.

Unità 5

1A. Per il **TEOREMA DEL RESTO** per ottenere il resto della divisione ci basta sostituire $\frac{1}{2}$ alla variabile del dividendo:

$$R = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \cancel{8}^1 \cdot \frac{1}{\cancel{8}_1} - \cancel{4}^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

Quindi la risposta esatta è la **A**.

2B. Applichiamo il **TEOREMA DEL RESTO** a tutte le divisioni in oggetto:

A. $R = (4)^2 - (4) - 12 = 16 - 4 - 12 = 0$

B. $R = (-2)^2 - (-2) - 12 = 4 + 2 - 12 = \mathbf{-6}$

C. $R = (2)^2 - (2) - 12 = 4 - 2 - 12 = -10$

D. $R = (-4)^2 - (-4) - 12 = 16 + 4 - 12 = 8$

Quindi la risposta esatta è la **B**.

3B. Applicando il **TEOREMA DEL RESTO** basta porre: $P(3) = 0$, ovvero:

$$(k - 1)(3)^2 + 2(3) - 3k = 0$$

$$9k - 9 + 6 - 3k = 0$$

$$6k - 3 = 0$$
$$k = \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{6}_2} = \frac{1}{2}$$

Quindi l'unica risposta esatta è la **B**.

4E. Ricordo che per il **TEOREMA DI RUFFINI**, il polinomio $p(y) = y^4 + y^3 - 7y^2 - y + 6$ è divisibile per un polinomio della forma $x + \alpha$ solo se

$$R = p(-\alpha) = 0 \quad \text{dove R indica il resto della divisione.}$$

Quindi basta provare per quali divisori il resto si annulla:

A. $R = p(2) = (2)^4 + (2)^3 - 7(2)^2 - (2) + 6 = 16 + 8 - 28 - 2 + 6 = 0$

B. $R = p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 7(-1)^2 - (-1) + 6 = 1 - 1 - 7 + 1 + 6 = 0$

C. $R = p(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 7(-3)^2 - (-3) + 6 = 81 - 27 - 63 + 3 + 6 = 0$

D. $R = p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 7(1)^2 - (1) + 6 = 1 + 1 - 7 - 1 + 6 = 0$

E. $R = p(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 7(-2)^2 - (-2) + 6 = 16 - 8 - 28 + 2 + 6 = \mathbf{-12 \neq 0}$

Dunque la risposta corretta è la **E**.

5C. Per prima cosa applico il **TEOREMA DEL RESTO**:

$$(2)^3 - 3(2)^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$$

Dunque il resto della divisione è -2 e quindi posso scartare le risposte **A B** e **D**.
Ma dato che due risposte presentano tale resto, utilizzo ora la **regola di Ruffini** per ricavare anche il quoziente:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & & & & \\ \hline & & & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & & \mathbf{2\cdot 1} & & \\ \hline & \mathbf{1} & & & \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & \mathbf{-3+2} & & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & \mathbf{2\cdot -1} & \\ \hline & 1 & -1 & \mathbf{0-2} & \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 & \mathbf{2\cdot -2} \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \mathbf{2-4=-2} \end{array}$$

Dunque $q(b) = b^2 - b - 2$ e $R = -2$, che corrispondono ai risultati della risposta **C**, che è quindi l'unica corretta.

6D. Generalmente, per scomporre un polinomio, è conveniente seguire lo schema in fondo all'Unità 6 della parte B «Scomposizione di polinomi»: vedere, in primis, se esistono raccoglimenti o prodotti notevoli che scompongono velocemente il polinomio e se nessuno di questi metodi risulta adatto (come in questo caso), ricorrere al **METODO DI RUFFINI**.

In questo specifico caso però, dato che i fattori che compongono le possibili scomposizioni sono tutti della forma $x - \alpha$ possiamo agire **al contrario**, partendo dalle risposte. Ovvero osserviamo che, per il **TEOREMA DI RUFFINI**, ognuno dei fattori $x - \alpha$ è effettivamente un **polinomio quoziente** (ovvero divide il polinomio di partenza) se $\mathbf{p}(\alpha) = 0$.
Dato inoltre che tra le soluzioni si presentano solo i seguenti polinomi:

$$x-1\,,\; x+2\,,\; x+3\,,\; x+1\,,\; x-2\,,\; x-3$$

andiamo a vedere quali tra questi è divisore del polinomio:

$$p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + (1) + 6 = 1 - 4 + 1 + 6 = 2 \neq 0 \qquad \Rightarrow (x-1) \text{ NON è un divisore di p(x)}$$

$$p(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 + (-2) + 6 = 8 - 16 - 2 + 6 = -4 \neq 0 \qquad \Rightarrow (x+2) \text{ NON è un divisore di p(x)}$$

$$p(-3) = (-3)^3 - 4(-3)^2 + (-3) + 6 = 27 - 36 - 3 + 6 = -6 \neq 0 \qquad \Rightarrow (x+3) \text{ NON è un divisore di p(x)}$$

$$p(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{(x+1) \text{ è un divisore di } p(x)}$$

$$p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + (2) + 6 = 8 - 16 + 2 + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{(x-2) \text{ è un divisore di } p(x)}$$

$$p(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + (3) + 6 = 27 - 36 + 3 + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \mathbf{(x-3) \text{ è un divisore di } p(x)}$$

Infine osservando che il grado del polinomio è 3, ed abbiamo trovato tre distinti divisori di primo grado, la sua unica scomposizione possibile è:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$$

Ovvero la risposta esatta è la **D**.

Unità 6

1B. Raccogliamo 2 ai primi due termini e $-x$ agli ultimi due:

$$6a - 2b - 3ax + bx = 2(3a - b) - x(3a - b) =$$

Raccogliamo infine $(3a - b)$ ad entrambi i termini ed otteniamo:

$$= (3a - b)(2 - x)$$

Dunque la risposta corretta è la **B**.

Osserviamo che la risposta **A** è un passaggio intermedio corretto, ma **non è** la scomposizione del polinomio.

2D. Analizziamo le risposte una ad una:

A. **No**, poiché al primo termine non è presente la lettera x.

B. **No**, poiché in nessuno dei due termine il coefficiente numerico è multiplo di 2.

C. **No**, poiché al secondo termine non è presente la lettera b.

D. **Si**, infatti: $4bx + 2b^2x^3 = 2bx(2 + bx^2)$

E. E' quindi falsa.

3B. Osserviamo che i polinomi delle risposte **A** e **D** sono entrambi scomponibili, infatti ad entrambi posso fare un **raccoglimento totale**:

- $ax - ay = a(x - y)$
- $xy - yz + 3y^2z = y(x - z + 3yz)$

Osserviamo inoltre che il polinomio della risposta **C** è una **differenza di quadrati**:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Mentre il polinomio della risposta **E** è un **quadrato di binomio**:

$$-10x + 25 + x^2 = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

Dunque la risposta corretta è la **B**.

4E. Per capire se e come il polinomio è scomponibile, potremmo seguire le indicazioni riportate nella tabella indicata a fine Unità; ma in questo caso conviene osservare che essendo una **somma di quadrati** è irriducibile. Dunque la risposta corretta è la **E**.

Potevamo arrivare alla risposta corretta anche ragionando per esclusione come segue:
Le risposte **B** e **D** sono sbagliate: infatti svolti i conti, le due espressione diventano polinomio di grado 6, mentre il polinomio dell'esercizio è di grado 4.
Inoltre sono sbagliate anche le risposte **A** e **C**, infatti il polinomio in questione non può essere lo sviluppo di un **quadrato di binomio** poiché sarebbe assente il doppio prodotto.

5D. Osserviamo che tutti i fattori in cui sono scomposti i polinomi delle domande **A, B, C** ed **E** sono di primo grado, quindi irriducibili.

Invece alla risposta **D** i termini sono di secondo grado. Ma mentre il secondo è una somma di valori positivi e non si può scomporre ulteriormente, il primo termine è una **differenza di quadrati**; perciò la scomposizione del polinomio in fattori irriducibili è:

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **D**.

6C. Scomponiamo il polinomio:

Per prima cosa riordiniamo il polinomio per potenze decrescenti della variabile a e facciamo un **raccoglimento totale** del fattore comune $3a^2$:

$$9a^5 - 81a^3 - 27a^2 + 3a^4 = 9a^5 + 3a^4 - 81a^3 - 27a^2 = 3a^2(3a^3 + a^2 - 27a - 9)$$

Facciamo ora un **raccoglimento parziale** tra i primi e gli ultimi due termini all'interno della parentesi:

$$3a^2(3a^3 + a^2 - 27a - 9) = 3a^2[a^2(3a + 1) - 9(3a + 1)] = 3a^2(3a + 1)(a^2 - 9)$$

Osserviamo ora che il terzo termine è una **differenza di quadrati**:

$$3a^2(3a + 1)(a^2 - 9) = 3a^2(3a + 1)(a - 3)(a + 3)$$

Dunque la risposta corretta è la **C**.

7B. Scomponiamo il polinomio:

Seguendo la tabella riassuntiva a fine Unità, ci accorgiamo che tale polinomio è scomponibile utilizzando il **metodo di Ruffini**; e precisamente risulta:

$$4x^3 - 7x - 3 = (x + 1)(4x^2 - 4x - 3)$$

Osserviamo ora che il secondo termine risulta scomponibile come **trinomio di secondo grado**:

$$(x + 1)(4x^2 - 4x - 3) = (x + 1)(2x - 3)(2x + 1)$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **B**.

Parte C

Unità 1

1A,C. Semplifichiamo il primo membro:

$(x-2)^2+(2x-1)(2x+1)=$	Sviluppiamo i due prodotti notevoli **quadrato di binomio** e **somma per differenza**.
$=x^2-4x+4+4x^2-1=$	Sommiamo i termini simili.
$=\boxed{5x^2-4x+3}$	

Semplifichiamo ora anche il secondo membro:

$4x^2+(x-3)(x-1)=$	Svolgiamo il prodotto dei termini tra parentesi.
$=4x^2+x^2-x-3x+3=$	Sommiamo i termini simili.
$=\boxed{5x^2-4x+3}$	

Dato che i due risultati sono uguali $\forall x\in\mathbb{R}$, l'uguaglianza è un'**identità**.
Dunque la risposta **A** è sicuramente corretta.
Osserviamo però che **anche** la risposta **C** è corretta, infatti -3 è una delle infinite soluzioni dell'equazione.
Tutte le altre risposte sono sbagliate.

2B,D. Per verificare se un valore è soluzione di un'equazione basta provare a sostituirlo all'incognita e controllare se si ottiene un'uguaglianza vera. Dunque verifichiamo i valori delle risposte:

[x=0]

$$0\cdot(6-(0)^2)-3\cdot(0)=4\cdot(0)\cdot((0)-2)^2-2 \iff$$

$$\iff 0-0=0-2 \iff 0=-2 \quad \textbf{FALSA}$$

Dunque la risposta **A** è sbagliata.

[x=1]

$$1\cdot(6-(1)^2)-3\cdot(1)=4\cdot(1)\cdot((1)-2)^2-2 \iff$$

$$\iff 5-3=4-2 \iff 2=2 \quad \textbf{VERA}$$

Dunque la risposta **B** è **corretta**.

[x=3]

$$3\cdot(6-(3)^2)-3\cdot(3)=4\cdot(3)\cdot((3)-2)^2-2 \iff$$

$$\iff -9-9=12-2 \iff -18=10 \quad \textbf{FALSA}$$

Dunque la risposta **C** è sbagliata.

[x=2]

$$2 \cdot (6 - (2)^2) - 3 \cdot (2) = 4 \cdot (2) \cdot ((2) - 2)^2 - 2 \iff$$

$$\iff 4 - 6 = 0 - 2 \iff -2 = -2 \quad \textbf{VERA}$$

Dunque la risposta **D** è **corretta**.

La risposta **E** è infine ovviamente sbagliata.

3E. Verifichiamo ad una ad una, se $x = 0$ è soluzione delle equazioni proposte:

A. $5 \cdot 0 - 7 \neq 0$ Dunque $x = 0$ non è soluzione dell'equazione.

B. Ricordo che **ogni volta che si presenta una lettera a denominatore bisogna assicurarsi che tale denominatore sia diverso da zero**. In questo caso quindi si deve porre $x \neq 0$, che esclude ovviamente $x = 0$ come soluzione.

C. $-0 = 3 - 0 \iff 0 = 3$
Dato che l'uguaglianza è falsa, $x = 0$ non è soluzione dell'equazione.

D. Per lo stesso motivo della risposta **B**, $x = 0$ non può esser soluzione di questa equazione.

Dato che nessuna delle precedenti equazioni accetta $x = 0$ come soluzione, l'unica risposta corretta è dunque la **E**.

4A falsa. Poiché l'incognita non compare mai a denominatore.

4B falsa. Infatti un'equazione letterale deve contenere almeno un parametro oltre all'incognita, ma non ci sono limiti di numero per i parametri.

4C falsa. Poiché un'equazione letterale intera non può avere l'incognita al denominatore, ma non ci sono restrizioni sui parametri.

4D vera. Infatti presenta l'incognita x anche a denominatore. Ricordo che se considerassimo a come incognita sarebbe invece un'equazione **intera**.

4E falsa. Poiché un'equazione intera non può avere l'incognita presente a denominatore, ma può avere a denominatore un parametro o un qualunque valore reale.

5A,B,D. Analizziamo le equazioni una ad una:

A. É **equivalente**, infatti:

$$5 \cdot (x + \frac{2}{3}) = 0 \cdot 5$$

Utilizziamo il **secondo principio di equivalenza** moltiplicando I e II membro per 5.

$$2 + 5(x + \frac{2}{3}) = +2$$

Utilizziamo ora il **primo principio di equivalenza** sommando a I e II membro 2. Abbiamo quindi ottenuto l'equazione della risposta **A**.

B. É **equivalente**, infatti:

$6 \cdot (x + \frac{2}{3}) = 0 \cdot 6$ — Utilizziamo il **secondo principio di equivalenza** moltiplicando I e II membro per 6.

$6x = -4$ — Utilizziamo ora la **regola del trasporto** per spostare 4, cambiandolo di segno, da I a II membro. Abbiamo quindi ottenuto l'equazione della risposta **B**.

C. NON è **equivalente**, infatti mentre l'equazione data ha come unica soluzione $x = -\frac{2}{3}$, l'equazione della risposta **C** ha soluzione $x = \frac{5}{6}$, infatti:

$4x = 4 - \frac{2}{3}$ — Semplifico i termini a II membro.

$\frac{1}{\cancel{4}_1} \cdot \cancel{4}^1 x = \frac{\cancel{10}^5}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2}$ — Utilizziamo il **secondo principio di equivalenza** moltiplicando I e II membro per $\frac{1}{4}$.

$x = \frac{5}{6}$

D. É **equivalente**, infatti:

$3 \cdot (x + \frac{2}{3}) = 0 \cdot 3$ — Utilizziamo il **secondo principio di equivalenza** moltiplicando I e II membro per 3.

$3x + 2 = 0$ — Abbiamo quindi ottenuto l'equazione della risposta **D**.

6D. Ricordo che un'equazione si dice in **forma normale** quando è nella forma

$$P(x) = 0$$

dove, in $P(x)$ sono stati sommati tutti i monomi simili.
Dunque non sono sicuramente in forma normale le equazioni delle risposte **A** e **C**.
Le equazioni delle risposte **B** e **D** sono invece entrambe in forma normale, ma solo quella della **D** equivale all'equazione data, infatti:

$2x + \frac{1}{3} = 2$ — Utilizziamo la **regola del trasporto** per spostare 2, cambiato di segno, da II e I membro.

$2x + \frac{1}{3} - 2 = 0$ — Semplifichiamo i termini simili.

$2x - \frac{5}{3} = 0$

Dunque la risposta corretta è la **D**.

7D. La risposta corretta è la **D**, ovvero il grado dell'equazione è 3, infatti è il grado massimo in cui si presenta la variabile x.

ATTENZIONE a non cadere nel comune errore di sommare al grado della parte letterale la potenza, se presente, della parte numerica; nel nostro caso l'errore potrebbe essere quello di pensare che il monomio $\left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2$ abbia grado 4.

Unità 2

1C. Risolviamo l'equazione.

$5(x+2) = 5x - 6$ Svolgiamo il prodotto a I membro.

$\cancel{5x} + 10 = \cancel{5x} - 6$ Per la **regola di cancellazione** eliminiamo $5x$ a I e II membro.

$10 = -6$

Dato che l'equivalenza ottenuta è falsa, l'equazione risulta **impossibile**.
Dunque la risposta corretta è la **C**.

2D. Ricordo che un equazione lineare risulta **indeterminata** se la si può ricondurre alla forma:

$$\mathbf{0x = 0}$$

Dato che l'equazione è già nella forma:

$$cx = d \text{ con } c, d \text{ funzioni del parametro } a,$$

ci basta cercare dei valori del parametro per i quali sia c che d siano nulli.

Osserviamo che $\boxed{a = 7}$ annulla sia il primo membro che il secondo, infatti

$$(7-(7))((7)-2)x = 4(7) - 28 \iff 0 \cdot 5 \cdot x = 28 - 28 \iff 0x = 0$$

Dunque la risposta **D** è corretta.

Osserviamo poi che anche $\boxed{a = 2}$ annulla il primo membro, ma non il secondo, infatti

$$(7-(2))((2)-2)x = 4(2) - 28 \iff 5 \cdot 0 \cdot x = 8 - 28 \iff 0x = -20$$

Dunque la risposta **C** non è corretta.
Osserviamo infine che gli altri valori proposti non annullano né I, né II membro e dunque le risposte **A**, **B** ed **E** sono sbagliate.

3B. Risolviamo l'equazione.

$0,\overline{2}x - 3,5 = 7\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) + 7,6$ Per prima cosa riportiamo i numeri in forma decimale in frazione.

$\frac{2}{9}x - \frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{10}_{2}} = 7\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\cancel{76}^{38}}{\cancel{10}_{5}}$ Svolgiamo ora il prodotto a secondo membro.

$$\frac{2}{9}x - \cancel{\frac{7}{2}} = \frac{7}{3}x - \cancel{\frac{7}{2}} + \frac{38}{5}$$

Per la **regola di cancellazione** eliminiamo ora $-\frac{7}{2}$ da I e II membro, per la **regola del trasporto** spostiamo $\frac{7}{3}x$ a I membro e semplifichiamo.

$$\frac{2-21}{9}x = \frac{38}{5}$$

Utilizzando il **secondo principio di equivalenza** moltiplichiamo per $-\frac{9}{19}x$ i termini a I e II membro e semplifichiamo.

$$-\frac{\cancel{9}}{\cancel{19}} \cdot -\frac{\cancel{19}}{\cancel{9}}x = \frac{\cancel{38}^2}{5} \cdot -\frac{9}{\cancel{19}_1} \iff \boxed{x = -\frac{18}{5}}$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **B**.

4D. Risolviamo l'equazione.

$$\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + 3x = \frac{1}{4} + (x+2)(x-2)$$

Per prima cosa svolgiamo i **prodotti notevoli** a I e II membro.

$$\cancel{\frac{1}{4}} - x + \cancel{x^2} + 3x = \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{x^2} - 4$$

Per la **regola di cancellazione** eliminiamo ora $\frac{1}{4}$ e x^2 da I e II membro. Semplifichiamo poi i termini simili.

$$2x = -4$$

Utilizzando il **secondo principio di equivalenza** moltiplichiamo per $\frac{1}{2}$ i termini a I e II membro e semplifichiamo.

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = -\cancel{4}^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} \iff \boxed{x = -2}$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **D**.

5C. Indichiamo con l'incognita x il valore da cercare e traduciamo la frase in un'equazione:

- **alla metà di un numero** corrisponde a $\mathbf{\frac{x}{2}}$
- **ci aggiungo la sua terza parte** corrisponde a $+\mathbf{\frac{x}{3}}$
- **il risultato è uguale** corrisponde al simbolo =
- **ad un quarto del numero** corrisponde a $+\mathbf{\frac{x}{4}}$
- **aumentato di ventuno** corrisponde a +**21**

Dunque impostiamo e risolviamo l'equazione.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 21$$

Per la **regola del trasporto** portiamo $\frac{x}{4}$ a I membro e semplifichiamo.

$$\left(\frac{6+4-3}{12}\right)x = 21$$

Applichiamo infine il **secondo principio di equivalenza** e moltiplichiamo per $\frac{12}{7}$ I e II membro.

$$x = \cancel{21}^3 \cdot \frac{12}{\cancel{7}_1} \iff x = 36$$

Dunque il numero cercato è il **36** e la risposta corretta è la **C**.

6E. Per prima cosa ricordiamo che **ogni numero dispari** lo possiamo scrivere nella forma $2k+1$ con $k \in \mathbb{N}$ (mentre ogni pari nella forma $2k$ con $k \in \mathbb{N}$).
Ricordiamo inoltre che **un numero è consecutivo ad un altro** se differiscono di un'unità; ovvero due numeri x e y, con $x > y$, sono consecutivi se e solo se $x = y + 1$.
Traduciamo quindi ora la frase in un equazione:

- **Dato un numero dispari** corrisponde a $(\mathbf{2k+1})$
- **il prodotto tra il numero ed il suo consecutivo** corrisponde a $\cdot(\mathbf{2k+1+1})$
- **corrisponde** corrisponde al simbolo $=$
- **al quadrato del numero** corrisponde a $(\mathbf{2k+1})^2$
- **aumentato di quarantuno** corrisponde a $+\mathbf{41}$

Dunque impostiamo e risolviamo l'equazione.

$(2k+1)(2k+2) = (2k+1)^2 + 41$ Per prima cosa svolgiamo il prodotto a I membro e il prodotto notevole a II e semplifichiamo i termini simili.

$\cancel{4k^2} + 6k + 2 = \cancel{4k^2} + 4k + 42$ Per la **regola di cancellazione** eliminiamo ora $4k^2$ da I e II membro. Per la **regola del trasporto** spostiamo $4k$ a I membro e 2 a II.

$2k = 40$ Applichiamo infine il **secondo principio di equivalenza** e dividiamo per 2 I e II membro.

$k = 20$

Dunque il numero cercato è $\mathbf{2 \cdot 20 + 1 = 41}$ e la risposta corretta è la **E**.

Unità 3

1A,C. Sono lineari i sistemi delle risposte **A** e **C**, poiché presentano due equazione di primo grado nelle incognite x e y. Non sono invece lineari i sistemi delle risposte **B** e **D** poiché:

B. La prima delle due equazioni è di grado 2 a causa del termine xy.

D. La seconda equazione è di grado 2 a causa del termine $3x^2$ a II membro.

E' infine sbagliata la risposta **E**.

2C. Ricordo che un sistema lineare nelle incognite x e y si dice in **forma normale** (o **canonica**) quando ha la seguente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \qquad \text{dove} \quad a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$$

E' dunque in **forma normale** solamente il sistema della risposta **C**.
Tutte le altre risposte sono sbagliate.

3A. Dato che sappiamo già che il sistema è **determinato** ed abbiamo un elenco di possibili soluzioni, non importa risolverlo; ci basta infatti andare a sostituire le coppie di valori alle incognite e vedere quale verifica l'uguaglianza.

(1;0)

$$\begin{cases} 1-\dfrac{2}{5}(2)=\dfrac{1}{5} \\ 2-5=1-4 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5} \\ -3=-3 \end{cases}$$

Dato che il sistema è verificato, la coppia della risposta **A** è soluzione, dunque la risposta **A è corretta**.

Dato inoltre che un sistema lineare **determinato** di due equazioni in due incognite ammette **una sola soluzione**, allora potremmo anche escludere le altre possibili soluzioni, poichè abbiamo già determinato l'unica soluzione del sistema.
Per completezza andiamo comunque a verificare che le restanti coppie realmente non siano soluzioni.

(1;1)

$$\begin{cases} 1-\dfrac{2}{5}(2)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5} \\ 2-5=1+\dfrac{2}{3}-8 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{5} \\ -3=-1 \end{cases}$$

Dato che le disuguaglianze sono false, la risposta **B è sbagliata**.

(-1;1)

$$\begin{cases} -1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5} \\ -2-5=-1+\dfrac{2}{3}-8 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{5} \\ -3=-\dfrac{25}{3} \end{cases}$$

Dato che le disuguaglianze sono false, la risposta **C è sbagliata**.

(0;1)

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5} \\ -5=\dfrac{2}{3}-8 \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{5} \\ -5=-\dfrac{22}{3} \end{cases}$$

Dato che le disuguaglianze sono false, la risposta **D è sbagliata**.

4E. Risolviamo il sistema lineare.

$$\begin{cases} 4x-3=5 \\ 4x-4y=4(x-y) \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo x e sostituiamolo nella seconda.

$$\begin{cases} x=2 \\ 4(2)-4y=4(2-y) \end{cases}$$

Sviluppiamo i prodotti a I e II membro nella seconda equazione.

$$\begin{cases} x=2 \\ 8-4y=8-4y \end{cases}$$

La seconda equazione è un'**identità**, dunque il sistema è indeterminato.

Dato che il sistema risulta indeterminato le risposte **A**, **B** e **D** sono sicuramente false.

Osserviamo che anche la **C** lo è; infatti le soluzioni del sistema sono le coppie del tipo $(2; y)$ con $y \in \mathbb{R}$ e non tutte quelle indicate dalla risposta **C**.
Dunque la risposta corretta risulta la **E**.

5B. Risolviamo il sistema lineare.

$$\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ x - y + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$ Dalla seconda equazione ricaviamo x e sostituiamolo nella prima.

$$\begin{cases} 5\left(y - \frac{3}{2}\right) - 2y = -1 \\ x = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$ Sviluppiamo il prodotto a I membro della prima equazione e semplifichiamo.

$$\begin{cases} 3y - \frac{15}{2} = -1 \\ x = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$ Nella prima equazione spostiamo $-\frac{15}{2}$ da I a II membro cambiandogli di segno e semplifichiamo.

$$\begin{cases} 3y = \frac{13}{2} \\ x = y - \frac{3}{2} \end{cases}$$ Nella prima equazione dividiamo infine per 3 a I e II membro e sostituiamo il valore della y trovato nella seconda equazione.

$$\begin{cases} y = \frac{13}{6} \\ x = \frac{13}{6} - \frac{3}{2} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Dunque il sistema risulta determinato e la soluzione è la coppia $\left(\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right)$. La risposta corretta è dunque la **B**.

6C. Consideriamo la frazione $\frac{x}{y}$. Trasformiamo le frasi in due distinte equazioni:

- **Il numeratore supera di** 5 **il denominatore** corrisponde a: $\mathbf{x = y + 5}$
- **la differenza tra il triplo del numeratore e il doppio del denominatore è** 17 corrisponde a: $\mathbf{3x - 2y = 17}$

Dunque impostiamo e risolviamo il sistema.

$$\begin{cases} x = y + 5 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$$ Sostituiamo la x della prima equazione nella seconda.

$$\begin{cases} x = y + 5 \\ 3(y + 5) - 2y = 17 \end{cases}$$ Sviluppiamo il prodotto a I membro della seconda equazione e semplifichiamo i termini simili.

$$\begin{cases} x = y + 5 \\ y + 15 = 17 \end{cases}$$ Nella seconda equazione spostiamo 15 da I a II membro cambiandogli di segno, semplifichiamo e sostituiamo il valore della y trovato nella prima equazione.

$$\begin{cases} x = 2 + 5 = 7 \\ y = 2 \end{cases}$$

La frazione cercata è $\frac{7}{2}$ e la risposta corretta è dunque la **C**.

Unità 4

1B. La risposta esatta è la **B**, infatti:
$3(x-2) + x^2 = 5 \Rightarrow 3x - 6 + x^2 = 5 \Rightarrow 3x - 6 + x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 11 = 0$.
Osserviamo inoltre che la risposta **A** è sicuramente sbagliata poiché in **forma normale** il II membro dell'equazione dev'essere 0.

Nella **C** i termini dell'equazione non sono in ordine decrescente della potenza di x, ed è quindi anch'essa sbagliata.

2A. Prima di calcolare il delta è utile riportare l'equazione in **forma normale**.

$$6x + 8x^2 - 2 = 0 \implies 8x^2 + 6x - 2 = 0$$

La risposta esatta è dunque la **A** poiché: $\Delta = (6)^2 - 4(8)(-2) = 36 + 64 = 100 \geq 0$

3B. Per rispondere alla domanda non serve calcolare le soluzioni, ma solamente il Δ dell'equazione (infatti dal suo segno si ha l'informazione desiderata sul numero di soluzioni). Dunque:

$$\Delta = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$$

E quindi si hanno due soluzioni reali coincidenti, ovvero la risposta corretta è la **B**.

4A. Per prima cosa calcoliamo il Δ dell'equazione.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$$

Calcoliamo quindi le soluzioni.

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \begin{cases} x_1 = \frac{+2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{+2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Dunque la risposta corretta è la **A**.

É importante però osservare che per rispondere, avremmo anche potuto semplicemente fare la **riprova** con i valori proposti, ovvero provare a sostituirli all'incognita e vedere se ne scaturiva un'identità (nel caso fossero soluzioni) o un'equazione falsa (nel caso non fossero soluzioni).

5C. Prima di tutto riportiamo l'equazione in forma normale.

$$x^2 - 3x + 2 = -5 \implies x^2 - 3x + 7 = 0$$

Calcoliamo ora il Δ dell'equazione: $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(7) = 9 - 28 = -19 < 0$.
Dato che il Δ è negativo, allora non esistono soluzioni reali, pertanto la risposta corretta è la **C**.

Unità 5

1A,D. La risposta **A è un'equazione fratta** poiché presenta l'incognita x a denominatore.
La **B**, anche se presenta delle frazioni, **non è fratta** poiché l'incognita si trova sempre a numeratore.
La risposta **C** anche se presenta l'incognita a denominatore **NON è un'equazione**.
Nella **D** infine può venire in mente di dire che non è fratta poiché semplificando numeratore e denominatore a I membro (dopo aver ovviamente dato le C.E.: $x \neq 0$) si ottiene $x^2 = 1$; **questo ragionamento è però sbagliato** poiché bisogna tener conto della forma iniziale dove l'incognita si presenta anche a denominatore, dunque **l'equazione è fratta**.
L'ultima risposta è infine ovviamente sbagliata.

2D. Consideriamo i denominatori dei termini.
Il denominatore del primo termine $x^2 + 4$ è sempre positivo quindi non impone condizioni.
Nel secondo invece bisogna richiedere che: $x - 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \neq 2}$
Il terzo è una **differenza di quadrati** che si scompone così:

$$9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$$

Quindi si deve porre: $3 - x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \neq 3}$ e $3 + x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x \neq -3}$
Infine l'ultimo denominatore è nullo solo quando l'incognita assume valore zero, dunque basta porre $\boxed{x \neq 0}$.
Quindi la risposta corretta è la **D**.

3C. La risposta esatta è la **C**. Risolviamo infatti l'equazione.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 3} = 0$$

Per prima cosa osserviamo che il numeratore è un quadrato di binomio e raccogliamo 3 a denominatore.

$$\frac{(x-1)^{\cancel{2}\,1}}{3\cancel{(x-1)}_1} = 0$$

Diamo ora le C.E.: $x - 1 \neq 0$ ovvero $\boxed{x \neq 1}$.
Semplifichiamo quindi numeratore e denominatore.

$$\frac{x - 1}{3} = 0$$

Osserviamo quindi che la soluzione dell'equazione è $x = 1$, ma siccome tale valore è escluso dalle C.E. l'**equazione è impossibile**.

4D. La risposta esatta è la **D**. Infatti, ricordando che una frazione è nulla se e solo se si annulla il numeratore e osservando che il numeratore è una costante diversa da zero, possiamo concludere che tale frazione non potrà mai essere nulla, quindi l'equazione è impossibile.

5A. Risolviamo l'equazione.

$$\frac{x^2 - 4x}{x + 9} = x + 2$$

Per prima cosa diamo le **C.E.**: $\boxed{x \neq -9}$ e portiamo I e II membro allo stesso denominatore.

$$\frac{x^2 - 4x}{x + 9} = \frac{(x + 2)(x + 9)}{x + 9}$$

Svolgiamo il prodotto a numeratore nel II membro ed eliminiamo i denominatori ad entrambi i membri.

$$\cancel{x^2} - 4x = \cancel{x^2} + 9x + 2x + 18$$

Eliminiamo i termini uguali a I e II membro, portiamo i termini con la x a I membro e semplifichiamo.

$$-15x = +18$$

Esplicitiamo infine la x dividendo I e II membro per -15.

$$x = -\frac{\cancel{18}^{6}}{\cancel{15}_{5}} = -\frac{6}{5}$$

Dato che il risultato ottenuto è accettabile, l'insieme delle soluzioni dell'equazione risulta:

$$S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$$

Quindi la risposta corretta è la **A**.

Parte D

Unità 1

1A,B. Applichiamo i **principi di equivalenza** alla disequazione.

$5x - 3 \leq 7$	Applicando il **primo principio di equivalenza** trasporto il termine -3 da I e II membro cambiandogli di segno.
$5x \leq 7 + 3$	Applicando il **secondo principio di equivalenza** divido I e II membro per 5. Ricordo che siccome la quantità per cui si divide è positiva non si ha cambio di verso.

$x \leq \frac{10}{5}$ ovvero $x \leq 2 \quad \Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni è $\{x \in (-\infty, 2]\}$.

Dunque osserviamo che le risposte **A** e **B** sono corrette, infatti sono soluzioni della disequazione tutti i numeri reali minori o uguali a 2.
É invece falsa la **C**, poiché il valore si trova al di fuori dell'intervallo delle soluzioni.
Sono infine ovviamente sbagliate le risposte **D** ed **E**.

2D. Ricordando che il pallino pieno indica che il valore è compreso nell'intervallo (viceversa non lo è se il pallino è vuoto) osserviamo che h e m devono essere compresi, mentre k no.
Dunque possiamo scartare le risposte **A** (h e m non sono compresi), **B** (h non è compreso, mentre lo è k) e **C** (m non è compreso).
É infine corretta la risposta **D**, mentre è ovviamente sbagliata la **E**.

3B,C. Per prima cosa enunciamo le **C.E.**.

Dato che abbiamo due denominatori letterali basta porre: $\begin{cases} 3x \neq 0 \Rightarrow \boxed{x \neq 0} \\ \boxed{b \neq 0} \end{cases}$

Dunque la risposta **C** è corretta, mentre la **D** sbagliata.

Ricordo inoltre che una **disequazione** si dice **fratta** se la variabile è presente in almeno un denominatore, mentre non contano la posizioni in cui si trovano eventuali parametri. Inoltre si dice **parametrica** se oltre all'incognita è presente un'altra lettera.

Dunque sia se consideriamo x come variabile, sia se consideriamo b, la disequazione in oggetto risulta **letterale fratta**.
É corretta quindi la risposta **B** e sono errate la **A** e la **E**.

ATTENZIONE per quanto riguarda b: Si può notare che al primo termine del II membro numeratore e denominatore si possono semplificare lasciando la b solo al numeratore.

$$\frac{2b^{\cancel{2}^{1}}}{\cancel{b}_1} = 2b$$

É quindi un errore molto comune quello di considerare la disequazione non fratta rispetto a b; bisogna considerare la sua posizione prima di eventuali semplificazioni.

4D. Per verificare per chi è (e per chi no) soluzione $x = -\frac{1}{3}$ basta sostituire il valore alla variabile e controllare se la disuguaglianza numerica risulta vera o no.

In questo specifico caso però, possiamo osservare immediatamente che la disequazione della risposta **D** è falsa $\forall x \in \mathbb{R}$. Infatti qualunque sia il valore attribuito all'incognita, la potenza del 2 e il segno "meno" ci garantiscono che il valore a I membro sia sempre negativo, quindi mai maggiore del numero positivo a II membro: $\frac{1}{3}$.

Dunque **l'unica risposta corretta** è la **D**.

Per completezza controlliamo comunque che $x = -\frac{1}{3}$ sia soluzione delle altre disequazioni proposte.

A. $-\frac{\cancel{3}}{4}\left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{1}{4} > 0}$ **VERA**

B. $\cancel{6}^2\left(-\frac{1}{\cancel{3}_1}\right) \le -\frac{5}{3} - \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; -2 \le -\frac{\cancel{6}^2}{\cancel{3}_1} \;\Rightarrow\; \boxed{-2 \le -2}$ **VERA**

C. $\frac{8\left(-\frac{1}{3}\right) + 5}{2} \ge 1 \;\Rightarrow\; \frac{\frac{-8+15}{3}}{2} \ge 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{7}{6} \ge 1}$ **VERA** poiché il numeratore della frazione a I membro è maggiore del denominatore.

5B,C. Applichiamo i **principi di equivalenza** alla disequazione.

$-6x + 1 \ge 0$	Applicando il **primo principio di equivalenza** trasporto il termine +1 da I a II membro cambiandogli di segno.
$-6x \ge -1$	Dunque la risposta **B** è corretta, mentre la **A** è sbagliata. Applicando ora il **secondo principio di equivalenza** divido I e II membro per 5. (Ricordo che siccome la quantità per cui si divide è negativa, si deve cambiare il verso.)
$x \le \frac{1}{6}$	É infine corretta la risposta **C**, mentre la **D** è sbagliata.

Unità 2

1C. Per prima cosa semplifichiamo la disequazione:

$$\sqrt{3}(x + \sqrt{3}) - x > (x + \sqrt{3})^2 - x^2 \iff \sqrt{3}x + \cancel{3} - x > \cancel{x^2} + 2\sqrt{3}x + \cancel{3} - \cancel{x^2} \iff$$
$$\iff -\sqrt{3}x - x > 0 \iff -x\left(\sqrt{3} + 1\right) > 0$$

Osserviamo ora che il secondo termine del prodotto è un numero positivo, dunque la soluzione si trova ponendo:

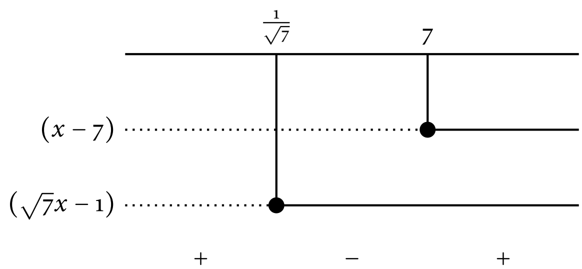
$$-x > 0 \iff x < 0$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è $S = (-\infty, 0)$ e l'unica risposta corretta è la **C**.

2D. Studiamo il segno del prodotto $(x - 7)(\sqrt{7}x - 1)$, studiando il segno dei due fattori:

- $x - 7 \geq 0 \implies x \geq 7$
- $\sqrt{7}x - 1 \geq 0 \implies x \geq \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

Dunque:



Quindi **il prodotto risulta positivo** per valori esterni all'intervallo $(\frac{1}{\sqrt{7}}, 7)$ (od uguali agli estremi) e **negativo** per valori interni.
La risposta corretta è dunque la **D**.

3B. Per prima cosa notiamo che il polinomio a I membro si annulla per i valori $x = -1$ e $x = 3$ e che il coefficiente numerico di grado massimo è negativo, infatti:

$$\left(\frac{x+1}{8}\right)(3-x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8} - \frac{1}{8}x = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$$

Riportiamo tale coefficiente ad esser positivo:

$$-\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} < 0 \iff \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} > 0$$

Dunque, considerando il segno della disequazione equivalente ottenuta, l'insieme delle soluzioni è dato dai valori esterni:

$$S = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

La soluzione corretta è dunque la **B**.

4A. Risolviamo la disequazione:

$-(x+3)(3-x) \leq x(x+4)$

Per prima cosa sviluppiamo la differenza di quadrati a I membro e il prodotto a II membro. **Attenzione**, a I membro, a non sbagliarsi con la differenza di quadrati $x^2 - 9$.

$-(9 - x^2) \leq x^2 + 4x$

Eliminiamo il segno "−" a I membro cambiando di segno ai termini nella parentesi.

$-9 + \cancel{x^2} \leq \cancel{x^2} + 4x$

Semplifichiamo i termini uguali a I e II membro. Spostiamo poi $4x$ a I membro e -9 a II membro.

$-4x \leq 9$

Dividiamo infine I e II membro per -4 ed otteniamo:

$x \geq -\frac{9}{4}$

Ovvero l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.
Dunque la risposta corretta è la **A**.

5E. Per prima cosa traduciamo la frase in un disequazione nell'incognita x:

$$x + (x-1)(x+1) \leq 5$$

Semplifichiamola e portiamo in forma normale:

$$x + (x-1)(x+1) \leq 5 \iff x + x^2 - 1 \leq 5 \iff x^2 + x - 6 \leq 0$$

Calcoliamo il delta dell'equazione associata:

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$$

Dato che è positivo calcolo le due soluzioni distinte:

$$x_{1,2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

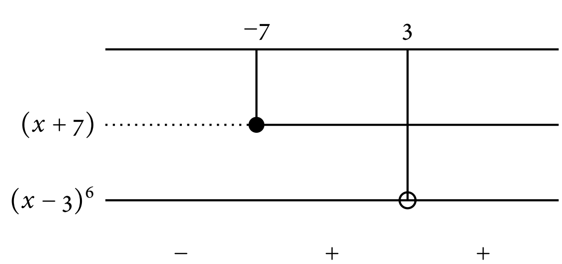
Osservando infine che siamo nel caso in cui il coefficiente del termine di grado massimo è positivo e la disequazione è minore o uguale a 0 allora si prendono i valori interni (od uguali) ai due trovati. Ricordiamo infine che noi vogliamo solo le **soluzioni intere** e quindi l'insieme delle soluzioni risulta:

$$S = [-3, 2] \cap \mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

Un errore possibile è quello di considerare corretta la soluzione **A**, ma dato che non tiene conto che sono richiesti solo valori interi, la risposta esatta è la **E**.

Unità 3

1B. Osserviamo che il primo termine del prodotto ha un indice di potenza pari perciò è sempre positivo tranne per $x = 3$, valore per cui si annulla. Invece il secondo termine è positivo per $x \geq -7$, dunque:



E dato che il prodotto dei fattori deve essere maggiore stretto di zero, l'insieme delle soluzioni risulta:

$$S = (-7, 3) \cup (3, +\infty)$$

Dunque la risposta esatta è la **B**.

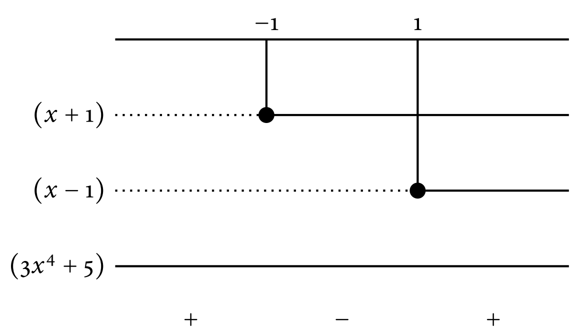
2C. Prima di tutto moltiplichiamo I e II membro per -1 e scomponiamo la differenza di quadrati presente come primo termine:

$$-(x^2-1)(3x+5)^4 > 0 \iff (x^2-1)(3x^4+5) < 0 \iff \boxed{(x+1)(x-1)(3x^4+5) < 0}$$

Studiamo ora i segni dei tre fattori:

- $x + 1 \geq 0 \implies x \geq -1$
- $x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$
- $3x^4 + 5 \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, in particolare vale $3x^4 + 5 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Dunque:



E dato che il prodotto dei fattori deve essere minore stretto di zero, l'insieme delle soluzioni risulta:

$$S = (-1, 1)$$

La risposta corretta è dunque la **C**.

3A. Studiamo **il segno del primo dei due fattori**:

$$3x^2 + 4x + 1 \geq 0$$

Risolviamo l'equazione associata $3x^2 + 4x + 1 = 0$:

Calcoliamo il delta:

$$\Delta = (4)^2 - 4(3)(1) = 16 - 12 = 4$$

Dato che è positivo calcoliamone le soluzioni:

$$x_{1,2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+2}{6} = -\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-4-2}{6} = -1 \end{cases}$$

Dato che il coeff. numerico del termine di II grado è positivo e vogliamo i valori maggiori o uguali a zero allora tale fattore è positivo per valori esterni (od uguali) a -1 e $-\frac{1}{3}$.
Ovvero:

$$3x^2 + 4x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 = (-\infty, -1] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Studiamo ora **il segno del secondo fattore**:

$$2x - x^2 - 6 \geq 0 \iff -x^2 + 2x - 6 \geq 0$$

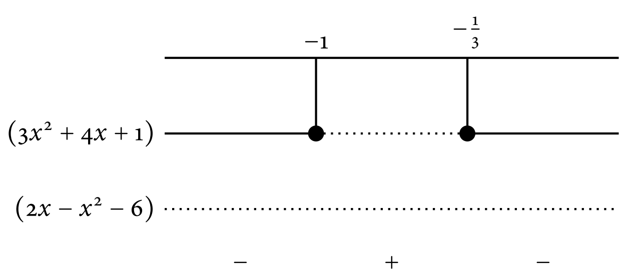
Calcoliamo il delta:

$$\Delta = (2)^2 - 4(1)(6) = 4 - 24 = -20 < 0$$

Dato il delta è negativo ed il coeff. numerico del termine di II grado è anch'esso negativo si ha che tale fattore è sempre negativo. Ovvero:

$$-x^2 + 2x - 6 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \varnothing$$

Consideriamo quindi ora **il segno del prodotto**:



E dato che il prodotto dei fattori deve essere maggiore od uguale a zero, l'insieme delle soluzioni risulta:

$$S = \left[-1, -\frac{1}{3}\right]$$

Dunque la soluzione corretta è la **A**.

4D. Per prima cosa riportiamo la disequazione nella forma $P(x) \geq 0$:

$$4x^4 - 3 \geq 4\left(x - \frac{3}{4}\right) \iff 4x^4 - \cancel{3} \geq 4x - \cancel{3} \iff \boxed{4x^4 - 4x \geq 0}$$

Scomponiamo ora il polinomio a I membro:

$$4x(x^3 - 1) =$$

Raccogliamo da entrambi i termini $4x$ e osserviamo che il secondo fattore è una **differenza di cubi**.

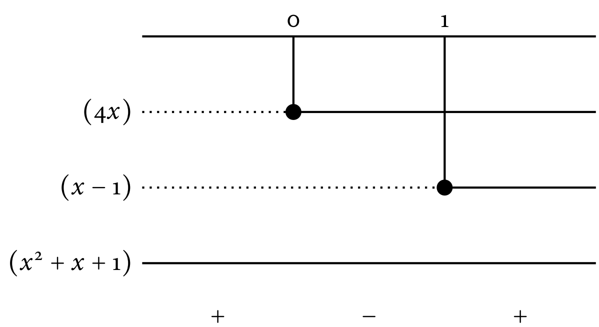
$$= 4x(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Ricordiamo infine che il terzo fattore è un **falso quadrato** (non più scomponibile e sempre positivo).

Studiamo quindi ora il segno dei fattori:

- $4x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$
- $x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$
- $x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dunque:



E dato che vogliamo i valori che rendano il polinomio $4x^4 - 4x$ maggiore od uguale a zero, l'insieme delle soluzioni della disequazione è:

$$S = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

Dunque la risposta corretta è la **D**.

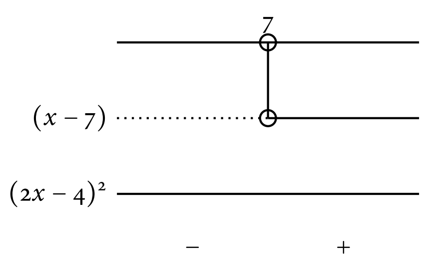
Unità 4

1C. Dato che siamo già nella forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, diamo le **C.E.**: $\boxed{x \neq 7}$

E visto che la frazione algebrica non si può semplificare, studiamo i segni di numeratore e denominatore.

- $(2x - 4)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. In particolare $(2x - 4)^2 = 0$ per $x = 2$
- $x - 7 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 7$

Studiamo quindi il segno della frazione.



Dunque la frazione algebrica è strettamente positiva per $x \in (7, +\infty)$. Ma dato che la disequazione può essere maggiore **od uguale** a zero, allora anche il valore $x = 2$ per cui si annulla il numeratore (e quindi la frazione) è soluzione. L'insieme delle soluzione è quindi:

$$S = \{2\} \cup (7, +\infty)$$

2E. Dato che siamo già nella forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$, diamo le **C.E.**: $\boxed{x \neq 5}$

Osserviamo quindi che la risposta **D** è sbagliata. Scomponiamo ora il numeratore utilizzando l'equazione associata.

$$-9x + 2x^2 - 5 = 0 \iff 2x^2 - 9x - 5 = 0$$

Calcolo dunque il delta:

$$\Delta = (9)^2 - 4(2)(-5) = 81 + 40 = 121 > 0$$

Dato che è positivo, calcolo le due soluzioni dell'equazione.

$$x_{1,2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+11}{4} = 5 \\ x_2 = \dfrac{9-11}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il numeratore quindi lo possiamo scrivere così scomposto:

$$2x^2 - 9x - 5 = 2(x-5)(x+\frac{1}{2}) = (x-5)(2x+1)$$

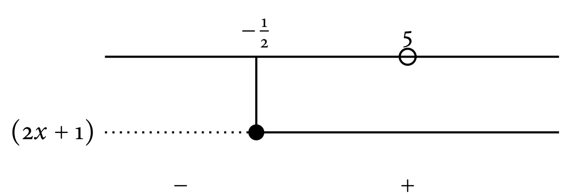
Di conseguenza la disequazione diventa:

$$\frac{-9x + 2x^2 - 5}{x-5} > 0 \iff \frac{\cancel{(x-5)}(2x+1)}{\cancel{x-5}} > 0 \iff 2x+1 > 0$$

Attenzione: Abbiamo potuto semplificare il fattore $x - 5$ a numeratore e denominatore perché avevamo già dato le **C.E.** e ricordo che $x = 5$ va tolto dall'insieme delle possibili soluzioni.

Studiamo quindi il segno del polinomio rimasto: $2x + 1 \geq 0 \implies x \geq -\dfrac{1}{2}$

Dunque:



La frazione algebrica risulta quindi maggiore di zero per x maggiore di $-\dfrac{1}{2}$, tranne che per $x = 5$, valore escluso per le **C.E.**.

L'insieme delle soluzioni risulta:

$$S = (-\frac{1}{2}, 5) \cup (5, +\infty)$$

Quindi le soluzioni **B** e **C** sono sbagliate. Inoltre è sbagliata anche la risposta **A** poiché la soluzione della disequazione $2x + 1 > 0$ è $S = (-\dfrac{1}{2}, +\infty)$ e comprende il valore $x = 5$ invece escluso dalle soluzioni della disequazione in oggetto. Dunque le due disequazioni non sono equivalenti.

La risposta corretta è di conseguenza la **E**.

3B. Per prima cosa riportiamo la disequazione alla forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} < 0$:

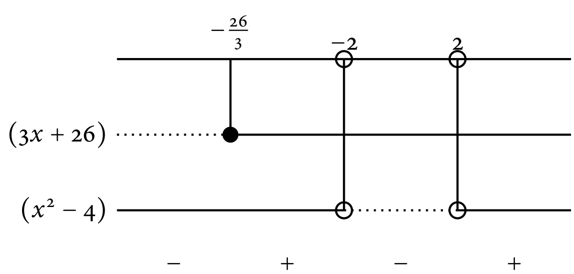
$$\begin{aligned}\frac{20x}{5x-10} < \frac{5}{x+2} + 4 &\iff \frac{\cancel{20}^{4}x}{\cancel{5}_{1}(x-2)} < \frac{5+4x+8}{x+2} \iff \\ &\iff \frac{4x(x+2)-(4x+13)(x-2)}{x^2-4} < 0 \iff \\ &\iff \frac{\cancel{4x^2}+8x-\cancel{4x^2}+8x-13x+26}{x^2-4} < 0 \iff \\ &\iff \boxed{\frac{3x+26}{x^2-4} < 0}\end{aligned}$$

Diamo ora le **C.E.**: $\boxed{x \neq \pm 2}$

Dato poi che la frazione algebrica ottenuta non si può semplificare, studiamo i segni di numeratore e denominatore.

- $3x + 26 \geq 0 \implies x \geq -\dfrac{26}{3}$
- $x^2 - 4 > 0 \implies x < -2 \vee x > 2$

Studiamo quindi il segno della frazione.



Dunque la frazione algebrica è strettamente negativa per $x \in \left(-\infty, -\dfrac{26}{3}\right) \cup (-2, 2)$.

L'insieme delle soluzione è quindi:

$$S = \left(-\infty, -\frac{26}{3}\right) \cup (-2, 2)$$

Unità 5

1D. Per prima cosa notiamo che, non essendo presenti nel grafico le linee tratteggiate e che invece è evidenziata una parte del grafico, abbiamo a che fare con il grafico di un sistema di disequazioni. Dunque le risposte **A** e **B** sono sicuramente sbagliate.

Notiamo inoltre che sono presenti solo linee su due livelli che corrispondono dunque a due disequazioni. É dunque sbagliata anche la risposta **C**.

Controlliamo ora se le soluzioni delle disequazioni della risposta **D** corrispondono a quelle rappresentate nel grafico.

- Risolviamo $\boxed{x^2 + 2x - 3 > 0}$

  Calcoliamo il Δ del polinomio: $(2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16$.

  Dato che è positivo calcoliamo le due soluzioni del polinomio associato.

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

  Considerando infine il segno della disequazione e il segno positivo del coefficiente numerico del termine di secondo grado, le soluzioni sono i valori minori di -3 e maggiori di 1, che **corrispondono esattamente a quelli espressi dalla prima riga del grafico**.

- Risolviamo $\boxed{x - 2 \leq 0}$

$$x - 2 \leq 0 \iff x \leq 2$$

  Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta: $S = (-\infty, 2]$

  che è **correttamente rappresentato dalle linee della seconda riga del grafico**.

La risposta **D** è quindi corretta.

2E. Risolviamo il sistema.
Identifichiamo le tre disequazioni, a partire dall'alto, con le lettere **A**, **B** e **C**.

PASSO 1

Risolviamo ciascuna disequazione separatamente.

(A) Risolviamo $\boxed{x - 3 \leq 0}$

$$x \leq 3 \iff x \leq 3$$

Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_A = (-\infty, 3]}$$

(B) Risolviamo $\boxed{2 - x > 0}$

$$2 - x > 0 \iff -x > -2 \iff x < 2$$

Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_B = (-\infty, 2)}$$

(C) Risolviamo $\boxed{2 \leq x + 1}$

$$2 \leq x + 1 \iff -x \leq 1 - 2 \iff -x \leq -1 \iff x \geq 1$$

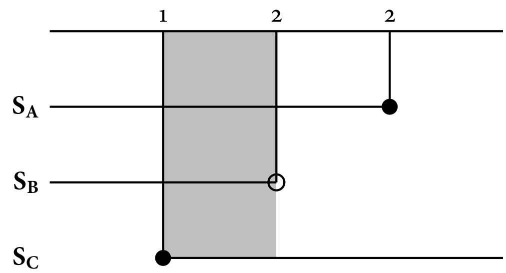
Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_C = [1, +\infty)}$$

PASSO 2

Determiniamo ora l'intersezione di tutti gli insiemi delle soluzioni.

Costruiamo quindi lo schema grafico con le soluzioni delle tre disequazioni.



La zona colorata di grigio indica l'intervallo dei valori che verificano tutte le disequazioni.
Il valore 2 è escluso perché non appartiene alla soluzione della disequazione **(B)**.

Dunque l'insieme delle soluzioni del sistema risulta:

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S_A} \cap \mathbf{S_B} \cap \mathbf{S_C} = (-\infty, \mathbf{3}] \cap (-\infty, \mathbf{2}) \cap [\mathbf{1}, +\infty) = [\mathbf{1}, \mathbf{2})}$$

Quindi la risposta esatta è la **E**.

3B. Risolviamo il sistema.
Identifichiamo le due disequazioni, a partire dall'alto, con le lettere **A** e **B**.

PASSO 1

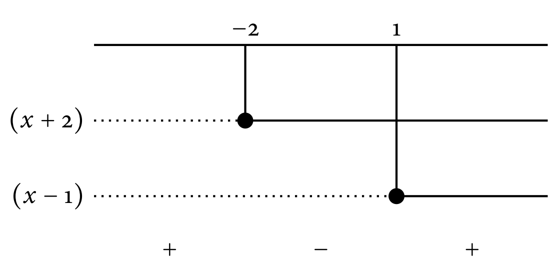
Risolviamo ciascuna disequazione separatamente.

(A) Risolviamo $\boxed{\dfrac{(x+2)(x-1)}{3} < 0}$

Dato che il numeratore risulta già scomposto in fattori irriducibili, svolgiamo lo studio del segno.

- $x + 2 \geq 0 \implies x \geq -2$
- $x - 1 \geq 0 \implies x \geq 1$

Dunque:



Si ha quindi che $\dfrac{(x+2)(x-1)}{3}$ è minore stretto di zero (come richiesto dal verso della disequazione) per ogni valore compreso tra -2 e 1 (estremi esclusi), dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_A = (-2, 1)}$$

(B) Risolviamo $\boxed{x^2 - 2x + 6 > 0}$

Calcoliamo il Δ del polinomio.

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(6) = 4 - 24 = -20$$

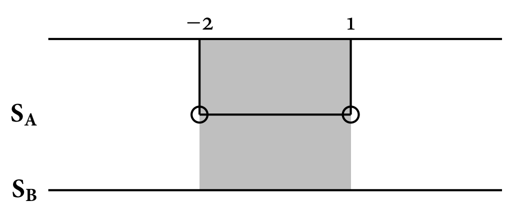
Dato che è negativo e che il coefficiente numerico del termine di secondo grado è positivo, il polinomio risulta positivo per ogni x reale.
Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta:

$$\boxed{S_B = \mathbb{R}}$$

PASSO 2

Determiniamo ora l'intersezione di tutti gli insiemi delle soluzioni.

Costruiamo quindi lo schema grafico con le soluzioni delle due disequazioni.



La zona colorata di grigio indica l'intervallo dei valori che verificano entrambe le disequazioni.
I valori -2 e 1 sono esclusi perché non appartengono alla soluzione della disequazione **(A)**.

Dunque l'insieme delle soluzioni del sistema risulta:

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{S_A} \cap \mathbf{S_B} = (\mathbf{-2}, \mathbf{1}) \cap \mathbb{R} = (\mathbf{-2}, \mathbf{1})}$$

Quindi la risposta esatta è la **B**.

4D. Identifichiamo le tre disequazioni, a partire dall'alto, con le lettere **A**, **B** e **C**.

Osserviamo che, in questo caso, non importa svolgere lo studio di tutte le disequazioni; basta infatti osservare che la disequazione **C**

$$x^2 + 4 < 0$$

è sempre falsa. Infatti il polinomio è strettamente positivo per ogni valore della variabile x, mentre il segno della disequazione richiede che il polinomio sia strettamente negativo. Dunque $S_C = \varnothing$ e di conseguenza l'insieme delle soluzioni di tutto il sistema risulta:

$$S = S_A \cap S_B \cap S_C = S_A \cap S_B \cap \varnothing = \varnothing$$

Quindi la risposta esatta è la **D**.

Unità 6

1A falsa. Poiché $|-x-2| = x+2$ solo se $x \geq -2$; infatti:

$$|-x-2| = \begin{cases} -x-2 & \text{se } \; -x-2 \geq 0 \iff x \leq -2 \\ x+2 & \text{se } \; -x-2 \leq 0 \iff x \geq 2 \end{cases}$$

1B vera. Infatti: $|b| = \begin{cases} b & \text{se } \; b \geq 0 \\ -b & \text{se } \; b \leq 0 \end{cases}$

1C falsa. Infatti è vera $\forall x \in \mathbb{R}$ **tranne** che per $x = 1$, valore per il quale $|x^3 - 1| = 0$.

1D falsa. Poiché: $|x| = 9 \iff x = \pm 9$.

1E falsa. Infatti, se ad esempio $a = 3$ e $b = -2$, si ha $|3 + (-2)| = 1 \neq 5 = |3| + |-2|$.

2B. Risolviamo la disequazione.

$$|x-2| < 1 \quad \iff \quad -1 < x-2 < 1 \quad \iff \quad 1 < x < 3$$

Ovvero $x \in (1, 3)$ e dato che in ogni internallo ci sono infiniti valori reali l'unica risposta esatta è la **B**.

3A. Osserviamo che **l'espressione a sinistra** dei puntini presenta un segno "-" all'esterno del valore assoluto dunque **è sempre minore od uguale a zero**, mentre **l'espressione a destra**, essendo un valore assoluto, è **sempre maggiore od uguale a zero**. Quindi, al più, può valere l'uguaglianza quando entrambe assumono valore 0.
D'altra parte però l' "=" **non vale mai** poiché le due espressione si uguaglierebbero solo nel caso assumessero contemporaneamente valore zero e ciò è impossibile, infatti la prima si annulla solamente per $x = 0$, mentre la seconda per $x = -1$.
L'unica risposta corretta è dunque la **A**.

4B. Risolviamo la disequazione.

$$|3x| + 5x < 3(4 + \frac{5}{3}x) \quad \iff \quad |3x| + 5x < 12 + 5x \quad \iff$$
$$\iff \quad |3x| < 12 \quad \iff \quad -12 < 3x < 12 \quad \iff \quad -4 < x < 4$$

Ovvero $x \in (-4, 4)$. Dunque la risposta corretta è la **B**.

5D. Risolviamo la disequazione $\;3x > |x+2| - x + 1$:
Per prima cosa studiamo il segno dell'argomento del valore assoluto.

$$x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -2$$

Dunque l'equazione si trasforma nello studio dell'unione tra i seguenti due sistemi.

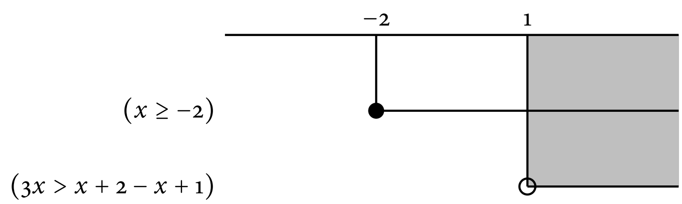
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ 3x > x + 2 - x + 1 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x < -2 \\ 3x > -x - 2 - x + 1 \end{cases}$$

Per semplicità identificheremo i due sistemi, a partire da sinistra, con le lettere **A** e **B**.
Risolviamo quindi ciascun sistema separatamente.

(A) Risolviamo $3x > x + 2 - x + 1$:

$$3x > x + 2 - x + 1 \iff 3x > +3 \iff x > 1$$

Calcoliamo quindi le intersezioni tra i risultati delle due disequazioni.



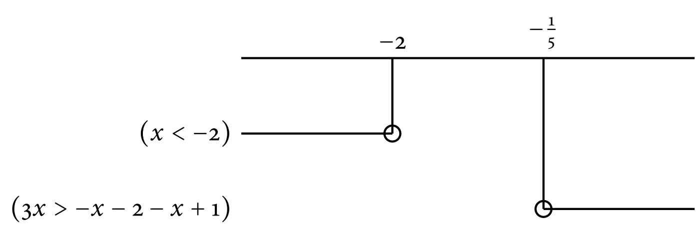
Dunque le soluzioni del sistema **A** sono:

$$\boxed{S_A = (1, +\infty)}$$

(B) Risolviamo $3x > -x - 2 - x + 1$:

$$3x > -x - 2 - x + 1 \iff 5x > -1 \iff x > -\frac{1}{5}$$

Calcoliamo quindi le intersezioni tra i risultati delle due disequazioni.



Dunque le soluzioni del sistema **B** sono:

$$\boxed{S_B = \varnothing}$$

Dunque **l'insieme delle soluzioni della disequazione** risulta:

$$\boxed{S = S_A \cup S_B = (1, +\infty) \cup \varnothing = (1, +\infty)}$$

Dunque la risposta corretta è la **D**.

6C. Osserviamo che l'espressione a primo membro, vista la presenza del valore assoluto, **è sempre strettamente positiva tranne che per** $x = 2$, dove si annulla. Dunque la risposta corretta è la **C**.

7A. É possibile risolvere la disequazione andando a studiare i segni dei valori assoluti e scomponendo poi la disequazione in un'**unione di sistemi**.
Ma, in questo caso, possiamo molto più semplicemente osservare che la somma a I membro, essendo composta da valori assoluti, è **sempre strettamente positiva tranne quando si annullano entrambi**, in questo caso ciò accade solamente[31] per $x = 0$.
Dunque l'unica risposta esatta è la **A**.

[31] Infatti $|x^2 - 5x|$ si annulla anche per $x = 5$, ma $x = 0$ è l'unico valore per cui si annulla anche $|x|$ e quindi la somma dei due valori assoluti.

Parte E

Unità 1

Unità 1

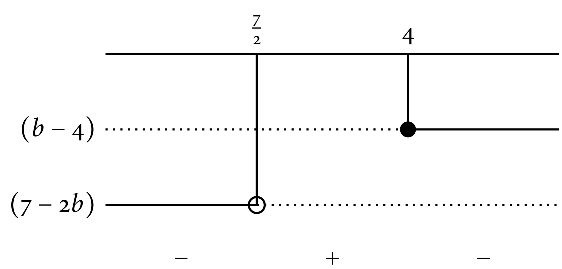
1B. Ricordando che **la base della funzione esponenziale deve essere strettamente positiva**, bisogna impostare la seguente disequazione.

$$\frac{b-4}{7-2b} > 0$$

Studiamo quindi singolarmente il segno di numeratore e denominatore.

- $b - 4 \geq 0 \iff b \geq 4$
- $7 - 2b > 0 \iff -2b > -7 \iff b < \frac{7}{2}$

Dunque:



La disequazione risulta strettamente positiva per valori di b interni all'intervallo $\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ e di conseguenza tale intervallo corrisponde ai valori che può assumere il parametro b affinché la funzione esponenziale abbia significato.

La risposta corretta è dunque la **B**.

2B. Per prima cosa osserviamo che, data la presenza di un asintoto orizzontale e dato che la parte mostrata della funzione è strettamente decrescente, potrebbe essere una funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1. Ci limitiamo quindi a considerare le funzioni delle risposte **B** e **D**. Considerando inoltre che la funzione incontra l'asse y nel punto $(0; 2)$ verifichiamo che solo la funzione della risposta B soddisfa tale requisito.

B. $y(0) = \left(\frac{2}{5}\right)^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

D. $y(0) = \left(\frac{1}{5}\right)^0 + 2 = 1 + 2 = 3 \neq 2$

Il grafico mostrato potrebbe dunque corrispondere a quello della funzione della risposta **B**: $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x + 1$.

ATTENZIONE: É importante l'uso del condizionale in questo contesto, poiché è mostrata solo parte del grafico e solo alcune caratteristiche. Dunque, sebbene tali proprietà studiate corrispondano alla funzione in oggetto, non vi è completa certezza di piena corrispondenza tra le due.

3A falsa. Infatti osserviamo che: $2^x + 32 = 0 \iff 2^x = -32$ e quest'ultima equazione è chiaramente impossibile, poiché ricordo che vale: $a^x > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ quando $a > 0$.

3B vera. Infatti: $3^x = \frac{1}{3} \iff 3^x = 3^{-1} \;\Rightarrow\; x = -1$

3C falsa. Poiché l'esponenziale $(-2)^x$ **non ha significato**, avendo la base negativa.

3D vera. Infatti non presenta la variabile ad esponente.

3E falsa. Infatti la sua risoluzione è: $5^x = (-5)^2 \iff 5^x = 5^2 \iff x = 2$.

4C. Risolviamo l'equazione.

$$4^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}} \iff 2^{2(x-1)} = 2^{\frac{x-3}{3}} \;\Rightarrow\; 2x - 2 = \frac{x-3}{3} \iff$$
$$\iff 6x - 6 = x - 3 \iff 5x = 3 \iff x = \frac{3}{5}$$

Dunque la risposta corretta è la **C**.

5C. Per prima cosa semplifichiamo l'equazione applicando le proprietà delle potenze.

$$5^x \cdot 9 - 5^{x+1} = 5^{2x+1} \cdot 4 \iff 5^x \cdot 9 - 5^x \cdot 5 = 5^{2x} \cdot 5 \cdot 4 \iff$$
$$\iff 5^x \cdot (9-5) = 5^{2x} \cdot 20 \iff 5^x \cdot 4 = 5^{2x} \cdot 20$$

A questo punto è possibile risolvere l'equazione in due modi:

1. Possiamo risolvere l'equazione attraverso l'**utilizzo di una variabile ausiliaria**.

   $5^x \cdot 4 = 5^{2x} \cdot 20$ — Chiamiamo $t = 5^x$ e di conseguenza $t^2 = 5^{2x}$. Dunque si ha:

   $4t = 20t^2 \iff 20t^2 - 4t = 0 \iff 4t(5t-1) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 4t = 0 \;\rightarrow\; t = 0 \\ 5t = 1 \;\rightarrow\; t = \frac{1}{5} \end{cases}$

   Infine quindi:

   [t=0] $\Rightarrow\; 5^x = 0$ **equazione impossibile**

   [t=$\frac{1}{5}$] $\Rightarrow\; 5^x = \frac{1}{5} \;\Rightarrow\; 5^x = 5^{-1} \;\Rightarrow\; \boxed{x}$

2. Ci possiamo ricondurre ad un'**uguaglianza tra potenze con la stessa base**; infatti:

   $5^x \cdot 4 = 5^{2x} \cdot 20$ — Dividiamo I membro e II membro per 4.

   $5^x = 5^{2x} \cdot 5$ — Possiamo quindi riportarci ad avere un uguaglianza tra due potenze di base 5 e risolvere.

   $5^x = 5^{2x+1} \;\Rightarrow\; x = 2x + 1 \;\Rightarrow\; -x = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{x = -1}$

Dunque la risposta corretta è la **C**.

6B. Risolviamo la disequazione portando le potenze ai due membri dell'equazione alla stessa base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{9}{4} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Osserviamo ora le basi sono minori di 1, dunque possiamo porre la disuguaglianza tra gli esponenti cambiando il verso:

$$x \leq -2$$

Dunque l'unica risposta corretta è la **B**.

7A. Risolviamo la disequazione.

$$\frac{1}{4} \cdot 3^x + 3^{x+1} \leq -3^{x-1} + \frac{43}{4}$$

Portiamo tutti i termini che contengono la variabile a I membro e applichiamo le proprietà delle potenze.

$$\frac{1}{4} \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x + \frac{1}{3} \cdot 3^x \leq \frac{43}{4}$$

Raccogliamo ora il termine 3^x a I membro e sommiamo i termini rimanenti.

$$\frac{43}{12} \cdot 3^x \leq \frac{43}{4}$$

Moltiplichiamo I e II membro per $\frac{12}{43}$.

$$3^x \leq \frac{\cancel{43}}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{12}^3}{\cancel{43}} \iff 3^x \leq 3$$

Osserviamo ora le basi sono maggiori di 1, dunque possiamo porre la disuguaglianza tra gli esponenti mantenendo lo stesso verso.

$$x \leq 1$$

Dunque l'unica soluzione corretta è la **A**.

Unità 2

1A. Ricordo che per determinare il dominio di una funzione logaritmica è necessario porre condizioni sulla base e sull'argomento: La base deve essere maggiore di zero e diversa da 1; l'argomento maggiore di zero.
Poiché la base assume un valore costante (la base 10 è sottintesa), l'unica condizione da porre è quella relativa all'argomento, ovvero:

$$\frac{x+1}{2x-x^2} > 0$$

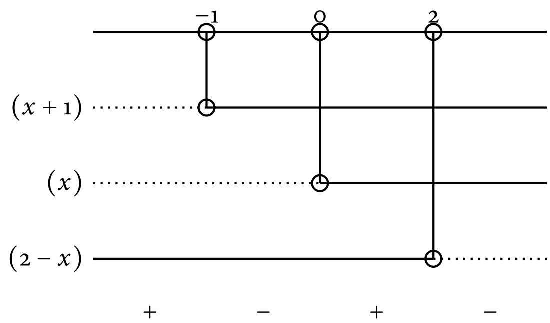
Risolviamo la disequazione fratta andando a studiare il segno della frazione algebrica. Scomponendo il polinomio al denominatore, la disequazione diventa:

$$\frac{x+1}{x(2-x)} > 0$$

Osserviamo che la frazione algebrica non può essere semplificata, quindi studiamo il segno dei singoli fattori.

- $x + 1 > 0 \implies x > -1$
- $x > 0$
- $2 - x > 0 \implies x < 2$

Studiamo quindi il segno della frazione.



Si ha quindi che la frazione algebrica è positiva per valori minori di -1 e compresi tra 0 e 2. Il dominio della funzione è pertanto: $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$

2C. Prima di tutto osserviamo che la porzione della funzione mostrata in figura è crescente, perciò, nel caso il grafico rappresenti una funzione logaritmica, la base del logaritmo deve necessariamente essere maggiore di 1. Questa osservazione permette di escludere le risposte **B** e **D**.
Ricordiamo poi che la funzione logaritmica si annulla quando l'argomento è uguale a 1. Dato che la funzione in figura si annulla in $x = -1$, l'unica funzione compatibile è quella della risposta **C**, infatti:

$$y(-1) = \log_2((-1) + 2) = \log_2 1 = 0$$

ATTENZIONE a non confondere le funzioni **A** e **C**: nella prima il termine +2 è esterno all'argomento del logaritmo ed indica una traslazione positiva delle funzione lungo l'asse y, mentre nella seconda è interno e rappresenta una traslazione negativa lungo l'asse x.

3A falsa. Poiché il dominio della prima funzione si trova risolvendo la seguente disequazione fratta.

$$\frac{x}{x+1} > 0 \implies D_1 = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

Il dominio della seconda funzione si ricava dallo studio del seguente sistema.

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \implies D_2 = (0, \infty)$$

.

3B vera. Infatti applicando la definizione di logaritmo si ha:

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = 4 \iff (\sqrt{3})^4 = 9 \iff (3^{\frac{1}{2}})^4 = 9 \iff 3^2 = 9 \iff 9 = 9$$

Dove l'ultima è un'uguaglianza vera.

3C falsa. Infatti per la definizione di logaritmo si ha:

$$\log_{27} 3 = -3 \iff 27^{-3} = 3$$

Dove la seconda è un'uguaglianza falsa.

3D falsa. Risolvendo la disequazione si ottiene infatti:

$$\log_2 (x+1) < 0 \iff \log_2 (x+1) < \log_2 1 \iff x+1 < 1 \iff x < 0$$

Tale soluzione va però confrontata con le condizioni di esistenza della disequazione, che sono $x > -1$. La soluzione è pertanto $-1 < x < 0$.

3E vera. Infatti risolvendo l'equazione si ha:

$$\log_{\frac{1}{2}} (3-x) = -2 \iff 3-x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \iff 3-x = 4 \iff x = -1$$

Tale soluzione è accettabile per le condizioni di esistenza: $3 - x > 0 \Longrightarrow x < 3$.

3F falsa. Infatti per la definizione di logaritmo la soluzione è: $x = \log_2 10 \neq 5$.

3G falsa. Applicando la proprietà della somma di logaritmi, la disequazione può essere riscritta come $\log_{\frac{1}{5}} 4x \leq 0$. Considerando poi $0 = \log_{\frac{1}{5}} 1$ e osservando che la base è compresa tra 0 e 1, passando agli argomenti si ha $4x \geq 1$ e quindi $x \geq \frac{1}{4}$.

4C. Per prima cosa determiniamo le condizioni di esistenza dell'equazione risolvendo il seguente sistema.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$

La prima equazione risulta verificata per $x < -1 \ \vee \ x > 1$, la seconda equazione invece per $x < 1$. Di conseguenza le C.E. sono: $\boxed{x < -1}$.
Risolviamo quindi l'equazione applicando le proprietà dei logaritmi.

$$\begin{aligned} \log_2 (x^2-1) = 2\log_2 3 + \log_2 (1-x) &\iff \log_2 (x^2-1) = \log_2 3^2 + \log_2 (1-x) \iff \\ &\iff \log_2 (x^2-1) = \log_2 [9 \cdot (1-x)] \iff \\ &\iff x^2 - 1 = 9 - 9x \iff \\ &\iff x^2 + 9x - 10 = 0 \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado, le soluzioni sono 1 e -10.
Osservando che la prima soluzione non è accettabile per le condizioni di esistenza, l'insieme delle soluzioni risulta $S = \{-10\}$.

5C. Per prima cosa determiniamo le condizioni di esistenza dell'equazione ponendo gli argomenti dei logaritmi maggiori di zero e assicurandoci che il logaritmo al denominatore sia non nullo.

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}} x \neq 0 \ \Rightarrow \ x \neq 1 \end{cases}$$

Le C.E. sono pertanto: $\boxed{x > 0 \wedge x \neq 1}$

Per risolvere l'equazione utilizziamo un'incognita ausiliaria: poniamo $t = \log_{\frac{1}{3}} x$.
L'equazione dunque diventa:

$$t - 3 = \frac{4}{t} \iff t^2 - 3t - 4 = 0$$

Risolvendo l'equazione nell'incognita t otteniamo come soluzioni: $t = -1$ e $t = 4$. Allora:

$$\log_{\frac{1}{3}} x = -1 \iff x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \iff x = 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = 4 \iff x = \left(\frac{1}{3}\right)^{4} \iff x = \frac{1}{81}$$

Osserviamo che entrambe le soluzioni sono accettabili per le C.E. quindi l'insieme delle soluzioni risulta: $S = \left\{3, \frac{1}{81}\right\}$.

6. Prima di tutto osserviamo che l'unica condizione di esistenza è: $\boxed{x > 0}$

Applichiamo poi la proprietà del cambiamento di base al secondo logaritmo per portarlo, come il primo, in base 3.

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{\log_3 3^2} = \frac{\log_3 x}{2}$$

Pertanto l'equazione da risolvere diventa:

$$\begin{aligned} \log_3 x + 2\log_9 x - 2 < 0 &\iff \log_3 x + \cancel{2}\frac{\log_3 x}{\cancel{2}} - 2 < 0 \iff \\ &\iff 2\log_3 x < 2 \iff \\ &\iff \log_3 x < 1 \end{aligned}$$

Ponendo $1 = \log_3 3$ e passando agli argomenti, si ottiene infine $x < 3$.

Tuttavia è necessario tenere conto delle condizioni di esistenza determinate in precedenza.
La soluzione dell'equazione logaritmica è quindi data dal seguente sistema.

$$\begin{cases} x < 3 \\ x > 0 \end{cases}$$

Ovvero l'insieme delle soluzioni della disequazione risulta: $S = (0, 3)$. Dunque l'unica risposta esatta è la **B**.